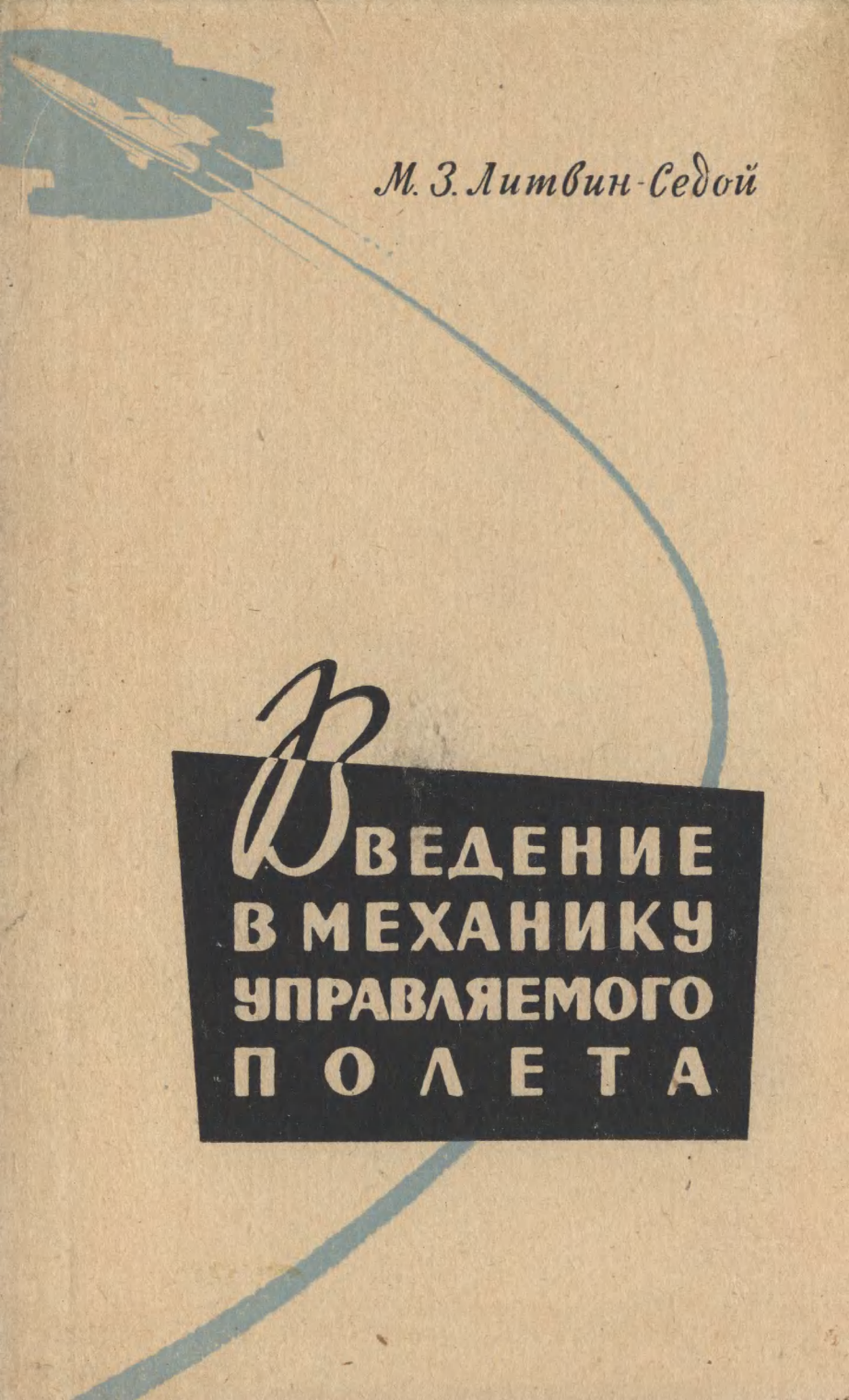




М. З. Литвин-Седой

**ВВЕДЕНИЕ
В МЕХАНИКУ
УПРАВЛЯЕМОГО
ПОЛЕТА**

М. З. ЛИТВИН-СЕДОЙ

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ УПРАВЛЯЕМОГО ПОЛЕТА

*Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебного пособия для студентов
механико-математических факультетов университетов
и физико-технических вузов*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
Москва — 1962

Михаил Зиновьевич Литвин-Седой

ВВЕДЕНИЕ В МЕХАНИКУ УПРАВЛЯЕМОГО ПОЛЕТА

Редактор В. В. Карамышкин

Редактор издательства Г. Е. Перковская

Технический редактор С. С. Горохова

Корректор Г. А. Бирюлина

Сдано в набор 12/III 1962 г. Подписано к печати 15/X 1962 г.
Бумага 84×108¹/₃₂. 6,63 печ. л. 10,87 усл. печ. л. 9,6 уч.-изд. л.
Тираж 10 000 Т-10075 Изд. № 89-ФМХ Цена 39 коп.

Государственное издательство «Высшая школа»,
Москва, К-62, Подсосенский пер., 20

1-я типография Трансжелдориздата МПС,
Москва, Б. Переяславская, 46

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга содержит математическое описание основных механических свойств самолета как объекта регулирования и способы построения закона регулирования в системе автоматического управления полетом, обеспечивающего ограничение отклонения самолета от заданного движения в заранее предписанных границах. Самолет рассматривается, в общем случае, как система связанных тел переменного состава.

Книга предназначена для студентов старших курсов физико-математических факультетов университетов, физико-технических и инженерно-физических вузов, а также для аспирантов авиационных и машиностроительных вузов в качестве учебного пособия по механике управляемого полета. Книга может быть полезна и для инженеров-исследователей и инженеров-расчетчиков, работающих в области авиационной и ракетной техники.

Курс состоит из 19 разделов, объединенных в 5 тематических лекций.

В конце книги приведен список дополнительной литературы по различным вопросам, затрагиваемым в ней.

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ УПРАВЛЯЕМОГО ПОЛЕТА

Теория управления полетом представляет собой научную основу техники автоматического вождения летательных аппаратов. Она основана на выводах различных отраслей науки, в особенности математики, механики, астрономии, геодезии, физики, химии, энергетики, материаловедения, машиноведения, автоматики, электроники и даже биологии.

Основная задача механики управляемого полета состоит в описании движения летательного аппарата в определенных силовых полях и построении закона регулирования в системе автоматического управления полетом, предназначенного для обеспечения требуемых свойств движения. Для автоматического осуществления их летательный аппарат снабжается автоматическими устройствами, управляющими созданием силового воздействия на аппарат в соответствии с законом, вытекающим из механики полета.

Совокупность летательного аппарата и устройства автоматики является системой автоматического управления называемой далее, для краткости, системой самолет-автопилот.

Первая глава посвящена изложению исходных понятий механики управляемого полета.

§ 1. Системы координат

Всякое движение имеет механический смысл лишь при задании системы отсчета (координат), по отношению к которой оно рассматривается. Поэтому и в теории управления полетом следует прежде всего условиться о системах координат, применяемых для описания этого движения.

В прикладных задачах теории управления полетом требуется исследовать движение управляемых летательных аппаратов по отношению к определенным телам — небесным телам, Земле или другим летательным аппаратам. Система координат, связанная со всяким материальным телом, неинерциальная, так как в известной нам части Вселенной не существует сплошного пространства, где бы не действовали силы тяготения, а любая первичная система отсчета непременно должна быть связана с каким-либо материальным телом, и, следовательно, не будет инерциальной.

Для решения поставленной задачи — определения движения летательного аппарата — необходимо составить уравнения этого движения.

Согласно законам механики, при составлении уравнений динамики движущегося тела во всякой неинерциальной системе координат, т. е. при составлении уравнений относительного движения, необходимо добавлять к заданным силам, действующим на рассматриваемую совокупность материальных точек (в частности, на твердое тело), переносную и кориолисову силы инерции, возникающие из-за ускоренного движения выбранной системы координат по отношению к инерциальной системе отсчета. Для подсчета же этих сил инерции надо установить закон движения выбранной системы отсчета по отношению хотя бы к одной инерциальной системе, что можно выполнить только приближенно; действительно, закон движения выбранной системы отсчета можно установить лишь по отношению к некоторому другому телу: и какое бы конечное число таких переходов от одного тела к другому мы ни произвели, мы не придем к инерциальной системе. Поэтому уравнения относительного движения летательного аппарата способны описывать его полет только с некоторой степенью приближения — даже при идеально точном описании активно приложенных сил. При составлении же уравнений движения в абсолютных координатах, т. е. в координатах, измеряемых от некоторой инерциальной системы отсчета, возникает затруднение при переходе от абсолютных координат к любым относительным, например, связанным с Землей. Действительно, для пересчета координат летательного аппарата от инерциальной системы отсчета к системе отсчета, связанной с каким-либо телом, необходимо знать закон движения этого тела по отношению к инерциальной системе, так как этот закон не известен в точности, требуемый пересчет можно

выполнить лишь приближенно. Пересчет же необходим для решения задачи об управлении полетом по отношению к определенным материальным телам.

По этой причине движение летательных аппаратов, как и всяких других тел, приходится рассматривать по отношению к некоторой неинерциальной системе отсчета, при известных условиях приближенно принимаемой за инерциальную. Для весьма обширного класса движений, включающего все интересующие нас виды полета, примем за исходное приближение инерциальной системы систему отсчета, связанную с неподвижными звездами (и, следовательно, любую галилееву по отношению к ней). Тем самым мы допускаем, что свойства полета, вытекающие из исследования его при отождествлении инерциальной системы с системой неподвижных звезд, достаточно близки к истинным свойствам полета для интересующих нас прикладных задач.

Однако во многих задачах применение исходного приближения является излишним. Поэтому мы перейдем к более грубым приближениям инерциальной системы, руководствуясь при выборе системы, принимаемой в данном исследовании за инерциальную, тем условием, что погрешности, возникающие из-за применения при исследовании этого полета более грубого приближения инерциальной системы отсчета по сравнению с ее первичным приближением:

а) или не должны превышать величин, заранее предписанных по техническим условиям на решение данной задачи полета,

б) или должны оставаться за пределом чувствительности существующих измерительных приборов (гироскопических, вибрационных, маятниковых, радиолокационных, индуктивных, оптических, аэродинамических, радиационных и др.).

Ниже, в качестве систем координат, применяются прямоугольные правые координатные системы.

Исходя из критерия «б», под рабочим приближением инерциальной системы условимся понимать прямоугольный трехгранник, вершина которого находится в центре масс солнечной системы, а ребра (оси) сохраняют неизменное направление по отношению к неподвижным звездам. Такую систему отсчета назовем солнечной. Задание солнечной системы в качестве инерциальной означает пренебрежение влиянием на полет сил инерции, обусловленных ускорением центра масс солнечной системы относительно непод-

вижных звезд и движением этих звезд по отношению к нашей Галактике и вместе с Галактикой.

В качестве следующего, более грубого, приближения инерциальной системы отсчета выберем систему координат с началом, расположенным в геометрическом центре Земли — точке пересечения оси собственного вращения Земли (оси мира) с плоскостью экватора; оси же системы сохраняют неизменные направления по отношению к неподвижным звездам. Такой выбор системы отсчета равносильен пренебрежению ускорением центра Земли в его орбитальном движении и ускорением от линейных колебаний оси мира внутри Земли. Считая, что для некоторых прикладных задач пользование и этой системой является излишним, примем в качестве следующего приближения инерциальной системы систему с началом координат в геометрическом центре Земли и связанную с осью мира и небесным экватором.

Одну из осей удобно направить по оси собственного вращения Земли, а две другие ориентировать неизменным образом по небесным меридианам; эту систему назовем основной. При таком выборе приближения инерциальной системы мы исключаем влияние прецессии, нутации и других колебаний земной оси на движение летательного аппарата, но сохраняем влияние собственного вращения Земли. Дальнейшее ослабление требования «а» приводит к замене инерциальной системы системой, связанной с Землей, чем исключается влияние на полет и собственного вращения Земли. Такую систему будем именовать земной.

В каждой задаче избранное рабочее приближение инерциальной системы условимся называть неподвижной системой отсчета. Движение по отношению к неподвижной системе называется абсолютным.

Разумеется, что, выбирая для исследования определенного полета в качестве инерциальной некоторую подходящую для этой задачи систему координат, мы можем описывать данный полет уравнениями движения, составленными и в любой другой системе отсчета, позаботившись, однако, учесть силы инерции, соответствующие принятому выбору неподвижной системы.

Для определения положения летательного аппарата по отношению к неподвижной или другой системе отсчета примем, что совокупность материальных точек, составляющая летательный аппарат, содержит некоторую неизменяемую часть, и отождествим движение этого аппарата с движением

правого прямоугольного трехгранника *Nхуз*, связанного с одной из неизменяемых частей конструкции, например, с наиболее крупной.

Этот трехгранник назовем связанной системой координат. В общем случае состав, распределение массы по отношению к связанной системе и геометрическая форма летательного аппарата могут в полете изменяться. Переменность состава обуславливается в общем случае присоединением к аппарату частиц воздуха и отделением от него частиц сгоревшего топлива, воздуха или окислителя, а также отдельных масс, обгоранием наружной поверхности при аэродинамическом нагреве и обледенением этой поверхности. Распределение масс может меняться как из-за выгорания топлива и расходования окислителя и перемещения их в баках и трубопроводах, так и из-за перемещения и отделения различных масс по отношению к связанной системе, т. е. к неизменяемой части конструкции. Изменение распределения масс характеризуется изменением одного или нескольких моментов инерции летательного аппарата в связанной системе осей (даже при постоянстве его массы).

Говоря о геометрической форме аппарата, уточним понятие его наружной поверхности. Пусть аппарат находится в воздушном потоке. Тогда наружной поверхностью аппарата назовем всю ту его поверхность, которая обдувается потоком воздуха при всевозможных угловых положениях аппарата в потоке. Иначе, наружной поверхностью аппарата является совокупность материальных частиц, принадлежащих аппарату, смачиваемых идеальной жидкостью при погружении в нее всего аппарата.

При таком условии к наружной поверхности относятся и поверхности всех каналов и отверстий в теле аппарата, в том числе внутренняя поверхность двигательной установки с воздушно-реактивным двигателем от воздухозаборника до реактивного сопла. Наружная поверхность аппарата может меняться из-за относительного перемещения подвижных частей этой поверхности, причем каждое такое перемещение может также приводить к изменению соответствующих моментов инерции аппарата.

Среди мыслимых летательных аппаратов с подвижными наружными частями будем рассматривать лишь обладающие следующим свойством: существует по крайней мере одно относительное положение этих подвижных частей (за исключением, быть может, подвижных частей двигательной установ-

ки), при котором наружная поверхность летательного аппарата имеет при идеальном изготовлении (т. е. строго по проекту) хотя бы одну плоскость геометрической симметрии; распределение же масс может быть при этом и несимметричным. Этим свойством обладают почти все известные летательные аппараты.

В реальных конструкциях свойство геометрической симметрии наружной поверхности соблюдается лишь с некоторым приближением, поскольку симметрия может нарушиться из-за погрешностей изготовления. Кроме того, те подвижные части двигателя, поверхность которых, по нашему определению, принадлежит наружной поверхности аппарата, иногда вызывают отклонения формы этой поверхности от симметричной при всех своих положениях. Так, лопаточные машины — компрессор и турбина — турбореактивного двигателя несколько нарушают свойство плоскостной симметрии наружной поверхности летательного аппарата из-за конструкции лопаток. Поэтому под плоскостью геометрической симметрии аппарата (или просто симметрии) мы будем понимать именно плоскость симметрии наружной поверхности при идеальном ее выполнении и без учета элементов двигателя, не обладающих плоскостной симметрией. Что касается подвижных частей конструкции, не образующих наружной поверхности аппарата, то о них мы не делаем никаких предположений.

В силу введенного определения, обычный самолет или дирижабль имеют одну плоскость симметрии; ракета, снабженная равномерно расположенными хвостовыми стабилизаторами, имеет конечное число плоскостей симметрии; обычный артиллерийский снаряд имеет бесконечно много плоскостей симметрии, т. е. ось симметрии.

Условимся располагать начало связанной системы координат в некоторой фиксированной точке летательного аппарата в плоскости его симметрии. Связанную ось Nx , называемую продольной, проведем каким-либо образом в плоскости симметрии. Чаще всего положительное направление этой оси выбирают близким к направлению вектора скорости подвижного начала N в нормальном полетном положении аппарата, а при наличии оси симметрии — вдоль этой оси. Ось Ny , называемую нормальной, проведем тоже в плоскости симметрии перпендикулярно оси Nx , ось Nz — боковая — проводится по правилу правой системы. Так,

в самолетах продольная ось обычно параллельна хорде крыла, строительной оси самолета или оси двигателя.

Расположение трехгранника $Nxyz$ показано на рис. 1. Для ориентации летательного аппарата по отношению к потоку воздуха, обдувающего его в полете, введем так называемую поточную систему осей $Nx_v y_v z_v$: ось Nx_v направим по вектору $\vec{v}$ воздушной скорости подвижного начала N , т. е. по касательной к его траектории в пространстве, связанном с воздушным течением; ось Ny_v — по направлению подъемной силы и ось Nz_v — по правилу правой системы (т. е. по направлению боковой аэродинамической силы). Угол β , образуемый вектором $\vec{v}$ воздушной скорости начала N с плоскостью симметрии аппарата, называется углом скольжения и служит мерой отклонения этой плоско-

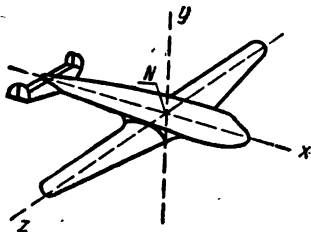


Рис. 1

сти от направления потока, принимаемого за однородный (по крайней мере, на некотором удалении от аппарата); если аппарат имеет больше одной плоскости симметрии, угол скольжения можно отсчитывать от любой из этих плоскостей по выбору. Условие $\beta = 0$ соответствует симметричному обдуву. Угол α , образуемый проекцией вектора $\vec{v}$ воздушной скорости на плоскость симметрии и продольной осью Nx аппарата, называется углом атаки. Иначе, угол атаки равен углу возвышения продольной оси над проекцией вектора воздушной скорости на плоскость симметрии аппарата. По правилу правой системы, угол β отсчитывается от вектора $\vec{v}$ к его проекции на плоскость Nxy , т. е. на плоскость симметрии, как показано на рис. 2, а, где NC' — линия пересечения плоскости симметрии Nxy с плоскостью, ей перпендикулярной и содержащей вектор $\vec{v}$. Схема отсчета угла α показана на рис. 2, б, где NC_v — составляющая вектора $\vec{v}$ в плоскости Nxy .

Установим число обобщенных координат летательного аппарата. Назовем основным телом — или телом G_c — ту из неизменных частей конструкции, с которой связана система $Nxyz$. Движение тела G_c в неподвижной системе отсчета описывается шестью обобщенными координатами. Чтобы выявить число обобщенных координат всего лета-

тельного аппарата, сделаем определенные предположения о строении летательного аппарата.

Управление полетом производится с помощью силовых воздействий, создающих линейные и угловые ускорения аппарата (в частности, тела G_C) в неподвижной системе отсчета, отвечающие заданной программе полета. Для осуществления этих управляющих воздействий, а также и для других целей к неизменяемой части G_C добавляют массы

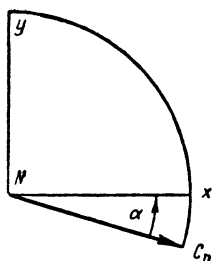
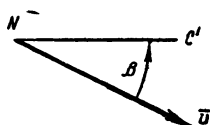


Рис. 2

топлива G_C^* , в целях создания тяги, и присоединяют дополнительные неизменяемые тела $G_C^{(1)}$, $G_C^{(2)}$, ..., $G_C^{(n)}$ так, что с помощью соответствующего привода (рулевой машины) эти тела можно перемещать относительно осно-

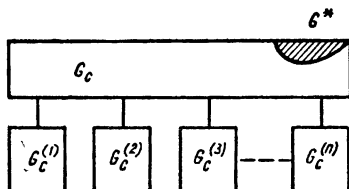


Рис. 3

вного тела G_C по желаемому закону. Структурная схема такого летательного аппарата показана на рис. 3, где заштрихованная часть условно обозначает полость, заполненную топливом — жидким или твердым.

С каждым из тел $G_C^{(j)}$ ($j=1, 2, \dots, n$) свяжем правый прямоугольный трехгранник $N^{(j)} x^{(j)} y^{(j)} z^{(j)}$. Тогда число dc_j обобщенных координат тела $G_C^{(j)}$ относительно тела G_C равно числу степеней свободы трехгранника $N^{(j)} x^{(j)} y^{(j)} z^{(j)}$ по отношению к трехграннику $Nxyz$ ($dc_j = 1, 2, \dots, 6$).

Вспомогательные тела $G_C^{(j)}$ также могут содержать полости $G_C^{*(j)}$, заполненные топливом, т. е. быть телами переменного состава. Примером тела $G_C^{(j)}$ переменного состава, т. е. тела переменного состава, способного перемещаться относительно неизменяемой части G_C самолета и создавать управляющее воздействие, может служить подвижный пороховой ускоритель самолета: на оси, параллельной боковой оси самолета и неподвижной относительно его неизменяемой части,

укреплена рама с двумя одинаковыми вспомогательными пороховыми ракетами, расположенными симметрично по отношению к плоскости Nxy самолета. Рама с ракетами может поворачиваться вокруг этой оси. Управляя угловым положением рамы по отношению к самолету, можно менять направление реактивной тяги ускорителей в плоскости Nxy симметрии самолета и тем самым осуществлять некоторый маневр самолета.

Примером тела $G^{(n)}$ постоянной массы может служить аэродинамический профиль (вспомогательное крыло), принадлежащий наружной поверхности самолета и способный вращаться около оси, фиксированной в теле G_C , или перемещаться поступательно относительно тела G_C . При этом изменяется характер обдува самолета воздушным потоком, и, следовательно, возникают новые аэродинамические силы и моменты, с помощью которых осуществляется управление полетом.

В более общем случае основное тело G_C может нести неизменяемое тело G' , отделяющееся от тела G_C в некоторый момент времени (ступень ракеты, отделяемый ускоритель, сбрасываемый груз и т. п.). Отделяющееся тело G' может иметь полость, заполненную веществом, количество которого в этой полости изменяется (пример тела G^* — сбрасываемый топливный бак). До отделения тела G_C и G' движутся как единое твердое тело и поэтому наличие тела G' не приводит к появлению дополнительной степени свободы в аппарате. Совокупность тел G_C , G' , G_C^* и G^* назовем телом G_0 .

Подобным же образом тела $G_C^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) могут нести неизменяемые тела $G'^{(j)}$, способные отделяться от тел $G_C^{(j)}$ в определенные моменты времени; тела $G'^{(j)}$ могут также иметь полости переменной массы $G^{*(j)}$. Совокупность тел $G_C^{(j)}$, $G^{*(j)}$ и $G'^{(j)}$ назовем телом $G^{(n)}$. Тела типа $G^{(j)}$ можно присоединять как к телу G_C , так и к телу G' ; в последнем случае, они отбрасываются вместе с телом G' .

Для создания большего многообразия управляющих воздействий к неизменяемой части $G_C^{(j)}$ одного или нескольких тел $G^{(j)}$ последовательно присоединяют тела $G_2^{(j)}$, $G_3^{(j)}$, ..., $G_{n_j}^{(j)}$.

Каждое из тел $G_v^{(\alpha)}$ ($v = 2, 3, \dots, n_j$) может, в свою

очередь, состоять из неизменяемой части — твердого тела $G_{C_0}^{(j)}$, всегда сохраняющего жесткую связь с телом $G^{(j)}$, другой неизменяемой части — твердого тела $G'^{(j)}$, способного отделяться от тела $G_{C_0}^{(j)}$, с которым оно жестко со-

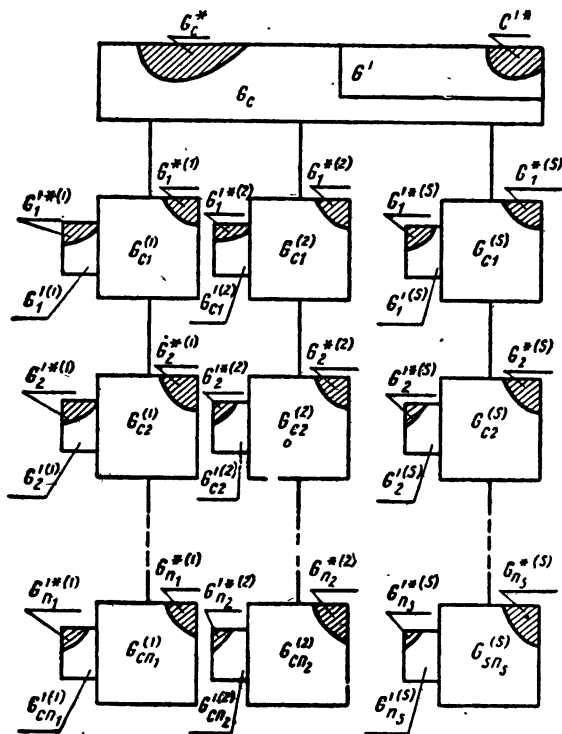


Рис. 4

единено до отделения, и тел переменного состава $G_v^{*(j)}$ и $G_v'^{(j)}$. Символически это строение тела $G_v^{(a)}$ запишем с помощью следующей структурной формулы:

$$G_v^{(a)} = G_{C_0}^{(a)} + G_v^{*(a)} + G_v'^{(a)} + G_v'^{*(a)}.$$

Структурная схема соответствующего летательного аппарата изображена на рис. 4, где s — число кинематических цепей, присоединенных параллельно к телу G_0 ; n_s — число тел $G_v^{(a)}$, составляющих σ -ю цепь ($\sigma = 1, 2, \dots, s$). Для едино-

образия тело $G^{(i)}$ обозначено символом $G_v^{(\sigma)}$, в то время как, в приведенной структурной формуле $v=1, 2, \dots, n_\sigma$. Телами $G_v^{(\sigma)}$ могут быть не только органы управления, но и другие объекты, расположенные на летательном аппарате, — приводы антенн, подвижные части измерительных приборов и т. д.

С каждым неизменяемым телом $G_C^{(\sigma)}$ свяжем прямоугольную правую систему координат $x_v^{(\sigma)} y_v^{(\sigma)} z_v^{(\sigma)}$. Относительное расположение двух соседних тел в σ -й кинематической цепи (рис. 4) — тел $G_{v-1}^{(\sigma)}$ и $G_v^{(\sigma)}$ — определяется относительным расположением координатных трехгранников $x_{v-1}^{(\sigma)} y_{v-1}^{(\sigma)} z_{v-1}^{(\sigma)}$ и $x_v^{(\sigma)} y_v^{(\sigma)} z_v^{(\sigma)}$ ($v=1, 2, \dots, n_\sigma$; $\sigma=1, 2, \dots, n_s$).

Под телом $G_0^{(\sigma)}$ условимся понимать тело G_C . Обозначим через $d_v^{(\sigma)}$ число степеней свободы тела $G_v^{(\sigma)}$ относительно тела $G_{v-1}^{(\sigma)}$ ($d_v^{(\sigma)}=1, 2, \dots, 6$); тогда летательный аппарат, выполненный по схеме, приведенной на рис. 4, будет иметь число степеней свободы, равное

$$6 + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} d_v^{(\sigma)}.$$

Примером тела G_2 типа $G_2^{(\sigma)}$ может служить дополнительный аэродинамический профиль, принадлежащий наружной поверхности самолета и присоединенный к профилю G_1 , упомянутому в предыдущем примере, так, что профиль G_2 расположен своею плоскостью в плоскости профиля G_1 и может поворачиваться около оси Ω_2 , фиксированной в теле G_1 и перпендикулярной плоскости профиля G_1 . Это соединение тел G_0 , G_1 и G_2 изображено на рис. 5.

Применение такого сложного соединения подвижных тел (рис. 4) в целях управления полетом обусловливается тем, что в общем случае совокупность сил и моментов, физически осуществимых с помощью системы управляющих тел, гораздо шире совокупности сил и моментов, физически осуществимых с помощью одного лишь управляющего тела.

Покажем, например, что совокупность силовых воздействий, достижимых системой двух тел G_1 и G_2 , изображенной на рис. 5, нельзя осуществить с помощью одного только тела G_1 (хотя бы и другой формы).

