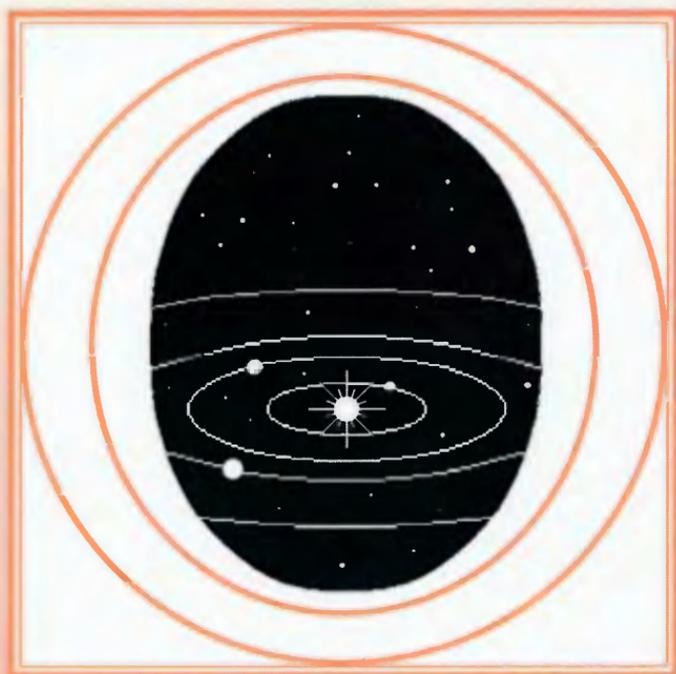


Р. П. Кузьмина

Математические модели небесной механики



Р. П. Кузьмина

Математические модели небесной механики

Издание второе, переработанное



Москва ♦ Ижевск

2018

УДК 521.1
ББК 22.21
К 893

Кузьмина Р. П.

Математические модели небесной механики. — Изд. 2-е, перераб. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2018. — 232 с.

В книге рассматриваются следующие задачи: задача о движении тел Солнечной системы, задача о свободном падении тела, задача о собственном вращении Луны. При исследовании применяются асимптотические методы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Кроме того, рассматриваются задачи теории потенциала и центральные конфигурации 4-х тел (в случае, когда одна масса мала по сравнению с остальными).

Книга предназначена специалистам по небесной механике и прикладным математикам, использующим асимптотические методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром.

ISBN 978-5-4344-0497-6

© Р. П. Кузьмина, 2018

© Ижевский институт компьютерных исследований, 2018

Оглавление

Предисловие	6
Глава 1. Лунная математическая модель Солнечной системы	
§1. Физическая модель Солнечной системы	9
§2. Построение лунной математической модели	12
§3. Введение оскулирующих элементов	19
§4. Алгоритм построения решения	24
§5. Асимптотическое решение	27
§6. Выводы главы 1	35
Глава 2. Земная математическая модель Солнечной системы	
§7. Построение земной математической модели	37
§8. Введение оскулирующих элементов	39
§9. Переход к почти регулярным переменным	41
§10. Алгоритм построения решения	49
§11. Асимптотическое решение	54
§12. О лунной математической модели	61
§13. Выводы главы 2	62
Глава 3. Свободное падение тела	
§14. Построение математической модели	65
§15. Алгоритм построения решения	70
§16. Асимптотическое решение	74
§17. Результаты численного счёта	76
§18. Выводы главы 3	80
Глава 4. Центральные конфигурации	
§19. Определение центральных конфигураций	83
§20. Известные центральные конфигурации	88
§21. Центральные конфигурации 4-х тел. Постановка задачи	91
§22. Центральные конфигурации 4-х тел, I	92
§23. Центральные конфигурации 4-х тел, II	109

§24. Центральные конфигурации 4-х тел, III	121
§25. Центральные конфигурации 4-х тел, IV	128
§26. Центральные конфигурации 4-х тел. Результаты	130
§27. Выводы главы 4	131

Глава 5. Задачи теории потенциала

§28. Обратная задача теории потенциала	133
§29. Задача о продолжении гравитационного поля	140
§30. Выводы главы 5	143

Глава 6. Собственное вращение Луны

§31. Построение математической модели	145
§32. Введение новых переменных	149
§33. Алгоритм построения решения	152
§34. Асимптотическое решение	154
§35. Выводы главы 6	157

Глава 7. От физики к математике

§36. Введение малого параметра	159
§37. Вычисление погрешностей функций	161
§38. Выводы главы 7	163

Глава 8. Определения, теоремы, вычисления

§39. Регулярно возмущённая задача Коши	165
§40. Сингулярно возмущённая задача Коши	172
§41. Почти регулярная задача Коши	173
§42. Аналитичность в лунной математической модели	177
§43. Аналитичность в земной математической модели	182
§44. Свободное падение тела. Оценка точности решения	197
§45. Собственное вращение Луны. Аналитичность в математической модели	200
§46. Собственное вращение Луны. Оценка точности решения	205
§47. Выводы главы 8	213

Об иллюстрациях и цитатах	215
Литература	228
Именной указатель	230
Предметный указатель	231

Предисловие

В книге рассматриваются некоторые задачи небесной механики.

В главах 1 и 2 исследуется движение Солнечной системы. Солнечная система рассматривается как система 11 материальных точек, имеющих параметры Солнца, Луны и планет и притягивающихся по закону всемирного тяготения (задача 11 тел). В главе 1 интервал времени движения системы имеет порядок $1/6$ периода вращения Луны вокруг Земли. В главе 2 интервал времени имеет порядок $1/6$ периода вращения Земли вокруг Солнца. В дифференциальные уравнения, описывающие задачу, вводится малый параметр. Уравнения приводятся к почти регулярной задаче Коши в обеих главах. Дается алгоритм построения решения через равномерно сходящийся ряд. Построено асимптотическое решение.

В главе 3 рассматривается движение материальной точки в поле тяготения Земли. Точное решение этой задачи известно в инерциальной системе отсчета: материальная точка движется по законам Кеплера. Вблизи поверхности Земли движение точки часто рассматривается в упрощенной постановке как движение в стационарном однородном силовом поле. В книге задача о движении точки решается с помощью перехода к регулярно возмущенной задаче Коши. При обращении малого параметра в ноль уравнения описывают движение точки в стационарном однородном силовом поле. Полная система уравнений учитывает влияние вращения Земли.

В главе 4 рассматриваются центральные конфигурации 4-х тел в случае, когда масса четвертого тела много меньше масс остальных тел.

Глава 5 посвящена обратной задаче теории потенциала и задаче о продолжении гравитационного поля. Рассматриваются некоторые вопросы некорректности этих задач в случае, когда гравитационное поле известно в конечном числе точек.

В главе 6 рассматривается задача о собственном вращении Луны в безмоментной постановке. Эта задача является задачей Эйлера – Пуансо вращения твердого тела вокруг неподвижного центра масс. Решение задачи Эйлера – Пуансо известно и выражается через эллиптические функции. В книге предложено решение с помощью перехода к почти регулярной задаче Коши. Дан алгоритм построения решения в виде равномерно сходящегося ряда. Предложенный способ может быть использован и в случае, когда учитывается момент сил, действующих на Луну со стороны других небесных тел.

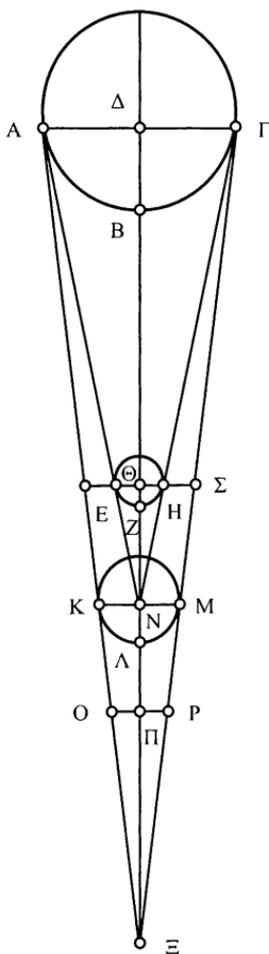
В главе 7 предлагается алгоритм введения малого параметра в физическую задачу. Этот алгоритм использован в главах 1, 2, 6. В главе 7 дана формула для вычисления погрешности функции при наличии погрешностей аргументов. Формула использована в главах 1, 2 для вычисления погрешностей асимптотических решений.

Глава 8 является вспомогательной. В ней даются необходимые сведения из теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром и делаются некоторые вычисления для предыдущих глав.

Книга предназначена специалистам по небесной механике и прикладным математикам, использующим асимптотические методы исследования обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром.

Автор благодарит проф. В. В. Александрова, проф. В. М. Алексева, проф. Н. А. Парусникова, В. Ф. Рачека, Д. И. Бугрова за помощь в работе.

Автор благодарит издательство УРСС, опубликовавшего ранее эту книгу [14].



Всем, подходящим к этой теории с любовью к истине и в духе исследования, подобает пользоваться новыми и оказавшимися более точными методами не только для исправления предположений древних, но также и для исправления собственных ошибок.

Клавдий Птолемей
(2 век н.э.)

Глава 1

Лунная математическая модель Солнечной системы

§1. Физическая модель Солнечной системы

В первых двух главах книги рассматривается следующая физическая модель Солнечной системы: одиннадцать материальных точек, имеющих характеристики Солнца, Луны и планет, притягиваются по закону всемирного тяготения. Параметры материальных точек описываются буквами с соответствующими индексами: индекс 0 относится к Солнцу, индексы 1–9 относятся к планетам (от Меркурия до Плутона), индекс 10 относится к Луне.

За численные значения гравитационной постоянной G , массы Солнца M_0 , астрономической единицы длины A , экваториального радиуса Земли a_e , суток D принимаются следующие значения [3]:

$$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}; \quad M_0 = 1,989 1 \cdot 10^{30} \text{ кг}; \quad (1.1)$$

$$A = 1,495 978 70 \cdot 10^{11} \text{ м}; \quad a_e = 6 378 140 \text{ м};$$

$$D = 86 400 \text{ с}.$$

Численные значения отношений масс тел Солнечной системы M_0/M_k , $k = \overline{1,9}$, M_{10}/M_3 приводятся в Табл. 1.1.

Движение тел Солнечной системы рассматривается в инерциальной системе отсчёта, за которую принимается система координат с координатной плоскостью XU , совпадающей с плоскостью эклиптики [1] начальной даты. За начальную дату (за начальный момент времени) принимается 5 марта 1991 г.

В Табл. 1.1 даны численные значения проекций радиус-векторов R_{k1}° , R_{k2}° , R_{k3}° и скоростей V_{k1}° , V_{k2}° , V_{k3}° планет ($k = \overline{1,9}$) и Луны ($k = 10$) на оси координат в начальный момент времени. Радиус-векторы планет R_k , $k = \overline{1,9}$, проведены от Солнца, радиус-вектор Луны R_{10} проведён от Земли. V_k – скорость k -го тела в системе координат, движущейся поступательно относительно инерциальной системы отсчёта со скоростью Солнца при $k = \overline{1,9}$ и со скоростью Земли при $k = 10$.

Таблица 1.1. Отношения масс, начальные значения проекций радиус-векторов и скоростей тел

k		$\frac{M_0}{M_k}, k = \overline{1,9}, \frac{M_{10}}{M_3}$	R_{k1}°	R_{k2}°
1	Меркурий	6 023 600	0,358 72 A	-0,039 62 A
2	Венера	408 523,5	0,413 40 A	0,591 88 A
3	Земля	332 946,0	-0,952 85 A	0,274 87 A
4	Марс	3 098 710	-0,638 74 A	1,489 97 A
5	Юпитер	1 047,355	-3,505 16 A	3,978 37 A
6	Сатурн	3 498,5	4,855 26 A	-8,722 53 A
7	Уран	22 869	3,524 32 A	-19,134 00 A
8	Нептун	19 314	7,625 66 A	-29,219 21 A
9	Плутон	3 000 000	-18,966 61 A	-21,450 32 A
10	Луна	0,0123 000 2	-50,022 20 a_e	-35,944 17 a_e

k	R_{k3}°	V_{k1}°	V_{k2}°	V_{k3}°
1	-0,036 11 A	-0,002 348 A/D	0,029 239 A/D	0,002 608 A/D
2	-0,015 72 A	-0,016 646 A/D	0,011 494 A/D	0,001 118 A/D
3	0,000 00 A	-0,005 049 A/D	-0,016 594 A/D	0,000 000 A/D
4	0,046 94 A	-0,012 327 A/D	-0,004 327 A/D	0,000 212 A/D
5	0,062 18 A	-0,005 763 A/D	-0,004 643 A/D	0,000 148 A/D
6	-0,041 75 A	0,004 568 A/D	0,002 697 A/D	-0,000 229 A/D
7	-0,116 81 A	0,003 834 A/D	0,000 527 A/D	-0,000 048 A/D
8	0,424 75 A	0,003 013 A/D	0,000 807 A/D	-0,000 086 A/D
9	7,772 48 A	0,002 502 A/D	-0,002 448 A/D	-0,000 465 A/D
10	-5,473 77 a_e	7,284 042 a_e/D	-11,352 797 a_e/D	0,122 375 a_e/D

На Рис. 1.1 изображена Солнечная система в начальный момент времени (5 марта 1991 года). Начало координат системы $X_{(0)}Y_{(0)}Z_{(0)}$ совпадает с Солнцем, начало координат системы $X_{(3)}Y_{(3)}Z_{(3)}$ совпадает с Землёй.

При исследовании движения тел Солнечной системы, кроме прямоугольных координат, используются оскулирующие элементы орбит Меркурия, Венеры, Земли, Луны: a_k – большая полуось, e_k – эксцентриситет, i_k – наклон, Ω_k – долгота восходящего узла, π_k – долгота перигелия, E_k – эксцентрическая аномалия орбиты k -го тела ($k = \overline{1,3}, 10$) [1]. В Табл. 1.2 даны начальные значения оскулирующих элементов $a_k^\circ, e_k^\circ, i_k^\circ, \Omega_k^\circ, \pi_k^\circ, E_k^\circ, k = \overline{1,3}, 10$.

Численные значения в Табл. 1.1, 1.2 получены по данным в [3].

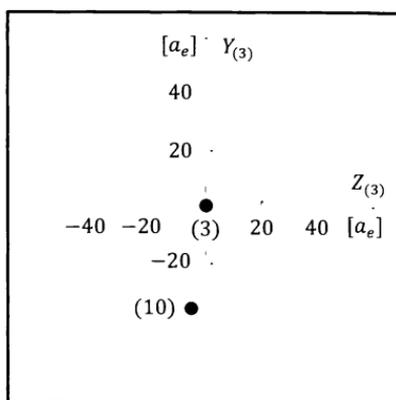
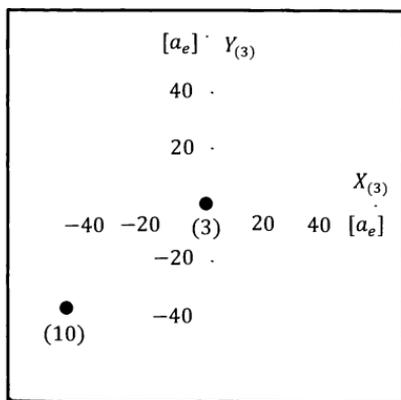
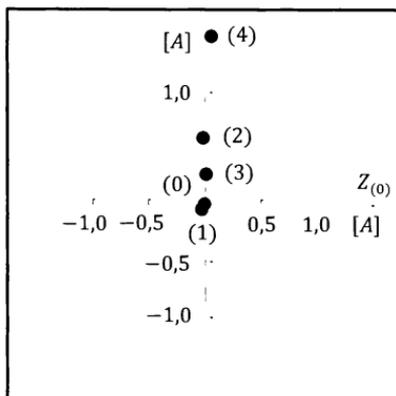
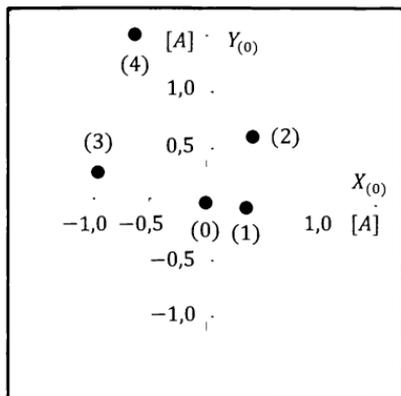
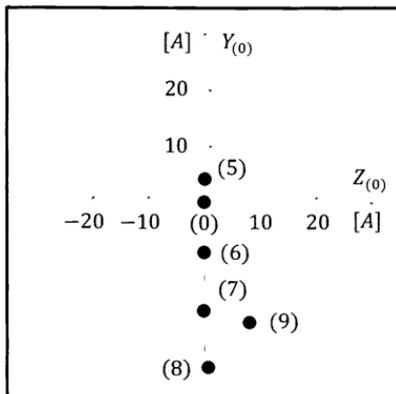
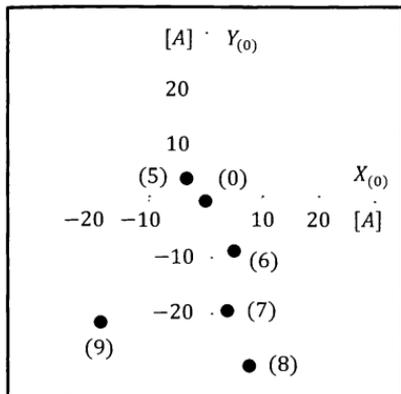


Рис. 1.1. Солнечная система 5 марта 1991 г.

Таблица 1.2. Начальные значения оскулирующих элементов орбит

k	a_k°	e_k°	i_k°
1	0,387 097 A	0,205 635 0	7°, 004 75
2	0,723 326 A	0,006 772 5	3°, 394 51
3	1,000 004 A	0,016 708 5	0°, 000 07
10	59,996 406 a_e	0,060 024 0	5°, 138 44

k	Ω_k°	π_k°	E_k°
1	48°, 226 3	77°, 321 5	287°, 842 8
2	76°, 602 4	131°, 237 6	284°, 172 5
3	0°, 000 0	102°, 839 1	60°, 234 9
10	296°, 894 1	91°, 963 3	120°, 789 9

§2. Построение лунной математической модели

2.1. Движение по законам Ньютона

Задача 2.1 (n тел). n материальных точек притягиваются по закону всемирного тяготения. Массы, начальное положение и начальные скорости точек известны. Найти движение точек (описать движение точек).

Движение Солнечной системы будем рассматривать как задачу 11 тел с массами M_0, \dots, M_{10} . Движение тел в инерциальной системе отсчёта описывается по второму закону Ньютона и закону всемирного тяготения [28]. Начальное положение и начальные скорости точек известны. Поэтому задача 11 тел сводится к решению задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2 \rho_k}{dT^2} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{10} \frac{GM_j(\rho_j - \rho_k)}{|\rho_j - \rho_k|^3}, \quad (2.1)$$

$$\rho_k|_{T=0} = \rho_k^\circ, \quad \left. \frac{d\rho_k}{dT} \right|_{T=0} = \mathbf{v}_k^\circ, \quad k = \overline{0,10}.$$

Здесь M_k , ρ_k – масса и радиус-вектор k -ой материальной точки; ρ_k° , \mathbf{v}_k° – начальные значения радиус-вектора и скорости k -ой материальной точки; T – время; G – гравитационная постоянная. Введём векторы

$$\mathbf{R}_k = \boldsymbol{\rho}_k - \boldsymbol{\rho}_0, \quad \mathbf{V}_k = \frac{d\mathbf{R}_k}{dT}, \quad k = \overline{1,9}; \quad (2.2)$$

$$\mathbf{R}_{10} = \boldsymbol{\rho}_{10} - \boldsymbol{\rho}_3, \quad \mathbf{V}_{10} = \frac{d\mathbf{R}_{10}}{dT}.$$

$\mathbf{R}_k, \mathbf{V}_k$ – радиус-вектор и скорость k -ой планеты в поступательно движущейся (относительно инерциальной системы отсчёта) системе координат с началом в Солнце, $k = \overline{1,9}$. $\mathbf{R}_{10}, \mathbf{V}_{10}$ – радиус-вектор и скорость Луны в поступательно движущейся (относительно инерциальной системы отсчёта) системе координат с началом в Земле.

Из (2.1), (2.2) получим задачу Коши для векторов $\mathbf{R}_k, \mathbf{V}_k$:

$$\frac{d\mathbf{R}_k}{dT} = \mathbf{V}_k, \quad k = \overline{1,10}; \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}_k}{dT} = & -\frac{G(M_0+M_k)\mathbf{R}_k}{|\mathbf{R}_k|^3} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^9 GM_j \left(\frac{\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k|^3} - \frac{\mathbf{R}_j}{|\mathbf{R}_j|^3} \right) + \\ & + GM_{10} \left(\frac{\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_{10} - \mathbf{R}_k}{|\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_{10} - \mathbf{R}_k|^3} - \frac{\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_{10}}{|\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_{10}|^3} \right), \quad k = \overline{1,9}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{V}_{10}}{dT} = & -\frac{G(M_3+M_{10})\mathbf{R}_{10}}{|\mathbf{R}_{10}|^3} + GM_0 \left(\frac{\mathbf{R}_3}{|\mathbf{R}_3|^3} - \frac{\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_{10}}{|\mathbf{R}_3 + \mathbf{R}_{10}|^3} \right) + \\ & + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^9 GM_j \left(\frac{\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_{10}}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_3 - \mathbf{R}_{10}|^3} - \frac{\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_3}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_3|^3} \right); \end{aligned}$$

$$\mathbf{R}_k|_{T=0} = \mathbf{R}_k^\circ, \quad \mathbf{V}_k|_{T=0} = \mathbf{V}_k^\circ, \quad k = \overline{1,10}.$$

Задача (2.3) рассматривается с численными значениями $G, M_0, M_0/M_k, M_{10}/M_3, \mathbf{R}_k^\circ, \mathbf{V}_k^\circ$, заданными в §1.

2.2. Переход к безразмерным переменным

Перейдём к безразмерным переменным $\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, t$ по формулам

$$\mathbf{R}_k = R_{k*} \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{V}_k = V_{k*} \mathbf{v}_k, \quad k = \overline{1,10}, \quad T = T_* t. \quad (2.4)$$

Здесь $\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k$ – безразмерные радиус-вектор и скорость k -го тела в поступательно движущейся системе координат (начало координат совпадает с Солнцем для $k = \overline{1,9}$ и с Землёй для $k = 10$); t – безразмерное время; R_{k*}, V_{k*} – характерные значения размерных переменных.

Подставим (2.4) в (2.3). Получим задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение Солнечной системы в безразмерных переменных:

$$\frac{dr_k}{dt} = b_k \mathbf{v}_k, \quad \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \mathbf{F}_k, \quad \mathbf{r}_k|_{t=0} = \mathbf{r}_k^{\circ}, \quad \mathbf{v}_k|_{t=0} = \mathbf{v}_k^{\circ}, \quad k = \overline{1,10}; \quad (2.5)$$

$$\mathbf{F}_1 = -b_{11} \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} + \sum_{j=2}^9 b_{1j} \left(\frac{\mathbf{r}_j - d_{1j} \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_j - d_{1j} \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right) + b_{110} \left(\frac{\mathbf{r}_3 + d_{310} \mathbf{r}_{10} - d_{13} \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_3 + d_{310} \mathbf{r}_{10} - d_{13} \mathbf{r}_1|^3} - \frac{\mathbf{r}_3 + d_{310} \mathbf{r}_{10}}{|\mathbf{r}_3 + d_{310} \mathbf{r}_{10}|^3} \right),$$

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{H}_{12} + b_{210} \left(\frac{\mathbf{r}_3 + d_{310} \mathbf{r}_{10} - d_{23} \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_3 + d_{310} \mathbf{r}_{10} - d_{23} \mathbf{r}_2|^3} - \frac{\mathbf{r}_3 + d_{310} \mathbf{r}_{10}}{|\mathbf{r}_3 + d_{310} \mathbf{r}_{10}|^3} \right),$$

$$\mathbf{F}_3 = \mathbf{H}_{13} + b_{310} \frac{\mathbf{r}_{10}}{|\mathbf{r}_{10}|^3} - c_{103} \frac{\mathbf{r}_3 + d_{310} \mathbf{r}_{10}}{|\mathbf{r}_3 + d_{310} \mathbf{r}_{10}|^3},$$

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{H}_{1k} + \mathbf{H}_{2k}, \quad k = \overline{4,7};$$

$$\mathbf{F}_8 = -b_{88} \frac{\mathbf{r}_8}{|\mathbf{r}_8|^3} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 8}}^9 \left(c_{8j} \frac{d_{j8} \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_8}{|d_{j8} \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_8|^3} - b_{8j} \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right) + \mathbf{H}_{28},$$

$$\mathbf{F}_9 = -b_{99} \frac{\mathbf{r}_9}{|\mathbf{r}_9|^3} + \sum_{j=1}^7 \left(c_{9j} \frac{d_{j9} \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_9}{|d_{j9} \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_9|^3} - b_{9j} \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right) +$$

$$+ b_{98} \left(\frac{\mathbf{r}_8 - d_{98} \mathbf{r}_9}{|\mathbf{r}_8 - d_{98} \mathbf{r}_9|^3} - \frac{\mathbf{r}_8}{|\mathbf{r}_8|^3} \right) + \mathbf{H}_{29},$$

$$\mathbf{F}_{10} = -b_{1010} \frac{\mathbf{r}_{10}}{|\mathbf{r}_{10}|^3} + \sum_{j=1}^2 b_{10j} \left(\frac{d_{j3} \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_3 - d_{310} \mathbf{r}_{10}}{|d_{j3} \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_3 - d_{310} \mathbf{r}_{10}|^3} - \frac{d_{j3} \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_3}{|d_{j3} \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_3|^3} \right) +$$

$$+ b_{103} \left(\frac{\mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_3|^3} - \frac{\mathbf{r}_3 + d_{310} \mathbf{r}_{10}}{|\mathbf{r}_3 + d_{310} \mathbf{r}_{10}|^3} \right) +$$

$$+ \sum_{j=4}^9 b_{10j} \left(\frac{\mathbf{r}_j - d_{3j} \mathbf{r}_3 - d_{j10} \mathbf{r}_{10}}{|\mathbf{r}_j - d_{3j} \mathbf{r}_3 - d_{j10} \mathbf{r}_{10}|^3} - \frac{\mathbf{r}_j - d_{3j} \mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_j - d_{3j} \mathbf{r}_3|^3} \right),$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}_{1k} &= -b_{kk} \frac{\mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_k|^3} + \sum_{j=1}^{k-1} \left(c_{kj} \frac{d_{jk} \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k}{|d_{jk} \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_k|^3} - b_{kj} \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right) + \\
&\quad + \sum_{j=k+1}^9 b_{kj} \left(\frac{\mathbf{r}_j - d_{kj} \mathbf{r}_k}{|\mathbf{r}_j - d_{kj} \mathbf{r}_k|^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{|\mathbf{r}_j|^3} \right), \quad k = \overline{2,7}; \\
\mathbf{H}_{2k} &= c_{10k} \frac{d_{3k} \mathbf{r}_3 + d_{k10} \mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_k}{|d_{3k} \mathbf{r}_3 + d_{k10} \mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_k|^3} - b_{k10} \frac{\mathbf{r}_3 + d_{310} \mathbf{r}_{10}}{|\mathbf{r}_3 + d_{310} \mathbf{r}_{10}|^3}, \quad k = \overline{4,9}.
\end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения безразмерных параметров:

$$b_k = \frac{T_* V_{k*}}{R_{k*}}, \quad k = \overline{1,10}; \quad b_{kk} = \frac{T_* G(M_0 + M_k)}{V_{k*} R_{k*}^2}, \quad k = \overline{1,9}; \quad (2.6)$$

$$b_{1010} = \frac{T_* G(M_3 + M_{10})}{V_{10*} R_{10*}^2}, \quad b_{kj} = \frac{T_* G M_j}{V_{k*} R_{j*}^2}, \quad (k = \overline{1,9}, j = \overline{1,9}, k \neq j),$$

$$(k = 10, j = \overline{4,9});$$

$$b_{k10} = \frac{T_* G M_{10}}{V_{k*} R_{10*}^2}, \quad k = \overline{1,9}, \quad k \neq 3; \quad b_{310} = \frac{T_* G M_{10}}{V_{3*} R_{10*}^2};$$

$$b_{10j} = \frac{T_* G M_j}{V_{10*} R_{j*}^2}, \quad j = 1, 2; \quad b_{103} = \frac{T_* G M_0}{V_{10*} R_{3*}^2};$$

$$c_{kj} = \frac{T_* G M_j}{V_{k*} R_{k*}^2}, \quad (k = \overline{2,8}, j = \overline{1, k-1}), \quad (k = 8, j = 9), \quad (k = 9, j = \overline{1,7});$$

$$c_{10j} = \frac{T_* G M_{10}}{V_{j*} R_{j*}^2}, \quad j = \overline{3,9};$$

$$d_{kj} = \frac{R_{k*}}{R_{j*}}, \quad (k = \overline{1,7}, j = \overline{k+1,9}), \quad (k = 9, j = 8);$$

$$d_{k10} = \frac{R_{10*}}{R_{k*}}, \quad k = \overline{3,9}; \quad \mathbf{r}_k^\circ = \frac{R_k^\circ}{R_{k*}}, \quad \mathbf{v}_k^\circ = \frac{V_k^\circ}{V_{k*}}, \quad k = \overline{1,10}.$$

2.3. Нормализация безразмерных параметров

Примем R_{k*}, V_{k*} равными значениям

$$R_k^\circ = |R_k^\circ|, \quad V_k^\circ = |V_k^\circ|,$$

Таблица 2.1

Начальные расстояния между Солнцем и планетами,
 между Землёй и Луной.
 Начальные значения модулей скоростей планет и Луны.
 Характерные значения расстояний и скоростей

k	R_k°	V_k°	R_{k*}	V_{k*}
1	0,362 71 A	0,029 449 A/D	0,37 A	0,030 A/D
2	0,722 13 A	0,020 260 A/D	0,73 A	0,021 A/D
3	0,991 71 A	0,017 345 A/D	1,0 A	0,018 A/D
4	1,621 79 A	0,013 066 A/D	1,7 A	0,014 A/D
5	5,302 58 A	0,007 402 A/D	5,4 A	0,0075 A/D
6	9,982 87 A	0,005 310 A/D	10 A	0,0054 A/D
7	19,456 21 A	0,003 870 A/D	20 A	0,0039 A/D
8	30,200 88 A	0,003 120 A/D	31 A	0,0032 A/D
9	29,669 17 A	0,003 531 A/D	30 A	0,0036 A/D
10	61,839 84 a_e	13,489 190 a_e/D	62 a_e	14 a_e/D

округлённым до второй значащей цифры в сторону увеличения. В Табл. 2.1 приведены значения R_k° , V_k° (полученные по данным Табл. 1.1) и характерные значения R_{k*} , V_{k*} . Характерное время T_* выберем так, чтобы выполнялось равенство

$$b_{10} b_{10 10} = 1.$$

Подставляя сюда выражения из (2.6), получим уравнение для T_* :

$$\frac{T_*^2 G(M_3 + M_{10})}{R_{10*}^3} = 1.$$

Отсюда $T_* = T_{10*}$, где

$$T_{10*} = \sqrt{\frac{R_{10*}^3}{G(M_3 + M_{10})}} \approx 4,5 D. \quad (2.7)$$

Численное значение T_{10*} получено по данным в формулах (1.1) и в Табл. 1.1, 2.1. За малый параметр и коэффициент нормализации примем следующие значения:

$$\varepsilon = 0,5, \quad b_* = 1,2. \quad (2.8)$$

Нормализуем числа (2.6) по ε . Получим:

$$b_k = b'_k \varepsilon^{\beta k}, \quad k = \overline{1,10}; \quad (2.9)$$

Таблица 2.2
Показатели β_{kj} , γ_{kj} , δ_{kj} в лунной модели

$k \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	22	23	27	19	23	27	28	36	29
	–	1	1	2	4	5	6	6	6	–
2	23	3	22	27	19	22	27	28	35	28
	25	–	0	1	3	4	5	5	5	–
3	23	21	4	27	18	22	27	28	35	11
	26	22	–	1	2	3	4	5	5	8
4	23	21	21	5	18	22	26	27	34	28
	27	23	23	–	1	2	3	4	4	9
5	22	20	21	25	7	21	25	26	34	27
	30	26	25	29	–	1	2	2	2	11
6	21	20	20	25	17	8	25	26	33	26
	31	27	27	30	18	–	1	1	1	12
7	21	19	20	24	16	20	10	25	33	26
	32	29	28	32	20	22	–	0	0	13
8	21	19	19	24	16	19	24	11	32	26
	33	30	29	32	21	23	25	–	32	13
9	21	19	20	24	16	20	24	25	11	26
	34	30	29	33	21	23	25	0	–	13
10	21	17	–1	22	13	17	22	23	30	0
	–	–	28	29	32	33	35	36	36	–

$$b_{kj} = b'_{kj} \varepsilon^{\beta_{kj}}, \quad k = \overline{1,10}, \quad j = \overline{1,10};$$

$$c_{kj} = c'_{kj} \varepsilon^{\gamma_{kj}}, \quad (k = \overline{2,8}, j = \overline{1, k-1}), \quad (k = 8, j = 9), \quad (k = 9, j = \overline{1,7}), \\ (k = 10, j = \overline{3,9});$$

$$d_{kj} = d'_{kj} \varepsilon^{\delta_{kj}}, \quad (k = \overline{1,7}, j = \overline{k+1,9}), \quad (k = 9, j = 8), \quad (k = \overline{3,9}, j = 10).$$

Значения показателей β_{kj} , γ_{kj} , δ_{kj} даны в Табл. 2.2: на k -ой строке и в j -ом столбце верхнее число равно β_{kj} , нижнее число равно γ_{kj} или δ_{kj}

Таблица 2.3

Показатели β_k, φ_k в формулах (2.9) и уравнениях (2.10)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β_k	1	3	3	5	7	8	10	11	11	0
φ_k	1	3	4	5	7	8	10	11	11	0

(множества (k, j) индексов для γ_{kj} и δ_{kj} не пересекаются). Значения β_k приведены в Табл. 2.3.

Таким образом, получили задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. Неизвестными являются $\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, k = \overline{1,10}$. Коэффициенты $b'_k, b'_{kj}, c'_{kj}, d'_{kj}$ и значения $\mathbf{r}_k^\circ, \mathbf{v}_k^\circ$ рассматриваются как параметры, не зависящие от t, ε .

В Табл. 2.3 приведены порядки малости уравнений (2.5):

$$\frac{dr_k}{dt} = \mathcal{O}(\varepsilon\beta_k), \quad \frac{dv_k}{dt} = \mathcal{O}(\varepsilon\varphi_k), \quad k = \overline{1,10}. \quad (2.10)$$

Определение 2.1. Уравнения (2,5), (2.9) с показателями $\beta_k, \beta_{kj}, \gamma_{kj}, \delta_{kj}$ в Табл. 2.2, 2.3 называются *лунной математической моделью* Солнечной системы.

Замечание 2.1. Если в уравнениях (2,5), (2.9) положить $\varepsilon = 0$, то получим вырожденную задачу:

$$\begin{aligned} \frac{dr_k^{(0)}}{dt} &= 0, & \frac{dv_k^{(0)}}{dt} &= 0, & \mathbf{r}_k^{(0)}(0) &= \mathbf{r}_k^\circ, & \mathbf{v}_k^{(0)}(0) &= \mathbf{v}_k^\circ, \\ \frac{dr_{10}^{(0)}}{dt} &= b'_{10} \mathbf{v}_{10}^{(0)}, & \frac{dv_{10}^{(0)}}{dt} &= -b'_{10} \frac{\mathbf{r}_{10}^{(0)}}{|\mathbf{r}_{10}^{(0)}|^3}, & \mathbf{r}_{10}^{(0)}(0) &= \mathbf{r}_{10}^\circ, & \mathbf{v}_{10}^{(0)}(0) &= \mathbf{v}_{10}^\circ, \end{aligned}$$

$k = \overline{1,9}$. Эти уравнения описывают движение планет по инерции: в нулевом приближении планеты движутся равномерно и прямолинейно.

Для Луны уравнения являются *моделью Кеплера*: Луна находится под действием силы притяжения Земли и, таким образом, в нулевом приближении движется по эллипсу вокруг Земли.

§3. Введение оскулирующих элементов

В задаче (2.10) производные от \mathbf{r}_{10} , \mathbf{v}_{10} пропорциональны 1 (нулевой степени ε). Поэтому для Луны ($k = 10$) рассмотрим новые переменные – оскулирующие элементы a_k , e_k , i_k , Ω_k , π_k , E_k , $k = 10$. Здесь a_k – большая полуось, e_k – эксцентриситет, i_k – наклон, Ω_k – долгота восходящего узла, π_k – долгота перигентра, E_k – эксцентрическая аномалия орбиты k -го тела.

3.1. Выражение декартовых координат через оскулирующие элементы

Декартовы координаты тела выражаются через оскулирующие элементы орбиты тела по следующим формулам [1]:

$$\mathbf{R}_k = a_k \left[(\cos E_k - e_k) \mathbf{h}_{k1} + \sqrt{1 - e_k^2} \sin E_k \mathbf{h}_{k2} \right], \quad (3.1)$$

$$\mathbf{V}_k = \frac{1}{1 - e_k \cos E_k} \sqrt{\frac{\mu_k}{a_k}} \left(-\sin E_k \mathbf{h}_{k1} + \sqrt{1 - e_k^2} \cos E_k \mathbf{h}_{k2} \right),$$

$$\mathbf{h}_{k1} = \begin{pmatrix} \cos(\pi_k - \Omega_k) \cos \Omega_k - \sin(\pi_k - \Omega_k) \sin \Omega_k \cos i_k \\ \cos(\pi_k - \Omega_k) \sin \Omega_k + \sin(\pi_k - \Omega_k) \cos \Omega_k \cos i_k \\ \sin(\pi_k - \Omega_k) \sin i_k \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h}_{k2} = \begin{pmatrix} -\sin(\pi_k - \Omega_k) \cos \Omega_k - \cos(\pi_k - \Omega_k) \sin \Omega_k \cos i_k \\ -\sin(\pi_k - \Omega_k) \sin \Omega_k + \cos(\pi_k - \Omega_k) \cos \Omega_k \cos i_k \\ \cos(\pi_k - \Omega_k) \sin i_k \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h}_{k3} = \begin{pmatrix} \sin \Omega_k \sin i_k \\ -\cos \Omega_k \sin i_k \\ \cos i_k \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mu_k = \mu_{10} = G(M_3 + M_{10})$, \mathbf{h}_{kj} – единичные векторы, направленные по осям системы координат, $j = 1, 2, 3$; $\mathbf{h}_{k3} = [\mathbf{h}_{k1}, \mathbf{h}_{k2}]$ – векторное произведение.

3.2. Уравнения для оскулирующих элементов

Уравнения движения k -го тела в оскулирующих элементах имеют вид [1]:

$$\frac{da_k}{dT} = \frac{2}{(1-e_k \cos E_k)} \sqrt{\frac{a_k^3}{\mu_k}} \left[-\sin E_k (\delta \mathcal{F}_k, \mathbf{h}_{k1}) + \right. \\ \left. + \sqrt{1-e_k^2} \cos E_k (\delta \mathcal{F}_k, \mathbf{h}_{k2}) \right], \quad (3.2)$$

$$\frac{de_k}{dT} = \frac{1}{(1-e_k \cos E_k)} \sqrt{\frac{a_k(1-e_k^2)}{\mu_k}} \left[-\sin E_k \cos E_k \sqrt{1-e_k^2} (\delta \mathcal{F}_k, \mathbf{h}_{k1}) + \right. \\ \left. + (1 + \cos^2 E_k - 2e_k \cos E_k) (\delta \mathcal{F}_k, \mathbf{h}_{k2}) \right],$$

$$\frac{di_k}{dT} = \sqrt{\frac{a_k}{\mu_k(1-e_k^2)}} \left[(\cos E_k - e_k) \cos(\pi_k - \Omega_k) - \right. \\ \left. - \sqrt{1-e_k^2} \sin E_k \sin(\pi_k - \Omega_k) \right] (\delta \mathcal{F}_k, \mathbf{h}_{k3}),$$

$$\frac{d\Omega_k}{dT} = \frac{1}{\sin i_k} \sqrt{\frac{a_k}{\mu_k(1-e_k^2)}} \left[\sin E_k \cos(\pi_k - \Omega_k) \sqrt{1-e_k^2} + \right. \\ \left. + (\cos E_k - e_k) \sin(\pi_k - \Omega_k) \right] (\delta \mathcal{F}_k, \mathbf{h}_{k3}),$$

$$\frac{d\pi_k}{dT} = \frac{1}{e_k(1-e_k \cos E_k)} \sqrt{\frac{a_k}{\mu_k}} \times \\ \times \left[(-2 + \cos^2 E_k + e_k \cos E_k) \sqrt{1-e_k^2} (\delta \mathcal{F}_k, \mathbf{h}_{k1}) + \right. \\ \left. + (\cos E_k - e_k) \sin E_k (\delta \mathcal{F}_k, \mathbf{h}_{k2}) \right] + \\ + \operatorname{tg}(i_k/2) \sqrt{\frac{a_k}{\mu_k(1-e_k^2)}} \left[\sin E_k \cos(\pi_k - \Omega_k) \sqrt{1-e_k^2} + \right. \\ \left. + (\cos E_k - e_k) \sin(\pi_k - \Omega_k) \right] (\delta \mathcal{F}_k, \mathbf{h}_{k3}),$$

$$\frac{dE_k}{dT} = \frac{1}{1-e_k \cos E_k} \sqrt{\frac{\mu_k}{a_k^3}} + \frac{1}{e_k(1-e_k \cos E_k)} \sqrt{\frac{a_k}{\mu_k}} \times$$

$$\times [(2 - \cos^2 E_k - 2e_k \cos E_k + e_k^2 \cos^2 E_k)(\delta \mathcal{F}_k, \mathbf{h}_{k1}) - \sqrt{1 - e_k^2} \sin E_k \cos E_k (\delta \mathcal{F}_k, \mathbf{h}_{k2})],$$

$$a_k|_{T=0} = a_k^\circ, \quad e_k|_{T=0} = e_k^\circ, \quad i_k|_{T=0} = i_k^\circ,$$

$$\Omega_k|_{T=0} = \Omega_k^\circ, \quad \pi_k|_{T=0} = \pi_k^\circ, \quad E_k|_{T=0} = E_k^\circ.$$

Здесь $\delta \mathcal{F}_k$ обозначена правая часть уравнения (2.3) без первого слагаемого (левая часть этого уравнения равна $d\mathbf{V}_k/dT$). В рассматриваемом случае $k = 10$.

3.3. Уравнения для нормализованных оскулирующих элементов

Перейдём к безразмерным переменным ξ_{kj} , $j = \overline{1,6}$, нормализуя оскулирующие элементы:

$$a_k = a_{k*} \xi_{k1}, \quad e_k = e_{k*} \xi_{k2}, \quad i_k = i_{k*} \xi_{k3}, \quad (3.3)$$

$$\Omega_k = \Omega_{k*} \xi_{k4}, \quad \pi_k = \pi_{k*} \xi_{k5}, \quad E_k = E_{k*} \xi_{k6}.$$

Определение 3.1. Переменные ξ_{kj} , $j = \overline{1,6}$, называются *нормализованными оскулирующими элементами орбиты k -го тела*.

Заменим в уравнениях (3.2) оскулирующие элементы на переменные ξ_{kj} по формулам (3.3), заменим радиус-векторы \mathbf{R}_k на безразмерные радиус-векторы \mathbf{r}_k и время T на безразмерное время t по формулам (2.4). Получим уравнения движения k -го тела в нормализованных оскулирующих элементах:

$$\frac{d\xi_{kj}}{dt} = (\delta \mathbf{F}_k, \mathbf{J}_{kj}), \quad j = \overline{1,5}; \quad \frac{d\xi_{k6}}{dt} = \frac{q_{k7}}{(1 - e_k \cos E_k) \sqrt{\xi_{k1}^3}} + (\delta \mathbf{F}_k, \mathbf{J}_{k6}), \quad (3.4)$$

$$\xi_{kj}|_{t=0} = \xi_{kj}^\circ, \quad j = \overline{1,6}.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\mathbf{J}_{k1} = \frac{q_{k1} \sqrt{\xi_{k1}^3}}{1 - e_k \cos E_k} \left(-\sin E_k \mathbf{h}_{k1} + \sqrt{1 - e_k^2} \cos E_k \mathbf{h}_{k2} \right), \quad (3.5)$$

Таблица 3.1. Характерные значения оскулирующих элементов

a_{10*}	e_{10*}	i_{10*}	Ω_{10*}	π_{10*}	E_{10*}
60 a_e	0,061	0,090	5,2	1,7	2,2

$$J_{k2} = q_{k2} \frac{\sqrt{\xi_{k1}(1-e_k^2)}}{1-e_k \cos E_k} \left[-\sin E_k \cos E_k \sqrt{1-e_k^2} \mathbf{h}_{k1} + \right. \\ \left. + (1 + \cos^2 E_k - 2e_k \cos E_k) \mathbf{h}_{k2} \right],$$

$$J_{k3} = q_{k3} \sqrt{\frac{\xi_{k1}}{1-e_k^2}} \left[(\cos E_k - e_k) \cos(\pi_k - \Omega_k) - \right. \\ \left. - \sqrt{1-e_k^2} \sin E_k \sin(\pi_k - \Omega_k) \right] \mathbf{h}_{k3},$$

$$J_{k4} = \frac{q_{k4} i_k}{\xi_{k3} \sin i_k} \sqrt{\frac{\xi_{k1}}{1-e_k^2}} \left[\sin E_k \cos(\pi_k - \Omega_k) \sqrt{1-e_k^2} + \right. \\ \left. + (\cos E_k - e_k) \sin(\pi_k - \Omega_k) \right] \mathbf{h}_{k3},$$

$$J_{k5} = \frac{q_{k5} \sqrt{\xi_{k1}}}{\xi_{k2} (1-e_k \cos E_k)} \left[(-2 + \cos^2 E_k + e_k \cos E_k) \sqrt{1-e_k^2} \mathbf{h}_{k1} + \right. \\ \left. + (\cos E_k - e_k) \sin E_k \mathbf{h}_{k2} \right] + \\ + \frac{2q_{k6} \xi_{k3}}{i_k} \operatorname{tg} \left(\frac{i_k}{2} \right) \sqrt{\frac{\xi_{k1}}{1-e_k^2}} \left[\sin E_k \cos(\pi_k - \Omega_k) \sqrt{1-e_k^2} + \right. \\ \left. + (\cos E_k - e_k) \sin(\pi_k - \Omega_k) \right] \mathbf{h}_{k3},$$

$$J_{k6} = \frac{q_{k8} \sqrt{\xi_{k1}}}{\xi_{k2} (1-e_k \cos E_k)} \left[(2 - \cos^2 E_k - 2e_k \cos E_k + e_k^2 \cos^2 E_k) \mathbf{h}_{k1} - \right. \\ \left. - \sqrt{1-e_k^2} \sin E_k \cos E_k \mathbf{h}_{k2} \right],$$

$$\mathbf{r}_k = q_{k9} \xi_{k1} \left[(\cos E_k - e_k) \mathbf{h}_{k1} + \sqrt{1-e_k^2} \sin E_k \mathbf{h}_{k2} \right],$$

$$q_{k1} = 2V_{k*} \sqrt{\frac{a_{k*}}{\mu_k}}, \quad q_{k2} = \frac{V_{k*}}{e_{k*}} \sqrt{\frac{a_{k*}}{\mu_k}}, \quad q_{k3} = \frac{V_{k*}}{i_{k*}} \sqrt{\frac{a_{k*}}{\mu_k}},$$

Таблица 3.2. Показатели κ_{10j} в формулах (3.6) для q_{10j}

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
κ_{10j}	-1	-4	-4	-1	-4	5	1	-3	0

$$\begin{aligned}
 q_{k4} &= \frac{V_{k*}}{i_{k*}\Omega_{k*}} \sqrt{\frac{a_{k*}}{\mu_k}}, & q_{k5} &= \frac{V_{k*}}{e_{k*}\pi_{k*}} \sqrt{\frac{a_{k*}}{\mu_k}}, & q_{k6} &= \frac{V_{k*}i_{k*}}{2\pi_{k*}} \sqrt{\frac{a_{k*}}{\mu_k}}, \\
 q_{k7} &= \frac{T_*}{E_{k*}} \sqrt{\frac{\mu_k}{a_{k*}^3}}, & q_{k8} &= \frac{V_{k*}}{e_{k*}E_{k*}} \sqrt{\frac{a_{k*}}{\mu_k}}, & q_{k9} &= \frac{a_{k*}}{R_{k*}}, \\
 \xi_{k1}^\circ &= \frac{a_k^\circ}{a_{k*}}, & \xi_{k2}^\circ &= \frac{e_k^\circ}{e_{k*}}, & \xi_{k3}^\circ &= \frac{i_k^\circ}{i_{k*}}, & \xi_{k4}^\circ &= \frac{\Omega_k^\circ}{\Omega_{k*}}, \\
 \xi_{k5}^\circ &= \frac{\pi_k^\circ}{\pi_{k*}}, & \xi_{k6}^\circ &= \frac{E_k^\circ}{E_{k*}}, & \delta F_k &= F_k + b'_{kk} \varepsilon^{\beta_{kk}} \frac{r_k}{|r_k|^3}.
 \end{aligned}$$

Здесь F_k – функции (2.5) с коэффициентами (2.9) и показателями в Табл. 2.2, \mathbf{h}_{k1} , \mathbf{h}_{k2} , \mathbf{h}_{k3} – единичные векторы из (3.1), $\mu_k = \mu_{10} = G(M_3 + M_{10})$, $k = 10$. Отметим, что $\delta F_k = T_* \cdot \delta \mathcal{F}_k / V_{k*}$.

3.4. Характерные значения оскулирующих элементов

Переведём начальные значения, данные в Табл. 1.2 в градусной мере, в меру радианную. Далее округлим эти значения и начальные значения a_{10}° , e_{10}° из Табл. 1.2 до второй значащей цифры в сторону увеличения. Полученные числа присвоим характерным значениям оскулирующих элементов. Эти значения приведены в Табл. 3.1.

3.5. Нормализация безразмерных параметров

Нормализуем безразмерные параметры в формулах (3.3) и уравнениях (3.4) по малому параметру (2.8) с коэффициентом нормализации (2.8). Получим:

$$e_{10*} = e'_{10*} \varepsilon^4, \quad i_{10*} = i'_{10*} \varepsilon^3, \quad \Omega_{10*} = \Omega'_{10*} \varepsilon^{-3}, \quad \pi_{10*} = \pi'_{10*} \varepsilon^{-1}, \quad (3.6)$$

$$E_{10*} = E'_{10*} \varepsilon^{-1}, \quad q_{kj} = q'_{kj} \varepsilon^{\alpha_{kj}}, \quad k = 10, \quad j = \overline{1,9}.$$

Показатели κ_{10j} даны в Табл. 3.2. Параметры ξ_{kj}° и параметры со штрихами рассматриваются как числа, не зависящие от t , ε .

Таблица 3.3. Показатели σ_{10j} , χ_{10j} , $\delta\varphi_{10}$ в формулах (3.7)

j	σ_{10j}						χ_{10j}						$\delta\varphi_{10}$
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
	6	3	3	6	3	1	-1	-4	-4	-1	-4	-3	7

3.6. О порядке малости производных

Уравнения (2.5) для $k = \overline{1,9}$ и уравнения (3.4) для $k = 10$ описывают движение Солнечной системы в переменных \mathbf{r}_k , \mathbf{v}_k , ξ_{10j} , $k = \overline{1,9}$, $j = \overline{1,6}$. Производные и векторы имеют следующие порядки малости:

$$\frac{d\xi_{10j}}{dt} = O(\varepsilon^{\sigma_{10j}}), \quad J_{10j} = O(\varepsilon^{\chi_{10j}}), \quad \delta F_{10} = O(\varepsilon^{\delta\varphi_{10}}), \quad j = \overline{1,6}. \quad (3.7)$$

Показатели σ_{10j} , χ_{10j} , $\delta\varphi_{10}$ даны в Табл. 3.3. Порядок малости производных для $k = \overline{1,9}$ дан в (2.10).

§4. Алгоритм построения решения

4.1. Переход к почти регулярной задаче Коши

Перейдём от уравнений (2.5), (3.4) к задаче Коши с нулевыми начальными значениями. Для этого введём переменные η_{kj} :

$$\eta_{kj} = \mathbf{r}_{kj} - \mathbf{r}_{kj}^{\circ}, \quad \eta_{kj+3} = \mathbf{v}_{kj} - \mathbf{v}_{kj}^{\circ}, \quad k = \overline{1,9}, \quad j = \overline{1,3}; \quad (4.1)$$

$$\eta_{101} = \varepsilon^{-1}(\xi_{101} - \xi_{101}^{\circ}), \quad \eta_{10j} = \xi_{10j} - \xi_{10j}^{\circ}, \quad j = 2, 3;$$

$$\eta_{104} = \Omega_{10} - \Omega_{10}^{\circ}, \quad \eta_{105} = \pi_{10} - \pi_{10}^{\circ}, \quad \eta_{106} = E_{10} - \hat{E}_{10}.$$

$$\hat{E}_{10} = E_{10}^{\circ} + \omega_{10}t, \quad \omega_{10} = \frac{E_{10} \cdot q_{107}}{(\xi_{101}^{\circ})^{3/2}} = \omega'_{10} \sim 1.$$

Исходные переменные задачи 11 тел выражаются через η_{kj} по формулам:

$$\mathbf{R}_k = R_{k*} \mathbf{r}_k = R_{k*} (\mathbf{r}_{k1}^{\circ} + \eta_{k1}, \mathbf{r}_{k2}^{\circ} + \eta_{k2}, \mathbf{r}_{k3}^{\circ} + \eta_{k3}), \quad (4.2)$$

$$\mathbf{V}_k = V_{k*} \mathbf{v}_k = V_{k*} (\mathbf{v}_{k1}^{\circ} + \eta_{k4}, \mathbf{v}_{k2}^{\circ} + \eta_{k5}, \mathbf{v}_{k3}^{\circ} + \eta_{k6}), \quad k = \overline{1,9},$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{10} &= R_{10} \cdot \mathbf{r}_{10} = \\
 &= R_{10} \cdot q_{10} \cdot \xi_{101} \left[(\cos E_{10} - e_{10}) \mathbf{h}_{101} + \sqrt{1 - e_{10}^2} \sin E_{10} \mathbf{h}_{102} \right], \\
 \mathbf{V}_{10} &= \frac{1}{1 - e_{10} \cos E_{10}} \sqrt{\frac{\mu_{10}}{a_{10}}} \left(-\sin E_{10} \mathbf{h}_{101} + \sqrt{1 - e_{10}^2} \cos E_{10} \mathbf{h}_{102} \right), \\
 a_{10} &= a_{10} \cdot \xi_{101} = a_{10} \cdot (\xi_{101}^{\circ} + \varepsilon \eta_{101}), \\
 e_{10} &= e_{10} \cdot \xi_{102} = e_{10} \cdot (\xi_{102}^{\circ} + \eta_{102}), \\
 i_{10} &= i_{10} \cdot \xi_{103} = i_{10} \cdot (\xi_{103}^{\circ} + \eta_{103}), \quad \Omega_{10} = \Omega_{10}^{\circ} + \eta_{104}, \\
 \pi_{10} &= \pi_{10}^{\circ} + \eta_{105}, \quad E_{10} = \hat{E}_{10} + \eta_{106}.
 \end{aligned}$$

Уравнения для η_{kj} следуют из (2.5), (3.4), (4.1):

$$\frac{d\eta_{kj}}{dt} = b_k (v_{kj}^{\circ} + \eta_{kj+3}), \quad \frac{d\eta_{kj+3}}{dt} = F_{kj}, \quad k = \overline{1,9}, \quad j = \overline{1,3}; \quad (4.3)$$

$$\frac{d\eta_{101}}{dt} = \varepsilon^{-1} (\delta \mathbf{F}_{10}, \mathbf{J}_{101}) \sim \varepsilon^5, \quad \frac{d\eta_{10j}}{dt} = (\delta \mathbf{F}_{10}, \mathbf{J}_{10j}) \sim \varepsilon^3, \quad j = 2, 3;$$

$$\frac{d\eta_{104}}{dt} = \Omega_{10} \cdot (\delta \mathbf{F}_{10}, \mathbf{J}_{104}) \sim \varepsilon^3, \quad \frac{d\eta_{105}}{dt} = \pi_{10} \cdot (\delta \mathbf{F}_{10}, \mathbf{J}_{105}) \sim \varepsilon^2,$$

$$\frac{d\eta_{106}}{dt} = \frac{E_{10} \cdot q_{107}}{(1 - e_{10} \cos E_{10}) \xi_{101}^{3/2}} - \frac{E_{10} \cdot q_{107}}{(\xi_{101}^{\circ})^{3/2}} + E_{10} \cdot (\delta \mathbf{F}_{10}, \mathbf{J}_{106}) \sim \varepsilon;$$

$$\eta_{kj} \Big|_{t=0} = 0, \quad k = \overline{1,10}, \quad j = \overline{1,6}.$$

В (4.2), (4.3) F_{kj} – компоненты векторов \mathbf{F}_k в (2.5); \mathbf{J}_{10j} – векторы (3.5); \mathbf{h}_{101} , \mathbf{h}_{102} – векторы (3.1); b_k , q_{10j} – степенные функции ε в (2.9), (3.6);

$$\delta \mathbf{F}_{10} = \mathbf{F}_{10} + b_{1010} \frac{\mathbf{r}_{10}}{|\mathbf{r}_{10}|^3}, \quad \mu_{10} = G(M_3 + M_{10}).$$

Постоянные величины в уравнениях нормализованы по малому параметру ε , как указано в §2, §3. Параметры со штрихами и начальные значения \mathbf{r}_k° , \mathbf{v}_k° , ξ_{kj}° рассматриваются как параметры, не зависящие от t , ε .

4.2. Применение теорем о почти регулярной задаче Коши

Утверждение 4.1. *Лунная математическая модель эквивалентна почти регулярной задаче Коши*

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \varepsilon, f(t, \varepsilon)), \quad x|_{t=0} = 0 \quad (4.4)$$

на множестве

$$x \in \mathbf{C}^{60}, \quad \|x\| \leq \delta, \quad \varepsilon \in \mathbf{C}, \quad |\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon} = 0,501, \quad f \in D_f,$$

$$D_f = \{f: f_{10j}^2 + f_{10j+1}^2 = 1; j = 1, 3, 5\} \subset \mathbf{R}^6.$$

Здесь δ – положительная постоянная,

$$x = (\eta_{kj}, k = \overline{1,10}, j = \overline{1,6}), \quad f = (f_{10j}, j = \overline{1,6}),$$

$$f_{101} = \cos \Omega_{10}, \quad f_{102} = \sin \Omega_{10}, \quad f_{103} = \cos \pi_{10},$$

$$f_{104} = \sin \pi_{10}, \quad f_{105} = \cos E_{10}, \quad f_{106} = \sin E_{10}.$$

(4.4) – компактная запись задачи (4.3). Все правые части уравнений (4.4) пропорциональны положительным степеням ε . Переменные Ω_{10} , π_{10} , E_{10} входят в уравнения в качестве аргументов косинусов и синусов. Поэтому используются формулы:

$$\cos \Omega_{10} = f_{101} \cos \eta_{104} - f_{102} \sin \eta_{104}, \quad (4.5)$$

$$\sin \Omega_{10} = f_{102} \cos \eta_{104} + f_{101} \sin \eta_{104},$$

$$\cos \pi_{10} = f_{103} \cos \eta_{105} - f_{104} \sin \eta_{105},$$

$$\sin \pi_{10} = f_{104} \cos \eta_{105} + f_{103} \sin \eta_{105},$$

$$\cos E_{10} = f_{105} \cos \eta_{106} - f_{106} \sin \eta_{106},$$

$$\sin E_{10} = f_{106} \cos \eta_{106} + f_{105} \sin \eta_{106}.$$

Утверждение 4.1 следует из Результата 42.1. Для построения решения задачи (4.4) рассматривается вспомогательная задача с двумя малыми параметрами ε и μ :

$$\frac{dy}{dt} = F(y, \varepsilon, f(t, \mu)), \quad y|_{t=0} = 0. \quad (4.6)$$

Решение задачи (4.6) строится в виде ряда Пуанкаре

$$y(t, \varepsilon) = \sum_{K=0}^{\infty} y^{(K)}(t, \mu) \varepsilon^K.$$

Решение задачи (4.4) имеет вид:

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{K=0}^{\infty} y^{(K)}(t, \varepsilon) \varepsilon^K. \quad (4.7)$$

Задача (4.4) удовлетворяет условиям Теорем 41.1, 41.3 при любых значениях $\bar{t} > 0$, $n \geq 0$, некотором значении $\delta > 0$ и $\bar{\varepsilon} = 0,501$. Это следует из Результата 42.1. Постоянная ε_* в Теоремах 41.1, 41.3 не определена, поэтому на основании этих теорем нельзя утверждать о существовании решения лунной математической модели при $\varepsilon = 0,5$.

Задача (4.4) удовлетворяет условиям Теоремы 41.2 при любом значении $\bar{t} > 0$, некотором значении $\delta > 0$ и $\bar{\varepsilon} = 0,501$ (смотрите Результат 42.1). По этой теореме при $\varepsilon = 0,5$ существует такая постоянная $t_* > 0$, что на множестве $0 \leq t \leq t_*$: 1) решение задачи (4.4) существует и единственно, 2) ряд (4.7) сходится равномерно к решению задачи (4.4). Переходя к размерным переменным, получаем следующий результат.

Результат 4.1. Решение лунной математической модели существует и единственно на ненулевом отрезке $0 \leq T \leq \bar{T}$. Решение описывается формулами (4.2), где вектор $x = (\eta_{kj})$ представим в виде ряда (4.7), равномерно сходящегося на $0 \leq T \leq \bar{T}$.

§5. Асимптотическое решение

5.1. Предварительные вычисления

Рассмотрим задачу

$$\frac{dr_k}{dt} = b'_k \varepsilon^{\beta_k} v_k, \quad \frac{dv_k}{dt} = -b'_{kk} \varepsilon^{\beta_{kk}} \frac{r_k}{|r_k|^3} + \mathcal{O}(\varepsilon^{\delta \varphi_k}), \quad (5.1)$$

$$r_k(0, \varepsilon) = r_k^o + \mathcal{O}(\varepsilon^{\delta \rho_k}), \quad v_k(0, \varepsilon) = v_k^o + \mathcal{O}(\varepsilon^{\delta v_k}).$$

Решение этой задачи может быть получено в виде многочлена от ε следующего вида:

$$\mathbf{r}_k = \sum_{K=0}^{n_k} t^K \mathbf{p}_{kK} + \mathbf{O}(\varepsilon^{\delta_k}),$$

$$\mathbf{v}_k = \sum_{K=0}^{n_k-1} \frac{(K+1)t^K}{b'_k \varepsilon^{\beta_k}} \mathbf{p}_{kK+1} + \mathbf{O}(\varepsilon^{\delta_k - \beta_k}).$$

Коэффициенты \mathbf{p}_{kK} вычисляются последовательно по формулам:

$$\mathbf{p}_{k0} = \mathbf{r}_k^\circ, \quad \mathbf{p}_{k1} = b'_k \varepsilon^{\beta_k} \mathbf{v}_k^\circ,$$

$$\mathbf{p}_{kK} = -\frac{b'_k b'_{kk} \varepsilon^{\beta_k + \beta_{kk}}}{K!} \left[\frac{d^{K-2}}{dt^{K-2}} \left(\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) \right]_{t=0}, \quad \mathbf{r} = \sum_{j=0}^{K-2} t^j \mathbf{p}_{kj}, \quad K = \overline{2, n_k}.$$

При $K = \overline{1, 5}$ имеем:

$$\mathbf{p}_{k0} = \mathbf{r}_k^\circ, \quad \mathbf{p}_{k1} = b'_k \varepsilon^{\beta_k} \mathbf{v}_k^\circ,$$

$$\mathbf{p}_{k2} = -b'_k b'_{kk} \varepsilon^{\beta_k + \beta_{kk}} \frac{\mathbf{r}_k^\circ}{2 |\mathbf{r}_k^\circ|^3},$$

$$\mathbf{p}_{k3} = -b'_k b'_{kk} \varepsilon^{\beta_k + \beta_{kk}} \left[\frac{\mathbf{p}_{k1}}{6 |\mathbf{r}_k^\circ|^3} - \frac{\mathbf{r}_k^\circ (\mathbf{r}_k^\circ \mathbf{p}_{k1})}{2 |\mathbf{r}_k^\circ|^5} \right],$$

$$\mathbf{p}_{k4} = -b'_k b'_{kk} \varepsilon^{\beta_k + \beta_{kk}} \left[\frac{\mathbf{p}_{k2}}{12 |\mathbf{r}_k^\circ|^3} - \frac{2\mathbf{p}_{k1} (\mathbf{r}_k^\circ \mathbf{p}_{k1}) + \mathbf{r}_k^\circ |\mathbf{p}_{k1}|^2}{8 |\mathbf{r}_k^\circ|^5} - \frac{\mathbf{r}_k^\circ (\mathbf{r}_k^\circ \mathbf{p}_{k2})}{4 |\mathbf{r}_k^\circ|^5} + \frac{5\mathbf{r}_k^\circ (\mathbf{r}_k^\circ \mathbf{p}_{k1})^2}{8 |\mathbf{r}_k^\circ|^7} \right],$$

$$\mathbf{p}_{k5} = -b'_k b'_{kk} \varepsilon^{\beta_k + \beta_{kk}} \left[\frac{\mathbf{p}_{k3}}{20 |\mathbf{r}_k^\circ|^3} - \frac{6\mathbf{p}_{k2} (\mathbf{r}_k^\circ \mathbf{p}_{k1}) + 3\mathbf{p}_{k1} |\mathbf{p}_{k1}|^2}{40 |\mathbf{r}_k^\circ|^5} - \frac{3\mathbf{p}_{k1} (\mathbf{r}_k^\circ \mathbf{p}_{k2}) + 3\mathbf{r}_k^\circ (\mathbf{p}_{k1} \mathbf{p}_{k2}) + 3\mathbf{r}_k^\circ (\mathbf{r}_k^\circ \mathbf{p}_{k3})}{20 |\mathbf{r}_k^\circ|^5} + \frac{3\mathbf{p}_{k1} (\mathbf{r}_k^\circ \mathbf{p}_{k1})^2 + 3\mathbf{r}_k^\circ |\mathbf{p}_{k1}|^2 (\mathbf{r}_k^\circ \mathbf{p}_{k1})}{8 |\mathbf{r}_k^\circ|^7} + \right.$$

$$\left. + \frac{3r_k^\circ (r_k^\circ p_{k1})(r_k^\circ p_{k2})}{4 |r_k^\circ|^7} - \frac{7r_k^\circ (r_k^\circ p_{k1})^3}{8 |r_k^\circ|^9} \right],$$

В размерных переменных задача (5.1) и её решение имеют вид:

$$\frac{dR_k}{dT} = V_k, \quad \frac{dV_k}{dT} = -\frac{G(M_0+M_k)R_k}{|R_k|^3} + \frac{V_{k*}}{T_*} \mathbf{O}(\varepsilon^{\delta\varphi_k}),$$

$$R_k|_{T=0} = R_k^\circ + R_{k*} \mathbf{O}(\varepsilon^{\delta\rho_k}), \quad V_k|_{T=0} = V_k^\circ + V_{k*} \mathbf{O}(\varepsilon^{\delta\nu_k}),$$

$$R_k = \sum_{K=0}^{n_k} T^K P_{kK} + R_{k*} \mathbf{O}(\varepsilon^{\delta k}),$$

$$V_k = \sum_{K=0}^{n_k-1} (K+1) T^K P_{kK+1} + V_{k*} \mathbf{O}(\varepsilon^{\delta k - \beta_k}).$$

Коэффициенты P_{kK} при $K = \overline{1,5}$ вычисляются по формулам:

$$P_{k0} = R_k^\circ, \quad P_{k1} = V_k^\circ, \quad (5.2)$$

$$P_{k2} = -G(M_0 + M_k) \frac{R_k^\circ}{2 |R_k^\circ|^3},$$

$$P_{k3} = -G(M_0 + M_k) \left[\frac{V_k^\circ}{6 |R_k^\circ|^3} - \frac{R_k^\circ (R_k^\circ V_k^\circ)}{2 |R_k^\circ|^5} \right],$$

$$P_{k4} = -G(M_0 + M_k) \left[\frac{P_{k2}}{12 |R_k^\circ|^3} - \frac{2V_k^\circ (R_k^\circ V_k^\circ) + R_k^\circ |V_k^\circ|^2}{8 |R_k^\circ|^5} - \frac{R_k^\circ (R_k^\circ P_{k2})}{4 |R_k^\circ|^5} + \frac{5R_k^\circ (R_k^\circ V_k^\circ)^2}{8 |R_k^\circ|^7} \right],$$

$$P_{k5} = -G(M_0 + M_k) \left[\frac{P_{k3}}{20 |R_k^\circ|^3} - \frac{6P_{k2} (R_k^\circ V_k^\circ) + 3V_k^\circ |V_k^\circ|^2}{40 |R_k^\circ|^5} - \frac{3V_k^\circ (R_k^\circ P_{k2}) + 3R_k^\circ (V_k^\circ P_{k2}) + 3R_k^\circ (R_k^\circ P_{k3})}{20 |R_k^\circ|^5} + \frac{3V_k^\circ (R_k^\circ V_k^\circ)^2 + 3R_k^\circ |V_k^\circ|^2 (R_k^\circ V_k^\circ)}{8 |R_k^\circ|^7} + \right.$$

$$\left. + \frac{3R_k^\circ (R_k^\circ V_k^\circ)(R_k^\circ P_{k2})}{4 |R_k^\circ|^7} - \frac{7R_k^\circ (R_k^\circ V_k^\circ)^3}{8 |R_k^\circ|^9} \right].$$

С увеличением K формулы для \mathbf{p}_{kK} \mathbf{P}_{kK} становятся всё более громоздкими.

$$\delta_k = \min(\delta\rho_k, \beta_k + \delta\varphi_k, \beta_k + \delta\nu_k).$$

Значение n_k равно максимальному целому числу, для которого показатель степени ε в коэффициенте \mathbf{p}_{kn_k} не превышает δ_k .