Примем, для простоты, что оси Ω_1 и Ω_2 проходят через центры масс тел G_1 и G_2 , соответственно и что

рассматриваемые угловые перемещения происходят в вертикальной плоскости. Пусть по техническим условиям требуется, чтобы главный момент аэродинамических сил, приложенных к вспомогательному крылу G_1 относительно оси Ω_1 вращения этого крыла около основного тела G_C , был равен нулю во всех относительных положениях крыла G_1 . Это требование подчас необходимо для разгрузки приводного устройства (рулевой машины) вспомогательного крыла от аэродинамического момента на оси вращения крыла (так называемого шарнирного момента),

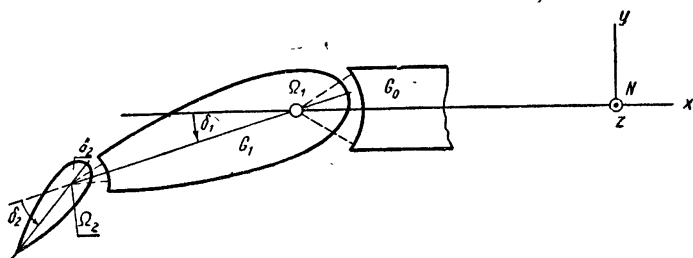


Рис. 5

что облегчает условия работы привода и повышает его точность. Как известно из аэродинамики, уничтожение главного аэродинамического момента всякого тела, обдуваемого потоком в вертикальной плоскости, в которой оно, по предположению, движется, выражается условием $m_z = 0$, где m_z — аэродинамический коэффициент тела в этом движении. Величина m_z зависит в данном полете от угла атаки α , числа Маха Ma , числа Рейнольдса Re , угловой скорости ω мгновенного вращения тела G_C относительно спокойной атмосферы и угловой скорости ω_1 вращения тела G_1 относительно тела G_C . Пусть m_{z1} — коэффициент m_z тела G_1 ; $m_{z1} = m_{z1}(\alpha, \omega, \delta_1, \omega_1, Re, Ma)$, где δ_1 (рис. 5) — относительная угловая координата крыла G_1 , $\dot{\delta}_1 = \omega_1$. Равновесие аэродинамических моментов определяется условием $m_z(\alpha, \omega, \delta_1, \omega_1, Re, Ma) = 0$. Поскольку переменные α , ω , Re и Ma зависят от полета всего аппарата и не могут назначаться независимо при движении тела G_1 , условие $m_{z1} = 0$ сводится к дифференциальному уравнению $m_{z1} \equiv F(\delta_1, \dot{\delta}_1) = 0$, определяющему закон $\delta_1 \equiv \delta_1(t)$ в функции параметров α , ω , Re и Ma .

Таким образом, при данных параметрах полета, отвечающих рассматриваемому моменту времени t , главный аэродинамический момент относительно оси Ω_1 уничтожается только при одном или нескольких значениях $\delta_1^{(i)}$ угла δ_1 ($i = 1, 2, \dots, n_\delta$; n_δ — натуральное число). Так как относительное угловое положение тела G_1 , т. е. координата δ_1 в каждый момент t определяется программой управления полетом, она в общем случае не совпадает ни с одним из значений $\delta_1^{(i)}$. Следовательно; с помощью одного лишь тела G_1 нельзя обеспечить уничтожение его главного аэродинамического момента около оси Ω_1 при всех относительных положениях этого тела (хотя бы на некотором отрезке изменения δ_1 : $\delta_1' \leq \delta_1 \leq \delta_1''$). Чтобы удовлетворить поставленное требование, присоединим к крылу G_1 еще одно вспомогательное крыло G_2 (рис. 5), называемое триммером. Так как вращение крыла G_2 около оси Ω_2 по отношению к крылу G_1 , описываемое угловой координатой δ_2 , меняет характер обтекания крыла G_1 (и, строго говоря, обтекание всего аппарата), то аэродинамический коэффициент m_{z1} будет зависеть и от относительного положения крыла G_2 : $m_{z1} = m_{z1}(\alpha, \delta_1, \delta_2, \omega, \omega_1, \omega_2, Ma, Re)$, где $\omega_2 = \dot{\delta}_2$. Считая по-прежнему, что переменные α , ω , Ma и Re определяются динамикой полета всего аппарата (включая, строго говоря, и динамику относительных перемещений тел G_1 и G_2), получим условие уничтожения главного момента аэродинамических сил тела G_1 около оси Ω_1 в виде одного дифференциального уравнения:

$f(\delta_1, \dot{\delta}_1, \delta_2, \dot{\delta}_2, t) = 0$ относительно двух переменных δ_1 и δ_2 . Следовательно, открывается большая возможность подобрать относительные перемещения $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ основного и вспомогательного управляющих тел G_1 и G_2 , одновременно удовлетворяющие программе полета и требованию разгрузки вала тела G_1 от аэродинамического момента.

Таким образом, мы установили определенную механическую модель управляемого летательного аппарата (рис. 4), на основании которой возможно подсчитать силы инерции, необходимые для составления уравнений динамики полета при определенном выборе неподвижной системы отсчета. Силы же, приложенные к аппарату активно, находятся из условий полета. К их числу относятся также и силы, приложенные к аппарату за счет взаимодействия управляющих

тел $G^{(o)}$ с обдувающим воздухом, а также газовыми струями.

Силовые управляющие воздействия не исчерпываются воздействиями, создаваемыми чисто механическими органами, — телами типа $G^{(o)}$. Существенное значение имеет метод управления полетом путем регулирования величины тяги двигателей летательного аппарата. Это регулирование подчас осуществляется с помощью устройств, в которых возникающие вследствие механических перемещений силы инерции ничтожны по сравнению с силами, развиваемыми двигателями под влиянием этих управляющих перемещений. Например, перемещение заслонки, дозирующей поступление топлива в камеры сгорания и во многих случаях несущественное в смысле непосредственного динамического воздействия на полет, оказывает самое существенное влияние на режим горения и, следовательно, тягу. В проектах фотонных ракет, опубликованных в печати реактивная струя мыслится состоящей из элементарных частиц; тяга регулируется, в частности, изменением магнитного поля в двигателе ракеты, что не связано с заметными силами инерции в управляющих устройствах. Взрыв порохового заряда, отбрасывающий отработавшую часть многоступенчатой ракеты, производится от электрического сигнала, не создающего непосредственно сил инерции. Поэтому величины, описывающие практически безынерционные управляющие воздействия, не относят к числу обобщенных координат летательного аппарата, и они учитываются как внешние воздействия, хотя бы и зависящие от обобщенных координат. Например, положение упомянутой дозирующей заслонки может зависеть от высоты полета. Более того, иногда влияние относительного перемещения какого-либо из тел $G^{(o)}$ на силы инерции аппарата может быть пренебрежимо малым сравнительно с его влиянием на величину внешних сил, приложенных к аппарату. В таких случаях можно, исходя из критериев типа «а» и «б», пренебречь инерцией соответствующего тела, а следовательно, и вносимым им числом степеней свободы; величину же развиваемого им силового воздействия нужно сохранить в числе внешних сил.

В принятой структурной схеме (рис. 4) еще одна идеализация состоит в предположении о том, что тела G_c , $G_c^{(o)}$, G' , $G_c'^{(o)}$ — твердые. В действительности, они могут

деформироваться, что оказывает влияние на протекание полета.

В дальнейшем будем рассматривать только аппараты с реактивными двигателями или планирующие. Условимся говорить о таких аппаратах в общем случае, как о самолетах. Под ракетой же будем принимать самолет, существенно обладающий осевой геометрической симметрией.

§ 2. Общая постановка задачи об автоматическом управлении полетом

Автоматически управляемый самолет представляет собой следящую систему, в которой объектом регулирования служит неизменяемая часть самолета, а управление полетом осуществляется с помощью автоматического регулятора (автопилота). Таким образом, задача об автоматическом управлении самолетом является одной из прикладных задач общей теории автоматического регулирования: она состоит в осуществлении полета, обладающего заранее заданными свойствами, устойчивыми (в определенном смысле) по отношению к рассматриваемому классу возмущающих воздействий.

Укажем некоторые виды полета, обуславливающие его свойства, которые можно осуществить с помощью средств автоматического управления:

- 1) полет самолета по заданной траектории или по заданному закону движения,
- 2) преследование движущейся цели,
- 3) уход самолета от преследования,
- 4) вывод ракеты на космическую траекторию,
- 5) временное сближение летящих самолетов для заправки горючим в полете,
- 6) взлет самолета с качающейся площадки (например, с палубы корабля при качке) или с неподвижной площадки,
- 7) посадка самолета на качающуюся или неподвижную площадку и т. д.

Для выполнения заданного полета необходимо подчинить обобщенные координаты и скорости самолета определенным соотношениям, совокупность которых назовем законом навигации, или методом наведения (второе название обычно применяется в задачах преследования цели). Эти соотношения аналогичны связям в механике с тем существенным различием, что они осуществляются благодаря действию следящей системы.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_6$ — обобщенные координаты неизменяемой части самолета, т. е. тела G_C (§ 1); x_1, x_2, x_3 — координаты подвижного начала N (декартовы, сферические, цилиндрические и т. п.), а x_4, x_5, x_6 — угловые координаты связанного трехгранника $Nxyz$. Функции $x_\lambda(t)$ ($\lambda = 1, 2, \dots, 6$) непрерывны по механическому смыслу движения. Предположим, здесь и в дальнейшем, что все внешние силы, приложенные к самолету, описываются непрерывными функциями с ограниченным изменением на всем протяжении исследуемого полета

$$0 \leq t \leq T. \quad (1.1)$$

Поэтому обобщенные координаты x_λ дифференцируемы по времени на отрезке (1.1) по крайней мере один раз. Обобщенные скорости $\dot{x} = \dot{x}_\lambda(t)$ непрерывны и имеют, самое большее, конечное число угловых точек на отрезке (1.1) и, следовательно, дифференцируемы по крайней мере один раз на каждом интервале между двумя соседними угловыми точками.

Закон навигации выражается соотношениями, связывающими обобщенные координаты тела G_C самолета, их производные, некоторые интегралы от координат и время. Полет, следующий предписанному закону навигации, назовем программным, или невозмущенным. Рассмотрим некоторые примеры законов навигации.

1. Вертикальный взлет самолета. Неподвижная система отсчета — основная (§. 1), под вертикалью понимается направление к геометрическому центру земли. Вертикальным взлетом самолета назовем его движение, в котором тело G_C самолета совершает поступательное прямолинейное перемещение вертикально вверх.

Процесс взлета удобно описывать в земной системе координат $Sxyz$. За начало S примем исходное положение начала N подвижной системы $Nxyz$ до возникновения движения. Ось Sy направим вертикально вверх, оси Sx и Sz проведем в плоскости горизонта в точке S так, чтобы эти три направления образовали правый прямоугольный трехгранник. Закон навигации выражается тремя условиями: $x_1 \equiv 0$; $x_3 \equiv 0$; $\dot{x}_2 \geq 0$ ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$), выполняемыми одновременно на отрезке, определяемом условием (1.1), причем $x_2(T) > x_2(0)$.

Рассогласованием, возбуждающим следящую систему

стабилизации полета, служит текущее отклонение ε подвижного начала N от оси Sy :

$$\varepsilon = \sqrt{x_1^2 + x_3^2}.$$

Высота x_2 и угловые координаты x_4, x_5, x_6 самолета (точнее точки N и тела G_C соответственно) в программном полете, равно как и требуемые для этого полета перемещения органов управления, определяются динамикой невозмущенного движения. В силу выбора неподвижной системы координат (основная) и системы координат, в которой описывается движение (земная) в уравнениях динамики взлета следует учесть центробежную и кориолисову силы инерции, обусловленные собственным вращением Земли.

2. Самолет должен осуществить в горизонтальной плоскости маневр, заключающийся в полете по дуге окружности заданного радиуса, но без скольжения ($\beta = 0$), называемый координированным разворотом. Неподвижная система координат — земная.

Начало O неподвижной системы $OXYZ$ выберем в центре указанной окружности, направив ось OY вертикально вверх. Вводя расстояние $(ON) = R$, запишем закон навигации на отрезке (1. 1) в виде соотношений:

$$R = a; \quad \beta \equiv 0; \quad x_2 = Y_0 = \text{const.}$$

$$\text{Здесь } R \equiv R(t) = \sqrt{x_1^2 + x_3^2} = \sqrt{X^2 + Z^2}.$$

При определенном выборе органов управления самолетом координаты x_1, x_2, x_4, x_5, x_6 его тела G_C и законы перемещения этих органов в программном полете определяются системой уравнений динамики полета в неподвижной системе отсчета; при этом переменные полета связаны соотношениями, выражающими закон навигации. В возмущенном полете независимые рассогласования определяются выражениями:

$$\varepsilon_1 = R(t) - a, \quad \varepsilon_2 = \beta(t), \quad \varepsilon_3 = Y(t) - Y_0.$$

3. Равномерный горизонтальный прямолинейный полет без вращения по отношению к земной системе отсчета $Sxyz$, принимаемой за неподвижную. Ось Sy направлена вертикально вверх, ось Sz проведем по направлению полета в сторону движения. Закон навигации имеет вид:

$\dot{x}_1 = v_0 = \text{const}$, $x_2 = Y_0 = \text{const}$, $\dot{x}_3 = \dot{x}_4 = \dot{x}_5 = \dot{x}_6 = 0$.
В возмущенном движении рассогласования определяются выражениями:

$$\varepsilon_1 = \dot{x}_1 - v_0; \quad \varepsilon_2 = x_2 - Y_0; \quad \varepsilon_q = \dot{x}_q \quad (q = 3, 4, 5, 6).$$

4. Плоская задача преследования цели: цель C и догоняющий ее самолет летят в определенной вертикальной плоскости Syz , неподвижная система $Sxyz$ — земная, ось Sy направлена вертикально вверх. Преследование

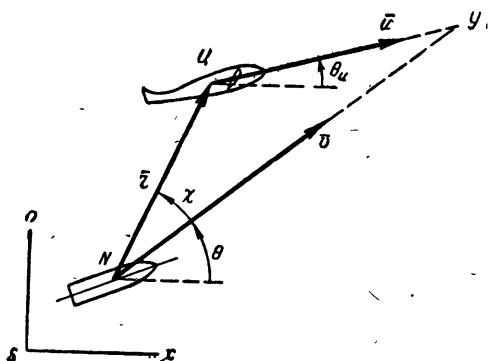


Рис. 6

цели осуществляется по методу упрежденной точки (рис. 6): вектор $\bar{v}$ скорости подвижного начала N самолета должен проходить через точку Y на линии действия вектора $\bar{u}$ скорости цели C . Положение упрежденной точки на этой линии определяется соотношением $f^*(r, \chi, \theta, v, u, \theta_u) = 0$ между расстоянием $r = (NC)$, углом упреждения χ , скоростями u, v и углами θ и θ_u наклона к горизонту траекторий самолета и цели соответственно. В общем случае цель маневрирует: $u = F_u(t)$, $\theta_u = \Phi_u(t)$, и метод наведения можно описать соотношением

$$f(r, \chi, \theta, v, t) = 0$$

на отрезке (1.1), причем $f = f^*$ при $u = F_u(t)$ и $\theta_u = \Phi_u(t)$. Чтобы самолет догонял цель, расстояние до цели должно уменьшаться: $\dot{r} < 0$, т. е. функция f должна на этом отрезке времени удовлетворять неравенству

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \chi} \dot{\chi} + \frac{\partial f}{\partial v} \dot{v} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)}{\frac{\partial f}{\partial r}} > 0.$$

Возмущенный полет определяется рассогласованием $\varepsilon = f(r, \chi, \theta, v, t)$. Особенность задачи состоит здесь в том, что движение цели заранее неизвестно или известно лишь приближенно из экстраполяции ее за промежуток времени, предшествующий данному моменту t , т. е. неизвестна точная зависимость функции ~~f от t~~ . Поэтому рассогласование может возникать даже при идеально точной работе следящей системы, а течение координат самолета в программном полете заранее подсчитать нельзя. В полете же эти координаты, включая перемещения органов управления, определяются в каждый момент времени, из метода наведения, рассматриваемого совместно с уравнениями динамики полета по отношению к земной системе отсчета $S_{\text{тнз}}$.

При возникновении рассогласования органы управления самолетом влияют в конечном счете на его переменные v , θ и, тем самым, χ так, чтобы обратить функцию f в нуль.

5. Полет по заданной траектории при заданной угловой ориентации самолета по отношению к основной системе отсчета $OXYZ$, принимаемой за неподвижную.

Такая задача встречается при выводе конечной ступени (тела G_C) многоступенчатой ракеты на космическую траекторию. Соблюдение правильного углового положения ракеты по отношению к неподвижной системе отсчета особенно важно в моменты отделения отработавших частей ракеты и запуска двигателей следующей ступени. Закон навигации имеет вид на отрезке (1. 1):

$$x_\lambda = f_\lambda(t) \quad (\lambda = 1, 2, \dots, 6).$$

Линейные рассогласования

$$\varepsilon_1 = f_1(t) - X(t), \quad \varepsilon_2 = f_2(t) - Y(t), \quad \varepsilon_3 = f_3(t) - Z(t),$$

а угловые

$$\varepsilon_{x+3} = f_{x+3}(t) - X_{x+3}(t), \quad (x = 1, 2, 3),$$

где X_{x+3} — истинные значения угловых координат x_4, x_5, x_6 тела G_C .

В некоторых случаях законы навигации выражаются неравенствами, подобными уравнениям односторонних связей в механике.

В начальной стадии погони за целью, т. е. на участке сближения, расстояние от самолета до цели весьма велико, а именно, больше некоторого расстояния r_0 ; на этом участке нет надобности строго придерживаться метода наведения. Так, в условиях примера 4 метод наведения можно заменить неравенствами

$$f_1 \leq f(r, \chi, \theta, v, t) \leq f_2 (r \geq r_0),$$

причем $f_1 < 0$, $f_2 > 0$. При дальнейшем уменьшении расстояния до цели ($r < r_0$) наведение осуществляется по строгому закону $f(r, \chi, \theta, v, t) = 0$.

В более общем случае величины f_1 и f_2 могут зависеть от времени t или от расстояния r , причем по смыслу процесса абсолютные величины $|f_1|$ и $|f_2|$ убывают до нуля при $r = r_0$ и остаются равными нулю при $r < r_0$.

На закон навигации могут налагаться ограничительные условия, предотвращающие возникновение опасных для самолета явлений — недопустимых перегрузок, вибраций, перегрева двигателя и наружной поверхности самолета и т. п. Эти условия выражаются неравенствами, связывающими, в общем случае, обобщенные координаты, скорости и ускорения всего самолета. Так, в примерах 4 и 5, нормальное ускорение ω_n подвижного начала N и угловое ускорение $\dot{\gamma}$ самолета в его колебаниях около боковой оси Nz следует ограничить неравенствами $|\omega_n| \leq \omega_{n0}$ и $|\dot{\gamma}| \leq \dot{\gamma}_0$. В плоской задаче полета (пример 4) $\omega_n = v^2/R$, где R — радиус кривизны траектории начала N , или, иначе,

$$\omega_n = \dot{v}\theta.$$

Важное значение имеют вариационные методы. Вместо задания закона навигации в наперед определенном виде можно потребовать выполнения заранее заданных оптимальных свойств полета, даваемых экстремумом некоторого интеграла

$$J = \int_{t_0}^{t^*} F(x_1, \dots, x_6, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_6, t) dt$$

по отношению к определенным же траекториям сравнения. Так, в примере 4 оптимальным будет полет, в котором время полета до достижения цели будет минимальным при заданном ограничении перегрузки:

$$j = \int_{t_0}^{t^*} dt, \quad |w_n| \leq w_0, \quad |\Gamma| \leq \Gamma_0.$$

причем последний интеграл исследуется с учетом всей динамики полета. При полете транспортного самолета с заданным грузом на заданное расстояние, при запуске высотной ракеты и т. п. оптимальный закон навигации определяется решением вариационной задачи полета.

Установим теперь условия физической осуществимости полета по заданному закону навигации. Отождествим сперва самолет с неизменяемым телом G_C (§ 1). Движение тела G_C характеризуется шестью обобщенными координатами и описывается системой двенадцати обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \Phi_\mu(\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_6, \dot{x}_7, \dots, \dot{x}_{12}, \\ x_1, x_2, \dots, x_6, x_7, \dots, x_{12}, t) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$(\mu = 1, 2, \dots, 12).$$

Здесь, как и выше, $x_1, \dots, x_6$ — обобщенные координаты тела G_C , а $x_7, \dots, x_{12}$ — обобщенные скорости. Физическое осуществление полета, отвечающего заранее заданному закону навигации, требует наложения определенных условий на вид функций Φ_μ в уравнениях (1.2), условий, выражающих соотношения между переменными $x_\lambda, \dot{x}_\lambda, \ddot{x}_\lambda, \dots (\lambda = 1, 2, \dots, 6)$. Первые шесть функций Φ_μ определяют силы, приложенные к неизменяемому телу G_C : силы тяготения, аэродинамические и др., а также силы инерции, если координаты x_λ не являются абсолютными. При заданных начальных значениях $x_\lambda(0)$ и $\dot{x}_\lambda(0)$, движение тела G_C определяется только этими силами. Остальные шесть функций выражают кинематические зависимости. Задание закона навигации означает наложение κ ($\kappa = 1, 2, \dots$, обычно, $\kappa < 12$) дополнительных связей между двенадцатью переменными x_μ , помимо двенадцати динамических и кинематических связей, описываемых уравнениями (1.2). В итоге, программный режим описывается системой $12 + \kappa$ уравнений относительно 12 переменных x_μ . Эта система, в которой число уравнений превышает число неизвестных, имеет решение лишь при определенных видоизменениях шести функций Φ_λ , описывающих внешние силы. Физически видоизменения функций Φ_λ осуществляются путем присое-

динения к телу G_C масс топлива (тел G^*), отбрасываемых неизменяемых масс G' и подвижных тел типа $G_v^{(s)}$ (§ 1).

Перемещения таких тел относительно тела G_C и истечение реактивных струй при горении топлива создают силы и моменты, обеспечивающие полет по заданному закону навигации. Совокупность тел типа $G_v^{(s)}$, G' и приборов управления горением топлива назовем органами управления самолетом; тела типа $G_v^{(s)}$ называются также рулями.

Органы управления физически осуществляют математические условия совместности уравнений полета неизменяемого тела G_C и уравнений, описывающих закон навигации.

С добавлением органов управления число степеней свободы самолета увеличивается. Кроме того, в общем случае в уравнениях полета появляется зависимость от времени в явной форме как за счет изменения параметров самолета из-за выгорания топлива и отбрасывания отдельных масс, так и за счет закона навигации, который может зависеть от времени явно. В итоге, программный полет самолета описывается системой $2p$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно p обобщенных координат x_p ($q = 1, 2, \dots, p$):

$$\Phi_k(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_p, x_1, \dots, x_p, t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 2p). \quad (1.3)$$

Закон навигации, выражаемый некоторыми соотношениями:

$$F_\tau(\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_p, x_1, \dots, x_p, t) = 0 \quad (\tau = 1, 2, \dots, s_\tau), \quad (1.4)$$

уже учтен в функциях Φ_k .

При этом на соотношения (1.3) могут быть наложены односторонние связи

$$f_\zeta(\ddot{x}_1, \dots, \ddot{x}_p, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_p, x_1, \dots, x_p, t) \leq 0 \quad (\zeta = 1, 2, \dots, n_\zeta). \quad (1.5)$$

Во избежание противоречия между требованиями (1.4) и (1.5) следует либо задавать закон (1.4) уже с учетом ограничений (1.5), либо изменять закон (1.4) каждый раз, когда он приходит в противоречие с ограничением (1.5). Относительно функций Φ_k , определяющих динамику и кинематику программного полета, сделаем следующие предположения:

1. Функции Φ_k разрешимы при всех t на отрезке (1.1) в области D_p :

$$x_{p1} \leq x_p \leq x_{p2}, \quad \dot{x}_{p1} \leq \dot{x}_p \leq \dot{x}_{p2},$$

выбираемой в соответствии с назначением полета, относительно производных $\dot{x}_p$ и таковы, что через каждую точку области D_p проходит единственное решение системы (1.3), непрерывное на отрезке

$$0 \leq t \leq t_D; \quad t_D \leq T.$$

Здесь t_D — верхняя граница отрезка, на котором решение системы дифференциальных уравнений заведомо существует и единственно; число t_D определяется по известной теореме о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений.

2. Функции Φ_k не обязательно непрерывны на отрезке (1.1) по независимому переменному t : допускается конечное число ограниченных разрывов, соответствующих моментам t_γ ($\gamma = 1, 2, \dots, n_\gamma$) зажигания и прекращения горения в различных реактивных двигателях и ускорителях и моментам отбрасывания отдельных масс конструкции. Тогда теорема существования и единственности решения системы (1.3) применима только на полуинтервалах $t_{\gamma-1} \leq t < t_\gamma$. Считая же, что для каждого такого полуинтервала начальные значения зависимых переменных совпадают с их значениями в конце предыдущего полуинтервала

$$x_k(t_\gamma + 0) = x_k(t_\gamma - 0),$$

установим, что непрерывное решение системы (1.3) существует на некотором отрезке $0 \leq t \leq t_D$. На каждом из указанных полуинтервалов оно дифференцируемо по крайней мере один раз.

3. Требование непрерывности функций Φ_k по независимому переменному обычно формулируется в теореме существования решения систем типа (1.3) для двустороннего отрезка изменения t : $|t| \leq T$. В задачах же полета движение рассматривается на одностороннем отрезке (1.1). Однако известно, что теорема существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений переносится без изменения на случай одностороннего отрезка независимого переменного.

4. Координаты $x_1, \dots, x_p$ под знаком функций Φ_k (1.3) могут быть функциями запаздывающего аргумента $t - \tau_p$

$$x_1 = x_1(t - \tau_1), \quad x_2 = x_2(t - \tau_2), \dots \quad (\tau_1 > 0, \tau_2 > 0, \dots),$$

причем в общем случае сами запаздывания τ_p зависят от времени, обобщенных координат и скоростей. Система

(1.2) в этом случае представляет собой систему дифференциально-разностных уравнений. Запоздывание возникает, например, в системе подачи жидкого топлива в двигатель; изменение закона подачи топлива на выходе нагнетающего насоса сказывается на величине тяги не мгновенно, а по истечении времени перемещения топлива в трубопроводах и времени его сгорания.

В реальном полете на самолет действуют также случайные возмущающие силы и моменты. Многие динамические зависимости, а также параметры, известны лишь с некото-

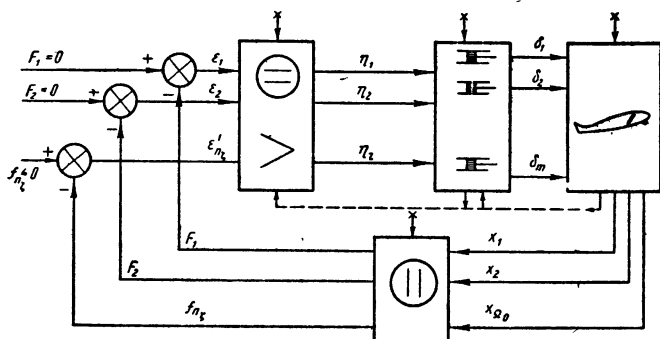


Рис. 7

рым приближением. Поэтому невозможно заранее найти законы изменения координат органов управления, которые обеспечили бы точное выполнение закона навигации. Более того, зависимость некоторых из функций Φ_k от времени может быть заранее неизвестной, как в примере 4. Поэтому для физического осуществления закона навигации возникает потребность во введении обратной связи и применении принципа следящей системы.

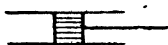
В общем случае полета регулируемых переменных может быть несколько (примеры 2, 3, 5); такую следящую систему называют **многомерной**.

Достаточно общая схема многомерной системы самолет-автопилот изображена на рис. 7.

Здесь и в дальнейшем, на схемах приняты обозначения:



— самолет (объект управления),



— исполнительный привод,



— усилитель,



— звено, выполняющее сложение сигналов (в алгебраическом смысле),



— последовательное корректирующее звено (может объединяться с усилителем),



— параллельное корректирующее звено, объединенное с измерителями,



— внешнее возмущение,

----- — внутренние обратные связи.

На вход системы подается закон навигации, выражаемый соотношениями (1.4) при ограничениях (1.5).

С выхода системы снимаются истинные значения измеряемых координат x_Ω ($\Omega = 1, 2, \dots, \Omega_0$; где $\Omega_0 \leq p$) тела G_C и всей системы самолет-автопилот, которые поступают на параллельное стабилизирующее звено, вырабатывающее мгновенные значения функций F_τ и f_ξ . При этом, производные $\dot{x}_\Omega, \ddot{x}_\Omega, \dots$, либо непосредственно снимаются с выхода объекта регулирования, либо получаются с помощью дифференцирующих контуров, входящих в параллельное корректирующее звено. Величины F_τ и f_ξ — рассогласования. Последовательное стабилизирующее звено образует сигналы $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, управляющие перемещениями $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ исполнительных органов самолета; последние создают силы и моменты, обеспечивающие выполнение закона навигации.

В общем случае, координаты $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m$ исполнительных органов и независимые координаты составных элементов стабилизирующих звеньев принадлежат к обобщенным координатам x_q ($q = 1, 2, \dots, p$) самолета: $x_1, x_2, \dots, x_6$ — обобщенные координаты тела G_C ; $x_7 = \delta_1$,

$x_8 = \delta_2, \dots, x_{8+m} = \delta_m$ — обобщенные координаты исполнительных приводов; $x_{9+m}, x_{10+m}, \dots, x_{8+l+m}$ — обобщенные координаты составных элементов корректирующих звеньев (отдельных электрических контуров и т. д.). Очевидно, что величины $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, вырабатываемые последовательным корректирующим звеном, образуются им как функции от рассогласований

$$\varepsilon_\tau = F_\tau(x_1, \dots, x_{2_0}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{2_0}, \dots, t), \quad (\tau = 1, 2, \dots, s_\tau),$$

$$\varepsilon'_\zeta = f_\zeta(x_1, \dots, x_{2_0}, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_{2_0}, \dots, t) \quad (\zeta = 1, 2, \dots, n_\zeta)$$

и их производных $\ddot{\varepsilon}_\tau, \ddot{\varepsilon}_\tau, \dots, \dot{\varepsilon}'_\zeta, \ddot{\varepsilon}'_\zeta, \dots, \varepsilon'^{(l_\zeta)}_\zeta$ (практически не выше второго порядка). При этом, величины $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$ определяются дифференциальными уравнениями, порядок которых зависит от числа контуров (пневматических, электрических, электронных и т. п.), составляющих последовательное корректирующее звено:

$$\eta_d^{(m_d)} + a_{1d} \eta_d^{(m_d-1)} + \dots + a_{m_d d} \eta_d = \Phi_d, \quad (d = 1, 2, \dots, r), \quad (1.6)$$

где

$$\Phi_d \equiv \Phi_d(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{s_\tau}, \dot{\varepsilon}_1, \dots, \dot{\varepsilon}_{s_\tau}, \dots, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_{n_\zeta}, \dot{\varepsilon}'_1, \dots, \dot{\varepsilon}'_{n_\zeta}, \dots, t),$$

где $a_{j_d d}$ — постоянные ($j_d = 1, 2, \dots, m_d$).

Совокупность зависимостей типа (1.6), определяющих управляющие сигналы через рассогласования системы, называется законом регулирования.

Если пренебречь постоянными времени самого стабилизирующего звена, т. е. посчитать это звено безынерционным, то сигналы η_d будут пропорциональны функциям Φ_d

$$\eta_d = k_d \Phi_d (k_d = \text{const}). \quad (1.7)$$

В этом случае закон регулирования выражается конечными соотношениями.

Закон регулирования строится исходя из требования обеспечения устойчивого и достаточно точного выполнения закона навигации.

Некоторые способы построения этого закона разобраны в главе V.

§ 3. Органы управления самолетом

Общее свойство всех органов управления, независимо от их физической природы, заключается в способности изменять силы и моменты, приложенные к самолету. Физические же основы действия существующих органов управления можно разделить на 5 категорий:

1) взаимодействие управляющих поверхностей, т. е. тел типа $G_v^{(o)}$ (§ 1), со средой, в которой они перемещаются в полете (воздух, газовая струя двигателя);

2) изменение положения центра масс всего самолета по отношению к основному телу G_c путем перемещения отдельных масс в самолете и изменение направления истечения газовых струй двигателей и ускорителей по отношению к основному телу G_c ;

3) создание сил инерции и моментов сил инерции, действующих на самолет, путем сообщения относительных перемещений телам типа $G_v^{(o)}$;

4) изменение тяги двигателей и ускорителей путем изменения количества движения в единицу времени газовых струй;

5) изменение массы всего самолета за счет отбрасывания отдельных частей конструкции.

Это разделение физических основ управления самолетом на категории является условным в том смысле, что ни одна из этих категорий почти не существует в чистом виде. Так, всякое перемещение тела $G_v^{(o)}$, начинающееся из состояния относительного покоя, приводит к появлению сил инерции; эти силы инерции неизбежно появляются и при перемещениях, предназначенных для изменения аэродинамических сил, для изменения центра масс самолета; истечение реактивной струи из сопла, создающее тягу, сопровождается уменьшением массы самолета и т. п. Поэтому вводя для удобства эти категории физических основ процесса управления, мы имеем в виду классификацию целенаправленных действий органов управления, отвлекаясь от сопутствующих явлений, усиливающих, ослабляющих или искажающих основные явления. При исследовании же динамики полета эти сопутствующие явления нужно в общем случае учитывать.

Рассмотрим действие органов каждой категории.

а) *Воздушные и газовые рули.* Среди воздушных рулей особенно важны три (рис. 8):

1 — руль высоты, поворачивающийся около оси, параллельной боковой оси Nz и расположенный симметрично по отношению к плоскости Nxy самолета. При симметричном обдуве этот руль влияет на момент аэродинамических сил в плоскости Nxy и только в этой плоскости;

2 — руль направления, поворачивающийся около оси, лежащей в плоскости симметрии Nxy . При симметричном обдуве этот руль влияет, главным образом, на момент аэродинамических сил около нормальной оси Ny ;

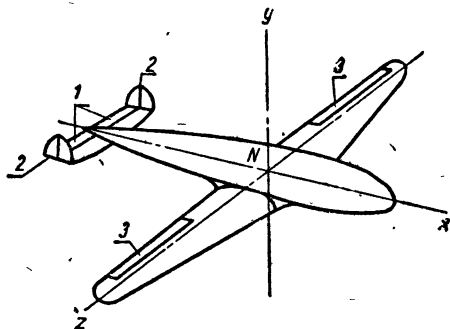


Рис. 8

3 — элероны — рули, выполненные в виде двух (иногда четырех) поверхностей, симметричных в нейтральном положении относительно плоскости Nxy и отклоняющихся синхронно (попарно синхронно) в противоположные стороны. Элероны создают, главным образом, момент аэродинамических сил около продольной оси Nx .

Чтобы выделить основные явления, допустим для простоты, что перемещения рулей не влияют на аэродинамические силы и моменты, создаваемые основной частью конструкции (телом G_c : крылом, фюзеляжем и т. д.), и не смещают центра масс самолета.

Рассмотрим в качестве примера действие руля высоты в полете, в котором плоскость симметрии Nxy содержится все время в одной и той же вертикальной плоскости, причем в этой плоскости лежат и все силы, приложенные к самолету; такой полет называется продольным.

На рис. 9, а самолет в продольном полете в неподвижной плоскости OXY изображен как система двух тел неизменяемой наружной поверхности G_c и G_1 , условно

показанных в виде крыльевых профилей, совершающих плоско-параллельное движение. Руль G_1 вращается около оси $C_b \parallel Nz$, неподвижной в теле G_C . Начало N связанной системы $Nxyz$ (§ 1) выбрано в центре масс самолета. Направление отсчета угловой координаты δ_b руля высоты

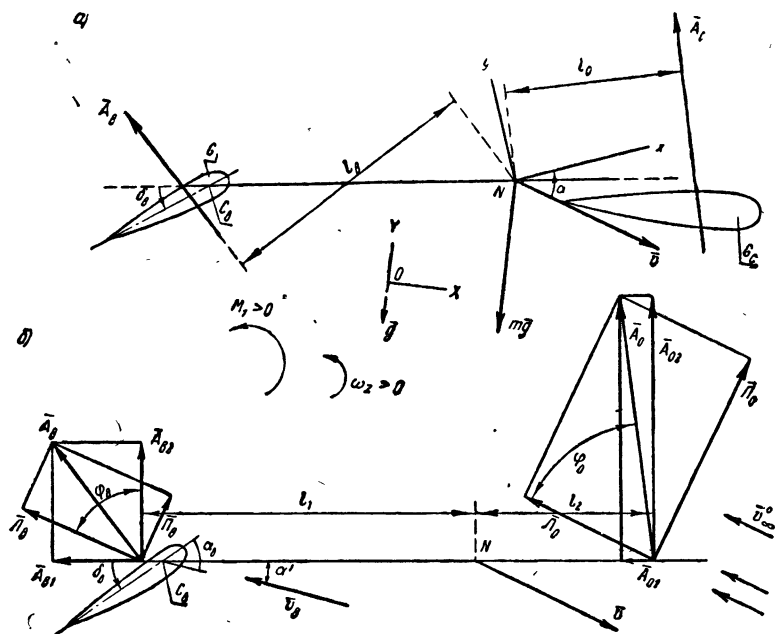


Рис. 9

выбирается по правилу правой системы: так как ось C_b вращения этого руля параллельна оси Nz , положительное направление оси C_b принимаем совпадающим с положительным направлением оси Nz : $\delta_b > 0$ при опускании руля, как и на рис. 5, что отвечает вращению против движения часовой стрелки. Линия отсчета угла δ_b фиксирована в плоскости Nxz . Таким же образом аэродинамический момент M_z считается положительным, если он стремится развернуть самолет против движения часовой стрелки для наблюдателя на положительном конце оси Nz .

Пусть $\bar{A}_0$ — главный вектор аэродинамических сил, возникающих за счет обдува наружной поверхности тела

G_C , $\bar{A}_B$ — главный вектор аэродинамических сил, возникающих при обдуве руля высоты в некотором положении этого руля, характеризуемом координатой δ_B . Приведем обе силы к центру N масс системы $G_C + G_1$. Результирующий аэродинамический момент $\bar{M}_z$ ($\bar{M}_z \perp Nxy$), соответствующий данному относительному положению руля, определяется, в наших предположениях, векторной суммой

$$\bar{M}_z = \text{mom}_N \bar{A}_0 + \text{mom}_N \bar{A}_B,$$

а главный вектор аэродинамических сил — векторной суммой

$$\bar{A}_N = \bar{A}_0 + \bar{A}_B.$$

В силу условия о неизменности тела G_C , вектор $\bar{M}_{z0} = \text{mom}_N \bar{A}_0$ — свободный в подвижном пространстве, связанном с этим телом, а вектор $\bar{A}_0$ — скользящий в этом же пространстве. Вектор $\bar{A}_B$ — скользящий в подвижном пространстве, связанном с телом G_1 .

Так как все моменты действуют в общей плоскости Nxy , от векторной суммы моментов можно перейти к их алгебраической сумме

$$M_z = M_{z0} - M_{zB}, \quad (1.8)$$

$$M_{z0} = \text{mom}_N A_0, \quad M_{zB} = \text{mom}_N A_B.$$

Иначе (рис. 9, а),

$$M_z = A_0 l_0 - A_B l_B,$$

где l_0 и l_B — плечи сил A_0 и A_B соответственно относительно N .

С другой стороны,

$$M_z = S_C b_C q_C m_z,$$

где S_C — характерная площадь самолета, b_C — его характерная длина, $q_C = \rho v^2/2$ — скоростной напор, m_z — коэффициент продольного момента. В силу равенства (1.8) и предположения о независимости потоков, обдувающих тела G_C и G_1 ,

$$M_z = q_C V_0 m_z^{(0)} - q_B V_B m_z^{(B)}.$$

Здесь

$$V_0 = S_0 b_0, \quad V_B = S_B b_B,$$

где S_0 и S_b — характерные площади тел G_C и G_1 (крыла и руля) соответственно, а b_0 и b_b — характерные размеры этих же тел соответственно. Первое слагаемое относится к основной части конструкции (телу G_C), второе — к рулю (телу G_1). Примем еще, что скорость v центра масс подвижного начала N (v — воздушная скорость) существенно превосходит наибольшую линейную скорость точек самолета, обусловленную его колебаниями около начала N . Тогда можно положить $q_C \approx q_b$ и

$$M_z = q_C V_0 \left[m_z^{(0)} - \frac{V_b}{V_0} m_z^{(b)} \right], \quad (1.9)$$

причем

$$A_b l_b = q_C V_b m_z^{(b)}, \quad A_0 l_0 = q_C V_0 m_z^{(0)}.$$

Если принять $b_0 = l_0$, $b_b = l_b$, то

$$A_b = q_C S_b m_z^{(b)}; \quad A_0 = q_C S_0 l_0 m_z^{(0)}.$$

(Конечно, указанной линейной скоростью нельзя пренебрегать при оценке демпфирующего момента.)

Сравнивая выражение (1.8) с соотношением (1.9), получим, что

$$m_z = m_z^{(0)} - \frac{V_b}{V_0} m_z^{(b)}.$$

Продольный аэродинамический момент M_z зависит от угла δ_b через посредство момента M_{zb} . В продольном полете

$$m_z \equiv m_z(Ma, Re, \alpha, \dot{\alpha}, \omega_z, v, \delta_b, \dot{\delta}_b),$$

или

$$\begin{aligned} m_z &= m_z^{(0)}(Ma, Re, \alpha, \dot{\alpha}, \omega_z, v) + \\ &+ \frac{V_b}{V_0} m_z^{(b)}(Ma, Re, \alpha, \dot{\alpha}, \omega_z, v, \delta_b, \dot{\delta}_b). \end{aligned}$$

Развернем правую часть последнего равенства по степеням переменных $\alpha, \dot{\alpha}, \omega_z, \delta_b, \dot{\delta}_b, v$.

В прикладной аэродинамике принято считать, что в некоторой ограниченной области этих переменных, в разложении величины m_z достаточно сохранить члены порядка не выше первого:

$$m_z = m_{z0} + m_z^\alpha \alpha + m_z^{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + m_z^\omega \omega + m_z^V V + m_z^{\delta_b} \delta_b + m_z^{\dot{\delta}_b} \dot{\delta}_b,$$

где слагаемое m_{z0} и аэродинамические производные m_z^a и $m_{z^B}^{\delta}$ зависят от чисел Re и Ma , а демпфирующие производные m_z^w , m_z^a и $m_{z^B}^{\delta}$ — еще и от v . Производная

$$m_{z^B}^{\delta} \approx \frac{V_B}{V_0} \left(\frac{\partial m_z^{(B)}}{\partial \delta_B} \right)$$

служит мерой способности руля создавать аэродинамический момент относительно центра масс самолета — чем больше ее абсолютная величина, тем больше абсолютная величина аэродинамического момента руля при одинаковом отклонении руля и прочих равных условиях; эта производная называется эффективностью руля. Она зависит от аэродинамических свойств руля и от удаления его от центра масс самолета.

Производная $m_{z^B}^{\delta}$ характеризует дополнительное демпфирование, создаваемое относительным перемещением руля высоты. Демпфирование, создаваемое рулем при угловых колебаниях самолета с закрепленным рулем, учитывается производной m_z^w .

Аэродинамическая производная m_z^a называется коэффициентом продольной статической устойчивости самолета и характеризует изменение продольного момента M_z при изменении угла атаки. Производные m_z^w и m_z^a характеризуют аэродинамическое демпфирование колебаний самолета около его боковой оси, обусловливаемое вязким трением между его поверхностью и частицами воздуха.

Если на самолет не действуют никакие моменты, кроме аэродинамического (например, при выключенном двигателе или, если его тяга проходит через точку N), то поступательный полет в спокойном воздухе ($\omega = 0$) имеет место при отклонении руля на угол $\delta_{B, \delta}^*$, определяемый уравнением $m_z = 0$, т. е.

$$m_{z0} + m_z^a \alpha + m_{z^B}^{\delta} \delta_B^* = 0.$$

Это уравнение называется балансирующим; оно линейно лишь в ограниченной области изменения углов α и δ_B .

Обращаясь к равенствам (1.8) и (1.9), заметим, что в наших предположениях при перемещениях руля высоты (δ_B *varia*), меняются вторые слагаемые в правых частях этих равенств. Вектор $\vec{M}_z$ меняется только по величине,

а вектор $\bar{A}_B$ — и по величине, и по направлению, причем по направлению он изменяется непременно. Таким образом, отклонение руля высоты приводит к изменению не только аэродинамического момента самолета, но также и аэродинамической силы, т. е. подъемной силы и лобового сопротивления. В самолетах, у которых крылья обладают большой подъемной силой, влияние руля на аэродинамическую силу невелико и его управляющее действие практически сводится к управлению моментом M_z .

Вместо приведения всех сил к центру масс N , можно разложить силы $\bar{A}_0$ и $\bar{A}_B$ по направлению прямой NC_B и ей перпендикулярному (рис. 9, б):

$$\bar{A}_0 = \bar{A}_{01} + \bar{A}_{02}; \quad \bar{A}_B = \bar{A}_{B1} + \bar{A}_{B2}.$$

Тогда

$$M_z = A_{02} l_2 - A_{B2} l_1,$$

где A_{B2} — та составляющая аэродинамической силы руля, которая и создает управляющий момент, равный $A_{B2} l_1$. Сила A_{B2} зависит от величин δ_B , α , ω_z , Ma , Re .

Для подсчета величин A_{B2} , $M_{zv} = A_{B2} l_1$ и M_z , разложим все аэродинамические силы по направлению соответствующего потока и ему перпендикулярному. Допустим, что тело G_C обдувается потоком, однородным на достаточном удалении от самолета и имеющим по отношению к телу G_C скорость $\bar{v}_C = -\bar{v}$. При обдуве тела G_C поток перестает быть однородным. Но так как руль G_1 удален от крыла на расстояние порядка $l_1 = (NC_B)$, значительно превосходящее хорду руля, можно допустить, что перед рулем поток вновь становится однородным. При этом скорость $\bar{v}_B$ потока, обдувающего руль G_1 , образует со скоростью $\bar{v}_C$ некоторый угол $\alpha' \equiv \alpha'(\alpha, \dot{\alpha}, \delta_B, \dot{\delta}_B, \omega_z, v, Ma, Re)$.

Разлагая силу $\bar{A}_0$ вдоль скорости $\bar{v}_C$ и перпендикулярно ей, получим:

$$\bar{A}_0 = \bar{P}_0 + \bar{L}_0,$$

где $\bar{P}_0$ — подъемная сила тела G_C , $\bar{L}_0$ — его лобовое сопротивление. Разлагая силу $\bar{A}_B$ вдоль скорости $\bar{v}_B$ и перпендикулярно ей, получим:

$$\bar{A}_B = \bar{P}_B + \bar{L}_B,$$

где $\bar{P}_B$ — подъемная сила руля, а $\bar{L}_B$ — его лобовое сопротивление. Силы L_0 , L_B , P_0 , P_B выражаются через пер-

вичные аэродинамические параметры — коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы. Скоростные напоры $q_c = \frac{\rho v_c^2}{2}$ и $q_b = \frac{\rho v_b^2}{2}$ в общем случае различны.

$$\text{Тогда } J_0 = C_x^{(0)} S_0 q_0; \quad P_0 = C_y^{(0)} S_0 q_c,$$

$$J_b = C_x^{(b)} S_b q_b; \quad P_b = C_y^{(b)} S_b q_b.$$

Из рис. 9, б следует, что

$$A_{02} = J_0 \cos \varphi_0 + P_0 \sin \varphi_0; \quad A_{b2} = J_b \cos \varphi + P_b \sin \varphi_b,$$

откуда вытекает, что

$$M_z = (J_0 \cos \varphi_0 + P_0 \sin \varphi_0) l_2 - (J_b \cos \varphi_b + P_b \sin \varphi_b) l_1.$$

Приравнивая момент M_z произведению $S_c b_c q_c m_z$, находим выражение моментного коэффициента m_z самолета через коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы составляющих его тел G_c и G_1 :

$$m_z = \frac{1}{S_c b_c q_c} [S_0 l_2 q_0 (C_x^{(0)} \cos \varphi_0 + C_y^{(0)} \sin \varphi_0) - \\ - S_b l_1 q_b (C_x^{(b)} \cos \varphi_b + C_y^{(b)} \sin \varphi_b)].$$

Восстанавливая допущение $q_c = q_b = q_0$ (т. е. $v_c = v_b = v$), получим более грубую оценку для m_z , не зависящую от скоростного напора:

$$m_z = \frac{1}{S_c b_c} [S_0 l_2 (C_x^{(0)} \cos \varphi_0 + C_y^{(0)} \sin \varphi_0) - \\ - S_b l_1 (C_x^{(b)} \cos \varphi_b + C_y^{(b)} \sin \varphi_b)].$$

Коэффициенты $C_x^{(0)}$, $C_y^{(0)}$ зависят в наших предположениях от угла атаки α тела G_c , коэффициенты $C_x^{(b)}$ и $C_y^{(b)}$ — от угла атаки α_b тела G_1 , $\alpha_b = \delta_b + \alpha'$; все эти коэффициенты зависят также от чисел Ma и Re . Что касается углов φ_0 и φ_b , то

$$\varphi_0 = \arctg \frac{C_y^{(0)}}{C_x^{(0)}} = k^{(0)}; \quad \varphi_b = \arctg \frac{C_y^{(b)}}{C_x^{(b)}} = k^{(b)},$$

где $k^{(0)}$ — аэродинамическое качество тела G_c , а $k^{(b)}$ — тела G_1 (руля).

Помимо рулей, применяются еще и другие воздушные органы управления. Среди них отметим щитки и пред-

крылки — крылообразные поверхности, перемещающиеся относительно крыльев самолета и предназначенные для увеличения коэффициента C_y подъемной силы крыла (ценою, конечно, некоторого увеличения коэффициента C_x лобового сопротивления, обычно незначительного). При этом меняются и моментные коэффициенты. Типовые графики зависимости коэффициента подъемной силы крыла от угла α атаки без закрылка ($\delta_{\text{ш}}=0$) и при наличии закрылка ($\delta_{\text{ш}} \neq 0$) изображены на

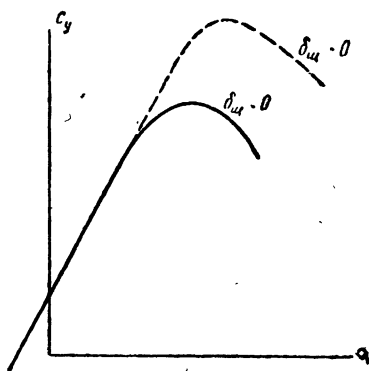


Рис. 10

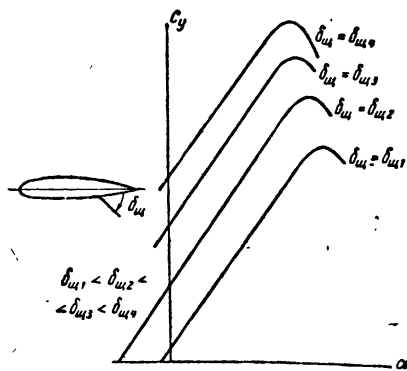


Рис. 11

рис. 10. В определенном диапазоне изменения координат α и $\delta_{\text{ш}}$, коэффициент C_y зависит от этих величин линейно:

$$C_y = C_{y0} + C_y^\alpha \alpha + C_y^{\delta_{\text{ш}}} \delta_{\text{ш}},$$

где $C_y^{\delta_{\text{ш}}}$ — эффективность закрылка. Параметры $C_y^{\delta_{\text{ш}}}$, C_y^α и C_{y0} зависят, как обычно от чисел Ma и Re . На рис. 11 показано семейство характеристик подъемной силы при различных углах отклонения закрылка. В структурном отношении закрылки и предкрылки суть тела типа $G_1^{(a)}$ (§ 1). Схемы нескольких типов закрылков и предкрылков показаны на рис. 12. Сверху показано основное крыло без закрылка. Далее изображены четыре группы различных сочетаний крыла с закрылком и предкрылком, причем в каждой группе конструктивные схемы расположены в порядке возрастания наибольшего достижимого значения коэффициента C_y . Значения $C_{y \text{ max}}$, угла α атаки (в градусах), при котором достигается соответствующее значение $C_{y \text{ max}}$ и аэродинамического качества $k = C_y/C_x$

при том же значении угла α приведены в таблице на этой фигуре для крыла с удлинением, равным 6 при $Re = 600\,000$ и дозвуковом обтекании. Из данных на рис. 10, 11 и 12* очевидно, что применение предкрылков и закрылков позволяет достаточно широко менять по

	$C_{y,max}$	α	k
	1,29	15	7,5
	1,95	12	4,0
	1,98	12	4,0
	2,16	14	4,3
	2,26	13	4,43
	2,32	12,5	4,45
	2,82	13	4,55
	3,09	14	4,1
	1,77	24	5,35
	1,84	28	4,1
	2,18	19	3,7
	2,26	18	3,77
	3,36	16	3,7

Рис. 12

желанию аэродинамические коэффициенты и, тем самым, аэродинамические силы и моменты, приложенные к самолету.

Существуют десятки других конструкций воздушных органов управления — подвижные крылья, крылья переменной площади и кривизны, механизмы для управления пограничным слоем и др. Их объединяет общее свойство — способность изменять форму наружной поверхности самолета и тем самым характер его обдува, аэродинамические силы и моменты, действующие на него.

Существуют управляющие поверхности, работающие на принципе взаимодействия не с воздухом, а с потоком газа, вытекающим из реактивного сопла (газовые рули). В теории тел переменного состава в первом приближении принимают, что частицы сгоревшего топлива

и окислителя, покинувшие поверхность горения, уже не принадлежат телу (самолету или ракете в данном случае), а рассматриваются как внешняя среда, подобно воздуху. Благодаря этому условию, называемому гипотезой близкогодействия, мы можем исследовать управляющее действие газовых рулей по образцу исследования действия рулей воздушных. Именно, разложим главный вектор $\bar{A}_r$ газодинамических сил, приложенных к рулю со стороны потока, вдоль скорости $\bar{v}_r$ газовых частиц относительно сопла и перпендикулярно ей (рис. 13):

$$\bar{A}_r = \bar{L}_r + \bar{P}_r,$$

* C. D. Perkins, R. E. Hage. Airplane Performance, Stability and Control. I. Wiley (N-Y), Chapman-Hall (L), 1957.

где $\bar{L}_r$ — лобовое сопротивление газового руля, а $\bar{P}_r$ — его подъемная сила:

$$L_r = S_r q_r C_{xг}; \quad P_r = S_r q_r C_{yг}; \quad q_r = \frac{1}{2} \rho_r v_r^2.$$

Здесь S_r — характерная площадь газового руля, ρ_r — средняя плотность газа в зоне обтекания руля, $C_{xг}$ и $C_{yг}$ — коэффициенты лобового сопротивления и подъемной силы газового руля соответственно; величины $C_{xг}$ и $C_{yг}$ зависят от угла атаки газового руля $\alpha_r = \delta_r$, где δ_r — координата этого руля (рис. 13) и чисел Ma_r и Re_r

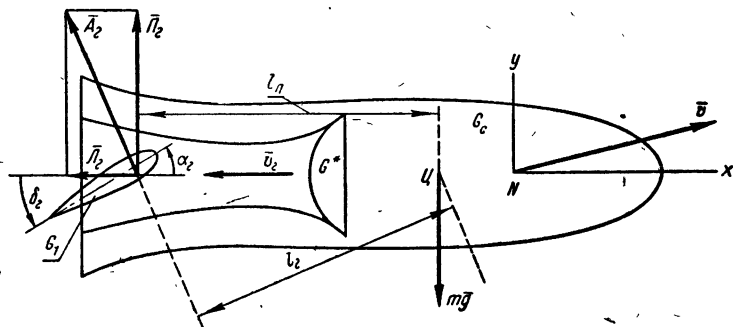


Рис. 13

газового потока: $C_{xг} = C_x(\delta_r, Ma_r, Re_r)$, $C_{yг} = C_y(\delta_r, Ma_r, Re_r)$. Управляющий момент $\bar{M}_r$ равен моменту силы $\bar{A}_r$ относительно мгновенного положения ζ центра масса ракеты:

$$\bar{M}_r = m \omega_{\zeta} \bar{A}_r, \quad M_r = -A_r l_r = -P_r l_r,$$

причем $M_r = M_r(\delta_r, Ma_r, Re_r)$. Вектор $\bar{M}_r$ параллелен оси вращения руля, фиксированной в теле G_c . Коэффициент $C_{yг}$ подобно коэффициенту C_y в некоторой окрестности нейтрального положения руля ($\delta_r = 0$) пропорционален отклонению руля:

$$C_{yг} = C_{yг}^{\delta_r} \delta_r,$$

где $C_{yг}^{\delta_r} = \left[\frac{\partial C_{yг}}{\partial \delta_r} \right]_{\delta_r=0} \equiv C_{yг}^{\delta_r}(Ma_r, Re_r)$ — эффективность газового руля.

Как и в случае управления с помощью воздушного руля, отклонение газового руля от нейтрального положе-

ния ($\delta_r = 0$) порождает не только момент, действующий на ракету, но и силу, приложенную к центру масс. Осевая составляющая $\bar{L}_r$ силы $\bar{A}_r$ оказывает тормозящее действие на полет ракеты, что является недостатком метода управления с помощью газовых рулей.

В пространственном полете момент $\bar{M}$ аэродинамических сил удобно проектировать на связанные оси самолета: $\bar{M} = M_x \bar{i} + M_y \bar{j} + M_z \bar{k}$, где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы осей Nx , Ny , Nz соответственно, причем $M_x = V_{d1} q_v m_x$, $M_y = V_{d2} q_v m_y$; $M_z = V_{d3} q_v m_z$, а $q_v = \rho v^2/2$ — скоростной напор, приведенный к подвижному началу. Величины V_{d1} , V_{d2} , V_{d3} — характерные объемы, для которых указаны моментные аэродинамические коэффициенты m_x , m_y , m_z ; каждый из них зависит, вообще говоря, от переменных v , α , $\dot{\alpha}$, β , $\dot{\beta}$, p , q , r , Ma , Re , координат δ_a , δ_n , δ_v рулей и их производных, координат $\delta_1, \dots, \delta_L$ предкрылков, триммеров, закрылков и их производных и от координат прочих аэродинамических органов управления. Здесь и ниже p , q , r — проекции мгновенной воздушной угловой скорости $\bar{\omega}$ трехгранника $Nxyz$ (тела G_C) на его же оси: $\bar{\omega} = p\bar{i} + q\bar{j} + r\bar{k}$.