5.2. Асимптотическое решение

Решение лунной модели начиналось с асимптотического интегрирования уравнений (4.3). Потом вычислялись \mathbf{r}_{kj} ($k = \overline{1,9}$, $j = \overline{1,3}$) и оскулирующие элементы в (4.2). Формулы для \mathbf{r}_{kj} и оскулирующих элементов подставлялись в (2.4), (3.1). В результате было получено следующее асимптотическое решение лунной модели:

$$\mathbf{R}_1 = \sum_{K=0}^{23} T^K \mathbf{P}_{1K} + R_{1*} \mathbf{O}(\varepsilon^{24}), \quad (5.3)$$

$$\mathbf{R}_2 = \sum_{K=0}^8 T^K \mathbf{P}_{2K} + R_{2*} \mathbf{O}(\varepsilon^{25}),$$

$$\mathbf{R}_3 = \tilde{\mathbf{R}}_{3(18)} + R_{3*} \mathbf{O}(\varepsilon^{18}), \quad \tilde{\mathbf{R}}_{3(18)} = \sum_{K=0}^5 T^K \mathbf{P}_{3K} + \hat{\mathbf{R}}_3,$$

$$\hat{\mathbf{R}}_3 = (\hat{R}_{31}, \hat{R}_{32}, \hat{R}_{33}),$$

$$\hat{R}_{31} = -M_{10} T \sqrt{\frac{G}{(M_3 + M_{10}) a_{10}^\circ}} \sin(\pi_{10}^\circ + E_{10}^\circ) - \frac{M_{10} a_{10}^\circ}{M_3 + M_{10}} [\cos(\pi_{10}^\circ + \hat{E}_{10})]_0^T,$$

$$\hat{R}_{32} = M_{10} T \sqrt{\frac{G}{(M_3 + M_{10}) a_{10}^\circ}} \cos(\pi_{10}^\circ + E_{10}^\circ) - \frac{M_{10} a_{10}^\circ}{M_3 + M_{10}} [\sin(\pi_{10}^\circ + \hat{E}_{10})]_0^T;$$

$$\hat{R}_{33} = M_{10} i_{10}^\circ T \sqrt{\frac{G}{(M_3 + M_{10}) a_{10}^\circ}} \cos(\pi_{10}^\circ - \Omega_{10}^\circ + E_{10}^\circ) -$$

$$- \frac{M_{10} a_{10}^\circ i_{10}^\circ}{M_3 + M_{10}} [\sin(\pi_{10}^\circ - \Omega_{10}^\circ + \hat{E}_{10})]_0^T,$$

$$\hat{E}_{10} = E_{10}^{\circ} + \sqrt{\frac{G(M_3 + M_{10})}{(a_{10}^{\circ})^3}} T, \quad \hat{T} = 2\pi \sqrt{\frac{(a_{10}^{\circ})^3}{G(M_3 + M_{10})}} \approx 27,1 D;$$

$$\mathbf{R}_4 = \tilde{\mathbf{R}}_{4(24)} + R_{4*} \mathbf{O}(\varepsilon^{24}), \quad \tilde{\mathbf{R}}_{4(24)} = \sum_{K=0}^4 T^K \mathbf{P}_{4K};$$

$$\mathbf{R}_5 = \tilde{\mathbf{R}}_{5(27)} + R_{5*} \mathbf{O}(\varepsilon^{27}), \quad \tilde{\mathbf{R}}_{5(27)} = \sum_{K=0}^3 T^K \mathbf{P}_{5K};$$

$$\mathbf{R}_6 = \tilde{\mathbf{R}}_{6(25)} + R_{6*} \mathbf{O}(\varepsilon^{25}), \quad \tilde{\mathbf{R}}_{6(25)} = \sum_{K=0}^3 T^K \mathbf{P}_{6K};$$

$$\mathbf{R}_7 = \tilde{\mathbf{R}}_{7(29)} + R_{7*} \mathbf{O}(\varepsilon^{29}),$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{7(29)} = \mathbf{R}_7^{\circ} + \mathbf{V}_7^{\circ} T - \left[(M_0 + M_7) \frac{\mathbf{R}_7^{\circ}}{|\mathbf{R}_7^{\circ}|^3} + \frac{M_5 \mathbf{R}_5^{\circ}}{|\mathbf{R}_5^{\circ}|^3} \right] \frac{GT^2}{2};$$

$$\mathbf{R}_8 = \tilde{\mathbf{R}}_{8(27)} + R_{8*} \mathbf{O}(\varepsilon^{27}),$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{8(27)} = \mathbf{R}_8^{\circ} + \mathbf{V}_8^{\circ} T - G(M_0 + M_8) \frac{\mathbf{R}_8^{\circ}}{2|\mathbf{R}_8^{\circ}|^3} T^2;$$

$$\mathbf{R}_9 = \tilde{\mathbf{R}}_{9(27)} + R_{9*} \mathbf{O}(\varepsilon^{27}),$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{9(27)} = \mathbf{R}_9^{\circ} + \mathbf{V}_9^{\circ} T - G(M_0 + M_9) \frac{\mathbf{R}_9^{\circ}}{2|\mathbf{R}_9^{\circ}|^3} T^2;$$

$$\mathbf{R}_{10} = \tilde{\mathbf{R}}_{10(8)} + R_{10*} \mathbf{O}(\varepsilon^8), \quad \tilde{\mathbf{R}}_{10(8)} = (\tilde{R}_{101}, \tilde{R}_{102}, \tilde{R}_{103}),$$

$$\tilde{R}_{101} = \hat{a}_{10} \left[\cos \hat{\varphi}_{10} - \hat{e}_{10} \cos \hat{\pi}_{10} - \frac{1}{2} (i_{10}^{\circ})^2 \sin(\Omega_{10}^{\circ} - \varphi_{10}) \cdot \sin \Omega_{10}^{\circ} \right],$$

$$\tilde{R}_{102} = \hat{a}_{10} \left[\sin \hat{\varphi}_{10} - \hat{e}_{10} \sin \hat{\pi}_{10} + \frac{1}{2} (i_{10}^{\circ})^2 \sin(\Omega_{10}^{\circ} - \varphi_{10}) \cdot \cos \Omega_{10}^{\circ} \right],$$

$$\tilde{R}_{103} = -a_{10}^{\circ} i_{10}^{\circ} [\sin(\Omega_{10}^{\circ} - \hat{\varphi}_{10}) - e_{10}^{\circ} \sin(\Omega_{10}^{\circ} - \pi_{10}^{\circ})],$$

$$\hat{a}_{10} = a_{10}^{\circ} +$$

$$+ \frac{3M_0(a_{10}^{\circ})^4}{2(M_3+M_{10})|R_3^0|^5} \{[(R_{31}^0)^2 - (R_{32}^0)^2] \cos(2\varphi_{10}) + 2R_{31}^0 R_{32}^0 \sin(2\varphi_{10})\}_0^T,$$

$$\hat{e}_{10} = e_{10}^{\circ} - \frac{M_0(a_{10}^{\circ})^3}{4(M_3+M_{10})|R_3^0|^5} \left\{ 2|R_3^0|^2 \cos \hat{E}_{10} - \right. \\ \left. -9[(R_{31}^0)^2 - (R_{32}^0)^2] \cos(2\pi_{10}^{\circ} + \hat{E}_{10}) - 18R_{31}^0 R_{32}^0 \sin(2\pi_{10}^{\circ} + \hat{E}_{10}) - \right. \\ \left. -[(R_{31}^0)^2 - (R_{32}^0)^2] \cos(2\pi_{10}^{\circ} + 3\hat{E}_{10}) - 2R_{31}^0 R_{32}^0 \sin(2\pi_{10}^{\circ} + 3\hat{E}_{10}) \right\}_0^T,$$

$$\hat{\pi}_{10} = \pi_{10}^{\circ} - \frac{M_0(a_{10}^{\circ})^3}{4(M_3+M_{10})|R_3^0|^5 e_{10}^{\circ}} \left\{ 2|R_3^0|^2 \sin \hat{E}_{10} + \right. \\ \left. +9[(R_{31}^0)^2 - (R_{32}^0)^2] \sin(2\pi_{10}^{\circ} + \hat{E}_{10}) - 18R_{31}^0 R_{32}^0 \cos(2\pi_{10}^{\circ} + \hat{E}_{10}) - \right. \\ \left. -[(R_{31}^0)^2 - (R_{32}^0)^2] \sin(2\pi_{10}^{\circ} + 3\hat{E}_{10}) + 2R_{31}^0 R_{32}^0 \cos(2\pi_{10}^{\circ} + 3\hat{E}_{10}) \right\}_0^T,$$

$$\hat{E}_{10} = E_{10}^{\circ} + \sqrt{\frac{G(M_3+M_{10})}{(a_{10}^{\circ})^3}} T,$$

$$\hat{\hat{E}}_{10} = \hat{E}_{10} + \frac{M_0(a_{10}^{\circ})^3}{4(M_3+M_{10})|R_3^0|^5 e_{10}^{\circ}} \left\{ 2|R_3^0|^2 \sin \hat{E}_{10} + \right. \\ \left. +9[(R_{31}^0)^2 - (R_{32}^0)^2] \sin(2\pi_{10}^{\circ} + \hat{E}_{10}) - 18R_{31}^0 R_{32}^0 \cos(2\pi_{10}^{\circ} + \hat{E}_{10}) - \right. \\ \left. -[(R_{31}^0)^2 - (R_{32}^0)^2] \sin(2\pi_{10}^{\circ} + 3\hat{E}_{10}) + 2R_{31}^0 R_{32}^0 \cos(2\pi_{10}^{\circ} + 3\hat{E}_{10}) \right\}_0^T,$$

$$\varphi_{10} = \pi_{10}^{\circ} + \hat{E}_{10}, \quad \varphi_{10}^{\circ} = \pi_{10}^{\circ} + E_{10}^{\circ}, \quad \hat{\varphi}_{10} = \varphi_{10} + e_{10}^{\circ} [\sin \hat{E}_{10}]_0^T,$$

$$\hat{\hat{\varphi}}_{10} = \varphi_{10} - \frac{M_0 T}{4|R_3^0|^5} \sqrt{\frac{G(a_{10}^{\circ})^3}{M_3+M_{10}}} \left\{ 4|R_3^0|^2 - 9[(R_{31}^0)^2 - (R_{32}^0)^2] \cos(2\varphi_{10}^{\circ}) - \right. \\ \left. -18R_{31}^0 R_{32}^0 \sin(2\varphi_{10}^{\circ}) \right\} + \hat{e}_{10} [\sin \hat{E}_{10}]_0^T - \\ - \frac{21 M_0 (a_{10}^{\circ})^3}{8(M_3+M_{10})|R_3^0|^5} \{[(R_{31}^0)^2 - (R_{32}^0)^2] \sin(2\varphi_{10}) - 2R_{31}^0 R_{32}^0 \cos(2\varphi_{10})\}_0^T;$$

Таблица 5.1
Асимптотическое решение, порядок приближения
и погрешность модулей

k	$\tilde{R}_{k1(n)}(T_{10*})$	$\tilde{R}_{k2(n)}(T_{10*})$	$\tilde{R}_{k3(n)}(T_{10*})$	n	$\tilde{R}_{k(n)}(T_{10*})$	$\bar{\Delta} \cdot 10^7$
1	0,31476 A	0,09345 A	-0,02119 A	5	0,3290247 A	68 A
	0,31327 A	0,09056 A	-0,02129 A	6	0,3267900 A	71 A
2	0,33468 A	0,63880 A	-0,01053 A	15	0,7212408 A	56 A
	0,33470 A	0,63878 A	-0,01054 A	18	0,7212360 A	56 A
3	-0,97269 A	0,19888 A	0 A	17	0,9928150 A	23 A
	-0,97269 A	0,19888 A	0,00000 A	18	0,9928147 A	23 A
4	-0,69413 A	1,46931 A	0,04787 A	20	1,6257234 A	55 A
	-0,69412 A	1,46931 A	0,04787 A	24	1,6257183 A	55 A
5	-3,53120 A	3,95725 A	0,06285 A	21	5,3040708 A	55 A
	-3,53120 A	3,95725 A	0,06285 A	27	5,3040708 A	55 A
6	4,87594 A	-8,71028 A	-0,04279 A	24	9,9822684 A	55 A
	4,87594 A	-8,71028 A	-0,04279 A	25	9,9822684 A	55 A
7	3,54169 A	-19,13160 A	-0,11703 A	26	19,4570180 A	55 A
	3,54169 A	-19,13160 A	-0,11703 A	29	19,4570180 A	55 A
8	7,63931 A	-29,21555 A	0,42436 A	22	30,2007903 A	55 A
	7,63931 A	-29,21555 A	0,42436 A	27	30,2007869 A	55 A
9	-18,95527 A	-21,46141 A	7,77037 A	22	29,6693999 A	55 A
	-18,95527 A	-21,46141 A	7,77037 A	27	29,6693964 A	55 A
10	0,04981 a_e	-63,59547 a_e	-2,18431 a_e	6	63,6329919 a_e	38 a_e
	-0,03782 a_e	-63,30138 a_e	-2,57591 a_e	8	63,3537840 a_e	155 a_e

$$[f]_0^T = f(T) - f(0).$$

Формулы для P_{kk} даны в (5.2), \hat{T} – период функций $\sin \hat{E}_{10}$, $\cos \hat{E}_{10}$.

В Табл. 5.1 даны численные значения асимптотических приближений и порядок отброшенных членов по ε :

$$R_k(T_{10*}) = \tilde{R}_{k(n)}(T_{10*}) + R_{k*}O(\varepsilon^n).$$

Для сравнения даны два приближения. Из-за громоздкости формул для $k = 1, 2$ ограничились следующими приближениями:

$$\mathbf{R}_1 = \tilde{\mathbf{R}}_{1(6)} + R_{1*} \mathbf{O}(\varepsilon^6), \quad \tilde{\mathbf{R}}_{1(6)} = \sum_{K=0}^5 T^K \mathbf{P}_{1K};$$

$$\mathbf{R}_2 = \tilde{\mathbf{R}}_{2(18)} + R_{2*} \mathbf{O}(\varepsilon^{18}), \quad \tilde{\mathbf{R}}_{2(18)} = \sum_{K=0}^5 T^K \mathbf{P}_{2K}.$$

В Табл. 5.1, кроме описанных выше приближений, даны значения модулей и их погрешности (о вычислении погрешностей функций смотрите в §37):

$$\tilde{R}_{k(n)}(T_{10*}) = |\tilde{\mathbf{R}}_{k(n)}(T_{10*})|, \quad \tilde{\Delta} = \Delta(\tilde{\mathbf{R}}_{k(n)}(T_{10*})).$$

Наибольший вклад в $\tilde{\Delta}$ вносят погрешности значений начальных радиус-векторов ($k = 1, 2, \overline{4, 9}$), начальной скорости ($k = 3$) и гравитационной постоянной ($k = 10$) (смотрите формулы (1.1) и Табл. 1.1).

Замечание 5.1. Формулы (5.3) справедливы для начальных значений в Табл. 1.1, 1.2.

Замечание 5.2. Переменные η_{10j} получены интегрированием по частям, как описано в п. 9.3.

Замечание 5.3. В §12 значения координат планет и Луны при $T = T_{10*}$ получены с помощью земной математической модели. Сравните Табл. 5.1 и 12.1.

§6. Выводы главы 1

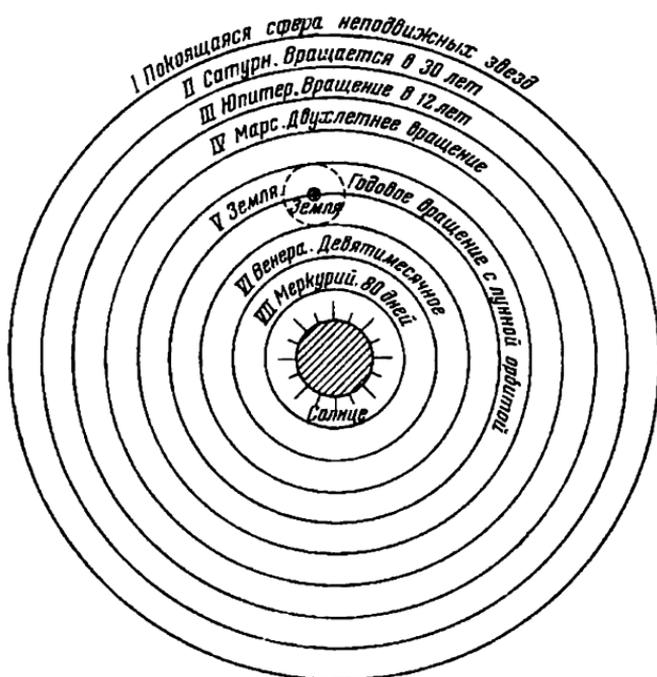
В главе 1 Солнечная система рассматривается как система 11 материальных точек, которые имеют характеристики Солнца, планет и Луны и которые притягиваются по закону всемирного тяготения. Задача о движении Солнечной системы сформулирована как задача 11 тел в §2. Численные значения параметров даны в §1.

В §2 написаны уравнения движения 11 тел по второму закону Ньютона. Сделан переход к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. За характерное время выбран интервал, равный примерно одной шестой периода вращения Луны вокруг Земли. Полученная задача Коши названа лунной математической моделью Солнечной системы.

В §3 введены оскулирующие элементы для орбиты Луны и получены для них дифференциальные уравнения с малым параметром.

В §4 показано, что лунная математическая модель эквивалентна почти регулярной задаче Коши. Дан алгоритм решения задачи в виде ряда, равномерно сходящегося на ненулевом интервале времени.

В §5 дано асимптотическое решение лунной математической модели.



(Необходимо) тщательно исследовать, в каком отношении Земля находится к небу, чтобы мы, исследуя самое высшее, не забывали более близкого и в таком заблуждении не приписывали небесному того, что свойственно Земле.

Николай Коперник
(19.02.1473 – 24.5.1543)

Глава 2

Земная математическая модель Солнечной системы

§7. Построение земной математической модели

Рассмотрим задачу Коши (2.5), описывающую движение тел Солнечной системы в безразмерных переменных. Введём в неё малый параметр. За характерные значения R_{k*} , V_{k*} примем те же значения, что и в лунной математической модели. Эти значения даны в Табл. 2.1. Характерное время T_* выберем так, чтобы выполнялось равенство

$$b_3 b_{33} = 1.$$

Подставляя сюда выражения из (2.6), получим уравнение для T_* :

$$\frac{T_*^2 G(M_0 + M_3)}{R_{3*}^3} = 1.$$

Отсюда $T_* = T_{3*}$,

$$T_{3*} = \sqrt{\frac{R_{3*}^3}{G(M_0 + M_3)}} \approx 58,1 D. \quad (7.1)$$

Численное значение T_{3*} получено по данным в формулах (1.1) и в Табл. 1.1, 2.1.

Примем за малый параметр и за коэффициент нормализации те же значения, что и в лунной модели:

$$\varepsilon = 0,5, \quad b_* = 1,2. \quad (7.2)$$

Вычислим параметры (2.6), подставляя численные значения из (1.1), (7.1) и из Табл. 1.1, 2.1. Нормализуем полученные числа (2.6) по малому параметру (7.2) с коэффициентом нормализации (7.2). Получим степенные функции (2.9), где значения показателей β_{kj} , γ_{kj} , δ_{kj} даны в Табл. 7.1: на i -ой строке и в j -ом столбце верхнее число равно β_{kj} , нижнее число равно γ_{kj} или δ_{kj} (множества (k, j) индексов для γ_{kj} и δ_{kj} не пересекаются). Значения β_k приведены в Табл. 7.2.

Движение Солнечной системы в безразмерных нормализованных переменных описывается уравнениями (2.5), (2.9) с показателями β_{kj} , γ_{kj} , δ_{kj} , β_k в Табл. 7.1, 7.2. Коэффициенты b'_k , b'_{kj} , c'_{kj} , d'_{kj} и значения r_k° , v_k° рассматриваются как параметры, не зависящие от t , ε .

Таблица 7.1. Показатели β_{kj} , γ_{kj} , δ_{kj} в земной модели

$k \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-2	18	19	24	15	19	24	25	32	25
	-	1	1	2	4	5	6	6	6	-
2	20	-1	18	23	15	18	23	24	31	25
	22	-	0	1	3	4	5	5	5	-
3	19	18	0	23	15	18	23	24	31	7
	22	18	-	1	2	3	4	5	5	8
4	19	17	18	1	14	18	23	24	31	24
	24	20	19	-	1	2	3	4	4	9
5	18	16	17	22	3	17	22	23	30	23
	26	22	22	25	-	1	2	2	2	11
6	18	16	16	21	13	5	21	22	29	23
	27	23	23	26	15	-	1	1	1	12
7	17	15	16	21	13	16	6	22	29	22
	29	25	25	28	16	18	-	0	0	13
8	17	15	16	20	12	16	20	7	29	22
	30	26	26	29	17	19	22	-	29	13
9	17	15	16	21	12	16	21	22	7	22
	30	26	26	29	17	19	22	0	-	13
10	17	14	-5	18	10	13	18	19	26	-4
	-	-	25	26	28	29	31	32	32	-

Определение 7.1. Задача Коши (2.5), (2.9) с показателями β_k , β_{kj} , γ_{kj} , δ_{kj} в Табл. 7.1, 7.2 называется *земной математической моделью* Солнечной системы.

В Табл. 7.2 приведены порядки малости производных в уравнениях (2.5) при заданных значениях (7.1), (7.2):

$$\frac{dr_k}{dt} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\beta_k}), \quad \frac{dv_k}{dt} = \mathcal{O}(\varepsilon^{\varphi_k}), \quad k = \overline{1, 10}. \quad (7.3)$$

Из Табл. 7.2 следует, что производные от переменных с индексами $k = 1, 2, 10$ пропорциональны отрицательным степеням малого параметра. Поэтому земная математическая модель является сингулярно возмущённой задачей Коши (по Определению 40.1).

Таблица 7.2. Показатели β_k, φ_k в уравнениях (7.3)

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
β_k	-2	-1	0	1	3	5	6	7	7	-4
φ_k	-2	-1	0	1	3	5	6	7	7	-4

Замечание 7.1. Если в земной математической модели положить $\varepsilon = 0$, то получим вырожденную задачу. Уравнения этой задачи для $k = 1, 2, 10$ не имеют решения. Уравнения для $k = \overline{3,9}$ имеют вид:

$$\frac{dr_3^{(0)}}{dt} = b'_3 v_3^{(0)}, \quad \frac{dv_3^{(0)}}{dt} = -b'_{33} \frac{r_3^{(0)}}{|r_3^{(0)}|^3}, \quad r_3^{(0)}(0) = r_3^{\circ}, \quad v_3^{(0)}(0) = v_3^{\circ}, \quad (7.4)$$

$$\frac{dr_k^{(0)}}{dt} = 0, \quad \frac{dv_k^{(0)}}{dt} = 0, \quad r_k^{(0)}(0) = r_k^{\circ}, \quad v_k^{(0)}(0) = v_k^{\circ},$$

$k = \overline{4,9}$. Для Земли уравнения являются *моделью Кеплера*: Земля находится под действием силы притяжения Солнца и, таким образом, в нулевом приближении движется по эллипсу вокруг Солнца.

Для $k = \overline{4,9}$ уравнения (7.4) описывают движение планет по инерции: в нулевом приближении планеты движутся равномерно и прямолинейно.

§8. Введение оскулирующих элементов

В земной математической модели векторы r_k, v_k при $k = 1, 2, 10$ являются сингулярными переменными, так как их производные пропорциональны отрицательной степени малого параметра (смотрите (7.3)). Кроме того, для $k = 3$ нулевое приближение уравнений (2.5) является моделью Кеплера. Поэтому для $k = 1, 2, 3, 10$ рассмотрим новые переменные – оскулирующие элементы $a_k, e_k, i_k, \Omega_k, \pi_k, E_k$ (a_k – большая полуось, e_k – эксцентриситет, i_k – наклон, Ω_k – долгота восходящего узла, π_k – долгота перигентра, E_k – эксцентрическая аномалия орбиты k -го тела).

Уравнения и формулы для нормализованных оскулирующих элементов $\xi_{kj}, j = \overline{1,6}$, имеют вид (3.3)–(3.5), где $\mu_k = G(M_0 + M_k), k = 1, 2, 3; \mu_{10} = G(M_3 + M_{10})$.

Переведем начальные значения, данные в Табл. 1.2 в градусной мере, в меру радианную. Далее округлим эти значения и начальные значения a_k°, e_k° из Табл. 1.2 до второй значащей цифры в сторону увеличения. Полученные числа присвоим характерным значениям оскулирующих элементов. Эти значения приведены в Табл. 8.1.

Таблица 8.1. Характерные значения оскулирующих элементов

k	a_{k*}	e_{k*}	i_{k*}	Ω_{k*}	π_{k*}	E_{k*}
1	0,39 A	0,21	0,13	0,85	1,4	5,1
2	0,73 A	0,0068	0,060	1,4	2,3	5,0
3	1,1 A	0,017	$1,3 \cdot 10^{-6}$	0,0056	1,8	1,1
10	$60 a_e$	0,061	0,090	5,2	1,7	2,2

Все характерные значения определены указанным способом, кроме Ω_{3*} (так как $\Omega_3^0 = 0$, смотрите Табл. 1.2). Выберем Ω_{3*} так, чтобы старший коэффициент $b_{3\ 10} q_{34}$ в уравнении (3.4) с левой частью $d\xi_{34}/dt$ был равен 1. Для этого решим уравнение $b_{3\ 10} q_{34} = 1$ относительно Ω_{3*} и округлим полученное значение до второй значащей цифры в сторону увеличения. Получим $\Omega_{3*} = 0,0056$.

Нормализуем безразмерные параметры в уравнениях (3.3)–(3.5) по малому параметру (7.2) с коэффициентом нормализации (7.2). Получим

$$e_{1*} = e'_{1*}\varepsilon^2, \quad i_{1*} = i'_{1*}\varepsilon^3, \quad \Omega_{1*} = \Omega'_{1*}, \quad \pi_{1*} = \pi'_{1*}\varepsilon^{-1}, \quad (8.1)$$

$$E_{1*} = E'_{1*}\varepsilon^{-3},$$

$$e_{2*} = e'_{2*}\varepsilon^7, \quad i_{2*} = i'_{2*}\varepsilon^4, \quad \Omega_{2*} = \Omega'_{2*}\varepsilon^{-1}, \quad \pi_{2*} = \pi'_{2*}\varepsilon^{-1},$$

$$E_{2*} = E'_{2*}\varepsilon^{-3},$$

$$e_{3*} = e'_{3*}\varepsilon^6, \quad i_{3*} = i'_{3*}\varepsilon^{19}, \quad \Omega_{3*} = \Omega'_{3*}\varepsilon^7, \quad \pi_{3*} = \pi'_{3*}\varepsilon^{-1},$$

$$E_{3*} = E'_{3*},$$

$$e_{10*} = e'_{10*}\varepsilon^4, \quad i_{10*} = i'_{10*}\varepsilon^3, \quad \Omega_{10*} = \Omega'_{10*}\varepsilon^{-3}, \quad \pi_{10*} = \pi'_{10*}\varepsilon^{-1},$$

$$E_{10*} = E'_{10*}\varepsilon^{-1},$$

$$q_{kj} = q'_{kj}\varepsilon^{x_{kj}}, \quad k = \overline{1,3,10}; \quad j = \overline{1,9}.$$

Показатели x_{kj} даны в Табл. 8.2. Параметры ξ_{kj}^0 рассматриваются как числа, не зависящие от t, ε .

Уравнения (2.5) для $k = \overline{4,9}$ и уравнения (3.4) для $k = \overline{1,3,10}$ описывают движение Солнечной системы в переменных $\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, k = \overline{4,9}; \xi_{kj}, k = \overline{1,3,10}; j = \overline{1,6}$. Порядок малости производных от $\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k, k = \overline{4,9}$, дан в (7.3). Для $k = \overline{1,3,10}$ имеем:

Таблица 8.2. Показатели κ_{kj} в формулах (8.1) для q_{kj}

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
κ_{1j}	-1	-3	-3	-4	-2	4	0	0	0
κ_{2j}	-1	-7	-4	-4	-6	6	1	-5	0
κ_{3j}	-1	-6	-20	-27	-5	21	0	-6	0
κ_{10j}	-1	-4	-4	-1	-4	5	-3	-3	0

Таблица 8.3. Показатели σ_{kj} , χ_{kj} , $\delta\varphi_k$ в формулах (8.2)

$k \setminus j$	σ_{kj}						χ_{kj}						$\delta\varphi_k$
	1	2	3	4	5	6	1	2	3	4	5	6	
1	18	16	16	15	17	0	-1	-3	-3	-4	-2	0	19
2	17	11	14	14	12	1	-1	-7	-4	-4	-6	-5	18
3	6	1	-13	-20	2	0	-1	-6	-20	-27	-5	-6	7
10	2	-1	-1	2	-1	-3	-1	-4	-4	-1	-4	-3	3

$$\frac{d\xi_{kj}}{dt} = O(\varepsilon^{\sigma_{kj}}), \quad J_{kj} = O(\varepsilon^{\chi_{kj}}), \quad \delta F_k = O(\varepsilon^{\delta\varphi_k}), \quad j = \overline{1,6}. \quad (8.2)$$

Показатели σ_{kj} , χ_{kj} , $\delta\varphi_k$ даны в Табл. 8.3. Уравнения для ξ_{33} , ξ_{34} , ξ_{102} , ξ_{103} , ξ_{105} , ξ_{106} имеют отрицательный порядок малости, поэтому полученная система является сингулярно возмущённой задачей Коши по Определению 40.1.

§9. Переход к почти регулярным переменным

9.1. Формулы для новых переменных

Некоторые производные в (8.2) пропорциональны неположительным степеням ε . Кроме того, некоторые переменные $\xi_{k4} - \xi_{k6}$ входят в аргументы косинусов и синусов, имея множителем отрицательную степень ε (смотрите (3.3), (8.1)). Поэтому перейдём к новым переменным η_{kj} , заменяя ими переменные ξ_{kj} с теми же индексами:

$$\eta_{11} = \varepsilon^{-4}(a_1 - a_1^\circ)/a_{1*}, \quad \eta_{12} = \varepsilon^{-4}(e_1 - e_1^\circ)/e_{1*}, \quad (9.1)$$

$$\eta_{13} = (i_1 - i_1^\circ)/i_{1*}, \quad \eta_{14} = (\Omega_1 - \Omega_1^\circ)/\Omega_{1*},$$

$$\eta_{15} = \pi_1 - \pi_1^\circ, \quad \eta_{16} = E_1 - \hat{E}_1 - e_1^\circ(\sin E_1 - \sin E_1^\circ),$$

$$\eta_{21} = \varepsilon^{-3}(a_2 - a_2^\circ)/a_{2*}, \quad \eta_{22} = (e_2 - e_2^\circ)/e_{2*},$$

$$\eta_{23} = (i_2 - i_2^\circ)/i_{2*}, \quad \eta_{24} = \Omega_2 - \Omega_2^\circ,$$

$$\eta_{25} = \pi_2 - \pi_2^\circ, \quad \eta_{26} = E_2 - \hat{E}_2,$$

$$\eta_{31} = \varepsilon^{-4}(a_3 - a_3^\circ)/a_{3*}, \quad \eta_{32} = (e_3 - e_3^\circ)/e_{3*},$$

$$\eta_{33} = \varepsilon^{-2} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{i_3}{2} \right) \cos \Omega_3 - \operatorname{tg} \left(\frac{i_3^\circ}{2} \right) \cos \Omega_3^\circ \right],$$

$$\eta_{34} = \varepsilon^{-2} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{i_3}{2} \right) \sin \Omega_3 - \operatorname{tg} \left(\frac{i_3^\circ}{2} \right) \sin \Omega_3^\circ \right],$$

$$\eta_{35} = \pi_3 - \pi_3^\circ, \quad \eta_{36} = E_3 - \hat{E}_3;$$

$$k = \overline{4,9}, \quad j = \overline{1,3}, \quad \eta_{kj} = r_{kj} - r_{kj}^\circ, \quad \eta_{kj+3} = v_{kj} - v_{kj}^\circ;$$

$$\eta_{101} = \varepsilon^{-5} \left\{ a_{10} - a_{10}^\circ - \frac{3M_0(a_{10}^\circ)^4}{2(M_3+M_{10})(a_3^\circ)^3} \cos 2(\pi_3 + E_3 - \pi_{10} - E_{10}) \right\} / a_{10*},$$

$$\begin{aligned} \eta_{102} = \varepsilon^{-5} \left\{ e_{10} \cos \pi_{10} + \frac{M_0(a_{10}^\circ)^3}{4(M_3+M_{10})(a_3^\circ)^3} \times \right. \\ \left. \times [2 \cos(\pi_{10} + E_{10}) - 9 \cos(2\pi_3 + 2E_3 - \pi_{10} - E_{10}) - \right. \\ \left. - \cos(2\pi_3 + 2E_3 - 3\pi_{10} - 3E_{10})] \right\} / a_{10*}, \end{aligned}$$

$$\eta_{103} = (i_{10} - i_{10}^\circ)/i_{10*}, \quad \eta_{104} = \Omega_{10} - \Omega_{10}^\circ,$$

$$\begin{aligned} \eta_{105} = \varepsilon^{-5} \left\{ e_{10} \sin \pi_{10} + \frac{M_0(a_{10}^\circ)^3}{4(M_3+M_{10})(a_3^\circ)^3} \times \right. \\ \left. \times [2 \sin(\pi_{10} + E_{10}) - 9 \sin(2\pi_3 + 2E_3 - \pi_{10} - E_{10}) + \right. \\ \left. + \sin(2\pi_3 + 2E_3 - 3\pi_{10} - 3E_{10})] \right\} / a_{10*}, \end{aligned}$$

$$\eta_{106} = \pi_{10} - \pi_{10}^\circ + E_{10} - \hat{E}_{10} - e_{10}^\circ(\sin E_{10} - \sin E_{10}^\circ),$$

$$\hat{E}_k = E_k^\circ + \sqrt{\frac{G(M_0+M_k)}{(a_k^\circ)^3}} T, \quad k = \overline{1,3}, \quad \hat{E}_{10} = E_{10}^\circ + \sqrt{\frac{G(M_3+M_{10})}{(a_{10}^\circ)^3}} T.$$

9.2. Уравнения для переменных η_{kj}

Из (2.5), (3.4), (9.1) следуют уравнения:

$$\frac{d\eta_{11}}{dt} = \varepsilon^{-4}(\delta F_1, J_{11}) \sim \varepsilon^{14}, \quad \frac{d\eta_{12}}{dt} = \varepsilon^{-4}(\delta F_1, J_{12}) \sim \varepsilon^{12}, \quad (9.2)$$

$$\frac{d\eta_{13}}{dt} = (\delta F_1, J_{13}) \sim \varepsilon^{16}, \quad \frac{d\eta_{14}}{dt} = (\delta F_1, J_{14}) \sim \varepsilon^{15},$$

$$\frac{d\eta_{15}}{dt} = \pi_{1*}(\delta F_1, J_{15}) \sim \varepsilon^{16},$$

$$\frac{d\eta_{16}}{dt} = E_{1*} q_{17} \left[\frac{1 - e_1^{\circ} \cos E_1}{(1 - e_1 \cos E_1) \xi_{11}^{3/2}} - \frac{1}{(\xi_{11}^{\circ})^{3/2}} \right] + E_{1*} (1 - e_1^{\circ} \cos E_1) (\delta F_1, J_{16}) \sim \varepsilon,$$

$$\frac{d\eta_{21}}{dt} = \varepsilon^{-3}(\delta F_2, J_{21}) \sim \varepsilon^{14}, \quad \frac{d\eta_{22}}{dt} = (\delta F_2, J_{22}) \sim \varepsilon^{11},$$

$$\frac{d\eta_{23}}{dt} = (\delta F_2, J_{23}) \sim \varepsilon^{14}, \quad \frac{d\eta_{24}}{dt} = \Omega_{2*}(\delta F_2, J_{24}) \sim \varepsilon^{13},$$

$$\frac{d\eta_{25}}{dt} = \pi_{2*}(\delta F_2, J_{25}) \sim \varepsilon^{11},$$

$$\frac{d\eta_{26}}{dt} = E_{2*} q_{27} \left[\frac{1}{(1 - e_2 \cos E_2) \xi_{21}^{3/2}} - \frac{1}{(\xi_{21}^{\circ})^{3/2}} \right] + E_{2*} (\delta F_2, J_{26}) \sim \varepsilon,$$

$$\frac{d\eta_{31}}{dt} = \varepsilon^{-4}(\delta F_3, J_{31}) \sim \varepsilon^2, \quad \frac{d\eta_{32}}{dt} = (\delta F_3, J_{32}) \sim \varepsilon,$$

$$\frac{d\eta_{33}}{dt} = \varepsilon^{-2}(\delta F_3, \tilde{J}_{33}) \sim \varepsilon^6, \quad \frac{d\eta_{34}}{dt} = (\delta F_3, \tilde{J}_{34}) \sim \varepsilon^6,$$

$$\frac{d\eta_{35}}{dt} = \pi_{3*}(\delta F_3, J_{35}) \sim \varepsilon,$$

$$\frac{d\eta_{36}}{dt} = E_{3*} q_{37} \left[\frac{1}{(1 - e_3 \cos E_3) \xi_{31}^{3/2}} - \frac{1}{(\xi_{31}^{\circ})^{3/2}} \right] + E_{3*} (\delta F_3, J_{36}) \sim \varepsilon,$$

$$\frac{d\eta_{kj}}{dt} = b_k \eta_{k j+3}, \quad k = \overline{4,9}, \quad j = \overline{1,3}; \quad \frac{d\eta_{kj}}{dt} = F_k j-3, \quad k = \overline{4,9}, \quad j = \overline{4,6};$$

$$\frac{d\eta_{101}}{dt} = \frac{\Phi_1}{1 - e_{10} \cos E_{10}} + \varepsilon^{-5}(\widetilde{\delta F}_{10}, J_{101}) +$$

$$+ \tilde{q}_{101} \sin 2(\pi_3 + E_3 - \pi_{10} - E_{10}) \times$$

$$\times \left[\frac{E_3 \cdot q_{37}}{(1-e_3 \cos E_3) \xi_{31}^{3/2}} + (\delta \mathbf{F}_3, \tilde{\mathbf{J}}_{36}) - (\delta \mathbf{F}_{10}, \tilde{\mathbf{J}}_{106}) \right] \sim \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{102}}{dt} &= \frac{\Phi_2}{1-e_{10} \cos E_{10}} + (\tilde{\delta \mathbf{F}}_{10}, \tilde{\mathbf{J}}_{102}) + \\ &+ [9 \sin(2\pi_3 + 2E_3 - \pi_{10} - E_{10}) + \sin(2\pi_3 + 2E_3 - 3\pi_{10} - 3E_{10})] \times \\ &\times 2\tilde{q}_{102} \left[\frac{E_3 \cdot q_{37}}{(1-e_3 \cos E_3) \xi_{31}^{3/2}} + (\delta \mathbf{F}_3, \tilde{\mathbf{J}}_{36}) \right] - \\ &- \tilde{q}_{102} [2 \sin(\pi_{10} + E_{10}) + 9 \sin(2\pi_3 + 2E_3 - \pi_{10} - E_{10}) + \\ &+ 3 \sin(2\pi_3 + 2E_3 - 3\pi_{10} - 3E_{10})] \cdot (\delta \mathbf{F}_{10}, \tilde{\mathbf{J}}_{106}) \sim \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\frac{d\eta_{103}}{dt} = \Phi_3 + (\tilde{\delta \mathbf{F}}_{10}, \mathbf{J}_{103}) \sim \varepsilon, \quad \frac{d\eta_{104}}{dt} = \Phi_4 + \Omega_{10} \cdot (\tilde{\delta \mathbf{F}}_{10}, \mathbf{J}_{104}) \sim \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_{105}}{dt} &= \frac{\Phi_5}{1-e_{10} \cos E_{10}} + (\tilde{\delta \mathbf{F}}_{10}, \tilde{\mathbf{J}}_{105}) - \\ &- [9 \cos(2\pi_3 + 2E_3 - \pi_{10} - E_{10}) - \cos(2\pi_3 + 2E_3 - 3\pi_{10} - 3E_{10})] \times \\ &\times 2\tilde{q}_{105} \left[\frac{E_3 \cdot q_{37}}{(1-e_3 \cos E_3) \xi_{31}^{3/2}} + (\delta \mathbf{F}_3, \tilde{\mathbf{J}}_{36}) \right] + \\ &+ \tilde{q}_{105} [2 \cos(\pi_{10} + E_{10}) + 9 \cos(2\pi_3 + 2E_3 - \pi_{10} - E_{10}) - \\ &- 3 \cos(2\pi_3 + 2E_3 - 3\pi_{10} - 3E_{10})] \cdot (\delta \mathbf{F}_{10}, \tilde{\mathbf{J}}_{106}) \sim \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\frac{d\eta_{106}}{dt} = \frac{\Phi_6}{1-e_{10} \cos E_{10}} + (\delta \mathbf{F}_{10}, \tilde{\mathbf{J}}_{106}) - e_{10} \cdot E_{10} \cdot \xi_{102}^\circ \cos E_{10} (\delta \mathbf{F}_{10}, \mathbf{J}_{106}) \sim \varepsilon,$$

$$\eta_{kj}(0, \varepsilon) = 0.$$

Здесь

$$\tilde{\delta \mathbf{F}}_{10} = \delta \mathbf{F}_{10} - b_{103} d_{310} \left[\frac{3r_3(r_3, r_{10})}{|r_3|^5} - \frac{r_{10}}{|r_3|^3} \right] \sim \varepsilon^{11}, \quad (9.3)$$

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \varepsilon^{-5} b_{103} d_{310} \left\{ (1 - e_{10} \cos E_{10}) \left(\left[\frac{3r_3(r_3, r_{10})}{|r_3|^5} - \frac{r_{10}}{|r_3|^3} \right], \mathbf{J}_{101} \right) - \right. \\ &\left. - \frac{3q_{101} q_{109} (\xi_{101}^\circ)^4}{2q_{39}^3 (\xi_{31}^\circ)^3 \xi_{101}^{3/2}} \sin 2(\pi_3 + E_3 - \pi_{10} - E_{10}) \right\} \sim \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & b_{10\ 3} d_{3\ 10} \left\{ (1 - e_{10} \cos E_{10}) \left(\left[\frac{3r_3(r_3, r_{10})}{|r_3|^5} - \frac{r_{10}}{|r_3|^3} \right], \bar{J}_{10\ 2} \right) - \right. \\ & - [2 \sin(\pi_{10} + E_{10}) + 9 \sin(2\pi_3 + 2E_3 - \pi_{10} - E_{10}) + \\ & + 3 \sin(2\pi_3 + 2E_3 - 3\pi_{10} - 3E_{10})] \times \\ & \left. \times \frac{\varepsilon^{-5} q_{10\ 1} q_{10\ 9} (\xi_{10\ 1}^\circ)^3}{8q_{39}^3 (\xi_{31}^\circ)^3 \xi_{10\ 1}^{3/2}} \right\} \sim \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_3 = & \frac{3b_{10\ 3} d_{3\ 10} q_{10\ 3}}{|r_3|^5} \sqrt{\frac{\xi_{10\ 1}}{1 - e_{10}^2}} (\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_{10}) (\mathbf{r}_3, \mathbf{h}_{10\ 3}) \times \\ & \times \left[(\cos E_{10} - e_{10}) \cos(\pi_{10} - \Omega_{10}) - \sqrt{1 - e_{10}^2} \sin E_{10} \sin(\pi_{10} - \Omega_{10}) \right] \sim \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_4 = & \frac{3b_{10\ 3} d_{3\ 10} q_{10\ 4} i_{10} \Omega_{10}^*}{|r_3|^5 \xi_{10\ 3} \sin i_{10}} \sqrt{\frac{\xi_{10\ 1}}{1 - e_{10}^2}} (\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_{10}) (\mathbf{r}_3, \mathbf{h}_{10\ 3}) \times \\ & \times \left[\sqrt{1 - e_{10}^2} \sin E_{10} \cos(\pi_{10} - \Omega_{10}) + (\cos E_{10} - e_{10}) \sin(\pi_{10} - \Omega_{10}) \right] \sim \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_5 = & b_{10\ 3} d_{3\ 10} \left\{ (1 - e_{10} \cos E_{10}) \left(\left[\frac{3r_3(r_3, r_{10})}{|r_3|^5} - \frac{r_{10}}{|r_3|^3} \right], \bar{J}_{10\ 5} \right) + \right. \\ & + [2 \cos(\pi_{10} + E_{10}) + 9 \cos(2\pi_3 + 2E_3 - \pi_{10} - E_{10}) - \\ & - 3 \cos(2\pi_3 + 2E_3 - 3\pi_{10} - 3E_{10})] \frac{\varepsilon^{-5} q_{10\ 1} q_{10\ 9} (\xi_{10\ 1}^\circ)^3}{8q_{39}^3 (\xi_{31}^\circ)^3 \xi_{10\ 1}^{3/2}} \left. \right\} \sim \varepsilon, \end{aligned}$$

$$\Phi_6 = -\frac{E_{10} \cdot q_{10\ 7}}{(\xi_{10\ 1}^\circ)^{3/2}} (1 - e_{10} \cos E_{10}) + \frac{E_{10} \cdot q_{10\ 7}}{\xi_{10\ 1}^{3/2}} (1 - e_{10}^\circ \cos E_{10}) \sim \varepsilon,$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_{33} = & \frac{q_{31}}{\cos^2(\frac{i_3}{2})} \sqrt{\frac{\xi_{31}}{1 - e_3^2}} \left[\cos \pi_3 (\cos E_3 - e_3) - \sqrt{1 - e_3^2} \sin \pi_3 \sin E_3 \right] \mathbf{h}_{33} \sim \\ & \sim \varepsilon^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_{34} = & \frac{q_{31}}{\cos^2(\frac{i_3}{2})} \sqrt{\frac{\xi_{31}}{1 - e_3^2}} \left[\sin \pi_3 (\cos E_3 - e_3) + \sqrt{1 - e_3^2} \cos \pi_3 \sin E_3 \right] \mathbf{h}_{33} \sim \\ & \sim \varepsilon^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{36} = & \frac{q_{32}e_3\sqrt{\xi_{31}}}{1-e_3\cos E_3} \left[\left(\sqrt{1-e_3^2} - 2 + e_3\cos E_3 \right) \cos E_3 \mathbf{h}_{31} - \sin E_3 \mathbf{h}_{32} \right] + \\
& + \frac{q_{32}Q_3\sqrt{\xi_{31}}}{1-e_3\cos E_3} \left[(2 - \cos^2 E_3) \mathbf{h}_{31} + \cos E_3 \sin E_3 \mathbf{h}_{32} \right] + \\
& + \frac{q_{31}}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{i_3}{2} \right) \sqrt{\frac{\xi_{31}}{1-e_3^2}} \left[\sin E_3 \cos(\pi_3 - \Omega_3) \sqrt{1-e_3^2} + \right. \\
& \left. + (\cos E_3 - e_3) \sin(\pi_3 - \Omega_3) \right] \mathbf{h}_{33} \sim 1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{102} = & \frac{\varepsilon^{-5}q_{101}\sqrt{\xi_{101}}}{2(1-e_{10}\cos E_{10})} \left\{ \sqrt{1-e_{10}^2} \left[-\frac{1}{2}\sqrt{1-e_{10}^2} \cos \pi_{10} \sin(2E_{10}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sin \pi_{10} (2 - \cos^2 E_{10} - e_{10} \cos E_{10}) \right] \mathbf{h}_{101} + \right. \\
& \left. + \left[\sqrt{1-e_{10}^2} \cos \pi_{10} (1 + \cos^2 E_{10} - 2e_{10} \cos E_{10}) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \sin \pi_{10} \sin E_{10} (\cos E_{10} - e_{10}) \right] \mathbf{h}_{102} \right\} - \\
& - \tilde{q}_{106}\xi_{102} \sin \pi_{10} \mathbf{J}_{10} \sim \varepsilon^{-6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{105} = & \frac{\varepsilon^{-5}q_{101}\sqrt{\xi_{101}}}{2(1-e_{10}\cos E_k)} \left\{ \sqrt{1-e_{10}^2} \left[-\frac{1}{2}\sqrt{1-e_{10}^2} \sin \pi_{10} \sin(2E_{10}) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \cos \pi_{10} (2 - \cos^2 E_{10} - e_{10} \cos E_{10}) \right] \mathbf{h}_{101} + \right. \\
& \left. + \left[\sqrt{1-e_{10}^2} \sin \pi_{10} (1 + \cos^2 E_{10} - 2e_{10} \cos E_{10}) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \cos \pi_{10} \sin E_{10} (\cos E_{10} - e_{10}) \right] \mathbf{h}_{102} \right\} + \\
& + \tilde{q}_{106}\xi_{102} \cos \pi_{10} \mathbf{J}_{10} \sim \varepsilon^{-6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{J}_{106} = & \frac{q_{102}e_{10}\sqrt{\xi_{101}}}{1-e_{10}\cos E_{10}} \times \\
& \times \left[\left(\sqrt{1-e_{10}^2} - 2 + e_{10}\cos E_{10} \right) \cos E_{10} \mathbf{h}_{101} - \sin E_{10} \mathbf{h}_{102} \right] + \\
& + \frac{q_{102}Q_{10}\sqrt{\xi_{101}}}{1-e_{10}\cos E_{10}} \left[(2 - \cos^2 E_{10}) \mathbf{h}_{101} + \cos E_{10} \sin E_{10} \mathbf{h}_{102} \right] + \\
& + q_{106}\pi_{10} \mathbf{J}_{10} \sim 1,
\end{aligned}$$

$$J_{10} = \frac{2}{i_{10*}} \operatorname{tg} \left(\frac{i_{10*}(\xi_{103}^{\circ} + \eta_{103})}{2} \right) \sqrt{\frac{\xi_{101}}{1-e_{10}^2}} \left[\sin E_{10} \cos(\pi_{10} - \Omega_{10}) \sqrt{1-e_{10}^2} + \right. \\ \left. + (\cos E_{10} - e_{10}) \sin(\pi_{10} - \Omega_{10}) \right] h_{103} \sim 1,$$

$$Q_3 = \frac{1 - \sqrt{1 - e_{3*}^2 (\xi_{32}^{\circ} + \eta_{32})^2}}{\xi_{32}^{\circ} + \eta_{32}} \sim \varepsilon^{12}, \quad Q_{10} = \frac{1 - \sqrt{1 - (e_{10*} \xi_{10}^{\circ})^2 (\tilde{g}_1^2 + \tilde{g}_2^2)}}{\sqrt{\tilde{g}_1^2 + \tilde{g}_2^2}} \sim \varepsilon^8,$$

$$\tilde{g}_1 = \cos \pi_{10}^{\circ} - \frac{s_2' \varepsilon^5}{e_{10*} \xi_{102}^{\circ}} [2 \cos g_3 - 9 \cos(g_4 - g_3) - \cos(g_4 - 3g_3)]_0^t + \\ + \frac{\varepsilon \eta_{102}}{e_{10*} \xi_{102}^{\circ}},$$

$$\tilde{g}_2 = \sin \pi_{10}^{\circ} - \frac{s_2' \varepsilon^5}{e_{10*} \xi_{102}^{\circ}} [2 \sin g_3 - 9 \sin(g_4 - g_3) + \sin(g_4 - 3g_3)]_0^t + \\ + \frac{\varepsilon \eta_{105}}{e_{10*} \xi_{102}^{\circ}},$$

$$\tilde{q}_{101} = \frac{96 M_0 (a_{10}^{\circ})^4}{(M_3 + M_{10}) (a_3^{\circ})^3 a_{10*}} = \tilde{q}'_{101} \varepsilon,$$

$$\tilde{q}_{102} = \frac{8 M_0 (a_{10}^{\circ})^3}{(M_3 + M_{10}) (a_3^{\circ})^3} = \tilde{q}'_{102} \varepsilon^4, \quad \tilde{q}_{105} = \tilde{q}_{102} = \tilde{q}'_{105} \varepsilon^4.$$

$$\tilde{q}_{106} = 16 V_{10*} e_{10*} i_{10*} \sqrt{\frac{a_{10*}}{G(M_3 + M_{10})}} = \tilde{q}'_{106} \varepsilon^3,$$

9.3. О выборе новых переменных

Покажем, как получена формула (9.1) для η_{16} . Из уравнения (3.4) для ξ_{16} следует равенство

$$\xi_{16} = \xi_{16}^{\circ} + \int_0^t \left[\frac{q_{17}}{(1-e_1 \cos E_1) \xi_{11}^{3/2}} + (\delta F_1, J_{16}) \right] dt.$$

Разложим подынтегральное выражение по малому параметру и оставим старшие члены. Получим:

$$\xi_{16} = \xi_{16}^{\circ} + \int_0^t \left\{ \frac{q_{17}'}{\xi_{11}^{3/2}} [1 + e_{1*} \varepsilon^2 \xi_{12} \cos E_1] + O(\varepsilon^4) \right\} dt. \quad (9.4)$$

Из (8.1), (8.2) следуют формулы

$$\frac{d\xi_{11}}{dt} = O(\varepsilon^{18}), \quad \xi_{11} = \xi_{11}^{\circ} + O(\varepsilon^{18}), \quad (9.5)$$

$$\frac{d\xi_{12}}{dt} = O(\varepsilon^{16}), \quad \xi_{12} = \xi_{12}^{\circ} + O(\varepsilon^{16}), \quad E_1 = E_{1*} \varepsilon^{-3} \xi_{16}.$$

Подставим в подынтегральное выражение (9.4) значения ξ_{11} , ξ_{12} из (9.5), проинтегрируем первое слагаемое. Второе слагаемое проинтегрируем по частям, взяв сначала интеграл от E_1 :

$$\begin{aligned} \xi_{16} &= \xi_{16}^{\circ} + \frac{q'_{17}t}{(\xi_{11}^{\circ})^{3/2}} + \left[\frac{q'_{17}e'_{1*}\xi_{12}^{\circ}\varepsilon^5}{(\xi_{11}^{\circ})^{3/2}E'_{1*}d\xi_{16}/dt} \sin E_1 \right]_0^t - \\ &\quad - \int_0^t \left[\frac{q'_{17}e'_{1*}\xi_{12}^{\circ}\varepsilon^5}{(\xi_{11}^{\circ})^{3/2}E'_{1*}} \sin E_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{d\xi_{16}/dt} \right) + O(\varepsilon^4) \right] dt = \\ &= \xi_{16}^{\circ} + \frac{q'_{17}t}{(\xi_{11}^{\circ})^{3/2}} + \frac{e'_{1*}\xi_{12}^{\circ}\varepsilon^5}{E'_{1*}} [\sin E_1]_0^t + O(\varepsilon^4), \\ E_1 &= E_{1*} \varepsilon^{-3} \xi_{16} = E_1^{\circ} + \frac{E'_{1*} \varepsilon^{-3} q'_{17}t}{(\xi_{11}^{\circ})^{3/2}} + e_1^{\circ} [\sin E_1]_0^t + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

За η_{16} принято выражение

$$\begin{aligned} \eta_{16} &= E_1 - \hat{E}_1 - e_1^{\circ} (\sin E_1 - \sin E_1^{\circ}), \\ \hat{E}_1 &= E_1^{\circ} + \frac{E'_{1*} \varepsilon^{-3} q'_{17}t}{(\xi_{11}^{\circ})^{3/2}} = E_1^{\circ} + \sqrt{\frac{G(M_0 + M_1)}{(a_1^{\circ})^3}} T. \end{aligned}$$

Аналогично получены формулы для почти всех остальных переменных η_{kj} : правые части дифференциальных уравнений (8.2) разлагаются по малому параметру, берётся интеграл от старших членов разложения. Члены интегрируются по частям. Сначала интегрируется та часть, производная которой по времени имеет наименьший порядок по ε . При таком интегрировании порядок слагаемых под знаком интеграла увеличивается. Интегрирование идёт до тех пор, пока разность между исходной переменной и слагаемыми вне интеграла не даст переменную с нужными свойствами, а именно: производная переменной по времени имеет положительный порядок по ε , переменная равна нулю при $t = 0$; переменная

входит в аргументы синусов и косинусов, имея множителем неотрицательную степень ε .

Замечание 9.1. В задаче (9.2) было бы желательно все постоянные коэффициенты нормализовать по малому параметру заново. Здесь это сделано частично из-за громоздкости процедуры.

Замечание 9.2. В задаче (9.2) для переменных e_k, i_k используются два представления начальных значений:

$$e_k^\circ \text{ и } e_k^\circ = e_{k*} \xi_{k2}^\circ, \quad i_k^\circ \text{ и } i_k^\circ = i_{k*} \xi_{k3}^\circ.$$

Это вызвано тем, что при доказательстве аналитичности правых частей уравнений (9.2) для $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon} = 0,501$ не удалось ограничиться одним представлением $e_{k*} \xi_{k2}^\circ, i_{k*} \xi_{k3}^\circ$ (смотрите §43).

§10. Алгоритм построения решения

Утверждение 10.1. *Земная математическая модель эквивалентна почти регулярной задаче Коши*

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \varepsilon, f(t, \varepsilon)), \quad x|_{t=0} = 0 \quad (10.1)$$

на множестве

$$x \in \mathbf{C}^{60}, \quad \|x\| \leq \delta, \quad \varepsilon \in \mathbf{C}, \quad |\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon} = 0,501, \quad f \in D_f,$$

$$D_f = \{f: f_{kj}^2 + f_{k,j+1}^2 = 1; k = \overline{1,3}, 10; j = 1, 3, 5, 7\} \subset \mathbf{R}^{32}.$$

Здесь

$$x = (\eta_{kj}, k = \overline{1,10}, j = \overline{1,6}); \quad (10.2)$$

$$f = (f_{kj}; k = \overline{1,3}, 10; j = \overline{1,8}),$$

$$f_{k1} = \cos \Omega_k^\circ, \quad f_{k2} = \sin \Omega_k^\circ, \quad f_{k3} = \cos \pi_k^\circ, \quad f_{k4} = \sin \pi_k^\circ,$$

$$f_{k5} = \cos \hat{E}_k, \quad f_{k6} = \sin \hat{E}_k, \quad f_{k7} = \cos E_k^\circ, \quad f_{k8} = \sin E_k^\circ;$$

$$\hat{E}_k = E_k^\circ + \omega_k t, \quad \omega_k = \frac{E_{k*} q_{k7}}{(\xi_{k1}^\circ)^{3/2}} = \omega'_k \varepsilon^{0k},$$

$$o_1 = -3, \quad o_2 = -2, \quad o_3 = 0, \quad o_{10} = -4,$$

η_{kj} – переменные (9.1), δ – положительная постоянная.

(10.1) – компактная запись задачи (9.2). Постоянные величины нормализованы по малому параметру ε , как указано в земной модели. Параметры со штрихами и начальные значения r_k° , v_k° , e_k° , ξ_{kj}° рассматриваются как параметры, не зависящие от t , ε . Все правые части уравнений (10.1) пропорциональны положительным степеням ε .

Правые части уравнений (10.1) зависят от переменных η_{kj} непосредственно и через оскулирующие элементы и декартовы координаты. Опишем эту зависимость.

10.1. Зависимость оскулирующих элементов от переменных η_{kj}

Из (9.1) следуют формулы:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{1*} \xi_{11} = a_{1*} (\xi_{11}^{\circ} + \varepsilon^4 \eta_{11}), & a_2 &= a_{2*} \xi_{21} = a_{2*} (\xi_{21}^{\circ} + \varepsilon^3 \eta_{21}), & (10.3) \\ a_3 &= a_{3*} \xi_{31} = a_{3*} (\xi_{31}^{\circ} + \varepsilon^4 \eta_{31}), & e_1 &= e_1^{\circ} + e_{1*} \varepsilon^4 \eta_{12}, \\ e_k &= e_k^{\circ} + e_{k*} \eta_{k2}, & i_k &= i_{k*} (\xi_{k3}^{\circ} + \eta_{k3}), & k &= 1, 2, 10. \end{aligned}$$

Из (9.1), (10.2) следуют формулы:

$$\begin{aligned} \cos \Omega_1 &= f_{11} \cos \eta_{14} - f_{12} \sin \eta_{14}, & \sin \Omega_1 &= f_{12} \cos \eta_{14} + f_{11} \sin \eta_{14}, & (10.4) \\ \cos \pi_1 &= f_{13} \cos \eta_{15} - f_{14} \sin \eta_{15}, & \sin \pi_1 &= f_{14} \cos \eta_{15} + f_{13} \sin \eta_{15}, \\ \cos E_1 &= f_{15} \cos g - f_{16} \sin g, & \sin E_1 &= f_{16} \cos g + f_{15} \sin g, \\ & & g &= e_1^{\circ} (\sin E_1 - f_{18}) + \eta_{16}, \\ \cos \Omega_2 &= f_{21} \cos \eta_{24} - f_{22} \sin \eta_{24}, & \sin \Omega_2 &= f_{22} \cos \eta_{24} + f_{21} \sin \eta_{24}, \\ \cos \pi_2 &= f_{23} \cos \eta_{25} - f_{24} \sin \eta_{25}, & \sin \pi_2 &= f_{24} \cos \eta_{25} + f_{23} \sin \eta_{25}, \\ \cos E_2 &= f_{25} \cos \eta_{26} - f_{26} \sin \eta_{26}, & \sin E_2 &= f_{26} \cos \eta_{26} + f_{25} \sin \eta_{26}, \\ \operatorname{tg} \left(\frac{i_3}{2} \right) &= \left\{ \left[f_{31} \operatorname{tg} \left(\frac{i_3^{\circ}}{2} \right) + \varepsilon^2 \eta_{33} \right]^2 + \left[f_{32} \operatorname{tg} \left(\frac{i_3^{\circ}}{2} \right) + \varepsilon^2 \eta_{34} \right]^2 \right\}^{1/2}, \\ \cos \Omega_3 &= \frac{f_{31} \operatorname{tg} (i_3^{\circ}/2) + \varepsilon^2 \eta_{33}}{\operatorname{tg} (i_3/2)}, & \sin \Omega_3 &= \frac{f_{32} \operatorname{tg} (i_3^{\circ}/2) + \varepsilon^2 \eta_{34}}{\operatorname{tg} (i_3/2)}, & i_3^{\circ} &= i_{3*} \xi_{33}^{\circ}, \\ \cos \pi_3 &= f_{33} \cos \eta_{35} - f_{34} \sin \eta_{35}, & \sin \pi_3 &= f_{34} \cos \eta_{35} + f_{33} \sin \eta_{35}, \end{aligned}$$

$$\cos E_3 = f_{35} \cos \eta_{36} - f_{36} \sin \eta_{36}, \quad \sin E_3 = f_{36} \cos \eta_{36} + f_{35} \sin \eta_{36},$$

$$a_{10} = a_{10*} \xi_{101} = a_{10*} [\xi_{101}^\circ + s'_1 \varepsilon^7 \cos(g_4 - 2g_3)]_0^t + \varepsilon^5 \eta_{101},$$

$$e_{10} = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}, \quad \cos \pi_{10} = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \sin \pi_{10} = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}},$$

$$\cos \Omega_{10} = f_{101} \cos \eta_{104} - f_{102} \sin \eta_{104},$$

$$\sin \Omega_{10} = f_{102} \cos \eta_{104} + f_{101} \sin \eta_{104},$$

$$\cos E_{10} = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_1 \cos g_3 + g_2 \sin g_3),$$

$$\sin E_{10} = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_1 \sin g_3 - g_2 \cos g_3),$$

$$s_1 = \frac{3M_0(a_{10}^\circ)^4}{2(M_3 + M_{10})(a_3^\circ)^3 a_{10*}} = s'_1 \varepsilon^7, \quad s_2 = \frac{M_0(a_{10}^\circ)^3}{4(M_3 + M_{10})(a_3^\circ)^3} = s'_2 \varepsilon^9,$$

$$g_1 = e_{10}^\circ f_{103} - s'_2 \varepsilon^9 [2 \cos g_3 - 9 \cos(g_4 - g_3) - \cos(g_4 - 3g_3)]_0^t + \varepsilon^5 \eta_{102},$$

$$g_2 = e_{10}^\circ f_{104} - s'_2 \varepsilon^9 [2 \sin g_3 - 9 \sin(g_4 - g_3) + \sin(g_4 - 3g_3)]_0^t + \varepsilon^5 \eta_{105},$$

$$g_3 = \pi_{10}^\circ + \hat{E}_{10} + e_{10}^\circ (\sin E_{10} - f_{108}) + \eta_{106},$$

$$g_4 = 2(\pi_3^\circ + \hat{E}_3 + \eta_{35} + \eta_{36}).$$

Формулы (10.4) для $\sin E_1$, $\sin E_{10}$ являются, на самом деле, уравнениями для $\sin E_1$, $\sin E_{10}$.

10.2. Зависимость декартовых координат от переменных η_{kj}

Для $k = \overline{1, 3}, 10$ декартовы координаты являются сложными функциями от почти регулярных переменных, так как зависят от них через оскулирующие элементы:

$$R_k = R_{k*} \mathbf{r}_k = R_{k*} q_{k9} \xi_{k1} \left[(\cos E_k - e_k) \mathbf{h}_{k1} + \sqrt{1 - e_k^2} \sin E_k \mathbf{h}_{k2} \right], \quad (10.5)$$

$$V_k = \frac{1}{1 - e_k \cos E_k} \sqrt{\frac{\mu_k}{a_k}} \left(-\sin E_k \mathbf{h}_{k1} + \sqrt{1 - e_k^2} \cos E_k \mathbf{h}_{k2} \right),$$

$$\mathbf{h}_{k1} = \begin{pmatrix} \cos(\pi_k - \Omega_k) \cos \Omega_k - \sin(\pi_k - \Omega_k) \sin \Omega_k \cos i_k \\ \cos(\pi_k - \Omega_k) \sin \Omega_k + \sin(\pi_k - \Omega_k) \cos \Omega_k \cos i_k \\ \sin(\pi_k - \Omega_k) \sin i_k \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h}_{k2} = \begin{pmatrix} -\sin(\pi_k - \Omega_k) \cos \Omega_k - \cos(\pi_k - \Omega_k) \sin \Omega_k \cos i_k \\ -\sin(\pi_k - \Omega_k) \sin \Omega_k + \cos(\pi_k - \Omega_k) \cos \Omega_k \cos i_k \\ \cos(\pi_k - \Omega_k) \sin i_k \end{pmatrix};$$

$$\mu_k = G(M_0 + M_k), \quad k = \overline{1,3}; \quad \mu_{10} = G(M_3 + M_{10}).$$

Для $k = \overline{4,9}$ формулы следуют из (9.1):

$$\mathbf{R}_k = R_{k*} \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{V}_k = V_{k*} \mathbf{v}_k, \quad (10.6)$$

$$r_{kj} = r_{kj}^\circ + \eta_{kj}, \quad v_{kj} = v_{kj}^\circ + \eta_{k, j+3}, \quad j = \overline{1,3}.$$

10.3. Построение решения

Утверждение 10.1 следует из Результата 43.1. Для построения решения задачи (10.1) рассматривается вспомогательная задача с двумя малыми параметрами:

$$\frac{dy}{dt} = F(y, \varepsilon, f(t, \mu)), \quad y|_{t=0} = 0.$$

Решение вспомогательной задачи строится в виде степенного ряда

$$y(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{K=0}^{\infty} y^{(K)}(t, \mu) \varepsilon^K.$$

Решение почти регулярной задачи Коши (10.1) имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{K=0}^{\infty} y^{(K)}(t, \varepsilon) \varepsilon^K. \quad (10.7)$$

Задача (10.1) удовлетворяет условиям Теорем 41.1, 41.3 при любых значениях $\bar{t} > 0$, $n \geq 0$, некотором значении $\delta > 0$ и $\bar{\varepsilon} = 0,501$. Это следует из Результата 43.1. Однако постоянная ε , в Теоремах 41.1, 41.3 не определена, поэтому на основании этих теорем нельзя утверждать о существовании решения земной математической модели при $\varepsilon = 0,5$.

Задача (10.1) удовлетворяет условиям Теоремы 41.2 при любом значении $\bar{t} > 0$, некотором значении $\delta > 0$ и $\bar{\varepsilon} = 0,501$ (смотрите Результат 43.1). По этой теореме при $\varepsilon = 0,5$ существует такая постоянная t_* , $t_* > 0$, что на множестве $0 \leq t \leq t_*$: 1) решение задачи (10.1) существует и единственно, 2) ряд (10.7) сходится равномерно к решению задачи (10.1). Переходя к размерным переменным, получаем следующий результат.

Результат 10.1. Решение земной математической модели существует и единственно на ненулевом отрезке $0 \leq T \leq \bar{T}$. Решение описывается формулами (10.5), (10.6), где оскулирующие элементы связаны с вектором $x = (\eta_{kj})$ формулами (10.3), (10.4), а вектор x представим в виде ряда (10.7), равномерно сходящегося на $0 \leq T \leq \bar{T}$.

10.4. О проблеме малых знаменателей

При решении задач небесной механики часто возникает *проблема малых знаменателей*, которая заключается в следующем. Решение задачи строится в виде ряда, коэффициенты которого могут оказаться сколь угодно большими (по модулю) из-за малых знаменателей. В результате ряд не сходится или сходится медленно [17].

При решении задач предложенным методом (с помощью перехода к почти регулярной задаче Коши) проблема малых знаменателей не возникает благодаря нескольким обстоятельствам.

10.4.1. Метод решения существенно использует конечность интервала времени исследования задачи.

При увеличении интервала времени сингулярность задачи "увеличивается", так как порядок правых частей уравнений по малому параметру уменьшается. На интервале времени порядка $1/6$ периода вращения Луны вокруг Земли (лунная математическая модель) правые части уравнений движения Солнечной системы имеют порядок неотрицательных степеней малого параметра. На интервале времени порядка $1/6$ периода вращения Земли вокруг Солнца (земная математическая модель) порядок правых частей уравнений меньше, чем в лунной модели, и есть правые части порядка отрицательных степеней малого параметра.

Формулы перехода к почти регулярным переменным усложняются при увеличении интервала времени исследования задачи. Например, переход от эксцентрической аномалии E_k к средней аномалии в небесной механике можно рассматривать как первый шаг на пути такого усложнения.

10.4.2. При построении решения в виде ряда ограничиваются конечным числом членов ряда (частичную сумму ряда используют в дальнейшем для получения численных значений).

10.4.3. При интегрировании тригонометрических функций предлагается предварительно нормализовать частоты по малому параметру следующим образом.

Пусть требуется проинтегрировать $\cos \omega t$, где

$$\omega = \omega_1 k_1 + \dots + \omega_K k_K,$$

k_1, \dots, k_K – целые числа, $\omega_1, \dots, \omega_K$ – степенные функции малого параметра. Тогда нужно перейти к численным значениям $\omega_1, \dots, \omega_K$, вычислить ω , нормализовать ω по малому параметру: $\omega = \omega' \varepsilon^n$, – и применить формулы

$$\int_0^t \cos \omega t dt = \frac{\sin \omega t}{\omega} \quad \text{при } n < 0 \quad (\text{или } n \leq 0),$$

$$\int_0^t \cos \omega t dt = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \omega^{2i} t^{2i+1}}{(2i+1)!} \quad \text{при } n \geq 0 \quad (\text{или } n > 0),$$

в которых заменить ряд частичной суммой.

§11. Асимптотическое решение

Интегрируя уравнения (9.2) и подставляя η_{kj} в формулы (10.3), (10.4), (10.6) и, далее, в (10.5), получим асимптотическое решение земной математической модели.

11.1. Асимптотические формулы для больших полуосей

$$\begin{aligned} a_1 = a_1^\circ + \left\{ \frac{3M_2(a_1^\circ)^4}{2(M_0+M_1)(a_2^\circ)^3} \cos 2(\pi_1^\circ + \hat{E}_1 - \pi_2^\circ - \hat{E}_2) + \right. \\ \left. + \frac{3M_5(a_1^\circ)^4}{2(M_0+M_1)|R_{51}^\circ|^5} \left\{ [(R_{5x}^\circ)^2 - (R_{5y}^\circ)^2] \cos 2(\pi_1^\circ + \hat{E}_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2R_{5x}^\circ R_{5y}^\circ \sin 2(\pi_1^\circ + \hat{E}_1) \right\} \right\}^T + a_{1*} O(\varepsilon^{22}), \end{aligned}$$

$$\hat{E}_1 = E_1^\circ + \sqrt{\frac{G(M_0+M_1)}{(a_1^\circ)^3}} T;$$

$$\begin{aligned} a_2 = a_2^\circ + & \left\{ \frac{2M_3(a_2^\circ)^2}{M_0+M_2} [(a_2^\circ)^2 - 2a_2^\circ a_3^\circ \cos(\pi_2^\circ + \hat{E}_2 - \pi_3^\circ - \hat{E}_3) + (a_3^\circ)^2]^{-1/2} - \right. \\ & - \frac{2M_3(a_2^\circ)^3}{(M_0+M_2)(a_3^\circ)^2} \cos(\pi_2^\circ + \hat{E}_2 - \pi_3^\circ - \hat{E}_3) + \\ & + \frac{3M_5(a_2^\circ)^4}{2(M_0+M_2)|R_{5y}^\circ|^5} \left\{ [(R_{5x}^\circ)^2 - (R_{5y}^\circ)^2] \cos 2(\pi_2^\circ + \hat{E}_2) + \right. \\ & \left. \left. + 2R_{5x}^\circ R_{5y}^\circ \sin 2(\pi_2^\circ + \hat{E}_2) \right\} \right\}_0^T + a_2 \cdot O(\varepsilon^{20}), \end{aligned}$$

$$\hat{E}_2 = E_2^\circ + \sqrt{\frac{G(M_0+M_2)}{(a_2^\circ)^3}} T;$$

$$a_3 = a_3^\circ + \frac{2M_{10}(a_3^\circ)^{3/2}}{\sqrt{(M_0+M_3)(M_3+M_{10})a_{10}^\circ}} [\cos(\pi_3^\circ + \hat{E}_3 - \pi_{10}^\circ - \hat{E}_{10})]_0^T + a_3 \cdot O(\varepsilon^{12}),$$

$$\hat{E}_3 = E_3^\circ + \sqrt{\frac{G(M_0+M_3)}{(a_3^\circ)^3}} T;$$

$$a_{10} = a_{10}^\circ + \frac{3M_0(a_{10}^\circ)^4}{2(M_3+M_{10})(a_3^\circ)^3} [\cos 2(\pi_3^\circ + \hat{E}_3 - \pi_{10}^\circ - \hat{E}_{10})]_0^T + a_{10} \cdot O(\varepsilon^8),$$

$$\hat{E}_{10} = E_{10}^\circ + \sqrt{\frac{G(M_3+M_{10})}{(a_{10}^\circ)^3}} T; \quad [f]_0^T = f(T) - f(0).$$

11.3. Асимптотическое решение

$$\mathbf{R}_1 = \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_1 + R_{1*} \cdot O(\varepsilon^6), \quad \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_1 = (\tilde{\tilde{R}}_{11}, \tilde{\tilde{R}}_{12}, \tilde{\tilde{R}}_{13}), \quad (11.1)$$

$$\tilde{\tilde{R}}_{11} = a_1^\circ \left[\cos(\pi_1^\circ + \hat{\hat{E}}_1) - e_1^\circ \cos \pi_1^\circ + \frac{1}{2}(e_1^\circ)^2 \sin \hat{E}_1 \sin \pi_1^\circ \right],$$

$$\tilde{\tilde{R}}_{12} = a_1^\circ \left[\sin(\pi_1^\circ + \hat{\hat{E}}_1) - e_1^\circ \sin \pi_1^\circ - \frac{1}{2}(e_1^\circ)^2 \sin \hat{E}_1 \cos \pi_1^\circ \right],$$

$$\tilde{\tilde{R}}_{13} = a_1^\circ i_1^\circ \left[\sin(\pi_1^\circ - \Omega_1^\circ + \hat{\hat{E}}_1) - e_1^\circ \sin(\pi_1^\circ - \Omega_1^\circ) \right],$$

$$\hat{E}_1 = E_1^\circ + \sqrt{\frac{G(M_0+M_1)}{(a_1^\circ)^3}} T, \quad \hat{\hat{E}}_1 = \hat{E}_1 + e_1^\circ [\sin \hat{E}_1]_0^T,$$

$$\hat{\hat{\hat{E}}}_1 = \hat{E}_1 + e_1^\circ [\sin \hat{\hat{E}}_1]_0^T;$$

$$\mathbf{R}_2 = \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_2 + R_2 \cdot \mathbf{O}(\varepsilon^{10}), \quad \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_2 = (\tilde{\tilde{R}}_{21}, \tilde{\tilde{R}}_{22}, \tilde{\tilde{R}}_{23}),$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{R}}_{21} = a_2^\circ & \left[\cos(\pi_2^\circ + \hat{E}_2) - e_2^\circ \cos \pi_2^\circ - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} (i_2^\circ)^2 \sin(\Omega_2^\circ - \pi_2^\circ - \hat{E}_2) \sin \Omega_2^\circ \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{R}}_{22} = a_2^\circ & \left[\sin(\pi_2^\circ + \hat{E}_2) - e_2^\circ \sin \pi_2^\circ + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (i_2^\circ)^2 \sin(\Omega_2^\circ - \pi_2^\circ - \hat{E}_2) \cos \Omega_2^\circ \right], \end{aligned}$$

$$\tilde{\tilde{R}}_{23} = -a_2^\circ i_2^\circ \sin(\Omega_2^\circ - \pi_2^\circ - \hat{E}_2),$$

$$\hat{E}_2 = E_2^\circ + \sqrt{\frac{G(M_0+M_2)}{(a_2^\circ)^3}} T, \quad \hat{\hat{E}}_2 = \hat{E}_2 + e_2^\circ [\sin \hat{E}_2]_0^T;$$

$$\mathbf{R}_3 = \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_3 + R_3 \cdot \mathbf{O}(\varepsilon^7), \quad \tilde{\tilde{\mathbf{R}}}_3 = (\tilde{\tilde{R}}_{31}, \tilde{\tilde{R}}_{32}, 0),$$

$$\tilde{\tilde{R}}_{31} = a_3^\circ \left[\cos(\pi_3^\circ + \hat{E}_3) - e_3^\circ \cos \pi_3^\circ \right],$$

$$\tilde{\tilde{R}}_{32} = a_3^\circ \left[\sin(\pi_3^\circ + \hat{E}_3) - e_3^\circ \sin \pi_3^\circ \right],$$

$$\hat{E}_3 = E_3^\circ + \sqrt{\frac{G(M_0+M_3)}{(a_3^\circ)^3}} T, \quad \hat{\hat{E}}_3 = \hat{E}_3 + e_3^\circ [\sin \hat{E}_3]_0^T;$$

$$\mathbf{R}_4 = \sum_{K=0}^{15} T^K \mathbf{P}_{4K} + R_{4*} \mathbf{O}(\varepsilon^{16}),$$

$$\mathbf{R}_5 = \sum_{K=0}^6 T^K \mathbf{P}_{5K} + R_{5*} \mathbf{O}(\varepsilon^{19}),$$

$$\mathbf{R}_6 = \tilde{\mathbf{R}}_{6(20)} + R_{6*} \mathbf{O}(\varepsilon^{20}), \quad \tilde{\mathbf{R}}_{6(20)} = \sum_{K=0}^3 T^K \mathbf{P}_{6K} - \frac{GM_5 T^2}{2 |\mathbf{R}_5^\circ|^3} \mathbf{R}_5^\circ;$$

$$\mathbf{R}_7 = \tilde{\mathbf{R}}_{7(21)} + R_{7*} \mathbf{O}(\varepsilon^{21}), \quad \tilde{\mathbf{R}}_{7(21)} = \sum_{K=0}^3 T^K \mathbf{P}_{7K} - \frac{GM_5 T^2}{2 |\mathbf{R}_5^\circ|^3} \mathbf{R}_5^\circ;$$

$$\mathbf{R}_8 = \tilde{\mathbf{R}}_{8(22)} + R_{8*} \mathbf{O}(\varepsilon^{22}), \quad \tilde{\mathbf{R}}_{8(22)} = \sum_{K=0}^3 T^K \mathbf{P}_{8K} - \frac{GM_5 T^2}{2 |\mathbf{R}_5^\circ|^3} \mathbf{R}_5^\circ;$$

$$\mathbf{R}_9 = \tilde{\mathbf{R}}_{9(22)} + R_{9*} \mathbf{O}(\varepsilon^{22}), \quad \tilde{\mathbf{R}}_{9(22)} = \sum_{K=0}^3 T^K \mathbf{P}_{9K} - \frac{GM_5 T^2}{2 |\mathbf{R}_5^\circ|^3} \mathbf{R}_5^\circ;$$

$$\mathbf{R}_{10} = \tilde{\mathbf{R}}_{10} + R_{10*} \mathbf{O}(\varepsilon^7), \quad \tilde{\mathbf{R}}_{10} = (\tilde{\mathbf{R}}_{101}, \tilde{\mathbf{R}}_{102}, \tilde{\mathbf{R}}_{103}),$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{101} = \hat{a}_{10} \left[\cos \hat{\psi}_{10} - \hat{e}_{10} \cos \hat{\pi}_{10} - \frac{1}{2} (i_{10}^\circ)^2 \sin(\Omega_{10}^\circ - \psi_{10}) \cdot \sin \Omega_{10}^\circ \right],$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{102} = \hat{a}_{10} \left[\sin \hat{\psi}_{10} - \hat{e}_{10} \sin \hat{\pi}_{10} + \frac{1}{2} (i_{10}^\circ)^2 \sin(\Omega_{10}^\circ - \psi_{10}) \cdot \cos \Omega_{10}^\circ \right],$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_{103} = -a_{10}^\circ i_{10}^\circ \sin(\hat{\Omega}_{10} - \hat{\psi}_{10}),$$

$$\hat{E}_3 = E_3^\circ + \sqrt{\frac{G(M_0+M_3)}{(a_3^\circ)^3}} T, \quad \psi_3 = \pi_3^\circ + \hat{E}_3, \quad \psi_3^\circ = \pi_3^\circ + E_3^\circ,$$

$$\hat{E}_{10} = E_{10}^\circ + \sqrt{\frac{G(M_3+M_{10})}{(a_{10}^\circ)^3}} T, \quad \psi_{10} = \pi_{10}^\circ + \hat{E}_{10}, \quad \psi_{10}^\circ = \pi_{10}^\circ + E_{10}^\circ,$$

$$\hat{a}_{10} = a_{10}^\circ + \frac{3M_0(a_{10}^\circ)^4}{2(M_3+M_{10})(a_3^\circ)^3} [\cos 2(\psi_3 - \psi_{10})]_0^T,$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_{10} = e_{10}^\circ + \frac{15}{8} M_0 e_{10}^\circ & \sqrt{\frac{(a_{10}^\circ)^3}{(M_0+M_3)(M_3+M_{10})(a_3^\circ)^3}} [\cos 2(\psi_3 - \pi_{10}^\circ)]_0^T - \\ & - \frac{M_0(a_{10}^\circ)^3}{4(M_3+M_{10})(a_3^\circ)^3} \left[2 \cos \hat{E}_{10} - 9 \cos(2\psi_3 - 2\pi_{10}^\circ - \hat{E}_{10}) - \right. \\ & \left. - \cos(2\psi_3 - 2\pi_{10}^\circ - 3\hat{E}_{10}) \right]_0^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\Omega}_{10} &= \Omega_{10}^{\circ} - \frac{3M_0T}{4(a_3^0)^3} \sqrt{\frac{G(a_{10}^0)^3}{M_3+M_{10}}} + \\
&+ \frac{3M_0}{8} \sqrt{\frac{(a_{10}^0)^3}{(M_0+M_3)(M_3+M_{10})(a_3^0)^3}} [\sin 2(\psi_3 - \Omega_{10}^{\circ})]_0^T, \\
\hat{\pi}_{10} &= \pi_{10}^{\circ} + \frac{3M_0T}{4(a_3^0)^3} \sqrt{\frac{G(a_{10}^0)^3}{M_3+M_{10}}} + \\
&+ \frac{15M_0}{8} \sqrt{\frac{(a_{10}^0)^3}{(M_0+M_3)(M_3+M_{10})(a_3^0)^3}} [\sin 2(\psi_3 - \pi_{10}^{\circ})]_0^T - \\
&- \frac{M_0(a_{10}^0)^3}{4(M_3+M_{10})(a_3^0)^3 e_{10}^{\circ}} [2 \sin \hat{E}_{10} - 9 \sin(2\psi_3 - 2\pi_{10}^{\circ} - \hat{E}_{10}) + \\
&\quad + \sin(2\psi_3 - 2\pi_{10}^{\circ} - 3\hat{E}_{10})]_0^T, \\
\hat{\hat{E}}_{10} &= \hat{E}_{10} - \frac{M_0T}{4(a_3^0)^3} \sqrt{\frac{G(a_{10}^0)^3}{M_3+M_{10}}} [7 - 9 \cos 2(\psi_3^{\circ} - \psi_{10}^{\circ})] - \\
&- \frac{15M_0}{8} \sqrt{\frac{(a_{10}^0)^3}{(M_0+M_3)(M_3+M_{10})(a_3^0)^3}} [\sin 2(\psi_3 - \pi_{10}^{\circ})]_0^T + \\
&+ \frac{M_0(a_{10}^0)^3}{4(M_3+M_{10})(a_3^0)^3 e_{10}^{\circ}} [2 \sin \hat{E}_{10} - 9 \sin(2\psi_3 - 2\pi_{10}^{\circ} - \hat{E}_{10}) + \\
&\quad + \sin(2\psi_3 - 2\pi_{10}^{\circ} - 3\hat{E}_{10})]_0^T, \\
\hat{\psi}_{10} &= \psi_{10} - \frac{M_0T}{4(a_3^0)^3} \sqrt{\frac{G(a_{10}^0)^3}{M_3+M_{10}}} [4 - 9 \cos 2(\psi_3^{\circ} - \psi_{10}^{\circ})], \\
\hat{\hat{\psi}}_{10} &= \hat{\psi}_{10} + \frac{9M_0(a_{10}^0)^3 T}{4(M_3+M_{10})} \sqrt{\frac{G(M_0+M_3)}{(a_3^0)^9}} \cos 2(\psi_3^{\circ} - \psi_{10}^{\circ}) -
\end{aligned}$$

$$-\frac{3M_0 e_{10}^{\circ T}}{2(a_3^{\circ})^3} \sqrt{\frac{G(a_{10}^{\circ})^3}{M_3+M_{10}}} [\cos E_{10}^{\circ} + 3 \cos(2\psi_3^{\circ} - 2\pi_{10}^{\circ} - E_{10}^{\circ})] + \\ + \hat{e}_{10} \left[\sin \hat{E}_{10} \right]_0^T + \frac{21M_0(a_{10}^{\circ})^3}{8(M_3+M_{10})(a_3^{\circ})^3} [\sin 2(\psi_3 - \psi_{10})]_0^T;$$

$$[f]_0^T = f(T) - f(0).$$

(Функция \hat{E}_{10} используется в лунной модели, поэтому здесь введено обозначение $\hat{\hat{E}}_{10}$).

Формулы для P_{kk} даны в (5.2). В Табл. 11.1 приведены численные значения асимптотических приближений и порядок отброшенных членов по ε :

$$R_k(T_{3*}) = \tilde{\tilde{R}}_{k(n)}(T_{3*}) + R_{k*}O(\varepsilon^n).$$

Для сравнения даны два приближения. Из-за громоздкости формул для $k = 4, 5$ ограничились следующими приближениями:

$$R_4 = \tilde{\tilde{R}}_{4(6)} + R_{4*}O(\varepsilon^6), \quad \tilde{\tilde{R}}_{4(6)} = \sum_{K=0}^5 T^K P_{4K}; \\ R_5 = \tilde{\tilde{R}}_{5(18)} + R_{5*}O(\varepsilon^{18}), \quad \tilde{\tilde{R}}_{5(18)} = \sum_{K=0}^5 T^K P_{5K}.$$

В Табл. 11.1, кроме описанных выше приближений, даны значения модулей и их погрешности (о погрешностях функций смотрите в §37):

$$\tilde{\tilde{R}}_{k(n)}(T_{3*}) = \left| \tilde{\tilde{R}}_{k(n)}(T_{3*}) \right|, \quad \tilde{\tilde{\Delta}} = \Delta \left(\tilde{\tilde{R}}_{k(n)}(T_{3*}) \right).$$

Наибольший вклад в погрешности $\tilde{\tilde{\Delta}}$ вносят погрешности гравитационной постоянной G ($k = \overline{1,3,5,10}$), начальной большой полуоси ($k = 2$) и начальных скоростей ($k = \overline{6,9}$) (смотрите формулы (1.1), Табл. 1.1, 1.2).

Замечание 11.1. Формулы (11.1) получены для начальных значений в Табл. 1.1, 1.2.

Замечание 11.2. Векторы $\tilde{\tilde{R}}_k$ ($k = \overline{1,3,10}$) получены интегрированием по частям, как описано в п. 9.3.

Таблица 11.1
Асимптотическое решение, порядок приближения
и погрешность модулей

k	$\tilde{R}_{k1(n)}(T_{3*})$	$\tilde{R}_{k2(n)}(T_{3*})$	$\tilde{R}_{k3(n)}(T_{3*})$	n	$\tilde{R}_{k(n)}(T_{3*})$	$\tilde{\Delta} \cdot 10^6$
1	-0,10336 A	-0,45511 A	-0,01212 A	4	0,466855 A	1 A
	-0,12020 A	-0,45077 A	-0,02764 A	6	0,467341 A	13 A
2	-0,61703 A	0,36844 A	0,04074 A	8	0,719817 A	0,52 A
	-0,61586 A	0,36816 A	0,04074 A	10	0,718668 A	0,50 A
3	-0,76189 A	-0,64772 A	0 A	6	1,000004 A	0,50 A
	-0,75797 A	-0,66424 A	0 A	7	1,007840 A	0,76 A
4	-1,20157 A	0,95130 A	0,04946 A	5	1,533354 A	44 A
	-1,14971 A	0,98195 A	0,04883 A	6	1,512762 A	48 A
5	-3,82784 A	3,69518 A	0,07056 A	15	5,320868 A	30 A
	-3,82782 A	3,69520 A	0,07056 A	18	5,320869 A	30 A
6	5,11832 A	-8,56138 A	-0,05504 A	18	9,974846 A	29 A
	5,11833 A	-8,56140 A	-0,05504 A	20	9,974863 A	29 A
7	3,74695 A	-19,10207 A	-0,11959 A	19	19,466456 A	30 A
	3,74697 A	-19,10208 A	-0,11959 A	21	19,466471 A	30 A
8	7,80068 A	-29,17178 A	0,41974 A	21	30,199662 A	29 A
	7,80068 A	-29,17178 A	0,41974 A	22	30,199662 A	29 A
9	-18,82079 A	-21,59223 A	7,74530 A	21	29,672144 A	29 A
	-18,82079 A	-21,59223 A	7,74530 A	22	29,672144 A	29 A
10	-13,73566 a_e	-61,97287 a_e	-2,84389 a_e	5	63,540481 a_e	338 a_e
	-14,13893 a_e	-61,69691 a_e	-2,86799 a_e	7	63,361214 a_e	396 a_e

Замечание 11.3. Характерные значения переменных R_k, V_k , данные в Табл. 2.1, выбраны, исходя из начальных значений в Табл. 1.1. Это означало рассмотрение класса движений в окрестности начальной точки в пространстве переменных. Уравнения таких движений оказались сингулярными: некоторые правые части были пропорциональны отрицательным степеням ε в земной математической модели (смотрите (7.3)). По этому точка быстро выходила из окрестности начального положения.

Это обстоятельство привело к рассмотрению новых переменных – оскулирующих элементов орбит тех тел, уравнения движения которых сингулярны. Оскулирующие элементы были введены и для тел, уравнения движения которых в нулевом приближении были моделью Кеплера. В результате получилась составленная из уравнений (2.5), (3.4) система, «менее сингулярная», но всё ещё сингулярная. В лунной модели сингулярность была под знаками косинусов и синусов. В земной модели некоторые производные оставались пропорциональными отрицательным степеням ε (смотрите (8.2)).

Далее был сделан переход к почти регулярным переменным. Это позволило рассматривать уравнения движения в окрестности движущейся точки (в пространстве исходных переменных). В пространстве почти регулярных переменных точка не покидает окрестности нуля на конечном интервале времени, так как новые переменные являются решением почти регулярной задачи Коши.

§12. О лунной математической модели

Земная математическая модель описывает движение Солнечной системы на большем интервале, чем лунная. Вычислим значения координат планет и Луны при $T = T_{10*}$ с помощью земной модели, то есть по формулам (11.1). T_{10*} – характерное значение времени (2.7) в лунной модели. В Табл. 12.1 даны значения $\tilde{\tilde{R}}_{k(n)}(T_{10*})$, порядок приближения, модули приближения и погрешности модулей:

$$R_k(T_{10*}) = \tilde{\tilde{R}}_{k(n)}(T_{10*}) + R_{k*}O(\varepsilon^n), \quad \tilde{\tilde{R}}_{k(n)}(T_{10*}) = \left| \tilde{\tilde{R}}_{k(n)}(T_{10*}) \right|,$$

$$\tilde{\tilde{\Delta}}_l = \Delta \left(\tilde{\tilde{R}}_{k(n)}(T_{10*}) \right).$$

О вычислении погрешностей функций смотрите в §37.

Наибольший вклад в погрешности $\tilde{\tilde{\Delta}}_l$ вносят погрешность гравитационной постоянной G ($k = 1, 10$), погрешность начальной большой полуоси ($k = 2, 3$), погрешности начальных радиус-векторов ($k = \overline{4,9}$) (смотрите формулы (1.1) и Табл. 1.1, 1.2).

Замечание 12.1. В §5 значения координат планет и Луны при $T = T_{10*}$ получены с помощью лунной математической модели. Сравните Табл. 5.1 и 12.1.

Таблица 12.1
 Асимптотическое решение, порядок приближения
 и погрешность модулей

k	$\tilde{R}_{k1(n)}(T_{10*})$	$\tilde{R}_{k2(n)}(T_{10*})$	$\tilde{R}_{k3(n)}(T_{10*})$	n	$\tilde{R}_{k(n)}(T_{10*})$	$\tilde{\Delta}_l \cdot 10^7$
1	0,33210 A	0,08860 A	-0,01964 A	4	0,3442780 A	12 A
	0,32504 A	0,09136 A	-0,02306 A	6	0,3384280 A	14 A
2	0,33516 A	0,63898 A	-0,01032 A	8	0,7216230 A	5,0 A
	0,33486 A	0,63906 A	-0,01032 A	10	0,7215477 A	5,0 A
3	-0,97645 A	0,21576 A	0 A	6	1,0000040 A	5,0 A
	-0,97287 A	0,19888 A	0 A	7	0,9929877 A	5,0 A
4	-0,69412 A	1,46931 A	0,04787 A	5	1,6257183 A	55 A
	-0,69412 A	1,46931 A	0,04787 A	6	1,6257184 A	55 A
5	-3,53120 A	3,95725 A	0,06285 A	15	5,3040708 A	55 A
	-3,53120 A	3,95725 A	0,06285 A	18	5,3040708 A	55 A
6	4,87594 A	-8,71028 A	-0,04279 A	18	9,9822684 A	55 A
	4,87594 A	-8,71028 A	-0,04279 A	20	9,9822685 A	55 A
7	3,54169 A	-19,13160 A	-0,11703 A	19	19,4570180 A	55 A
	3,54169 A	-19,13160 A	-0,11703 A	21	19,4570180 A	55 A
8	7,63931 A	-29,21555 A	0,42436 A	21	30,2007870 A	55 A
	7,63931 A	-29,21555 A	0,42436 A	22	30,2007870 A	55 A
9	-18,95527 A	-21,46141 A	7,77037 A	21	29,6693964 A	55 A
	-18,95527 A	-21,46141 A	7,77037 A	22	29,6693964 A	55 A
10	-0,42407 a_e	-63,59302 a_e	-2,18431 a_e	5	63,6319344 a_e	33 a_e
	-0,11041 a_e	-63,29588 a_e	-2,19928 a_e	7	63,3341693 a_e	127 a_e

§13. Выводы главы 2

В главе 2 (как и в главе 1) Солнечная система рассматривается как система 11 материальных точек, которые имеют характеристики Солнца, планет и Луны и которые притягиваются по закону всемирного тяготения. Задача о движении Солнечной системы сформулирована как задача 11 тел в §2. Численные значения параметров задачи даны в §1.

Отличие от главы 1 состоит в том, что за характерное время исследования принимается время порядка $1/6$ периода вращения Земли вокруг Солнца (в главе 1 характерное время имеет порядок $1/6$ периода вращения Луны вокруг Земли). В §7 построена земная математическая модель Солнечной системы как сингулярно возмущённая задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром.

В §8 сделан переход к оскулирующим элементам орбит для тел с номерами $k = 1, 2, 3, 10$. В §9 сделан переход к почти регулярным переменным. В §10 доказано, что земная математическая модель эквивалентна почти регулярной задаче Коши. Дан алгоритм решения задачи. Доказано, что решение выражается через ряд, равномерно сходящийся на ненулевом интервале времени. При использовании предложенного метода не возникает «проблемы малых знаменателей». В §11 построено асимптотическое решение земной математической модели.

В §12 с помощью земной математической модели получены численные значения для лунной модели.

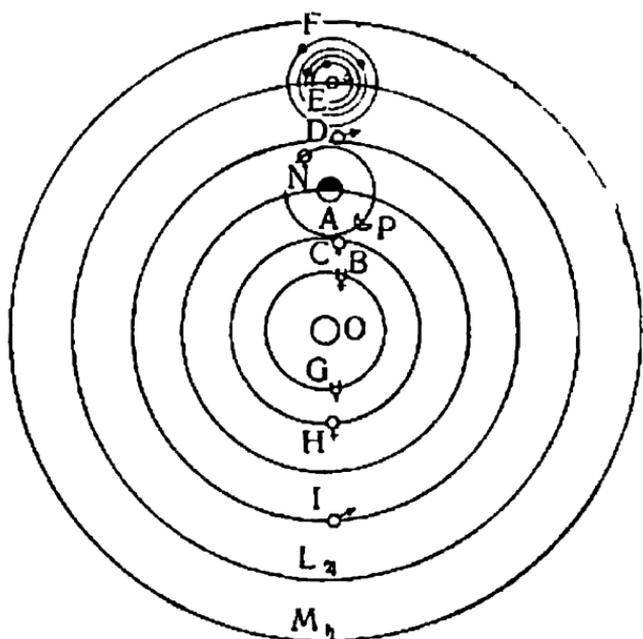
Об устойчивости Солнечной системы

Математическая задача об устойчивости Солнечной системы имеет весьма сомнительный смысл. Прежде всего потому, что любая математическая модель основана на модели физической, которая априори не точна, особенно, если речь идёт о бесконечном интервале времени. Сюда же добавляется невозможность точных численных значений исходных параметров. С течением времени ошибки накапливаются.

Если говорить о точном решении так или иначе построенной математической модели на бесконечном интервале времени, то для точного описания движения небесных тел нужны всё новые и новые переменные, так как с увеличением интервала времени каждая переменная становится рано или поздно сингулярной. Поэтому каждая математическая модель позволяет найти движение с достаточной точностью только на своём ограниченном интервале времени.

Есть ещё следующая постановка задачи. На основании какой-либо математической модели определить, будут ли небесные тела находиться в ограниченном пространстве без столкновений на бесконечном интервале времени. Эта задача имеет узкий, чисто теоретический смысл. Можно ли её решить – неизвестно, но весьма сомнительно, именно, из-за неизбежности появления сингулярности у переменных. Гипотетически возможно весьма нежелательное решение: существование конечного момента времени, когда сближение небесных тел неизбежно в выбранной модели.

В данный момент несомненным является только возможность определения с нужной точностью положения небесных тел на некотором ближайшем интервале времени. В конце этого интервала приходится корректировать численные значения на основании наблюдений реального движения. Таким образом, приходится констатировать, что мы движемся во «временном тумане» и можем видеть лишь на несколько шагов вперёд.



Из достойных изучения естественных вещей на первое место должно быть поставлено устройство вселенной.



алилео Галилей
(15.02.1564 – 08.01.1642)

Глава 3. Свободное падение тела

§14. Построение математической модели

14.1. Постановка задачи

Определение 14.1. *Свободным падением тела* называется движение материальной точки под действием только поля тяготения [28].

Будем рассматривать поле тяготения Земли, предполагая, что Земля – шар с радиальным распределением плотности, вращающийся относительно инерциальной системы отсчёта с известной постоянной угловой скоростью Ω . Тогда движение относительно Земли описывается уравнением

$$m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}_{\text{тяг}} + \mathbf{F}_{\text{цб}} + \mathbf{F}_{\text{кор}}, \quad (14.1)$$

где m – масса материальной точки; \mathbf{R} – радиус-вектор материальной точки в системе координат $O\xi\eta\zeta$, жёстко связанной с Землёй; T – время; $\mathbf{F}_{\text{тяг}}$ – сила тяготения материальной точки к Земле; $\mathbf{F}_{\text{цб}}$, $\mathbf{F}_{\text{кор}}$ – центробежная и кориолисова силы инерции. Справедливы равенства

$$\mathbf{F}_{\text{тяг}} = -\frac{GmM(\mathbf{R}_O + \mathbf{R})}{|\mathbf{R}_O + \mathbf{R}|^3}, \quad \mathbf{F}_{\text{цб}} = -m [\Omega, [\Omega, \mathbf{R}_O + \mathbf{R}]], \quad (14.2)$$

$$\mathbf{F}_{\text{кор}} = -2m [\Omega, \mathbf{V}],$$

где G – гравитационная постоянная; M – масса Земли; \mathbf{R}_O – вектор, проведенный из центра Земли в начало координат O ; \mathbf{V} – скорость материальной точки относительно Земли; $|\mathbf{R}| = \sqrt{R_\xi^2 + R_\eta^2 + R_\zeta^2}$; R_ξ , R_η , R_ζ – проекции вектора \mathbf{R} на оси ξ , η , ζ ; $[\ , \]$ – векторное произведение.

Определение 14.2. Вектор $\mathbf{P} = \mathbf{F}_{\text{тяг}} + \mathbf{F}_{\text{цб}}$ называется *силой тяжести тела*, вектор $\mathbf{g} = \mathbf{P}/m$ называется *ускорением силы тяжести* или *ускорением свободного падения* [28].

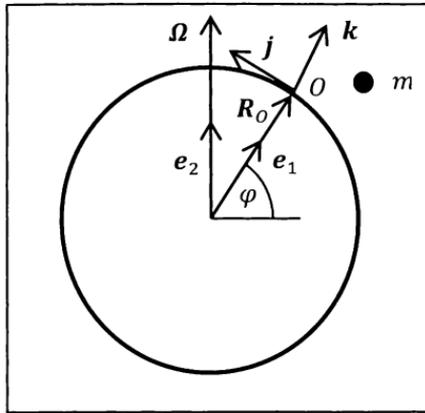


Рис. 14.1. Свободное падение тела

Будем считать известными начальное положение и начальную скорость материальной точки относительно Земли. Тогда из (14.1), (14.2) получим задачу Коши для векторов \mathbf{R} , \mathbf{V} :

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{V}, \quad \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{GM(R_0 + \mathbf{R})}{|R_0 + \mathbf{R}|^3} - [\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, R_0 + \mathbf{R}]] - 2[\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{V}], \quad (14.3)$$

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}^0, \quad \mathbf{V}(0) = \mathbf{V}^0.$$

Если рассмотреть систему координат, имеющую начало в центре Земли и движущуюся поступательно относительно инерциальной системы отсчёта, то свободное падение тела в этой системе координат находится из решения задачи двух тел с массами m и M соответственно. Так как решение задачи двух тел известно, то можно сделать переход к системе координат, жёстко связанной с Землёй, и получить точное решение задачи (14.3).

В этой главе в уравнения (14.3) вводится малый параметр. Это позволяет получать простые приближённые решения задачи (14.3), близкие к точному решению, если тело находится около поверхности Земли и имеет небольшую скорость.

14.2. Движение в стационарном однородном силовом поле

Вблизи поверхности Земли свободное падение тела часто рассматривается в упрощённой постановке как движение материальной точки в стационарном однородном силовом поле:

$$\frac{d\mathbf{R}^{(0)}}{dT} = \mathbf{V}^{(0)}, \quad \frac{d\mathbf{V}^{(0)}}{dT} = \mathbf{g}, \quad (14.4)$$

$$\mathbf{R}^{(0)}(0) = \mathbf{R}^\circ, \quad \mathbf{V}^{(0)}(0) = \mathbf{V}^\circ.$$

Здесь \mathbf{g} – ускорение свободного падения в точке O ,

$$\mathbf{g} = -\frac{GM R_O}{|R_O|^3} - [\boldsymbol{\Omega}, [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{R}_O]]. \quad (14.5)$$

Решение задачи (14.4), (14.5) является нулевым приближением решения задачи (14.3):

$$\mathbf{R} \approx \mathbf{R}^{(0)} = \mathbf{R}^\circ + \mathbf{V}^\circ T + \frac{1}{2} \mathbf{g} T^2, \quad \mathbf{V} \approx \mathbf{V}^{(0)} = \mathbf{V}^\circ + \mathbf{g} T. \quad (14.6)$$

14.3. Введение малого параметра

Введём в задачу (14.3) малый параметр. Для этого перейдём к безразмерным переменным \mathbf{r} , \mathbf{v} , t по формулам

$$\mathbf{R} = R_* \mathbf{r}, \quad \mathbf{V} = V_* \mathbf{v}, \quad T = T_* t,$$

где R_* , V_* , T_* – характерные значения переменных. В безразмерных переменных задача (14.3) примет вид:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{V_* T_*}{R_*} \mathbf{v}, \quad (14.7)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM T_*}{R_O^2 V_*} \cdot \frac{\mathbf{e}_1 + R_* R_O^{-1} \mathbf{r}}{|\mathbf{e}_1 + R_* R_O^{-1} \mathbf{r}|^3} - \frac{\Omega^2 R_O T_*}{V_*} [\mathbf{e}_2, [\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + R_* R_O^{-1} \mathbf{r}]] - 2\Omega T_* [\mathbf{e}_2, \mathbf{v}],$$

$$\mathbf{r}(0) = \frac{\mathbf{R}^\circ}{R_*}, \quad \mathbf{v}(0) = \frac{\mathbf{V}^\circ}{V_*}.$$

Здесь $R_O = |\mathbf{R}_O|$; $\Omega = |\boldsymbol{\Omega}|$; $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ – единичные векторы,

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{R}_O}{R_O}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{\boldsymbol{\Omega}}{\Omega}.$$

Выберем систему координат $O\xi\eta\zeta$ следующим образом: O – точка поверхности Земли, ось ζ направлена по местной вертикали вверх, оси ξ, η горизонтальны, ξ направлена на восток, η – на север. Обозначим $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ орты координатных осей. $\mathbf{k} = -\mathbf{g}/|\mathbf{g}|$, по определению местной вертикали.

Примем за малый параметр величину

$$\varepsilon = \frac{\Omega^2 R_0^3}{GM}. \quad (14.8)$$

Так как O лежит на поверхности Земли, то R_0 – радиус Земли. Примем следующие численные значения:

$$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}, \quad M = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ кг}, \quad (14.9)$$

$$R_0 = 6,375 \cdot 10^6 \text{ м}, \quad \Omega = \frac{\pi}{43200} \text{ рад/с}.$$

Тогда

$$\varepsilon \approx 3,44 \cdot 10^{-3}. \quad (14.10)$$

Примем за характерную длину величину

$$R_* = \varepsilon R_0. \quad (14.11)$$

Тем самым переходим к рассмотрению движений материальной точки с малыми (по сравнению с величиной радиуса Земли) перемещениями. Выберем V_* , T_* так, чтобы выполнялись равенства

$$\frac{V_* T_*}{R_*} = 1, \quad \frac{T_* g}{V_*} = 1, \quad g = |g|. \quad (14.12)$$

Из (14.5), (14.8), (14.11), (14.12) найдём характерные значения:

$$V_* = R_0 \Omega \sqrt{a}, \quad T_* = \frac{\varepsilon}{\Omega \sqrt{a}}, \quad (14.13)$$

$$a = \sqrt{1 - (2 - \varepsilon) \varepsilon \cos^2 \varphi}, \quad g = \frac{GMa}{R_0^2}.$$

Здесь φ – геоцентрическая широта точки O . Подставим (14.9) в формулы (14.11), (14.13). Получим:

$$R_* \approx 2,19 \cdot 10^4 \text{ м}, \quad 462 \text{ м/с} < V_* < 464 \text{ м/с},$$

$$47,2 \text{ с} < T_* < 47,4 \text{ с}, \quad g \approx 9,808 a, \quad a \approx \sqrt{1 - 0,0069 \cos^2 \varphi}.$$

(V_* , T_* зависят от φ).

Подставим (14.11), (14.13) в уравнения (14.7). Получим следующую задачу Коши:

$$\frac{dr}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\mathbf{k} + \mathbf{H}, \quad \mathbf{r}|_{t=0} = \mathbf{r}^\circ, \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}^\circ. \quad (14.14)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{a} \left\{ \mathbf{e}_1 - \frac{\mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{r}}{|\mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{r}|^3} - 2\varepsilon\sqrt{a} [\mathbf{e}_2, \mathbf{v}] - \varepsilon^2 [\mathbf{e}_2, [\mathbf{e}_2, \mathbf{r}]] \right\},$$

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{\varepsilon \sin 2\varphi}{2a} \mathbf{j} + \frac{1 - \varepsilon \cos^2 \varphi}{a} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{(1 - \varepsilon) \cos \varphi}{a} \mathbf{j} + \frac{\sin \varphi}{a} \mathbf{k}, \quad a = \sqrt{1 - (2 - \varepsilon) \varepsilon \cos^2 \varphi}.$$

Здесь введены обозначения $\mathbf{r}^\circ = \mathbf{R}^\circ/R_*$, $\mathbf{v}^\circ = \mathbf{V}^\circ/V_*$, векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ разложены по ортам $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$.

В задаче (14.14) $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – известные постоянные единичные векторы, не зависящие от ε ,

$$\mathbf{r}^\circ = r_\xi^\circ \mathbf{i} + r_\eta^\circ \mathbf{j} + r_\zeta^\circ \mathbf{k}, \quad \mathbf{v}^\circ = v_\xi^\circ \mathbf{i} + v_\eta^\circ \mathbf{j} + v_\zeta^\circ \mathbf{k}.$$

$\varphi, r_\xi^\circ, r_\eta^\circ, r_\zeta^\circ, v_\xi^\circ, v_\eta^\circ, v_\zeta^\circ$ будем рассматривать как известные параметры, не зависящие от t, ε .

Определение 14.3. Задача (14.14) называется *математической моделью свободного падения тела*.

Решение задачи (14.14) имеет физический смысл при условии

$$|\mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{r}| \geq 1, \quad (14.15)$$

обеспечивающем движение точки вне земного шара. Будем предполагать, что начальное положение точки этому условию удовлетворяет:

$$|\mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{r}^\circ| \geq 1. \quad (14.16)$$

14.4. Вырожденная задача

Положим в задаче (14.14) $\varepsilon = 0$. Получим вырожденную задачу:

$$\frac{d\mathbf{r}^{(0)}}{dt} = \mathbf{v}^{(0)}, \quad \frac{d\mathbf{v}^{(0)}}{dt} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}^{(0)}(0) = \mathbf{r}^\circ, \quad \mathbf{v}^{(0)}(0) = \mathbf{v}^\circ. \quad (14.17)$$

Решение этой задачи является нулевым приближением решения задачи (14.14). Описывается формулами:

$$\mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{r}^o + \mathbf{v}^o t - \frac{1}{2} \mathbf{k} t^2, \quad \mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{v}^o - \mathbf{k} t. \quad (14.18)$$

В размерных переменных это решение имеет вид (14.6) и является приближённым решением задачи (14.3).

§15. Алгоритм построения решения

15.1. Переход к новым переменным

Чтобы привести задачу о свободном падении тела к виду, удобному для исследования, введём новые переменные

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{r}^{(0)}(t), \quad \mathbf{y}_2 = \mathbf{v} - \mathbf{v}^{(0)}(t).$$

Обратные формулы имеют вид:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(0)}(t) + \mathbf{y}_1, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}^{(0)}(t) + \mathbf{y}_2.$$

Новые переменные являются решением следующей задачи Коши:

$$\frac{d\mathbf{y}_1}{dt} = \mathbf{y}_2, \quad \frac{d\mathbf{y}_2}{dt} = \mathbf{H}, \quad \mathbf{y}_1|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{y}_2|_{t=0} = \mathbf{0}, \quad (15.1)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{a} \left\{ \mathbf{e}_1 - \frac{\mathbf{e}_1 + \varepsilon [\mathbf{r}^{(0)}(t) + \mathbf{y}_1]}{|\mathbf{e}_1 + \varepsilon [\mathbf{r}^{(0)}(t) + \mathbf{y}_1]|^3} - 2\varepsilon\sqrt{a} [\mathbf{e}_2, \mathbf{v}^{(0)}(t) + \mathbf{y}_2] - \right. \\ \left. - \varepsilon^2 [\mathbf{e}_2, [\mathbf{e}_2, \mathbf{r}^{(0)}(t) + \mathbf{y}_1]] \right\},$$

$$\mathbf{e}_1 = -\frac{\varepsilon \sin 2\varphi}{2a} \mathbf{j} + \frac{1 - \varepsilon \cos^2 \varphi}{a} \mathbf{k}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{(1 - \varepsilon) \cos \varphi}{a} \mathbf{j} + \frac{\sin \varphi}{a} \mathbf{k},$$

$$a = \sqrt{1 - (2 - \varepsilon) \varepsilon \cos^2 \varphi}.$$

Здесь $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ – искомые векторы, t – независимая переменная, ε – малый параметр; $\mathbf{r}^{(0)}(t), \mathbf{v}^{(0)}(t)$ – известные функции (14.18); $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ – известные единичные векторы, φ – известная постоянная. $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \varphi$ не зависят от t, ε .

15.2. Аналитичность задачи (15.1)

Запишем задачу (15.1) в компактном виде:

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t, \varepsilon), \quad x|_{t=0} = 0, \quad (15.2)$$

$$x = (y_{1\xi}, y_{1\eta}, y_{1\zeta}, y_{2\xi}, y_{2\eta}, y_{2\zeta}).$$

x – вектор, составленный из проекций векторов y_1, y_2 на орты i, j, k .

Исследуем задачу (15.2) на множестве

$$x \in \mathbf{C}^6, \quad \|x\| \leq \delta, \quad t \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}, \quad \varepsilon \in \mathbf{C}, \quad |\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon} = 0,004, \quad (15.3)$$

где δ, \bar{t} – положительные постоянные.

15.2.1. Для аналитичности правых частей уравнений (15.1) необходимо выполнение неравенства

$$e_1 + \varepsilon [r^{(0)}(t) + y_1] \neq 0. \quad (15.4)$$

При $x = 0, t = 0$ неравенство принимает вид

$$e_1 + \varepsilon r^0 \neq 0. \quad (15.5)$$

Неравенство накладывает ограничение на множество начальных значений. Найдём значения, для которых неравенство заведомо выполняется. При $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ имеем:

$$f = |e_1 + \varepsilon r^0|^2 = 1 + 2\varepsilon(e_1, r^0) + \varepsilon^2 |r^0|^2, \quad (15.6)$$

$$|f| \geq |1 - 2|\varepsilon|(e_1, r^0) - |\varepsilon|^2 |r^0|^2| \geq$$

$$\geq |1 - 2\bar{\varepsilon} |r^0| - (\bar{\varepsilon})^2 |r^0|^2| =$$

$$= \left| \sqrt{2} - 1 - \bar{\varepsilon} |r^0| \right| \cdot (\sqrt{2} + 1 + \bar{\varepsilon} |r^0|).$$

Здесь f рассматривается как комплексная функция от комплексной переменной ε .

Из (15.6) следует: если

$$\bar{\varepsilon} |r^0| < \sqrt{2} - 1, \quad (15.7)$$

то неравенство (15.5) выполняется. По непрерывности функций существуют такие значения $\delta_1 > 0$, $t_1 > 0$, что неравенство (15.4) выполняется на множестве (15.3) при $\delta = \delta_1$, $\bar{t} = t_1$.

15.2.2. Для аналитичности правых частей уравнений (15.1) необходимо выполнение неравенства

$$1 - (2 - \varepsilon) \varepsilon \cos^2 \varphi \neq 0. \quad (15.8)$$

При $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ имеем:

$$\begin{aligned} |1 - (2 - \varepsilon) \varepsilon \cos^2 \varphi| &\geq |1 - 2|\varepsilon| - |\varepsilon|^2| \geq 1 - 2\bar{\varepsilon} - (\bar{\varepsilon})^2 = \\ &= 0,991984 > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (15.8) выполняется на множестве (15.3) при любых значениях δ , \bar{t} .

Отсюда и из п. 15.2.1 получаем: если выполняется неравенство (15.7), то правые части уравнений (15.1) аналитичны на множестве (15.3) при $\delta = \delta_1$, $\bar{t} = t_1$. Из гладкости правых частей уравнений (15.1) следует

Результат 15.1. Математическая модель свободного падения тела эквивалентна регулярно возмущённой задаче Коши (15.1), если выполняется неравенство (15.7).

15.3. Построение решения

Решение задачи (15.2) строится в виде ряда Пуанкаре

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{K=0}^{\infty} x^{(K)}(t) \varepsilon^K. \quad (15.9)$$

При начальных значениях, удовлетворяющих неравенству (15.7), задача (15.2) удовлетворяет условиям Теорем 39.1, 39.3 при некоторых значениях $\delta > 0$, $\bar{t} > 0$, любом значении $n \geq 0$ и $\bar{\varepsilon} = 0,004$. Это следует из результатов п. 15.2 и из равенства

$$F(0, t, 0) = 0,$$

которое выполняется на любом отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$. Однако постоянная ε_* в Теоремах 39.1, 39.3 не определена, поэтому на основании этих теорем нельзя утверждать о существовании решения задачи (15.2) при значении ε , введённом в §14: $\varepsilon \approx 3,44 \cdot 10^{-3}$.

При начальных значениях, удовлетворяющих неравенству (15.7), задача (15.2) удовлетворяет условиям Теоремы 39.2 при некоторых значениях $\delta > 0$, $\bar{t} > 0$ и $\bar{\varepsilon} = 0,004$. По этой теореме при $\varepsilon \approx 3,44 \cdot 10^{-3}$ существует такая постоянная $t_* > 0$, что на отрезке $0 \leq t \leq t_*$: 1) решение задачи (15.2) существует и единственно, 2) ряд (15.9) сходится равномерно к решению задачи (15.2).

15.4. Переход к размерным переменным

Для размерных переменных условие (15.7) равносильно неравенству

$$|\mathbf{R}^0| < \frac{\sqrt{2}-1}{\varepsilon} R_* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} (\sqrt{2}-1) R_0. \quad (15.10)$$

Так как $\frac{\varepsilon(\sqrt{2}-1)}{\varepsilon} > 0,00343 (\sqrt{2}-1)/0,004 > 0,35$, то при

$$|\mathbf{R}^0| < 0,35 R_0 \approx 2,23 \cdot 10^6 \text{ м} \quad (15.11)$$

неравенство (15.10) заведомо выполняется.

Формулы перехода от безразмерных переменных к размерным имеют вид:

$$\mathbf{R} = R_* (\mathbf{r}^{(0)}(t) + \mathbf{y}_1), \quad \mathbf{V} = V_* (\mathbf{v}^{(0)}(t) + \mathbf{y}_2). \quad (15.12)$$

Из п.15.3 и написанных формул следует

Результат 15.2. Для любых начальных значений, удовлетворяющих неравенству (15.11), решение задачи о свободном падении тела существует и единственно на ненулевом отрезке $0 \leq T \leq \bar{T}$. Решение описывается формулами (15.12), где векторы \mathbf{y}_1 , \mathbf{y}_2 представимы в виде рядов, равномерно сходящихся на $0 \leq T \leq \bar{T}$.

Замечание 15.1. В Результате 15.2 не учтено условие (14.15), обеспечивающее движение материальной точки вне земного шара. Это условие нужно проверять дополнительно.

§16. Асимптотическое решение

16.1. Решение в безразмерных переменных

Нулевое приближение решения задачи (14.14) является решением вырожденной задачи (14.17). Имеет вид (14.18).

Первое приближение решения задачи (14.14) описывается формулами

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}^{(\leq 1)} = \mathbf{r}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{r}^{(1)} = \mathbf{r}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{y}_1^{(1)},$$

$$\mathbf{v} \approx \mathbf{v}^{(\leq 1)} = \mathbf{v}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}^{(0)} + \varepsilon \mathbf{y}_2^{(1)}.$$

Здесь $\mathbf{r}^{(0)}$, $\mathbf{r}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(0)}$, $\mathbf{v}^{(1)}$ – коэффициенты в разложении решения задачи (14.14) в ряд по степеням малого параметра ε . $\mathbf{y}_1^{(1)}$, $\mathbf{y}_2^{(1)}$ – коэффициенты при первой степени ε в разложении решения задачи (15.1) в ряд по степеням ε .

Решая задачу (15.1) методом малого параметра Пуанкаре, получим следующие формулы для первого приближения:

$$\mathbf{r} \approx \mathbf{r}^{(\leq 1)} = \mathbf{r}^\circ + \mathbf{v}^\circ t - \frac{kt^2}{2} + \varepsilon \left(\frac{bt^2}{2} + \frac{ct^3}{6} - \frac{kt^4}{12} \right), \quad (16.1)$$

$$\mathbf{v} \approx \mathbf{v}^{(\leq 1)} = \mathbf{v}^\circ - kt + \varepsilon \left(bt + \frac{ct^2}{2} - \frac{kt^3}{3} \right),$$

$$\mathbf{b} = -\mathbf{r}^\circ + 3\mathbf{k}(\mathbf{k}, \mathbf{r}^\circ) - 2 \cos \varphi [\mathbf{j}, \mathbf{v}^\circ] - 2 \sin \varphi [\mathbf{k}, \mathbf{v}^\circ],$$

$$\mathbf{c} = -\mathbf{v}^\circ + 3\mathbf{k}(\mathbf{k}, \mathbf{v}^\circ) + 2 \cos \varphi \mathbf{i}.$$

16.2. Решение в размерных переменных

Нулевое приближение задачи о свободном падении тела описывается формулами (14.6).

Переходя в (16.1) от безразмерных переменных к размерным по формулам из п. 14.3, получим решение задачи о свободном падении тела в первом приближении:

$$\mathbf{R} \approx \mathbf{R}^{(\leq 1)} = \mathbf{R}^\circ + \mathbf{V}^\circ T + \mathbf{B}T^2 + \mathbf{C}T^3 + \mathbf{D}T^4, \quad (16.2)$$

$$\mathbf{V} \approx \mathbf{V}^{(\leq 1)} = \mathbf{V}^\circ + 2\mathbf{B}T + 3\mathbf{C}T^2 + 4\mathbf{D}T^3,$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{g}}{2} - \frac{g\mathbf{R}^\circ}{2R_0} - \frac{3g(\mathbf{R}^\circ, \mathbf{k})}{2R_0} - \Omega R_0 \sqrt{\frac{g}{GM}} [\cos \varphi \mathbf{j} + \sin \varphi \mathbf{k}, \mathbf{V}^\circ],$$

$$\mathbf{C} = -\frac{gV^\circ}{6R_0} - \frac{g(V^\circ, \mathbf{k})}{2R_0} + \frac{1}{3}g\Omega R_0 \cos \varphi \sqrt{\frac{g}{GM}} \mathbf{i}, \quad \mathbf{D} = \frac{gg}{12R_0}.$$

(16.2) является приближённым решением задачи (14.3).

16.3. Падение с высоты

Рассмотрим задачу о падении тела с высоты h при нулевой начальной скорости, исходя из формул первого приближения. Имеем:

$$\mathbf{R}^\circ = h\mathbf{k}, \quad \mathbf{V}^\circ = 0.$$

Из (16.2) получим формулу для радиус-вектора тела:

$$\mathbf{R}^{(\leq 1)} = h\mathbf{k} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{R_0}\right)gT^2\mathbf{k} + \left(\frac{1}{3}g\Omega R_0 \cos \varphi \sqrt{\frac{g}{GM}}\right)T^3\mathbf{i} - \left(\frac{g^2}{12R_0}\right)T^4\mathbf{k}.$$

Здесь использовали равенство $\mathbf{g} = -g\mathbf{k}$. Из формулы видно, что тело движется в вертикальной плоскости $O\xi\zeta$ в восточной полуплоскости.

Примем за момент падения тела $T_{\text{пад}}$ время достижения горизонтальной плоскости $O\xi\eta$. Тогда $T_{\text{пад}}$ определяется из уравнения

$$h + \left(-\frac{1}{2} + \frac{h}{R_0}\right)gT_{\text{пад}}^2 - \left(\frac{g^2}{12R_0}\right)T_{\text{пад}}^4 = 0,$$

$$T_{\text{пад}} = \left[\frac{3}{g} \left(-R_0 + 2h + \sqrt{R_0^2 - \frac{8}{3}R_0h + 4h^2} \right) \right]^{1/2}$$

Точка падения тела имеет радиус-вектор

$$\mathbf{R}_{\text{пад}} = \left(\frac{1}{3}g\Omega R_0 \cos \varphi \sqrt{\frac{g}{GM}}\right)T_{\text{пад}}^3 \mathbf{i},$$

тело отклоняется на восток. Если $h/R_0 \ll 1$, то

$$T_{\text{пад}} \approx \sqrt{\frac{2h}{g}}, \quad \mathbf{R}_{\text{пад}} \approx \left(\frac{2}{3}\Omega R_0 h \cos \varphi \sqrt{\frac{2h}{GM}}\right) \mathbf{i},$$

$$|\mathbf{R}_{\text{пад}}| \approx 2,19 \cdot 10^{-5} h^{3/2} \cos \varphi \text{ м}^{-1/2}.$$

Замечание 16.1. В [24] решение задачи (14.3) строится в виде ряда по степеням T .

Таблица 17.1. Параметры точки падения

R° [М]	V° [М/с]	T_n [с]	$R_{n\xi}$ [М]	$V_{n\xi}$ [М/с]	$V_{n\zeta}$ [М/с]
0	10	2,04	$-5,05 \cdot 10^{-4}$	$0 \cdot 10^{-6}$	-10,000000
0	20	4,08	$-4,04 \cdot 10^{-3}$	$0 \cdot 10^{-5}$	-20,00000
0	30	6,12	$-1,363 \cdot 10^{-2}$	$0 \cdot 10^{-5}$	-30,00000
0	40	8,16	$-3,23 \cdot 10^{-2}$	$0 \cdot 10^{-5}$	-40,00000
0	50	10,2	$-6,31 \cdot 10^{-2}$	$0 \cdot 10^{-5}$	-50,00000
0	60	12,2	-0,1090	$0 \cdot 10^{-4}$	-60,0000
0	70	14,3	-0,173	$0 \cdot 10^{-4}$	-70,0000
0	80	16,3	-0,258	$0 \cdot 10^{-4}$	-80,0000
0	90	18,4	-0,368	$0 \cdot 10^{-4}$	-90,0000
0	100	20,4	-0,505	$0 \cdot 10^{-4}$	-100,0000
0	200	40,8	-4,04	$0 \cdot 10^{-3}$	-200,000
0	300	61,3	-13,6	$1 \cdot 10^{-3}$	-300,000
0	400	81,8	-32,3	0,00	-400,00
0	500	102	-63,1	0,01	-500,01
0	600	123	-109	0,02	-600,02
0	700	144	-173	0,0	-700,0
0	800	164	-258	0,1	-800,1
0	900	185	-368	0,1	-900,1
0	1000	206	-504	0,2	-1000,2
0	1500	314	-1700	1	-1502

§17. Результаты численного счёта

Приведём результаты численного решения задачи о свободном падении тела при следующих значениях:

$$\varphi = 60^\circ, \quad R^\circ = R^\circ \mathbf{k}, \quad V^\circ = V^\circ \mathbf{k}.$$

17.1. В Табл. 17.1 даны координаты точки падения тела на Землю, значение момента падения T_n и скорость тела в момент падения. Расчёты сделаны по первому приближению решения из §16:

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{R}^{(\leq 1)}(T_n) = R_{n\xi} \mathbf{i} + R_{n\zeta} \mathbf{k}, \quad \mathbf{V}_n = \mathbf{V}^{(\leq 1)}(T_n) = V_{n\xi} \mathbf{i} + V_{n\zeta} \mathbf{k}.$$

В отличие от п. 16.3, где момент падения вычислялся как момент падения тела на горизонтальную плоскость $O\xi\eta$, здесь T_n – момент падения тела на сферическую поверхность Земли, т. е. T_n – решение уравнения

Таблица 17.2. Погрешности вычислений

R° [м]	V° [м/с]	T_- [с]	T_+ [с]	δR_n [м]	δV_n [м/с]
0	10	2,04	2,05	$3 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$
0	20	4,08	4,09	$3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$
0	30	6,12	6,13	$8 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$
0	40	8,16	8,17	$2 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$
0	50	10,2	10,3	$4 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-5}$
0	60	12,2	12,3	$7 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
0	70	14,2	14,3	$1 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$
0	80	16,3	16,4	$2 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-4}$
0	90	18,3	18,4	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$
0	100	20,4	20,5	$3 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$
0	200	40,8	40,9	0,03	$2 \cdot 10^{-3}$
0	300	61,2	61,3	0,1	$4 \cdot 10^{-3}$
0	400	81,7	81,8	0,4	0,02
0	500	102	103	1,0	0,03
0	600	122	123	3	0,07
0	700	143	144	6	0,2
0	800	164	165	13	0,3
0	900	185	186	26	0,5
0	1000	206	207	52	0,9
0	1500	313	315	1051	10

$$|\mathbf{R}^{(\leq 1)}(T_n) + R_0 \mathbf{e}_1| = R_0,$$

где $\mathbf{R}^{(\leq 1)}$ – функция (16.2). Координата $R_{n\zeta}$ точки падения равна нулю с точностью, с какой дана погрешность δR_n в Табл. 17.2.

17.2. В Табл. 17.2 даны погрешности значений из Табл. 17.1. Погрешности вычислены по методу, изложенному в §44. Справедливы неравенства:

$$|\mathbf{R}(T) - \mathbf{R}^{(\leq 1)}(T)| \leq \delta R_n, \quad |V(T) - V^{(\leq 1)}(T)| \leq \delta V_n,$$

$$0 \leq T \leq T_+,$$

$$T_- \leq T_n \leq T_+.$$

Таблица 17.1. Параметры точки падения (продолжение)

R° [м]	V° [м/с]	T_n [с]	$R_{n\xi}$ [м]	$V_{n\xi}$ [м/с]	$V_{n\zeta}$ [м/с]
10	0	1,43	$3,46 \cdot 10^{-4}$	$7,27 \cdot 10^{-4}$	-13,998726
20	0	2,02	$9,79 \cdot 10^{-4}$	$1,454 \cdot 10^{-3}$	-19,797173
30	0	2,47	$1,799 \cdot 10^{-3}$	$2,181 \cdot 10^{-3}$	-24,246466
40	0	2,86	$2,77 \cdot 10^{-3}$	$2,91 \cdot 10^{-3}$	-27,99739
50	0	3,19	$3,87 \cdot 10^{-3}$	$3,63 \cdot 10^{-3}$	-31,30200
60	0	3,50	$5,09 \cdot 10^{-3}$	$4,36 \cdot 10^{-3}$	-34,28960
70	0	3,78	$6,41 \cdot 10^{-3}$	$5,09 \cdot 10^{-3}$	-37,03697
80	0	4,04	$7,83 \cdot 10^{-3}$	$5,82 \cdot 10^{-3}$	-39,59416
90	0	4,29	$9,35 \cdot 10^{-3}$	$6,54 \cdot 10^{-3}$	-41,99591
100	0	4,52	$1,095 \cdot 10^{-2}$	$7,27 \cdot 10^{-3}$	-44,26754
200	0	6,39	$3,10 \cdot 10^{-2}$	$1,454 \cdot 10^{-2}$	-62,60327
300	0	7,82	$5,69 \cdot 10^{-2}$	$2,18 \cdot 10^{-2}$	-76,6724
400	0	9,04	$8,76 \cdot 10^{-2}$	$2,91 \cdot 10^{-2}$	-88,5330
500	0	10,1	0,1224	$3,64 \cdot 10^{-2}$	-98,9821
600	0	11,1	0,161	$4,36 \cdot 10^{-2}$	-108,4286
700	0	12,0	0,203	$5,09 \cdot 10^{-2}$	-117,1154
800	0	12,8	0,248	$5,82 \cdot 10^{-2}$	-125,2006
900	0	13,6	0,296	$6,54 \cdot 10^{-2}$	-132,7943
$1 \cdot 10^3$	0	14,3	0,346	$7,27 \cdot 10^{-2}$	-139,9764
$2 \cdot 10^3$	0	20,2	0,980	0,145	-197,941
$3 \cdot 10^3$	0	24,8	1,80	0,218	-242,408
$4 \cdot 10^3$	0	28,6	2,77	0,291	-279,887
$5 \cdot 10^3$	0	32,0	3,88	0,364	-312,899
$6 \cdot 10^3$	0	35,0	5,10	0,437	-342,736
$7 \cdot 10^3$	0	37,8	6,43	0,510	-370,169
$8 \cdot 10^3$	0	40,4	7,86	0,583	-395,696
$9 \cdot 10^3$	0	42,9	9,38	0,66	-419,67
$1 \cdot 10^4$	0	45,2	11,0	0,73	-442,33
$2 \cdot 10^4$	0	64,1	31,2	1,46	-625,06
$3 \cdot 10^4$	0	78,6	57,6	2,20	-764,95
$4 \cdot 10^4$	0	90,8	89,0	2,9	-882,6
$5 \cdot 10^4$	0	102	125	3,7	-986,0
$6 \cdot 10^4$	0	112	165	4,4	-1079,3
$7 \cdot 10^4$	0	121	208	5,2	-1164,9
$8 \cdot 10^4$	0	129	256	5,9	-1244,4

Таблица 17.2. Погрешности вычислений (продолжение)

R° [м]	V° [м/с]	T_- [с]	T_+ [с]	δR_{Π} [м]	δV_{Π} [м/с]
10	0	1,42	1,43	$2 \cdot 10^{-6}$	$3 \cdot 10^{-6}$
20	0	2,02	2,03	$4 \cdot 10^{-6}$	$6 \cdot 10^{-6}$
30	0	2,47	2,48	$8 \cdot 10^{-6}$	$9 \cdot 10^{-6}$
40	0	2,85	2,86	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$
50	0	3,19	3,20	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$
60	0	3,49	3,50	$3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$
70	0	3,78	3,79	$3 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$
80	0	4,04	4,05	$4 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$
90	0	4,28	4,29	$4 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$
100	0	4,51	4,52	$5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$
200	0	6,38	6,39	$2 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-5}$
300	0	7,82	7,83	$3 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-4}$
400	0	9,03	9,04	$5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
500	0	10,1	10,2	$7 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$
600	0	11,0	11,1	$1 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$
700	0	11,9	12,0	$2 \cdot 10^{-3}$	$3 \cdot 10^{-4}$
800	0	12,7	12,8	$2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$
900	0	13,5	13,6	$3 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-4}$
$1 \cdot 10^3$	0	14,2	14,3	$3 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$
$2 \cdot 10^3$	0	20,2	20,3	$9 \cdot 10^{-3}$	$2 \cdot 10^{-3}$
$3 \cdot 10^3$	0	24,7	24,8	0,02	$2 \cdot 10^{-3}$
$4 \cdot 10^3$	0	28,5	28,6	0,04	$3 \cdot 10^{-3}$
$5 \cdot 10^3$	0	31,9	32,0	0,06	$4 \cdot 10^{-3}$
$6 \cdot 10^3$	0	35,0	35,1	0,08	$5 \cdot 10^{-3}$
$7 \cdot 10^3$	0	37,8	37,9	0,11	$7 \cdot 10^{-3}$
$8 \cdot 10^3$	0	40,4	40,5	0,14	$8 \cdot 10^{-3}$
$9 \cdot 10^3$	0	42,9	43,0	0,18	0,01
$1 \cdot 10^4$	0	45,2	45,3	0,3	0,02
$2 \cdot 10^4$	0	64,0	64,1	1,1	0,04
$3 \cdot 10^4$	0	78,5	78,6	3,1	0,09
$4 \cdot 10^4$	0	90,8	90,9	6,8	0,2
$5 \cdot 10^4$	0	101	102	13	0,3
$6 \cdot 10^4$	0	111	112	23	0,5
$7 \cdot 10^4$	0	120	121	35	0,7
$8 \cdot 10^4$	0	129	130	53	0,9

Таблица 17.1. Параметры точки падения (окончание)

R° [м]	V° [м/с]	$T_{\text{п}}$ [с]	$R_{\text{п}\xi}$ [м]	$V_{\text{п}\xi}$ [м/с]	$V_{\text{п}\zeta}$ [м/с]
$9 \cdot 10^4$	0	137	306	7	-1319
$1 \cdot 10^5$	0	145	360	7	-1389
$2 \cdot 10^5$	0	207	1060	15	-1950
$3 \cdot 10^5$	0	258	2029	24	-2372

§18. Выводы главы 3

В §14 задача о свободном падении тела приведена к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром. При обращении малого параметра в нуль задача вырождается в задачу о движении материальной точки в стационарном однородном силовом поле.

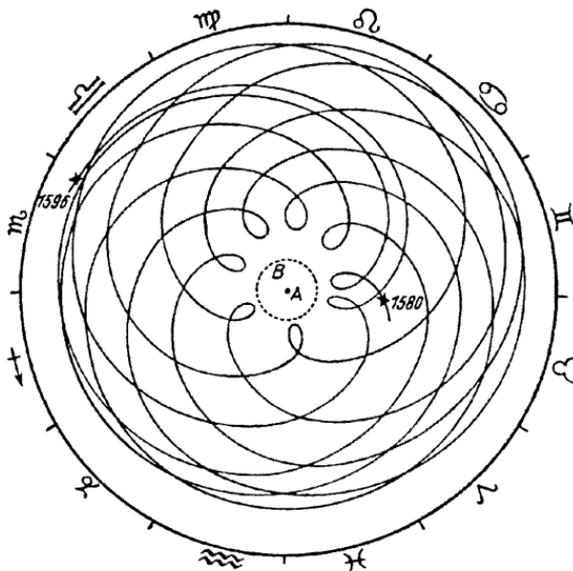
В §15 показано, что задача о свободном падении тела эквивалентна регулярно возмущённой задаче Коши. Решение задачи строится в виде ряда по степеням малого параметра, который сходится равномерно на ненулевом отрезке времени.

В §16 построено первое приближение решения задачи о свободном падении тела.

В §17 для конкретных начальных положений тела и значений начальной скорости вычислены моменты падения тела на Землю и координаты точки падения. Дана оценка полученных численных значений.

Таблица 17.2. Погрешности вычислений (окончание)

R° [м]	V° [м/с]	T_- [с]	T_+ [с]	δR_n [м]	δV_n [м/с]
$9 \cdot 10^4$	0	137	138	76	2
$1 \cdot 10^5$	0	144	145	105	2
$2 \cdot 10^5$	0	206	208	966	10
$3 \cdot 10^5$	0	255	260	3946	31



Весь мир гармонии пронизывает небесные движения во всех их частях.

Иоганн Кеплер
(27.12.1571 – 15.11.1630)

Глава 4. Центральные конфигурации

§19. Определение центральных конфигураций

19.1. Уравнения движения относительно центра масс

Рассмотрим Задачу 2.1 n тел. Дифференциальные уравнения движения тел в инерциальной системе отсчёта имеют вид

$$\frac{d^2 \rho_k}{dt^2} = \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{GM_j (\rho_j - \rho_k)}{|\rho_j - \rho_k|^3}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (19.1)$$

Здесь M_k , ρ_k – масса и радиус-вектор k -ой материальной точки; T – время; G – гравитационная постоянная.

Движение любой материальной системы можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного движения со скоростью центра масс и движения относительно центра масс (то есть относительно поступательно движущейся системы координат, начало которой совпадает с центром масс) [7].

Определение 19.1. Центром масс системы n материальных точек называется геометрическая точка O , радиус-вектор которой равен

$$\rho_O = \frac{M_1 \rho_1 + \dots + M_n \rho_n}{M_1 + \dots + M_n}. \quad (19.2)$$

В Задаче 2.1 n тел центр масс движется прямолинейно и равномерно, как центр масс любой материальной системы, на которую действуют внешние силы с нулевым главным вектором. В Задаче 2.1 n тел внешние силы равны нулю. Вывод о движении центра масс следует из (19.1), (19.2):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \rho_O}{dt^2} &= \frac{1}{M_1 + \dots + M_n} \sum_{k=1}^n M_k \frac{d^2 \rho_k}{dt^2} = \\ &= \frac{1}{M_1 + \dots + M_n} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{GM_k M_j (\rho_j - \rho_k)}{|\rho_j - \rho_k|^3} = 0, \end{aligned}$$

$$\mathbf{v}_O = \frac{d\rho_O}{dt} = \text{const.}$$

Здесь \mathbf{v}_O – скорость центра масс в инерциальной системе отсчёта.

Обозначим $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ систему координат, которая движется поступательно относительно инерциальной системы отсчёта, имеет начало в центре масс O и имеет *орты* (единичные векторы осей) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Обозначим $\mathbf{R}_k, \mathbf{V}_k$ радиус-вектор и скорость k -го тела относительно системы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$. Тогда

$$\mathbf{R}_k = \rho_k - \rho_O, \quad \mathbf{V}_k = \frac{d^2\mathbf{R}_k}{dt^2}.$$

Дифференциальные уравнения движения n тел в системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ имеют вид

$$\frac{d\mathbf{R}_k}{dt} = \mathbf{V}_k, \quad \frac{d\mathbf{V}_k}{dt} = \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{GM_j(\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k)}{|\mathbf{R}_j - \mathbf{R}_k|^3}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (19.3)$$

19.2. Определение центральных конфигураций

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\alpha \mathbf{R}_k = \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j}{|\mathbf{R}_k - \mathbf{R}_j|^3} M_j, \quad k = \overline{1, n}. \quad (19.4)$$

Из (19.3), (19.4) следует, что если в Задаче 2.1 n тел выполняются равенства (19.4), то радиус-вектор каждого тела в системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ пропорционален главному вектору сил притяжения, действующих на тело со стороны других тел.

Определения 19.2. *Центральной конфигурацией n тел с массами M_1, \dots, M_n называется класс эквивалентности векторов $(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n)$, где $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n$ – решение системы (19.4) при некотором значении $\alpha = \alpha^\circ > 0$.*

Вектор $(\mathbf{R}'_1, \dots, \mathbf{R}'_n)$ эквивалентен вектору $(\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n)$, если существуют такие числа $\beta > 0, \gamma$ и единичный вектор \mathbf{e} , что выполняются равенства

$$\mathbf{R}'_k = \beta \{ \cos \gamma \mathbf{R}_k + (1 - \cos \gamma)(\mathbf{R}_k, \mathbf{e}) \mathbf{e} + \sin \gamma [\mathbf{e}, \mathbf{R}_k] \}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (19.5)$$

Будем, также, говорить, что точки с массами M_1, \dots, M_n образуют *центральную конфигурацию*, если их радиус-векторы $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_n$ являются решением системы (19.4) при некотором значении $\alpha = \alpha^\circ > 0$.

Система точек с радиус-векторами R'_1, \dots, R'_n получается поворотом системы точек с радиус-векторами R_1, \dots, R_n , как одного твёрдого тела, вокруг оси Oe на угол γ и растяжением радиус-векторов в β раз. Нетрудно проверить, что вектор (R'_1, \dots, R'_n) из (19.5) является решением системы (19.4) при $\alpha = \alpha' = \alpha^0 \beta^{-3}$. Формулы, обратные к (19.5), имеют вид

$$R_k = \beta^{-1} \{ \cos \gamma R'_k + (1 - \cos \gamma)(R'_k, e) e - \sin \gamma [e, R'_k] \}, \quad k = \overline{1, n}.$$

19.3. Коллинеарные и плоские центральные конфигурации

Определение 19.3. *Коллинеарной центральной конфигурацией* называется центральная конфигурация, в которой векторы R_1, \dots, R_n коллинеарны.

Определение 19.4. *Плоской центральной конфигурацией* называется центральная конфигурация, в которой векторы R_1, \dots, R_n компланарны и не коллинеарны.

В коллинеарной центральной конфигурации материальные точки лежат на одной прямой. В плоской центральной конфигурации материальные точки лежат в одной плоскости.

Покажем, что каждой коллинеарной и каждой плоской центральной конфигурации соответствует семейство частных решений Задачи 2.1 n тел, при которых материальная система, как одно твёрдое тело, вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью.

Действительно, пусть вектор (R'_1, \dots, R'_n) принадлежит коллинеарной или плоской центральной конфигурации и является решением системы (19.4) при $\alpha = \alpha'$, где $\alpha' > 0$ – постоянное число. Пусть ось Oe перпендикулярна прямой, на которой лежат материальные точки, или перпендикулярна плоскости, в которой лежат материальные точки. Тогда система n точек с массами M_1, \dots, M_n будет вращаться как одно твёрдое тело вокруг оси Oe с постоянной скоростью, если задать следующие начальные значения:

$$R_k|_{t=0} = R'_k, \quad V_k|_{t=0} = \Omega [e, R'_k], \quad k = \overline{1, n}, \quad \Omega = \sqrt{\alpha' G}. \quad (19.6)$$

Здесь e – орт оси Oe , Ωe – угловая скорость вращения твёрдого тела. Можно проверить, что при таком вращении решение задачи (19.3), (19.6) имеет вид

$$R_k = \cos(\Omega T) R'_k + \sin(\Omega T) [e, R'_k],$$

$$V_k = -\Omega \sin(\Omega T) R'_k + \Omega \cos(\Omega T) [e, R'_k], \quad k = \overline{1, n}.$$

Результат 19.1. Каждой коллинеарной и каждой плоской центральной конфигурации соответствует семейство частных решений Задачи 2.1 n тел, при которых материальная система, как одно твёрдое тело, вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью.

19.4. Пространственные центральные конфигурации

Определение 19.5. *Пространственной центральной конфигурацией* называется центральная конфигурация, в которой векторы (R_1, \dots, R_n) некопланарны.

В пространственной центральной конфигурации материальные точки не лежат в одной плоскости. Покажем, что для пространственной центральной конфигурации не существует такого частного решения Задачи 2.1 n тел, при котором материальная система двигалась бы как одно твёрдое тело.