б) *Создание управляющего момента путем перемещения отдельных масс.* Пусть в некоторый момент времени, принимаемый за начальный ($t = 0$), тело типа G_1 начало перемещаться по отношению к телу G_C . При $t = 0$ радиус-вектор $\bar{r}$ центра Π масс самолета в системе $Nxyz$ определен соотношением

$$[m(0) + m_1] \bar{r}(0) = m_0(0) \bar{r}_C + m_1 \bar{r}_1(0),$$

где $m_0 \equiv m_0(t)$ и m_1 — массы тел G_0 и G_1 соответственно (m_1 — постоянная), а $\bar{r}_C = \text{const}$ и $\bar{r}_1 \equiv \bar{r}_1(t)$ — радиусы-векторы центров масс этих же тел относительно системы отсчета $Nxyz$. Будем перемещать с помощью какого-либо привода тело G_1 относительно тела G_C ; при этом вектор $\bar{r}_1$ изменяется. Тогда, пренебрегая влиянием [движения масс самого привода, запишем значение радиуса-вектора $\bar{r}$ центра масс самолета (т. е. системы тел G_0 и G_1) в момент $t > 0$:

$$[m_0(t) + m_1] \bar{r}(t) = m_C(t) \bar{r}_C + m_1 \bar{r}_1(t)$$

при условии $\bar{r}_1(t) \neq \bar{r}_1(0)$. Следовательно, в момент t центр масс C самолета сместился в теле G_C на отрезок $\bar{r}_t$:

$$\bar{r}_t = \frac{[m_0(t) - m_0(0)] \bar{r}_C + [m_0(0) + m_1] \bar{r}_1(t) - [m_0(t) + m_1] \bar{r}_1(0)}{[m_0(t) + m_1] [m_0(0) + m_1]} m_1.$$

При $m_0 = \text{const}$

$$\bar{r}_t = \frac{m_1}{m_0 + m_1} [\bar{r}_1(0) - \bar{r}_1(t)].$$

Это смещение центра масс приводит к появлению момента силы тяжести

$$\bar{r}_t \times [m_0(t) + m_1] \bar{g} \quad (\bar{g} \text{ — ускорение силы тяжести}),$$

сообщающего самолету угловое ускорение, поэтому относительное перемещение тела типа G_1 (или нескольких тел типа $G_v^{(s)}$), а также перемещение жидких масс служат управляющим воздействием. Следует иметь в виду, что такие перемещения изменяют, вообще говоря, момент инерции самолета и направления его главных осей, а также порождают силы инерции.

Если тело типа $G_v^{(s)}$ представляет собой корпус двигателя или реактивное сопло, то при повороте его или смещении, в общем случае одновременно со смещением центра масс и изменением моментов инерции самолета, меняется и направление истечения реактивной струи по отношению к телу G_C (т. е. к системе $Nxyz$). Именно, при отклонении тяги $\bar{P}$ из положения $\bar{P}_0$ в положение $\bar{P}_1$, возникает управляющий момент $\bar{M}_P = \text{mom}_C \bar{P}_0 - \text{mom}_C \bar{P}_1$ и управляющая сила $\bar{P}_t = \bar{P}_0 - \bar{P}_1$, приложенная к центру масс C , причем должно быть $M_P \neq 0$ даже при $P_0 = P_1$. При достаточно большой тяге P двигателя, возникновение управляющих момента $\bar{M}_P$ и силы $\bar{P}_t$ выражает главный эффект указанного перемещения сопла или двигателя; другие же сопутствующие явления — смещение центра масс, изменение моментов инерции, появление сил инерции в результате этого относительного движения — представляют собой лишь побочный эффект.

Такое управление называется управлением с помощью качающегося двигателя и качающегося сопла. Обобщая

этот метод управления, можно представить систему из нескольких подвижных реактивных сопел, из которых, по мере надобности, выбрасываются реактивные струи газа или воздуха, создающие управляющие силы и моменты.

в) *Управление вращательным движением с помощью внутренних сил.* Пусть самолет представляет собой совокупность основного тела G_0 и тел $G^{(\sigma)}$ (§ 1), и пусть телам $G^{(\sigma)}$ сообщены собственные вращения около соответствующих осей или точек. При этом, относительные вращения создаются исключительно за счет сил, внутренних по отношению к самолету. Так тело $G_1^{(\sigma)}$ может служить ротором двигателя, статор которого укреплен на теле G_0 (в частности, на теле G_C). Физическая же природа энергии, за счет которой создаются эти внутренние силы, безразлична: такой двигатель может быть электрическим, гидравлическим, пневматическим, механическим (пружинным), тепловым и т. п.

Закон вращения

$$\delta_{\nu}^{(\sigma, \alpha)} \equiv \delta_{\nu}^{(\sigma, \alpha)}(t) \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

каждого из тел $G_{\nu}^{(\sigma)}$ относительно тела $G_{\nu-1}^{(\sigma)}$ будем считать заданным независимо от движения самолета. Как только тела $G_{\nu}^{(\sigma)}$ начнут выполнять программное движение, на тело G_C начнут действовать моменты сил инерции, которые приведут к изменению углового ускорения тела G_C , т. е. эти моменты будут управляющими. Соответствующим подбором тел $G_{\nu}^{(\sigma)}$, их расположения в самолете (рис. 4) и законов вращения $\delta_{\nu}^{(\sigma, \alpha)}(t)$ можно осуществить требуемое управляющее воздействие на угловое положение тела G_C в неподвижной системе отсчета. Указанные законы вращения осуществляются с помощью следующих систем.

Рассмотрим этот метод на примере управления угловым положением ракеты в пустоте, совершающей полет в неподвижной плоскости при выключенном двигателе; связанная плоскость Nxy все время содержится в плоскости OXY , а за начало N выберем центр C масс ракеты. При этом ракета вращается в плоскости полета по инерции с угловой скоростью $\omega_0 = \text{const}$ около боковой центральной оси Cz ($Cz \parallel OZ$) по отношению к неподвижной системе $OXYZ$ (фиг. 14). Пусть требуется повернуть продольную ось Nx

ракеты в течение заданного времени t^* на некоторый угол ϑ' и к этому же моменту времени $t = t^*$ прекратить ее вращение по отношению к неподвижной системе. Этот поворот может понадобиться для осуществления закона навигации (§ 2), предусматривающего полет с постоянным углом

$$\vartheta = \vartheta^* = \text{const},$$

где $\vartheta = L(OX, Nx)$.

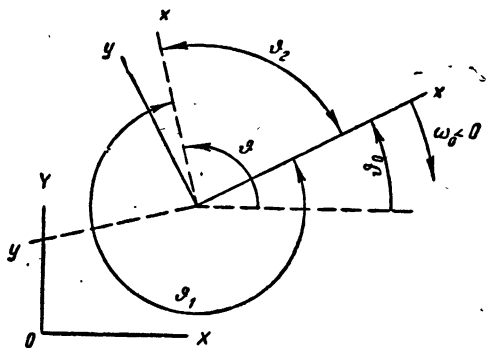


Рис. 14

Для управления поворотом ракеты около оси Nz применим осесимметричный уравновешенный маховик G_1 , способный вращаться по отношению к ракете (телу G_c) вокруг той же оси Nz ; при этом ось симметрии маховика совмещена с осью Nz .

До начала относительного вращения тела G_1 , тела G_c и G_1 жестко скреплены вместе. В условиях данного полета главный момент внешних сил, действующих на ракету (систему $G_1 + G_c$), равен нулю, кинетический момент ракеты постоянен по величине и направлению.

Пусть Nz — центральная ось для каждого из тел G_c и G_1 . За счет сил, внутренних по отношению к системе $G_1 + G_c$, приведем маховик G_1 во вращение около оси Nz по отношению к корпусу G_c ракеты. Тогда кинетический момент этой системы не изменится и имеет место интеграл моментов:

$$I\omega + j(\omega + \Omega) = (I + j)\omega_0,$$

где $\omega \equiv \omega(t)$ — абсолютная угловая скорость вращения тела G_c , $\Omega \equiv \Omega(t)$ — угловая скорость вращения махо-

вика G_1 относительно тела G_C , I и j — моменты инерции тел G_C и G_1 соответственно относительно оси Nz . Из интеграла моментов следует, что

$$\omega = \omega_0 - c\Omega, \quad (1.10)$$

где $c = j/(I + j)$, $0 < c < 1$. Так как $\dot{\vartheta} = \omega$, угловое положение ракеты в произвольный момент времени определяется соотношением

$$\vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega_0 t - c \int_0^t \Omega(\tau) d\tau; \quad \vartheta_0 = \vartheta(0). \quad (1.11)$$

Будем искать необходимый закон вращения маховика $\Omega \equiv \Omega(t)$ в классе непрерывных функций с ограниченным изменением, поскольку такие функции физически осуществимы.

Итак, пусть требуется установить ракету под углом ϑ^* к неподвижной оси OX за время t^* , считая с момента $t = 0$ включения привода маховика G_1 , причем $\vartheta^* \neq \vartheta_0 \pm \pm 2\pi$ ($\kappa = 0, 1, 2, \dots$). Схема поворота тела G_C приведена на рис. 14: оси Nx и Ny , проведенные сплошными линиями, показывают исходное положение связанной системы Nxy ; пунктирными линиями показано их конечное положение после поворота тела G_C на требуемый угол. Возможны два решения:

1) сохранить направление вращения по инерции (поворот на угол $\vartheta_1: 0 < |\vartheta_1| < 2\pi$) и.

2) повертывать ракету против этого направления (поворот на $\vartheta_2 = 2\pi - |\vartheta_1|$; $0 < |\vartheta_2| < 2\pi$). Решения, связанные с колебаниями угла ϑ , мы исключаем, как нецелесообразные. Для определенности, на рис. 14, $\omega_0 < 0$, что не ограничивает общности рассуждения.

Пусть маховик G_1 снабжен приводом постоянной скорости с характеристикой типа гистерезиса, идеализируемой графиком на рис. 15. Здесь χ — входная координата привода, т. е. выходная координата пускового устройства (реле). Вход χ привода определяется управляющей командой:

$$\begin{aligned} \chi &= \pm f_1(\tau) \quad (\text{при включении}), \\ \chi &= \pm f_2(\tau) \quad (\text{при выключении}); \end{aligned}$$

τ — время, отсчитываемое от момента срабатывания или отпущения реле, а характеристики $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ (рис. 16)

определяются динамикой включающего устройства. Каждый из знаков отвечает требуемому направлению относительного вращения маховика G_1 . Функции $f_1(\tau)$ и $f_2(\tau)$ монотонны на полуинтервалах $\tau_a < \tau \leq \tau_e$ и $\tau_f < \tau \leq \tau_j$ соответственно.

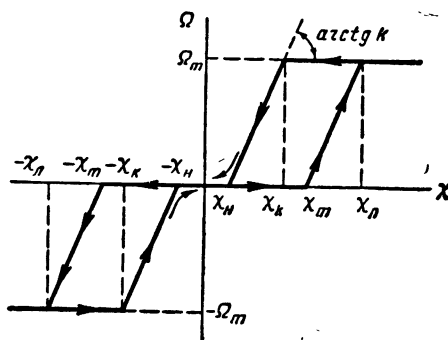


Рис. 15

В случае 1 $\vartheta^* - \vartheta_0 = -\vartheta_1 < 0$ и в силу соотношений (1.10) и (1.11) искомым закон $\Omega \equiv \Omega(t)$ должен удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} \vartheta_1 + \omega_0 t^* - c \int_0^{t^*} \Omega(t) dt = 0, \\ \Omega_0 - c\Omega(t^*) = 0. \end{cases}$$

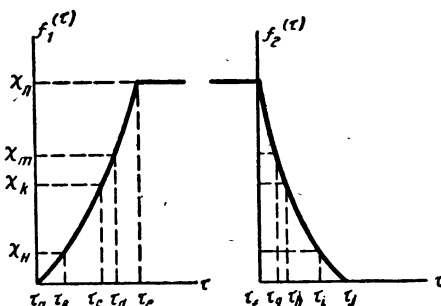


Рис. 16

Зададимся неравенством $t^* < \frac{\vartheta_1}{|\omega_0|}$, т. е. потребуем, чтобы управляемый поворот ракеты на угол $-\vartheta_1$ выполнялся

быстрее поворота ее на этот же угол при неуправляемом ее вращении по инерции со скоростью ω_0 . С другой стороны, вращение тела G_C ракеты в неподвижном пространстве должно прекратиться к моменту $t = t^*$. Чтобы избежать противоречия между этими двумя требованиями, необходимо сначала увеличить абсолютную величину $|\omega|$ угловой скорости тела G_C ($|\omega| > |\omega_0|$), ускорив вращение тела G_C в первоначальном направлении, а затем уменьшить ее до нуля к моменту $t = t^*$. На первом этапе движения: $0 \leq t < t' < t^*$ должно быть $\omega(t) < \omega_0$ (ибо принято $\omega_0 < 0$), из соотношения (1.10) следует, что

$$\text{sign } \Omega = \text{sign}(\omega_0 - \omega) = +1$$

и $\Omega > 0$, т. е. маховик G_1 должен вращаться против часовой стрелки относительно тела G_C (рис. 14). На втором этапе движения ($t' < t \leq t^*$) должно быть $0 \geq \omega(t) > \omega_0$ [$\omega(t^*) = 0$]; следовательно, $\text{sign } \Omega = -1$ и $\Omega < 0$, т. е. вращение маховика G_1 относительно тела G_C будет совершаться по часовой стрелке. Для осуществления такой программы вращения ротора G_1 его привод должен быть весьма быстродействующим в смысле, который выявится ниже.

Подсчитаем искомую функцию $\Omega(t)$, построив на рис. 17, а вспомогательный график $\chi = \chi(t)$. При

$$0 \leq t \leq t_1 \quad (0 = \tau_a, \quad t_1 = \tau_d), \quad \Omega = 0 \quad (\text{рис. 16, 17}).$$

За время t_1 ракета, продолжая вращаться по инерции, повернется на угол $\vartheta^{(1)} < 0$: $\vartheta^{(1)} = \omega_0 t_1$.

В промежутке $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\chi = f_1(t) \quad \text{и} \quad \Omega = k(\chi - \chi_m) = k[f_1(t) - \chi_m],$$

причем $k(\chi_{\mathcal{L}} - \chi_m) = \Omega_m$.

За время $t_2 - t_1$ ракета повернется на угол $\vartheta^{(2)} < 0$:

$$\begin{aligned} \vartheta^{(2)} &= \omega_0(t_2 - t_1) - c \int_{t_1}^{t_2} \Omega(t) dt = \\ &= (\omega_0 + ck\chi_m)(t_2 - t_1) - ck \int_{t_1}^{t_2} f_1(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Конечно, $\vartheta^{(2)} < \omega_0(t_2 - t_1)$, так как $f_1(t) > \chi_m$ ($t_1 \leq t \leq t_2$). При $t_2 \leq t \leq t_3$

$$\chi \equiv \chi_{\mathcal{L}} \quad \text{и} \quad \Omega \equiv \Omega_m.$$

В момент $t = t_3$ на реле поступает сигнал реверса маховика G_1 относительно тела G_C . Когда $t_3 \leq t \leq t_4 = t_3 + \tau_h$, то

$$\chi \equiv \chi_L \text{ и по-прежнему } \Omega \equiv \Omega_m.$$

За время $t_4 - t_2$ ракета повернется на угол $\vartheta^{(3)} < 0$:

$$\vartheta^{(3)} = (\omega_0 - c\Omega_m)(t_4 - t_2) = -(|\omega_0| + c\Omega_m)(t_4 - t_2).$$

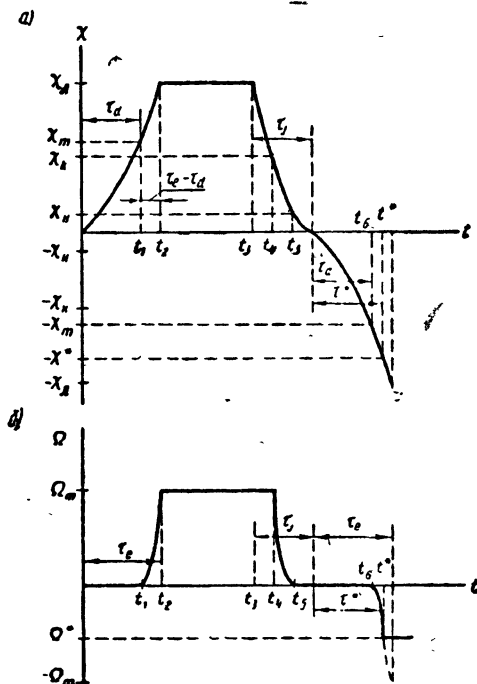


Рис. 17

На следующем отрезке времени $t_4 \leq t \leq t_5 = t_3 + \tau_i$

$$\chi_L \geq \chi \geq \chi_H$$

и

$$\Omega = k(\chi_K - \chi_H) = k[f_2(\tau) - \chi_H],$$

причем

$$\chi_K - \chi_H = \chi_L - \chi_m; \quad \Omega(t_4) = \Omega_m; \quad \Omega(t_5) = 0.$$

За время $t_5 - t_4$ ракета повернется на угол $\vartheta^{(4)} < 0$:

$$\vartheta^{(4)} = (\omega_0 + ck\chi_H)(t_5 - t_4) - ck \int_{t_4 - t_3}^{t_5 - t_3} f_2(\tau) d\tau.$$

В промежутке $t_5 \leq t \leq t_6 = t_3 + \tau_j + \tau_d$

$$\chi_H \geq \chi \geq -\chi_m, \quad \Omega \equiv 0$$

и ракета, вращаясь вновь по инерции, повернется на угол $\vartheta^{(5)} < 0$:

$$\vartheta^{(5)} = \omega_0(t_6 - t_5).$$

Наконец, на последнем отрезке времени $t_6 \leq t \leq t^*$:

$$-\chi_m \geq \chi \geq -\chi^* \quad \text{и} \quad \Omega = k(\chi + \chi_m) = k[\chi_m - f_1(\tau)].$$

Здесь $\chi^* = -f(\tau^*)$; $\tau^* = t^* - t_3 - \tau_j$; $\tau_e \geq \tau^* > \tau_d$.

Обозначим через Ω^* значение Ω , при котором $\omega = 0$; в силу равенства (1.10) $\Omega^* = \omega_0/c < 0$. Требуемый разворот ракеты физически осуществим лишь в том случае, если привод маховика G_1 способен раскрутить его до относительной угловой скорости Ω_m^* , т. е. при условии $\Omega_m \geq |\Omega^*|$, которое мы будем считать выполненным (на рис. 17, $|\Omega^*| < \Omega_m$). За время $t_6 - t_5$ ракета повернется на $L\vartheta^{(6)} < 0$:

$$\vartheta^{(6)} = (\omega_0 - ck\chi_m)(t^* - t_6) + ck \int_{t_6 - (t_3 + \tau_j)}^{t^* - (t_3 + \tau_j)} f_1(\tau) d\tau.$$

Суммарный угол поворота ракеты $\sum_{g=1}^6 \vartheta^{(g)}$ должен равняться заранее заданному углу $-\vartheta_1$:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 + \omega_0 t^* + ck\chi_m(t_2 - t_1 + t_6 - t^*) + ck\chi_H(t_5 - t_4) - \\ - c\Omega_m(t_4 - t_2) + ck \left[\int_{t_6 - (t_3 + \tau_j)}^{t^* - (t_3 + \tau_j)} f_2(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - \int_{t_4 - t_3}^{t_5 - t_3} f_2(\tau) d\tau - \int_{t_1}^{t_3} f_1(\tau) d\tau \right] = 0. \end{aligned}$$

Заменяя постоянные $t_1, \dots, t_6$ их выражениями через постоянные t_3 и $\tau_d, \dots, \tau_j$, приведем последнее уравнение к виду

$$F(t^*, t_3) = 0,$$

где

$$F(t^*, t_3) = \vartheta_1 + \omega_0 t + ck\chi_m(t_3 - t^* + \tau_e + \tau_j) + \\ + ck\chi_m(\tau_i - \tau_h) - c\Omega_m(t_3 + \tau_h - \tau_e) + \\ + ck \int_{\tau_d}^{t^* - t_3 - \tau_j} f_1(\tau) d\tau - A_F.$$

Постоянная

$$A_F = \int_{\tau_d}^{\tau_e} f_1(\tau) d\tau + \int_{\tau_h}^{\tau_i} f_2(\tau) d\tau$$

не зависит ни от t^* , ни от t_3 .

Требуемое вращение ракеты физически осуществимо, если постоянные t^* и t_3 удовлетворяют уравнению

$$F(t^*, t_3) = 0$$

и неравенствам

$$\tau_e \leq t_3 \leq t^* - \tau^* - \tau_j; \quad t^* \geq \tau_e + \tau_j + \tau^*$$

при заданных характеристиках привода и величинах ϑ_1 и τ^* .

Величина τ^* определяется из условия $\Omega^* = \omega_0/c$, т. е. из уравнения $k[\chi_m - f_1(\tau^*)] = \omega_0/c$:

$$f_1(\tau^*) = \chi_m - \omega_0/(ck) = \chi_m + |\omega_0|/(ck) > \chi_m.$$

График функции $\Omega \equiv \Omega(t)$ изображен на рис. 17.

В случае 2 рассуждение проводится подобным же образом.

Если $\omega_0 = 0$, то для поворота ракеты на угол ϑ' функция $\Omega(t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\vartheta' = -c \int_0^{t^*} \Omega(t) dt.$$

При задании закона работы привода маховика, идеализируемого для простоты разрывной характеристикой:

$$\Omega(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq -0, \\ -\Omega_m \operatorname{sign} \vartheta' & \text{при } +0 \leq t \leq t^* - 0, \\ 0 & \text{при } t > t^*, \end{cases}$$

($\Omega_m > 0$)

продолжительность t^* поворота на угол ϑ' определяется равенством

$$t^* = \left| \frac{\vartheta'}{c\Omega_m} \right| = \frac{|\vartheta'|}{c\Omega_m}.$$

г) *Управление с помощью реактивной силы.* Реактивная сила, служащая для приведения самолета в движение и управления его полетом, создается за счет количества движения газообразных частиц, выбрасываемых из реактивного сопла. отождествим здесь самолет с телом $G_0 = G^* + G_c$, где тело G^* состоит из веществ, участвующих в горении. В качестве примера рассмотрим в этом пункте лишь самолеты с реактивными двигателями на твердом топливе (пороховыми и т. д.). Как и в п. «а» настоящего параграфа, примем гипотезу близкодействия. Оставляя более подробный разбор динамики тела переменного состава до третьей главы, выясним, от каких переменных зависит реактивная тяга двигателя.

Разобьем объем V_d^* , занимаемый телом G^* , на фиксированные объемы V_{dk}^* ($\sum_k V_{dk}^* = V_d^*$), каждый из которых включает в себе некоторое количество материальных частиц веществ, участвующих в горении; эти частицы при горении покидают объемы V_{dk}^* , образуя газовую струю. Объемы V_{dk}^* мы выберем настолько малыми, чтобы исходя из критериев типа «а» и «б» § 1, можно было бы во все время горения пренебречь перемещением центра массы $m_k \equiv m_k(t)$, заключенной в объеме V_{dk}^* , внутри этого объема, а плотность $\rho_k \equiv \rho_k(t)$ вещества в объеме V_{dk}^* считать одинаковой по этому объему:

$$m_k = \rho_k V_{dk}^*.$$

Определенные таким образом элементарные тела массой $m_k(t)$:

$$m_k(0) = m_k^* \geq m_k(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq t_k,$$

назовем точками переменного состава (переменной массы). Изменение массы точки переменного состава со временем происходит только за счет последовательного отделения материальных частиц от этой массы при горении, т. е. за счет перемещения этих частиц из объема V_{dk}^* наружу. Мы считаем, что массы материальных частиц малы и что

малы промежутки времени между последовательными отделениями частиц вплоть до момента t_k полного истечения частиц из объема V_{dk}^* . Тогда мы можем с достаточной точностью заменить дискретный закон уменьшения массы гладкой интерполяционной функцией и принять закон $m_k \equiv m_k(t)$ дифференцируемым по времени по крайней мере один раз на полуинтервале $0 \leq t < t_k$. При этом

$$m_k(t) > 0 \quad (0 \leq t < t_k); \quad \dot{m}_k(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \geq t_k.$$

Введем обозначения: $\bar{v}_k$ — абсолютная скорость k -й точки переменной массы $m_k \equiv m_k(t)$; $\bar{u}_k$ — абсолютная скорость отбрасываемой материальной частицы в момент отделения от массы m_k ; $\bar{F}_k$ и $\bar{F}_k^{(i)}$ — главные векторы внешних и внутренних сил соответственно, приложенных к массе m_k . Движение точки переменной массы в неподвижном пространстве описывается уравнением Мещерского

$$\frac{d}{dt}(m_k \bar{v}_k) = \bar{F}_k + \bar{F}_k^{(i)} + \dot{m}_k \bar{u}_k.$$

Обозначая через $\bar{V}_k \equiv \bar{V}_k(t)$ относительную скорость отбрасывания материальной частицы m_k , т. е. скорость отделения по отношению к телу G_C :

$$\bar{u}_k = \bar{v} + \bar{V}_k$$

и через $\bar{w}_k$ — абсолютное ускорение массы m_k :

$$\bar{w}_k = \frac{d\bar{v}_k}{dt},$$

приведем уравнение Мещерского к виду:

$$m_k \bar{w}_k = \bar{F}_k + \bar{F}_k^{(i)} + \dot{m}_k \bar{V}_k.$$

Это же уравнение справедливо и для точек неизменного тела G_C , ибо для них $\dot{m}_k \equiv 0$.

Производя суммирование по всему телу G_0 самолета и учитывая, что $\sum_{G_0} \bar{F}_k^{(i)} = 0$, найдем изменение количества движения $\bar{Q}$ самолета в неподвижной системе:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F} + \bar{P},$$

где $\bar{F}$ — главный вектор внешних сил, а $\bar{P} = \sum_{G^*} \dot{m}_k \bar{V}_k$ — главный вектор всех реактивных сил $\dot{m}_k \bar{V}_k$.

Предполагая, что все скорости $\bar{V}_k$ направлены по оси сопла, положение которой относительно тела G_C (связанной системы $Nxyz$) определяется единичным вектором $\bar{V}^0$, неизменным относительно тела G_C , найдем, что

$$\bar{V}_k = V_k \bar{V}^0$$

и

$$\bar{P} = \bar{V}^0 \sum_{G_0} \dot{m}_k V_k = \bar{V}^0 \sum_{G^*} \dot{m}_k V_k.$$

Приняв еще, что в каждый момент времени относительные скорости $\bar{V}_k$ всех отделяющихся частиц равны (однородная струя): $V_k = V(t)$, получим

$$\bar{P} = \dot{m}(t) V(t) \bar{V}^0,$$

где $m = \sum_{G_0} m_k$ — масса самолета, а $\dot{m}$ — масса, выбрасываемая двигателем в единицу времени.

Регулируя силу $\bar{P} = \dot{m}V$, мы изменяем количество движения и, в общем случае, момент количества движения самолета и тем влияем на его полет. Величиной $\dot{m}V$ можно управлять изменением состава горючей смеси и дозированием расхода ее компонентов (топлива, окислителя, катализаторов), регулированием температуры компонентов, изменением геометрической формы поверхности горения и газового тракта и т. д. При этом величины $\dot{m}$ и V можно изменять независимо. Из различных способов осуществления одной и той же программы $P \equiv P(t)$ целесообразно избрать тот, который дает наибольший КПД.

д) *Управление путем отбрасывания дискретных масс.* Отожествим в этом пункте самолет с совокупностью твердого тела G_C и материальной точки $G'(G_C + G' = G_0)$, движущихся до определенного момента времени как единое твердое тело — системой G_0 . В момент времени, принимаемый за начальный, точка G' отделяется от тела G_C с относительной скоростью $\bar{V}$.

Отделение тел G_C и G' (тело G' сводится к точке) одного от другого происходит, вообще говоря, под действием сил как внутренних, так и внешних по отношению к системе G_0 . Идеализируя процесс отделения, примем, что относительная скорость $\bar{V}$ разобщения тел G_C и G' возникает мгновенно; в этом предположении, относительное движение этих тел может начаться исключительно под действием

импульса внутренних сил. Начало действия этих сил отнесем к моменту времени $t = -0$, а окончание их действия, приведшего к возникновению относительной скорости отделения, — к моменту времени $t = +0$:

$$\bar{V} \Big|_{t=-0} = 0; \quad \bar{V} \Big|_{t=+0} \neq 0.$$

Ниже под скоростью V будем понимать ее значение при $t = +0$.

В результате отделения тел G_C и G' дальнейшее движение каждого из них окажется отличным от движения, которое бы имело место, если бы между этими телами сохранилась жесткая связь при прочих равных условиях. Сообщая телу G' относительную скорость $\bar{V}$, можно нужным образом влиять на последующее движение самолета (тела G_C). Таким образом, отбрасывание точки G' от тела G_C оказывает управляющее воздействие на движение этого тела.

Если тела G_C и G' не подвержены воздействию внешних сил, то движение их после отделения (при $t > +0$) определяется из условий постоянства абсолютного количества движения системы тел G_C и G' и ее кинетического момента; последний можно подсчитывать по отношению к началу неподвижной системы отсчета или к центру масс системы тел G_C и G' . Если же к этим телам приложены и внешние силы (притяжение со стороны третьих тел, в частности Земли, аэродинамические силы), то движение их после отделения определяется общими теоремами динамики, причем начальными условиями служат условия при $t = +0$.

Для подсчета значений абсолютных скоростей тел G_C и G' при $t = +0$ справедливо исходить из неизменяемости количества движения и кинетического момента системы этих тел в процессе их отделения. В самом деле, все внешние силы по их физическому существу ограничены (по абсолютной величине), а длительность процесса отделения ($+0$) — (-0) по условию равна нулю и нулю равен также импульс этих сил и их моментов в течение этого процесса, идеализируемого, как мгновенный. Обозначая через $\bar{Q}$ вектор абсолютного количества движения системы тел G_C и G' и через $\bar{K}$ — вектор ее кинетического момента по отношению к центру масс системы обоих тел, напомним

$$\bar{K}^+ = \bar{K}^-, \quad (1.12)$$

$$\bar{Q}^+ = Q^-, \quad (1.13)$$

где знаки «+» и «—» относятся к моментам времени $+0$ и -0 соответственно.