Предположим противное: пусть конфигурация движется как одно твёрдое тело. Тогда, так как главный вектор и главный момент внешних сил, действующих на тело, равны нулю, то центр масс тела движется прямолинейно с постоянной скоростью, а движение тела около центра масс есть движение Эйлера – Пуансо [7]. Свяжем с телом систему координат $Oxuz$, где O – центр масс тела. Положение системы координат $Oxuz$ относительно системы $Oe_1e_2e_3$ задаётся углами Эйлера ψ, θ, φ .

Определения 19.6. *Линией узлов* называется прямая пересечения плоскостей Oe_1e_2 и Oxu . Угол ψ между осью Oe_1 и линией узлов называется *углом прецессии*. Угол θ между осями Oe_3 и Oz называется *углом нутации*. Угол φ между линией узлов и осью Ox называется *углом собственного вращения* [7].

Пусть x_k, y_k, z_k – координаты k -го тела в системе $Oxuz$. x_k, y_k, z_k не зависят от времени. Тогда координаты R_{k1}, R_{k2}, R_{k3} k -го тела в системе $Oe_1e_2e_3$ вычисляются по формулам:

$$\begin{pmatrix} R_{k1} \\ R_{k2} \\ R_{k3} \end{pmatrix} = \Phi_\psi \Phi_\theta \Phi_\varphi \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}, \quad \Phi_\psi = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

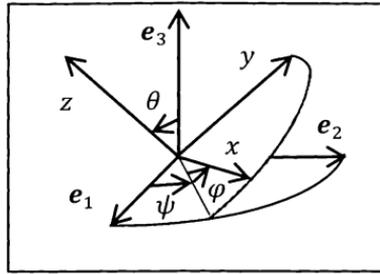


Рис. 19.1. Углы Эйлера

где ψ, θ, φ – функции времени T . Ускорение k -го тела в системе $Oe_1e_2e_3$ имеет координаты

$$\begin{pmatrix} \ddot{R}_{k1} \\ \ddot{R}_{k2} \\ \ddot{R}_{k3} \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dT^2} (\Phi_\psi \Phi_\theta \Phi_\varphi) \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}.$$

Точка означает дифференцирование по времени T .

По второму закону Ньютона ускорение k -го тела и главный вектор сил, действующих на тело, – коллинеарные векторы. В центральной конфигурации главный вектор направлен по радиус-вектору, поэтому ускорение k -го тела и его радиус-вектор коллинеарны:

$$\begin{pmatrix} \ddot{R}_{k1} \\ \ddot{R}_{k2} \\ \ddot{R}_{k3} \end{pmatrix} = C_k \begin{pmatrix} R_{k1} \\ R_{k2} \\ R_{k3} \end{pmatrix}, \quad C_k \Phi_\psi \Phi_\theta \Phi_\varphi \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = \frac{d^2}{dT^2} (\Phi_\psi \Phi_\theta \Phi_\varphi) \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}, \quad (19.7)$$

$$\begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} = C_k^{-1} (\Phi_\psi \Phi_\theta \Phi_\varphi)^{-1} \frac{d^2}{dT^2} (\Phi_\psi \Phi_\theta \Phi_\varphi) \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix}.$$

Здесь предполагается, что k -е тело не совпадает с центром масс, $C_k \neq 0$.

Так как центральная конфигурация – пространственная, то $n \geq 4$ и существуют три точки с радиус-векторами R_1, R_2, R_3 , не лежащими в одной плоскости. Координаты этих векторов составляют неособенную матрицу:

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Из (19.7) получим следующее равенство:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} = (\Phi_\psi \Phi_\theta \Phi_\varphi)^{-1} \frac{d^2}{dT^2} (\Phi_\psi \Phi_\theta \Phi_\varphi) \begin{pmatrix} C_1^{-1}x_1 & C_2^{-1}x_2 & C_3^{-1}x_3 \\ C_1^{-1}y_1 & C_2^{-1}y_2 & C_3^{-1}y_3 \\ C_1^{-1}z_1 & C_2^{-1}z_2 & C_3^{-1}z_3 \end{pmatrix}. \quad (19.8)$$

Определитель матрицы, стоящей справа, равен нулю, так как любая производная матриц Φ_ψ , Φ_θ , Φ_φ имеет нулевой определитель. Например:

$$\frac{d\Phi_\psi}{dT} = \begin{pmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\psi},$$

$$\frac{d^2\Phi_\psi}{dT^2} = \begin{pmatrix} -\cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & -\cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (\dot{\psi})^2 + \begin{pmatrix} -\sin \psi & -\cos \psi & 0 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ddot{\psi},$$

$$\det\left(\frac{d\Phi_\psi}{dT}\right) = 0, \quad \det\left(\frac{d^2\Phi_\psi}{dT^2}\right) = 0.$$

Отсюда следует, что равенство (19.8) невозможно, так как слева стоит неособенная матрица. Таким образом, пространственная конфигурация не может двигаться как одно твёрдое тело.

Результат 19.2. Для пространственной центральной конфигурации не существует частного решения Задачи 2.1 n тел, при котором точки двигались бы как одно твёрдое тело.

Замечание 19.1. О связи центральных конфигураций с Задачей 2.1 n тел смотрите в [26].

§20. Известные центральные конфигурации

20.1 Центральные конфигурации 2-х тел

Две материальные точки всегда образуют коллинеарную центральную конфигурацию.

Действительно, для двух точек с массами M_1 , M_2 справедливо равенство

$$M_1 \mathbf{R}_1 + M_2 \mathbf{R}_2 = 0, \quad (20.1)$$

так как радиус-векторы точек проведены из центра масс. Из (20.1) следует, что векторы \mathbf{R}_1 , \mathbf{R}_2 коллинеарны и являются решением уравнений (19.4) при $n = 2$, $\alpha = (M_1 + M_2) \rho^{-3}$, где ρ – расстояние между точками.

Обратно, при $n = 2$ и заданном $\alpha = \alpha' > 0$ решение уравнений (19.4) равно $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}'_k$, где

$$\mathbf{R}'_1 = \frac{M_2 \mathbf{e}}{\sqrt[3]{\alpha' (M_1 + M_2)^2}}, \quad \mathbf{R}'_2 = -\frac{M_1 \mathbf{e}}{\sqrt[3]{\alpha' (M_1 + M_2)^2}}, \quad (20.2)$$

\mathbf{e} – произвольный единичный вектор. Векторы (20.2) удовлетворяют равенству (20.1).

Точки с радиус-векторами (20.2) образуют коллинеарную центральную конфигурацию при произвольных значениях α' и \mathbf{e} . Если движение точек удовлетворяет задаче 2-х тел, то α' , \mathbf{e} не произвольны, а определяются из решения задачи 2-х тел [1].

Если $\alpha' > 0$ – постоянное число и \mathbf{e} – постоянный единичный вектор, то существует решение задачи 2-х тел с начальными значениями (19.6), (20.2): точки образуют твёрдое тело, вращающееся с постоянной угловой скоростью.

20.2. Центральные конфигурации 3-х тел

Так как через три точки всегда можно провести плоскость, то центральные конфигурации трёх тел являются или коллинеарными, или плоскими. При любых значениях M_1 , M_2 , M_3 существует три коллинеарные центральные конфигурации (*центральные конфигурации Эйлера*) и одна плоская центральная конфигурация (*центральная конфигурация Лагранжа*) [26].

В коллинеарных центральных конфигурациях порядок расположения точек на прямой определяется перестановками (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3). При повороте прямой на 180° вектор $(\mathbf{R}_i, \mathbf{R}_j, \mathbf{R}_k)$ переходит в вектор $(\mathbf{R}_k, \mathbf{R}_j, \mathbf{R}_i)$ того же класса эквивалентности. Поэтому конфигурации точек, симметричные относительно центра масс, представляют собой одну и ту же центральную конфигурацию.

В плоской центральной конфигурации 3 тела располагаются в вершинах правильного треугольника. Если два равных треугольника имеют противоположный порядок расположения материальных точек: (1, 2, 3) и (1, 3, 2), – то эти треугольники можно совместить поворотом на 180° плоскости треугольника вокруг оси, лежащей в плоскости. Поэтому 3 материальные точки с массами M_1 , M_2 , M_3 , лежащие в вершинах произвольного правильного треугольника, образуют одну и ту же (единственную) плоскую центральную конфигурацию.

20.3. Коллинеарные центральные конфигурации n тел

Для n тел с произвольными массами M_1, \dots, M_n существует $n!/2$ коллинеарных центральных конфигураций. Порядок расположения точек на прямой определяется перестановками $(1, \dots, n-1, n)$, $(1, \dots, n, n-1)$, ... При повороте прямой на 180° порядок расположения точек на прямой становится противоположным, вектор $(R_{i_1}, \dots, R_{i_n})$ переходит в вектор $(R_{i_n}, \dots, R_{i_1})$ того же класса эквивалентности. Поэтому конфигурации точек, симметричные относительно центра масс O , представляют собой одну и ту же коллинеарную центральную конфигурацию n тел.

20.4. Центральные конфигурации n тел с равными массами

Если n точек имеют равные массы $M_1 = \dots = M_n$, то существуют центральные конфигурации, в которых точки располагаются в вершинах правильного n -угольника. Если $n = 2$, то это единственная (и коллинеарная) центральная конфигурация 2-х тел. Если $n > 2$, то это плоские центральные конфигурации.

20.5. Центральные конфигурации n тел с равными $(n-1)$ массами, $n \geq 3$

Если среди n точек $(n-1)$ точка имеют равные массы $M_1 = \dots = M_{n-1}$, то существуют центральные конфигурации, в которых точки с массами $M_1 = \dots = M_{n-1}$ располагаются в вершинах правильного $(n-1)$ -угольника, а точка с массой M_n находится в центре правильного $(n-1)$ -угольника. Если $n = 3$, то это коллинеарная центральная конфигурация 3-х тел. Если $n > 3$, то это плоские центральные конфигурации n тел. Возможен случай, когда равны массы всех n тел.

20.6. Пространственные центральные конфигурации четырёх тел

При любых значениях M_1, \dots, M_4 существует две пространственные центральные конфигурации четырех тел: материальные точки располагаются в вершинах тетраэдра. Если совместить массы M_1, M_2, M_3 двух равных тетраэдров, принадлежащих разным пространственным конфигурациям, то массы M_4 расположатся симметрично относительно грани с M_1, M_2, M_3 .

Замечание 20.1. Известные центральные конфигурации описаны в [26]. О центральных конфигурациях смотрите также в [21].

В [31] Дж. Палмором получены плоские центральные конфигурации 4-х тел с равными массами.

§21. Центральные конфигурации 4-х тел. Постановка задачи

Рассмотрим центральные конфигурации 4-х тел в случае, когда масса четвёртого тела много меньше первых трёх:

$$M_4 \ll M_1, \quad M_4 \ll M_2, \quad M_4 \ll M_3.$$

Исключим из уравнений (19.4) вектор \mathbf{R}_1 . Для этого вычтем первое уравнение из остальных:

$$\alpha \mathbf{R}_{1k} = \sum_{j=2, j \neq k}^4 \left(\frac{R_{1k} - R_{1j}}{|R_{1k} - R_{1j}|^3} + \frac{R_{1j}}{|R_{1j}|^3} \right) M_j + \frac{R_{1k}}{|R_{1k}|^3} (M_1 + M_k), \quad (21.1)$$

$$\mathbf{R}_{1k} = \mathbf{R}_k - \mathbf{R}_1, \quad k = 2, 3, 4.$$

Вектор \mathbf{R}_1 находится из условия, что в системе координат $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ центр масс тел совпадает с началом координат:

$$M_1\mathbf{R}_1 + \dots + M_4\mathbf{R}_4 = 0, \quad (M_1 + \dots + M_4)\mathbf{R}_1 + M_2\mathbf{R}_{12} + \dots + M_4\mathbf{R}_{14} = 0,$$

$$\mathbf{R}_1 = -\frac{M_2\mathbf{R}_{12} + M_3\mathbf{R}_{13} + M_4\mathbf{R}_{14}}{M_1 + \dots + M_4}.$$

Введём безразмерные переменные:

$$m_k = \frac{M_k}{M_1 + M_2 + M_3}, \quad k = 1, 2, 3; \quad \varepsilon = m_4 = \frac{M_4}{M_1 + M_2 + M_3},$$

$$\mathbf{r}_{1k} = \mathbf{R}_{1k} \left(\frac{\alpha}{M_1 + M_2 + M_3} \right)^{1/3}, \quad r_{1k} = |\mathbf{r}_{1k}|,$$

$$r_{jk} = |\mathbf{r}_{1k} - \mathbf{r}_{1j}|, \quad 2 \leq j < k \leq 4.$$

Уравнения (21.1) принимают вид:

$$\left(1 - \frac{m_1 + m_2}{r_{12}^3} - \frac{m_3}{r_{23}^3} - \frac{\varepsilon}{r_{24}^3} \right) \mathbf{r}_{12} - \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} \right) m_3 \mathbf{r}_{13} - \left(\frac{1}{r_{14}^3} - \frac{1}{r_{24}^3} \right) \varepsilon \mathbf{r}_{14} = 0, \quad (21.2)$$

$$-\left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} \right) m_2 \mathbf{r}_{12} + \left(1 - \frac{m_1 + m_3}{r_{13}^3} - \frac{m_2}{r_{23}^3} - \frac{\varepsilon}{r_{34}^3} \right) \mathbf{r}_{13} - \left(\frac{1}{r_{14}^3} - \frac{1}{r_{34}^3} \right) \varepsilon \mathbf{r}_{14} = 0,$$

$$-\left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{24}^3} \right) m_2 \mathbf{r}_{12} - \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{34}^3} \right) m_3 \mathbf{r}_{13} + \left(1 - \frac{m_1 + \varepsilon}{r_{14}^3} - \frac{m_2}{r_{24}^3} - \frac{m_3}{r_{34}^3} \right) \mathbf{r}_{14} = 0,$$

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1.$$

Расстояния r_{jk} удовлетворяют уравнению

$$\mathfrak{M}(r) \equiv \begin{vmatrix} 0 & r_{12}^2 & r_{13}^2 & r_{14}^2 & 1 \\ r_{12}^2 & 0 & r_{23}^2 & r_{24}^2 & 1 \\ r_{13}^2 & r_{23}^2 & 0 & r_{34}^2 & 1 \\ r_{14}^2 & r_{24}^2 & r_{34}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (21.3)$$

Слева стоит определитель Кэли – Менгера. Равенство (21.3) является необходимым и достаточным условием того, что 4 точки с радиус-векторами \mathbf{R}_k лежат в одной плоскости.

Уравнения (21.2), (21.3) описывают плоские центральные конфигурации 4-х тел. Дальше будем говорить о них как о конфигурациях.

В рассматриваемой постановке ε является малым параметром. Точки с массами m_1, m_2, m_3 образуют конфигурацию, близкую к центральной конфигурации 3-х тел. Таким образом, m_1, m_2, m_3 находятся вблизи вершин равностороннего треугольника (случай Лагранжа) или вблизи одной прямой (случай Эйлера).

§22. Центральные конфигурации 4-х тел, I

В §22 найдены конфигурации 4-х тел, из которых 3 тела близки к конфигурации Лагранжа (к вершинам равностороннего треугольника), а 4-е тело с маленькой массой находится на конечном расстоянии от остальных тел, то есть на расстоянии порядка $\varepsilon^0 = 1$.

22.1. Нулевое приближение расстояний до 4-го тела

В рассматриваемом случае

$$r_{12} = 1 + u_{12}, \quad r_{13} = 1 + u_{13}, \quad r_{23} = 1 + u_{23}, \quad (22.1)$$

$$r_{14} = p_{14} + u_{14}, \quad r_{24} = p_{24} + u_{24}, \quad r_{34} = p_{34} + u_{34}.$$

Здесь u_{ij} – малые величины, обращающиеся в 0 при $\varepsilon = 0$; p_{14}, p_{24}, p_{34} – расстояния r_{14}, r_{24}, r_{34} в нулевом приближении относительно ε . В (22.1) использован тот факт, что при заданном α стороны равностороннего треугольника в конфигурации Лагранжа 3-х тел равны

$$\left(\frac{M_1+M_2+M_3}{\alpha}\right)^{1/3}.$$

Умножим последнее уравнение (21.2) скалярно на векторы \mathbf{r}_{12} , \mathbf{r}_{13} :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{m_1 + \varepsilon}{r_{14}^3}\right) \frac{r_{12}^2 + r_{14}^2 - r_{24}^2}{2} + \left(\frac{r_{12}^2 - r_{14}^2 + r_{24}^2}{2r_{24}^3} - \frac{1}{r_{12}}\right) m_2 + \\ + \left(\frac{r_{13}^2 - r_{23}^2 - r_{14}^2 + r_{24}^2}{r_{34}^3} - \frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - r_{23}^2}{r_{13}^3}\right) \frac{m_3}{2} = 0, \end{aligned} \quad (22.2)$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{m_1 + \varepsilon}{r_{14}^3}\right) \frac{r_{13}^2 + r_{14}^2 - r_{34}^2}{2} + \left(\frac{r_{12}^2 - r_{23}^2 - r_{14}^2 + r_{34}^2}{r_{24}^3} - \frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - r_{23}^2}{r_{12}^3}\right) \frac{m_2}{2} + \\ + \left(\frac{r_{13}^2 - r_{14}^2 + r_{34}^2}{2r_{34}^3} - \frac{1}{r_{13}}\right) m_3 = 0, \end{aligned}$$

$$m_1 + m_2 + m_3 = 1.$$

Здесь использована формула

$$(\mathbf{r}_{1j}, \mathbf{r}_{1k}) = r_{1j} r_{1k} \cos \widehat{\mathbf{r}_{1j} \mathbf{r}_{1k}} = (r_{1j}^2 + r_{1k}^2 - r_{jk}^2)/2,$$

которая следует из теоремы косинусов для треугольника.

Подставим (22.1) в уравнения (21.3), (22.2) и положим ε , u_{ij} , $1 \leq i < j \leq 4$, равными нулю. Получим уравнения для p_{14} , p_{24} , p_{34} . Из них выразим p_{24}^2 , p_{34}^2 :

$$p_{24}^2 = p_{14}^2 + \left(1 - 2m_2 - m_3 - \frac{m_1}{p_{14}^3} + \frac{m_2}{p_{24}^3}\right) \left(1 - \frac{m_1}{p_{14}^3} - \frac{m_2}{p_{24}^3} - \frac{m_3}{p_{34}^3}\right)^{-1}, \quad (22.3)$$

$$p_{34}^2 = p_{14}^2 + \left(1 - m_2 - 2m_3 - \frac{m_1}{r_{14}^3} + \frac{m_3}{r_{34}^3}\right) \left(1 - \frac{m_1}{p_{14}^3} - \frac{m_2}{p_{24}^3} - \frac{m_3}{p_{34}^3}\right)^{-1},$$

$$p_{14}^4 + p_{24}^4 + p_{34}^4 - p_{14}^2 p_{24}^2 - p_{14}^2 p_{34}^2 - p_{24}^2 p_{34}^2 - p_{14}^2 - p_{24}^2 - p_{34}^2 + 1 = 0.$$

Подставим p_{24}^2 , p_{34}^2 в третье уравнение, избавимся от знаменателя и сгруппируем слагаемые:

$$\begin{aligned} 3 \left(\frac{m_2}{p_{24}^3} + \frac{m_3}{p_{34}^3} - m_2 - m_3\right)^2 + \left(\frac{m_2}{p_{24}^3} - \frac{m_3}{p_{34}^3} - m_2 + m_3\right)^2 = \\ = 4 p_{14}^2 \left(1 - \frac{m_1}{p_{14}^3} - \frac{m_2}{p_{24}^3} - \frac{m_3}{p_{34}^3}\right)^2. \end{aligned}$$

Полученное выражение позволяет ввести параметр φ так, что выполняются равенства:

$$\sqrt{3} \left(\frac{m_2}{p_{24}^3} + \frac{m_3}{p_{34}^3} - m_2 - m_3 \right) = 2p_{14} \left(1 - \frac{m_1}{p_{14}^3} - \frac{m_2}{p_{24}^3} - \frac{m_3}{p_{34}^3} \right) \cos \varphi, \quad (22.4)$$

$$\frac{m_2}{p_{24}^3} - \frac{m_3}{p_{34}^3} - m_2 + m_3 = 2p_{14} \left(1 - \frac{m_1}{p_{14}^3} - \frac{m_2}{p_{24}^3} - \frac{m_3}{p_{34}^3} \right) \sin \varphi.$$

Введём второй параметр $s = p_{14}$. (22.4) – линейные уравнения относительно p_{24}^{-3} , p_{34}^{-3} . Поэтому справедливы формулы, выражающие p_{14} , p_{24} , p_{34} через параметры s , φ :

$$p_{14} = s, \quad p_{24} = \left(\frac{m_2 s^2 \Delta}{\Delta_{24}} \right)^{1/3}, \quad p_{34} = \left(\frac{m_3 s^2 \Delta}{\Delta_{34}} \right)^{1/3}, \quad \Delta = s \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (22.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{24} = s^3 \left[(1 - m_3) \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) - m_2 \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} m_2 s^2 - \\ - (1 - m_2 - m_3) \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_{34} = s^3 \left[-(1 - m_2) \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) + m_3 \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \right] + \frac{\sqrt{3}}{2} m_3 s^2 + \\ + (1 - m_2 - m_3) \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right). \end{aligned}$$

Здесь сделана замена $m_1 = 1 - m_2 - m_3$.

Уравнения для параметров s , φ получаем подстановкой формул (22.5) в первые уравнения (22.3):

$$F_{24} \equiv m_2 s^2 \Delta - \left[1 + 2s \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) + s^2 \right]^{3/2} \Delta_{24} = 0, \quad (22.6)$$

$$F_{34} \equiv m_3 s^2 \Delta - \left[1 + 2s \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) + s^2 \right]^{3/2} \Delta_{34} = 0.$$

Таким образом, при заданных m_1 , m_2 , m_3 ($m_1 + m_2 + m_3 = 1$) алгоритм вычисления p_{14} , p_{24} , p_{34} следующий: решаются уравнения (22.6) относительно s , φ , и потом вычисляются p_{14} , p_{24} , p_{34} по формулам (22.5).

22.2. Бифуркационное множество (БМ)

Уравнения (22.6) линейны по m_2, m_3 . Выразим их:

$$m_2 = \frac{D_2}{D}, \quad D_2 = q_2(1 - q_3)(s^3 - 1) \left(s \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right), \quad (22.7)$$

$$m_3 = \frac{D_3}{D}, \quad D_3 = -q_3(1 - q_2)(s^3 - 1) \left(s \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right),$$

$$\begin{aligned} D = & q_2 q_3 \left(s^3 \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi + \frac{3}{4} s^2 + s \cos^2 \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \varphi \right) + \\ & + q_2 \left(s \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left[s^3 \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\sqrt{3}}{2} s^2 - \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) \right] - \\ & - q_3 \left(s \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left[s^3 \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} s^2 - \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) \right] + \\ & + s^2 \left(s \cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

$$q_2 = \left[1 + 2s \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{6} \right) + s^2 \right]^{3/2}, \quad q_3 = \left[1 + 2s \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) + s^2 \right]^{3/2}.$$

Формулы (22.7) задают отображение множества (s, φ) на множество (m_2, m_3) . Для каждой точки (m_2, m_3) существует несколько прообразов при этом отображении. Число прообразов меняется при переходе через БМ, которое описывается в пространстве (s, φ) уравнением

$$\frac{\partial(m_2, m_3)}{\partial(s, \varphi)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial m_2}{\partial s} & \frac{\partial m_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial m_3}{\partial s} & \frac{\partial m_3}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \equiv \frac{(s^3 - 1)(s \cos \varphi + \sqrt{3}/2) D_0}{D^3} = 0.$$

Функцию D_0 не приводим из-за её громоздкости. Функции (22.7) отображают БМ в пространство (m_2, m_3) .

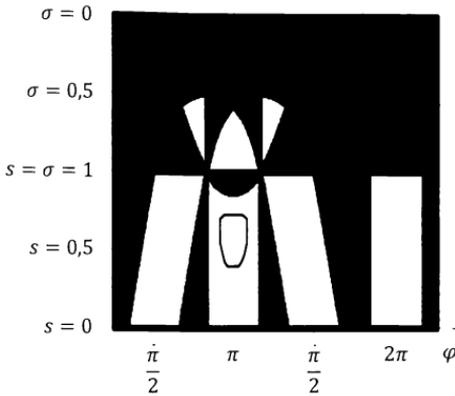


Рис. 22.1

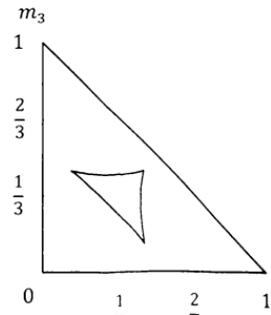


Рис. 22.2

БМ построено численно на плоскостях (s, φ) и (m_2, m_3) (смотри Рис. 22.1, 22.2). На Рис. 22.1 дан отрезок $\pi/4 \leq \varphi \leq 9\pi/4$ (все функции периодичны по φ с периодом 2π). На Рис. 22.2 БМ симметрично относительно биссектрисы $m_2 = m_3$. Поэтому в Табл. 22.1 даны численные значения $m_2 \leq m_3$. Возможные значения s, φ находятся из неравенств

$$0 < m_1 = 1 - m_2 - m_3 < 1, \quad 0 < m_2 < 1, \quad 0 < m_3 < 1.$$

$$p_{14} > 0, \quad p_{24} > 0, \quad p_{34} > 0.$$

В области возможных значений определители Δ, D не обращаются в ноль (проверено численно).

На Рис. 22.1 неограниченное множество $s > 0$ замкнуто для наглядности двумя ограниченными: $0 < s < 1$ и $0 < \sigma = 1/s < 1$. Точка $s = \sigma = 1$ не входит в область возможных значений. На множестве (σ, φ) отображение (22.7) задаётся формулами

$$m_2 = \frac{\tilde{D}_2}{\tilde{D}}, \quad m_3 = \frac{\tilde{D}_3}{\tilde{D}}, \quad \tilde{D}(\sigma, \varphi) = \sigma^9 D(s, \varphi)|_{s=1/\sigma}. \quad (22.8)$$

$$\tilde{D}_2(\sigma, \varphi) = \sigma^{10} D_2(s, \varphi)|_{s=1/\sigma}, \quad \tilde{D}_3(\sigma, \varphi) = \sigma^{10} D_3(s, \varphi)|_{s=1/\sigma}.$$

Уравнение БМ в пространстве (σ, φ) имеет вид:

$$\frac{\partial(m_2, m_3)}{\partial(\sigma, \varphi)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial m_2}{\partial \sigma} & \frac{\partial m_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial m_3}{\partial \sigma} & \frac{\partial m_3}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \equiv \frac{(1-\sigma^3)(\cos \varphi + \sqrt{3}/2 \sigma) \tilde{D}_0}{\tilde{D}^3} = 0.$$

Таблица 22.1. Бифуркационное множество на плоскости (m_2, m_3)

m_2	0,29	0,24	0,20	0,16	0,13	0,12	0,19	0,26	0,31	0,36	0,40	0,44
m_3	0,29	0,33	0,37	0,41	0,43	0,44	0,43	0,42	0,42	0,42	0,43	0,44

Формулу для \tilde{D}_0 не приводим из-за её громоздкости.

22.3. Центральные конфигурации 4-х тел

Для всех точек (m_2, m_3) внутри БМ на Рис. 22.2 число прообразов отображения (22.7), (22.8) одинаково, и значит одинаково число конфигураций. Оно равно 10. Это найдено вычислением расстояний p_{14} , p_{24} , p_{34} для $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$ по алгоритму, изложенному в п. 22.1.

Расположение 4-ой массы показано на Рис. 22.3. Численные значения p_{14} , p_{24} , p_{34} (расстояния в нулевом приближении) даны в Табл. 22.2.

Для всех точек (m_2, m_3) , лежащих вне БМ на Рис. 22.2, число конфигураций одинаково и равно 8. Это найдено вычислением расстояний p_{14} , p_{24} , p_{34} для двух случаев: $m_1 = m_2 = 0,25$, $m_3 = 0,5$ и $m_1 = 0,2$, $m_2 = 0,3$, $m_3 = 0,5$. Положение 4-ой массы показано на Рис. 22.4, 22.5. Численные значения p_{14} , p_{24} , p_{34} даны в Табл. 22.3, 22.4.

Заметим, что конфигурации 4-х тел, симметричные относительно прямой, проходящей через массы m_1 , m_2 , принадлежат одной центральной конфигурации по Определению 19.2.

22.4. Первое приближение расстояний между тремя телами

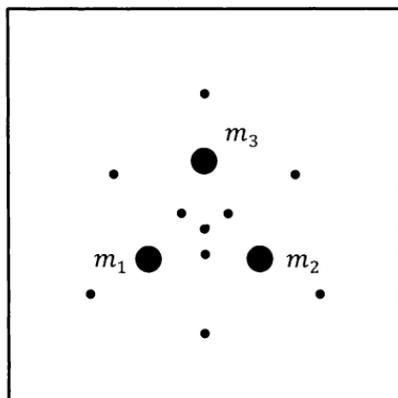
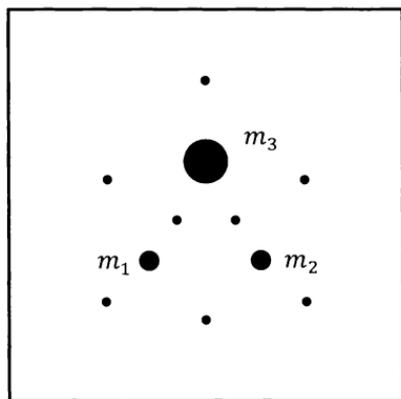
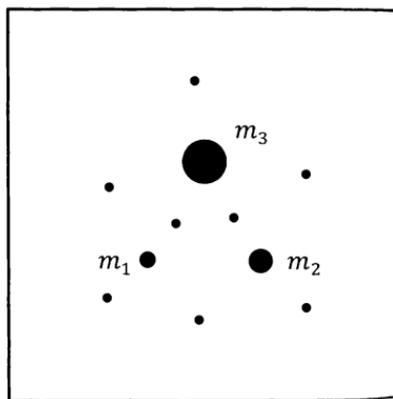
Уравнения (21.2) являются линейными однородными уравнениями относительно векторов \mathbf{r}_{12} , \mathbf{r}_{13} , \mathbf{r}_{14} . Так как векторы неколлинеарны, то дополнительные миноры матрицы, составленной из коэффициентов в уравнениях (21.2), равны нулю. Обозначим a_{ij} коэффициенты в уравнениях (21.2) и рассмотрим следующие миноры:

$$a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \equiv \left(1 - \frac{m_1+m_3}{r_{13}^3} - \frac{m_2}{r_{23}^3} - \frac{\varepsilon}{r_{34}^3}\right) \left(1 - \frac{m_1+\varepsilon}{r_{14}^3} - \frac{m_2}{r_{24}^3} - \frac{m_3}{r_{34}^3}\right) -$$

$$-\varepsilon m_3 \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{34}^3}\right) \left(\frac{1}{r_{14}^3} - \frac{1}{r_{34}^3}\right) = 0,$$

$$a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32} \equiv -m_3 \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{23}^3}\right) \left(1 - \frac{m_1+\varepsilon}{r_{14}^3} - \frac{m_2}{r_{24}^3} - \frac{m_3}{r_{34}^3}\right) -$$

$$-\varepsilon m_3 \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{34}^3}\right) \left(\frac{1}{r_{14}^3} - \frac{1}{r_{24}^3}\right) = 0,$$

Рис. 22.3. $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$ Рис. 22.4. $m_1 = m_2 = 0,25,$
 $m_3 = 0,5$ Рис. 22.5. $m_1 = 0,2, m_2 = 0,3,$
 $m_3 = 0,5$

$$a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31} \equiv -m_2 \left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{23}^3} \right) \left(1 - \frac{m_1 + \varepsilon}{r_{14}^3} - \frac{m_2}{r_{24}^3} - \frac{m_3}{r_{34}^3} \right) -$$

$$-\varepsilon m_2 \left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{24}^3} \right) \left(\frac{1}{r_{14}^3} - \frac{1}{r_{34}^3} \right) = 0.$$

Таблица 22.2. $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_{14}	0,82	1,51	0,60	1,55	1,55	0,82	0,50	0,82	0,58	0,50
p_{24}	1,51	0,82	1,55	0,60	1,55	0,82	0,82	0,50	0,58	0,50
p_{34}	0,82	0,82	1,55	1,55	0,60	1,51	0,50	0,50	0,58	0,82

Таблица 22.3. $m_1 = m_2 = 0,25, m_3 = 0,5$

	1	2	3	4	5	6	7	8
p_{14}	0,81	1,56	0,53	1,44	1,66	0,72	0,43	0,84
p_{24}	1,56	0,81	1,44	0,53	1,66	0,72	0,84	0,43
p_{34}	0,90	0,90	1,52	1,52	0,72	1,39	0,57	0,57

Таблица 22.4. $m_1 = 0,2, m_2 = 0,3, m_3 = 0,5$

	1	2	3	4	5	6	7	8
p_{14}	0,74	1,60	0,49	1,46	1,63	0,68	0,41	0,85
p_{24}	1,51	0,86	1,42	0,57	1,68	0,76	0,83	0,45
p_{34}	0,89	0,91	1,47	1,56	0,72	1,38	0,60	0,55

Полученные уравнения линейны относительно $r_{12}^{-3}, r_{13}^{-3}, r_{23}^{-3}$. Формулы для них выписываются явно. Запишем их в виде

$$r_{ij}^{-3} = 1 + \varepsilon f_{ij}(r_{14}, r_{24}, r_{34}, \varepsilon), \quad 1 \leq i < j \leq 3.$$

Тогда справедливы равенства

$$u_{ij} = r_{ij} - 1 = (1 + \varepsilon f_{ij})^{-1/3} - 1 \equiv \varepsilon g_{ij}(r_{14}, r_{24}, r_{34}, \varepsilon), \quad (22.9)$$

$$1 \leq i < j \leq 3.$$

Полученные выражения позволяют находить последовательные приближения функций u_{ij} . Действительно, представим искомое решение в виде степенных рядов по малому параметру ε в окрестности точки $r_{k4} = p_{k4}$:

$$u_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} u_{ij}^{(n)} \varepsilon^n, \quad r_{k4} = p_{k4} + \sum_{n=1}^{\infty} u_{k4}^{(n)} \varepsilon^n, \quad (22.10)$$

$$1 \leq i < j \leq 3, \quad 1 \leq k \leq 3.$$

Подставим (22.10) в (22.9), разложим функции по степеням ε и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях. Получим формулы для $u_{ij}^{(n)}$:

$$u_{ij}^{(n)} = [\tilde{g}_{ij}]^{(n-1)}, \quad 1 \leq i < j \leq 3, \quad n = 1, 2, \dots;$$

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} \left(p_{14} + \sum_{k=1}^{n-1} u_{14}^{(k)} \varepsilon^k, p_{24} + \sum_{k=1}^{n-1} u_{24}^{(k)} \varepsilon^k, p_{34} + \sum_{k=1}^{n-1} u_{34}^{(k)} \varepsilon^k, \varepsilon \right)$$

Здесь $[\tilde{g}_{ij}]^{(n-1)}$ обозначает коэффициент при ε^{n-1} в разложении \tilde{g}_{ij} по степеням ε .

Первое приближение \tilde{r}_{12} , \tilde{r}_{13} , \tilde{r}_{23} расстояний r_{12} , r_{13} , r_{23} между массами m_1 , m_2 , m_3 имеет вид:

$$r_{12} \approx \tilde{r}_{12} = 1 + \varepsilon u_{12}^{(1)}, \quad r_{13} \approx \tilde{r}_{13} = 1 + \varepsilon u_{13}^{(1)}, \quad r_{23} \approx \tilde{r}_{23} = 1 + \varepsilon u_{23}^{(1)},$$

$u_{ij}^{(1)}$ — функции от p_{14} , p_{24} , p_{34} . В Табл. 22.5–22.7 для масс, рассмотренных в п. 22.3, даны численные значения \tilde{r}_{12} , \tilde{r}_{13} , \tilde{r}_{23} и первое приближение координат тел:

$$x_i \approx \tilde{x}_i \equiv x_i^{(0)} + x_i^{(1)} \varepsilon, \quad y_i \approx \tilde{y}_i \equiv y_i^{(0)} + y_i^{(1)} \varepsilon, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Координаты даны в системе Qx , где Qx — ось, проходящая через массы m_1 , m_2 ; начало координат Q находится посередине между m_1 , m_2 ; ось Qy направлена вверх.

Таблица 22.5. $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$

	1	2	3	4
\tilde{r}_{12}	$1 - 0,29\varepsilon$	$1 - 0,29\varepsilon$	$1 - 0,91\varepsilon$	$1 - 0,91\varepsilon$
\tilde{r}_{13}	$1 + 1,06\varepsilon$	$1 - 0,29\varepsilon$	$1 - 0,91\varepsilon$	$1 + 0,59\varepsilon$
\tilde{r}_{23}	$1 - 0,29\varepsilon$	$1 + 1,06\varepsilon$	$1 + 0,59\varepsilon$	$1 - 0,91\varepsilon$
\tilde{r}_{14}	$0,82 + 0,44\varepsilon$	$1,51 - 0,49\varepsilon$	$0,60 + 0,53\varepsilon$	$1,55 - 0,56\varepsilon$
\tilde{r}_{24}	$1,51 - 0,49\varepsilon$	$0,82 + 0,44\varepsilon$	$1,55 - 0,56\varepsilon$	$0,60 + 0,53\varepsilon$
\tilde{r}_{34}	$0,82 + 0,44\varepsilon$	$0,82 + 0,44\varepsilon$	$1,55 - 0,56\varepsilon$	$1,55 - 0,56\varepsilon$
\tilde{x}_1	$-0,5 + 0,14\varepsilon$	$-0,5 + 0,14\varepsilon$	$-0,5 + 0,45\varepsilon$	$-0,5 + 0,45\varepsilon$
\tilde{y}_1	0	0	0	0
\tilde{x}_2	$0,5 - 0,14\varepsilon$	$0,5 - 0,14\varepsilon$	$0,5 - 0,45\varepsilon$	$0,5 - 0,45\varepsilon$
\tilde{y}_2	0	0	0	0
\tilde{x}_3	$1,35\varepsilon$	$-1,35\varepsilon$	$-1,50\varepsilon$	$1,50\varepsilon$
\tilde{y}_3	$0,87 + 0,53\varepsilon$	$0,87 + 0,53\varepsilon$	$0,87 + 0,08\varepsilon$	$0,87 + 0,08\varepsilon$
\tilde{x}_4	$-0,81 + 0,87\varepsilon$	$0,81 - 0,87\varepsilon$	$-1,02 + 0,25\varepsilon$	$1,02 - 0,25\varepsilon$
\tilde{y}_4	$0,76 + 0,58\varepsilon$	$0,76 + 0,58\varepsilon$	$0,30 - 1,01\varepsilon$	$-0,30 - 1,01\varepsilon$
$\tilde{\psi}$	$1,71 + 0,95\varepsilon$	3,14	0	$-2,42 - 0,28\varepsilon$

	5	6	7	8
\tilde{r}_{12}	$1 + 0,59\varepsilon$	$1 + 1,06\varepsilon$	$1 + 0,73\varepsilon$	$1 + 0,73\varepsilon$
\tilde{r}_{13}	$1 - 0,91\varepsilon$	$1 - 0,29\varepsilon$	$1 + 3,58\varepsilon$	$1 + 0,73\varepsilon$
\tilde{r}_{23}	$1 - 0,91\varepsilon$	$1 - 0,29\varepsilon$	$1 + 0,73\varepsilon$	$1 + 3,58\varepsilon$
\tilde{r}_{14}	$1,55 - 0,56\varepsilon$	$0,82 + 0,44\varepsilon$	$0,50 + 1,89\varepsilon$	$0,82 - 1,34\varepsilon$
\tilde{r}_{24}	$1,55 - 0,56\varepsilon$	$0,82 + 0,44\varepsilon$	$0,82 - 1,34\varepsilon$	$0,50 + 1,89\varepsilon$
\tilde{r}_{34}	$0,60 + 0,53\varepsilon$	$1,51 - 0,49\varepsilon$	$0,50 + 1,89\varepsilon$	$0,50 + 1,89\varepsilon$
\tilde{x}_1	$-0,5 - 0,29\varepsilon$	$-0,5 - 0,53\varepsilon$	$-0,5 - 0,36\varepsilon$	$-0,5 - 0,36\varepsilon$
\tilde{y}_1	0	0	0	0
\tilde{x}_2	$0,5 + 0,29\varepsilon$	$0,5 + 0,53\varepsilon$	$0,5 + 0,36\varepsilon$	$0,5 + 0,36\varepsilon$
\tilde{y}_2	0	0	0	0
\tilde{x}_3	0	0	$2,85\varepsilon$	$-2,85\varepsilon$
\tilde{y}_3	$0,87 - 1,22\varepsilon$	$0,87 - 0,64\varepsilon$	$0,87 + 2,28\varepsilon$	$0,87 + 2,28\varepsilon$
\tilde{x}_4	0	0	$-0,21 + 2,20\varepsilon$	$0,21 - 2,20\varepsilon$
\tilde{y}_4	$1,47 - 0,80\varepsilon$	$-0,65 + 0,04\varepsilon$	$0,41 + 0,67\varepsilon$	$0,41 + 0,67\varepsilon$
$\tilde{\psi}$	$2,42 + 0,28\varepsilon$	$-1,71 - 0,95\varepsilon$	$2,72 + 4,68\varepsilon$	3,14

Таблица 22.5. $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$ (окончание)

	9	10
\tilde{r}_{12}	$1 + 1,73\varepsilon$	$1 + 3,58\varepsilon$
\tilde{r}_{13}	$1 + 1,73\varepsilon$	$1 + 0,73\varepsilon$
\tilde{r}_{23}	$1 + 1,73\varepsilon$	$1 + 0,73\varepsilon$
\tilde{r}_{14}	$0,58 + 1,00\varepsilon$	$0,50 + 1,89\varepsilon$
\tilde{r}_{24}	$0,58 + 1,00\varepsilon$	$0,50 + 1,89\varepsilon$
\tilde{r}_{34}	$0,58 + 1,00\varepsilon$	$0,82 - 1,34\varepsilon$
\tilde{x}_1	$-0,5 - 0,87\varepsilon$	$-0,5 - 1,79\varepsilon$
\tilde{y}_1	0	0
\tilde{x}_2	$0,5 + 0,87\varepsilon$	$0,5 + 1,79\varepsilon$
\tilde{y}_2	0	0
\tilde{x}_3	0	0
\tilde{y}_3	$0,87 + 1,50\varepsilon$	$0,87 - 0,19\varepsilon$
\tilde{x}_4	0	0
\tilde{y}_4	$0,29 + 1,23\varepsilon$	$0,05 + 13,20\varepsilon$
$\tilde{\psi}$	3,14	$-2,72 - 4,68\varepsilon$

22.5. Первое приближение расстояний до 4-го тела

Найдём расстояния r_{14} , r_{24} , r_{34} , следуя алгоритму для p_{14} , p_{24} , p_{34} п. 22.1. Для этого выразим r_{24}^2 , r_{34}^2 из уравнений (22.2):

$$r_{24}^2 = r_{14}^2 + \tilde{f}_{24}\tilde{\delta}^{-1}, \quad r_{34}^2 = r_{14}^2 + \tilde{f}_{34}\tilde{\delta}^{-1}, \quad (22.11)$$

$$\tilde{f}_{24} = \left(1 - \frac{2m_2}{r_{12}^3} - \frac{m_3}{r_{13}^3} - \frac{m_1 + \varepsilon}{r_{14}^3} + \frac{m_2}{r_{24}^3}\right) r_{12}^2 - m_3(r_{13}^2 - r_{23}^2) \left(\frac{1}{r_{13}^3} - \frac{1}{r_{34}^3}\right),$$

$$\tilde{f}_{34} = \left(1 - \frac{m_2}{r_{12}^3} - \frac{2m_3}{r_{13}^3} - \frac{m_1 + \varepsilon}{r_{14}^3} + \frac{m_3}{r_{34}^3}\right) r_{13}^2 - m_2(r_{12}^2 - r_{23}^2) \left(\frac{1}{r_{12}^3} - \frac{1}{r_{24}^3}\right),$$

$$\tilde{\delta} = 1 - \frac{m_1 + \varepsilon}{r_{14}^3} - \frac{m_2}{r_{24}^3} - \frac{m_3}{r_{34}^3}.$$

Запишем уравнение (21.3) в виде

$$r_{14}^4 + r_{24}^4 + r_{34}^4 - r_{14}^2 r_{24}^2 - r_{14}^2 r_{34}^2 - r_{24}^2 r_{34}^2 - r_{14}^2 - r_{24}^2 - r_{34}^2 + 1 - (22.12)$$

$$-\Delta\mathfrak{M}/2 = 0,$$

$$\Delta\mathfrak{M} = \Delta\mathfrak{M}(r) \equiv \mathfrak{M}(r) - \mathfrak{M}(\tilde{r}),$$

Таблица 22.6. $m_1 = m_2 = 0,25$, $m_3 = 0,5$

	1	2	3	4
\tilde{r}_{12}	$1 - 0,62\varepsilon$	$1 - 0,62\varepsilon$	$1 - 1,09\varepsilon$	$1 - 1,09\varepsilon$
\tilde{r}_{13}	$1 + 0,82\varepsilon$	$1 - 0,07\varepsilon$	$1 - 1,19\varepsilon$	$1 + 0,52\varepsilon$
\tilde{r}_{23}	$1 - 0,07\varepsilon$	$1 + 0,82\varepsilon$	$1 + 0,52\varepsilon$	$1 - 1,19\varepsilon$
\tilde{r}_{14}	$0,81 + 0,61\varepsilon$	$1,56 + 1,66\varepsilon$	$0,53 + 1,05\varepsilon$	$1,44 + 1,77\varepsilon$
\tilde{r}_{24}	$1,56 + 1,66\varepsilon$	$0,81 + 0,61\varepsilon$	$1,44 + 1,77\varepsilon$	$0,53 + 1,05\varepsilon$
\tilde{r}_{34}	$0,90 + 0,53\varepsilon$	$0,90 + 0,53\varepsilon$	$1,52 + 2,52\varepsilon$	$1,52 + 2,52\varepsilon$
\tilde{x}_1	$-0,5 + 0,31\varepsilon$	$-0,5 + 0,31\varepsilon$	$-0,5 + 0,55\varepsilon$	$-0,5 + 0,55\varepsilon$
\tilde{y}_1	0	0	0	0
\tilde{x}_2	$0,5 - 0,31\varepsilon$	$0,5 - 0,31\varepsilon$	$0,5 - 0,55\varepsilon$	$0,5 - 0,55\varepsilon$
\tilde{y}_2	0	0	0	0
\tilde{x}_3	$0,89\varepsilon$	$-0,89\varepsilon$	$-1,71\varepsilon$	$1,71\varepsilon$
\tilde{y}_3	$0,87 + 0,62\varepsilon$	$0,87 + 0,62\varepsilon$	$0,87 - 0,07\varepsilon$	$0,87 - 0,07\varepsilon$
\tilde{x}_4	$-0,88 - 2,65\varepsilon$	$0,88 + 2,65\varepsilon$	$-0,90 - 2,97\varepsilon$	$0,90 + 2,97\varepsilon$
\tilde{y}_4	$0,71 - 0,51\varepsilon$	$0,71 - 0,51\varepsilon$	$-0,36 + 3,46\varepsilon$	$-0,36 + 3,46\varepsilon$
$\tilde{\psi}$	$1,60 - 1,56\varepsilon$	$-3,09 - 0,08\varepsilon$	$-0,21 - 1,17\varepsilon$	$-2,37 + 1,42\varepsilon$

	5	6	7	8
\tilde{r}_{12}	$1 + 0,76\varepsilon$	$1 + 2,11\varepsilon$	$1 + 0,84\varepsilon$	$1 + 0,84\varepsilon$
\tilde{r}_{13}	$1 - 0,62\varepsilon$	$1 - 0,33\varepsilon$	$1 + 3,54\varepsilon$	$1 + 0,52\varepsilon$
\tilde{r}_{23}	$1 - 0,62\varepsilon$	$1 - 0,33\varepsilon$	$1 + 0,52\varepsilon$	$1 + 3,54\varepsilon$
\tilde{r}_{14}	$1,66 + 1,43\varepsilon$	$0,72 + 1,00\varepsilon$	$0,43 - 1,13\varepsilon$	$0,84 - 2,64\varepsilon$
\tilde{r}_{24}	$1,66 + 1,43\varepsilon$	$0,72 + 1,00\varepsilon$	$0,84 - 2,64\varepsilon$	$0,43 - 1,13\varepsilon$
\tilde{r}_{34}	$0,72 + 0,68\varepsilon$	$1,38 + 3,40\varepsilon$	$0,57 - 2,08\varepsilon$	$0,57 - 2,08\varepsilon$
\tilde{x}_1	$-0,5 - 0,38\varepsilon$	$-0,5 - 1,05\varepsilon$	$-0,5 - 0,42\varepsilon$	$-0,5 - 0,42\varepsilon$
\tilde{y}_1	0	0	0	0
\tilde{x}_2	$0,5 + 0,38\varepsilon$	$0,5 + 1,05\varepsilon$	$0,5 + 0,42\varepsilon$	$0,5 + 0,42\varepsilon$
\tilde{y}_2	0	0	0	0
\tilde{x}_3	0	0	$3,02\varepsilon$	$-3,02\varepsilon$
\tilde{y}_3	$0,87 - 0,93\varepsilon$	$0,87 - 0,99\varepsilon$	$0,87 + 2,10\varepsilon$	$0,87 + 2,10\varepsilon$
\tilde{x}_4	0	0	$-0,26 + 1,95\varepsilon$	$0,26 - 1,95\varepsilon$
\tilde{y}_4	$1,58 - 0,39\varepsilon$	$-0,52 - 0,32\varepsilon$	$0,36 - 4,01\varepsilon$	$0,36 - 4,01\varepsilon$
$\tilde{\psi}$	$2,40 - 0,39\varepsilon$	$-1,81 + 4,42\varepsilon$	$2,68 + 3,60\varepsilon$	$-3,06 - 0,67\varepsilon$

$$r = (r_{12}, r_{13}, r_{23}, r_{14}, r_{24}, r_{34}), \quad \hat{r} = (1, 1, 1, r_{14}, r_{24}, r_{34}).$$

Таблица 22.7. $m_1 = 0,2$, $m_2 = 0,3$, $m_3 = 0,5$

	1	2	3	4
\tilde{r}_{12}	$1 - 0,83\varepsilon$	$1 - 0,48\varepsilon$	$1 - 1,35\varepsilon$	$1 - 0,91\varepsilon$
\tilde{r}_{13}	$1 + 1,04\varepsilon$	$1 - 0,11\varepsilon$	$1 - 1,44\varepsilon$	$1 + 0,54\varepsilon$
\tilde{r}_{23}	$1 - 0,02\varepsilon$	$1 + 0,67\varepsilon$	$1 + 0,49\varepsilon$	$1 - 1,01\varepsilon$
\tilde{r}_{14}	$0,74 + 0,79\varepsilon$	$1,60 + 1,36\varepsilon$	$0,49 + 1,23\varepsilon$	$1,46 + 1,36\varepsilon$
\tilde{r}_{24}	$1,51 + 2,13\varepsilon$	$0,86 + 0,50\varepsilon$	$1,42 + 2,28\varepsilon$	$0,57 + 0,92\varepsilon$
\tilde{r}_{34}	$0,89 + 0,60\varepsilon$	$0,91 + 0,48\varepsilon$	$1,47 + 2,96\varepsilon$	$1,56 + 2,19\varepsilon$
\tilde{x}_1	$-0,5 + 0,41\varepsilon$	$-0,5 + 0,24\varepsilon$	$-0,5 + 0,67\varepsilon$	$-0,5 + 0,45\varepsilon$
\tilde{y}_1	0	0	0	0
\tilde{x}_2	$0,5 - 0,41\varepsilon$	$0,5 - 0,24\varepsilon$	$0,5 - 0,67\varepsilon$	$0,5 - 0,45\varepsilon$
\tilde{y}_2	0	0	0	0
\tilde{x}_3	$1,07\varepsilon$	$-0,78\varepsilon$	$-1,93\varepsilon$	$1,55\varepsilon$
\tilde{y}_3	$0,87 + 0,83\varepsilon$	$0,87 + 0,46\varepsilon$	$0,87 - 0,16\varepsilon$	$0,87 - 0,01\varepsilon$
\tilde{x}_4	$-0,86 - 3,34\varepsilon$	$0,91 + 2,18\varepsilon$	$-0,88 - 3,82\varepsilon$	$0,91 + 2,28\varepsilon$
\tilde{y}_4	$0,65 - 0,78\varepsilon$	$0,76 - 0,36\varepsilon$	$-0,31 + 6,06\varepsilon$	$-0,40 + 1,87\varepsilon$
$\tilde{\psi}$	$1,59 - 2,06\varepsilon$	$3,17 - 0,04\varepsilon$	$-0,16 - 1,06\varepsilon$	$-2,34 + 1,36\varepsilon$

	5	6	7	8
\tilde{r}_{12}	$1 + 0,76\varepsilon$	$1 + 2,16\varepsilon$	$1 + 1,04\varepsilon$	$1 + 0,72\varepsilon$
\tilde{r}_{13}	$1 - 0,60\varepsilon$	$1 - 0,55\varepsilon$	$1 + 3,87\varepsilon$	$1 + 0,52\varepsilon$
\tilde{r}_{23}	$1 - 0,62\varepsilon$	$1 - 0,17\varepsilon$	$1 + 0,52\varepsilon$	$1 + 3,28\varepsilon$
\tilde{r}_{14}	$1,63 + 1,20\varepsilon$	$0,68 + 1,14\varepsilon$	$0,41 - 1,01\varepsilon$	$0,85 - 2,36\varepsilon$
\tilde{r}_{24}	$1,68 + 1,54\varepsilon$	$0,76 + 0,93\varepsilon$	$0,83 - 3,03\varepsilon$	$0,45 - 1,21\varepsilon$
\tilde{r}_{34}	$0,72 + 0,68\varepsilon$	$1,38 + 3,54\varepsilon$	$0,60 - 2,34\varepsilon$	$0,55 - 1,87\varepsilon$
\tilde{x}_1	$-0,5 - 0,38\varepsilon$	$-0,5 - 1,08\varepsilon$	$-0,5 - 0,52\varepsilon$	$-0,5 - 0,36\varepsilon$
\tilde{y}_1	0	0	0	0
\tilde{x}_2	$0,5 + 0,38\varepsilon$	$0,5 + 1,08\varepsilon$	$0,5 + 0,52\varepsilon$	$0,5 + 0,36\varepsilon$
\tilde{y}_2	0	0	0	0
\tilde{x}_3	$0,02\varepsilon$	$-0,38\varepsilon$	$3,35\varepsilon$	$-2,76\varepsilon$
\tilde{y}_3	$0,87 - 0,92\varepsilon$	$0,87 - 1,04\varepsilon$	$0,87 + 2,24\varepsilon$	$0,87 + 1,99\varepsilon$
\tilde{x}_4	$-0,09 - 0,57\varepsilon$	$-0,06 + 1,19\varepsilon$	$-0,26 + 2,38\varepsilon$	$0,26 - 1,64\varepsilon$
\tilde{y}_4	$1,58 - 0,40\varepsilon$	$-0,51 - 0,37\varepsilon$	$0,33 - 4,84\varepsilon$	$0,38 - 3,50\varepsilon$
$\tilde{\psi}$	$2,35 - 0,70\varepsilon$	$-1,76 + 4,55\varepsilon$	$2,72 + 4,34\varepsilon$	$3,20 - 0,48\varepsilon$

Подставим формулы (22.11) для r_{24}^2, r_{34}^2 в уравнение (22.12), избавимся от знаменателя и сгруппируем слагаемые:

$$\bar{f}_{24}^2 + \bar{f}_{34}^2 - \bar{f}_{24}\bar{f}_{34} - (\bar{f}_{24} + \bar{f}_{34}) \bar{\delta} + (1 - 3r_{14}^2 - \Delta\mathfrak{M}/2) \bar{\delta}^2 = 0,$$

$$(\bar{f}_{24} + \bar{f}_{34} - 2\bar{\delta})^2 + 3(\bar{f}_{24} - \bar{f}_{34})^2 = 4(3r_{14}^2 + \Delta\mathfrak{M}/2) \bar{\delta}^2.$$

Полученное равенство позволяет ввести параметр ψ следующим образом:

$$\bar{f}_{24} + \bar{f}_{34} - 2\bar{\delta} = 2\bar{\delta} \cos \psi \sqrt{3r_{14}^2 + \Delta\mathfrak{M}/2},$$

$$\sqrt{3} (\bar{f}_{24} - \bar{f}_{34}) = 2\bar{\delta} \sin \psi \sqrt{3r_{14}^2 + \Delta\mathfrak{M}/2}.$$

Отсюда следует, что

$$\bar{f}_{24} = \left[1 + 2 \cos \left(\psi - \frac{\pi}{6} \right) \sqrt{r_{14}^2 + \Delta\mathfrak{M}/6} \right] \bar{\delta}, \quad (22.13)$$

$$\bar{f}_{34} = \left[1 + 2 \cos \left(\psi + \frac{\pi}{6} \right) \sqrt{r_{14}^2 + \Delta\mathfrak{M}/6} \right] \bar{\delta}.$$

$\bar{f}_{24}, \bar{f}_{34}, \bar{\delta}$ – линейные функции (22.11) от r_{24}^{-3}, r_{34}^{-3} . Подставим их в (22.13). Получим:

$$\begin{aligned} (r_{12}^2 + \tilde{q}_1) m_2 r_{24}^{-3} + (r_{13}^2 - r_{23}^2 + \tilde{q}_1) m_3 r_{34}^{-3} = \\ = - \left(1 - \frac{2m_2}{r_{12}^3} - \frac{m_1 + \varepsilon}{r_{14}^3} \right) r_{12}^2 + \frac{m_3}{r_{13}^3} (r_{12}^2 + r_{13}^2 - r_{23}^2) + \tilde{q}_1 \left(1 - \frac{m_1 + \varepsilon}{r_{14}^3} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (r_{12}^2 - r_{23}^2 + \tilde{q}_2) m_2 r_{24}^{-3} + (r_{13}^2 + \tilde{q}_2) m_3 r_{34}^{-3} = \\ = - \left(1 - \frac{2m_3}{r_{13}^3} - \frac{m_1 + \varepsilon}{r_{14}^3} \right) r_{13}^2 + \frac{m_2}{r_{12}^3} (r_{12}^2 + r_{13}^2 - r_{23}^2) + \tilde{q}_2 \left(1 - \frac{m_1 + \varepsilon}{r_{14}^3} \right), \end{aligned}$$

$$\tilde{q}_1 = 1 + 2 \cos \left(\psi - \frac{\pi}{6} \right) \sqrt{r_{14}^2 - \Delta\mathfrak{M}/6},$$

$$\tilde{q}_2 = 1 + 2 \cos \left(\psi + \frac{\pi}{6} \right) \sqrt{r_{14}^2 - \Delta\mathfrak{M}/6}.$$

Введём второй параметр $\xi = r_{14}$ и решим уравнения относительно r_{24}^{-3} , r_{34}^{-3} :

$$r_{14} = \xi, \quad r_{24}^{-3} = \frac{\bar{\Delta}_{24}}{\bar{\Delta}}, \quad r_{34}^{-3} = \frac{\bar{\Delta}_{34}}{\bar{\Delta}}, \quad (22.14)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta} = \{ & r_{23}^2(2 + r_{12}^2 + r_{13}^2 - r_{23}^2) + \\ & + 2\sqrt{\xi^2 + \Delta\mathfrak{M}/6}[-(r_{12}^2 - r_{13}^2) \sin \psi + \sqrt{3} r_{23}^2 \cos \psi]\} m_2 m_3. \end{aligned}$$

$\bar{\Delta}_{24}$, $\bar{\Delta}_{34}$ не выписываем из-за их громоздкости. Из (22.14) получим формулы для u_{14} , u_{24} , u_{34} :

$$u_{k4} = r_{k4} - p_{k4}, \quad k = 1, 2, 3; \quad (22.15)$$

$$u_{14} = \xi - s, \quad u_{24} = \left(\frac{\bar{\Delta}}{\bar{\Delta}_{24}}\right)^{1/3} - p_{24}, \quad u_{34} = \left(\frac{\bar{\Delta}}{\bar{\Delta}_{34}}\right)^{1/3} - p_{34}.$$

Уравнения для параметров ξ , ψ получаются подстановкой формул (22.13), (22.14) в уравнения (22.11):

$$\bar{F}_{24} \equiv \bar{\Delta} - \left[1 + 2 \cos\left(\psi - \frac{\pi}{6}\right) \sqrt{\xi^2 + \Delta\mathfrak{M}/6} + \xi^2\right]^{3/2} \bar{\Delta}_{24} = 0, \quad (22.16)$$

$$\bar{F}_{34} \equiv \bar{\Delta} - \left[1 + 2 \cos\left(\psi + \frac{\pi}{6}\right) \sqrt{\xi^2 + \Delta\mathfrak{M}/6} + \xi^2\right]^{3/2} \bar{\Delta}_{34} = 0.$$

При $\varepsilon = 0$ эти уравнения совпадают с (22.6) (с точностью до положительных множителей $C_1 = 2\sqrt{3}m_3s^{-2}$, $C_2 = 2\sqrt{3}m_2s^{-2}$). Поэтому уравнения имеют 10 или 8 решений

$$\xi = s, \quad \psi = \varphi,$$

если массы m_1 , m_2 , m_3 не принадлежат БМ и $\varepsilon = 0$. Представим уравнения (22.16) в следующем виде:

$$\bar{F}(h) \equiv \bar{F}(h_0) + A \begin{pmatrix} \xi - s \\ \psi - \varphi \end{pmatrix} + \Delta\bar{F} = 0, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} \bar{F}_{24} \\ \bar{F}_{34} \end{pmatrix}.$$

Из них получим формулы для ξ , ψ :

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \varphi \end{pmatrix} - A^{-1} \Delta\bar{F}. \quad (22.17)$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{F}_{24}}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{F}_{24}}{\partial \psi} \\ \frac{\partial \bar{F}_{34}}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{F}_{34}}{\partial \psi} \end{pmatrix}_{h=h_0}, \quad h = (r_{12}, r_{13}, r_{23}, r_{24}, r_{34}, \xi, \psi, \varepsilon), \quad (22.18)$$

$$h_0 = (1, 1, 1, p_{24}, p_{34}, s, \varphi, 0), \quad \Delta \bar{F} = \bar{F}(h) - \bar{F}(h_0) - A \begin{pmatrix} \xi - s \\ \psi - \varphi \end{pmatrix}.$$

$\bar{F}(h_0) = 0$, как следует из (22.6). Формулы (22.15), (22.17) позволяют находить последовательные приближения функций u_{k4} , ξ , ψ . Действительно, напомним формулы в виде

$$u_{k4} = g_{k4}(h), \quad \xi = s + g_1(h), \quad \psi = \varphi + g_2(h), \quad k = 2, 3. \quad (22.19)$$

Представим искомое решение в виде рядов (22.10) и рядов

$$\xi = s + \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{(n)} \varepsilon^n, \quad \psi = \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \psi^{(n)} \varepsilon^n. \quad (22.20)$$

Подставим ряды в формулы (22.19), разложим функции по степеням ε и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях. Получим формулы для коэффициентов $u_{k4}^{(n)}$, $\xi^{(n)}$, $\psi^{(n)}$:

$$u_{k4}^{(n)} = a_k \xi^{(n)} + b_k \psi^{(n)} + [\Delta \tilde{g}_{k4}]^{(n)}, \quad k = 2, 3;$$

$$u_{14}^{(n)} = \xi^{(n)} = [\tilde{g}_1]^{(n)}, \quad \psi^{(n)} = [\tilde{g}_2]^{(n)}.$$

Здесь скобки с верхним индексом (n) обозначают коэффициент при ε^n в разложении функции, стоящей в скобках, по степеням ε .

$$a_k = \left. \frac{\partial \tilde{g}_{k4}}{\partial \xi} \right|_{h=h_0}, \quad b_k = \left. \frac{\partial \tilde{g}_{k4}}{\partial \psi} \right|_{h=h_0}, \quad \Delta \tilde{g}_{k4} = \tilde{g}_{k4}(h) - a_k \xi^{(n)} - b_k \psi^{(n)}.$$

$[\Delta \tilde{g}_{k4}]^{(n)}$, $[\tilde{g}_1]^{(n)}$, $[\tilde{g}_2]^{(n)}$ зависят от $u_{ij}^{(n)}$ и от коэффициентов меньшего порядка: $u_{ij}^{(l)}$, $u_{k4}^{(l)}$, $\xi^{(l)}$, $\psi^{(l)}$, $1 \leq i < j \leq 3$; $k = 2, 3$; $l = \overline{1, n-1}$.

Первое приближение \tilde{r}_{14} , \tilde{r}_{24} , \tilde{r}_{34} расстояний r_{14} , r_{24} , r_{34} по малому параметру ε равно

$$r_{14} \approx \tilde{r}_{14} = p_{14} + \varepsilon u_{14}^{(1)}, \quad r_{24} \approx \tilde{r}_{24} = p_{24} + \varepsilon u_{24}^{(1)}, \quad r_{34} \approx \tilde{r}_{34} = p_{34} + \varepsilon u_{34}^{(1)}.$$

В Табл. 22.5–22.7 для масс, рассмотренных в п. 22.3, даны численные значения \tilde{r}_{14} , \tilde{r}_{24} , \tilde{r}_{34} и первое приближение \tilde{x}_4 , \tilde{y}_4 , $\tilde{\psi}$ координат 4-го тела и параметра ψ :

$$x_4 \approx \tilde{x}_4 \equiv x_4^{(0)} + x_4^{(1)} \varepsilon, \quad y_4 \approx \tilde{y}_4 \equiv y_4^{(0)} + y_4^{(1)} \varepsilon, \quad \psi \approx \tilde{\psi} \equiv \varphi + \varepsilon \psi^{(1)}.$$

Координаты 4-го тела даны в системе Qxy . Значение $\varphi = \tilde{\psi}|_{\varepsilon=0}$ дано на отрезке $[-\pi, \pi]$. Первое приближение параметра $\xi \approx \tilde{\xi} \equiv s + \varepsilon \xi^{(1)} = \tilde{r}_{14}$,

22.6. О сходимости рядов

Рассмотрим уравнения (22.9), (22.15), (22.16) относительно $u = (u_{12}, u_{13}, u_{23}, u_{24}, u_{34}, \xi, \psi, \varepsilon)$. Они задают u_{ij} , ξ , ψ как неявные функции ε . Перенесём все функции влево. В точке $u_0 = (0, 0, 0, p_{24}, p_{34}, s, \varphi, 0)$ якобиан левых частей равен

$$|E_3| \cdot |E_2| \cdot |A| = C \begin{vmatrix} \frac{\partial F_{24}}{\partial m_2} & \frac{\partial F_{24}}{\partial m_3} \\ \frac{\partial F_{34}}{\partial m_2} & \frac{\partial F_{34}}{\partial m_3} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial m_2}{\partial s} & \frac{\partial m_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial m_3}{\partial s} & \frac{\partial m_3}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = CD \begin{vmatrix} \frac{\partial m_2}{\partial s} & \frac{\partial m_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial m_3}{\partial s} & \frac{\partial m_3}{\partial \varphi} \end{vmatrix}. \quad (22.21)$$

Здесь E_k – единичная матрица размерности $k \times k$, A – матрица (22.18). $C = 12m_2 m_3 s^{-4}$, D – определитель (22.7). В равенствах (22.21) использован тот факт, что в точке $u = u_0$ функции $\tilde{F}_{24} = C_1 F_{24}$, $\tilde{F}_{34} = C_2 F_{34}$ и после подстановки формул (22.7) для m_2 , m_3 уравнения (22.6) становятся тождествами.

Из (22.21) следует, что якобиан обращается в ноль только в точках БМ. По теореме о неявных функциях существует такое значение $\varepsilon = \varepsilon_*(m_1, m_2, m_3, p_{24}, p_{34}, s, \varphi) > 0$, что при всех ε , $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_*$, u является аналитической функцией ε и значит ряды (22.10), (22.20) сходятся.

Обозначим

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1(m_1, m_2, m_3) \equiv \min_{(p_{24}, p_{34}, s, \varphi)} \varepsilon_*(m_1, m_2, m_3, p_{24}, p_{34}, s, \varphi) > 0.$$

Число точек $(p_{24}, p_{34}, s, \varphi)$ конечно (равно 8 или 10). Поэтому при всех значениях $m_4 = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, число конфигураций 4-х тел равно 8 или 10, если массы m_1, m_2, m_3 не принадлежат БМ.

22.7. Результаты

22.7.1. Для всех значений m_1, m_2, m_3 , не принадлежащих бифуркационному множеству (БМ), существует такое значение $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(m_1, m_2, m_3) > 0$, что при всех $m_4 = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, число конфигураций 4-х тел для случая Лагранжа конечно. Оно равно 10, если точка (m_2, m_3) находится внутри БМ на Рис. 22.2, или 8, если точка находится вне БМ ($m_1 + m_2 + m_3 = 1$).

22.7.2. На Рис. 22.3–22.5 даны конфигурации 4-х тел для: 1) $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, 2) $m_1 = m_2 = 0,25, m_3 = 0,5$; 3) $m_1 = 0,2, m_2 = 0,3, m_3 = 0,5$. Численные значения расстояний между телами и координат тел в первом приближении даны в Табл. 22.5–22.7.

Замечание 22.1. Число центральных конфигураций 4-х тел с маленькой 4-й массой ранее было найдено К. Симо в [32]. Там же были найдены конфигурации в нулевом приближении для $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$ и для $m_1 = 0,2, m_2 = 0,3, m_3 = 0,5$.

§23. Центральные конфигурации 4-х тел, II

В §23 рассмотрены коллинеарные конфигурации 4-х тел в случае, когда 4-е тело с маленькой массой находится на конечном расстоянии от остальных тел, т.е. на расстоянии порядка $\varepsilon^0 = 1$.

23.1. Нулевое приближение расстояний между тремя телами

В случае Эйлера тела имеют разное взаимное положение на прямой. Поэтому вместо индексов 1, 2, 3 введём индексы i, j, k таким образом, чтобы масса m_j находилась между массами m_i, m_k . Из (21.2), (21.3) получим следующие уравнения для масс:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{m_i+m_j}{r_{ij}^3} - \frac{m_k}{r_{jk}^3} - \frac{\varepsilon}{r_{j4}^3}\right) r_{ij} - \left(\frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3}\right) m_k r_{ik} - \left(\frac{1}{r_{i4}^3} - \frac{1}{r_{j4}^3}\right) \varepsilon r_{i4} = 0, (23.1) \\ & - \left(\frac{1}{r_{ij}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3}\right) m_j r_{ij} + \left(1 - \frac{m_i+m_k}{r_{ik}^3} - \frac{m_j}{r_{jk}^3} - \frac{\varepsilon}{r_{k4}^3}\right) r_{ik} - \left(\frac{1}{r_{i4}^3} - \frac{1}{r_{k4}^3}\right) \varepsilon r_{i4} = 0, \\ & - \left(\frac{1}{r_{ij}^3} - \frac{1}{r_{j4}^3}\right) m_j r_{ij} - \left(\frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{k4}^3}\right) m_k r_{ik} + \left(1 - \frac{m_i+\varepsilon}{r_{i4}^3} - \frac{m_j}{r_{j4}^3} - \frac{m_k}{r_{k4}^3}\right) r_{i4} = 0, \end{aligned}$$

$$\mathfrak{M}(r) \equiv \begin{vmatrix} 0 & r_{ij}^2 & r_{ik}^2 & r_{i4}^2 & 1 \\ r_{ij}^2 & 0 & r_{jk}^2 & r_{j4}^2 & 1 \\ r_{ik}^2 & r_{jk}^2 & 0 & r_{k4}^2 & 1 \\ r_{i4}^2 & r_{j4}^2 & r_{k4}^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad m_i + m_j + m_k = 1.$$

В рассматриваемом случае векторы \mathbf{r}_{ij} , \mathbf{r}_{ik} , \mathbf{r}_{i4} коллинеарны, для расстояний справедливы формулы

$$r_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq 4. \quad (23.2)$$

Здесь $p_{\alpha\beta}$ – нулевое приближение расстояний, $p_{\alpha\beta}$ удовлетворяют уравнениям (23.1) при $\varepsilon = 0$. p_{ij} , p_{ik} , p_{jk} – расстояния между телами в конфигурации 3-х тел Эйлера. Для них уравнения имеют вид:

$$G_1(p) \equiv \left(1 - \frac{m_i+m_j}{p_{ij}^3} - \frac{m_k}{p_{jk}^3}\right) p_{ij} - \left(\frac{1}{p_{ik}^3} - \frac{1}{p_{jk}^3}\right) m_k p_{ik} = 0, \quad (23.3)$$

$$G_2(p) \equiv -\left(\frac{1}{p_{ij}^3} - \frac{1}{p_{jk}^3}\right) m_j p_{ij} + \left(1 - \frac{m_i+m_k}{p_{ik}^3} - \frac{m_j}{p_{jk}^3}\right) p_{ik} = 0.$$

$$p_{ik} = p_{ij} + p_{jk}, \quad m_i + m_j + m_k = 1.$$

Введём функцию

$$y = g(x) \equiv x - \frac{1}{x^2}. \quad (23.4)$$

На полуоси $x > 0$ $g(x)$ монотонно возрастает от $-\infty$ до ∞ . Обратная ей функция

$$x = h(y)$$

монотонно возрастает на оси $-\infty < y < \infty$ от 0 до ∞ , $h(0) = 1$.

Из уравнений (23.3) следуют равенства

$$(1 - m_k) g(p_{ij}) + m_k g(p_{ik}) - m_k g(p_{jk}) = 0,$$

$$m_j g(p_{ij}) + (1 - m_j) g(p_{ik}) + m_j g(p_{jk}) = 0.$$

Отсюда получаем формулы

$$g(p_{ij}) = \frac{m_k}{m_i} g(p_{jk}), \quad g(p_{ik}) = -\frac{m_j}{m_i} g(p_{jk}), \quad (23.5)$$

$$p_{ij} = h\left(\frac{m_k}{m_i}g(p_{jk})\right), \quad p_{ik} = h\left(-\frac{m_j}{m_i}g(p_{jk})\right).$$

p_{jk} находится из уравнения, которое получается подстановкой формул (23.5) в 3-е уравнение (23.3):

$$F(p_{jk}) \equiv p_{jk} + h\left(\frac{m_k}{m_i}g(p_{jk})\right) - h\left(-\frac{m_j}{m_i}g(p_{jk})\right) = 0. \quad (23.6)$$

Функция $F(p_{jk})$ монотонно возрастает на полуоси $p_{jk} > 0$ от $-\infty$ до ∞ . $F(1) = 1$. Таким образом, уравнение (23.6) имеет единственный корень p_{jk} , $0 < p_{jk} < 1$.

Положение тел для масс, рассмотренных в п. 22.3, показано на Рис. 23.1–23.3. Положение 4-го тела найдено в п. 23.2 и в §24. Численные значения расстояний даны в Табл. 23.1–23.3. Индексы i, j, k, I, J принимают следующие значения:

$$(i, j, k) = \begin{cases} (1, 2, 3), \\ (1, 3, 2), \\ (2, 1, 3), \end{cases} \quad (I, J) = \begin{cases} ((1, 2), \\ (2, 1). \end{cases} \quad (23.7)$$

Заметим, что существует три конфигурации Эйлера, перестановки (i, j, k) , (k, j, i) соответствуют одной и той же центральной конфигурации по Определению 19.2.

23.2. Нулевое приближение расстояний до 4-го тела

Рассмотрим 3-е уравнение (23.1) при $u_{ij} = 0$, $\varepsilon = 0$:

$$-\left(\frac{1}{p_{ij}^3} - \frac{1}{p_{j4}^3}\right)m_j p_{ij} - \left(\frac{1}{p_{ik}^3} - \frac{1}{p_{k4}^3}\right)m_k p_{ik} \pm \left(1 - \frac{m_i}{p_{i4}^3} - \frac{m_j}{p_{j4}^3} - \frac{m_k}{p_{k4}^3}\right)p_{i4} = 0.$$

Здесь знак \pm соответствуют разному положению 4-го тела относительно i -го тела. Пусть выполняются неравенства $p_{ik} < p_{i4}$. Тогда

$$p_{i4} = p_{ik} + p_{k4}, \quad p_{j4} = p_{jk} + p_{k4},$$

и получаем уравнение для p_{k4} :

$$p_{k4} - \frac{m_i}{(p_{ik} + p_{k4})^2} - \frac{m_j}{(p_{jk} + p_{k4})^2} - \frac{m_k}{p_{k4}^2} + p_{ik} - \frac{m_j}{p_{ij}^2} - \frac{m_k}{p_{ik}^2} = 0.$$

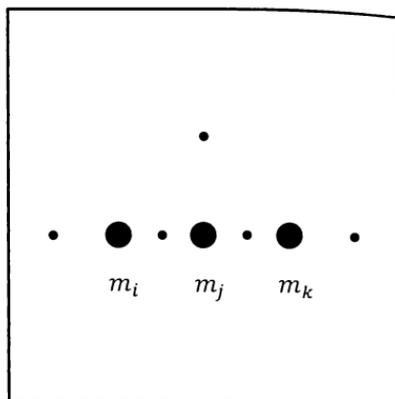
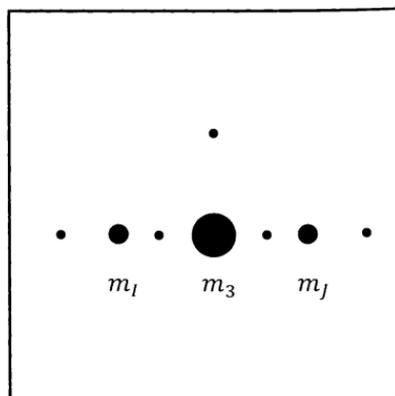
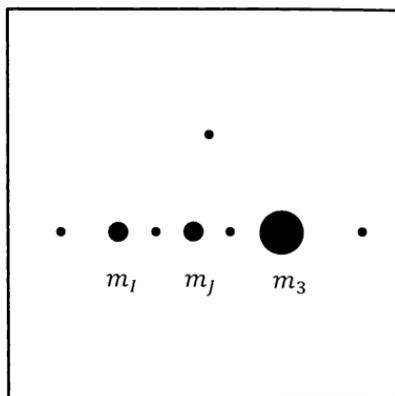
Рис. 23.1. $m_i = m_j = m_k = 1/3$ Рис. 23.2. $m_l = m_j = 0,25$, $m_3 = 0,5$

Таблица 23.1. $m_i = m_j = m_k = 1/3$

		1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12
$p_{ij} = 0,747$ $p_{ik} = 1,494$ $p_{jk} = 0,747$	p_{i4}	0,566	0,377	1,116	2,060
	p_{j4}	1,313	0,370	0,370	1,313
	p_{k4}	2,060	1,116	0,377	0,566

Таблица 23.2. $m_1 = m_2 = 0,25, m_3 = 0,5$

		1, 2	3, 4	5, 6	7, 8
$p_{1j} = 0,638$ $p_{13} = 1,410$ $p_{j3} = 0,772$	p_{14}	0,494	0,323	0,965	2,098
	p_{j4}	1,132	0,315	0,326	1,459
	p_{34}	1,904	1,087	0,446	0,687
		9	10	11	12
$p_{1j} = 1,651$ $p_{13} = 0,826$ $p_{j3} = 0,826$	p_{14}	0,502	0,357	1,294	2,153
	p_{j4}	2,153	1,294	0,357	0,502
	p_{34}	1,328	0,468	0,468	1,328

Левая часть уравнения монотонно возрастает на полуоси $p_{k4} > 0$ от $-\infty$ до ∞ . Поэтому существует единственный корень $p_{k4} > 0$. Это соответствует единственной коллинеарной конфигурации 4-х тел, в которой $p_{ik} < p_{i4}$.

Аналогично доказывается, что для любого положения 4-го тела относительно остальных существует единственная коллинеарная конфигурация. Таким образом, любой конфигурации 3-х тел соответствует четыре конфигурации 4-х тел. Всего имеется 12 коллинеарных конфигураций 4-х тел. Для p_{i4}, p_{j4}, p_{k4} справедливы следующие уравнения:

$$1) \quad p_{i4} > 0, \quad p_{j4} = p_{ij} + p_{i4}, \quad p_{k4} = p_{ik} + p_{i4}, \quad (23.8)$$

$$F_1(\hat{p}_3, p_{i4}) \equiv -p_{i4} + \frac{m_i}{p_{i4}^2} + \frac{m_j}{(p_{ij} + p_{i4})^2} + \frac{m_k}{(p_{ik} + p_{i4})^2} - \frac{m_j}{p_{ij}^2} - \frac{m_k}{p_{ik}^2} = 0;$$

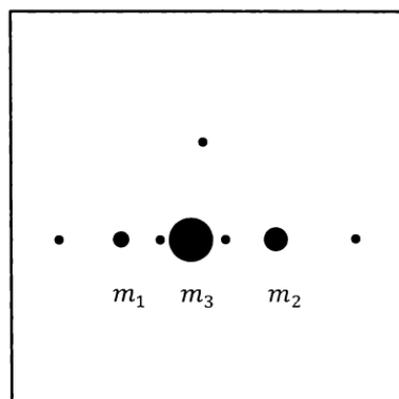
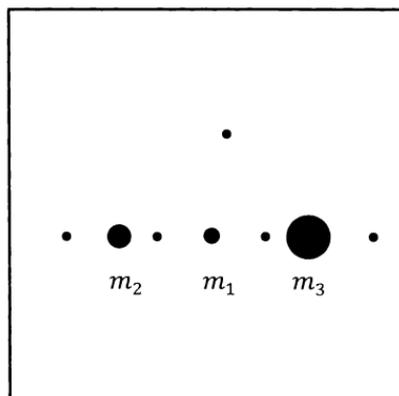
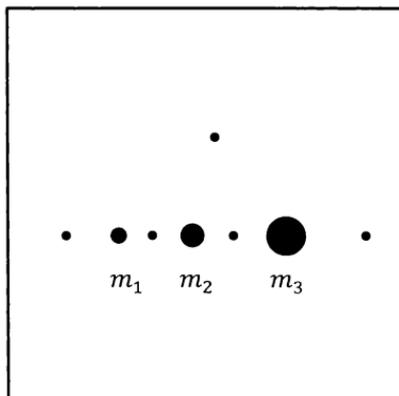


Рис. 23.3. $m_1 = 0,2$, $m_2 = 0,3$, $m_3 = 0,5$

Таблица 23.3. $m_1 = 0, 2$, $m_2 = 0, 3$, $m_3 = 0, 5$

		1	2	3	4
$p_{12} = 0,654$ $p_{13} = 1,472$ $p_{23} = 0,818$	p_{14}	0,448	0,303	1,016	2,161
	p_{24}	1,102	0,351	0,362	1,507
	p_{34}	1,920	1,169	0,456	0,689
		5	6	7	8
$p_{12} = 1,653$ $p_{13} = 0,798$ $p_{23} = 0,855$	p_{14}	0,455	0,328	1,267	2,198
	p_{24}	2,108	1,325	0,385	0,546
	p_{34}	1,254	0,470	0,469	1,400
		9	10	11	12
$p_{12} = 0,620$ $p_{13} = 0,724$ $p_{23} = 1,344$	p_{14}	1,157	0,280	0,289	1,410
	p_{24}	0,537	0,340	0,909	2,031
	p_{34}	1,881	1,004	0,435	0,686

2) $0 < p_{i4} < p_{ij}$, $p_{j4} = p_{ij} - p_{i4}$, $p_{k4} = p_{ik} - p_{i4}$,

$$F_2(\hat{p}_3, p_{i4}) \equiv p_{i4} - \frac{m_i}{p_{i4}^2} + \frac{m_j}{(p_{ij} - p_{i4})^2} + \frac{m_k}{(p_{ik} - p_{i4})^2} - \frac{m_j}{p_{ij}^2} - \frac{m_k}{p_{ik}^2} = 0;$$

3) $0 < p_{j4} < p_{jk}$, $p_{i4} = p_{ij} + p_{j4}$, $p_{k4} = p_{jk} - p_{j4}$,

$$F_3(\hat{p}_3, p_{j4}) \equiv p_{j4} - \frac{m_i}{(p_{ij} + p_{j4})^2} - \frac{m_j}{p_{j4}^2} + \frac{m_k}{(p_{jk} - p_{j4})^2} + p_{ij} - \frac{m_j}{p_{ij}^2} - \frac{m_k}{p_{ik}^2} = 0;$$

4) $p_{k4} > 0$, $p_{i4} = p_{ik} + p_{k4}$, $p_{j4} = p_{jk} + p_{k4}$,

$$F_4(\hat{p}_3, p_{k4}) \equiv p_{k4} - \frac{m_i}{(p_{ik} + p_{k4})^2} - \frac{m_j}{(p_{jk} + p_{k4})^2} - \frac{m_k}{p_{k4}^2} + p_{ik} - \frac{m_j}{p_{ij}^2} - \frac{m_k}{p_{ik}^2} = 0;$$

$$\hat{p}_3 = (p_{ij}, p_{ik}, p_{jk}).$$

23.3. Первое приближение расстояний

Из (23.1) получим следующие уравнения для коллинеарных конфигураций 4-х тел:

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{m_i+m_j}{r_{ij}^3} - \frac{m_k}{r_{jk}^3} - \frac{\varepsilon}{r_{j4}^3}\right) r_{ij} - \left(\frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3}\right) m_k r_{ik} \mp \left(\frac{1}{r_{i4}^3} - \frac{1}{r_{j4}^3}\right) \varepsilon r_{i4} = 0, \\ & -\left(\frac{1}{r_{ij}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3}\right) m_j r_{ij} + \left(1 - \frac{m_i+m_k}{r_{ik}^3} - \frac{m_j}{r_{jk}^3} - \frac{\varepsilon}{r_{k4}^3}\right) r_{ik} \mp \left(\frac{1}{r_{i4}^3} - \frac{1}{r_{k4}^3}\right) \varepsilon r_{i4} = 0, \\ & -\left(\frac{1}{r_{ij}^3} - \frac{1}{r_{j4}^3}\right) m_j r_{ij} - \left(\frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{k4}^3}\right) m_k r_{ik} \pm \left(1 - \frac{m_i+\varepsilon}{r_{i4}^3} - \frac{m_j}{r_{j4}^3} - \frac{m_k}{r_{k4}^3}\right) r_{i4} = 0. \end{aligned}$$

Здесь верхний знак соответствует одинаковому направлению векторов \mathbf{r}_{ij} , \mathbf{r}_{i4} . Перегруппируем слагаемые, добавим равенства, следующие из коллинеарности векторов, и приведём систему к следующему виду:

$$(1 - m_k) g(r_{ij}) + m_k g(r_{ik}) - m_k g(r_{jk}) + \varepsilon f_1(r_{i4}, r_{j4}) = 0, \quad (23.9)$$

$$m_j g(r_{ij}) + (1 - m_j) g(r_{ik}) + m_j g(r_{jk}) + \varepsilon f_2(r_{i4}, r_{k4}) = 0,$$

$$r_{ij} - r_{ik} + r_{jk} = 0,$$

$$F_l(\hat{r}_3, r_l) + \varepsilon f_4(r_{i4}) = 0.$$

Здесь $g(x)$ — функция (23.4), $\hat{r}_3 = (r_{ij}, r_{ik}, r_{jk})$, F_l — функция (23.8), $l = \overline{1,4}$, для l справедливы равенства:

$$l = 1, \quad r_l = r_{i4}, \quad r_{j4} = r_{ij} + r_{i4}, \quad r_{k4} = r_{ik} + r_{i4}, \quad (23.10)$$

$$f_1 = \frac{1}{r_{i4}^2} - \frac{1}{r_{j4}^2}, \quad f_2 = \frac{1}{r_{i4}^2} - \frac{1}{r_{k4}^2}, \quad f_4 = \frac{1}{r_{i4}^2};$$

$$l = 2, \quad r_l = r_{i4}, \quad r_{j4} = r_{ij} - r_{i4}, \quad r_{k4} = r_{ik} - r_{i4},$$

$$f_1 = -\frac{1}{r_{i4}^2} - \frac{1}{r_{j4}^2}, \quad f_2 = -\frac{1}{r_{i4}^2} - \frac{1}{r_{k4}^2}, \quad f_4 = -\frac{1}{r_{i4}^2};$$

$$l = 3, \quad r_l = r_{j4}, \quad r_{i4} = r_{ij} + r_{j4}, \quad r_{k4} = r_{jk} - r_{j4},$$

$$f_1 = -\frac{1}{r_{i4}^2} + \frac{1}{r_{j4}^2}, \quad f_2 = -\frac{1}{r_{i4}^2} - \frac{1}{r_{k4}^2}, \quad f_4 = -\frac{1}{r_{i4}^2};$$

$$l = 4, \quad r_l = r_{k4}, \quad r_{i4} = r_{ik} + r_{k4}, \quad r_{j4} = r_{jk} + r_{k4},$$

$$f_1 = -\frac{1}{r_{i4}^2} + \frac{1}{r_{j4}^2}, \quad f_2 = -\frac{1}{r_{i4}^2} + \frac{1}{r_{k4}^2}, \quad f_4 = -\frac{1}{r_{i4}^2}.$$

Рассмотрим уравнения (23.9) относительно $\check{r} = (r_{ij}, r_{ik}, r_{jk}, r_l, \varepsilon)$. Левые части обращаются в ноль при $\check{r} = \check{r}_0 \equiv (p_{ij}, p_{ik}, p_{jk}, p_l, 0)$ (смотрите п. 23.1, 23.2). Якобиан левых частей по переменным $r_{ij}, r_{ik}, r_{jk}, r_l$ в точке $\check{r} = \check{r}_0$ равен $\Delta \times \partial F_l(P, p_l) / \partial p_l$, где

$$g_1(x) \equiv \frac{dg(x)}{dx} = 1 + \frac{2}{x^3}, \quad (23.11)$$

$$\Delta = m_i g_1(p_{ij}) \cdot g_1(p_{ik}) + m_j g_1(p_{ij}) \cdot g_1(p_{jk}) + m_k g_1(p_{ik}) \cdot g_1(p_{jk}).$$

Якобиан не равен нулю, так как $g_1(x)$ – положительная функция при $x > 0$, $F_l(x)$ – монотонная функция переменной p_l . По теореме о неявных функциях в окрестности $\check{r} = \check{r}_0$ переменные $r_{ij}, r_{ik}, r_{jk}, r_l$ являются аналитическими функциями от ε . Из (23.10) следует, что все переменные r_{i4}, r_{j4}, r_{k4} – аналитические функции. Таким образом, существует такое значение $\varepsilon_* = \varepsilon_*(m_i, m_j, m_k, p) > 0$, что при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_*$ переменные $r_{\alpha\beta}$ представимы в виде сходящихся рядов

$$r_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} u_{\alpha\beta}^{(n)} \varepsilon^n, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq 4, \quad (23.12)$$

$p = (p_{ij}, p_{ik}, p_{jk}, p_{i4}, p_{j4}, p_{k4})$. Число точек p конечно (равно 12). Обозначим

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2(m_1, m_2, m_3) \equiv \min_p \varepsilon_*(m_i, m_j, m_k, p) > 0.$$

Тогда при $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ для всех коллинеарных конфигураций 4-х тел справедливы равенства (23.12).

Первое приближение расстояний $r_{\alpha\beta}$ вычисляется по формулам

$$r_{\alpha\beta} \approx \tilde{r}_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha\beta} + \varepsilon u_{\alpha\beta}^{(1)}, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq 4.$$

Подставим ряды (23.12) в уравнения (23.9), (23.10), разложим уравнения по степеням ε и приравняем коэффициенты при первой степени ε . Получим значения $u_{\alpha\beta}^{(1)}$ и первое приближение расстояний. Для первых трёх тел формулы имеют вид:

$$r_{ij} \approx \tilde{r}_{ij} \equiv \quad (23.11)$$

$$\equiv p_{ij} + \varepsilon \Delta^{-1} \{ -f_1(p_{i4}, p_{j4}) \cdot [(1 - m_j) g_1(p_{ik}) + m_j g_1(p_{jk})] + \\ + f_2(p_{i4}, p_{k4}) \cdot m_k [g_1(p_{ik}) - g_1(p_{jk})] \},$$

$$r_{ik} \approx \tilde{r}_{ik} \equiv p_{ik} + \varepsilon \Delta^{-1} \{ f_1(p_{i4}, p_{j4}) \cdot m_j [g_1(p_{ij}) - g_1(p_{jk})] - \\ - f_2(p_{i4}, p_{k4}) \cdot [(1 - m_k) g_1(p_{ij}) + m_k g_1(p_{jk})] \},$$

$$r_{jk} \approx \tilde{r}_{jk} \equiv p_{jk} + \varepsilon \Delta^{-1} \{ f_1(p_{i4}, p_{j4}) \cdot [m_j g_1(p_{ij}) + (1 - m_j) g_1(p_{ik})] - \\ - f_2(p_{i4}, p_{k4}) \cdot [(1 - m_k) g_1(p_{ij}) + m_k g_1(p_{ik})] \}.$$

g_1 , Δ – функции (23.11). Первое приближений расстояний до 4-го тел вычисляется по формулам:

$$r_l \approx \tilde{r}_l \equiv p_l - \varepsilon \left(\frac{\partial F_l}{\partial p_l} \right)^{-1} \left[\frac{\partial F_l}{\partial p_{ij}} u_{ij}^{(1)} + \frac{\partial F_l}{\partial p_{ik}} u_{ik}^{(1)} + \frac{\partial F_l}{\partial p_{jk}} u_{jk}^{(1)} + f_4(p_{i4}) \right],$$

$$l = 1, \quad r_{j4} \approx \tilde{r}_{j4} \equiv \tilde{r}_{ij} + \tilde{r}_{i4}, \quad r_{k4} \approx \tilde{r}_{k4} \equiv \tilde{r}_{ik} + \tilde{r}_{i4};$$

$$l = 2, \quad r_{j4} \approx \tilde{r}_{j4} \equiv \tilde{r}_{ij} - \tilde{r}_{i4}, \quad r_{k4} \approx \tilde{r}_{k4} \equiv \tilde{r}_{ik} - \tilde{r}_{i4};$$

$$l = 3, \quad r_{i4} \approx \tilde{r}_{i4} \equiv \tilde{r}_{ij} + \tilde{r}_{j4}, \quad r_{k4} \approx \tilde{r}_{k4} \equiv \tilde{r}_{jk} - \tilde{r}_{j4};$$

$$l = 4, \quad r_{i4} \approx \tilde{r}_{i4} \equiv \tilde{r}_{ik} + \tilde{r}_{k4}, \quad r_{j4} \approx \tilde{r}_{j4} \equiv \tilde{r}_{jk} + \tilde{r}_{k4}.$$

Здесь $F_l = F_l(P, p_l)$ – функция (23.8); r_l , f_4 – переменная и функция в (23.9); $u_{ij}^{(1)}$, $u_{ik}^{(1)}$, $u_{jk}^{(1)}$ – коэффициенты при ε в формулах (23.13) для \tilde{r}_{ij} , \tilde{r}_{ik} , \tilde{r}_{jk} .

В Табл. 23.4–23.6 даны численные значения расстояний между телами и координаты тел в первом приближении для масс, рассмотренных в п. 22.3:

$$x_\alpha \approx \tilde{x}_\alpha \equiv x_\alpha^{(0)} + x_\alpha^{(1)} \varepsilon, \quad y_\alpha \approx \tilde{y}_\alpha \equiv y_\alpha^{(0)} + y_\alpha^{(1)} \varepsilon, \quad 1 \leq \alpha \leq 4.$$

Координаты даны в системе $Q_1 x y$, где Q_1 совпадает с массой m_i , ось $Q_1 x$ проходит через массы m_i , m_j . Индексы i, j, k, l, j принимают значения (23.7).

Таблица 23.4. $m_i = m_j = m_k = 1/3$

	1, 2, 3	4, 5, 6	7, 8, 9	10, 11, 12
\tilde{r}_{ij}	$0,75 - 0,67\varepsilon$	$0,75 + 3,10\varepsilon$	$0,75 - 0,50\varepsilon$	$0,75 - 0,29\varepsilon$
\tilde{r}_{ik}	$1,49 - 0,96\varepsilon$	$1,49 + 2,61\varepsilon$	$1,49 + 2,61\varepsilon$	$1,49 - 0,96\varepsilon$
\tilde{r}_{jk}	$0,75 - 0,29\varepsilon$	$0,75 - 0,50\varepsilon$	$0,75 + 3,10\varepsilon$	$0,75 - 0,67\varepsilon$
\tilde{r}_{i4}	$0,57 + 0,42\varepsilon$	$0,38 + 1,62\varepsilon$	$1,12 + 0,99\varepsilon$	$2,06 - 0,54\varepsilon$
\tilde{r}_{j4}	$1,31 - 0,25\varepsilon$	$0,37 + 1,49\varepsilon$	$0,37 + 1,49\varepsilon$	$1,31 - 0,25\varepsilon$
\tilde{r}_{k4}	$2,06 - 0,54\varepsilon$	$1,12 + 0,99\varepsilon$	$0,38 + 1,62\varepsilon$	$0,57 + 0,42\varepsilon$
\tilde{x}_i	0	0	0	0
\tilde{x}_j	$0,75 - 0,67\varepsilon$	$0,75 + 3,10\varepsilon$	$0,75 - 0,50\varepsilon$	$0,75 - 0,29\varepsilon$
\tilde{x}_k	$1,49 - 0,96\varepsilon$	$1,49 + 2,61\varepsilon$	$1,49 + 2,61\varepsilon$	$1,49 - 0,96\varepsilon$
\tilde{x}_4	$-0,57 - 0,42\varepsilon$	$0,38 + 1,62\varepsilon$	$1,12 + 0,99\varepsilon$	$2,06 - 0,54\varepsilon$

Таблица 23.5. $m_1 = m_j = 0,25, m_3 = 0,5$

	1, 2	3, 4	5, 6	7, 8
\tilde{r}_{1j}	$0,64 - 0,79\varepsilon$	$0,64 + 3,54\varepsilon$	$0,64 - 0,54\varepsilon$	$0,64 - 0,20\varepsilon$
\tilde{r}_{13}	$1,41 - 1,21\varepsilon$	$1,41 + 2,85\varepsilon$	$1,41 + 2,50\varepsilon$	$1,41 - 0,66\varepsilon$
\tilde{r}_{j3}	$0,77 - 0,42\varepsilon$	$0,77 - 0,68\varepsilon$	$0,77 + 3,04\varepsilon$	$0,77 - 0,45\varepsilon$
\tilde{r}_{14}	$0,49 + 0,46\varepsilon$	$0,32 + 1,85\varepsilon$	$0,96 + 0,80\varepsilon$	$2,10 - 0,28\varepsilon$
\tilde{r}_{j4}	$1,13 - 0,32\varepsilon$	$0,32 + 1,68\varepsilon$	$0,33 + 1,34\varepsilon$	$1,46 - 0,07\varepsilon$
\tilde{r}_{34}	$1,90 - 0,75\varepsilon$	$1,09 + 1,00\varepsilon$	$0,45 + 1,70\varepsilon$	$0,69 + 0,38\varepsilon$
\tilde{x}_1	0	0	0	0
\tilde{x}_j	$0,64 - 0,79\varepsilon$	$0,64 + 3,54\varepsilon$	$0,64 - 0,54\varepsilon$	$0,64 - 0,20\varepsilon$
\tilde{x}_3	$1,41 - 1,21\varepsilon$	$1,41 + 2,85\varepsilon$	$1,41 + 2,50\varepsilon$	$1,41 - 0,66\varepsilon$
\tilde{x}_4	$-0,49 - 0,46\varepsilon$	$0,32 + 1,85\varepsilon$	$0,96 + 0,80\varepsilon$	$2,10 - 0,28\varepsilon$

	9	10	11	12
\tilde{r}_{1j}	$1,65 - 1,25\varepsilon$	$1,65 + 2,81\varepsilon$	$1,65 + 2,81\varepsilon$	$1,65 - 1,25\varepsilon$
\tilde{r}_{13}	$0,83 - 0,96\varepsilon$	$0,83 + 3,20\varepsilon$	$0,83 - 0,39\varepsilon$	$0,83 - 0,29\varepsilon$
\tilde{r}_{j3}	$0,83 - 0,29\varepsilon$	$0,83 - 0,39\varepsilon$	$0,83 + 3,20\varepsilon$	$0,83 - 0,96\varepsilon$
\tilde{r}_{14}	$0,50 + 0,48\varepsilon$	$0,36 + 1,53\varepsilon$	$1,29 + 1,28\varepsilon$	$2,15 - 0,77\varepsilon$
\tilde{r}_{j4}	$2,15 - 0,77\varepsilon$	$1,29 + 1,28\varepsilon$	$0,36 + 1,53\varepsilon$	$0,50 + 0,48\varepsilon$
\tilde{r}_{34}	$1,33 - 0,48\varepsilon$	$0,47 + 1,67\varepsilon$	$0,47 + 1,67\varepsilon$	$1,33 - 0,48\varepsilon$
\tilde{x}_1	0	0	0	0
\tilde{x}_j	$1,65 - 1,25\varepsilon$	$1,65 + 2,81\varepsilon$	$1,65 + 2,81\varepsilon$	$1,65 - 1,25\varepsilon$
\tilde{x}_3	$0,83 - 0,96\varepsilon$	$0,83 + 3,20\varepsilon$	$0,83 - 0,39\varepsilon$	$0,83 - 0,29\varepsilon$
\tilde{x}_4	$-0,50 - 0,48\varepsilon$	$0,36 + 1,53\varepsilon$	$1,29 + 1,28\varepsilon$	$2,15 - 0,77\varepsilon$

Таблица 23.6. $m_1 = 0,2$, $m_2 = 0,3$, $m_3 = 0,5$

	1	2	3	4
\tilde{r}_{12}	$0,65 - 0,99\varepsilon$	$0,65 + 3,69\varepsilon$	$0,65 - 0,46\varepsilon$	$0,65 - 0,19\varepsilon$
\tilde{r}_{13}	$1,47 - 1,45\varepsilon$	$1,47 + 3,05\varepsilon$	$1,47 + 2,47\varepsilon$	$1,47 - 0,67\varepsilon$
\tilde{r}_{23}	$0,82 - 0,46\varepsilon$	$0,82 - 0,64\varepsilon$	$0,82 + 2,93\varepsilon$	$0,82 - 0,47\varepsilon$
\tilde{r}_{14}	$0,45 + 0,50\varepsilon$	$0,30 + 1,85\varepsilon$	$1,02 + 0,87\varepsilon$	$2,16 - 0,29\varepsilon$
\tilde{r}_{24}	$1,10 - 0,49\varepsilon$	$0,35 + 1,84\varepsilon$	$0,36 + 1,33\varepsilon$	$1,51 - 0,10\varepsilon$
\tilde{r}_{34}	$1,92 - 0,94\varepsilon$	$1,17 + 1,20\varepsilon$	$0,46 + 1,60\varepsilon$	$0,69 + 0,38\varepsilon$
\tilde{x}_1	0	0	0	0
\tilde{x}_2	$0,65 - 0,99\varepsilon$	$0,65 + 3,69\varepsilon$	$0,65 - 0,46\varepsilon$	$0,65 - 0,19\varepsilon$
\tilde{x}_3	$1,47 - 1,45\varepsilon$	$1,47 + 3,05\varepsilon$	$1,47 + 2,47\varepsilon$	$1,47 - 0,67\varepsilon$
\tilde{x}_4	$-0,45 - 0,50\varepsilon$	$0,30 + 1,85\varepsilon$	$1,02 + 0,87\varepsilon$	$2,16 - 0,29\varepsilon$

	5	6	7	8
\tilde{r}_{12}	$1,65 - 1,48\varepsilon$	$1,65 + 3,05\varepsilon$	$1,65 + 2,65\varepsilon$	$1,65 - 1,08\varepsilon$
\tilde{r}_{13}	$0,80 - 1,15\varepsilon$	$0,80 + 3,47\varepsilon$	$0,80 - 0,36\varepsilon$	$0,80 - 0,25\varepsilon$
\tilde{r}_{23}	$0,86 - 0,33\varepsilon$	$0,86 - 0,42\varepsilon$	$0,86 + 3,02\varepsilon$	$0,86 - 0,83\varepsilon$
\tilde{r}_{14}	$0,46 + 0,52\varepsilon$	$0,33 + 1,63\varepsilon$	$1,26 + 1,18\varepsilon$	$2,20 - 0,64\varepsilon$
\tilde{r}_{24}	$2,11 - 0,96\varepsilon$	$1,32 + 1,42\varepsilon$	$0,38 + 1,47\varepsilon$	$0,55 + 0,45\varepsilon$
\tilde{r}_{34}	$1,25 - 0,62\varepsilon$	$0,47 + 1,84\varepsilon$	$0,47 + 1,55\varepsilon$	$1,40 - 0,38\varepsilon$
\tilde{x}_1	0	0	0	0
\tilde{x}_2	$1,65 - 1,48\varepsilon$	$1,65 + 3,05\varepsilon$	$1,65 + 2,65\varepsilon$	$1,65 - 1,08\varepsilon$
\tilde{x}_3	$0,80 - 1,15\varepsilon$	$0,80 + 3,47\varepsilon$	$0,80 - 0,36\varepsilon$	$0,80 - 0,25\varepsilon$
\tilde{x}_4	$-0,46 - 0,52\varepsilon$	$0,33 + 1,63\varepsilon$	$1,26 + 1,18\varepsilon$	$2,20 - 0,64\varepsilon$

	9	10	11	12
\tilde{r}_{12}	$0,62 - 0,64\varepsilon$	$0,62 + 3,51\varepsilon$	$0,62 - 0,65\varepsilon$	$0,62 - 0,22\varepsilon$
\tilde{r}_{13}	$0,72 - 0,39\varepsilon$	$0,72 - 0,77\varepsilon$	$0,72 + 3,20\varepsilon$	$0,72 - 0,43\varepsilon$
\tilde{r}_{23}	$1,34 - 1,03\varepsilon$	$1,34 + 2,74\varepsilon$	$1,34 + 2,54\varepsilon$	$1,34 - 0,64\varepsilon$
\tilde{r}_{14}	$1,16 - 0,21\varepsilon$	$0,28 + 1,58\varepsilon$	$0,29 + 1,35\varepsilon$	$1,41 - 0,05\varepsilon$
\tilde{r}_{24}	$0,54 + 0,43\varepsilon$	$0,34 + 1,93\varepsilon$	$0,91 + 0,70\varepsilon$	$2,03 - 0,26\varepsilon$
\tilde{r}_{34}	$1,88 - 0,60\varepsilon$	$1,00 + 0,82\varepsilon$	$0,44 + 1,84\varepsilon$	$0,69 + 0,38\varepsilon$
\tilde{x}_1	$0,62 - 0,64\varepsilon$	$0,62 + 3,51\varepsilon$	$0,62 - 0,65\varepsilon$	$0,62 - 0,22\varepsilon$
\tilde{x}_2	0	0	0	0
\tilde{x}_3	$1,34 - 1,03\varepsilon$	$1,34 + 2,74\varepsilon$	$1,34 + 2,54\varepsilon$	$1,34 - 0,64\varepsilon$
\tilde{x}_4	$-0,54 - 0,43\varepsilon$	$0,34 + 1,93\varepsilon$	$0,91 + 0,70\varepsilon$	$2,03 - 0,26\varepsilon$

23.4. Результаты

23.4.1. Существует 12 коллинеарных центральных конфигураций 4-х тел. Для любых m_1, m_2, m_3 ($m_1 + m_2 + m_3 = 1$) существует такое значение $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(m_1, m_2, m_3) > 0$, что при всех $m_4 = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$, расстояния между телами вычисляются по формулам (23.12) через сходящиеся степенные ряды ε .

23.4.2. На Рис. 23.1–23.3 даны коллинеарные конфигурации 4-х тел для: 1) $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, 2) $m_1 = m_2 = 0,25$, $m_3 = 0,5$; 3) $m_1 = 0,2$, $m_2 = 0,3$, $m_3 = 0,5$. Численные значения расстояний между телами и координаты тел в первом приближении даны в Табл. 23.4–23.6.

§24. Центральные конфигурации 4-х тел, III

В §24 рассмотрены неколлинеарные конфигурации 4-х тел в случае, когда 3 тела близки к конфигурации Эйлера, а 4-е тело с маленькой массой находится на конечном расстоянии от остальных, т.е. на расстоянии порядка $\varepsilon^0 = 1$.

24.1. Нулевое приближение расстояний до 4-го тела

Рассмотрим конфигурацию 4-х тел, в которой масса m_j находится между массами m_i, m_k , а масса m_4 мала. Обозначим нулевое приближение векторов $\mathbf{r}_{ij}, \mathbf{r}_{ik}, \mathbf{r}_{i4}$ через $\mathbf{p}_{ij}, \mathbf{p}_{ik}, \mathbf{p}_{i4}$. Тогда $\mathbf{p}_{ij}, \mathbf{p}_{ik}$ – параллельные векторы с модулями p_{ij}, p_{ik} . Значения p_{ij}, p_{ik}, p_{jk} найдены в п. 23.1. Из третьего уравнения (23.1) получим следующее равенство:

$$\begin{aligned}
 -\left(\frac{1}{p_{ij}^3} - \frac{1}{p_{j4}^3}\right) m_j \mathbf{p}_{ij} - \left(\frac{1}{p_{ik}^3} - \frac{1}{p_{k4}^3}\right) m_k \mathbf{p}_{ik} + \\
 + \left(1 - \frac{m_i}{p_{i4}^3} - \frac{m_j}{p_{j4}^3} - \frac{m_k}{p_{k4}^3}\right) \mathbf{p}_{i4} = 0,
 \end{aligned}
 \tag{24.1}$$

Так как искомые конфигурации неколлинеарны, то вектор \mathbf{p}_{i4} не коллинеарен $\mathbf{p}_{ij}, \mathbf{p}_{ik}$, и из (24.1) получим два скалярных уравнения:

Таблица 24.1. $m_i = m_j = m_k = 1/3$

p_{ij}	p_{ik}	p_{jk}	p_{i4}	p_{j4}	p_{k4}
0,747	1,494	0,747	1,132	0,851	1,132

$$G_3(p) \equiv -\left(\frac{1}{p_{ij}^3} - \frac{1}{p_{j4}^3}\right)m_j p_{ij} - \left(\frac{1}{p_{ik}^3} - \frac{1}{p_{k4}^3}\right)m_k p_{ik} = 0, \quad (24.2)$$

$$G_4(p) \equiv 1 - \frac{m_i}{p_{i4}^3} - \frac{m_j}{p_{j4}^3} - \frac{m_k}{p_{k4}^3} = 0.$$

Положим в четвёртом уравнении (23.1) $r = p$, $p_{jk} = p_{ik} - p_{ij}$; $r = (r_{ij}, r_{ik}, r_{jk}, r_{i4}, r_{j4}, r_{k4})$, $p = (p_{ij}, p_{ik}, p_{jk}, p_{i4}, p_{j4}, p_{k4})$. Получим:

$$-2 [(p_{ik} - p_{ij})(p_{i4}^2 - p_{ij}p_{ik}) - p_{ik}p_{j4}^2 + p_{ij}p_{k4}^2]^2 = 0.$$

Отсюда следует третье уравнение для p_{i4} , p_{j4} , p_{k4} :

$$G_5(p) \equiv (p_{ik} - p_{ij})(p_{i4}^2 - p_{ij}p_{ik}) - p_{ik}p_{j4}^2 + p_{ij}p_{k4}^2 = 0. \quad (24.3)$$

(24.2) – линейные уравнения относительно $1/p_{j4}^3$, $1/p_{k4}^3$. Решим их:

$$p_{j4} = \left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{1/3}, \quad p_{k4} = \left(\frac{\Delta}{\Delta_2}\right)^{1/3}, \quad \Delta = m_j m_k (p_{ik} - p_{ij}),$$

$$\Delta_1 = -m_k \left[p_{ik} \left(\frac{m_i}{p_{i4}^3} - 1 \right) + \frac{m_j}{p_{ij}^2} + \frac{m_k}{p_{ik}^2} \right], \quad \Delta_2 = m_j \left[p_{ij} \left(\frac{m_i}{p_{i4}^3} - 1 \right) + \frac{m_j}{p_{ij}^2} + \frac{m_k}{p_{ik}^2} \right].$$

Подставляя эти формулы в (24.3), получим уравнение для p_{i4} :

$$G(p_{i4}) \equiv (p_{ik} - p_{ij})(p_{i4}^2 - p_{ij}p_{ik}) - p_{ik} \left(\frac{\Delta}{\Delta_1}\right)^{2/3} + p_{ij} \left(\frac{\Delta}{\Delta_2}\right)^{2/3} = 0. \quad (24.4)$$

Область допустимых значений p_{i4} описывается неравенствами, которые следуют из неравенств $p_{i4} > 0$, $p_{j4} > 0$, $p_{k4} > 0$, $p_{ik} > p_{ij}$:

$$p_{i4}^{(1)} < p_{i4} < p_{i4}^{(2)}; \quad p_{i4}^{(1)} = \left[m_i p_{ik} / \left(p_{ik} - \frac{m_j}{p_{ij}^2} - \frac{m_k}{p_{ik}^2} \right) \right]^{1/3};$$

Таблица 24.2. $m_1 = m_j = 0,25$, $m_3 = 0,5$

p_{Ij}	p_{I3}	p_{j3}	p_{I4}	p_{j4}	p_{34}
0,638	1,410	0,772	1,146	0,852	1,051
1,651	0,826	0,826	1,211	1,211	0,886

Таблица 24.3. $m_1 = 0,2$, $m_2 = 0,3$, $m_3 = 0,5$

p_{12}	p_{13}	p_{23}	p_{14}	p_{24}	p_{34}
0,654	1,472	0,818	1,203	0,871	1,050
1,653	0,798	0,855	1,282	1,141	0,892
0,620	0,724	1,344	0,840	1,099	1,046

$$p_{i4}^{(2)} = \begin{cases} \left[m_i p_{ij} / \left(p_{ij} - \frac{m_j}{p_{ij}^2} - \frac{m_k}{p_{ik}^2} \right) \right]^{1/3} & \text{при } p_{ij} - \frac{m_j}{p_{ij}^2} - \frac{m_k}{p_{ik}^2} > 0; \\ \infty & \text{при } p_{ij} - \frac{m_j}{p_{ij}^2} - \frac{m_k}{p_{ik}^2} \leq 0. \end{cases}$$

Функция $G(p_{i4})$ монотонно возрастает в области допустимых значений от $-\infty$ до ∞ . Поэтому существует единственный корень p_{i4} уравнения (24.4) и единственная тройка (p_{i4}, p_{j4}, p_{k4}) , создающая искомую неколлинеарную конфигурацию 4-х тел.

На Рис. 23.1–23.3 для масс, рассмотренных в п. 22.3, показаны неколлинеарные конфигурации 4-х тел, в которых 3 первых тела близки к конфигурации Эйлера. Численные значения p_{i4} , p_{j4} , p_{k4} даны в Табл. 24.1–24.3. Индексы i, j, k, I, J принимают значения (23.7).

24.2. Переход к новым переменным

Перейдём от вектора $r = (r_{ij}, r_{ik}, r_{jk}, r_{i4}, r_{j4}, r_{k4})$ к вектору $u = (u_{ij}, u_{ik}, v_{jk}, u_{i4}, u_{j4}, u_{k4})$, где

$$v_{jk} = r_{jk}^2 - (r_{ik} - r_{ij})^2. \quad (24.5)$$

Остальные компоненты вектора u введены в (23.2). Вектор u удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}
H_1 &\equiv r_{ij}G_1(r) + \left(\frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3}\right) \frac{m_k v_{jk}}{2} - \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{2r_{i4}^3} (r_{ij}^2 + r_{i4}^2 - r_{j4}^2) - \frac{\varepsilon}{2r_{j4}^3} (r_{ij}^2 - r_{i4}^2 + r_{j4}^2) = 0, \\
H_2 &\equiv r_{ik}G_2(r) + \left(\frac{1}{r_{ij}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3}\right) \frac{m_j v_{jk}}{2} - \\
&\quad - \frac{\varepsilon}{2r_{i4}^3} (r_{ik}^2 + r_{i4}^2 - r_{k4}^2) - \frac{\varepsilon}{2r_{k4}^3} (r_{ik}^2 - r_{i4}^2 + r_{k4}^2) = 0, \\
H_3 &\equiv \frac{r_{ij}^2 + r_{i4}^2 - r_{j4}^2}{2r_{ij}} G_1(r) + \frac{m_k}{2r_{ij}} \left(\frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3}\right) G_5(r) - \left(\frac{1}{r_{i4}^3} - \frac{1}{r_{j4}^3}\right) \varepsilon r_{i4}^2 = 0, \\
H_4 &\equiv r_{ij}G_3(r) + \frac{r_{ij}^2 + r_{i4}^2 - r_{j4}^2}{2} \left[G_4(r) - \frac{\varepsilon}{r_{i4}^3}\right] + \left(\frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{k4}^3}\right) \frac{m_k v_{jk}}{2} = 0, \\
H_5 &\equiv \frac{r_{ij}^2 + r_{i4}^2 - r_{j4}^2}{2r_{ij}} G_3(r) + r_{i4}^2 \left[G_4(r) - \frac{\varepsilon}{r_{i4}^3}\right] + \frac{m_k}{2r_{ij}} \left(\frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{k4}^3}\right) G_5(r) = 0, \\
H_6 &\equiv [4 r_{ij} r_{ik} r_{i4}^2 - (r_{ij}^2 + r_{i4}^2 - r_{j4}^2)(r_{ik}^2 + r_{i4}^2 - r_{k4}^2)] v_{jk} - \\
&\quad - r_{i4}^2 v_{jk}^2 - G_5^2(r) = 0.
\end{aligned}
\tag{24.6}$$

Здесь функции G_1 – G_5 описываются формулами (23.3), (24.2), (24.3). Первые пять уравнений (24.6) равны скалярным произведениям уравнений (23.1): 1-го на r_{ij} , 2-го на r_{ik} , 1-го на r_{i4} , 3-го на r_{ij} , 3-го на r_{i4} . Шестое уравнение (24.6) получается делением четвёртого уравнения (23.1) на 2.

24.3. Аналитичность переменных по ε

Из (23.2), (24.5) следует, что u является аналитической функцией от компонент вектора r . В точке $r = p$ функция $u = 0$, якобиан $\partial u / \partial r$ отличен от нуля. Поэтому существует обратная функция $r = r(u)$, аналитическая в окрестности точки $u = 0$.

Подставляя $r = r(u)$ в уравнения (24.6), получаем: функции H_1, \dots, H_6 аналитичны в окрестности точки $u = 0$ и обращаются в ноль при $u = 0$, $\varepsilon = 0$. Покажем, что якобиан $\partial H / \partial u$ отличен от нуля при $u = 0$, $\varepsilon = 0$. Из (24.6) следует равенство

$$\left. \frac{\partial H}{\partial u} \right|_{u=0, \varepsilon=0} = \frac{\partial(H_1 H_2)}{\partial(u_{ij} u_{ik})} \cdot \frac{\partial(H_3 H_4 H_5)}{\partial(u_{i4} u_{j4} u_{k4})} \cdot \left. \frac{\partial H_6}{\partial v_{jk}} \right|_{u=0, \varepsilon=0}.$$

Рассмотрим сомножители отдельно.

$$а) \left. \frac{\partial(H_1 H_2)}{\partial(u_{ij} u_{ik})} \right|_{u=0, \varepsilon=0} = [m_i g_1(p_{ij}) \cdot g_1(p_{ik}) + m_j g_1(p_{ij}) \cdot g_1(p_{jk}) + \\ + m_k g_1(p_{ik}) \cdot g_1(p_{jk})] p_{ij} p_{ik} > 0, \quad g_1(x) = 1 + \frac{2}{x^3}.$$

$$б) \left. \frac{\partial(H_3 H_4 H_5)}{\partial(u_{i4} u_{j4} u_{k4})} \right|_{u=0, \varepsilon=0} = \left[\frac{m_j m_k}{p_{j4}^4 p_{k4}^4} (p_{ik} - p_{ij})^2 + \frac{2m_i m_k p_{ik}^2 p_{j4}}{p_{i4}^4 p_{k4}^4} + \frac{2m_i m_j p_{ij}^2 p_{k4}}{p_{i4}^4 p_{j4}^4} \right] \times \\ \times \left(\frac{1}{r_{ik}^3} - \frac{1}{r_{jk}^3} \right) \frac{9m_k p_{i4}^2}{2} \sin^2 \vartheta < 0.$$

Здесь и дальше ϑ – угол между векторами \mathbf{p}_{ij} и \mathbf{p}_{i4} , равный углу между векторами \mathbf{p}_{ik} и \mathbf{p}_{i4} . При выводе использованы формулы

$$\sin^2 \vartheta = 1 - \cos^2 \alpha, \quad \cos \vartheta = \frac{p_{ij}^2 + p_{i4}^2 - p_{j4}^2}{2p_{ij} p_{i4}} = \frac{p_{ik}^2 + p_{i4}^2 - p_{k4}^2}{2p_{ik} p_{i4}}.$$

$$в) \left. \frac{\partial H_6}{\partial v_{jk}} \right|_{u=0, \varepsilon=0} = 4p_{ij} p_{ik} p_{i4}^2 \sin^2 \vartheta > 0.$$

Получили, что якобиан левых частей уравнений (24.6) по компонентам вектора u отличен от нуля при $u = 0, \varepsilon = 0$. По теореме о неявных функциях отсюда следует, что в окрестности точки $\varepsilon = 0$ вектор u является аналитической функцией ε . По теореме о сложной функции отсюда и из (23.2), (24.5) следует, что в окрестности точки $\varepsilon = 0$ вектор r является аналитической функцией ε . Поэтому существует такое значение $\varepsilon_* = \varepsilon_*(m_i, m_j, m_k, p) > 0$, что при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_*$ функции, равные расстояниям между телами, разлагаются в сходящиеся ряды по степеням ε :

$$r_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} + \sum_{n=1}^{\infty} u_{\alpha\beta}^{(n)} \varepsilon^n, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq 4. \quad (24.7)$$

Для заданных значений m_1, m_2, m_3 число точек p конечно (равно 3). Обозначим

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_3(m_1, m_2, m_3) \equiv \min_p \varepsilon_*(m_i, m_j, m_k, p) > 0.$$

Тогда при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_3$ для всех трёх векторов p справедливы равенства (24.7).

Таблица 24.4
 $m_i = m_j = m_k = 1/3$

	13, 14, 15
\tilde{r}_{ij}	$0,75 + 0,17\varepsilon$
\tilde{r}_{ik}	$1,49 + 0,34\varepsilon$
\tilde{r}_{jk}	$0,75 + 0,17\varepsilon$
\tilde{r}_{i4}	$1,13 + 1,04\varepsilon$
\tilde{r}_{j4}	$0,85 - 0,09\varepsilon$
\tilde{r}_{k4}	$1,13 + 1,04\varepsilon$
\tilde{x}_i	0
\tilde{y}_i	0
\tilde{x}_j	$0,75 + 0,17\varepsilon$
\tilde{y}_j	0
\tilde{x}_k	$1,49 + 0,34\varepsilon$
\tilde{y}_k	$-2,65\varepsilon$
\tilde{x}_4	$0,75 + 1,68\varepsilon$
\tilde{y}_4	$0,85 - 0,09\varepsilon$

Таблица 24.5. $m_1 = m_j = 0,25$,
 $m_3 = 0,5$

	13, 14	15
\tilde{r}_{ij}	$0,64 + 0,14\varepsilon$	$1,65 + 0,31\varepsilon$
\tilde{r}_{i3}	$1,41 + 0,36\varepsilon$	$0,83 + 0,15\varepsilon$
\tilde{r}_{j3}	$0,77 + 0,23\varepsilon$	$0,83 + 0,15\varepsilon$
\tilde{r}_{i4}	$1,15 + 1,03\varepsilon$	$1,21 + 1,80\varepsilon$
\tilde{r}_{j4}	$0,85 + 0,07\varepsilon$	$1,21 + 1,80\varepsilon$
\tilde{r}_{34}	$1,05 + 0,57\varepsilon$	$0,89 - 0,09\varepsilon$
\tilde{x}_i	0	0
\tilde{y}_i	0	0
\tilde{x}_j	$0,64 + 0,14\varepsilon$	$1,65 + 0,31\varepsilon$
\tilde{y}_j	0	$-4,83\varepsilon$
\tilde{x}_3	$1,41 + 0,36\varepsilon$	$0,83 + 0,15\varepsilon$
\tilde{y}_3	$-1,93\varepsilon$	0
\tilde{x}_4	$0,78 + 1,72\varepsilon$	$0,83 + 2,75\varepsilon$
\tilde{y}_4	$0,84 - 0,20\varepsilon$	$0,89 - 0,09\varepsilon$

24.4. Первое приближение расстояний между телами

Чтобы найти коэффициенты рядов (24.7), нужно в уравнениях (23.2), (24.5), (24.6) разложить переменные r , u по степеням ε и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях. Получаются линейные алгебраические уравнения относительно неизвестных. В Табл. 24.4–24.6 для масс, рассмотренных в п. 22.3, даны численные значения $\tilde{r}_{\alpha\beta}$, \tilde{x}_α , \tilde{y}_α , где $\tilde{r}_{\alpha\beta}$ – первое приближение расстояния между телами с массами m_α , m_β :

$$r_{\alpha\beta} \approx \tilde{r}_{\alpha\beta} \equiv p_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}^{(1)} \varepsilon, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq 4.$$

\tilde{x}_α , \tilde{y}_α – первое приближение координат тела с массой m_α :

$$x_\alpha \approx \tilde{x}_\alpha \equiv x_\alpha^{(0)} + \tilde{x}_\alpha^{(1)} \varepsilon, \quad y_\alpha \approx \tilde{y}_\alpha \equiv y_\alpha^{(0)} + \tilde{y}_\alpha^{(1)} \varepsilon, \quad 1 \leq \alpha \leq 4.$$

Координаты даны в системе Q_1xy .

Таблица 24.6. $m_1 = 0, 2$, $m_2 = 0, 3$, $m_3 = 0, 5$

	13	14	15
\tilde{r}_{12}	$0,65 + 0,11\varepsilon$	$1,65 + 0,31\varepsilon$	$0,62 + 0,15\varepsilon$
\tilde{r}_{13}	$1,47 + 0,36\varepsilon$	$0,80 + 0,11\varepsilon$	$0,72 + 0,21\varepsilon$
\tilde{r}_{23}	$0,82 + 0,24\varepsilon$	$0,85 + 0,20\varepsilon$	$1,34 + 0,37\varepsilon$
\tilde{r}_{14}	$1,20 + 1,32\varepsilon$	$1,28 + 2,36\varepsilon$	$0,84 + 0,02\varepsilon$
\tilde{r}_{24}	$0,87 + 0,16\varepsilon$	$1,14 + 1,18\varepsilon$	$1,10 + 0,77\varepsilon$
\tilde{r}_{34}	$1,05 + 0,58\varepsilon$	$0,89 + 0,03\varepsilon$	$1,05 + 0,54\varepsilon$
\tilde{x}_1	0	0	$0,62 + 0,15\varepsilon$
\tilde{y}_1	0	0	0
\tilde{x}_2	$0,65 + 0,11\varepsilon$	$1,65 + 0,31\varepsilon$	0
\tilde{y}_2	0	$-4,84\varepsilon$	0
\tilde{x}_3	$1,47 + 0,36\varepsilon$	$0,80 + 0,11\varepsilon$	$1,34 + 0,37\varepsilon$
\tilde{y}_3	$-2,37\varepsilon$	0	$-1,50\varepsilon$
\tilde{x}_4	$0,85 + 2,18\varepsilon$	$0,93 + 3,74\varepsilon$	$0,71 + 1,32\varepsilon$
\tilde{y}_4	$0,85 - 0,32\varepsilon$	$0,88 - 0,51\varepsilon$	$0,84 - 0,11\varepsilon$

24.5. Результаты

24.5.1. Существуют три неколлинеарные центральные конфигурации 4-х тел, в которых первые три тела близки к конфигурации Эйлера. Для любых m_1, m_2, m_3 ($m_1 + m_2 + m_3 = 1$) существует такое значение $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(m_1, m_2, m_3) > 0$, что при всех $m_4 = \varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_3$, расстояния между телами вычисляются по формулам (24.7) через сходящиеся степенные ряды ε .

24.5.2. На Рис. 23.1–23.3 даны неколлинеарные конфигурации 4-х тел в случае Эйлера для: 1) $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, 2) $m_1 = m_2 = 0,25$, $m_3 = 0,5$; 3) $m_1 = 0,2$, $m_2 = 0,3$, $m_3 = 0,5$. Численные значения расстояний между телами и координаты тел в первом приближении даны в Табл. 24.4–24.6.

Замечание 24.1. В Табл. 24.1, 24.2, 24.4, 24.5 индексы принимают значения (23.7). Конфигурации 4-х тел, симметричные относительно любой прямой, соответствуют одной и той же центральной конфигурации по Определению 19.2.

§25. Центральные конфигурации 4-х тел, IV

В §25 рассмотрены конфигурации 4-х тел, в которых 4-е тело с маленькой массой находится в окрестности одного из первых трёх тел или в окрестности бесконечности.

25.1. 4-е тело в окрестности одного из тел

Рассмотрим конфигурацию тел, в которой 4-е тело находится в окрестности массы m_1 , т.е. рассмотрим случай, при котором $r_{14} \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Справедливы формулы

$$r_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq 3; \quad r_{14} = u_{14}, \quad (25.1)$$

$$r_{\alpha 4} = p_{1\alpha} + u_{\alpha 4}, \quad \alpha = 2, 3; \quad \mathbf{r}_{14} = \mathbf{u}_{14}, \quad |\mathbf{u}_{14}| = u_{14}.$$

Здесь $p_{\alpha\beta}, p_{1\alpha}$ – значения, рассмотренные в §22, §23; $u_{\alpha\beta}, u_{14}, u_{\alpha 4}$ – искомые малые величины. Формулы для $r_{\alpha 4}$ получены из равенств

$$\mathbf{r}_{\alpha 4} = -\mathbf{r}_{1\alpha} + \mathbf{r}_{14} = r_{1\alpha}[-\mathbf{e} + \mathbf{o}(1)], \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_{1\alpha}}{r_{1\alpha}}, \quad |\mathbf{e}| = 1.$$

Подставим формулы (25.1) в третье уравнение (21.2) и умножим уравнение на u_{14}^2 . Получим:

$$(m_1 + \varepsilon) \frac{u_{14}}{u_{14}} + \mathbf{O}(u_{14}^3) = 0.$$

Уравнение не имеет решения, так как $\left| \frac{u_{14}}{u_{14}} \right| = 1$. Поэтому 4-я масса не может быть в окрестности массы m_1 .

Аналогично доказывается, что 4-я масса не может быть в окрестности массы m_2 или в окрестности массы m_3 .

25.2. 4-е тело в окрестности бесконечности

Рассмотрим расположение 4-го тела на большом расстоянии от первых трёх тел, т.е. рассмотрим случай, при котором $r_{14} \rightarrow \infty, r_{24} \rightarrow \infty, r_{34} \rightarrow \infty$, если $\varepsilon \rightarrow 0$. Справедливы формулы:

$$r_{\alpha\beta} = p_{\alpha\beta} + u_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq \alpha < \beta \leq 3; \quad r_{14} = \frac{1}{u_{14}}, \quad (25.2)$$

$$r_{\alpha 4} = \frac{1}{u_{14}} (1 + u_{\alpha 4}), \quad \alpha = 2, 3.$$

Здесь $p_{\alpha\beta}$ – значения, рассмотренные в §22, §23; $u_{\alpha\beta}$, u_{14} , $u_{\alpha 4}$ – искомые малые величины. Формулы для $r_{\alpha 4}$ следуют из равенств

$$\mathbf{r}_{\alpha 4} = \mathbf{r}_{14} - \mathbf{r}_{1\alpha} = r_{14} [\mathbf{e} + \mathbf{o}(1)], \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}_{14}}{r_{14}}.$$

Подставим формулы (25.2) в третье уравнение (21.2) и умножим уравнение на u_{14} . Получим:

$$\mathbf{e} + \mathbf{O}(u_{14}) = 0.$$

Уравнение не имеет решения, так как $|\mathbf{e}| = 1$. Поэтому 4-я масса не может быть в окрестности бесконечности.

25.3. Результаты

Не существует конфигураций 4-х тел, в которых 4-е тело с маленькой массой находится в окрестности одного из первых трёх тел или в окрестности бесконечности. Все конфигурации 4-х тел найдены в §22–§24.

§26. Центральные конфигурации 4-х тел. Результаты

Обозначим

$$\varepsilon_{**} = \varepsilon_{**}(m_1, m_2, m_3) \equiv \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3),$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – значения, введённые в п. 22.6, 23.3, 24.3.

26.1. Для всех значений m_1, m_2, m_3 , не принадлежащих бифуркационному множеству (БМ), существует такое значение $\varepsilon_{**} = \varepsilon_{**}(m_1, m_2, m_3) > 0$, что при всех $m_4 = \varepsilon, 0 < \varepsilon < \varepsilon_{**}$, число конфигураций 4-х тел конечно. Оно равно 25, если точка (m_2, m_3) находится внутри БМ на Рис. 22.2, или 23, если точка находится вне БМ. ($m_1 + m_2 + m_3 = 1$)

При этом число конфигураций, у которых три тела близки к конфигурации Лагранжа, равно 10 или 8, соответственно. Число конфигураций, у которых три тела близки к конфигурации Эйлера, равно 15 для всех m_1, m_2, m_3 .

26.2. На Рис. 22.3–22.5, 23.1–23.3 показаны конфигурации 4-х тел для: 1) $m_1 = m_2 = m_3 = 1/3$, 2) $m_1 = m_2 = 0,25, m_3 = 0,5$; 3) $m_1 = 0,2, m_2 = 0,3, m_3 = 0,5$. Численные значения расстояний между телами и координаты тел в первом приближении даны в Табл. 22.5–22.7, 23.4–23.6, 24.4–24.6.

Замечание 26.1. Чтобы задача о центральных конфигурациях 4-х тел при $m_4 \ll 1$ была решена полностью, необходимо дополнительно исследовать следующие случаи:

- точка (m_1, m_2, m_3) принадлежит БМ,
- точка (m_1, m_2, m_3) находится от БМ на близком расстоянии,
- некоторые из масс m_1, m_2, m_3 ($m_1 + m_2 + m_3 = 1$) малы.

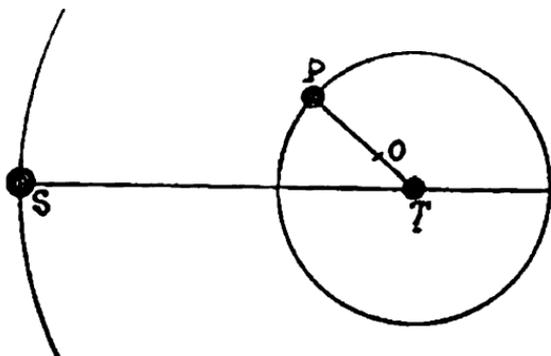
Замечание 26.2. Центральная конфигурация – это класс эквивалентности конфигураций. Из всего класса эквивалентности при решении задачи выбрана такая конфигурация 4-х тел, которая вращается как твёрдое тело с такой же угловой скоростью, что и конфигурация 3-х тел с массами m_1, m_2, m_3 .

§27. Выводы главы 4

В §19 дано определение центральных конфигураций n тел и рассмотрена связь центральных конфигураций с частными решениями Задачи 2.1 n тел, при которых система материальных точек движется как одно твёрдое тело. Показано, что для коллинеарных и плоских центральных конфигураций такие частные решения существуют, для пространственных центральных конфигураций таких решений нет.

В §20 перечислены наиболее известные центральные конфигурации.

В §21–§26 найдены центральные конфигурации 4-х тел, у которых масса 4-го тела много меньше масс остальных тел.



Не должно принимать в природе иных причин
сверх тех, которые истинны и достаточны для
объяснения явлений.

Исаак Ньютон
(04.01.1643 – 31.3.1727)

Глава 5. Задачи теории потенциала

§28. Обратная задача теории потенциала

28.1. Постановка задачи

Обратная задача теории потенциала заключается в определении масс, создающих заданное гравитационное поле. Рассмотрим её в следующей постановке.

Задача 28.1. *Гравитационное поле создаётся материальным телом, занимающим известную область T . Даны точки с радиус-векторами $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N$, не принадлежащие T . Даны значения производных гравитационного потенциала в этих точках (производные могут иметь любой порядок, в частности, в каждой точке может быть задана сила притяжения, или сам потенциал, или заданы значения нескольких производных, своих для каждой точки). Требуется найти плотность материального тела $\sigma(\mathbf{P})$ (\mathbf{P} – радиус-вектор точки в области T).*

Известно, что Задача 28.1 – некорректная математическая задача в следующем смысле: если решение Задачи 28.1 существует, то оно не единственно.

Неединственность решения Задачи 28.1 следует из существования распределения масс с нулевым внешним потенциалом. Например, таким распределением является шар, состоящий из двух однородных частей: внутренняя часть шара представляет собой шар с тем же центром, массы обеих частей шара равны по модулю и противоположны по знаку. При добавлении такого шара мы получим перераспределение массы внутри тела без изменения гравитационного поля, создаваемого телом. Размеры шара могут быть любыми (в частности, весьма малыми при существенной плотности). Таким образом, получается новая функция $\sigma(\mathbf{P})$, являющаяся решением той же задачи. Таких функций существует бесконечное множество.

Приведённый пример делает очевидным известный результат о некорректности обратной задачи теории потенциала в следующей постановке:

Задача 28.2. *Гравитационное поле создаётся материальным телом, занимающим известную область T . Дана область T_1 , не пересекающаяся с областью T . В области T_1 известны производные гравитационного потенциала (любого порядка, число производных может быть любым, в частности, могут быть заданы силы притяжения или/и сам потенциал). Требуется найти плотность материального тела $\sigma(\mathbf{P})$.*

Задача 28.2 некорректна: если решение Задачи 28.2 существует, то оно не единственно.

28.2. О решении обратной задачи теории потенциала

Обратная задача теории потенциала решается при дополнительных условиях на распределение масс [16, 18, 25]. Например, можно рассмотреть задачу о Земле в следующей постановке: найти плотность и радиус однородного шара, создающего гравитационное поле, близкое к гравитационному полю Земли. Близость можно определить как минимум квадратичного отклонения потенциала (или его производных) от значений, полученных при измерении гравитационного поля Земли.

Аналогичную задачу о Земле можно рассмотреть не на множестве шаров, а на множестве эллипсоидов или других тел. Рассмотрим гравитационное поле, создаваемое конечным числом материальных точек.

28.3. Обратная задача теории потенциала для конечного числа материальных точек, I

Задача 28.3. *Гравитационное поле создаётся N материальными точками с известными радиус-векторами $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N$. Даны точки $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N$, и в них заданы проекции сил притяжения на ось z , т.е. заданы значения F_{1z}, \dots, F_{Nz} . Найти массы материальных точек M_1, \dots, M_N .*

Решение задачи сводится к решению относительно M_1, \dots, M_N системы линейных алгебраических уравнений

$$G \sum_{j=1}^N \frac{z_j - z_{Ri}}{|P_j - R_i|^3} M_j = F_{iz}, \quad i = \overline{1, N}, \quad (28.1)$$

где G – гравитационная постоянная; z_j, z_{Ri} – проекции радиус-векторов $\mathbf{P}_j, \mathbf{R}_i$ на ось z .

Система (28.1) имеет единственное решение, если определитель системы \det не равен нулю. Рассмотрим этот определитель как функцию координат точек с радиус-векторами $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N$, то есть как функцию от

$x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N$ (координаты принадлежат $3N$ -мерному пространству \mathbf{R}^{3N} действительных чисел). Значения $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N$ считаем известными и фиксированными.

Нетрудно видеть, что \det – аналитическая функция координат на многообразии

$$\mathfrak{R}_1 = \mathbf{R}^{3N} \setminus \bigcup_{i,j=1}^N D_{ij},$$

где D_{ij} – многообразие, описываемое уравнениями

$$x_j = x_{Ri}, \quad y_j = y_{Ri}, \quad z_j = z_{Ri},$$

x_{Ri}, y_{Ri}, z_{Ri} – координаты точки с радиус-вектором \mathbf{R}_i . Многообразие \mathfrak{R}_1 связно и имеет размерность $3N$. Чтобы доказать, что функция \det не равна тождественно нулю, рассмотрим следующие точки:

$$\mathbf{P}_i = \mathbf{R}_i + \varepsilon \mathbf{k}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Здесь \mathbf{k} – орт оси z . Нетрудно вычислить, что $\det = G^N \varepsilon^{-2N} [1 + O(\varepsilon)]$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом, $\det \neq 0$ при достаточно малых значениях $|\varepsilon|$, и, следовательно, аналитическая функция \det не равна тождественно нулю, а равна нулю на множестве нулевой (по Лебегу) меры на \mathfrak{R}_1 ; для почти всех точек пространства \mathbf{R}^{3N} система (28.1) имеет единственное решение. Этот результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 28.1. Пусть F_{1z}, \dots, F_{Nz} – произвольные действительные числа. Пусть $\mathbf{P}_{*1}, \dots, \mathbf{P}_{*N}, \mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N$ – произвольные попарно различные точки, а O_1, \dots, O_N – произвольные окрестности точек $\mathbf{P}_{*1}, \dots, \mathbf{P}_{*N}$. Тогда найдутся такие точки $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N$, что $\mathbf{P}_j \in O_j, j = \overline{1, N}$, и решение M_1, \dots, M_N системы (28.1) существует и единственно.

Из Теоремы 28.1 следует: Задача 28.3 имеет единственное решение или единственное решение имеет задача, в которой материальные точки расположены сколь угодно близко к заданным (здесь предполагается, что массы материальных точек могут принимать произвольные значения, в том числе и отрицательные).

28.4. Обратная задача теории потенциала для конечного числа материальных точек, II

Обозначим через $V(\mathbf{R})$ потенциал в точке \mathbf{R} гравитационного поля, создаваемого N материальными точками с радиус-векторами $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N$. Компоненты вектора \mathbf{R} обозначим x, y, z .

Задача 28.4. Гравитационное поле создаётся N материальными точками с известными радиус-векторами $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N$. Даны точки $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_J$. В каждой точке $\mathbf{R}_i, i = \overline{1, J}$, известны значения K_i производных потенциала V по координате z порядка L_{i1}, \dots, L_{iK_i} ($0 \leq L_{i1} < \dots < L_{iK_i}$).

$$\sum_{i=1}^J K_i = N.$$

Найти массы материальных точек M_1, \dots, M_N .

Отметим, что Задача 28.3 получается из Задачи 28.4 при $J = N, K_i = L_{i1} = 1, i = \overline{1, N}$.

Обозначим через $GV_j(\mathbf{R})$ потенциал в точке \mathbf{R} гравитационного поля, создаваемого единичной массой, расположенной в точке \mathbf{P}_j . Тогда решение Задачи 28.4 сводится к решению относительно M_1, \dots, M_N следующих уравнений:

$$G \sum_{j=1}^N \frac{\partial^{L_{il}} v_j}{\partial z^{L_{il}}}(\mathbf{R}_i) \cdot M_j = f_{il}, \quad i = \overline{1, J}, \quad l = \overline{1, K_i}. \quad (28.2)$$

Здесь через f_{il} обозначены соответствующие производные гравитационного потенциала (известные числа). Для удобства исследования пересоборачиваем переменные. Разобьём массивы $M_1, \dots, M_N; \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N; V_1, \dots, V_N$ на J групп: в первую группу отнесём первые K_1 элементов, во вторую – следующие K_2 элементов, ..., в последнюю – K_J элементов. Обозначения примем соответственно следующие: $(M_{j1}, \dots, M_{jK_j}), (P_{j1}, \dots, P_{jK_j}), (V_{j1}, \dots, V_{jK_j}), j = \overline{1, J}$.