Отметим попутно, что хотя внешние силы не изменяют величин $\bar{Q}$ и $\bar{K}$ в момент разобщения тел G_C и G' , величина импульса внутренних сил, необходимого для придания телу определенной относительной скорости $\bar{V}$, может зависеть от внешних сил. Например, при движении в воз-

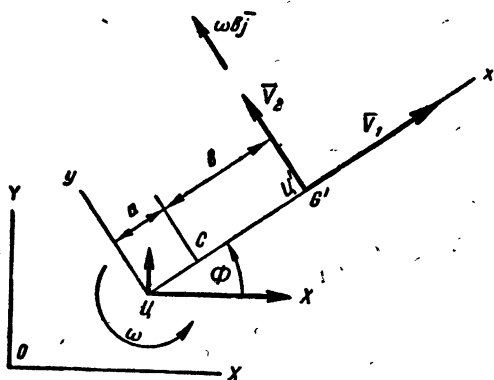


Рис. 18

духе, сообщение относительной скорости отделения связано с изменением скоростей и некоторого количества частиц прилегающих слоев воздуха, что требует дополнительного импульса.

Рассмотрим процесс отделения на примере плоского движения тел G_C и G' (рис. 18).

На этом рисунке система OXY — неподвижная, C — центр массы тела G_C , C' — местоположение материальной точки G' ; m и μ — массы тела G_C и точки G' соответственно, I — момент инерции тела G_C около его центральной оси, перпендикулярной плоскости движения OXY , X и Y — абсолютные координаты центра C массы тела G_C . С телом G_C связана центральная система координат Cxy ; ось x проведена через точку G' , что не ограничивает общности задачи. Через ω обозначена угловая скорость тела G_C , $\omega = \dot{\Phi}$ (рис. 18). Состояние тела G_C определяется параметрами

при $t = -0$:

$$X, Y, \Phi, \dot{X}^-, \dot{Y}^-, \omega^-,$$

при $t = +0$:

$$X, Y, \Phi, \dot{X}^+, \dot{Y}^+, \omega^+.$$

Относительная линейная скорость $\bar{V}$ — скорость отбрасывания определяется ее проекциями V_1 и V_2 на подвижные оси x и y соответственно.

Подсчитаем относительную скорость V_2 , нужную для мгновенного изменения абсолютной угловой скорости ω тела G_C на заданную величину $\omega' = \omega^+ - \omega^-$. Для этого определим положение центра C масс системы G_0 . С помощью схемы на рис. 18 получим, что

$$(ЦС) = a = \frac{\mu c}{M}; \quad (СЦ') = b = \frac{mc}{M}, \quad (1.14)$$

$$M = m + \mu; \quad c = a + b.$$

Используя эту же схему, найдем кинетический момент системы G_0 относительно центра масс C этой системы:

$$K^+ = I_C \omega^+ + \mu b V_2.$$

Здесь I_C — момент инерции системы тел G_C и G' относительно оси, проходящей через центр C масс системы $G_0 = G_C + G'$ при $t = -0$ и перпендикулярной плоскости движения. Выражая момент инерции I_C через исходные массовые и геометрические параметры, найдем, что

$$K^+ = (I + ma^2 + \mu b^2) \omega^+ + \mu b V_2,$$

$$K^- = K^+ \Big|_{\substack{V_2 = 0; \\ \omega^+ = \omega^-}} = (I + ma^2 + \mu b^2) \omega^-$$

Подставляя выражения в правых частях последних равенств в уравнение (1.12), выпишем соотношение, определяющее искомую скорость V_2 через заданное изменение ω' скорости ω и параметры системы:

$$\omega' = \frac{\mu b}{I + ma^2 + \mu b^2} V_2.$$

Заменяя еще координаты a и b их выражениями (1.14), получим окончательное выражение скорости V_2 :

$$V_2 = - \frac{I(m + \mu) + c^2 \mu m}{c \mu m} \omega'.$$

Что касается проекции V_1 скорости $\bar{V}$ на ось x , то от нее вращательное движение тела G_C не зависит.

С помощью интеграла количества движения (1.13) нетрудно подсчитать изменение абсолютной скорости центра C , сопутствующее заданному изменению угловой скорости. Отбрасывая независимым образом две точечные массы, можно одновременно осуществить заданные изменения угловой и линейной скорости тела G_C .

Рассмотрим теперь влияние отделения тела G' на дальнейший полет самолета в воздушной среде, т. е. при $t > +0$. отождествим здесь самолет с системой тел $G_0 = G' + G^* + G'$ (§ 1), где G^* — твердое топливо, а под телом G' теперь будем понимать твердое тело конечных размеров. Пусть тело G' отделилось от системы тел $G_C + G^*$ без угловой относительной скорости (в частном случае, и без линейной относительной скорости: $V = 0$) в момент $t = +0$. К телу G' приложены сила тяги и аэродинамическая сила, к системе тел $G_C + G^*$ — еще и реактивная тяга.

Управляющее воздействие отделения тела G' на движение системы тел $G_C + G^*$ при $t > +0$ выразится также и в изменении линейного ускорения центра масс этой системы и, в общем случае, ее абсолютного углового ускорения. Это объясняется тем, что воздействие внешних сил и реактивной тяги на систему тел $G_C + G^*$ отличается от воздействия этих же сил на исходную систему тел $G_C + G^* + G'$.

Исследуем подробнее влияние отделения тела G' на полет самолета, рассматривая для простоты полет вертикальный поступательный: центры масс систем $G_C + G^* + G'$ (до отделения тела G') и $G_C + G^*$ и G' (после отделения тела G') все время перемещаются вдоль одной и той же вертикальной прямой. Сравним два случая:

а) система $G_C + G^*$ и тело G' движутся как единое тело;

б) тело G' отделилось от системы $G_C + G^*$ с некоторой относительной линейной скоростью $\bar{V}$.

Обозначим через $\bar{F}_A$ и $\bar{F}_B$ главные векторы сил негравитационной природы (реактивных и аэродинамических), приложенных к системе $G_C + G^* + G'$ и $G_C + G^*$ соответственно.

Через $\bar{g}_A$ и $\bar{g}_B$ обозначим главные векторы ускорений

от силы земного притяжения тех же систем соответственно. Так как габариты системы $G_C + G^* + G'$ практически ничтожны по сравнению с расстоянием между центром масс этой системы и центром Земли, можно принять $\bar{g}_A = \bar{g}_B = \bar{g}$, по крайней мере, в течение непродолжительного времени. Пусть за неподвижную систему отсчета принята система земная (§ 1), положительное направление вертикали направлено вверх по местной вертикали. Тогда ускорения w_A и w_B соответственных систем в их вертикальном движении определяются соотношениями:

$$\begin{aligned}(m + m^* + \mu) w_A &= F_A - (m + m^* + \mu) g, \\ (m + m^*) w_B &= F_B - (m + m^*) g,\end{aligned}$$

где $m^* \equiv m^*(t)$ — масса тела G^* .

Из последних соотношений следует, что

$$w_B - w_A = \frac{[m + m^*(t) + \mu] F_B - [m + m^*(t)] F_A}{[m + m^*(t)] [m + m^*(t) + \mu]} \quad (t > 0). \quad (1.15)$$

В частном случае, при $F_A = F_B = F$,

$$w_B - w_A = \frac{\mu}{[m + m^*(t)] [m + m^*(t) + \mu]} F.$$

Если $F > 0$, т. е. если реактивная тяга в обоих случаях превосходит силу аэродинамического сопротивления соответствующей системы и направлена вперед по движению, то $w_B > w_A$: отделение тела G' приводит к возрастанию ускорения полета при прочих равных условиях, что и используется в многоступенчатых ракетах. Если $F < 0$, то $w_B < w_A$ и отделение тела G' приводит к убыванию ускорения, т. е. к замедлению роста скорости.

Если в момент отделения тела G' и в течение хотя бы некоторого времени после его отделения реактивные силы отсутствуют (двигатели не включены или окончили работу), то на протяжении указанного времени силы F_A и F_B сводятся к силам аэродинамического сопротивления: $F_A < 0$, $F_B > 0$.

Пусть c_A и c_B — коэффициенты аэродинамического сопротивления систем тел $G_C + G^* + G'$ и $G_C + G^*$ соответственно, $c_A > 0$, $c_B > 0$. В общем случае, $c_A \neq c_B$,

причем коэффициент c_B зависит также от расстояния между системой $G_C + G^*$ и телом G' из-за аэродинамического взаимодействия между ними (практически, по крайней мере до тех пор, пока это расстояние не превысит существенным образом габариты этих систем).

Очевидно, что

$$F_A = -\frac{1}{2} c_A S_A \varrho_A v_A^2; \quad F_B = -\frac{1}{2} c_B S_B \varrho_B v_B^2,$$

где S_A и S_B — характерные площади систем $G_C + G^* + G'$ и $G_C + G^*$ соответственно, ϱ_A и ϱ_B — средние значения плотности воздуха на высотах этих систем, а v_A и v_B — скорости их указанных прямолинейных движений. Тогда на основании соотношения (1.15):

$$\begin{aligned} \omega_B - \omega_A &= \\ &= \frac{(m + m^*) c_A S_A \varrho_A v_A^2 - (m + m^* + \mu) c_B \varrho_B S_B v_B^2}{2(m + m^*)(m + m^* + \mu)}. \end{aligned}$$

Разность $\omega_B - \omega_A$ зависит от скорости отделения (через посредство скорости v_B) и от текущего расстояния между центрами масс систем $G_C + G^*$ и G' (через посредство величин v_A , v_B , ϱ_A , ϱ_B , c_B). Пусть $S_A = S_B = S_0$ и $V = 0$ (т. е. $v_A = v_B = v_0$ при $t = +0$). Считая, что в течение некоторого небольшого промежутка времени $\varrho_A \approx \varrho_B = \varrho_0$, получим

$$\begin{aligned} \omega_B - \omega_A &= \frac{1}{2} S_0 \varrho_0 v_0^2 \Delta_c; \\ \Delta_c &= \frac{c_A}{m + m^* + \mu} - \frac{c_B}{m + m^*}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Это означает, что при отделении тела G' от системы тел $G_C + G^*$ без начальной относительной скорости, управляющее влияние отделения тела G' на последующее движение системы $G_C + G^*$ сводится — по крайней мере, в течение некоторого промежутка времени — к ослаблению процесса аэродинамического торможения этой системы при $\Delta_c > 0$ и к усилению процесса ее торможения при $\Delta_c < 0$.

Пусть масса отделяющегося тела G' сравнительно мала ($\mu \ll m + m^*$), но влияние тела G' на аэродинамические свойства системы $G_C + G^* + G'$ велико, т. е.

$$|c_A - c_B| \gg 0.$$

Тогда

$$\text{sign } \Delta_c = \text{sign } (c_A - c_B).$$

Например, если тело G' — носовой обтекатель ракеты, то $c_A \ll c_B$, откуда следует, что $\Delta_c < 0$ и в силу равенства (1.16) $\omega_B < \omega_A$: отбрасывание обтекателя приводит к возрастанию аэродинамического сопротивления ракеты и более сильному торможению ее.

Такое же влияние оказывает раскрытие хвостового парашюта самолета при посадке с той разницей, что парашют не теряет полностью связей с самолетом во время торможения.

§ 4. Комбинированная система управления самолетом

В полете заданный закон навигации (§ 2) физически осуществляется с помощью силовых воздействий, создаваемых органами управления (§ 3). Если точно знать свойства самолета и среды, в которой он движется, а также свойства органов управления и их приводных устройств, то по заданному закону навигации можно определить соответствующие законы отклонения органов управления, обеспечивающие выполнение закона навигации. Для этого достаточно в уравнениях движения (1.3) принять координаты органов управления за неизвестные. Тогда система уравнений (1.3) определит совокупность законов отклонений органов управления, обеспечивающих выполнение полета в соответствии с законом навигации. Законы отклонения рулей выражают эти отклонения в функции времени и, в общем случае, некоторых обобщенных координат и скоростей. При сделанном предположении о точном задании всех свойств движения, требуемый закон навигации может быть осуществлен с помощью системы управления без обратной связи. Соответствующая схема приведена на рис. 19: она представляет собой разомкнутый участок схемы, показанной на рис. 7. Здесь по-прежнему m — число органов управления, Ω_0 — число регулируемых переменных полета ($m \geq \Omega_0$). На вход разомкнутой системы (рис. 19) поступают управляющие сигналы $E_1(t), E_2(t), \dots, E_f(t)$, в силу которых выходные координаты $x_1(t), \dots, x_{\Omega_0}(t)$ изменяются в соответствии с законом навигации, выражаемым соотношениями (1.4) и (1.5). Схема

без обратной связи, изображенная на рис. 19, отвечает принципу регулирования по нагрузке.

В действительности, свойства самолета и среды, а также управляющих устройств известны лишь приблизительно. Кроме того, на самолет и на его устройства управления действуют случайные возмущения. О них подчас известно лишь то, что они ограничены по величине; иногда об этих возмущениях имеются статистические сведения (функции корреляции и т. п.). По этим причинам, в реальном полете система без обратной связи (рис. 19) не отвечает требованию

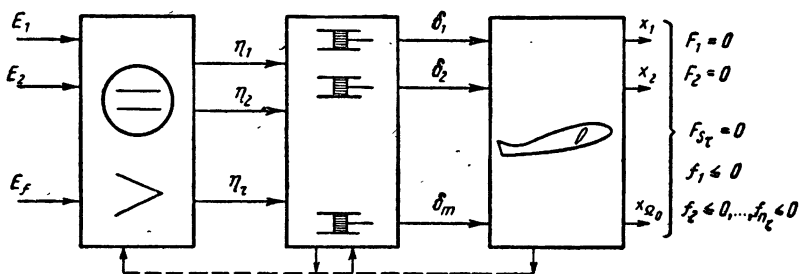


Рис. 19

устойчивого осуществления закона навигации с заранее заданной степенью точности (§ 2). Для обеспечения этого требования, устройства управления самолетом дополняются цепью обратной связи и получается система самолет-автопилот (рис. 7), отвечающая принципу регулирования по отклонению.

Но замыкание исходной системы с помощью обратной связи упраздняет непосредственное воздействие входного сигнала (закона навигации) на прямую цепь управления: все управление ведется исключительно по рассогласованию. Все изменения входных переменных, отвечающие программе управления (закону навигации), порождают соответствующую реакцию органов управления только через рассогласование. Таким образом, в следящей системе всегда должно возникать рассогласование, ибо без него нет и управляющего сигнала. Задача же автоматического управления заключается в возможно более полном подавлении рассогласования, т. е. ошибки — отступления истинного движения системы от программного.

Для устранения противоречия между двумя крайностями — регулированием по нагрузке и регулированием по отклонению — целесообразно ввести в исходную разомкнутую систему управления обратную связь без упразднения регулирования по нагрузке. Будем по-прежнему подавать на вход корректирующего звена прямой цепи управления сигналы, отвечающие закону навигации. При этом из-за влияния систематических и случайных возмущений выходные переменные самолета, в реальных условиях, не будут

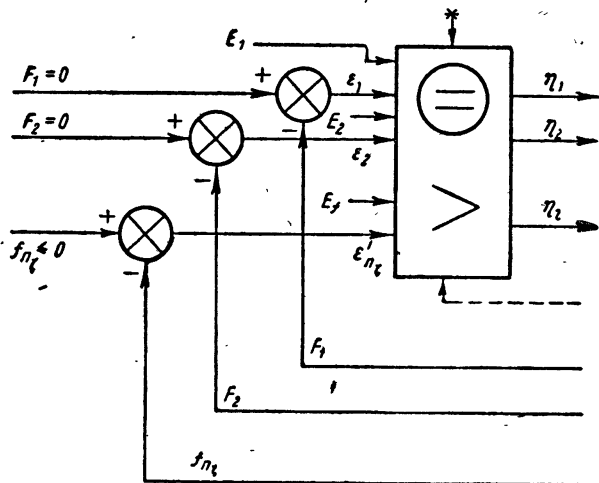


Рис. 20

удовлетворять закону навигации. Отклонение истинного полета от программного, выражаемое рассогласованиями по соответствующим переменным, будем подавать на вход корректирующего звена прямой цепи управления одновременно с основными входными сигналами — сигналами, отвечающими закону навигации, т. е. регулированию по нагрузке. Система, сочетающая оба принципа управления — по нагрузке и по отклонению, — называется комбинированной. Схема входных сигналов в комбинированной системе управления показана на рис. 20, остальная часть схемы комбинированной системы в точности совпадает со схемой системы самолет-автопилот, приведенной на рис. 7.

При отсутствии возмущений, комбинированная система управления действует, как разомкнутая (регулирование по

нагрузке). При постоянном входном сигнале эта система действует как система автоматической стабилизации (регулирование по отклонению). В комбинированной системе управления возникновение рассогласования не является необходимым условием для осуществления управления, что служит ее достоинством. Вместе с тем, наличие цепи обратной связи позволяет обеспечить устойчивость и требуемое ограничение рассогласований (ошибок) в системе по отношению к определенному классу возмущений (систематических и случайных). Поэтому применение комбинированной системы управления позволяет существенно уменьшить рассогласования (ошибки) в системе по сравнению с ошибками в обычной следящей системе и тем самым повысить точность воспроизведения закона навигации.

В некоторых задачах полета выражение закона навигации не известно заранее, а зависит от другого процесса, случайного или не поддающегося точному предвидению. Однако наблюдение за течением этого неизвестного процесса (осуществляемое автоматически) может позволить строить, путем экстраполяции, вероятное предположение о ходе процесса на некоторый отрезок времени вперед. Это вероятное течение процесса и следует подставлять в каждый данный момент времени, в выражение закона навигации для определения программы срабатывания органов управления в прямой цепи комбинированной системы; следящая же система будет компенсировать ошибки прогноза о ходе процесса. Так, в примере 4 § 2 о предстоящем движении цели заранее ничего не известно. Но в силу ограниченности маневренности цели, обусловленной ее механическими свойствами, возможно непрерывно находить прогноз изменения переменных $u(t)$ и $\theta_u(t)$ ее движения, отвечающий наблюдениям за целью, накопленным к каждому данному моменту времени. Тем самым открывается возможность применения комбинированной системы управления и в этом случае.

По существу принципа действия комбинированной системы управления отклонение истинного полета от программного тем меньше при прочих равных условиях, чем меньше систематические ошибки, обусловленные ошибками в описании полета. Поэтому для использования комбинированной системы управления самолетом необходимо возможно точнее выявить кинематические и динамические свойства самолета.

Глава II

ГЕОМЕТРИЯ И КИНЕМАТИКА УПРАВЛЯЕМОГО ПОЛЕТА

При исследовании движения самолета приходится вводить большое количество систем координат и отсчетных направлений.

Одни из этих систем необходимы для учета сил и моментов сил в уравнениях динамики полета, так как каждый род сил описывается в координатной системе, свойственной его физическому существу. Например, сила тяжести всегда связана с направлением к притягивающему центру, лобовое сопротивление самолета — с направлением воздушной скорости, сила тяги — с осью сопла и т. п. Для проектирования сил и их моментов на оси системы координат, в которой составляются уравнения динамики полета, необходимо подсчитать составляющие различных векторов в этой системе.

Другие координатные системы возникают за счет механической структуры самого летательного аппарата как сложной механической системы, схематически представленной на рис. 4. Для описания относительных и абсолютных перемещений тел $G^{(a)}$ необходимо связать с каждым из этих тел соответствующую систему координат (§ 1).

Наконец, законы навигации (§ 2) подчас налагают соотношения между переменными, относящимися к летательному аппарату (в том числе, к телам $G^{(a)}$), и некоторыми переменными, не относящимися к летательному аппарату. Например, в задачах космического полета закон навигации может предписывать соотношение между направлением тяги двигателя, качающегося по отношению к ракете (п. «б» § 3) и абсолютными координатами и скоростями центра масс спутника или планеты, к которой направляется ракета.

Таким образом, само существо задачи исследования полета приводит к необходимости использования большого количества координатных систем. А при исследовании геометрических и кинематических свойств сложных механических систем, непосредственные геометрические построения оказываются не только весьма затруднительными, но и не приспособленными к выявлению общих закономерностей. Отсюда возникает необходимость механизации преобразований, связанных с пересчетами величин в различных координатных системах. Для этого с успехом применяются методы линейной алгебры и матричного исчисления. Они позволяют не только находить аналитическим путем искомые геометрические и кинематические соотношения, но и строить системы координат, удобные для прикладных задач.

Во второй главе излагаются методы применения матричного исчисления и линейной алгебры к геометрии и кинематике полета.

§ 5. Матрицы направляющих косинусов

Зададим совокупность правых прямоугольных трехгранников

$$O_k x_k y_k z_k \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

в общем случае перемещающихся относительно отсчетной системы $OXYZ$.

Введем матрицу

$$l_{pq} = \| l_{gh}^{(pq)} \| \quad \begin{matrix} (g, h = 1, 2, 3) \\ (p, q = 1, 2, \dots, n) \end{matrix}$$

направляющих косинусов $l_{gh}^{(pq)}$ между осями p -го и q -го трехгранников. Символами $l_{gh}^{(pq)}$ обозначены косинусы: $l_{11}^{(pq)} = \cos(x_p, x_q)$, $l_{12}^{(pq)} = \cos(x_p, y_q)$, $l_{21}^{(pq)} = \cos(y_p, x_q)$, ..., так что матрице l_{pq} соответствует таблица:

	x_q	y_q	z_q
x_p	$l_{11}^{(pq)}$	$l_{12}^{(pq)}$	$l_{13}^{(pq)}$
y_p	$l_{21}^{(pq)}$	$l_{22}^{(pq)}$	$l_{23}^{(pq)}$
z_p	$l_{31}^{(pq)}$	$l_{32}^{(pq)}$	$l_{33}^{(pq)}$

(2.1)

Желая подчеркнуть соответствие пар осей определенным направляющим косинусам $l_{gh}^{(pq)}$, введем для обозначения матриц l_{pq} еще и другую запись

$$l_{pq} = (x_p y_p z_p, x_q y_q z_q),$$

причем на первом месте в скобках ставится обозначение трехгранника, номер которого соответствует первому по порядку (слева направо) индексу в обозначении l_{pq} этой матрицы (в данном случае индексу p).

В таблице (2.1) обозначения осей первого по порядку трехгранника располагаются по вертикали, а второго — по горизонтали.

Очевидно, что матрица $(x_q y_q z_q, x_p y_p z_p)$ является транспонированной по отношению к матрице $(x_p y_p z_p, x_q y_q z_q)$:

$$l_{qp} = l_{pq}^T = (x_q y_q z_q, x_p y_p z_p) = (x_p y_p z_p, x_q y_q z_q)^T,$$

где T — символ операции транспонирования матриц.

При $p = q$,

$$l_{pq} = l_{qp} = \mathcal{E},$$

где $\mathcal{E}$ — единичная матрица:

$$\mathcal{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пусть $\bar{A}$ — вектор, образующий с осями трехгранника $O_k x_k y_k z_k$ углы, косинусы которых задаются таблицей

$\bar{A}$	x_k	y_k	z_k
	$l_1^{(k)}$	$l_2^{(k)}$	$l_3^{(k)}$

Последней таблице соответствует матрица-строка

$$(x_k y_k z_k, \bar{A}) = \|l_1^{(k)}, l_2^{(k)}, l_3^{(k)}\|.$$

Подобную же запись введем и при пользовании матрицей-столбцом:

$$(\bar{A}, x_k y_k z_k) = \left\| \begin{matrix} l_1^{(k)} \\ l_2^{(k)} \\ l_3^{(k)} \end{matrix} \right\|; \quad (\bar{A}, x_k y_k z_k) = (x_k y_k z_k, \bar{A})^T.$$

Введем единичные векторы $\bar{i}_k, \bar{j}_k, \bar{k}_k$ осей $O_k x_k, O_k y_k, O_k z_k$ соответственно. Вместо символов осей, в обозначениях матриц направляющих косинусов будем иногда пользоваться символами соответствующих единичных векторов: $(x_p y_p z_p, x_q y_q z_q) = (\bar{i}_p \bar{j}_p \bar{k}_p, \bar{i}_q \bar{j}_q \bar{k}_q)$. При этом $l_{11}^{(pq)} = \bar{i}_p \bar{i}_q, l_{12}^{(pq)} = \bar{i}_p \bar{j}_q, l_{21}^{(pq)} = \bar{j}_p \bar{i}_q$ и т. д. Единичные векторы осей p -го и q -го трехгранников связаны тремя соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_p &= l_{11}^{(pq)} \bar{i}_q + l_{12}^{(pq)} \bar{j}_q + l_{13}^{(pq)} \bar{k}_q, \\ \bar{j}_p &= l_{21}^{(pq)} \bar{i}_q + l_{22}^{(pq)} \bar{j}_q + l_{23}^{(pq)} \bar{k}_q, \\ \bar{k}_p &= l_{31}^{(pq)} \bar{i}_q + l_{32}^{(pq)} \bar{j}_q + l_{33}^{(pq)} \bar{k}_q, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

или тремя соотношениями, им равносильными:

$$\left. \begin{aligned} \bar{i}_q &= l_{11}^{(pq)} \bar{i}_p + l_{21}^{(pq)} \bar{j}_p + l_{31}^{(pq)} \bar{k}_p, \\ \bar{j}_q &= l_{12}^{(pq)} \bar{i}_p + l_{22}^{(pq)} \bar{j}_p + l_{32}^{(pq)} \bar{k}_p, \\ \bar{k}_q &= l_{13}^{(pq)} \bar{i}_p + l_{23}^{(pq)} \bar{j}_p + l_{33}^{(pq)} \bar{k}_p, \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

справедливыми в силу предположения о том, что трехгранники $O_k x_k y_k z_k$ — прямоугольные, т. е.

$$\bar{i}_k^2 = \bar{j}_k^2 = \bar{k}_k^2 = 1, \quad \bar{i}_k \bar{j}_k = \bar{j}_k \bar{k}_k = \bar{k}_k \bar{i}_k = 0. \quad (2.4)$$

Равенства (2.4) выражают шесть соотношений ортогональности, связывающих девять направляющих косинусов:

$$\begin{aligned} (l_{g1}^{(pq)})^2 + (l_{g2}^{(pq)})^2 + (l_{g3}^{(pq)})^2 &= 1, \quad (g = 1, 2, 3) \\ l_{11}^{(pq)} l_{21}^{(pq)} + l_{12}^{(pq)} l_{22}^{(pq)} + l_{13}^{(pq)} l_{23}^{(pq)} &= 0, \\ l_{21}^{(pq)} l_{31}^{(pq)} + l_{22}^{(pq)} l_{32}^{(pq)} + l_{23}^{(pq)} l_{33}^{(pq)} &= 0, \\ l_{31}^{(pq)} l_{11}^{(pq)} + l_{32}^{(pq)} l_{12}^{(pq)} + l_{33}^{(pq)} l_{13}^{(pq)} &= 0. \end{aligned}$$

Такие же соотношения можно составить и по элементам столбцов таблицы (2.1). Соотношения (2.4) и соответствующие им зависимости между косинусами $l_{gh}^{(pq)}$ означают, что всякая матрица l_{pq} направляющих косинусов между осями двух прямоугольных трехгранников ортогональна:

$$l_{pq}^T = l_{pq}^{-1},$$

где l_{pq}^{-1} — матрица, обратная по отношению к матрице l_{pq} :

$$l_{pq} \cdot l_{pq}^{-1} = \mathcal{E}.$$

При этом $\det l_{pq} = \det l_{pq}^{-1} = 1$, и каждый элемент матрицы l_{pq} равен своему алгебраическому дополнению.

Тогда уравнения (2.3) получаются путем разрешения уравнений (2.2) относительно $\bar{i}_q, \bar{j}_q, \bar{k}_q$ (и наоборот).

Введем матрицы-строки единичных векторов:

$$e_p^* = \|\bar{i}_p, \bar{j}_p, \bar{k}_p\|; \quad e_q^* = \|\bar{i}_q, \bar{j}_q, \bar{k}_q\|.$$

В матричном виде равенства (2.2) и (2.3) примут вид

$$e_p^* = e_q^* l_{qp}; \quad e_q^* = e_p^* l_{pq}. \quad (2.5)$$

С механической точки зрения, шесть связей между девятью направляющими косинусами $l_{gh}^{(pq)}$ выражают то обстоятельство, что всякое твердое тело обладает тремя степенями свободы в движении около какой-либо его точки.

Перейдем к установлению некоторых полезных соотношений между направляющими косинусами. В системе трехгранников $O_k x_k y_k z_k$ требуется найти направляющие косинусы между осями трехгранников $O_1 x_1 y_1 z_1$ и $O_n x_n y_n z_n$, если известны направляющие косинусы между осями последовательных пар трехгранников:

$$O_k x_k y_k z_k, \quad O_{k+1} x_{k+1} y_{k+1} z_{k+1} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Такая задача встречается при определении ориентации тел $G_C, G_v^{(\sigma)}$ (§ 1) и других по отношению к неподвижной и иной системе координат. Для этого рассмотрим некоторые p -ый и q -ый трехгранники и произвольный (ненулевой) вектор $\bar{A}$, который разложим по осям каждого из этих трехгранников:

$$\bar{A} = A_x^{(p)} \bar{i}_p + A_y^{(p)} \bar{j}_p + A_z^{(p)} \bar{k}_p = A_x^{(q)} \bar{i}_q + A_y^{(q)} \bar{j}_q + A_z^{(q)} \bar{k}_q.$$

Обозначим через A_p^* и A_q^* матрицы-строки проекций вектора $\bar{A}$:

$$A_p^* = \|A_x^{(p)}, A_y^{(p)}, A_z^{(p)}\|; \quad A_q^* = \|A_x^{(q)}, A_y^{(q)}, A_z^{(q)}\|.$$

Так как $A_x^{(p)} = \bar{A} \bar{i}_p, \dots, A_z^{(q)} = \bar{A} \bar{k}_q$, то $A_p^* = \bar{A} e_p^*, A_q^* = \bar{A} e_q^*$ или, в силу первого из равенств (2.5)

$$A_p^* = \bar{A} e_q^* l_{qp}, \quad \text{т. е.}$$

$$A_p^* = A_q^* l_{qp}; \quad A_q^* = A_p^* l_{pq}. \quad (2.6)$$

На основании преобразований (2.6) выпишем последовательность матричных равенств

$$A_2^* = A_1^* l_{12}, \quad A_3^* = A_2^* l_{23}, \quad \dots, \quad A_{n-1}^* = A_{n-2}^* l_{(n-2)(n-1)}, \\ A_n^* = A_{n-1}^* l_{(n-1)n},$$

равносильных равенству

$$A_n^* = A_1^* l_{12} l_{23} l_{34} \dots l_{(n-3)(n-2)} l_{(n-2)(n-1)} l_{(n-1)n}.$$

С другой стороны, применяя преобразование (2.6) к матрицам A_n^* и A_1^* , получим

$$A_n^* = A_1^* l_{1n}.$$

Так как рассматриваемое преобразование матрицы A_1^* в матрицу A_n^* линейное, то оно — единственное, и, сравнивая два последних соотношения, найдем окончательно, что

$$l_{1n} = \prod_{x=1}^{n-1} l_{x(x+1)}.$$

Матрицы $l_{x(x+1)}$ в общем случае не перестановочные. Полученное разложение можно переписать в виде

$$(x_1 y_1 z_1, x_n y_n z_n) = (x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2) (x_2 y_2 z_2, x_3 y_3 z_3) \dots \times \\ \times \dots (x_{n-2} y_{n-2} z_{n-2}, x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}) \times \\ \times (x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}, x_n y_n z_n). \quad (27)$$

Введем единичный вектор $\bar{A}^0 = \bar{A}/A$, $A = |\bar{A}|$. Тогда матрицу-строку $(\bar{A}, x_1 y_1 z_1)$ можно представить в следующей форме:

$$(\bar{A}, x_1 y_1 z_1) = \bar{A}^0 \|\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1\| = \bar{A}^0 e_1^*.$$

В силу равенств (2.5)

$$(\bar{A}, x_1 y_1 z_1) = \bar{A}^0 e_1^* = \bar{A}^0 e_n^* l_{n1} = \\ = \bar{A}^0 \|\bar{i}_n, \bar{j}_n, \bar{k}_n\| l_{n1} = (\bar{A}, x_n y_n z_n) l_{n1},$$

и мы приходим к разложению

$$(\bar{A}, x_1 y_1 z_1) = (\bar{A}, x_n y_n z_n) (x_n y_n z_n, x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}) \dots \\ \dots (x_3 y_3 z_3, x_2 y_2 z_2) (x_2 y_2 z_2, x_1 y_1 z_1), \quad (2.8)$$

выражающему направляющие косинусы вектора $\bar{A}$ относительно n -го трехгранника через его направляющие косинусы относительно 1-го трехгранника.

Подобное же разложение имеет место для матрицы-столбца:

$$(x_1 y_1 z_1, \bar{A}) = (x_1 y_1 z_1, x_2 y_2 z_2) \dots \\ \dots (x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}, x_n y_n z_n) (x_n y_n z_n, \bar{A}).$$

§ 6. Сложение конечных поворотов

Рассмотрим задачу о нахождении направляющих косинусов между осями неподвижного прямоугольного трехгранника $OXYZ$ и осями подвижного трехгранника $Oxyz$ после трех (и более) последовательных конечных поворотов последнего около некоторых неподвижных осей, проходящих через точку O .

Обозначив через Ox_0, Oy_0, Oz_0 оси подвижного трехгранника $Oxyz$ в исходном положении, зададим начальное взаиморасположение систем $OXYZ$ и $Oxyz$ матрицей

$$l = \|l_{gh}\| = (x_0 y_0 z_0, XYZ) \cdot (g, h = 1, 2, 3).$$

Пусть трехгранник $Oxyz$ переместился из положения $Ox_0 y_0 z_0$ в некоторое новое положение $Ox' y' z'$ в результате поворота на угол φ около неподвижной оси On . Направление оси On , определяемое единичным вектором $\bar{n}^0$, задано матрицей-строкой v^* направляющих косинусов по отношению к трехграннику $Ox_0 y_0 z_0$:

$$v^* = \|v_1, v_2, v_3\| = (\bar{n}^0, x_0 y_0 z_0).$$

Напомним, что по правилу правой системы угол φ считается положительным, если для наблюдателя, находящегося на положительном конце оси On , вращение трехгранника совершается против движения часовой стрелки.

В этих условиях требуется найти матрицу

$$L' = \|L'_{gh}\| = (x' y' z', XYZ)$$

между осями подвижного трехгранника в новом положении и осями неподвижного трехгранника.

Введем вспомогательный прямоугольный трехгранник $On\eta\zeta$, жестко скрепленный с вращающимся трехгранником $Oxyz$, причем ось On вспомогательного трехгранника

совпадает с осью вращения. После поворота подвижной системы на угол φ вспомогательный трехгранник перейдет в положение $O\eta'\zeta'$, причем

$$\angle(O\eta, O\eta') = \angle(O\zeta, O\zeta') = \varphi.$$

Пользуясь разложением (2.7), напомним матричное равенство:

$$(x' y' z', XYZ) = (x' y' z', n\eta' \zeta') (n\eta' \zeta', n\eta \zeta) \times \\ \times (n\eta \zeta, x_0 y_0 z_0) (x_0 y_0 z_0, XYZ). \quad (2.9)$$

Подсчитаем матрицу

$$\tau_n = (n\eta' \zeta', n\eta \zeta) = \tau_n(\varphi).$$

Так как

$$\begin{aligned} \cos(O\eta, O\eta') &= \cos(O\zeta, O\zeta') = \cos \varphi, \\ \cos(O\eta', O\zeta) &= -\cos(O\eta, O\zeta') = \sin \varphi, \end{aligned}$$

то

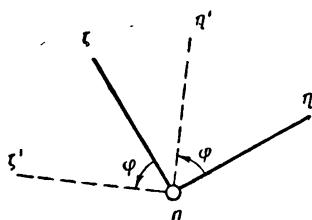


Рис. 21

$$\tau_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}.$$

Для наглядности, на рис. 21 приведена схема поворота на угол φ .

Перейдем к вычислению матрицы

$$\sigma_n = (n\eta \zeta, x_0 y_0 z_0) = \|\sigma_{gh}^{(n)}\|.$$

По определению матрицы v^*

$$\sigma_{11}^{(n)} = \cos(Ox_0, On) = v_1$$

и таким же образом

$$\sigma_{12}^{(n)} = v_2, \sigma_{13}^{(n)} = v_3.$$

Тогда

$$\sigma_n = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} \end{vmatrix},$$

где $v_{21}, \dots, v_{33}$ — любые числа, при которых матрица σ_n остается ортогональной. Конечный результат от них не

зависит; геометрически, этот произвол в выборе чисел $v_{21}, \dots, v_{33}$ обуславливается произволом выбора ориентации вспомогательной оси $O\eta$ (или $O\xi$) в плоскости, перпендикулярной оси On вращения. Далее заметим, что

$$(x' y' z', n \eta' \zeta') = (n \eta \zeta, x_0 y_0 z_0)^T = \sigma_n^T,$$

поскольку подвижной и вспомогательный трехгранник вращаются, как единое целое. Соотношение (2.9) принимает вид

$$L' = \sigma_n^T \tau_n \sigma_n l$$

или, обозначая искомую матрицу преобразования через Π :

$$\Pi = \sigma_n^T \tau_n \sigma_n = (x' y' z', x_0 y_0 z_0),$$

получим

$$L' = \Pi l. \quad (2.10)$$

Вычисляя произведение $\sigma_n^T \tau_n \sigma_n$ и используя при этом соотношения ортогональности между элементами матрицы σ_n , выразим матрицу Π в функции косинусов v_1, v_2, v_3 и угла φ :

$$\Pi = \begin{vmatrix} v_1^2 + (1 - v_1^2) \cos \varphi; & & \\ v_2 v_1 (1 - \cos \varphi) - v_3 \sin \varphi; & & \\ v_3 v_1 (1 - \cos \varphi) + v_2 \sin \varphi; & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (1 - \cos \varphi) v_1 v_2 + v_3 \sin \varphi; & (1 - \cos \varphi) v_1 v_3 - v_2 \sin \varphi & \\ v_2^2 + (1 - v_2^2) \cos \varphi; & (1 - \cos \varphi) v_2 v_3 + v_1 \sin \varphi & \\ v_3 v_2 (1 - \cos \varphi) - v_1 \sin \varphi; & v_3^2 + (1 - v_3^2) \cos \varphi & \end{vmatrix}$$

Матрица Π называется матрицей конечного поворота; с ее помощью осуществляется сложение конечных вращений твердого тела. Желая подчеркнуть зависимость матрицы Π от угла φ поворота и косинусов v_g ($g = 1, 2, 3$), будем записывать эту зависимость в виде:

$$\Pi = \Pi(v_1, v_2, v_3, \varphi).$$

Матрицу конечного поворота можно представить в виде произведения двух матриц:

$$\Pi = (M_{\Pi}^T)^{-1} M_{\Pi},$$

где

$$M_{\text{ш}} = \begin{vmatrix} 1 & v_3 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - v_2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \\ -v_3 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} & 1 & v_1 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \\ v_2 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} & -v_1 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

В справедливости этой формулы можно убедиться непосредственным перемножением указанных матриц. Матрица $M_{\text{ш}}$ всегда имеет обратную, поскольку

$$\det M_{\text{ш}} = \sec^2 \frac{\varphi}{2} > 0.$$

Задачу о нахождении матрицы L' можно решать и иначе, задав направление оси вращения On относительно неподвижного, а не вращающегося трехгранника, с помощью матрицы-строки n^* :

$$n^* = \|n_1, n_2, n_3\| = \|\bar{n}^0, XYZ\|.$$

Воспроизводя предыдущее рассуждение, получим $L' = l\mathcal{K}$;

$$\mathcal{K} = \begin{vmatrix} n_1^2 + (1 - n_1^2) \cos \varphi; \\ n_2 n_1 (1 - \cos \varphi) - n_3 \sin \varphi; \\ n_2 n_1 (1 - \cos \varphi) + n_2 \sin \varphi; \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (1 - \cos \varphi) n_1 n_2 + n_3 \sin \varphi; & (1 - \cos \varphi) n_1 n_3 - n_2 \sin \varphi \\ n_2^2 + (1 - n_2^2) \cos \varphi; & (1 - \cos \varphi) n_2 n_3 + n_1 \sin \varphi \\ n_3 n_2 (1 - \cos \varphi) - n_1 \sin \varphi; & n_3^2 + (1 - n_3^2) \cos \varphi \end{vmatrix}$$

Сравнивая выражения для матриц $\mathcal{I}$ и $\mathcal{K}$, найдем, что

$$\mathcal{K} = \mathcal{I}(n_1, n_2, n_3, \varphi); \quad \mathcal{I} = \mathcal{K}(v_1, v_2, v_3, \varphi).$$

Из равенств $L' = \mathcal{I}l = l\mathcal{K}$ следует, что

$$\mathcal{I} = l\mathcal{K}l^T; \quad \mathcal{K} = l^T \mathcal{I}l.$$

С помощью разложения (2.8) легко установить связь между матрицами n^* и v^* , позволяющую переходить от косинусов n_g к косинусам v_g и наоборот:

$$n^* = v^* l; \quad v^* = n^* l^T. \quad (2.11)$$

Обратимся теперь к нахождению матрицы L направляющих косинусов между осями трехгранника $OXYZ$ и осями трехгранника $Oxuz$ после трех последовательных поворотов последнего около осей On_1, On_2, On_3 на конечные углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ соответственно

Направления осей последовательных поворотов подвижного трехгранника зададим матрицами косинусов

$$\begin{aligned} v_1^* &= (\bar{n}_1^0, x_0 y_0 z_0), & v_2^* &= (\bar{n}_2^0, x' y' z'), \\ v_3^* &= (\bar{n}_3^0, x'' y'' z''), \end{aligned}$$

причем

$$v_g^* = \|v_1^{(g)}, v_2^{(g)}, v_3^{(g)}\| \quad (g = 1, 2, 3),$$

а символы $Oy' y' z'$ и $Ox'' y'' z''$ означают положения подвижного трехгранника после первого и второго поворотов соответственно. Окончательное положение его $Ox''' y''' z'''$ для простоты записи обозначим просто через $Oxuz$. Матрицы косинусов между осями $OXYZ$ и последовательными положениями осей подвижного трехгранника обозначим через L', L'' и $L''' = L$ соответственно:

$$\begin{aligned} L' &= (x' y' z', XYZ); & L'' &= (x'' y'' z'', XYZ); \\ L &= (xyz, XYZ). \end{aligned}$$

Последовательно применяя соотношение (2.10), получим:

$$L' = \Pi_1 l; \quad L'' = \Pi_2 L'; \quad L = \Pi_3 L'',$$

или

$$L = \Pi_3 \Pi_2 \Pi_1 l, \quad (2.12)$$

где

$$\Pi_g = \Pi(v_1^{(g)}, v_2^{(g)}, v_3^{(g)}, \varphi_g) \quad (g = 1, 2, 3).$$

Когда направления осей вращения On_g заданы направляющими косинусами $n_h^{(g)}$ ($h, g = 1, 2, 3$) относительно неподвижного трехгранника:

$$n_g^* = \|n_1^{(g)}, n_2^{(g)}, n_3^{(g)}\| = (\bar{n}_g^0, XYZ),$$

косинусы $v_h^{(g)}$ вычисляются по формулам, получаемым с помощью соотношений (2.11) и свойства ортогональности матриц L', L'', L :

$$\begin{aligned} v_1^* &= n_1^* l^T, & v_2^* &= n_2^* (L')^T = n_2^* l^T \Pi_1^T, \\ v_3^* &= n_3^* (L'')^T = n_3^* l^T \Pi_1^T \Pi_2^T. \end{aligned} \quad (2.13)$$

При получении соотношений (2.13) используется следующее свойство: матрица, транспонированная по отношению к произведению нескольких матриц, равна произведению транспонированных матриц-сомножителей, взятых в обратном порядке.

При N последовательных поворотах подвижного трехгранника около неподвижных осей $On_1, On_2, \dots, On_N$, проходящих через начало O этого трехгранника, обобщением равенства (2.12) служит матричное соотношение

$$L_N = \left(\prod_{\alpha=1}^N \Pi_{N-\alpha+1} \right) l.$$

L_N — матрица направляющих косинусов между осями систем $x_N y_N z_N$ и XYZ .

§ 7. Системы углов Эйлера

При исследовании движения неизменяемой системы около одной из ее точек, в механике и геометрии широко применяют углы Эйлера. Эти три угла можно выбирать различными равносильными способами, причем все системы эйлеровых углов обладают одним и тем же характерным свойством: оси, около которых совершаются частные повороты подвижного тела (трехгранника) по каждому из трех углов в отдельности, образуют систему координат с одним косым углом. Эта система вырождается при некоторых особых значениях косо́го угла, служащего одним из трех эйлеровых углов. Хотя с точки зрения общих свойств все системы эйлеровых углов равносильны, выбор той или иной из этих систем для исследования данной задачи полета, вообще говоря, не безразличен; при произвольном выборе системы эйлеровых углов, значения косо́го угла, важные для этой задачи, могут оказаться особыми (т. е. значениями, при которых система координат вырождается). Поэтому целесообразно установить способ построения совокупности систем эйлеровых углов, среди которых могут оказаться и системы, более удобные для исследования данных конкретных движений.

Ограничимся исследованием частной задачи прикладного характера об аналитическом построении одного класса углов Эйлера: из всех возможных систем рассмотрим те, которые порождаются матрицами

$$\|1, 0, 0\|, \|0, 1, 0\|, \|0, 0, 1\|, \quad (2.14)$$

отождествляемыми в том или ином порядке с матрицами v_1^*, v_2^*, v_3^* (§ 6).

Пусть взаиморасположение трехгранников $OXYZ$ и $Oxyz$ определяется матрицей направляющих косинусов $L = (xyz, XYZ)$. Разыщем совокупность M_3 систем трех последовательных вращений, переводящих подвижной трехгранник из положения $Ox_0y_0z_0$, в котором он совпадает с $OXYZ$ ($l = \mathcal{E}$), в положение $Oxyz$, путем отождествления каждой из матриц v_1^*, v_2^*, v_3^* с одной из матриц (2.14). Число получаемых таким образом систем, составляющих совокупность M_3 , равно числу перестановок из трех элементов ($3! = 6$). Исследуем три из этих шести систем, каждая из которых полезна в определенном классе прикладных задач.

Первая система. $v_1^* = \|0, 1, 0\|$, $v_2^* = \|0, 0, 1\|$, $v_3^* = \|1, 0, 0\|$, а для углов ψ, ϑ, γ введем специальные обозначения ψ, ϑ, γ соответственно.

Тогда

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \Pi(0, 1, 0, \psi) = \begin{vmatrix} \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & \cos \psi \end{vmatrix} = l_\psi, \\ \Pi_2 &= \Pi(0, 0, 1, \vartheta) = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = l_\vartheta, \\ \Pi_3 &= \Pi(1, 0, 0, \gamma) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix} = l_\gamma. \end{aligned}$$

Матрицы $l_\psi, l_\vartheta, l_\gamma$ характеризуют частные повороты подвижного трехгранника на углы ψ, ϑ, γ соответственно. Как следует из вида матриц v_g^* , первый поворот, на угол ψ , выполняется около оси Oy_0 , совпадающей с осью OY . Вторым поворотом, на угол ϑ , совершается около нового положения Oz' оси Oz — линии узлов, образованной пересечением плоскостей OXZ и Oyz . Третий поворот, на угол γ , происходит около оси Ox . Матрицу L можно выразить через эйлеровы углы ψ, ϑ, γ с помощью соотношения (2.12) при $l = \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned}
 L &= (xyz, XYZ) = l_\gamma l_\vartheta l_\psi = L(\psi, \vartheta, \gamma) = \\
 &= \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \sin \psi \\ \sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \cos \gamma \sin \vartheta; & \cos \gamma \cos \vartheta; \\ \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma \sin \vartheta; & -\sin \gamma \cos \vartheta; \\ -\sin \psi \cos \vartheta & \\ \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma \sin \vartheta & \\ \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma \sin \vartheta & \end{vmatrix}. \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

В теоретической механике углы ψ, ϑ, γ называются углами прецессии, нутации и собственного вращения соответственно, а в авиации — соответственно углами рыскания (азимут), тангажа (дифферента — в морском деле) и крена. Углы ψ, ϑ, γ могут служить обобщенными координатами самолета x_4, x_5, x_6 (§ 2).

Заметим, что заданию трех матриц v_1^*, v_2^*, v_3^* отвечает на определенном интервале изменения ψ, ϑ, γ единственная совокупность этих трех углов. В самом деле, рассмотрим матричное равенство

$$\|L_{gh}\| = l_\gamma l_\vartheta l_\psi \quad (g, h = 1, 2, 3)$$

как систему девяти конечных скалярных уравнений относительно углов ψ, ϑ, γ . Из них независимы будут лишь три уравнения, соответствующие любым трем элементам L_{gh} , не лежащим на одной строке и на одном столбце. Выбирая, например элемент L_{12} и отношения $L_{11}/L_{13}, L_{22}/L_{32}$, найдем

$$\psi = -\arctg \frac{L_{11}}{L_{13}}; \quad \vartheta = \arcsin L_{12}; \quad \gamma = -\arctg \frac{L_{32}}{L_{22}}. \quad (2.16)$$

Ограничим изменение ψ, ϑ, γ интервалом $(-\pi/2, +\pi/2)$; напомним, что интервал не содержит своих концов, точек $\pm \pi/2$ в данном случае. Тогда из последних равенств заключим, что на указанном интервале величины ψ, ϑ, γ являются однозначными функциями косинусов L_{gh} . Эти функции непрерывны и дифференцируемы на интервале $(-\pi/2, +\pi/2)$, тогда как функции $L_{gh} = L_{gh}(\psi, \vartheta, \gamma)$ непрерывны и дифференцируемы при любых значениях ψ, ϑ, γ .

Вторая система. $v_1^* = \|0, 0, 1\|$, $v_2^* = \|0, 1, 0\|$, $v_3^* = \|1, 0, 0\|$, а для углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ введем обозначения Θ, Ψ, Γ соответственно. Тогда

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}(0, 0, 1, \Theta) = \begin{vmatrix} \cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ -\sin \Theta & \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = l_\Theta,$$

$$\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}(0, 1, 0, \Psi) = \begin{vmatrix} \cos \Psi & 0 & -\sin \Psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \Psi & 0 & \cos \Psi \end{vmatrix} = l_\Psi,$$

$$\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}(1, 0, 0, \Gamma) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Gamma & \sin \Gamma \\ 0 & -\sin \Gamma & \cos \Gamma \end{vmatrix} = l_\Gamma.$$

Здесь первое вращение, на угол Θ , выполняется около оси Oz_0 , совпадающей с осью OZ . Второе вращение, на угол Ψ , совершается около нового положения Oy' оси Oy_0 — линии узлов, образованной пересечением плоскостей OXY и Oyz . Третье вращение, на угол Γ , происходит около оси Ox .

Матрица направляющих косинусов в данном случае имеет вид

$$L = l_\Gamma l_\Psi l_\Theta = \begin{vmatrix} \cos \Psi \cos \Theta & & \\ -\sin \Theta \cos \Gamma + \sin \Psi \sin \Gamma \cos \Theta & & \\ \sin \Gamma \sin \Theta + \sin \Psi \cos \Gamma \cos \Theta & & \\ \cos \Psi \sin \Theta & -\sin \Psi & \\ \cos \Gamma \cos \Theta + \sin \Psi \sin \Gamma \sin \Theta & \cos \Psi \sin \Gamma & \\ -\sin \Gamma \cos \Theta + \sin \Psi \cos \Gamma \sin \Theta & \cos \Psi \cos \Gamma & \end{vmatrix}.$$

На интервале $(-\pi/2, +\pi/2)$ изменения углов Θ, Ψ, Γ :

$$\Theta = \arctg \frac{L_{12}}{L_{11}}; \quad \Psi = -\arcsin L_{13}; \quad \Gamma = \arctg \frac{L_{23}}{L_{33}}.$$

Углы Θ, Ψ, Γ служат мерой углов тангажа (дифферента), курса и крена соответственно.

Третья система. $v_1^* = \|1, 0, 0\|$, $v_2^* = \|0, 0, 1\|$, $v_3^* = \|0, 1, 0\|$. Вводя для углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ обозначения ψ, ϑ, γ соответственно, получим:

$$L = l_\psi l_\vartheta l_\gamma = \begin{vmatrix} \cos \psi \cos \vartheta & \sin \psi \sin \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \cos \gamma \\ \sin \psi \cos \vartheta - \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma \\ -\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma \\ \cos \vartheta \sin \gamma \\ \cos \psi \cos \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma \end{vmatrix}.$$

Подобным же образом можно построить остальные три системы совокупности M_3 . Все эти системы совершенно равноправны, но каждую из них удобнее применять в собственном ей классе задач.

Нетрудно показать, что все эти 6 систем принадлежат к системам эйлеровых углов, т. е. оси частных вращений образуют косоугольный трехгранник с одним косым углом, совпадающим с одним из трех углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (или его дополнением до $\pi/2$ или π).

Используя соотношение (2.11) и учитывая, что $l = \mathcal{E}$, получим:

$$n_1^* = v_1^*; \quad n_2^* = v_2^* \Pi_1; \quad n_3^* = v_3^* \Pi_2 \Pi_1.$$

Подставляя вместо матриц v_g^* ($g = 1, 2, 3$) в любом порядке матрицы (2.14), убедимся, что два угла между тремя направлениями, определяемыми матрицами-строками n_g^* — прямые, а третий — косой, совпадающий с одним из углов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Например, в 1-ой системе:

$$\begin{aligned} n_1^* &= \|0, 1, 0\| \text{ (матрица } n_1^* \text{ определяет ось } OY), \\ n_2^* &= v_2^* l_\psi = \|\sin \psi, 0, \cos \psi\| \\ &\text{(матрица } n_2^* \text{ определяет ось } Oz'), \\ n_3^* &= v_3^* l_\vartheta l_\psi = \|\cos \vartheta \cos \psi, \sin \vartheta, \\ &-\cos \vartheta \sin \psi\| \text{ (матрица } n_3^* \text{ определяет ось } Ox). \end{aligned}$$

Матрица n_3^* совпадает с первой строкой матрицы

$$L = l_\gamma l_\vartheta l_\psi, \quad OY \perp Oz'; \quad Oz' \perp Ox;$$

$$\angle(OY, Ox) = \frac{\pi}{2} - \vartheta.$$

С помощью матриц n_1^*, n_2^*, n_3^* для каждой из трех систем можно построить оси частных вращений; в резуль-

тате получаются графики, изображенные на рис. 22, 23 и 24.

Приравнивая соответственные элементы, выраженные через углы равных систем, можно установить формулы пересчета углов от одной системы к другой, например:

$$\begin{aligned}\cos \Psi \sin \Theta &= \sin \vartheta, \\ \cos \Psi \cos \Theta &= \cos \psi \cos \vartheta.\end{aligned}$$

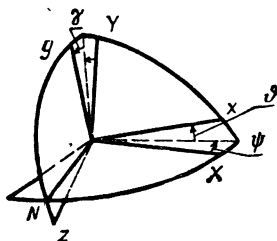


Рис. 22

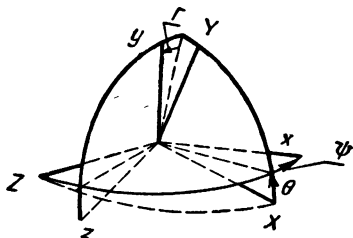


Рис. 23

Отметим еще некоторые полезные соотношения. Нетрудно убедиться, что в 1-й системе

$$\frac{\partial L_{g1}}{\partial \psi} = L_{g3}; \quad \frac{\partial L_{g3}}{\partial \psi} = -L_{g1}; \quad \frac{\partial L_{2g}}{\partial \gamma} = L_{3g}; \quad \frac{\partial L_{3g}}{\partial \gamma} = -L_{2g},$$

$$\frac{\partial L_{g1}}{\partial \vartheta} = -L_{g2} \cos \psi; \quad \frac{\partial L_{g2}}{\partial \vartheta} = L_{g1} \cos \psi - L_{g3} \sin \psi;$$

$$\frac{\partial L_{g3}}{\partial \vartheta} = L_{g2} \sin \psi \quad (g = 1, 2, 3), \quad L_{11} \cos \psi - L_{13} \sin \psi = \cos \vartheta,$$

$$L_{21} \cos \psi - L_{23} \sin \psi = -\cos \gamma \sin \vartheta, \quad \frac{\partial L_{2g}}{\partial \psi} = 0,$$

$$L_{31} \cos \psi - L_{33} \sin \psi = \sin \gamma \sin \vartheta; \quad \frac{\partial L_{1g}}{\partial \gamma} = 0.$$

$$L_{11} \sin \psi + L_{13} \cos \psi = 0, \quad L_{31} \cos \gamma + L_{21} \sin \gamma = \sin \psi,$$

$$L_{21} \sin \psi + L_{23} \cos \psi = \sin \gamma; \quad L_{32} \cos \gamma + L_{22} \sin \gamma = 0,$$

$$L_{31} \sin \psi + L_{33} \cos \psi = \cos \gamma, \quad L_{33} \cos \gamma + L_{23} \sin \gamma = \cos \psi$$

и т. д. Аналогичные соотношения существуют и в остальных системах совокупности M_s .

Дифференцируя первую группу этих равенств второй раз по тем же переменным, придем к тому очевидному об-

стоятельству, что все направляющие косинусы удовлетворяют дифференциальному уравнению гармонических колебаний по любой из переменных в каждой из систем углов Эйлера.

Например,

$$\frac{\partial^2 L_{33}}{\partial \gamma^2} + L_{33} = 0,$$

т. е.

$$L_{33} = A(\psi, \vartheta) \cos \gamma + B(\psi, \vartheta) \sin \gamma.$$

При начальных условиях, определяемых ориентацией трехгранника после первых двух поворотов:

$$L_{33} \Big|_{\gamma=0} = \cos \psi; \quad \frac{\partial L_{33}}{\partial \gamma} \Big|_{\gamma=0} = -L_{23} \Big|_{\gamma=0} = -\sin \psi \sin \vartheta$$

найдем, что

$$A = \cos \psi; \quad B = -\sin \psi \sin \vartheta,$$

т. е. возвращаемся к выражению для L_{33} , определяемому равенством (2.15):

$$L_{33} = \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma \sin \vartheta.$$

§ 8. Кинематические уравнения

Установим связь между проекциями вектора $\bar{\omega}$ мгновенной угловой скорости подвижного трехгранника $Oxuz$ на его же оси и проекциями этого вектора на оси частных вращений системы эйлеровых углов. Рассуждение, проводимое здесь для определенности по отношению к первой системе (§ 7), применимо и к остальным системам совокупности M_s .