В новых обозначениях система (28.2) примет вид

$$G \sum_{j=1}^J \sum_{s=1}^{K_j} \frac{\partial^{L_{il}} v_{js}}{\partial z^{L_{il}}}(\mathbf{R}_i) \cdot M_{js} = f_{il}, \quad i = \overline{1, J}, \quad l = \overline{1, K_i}. \quad (28.3)$$

Полученная система является системой N линейных алгебраических уравнений от N неизвестных M_{11}, \dots, M_{JKJ} . Система имеет единственное решение, если её определитель det не равен нулю. Рассмотрим этот определитель как функцию координат $x_{11}, y_{11}, z_{11}, \dots, x_{JKJ}, y_{JKJ}, z_{JKJ}$ точек с радиус-векторами $\mathbf{P}_{11}, \dots, \mathbf{P}_{JKJ}$. Векторы $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_J$ считаем известными и фиксированными.

Нетрудно видеть, что det – аналитическая функция координат на многообразии

$$\mathfrak{R}_1 = \mathbf{R}^{3N} \setminus \bigcup_{i=\overline{1, J}, j=\overline{1, J}, s=\overline{1, K_j}}^N D_{ijs},$$

где D_{ijs} – многообразие, описываемое уравнениями

$$x_{js} = x_{Ri}, \quad y_{js} = y_{Ri}, \quad z_{js} = z_{Ri},$$

x_{Ri}, y_{Ri}, z_{Ri} – координаты точки \mathbf{R}_i . Многообразие \mathfrak{R}_1 связно и имеет размерность $3N$. Чтобы доказать, что функция det не равна тождественно нулю, рассмотрим точки

$$\mathbf{P}_{is} = \mathbf{R}_i + \varepsilon a_{is} \mathbf{k}, \quad i = \overline{1, J}, \quad s = \overline{1, K_i},$$

где \mathbf{k} – орт оси z . Нетрудно вычислить, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$det = G^N \prod_{i=1}^J det_i [1 + O(\varepsilon)], \quad (28.4)$$

где det_i – определитель матрицы с элементами

$$d_{ls} = \frac{\partial^{l_{il}} V_{is}}{\partial z^{l_{il}}}(\mathbf{R}_i), \quad l = \overline{1, K_i}, \quad s = \overline{1, K_i}.$$

Найдём det_i . Из формулы $V_{is}(\mathbf{R}) = |\mathbf{P}_{is} - \mathbf{R}|^{-1}$ следует, что

$$\frac{\partial^n V_{is}}{\partial z^n}(\mathbf{R}) = \frac{Q_n(\delta x, \delta y, \delta z)}{[(\delta x)^2 + (\delta y)^2 + (\delta z)^2]^{(2n+1)/2}},$$

$$\delta x = x - x_{is}, \quad \delta y = y - y_{is}, \quad \delta z = z - z_{is}.$$

Q_n – однородный многочлен n -й степени от своих переменных,

$$Q_n = n! (-\delta z)^n + \text{члены меньшей степени по } \delta z.$$

В точке $\mathbf{R} = \mathbf{R}_i$ имеем: $\delta x = 0$, $\delta y = 0$, $\delta z = -\varepsilon a_{is}$, $Q_n = n! (\varepsilon a_{is})^n$. Поэтому справедливы равенства

$$\frac{\partial^n v_{is}}{\partial z^n}(\mathbf{R}_i) = n! (\varepsilon a_{is})^{-n-1}, \quad d_{is} = L_{il}! (\varepsilon a_{is})^{-L_{il}-1}, \quad (28.5)$$

$$\det_i = \frac{L_{i1}! \dots L_{K_i}!}{\varepsilon^{L_{i1} + \dots + L_{K_i} + K_i} a_{i1} \dots a_{iK_i}} \begin{pmatrix} b_1^{L_{i1}} & b_{K_i}^{L_{i1}} \\ \vdots & \vdots \\ b_1^{L_{iK_i}} & b_{K_i}^{L_{iK_i}} \end{pmatrix},$$

$$b_s = a_{is}^{-1}, \quad i = \overline{1, J}, \quad l = \overline{1, K_i}, \quad s = \overline{1, K_i}.$$

Выберем числа a_{i1}, \dots, a_{iK_i} так, чтобы $\det_i \neq 0$. Это можно сделать, например, следующим образом. Обозначим через Δ_j угловой минор j -го порядка матрицы $(b_s^{L_{ij}})$, $j = \overline{1, K_i}$. Выберем $b_1 \neq 0$. Минор Δ_j является многочленом от переменной b_j степени L_{ij} . Коэффициент при старшей степени b_j равен Δ_{j-1} . Пусть $\Delta_{j-1} \neq 0$. Тогда b_j можно выбрать так, что $\Delta_j \neq 0$, $b_j \neq 0$. Так как $\Delta_1 \neq 0$, то, используя индукцию по j , получаем значения b_1, \dots, b_{K_i} , при которых $\Delta_{K_i} \neq 0$. Положив $a_{is} = b_s^{-1}$, получим значения a_{i1}, \dots, a_{iK_i} , при которых $\det_i \neq 0$. Тогда из (28.4), (28.5) следует формула

$$\det = C \varepsilon^L [1 + O(\varepsilon)], \quad L = - \sum_{i=1}^J \left(\begin{matrix} K_i \\ \sum_{s=1}^{K_i} L_{is} + K_i \end{matrix} \right), \quad C \neq 0.$$

Таким образом, $\det \neq 0$ при достаточно малых значениях $|\varepsilon|$, и, следовательно, аналитическая функция \det не равна тождественно нулю, а равна нулю на множестве нулевой (по Лебегу) меры на \mathfrak{R}_1 ; для почти всех точек пространства \mathbf{R}^{3N} система (28.3) (соответственно, система (28.2)) имеет единственное решение. Этот результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 28.2. Пусть f_{il} – произвольные действительные числа, а L_{il} – целые числа, такие, что $0 \leq L_{i1} < \dots < L_{iK_i}$, $i = \overline{1, J}$, $l = \overline{1, K_i}$. Пусть $\mathbf{P}_{*1}, \dots, \mathbf{P}_{*N}$, $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_J$ – произвольные попарно различные точки,

$$N = \sum_{i=1}^J K_i;$$

O_1, \dots, O_N – произвольные окрестности точек P_{*1}, \dots, P_{*N} . Тогда найдутся такие точки P_1, \dots, P_N , что $P_j \in O_j, j = \overline{1, N}$, и решение M_1, \dots, M_N системы (28.2) существует и единственно.

Из Теоремы 28.2 следует: Задача 28.4 имеет единственное решение или единственное решение имеет задача, в которой материальные точки расположены сколь угодно близко к заданным (здесь предполагаем, что массы могут принимать любые действительные значения, в том числе и отрицательные).

Теорема 28.1 есть следствие Теоремы 28.2.

28.5. О близости решения обратной задачи теории потенциала к реальности

Введение дополнительных условий при решении обратной задачи теории потенциала находится в рамках обычного, принятого метода построения математических моделей. После того, как задача решена, встаёт вопрос о точности принятой математической модели и её уточнении.

Рассмотрим вопрос о близости решения обратной задачи теории потенциала к реально существующему распределению массы Земли (или какой-либо области Земли). Этот вопрос не может быть решён в рамках теории потенциала из-за наличия описанных в п. 28.1 масс (например, шаров) с нулевым внешним потенциалом. Так как при добавлении такого шара гравитационное поле не меняется, а масса тела T перераспределяется, то любое решение обратной задачи теории потенциала и реально существующая плотность Земли могут отличаться сколь угодно.

Если известна плотность вещества в какой-либо области, то это не меняет сути дела, так как шары с нулевым внешним потенциалом можно добавлять в области с неизвестным распределением массы. Шары нельзя добавить, если известна плотность во всей области T , а тогда нет (обратной) задачи.

Результат 28.1. Если гравитационное поле известно в конечном числе точек, то теория потенциала не может обеспечить близости решения обратной задачи к реально существующему распределению массы Земли (или какой-либо области Земли).

Из Теорем 28.1, 28.2 следует, что если гравитационное поле известно в конечном числе точек, то обратная задача теории потенциала всегда имеет решение при условии, что масса может принимать любые (в том числе, и отрицательные) значения. Для решения достаточно рассмотреть случай, когда масса сосредоточена в конечном числе материальных точек области T . При этом можно построить такое решение, что массы задан-

ных точек (число которых конечно) имеют заданные значения. Для этого к решению, определяемому по Теоремам 28.1, 28.2, следует добавить тройки материальных точек с нулевым потенциалом: первые две точки имеют равные массы, третья точка находится посередине между первыми двумя и имеет массу, равную по модулю сумме масс первых двух точек и обратную по знаку. Эти тройки точек можно выбрать (не единственным образом) так, чтобы в заданных точках массы будут равны заданным значениям.

Замечание 28.1. Сделанное в п. 28.1 предположение о существовании решения Задачи 28.1 вызвано тем, что Теоремы 28.1, 28.2 гарантируют существование решения обратной задачи теории потенциала, которое, вообще говоря, может не иметь физического смысла (массы могут оказаться отрицательными).

§29. Задача о продолжении гравитационного поля

29.1. Продолжение гравитационного поля, известного в конечном числе точек, I

Задача 29.1. *Гравитационное поле создаётся материальным телом, занимающим известную область T . Даны точки с радиус-векторами $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_N$, не принадлежащие T . В точках $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_J$ известны проекции сил притяжения на ось z . Найти проекции сил притяжения на ось z в точках $\mathbf{R}_{J+1}, \dots, \mathbf{R}_N$ ($J < N$).*

Поставленную задачу естественно решать следующим образом: найти массы, создающие гравитационное поле (т.е. решить обратную задачу теории потенциала – найти плотность тела T по известным значениям производных гравитационного потенциала в точках $\mathbf{R}_1, \dots, \mathbf{R}_J$), потом вычислить проекции сил притяжения в нужных точках.

Предположим, что решение Задачи 29.1 существует. Рассмотрим случай, когда $F_{1z} = 0, \dots, F_{Jz} = 0$. Выберем в области T произвольные точки $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N$. Если для этих точек определитель \det системы (28.1) равен нулю, то, пошевелив их немного, найдём такие точки, для которых $\det \neq 0$ (по Теореме 28.1 это можно сделать). Зафиксируем точки $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N$. По Теореме 28.1 для любых значений F_{j+1z}, \dots, F_{Nz} решение M_1, \dots, M_N системы (28.1) существует и единственно.

Отсюда следует, что при добавлении к массам области T однородных шаров с центрами в точках $\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_N$ и с массами M_1, \dots, M_N проекции

сил притяжения в точках R_1, \dots, R_j не меняются, а проекции сил в точках R_{j+1}, \dots, R_N меняются на значения F_{j+1z}, \dots, F_{Nz} , которые произвольны.

Таким образом, если Задача 29.1 имеет решение, то таких решений бесконечно много. А это значит, что Задача 29.1 – некорректная математическая задача.

29.2. Продолжение гравитационного поля, известного в конечном числе точек, II

Задача 29.2. Гравитационное поле создаётся материальным телом, занимающим известную область T . Даны точки с радиус-векторами R_1, \dots, R_j , не принадлежащие T . В точках $R_i, i = \overline{1, n}$, заданы производные гравитационного потенциала по z порядка L_{i1}, \dots, L_{iK_i} . Требуется в точках $R_j, j = \overline{n+1, J}$, найти производные гравитационного потенциала по z порядка L_{j1}, \dots, L_{jK_j} . Предполагается, что $0 \leq L_{i1} < \dots < L_{iK_i}, i = \overline{1, J}, n < J$.

Поставленную задачу естественно решать следующим образом: найти массы, создающие гравитационное поле (т.е. решить обратную задачу теории потенциала – определить плотность тела T по гравитационным данным в точках R_1, \dots, R_n), потом вычислить нужные производные гравитационного потенциала в точках R_{n+1}, \dots, R_j .

Предположим, что решение Задачи 29.2 существует. Рассмотрим случай, когда $f_{il} = 0, i = \overline{1, n}, l = \overline{1, K_i}, N = \sum_{i=1}^J K_i$. Выберем в области T произвольные точки P_1, \dots, P_N . Если для этих точек определитель det системы (28.2) равен нулю, то, пошевелив их немного, найдём такие точки, для которых $det \neq 0$ (по Теореме 28.2 это можно сделать). Зафиксируем точки P_1, \dots, P_N . По Теореме 28.2 для любых значений $f_{il}, i = \overline{n+1, J}, l = \overline{1, K_i}$, решение M_1, \dots, M_N системы (28.2) существует и единственно.

Отсюда следует, что при добавлении к массам области T однородных шаров с центрами в точках P_1, \dots, P_N и с массами M_1, \dots, M_N значения производных гравитационного потенциала в точках R_1, \dots, R_n не меняются, а в точках R_{n+1}, \dots, R_j значения производных гравитационного потенциала меняются на величины $f_{il} (i = \overline{n+1, J}, l = \overline{1, K_i})$, которые произвольны.

Таким образом, если Задача 29.2 имеет решение, то таких решений бесконечно много. А это значит, что Задача 29.2 – некорректная математическая задача.

29.3. О некорректности Задач 29.1, 29.2

Пусть гравитационное поле Земли известно в конечном числе точек. Рассмотрим вопрос о том, можно ли по известным значениям найти гравитационное поле в других точках околоземного пространства. Из п. 29.1 и 29.2 следует, что этот вопрос не может быть решен в рамках теории потенциала ввиду некорректности обратной задачи теории потенциала: в любых других точках теоретические значения могут сколь угодно отличаться от реально существующих.

Результат 29.1. Если гравитационное поле тела T известно в конечном числе точек, то в любых других точках близость расчётного поля к реально существующему гравитационному полю не может быть обеспечена теорией потенциала.

Из §28 и из п. 29.1, 29.2 следует, что если гравитационное поле известно в конечном числе точек, то решение Задач 29.1, 29.2 всегда существует при условии, что масса тела T может принимать любые (в том числе и отрицательные) значения. При этом решение может сколь угодно отличаться от реально существующего гравитационного поля.

Замечание 29.1. Сделанные в п. 29.1, 29.2 предположения о существовании решения Задач 29.1, 29.2 вызваны тем, что Теоремы 28.1, 28.2 гарантируют существование решения обратной задачи теории потенциала, которое, вообще говоря, может не иметь физического смысла (массы могут оказаться отрицательными).

Замечание 29.2. Так как при добавлении шаров с массами M_1, \dots, M_N в п. 29.1, 29.2 суммарная плотность области T должна иметь физический смысл (т.е. должна лежать в определенном численном интервале), то значения M_1, \dots, M_N должны быть ограничены. Этого всегда можно добиться, уменьшая по модулю значения F_{kz}, f_{il} ($k = \overline{J+1, N}, i = \overline{n+1, J}, l = \overline{1, K_l}$), так как решение систем (28.1), (28.2) линейно зависит от правых частей. Получили, что значения F_{kz}, f_{il} ($k = \overline{J+1, N}, i = \overline{n+1, J}, l = \overline{1, K_l}$) ограничены. Но (подчеркнём) их границы могут быть достаточно большими, кроме того, они зависят от выбора точек P_1, \dots, P_N .

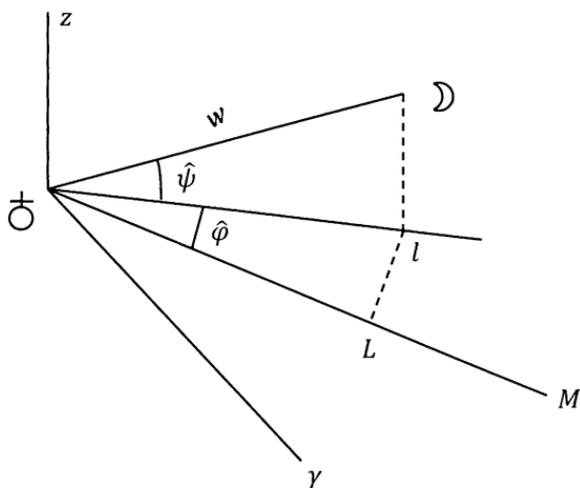
§30. Выводы главы 5

В §28 рассмотрена обратная задача теории потенциала. Показано, что если решение задачи существует, то таких решений бесконечное множество. Показано, что если гравитационное поле задано в конечном числе точек, то решение обратной задачи всегда существует, если разрешить массе принимать любые (в том числе, отрицательные) значения.

В §29 рассмотрена задача построения гравитационного поля по его значениям в конечном числе точек. Показано, что если решение задачи существует, то таких решений бесконечное множество. Показано, что решение задачи всегда существует, если разрешить массе принимать любые (в том числе, отрицательные) значения.

Замечание 30.1. Некорректность задач, рассмотренных в §28, §29, заключается в следующем: если решение задач существует, то решений бесконечно много. При решении таких некорректных задач можно искать пространство функций, в которых решение единственно, или можно выбрать метод, который приводит к функциям, удовлетворяющим с достаточной точностью уравнениям (и, значит, близким к одному из бесконечного числа точных решений). И то, и другое является дополнительным условием, позволяющим решить некорректную задачу. Но и то, и другое является исключительно теоретическим способом разрешения некорректности, находящимся в области чистой математики. На наш взгляд, при исследовании Земли, её плотности и её гравитационного поля этот способ нельзя считать достаточно обоснованным.

Замечание 30.2. Определению плотности и гравитационного поля Земли могут послужить другие теории о Земле. Совместное исследование гравитационного поля и других характеристик Земли, возможно, приблизит теорию к реальности [25].



Точное и совершенное познание движения Луны, на основании которого можно было бы составить астрономические таблицы, точнеешим образом согласующиеся с истиной, сопряжено с такими существенными и величайшими трудностями, что представляется превосходящим силы человеческого ума.

Леонард Эйлер
(15.4.1707 – 18.9.1783)

Глава 6. Собственное вращение Луны

§31. Построение математической модели

31.1. Исходные данные

Рассмотрим задачу о собственном вращении Луны в безмоментной постановке: Луна вращается вокруг своего центра масс как твёрдое тело. Главные центральные моменты инерции Луны равны [2]

$$I_x = 0,88836978 \cdot 10^{35} \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad (31.1)$$

$$I_y = 0,88800195 \cdot 10^{35} \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

$$I_z = 0,88781798 \cdot 10^{35} \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Главный центральный момент внешних сил, действующих на Луну, равен нулю. За начальные значения примем значения, соответствующие 10 марта 1990 г.:

$$\Psi^\circ = -0,8109, \quad \theta^\circ = -0,0269, \quad \Phi^\circ = 0,2443, \quad (31.2)$$

$$\Omega_x^\circ = -0,121 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}, \quad \Omega_y^\circ = 0,423 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}, \quad \Omega_z^\circ = 0,266 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}.$$

Здесь $\Psi^\circ, \theta^\circ, \Phi^\circ$ – начальные значения углов Эйлера Ψ, θ, Φ ; $\Omega_x^\circ, \Omega_y^\circ, \Omega_z^\circ$ – начальные значения проекций $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ угловой скорости Луны на главные центральные оси инерции.

Углы Эйлера изображены на Рис. 31.1. Плоскость $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ совпадает с плоскостью эклиптики. Вектор \mathbf{e}_1 направлен в точку весеннего равноденствия Υ . Оси x, y, z – главные центральные оси инерции Луны. Значения (31.2) получены по данным в [2].

31.2. Уравнения собственного вращения Луны

Задача о собственном вращении Луны в безмоментной постановке является задачей Эйлера – Пуансо о движении твёрдого тела вокруг неподвижной точки. Уравнения движения (уравнения Эйлера) имеют следующий вид [7]:

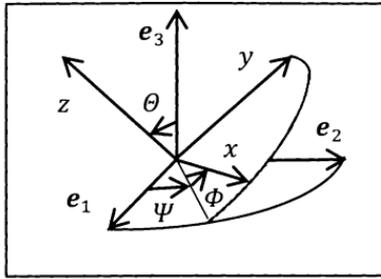


Рис. 31.1. Углы Эйлера

$$\frac{d\psi}{dT} = \frac{\Omega_x \sin \Phi + \Omega_y \cos \Phi}{\sin \theta}, \quad \frac{d\theta}{dT} = \Omega_x \cos \Phi - \Omega_y \sin \Phi, \quad (31.3)$$

$$\frac{d\Phi}{dT} = \Omega_z - \operatorname{ctg} \theta (\Omega_x \sin \Phi + \Omega_y \cos \Phi),$$

$$\frac{d\Omega_x}{dT} = \frac{l_y - l_z}{l_x} \Omega_y \Omega_z, \quad \frac{d\Omega_y}{dT} = \frac{l_z - l_x}{l_y} \Omega_x \Omega_z, \quad \frac{d\Omega_z}{dT} = \frac{l_x - l_y}{l_z} \Omega_x \Omega_y.$$

Здесь T – время.

Задача Эйлера – Пуансо (31.3) с заданными начальными значениями проинтегрирована с помощью эллиптических функций [7]. Рассмотрим другой способ решения задачи – решение с помощью асимптотических методов. Этот способ можно использовать и при учёте момента сил, действующих на Луну со стороны небесных тел.

31.3. Введение малого параметра

Перейдём в задаче (31.1)–(31.3) к безразмерным переменным $t, \psi, \theta, \varphi, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ по формулам

$$\Psi = \Psi_* \psi, \quad \theta = \theta_* \theta, \quad \Phi = \Phi_* \varphi, \quad (31.4)$$

$$\Omega_x = \Omega_{x*} \omega_x, \quad \Omega_y = \Omega_{y*} \omega_y, \quad \Omega_z = \Omega_{z*} \omega_z, \quad T = T_* t.$$

Здесь $\Psi_*, \theta_*, \Phi_*, \Omega_{x*}, \Omega_{y*}, \Omega_{z*}, T_*$ – характерные значения переменных $\Psi, \theta, \Phi, \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z, T$. Примем за характерное время интервал

$$T_* = 3 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 347,22 \text{ суток.}$$

За характерные значения остальных переменных примем округлённые и увеличенные в последней значащей цифре модули начальных значений:

$$\Psi_* = 0,82, \quad \Theta_* = 0,027, \quad \Phi_* = 0,25, \quad (31.5)$$

$$\Omega_{x*} = 0,13 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}, \quad \Omega_{y*} = 0,43 \cdot 10^{-9} \text{ с}^{-1}, \quad \Omega_{z*} = 0,27 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}.$$

В новых переменных задача (31.1)–(31.3) принимает вид:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{c_1 \omega_x \sin(\Phi_* \varphi) + c_2 \omega_y \cos(\Phi_* \varphi)}{\sin(\Theta_* \theta)}, \quad (31.6)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = c_3 \omega_x \cos(\Phi_* \varphi) - c_4 \omega_y \sin(\Phi_* \varphi),$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = c_5 \omega_z - \text{ctg}(\Theta_* \theta) [c_6 \omega_x \sin(\Phi_* \varphi) + c_7 \omega_y \cos(\Phi_* \varphi)],$$

$$\frac{d\omega_x}{dt} = c_8 \omega_y \omega_z, \quad \frac{d\omega_y}{dt} = -c_9 \omega_x \omega_z, \quad \frac{d\omega_z}{dt} = c_{10} \omega_x \omega_y,$$

$$\psi|_{t=0} = \psi^\circ, \quad \theta|_{t=0} = \theta^\circ, \quad \varphi|_{t=0} = \varphi^\circ,$$

$$\omega_x|_{t=0} = \omega_x^\circ, \quad \omega_y|_{t=0} = \omega_y^\circ, \quad \omega_z|_{t=0} = \omega_z^\circ.$$

Здесь приняты обозначения

$$c_1 = \frac{\Omega_{x*} T_*}{\Psi_*}, \quad c_2 = \frac{\Omega_{y*} T_*}{\Psi_*}, \quad c_3 = \frac{\Omega_{x*} T_*}{\Theta_*}, \quad c_4 = \frac{\Omega_{y*} T_*}{\Theta_*}, \quad (31.7)$$

$$c_5 = \frac{\Omega_{z*} T_*}{\Phi_*}, \quad c_6 = \frac{\Omega_{x*} T_*}{\Phi_*}, \quad c_7 = \frac{\Omega_{y*} T_*}{\Phi_*}, \quad c_8 = \frac{(I_y - I_z) \Omega_{y*} \Omega_{z*} T_*}{I_x \Omega_{x*}},$$

$$c_9 = \frac{(I_x - I_z) \Omega_{x*} \Omega_{z*} T_*}{I_y \Omega_{y*}}, \quad c_{10} = \frac{(I_x - I_y) \Omega_{x*} \Omega_{y*} T_*}{I_z \Omega_{z*}},$$

$$\psi^\circ = \frac{\Psi^\circ}{\Psi_*}, \quad \theta^\circ = \frac{\Theta^\circ}{\Theta_*}, \quad \varphi^\circ = \frac{\Phi^\circ}{\Phi_*},$$

$$\omega_x^\circ = \frac{\Omega_x^\circ}{\Omega_*}, \quad \omega_y^\circ = \frac{\Omega_y^\circ}{\Omega_*}, \quad \omega_z^\circ = \frac{\Omega_z^\circ}{\Omega_*}.$$

Введём в задачу (31.6) малый параметр. Примем за малый параметр число

$$\varepsilon = 0,1 \quad (31.8)$$

и нормализуем постоянные (31.7) по ε с коэффициентом нормализации $k = 1,01$. После нормализации постоянные становятся функциями малого параметра:

$$c_1 = c'_1\varepsilon, \quad c_2 = c'_2\varepsilon, \quad c_3 = c'_3\varepsilon^{-1}, \quad c_4 = c'_4, \quad c_5 = c'_5\varepsilon^{-3}, \quad (31.9)$$

$$c_6 = c'_6, \quad c_7 = c'_7\varepsilon, \quad c_8 = c'_8\varepsilon^2, \quad c_9 = c'_9, \quad c_{10} = c'_{10}\varepsilon^8,$$

$$\theta_* = \theta'_*\varepsilon, \quad \Phi_* = \Phi'_*, \quad \psi^\circ = \psi^{\circ'}, \quad \theta^\circ = \theta^{\circ'}, \quad \varphi^\circ = \varphi^{\circ'},$$

$$\omega_x^\circ = \omega_x^{\circ'}, \quad \omega_y^\circ = \omega_y^{\circ'}, \quad \omega_z^\circ = \omega_z^{\circ'}.$$

Параметры со штрихами рассматриваются как постоянные, не зависящие от t, ε .

Определение 31.1. Система уравнений (31.6), (31.9) называется *математической моделью собственного вращения Луны*.

Из (31.6), (31.9) следует, что θ, φ – быстрые переменные:

$$\frac{d\theta}{dt} \sim \varepsilon^{-1}, \quad \frac{d\varphi}{dt} \sim \varepsilon^{-3},$$

остальные переменные медленные.

Результат 31.1. Математическая модель собственного вращения Луны является сингулярно возмущённой задачей Коши.

Замечание 31.1. Из формул (31.7) следует, что задача о собственном вращении Луны является сингулярно возмущённой из-за большого характерного значения $T_* = 3 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 347,22$ суток. Если движение Луны рассматривать на небольшом интервале времени (принять за характерное значение $T_{*1} \approx 1,08$ суток), то предлагаемый метод введения малого параметра приводит к регулярно возмущённой задаче Коши, которая может быть решена методом малого параметра Пуанкаре (смотрите §39).

§32. Введение новых переменных

32.1. Формулы для переменных

В задаче (31.3) перейдём к новым переменным X_1, \dots, X_5 по формулам:

$$\psi = \psi^\circ - \frac{\Omega_x \cos \Phi - \Omega_y \sin \Phi}{\Omega_z^\circ \sin \theta} + \frac{\Omega_x^\circ \cos \Phi^\circ - \Omega_y^\circ \sin \Phi^\circ}{\Omega_z^\circ \sin \theta^\circ} + X_1, \quad (32.1)$$

$$\theta = \theta^\circ + \frac{\Omega_x^\circ}{\Omega_z^\circ} (\sin g_1 - \sin \Phi^\circ) + \frac{\Omega_y^\circ}{\Omega_z^\circ} (\cos g_1 - \cos \Phi^\circ) + X_2,$$

$$\Phi = g_1 + \frac{\text{ctg } \theta}{\Omega_z^\circ} (\Omega_x \cos \Phi - \Omega_y \sin \Phi) - \frac{\text{ctg } \theta^\circ}{\Omega_z^\circ} (\Omega_x^\circ \cos \Phi^\circ - \Omega_y^\circ \sin \Phi^\circ) + X_3,$$

$$\Omega_x = A \sqrt{\frac{l_y}{l_x - l_z}} \cos g_2, \quad \Omega_y = A \sqrt{\frac{l_x}{l_y - l_z}} \sin g_2, \quad \Omega_z = \Omega_z^\circ + X_5.$$

Здесь используются следующие функции и постоянные:

$$g_1 = \Phi^\circ + \Omega_z^\circ T, \quad g_2 = B - \sqrt{\frac{(l_x - l_z)(l_y - l_z)}{l_x l_y}} \Omega_z^\circ T + X_4, \quad (32.2)$$

$$\cos B = \frac{\Omega_x^\circ}{A} \sqrt{\frac{l_x - l_z}{l_y}}, \quad \sin B = \frac{\Omega_y^\circ}{A} \sqrt{\frac{l_y - l_z}{l_x}}, \quad A = \sqrt{\frac{l_x - l_z}{l_y} (\Omega_x^\circ)^2 + \frac{l_y - l_z}{l_x} (\Omega_y^\circ)^2}.$$

Число переменных уменьшилось с помощью первого интеграла

$$\frac{l_x - l_z}{l_y} \Omega_x^2 + \frac{l_y - l_z}{l_x} \Omega_y^2 = \text{const.}$$

Перейдём к безразмерным переменным x_1, \dots, x_5 по формулам

$$X_i = X_{i*} x_i, \quad X_{j*} = \varepsilon, \quad X_{5*} = \Omega_z^\circ \varepsilon^4, \quad i = \overline{1,5}, \quad j = \overline{1,4}. \quad (32.3)$$

32.2. Уравнения для x_1, \dots, x_5

В новых переменных уравнения вращения Луны имеют следующий вид:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} [(-a_1 \cos^2 g_2 + a_2 \sin^2 g_2) \cos(2\Phi) + \quad (32.4)$$

$$+ a_3 \sin(2g_2) \sin(2\Phi)] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\sin \theta} [a_4 \sin g_2 \cos \Phi + a_5 \cos g_2 \sin \Phi - \\
& \quad - x_5 (a_6 \cos g_2 \sin \Phi + a_7 \sin g_2 \cos \Phi)], \\
\frac{dx_2}{dt} &= a_8 (\cos g_2 \cos \Phi - \cos B \cos g_1) - a_9 (\sin g_2 \sin \Phi - \sin B \sin g_1), \\
\frac{dx_3}{dt} &= \frac{1}{\sin^2 \theta} [a_1 \cos^2 g_2 (\cos^2 \Phi - \cos^2 \theta \sin^2 \Phi) + \\
& \quad + a_2 \sin^2 g_2 (\sin^2 \Phi - \cos^2 \theta \cos^2 \Phi) - \\
& \quad - \frac{a_3}{2} \sin(2g_2) \sin(2\Phi) (1 + \cos^2 \theta)] - \\
& \quad - \operatorname{ctg} \theta (a_4 \sin g_2 \cos \Phi + a_5 \cos g_2 \sin \Phi) + a_{10} x_5 + \\
& \quad + x_5 \operatorname{ctg} \theta (a_6 \cos g_2 \sin \Phi + a_7 \sin g_2 \cos \Phi), \\
\frac{dx_4}{dt} &= -a_{11} x_5, \quad \frac{dx_5}{dt} = a_{12} \sin(2g_2), \quad x_i|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{1,5}.
\end{aligned}$$

Здесь используются функции

$$\begin{aligned}
g_1 &= \Phi^\circ + b_1 t, & g_2 &= B - b_2 t + \varepsilon x_4, & (32.5) \\
\theta &= \theta^\circ + \varepsilon x_2 + b_3 (\cos g_1 - \cos \Phi^\circ) + b_4 (\sin g_1 - \sin \Phi^\circ), \\
\Phi &= g_1 + \varepsilon x_3 + \operatorname{ctg} \theta (b_5 \cos g_2 \cos \Phi - b_6 \sin g_2 \sin \Phi) - \\
& \quad - \operatorname{ctg} \theta^\circ (b_5 \cos B \cos \Phi^\circ - b_6 \sin B \sin \Phi^\circ)
\end{aligned}$$

и постоянные

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{10A^2 I_y T_*}{\Omega_z^\circ (I_x - I_z)}, & a_2 &= \frac{10A^2 I_x T_*}{\Omega_z^\circ (I_y - I_z)}, & a_3 &= \frac{10A^2 T_*}{q_1 q_2 \Omega_z^\circ}, & (32.6) \\
a_4 &= 10AT_* q_2, & a_5 &= 10AT_* q_1, & a_6 &= \frac{AT_* (-I_x + I_y + I_z)}{10^3 I_y q_1}, \\
a_7 &= \frac{AT_* (I_x - I_y + I_z)}{10^3 I_x q_2}, & a_8 &= \frac{10 AT_*}{q_1}, & a_9 &= \frac{10 AT_*}{q_2}, \\
a_{10} &= \frac{\Omega_z^\circ T_*}{10^3}, & a_{11} &= \frac{\Omega_z^\circ T_* q_1 q_2}{10^3}, & a_{12} &= \frac{10^4 A^2 T_* (I_x - I_y)}{2 I_z \Omega_z^\circ q_1 q_2},
\end{aligned}$$

$$b_1 = \Omega_z^\circ T_*, \quad b_2 = \Omega_z^\circ T_* q_1 q_2, \quad b_3 = \frac{\Omega_y^\circ}{\Omega_z^\circ}, \quad b_4 = \frac{\Omega_x^\circ}{\Omega_z^\circ},$$

$$b_5 = \frac{A}{\Omega_z^\circ q_1}, \quad b_6 = \frac{A}{\Omega_z^\circ q_2}, \quad q_1 = \sqrt{\frac{l_x - l_z}{l_y}}, \quad q_2 = \sqrt{\frac{l_y - l_z}{l_x}}.$$

После нормализации по параметру ε из (31.8) с коэффициентом нормализации $k = 1,01$ постоянные в задаче (32.4)–(32.6) становятся функциями ε :

$$\Phi^\circ = \Phi^{\circ'}, \quad \theta^\circ = \theta^{\circ'} \varepsilon, \quad B = B' \varepsilon^{-1}, \quad a_i = a'_i \varepsilon^3, \quad a_j = a'_j \varepsilon^4, \quad (32.7)$$

$$a_k = a'_k, \quad a_{10} = a'_{10} \varepsilon, \quad b_1 = b'_1 \varepsilon^{-2}, \quad b_2 = b'_2 \varepsilon, \quad b_l = b'_l \varepsilon^3,$$

$$i = \overline{1,5}, \quad j = 6, 7, 11, 12; \quad k = 8, 9; \quad l = \overline{3,6}.$$

Правые части уравнений (32.4) пропорциональны положительным степеням ε :

$$\frac{dx_i}{dt} \sim \varepsilon, \quad \frac{dx_j}{dt} \sim \varepsilon^4, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = 4, 5.$$

Замечание 32.1. Выбор характерных значений (31.5) означает переход к рассмотрению класса движений в окрестности начальной точки (31.2). Далее оказывается, что такие движения описываются сингулярными уравнениями (31.6) и характер сингулярности таков, что в пространстве исходных переменных точка быстро выходит из окрестности начального положения. Однако рассмотрение выделенного значениями (31.5) класса движений оказывается не бесполезным, так как с помощью сингулярных уравнений (31.6) далее находится замена переменных (32.1), которая означает переход в пространстве исходных переменных к рассмотрению окрестности движущейся точки.

В пространстве новых переменных x_1, \dots, x_5 точка не покидает окрестности нуля на конечном интервале времени.

Замечание 32.2. Формулы перехода к новым переменным (32.1) получены с помощью интегрирования по частям правых частей уравнений (31.6). Например, из первого уравнения (31.6) следует:

$$\psi = \psi^\circ + \int_0^t \frac{c_1 \omega_x \sin(\Phi, \varphi) + c_2 \omega_y \cos(\Phi, \varphi)}{\sin(\theta, \theta)} dt = \quad (32.8)$$

$$= \psi^\circ - \frac{c_1 \omega_x \cos(\Phi, \varphi) - c_2 \omega_y \sin(\Phi, \varphi)}{\sin(\theta, \theta) \Phi_* (d\varphi/dt)} \Big|_0^t +$$

$$+ \int_0^t \left\{ \frac{c_1}{\Phi_*} \cos(\Phi_* \varphi) \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega_x}{\sin(\theta_* \theta) (d\varphi/dt)} \right] - \right. \\ \left. - \frac{c_2}{\Phi_*} \sin(\Phi_* \varphi) \frac{d}{dt} \left[\frac{\omega_y}{\sin(\theta_* \theta) (d\varphi/dt)} \right] \right\} dt.$$

Продифференцировав функции в силу уравнений (31.6), можно убедиться в малости (по модулю) интеграла при малых значениях $\varepsilon > 0$. Кроме того, из уравнений (31.6), (31.9) видно, что ω_z – медленно меняющаяся переменная, а главный член в уравнении для $d\varphi/dt$ – первый ($c_5 \omega_z$). Эти обстоятельства позволяют выделить в (32.8) быстро меняющуюся составляющую и получить формулу (32.1) для Ψ . В формуле учтено также, что новая переменная X_1 должна иметь нулевое начальное значение, чтобы можно было использовать теоремы из §41.

Аналогично получены формулы (32.1) для других переменных. Отметим, что в (32.8) фактически интегрируются по частям произведения быстро осциллирующих гармонических функций на медленно меняющиеся функции.

§33. Алгоритм построения решения

33.1. О почти регулярной задаче Коши

Утверждение 33.1. *Задача (32.4), (32.5), (32.7) является почти регулярной задачей Коши вида*

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t, \varepsilon, f(t, \varepsilon)), \quad x|_{t=0} = 0, \quad (33.1)$$

$$x = (x_1, \dots, x_5), \quad f = (f_1, \dots, f_4),$$

$$f_1 = \cos g_1, \quad f_2 = \sin g_1, \quad f_3 = \cos B, \quad f_4 = \sin B,$$

$$g_1 = \Phi^{\circ'} + b'_1 \varepsilon^{-2} t, \quad B = B' \varepsilon^{-1}.$$

(33.1) – компактная запись задачи (32.4), (32.5), (32.7). В уравнениях (32.4) переменные Φ, g_2 являются аргументами косинусов и синусов. Из (32.5), (33.1) следуют формулы

$$\cos \Phi = f_1 \cos \Delta\Phi - f_2 \sin \Delta\Phi, \quad (33.2)$$

$$\sin \Phi = f_2 \cos \Delta\Phi + f_1 \sin \Delta\Phi,$$

$$\cos g_2 = f_3 \cos(-b_2 t + \varepsilon x_4) - f_4 \sin(-b_2 t + \varepsilon x_4),$$

$$\sin g_2 = f_4 \cos(-b_2 t + \varepsilon x_4) + f_3 \sin(-b_2 t + \varepsilon x_4),$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = \varepsilon x_3 + \operatorname{ctg} \theta (b_5 \cos g_2 \cos \Phi - b_6 \sin g_2 \sin \Phi) - \\ - \operatorname{ctg} \theta^\circ (b_5 f_3 \cos \Phi^\circ - b_6 f_4 \sin \Phi^\circ) \end{aligned}$$

Формулы для $\cos \Phi$, $\sin \Phi$ являются, на самом деле, уравнениями для $\cos \Phi$, $\sin \Phi$. Постоянные величины в уравнениях (32.4) нормализованы по малому параметру ε . Параметры со штрихами рассматриваются как параметры, не зависящие от t , ε . Утверждение 33.1 следует из §45, где доказана гладкость функции $F(x, t, \varepsilon, f)$ на множестве

$$\|x\| \leq \delta, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}, \quad |\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}, \quad f \in D_f, \quad (33.3)$$

$$x \in \mathbf{C}^5, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon \in \mathbf{C},$$

$$D_f = \{f: f_i^2 + f_{i+1}^2 = 1; i = 1, 3\} \subset \mathbf{R}^4$$

при некоторых значениях $\delta > 0$, $\bar{t} \geq 1$, $\bar{\varepsilon} > 0,1$.

Результат 33.1. Математическая модель собственного вращения Луны эквивалентна почти регулярной задаче Коши (32.4), (32.5), (32.7) (далее для краткости будем называть её задачей (32.4)).

33.2. Построение решения

Для построения решения задачи (33.1) рассматривается вспомогательная задача

$$\frac{dy}{dt} = F(y, t, \varepsilon, f(t, \mu)), \quad y|_{t=0} = 0.$$

Решение строится в виде степенного ряда

$$y(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{K=0}^{\infty} y^{(K)}(t, \mu) \varepsilon^K.$$

Решение почти регулярной задачи Коши (33.1) имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{K=0}^{\infty} y^{(K)}(t, \varepsilon) \varepsilon^K. \quad (33.4)$$

Задача (33.1) удовлетворяет условиям Теорем 41.1, 41.3 при некоторых значениях $\delta > 0$, $\bar{t} \geq 1$, $\bar{\varepsilon} > 0,1$ и любом $n \geq 0$. Это следует из Результата 45.1. Однако постоянная ε_* в Теоремах 41.1, 41.3 не определена, поэтому на основании этих теорем нельзя утверждать о существовании решения задачи (33.1) при $\varepsilon = 0,1$.

Задача (33.1) удовлетворяет условиям Теоремы 41.2 при некоторых значениях $\delta > 0$, $\bar{t} \geq 1$, $\bar{\varepsilon} > 0,1$ (смотрите Результат 45.1). По этой теореме при $\varepsilon = 0,1$ существует такая постоянная t_* , $t_* > 0$, что на отрезке $0 \leq t \leq t_*$: 1) решение задачи (33.1) существует и единственно, 2) ряд (33.4) сходится равномерно к решению задачи (33.1). Переходя к размерным переменным, получаем следующий результат.

Результат 33.2. Решение задачи о собственном вращении Луны существует и единственно на ненулевом отрезке $0 \leq T \leq \bar{T}$. Решение описывается формулами (32.1), (32.3), где вектор $x = (x_i)$ представим в виде равномерно сходящегося ряда (33.4).

§34. Асимптотическое решение

34.1 Решение для почти регулярных переменных

Применяя к задаче (32.4) алгоритм построения решения, изложенный в §41, получим следующие формулы:

$$x_1 = O(\varepsilon^2), \quad x_2 = O(\varepsilon^3), \quad x_3 = O(\varepsilon^2), \quad (34.1)$$

$$x_4 = -\frac{1}{2} a'_{11} a'_{12} \varepsilon^8 \sin(2B) t^2 + O(\varepsilon^9),$$

$$x_5 = a'_{12} \varepsilon^4 \sin(2B) t + O(\varepsilon^5).$$

В §46 получена численная оценка интервала существования решения (34.1):

Результат 34.1. Решение задачи (32.4) существует, по крайней мере, на отрезке

$$0 \leq t \leq 1,397.$$

34.2. Решение для исходных переменных

Подставляя выражения (34.1) в (32.1), (32.3) и выделяя в формулах главные члены, получим асимптотическое решение для размерных переменных:

$$\Psi = \tilde{\Psi} + O(\varepsilon^3), \quad \theta = \tilde{\theta} + O(\varepsilon^4), \quad \Phi = \tilde{\Phi} + O(\varepsilon^3), \quad (34.2)$$

$$\Omega_x = \tilde{\Omega}_x + \Omega_z^\circ O(\varepsilon^{12}), \quad \Omega_y = \tilde{\Omega}_y + \Omega_z^\circ O(\varepsilon^{12}), \quad \Omega_z = \tilde{\Omega}_z + \Omega_z^\circ O(\varepsilon^9).$$

Здесь

$$\tilde{\Psi} = \Psi^\circ - \frac{\Omega_x^\circ}{\theta^\circ \Omega_z^\circ} (\cos g_1 - \cos \Phi^\circ) + \frac{\Omega_y^\circ}{\theta^\circ \Omega_z^\circ} (\sin g_1 - \sin \Phi^\circ), \quad (34.3)$$

$$\tilde{\theta} = \theta^\circ + \frac{\Omega_x^\circ}{\Omega_z^\circ} (\sin g_1 - \sin \Phi^\circ) + \frac{\Omega_y^\circ}{\Omega_z^\circ} (\cos g_1 - \cos \Phi^\circ),$$

$$\tilde{\Phi} = g_1 + \frac{\Omega_x^\circ}{\theta^\circ \Omega_z^\circ} (\cos g_1 - \cos \Phi^\circ) - \frac{\Omega_y^\circ}{\theta^\circ \Omega_z^\circ} (\sin g_1 - \sin \Phi^\circ),$$

$$\tilde{\Omega}_x = \frac{\Omega_x^\circ}{\cos B} \cos \tilde{g}_2, \quad \tilde{\Omega}_y = \frac{\Omega_y^\circ}{\sin B} \sin \tilde{g}_2, \quad \tilde{\Omega}_z = \Omega_z^\circ + \frac{(I_x - I_y) \Omega_x^\circ \Omega_y^\circ}{I_z} T,$$

$$g_1 = \Phi^\circ + \Omega_z^\circ T, \quad \tilde{g}_2 = B - \sqrt{\frac{(I_x - I_z)(I_x - I_z)}{I_x I_y}} \Omega_z^\circ T,$$

$$\cos B = \frac{\Omega_x^\circ}{A} \sqrt{\frac{I_x - I_z}{I_y}}, \quad \sin B = \frac{\Omega_y^\circ}{A} \sqrt{\frac{I_y - I_z}{I_x}},$$

$$A = \sqrt{\frac{I_x - I_z}{I_y} (\Omega_x^\circ)^2 + \frac{I_y - I_z}{I_x} (\Omega_y^\circ)^2}.$$

Численные оценки точности решения (34.2), (34.3) получены в §46:

Результат 34.2. Решение задачи (31.1)–(31.3) о собственном вращении Луны существует, по крайней мере, на отрезке

$$0 \leq T \leq 485 \text{ суток.}$$

Результат 34.3. На отрезке $0 \leq T \leq 347$ суток справедливы следующие неравенства для углов Эйлера и проекций угловой скорости Луны:

$$\begin{aligned} |\Psi - \tilde{\Psi}| &< 0,0449, & |\theta - \tilde{\theta}| &< 0,0039, \\ |\Phi - \tilde{\Phi}| &< 0,0450, & |\Omega_x - \tilde{\Omega}_x| &< 0,885 \cdot 10^{-19} \text{ с}^{-1}, \\ |\Omega_y - \tilde{\Omega}_y| &< 0,154 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}, & |\Omega_z - \tilde{\Omega}_z| &< 0,155 \cdot 10^{-13} \text{ с}^{-1}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Omega}_x$, $\tilde{\Omega}_y$, $\tilde{\Omega}_z$ – функции (34.3).

Замечание 34.1. Формулы (34.2) справедливы для значений (31.1), (31.2).

Замечание 34.2. Известно, что решение задачи Эйлера – Пуансо существует при $T \geq 0$ [7]. Поэтому Результат 34.2 нужно рассматривать как демонстрацию возможностей предложенного метода решения.

§35. Выводы главы 6

В главе 6 рассмотрена задача о собственном вращении Луны в приближённой физической постановке, когда не учитывается момент сил, действующих на Луну со стороны небесных тел. В такой постановке задача о вращении Луны является задачей Эйлера – Пуансо о вращении твёрдого тела с неподвижным центром масс. Это известная задача, проинтегрированная с помощью эллиптических функций [7]. В главе 6 задача решается с помощью асимптотических методов. Этот способ может быть использован и при учёте момента сил, действующих на Луну со стороны небесных тел.

В §31 построена математическая модель собственного вращения Луны в виде сингулярно возмущённой задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В §32 уравнения вращения Луны приведены к почти регулярной задаче Коши. В §33 дан метод построения решения в виде ряда, равномерно сходящегося к точному решению на некотором ненулевом интервале времени. В §34 построено приближённое решение задачи и дана численная оценка точности на интервале времени 347 суток.

Все любящие анализ с удовольствием убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа.



озеф Луи Лагранж
(25.01.1736 – 10.4.1813)

Глава 7. От физики к математике

§36. Введение малого параметра

Асимптотические методы решения предполагают, что в задаче есть малый параметр в явном виде. В уравнения, описывающие физический процесс, можно ввести малый параметр не единственным образом [19]. Здесь, по-видимому, существует только одно правило: асимптотическое решение задачи, полученное в результате введения малого параметра, должно оказаться близким к точному решению задачи. В настоящем параграфе предлагается один из возможных способов введения малого параметра.

36.1. Исходные уравнения

Пусть задача описывается уравнениями

$$F_i(X_1, \dots, X_n, A_1, \dots, A_m) = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (36.1)$$

где X_1, \dots, X_n – размерные переменные (аргументы, искомые функции и числа, например: координаты, скорости, время и т.д.); A_1, \dots, A_m – размерные параметры (известные размерные числа, например: масса, длина и т.д.).

36.2. Нормализация размерных переменных

Перейдём от переменных X_1, \dots, X_n к безразмерным переменным x_1, \dots, x_n по формулам [19]

$$X_j = X_{j*} x_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (36.2)$$

где X_{1*}, \dots, X_{n*} – характерные значения размерных переменных (известные размерные числа).

Выбор характерных значений – наименее формализованная часть предлагаемой процедуры. Вообще говоря, предлагается выбирать X_{1*}, \dots, X_{n*} так, чтобы безразмерные переменные x_1, \dots, x_n по модулю не превышали единицы [19].

После подстановки формул (36.2) в (36.1) получаем уравнения, содержащие безразмерные переменные и размерные параметры:

$$F'_i(x_1, \dots, x_n, A_1, \dots, A_m, X_{1*}, \dots, X_{n*}) = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (36.3)$$

36.3. Переход к безразмерным параметрам

Применим к уравнениям (36.3) следующую теорему.

Теорема 36.1 (π -теорема [10]). *Если имеется соотношение между K размерными величинами вида*

$$F(\Pi_1, \dots, \Pi_K) = 0,$$

то можно найти эквивалентное соотношение между k безразмерными величинами

$$f(\pi_1, \dots, \pi_k) = 0,$$

где $k = K - l$, l – наибольшее число параметров из множества (Π_1, \dots, Π_K) с независимой размерностью.

Уравнения (36.3) содержат размерные параметры $A_1, \dots, A_m, X_{1*}, \dots, X_{n*}$. Пусть l из них имеют независимые размерности. Тогда по π -теореме 36.1 уравнения (36.3) можно заменить эквивалентными:

$$F''_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_k) = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (36.4)$$

Здесь a_1, \dots, a_k – безразмерные параметры (числа), которые выражаются через $A_1, \dots, A_m, X_{1*}, \dots, X_{n*}$, $k = m + n - l$.

36.4. Нормализация безразмерных параметров

Определение 36.1. Число $a \neq 0$ называется *нормализованным по числу $\varepsilon > 0$ с коэффициентом нормализации $b_* > 0$* , если оно представлено в виде

$$a = a' \varepsilon^n, \quad (36.5)$$

где n – целое число, $b_* \varepsilon < |a'| \leq b_*$.

Для любых значений $a \neq 0$, $\varepsilon > 0$, $b_* > 0$ представление (36.5) существует и единственно.

Выберем за малый параметр ε число из интервала $(0,1)$. Выберем коэффициент нормализации b_* . Нормализуем параметры a_1, \dots, a_k в (36.4) по ε :

$$a_1 = a'_1 \varepsilon^{n_1}, \quad \dots, \quad a_k = a'_k \varepsilon^{n_k}.$$

Тогда уравнения (36.4) примут вид

$$F_i''(x_1, \dots, x_n, a'_1 \varepsilon^{n_1}, \dots, a'_k \varepsilon^{n_k}) = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (36.6)$$

где a'_1, \dots, a'_k рассматриваются как параметры, не зависящие от $x_1, \dots, x_n, \varepsilon$. Переобозначим уравнения (36.6):

$$f_i(x_1, \dots, x_n, \varepsilon) = 0, \quad i = \overline{1, N}.$$

Получили задачу с малым параметром ε и безразмерными переменными x_1, \dots, x_n .

Замечание 36.1. Предложенный метод введения малого параметра использован в главах 1, 2, 6.

Замечание 36.2. Решение любой задачи целесообразно начинать с введения малого параметра. В уравнениях с малым параметром выделяются старшие по малому параметру члены. По упрощенной задаче находится метод решения (это легче, чем искать метод по полным уравнениям). Найденный метод применяется к полным уравнениям. Метод может быть как асимптотическим, так и численным.

§37. Вычисление погрешностей функций

Бесполезно требовать от вычислений большей точности, чем от наблюдений, но нельзя от вычислений требовать и меньшей точности.

А. Пуанкаре

37.1. Погрешности физических параметров

Представим параметры из §1 в следующем виде:

$$G = \langle G \rangle \pm \Delta(G), \quad M_0 = \langle M_0 \rangle \pm \Delta(M_0), \quad (37.1)$$

$$\frac{M_0}{M_k} = \langle \frac{M_0}{M_k} \rangle \pm \Delta \left(\frac{M_0}{M_k} \right), \quad k = \overline{1,9}; \quad \frac{M_{10}}{M_3} = \langle \frac{M_{10}}{M_3} \rangle \pm \Delta \left(\frac{M_{10}}{M_3} \right),$$

$$R_{kj}^\circ = \langle R_{kj}^\circ \rangle \pm \Delta(R_{kj}^\circ), \quad V_{kj}^\circ = \langle V_{kj}^\circ \rangle \pm \Delta(V_{kj}^\circ), \quad k = \overline{1,10}, \quad j = \overline{1,3}.$$

Здесь $\langle \quad \rangle$ – среднее значение параметра, $\Delta(\quad)$ – погрешность параметра.

Определение 37.1. Средним значением параметра в (37.1) называется численное значение этого параметра, данное в (1.1) или в Табл. 1.1, 1.2.

В §1 средние значения обозначены буквами без угловых скобок. Примем погрешности параметров равными следующим значениям:

$$\Delta(G) = 5 \cdot 10^{-15} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ с}^{-2}, \quad \Delta(M_0) = 5 \cdot 10^{25} \text{ кг}, \quad (37.2)$$

$$\Delta \left(\frac{M_0}{M_k} \right) = 0,5, \quad k = 1,4,7,8,9; \quad \Delta \left(\frac{M_0}{M_k} \right) = 0,05, \quad k = 2,3,6;$$

$$\Delta \left(\frac{M_0}{M_5} \right) = 5 \cdot 10^{-4}, \quad \Delta \left(\frac{M_{10}}{M_3} \right) = 5 \cdot 10^{-9},$$

$$\Delta(R_{kj}^\circ) = 5 \cdot 10^{-6} A, \quad \Delta(V_{kj}^\circ) = 5 \cdot 10^{-7} A/D, \quad k = \overline{1,9}, \quad j = \overline{1,3};$$

$$\Delta(R_{10j}^\circ) = 5 \cdot 10^{-6} a_e, \quad \Delta(V_{10j}^\circ) = 5 \cdot 10^{-7} a_e/D, \quad j = \overline{1,3}.$$

Значения астрономической единицы длины A , экваториального радиуса Земли a_e , суток D в формулах (1.1) будем рассматривать как точные значения (погрешности их равны нулю).

37.2. Погрешности функций

Пусть

$$A = f(B, C, \dots, Q), \quad B = \langle B \rangle \pm \Delta(B),$$

$$C = \langle C \rangle \pm \Delta(C), \dots, \quad Q = \langle Q \rangle \pm \Delta(Q).$$

Погрешность функции A вычисляется по следующим формулам [28]:

$$A = \langle A \rangle \pm \Delta(A), \quad \langle A \rangle = f(\langle B \rangle, \langle C \rangle, \dots, \langle Q \rangle), \quad (37.3)$$

$$\Delta(A) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial B} \right)^2 \Delta^2(B) + \left(\frac{\partial f}{\partial C} \right)^2 \Delta^2(C) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial Q} \right)^2 \Delta^2(Q)}.$$

Значения производных $\frac{\partial f}{\partial B}$, $\frac{\partial f}{\partial C}$, ..., $\frac{\partial f}{\partial Q}$ вычисляются в точке $((B), (C), \dots, (Q))$.

В §5 получено асимптотическое решение лунной математической модели Солнечной системы и найдены погрешности функций, описывающих радиус-векторы планет и Луны. Численные значения погрешностей даны в Табл. 5.1.

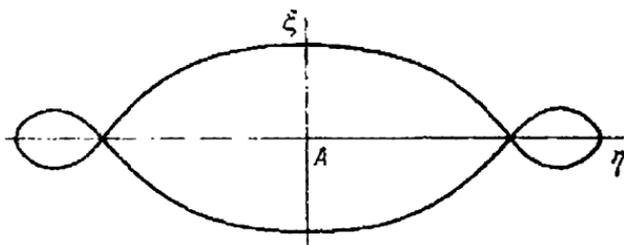
В §11 получено асимптотическое решение земной математической модели Солнечной системы и найдены погрешности функций, описывающих радиус-векторы планет и Луны. Численные значения погрешностей даны в Табл. 11.1, 12.1.

Погрешности исходных параметров приняты равными значениям (37.2). Погрешности функций вычислены по формуле (37.3).

§ 38. Выводы главы 7

В §36 дан алгоритм введения малого параметра в физическую задачу.

В §37 дан алгоритм вычисления погрешности функции по погрешностям аргументов. Алгоритм использован в главах 1, 2 для вычисления погрешности приближённого решения лунной и земной моделей Солнечной системы.



Конечная цель небесной механики состоит в разрешении великого вопроса, может ли закон Ньютона, и только он один, объяснить все астрономические явления.



юль Анри Пуанкаре
(29.4.1854 – 17.7.1912)

Глава 8. Определения, теоремы, вычисления

§39. Регулярно возмущённая задача Коши

39.1. Определения

Рассмотрим задачу

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t, \varepsilon), \quad x(0, \varepsilon) = 0. \quad (39.1)$$

Здесь x, F, x° – N -мерные векторы, ε – малый параметр, t – независимая переменная (время).

Введём обозначения: $D_x \subset \mathbf{R}^N$ – окрестность точки $x = 0$; $\delta, \bar{t}, \bar{\varepsilon}$ – положительные числа.

Определение 39.1. Задача (39.1) называется *регулярно возмущённой задачей Коши*, если: 1) $F(x, t, \varepsilon)$ – гладкая функция на прямом произведении окрестности D_x и отрезков $0 \leq t \leq \bar{t}$, $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$.

Определение 39.2. *Метод малого параметра Пуанкаре* заключается в следующем:

- решение $x = x(t, \varepsilon)$ представляется в виде ряда

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{K=0}^{\infty} x^{(K)}(t) \varepsilon^K; \quad (39.2)$$

- выражение (39.2) подставляется в (39.1);
- правая и левая часть уравнений (39.1) разлагаются в ряд по степеням ε ;
- в полученных равенствах приравниваются коэффициенты при равных степенях ε .

В результате получают уравнения для коэффициентов ряда (39.2).

Определение 39.3. Ряд (39.2) называется *рядом Пуанкаре*.

Положим в (39.1) $\varepsilon = 0$. Получим

$$\frac{dx^{(0)}}{dt} = F(x^{(0)}, t, 0), \quad x^{(0)}(0) = 0. \quad (39.3)$$

Определение 39.4. Задача (39.3) называется *вырожденной задачей*.

Коэффициент $x^{(K)}(t)$ при любом $K \geq 0$ является решением задачи

$$\frac{dx^{(K)}}{dt} = \left[F \left(\begin{array}{c} K \\ \Sigma \\ i=0 \end{array} x^{(i)}(t) \varepsilon^i, t, \varepsilon \right) \right]^{(K)}, \quad x^{(K)}(0) = 0. \quad (39.4)$$

Скобки с верхним индексом (K) обозначают коэффициент при ε^K в разложении функции, стоящей в скобках, в ряд по степеням параметра ε .

Запишем уравнения (39.4) для $K \geq 1$ в виде

$$\frac{dx^{(K)}}{dt} = A(t) x^{(K)} + F^{(K)}(t), \quad x^{(K)}(0) = 0. \quad (39.5)$$

Здесь

$$A(t) = F_x(x^{(0)}(t), t, 0),$$

$$F^{(K)}(t) = \left[F \left(\begin{array}{c} K-1 \\ \Sigma \\ i=0 \end{array} x^{(i)}(t) \varepsilon^i, t, \varepsilon \right) \right]^{(K)},$$

F_x – матрица Якоби.

Определение 39.5. *Матрицей Якоби* называется матрица

$$F_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_N}{\partial x_N} \end{pmatrix}.$$

Определение 39.6. Уравнением в вариациях задачи (39.1) относительно решения $x^{(0)}(t)$ называется уравнение

$$\frac{dq}{dt} = A(t) q. \quad (39.6)$$

Определение 39.7. *Матрицей Коши* $U(t, s)$ задачи (39.1) называется фундаментальная матрица уравнения в вариациях (39.6), равная единичной при $t = s$: $U(s, s) = E$.

Задача (39.5) линейна. Её решение имеет вид

$$x^{(K)}(t) = \int_0^t U(t,s) \cdot F^{(K)}(s) ds. \quad (39.7)$$

Таким образом, для получения решения задачи (39.1) в виде (39.2) необходимо знать функцию $x^{(0)}(t)$ и матрицу $U(t,s)$. Тогда коэффициенты ряда (39.2) вычисляются последовательно по формулам (39.7) для $K = 1, 2, \dots$

Определение 39.8. *Нормой вектора x называется величина*

$$\|x\| = \max_{i = \overline{1, N}} |x_i|, \quad x = (x_1, \dots, x_N).$$

Определение 39.9. *Нормой матрицы A размера $N \times M$ называется величина*

$$\|A\| = \max_{i = \overline{1, N}} \sum_{j = 1}^M |A_{ij}|, \quad A = (A_{ij}).$$

Определение 39.10. *Функция $X(t, \varepsilon)$ называется асимптотическим приближением функции $x(t, \varepsilon)$ на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если найдётся такое значение $\varepsilon_* > 0$, что $x(t, \varepsilon)$, $X(t, \varepsilon)$ существуют при $0 \leq t \leq \bar{t}$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$,*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \sup_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|x(t, \varepsilon) - X(t, \varepsilon)\| = 0.$$

Если при этом

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{\sup_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|x(t, \varepsilon) - X(t, \varepsilon)\|}{\psi_1(\varepsilon)} = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{\sup_{0 \leq t \leq \bar{t}} \|x(t, \varepsilon) - X(t, \varepsilon)\|}{\psi_2(\varepsilon)} = \text{const},$$

то $X(t, \varepsilon)$ называется асимптотическим приближением функции $x(t, \varepsilon)$ на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ с точностью порядка $o(\psi_1(\varepsilon))$, $O(\psi_2(\varepsilon))$.

Обозначение:

$$x(t, \varepsilon) = X(t, \varepsilon) + o(\psi_1(\varepsilon)),$$

$$x(t, \varepsilon) = X(t, \varepsilon) + O(\psi_2(\varepsilon)), \quad 0 \leq t \leq \bar{t}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Определение 39.11. Ряд $\sum_{K=0}^{\infty} x^{(K)}(t, \varepsilon)$ называется *асимптотическим рядом* (асимптотическим разложением, асимптотикой) функции $x(t, \varepsilon)$ на отрезке $0 \leq t \leq \bar{t}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, если для любого $n \geq 0$

$$x(t, \varepsilon) = X_n(t, \varepsilon) + o(\psi_n(\varepsilon)), \quad 0 \leq t \leq \bar{t}, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\psi_{n+1}(\varepsilon)}{\psi_n(\varepsilon)} = 0, \quad X_n(t, \varepsilon) = \sum_{K=0}^n x^{(K)}(t, \varepsilon).$$

Обозначение:

$$x(t, \varepsilon) \sim \sum_{K=0}^{\infty} x^{(K)}(t, \varepsilon), \quad 0 \leq t \leq \bar{t}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Определение 39.12. Функция $X_n(t, \varepsilon)$ называется *n-м приближением* функции $x(t, \varepsilon)$.

Определение 39.13. Разность $u(t, \varepsilon) = x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)$ называется *остаточным членом асимптотического разложения функции $x(t, \varepsilon)$ n-го порядка*.

Определение 39.14. Асимптотическое приближение решения задачи (39.1) называется *асимптотическим решением*.

39.2. Теоремы

Условие 39.1. $F(0, t, 0) = 0$ при $0 \leq t \leq \bar{t}$.

Условие 39.2. На множестве $x \in \mathbf{C}^N$, $\|x\| \leq \delta$, $0 \leq t \leq \bar{t}$, $\varepsilon \in \mathbf{C}$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ функция $F(x, t, \varepsilon)$ непрерывна по совокупности аргументов, аналитична по x , ε .

Условие 39.3. На множестве $x \in \mathbf{R}^N$, $\|x\| \leq \delta$, $0 \leq t \leq \bar{t}$, $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ функция $F(x, t, \varepsilon)$ имеет непрерывные по x , t , ε частные производные до порядка n_* включительно по ε и по компонентам вектора x ,

$$n_* = \max(2, n + 1).$$

Здесь \mathbf{C}^N – N -мерное векторное пространство комплексных чисел, $\mathbf{C}^1 = \mathbf{C}$.

Теорема 39.1 (Пуанкаре [4]). Пусть выполняются Условия 39.1, 39.2. Тогда найдётся постоянная $\varepsilon_* > 0$, не зависящая от t, ε и такая, что на множестве $0 \leq t \leq \bar{t}, |\varepsilon| \leq \varepsilon_*$: 1) решение задачи (39.1) существует и единственно, 2) ряд (39.2) сходится равномерно к решению задачи (39.1).

Теорема 39.2 [9]. Пусть выполняются Условия 39.1, 39.2. Тогда для любого $\varepsilon, 0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, найдётся такая постоянная $t_* = t_*(\varepsilon)$, что $0 < t_* \leq \bar{t}$ и на множестве $0 \leq t \leq t_*$: 1) решение задачи (39.1) существует и единственно, 2) ряд (39.2) сходится равномерно к решению задачи (39.1).

Теорема 39.3 [4]. Пусть выполняются Условия 39.1, 39.3. Тогда найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0, C_*, C_{**}$, не зависящие от t, ε и такие, что при $0 \leq t \leq \bar{t}, 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*$ решение задачи (39.1) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам

$$\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leq C_* t \varepsilon^{n+1}, \quad \|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leq C_{**} \varepsilon^{n+1}.$$

Здесь $X_n(t, \varepsilon)$ – частичная сумма ряда (39.2),

$$X_n(t, \varepsilon) = \sum_{K=0}^n x^{(K)}(t) \varepsilon^K. \quad (39.8)$$

Из Теоремы 39.3 следует, что функция $X_n(t, \varepsilon)$ является асимптотическим решением задачи (39.1) на отрезке:

$$x(t, \varepsilon) = X_n(t, \varepsilon) + o(\varepsilon^n), \quad 0 \leq t \leq \bar{t}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Теорема 39.4 (Пуанкаре [4]). Если общее решение $g(t, C)$ дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) \quad (39.9)$$

известно (C – вектор произвольных постоянных), то матрица Коши уравнения в вариациях

$$\frac{dq}{dt} = F_x(\tilde{x}(t), t) q$$

имеет вид

$$U(t, s) = U_*(t) \cdot U_*^{-1}(s), \quad U_*(t) = \left(\frac{\partial g}{\partial c_1} \dots \frac{\partial g}{\partial c_N} \right) \Big|_{C=C}.$$

Здесь $\tilde{x}(t)$ – частное решение задачи (39.8), \tilde{C} – значение, определяющее это частное решение: $g(t, \tilde{C}) = \tilde{x}(t)$.

39.3. Оценка остаточного члена

Рассмотрим регулярно возмущённую задачу Коши (39.1) и её асимптотическое решение (39.8). Из (39.1), (39.8) найдём уравнения для остаточного члена $u = x - X_n(t, \varepsilon)$ и выделим в них линейную часть:

$$\frac{du}{dt} = A(t, \varepsilon) u + G(u, t, \varepsilon), \quad u|_{t=0} = 0. \quad (39.10)$$

Условие 39.4. Матрица $A(t, \varepsilon)$ непрерывна по t при $0 \leq t \leq t_*(\varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$.

Условие 39.5. При $\|u\| \leq \delta$, $\|\tilde{u}\| \leq \delta$, $0 \leq t \leq t_*(\varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ функция $G(u, t, \varepsilon)$ непрерывна по u, t и удовлетворяет неравенству

$$\|G(u, t, \varepsilon) - G(\tilde{u}, t, \varepsilon)\| \leq [L_1(t, \varepsilon) + L_2(t, \varepsilon)(\|u\| + \|\tilde{u}\|)] \cdot \|u - \tilde{u}\|,$$

где $L_1(t, \varepsilon) \geq 0$, $L_2(t, \varepsilon) \geq 0$ непрерывны по t .

Обозначим

$$a(t, \varepsilon) = \max_{0 \leq q \leq t} \left\| \int_0^q U(q, s, \varepsilon) \cdot G(0, s, \varepsilon) ds \right\|,$$

$$b(t, \varepsilon) = \max_{0 \leq q \leq t} \int_0^q \|U(q, s, \varepsilon)\| \cdot L_1(s, \varepsilon) ds,$$

$$c(t, \varepsilon) = \max_{0 \leq q \leq t} \int_0^q \|U(q, s, \varepsilon)\| \cdot L_2(s, \varepsilon) ds.$$

Здесь $U(t, s, \varepsilon)$ – матрица Коши уравнения $\frac{d\zeta}{dt} = A(t, \varepsilon) \zeta$.

Теорема 39.5 [13]. Пусть при $\delta > 0$ и $\bar{\varepsilon} > 0$ выполняются Условия 39.4, 39.5. Тогда решение задачи (39.10) существует, единственно и удовлетворяет неравенству

$$\|u(t, \varepsilon)\| \leq \frac{2a(t, \varepsilon)}{p(t, \varepsilon) + \sqrt{r(t, \varepsilon)}} \quad (39.11)$$

при всех значениях t, ε из множества

$$p(t, \varepsilon) \equiv 1 - b(t, \varepsilon) > 0, \quad r(t, \varepsilon) \equiv p^2(t, \varepsilon) - 4a(t, \varepsilon) \cdot c(t, \varepsilon) > 0,$$

$$2a(t, \varepsilon) < \delta [p(t, \varepsilon) + \sqrt{r(t, \varepsilon)}], \quad 0 \leq t \leq t_*(\varepsilon), \quad 0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}.$$

Теорема 39.5 позволяет получить оценки: остаточного члена асимптотического разложения решения; интервала времени, на котором решение существует; значений малого параметра.

Неравенство (39.11) получено с помощью интегрального уравнения, эквивалентного задаче Коши (39.10):

$$u(t, \varepsilon) = \int_0^t U(t, s, \varepsilon) \cdot G(u(s), s, \varepsilon) ds.$$

Из уравнения следует неравенство

$$\|u(t, \varepsilon)\| \leq \left\| \int_0^t U(t, s, \varepsilon) \cdot G(0, s, \varepsilon) ds \right\| +$$

$$+ \int_0^t \|U(t, s, \varepsilon)\| [L_1(s, \varepsilon) + L_2(s, \varepsilon) \cdot \|u(s, \varepsilon)\|] \|u(s, \varepsilon)\| ds.$$

Если $\|u(t, \varepsilon)\| \leq \delta u^{(n)}(t, \varepsilon)$, то

$$\|u(t, \varepsilon)\| \leq \left\| \int_0^t U(t, s, \varepsilon) \cdot G(0, s, \varepsilon) ds \right\| +$$

$$+ \int_0^t \|U(t, s, \varepsilon)\| [L_1(s, \varepsilon) + L_2(s, \varepsilon) \cdot \delta u^{(n)}(s, \varepsilon)] \cdot \delta u^{(n)}(s, \varepsilon) ds$$

$$= \delta u^{(n+1)}(t, \varepsilon).$$

Полученное неравенство позволяет улучшать оценку остаточного члена, т. е. улучшать оценку погрешности асимптотического решения, вычисляя последовательно значения $\delta u^{(1)}, \delta u^{(2)}, \dots$

Замечание 39.1. Если начальное значение переменной x не равно нулю, то нужно перейти к новой переменной $\Delta_1 x = x - x|_{t=0}$, чтобы получить задачу (39.1).

Замечание 39.2. Условие 39.1 не ограничивает класс задач (39.1). Достаточно перейти к новой переменной $\Delta_2 x = x - x^{(0)}(t)$, чтобы Условие 39.1 выполнилось.

Замечание 39.3. При выполнении Условия 39.1 $x^{(0)}(t) = 0$.

§40. Сингулярно возмущённая задача Коши

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t, \varepsilon), \quad x|_{t=0} = x^\circ(\varepsilon), \quad (40.1)$$

где x, F, x° – N -мерные векторы; $x = (x_1, \dots, x_N)$; t – независимая переменная (время); $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Введём обозначения: D_x – область в пространстве $x \in \mathbf{R}^N$; $\bar{t}, \bar{\varepsilon}$ – положительные числа.