Обозначим через $\bar{\gamma}^\circ$, $\bar{\psi}^\circ$, $\bar{\vartheta}^\circ$ единичные векторы осей косоугольного трехгранника Ox , OY , Oz' соответственно, через $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ единичные векторы осей прямоугольного трехгранника $Oxuz$ соответственно. По определению, в первой системе

$$\bar{i} = \bar{\gamma}^\circ. \quad (2.17)$$

Разложим вектор $\bar{\omega}$ по осям каждого из трехгранников:

$$\bar{\omega} = p\bar{i} + q\bar{j} + r\bar{k} = \omega_\gamma \bar{\gamma}^\circ + \omega_\psi \bar{\psi}^\circ + \omega_\vartheta \bar{\vartheta}^\circ, \quad (2.18)$$

причем по определению осей косоугольного трехгранника $OxYz'$:

$$\omega_\gamma = \dot{\gamma}; \quad \omega_\psi = \dot{\psi}; \quad \omega_\vartheta = \dot{\vartheta}.$$

Введем матрицы-строки единичных векторов:

$$e^* = \|\bar{i}', \bar{\gamma}^\circ, \bar{k}'\|; \quad e_0^* = \|\bar{X}^\circ, \bar{Y}^\circ, \bar{Z}^\circ\|; \quad e_c^* = \|\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\|.$$

Здесь $\bar{X}^\circ, \bar{Y}^\circ, \bar{Z}^\circ$ — соответственно единичные векторы осей OX, OY, OZ неподвижного трехгранника, $\bar{i}'$ — единичный вектор оси Ox' , $\bar{k}'$ — оси Oz' . Как и выше (§ 7), под Ox' и Oz' мы понимаем направления осей Ox_0 и Oy_0 после поворота на угол ψ около оси OY . Применяя к матрицам e_0^* и e^{*} соотношение (2.5), найдем

$$e_0^* = e^{*} l_\psi,$$

где

$$l_\psi = (x'Yz', XYZ) = \Pi(0, 1, 0, \psi).$$

Таким же образом

$$e_0^* = e_c^* L.$$

Приравнивая два последних выражения матрицы e_0^* , получим

$$e_c^* L = e^{*} l_\psi,$$

откуда следует

$$e^{*} = e_c^* L l_\psi^T. \quad (2.19)$$

Вычисляя матрицу-произведение

$$L l_\psi^T = (l_\gamma l_\vartheta l_\psi) l_\psi^T = l_\gamma l_\vartheta,$$

получим

$$L l_\psi^T = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta & 0 \\ -\cos \gamma \sin \vartheta & \cos \gamma \cos \vartheta & \sin \gamma \\ \sin \gamma \sin \vartheta & -\sin \gamma \cos \vartheta & \cos \gamma \end{vmatrix}.$$

Приравнивая поочередно вторые и третьи элементы матриц-строк в обеих частях равенства (2.19), выпишем векторы $\bar{\psi}^\circ$ и $\bar{\vartheta}^\circ$ в функции $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ и эйлеровых углов:

$$\bar{\psi}^{\circ} = i \sin \vartheta + \bar{j} \cos \gamma \cos \vartheta - k \sin \gamma \cos \vartheta,$$

$$\bar{\vartheta}^{\circ} = \bar{j} \sin \gamma + \bar{k} \cos \gamma.$$

Учитывая еще равенство (2.17) и вводя матрицу-строку

$$e_{\mathcal{A}}^* = \|\bar{\gamma}^{\circ}, \bar{\vartheta}^{\circ}, \bar{\psi}^{\circ}\|,$$

будем иметь

$$e_{\mathcal{A}}^* = e_c^* \mathcal{A},$$

где

$$\mathcal{A} = \|\mathcal{A}_{gh}\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \\ \sin \vartheta & \cos \gamma \cos \vartheta & -\sin \gamma \cos \vartheta \end{vmatrix} = \mathcal{A}(\gamma, \vartheta).$$

При $|\cos \vartheta| < 1$ матрица $\mathcal{A}$ не ортогональная, поскольку при этом неравенстве трехгранник $OxYz'$ — косоугольный.

Подставив в соотношение (2.18) вместо векторов $\bar{\psi}^{\circ}$, $\bar{\vartheta}^{\circ}$, $\bar{\gamma}^{\circ}$ их найденные выражения через векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, придем к кинематическим уравнениям Эйлера:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \vartheta + \dot{\gamma}; & q &= \dot{\vartheta} \sin \gamma + \dot{\psi} \cos \vartheta \cos \gamma; \\ r &= \dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \cos \vartheta \sin \gamma, \end{aligned} \quad (2.20)$$

или, в матричной форме,

$$\omega^* = \dot{\Lambda}^* \mathcal{A},$$

$$\omega^* = \|p, q, r\|, \quad \Lambda^* = \|\gamma, \vartheta, \psi\|.$$

Заметим, что в силу уравнений (2.20)

$$\frac{\partial q}{\partial \gamma} = r, \quad \frac{\partial r}{\partial \gamma} = -q.$$

Так как $\det \mathcal{A} = -\cos \vartheta$ и система уравнений (2.20) разрешима относительно $\dot{\psi}$, $\dot{\vartheta}$, $\dot{\gamma}$ при $\cos \vartheta \neq 0$:

$$\dot{\Lambda}^* = \omega^* \mathcal{A}^{-1}; \quad \mathcal{A}^{-1} = \frac{\|C_{hg}^{(\vartheta)}\|}{\det \mathcal{A}} = \frac{-C_{\vartheta}}{\cos \vartheta},$$

где $C_{gh}^{(\vartheta)}$ — алгебраическое дополнение элемента $\mathcal{A}_{gh}$ матрицы $\mathcal{A} = \|\mathcal{A}_{hg}\|$ ($g, h = 1, 2, 3$), т. е. $C_{\vartheta} \equiv \|C_{hg}^{(\vartheta)}\|$ — присоединенная матрица. В скалярном виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma} &= p + (r \sin \gamma - q \cos \gamma) \operatorname{tg} \vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= q \sin \gamma + r \cos \gamma, \\ \dot{\psi} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (q \cos \gamma - r \sin \gamma), \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Подобным же образом, во второй системе углов

$$\begin{aligned} p &= \dot{\Gamma} - \dot{\Theta} \sin \Psi; \quad q = \dot{\Psi} \cos \Gamma + \dot{\Theta} \cos \Psi \sin \Gamma; \\ r &= -\dot{\Psi} \sin \Gamma + \dot{\Theta} \cos \Psi \cos \Gamma. \end{aligned}$$

При $\cos \Psi \neq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma} &= p + (q \sin \Gamma + r \cos \Gamma) \operatorname{tg} \Psi, \\ \dot{\Psi} &= q \cos \Gamma - r \sin \Gamma, \\ \dot{\Theta} &= \frac{1}{\cos \Psi} (q \sin \Gamma + r \cos \Gamma). \end{aligned}$$

Таким образом, 1-я система вырождается при особых значениях угла $\vartheta = \pm 90^\circ$ тангажа (дифферента), когда ось Ox совпадает с осью OY , 2-я система — при особых значениях угла рысканья Ψ . Подобным же образом в 3-й системе

$$\begin{aligned} p &= -\dot{\vartheta} \sin \psi + \dot{\gamma} \cos \psi \cos \vartheta; \quad q = \dot{\psi} - \dot{\gamma} \sin \vartheta; \\ r &= \dot{\vartheta} \cos \psi + \dot{\gamma} \sin \psi \cos \vartheta. \end{aligned}$$

При $\cos \vartheta \neq 0$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= q + (p \cos \psi + r \sin \psi) \operatorname{tg} \vartheta, \\ \dot{\vartheta} &= r \cos \psi - p \sin \psi, \\ \dot{\gamma} &= \frac{1}{\cos \vartheta} (r \sin \psi + p \cos \psi). \end{aligned}$$

Области вырождения этих систем определяют классы задач, которые целесообразно решать в каждой из них. В 1-й и 3-й системах $\cos \vartheta = 0$ при совпадении оси Ox с осью OY , а наибольшее удаление координаты ϑ от ее особых значений имеет место при $\vartheta = 0$. В частности, если ось OY направлена по вертикали, то значению $\vartheta = 0$ отвечает горизонтальное движение. Во 2-й системе $\cos \Psi = 0$ при совпадении оси Ox с осью OZ , а наибольшее удаление координаты Ψ от ее особых значений имеет место при $\Psi = 0$; последнему условию отвечает дви-

жение в вертикальной плоскости, содержащей ось OX . А так как при исследовании дифференциальных уравнений динамики (в частности, при электро моделировании, при численном и машинном интегрировании их) погрешность при прочих различных условиях возрастает при приближении переменных к их особым значениям, следует выбирать такую из систем эйлеровых углов, при которой на определенном промежутке времени достигается значительное удаление косо го угла от его особых значений.

Именно, при движениях, в которых направление продольной оси Nx самолета (§ 1) достаточно удалено от вертикального, удобнее 1-я или 3-я системы. Наоборот, при движениях, в которых направление продольной оси близко к вертикальному, но курсовой угол меняется в пределах, значительно меньших 180° , удобнее применять 2-ю систему. При больших изменениях как курсового угла, так и угла тангажа следует в подходящие моменты менять ориентации осей OZ и OY в их плоскости, дабы удалять переменную Ψ от ее особых значений.

С помощью соотношения (2.6) можно подсчитать проекции $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$ вектора $\bar{\omega}$ на оси любой другой прямоугольной системы координат $\xi \eta \zeta$:

$$\omega_{\xi}^* = \|\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta\| = \|p, q, r\| (xyz, \xi \eta \zeta) = \omega^* (xyz, \xi \eta \zeta).$$

Например, если за систему $\xi \eta \zeta$ выбрать неподвижный координатный трехгранник $OXYZ$, то проекции $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ вектора $\bar{\omega}$ на неподвижные оси определяются матричным равенством

$$\|\omega_x, \omega_y, \omega_z\| = \dot{\Lambda}^* \partial L,$$

или, в скалярном виде,

$$\omega_x = \dot{\theta} \sin \psi + \dot{\gamma} \cos \psi \cos \theta; \quad \omega_y = \dot{\psi} + \dot{\gamma} \sin \theta,$$

$$\omega_z = \dot{\theta} \cos \psi - \dot{\gamma} \sin \psi \cos \theta.$$

Дифференцируя углы $\psi, \theta, \dots$ второй раз по времени получаем выражения для ускорений по эйлеровым координатам:

$$\ddot{\psi} = [\dot{q} \cos \gamma - \dot{r} \sin \gamma + \dot{\theta} (\dot{\psi} \sin \theta - \dot{\gamma})] \sec \theta,$$

$$\ddot{\theta} = \dot{q} \sin \gamma + \dot{r} \cos \gamma + \dot{\psi} \dot{\gamma} \cos \theta,$$

$$\begin{aligned}
\ddot{\gamma} &= \dot{p} + [(\dot{r} \sin \gamma - \dot{q} \cos \gamma) \sin \vartheta + \\
&\quad + \vartheta (\dot{\gamma} \sin \vartheta - \dot{\psi})] \sec \vartheta; \\
\ddot{\Theta} &= [\dot{q} \sin \Gamma + \dot{r} \cos \Gamma + \dot{\Psi} (\dot{\Gamma} + \dot{\Theta} \sin \Psi)] \sec \Psi, \\
\ddot{\Psi} &= \dot{q} \cos \Gamma - \dot{r} \sin \Gamma - \dot{\Gamma} \dot{\Theta} \cos \Psi, \\
\ddot{\Gamma} &= \dot{p} + [(\dot{q} \sin \Gamma + \dot{r} \cos \Gamma + \dot{\Gamma} \dot{\Psi}) \sin \Psi + \dot{\Theta} \dot{\Psi}] \sec \Psi.
\end{aligned}$$

Выпишем в заключение соотношения между направляющими косинусами L_{gh} и $\mathcal{E}_{gh}$, проверяемые непосредственной подстановкой этих величин, выраженных в функции эйлеровых углов. В первой системе углов

$$\begin{aligned}
L_{11} \mathcal{E}_{32} - L_{21} \mathcal{E}_{31} &= L_{33}; \quad L_{21} \mathcal{E}_{33} - L_{31} \mathcal{E}_{32} = L_{13}; \\
L_{31} \mathcal{E}_{31} - L_{11} \mathcal{E}_{33} &= L_{23}, \\
L_{12} \mathcal{E}_{32} - L_{22} \mathcal{E}_{31} &= 0; \quad L_{22} \mathcal{E}_{33} - L_{32} \mathcal{E}_{32} = 0; \\
L_{32} \mathcal{E}_{31} - L_{12} \mathcal{E}_{33} &= 0, \\
L_{13} \mathcal{E}_{32} - L_{23} \mathcal{E}_{31} &= -L_{31}; \quad L_{23} \mathcal{E}_{33} - L_{33} \mathcal{E}_{32} = -L_{11}; \\
L_{33} \mathcal{E}_{31} - L_{13} \mathcal{E}_{33} &= -L_{21}, \\
L_{21} \mathcal{E}_{23} - L_{31} \mathcal{E}_{22} &= -\cos \psi \sin \vartheta; \quad L_{22} \mathcal{E}_{23} - L_{32} \mathcal{E}_{22} = \cos \vartheta, \\
L_{23} \mathcal{E}_{23} - L_{33} \mathcal{E}_{22} &= \sin \psi \sin \vartheta.
\end{aligned}$$

Во второй системе углов

$$\mathcal{E} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \Gamma & -\sin \Gamma \\ -\sin \Psi & \cos \Psi \sin \Gamma & \cos \Psi \cos \Gamma \end{vmatrix}$$

и

$$\begin{aligned}
L_{11} \mathcal{E}_{32} - L_{21} \mathcal{E}_{31} &= -L_{32}; \quad L_{31} \mathcal{E}_{31} - L_{11} \mathcal{E}_{33} = -L_{12}; \\
L_{31} \mathcal{E}_{31} - L_{11} \mathcal{E}_{33} &= -L_{22}, \\
L_{12} \mathcal{E}_{32} - L_{22} \mathcal{E}_{31} &= L_{31}; \quad L_{22} \mathcal{E}_{33} - L_{32} \mathcal{E}_{22} = L_{11}; \\
L_{32} \mathcal{E}_{31} - L_{12} \mathcal{E}_{33} &= L_{21}, \\
L_{13} \mathcal{E}_{32} - L_{23} \mathcal{E}_{31} &= 0; \quad L_{23} \mathcal{E}_{33} - L_{33} \mathcal{E}_{32} = 0; \\
L_{33} \mathcal{E}_{31} - L_{13} \mathcal{E}_{33} &= 0, \\
L_{21} \mathcal{E}_{23} - L_{31} \mathcal{E}_{22} &= -\sin \Psi \cos \Theta; \\
L_{22} \mathcal{E}_{23} - L_{32} \mathcal{E}_{22} &= -\sin \Psi \sin \Theta, \\
L_{23} \mathcal{E}_{23} - L_{33} \mathcal{E}_{22} &= -\cos \Psi.
\end{aligned}$$

§ 9. Кинематика углового движения прямоугольного трехгранника

а) Оператор « $\sim$ » и его свойства. Установим важные соотношения между направляющими косинусами L_{gh} подвижного трехгранника и их первыми двумя производными $\dot{L}_{gh}$ и $\ddot{L}_{gh}$ по времени ($g, h = 1, 2, 3$).

Введем оператор, переводящий всякую матрицу-строку $a^* = \|a_1, a_2, a_3\|$ или матрицу-столбец $(a^*)^T$ в квадратную кососимметрическую особую матрицу

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Этот оператор, здесь и в дальнейшем, будем обозначать символом « $\sim$ » над обозначением матрицы-строки или матрицы-столбца:

$$\tilde{a}^* = \overline{(a^*)^T} = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{array} \right\| = \tilde{a} = \tilde{a}^T.$$

Составим матрицу-произведение $L^{(0)} = L(dL^T/dt)$, где по-прежнему $L \equiv \|L_{gh}\| = (xyz, XYZ)$. Отметим прежде всего, что диагональные элементы $L_{gg}^{(0)}$ есть нули. В самом деле, вычисляя матричное произведение $L^{(0)}$, получим:

$$\begin{aligned} L_{11}^{(0)} &= L_{11}\dot{L}_{11} + L_{12}\dot{L}_{12} + L_{13}\dot{L}_{13} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (L_{11}^2 + L_{12}^2 + L_{13}^2) = 0, \end{aligned}$$

и таким же образом

$$L_{22}^{(0)} = L_{33}^{(0)} = 0.$$

Подсчитаем элемент

$$L_{22}^{(0)} = L_{21}\dot{L}_{11} + L_{22}\dot{L}_{12} + L_{23}\dot{L}_{13}.$$

Производя подсчет, для определенности, в первой системе углов получим, используя зависимости $L_{gh} \equiv L_{gh}(\psi, \vartheta, \gamma)$ (2.15):

$$\begin{aligned} L_{21}^{(0)} &= (\sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \cos \gamma \sin \vartheta) \times \\ &\times (-\dot{\psi} \sin \psi \cos \vartheta - \dot{\vartheta} \cos \psi \sin \vartheta) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{\vartheta}^2 \cos \gamma \cos^2 \vartheta + (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma \sin \vartheta) \times \\
& \quad \times (-\dot{\psi} \cos \psi \cos \vartheta + \dot{\vartheta} \sin \psi \sin \vartheta) = \\
& \quad = \dot{\vartheta} \cos \gamma - \dot{\psi} \sin \gamma \cos \vartheta.
\end{aligned}$$

Последнее выражение совпадает с правой частью третьего уравнения (2.20) и $L_{21}^{(0)} = r$. Таким же образом $L_{12}^{(0)} = -r$, $L_{13}^{(0)} = -L_{31}^{(0)} = q$, $L_{23}^{(0)} = -L_{32}^{(0)} = -p$.

Следовательно,

$$L \frac{dL^T}{dt} = \begin{vmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{vmatrix},$$

т. е.

$$L \frac{dL^T}{dt} = \tilde{\omega},$$

или

$$\frac{dL^T}{dt} = L^T \tilde{\omega}. \quad (2.22)$$

Это соотношение справедливо во всех системах эйлеровых углов.

Дифференцируя по времени матричное тождество $LL^T = \mathcal{E}$, получим

$$\frac{dL}{dt} L^T + L \frac{dL^T}{dt} = 0,$$

откуда в силу равенства (2.22) следует

$$\frac{dL}{dt} L^T = -\tilde{\omega} \quad (2.23)$$

или, иначе,

$$\frac{dL}{dt} = -\tilde{\omega} L. \quad (2.24)$$

Матричные равенства (2.23) и (2.24) равносильны скалярным соотношениям

$$\left. \begin{aligned}
L_{21} \dot{L}_{11} + L_{22} \dot{L}_{12} + L_{23} \dot{L}_{13} &= \\
&= -(\dot{L}_{21} L_{11} + \dot{L}_{22} L_{12} + \dot{L}_{23} L_{13}) = r, \\
L_{11} \dot{L}_{31} + L_{12} \dot{L}_{32} + L_{13} \dot{L}_{33} &= \\
&= -(\dot{L}_{11} L_{31} + \dot{L}_{12} L_{32} + \dot{L}_{13} L_{33}) = q, \\
L_{31} \dot{L}_{21} + L_{32} \dot{L}_{22} + L_{33} \dot{L}_{23} &= \\
&= -(\dot{L}_{31} L_{21} + \dot{L}_{32} L_{22} + \dot{L}_{33} L_{23}) = p.
\end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Равенства (2.25) представляют собой кинематические уравнения Эйлера, выраженные через направляющие косинусы и их производные.

Продифференцируем по времени обе части матричного равенства (2.23):

$$\frac{d^2 L}{dt^2} L^T + \frac{dL}{dt} \frac{dL^T}{dt} = -\dot{\tilde{\omega}},$$

Используя равенства (2.22) и (2.24), получим матричное соотношение

$$\ddot{L} L^T = -\dot{\tilde{\omega}} - (-\tilde{\omega} L) (L^T \tilde{\omega}),$$

или

$$\ddot{L} L^T = (\tilde{\omega})^2 - \dot{\tilde{\omega}}, \quad (2.26)$$

причем правая часть равенства (2.26) выражается через угловые скорости и ускорения в виде:

$$(\tilde{\omega})^2 - \dot{\tilde{\omega}} = \begin{vmatrix} -r^2 - q^2 & \dot{r} + qp & -\dot{q} + rp \\ -\dot{r} + pq & -\dot{p}^2 - r^2 & \dot{p} + rq \\ \dot{q} + pr & -\dot{p} + qr & -q^2 - p^2 \end{vmatrix}.$$

Полученные соотношения позволяют выписать в матричной форме значения производных по времени от единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ осей подвижного трехгранника, причем рассматривается изменение этих векторов по отношению к неподвижной системе координат $OXYZ$.

Матрицы $e_C^* = \|\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\|$ и $e_0^* = \|\bar{X}^0, \bar{Y}^0, \bar{Z}^0\|$ связаны соотношением (2.5):

$$e_C^* = e_0^* L^T.$$

Дифференцируя это соотношение по t и учитывая, что $\dot{e}_0^* = \dot{e}_C^* L$ (2.5), получим с помощью равенства (2.22) дифференциальное уравнение первого порядка, которому удовлетворяют единичные векторы подвижного трехгранника

$$\frac{de_C^*}{dt} = e_C^* \tilde{\omega}. \quad (2.27)$$

Последнее уравнение равносильно системе векторных уравнений

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{j}r - \bar{k}q; \quad \frac{d\bar{j}}{dt} = p\bar{k} - r\bar{i}; \quad \frac{d\bar{k}}{dt} = -p\bar{j} + q\bar{i}.$$

Эти уравнения можно, конечно, получить и с помощью векторной алгебры, например,

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i} = (p\bar{i} + q\bar{j} + r\bar{k}) \times \bar{i} = -q\bar{k} + r\bar{j}.$$

Дифференцируя полученное матричное уравнение по t еще раз, найдем, что

$$\frac{d^2 e_C^*}{dt^2} = \frac{de_C^*}{dt} \bar{\omega} + e_C^* \ddot{\omega},$$

или, заменяя производную de_C^*/dt ее значением (2.27), напомним дифференциальное уравнение второго порядка, которому также удовлетворяет матрица e_C^* единичных векторов:

$$\frac{d^2 e_C^*}{dt^2} - e_C^* [(\ddot{\omega})^2 + \ddot{\omega}] = 0. \quad (2.28)$$

Уравнение (2.28) позволяет выразить вторые производные от единичных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ подвижной системы координат в виде линейных форм от этих же векторов:

$$\frac{d^2 \bar{i}}{dt^2} = -(q^2 + r^2) \bar{i} + (r + pq) \bar{j} + (-q + pr) \bar{k}$$

и т. д.

В качестве примера найдем матрицу ω^* проекций абсолютного ускорения $\ddot{\omega}$ начала N подвижной системы координат $Nxyz$ на оси x , y , z этой системы. Обозначим через $v^* = \|v_x, v_y, v_z\|$ матрицу проекций v_x, v_y, v_z абсолютной скорости начала N на оси x , y , z соответственно через X, Y, Z — абсолютные координаты начала N . По определению абсолютного ускорения

$$\|\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}\| = \frac{d}{dt} \|\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}\|.$$

На основании соотношения (2.6)

$$\|\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}\| = v^* L$$

и

$$\|\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}\| = \dot{v}^* L + v^* \dot{L}.$$

Применяя равенство (2.24), найдем, что

$$\|\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}\| = (\dot{v}^* - v^* \tilde{\omega}) L.$$

Вновь обращаясь к соотношению (2.6), получим:

$$\omega^* = \|\ddot{X}, \ddot{Y}, \ddot{Z}\| L^T.$$

Следовательно,

$$\omega^* = \dot{v}^* - v^* \tilde{\omega}. \quad (2.29)$$

б) *Матрица проекций векторного произведения.* Применим оператор « $\sim$ » для составления матрицы проекций векторного произведения $\bar{c}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ на оси прямоугольной правой системы координат x, y, z :

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}, \quad \bar{a} = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k}, \quad \bar{b} = b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k}.$$

Как известно

$$\bar{c} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = c_1 \bar{i} + c_2 \bar{j} + c_3 \bar{k},$$

причем

$$c_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2, \quad c_2 = a_3 b_1 - a_1 b_3, \quad c_3 = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Образуя матрицы-строки

$$a^* = \|a_1, a_2, a_3\|, \quad b^* = \|b_1, b_2, b_3\|, \\ c^* = \|(\bar{a} \times \bar{b}) \bar{i}, (\bar{a} \times \bar{b}) \bar{j}, (\bar{a} \times \bar{b}) \bar{k}\|,$$

непосредственной проверкой убедимся в справедливости матричного соотношения

$$c^* = a^* \tilde{b}. \quad (2.30)$$

Непосредственно проверяется и соотношение

$$a^* \tilde{b} = -b^* \tilde{a}. \quad (2.31)$$

Поэтому матрица c^* выражается также с помощью равенства

$$c^* = -b^* \tilde{a}. \quad (2.32)$$

Из равенства (2.31), в частности, следует, что $a^* \tilde{a} = 0$.

Отметим еще некоторые важные свойства матричных произведений, содержащих матрицу $\tilde{a}$. Пусть $l = \|l_{gh}\|$ ($g, h = 1, 2, 3$) — матрица направляющих косинусов между осями двух прямоугольных трехгранников, т. е. l — ортого-

нальная матрица. Образует матрицу-строку $A^* = a^* l^T$. Вычисляя матрицу $a^* l^T$ и применяя к ней оператор « $\sim$ », найдем, что

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \widetilde{a^* l^T} = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -(l_{31}a_1 + l_{32}a_2 + l_{33}a_3) & l_{21}a_1 + l_{22}a_2 + l_{23}a_3 \\ l_{31}a_1 + l_{32}a_2 + l_{33}a_3 & 0 & -(l_{11}a_1 + l_{12}a_2 + l_{13}a_3) \\ -(l_{21}a_1 + l_{22}a_2 + l_{23}a_3) & l_{11}a_1 + l_{12}a_2 + l_{13}a_3 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Непосредственным вычислением легко убедиться, что этой же матрице $\tilde{A}$ равно и матричное произведение $\tilde{l} \tilde{a} l^T$. Следовательно,

$$\widetilde{a^* l^T} = \tilde{l} \tilde{a} l^T \quad (2.33)$$

и, таким же образом,

$$\begin{aligned} \widetilde{a^* l} &= l^T \tilde{a} l = \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -(l_{13}a_1 + l_{23}a_2 + l_{33}a_3) & l_{12}a_1 + l_{22}a_2 + l_{32}a_3 \\ l_{13}a_1 + l_{23}a_2 + l_{33}a_3 & 0 & -(l_{11}a_1 + l_{21}a_2 + l_{31}a_3) \\ -(l_{12}a_1 + l_{22}a_2 + l_{32}a_3) & l_{11}a_1 + l_{21}a_2 + l_{31}a_3 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Далее, рассмотрим матрицу-строку $a^* \tilde{b} \tilde{a}$ и преобразуем ее к другому виду. В силу тождества (2.31)

$$a^* \tilde{b} \tilde{a} = -b^* (\tilde{a})^2, \quad (2.34)$$

причем, очевидно

$$(\tilde{a})^2 = \begin{vmatrix} -(a_3^2 + a_2^2) & a_2 a_1 & a_3 a_1 \\ a_1 a_2 & -(a_1^2 + a_3^2) & a_3 a_2 \\ a_1 a_3 & a_3 a_2 & -(a_2^2 + a_1^2) \end{vmatrix}.$$

Матрица $(\tilde{a})^2$ — особая, так же как и матрица $\tilde{a}$, ибо

$$\det (\tilde{a})^2 = (\det \tilde{a})^2 = 0.$$

в) *Матричные формулы для сложения мгновенных угловых скоростей твердых тел.* Рассмотрим систему G нескольких твердых тел $G_0, G_1, \dots, G_n$, способных вращаться около общей неподвижной точки O . С телом G_0 свяжем прямоугольную систему координат $Ox_0y_0z_0$, с телом G_v — прямоугольную систему координат O, x, y, z , ($v =$

$= 1, 2, \dots, n$). Движение тела G_0 рассматривается по отношению к неподвижной системе отсчета $OXYZ$.

Относительное угловое расположение двух тел G_λ и G_μ ($\nu, \mu = 0, 1, 2, \dots, n$), принадлежащих системе G , определяется с помощью трех угловых координат, в качестве которых выберем углы $\psi_{\lambda\mu}, \vartheta_{\lambda\mu}, \gamma_{\lambda\mu}$ Эйлера в первой системе (§ 7). Пусть трехгранники $Ox_\lambda y_\lambda z_\lambda$ и $Ox_\mu y_\mu z_\mu$ в исходном положении совмещены. Тогда угол $\psi_{\lambda\mu}$ определяет первый поворот трехгранника около оси y_λ , совпадающей с осью y_μ , угол $\vartheta_{\lambda\mu}$ — второй поворот его, около линии узлов z_λ , угол $\gamma_{\lambda\mu}$ — третий его поворот, выполнимый около оси x_λ в ее окончательном положении.