Определение 40.1. Задача (40.1) называется *сингулярно возмущённой задачей Коши*, если: 1) функции $F(x, t, \varepsilon), x^\circ(\varepsilon)$ определены на множестве

$$\{(x, t, \varepsilon): x \in D_x, 0 \leq t \leq \bar{t}, 0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}\}$$

и не определены (по крайней мере, одна из функций) на множестве

$$\{(x, t, \varepsilon): x \in D_x, 0 \leq t \leq \bar{t}, \varepsilon = 0\},$$

2) $x^\circ(\varepsilon) \in D_x$ при $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$.

Определение 40.2. Переменная $x_i, 1 \leq i \leq N$, называется *сингулярной переменной*, если её производная пропорциональна отрицательной степени малого параметра: $\frac{dx_i}{dt} \sim \varepsilon^{-K}, K > 0$.

§41. Почти регулярная задача Коши

41.1. Определения

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t, \varepsilon, f(t, \varepsilon)), \quad x|_{t=0} = 0. \quad (41.1)$$

Здесь $x \in \mathbf{R}^N$, $F \in \mathbf{R}^N$, $f \in \mathbf{R}^M$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ – малый параметр, $t \in \mathbf{R}$ – независимая переменная (время), \mathbf{R}^N – N -мерное векторное пространство действительных чисел, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1$.

Введём обозначения: $D_x \subset \mathbf{R}^N$ – окрестность точки $x = 0$, D_f – компактное топологическое многообразие класса \mathbf{C}^0 , вложенное в \mathbf{R}^M ; δ , \bar{t} , $\bar{\varepsilon}$ – положительные числа.

Определение 41.1. Задача (41.1) называется *почти регулярной задачей Коши*, если: 1) $F(x, t, \varepsilon, f)$ – гладкая функция на прямом произведении окрестности D_x , отрезков $0 \leq t \leq \bar{t}$, $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ и многообразия D_f , 2) f – гладкая функция на прямом произведении интервалов $0 \leq t \leq \bar{t}$ и $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ со значениями на многообразии D_f .

Определение 41.2. Переменная x называется *почти регулярной переменной*.

В качестве примера возможной функции f приведём функцию

$$f = (\exp(-t/\varepsilon), \cos(t/\varepsilon)).$$

Решение задачи (41.1) строится методом малого параметра с помощью задачи Коши, содержащей два малых параметра ε и μ :

$$\frac{dy}{dt} = F(y, t, \varepsilon, f(t, \mu)), \quad y|_{t=0} = 0. \quad (41.2)$$

Относительно ε задача (41.2) является регулярно возмущённой задачей Коши.

Определение 41.3. Задача (41.2) называется *вспомогательной задачей*.

Определение 41.4. Метод малого параметра заключается в следующем:

- строится решение задачи (41.2) методом малого параметра Пуанкаре в виде

$$y(t, \varepsilon, \mu) = \sum_{K=0}^{\infty} y^{(K)}(t, \mu) \varepsilon^K, \quad (41.3)$$

- решение задачи (41.1) имеет вид

$$x(t, \varepsilon) = \sum_{K=0}^{\infty} y^{(K)}(t, \varepsilon) \varepsilon^K. \quad (41.4)$$

Определение 41.5. Функция

$$X_n(t, \varepsilon) = \sum_{K=0}^n y^{(K)}(t, \varepsilon) \varepsilon^K \quad (41.5)$$

называется n -м приближением решения задачи (41.1).

41.2. Уравнения для коэффициентов ряда

Коэффициент $y^{(0)}(t, \mu)$ (нулевое приближение решения $y(t, \varepsilon, \mu)$ задачи (41.2)) является решением задачи

$$\frac{dy^{(0)}}{dt} = F(y^{(0)}, t, 0, f(t, \mu)), \quad y^{(0)}|_{t=0} = 0. \quad (41.6)$$

Определение 41.6. Задача (41.6) называется *вырожденной задачей*.

Коэффициент $y^{(k)}(t, \mu)$ при любом $k \geq 0$ является решением задачи

$$\frac{dy^{(k)}}{dt} = \left[F \left(\sum_{i=0}^k y^{(i)}(t, \mu) \varepsilon^i, t, \varepsilon, f(t, \mu) \right) \right]^{(k)}, \quad y^{(k)}|_{t=0} = 0. \quad (41.7)$$

Скобки с верхним индексом (k) обозначают коэффициент при ε^k в разложении функции, стоящей в скобках, в ряд по степеням параметра ε .

Запишем уравнения (41.7) для $k \geq 1$ в виде

$$\frac{dy^{(k)}}{dt} = A(t, \mu) y^{(k)} + F^{(k)}(t, \mu), \quad y^{(k)}|_{t=0} = 0. \quad (41.8)$$

Здесь

$$A(t, \mu) = F_x(y^{(0)}(t, \mu), t, 0, f(t, \mu)),$$

$$F^{(k)}(t, \mu) = \left[F \left(\begin{matrix} k-1 \\ \Sigma \\ i=0 \end{matrix} y^{(i)}(t, \mu) \varepsilon^i, t, \varepsilon, f(t, \mu) \right) \right]^{(k)},$$

F_x – матрица Якоби, составленная из частных производных компонент вектора F по компонентам вектора x .

Задача (41.8) линейна. Её решение имеет вид

$$y^{(k)}(t, \mu) = \int_0^t U(t, s, \mu) \cdot F^{(k)}(s, \mu) ds. \quad (41.9)$$

Здесь $U(t, s, \mu)$ – матрица Коши уравнений в вариациях

$$\frac{dz}{dt} = A(t, \mu) z.$$

Таким образом, для получения решения в виде (41.3), (41.4) необходимо знать нулевое приближение $y^{(0)}(t, \mu)$ и матрицу $U(t, s, \mu)$. Тогда коэффициенты рядов (41.3), (41.4) вычисляются последовательно по формулам (41.9) для $k = 1, 2, \dots$

41.3. Теоремы

Условие 41.1. $F(0, t, 0, f) = 0$ при $0 \leq t \leq \bar{t}$, $f \in D_f$.

Условие 41.2. На множестве $x \in \mathbb{C}^N$, $\|x\| \leq \delta$, $0 \leq t \leq \bar{t}$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$, $f \in D_f$ функция $F(x, t, \varepsilon, f)$ непрерывна по совокупности аргументов, аналитична по x , ε . \mathbb{C}^N – N -мерное векторное пространство комплексных чисел.

Условие 41.3. На множестве $x \in \mathbb{R}^N$, $\|x\| \leq \delta$, $0 \leq t \leq \bar{t}$, $0 \leq \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, $f \in D_f$ функция $F(x, t, \varepsilon, f)$ имеет непрерывные по x , t , ε , f частные производные до порядка n_* включительно по ε и по компонентам вектора x , $n_* = \max(2, n + 1)$.

Условие 41.4. На множестве $0 \leq t \leq \bar{t}$, $0 < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ функция $f(t, \varepsilon)$ непрерывна по t и $f(t, \varepsilon) \in D_f$.

Теорема 41.1 [13]. Пусть выполняются Условия 41.1, 41.2, 41.4. Тогда найдётся постоянная $\varepsilon_* > 0$, не зависящая от t , ε и такая, что на множестве $0 \leq t \leq \bar{t}$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$: 1) решение задачи (41.1) существует и единственно, 2) ряд (41.4) сходится равномерно к решению задачи (41.1).

Теорема 41.2 [13]. Пусть выполняются Условия 41.1, 41.2, 41.4. Тогда для любого ε , $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, найдётся такая постоянная $t_* = t_*(\varepsilon)$, что $0 < t_* \leq \bar{t}$ и на множестве $0 \leq t \leq t_*$: 1) решение задачи (41.1) существует и единственно, 2) ряд (41.4) сходится равномерно к решению задачи (41.1).

Теорема 41.3 [13]. Пусть выполняются Условия 41.1, 41.3, 41.4. Тогда найдутся постоянные $\varepsilon_* > 0$, C_* , C_{**} , не зависящие от t , ε и такие, что при $0 \leq t \leq \bar{t}$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$ решение задачи (41.1) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам

$$\|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leq C_* t \varepsilon^{n+1}, \quad \|x(t, \varepsilon) - X_n(t, \varepsilon)\| \leq C_{**} \varepsilon^{n+1}.$$

Из Теоремы 41.3 следует, что функция $X_n(t, \varepsilon)$ в (41.5) является асимптотическим решением задачи (41.1) на отрезке:

$$x(t, \varepsilon) = X_n(t, \varepsilon) + o(\varepsilon^n), \quad 0 \leq t \leq \bar{t}, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Замечание 41.1. Теоремы 41.1–41.3 доказаны в [13] для случая, когда D_f – ограниченное замкнутое множество в пространстве \mathbf{R}^M . Для компактного топологического многообразия D_f класса \mathbf{C}^0 , вложенного в \mathbf{R}^M , доказательство Теорем 41.1–41.3 аналогично.

Замечание 41.2. Если начальное значение переменной x не равно нулю, то нужно перейти к новой переменной $\Delta x = x - x|_{t=0}$, чтобы получить задачу (41.1).

Замечание 41.3. При выполнении Условия 41.1 $X_0(t, \varepsilon) = y^{(0)}(t, \varepsilon) = 0$.

Замечание 41.4. Если функция F не зависит явно от f , то задача (41.1) становится регулярно возмущённой задачей Коши. Теоремы 41.1–41.3 переходят соответственно в Теоремы 39.1–39.3 с тем отличием, что утверждения Теорем 41.1–41.3 формулируются для $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$, $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_*$, а Теоремы 39.1–39.3 гарантируют интервалы $|\varepsilon| \leq \varepsilon_*$, $0 \leq \varepsilon < \bar{\varepsilon}$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_*$.

§42. Аналитичность в лунной математической модели

Исследуем гладкость правых частей уравнений (4.3) на множестве значений (x, ε, f) :

$$x \in \mathbf{C}^{60}, \quad \|x\| \leq \delta, \quad \varepsilon \in \mathbf{C}, \quad |\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon} = 0,501, \quad f \in D_f, \quad (42.1)$$

$$D_f = \{f: f_{10j}^2 + f_{10j+1}^2 = 1; j = 1, 3, 5\} \subset \mathbf{R}^6.$$

42.1. Функция $f(t, \varepsilon)$

Правые части уравнений (4.3) зависят от времени только через функцию $f(t, \varepsilon)$. Начальные значения оскулирующих элементов имеют такой же порядок по малому параметру ε , что и их характерные значения (3.6). Отсюда, из формул для f_{10j} в п. 4.2 и из (4.1) следует, что при всех

$$t \geq 0, \quad \varepsilon > 0$$

функция $f(t, \varepsilon)$ непрерывна по t и $f(t, \varepsilon) \in D_f$.

42.2. Оскулирующие элементы

Из (3.6), (4.2) следует, что ξ_{10j} ($j = \overline{1,3}$), e_{10} , i_{10} аналитичны на множестве (42.1) при любом $\delta > 0$. Аналогично, из (4.5) следует, что функции

$$\cos \Omega_{10}, \sin \Omega_{10}, \cos \pi_{10}, \sin \pi_{10}, \cos E_{10}, \sin E_{10}$$

аналитичны на множестве (42.1) при любом $\delta > 0$.

42.3. Декартовы координаты

42.3.1. $k = \overline{1,9}$. Из (4.2) следует, что векторы \mathbf{r}_k , \mathbf{v}_k аналитичны на множестве (42.1) при любом $\delta > 0$.

42.3.2. $k = 10$. Из (3.1), (4.2) следует, что вектор \mathbf{r}_{10} зависит от

$$\xi_{101}, e_{10}, i_{10}, \cos \Omega_{10}, \sin \Omega_{10}, \cos \pi_{10}, \sin \pi_{10}, \cos E_{10}, \sin E_{10}.$$

При $x = 0$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ справедливо неравенство

$$|1 - e_{10}^2| \geq 1 - (e'_{10} \cdot \xi_{10}^{\circ})^2 |\varepsilon|^8 > 0,99.$$

Поэтому существует такое $\delta_1 > 0$, что на множестве (42.1) при $\delta = \delta_1$

$$|1 - e_{10}^2| > 0.$$

Отсюда по теореме о сложной функции вектор \mathbf{r}_{10} аналитичен на множестве (42.1) при $\delta = \delta_1$.

42.4. Векторы F_k

Из (2.5) следует, что вектор F_k равен линейной комбинации дробей. Числители дробей являются линейными комбинациями \mathbf{r}_i , $i = \overline{1,10}$, с коэффициентами, равными степенным функциям ε . Знаменатели равны модулям числителей в третьей степени. Из п. 42.3 следует, что числители и выражения под модулями являются аналитическими функциями на множестве (42.1) при $\delta = \delta_1$. Поэтому вектор F_k может иметь особенности только в нулях знаменателей. Оценим знаменатели.

42.4.1. Знаменатели с \mathbf{r}_k , $k = \overline{1,9}$. При $x = 0$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$

$$|\mathbf{r}_k| = |\mathbf{r}_k^{\circ}| > 0, \quad k = \overline{1,9};$$

$$|\mathbf{r}_j - d_{kj}\mathbf{r}_k| = \sqrt{(|\mathbf{r}_j| - d_{kj}e^{i\varphi}|\mathbf{r}_k|)(|\mathbf{r}_j| - d_{kj}e^{-i\varphi}|\mathbf{r}_k|)},$$

$$\left| |\mathbf{r}_j - d_{kj}\mathbf{r}_k| \right| \geq |\mathbf{r}_j^{\circ}| - d'_{kj}|\varepsilon|^{\delta_{kj}}|\mathbf{r}_k^{\circ}| > 0,26, \quad k = \overline{1,7}, \quad j = \overline{k+1,9};$$

$$\left| |\mathbf{r}_8 - d_{98}\mathbf{r}_9| \right| = |\mathbf{r}_8^{\circ} - d'_{98}\mathbf{r}_9^{\circ}| > 0,92.$$

Здесь φ – угол между векторами \mathbf{r}_k , \mathbf{r}_j ; внутренний модуль – модуль вектора, внешний модуль – модуль комплексного числа.

По непрерывности функций существует такое δ_2 , $0 < \delta_2 \leq \delta_1$, что на множестве (42.1) при $\delta = \delta_2$

$$\left| |\mathbf{r}_k| \right| > 0, \quad k = \overline{1,9}; \quad \left| |\mathbf{r}_8 - d_{98}\mathbf{r}_9| \right| > 0,$$

$$\left| |\mathbf{r}_j - d_{kj}\mathbf{r}_k| \right| > 0, \quad k = \overline{1,7}, \quad j = \overline{k+1,9}.$$

Поэтому знаменатели $|\mathbf{r}_k|^3$, $|\mathbf{r}_j - d_{kj}\mathbf{r}_k|^3$ в формулах (2.5) в ноль не обращаются.

42.4.2. Знаменатели с \mathbf{r}_{10} . При $x = 0$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ из (4.2) следуют соотношения:

$$|\mathbf{r}_{10}| = q_{10\ 9}\xi_{10\ 1}(1 - e_{10} \cos E_{10}) = q_{10\ 9}\xi_{10\ 1}^\circ(1 - e_{10\cdot}\xi_{10\ 2}^\circ \cos \hat{E}_{10}),$$

$$||\mathbf{r}_{10}|| \geq q_{10\ 9}\xi_{10\ 1}^\circ(1 - e'_{10\cdot}\xi_{10\ 2}^\circ|\varepsilon|^4) > 0,90 = r_{min},$$

$$||\mathbf{r}_{10}|| \leq q_{10\ 9}\xi_{10\ 1}^\circ(1 + e'_{10\cdot}\xi_{10\ 2}^\circ|\varepsilon|^4) < 1,03 = r_{max},$$

$$|\mathbf{r}_3 + d_{3\ 10}\mathbf{r}_{10}| = \sqrt{(|\mathbf{r}_3| + d_{3\ 10}e^{i\varphi_{3\ 10}}|\mathbf{r}_{10}|)(|\mathbf{r}_3| + d_{3\ 10}e^{-i\varphi_{3\ 10}}|\mathbf{r}_{10}|)},$$

$$|\mathbf{r}_3 + d_{3\ 10}\mathbf{r}_{10}| \geq |\mathbf{r}_3^\circ| - d'_{3\ 10}|\varepsilon|^{\delta_{3\ 10}}r_{max} > 0,98,$$

$$|\mathbf{r}_3 + d_{3\ 10}\mathbf{r}_{10} - d_{j3}\mathbf{r}_j| = \sqrt{|\mathbf{r}_3 - d_{j3}\mathbf{r}_j| + d_{3\ 10}e^{i\varphi_{j3\ 10}}|\mathbf{r}_{10}|} \times \\ \times \sqrt{|\mathbf{r}_3 - d_{j3}\mathbf{r}_j| + d_{3\ 10}e^{-i\varphi_{j3\ 10}}|\mathbf{r}_{10}|},$$

$$|\mathbf{r}_3 + d_{3\ 10}\mathbf{r}_{10} - d_{j3}\mathbf{r}_j| \geq |\mathbf{r}_3^\circ| - d'_{j3}|\varepsilon|^{\delta_{j3}}|\mathbf{r}_j^\circ| - d'_{3\ 10}|\varepsilon|^{\delta_{3\ 10}}r_{max} > 0,26,$$

$$j = 1, 2;$$

$$|\mathbf{r}_j - d_{3j}\mathbf{r}_3 - d_{j\ 10}\mathbf{r}_{10}| = \sqrt{|\mathbf{r}_j - d_{3j}\mathbf{r}_3| - d_{j\ 10}e^{i\varphi_{3j\ 10}}|\mathbf{r}_{10}|} \times \\ \times \sqrt{|\mathbf{r}_j - d_{3j}\mathbf{r}_3| - d_{j\ 10}e^{-i\varphi_{3j\ 10}}|\mathbf{r}_{10}|},$$

$$|\mathbf{r}_j - d_{3j}\mathbf{r}_3 - d_{j\ 10}\mathbf{r}_{10}| \geq |\mathbf{r}_j^\circ| - d'_{3j}|\varepsilon|^{\delta_{3j}}|\mathbf{r}_3^\circ| - d'_{j\ 10}|\varepsilon|^{\delta_{j\ 10}}r_{max} > 0,36,$$

$$j = \overline{4,9}.$$

Здесь $\varphi_{3\ 10}$ – угол между векторами \mathbf{r}_3 , \mathbf{r}_{10} ; $\varphi_{j3\ 10}$ – угол между векторами $(\mathbf{r}_3 - d_{j3}\mathbf{r}_j)$, \mathbf{r}_{10} ; $\varphi_{3j\ 10}$ – угол между векторами $(\mathbf{r}_j - d_{3j}\mathbf{r}_3)$, \mathbf{r}_{10} .

По непрерывности функций существует такое δ_3 , $0 < \delta_3 \leq \delta_2$, что на множестве (42.1) при $\delta = \delta_3$ значения

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_{10}\|, \quad \|\mathbf{r}_3 + d_{310}\mathbf{r}_{10}\|, \quad \|\mathbf{r}_3 + d_{310}\mathbf{r}_{10} - d_{j3}\mathbf{r}_j\|, \quad j = 1, 2; \\ \|\mathbf{r}_j - d_{3j}\mathbf{r}_3 - d_{j10}\mathbf{r}_{10}\|, \quad j = \overline{4,9}, \end{aligned}$$

положительны и знаменатели в выражениях (2.5) в ноль не обращаются.

Это означает, что векторы \mathbf{F}_k ($k = \overline{1,9}$) и $\delta\mathbf{F}_{10}$ аналитичны на множестве (42.1) при $\delta = \delta_3$.

$$\delta\mathbf{F}_{10} = \mathbf{F}_{10} + b_{1010} \frac{\mathbf{r}_{10}}{|\mathbf{r}_{10}|^3}.$$

42.5. Векторы \mathbf{J}_{10j}

Из (3.5) следует, что \mathbf{J}_{10j} зависят от

$$\xi_{101}, e_{10}, i_{10}, \cos \Omega_{10}, \sin \Omega_{10}, \cos \pi_{10}, \sin \pi_{10}, \cos E_{10}, \sin E_{10}$$

и векторов \mathbf{h}_{101} , \mathbf{h}_{102} , \mathbf{h}_{103} . Эти функции аналитичны на множестве (42.1) при $\delta = \delta_3$. Это доказано в п. 42.2 и следует из формул (3.1) для \mathbf{h}_{10j} .

Функции ξ_{101} , $(1 - e_{10} \cos E_{10})$, $(1 - e_{10}^2)$ на множестве (42.1) в ноль не обращаются. Это следует из п. 42.3, 42.4. В формулах для \mathbf{J}_{10j} используются следующие равенства:

$$\frac{1}{\xi_{102}} = \frac{1}{\xi_{102}^\circ + \eta_{102}}, \quad \frac{i_{10}}{\xi_{103} \sin i_{10}} = \frac{i_{10}^\circ}{\sin(i_{10}^\circ (\xi_{103}^\circ + \eta_{103}))}, \quad (42.2)$$

$$\frac{\xi_{103}}{i_{10}} \operatorname{tg} \frac{i_{10}}{2} = \frac{1}{i_{10}^\circ} \operatorname{tg} \left(\frac{i_{10}^\circ (\xi_{103}^\circ + \eta_{103})}{2} \right).$$

При $x = 0$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ справедливы соотношения:

$$\xi_{102} = \xi_{102}^\circ > 0, \quad |i_{10}^\circ \xi_{103}^\circ| < 0,091,$$

$$\sin(i_{10}^\circ (\xi_{103}^\circ + \eta_{103})) = i_{10}^\circ \xi_{103}^\circ \int_0^1 \cos(i_{10}^\circ \xi_{103}^\circ u) du,$$

$$\left| \int_0^1 \cos(i_{10}^\circ \xi_{103}^\circ u) du \right| \geq \operatorname{Re} \left(\int_0^1 \cos(i_{10}^\circ \xi_{103}^\circ u) du \right) \geq \cos|i_{10}^\circ \xi_{103}^\circ| > 0,99,$$

$$\left| \cos \left(\frac{i_{10} \cdot \xi_{103}^{\circ}}{2} \right) \right| \geq \cos \left| \frac{i_{10} \cdot \xi_{103}^{\circ}}{2} \right| > 0,99.$$

Здесь использованы неравенства

$$|\cos z| \geq \operatorname{Re}(\cos z) \geq \cos|z| \quad \text{при } |z| < \pi/2, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Отсюда следует, что существует такое δ_4 , $0 < \delta_4 \leq \delta_3$, что функции (42.2) аналитичны на множестве (42.1) при $\delta = \delta_4$.

По теореме о сложной функции отсюда и из (3.5) следует, что

$$J_{10j} = q_{10j} J'_{10j}, \quad j = \overline{1,5}, \quad J_{106} = q_{106} J'_{106},$$

где q_{10j}, q_{106} – степенные функции ε в (3.6). J'_{10j}, J'_{106} – аналитические векторы на множестве (42.1) при $\delta = \delta_4$.

42.6. Уравнения для η_{kj}

42.6.1. $k = \overline{1,9}$. Аналитичность правых частей уравнений (4.3) для η_{kj} на множестве (42.1) при $\delta = \delta_4$ следует из п. 42.4.

42.6.2. $k = 10$. Правые части уравнений (4.3) для η_{10j} являются суммами аналитических на множестве (42.1) функций при $\delta = \delta_4$. Отрицательные показатели степеней ε в J_{10j} и сомножителях компенсируются положительными показателями степеней ε в δF_{10} .

42.7. Аналитичность в лунной модели

Правые части уравнений (4.3) пропорциональны положительным степеням ε . Отсюда, из аналитичности правых частей и Определения 41.1 следует

Результат 42.1. Задача (4.4) является почти регулярной задачей Коши, удовлетворяющей следующим условиям:

1. $F(0,0, f) = 0$ при f из множества (42.1).
2. $F(x, \varepsilon, f)$ – аналитическая функция на множестве (42.1) при $\delta = \delta_4 > 0$.
3. Функция $f(t, \varepsilon)$ непрерывна по t и $f(t, \varepsilon) \in D_f$ при всех $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$.

§43. Аналитичность в земной математической модели

Земная математическая модель Солнечной системы эквивалентна задаче (9.2), которая компактно записана в форме (10.1). Исследуем гладкость правых частей уравнений (10.1) на множестве

$$x \in \mathbf{C}^{60}, \quad \|x\| \leq \delta, \quad \varepsilon \in \mathbf{C}, \quad |\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon} = 0,501, \quad f \in D_f, \quad (43.1)$$

$$D_f = \{f: f_{kj}^2 + f_{k,j+1}^2 = 1; k = \overline{1,3}, 10; j = 1, 3, 5, 7\} \subset \mathbf{R}^{32}.$$

Здесь δ – положительная постоянная.

43.1. Функция $f(t, \mu)$

Правые части уравнений (10.1) зависят от времени только через функцию $f(t, \varepsilon)$. Из (10.2) следует, что при всех

$$t \geq 0, \quad \varepsilon > 0$$

функция $f(t, \varepsilon)$ непрерывна по t и $f(t, \varepsilon) \in D_f$.

43.2. Оскулирующие элементы

43.2.1. Из (10.3) следует, что ξ_{k1}, e_k ($k = \overline{1,3}$); i_k ($k = 1, 2, 10$) аналитичны по x, ε на множестве (43.1) при любом $\delta > 0$. Аналогично, из (10.4) следует, что при любом $\delta > 0$ на множестве (43.1) аналитичны по x, ε, f следующие функции:

$$\cos \Omega_1, \sin \Omega_1, \cos \pi_1, \sin \pi_1, \cos \Omega_2, \sin \Omega_2, \cos \pi_2, \sin \pi_2,$$

$$\cos E_2, \sin E_2, \cos \pi_3, \sin \pi_3, \cos E_3, \sin E_3, \cos \Omega_{10}, \sin \Omega_{10}.$$

43.2.2. Функции $\cos E_1, \sin E_1$. Формулы (10.4) задают $\sin E_1$ как невяную функцию x, f . e_1° рассматривается как постоянная, не зависящая от ε . Введём обозначения:

$$h_1(z) = z = \sin E_1, \quad h_2(z) = -f_{16} \cos g - f_{15} \sin g,$$

$$g = e_1^\circ (z - f_{18}) + \eta_{16}.$$

Из (10.4) следует уравнение для z :

$$h_1(z) + h_2(z) = 0. \quad (43.2)$$

При действительных значениях E_1 $|z| = |\sin E_1| \leq 1$. Рассмотрим решение уравнения (43.2) в круге $|z| \leq 2$ на комплексной плоскости. При любых x, ε, f из множества (43.1) $h_1(z), h_2(z)$ – аналитические функции z . При $|z| = 2$ имеем:

$$\begin{aligned} |h_2(z)| &\leq |f_{16} \cos g| + |f_{15} \sin g| \leq (|f_{16}| + |f_{15}|) \cdot \operatorname{ch}(e_1^\circ |z| + |\eta_{16}|) \leq \\ &\leq \sqrt{2} \operatorname{ch}(2e_1^\circ + |\eta_{16}|). \end{aligned}$$

Здесь использованы неравенства

$$|\cos(\alpha + z)| \leq \operatorname{ch} |z|, \quad |\sin(\alpha + z)| \leq \operatorname{ch} |z|, \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

При $x = 0$

$$\sqrt{2} \operatorname{ch}(2e_1^\circ + |\eta_{16}|) < 1,54.$$

Поэтому существует такое $\delta_1 > 0$, что на множестве (43.1) при $\delta = \delta_1$, $|z| = 2$

$$|h_2(z)| < 2 = |h_1(z)|.$$

Теорема 43.1 (Руше [12]). *Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – аналитические функции в односвязной ограниченной области D и на её контуре C и если $|f_2(z)| < |f_1(z)|$ на C , то функции $f_1(z)$ и $f_1(z) + f_2(z)$ имеют одинаковое число нулей в области D .*

По Теореме 43.1 Руше функция $Z = h_1(z) + h_2(z)$ имеет столько же корней в круге $|z| < 2$, что и функция $h_1(z)$, то есть имеет один корень. Поэтому уравнение (43.2) имеет одно решение в круге $|z| < 2$.

Z – аналитическая функция переменных z, x, f .

$$\begin{aligned} \left| \frac{dZ}{dz} \right| &= |1 - e_1^\circ (f_{16} \sin g - f_{15} \cos g)| \geq \\ &\geq 1 - e_1^\circ (|f_{16}| + |f_{15}|) \cdot \operatorname{ch}(e_1^\circ |z| + |\eta_{16}|). \end{aligned}$$

При $x = 0, |z| \leq 2$

$$\left| \frac{dZ}{dz} \right| \geq 1 - e_1^\circ \sqrt{2} \cdot \operatorname{ch}(2e_1^\circ + |\eta_{16}|) > 0,68.$$

Поэтому существует такое δ_2 , $0 < \delta_2 \leq \delta_1$, что на множестве (43.1) при $\delta = \delta_2$, $|z| \leq 2 \left| \frac{dz}{dz} \right| > 0$. По теореме о неявной функции, решение $z = z(x, f)$ уравнения $Z = 0$ (уравнения (43.2)) является аналитической функцией на множестве (43.1).

Из (10.4) следуют равенства

$$\cos E_1 = f_{15} \cos g - f_{16} \sin g, \quad g = e_1^\circ (z - f_{18}) + \eta_{16}.$$

Так как $z = z(x, f)$, то, по теореме о сложной функции, $\cos E_1$ является аналитической функцией на множестве (43.1), так же, как и $\sin E_1$.

При $x = 0$ функции $\sin E_1$, $\cos E_1$ принимают действительные значения. Это следует из уравнений (10.2), (43.2) и неравенств

$$Z(-1) = -1 - \sin(\tilde{E}_1 - e_1^\circ - e_1^\circ \sin E_1^\circ) \leq 0,$$

$$Z(1) = 1 - \sin(\tilde{E}_1 + e_1^\circ - e_1^\circ \sin E_1^\circ) \geq 0, \quad -1 \leq z = \sin E_1 \leq 1.$$

43.2.3. Элементы i_3 , Ω_3 входят в уравнения (10.1) через следующие функции:

$$\cos i_3 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(i_3/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(i_3/2)}, \quad \sin i_3 \cos \Omega_3 = \frac{2 [f_{31} \operatorname{tg}(i_3^\circ/2) + \varepsilon^2 \eta_{33}]}{1 + \operatorname{tg}^2(i_3/2)}, \quad (43.3)$$

$$\cos^2(i_3/2) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(i_3/2)}, \quad \sin i_3 \sin \Omega_3 = \frac{2 [f_{32} \operatorname{tg}(i_3^\circ/2) + \varepsilon^2 \eta_{34}]}{1 + \operatorname{tg}^2(i_3/2)},$$

$$(1 - \cos i_3) \cos^2 \Omega_3 = \frac{2 [f_{31} \operatorname{tg}(i_3^\circ/2) + \varepsilon^2 \eta_{33}]^2}{1 + \operatorname{tg}^2(i_3/2)},$$

$$(1 - \cos i_3) \cos \Omega_3 \sin \Omega_3 = \frac{2 [f_{31} \operatorname{tg}(i_3^\circ/2) + \varepsilon^2 \eta_{33}] [f_{32} \operatorname{tg}(i_3^\circ/2) + \varepsilon^2 \eta_{34}]}{1 + \operatorname{tg}^2(i_3/2)},$$

$$(1 - \cos i_3) \sin^2 \Omega_3 = \frac{2 [f_{32} \operatorname{tg}(i_3^\circ/2) + \varepsilon^2 \eta_{34}]^2}{1 + \operatorname{tg}^2(i_3/2)}.$$

Здесь $\operatorname{tg}(i_3/2)$ – функция (10.4). При $x = 0$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$

$$1 + \operatorname{tg}^2(i_3/2) = \frac{2}{1 + \cos i_3^\circ} \geq 2 [1 + \operatorname{ch}(i_3' \cdot (\bar{\varepsilon})^{19} \xi_{33}^\circ)]^{-1} > 0,99.$$

Поэтому существует такое δ_3 , $0 < \delta_3 \leq \delta_2$, что функции (43.3) аналитичны на множестве (43.1) при $\delta = \delta_3$.

43.2.4. *Функции $\cos E_{10}$, $\sin E_{10}$.* Формулы (10.4) задают $\sin E_{10}$ как неявную функцию x , ε , f . e_{10}° рассматривается как постоянная величина, не зависящая от ε .

Введём комплексную переменную $z = \sin E_{10}$ и рассмотрим

$$h_1(z) = z, \quad h_2(z) = -\frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}(g_1 \sin g_3 - g_2 \cos g_3),$$

где g_1, g_2, g_3 – функции (10.4). Из (10.4) следует, что z – решение уравнения

$$h_1(z) + h_2(z) = 0. \tag{43.4}$$

При действительных значениях E_{10} $|z| = |\sin E_{10}| \leq 1$. Оценим функции в круге $|z| \leq 4,5$ на комплексной плоскости.

$$|g_1^2 + g_2^2| = |g_1 + ig_2| \cdot |g_1 - ig_2|, \tag{43.5}$$

$$|g_1 \pm ig_2| = \left| e_{10}^\circ e^{\pm i\pi_{10}} - s_2' \varepsilon^9 [2e^{\pm ig_3} - 9e^{\pm i(g_4 - g_3)} - e^{\mp i(g_4 - 3g_3)}]_0^t + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^5 \eta_{10\ 2} \pm i\varepsilon^5 \eta_{10\ 5} \right| \geq e_{10}^\circ \tilde{Q}_1,$$

$$g_3 = \pi_{10}^\circ + \hat{E}_{10} + e_{10}^\circ(z - f_{10\ 8}) + \eta_{10\ 6},$$

$$g_4 = 2(\pi_3^\circ + \hat{E}_3 + \eta_{35} + \eta_{36}),$$

$$h_2(z) = -\frac{\tilde{Q}_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad |h_2(z)| \leq \frac{\tilde{Q}_3}{\tilde{Q}_1},$$

$$\tilde{Q}_1 = 1 - \frac{s_2' |\varepsilon|^9}{e_{10}^\circ} (2e^b + 9e^{b+b_0} + e^{3b+b_0} + 12) - \frac{(|\eta_{10\ 2}| + |\eta_{10\ 5}|) \varepsilon^5}{e_{10}^\circ},$$

$$\tilde{Q}_2 = e_{10}^\circ \sin(g_3 - \pi_{10}^\circ) - 8s_2' \varepsilon^9 [\sin(g_4 - 2g_3)]_0^t + \varepsilon^5 \eta_{10\ 2} \sin g_3 - \\ - \varepsilon^5 \eta_{10\ 5} \cos g_3,$$

$$\tilde{Q}_3 = \operatorname{ch} b + \frac{8s_2' |\varepsilon|^9}{e_{10}^\circ} [\operatorname{ch}(2b + b_0) + 1] + \frac{|\eta_{10\ 2}| + |\eta_{10\ 5}|}{e_{10}^\circ} \varepsilon^5 \operatorname{ch} b,$$

$$b = e_{10}^\circ |z| + |\eta_{10\ 6}|, \quad b_0 = 2(|\eta_{35}| + |\eta_{36}|).$$

При $x = 0$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$, $|z| = 4,5$

$$|h_2(z)| \leq \frac{\bar{Q}_3}{\bar{Q}_1} < 4,35 < 4,5 = |h_1(z)|, \quad \bar{Q}_1(z) > 0,33.$$

Поэтому существует такое δ_4 , $0 < \delta_4 \leq \delta_3$, что на множестве (43.1) при $\delta = \delta_4$, $|z| = 4,5$

$$|h_2(z)| < |h_1(z)|.$$

По Теореме 43.1 Руше функция $Z = h_1(z) + h_2(z)$ имеет столько же корней в круге $|z| < 4,5$, что и функция $h_1(z)$, то есть имеет один корень. Поэтому уравнение (43.4) имеет одно решение в круге $|z| < 4,5$.

Z – аналитическая функция переменных x , ε , f , z на множестве (43.1) при $z \in \mathbf{C}$.

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dz} = & 1 + \frac{e_{10}^{\circ}}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} [e_{10}^{\circ} \cos(g_3 - \pi_{10}^{\circ}) + 16 s_2' \varepsilon^9 \cos(g_4 - 2g_3) + \\ & + \eta_{10\ 2} \cos g_3 + \eta_{10\ 5} \sin g_3] - \\ & - \frac{ie_{10}^{\circ} s_2' \varepsilon^9 \bar{Q}_2}{2(g_1^2 + g_2^2)^{3/2}} \{ [2e^{ig_3} + 9e^{i(g_4 - g_3)} - 3e^{-i(g_4 - 3g_3)}](g_1 - ig_2) - \\ & - [2e^{-ig_3} + 9e^{-i(g_4 - g_3)} - 3e^{i(g_4 - 3g_3)}](g_1 + ig_2) \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{dZ}{dz} \right| \geq & 1 - e_{10}^{\circ} \bar{Q}_1^{-1} \left[\operatorname{ch} b + \frac{16 s' |\varepsilon|^9}{e_{10}^{\circ}} \operatorname{ch}(2b + b_0) + \frac{|\eta_{10\ 2}| + |\eta_{10\ 5}|}{e_{10}^{\circ}} \operatorname{ch} b \right] - \\ & - s_2' |\varepsilon|^9 \bar{Q}_1^{-2} \bar{Q}_3 (2e^b + 9e^{b+b_0} + 3e^{3b+b_0}). \end{aligned}$$

При $x = 0$, $|z| \leq 4,5$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$

$$\left| \frac{dZ}{dz} \right| > 0,34.$$

Поэтому существует такое δ_5 , $0 < \delta_5 \leq \delta_4$, что на множестве (43.1) при $\delta = \delta_5$, $|z| \leq 4,5$

$$\left| \frac{dZ}{dz} \right| > 0.$$

По теореме о неявной функции, решение $z = z(x, \varepsilon, f)$ уравнения $Z = 0$ (уравнения (43.4)) является аналитической функцией на множестве (43.1). Заметим, что из круга $|z| < 4,5$ функция $z(x, \varepsilon, f)$ не выходит, так как при $|z| = 4,5$

$$|Z| = |h_1(z) + h_2(z)| \geq |h_1(z)| - |h_2(z)| > 0.$$

По формуле (10.4)

$$\cos E_{10} = \frac{1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} (g_1 \cos g_3 + g_2 \sin g_3),$$

где g_1, g_2, g_3 – функции (10.4), зависящие от x, ε, f, z . По теореме о сложной функции, $\cos E_{10}$ является аналитической функцией x, ε, f на множестве (43.1), так же, как и $\sin E_{10}$.

43.2.5. Функции a_{10}, e_{10}, π_{10} . Из (10.4) следует, что функции

$$\xi_{10} = \frac{a_{10}}{a_{10}^*}, \quad e_{10}, \quad \cos \pi_{10}, \quad \sin \pi_{10} \quad (43.6)$$

зависят от $x, \varepsilon, f, z = \sin E_{10}$. Из п. 43.2.4 следует, что на множестве (43.1) при $\delta = \delta_5$

$$|g_1^2 + g_2^2| > 0.$$

По теореме о сложной функции, отсюда и из (10.4) следует, что функции (43.6) аналитичны по x, ε, f на множестве (43.1) при $\delta = \delta_5$.

43.3. Декартовы координаты

43.3.1. Из (10.5) следует, что векторы $\mathbf{r}_k, k = \overline{1,3}, 10$, зависят от

$$\xi_{k1}, e_k, i_k, \cos \Omega_k, \sin \Omega_k, \cos \pi_k, \sin \pi_k, \cos E_k, \sin E_k.$$

Вектор \mathbf{r}_3 зависит от i_3, Ω_3 через функции (43.3), так как имеют место формулы:

$$\mathbf{h}_{k1} = \begin{pmatrix} h_{k11} \\ h_{k12} \\ h_{k13} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{h}_{k2} = \begin{pmatrix} h_{k21} \\ h_{k22} \\ h_{k23} \end{pmatrix}, \quad (43.7)$$

$$h_{k11} = \cos \pi_k [1 - (1 - \cos i_k) \sin^2 \Omega_k] + \sin \pi_k (1 - \cos i_k) \cos \Omega_k \sin \Omega_k,$$

$$h_{k12} = \cos \pi_k (1 - \cos i_k) \cos \Omega_k \sin \Omega_k + \sin \pi_k [1 - (1 - \cos i_k) \cos^2 \Omega_k],$$

$$h_{k13} = -\cos \pi_k \sin i_k \sin \Omega_k + \sin \pi_k \sin i_k \cos \Omega_k,$$

$$h_{k21} = \cos \pi_k (1 - \cos i_k) \cos \Omega_k \sin \Omega_k - \sin \pi_k [1 - (1 - \cos i_k) \sin^2 \Omega_k],$$

$$h_{k22} = \cos \pi_k [1 - (1 - \cos i_k) \cos^2 \Omega_k] - \sin \pi_k (1 - \cos i_k) \cos \Omega_k \sin \Omega_k,$$

$$h_{k23} = \cos \pi_k \sin i_k \cos \Omega_k + \sin \pi_k \sin i_k \sin \Omega_k.$$

При $x = 0$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ справедливы неравенства

$$1 - e_k^2 = 1 - (e_k^\circ)^2 > 0,95, \quad k = \overline{1,3},$$

$$|1 - e_{10}^2| = |1 - g_1^2 - g_2^2| \geq 1 - [e_{10}^\circ + s_2' |\varepsilon|^9 (11e^b + e^{3b} + 12)]^2 > \\ > 0,98,$$

$$b = e_{10}^\circ |z|, \quad z = \sin E_{10}, \quad |z| \leq 4,5.$$

Поэтому существует такое δ_6 , $0 < \delta_6 \leq \delta_5$, что на множестве (43.1) при $\delta = \delta_6$

$$|1 - e_k^2| > 0, \quad k = \overline{1,3}, 10.$$

По теореме о сложной функции, отсюда следует, что векторы \mathbf{r}_k , $k = \overline{1,3}, 10$, аналитичны по x , ε , f на множестве (43.1) при $\delta = \delta_6$.

43.3.2. Из (10.6) следует, что векторы \mathbf{r}_k , \mathbf{v}_k , $k = \overline{4,9}$, аналитичны на множестве (43.1) при любом значении $\delta > 0$.

43.4. Векторы \mathbf{F}_k

Из (2.5) следует, что вектор \mathbf{F}_k равен линейной комбинации дробей. Числители дробей являются линейными комбинациями \mathbf{r}_i , $i = \overline{1,10}$, с коэффициентами, равными степенным функциям ε . Знаменатели равны модулям числителей в третьей степени. Из п. 43.3 следует, что числители и выражения под модулями являются аналитическими функциями от x , ε , f на множестве (43.1) при $\delta = \delta_6$. Поэтому вектор \mathbf{F}_k может иметь особенность только в нулях знаменателей. Оценим знаменатели. В знаменателях будем рассматривать e_k° , i_k° как числа, не зависящие от ε .

43.4.1. Знаменатели с \mathbf{r}_k , $k = \overline{1,9}$. При $k = 1$, $x = 0$ функции $\sin E_1$, $\cos E_1$ принимают действительные значения (смотрите п. 43.2.2). Отсюда и из (10.3)–(10.6), (43.7) следует, что при $x = 0$ векторы \mathbf{r}_k , $k = \overline{1,9}$, действительны. Оценим модули при $x = 0$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$.

$$|\mathbf{r}_k| = q_{k9} \xi_{k1} (1 - e_k \cos E_k) = q_{k9} \xi_{k1}^\circ (1 - e_k^\circ \cos E_k), \quad (43.8)$$

$$0,83 < q_{k9}\xi_{k1}^{\circ}(1 - e_k^{\circ}) \leq |\mathbf{r}_k| \leq q_{k9}\xi_{k1}^{\circ}(1 + e_k^{\circ}), \quad k = \overline{1,3};$$

$$|\mathbf{r}_k| = |\mathbf{r}_k^{\circ}| > 0, \quad k = \overline{4,9};$$

$$|\mathbf{r}_j - d_{kj}\mathbf{r}_k| = \sqrt{(|\mathbf{r}_j| - d'_{kj}\varepsilon^{\delta_{kj}}e^{i\varphi}|\mathbf{r}_k|)(|\mathbf{r}_j| - d'_{kj}\varepsilon^{\delta_{kj}}e^{-i\varphi}|\mathbf{r}_k|)},$$

$$\left| |\mathbf{r}_j - d_{kj}\mathbf{r}_k| \right| \geq |\mathbf{r}_j| - d'_{kj}|\varepsilon|^{\delta_{kj}}|\mathbf{r}_k|, \quad k = \overline{1,7}, \quad j = \overline{k+1,9};$$

$$|\mathbf{r}_8 - d_{98}\mathbf{r}_9| = |\mathbf{r}_8^{\circ} - d'_{98}\mathbf{r}_9^{\circ}| > 0,92;$$

$$\left| |\mathbf{r}_j - d_{kj}\mathbf{r}_k| \right| \geq q_{j9}\xi_{j1}^{\circ}(1 - e_j^{\circ}) - d'_{kj}|\varepsilon|^{\delta_{kj}}q_{k9}\xi_{k1}^{\circ}(1 + e_k^{\circ}) > 0,25,$$

$$\left| |\mathbf{r}_j - d_{kj}\mathbf{r}_k| \right| \leq q_{j9}\xi_{j1}^{\circ}(1 + e_j^{\circ}) + d'_{kj}|\varepsilon|^{\delta_{kj}}q_{k9}\xi_{k1}^{\circ}(1 + e_k^{\circ}),$$

$$k = 1, 2, \quad j = \overline{k+1,3};$$

$$\left| |\mathbf{r}_j - d_{kj}\mathbf{r}_k| \right| \geq |\mathbf{r}_j^{\circ}| - d'_{kj}|\varepsilon|^{\delta_{kj}}q_{k9}\xi_{k1}^{\circ}(1 + e_k^{\circ}) > 0,35,$$

$$\left| |\mathbf{r}_j - d_{kj}\mathbf{r}_k| \right| \leq |\mathbf{r}_j^{\circ}| + d'_{kj}|\varepsilon|^{\delta_{kj}}q_{k9}\xi_{k1}^{\circ}(1 + e_k^{\circ}), \quad k = \overline{1,3}, \quad j = \overline{4,9};$$

$$\left| |\mathbf{r}_j - d_{kj}\mathbf{r}_k| \right| \geq |\mathbf{r}_j^{\circ}| - d'_{kj}|\varepsilon|^{\delta_{kj}}|\mathbf{r}_k^{\circ}| > 0,34, \quad k = \overline{4,7}, \quad j = \overline{k+1,9}.$$

Здесь φ – угол между векторами \mathbf{r}_k , \mathbf{r}_j ; δ_{kj} – показатели в Табл. 7.1; внутренний модуль – модуль вектора, внешний модуль – модуль комплексного числа.

По непрерывности функций существует такое δ_7 , $0 < \delta_7 \leq \delta_6$, что на множестве (43.1) при $\delta = \delta_7$

$$\left| |\mathbf{r}_k| \right| > 0, \quad k = \overline{1,9}; \quad \left| |\mathbf{r}_8 - d_{98}\mathbf{r}_9| \right| > 0,$$

$$\left| |\mathbf{r}_j - d_{kj}\mathbf{r}_k| \right| > 0, \quad k = \overline{1,7}, \quad j = \overline{k+1,9}.$$

Поэтому знаменатели $|\mathbf{r}_k|^3$, $|\mathbf{r}_j - d_{kj}\mathbf{r}_k|^3$ в формулах (2.5) в ноль не обращаются.

43.4.2. Знаменатели с r_{10} . При $x = 0$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ из (10.4), (10.5) следуют соотношения:

$$|r_{10}| = q_{10\ 9} \xi_{10\ 1} (1 - e_{10} \cos E_{10}) = \quad (43.9)$$

$$= q_{10\ 9} [\xi_{10\ 1}^{\circ} + s'_1 \varepsilon^7 \cos(g_4 - 2g_3)]_0^t \times \\ \times [1 - e_{10}^{\circ} \cos(g_3 - \pi_{10}^{\circ}) - 10 s'_2 \varepsilon^9 \cos(g_4 - 2g_3)]_0^t,$$

$$||r_{10}|| \geq q_{10\ 9} \{\xi_{10\ 1}^{\circ} - s'_1 |\varepsilon|^7 [1 + \text{ch}(2b)]\} \times \\ \times \{1 - e_{10}^{\circ} \text{ch } b - 10 s'_2 |\varepsilon|^9 [1 + \text{ch}(2b)]\} > 0,86,$$

$$||r_{10}|| \leq q_{10\ 9} \{\xi_{10\ 1}^{\circ} + s'_1 |\varepsilon|^7 [1 + \text{ch}(2b)]\} \times \\ \times \{1 + e_{10}^{\circ} \text{ch } b + 10 s'_2 |\varepsilon|^9 [1 + \text{ch}(2b)]\},$$

$$b = e_{10}^{\circ} |z|, \quad z = \sin E_{10}, \quad |z| \leq 4,5.$$

Здесь внутренний модуль – модуль вектора, внешний модуль – модуль комплексного числа.

Оценим компоненты вектора r_{10} при $x = 0$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$. Из (10.4), (10.5), (43.7) следует:

$$r_{10\ 1} = q_{10\ 9} \xi_{10\ 1} \rho_1 \{\cos(g_3 - \alpha_1) - e_{10}^{\circ} \cos(\pi_{10}^{\circ} - \alpha_1) + \\ + s'_2 \varepsilon^9 [2 \cos \varphi_1 - 9 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_3]_0^t + \\ + g_m z \{-e_{10}^{\circ} \sin(\pi_{10}^{\circ} - \alpha_1) - \\ - s'_2 \varepsilon^9 [-2 \sin \varphi_1 + 9 \sin \varphi_2 - \sin \varphi_3]_0^t\},$$

$$\varphi_1 = g_3 - \alpha_1, \quad \varphi_2 = g_4 - g_3 - \alpha_1, \quad \varphi_3 = g_4 - 3g_3 + \alpha_1,$$

$$\rho_1 = (1 - \sin^2 i_{10}^{\circ} \sin^2 \Omega_{10}^{\circ})^{1/2}, \quad z = \sin E_{10}, \quad |z| \leq 4,5,$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{1 - (1 - \cos i_{10}^{\circ}) \sin^2 \Omega_{10}^{\circ}}{\rho_1}, \quad \sin \alpha_1 = \frac{(1 - \cos i_{10}^{\circ}) \cos \Omega_{10}^{\circ} \sin \Omega_{10}^{\circ}}{\rho_1},$$

$$g_m = \frac{\sqrt{1 - g_1^2 - g_2^2 - 1}}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad |g_m| \leq \frac{\sqrt{1 + \max|g_1^2 + g_2^2| - 1}}{\sqrt{\min|g_1^2 + g_2^2|}} = K,$$

$$|g_1^2 + g_2^2| \leq [e_{10}^{\circ} + s_2' |\varepsilon|^9 (11e^b + e^{3b} + 12)]^2,$$

$$|g_1^2 + g_2^2| \geq [e_{10}^{\circ} - s_2' |\varepsilon|^9 (11e^b + e^{3b} + 12)]^2,$$

$$|r_{10\ 1}| \leq r_m = q_{10\ 9} \{ \xi_{10\ 1}^{\circ} + s_1' |\varepsilon|^7 [1 + \text{ch}(2b)] \} \times \\ \times \{ \text{ch } b + \{ e_{10}^{\circ} + s_2' |\varepsilon|^9 [11 \text{ch } b + \text{ch}(3b) + 12] \} (1 + 4,5 K) \}$$

(формулы для $g_1 - g_4$, b смотрите в (43.5)).

Аналогично при $x = 0$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ получаем неравенства:

$$r_{10\ 2} = q_{10\ 9} \xi_{10\ 1} \rho_2 \{ \sin(g_3 + \alpha_2) - e_{10}^{\circ} \sin(\pi_{10}^{\circ} + \alpha_2) + \\ + s_2' \varepsilon^9 [2 \sin \psi_1 - 9 \sin \psi_2 + \sin \psi_3]_0^t + \\ + g_m z \{ e_{10}^{\circ} \cos(\pi_{10}^{\circ} + \alpha_2) - \\ - s_2' \varepsilon^9 [2 \cos \psi_1 - 9 \cos \psi_2 - \cos \psi_3]_0^t \},$$

$$r_{10\ 3} = q_{10\ 9} \xi_{10\ 1} \sin i_{10}^{\circ} \{ \sin(g_3 - \Omega_{10}^{\circ}) - e_{10}^{\circ} \sin(\pi_{10}^{\circ} - \Omega_{10}^{\circ}) - \\ - s_2' \varepsilon^9 [-2 \sin \chi_1 + 9 \sin \chi_2 - \sin \chi_3]_0^t + \\ + g_m z \{ e_{10}^{\circ} \cos(\pi_{10}^{\circ} - \Omega_{10}^{\circ}) - \\ - s_2' \varepsilon^9 [2 \cos \chi_1 - 9 \cos \chi_2 - \cos \chi_3]_0^t \},$$

$$\psi_1 = g_3 + \alpha_2, \quad \psi_2 = g_4 - g_3 + \alpha_2, \quad \psi_3 = g_4 - 3g_3 - \alpha_2,$$

$$\chi_1 = g_3 - \Omega_{10}^{\circ}, \quad \chi_2 = g_4 - g_3 - \Omega_{10}^{\circ}, \quad \chi_3 = g_4 - 3g_3 + \Omega_{10}^{\circ},$$

$$\rho_2 = (1 - \sin^2 i_{10}^{\circ} \cos^2 \Omega_{10}^{\circ})^{1/2},$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{1 - (1 - \cos i_{10}^{\circ}) \cos^2 \Omega_{10}^{\circ}}{\rho_2},$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{(1 - \cos i_{10}^{\circ}) \cos \Omega_{10}^{\circ} \sin \Omega_{10}^{\circ}}{\rho_2},$$

$$|r_{10\ 2}| \leq r_m,$$

$$|r_{10\ 3}| \leq r_m \sin i_{10}^{\circ}.$$

Используем полученные неравенства для оценки модулей при $x = 0$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$.

$$|\mathbf{r}_3 + d_{3\ 10} \mathbf{r}_{10}|^2 = |\mathbf{r}_3|^2 + 2d_{3\ 10} (\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_{10}) + d_{3\ 10}^2 |\mathbf{r}_{10}|^2,$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_3 + d_{3\ 10}\mathbf{r}_{10} - d_{j3}\mathbf{r}_j|^2 &= |\mathbf{r}_3 - d_{j3}\mathbf{r}_j|^2 + 2d_{3\ 10}(\mathbf{r}_3 - d_{j3}\mathbf{r}_j, \mathbf{r}_{10}) + \\ &+ d_{3\ 10}^2|\mathbf{r}_{10}|^2, \quad j = 1, 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_j - d_{3j}\mathbf{r}_3 - d_{j\ 10}\mathbf{r}_{10}|^2 &= |\mathbf{r}_j - d_{3j}\mathbf{r}_3|^2 - 2d_{j\ 10}(\mathbf{r}_j - d_{3j}\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_{10}) + \\ &+ d_{j\ 10}^2|\mathbf{r}_{10}|^2, \quad j = \overline{4,9}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_3 + d_{3\ 10}\mathbf{r}_{10}\| &\geq [|\mathbf{r}_3|_{\min}^2 - 2d'_{3\ 10}|\varepsilon|^{\delta_{3\ 10}}|\mathbf{r}_3|_{\max}r_m(2 + \sin i_{10}^\circ) - \\ &- (d'_{3\ 10})^2|\varepsilon|^{2\delta_{3\ 10}}\|\mathbf{r}_{10}\|_{\max}^2]^{1/2} > 0,97, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_3 + d_{3\ 10}\mathbf{r}_{10} - d_{j3}\mathbf{r}_j\| &\geq \\ &\geq \left[\|\mathbf{r}_3 - d_{j3}\mathbf{r}_j\|_{\min}^2 - 2d'_{3\ 10}|\varepsilon|^{\delta_{3\ 10}} \|\mathbf{r}_3 - d_{j3}\mathbf{r}_j\|_{\max} r_m(2 + \sin i_{10}^\circ) - \right. \\ &\quad \left. - (d'_{3\ 10})^2|\varepsilon|^{2\delta_{3\ 10}}\|\mathbf{r}_{10}\|_{\max}^2 \right]^{1/2} > 0,29, \quad j = 1, 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_j - d_{3j}\mathbf{r}_3 - d_{j\ 10}\mathbf{r}_{10}\| &\geq \\ &\geq \left[\|\mathbf{r}_j - d_{3j}\mathbf{r}_3\|_{\min}^2 - 2d'_{j\ 10}|\varepsilon|^{\delta_{j\ 10}} \|\mathbf{r}_j - d_{3j}\mathbf{r}_3\|_{\max} r_m(2 + \sin i_{10}^\circ) - \right. \\ &\quad \left. - (d'_{j\ 10})^2|\varepsilon|^{2\delta_{j\ 10}}\|\mathbf{r}_{10}\|_{\max}^2 \right]^{1/2} > 0,37, \quad j = \overline{4,9}. \end{aligned}$$

Здесь $|\cdot|_{\max}$, $|\cdot|_{\min}$ – максимальные и минимальные значения в (43.8), (43.9).

По непрерывности функций существует такое δ_8 , $0 < \delta_8 \leq \delta_7$, что на множестве (43.1) при $\delta = \delta_8$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}_{10}\|, \quad \|\mathbf{r}_3 + d_{3\ 10}\mathbf{r}_{10}\|, \quad \|\mathbf{r}_3 + d_{3\ 10}\mathbf{r}_{10} - d_{j3}\mathbf{r}_j\|, \quad j = 1, 2; \\ \|\mathbf{r}_j - d_{3j}\mathbf{r}_3 - d_{j\ 10}\mathbf{r}_{10}\|, \quad j = \overline{4,9}, \end{aligned}$$

положительны и знаменатели в выражениях (2.5) в ноль не обращаются.

Это означает, что векторы F_k ($k = \overline{4,9}$) и δF_k ($k = \overline{1,3,10}$) аналитичны на множестве (43.1) при $\delta = \delta_8$.

$$\delta F_k = F_k + b_{kk} \frac{r_k}{|r_k|^3}.$$

43.5. Векторы J_{kj}, \tilde{J}_{kj}

43.5.1. $k = 1, 2, 10$. Из (3.5), (9.3) следует, что J_{kj}, \tilde{J}_{kj} зависят от

$$\xi_{k1}, e_k, i_k, \cos \Omega_k, \sin \Omega_k, \cos \pi_k, \sin \pi_k, \cos E_k, \sin E_k$$

и векторов h_{k1}, h_{k2}, h_{k3} , которые аналитичны на множестве (43.1) при $\delta = \delta_8$. Это доказано в п. 43.2 и следует из формул (3.1) для h_{kj} .

Функции $\xi_{k1}, (1 - e_k \cos E_k), (1 - e_k^2)$ на множестве (43.1) в ноль не обращаются. Это следует из п. 43.3, 43.4. В формулах для J_{kj}, \tilde{J}_{kj} используются следующие равенства:

$$\frac{1}{\xi_{12}} = \frac{1}{\xi_{12}^\circ + \varepsilon^2 \eta_{12}}, \quad \frac{1}{\xi_{22}} = \frac{1}{\xi_{22}^\circ + \eta_{22}}, \quad \frac{1}{\xi_{102}} = \frac{e_{10*}}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad (43.10)$$

$$\frac{i_k}{\xi_{k3} \sin i_k} = \frac{i_{k*}}{\sin(i_{k*}(\xi_{k3}^\circ + \eta_{k3}))}, \quad \frac{\xi_{k3}}{i_k} \operatorname{tg} \frac{i_k}{2} = \frac{1}{i_{k*}} \operatorname{tg} \left(\frac{i_{k*}(\xi_{k3}^\circ + \eta_{k3})}{2} \right).$$

$\xi_{k2}^\circ > 0$. Сумма $(g_1^2 + g_2^2)$ на множестве (43.1) в ноль не обращается (смотрите п. 43.2.4). В формулу (9.3) для \tilde{J}_{106} входит функция

$$Q_{10} = \frac{1 - \sqrt{1 - (e_{10*} \xi_{102}^\circ)^2 (g_1^2 + g_2^2)}}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}. \quad (43.11)$$

При $x = 0, |\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ справедливы соотношения:

$$\sin(i_{k*}(\xi_{k3}^\circ + \eta_{k3})) = i_{k*} \xi_{k3}^\circ \int_0^1 \cos(i_{k*} \xi_{k3}^\circ u) du, \quad |i_{k*} \xi_{k3}^\circ| < 0,13,$$

$$\left| \int_0^1 \cos(i_{k*} \xi_{k3}^\circ u) du \right| \geq \operatorname{Re} \left(\int_0^1 \cos(i_{k*} \xi_{k3}^\circ u) du \right) \geq \cos |i_{k*} \xi_{k3}^\circ| > 0,99,$$

$$\left| \cos \left(\frac{i_{k*} \xi_{k3}^\circ}{2} \right) \right| \geq \cos \left| \frac{i_{k*} \xi_{k3}^\circ}{2} \right| > 0,99,$$

$$|\tilde{g}_1^2 + \tilde{g}_2^2| \geq 1 - \frac{s'_2|\varepsilon|^5}{e'_{10} \cdot \xi_{10}^{\circ 2}} (11e^b + e^{3b} + 12) > 0,33,$$

$$|1 - (e_{10} \cdot \xi_{10}^{\circ 2})^2 (\tilde{g}_1^2 + \tilde{g}_2^2)| \geq \\ \geq 1 - (e'_{10} \cdot \xi_{10}^{\circ})^2 |\varepsilon|^8 \left[1 + \frac{s'_2|\varepsilon|^5}{e'_{10} \cdot \xi_{10}^{\circ 2}} (11e^b + e^{3b} + 12) \right] > 0,98,$$

$$b = e_{10}^{\circ} |z|, \quad |z| \leq 4,5.$$

Здесь использованы неравенства

$$|\cos z| \geq \operatorname{Re}(\cos z) \geq \cos|z| \quad \text{при } |z| < \pi/2, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Неравенства для $(\tilde{g}_1^2 + \tilde{g}_2^2)$ получены так же, как неравенства для $(g_1^2 + g_2^2)$ в п. 43.2.4. Отсюда следует, что существует такое δ_9 , $0 < \delta_9 \leq \delta_8$, что функции (43.10), (43.11) аналитичны на множестве (43.1) при $\delta = \delta_9$.

По теореме о сложной функции отсюда и из (3.5), (9.3) следует, что

$$J_{kj} = q_{kj} J'_{kj}, \quad j = \overline{1,5}, \quad J_{k6} = q_{k6} J'_{k6}, \\ \tilde{J}_{102} = \varepsilon^{-5} q_{101} \tilde{J}'_{102}, \quad \tilde{J}_{105} = \varepsilon^{-5} q_{101} \tilde{J}'_{105},$$

где q_{kj} , q_{k6} , q_{101} – степенные функции ε в (8.1). J'_{kj} , J'_{k6} , \tilde{J}'_{102} , \tilde{J}'_{105} , \tilde{J}'_{106} – аналитические векторы на множестве (43.1) при $\delta = \delta_9$.

43.5.2. $k = 3$. Из (3.5) (9.3) следует, что J_{3j} , \tilde{J}_{3j} зависят от оскулирующих элементов и векторов \mathbf{h}_{31} , \mathbf{h}_{32} , \mathbf{h}_{33} . Функции

$$\xi_{31}, e_3, \cos \pi_3, \sin \pi_3, \cos E_3, \sin E_3$$

аналитичны на множестве (43.1), как показано в п. 43.2. Элементы i_3 , Ω_3 входят в векторы через функции (43.3), которые аналитичны на множестве (43.1), как показано в п. 43.2.3. Аналитичность векторов \mathbf{h}_{31} , \mathbf{h}_{32} следует из формул (43.3), (43.7). Аналитичность вектора \mathbf{h}_{33} следует из формул (3.1), (43.3).

Функции ξ_{31} , $(1 - e_3 \cos E_3)$, $(1 - e_3^2)$ на множестве (43.1) в ноль не обращаются. Это следует из п. 43.3, 43.4. В формулах для J_{3j} , \tilde{J}_{3j} используются следующие равенства:

$$\frac{1}{\xi_{32}} = \frac{1}{\xi_{32}^{\circ} + \eta_{32}}, \quad \operatorname{tg} \left(\frac{i_3}{2} \right) \cos \Omega_3 = f_{31} \operatorname{tg} \left(\frac{i_3 \cdot \xi_{33}^{\circ}}{2} \right) + \varepsilon^2 \eta_{33}, \quad (43.12)$$

$$\frac{q_{36}\xi_{33}}{i_3} = \frac{q_{36}}{i_{3*}}, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{i_3}{2}\right) \sin \Omega_3 = f_{32} \operatorname{tg}\left(\frac{i_3 \cdot \xi_{33}^{\circ}}{2}\right) + \varepsilon^2 \eta_{34},$$

$$\frac{1}{\cos^2(i_3/2)} = 1 + \left[f_{31} \operatorname{tg}\left(\frac{i_3^{\circ}}{2}\right) + \varepsilon^2 \eta_{33} \right]^2 + \left[f_{32} \operatorname{tg}\left(\frac{i_3^{\circ}}{2}\right) + \varepsilon^2 \eta_{34} \right]^2.$$

В \bar{J}_{36} входит функция

$$Q_3 = \frac{1 - \sqrt{1 - e_{3*}^2 (\xi_{32}^{\circ} + \eta_{32})^2}}{\xi_{32}^{\circ} + \eta_{32}}. \quad (43.13)$$

При $x = 0$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ справедливы неравенства

$$\left| \cos\left(\frac{i_3 \cdot \xi_{33}^{\circ}}{2}\right) \right| \geq \cos\left|\frac{i_3' \cdot \xi_{33}^{\circ} \varepsilon^{19}}{2}\right| > 0,99,$$

$$|1 - e_{3*}^2 (\xi_{32}^{\circ} + \eta_{32})^2| \geq 1 - (e_{3*}' \xi_{32}^{\circ})^2 |\varepsilon|^{12} > 0,99.$$

Поэтому существует такое δ_{10} , $0 < \delta_{10} \leq \delta_9$, что функции (43.12), (43.13) аналитичны на множестве (43.1) при $\delta = \delta_{10}$.

По теореме о сложной функции, отсюда и из (3.5), (9.3) следует, что

$$J_{3j} = q_{3j} J'_{3j}, \quad j = 1, 2, 5; \quad J_{36} = q_{38} J'_{36}, \quad \bar{J}_{3j} = q_{31} \bar{J}'_{3j}, \quad j = 3, 4;$$

где q_{3j} , q_{38} – степенные функции ε в (8.1). J'_{3j} , J'_{36} , \bar{J}'_{3j} , \bar{J}'_{36} – аналитические векторы на множестве (43.1) при $\delta = \delta_{10}$.

43.6. Уравнения для η_{kj}

43.6.1. $k = \overline{1, 3}$. Рассмотрим уравнения (9.2). Из п. 43.4, 43.5 следует, что правые части уравнений (9.2) аналитичны на множестве (43.1) при $\delta = \delta_{10}$. Отрицательные показатели степеней ε в J_{kj} , \bar{J}_{kj} и сомножителях компенсируются положительными показателями степеней ε в δF_k .

43.6.2. $k = \overline{4, 9}$. Аналитичность правых частей уравнений (9.2) на множестве (43.1) при $\delta = \delta_{10}$ следует из п. 43.4.

43.6.3. $k = 10$. В формулах (9.3) для Φ_j , $j = \overline{1, 6}$, используется равенство $e_k^{\circ} = e_{k*} \xi_{k2}^{\circ}$, поэтому нужно проверить аналитичность некоторых выражений.

Дробь $i_{10}/(\xi_{103} \sin i_{10})$ рассмотрена в (43.10). ξ_{101} не обращается в ноль (следует из п. 43.4.2). Аналитичность подкоренных выражений в равенствах

$$e_{10} = e_{10}^{\circ} \sqrt{\bar{g}_1^2 + \bar{g}_2^2}, \quad \sqrt{1 - e_{10}^2} = \sqrt{1 - (e_{10}, \xi_{102}^{\circ})^2 (\bar{g}_1^2 + \bar{g}_2^2)}$$

доказана в п. 43.5. При $x = 0$, $|\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}$ справедливо неравенство

$$|\mathbf{r}_3| = q_{39} \xi_{31}^{\circ} |1 - e_{3, \xi_{32}^{\circ} f_{35}}| > 0,98.$$

Поэтому существует такое δ_{11} , $0 < \delta_{11} \leq \delta_{10}$, что на множестве (43.1) при $\delta = \delta_{11}$

$$|\mathbf{r}_3| > 0.$$

Отсюда следует, что функции Φ_j , $j = \overline{1, 6}$, в (9.3) аналитичны на множестве (43.1) при $\delta = \delta_{11}$.

Аналитичность остальных выражений в уравнениях (9.2) для η_{10j} рассмотрена в п. 43.4, 43.5. Для функций $(1 - e_3 \cos E_3)$, $(1 - e_{10} \cos E_{10})$ используются постоянные e_3° , e_{10}° , не зависящие от ε .

Таким образом, правые части уравнений (9.2) для η_{10j} являются суммами аналитических на (43.1) функций. Отрицательные показатели степеней ε в J_{10j} , \tilde{J}_{102} и сомножителях компенсируются положительными показателями степеней ε в δF_{10} , $\tilde{\delta F}_{10}$.

43.7. Аналитичность в земной модели

Правые части уравнений (9.2) аналитичны на множестве (43.1) и пропорциональ положительным степеням ε . Отсюда, из п. 43.1 и Определения 41.1 следует

Результат 43.1. Задача (10.1) является почти регулярной задачей Коши, удовлетворяющей следующим условиям:

Условие 43.1. $F(0, 0, f) = 0$ при f из множества (43.1).

Условие 43.2. $F(x, \varepsilon, f)$ – аналитическая функция на множестве (43.1) при $\delta = \delta_{11} > 0$.

Условие 43.3. $f(t, \varepsilon)$ непрерывна по t и $f(t, \varepsilon) \in D_f$ при всех $t \geq 0$, $\varepsilon > 0$.

§44. Свободное падение тела. Оценка точности решения

44.1. Исходные соотношения

Введём остаточный член асимптотики (16.1):

$$u = (u_1, u_2), \quad u_1 = r - r^{(\leq 1)}, \quad u_2 = v - v^{(\leq 1)}.$$

Задача Коши для u следует из (14.14), (16.1):

$$\frac{du_1}{dt} = u_2, \quad \frac{du_2}{dt} = I(u, t), \quad u_1(0) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad (44.1)$$

$$I(u, t) = \frac{1}{a} \left\{ e_1 - \frac{e_1 + \varepsilon r^{(\leq 1)} + \varepsilon u_1}{|e_1 + \varepsilon r^{(\leq 1)} + \varepsilon u_1|^3} - \right. \\ \left. - 2\varepsilon\sqrt{a} [e_2, v^{(\leq 1)} + u_2] - \varepsilon^2 [e_2, [e_2, r^{(\leq 1)} + u_1]] \right\} + \\ + \varepsilon r^{(0)} - 3\varepsilon k(k, r^{(0)}) + 2\varepsilon \cos \varphi [j, v^{(0)}] + 2\varepsilon \sin \varphi [k, v^{(0)}].$$

Здесь $r^{(0)}$, $v^{(0)}$ – функции (14.18), a – функция (14.13). Зависимость функций от ε не указывается, так как при вычислениях используется значение (14.10): $\varepsilon \approx 3,44 \cdot 10^{-3}$.

Задача (44.1) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$u_1 = \int_0^t (t-s) \cdot I(u(s), s) ds, \quad u_2 = \int_0^t I(u(s), s) ds,$$

из которой следуют неравенства:

$$\|u_1\| \leq \int_0^t (t-s) \cdot [\|I(0, s)\| + \|\Delta I(u(s), s)\|] ds, \quad (44.2)$$

$$\|u_2\| \leq \int_0^t [\|I(0, s)\| + \|\Delta I(u(s), s)\|] ds,$$

$$\Delta I(u, t) = I(u, t) - I(0, t) =$$

$$= \frac{1}{a} \left\{ \frac{e_1 + \varepsilon r^{(\leq 1)}(t)}{|e_1 + \varepsilon r^{(\leq 1)}(t)|^3} - \frac{e_1 + \varepsilon r^{(\leq 1)}(t) + \varepsilon u_1}{|e_1 + \varepsilon r^{(\leq 1)}(t) + \varepsilon u_1|^3} - 2\varepsilon\sqrt{a} [e_2, u_2] - \varepsilon^2 [e_2, [e_2, u_1]] \right\}.$$

44.2. Оценка остаточного члена

При $t = 0$ знаменатель в уравнениях (44.1) в ноль не обращается (смотрите (15.5)). Выберем δ из множества $0 < \delta < |\mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{r}^0|/\varepsilon$. Тогда

$$|\mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{r}^0| > |\mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{r}^0| - \varepsilon \delta > 0.$$

По непрерывности функций знаменатель в (44.1) не обращается в ноль на множестве

$$|u_1| \leq \delta, \quad |\mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{r}^{(\leq 1)}(t)| > \varepsilon \delta.$$

Оценим на этом множестве остаточный член.

Обозначим

$$d(t) = \max_{0 \leq s \leq t} (|u_1(s)|, |u_2(s)|).$$

Из (44.2) следует неравенство для d :

$$d(t) \leq f(t) + g(t) \cdot d(t), \quad (44.3)$$

$$f(t) = \sqrt{3} \max \left[\int_0^t (t-s) \cdot |I(0, s)| ds, \int_0^t |I(0, s)| ds \right],$$

$$g(t) = \max \left[\int_0^t (t-s) I_1(s) ds, \int_0^t I_1(s) ds \right],$$

$$I_1(t) = \frac{4\sqrt{3}\varepsilon}{a [|\mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{r}^{(\leq 1)}(t)| - \varepsilon \delta]^2 |\mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{r}^{(\leq 1)}(t)|} + \frac{2\sqrt{3}\varepsilon}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{3}\varepsilon^2}{a}.$$

Формула для I_1 получена с помощью следующих оценок:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\mathbf{h}}{|\mathbf{h}|^3} - \frac{\mathbf{h} + \varepsilon \mathbf{u}_1}{|\mathbf{h} + \varepsilon \mathbf{u}_1|^3} \right\| &= \left\| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\mathbf{h} + (1-\theta)\varepsilon \mathbf{u}_1}{|\mathbf{h} + (1-\theta)\varepsilon \mathbf{u}_1|^3} \right] d\theta \right\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \left| \frac{-\varepsilon \mathbf{u}_1}{|\mathbf{h} + (1-\theta)\varepsilon \mathbf{u}_1|^3} + \frac{3\varepsilon [\mathbf{h} + (1-\theta)\varepsilon \mathbf{u}_1](\mathbf{h} + (1-\theta)\varepsilon \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)}{|\mathbf{h} + (1-\theta)\varepsilon \mathbf{u}_1|^5} \right| d\theta \leq \\ &\leq \int_0^1 \frac{4\varepsilon |\mathbf{u}_1| d\theta}{|\mathbf{h} + (1-\theta)\varepsilon \mathbf{u}_1|^3} = \int_0^1 \frac{4\varepsilon |\mathbf{u}_1| d\theta}{|\mathbf{h} + \theta \varepsilon \mathbf{u}_1|^3} \leq \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^1 \frac{4\varepsilon |u_1| d\theta}{(|h| - \theta\varepsilon|u_1|)^3} = \frac{2\varepsilon|u_1|(2|h| - \varepsilon|u_1|)}{(|h| - \varepsilon|u_1|)^2|h|^2} \leq \frac{4\varepsilon|u_1|}{(|h| - \varepsilon|u_1|)^2|h|},$$

$$\mathbf{h} = \mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{r}^{(\leq 1)}.$$

Из (44.3) следует неравенство

$$d(t) \leq \frac{f(t)}{1-g(t)},$$

если

$$|\mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{r}^{(\leq 1)}(t)| > \varepsilon \delta, \quad f(t) < \delta [1 - g(t)]. \quad (44.4)$$

Используя теорему о продолжении решения обыкновенных дифференциальных уравнений в области гладкости правых частей, можно доказать, что решение задачи (44.1) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам

$$|u_i(t)| \leq d(t) \leq \Delta u_i^{(0)}(t) = \frac{f(t)}{1-g(t)}, \quad i = 1, 2, \quad (44.5)$$

при всех значениях t из связной компоненты множества (44.4), содержащей точку $t = 0$. Полученный результат есть, фактически, следствие Теоремы 39.5.

Для разных значений δ получаются разные интервалы существования решения. В данном случае достаточно найти интервал, содержащий момент падения тела на Землю.

Оценка момента падения тела на Землю находится из следующего условия: шар с центром в точке, движущейся по закону $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(\leq 1)}(t)$, и с радиусом $\Delta u_1^{(0)}(t)$ касается в момент падения поверхности Земли (с внутренней и с внешней стороны):

$$t_-^{(0)} \leq t_n \leq t_+^{(0)}, \quad |\mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{r}^{(\leq 1)}(t_+^{(0)})| - \Delta u_1^{(0)}(t_+^{(0)}) = 1, \quad (44.6)$$

$$|\mathbf{e}_1 + \varepsilon \mathbf{r}^{(\leq 1)}(t_-^{(0)})| + \Delta u_1^{(0)}(t_-^{(0)}) = 1.$$

44.3. Уточнение оценок

Пусть при $0 \leq t \leq t_+^{(n)}$ справедливы неравенства

$$|u_i(t)| \leq \Delta u_i^{(n)}(t), \quad t_-^{(n)} \leq t_n \leq t_+^{(n)}, \quad i = 1, 2.$$

Тогда из (44.2), (44.6) получим рекуррентные формулы для погрешностей:

$$|u_1(t)| \leq \sqrt{3} \int_0^t (t-s) \cdot [|I(0,s)| + I_2(\Delta u^{(n)}(s), s)] ds = \Delta u_1^{(n+1)}(t), \quad (44.7)$$

$$|u_2(t)| \leq \sqrt{3} \int_0^t [|I(0,s)| + I_2(\Delta u^{(n)}(s), s)] ds = \Delta u_2^{(n+1)}(t),$$

$$|e_1 + \varepsilon r^{(\leq 1)}(t_+^{(n+1)})| - \Delta u_1^{(n+1)}(t_+^{(n+1)}) = 1,$$

$$|e_1 + \varepsilon r^{(\leq 1)}(t_-^{(n+1)})| + \Delta u_1^{(n+1)}(t_-^{(n+1)}) = 1, \quad t_-^{(n+1)} \leq t_n \leq t_+^{(n+1)},$$

$$I_2(u, t) = \frac{4\varepsilon u_1}{a [|e_1 + \varepsilon r^{(\leq 1)}(t) - u_1 |^2 |e_1 + \varepsilon r^{(\leq 1)}(t)|]} + \frac{2\varepsilon u_2}{\sqrt{a}} + \frac{\varepsilon^2 u_1}{a},$$

$$\Delta u^{(n)} = (\Delta u_1^{(n)}, \Delta u_2^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

44.4. Переход к размерным переменным

В Табл. 17.2 даны погрешности решения задачи о свободном падении тела. Оценки момента падения тела получены из неравенств (44.6), (44.7), оценки остаточного члена получены из (44.5), (44.7):

$$T_- = T_* \lim_{n \rightarrow \infty} t_-^{(n)}, \quad T_+ = T_* \lim_{n \rightarrow \infty} t_+^{(n)}, \quad T_- \leq T_n \leq T_+,$$

$$\delta R_n = R_* \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta u_1^{(n)}(t_+^{(n)}), \quad \delta V_n = V_* \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta u_2^{(n)}(t_+^{(n)}),$$

$$|R(T) - R^{(\leq 1)}(T)| \leq \delta R_n, \quad |V(T) - V^{(\leq 1)}(T)| \leq \delta V_n, \quad 0 \leq T \leq T_+.$$

§45. Собственное вращение Луны.

Аналитичность в математической модели

Докажем аналитичность правых частей уравнений (32.4) на множестве (33.3):

$$\|x\| \leq \delta, \quad 0 \leq t \leq \bar{t}, \quad |\varepsilon| \leq \bar{\varepsilon}, \quad f \in D_f, \quad (45.1)$$

$$x \in \mathbf{C}^5, \quad t \in \mathbf{R}, \quad \varepsilon \in \mathbf{C},$$

$$D_f = \{f: f_i^2 + f_{i+1}^2 = 1; i = 1, 3\} \subset \mathbf{R}^4.$$

Здесь $\delta > 0$, $\bar{t} \geq 1$, $\bar{\varepsilon} > 0,1$.

45.1. Аналитичность функций $\cos g_2, \sin g_2, \cos \theta, \sin \theta$

Из (32.7), (33.2) следует, что $\cos g_2, \sin g_2$ – аналитические функции x, t, ε, f на множестве (45.1) при любых значениях $\delta > 0$, $\bar{t} > 0$, $\bar{\varepsilon} > 0$.

Из (32.5), (32.7), (33.1) следует формула

$$\theta = \varepsilon [\theta^{o'} + x_2 + b'_3 \varepsilon^2 (f_1 - \cos \Phi^{o'}) + b'_4 \varepsilon^2 (f_2 - \sin \Phi^{o'})]. \quad (45.2)$$

Поэтому $\cos \theta, \sin \theta$ – аналитические функции x, t, ε, f на множестве (45.1) при любых значениях $\delta > 0$, $\bar{t} > 0$, $\bar{\varepsilon} > 0$.

45.2. Аналитичность функции $\varepsilon/\sin \theta$

Оценим на множестве (45.1) аналитическую функцию

$$G = \frac{\sin \theta}{\varepsilon}.$$

Имеем:

$$\sin \theta = \theta \left(1 - 2 \int_0^1 \sin^2 \frac{v\theta}{2} dv \right).$$

Если $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i \in \mathbf{C}$, то

$$|\sin^2 \alpha| = \frac{1}{2} [\operatorname{ch}(2\alpha_i) - \cos(2\alpha_r)],$$

$$\left| 2 \int_0^1 \sin^2 \frac{v\theta}{2} dv \right| \leq 2 \int_0^1 \left| \sin^2 \frac{v\theta}{2} \right| dv = \int_0^1 [\operatorname{ch}(v\theta_i) - \cos(v\theta_r)] dv \leq$$

$$\int_0^1 [\operatorname{ch}(v\bar{\theta}) - \cos(v\bar{\theta})] dv = \frac{\operatorname{sh} \bar{\theta} - \sin \bar{\theta}}{\bar{\theta}}.$$

Здесь

$$\theta = \theta_r + i\theta_i \in \mathbf{C}, \quad |\theta_r| \leq |\theta|, \quad |\theta_i| \leq |\theta|,$$

$$|\theta| \leq \bar{\theta} = \bar{\varepsilon} \left[|\theta^{o'}| + \delta + \bar{\bar{\theta}} \right],$$

$$\bar{\bar{\theta}} = \bar{\varepsilon}^2 (|b'_3| + |b'_4|) + \bar{\varepsilon}^2 |b'_3 \cos \Phi^{o'} + b'_4 \sin \Phi^{o'}|.$$

Неравенство для θ получено из (45.1), (45.2).

$$G = \frac{\sin \theta}{\varepsilon} = [\theta^{o'} + x_2 + b'_3 \varepsilon^2 (f_1 - \cos \Phi^{o'}) + b'_4 \varepsilon^2 (f_2 - \sin \Phi^{o'})] \times \\ \times \left(1 - 2 \int_0^1 \sin^2 \frac{\nu \theta}{2} d\nu \right),$$

$$\left| \frac{\sin \theta}{\varepsilon} \right| \geq (|\theta^{o'}| - \delta - \bar{\bar{\theta}}) \left(1 - \frac{\text{sh } \bar{\theta} - \sin \bar{\theta}}{\bar{\theta}} \right).$$

При $\delta = 0$, $\bar{\varepsilon} = 0,1$ справедливы неравенства

$$0,027 < \bar{\theta} \Big|_{\delta=0, \bar{\varepsilon}=0,1} < 0,028, \quad \left| \frac{\sin \theta}{\varepsilon} \right|_{\delta=0, \bar{\varepsilon}=0,1} > 0,262.$$

Здесь использованы численные значения параметров со штрихами. Так как функция G непрерывна по переменным x , ε , f и не зависит от t , то найдутся такие значения $\delta_1 > 0$, $\varepsilon_1 > 0,1$, что при $\delta = \delta_1$, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1$ и любом значении $\bar{t} > 0$

$$\left| \frac{\sin \theta}{\varepsilon} \right| \geq \text{const} > 0$$

на множестве (45.1). Отсюда следует, что $\varepsilon/\sin \theta$ – аналитическая функция на множестве (45.1) при $\delta = \delta_1$, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_1$ и любом значении $\bar{t} > 0$.

45.3. Введение функции z

45.3.1. Чтобы оценить функции от Φ , рассмотрим

$$z = \text{ctg } \theta (b_5 \cos g_2 \cos \Phi - b_6 \sin g_2 \sin \Phi). \quad (45.3)$$

Из (32.5) следует равенство

$$\Phi = g_1 + \varepsilon x_3 + z - \text{ctg } \theta^\circ (b_5 \cos B \cos \Phi^\circ - b_6 \sin B \sin \Phi^\circ).$$

Отсюда и из (32.7), (45.3) получаем уравнение для z :

$$z + h_1 \cos z + h_2 \sin z = 0. \quad (45.4)$$

Здесь

$$h_1 = -\varepsilon^3 \operatorname{ctg} \theta \{b'_5 [f_3 \cos(\Delta g_2) - f_4 \sin(\Delta g_2)](f_1 \cos p - f_2 \sin p) - (45.5) \\ - b'_6 [f_4 \cos(\Delta g_2) + f_3 \sin(\Delta g_2)](f_2 \cos p + f_1 \sin p)\},$$

$$h_2 = \varepsilon^3 \operatorname{ctg} \theta \{b'_5 [f_3 \cos(\Delta g_2) - f_4 \sin(\Delta g_2)](f_2 \cos p + f_1 \sin p) + \\ + b'_6 [f_4 \cos(\Delta g_2) + f_3 \sin(\Delta g_2)](f_1 \cos p - f_1 \sin p)\},$$

$$\Delta g_2 = \varepsilon x_4 - b'_2 \varepsilon t,$$

$$p = \varepsilon x_3 - \varepsilon^3 \operatorname{ctg} (\theta' \varepsilon) (b'_5 f_3 \cos \Phi' - b'_6 f_4 \sin \Phi'),$$

θ вычисляется по формуле (45.2). Уравнение (45.4) задаёт z как неявную функцию от x, t, ε, f .

45.3.2. Чтобы доказать существование решения уравнения (45.4), оценим функции h_1, h_2 . Так как при $z \in \mathbb{C}$

$$|\cos z| \leq \operatorname{ch}(\operatorname{Im} z) \leq \operatorname{ch} |z|, \quad |\sin z| \leq \operatorname{ch}(\operatorname{Im} z) \leq \operatorname{ch} |z|,$$

то из (45.5) следуют неравенства

$$|h_1| \leq h_*, \quad |h_2| \leq h_*,$$

$$h_* = \varepsilon^2 \frac{|\cos \theta|}{|\sin \theta / \varepsilon|} (|b'_5| + |b'_6|) \operatorname{ch} |\Delta g_2| \cdot \operatorname{ch} |p|,$$

$$|\Delta g_2| \leq \bar{\varepsilon} (\delta + |b'_2| \bar{t}),$$

$$|p| \leq \bar{\varepsilon} \delta + \bar{\varepsilon}^2 \frac{|\cos(\theta' \varepsilon)|}{|\sin(\theta' \varepsilon) / \varepsilon|} (|b'_5 \cos \Phi'| + |b'_6 \sin \Phi'|),$$

$$|\cos \theta| \leq \operatorname{ch} \bar{\theta}, \quad |\cos(\theta' \varepsilon)| \leq \operatorname{ch}(\theta' \bar{\varepsilon}).$$

Так же, как в п. 45.2 оценили $\sin \theta / \varepsilon$, оценим $\sin(\theta' \varepsilon) / \varepsilon$:

$$\left| \frac{\sin(\theta' \varepsilon)}{\varepsilon} \right| \geq |\theta'| \left[1 - \frac{\operatorname{sh}(\theta' \bar{\varepsilon}) - \sin(\theta' \bar{\varepsilon})}{\theta' \bar{\varepsilon}} \right].$$

При $\delta = 0, \bar{t} = 1, \bar{\varepsilon} = 0,1$ справедливы неравенства

$$\left| \frac{\sin(\theta' \varepsilon)}{\varepsilon} \right| > 0,268, \quad |\cos \theta| < 1,0004, \quad |\cos(\theta' \varepsilon)| < 1,0004,$$

$$|\Delta g_2| < 0,028, \quad |p| < 0,024, \quad |h_1| < 0,049, \quad |h_2| < 0,049.$$

Из непрерывности функций (45.5) по x, t, ε, f следует: существуют такие значения δ_2 ($0 < \delta_2 \leq \delta_1$), $t_2 \geq 1$, ε_2 ($0,1 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$), что при $\delta = \delta_2$, $\bar{t} = t_2$, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_2$ на множестве (45.1) справедливы неравенства

$$|h_1| < 0,1, \quad |h_2| < 0,1.$$

45.3.3. При $x = 0, t = 0, \varepsilon = 0,1$ функции Φ, z принимают значения $\Phi = \Phi^{0'}$, $z \approx 0,018$. Это следует из (32.5), (32.7), (45.3).

Рассмотрим решение уравнения (45.4) в области

$$z \in \mathbf{C}, \quad |z| < 1. \quad (45.6)$$

На границе $|z| = 1$ этой области справедливы неравенства

$$|h_1 \cos z + h_2 \sin z| \leq (|h_1| + |h_2|) \operatorname{ch} |z| < 0,2 \operatorname{ch} 1 < 0,309 < 1 = |z|.$$

По Теореме 43.1 Руше уравнение (45.4) имеет столько же корней в области (45.6), сколько и уравнение

$$z = 0.$$

Таким образом, при всех значениях x, t, ε, f из множества (45.1) при $\delta = \delta_2$, $\bar{t} = t_2$, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon_2$ уравнение (45.4) имеет единственное решение в области (45.6).

45.3.4. Оценим производную P левой части уравнения (45.4) по z на множестве (45.1), (45.6). Имеем:

$$P = 1 - h_1 \sin z + h_2 \cos z,$$

$$|P| \geq 1 - (|h_1| + |h_2|) \operatorname{ch} z > 1 - 0,2 \operatorname{ch} 1 > 0,691 > 0.$$

Пусть $x_*, t_*, \varepsilon_*, f_*$ принадлежат множеству (45.1). Тогда, как доказано, существует единственный корень z_* уравнения (45.4), принадлежащий области (45.6). В окрестности точки

$$x = x_*, \quad t = t_*, \quad \varepsilon = \varepsilon_*, \quad f = f_*, \quad z = z_*, \quad (45.7)$$

левая часть уравнения (45.4) – аналитическая функция x, t, ε, f, z и её производная по z не равна нулю. По теореме об обратной функции суще-

ствуется окрестность точки (45.7), в которой z – аналитическая функция переменных x, t, ε, f . Отсюда следует, что z – аналитическая функция переменных x, t, ε, f на множестве (45.1) при $\delta = \delta_2, \bar{t} = t_2, \bar{\varepsilon} = \varepsilon_2$.

45.4. Аналитичность функций $\cos \Phi, \sin \Phi$

Из (33.2), (45.3), (45.5) следуют формулы

$$\cos \Phi = f_1 \cos(z + p) - f_2 \sin(z + p),$$

$$\sin \Phi = f_2 \cos(z + p) + f_1 \sin(z + p).$$

Поэтому, по теореме о сложной функции, $\cos \Phi, \sin \Phi$ являются аналитическими функциями переменных x, t, ε, f на множестве (45.1) при $\delta = \delta_2, \bar{t} = t_2, \bar{\varepsilon} = \varepsilon_2$.

45.5. Аналитичность правых частей уравнений (32.4)

Правые части уравнений (32.4) являются многочленами от функций $\cos \theta, \varepsilon / \sin \theta, \cos g_2, \sin g_2, \cos \Phi, \sin \Phi, \varepsilon$ и компонент векторов x, f . По теореме о сложной функции, правые части аналитичны на множестве (45.1). Кроме того, они пропорциональны положительным степеням ε . Отсюда, из формул (33.1) и из Определения 41.1 следует

Результат 45.1. Задача (33.1) является почти регулярной задачей Коши, удовлетворяющей следующим условиям:

Условие 45.1. $F(x, t, 0, f) = 0$ при x, t, f из множества (45.1) при $\delta = \delta_2 > 0, \bar{t} = t_2 \geq 1$.

Условие 45.2. $F(x, t, \varepsilon, f)$ – аналитическая функция на множестве (45.1) при $\delta = \delta_2 > 0, \bar{t} = t_2 \geq 1, \bar{\varepsilon} = \varepsilon_2 > 0, 1$.

Условие 45.3. При всех $t \geq 0, \varepsilon > 0$ функция $f(t, \varepsilon)$ непрерывна по t и $f(t, \varepsilon) \in D_f$.

§46. Собственное вращение Луны.

Оценка точности решения

46.1. Переход к интегральным уравнениям

Перейдём от задачи Коши (32.4) к эквивалентным интегральным уравнениям:

$$x(t) = \int_0^t \bar{F}(x(s), s) ds.$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_5)$, $\bar{F} = (\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_5)$ – вектор, состоящий из правых частей дифференциальных уравнений (32.4). В этом параграфе $\varepsilon = 0,1$, поэтому зависимость функций \bar{F} от параметра ε не указана.

Оценим функцию \bar{F} на множестве

$$x \in \mathbf{R}^5, \quad |x_i| \leq \delta_i, \quad i = \overline{1,5}, \quad (46.1)$$

предполагая, что δ_2 удовлетворяет неравенствам

$$0 < \delta_2 < \bar{\delta}_2 = \quad (46.2)$$

$$\begin{aligned} &= \varepsilon^{-1} \min \left(-\theta_* - \theta^\circ - \sqrt{b_3^2 + b_4^2} + b_3 \cos \Phi^\circ + b_4 \sin \Phi^\circ, \right. \\ &\quad \left. \pi - \theta_* + \theta^\circ - \sqrt{b_3^2 + b_4^2} - b_3 \cos \Phi^\circ - b_4 \sin \Phi^\circ \right), \end{aligned}$$

$$\theta_* = \arctg \sqrt{\frac{1}{2} [b_5^2 + b_6^2 + (b_5^2 - b_6^2) w_1]}.$$

Формула для w_1 дана в (46.4). При выполнении неравенства (46.2) знаменатели в (32.4) не обращаются в ноль.

Если решение задачи (32.4) существует на отрезке $[0, t]$ и удовлетворяет на этом отрезке неравенствам (46.1), (46.2), то справедливы и следующие неравенства:

$$|\bar{F}_j(x, t)| \leq G_j(\delta, t), \quad |\bar{F}_2(x, t)| \leq 2G_{21}(\delta, t) t + G_{22}(\delta, t), \quad (46.3)$$

$$|x_j(t)| \leq G_j(\delta, t) t, \quad |x_2(t)| \leq G_{21}(\delta, t) t^2 + G_{22}(\delta, t) t, \quad j = 1, \overline{3,5}.$$

Здесь

$$\delta = (\delta_1, \dots, \delta_5), \quad (46.4)$$

$$G_1(\delta, t) = Q_1 W_1 + Q_2 W_2 + \delta_5 Q_2 W_3, \quad G_{21}(\delta, t) = \frac{1}{2} |b_2| W_4,$$

$$G_{22}(\delta, t) = \varepsilon \delta_4 W_4 +$$

$$+\sqrt{(a_8^2 - a_9^2) w_3^2 + a_9^2} \left[\varepsilon \delta_3 + Q_3 \sqrt{(b_5^2 - b_6^2) w_3^2 + b_6^2} + \right.$$

$$+|\operatorname{ctg} \theta^\circ (b_4 \cos \Phi^\circ - b_3 \sin \Phi^\circ)|],$$

$$G_3(\delta, t) = \frac{1}{2} |(a_1 - a_2) w_3^2 + a_2| + \left(Q_4 - \frac{1}{2}\right) W_1 + Q_3 W_2 + |a_{10}| \delta_5 + \\ + \delta_5 Q_3 W_3,$$

$$G_4(\delta, t) = |a_{11}| \delta_5,$$

$$G_5(\delta, t) = |a_{12}| w_4,$$

$$Q_1 = \max_{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2} \left| \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \right|,$$

$$Q_2 = \max_{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2} \left| \frac{1}{\sin \theta} \right|,$$

$$Q_3 = \max_{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2} |\operatorname{ctg} \theta|,$$

$$Q_4 = \max_{\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2} \left| \frac{1}{\sin^2 \theta} \right|,$$

$$W_1 = \frac{1}{2} \sqrt{[(a_1 + a_2)^2 - 4a_3^2] w_1^2 + 2(a_1^2 - a_2^2) w_1 + (a_1 - a_2)^2 + 4a_3^2},$$

$$W_2 = \sqrt{(a_5^2 - a_4^2) w_2^2 + a_4^2},$$

$$W_3 = \sqrt{(a_6^2 - a_7^2) w_3^2 + a_7^2},$$

$$W_4 = \sqrt{(a_9^2 - a_8^2) w_4^2 + a_8^2},$$

$$\theta_1 = \theta^\circ - \varepsilon \delta_2 - \sqrt{b_3^2 + b_4^2} - b_3 \cos \Phi^\circ - b_4 \sin \Phi^\circ,$$

$$\theta_2 = \theta^\circ + \varepsilon \delta_2 + \sqrt{b_3^2 + b_4^2} - b_3 \cos \Phi^\circ - b_4 \sin \Phi^\circ,$$

$$w_1 = \min_{\alpha \in D_1} \cos \alpha,$$

$$w_2 = \max_{\alpha \in D_2} |\cos \alpha|,$$

$$w_3 = \min_{\alpha \in D_2} |\cos \alpha|,$$

$$w_4 = \max_{\alpha \in D_1} |\sin \alpha|,$$

$$D_1 = \{\alpha: 2(B - b_2 t - \varepsilon \delta_4) \leq \alpha \leq 2(B + \varepsilon \delta_4)\},$$

$$D_2 = \{\alpha: B - b_2 t - \varepsilon \delta_4 \leq \alpha \leq B + \varepsilon \delta_4\}.$$

46.2. Об оценках интервала времени и функции x

Пусть $\delta_1^{(n)}, \delta_3^{(n)}, \delta_4^{(n)}, \delta_5^{(n)}, t^{(n)}$ – произвольные положительные числа, а при $\delta_2 = \delta_2^{(n)}$ выполняются неравенства (46.2). Пусть $t_*^{(n)}$ – максимальное значение t , удовлетворяющее неравенствам

$$G_j(\delta^{(n)}, t^{(n)}) t \leq \delta_j^{(n)}, \quad G_{21}(\delta^{(n)}, t^{(n)}) t^2 + G_{22}(\delta^{(n)}, t^{(n)}) t \leq \delta_2^{(n)}, \quad (46.5)$$

$$t \leq t^{(n)}, \quad j = 1, \overline{3,5}.$$

Тогда справедливо

Утверждение 46.1. *Задача (32.4) имеет решение на отрезке $0 \leq t \leq t_*^{(n)}$, это решение единственно и удовлетворяет неравенствам*

$$|x_i(t)| \leq \delta_i^{(n)}, \quad i = \overline{1,5}. \quad (46.6)$$

Доказательство. В окрестности точки $x = 0$, $t = 0$ для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (32.4) выполняются условия теоремы Коши о существовании и единственности решения. По этой теореме найдётся такое значение s , $0 < s \leq t^{(n)}$, что на отрезке $0 \leq t \leq s$ решение задачи (32.4) существует, единственно и удовлетворяет неравенствам (46.6). Предположим, что $s < t_*^{(n)}$. Тогда хотя бы для одного j , $1 \leq j \leq 5$, выполняется равенство $|x_j(s)| = \delta_j^{(n)}$, так как при строгих неравенствах $|x_i(s)| < \delta_i^{(n)}$, $i = \overline{1,5}$, решение задачи (32.4) можно продолжить по теореме Коши. Для значений j справедливы соотношения, следующие из (46.3):

$$\begin{aligned} \delta_j^{(n)} = |x_j(s)| &\leq G_j(\delta, s) s \leq G_j(\delta, t^{(n)}) s < G_j(\delta, t^{(n)}) t_*^{(n)} \leq \delta_j^{(n)}, \\ & j = 1, \overline{3,5}; \\ \delta_2^{(n)} = |x_2(s)| &\leq G_{21}(\delta, s) s^2 + G_{22}(\delta, s) s \leq \\ &\leq G_{21}(\delta, t^{(n)}) s^2 + G_{22}(\delta, t^{(n)}) s < \\ &< G_{21}(\delta, t^{(n)}) [t_*^{(n)}]^2 + G_{22}(\delta, t^{(n)}) t_*^{(n)} \leq \delta_2^{(n)}, \quad j = 2. \end{aligned}$$

Здесь, как и в (46.3), использовано монотонное возрастание функций $G_j(\delta, t)$, $G_{21}(\delta, t)$, $G_{22}(\delta, t)$ по t . Таким образом, получили противоречие:

$$\delta_j^{(n)} < \delta_j^{(n)},$$

из которого следует, что $s \geq t_*^{(n)}$, то есть решение задачи (32.4) существует, по крайней мере, на отрезке $0 \leq t \leq t_*^{(n)}$.

Единственность и гладкость решения задачи (32.4) обеспечиваются гладкостью правых частей.

Утверждение 46.1 доказано.

На отрезке $0 \leq t \leq t_*^{(n)}$ из (46.3), (46.6) можно получить следующие оценки решения:

$$|x_i(t)| \leq \delta_{i_*}^{(n)}, \quad i = \overline{1,5}, \quad (46.7)$$

$$\delta_{j_*}^{(n)} = G_j(\delta^{(n)}, t^{(n)}) t_*^{(n)}, \quad j = 1, \overline{3,5};$$

$$\delta_{2_*}^{(n)} = G_{21}(\delta^{(n)}, t^{(n)}) [t_*^{(n)}]^2 + G_{22}(\delta^{(n)}, t^{(n)}) t_*^{(n)}.$$

46.3. Численные оценки t, x_1, \dots, x_5

При разных значениях $\delta_i^{(n)}$, $i = \overline{1,5}$, $t^{(n)}$ получаются разные оценки интервала времени. Здесь использован следующий итерационный процесс. Значения $\delta_i^{(n)}$, $t^{(n)}$ задавались при $n = 0$ и вычислялись при $n > 0$:

$$t^{(0)} = 10, \quad \delta_j^{(0)} = 10, \quad j = 1, \overline{3,5}, \quad (46.8)$$

$$\delta_2^{(0)} = 0,999 \bar{\delta}_2, \quad \delta_i^{(n+1)} = 0,5 [\delta_i^{(n)} + \delta_{i_*}^{(n)}], \quad i = \overline{1,5},$$

$$t^{(n+1)} = 0,9 t^{(n)} + 0,1 t_*^{(n)}, \quad n = \overline{0,100}.$$

Здесь $\bar{\delta}_2$ – значение (46.2); $t_*^{(n)}$ – максимальное значение t из множества (46.5); $\delta_{i_*}^{(n)}$ – значения (46.7).

Решение задачи (32.4) оценивалось на отрезке $0 \leq t \leq 1$ по формулам:

$$|x_i(t)| \leq \delta_{i_{**}}^{(n)}, \quad \delta_{j_{**}}^{(n)} = G_j(\delta^{(n)}, t^{(n)}) t_{**}^{(n)},$$

$$\delta_{2_{**}}^{(n)} = G_{21}(\delta^{(n)}, t^{(n)}) [t_{**}^{(n)}]^2 + G_{22}(\delta^{(n)}, t^{(n)}) t_{**}^{(n)},$$

$$\delta_i^{(n+1)} = 0,5 [\delta_i^{(n)} + \delta_{i_{**}}^{(n)}], \quad t_{**}^{(n)} = \min(1, t_*^{(n)}),$$

$$t^{(n+1)} = 0,9 t^{(n)} + 0,1 t_{**}^{(n)}, \quad i = \overline{1,5}, \quad j = 1, \overline{3,5}, \quad n = \overline{0,200}.$$

Значения $t^{(0)}$, $\delta_i^{(0)}$ даны в (46.8). Вычисления показали, что при $n \geq 5$ $t_{**}^{(n)} = 1$. Приведём результаты счёта.

Результат 46.1. Решение задачи (32.4) существует, по крайней мере, на отрезке

$$0 \leq t \leq 1,397.$$

На отрезке $0 \leq t \leq 1$ справедливы неравенства

$$|x_1| < 0,380, \quad |x_2| < 0,039, \quad |x_3| < 0,380, \quad (46.9)$$

$$|x_4| < 0,717 \cdot 10^{-9}, \quad |x_5| < 0,260 \cdot 10^{-4}.$$

46.4. Численные оценки для исходных переменных

46.4.1. *Оценки T, X_1, \dots, X_5 .* Из формул (31.4), (32.3) и Результата 46.1 следует

Результат 46.2. Решение задачи (31.1)–(31.3) существует, по крайней мере, на отрезке

$$0 \leq T \leq 485 \text{ суток.}$$

На отрезке $0 \leq T \leq 347$ суток справедливы неравенства

$$|X_1| < 0,0380, \quad |X_2| < 0,0039, \quad |X_3| < 0,0380, \quad (46.10)$$

$$|X_4| < 0,717 \cdot 10^{-10}, \quad |X_5| < 0,690 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}.$$

Здесь для получения оценки X_5 использовано неравенство $|x_5| < 0,2591 \cdot 10^{-4}$. В (46.9) это неравенство дано с тремя знаками после запятой.

46.4.2. *Оценки $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$.* Найдём формулы для разностей между точным и приближённым решением задачи (31.1)–(31.3):

$$\Delta \tilde{\Psi} = \Psi - \tilde{\Psi} = \frac{-(\Omega_x - \Omega_x^0) \cos \Phi + (\Omega_y - \Omega_y^0) \sin \Phi}{\Omega_z^0 \sin \theta} - \quad (46.11)$$

$$- \frac{\Omega_x^0 \cos \Phi - \Omega_y^0 \sin \Phi}{\Omega_z^0} \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\theta^0} \right) +$$

$$+ \frac{\Omega_x^0 \cos \Phi^0 - \Omega_y^0 \sin \Phi^0}{\Omega_z^0} \left(\frac{1}{\sin \theta^0} - \frac{1}{\theta^0} \right) +$$

$$+ \frac{\Omega_x^0}{\theta^0 \Omega_z^0} (\cos g_1 - \cos \Phi) - \frac{\Omega_y^0}{\theta^0 \Omega_z^0} (\sin g_1 - \sin \Phi) + X_1.$$

$$\Delta \tilde{\theta} = \theta - \tilde{\theta} = X_2,$$

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\Phi} = \Phi - \tilde{\Phi} = & \frac{(\Omega_x - \Omega_x^0) \cos \Phi - (\Omega_y - \Omega_y^0) \sin \Phi}{\Omega_z^0} \operatorname{ctg} \theta + \\ & + \frac{\Omega_x^0 \cos \Phi - \Omega_y^0 \sin \Phi}{\Omega_z^0} \left(\operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\theta^0} \right) - \\ & - \frac{\Omega_x^0 \cos \Phi^0 - \Omega_y^0 \sin \Phi^0}{\Omega_z^0} \left(\operatorname{ctg} \theta^0 - \frac{1}{\theta^0} \right) - \\ & - \frac{\Omega_x^0}{\theta^0 \Omega_z^0} (\cos g_1 - \cos \Phi) + \frac{\Omega_y^0}{\theta^0 \Omega_z^0} (\sin g_1 - \sin \Phi) + X_3, \end{aligned}$$

$$\Delta \tilde{\Omega}_x = \Omega_x - \tilde{\Omega}_x = \frac{\Omega_x^0}{\cos B} (\cos g_2 - \cos \tilde{g}_2),$$

$$\Delta \tilde{\Omega}_y = \Omega_y - \tilde{\Omega}_y = \frac{\Omega_y^0}{\sin B} (\sin g_2 - \sin \tilde{g}_2),$$

$$\Delta \tilde{\Omega}_z = \Omega_z - \tilde{\Omega}_z = \frac{l_x - l_y}{l_z} \Omega_x^0 \Omega_y^0 T + X_5.$$

Из формулы

$$\cos g_2 - \cos \tilde{g}_2 = - \int_0^1 \sin[\nu g_2 + (1 - \nu) \tilde{g}_2] d\nu (g_2 - \tilde{g}_2)$$

и формул (32.2), (34.3) следует неравенство

$$|\cos g_2 - \cos \tilde{g}_2| \leq |g_2 - \tilde{g}_2| = |X_4|.$$

Аналогично:

$$|\sin g_2 - \sin \tilde{g}_2| \leq |X_4|.$$

Отсюда и из (46.10), (46.11) получим оценки проекций угловой скорости Луны на интервале $0 \leq T \leq 347$ суток:

$$|\Delta \tilde{\Omega}_x| \leq \left| \frac{\Omega_x^0 X_4}{\cos B} \right| < 0,885 \cdot 10^{-19} \text{ с}^{-1},$$

$$|\Delta \tilde{\Omega}_y| \leq \left| \frac{\Omega_y^0 X_4}{\sin B} \right| < 0,154 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1},$$

$$|\Delta \tilde{\Omega}_z| \leq \left| \frac{l_x - l_y}{l_z} \Omega_x^0 \Omega_y^0 T \right| + |X_5| < 0,155 \cdot 10^{-13} \text{ с}^{-1}.$$

46.4.3. *Оценки Ψ , Θ , Φ .* Из (46.10), (46.11) получим неравенство для угла Θ , справедливое на отрезке времени $0 \leq T \leq 347$ суток:

$$|\Delta\bar{\theta}| = |X_2| < 0,0039.$$

Оценим разности в (46.11), используя формулы (32.1), (32.2), (46.4):

$$|\Delta_1\Omega_x| = |\Omega_x - \Omega_x^0| \leq \left| \frac{\Omega_x^0}{\cos B} \right| \left[\sqrt{\frac{(l_x - l_z)(l_y - l_z)}{l_x l_y}} |\Omega_z^0 T| + |X_4| \right],$$

$$|\Delta_1\Omega_y| = |\Omega_y - \Omega_y^0| \leq \left| \frac{\Omega_y^0}{\sin B} \right| \left[\sqrt{\frac{(l_x - l_z)(l_y - l_z)}{l_x l_y}} |\Omega_z^0 T| + |X_4| \right],$$

$$|\Omega_x| \leq |\Omega_x^0| + |\Delta_1\Omega_x|, \quad |\Omega_y| \leq |\Omega_y^0| + |\Delta_1\Omega_y|,$$

$$\left| \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\theta^0} \right| \leq \frac{1}{|\theta^0 \sin \theta_*|} \left[\frac{\sqrt{(\Omega_x^0)^2 + (\Omega_y^0)^2}}{|\Omega_z^0|} + \left| \frac{\Omega_x^0 \sin \Phi^0 + \Omega_y^0 \cos \Phi^0}{\Omega_z^0} \right| + |X_2| + |\sin \theta_1 - \theta_1| \right],$$

$$\left| \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{\theta^0} \right| \leq \left| \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\theta^0} \right| + \frac{1}{|\sin \theta_*|} (1 - \cos \theta^0 + |\theta - \theta^0|),$$

$$|\theta - \theta^0| \leq \frac{\sqrt{(\Omega_x^0)^2 + (\Omega_y^0)^2}}{|\Omega_z^0|} + \left| \frac{\Omega_x^0 \sin \Phi^0 + \Omega_y^0 \cos \Phi^0}{\Omega_z^0} \right| + |X_2|,$$

$$|\cos g_1 - \cos \Phi| \leq |\Delta_1\Phi|, \quad |\sin g_1 - \sin \Phi| \leq |\Delta_1\Phi|,$$

$$|\Delta_1\Phi| = |\Phi - g_1| \leq \left| \frac{\operatorname{ctg} \theta_{**}}{\Omega_z^0} \right| \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2} + \left| \operatorname{ctg} \theta^0 \frac{\Omega_x^0 \cos \Phi^0 - \Omega_y^0 \sin \Phi^0}{\Omega_z^0} \right| + |X_3|,$$

$$\sin \theta_* = \min(|\sin \theta_1|, |\sin \theta_2|), \quad \operatorname{ctg} \theta_{**} = \max(|\operatorname{ctg} \theta_1|, |\operatorname{ctg} \theta_2|).$$

Отсюда и из (46.10), (46.11) получаем оценки углов Ψ , Φ на отрезке $0 \leq T \leq 347$ суток:

$$|\Delta\bar{\psi}| \leq \frac{1}{|\Omega_z^0 \sin \theta_*|} \sqrt{(\Delta_1\Omega_x)^2 + (\Delta_1\Omega_y)^2} + \frac{\sqrt{(\Omega_x^0)^2 + (\Omega_y^0)^2}}{|\Omega_z^0|} \left| \frac{1}{\sin \theta} - \frac{1}{\theta^0} \right| +$$

$$+ \left| \frac{\Omega_x^0 \cos \Phi^0 - \Omega_y^0 \sin \Phi^0}{\Omega_z^0} \left(\frac{1}{\sin \theta^0} - \frac{1}{\theta^0} \right) \right| + \frac{|\Omega_x^0| + |\Omega_y^0|}{|\theta^0 \Omega_z^0|} |\Delta_1 \Phi| + |X_1| <$$

$< 0,0449$.

$$|\Delta \tilde{\Phi}| \leq \left| \frac{\text{ctg } \theta_{**}}{\Omega_z^0} \right| \sqrt{(\Delta_1 \Omega_x)^2 + (\Delta_1 \Omega_y)^2} + \frac{\sqrt{(\Omega_x^0)^2 + (\Omega_y^0)^2}}{|\Omega_z^0|} \left| \text{ctg } \theta - \frac{1}{\theta} \right| +$$

$$+ \left| \frac{\Omega_x^0 \cos \Phi^0 - \Omega_y^0 \sin \Phi^0}{\Omega_z^0} \left(\text{ctg } \theta^0 - \frac{1}{\theta^0} \right) \right| + \frac{|\Omega_x^0| + |\Omega_y^0|}{|\theta^0 \Omega_z^0|} |\Delta_1 \Phi| + |X_3| <$$

$< 0,0450$.

Результат 46.3. На отрезке $0 \leq T \leq 347$ суток справедливы следующие неравенства для углов Эйлера и проекций угловой скорости Луны:

$$|\Psi - \tilde{\Psi}| < 0,0449, \quad |\theta - \tilde{\theta}| < 0,0039,$$

$$|\Phi - \tilde{\Phi}| < 0,0450, \quad |\Omega_x - \tilde{\Omega}_x| < 0,885 \cdot 10^{-19} \text{ c}^{-1},$$

$$|\Omega_y - \tilde{\Omega}_y| < 0,154 \cdot 10^{-18} \text{ c}^{-1}, \quad |\Omega_z - \tilde{\Omega}_z| < 0,155 \cdot 10^{-13} \text{ c}^{-1},$$

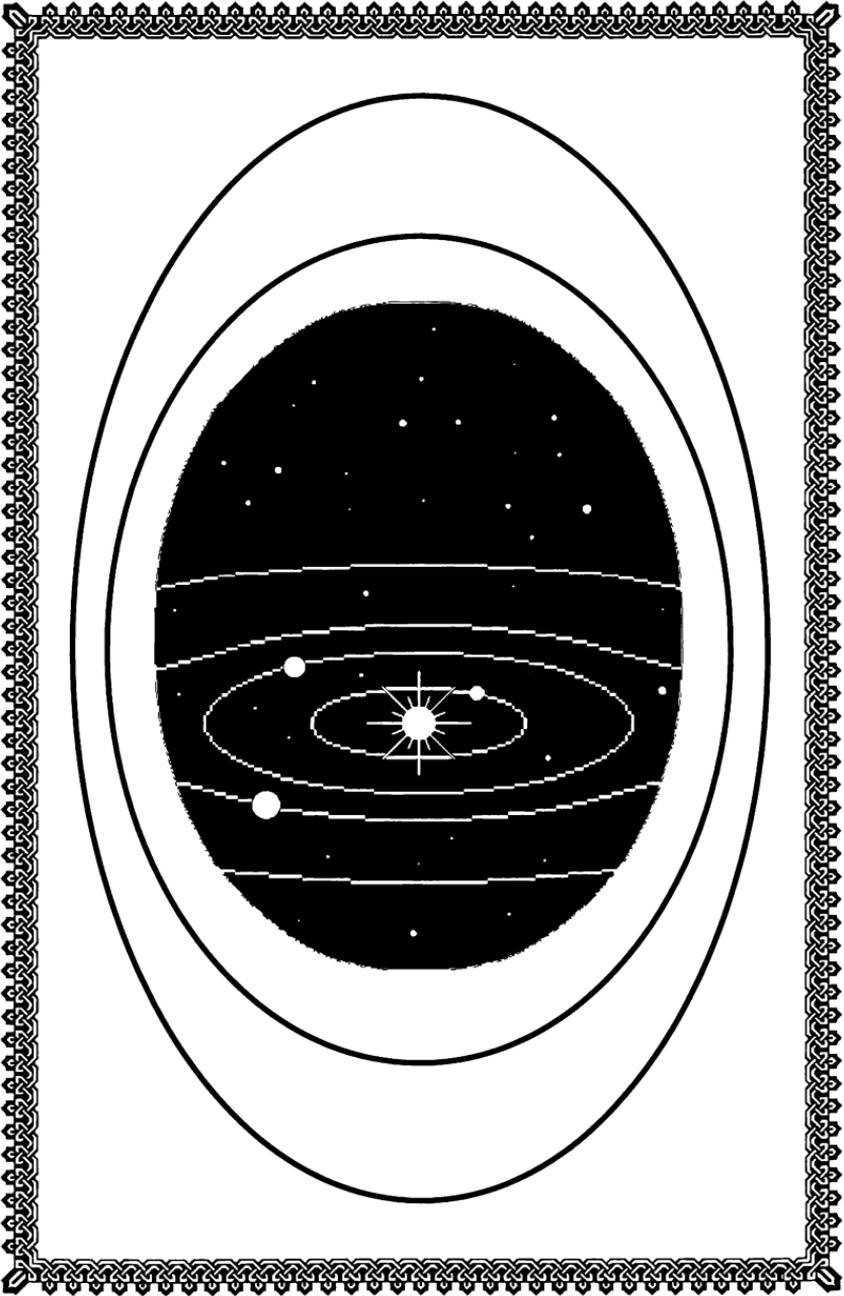
где $\tilde{\Psi}$, $\tilde{\theta}$, $\tilde{\Phi}$, $\tilde{\Omega}_x$, $\tilde{\Omega}_y$, $\tilde{\Omega}_z$ – функции (34.3).

§47. Выводы главы 8

В главе 8 содержатся сведения и вычисления для предыдущих глав.

В §39–§41 даны определения и теоремы из теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малым параметром.

В §42 сделаны вычисления к главе 1, в §43 – вычисления к главе 2, в §44 – вычисления к главе 3; в §45, §46 – вычисления к главе 6.



Об иллюстрациях и цитатах

Клавдий Птолемей (2 век нашей эры)

Рисунок на странице 8 взят из книги К. Птолемея "Альмагест". Рисунок иллюстрирует главу "О расстоянии Солнца и о том, что определяется вместе с ним" ([22], 163 с.). Цитата на странице 8 – часть следующего предложения:

"Действительно, всем, подходящим к этой теории с любовью к истине и в духе исследования, подобает пользоваться новыми и оказавшимися более точными методами не только для исправления предположений древних, но также и для [исправления] собственных ошибок, если таковые имелись, не считая позорным в нашем великом и божественном призвании использование чужих, более точных представлений, а не только своих собственных." ([22], 127 с.)

Приведём ещё несколько цитат из книги Птолемея.

"Так и мы пытаемся увеличить любовь к науке о вечном и неизменном, преподав то из этой науки, что уже было передано предшествующими нам выдающимися исследователями, но также и со своей стороны внеся в нее добавления, которые были получены за время, прошедшее от них до нашей эпохи. Поэтому мы попытаемся всё то, что в настоящее время считаем нужным сообщить, изложить с возможно большей краткостью и так, чтобы немного продвинувшиеся в этой науке могли следовать далее." ([22], 6 с.)

Даты жизни взяты из [5]

"Вообще мы считаем уместным объяснять явления при помощи наиболее простых предположений, если только наблюдения не противоречат существенно выдвинутой гипотезе." ([22], 79 с.)

"И пусть никто, рассматривая общую схему наших ухищрений, не считает эти гипотезы слишком искусственными. Не следует применять человеческие понятия к божественному и добиваться в таком великом деле уверенности при помощи совсем неподходящих аналогий, ибо что может быть общего между тем, что вечно остается тем же самым, и тем, что никогда не сохраняется? Или между тем, что во всём встречает препятствие, и тем, что не имеет препятствий даже в самом себе? Но к небесным движениям нужно пытаться приспособить сколь возможно простые предположения, а если этого недостаточно, то во всяком случае допустимые." ([22], 401 с.)

"Эпилог сочинения

После того как мы исполнили всё это, о Сир, и разобрали, как я думаю, почти всё, что должно быть рассмотрено в подобном сочинении, насколько прошедшее до сих пор время способствовало повышению точности наших открытий или уточнению [более древних], производимому не ради хвастовства, а только ради научной пользы, пусть настоящая наша работа получит здесь подходящий и соразмерный конец." ([22], 428 с.)

Николай Коперник (19.02.1473 – 24.5.1543)

Рисунок на странице 36 взят из книги Н. Коперника "О вращениях небесных сфер". Рисунок иллюстрирует главу X "О порядке небесных орбит" ([11], 34 с.). Цитата на странице 36 – из главы IV "О том, что движение небесных тел вечное, равномерное и круговое или составлено из круговых движений". Приведём эту цитату:

"Поэтому я прежде всего считаю необходимым тщательно исследовать, в каком отношении Земля находится к небу, чтобы мы, исследуя самое высшее, не забывали более близкого и в таком заблуждении не приписывали небесному того, что свойственно Земле." ([11], 22 с.)

Вот ещё несколько цитат из книги Н. Коперника.

"Так вот, после того как в течение долгого времени я обдумывал ненадежность математических традиций относительно установления движений мировых сфер, я стал досадовать, что у философов не существует никакой более надежной теории движений мирового механизма, который ради нас создан Великолепнейшим и Искуснейшим Творцом всего, а ведь в других областях эти философы так успешно изучали вещи, ничтожнейшие по сравнению с миром." ([11], 13 с.)

"Среди многочисленных и разнообразных занятий науками и искусствами, которые питают человеческие умы, я полагаю, в первую очередь нужно отдаваться и наивысшее старание посвящать тем, которые касаются наипрекраснейших и наиболее достойных для познания предметов. Такими являются науки, которые изучают божественные вращения мира, течения светил, их величины, расстояния, восход и заход, а

также причины остальных небесных явлений и, наконец, объясняют всю форму Вселенной. А что может быть прекраснее небесного свода, содержащего все прекрасное! Это говорят и самые имена: Caelum (небо) и Mundus (мир); последнее включает понятие чистоты и украшения, а первое – понятие чеканного (Caelatus)." ([11], 16 с.)

"И так как цель всех благородных наук – отвлечение человека от пороков и направление его разума к лучшему, то больше всего может сделать астрономия вследствие представляемого ею разуму почти невероятно большого наслаждения. Разве человек, прилепляющийся к тому, что он видит построенным в наилучшем порядке и управляющимся Божественным изволением, не будет призываться к лучшему после постоянного, ставшего как бы привычкой созерцания этого и не будет удивляться Творцу всего, в Ком заключается все счастье и благо? И не напрасно сказал божественный псалмопевец, что он наслаждается творением Божиим и восторгается делами рук Его! Так неужели при помощи этих средств мы не будем как бы на некоей колеснице приведены к созерцанию высшего блага?" ([11], 16с.)

"Но должно скорее следовать мудрости природы, которая как бы больше всего боится произвести что-нибудь излишнее или бесполезное, но зато часто одну вещь обогащает многими действиями." ([11], 33 с.)

"Действительно, у пифагорейцев была заповедь: ничего не передавать письменно и не открывать философских тайн всем людям, а доверять их только друзьям и близким и передавать из рук в руки. В качестве свидетельства этому сохранилось послание Лисида к Гиппарху... : *"Лисид приветствует Гиппарха. Я никогда бы не мог подумать, что после*

смерти Пифагора распадется общество его учеников. Однако, когда мы, вопреки надеждам, оказались рассеянными по разным местам, как бы после кораблекрушения, благочестиво будет помнить его божественные заповеди и не сообщать даров философии тем, которые не произвели очищения духа... Стоит вспомнить, сколько времени понадобилось нам для устранения лежавших на наших сердцах пятен, пока после истечения пяти лет мы не сделались способными воспринимать наставления учителя. Как красильщики после очищения прибавляют какую-то кислоту к краске одежды, чтобы последняя получила несмываемый цвет, который позднее уже не может легко исчезнуть, так и этот божественный муж подготовлял любителей философии, чтобы не обмануться в бывших у него относительно добродетели каждого надеждах. Он не торговал каким-нибудь базарным учением и не прибавлял к пользе истины тех уловок, которыми многие софисты опутывают юношеские умы, но был наставником божественных и общечеловеческих учений. Однако некоторые, подражая его учению, многому придают слишком большие размеры и ведут его не в правильном порядке, не как надлежит обучают юношество, почему они и делают своих слушателей дерзкими и бесстыдными. Ведь они высокие учения философии смешивают с буйными и нечистыми нравами. Это подобно тому, как если бы кто-нибудь налил чистую и прозрачную воду в глубокий колодец, полный грязи; он и грязь растревожит, и воду потеряет. Так бывает и с теми, которые упомянутым образом учат или учатся. Густые и мрачные леса покрывают ум и душу не получивших правильного посвящения и препятствуют полному спокойствию и благоразумию духа. В этом

лесу живут все виды пороков, которые изнуряют и отклоняют душу и никак не позволяют выйти чему-нибудь разумному. Назовем прежде всего матерей этих примесей – неумеренность и жадность... Поэтому огнем, железом и всеми силами нужно очищать скрытые места этого леса, в которых гнездятся подобного рода страсти. И лишь когда мы увидим, что благородный дух освобожден от таких страстей, тогда только и будем сеять прекрасные и плодоносные семена..." ([11], 39–40 с.)

Галилео Галилей (15.02.1564 – 08.01.1642)

Рисунок солнечной системы на странице 64 взят из книги Г. Галилея "Диалог о двух главнейших системах мира – Птолемеевой и Коперниковой" ([8], 419 с.). Цитата на странице 64 – часть следующих высказываний:

"Кто устремляется к высшей цели, тот занимает более высокое место; вернейшее же средство направить свой взгляд вверх – это изучать великую книгу природы, которая и составляет настоящий предмет философии. Хотя все, что можно прочесть в этой книге, является творением Всемогущего Художника и расположено самым совершенным образом, наиболее достойно изучения в первую очередь то, что показывает нам творения и Творца с более возвышенной стороны. Из достойных изучения естественных вещей на первое место, по моему мнению, должно быть поставлено устройство вселенной." ([8], 99 с.)

Приведём ещё несколько цитат из книги Галилея.

"Само название мира заимствовано, по-видимому,

от того совершеннейшего порядка, который в нем господствует." ([8], 115 с.) (Итальянское mondo, латинское mundus, обозначало первоначально порядок, благолепие ([8], 609 с.))

"Но в науках о природе, выводы которых истинны и необходимы и где человеческий произвол не при чём, нужно остерегаться, как бы не стать на защиту ложного, так как тысячи Демосфенов и тысячи Аристотелей будут выбиты из седла любым заурядным умом, которому посчастливится открыть истину." ([8], 151 с.)

"Совершенно напрасно было бы думать, что можно ввести новую философию, лишь опровергнув того или другого автора: сначала нужно научиться перделывать мозг людей и делать их способными отличать истину от лжи, а это под силу одному Богу." ([8], 155 с.)

"...созерцая и любясь величием и красотой мира и его Создателя и Правителя и воспевая в непрерывных хвалах Его славу, словом, делая то, что, как многократно утверждается Священным Писанием, составляет постоянное занятие всех творений – восхваляя Бога." ([8], 160 с.)

"Крайней дерзостью всегда казалось мне стремление сделать человеческую способность разумения мерой того, что природа может и умеет сотворить, тогда как, наоборот, нет ни одного явления в природе, как бы мало оно ни было, к полному познанию которого могли бы прийти самые глубокомысленные умы." ([8], 199 с.)

"Познание наше и по способу, и по количеству познаваемых вещей бесконечно превзойдено Божественным познанием; но на этом основании я не приношу человеческого разум настолько, чтобы считать его абсолютным нулем; наоборот, когда я принимаю

во внимание, как много и каких удивительных вещей было познано, исследовано и создано людьми, я совершенно ясно сознаю и понимаю, что разум человека есть творение Бога и притом одно из самых превосходных." ([8], 202 с.)

"Изыскание о строении мира – одна из самых великих и благородных проблем, какие только существуют в природе." ([8], 310 с.)

"Итак, будем пользоваться дозволенной и угодной Богу деятельностью для того, чтобы познавать Его величие и исполняться удивлением Ему тем большим, чем менее мы чувствуем себя способными проникнуть в бездну Его премудрости." ([8], 554 с.)

Иоганн Кеплер (27.12.1571 – 15.11.1630)

Рисунок на странице 82 взят из книги И. Кеплера "Новая астрономия" ([29], 60 с.). На рисунке изображена траектория движения Марса относительно Земли с 1580 по 1596 г. Цитата на странице 82 взята из следующего предложения:

"In einem höheren Maße als ich je hoffen konnte, habe ich als durchaus wahr und richtig erkannt, daß sich die ganze Welt der Harmonik, so groß sie ist, mit allen ihren im III. Buch auseinandergesetzten Teilen bei den himmlischen Bewegungen findet, zwar nicht in der Art, wie ich mir vorgestellt hatte (und das ist nicht der letzte Teil meiner Freude), sondern in einer ganz anderen, zugleich höchst ausgezeichneten und vollkommenen Weise." ("В ещё большей мере, чем я мог когда-либо на то надеяться, мне открылось как чрезвычайно глубокая истина то, что весь мир гармонии, каким бы великим он ни был, пронизывает небесные движения во всех их частях, разобранных в Третьей книге, т. е. пребывает

не только в искусстве, как это я себе представлял (и в этом заключена немалая доля моего восторга), но и в некоей совершенно иной, в высшей степени замечательной и совершенной мелодии." – *Перевод В. Ф. Рачека.*) ([30], 279 с.)

Исаак Ньютон (04.01.1643 – 31.3.1727)

Рисунок на странице 132 взят из книги И. Ньютона "Математические начала натуральной философии". Рисунок иллюстрирует следующую теорему:

"Теорема XXVII.

Предполагая, что законы притяжения те же, утверждаю, что наружное тело S описывает радиусами, проведёнными к центру тяжести O двух внутренних тел P и T , площади, более близкие к пропорциональности, и орбиту, более близкую к эллипсу, имеющему свой фокус в сказанном центре, нежели оно описывало бы около срединного и наибольшего тела T ." ([20], 241 с.)

Цитата на странице 132 – первое правило умозаключений в физике из [20]. Приведём все правила.

"ПРАВИЛА УМОЗАКЛЮЧЕНИЙ В ФИЗИКЕ

Правило I

Не должно принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений.

По этому поводу философы утверждают, что природа ничего не делает напрасно, а было бы напрасным совершать многим то, что может быть сделано меньшим. Природа проста и не роскошествует излишними причинами вещей.

Правило II

Поэтому, поскольку возможно, должно приписывать те же причины того же рода проявлениям природы.

Правило III

Такие свойства тел, которые не могут быть ни усилены, ни ослаблены и которые оказываются присущими всем телам, над которыми возможно производить испытания, должны быть почитаемы за свойства всех тел вообще.

Правило IV

В опытной физике предложения, выведенные из совершающихся явлений помощью наведения, несмотря на возможность противных им предположений, должны быть почитаемы за верные или в точности, или приближенно, пока не обнаружатся такие явления, которыми они еще более уточнятся или же окажутся подверженными исключениям." ([20], 502–504 с.)

Приведём ещё несколько цитат из книги Ньютона.

"Такое изящнейшее соединение Солнца, планет и комет не могло произойти иначе, как по намерению и по власти Могущественного и Премудрого Существа. Если и неподвижные звезды представляют центры подобных же систем, то все они, будучи построены по одинаковому намерению, подчинены и власти *Единого*...

Сей управляет всем не как душа мира, а как властитель вселенной, и по господству своему должен именоваться Господь Бог Вседержитель (Παντοκράτωρ)...

Мы познаем Его лишь по Его качествам и свойствам и по премудрейшему и превосходнейшему строению вещей и по конечным причинам, и восхищаемся по совершенству всего, почитаем же и поклоняемся по господству." ([20], 659–661 с.)

"Причину же этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю...

Довольно того, что тяготение на самом деле существует и действует согласно изложенным нами законам, и вполне достаточно для объяснения всех движений небесных тел и моря." ([20], 662 с.)

Леонард Эйлер (15.4.1707 – 18.9.1783)

Рисунок и цитата на странице 144 взяты из книги Л. Эйлера "Теория Луны" ([27], рисунок – 95 с., цитата – 1 с.).

В книге Л. Эйлера Луна рассматривается как материальная точка, положение которой относительно Земли иллюстрирует рисунок (в [27] вместо $\hat{\psi}$, $\hat{\varphi}$ используются обозначения ψ , φ). Приведём цитату Эйлера ещё раз:

"Точное и совершенное познание движения Луны, на основании которого можно было бы составить астрономические таблицы, точнейшим образом согласующиеся с истиной, сопряжено с такими существенными и величайшими трудностями, что представляется превосходящим силы человеческого ума." ([27], 1 с.)



озеф Луи Лагранж (25.01.1736 – 10.4.1813)



Цитата на странице 158 взята из следующего текста в книге Ж. Лагранжа "Аналитическая механика":

"В этой работе совершенно отсутствуют какие бы то ни было чертежи. Излагаемые мною методы не требуют ни построений, ни геометрических или механических рассуждений; они требуют только алгебраических операций, подчиненных планомерному и однообразному ходу. Все любящие анализ с удовольствием убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа, и будут мне благодарны за то, что этим путем я расширил область его применения." ([15], т. I, 9–10 с.)



юль Анри Пуанкаре (29.4.1854 – 17.7.1912)



Рисунок на странице 164 взят из книги А. Пуанкаре "Новые методы небесной механики" ([23], 97 с.). На рисунке изображена траектория спутников, найденная А. Пуанкаре. A – Земля, ось $A\xi$ направлена от Земли к Солнцу. В терминах Пуанкаре и Хилла на рисунке изображена "относительная траектория спутников за орбитой "Луны наибольшей лунации"".

Цитаты на страницах 161, 164 взяты из следующего текста в книге А. Пуанкаре "Новые методы небесной механики":

"Конечная цель небесной механики состоит в разрешении великого вопроса, может ли закон Ньютона, и только он один, объяснить все астрономические явления; единственным способом разрешения этого вопроса является проведение насколько возможно

точных наблюдений и сравнение их с результатами вычислений. Эти вычисления могут быть лишь приближенными и, кроме того, нет никакого смысла вычислять большее количество десятичных знаков, чем могут дать наблюдения. Поэтому бесполезно требовать от вычислений большей точности, чем от наблюдений, но нельзя от вычислений требовать и меньшей точности. Поэтому приближение, которое мы можем считать удовлетворительным сегодня, окажется недостаточным через несколько веков." ([23], 9 с.)

Игнатий, святитель (18.02.1807 – 13.5.1867)
(Дмитрий Александрович Брянчанинов)

"Человек в лета юности своей занимается приобретением сведений, нужных для возможного расширения круга действий в вещественном мире, в который он вступает действителем. Сюда принадлежат: знание разных языков, изящных искусств, наук математических, исторических, всех, и самой философии. Когда же человек начинает склоняться к старости, когда приближается то время, в которое должна отпасть шелуха, остаться покрываемый ею плод (шелухою называю тело, плодом – душу), когда он готовится вступить в неизмеримую область вечности, область духа, тогда предметом его исследования делается уже не вещество переменчивое, обреченное концу и разрушению, но дух пребывающий, бесконечный... Изучение духа дает человеку характер постоянный, соответствующий вечности. Горизонт для него расширяется, взоры его досягают за пределы вещества и времени, оттуда приносят твердость неземную." ([6], 356 с.)

Литература

1. *Абалакин В. К., Аксёнов Е. П., Гребеников Е. А., Дёмин В. Г., Рябов Ю. А.* Справочное руководство по небесной механике и астрономике. М.: Наука. 1976.
2. *Астрономический ежегодник СССР на 1990 год.* Л.: Наука. 1988.
3. *Астрономический ежегодник СССР на 1991 год.* Л.: Наука. 1989.
4. *Бибииков Ю. Н.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа. 1991.
5. *Большая Советская энциклопедия.* М.: Советская энциклопедия. 1970–1978.
6. *Брянчанинов Д. А.* Собрание писем святителя Игнатия Брянчанинова, епископа Кавказского и Черноморского. Составитель игумен Марк Лозинский. Москва – Санкт-Петербург. Издание Центра изучения, охраны и реставрации наследия священника Павла Флоренского. 1995.
7. *Бутенин Н. В., Лунц Я. Л., Меркин Д. Р.* Курс теоретической механики. М.: Наука. 1985.
8. *Галилей Г.* Избранные труды. Т. 1. М.: Наука. 1964.
9. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука. 1978.
10. *Клайн С. Дж.* Подобие и приближённые методы. М.: Мир. 1968.
11. *Коперник Н.* О вращениях небесных сфер. Малый комментарий. Послание против Вернера. Упсальская запись. М.: Наука. 1964.
12. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике. М.: Наука. 1973.
13. *Кузьмина Р. П.* Асимптотические методы для обыкновенных дифференциальных уравнений. 2-е издание. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2015.
14. *Кузьмина Р. П.* Математические модели небесной механики. М.: УРСС. 2004.
15. *Лагранж Ж.* Аналитическая механика. Т. 1. М. – Л.: Гостехиздат. 1950.
16. *Маловичко А. К., Костицын В. И.* Гравиразведка. М.: Недра. 1992.

17. Математическая энциклопедия. Т. 3. М.: Советская энциклопедия. 1982.
18. *Новиков П. С.* Об единственности решения обратной задачи потенциала. Докл. АН СССР. 1938. Т. 18. № 3. С. 165–168.
19. *Новожилов И. В.* Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ. 1995.
20. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. М.: Наука. 1989.
21. Относительные равновесия. Периодические решения. Сб. работ. Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2006, 324 стр.
22. *Птолемей К.* Альмагест: Математическое сочинение в тринадцати книгах. М.: Наука. Физматлит. 1998.
23. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избр. тр. Т. 1. М.: Наука. 1971.
24. *Татаринов Я. В.* Лекции по классической динамике. М.: Изд-во МГУ. 1984.
25. *Торге В.* Гравиметрия. М: Мир. 1999.
26. *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. М.: Наука. 1967.
27. *Эйлер Л.* Новая теория движения Луны. Л.: Изд-во АН СССР. 1934.
28. *Яворский Б. М., Детлаф А. А.* Справочник по физике. М.: Наука. 1985.
29. *Kepler J.* Neue astronomie. München – Berlin. 1929.
30. *Kepler J.* Welt - Harmonik. München – Berlin. 1939.
31. *Palmore J. I.* Classifying relative equilibria. Bull. Amer. Math. Soc. I. 1973. V. 79. No. 5. P. 904–908. II. 1975. V. 81. No. 2. P. 489–491.
32. *Simó C.* Posiciones de equilibrio relativo del problema de 3+1 cuerpos y su evolución. Pub. Mat. UAB, 1976, No. 3. P. 90–101.

Именной указатель

- Абалакин В. К. 228
Аксёнов Е. П. 228
- Бибиков Ю. Н. 228
Бутенин Н. В. 228
- Галилей Г. 64, 220, 228
Гребеников Е. А. 228
- Дёмин В. Г. 228
Детлаф А. А. 229
Дубошин Г. Н. 228
- Игнатий, святитель
(Брянчанинов Д. А.)
227, 228
- Кеплер И. (Kepler J)
18, 39, 82, 222, 229
Клайн С. 228
Коперник Н. 36, 217, 228
Корн Г. 228
Корн Т. 228
Костицын В. И. 228
Коши О. Л. 165, 166, 172, 208
Кузьмина Р. П. 228
Кэли А. 92
- Лагранж Ж.-Л. 89, 158, 226, 228
Лунц Я. Л. 228
- Маловичко А. К. 228
Менгер К. (мл.) 92
Меркин Д. Р. 228
- Новиков П. С. 229
Новожилов И. В. 229
Ньютон И. 12, 87, 132, 223, 229
- Палмор Дж. И. (Palmore J. I.)
90, 229
Птолемей К. 8, 215, 229
Пуанкаре А. 161, 164, 165, 169,
226, 229
Пуансо Л. 86, 145
- Руше Э. 183
Рябов Ю. А. 228
- Симо К. (Simó C.) 109, 229
- Татаринов Я. В. 229
Торге В. 229
- Уинтнер А. 229
- Эйлер Л. 86, 87, 89, 144, 145,
225, 229
- Яворский Б. М. 229
Якоби К. Г. Я. 166

Предметный указатель

- Аномалия орбиты средняя 53
-- эксцентрическая 10
Асимптотика 168
Асимптотический ряд 168
Асимптотическое приближение функции 167
-- разложение 168
-- решение 168
Астрономическая единица длины 9
- Большая полуось орбиты 10
- Геоцентрическая широта 68
Главные центральные моменты инерции Луны 145
-- оси инерции Луны 145
Гравитационная постоянная 9
- Долгота восходящего узла орбиты 10
-- перицентра орбиты 10
- Задача вспомогательная 173
-- вырожденная 166, 174
-- Коши почти регулярная 173
-- регулярно возмущённая 165
-- сингулярно возмущённая 172
-- n тел 12
-- (движение) Эйлера – Пуансо 86, 145
- Инерциальная система отсчёта 9
- Коэффициент нормализации 160
- Линия узлов 86
Луна 10, 145
- Малый параметр 16, 37, 68, 91, 135, 137, 148, 161
Масса Земли 68
-- Солнца 9
Матрица Коши 166
-- Якоби 166
Метод малого параметра 174
-- -- Пуанкаре 165
Модель Кеплера 18, 39
-- математическая свободного падения тела 69
-- -- собственного вращения Луны 148
-- -- Солнечной системы земная 38
-- -- -- лунная 18
-- физическая Солнечной системы 9
- Наклон орбиты 10
Начальная дата 9
Норма вектора 167
-- матрицы 167
Нормализация безразмерных параметров 160
-- размерных переменных 159
- Определитель Кэли – Менгера 92
Орты 84
Оскулирующие элементы орбиты 10
-- -- нормализованные 21
Остаточный член 168
- Параметры безразмерные 160
-- размерные 159
Переменная почти регулярная 173
-- сингулярная 172

- Переменные безразмерные 159
 - размерные 159
- Планета Венера 10
 - Земля 10, 65
 - Марс 10
 - Меркурий 10
 - Нептун 10
 - Плутон 10
 - Сатурн 10
 - Уран 10
 - Юпитер 10
- Плоскость эклиптики 9, 145
- Погрешности параметров 161
- Поле гравитационное 133, 140
 - тяготения Земли 65
- Проблема малых знаменателей 53

- Радиус Земли 68
 - – экваториальный 9
- Ряд Пуанкаре 165

- Сила инерции кориолисова 65
 - – центробежная 65
 - тяжести 65
- Солнце 9
- Среднее значение параметра 162
- Сутки 9

- Теорема π (π -теорема) 160
 - Пуанкаре (39.1 и 39.4) 169
 - Руше 183
- Точка весеннего равноденствия 145

- Угловая скорость Земли 68
- Углы Эйлера 86, 145
- Угол нутации 86
 - прецессии 86
 - собственного вращения 86
- Уравнение в вариациях 166
- Уравнения Эйлера 145
- Ускорение силы тяжести
 - (ускорение свободного падения) 65
- Устойчивость Солнечной системы 63

- Характерная длина 68
- Характерное время 16, 37, 146
- Характерные значения 159
 - – оскулирующих элементов 22, 40
 - – расстояний и скоростей 16

- Центр масс 83
- Центральная конфигурация 84
 - – коллинеарная 85, 90
 - – плоская 85
 - – пространственная 86
- Центральные конфигурации Лагранжа 89
 - – Эйлера 89

- Число, нормализованное по числу 160

- Эксцентриситет орбиты 10

- n -ое приближение решения 174
 - – функции 168

ISBN 978-5-4344-0497-6



9 785434 404976