Введем обозначения: $\bar{\omega}_{\lambda\mu}$ — вектор мгновенной угловой скорости тела G_λ в его вращении около неподвижной точки O по отношению к телу G_μ , $\omega_{\lambda\mu}^* = \|p_{\lambda\mu}, q_{\lambda\mu}, r_{\lambda\mu}\|$ — матрица проекций вектора $\bar{\omega}_{\lambda\mu}$ на оси системы $x_\lambda y_\lambda z_\lambda$, связанной с телом G_λ (по определению, $\bar{\omega}_{\lambda\lambda} = 0, \omega_{\lambda\lambda}^* = 0$), $l_{\lambda\mu} = (x_\lambda y_\lambda z_\lambda, x_\mu y_\mu z_\mu)$ — матрица направляющих косинусов между осями λ -й и μ -й координатных систем. Очевидно, что $l_{\lambda\mu} = L(\psi_{\lambda\mu}, \vartheta_{\lambda\mu}, \gamma_{\lambda\mu})$, где матрица L определяется равенством (2.15). Матрицы $\omega_{\lambda\mu}^*$ и $\Lambda_{\lambda\mu}^* = \|\gamma_{\lambda\mu}, \vartheta_{\lambda\mu}, \psi_{\lambda\mu}\|$ связаны уравнением (§ 8)

$$\omega_{\lambda\mu}^* = \Lambda_{\lambda\mu}^* \mathcal{Z}_{\lambda\mu}, \quad \mathcal{Z}_{\lambda\mu} = \mathcal{Z}(\gamma_{\lambda\mu}, \vartheta_{\lambda\mu}),$$

равносильным скалярным уравнениям

$$\begin{aligned} p_{\lambda\mu} &= \dot{\gamma}_{\lambda\mu} + \dot{\psi}_{\lambda\mu} \sin \vartheta_{\lambda\mu}, \\ q_{\lambda\mu} &= \dot{\vartheta}_{\lambda\mu} \sin \gamma_{\lambda\mu} + \dot{\psi}_{\lambda\mu} \cos \vartheta_{\lambda\mu} \cos \gamma_{\lambda\mu}, \\ r_{\lambda\mu} &= \dot{\vartheta}_{\lambda\mu} \cos \gamma_{\lambda\mu} - \dot{\psi}_{\lambda\mu} \cos \vartheta_{\lambda\mu} \sin \gamma_{\lambda\mu}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Выразим мгновенную угловую скорость тела G , относительно тела G_0 через относительные угловые скорости последовательных пар промежуточных тел системы G . По формуле (2.23)

$$\tilde{\omega}_{\lambda\mu} = -\dot{l}_{\lambda\mu} l_{\lambda\mu}^T.$$

По свойству линейного преобразования (§ 5)

$$l_{\lambda\mu} = l_{\lambda\tau} l_{\tau\mu} \quad (\tau = 0, 1, 2, \dots, n). \quad (2.36)$$

На основании соотношения (2.24) напомним равенства:

$$\dot{l}_{\lambda\tau} = -\tilde{\omega}_{\lambda\tau} l_{\lambda\tau}, \quad \dot{l}_{\tau\mu} = -\tilde{\omega}_{\tau\mu} l_{\tau\mu}.$$

Следовательно,

$$\dot{l}_{\lambda\mu} = -\tilde{\omega}_{\lambda\tau} l_{\lambda\tau} l_{\tau\mu} - l_{\lambda\tau} \tilde{\omega}_{\tau\mu} l_{\tau\mu}$$

и

$$\tilde{\omega}_{\lambda\mu} = \tilde{\omega}_{\lambda\tau} l_{\lambda\tau} l_{\tau\mu} l_{\lambda\mu}^T + l_{\lambda\tau} \tilde{\omega}_{\tau\mu} l_{\tau\mu} l_{\lambda\mu}^T.$$

В силу равенств (2.36) и $l_{\lambda\mu}^T = l_{\tau\mu}^T l_{\lambda\tau}^T$, получим, что

$$\tilde{\omega}_{\lambda\mu} = \tilde{\omega}_{\lambda\tau} + l_{\lambda\tau} \tilde{\omega}_{\tau\mu} l_{\lambda\tau}^T.$$

С учетом тождества (2.33) приведем последнее выражение к виду

$$\tilde{\omega}_{\lambda\mu} = \tilde{\omega}_{\lambda\tau} + \overline{\omega_{\tau\mu}^* l_{\lambda\tau}^T}.$$

По определению оператора « $\sim$ », из равенства $\tilde{a} = \tilde{b}$ вытекает, что $a^* = b^*$, поэтому

$$\omega_{\lambda\mu}^* = \omega_{\lambda\tau}^* + \omega_{\tau\mu}^* l_{\lambda\tau}^T.$$

При $\mu = 0$, $\lambda = \nu$, $\tau = \nu - 1$.

$$\omega_{\nu 0}^* = \omega_{\nu (\nu-1)}^* + \omega_{(\nu-1) 0}^* l_{\nu (\nu-1)}^T.$$

Применяя это соотношение последовательно к матрицам $\omega_{(\nu-1) 0}^*$, $\omega_{(\nu-2) 0}^*$, ..., $\omega_{3 0}^*$, $\omega_{2 0}^*$, найдем искомое равенство:

$$\omega_{\nu 0}^* = \sum_{k=0}^{\nu-1} \omega_{(\nu-k)(\nu-k-1)}^* l_{\nu (\nu-k)}^T. \quad (2.37)$$

Оно выражает матрицу-строку $\omega_{\nu 0}^*$ проекций мгновенной угловой скорости тела G_ν относительно тела G_0 на оси x_ν , y_ν , z_ν , связанные с самим телом G_ν , через матрицы-строки $\omega_{(\nu-k)(\nu-k-1)}^*$ проекций мгновенных угловых скоростей тел $G_{\nu-k}$ относительно тел $G_{\nu-k-1}$ на оси $x_{\nu-k}$, $y_{\nu-k}$, $z_{\nu-k}$.

Соотношения (2.36) и (2.37) представляют собой матричную запись векторной формулы

$$\bar{\omega}_{\nu 0} = \sum_{k=0}^{\nu-1} \bar{\omega}_{(\nu-k)(\nu-k-1)} \quad (2.38)$$

сложения мгновенных угловых скоростей последовательных тел. Эти соотношения можно получить и непосредственно из формулы (2.38).

§ 10. Прикладные задачи

1. Найти направляющие косинусы между осями поточной и связанной систем координат. Положение осей трехгранника $Nxyz$, связанных с телом G_c самолета относительно трехгранника $Nx_v y_v z_v$ поточных осей (§ 1), можно определить тремя углами Эйлера (§ 7). Так как у обычных самолетов направление продольной оси существенно отличается от направления подъемной силы, воспользуемся первой системой углов (§ 8); $\psi = \beta$, $\vartheta = \alpha$, $\gamma = \gamma'$, и искомые косинусы определяются матрицей (2.8). Если самолет в полете достаточно удален от прочих тел (земли, моря, кораблей или других самолетов), могущих влиять на характер обдува данного самолета потоком воздуха, то характер обдува самолета определяется лишь двумя угловыми координатами — углом атаки α и углом скольжения β : при движении его по крену (углу γ') вектор полной аэродинамической силы будет лишь вращаться около продольной оси, сохраняя неизменную величину в каждом установившемся положении по крену. Поэтому углу γ' можно придать любое значение, проще всего нуль; следовательно,

$$\begin{aligned} l_v &= (xyz, x_v y_v z_v) = \|l_{gh}^{(v)}\|, \quad (g, h = 1, 2, 3) \\ l_v &= L|_{\psi=\beta, \vartheta=\alpha, \gamma'=0} \\ &= \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \beta & \sin \alpha & -\cos \alpha \sin \beta \\ -\sin \alpha \cos \beta & \cos \alpha & \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда установим связь между проекциями v_x, v_y, v_z воздушной скорости $\bar{v}$ самолета на связанные с ним оси и углами атаки и скольжения:

$$v_x = v \cos \alpha \cos \beta, \quad v_y = -v \sin \alpha \cos \beta, \quad v_z = v \sin \beta. \quad (2.39)$$

Иначе

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{v_y}{v_x}, \quad \sin \beta = \frac{v_z}{v}.$$

2. Найти направление вектора воздушной скорости самолета в неподвижной системе осей. Подсчитаем косинусы углов, образуемых вектором $\bar{v}$ воздушной скоро-

сти самолета с осями неподвижной системы координат $OXYZ$. На основании разложения (2.8)

$$(\bar{v}, XYZ) = (\bar{v}, x_v y_v z_v) (x_v y_v z_v, xyz) (xyz, XYZ),$$

т. е.

$$(\bar{v}, XYZ) = \|x_1, x_2, x_3\| = \|1, 0, 0\| L_v^T L.$$

Следовательно,

$$x_g = L_{1g} \cos \alpha \cos \beta - L_{2g} \sin \alpha \cos \beta + L_{3g} \sin \beta. \quad (2.40)$$

$$(g = 1, 2, 3).$$

3. Составить уравнения траектории полета. Пусть $R^* = \|X, Y, Z\|$ — матрица абсолютных координат подвижного начала N тела G_C , $R_0^* = R^*(t_0)$, $v^* = \|v_x, v_y, v_z\|$ — матрица проекций скорости $\bar{v}$ подвижного начала N относительно неподвижной системы на связанные оси ($\bar{v}_x = \bar{v} \bar{i}, \dots$), $V^* = \|V_X, V_Y, V_Z\|$ — матрица проекций скорости $\bar{v}$ на неподвижные оси ($V_X = \bar{v} \bar{X}^0, \dots$). По определению скорости $\bar{v}$

$$V^* = dR^*/dt.$$

В силу соотношений (2.6):

$$V^* = v^* (xyz, XYZ) = v^* L,$$

$$\frac{dR^*}{dt} = v^* L,$$

или

$$R^*(t) = R_0^* + \int_{t_0}^t v^* L dt.$$

Например, в первой системе углов Эйлера

$$L = \|L_{gh}(\psi, \vartheta, \gamma)\|, \text{ и в силу равенства (2.15)}$$

$$\dot{X} = v_x \cos \psi \cos \vartheta + v_y (\sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \cos \gamma \sin \vartheta) +$$

$$v_z (\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma \sin \vartheta),$$

$$\dot{Y} = v_x \sin \vartheta + v_y \cos \gamma \cos \vartheta - v_z \sin \gamma \cos \vartheta, \quad (2.41)$$

$$\dot{Z} = -v_x \sin \psi \cos \vartheta + v_y (\cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma \sin \vartheta) +$$

$$+ v_z (\cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \gamma \sin \vartheta)$$

4. Определить угловое положение самолета в географической и основной системах координат. Рассмотрим сферическую поверхность, натянутую на земной экватор, принимаемый за окружность. Положение каждой точки S на этой поверхности определяется географическими координатами — широтой λ и долготой ν . Точку $S(\lambda, \nu)$ примем за начало прямоугольной правой системы координат $Sxyz$, называемой географической: в этой системе ось y направлена вверх по геометрической вертикали — продолжению

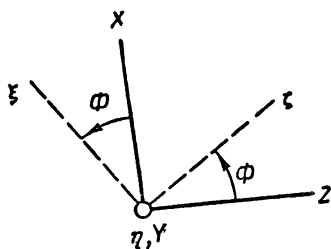


Рис. 25

радиуса Земли, проходящего через эту точку (Земля принимается сферической), ось z — в плоскости горизонта на восток, ось x — по полуоденной линии на север.

Пусть задано угловое положение самолета по отношению к географической системе. Это означает, что задана матрица направляющих косинусов

$$l_S = (xyz, \xi\eta\zeta).$$

Найдем угловое положение самолета по отношению к основной системе $OXYZ$, характеризуемое матрицей $L = (xyz, XYZ)$. Обозначим через $O\xi\eta\zeta$ центральную земную систему осей (§ 1) и через $\Phi = \angle(\xi, X) = \angle(\zeta, Z)$ часовой угол Земли (рис. 25). Введем матрицу

$$\Phi_e = (XYZ, \xi\eta\zeta) = \begin{vmatrix} \cos \Phi & 0 & \sin \Phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \Phi & 0 & \cos \Phi \end{vmatrix}.$$

Очевидно, что $\Phi = \Omega_e t + \Phi_0$, где Ω_e — угловая скорость суточного вращения Земли, а Φ_0 — постоянная, зависящая от выбора начального момента времени для отсчета часового угла. Взаимное расположение центральной земной и географической систем координат показано на рис. 26. В центральной земной системе земная долгота ν отсчитывается от меридиана, проходящего через ось $O\xi$.

На основании разложения (2.7) искомая матрица L определяется равенством

$$(xyz, XYZ) = (xyz, \eta\eta\xi) (\eta\eta\xi, \xi\eta\xi) (\xi\eta\xi, XYZ).$$

В правой части этого равенства первый сомножитель представляет собой заданную матрицу l_S , третий — матрицу Φ_e^T . Из рис. 26 следует, что

$$L_S = (\eta\eta\xi, \xi\eta\xi) = \begin{vmatrix} -\cos \nu \sin \lambda & \cos \lambda & \sin \nu \sin \lambda \\ \cos \nu \cos \lambda & \sin \lambda & -\sin \nu \cos \lambda \\ -\sin \nu & 0 & -\cos \nu \end{vmatrix}.$$

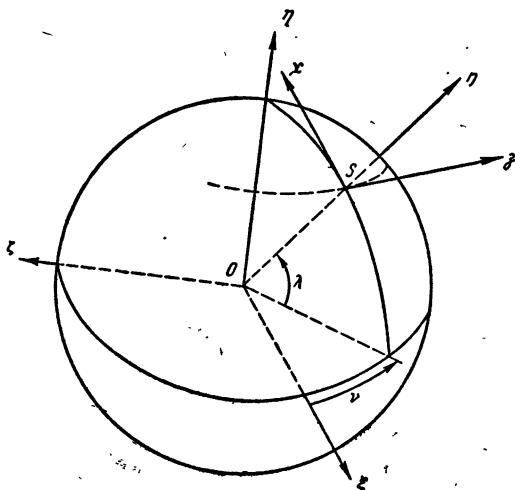


Рис. 26

Следовательно, искомая связь выражается матричным соотношением

$$L = l_S L_S \Phi_e^T.$$

5. Исследовать геометрию выдерживания направления в пространстве на подвижном основании. Для наведения некоторой оси (орудия, телескопа, радиолокатора и т. п.) независимо от углового движения самолета применяется подвес с двумя степенями свободы (рис. 27, а): относительный азимут λ_a задается путем вращения наружного кольца подвеса (вертлюга В) около оси y_T , фиксированной в самолете, а относительный угол возвышения φ_a — путем вращения внутреннего кольца К подвеса около оси, фиксированной в его наружном кольце (оси цапф).

Полет самолета рассматривается по отношению к земной системе координат $OXYZ$; за опорную систему координат примем систему $N'X'Y'Z'$, начало N' которой совпадает с точкой пересечения оси вращения вертлюга подвеса с осью цапф орудия, а $N'X' \parallel OX$, $N'Y' \parallel OY$, $N'Z' \parallel OZ$. Прибор управления наводкой, работающий от следящего прицела, автоматически сопровождающего цель, выраба-

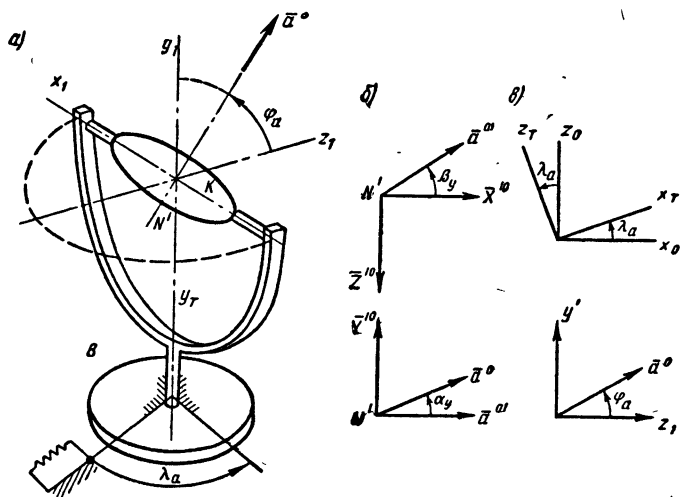


Рис. 27

тывает угловые координаты направления $N'U$ от подвижного начала N' к упрежденной точке U стрельбы, определяемого единичным вектором $\vec{a}^0$: абсолютный угол α_y — угол между вектором $N'U = (N'Y) \vec{a}^0$ и его составляющей $N'U'$ в горизонтальной плоскости $N'X'Z'$, характеризующейся единичным вектором $\vec{a}'^0$, и абсолютный азимут $\beta_y = \angle(\vec{a}'^0, X'^0)$. Требуется найти углы наводки λ_a и φ_a так, чтобы ось орудия была нацелена в упрежденную точку, зная углы α_y и β_y , снимаемые с прибора управления стрельбой и с учетом угловых колебаний самолета относительно Земли. При этом учтем еще искажения, вносимые в работу подвеса деформациями самолета в полете, проявляющиеся в виде угловых колебаний опорной плиты вертлюга по отношению к телу G_c самолета и

искажения, обусловленные погрешностями при сборке установки. Пусть начало N' лежит на оси Dy_T вращения вертлюга, перпендикулярной плоскости Dx_0z_0 . Опорная плита, с которой свяжем систему координат $Dx_0y_0z_0$, может колебаться относительно связанной системы $Nxyz$. Кроме того, пусть ось цапф орудия $N'x_1$ не перпендикулярна оси Dy_T вертлюга. С последним свяжем системы координат $Dx_Ty_Tz_T$ и $N'x_1y_1z_1$, где ось цапф $N'x_1$ образует с осью Dy_T вертлюга угол $\pi/2 - \alpha_T$; ось Dx_T направим по проекции оси $N'x_1$ цапф на плоскость, перпендикулярную оси вращения Dy_T вертлюга.

По разложению (2.8)

$$(\bar{a}^\circ, x_1y_1z_1) = (\bar{a}^\circ, XYZ)(XYZ, xyz)(xyz, x_0y_0z_0) \times \\ \times (x_0y_0z_0, x_Ty_Tz_T)(x_Ty_Tz_T, x_1y_1z_1). \quad (2.42)$$

Принимая во внимание правила отсчета углов (рис. 27, б, в) выпишем выражения этих матриц через соответствующие углы:

$$(\bar{a}^\circ, x_1y_1z_1) = \|0, \sin \varphi_a, \cos \varphi_a\| = a_1^*,$$

$$(\bar{a}^\circ, XYZ) = \|\sin \alpha_y \cos \beta_y, \cos \alpha_y, -\sin \alpha_y \sin \beta_y\| = a_y^*;$$

при этом $(XYZ, xyz) = L^T \equiv L^T(\psi, \vartheta, \gamma)$.

Матрица $(xyz, x_0y_0z_0) = L_T = L(\psi_T, \vartheta_T, \gamma_T)$ характеризует угловые вибрации опорной плиты, где $\psi_T, \vartheta_T, \gamma_T$ — углы, определяющие эти вибрации,

$$\lambda^{(a)} = (x_0y_0z_0, x_Ty_Tz_T) = \begin{vmatrix} \cos \lambda_a & 0 & -\sin \lambda_a \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \lambda_a & 0 & \cos \lambda_a \end{vmatrix};$$

$$\alpha^{(T)} = (x_Ty_Tz_T, x_1y_1z_1) = \begin{vmatrix} \cos \alpha_T & -\sin \alpha_T & 0 \\ \sin \alpha_T & \cos \alpha_T & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матричное соотношение (2.42) равносильно трем скалярным (из которых независимы лишь любые два, в силу ортогональности матриц), позволяющим найти углы φ_a и λ_a в функции углов $\psi, \vartheta, \gamma, \psi_T, \vartheta_T, \gamma_T, \alpha_y, \beta_y, \alpha_T$.

Для этого перепишем уравнение (2.42) в виде

$$a_1^* (\alpha^{(T)})^T = n^* \lambda^{(a)},$$

где матрица-строка $n^* = a_y^* L^T L_T^T = \|n_1, n_2, n_3\|$ зависит от углов $\varphi, \vartheta, \gamma, \psi_T, \vartheta_T, \gamma_T, \alpha_y, \beta_y$.

Выпишем соответствующие скалярные уравнения

$$-\sin \varphi_a \sin \alpha_T = n_1 \cos \lambda_a + n_3 \sin \lambda_a,$$

$$\sin \varphi_a \cos \alpha_T = n_2,$$

$$\cos \varphi_a = -n_1 \sin \lambda_a + n_3 \cos \lambda_a.$$

Из второго уравнения находим угол φ_a :

$$\varphi_a = \arcsin \frac{n_2}{\cos \alpha_T}.$$

Угол λ_a удобнее всего найти из первого уравнения с учетом равенства $\sin \varphi_a = n_2 / \cos \alpha_T$.

Вводя постоянные N_0 и κ по формулам $n_2 = N_0 \sin \kappa$; $n_3 = N_0 \cos \kappa$ найдем угол λ_a :

$$\lambda_a = -\arcsin \frac{n_2 \operatorname{tg} \alpha_T}{\sqrt{1 - n_2^2}} - \operatorname{arctg} \frac{n_1}{n_3}.$$

Третье уравнение используется для определения четвертей, в которых лежат углы λ_a и φ_a .

Из выражения для угла φ_a следует, что условием осуществимости наводки орудия в любом направлении служит неравенство

$$\left| \frac{n_2}{\cos \alpha_T} \right| \leq 1,$$

ограничивающее допустимые значения угла α_T искажения конструкции.

При углах α_T , нарушающих это неравенство, появятся «мертвые зоны», недоступные для обстрела при данном угловом положении самолета. Это обстоятельство иллюстрирует следующий пример, для наглядности утрированный: пусть $|\alpha_T| = 90^\circ$, т. е. $\cos \alpha_T = 0$; тогда при $n_2 \neq 0$ орудие можно наводить лишь в плоскости вращения вертлюга, так как при $\cos \alpha_T = 0$ ось цапф совпадает с осью турели и обе относительные угловые координаты орудия сводятся к одной — относительному азимуту λ_a .

6. *Определить угловые координаты самолета по показаниям гироскопических датчиков.* Для определения углового положения неизменяемой части самолета в неподвижном пространстве обычно применяют астатические гироскопические датчики, представляющие собой гироскопы в полном кардановом подвесе (рис. 28, а). Ось наружного кольца прибора жестко устанавливается в той неизменяемой части самолета, угловое положение которой подлежит определению с помощью этого датчика — например, в теле G_c , G' или в одном из тел $G^{(q)}$ (§ 1) и т. п. Эту неизменяемую часть самолета назовем, для краткости, измеряемым телом. Ось гироскопа сохраняет заданное направление в неподвижном пространстве — с точностью до ухода, вызываемого влиянием трения в подшипниках подвеса, упругости конструкции прибора, погрешностей изготовления и другими причинами.

С каждого гироскопического датчика можно снимать две независимых координаты: угол χ между плоскостями наружного и внутреннего кардановых колец и угол φ между плоскостью наружного кольца и некоторой отсчетной плоскостью, фиксированной в измеряемом теле и поддерживающей ось наружного кольца. Изменение этих углов обуславливается абсолютным угловым перемещением измеряемого тела. Говоря об определении абсолютного углового положения самолета, будем иметь в виду его тело G_c . Применяемые для этого гироскопические датчики могут сводиться, в частности, к гировертикали и курсовому гироскопу.

Решим следующую основную задачу: найти выражения абсолютных угловых координат самолета через координаты гироскопических датчиков, установленных на нем, при условиях:

а) самолет совершает произвольное пространственное движение,

б) гироскоп каждого датчика ориентирован произвольным образом в неподвижном пространстве,

в) для каждого датчика произвольно выбраны направление оси наружного карданового кольца в самолете и ориентация плоскости, служащей для отсчета углового положения этого кольца в самолете.

Условие «а» предусматривает использование приборов при любых угловых положениях самолета (в определенных границах, обусловленных динамическими свойствами гироскопа).

скопа), а условия «б» и «в» позволяют учесть влияние неточностей установки приборов на самолете и увода их гироскопов на показания этих приборов. Сами же приборы будем считать идеальными в том смысле, что в каждом из них оси наружного и внутреннего колец, а также оси гироскопа и внутреннего кольца попарно перпендикулярны.

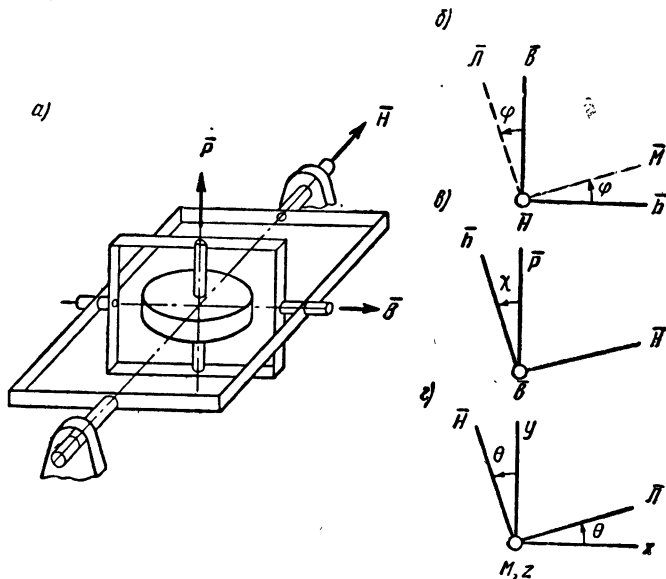


Рис. 28

Для решения этой задачи применим матричный способ, изложенный в гл. II. Введем единичные векторы (рис. 28, а): $\vec{n}$ — оси наружного карданового кольца, $\vec{v}$ — оси внутреннего карданового кольца, $\vec{h}$ — перпендикуляра к плоскости наружного кольца, порядок следования $\vec{n}$, $\vec{h}$, $\vec{v}$ примем за циклический ($\vec{h} = \vec{v} \times \vec{n}$).

Обозначим через $\vec{m}$ и $\vec{l}$ взаимно-перпендикулярные единичные векторы, определяющие упомянутую выше плоскость, фиксированную в самолете и содержащую ось наружного кольца; эта плоскость является отсчетной для определения углового положения наружного кольца в самолете. При этом выберем векторы $\vec{m}$ и $\vec{l}$ ($\vec{m} \perp \vec{l}$) в этой плоскости так, чтобы $\vec{m} \perp \vec{n}$, $\vec{l} \perp \vec{n}$; порядок следования

ния $\bar{n}$, $\bar{m}$, $\bar{l}$ примем за циклический ($\bar{n} = \bar{m} \times \bar{l}$). Через $\bar{p}$ обозначим единичный вектор оси гироскопа; по условию $\bar{p} \perp \bar{v}$; $\bar{v} \perp \bar{n}$.

Рассмотрим четыре правых прямоугольных системы координат: $OXYZ$ ($\bar{X}^\circ, \bar{Y}^\circ, \bar{Z}^\circ$) — неподвижная, $Nxyz$ ($\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$) — связанная с самолетом, $A\bar{n}\bar{m}\bar{l}$ — связанная с самолетом и служащая для определения углового положения плоскости наружного карданового кольца датчика в самолете, $A\bar{n}\bar{h}\bar{v}$ — связанная с наружным кардановым кольцом прибора и служащая для определения углового положения его внутреннего кольца относительно кольца наружного. Координатами гиро датчика служат углы $\chi = \angle(\bar{p}, \bar{h})$, $\varphi = \angle(\bar{m}, \bar{h}) = \angle(\bar{l}, \bar{v})$. Угол χ условимся отсчитывать от вектора $\bar{p}$ к вектору $\bar{h}$ по правилу правого винта, угол φ — от $\bar{h}$ к $\bar{m}$ соответственно (рис. 28 б, в). Рассматриваемый гиро датчик сводится к обычной самолетной гировертикали при

$$\bar{n} = \bar{i}, \quad \bar{m} = \bar{j}, \quad \bar{l} = \bar{k} \quad (2.44)$$

и к обычному самолетному курсовому гироскопу при

$$\bar{n} = \bar{j}, \quad \bar{m} = \bar{k}, \quad \bar{l} = \bar{i}. \quad (2.45)$$

Зададим направление вектора $\bar{p}$ оси гироскопа в неподвижном пространстве и расположение трехгранника $A\bar{n}\bar{h}\bar{v}$, связанного с отсчетной системой для угла χ , относительно связанного трехгранника $Nxyz$ с помощью матриц направляющих косинусов:

$$p^* = \|p_1, p_2, p_3\| = (\bar{p}, XYZ); \quad T = \|T_{gh}\| = (\bar{n}\bar{m}\bar{l}, xyz).$$

($g, h = 1, 2, 3$). Матрицы p^* и T могут, вообще говоря, зависеть от времени: матрица $p^*(t)$ характеризует уход гироскопа, матрица $T(t)$ — упругие колебания отсчетной системы $A\bar{n}\bar{m}\bar{l}$ по отношению к связанной системе $Nxyz$, если принять во внимание реальные свойства конструкции. Чтобы вписать эти свойства в принятую структурную схему самолета (§ 1), можно считать, что система $Nxyz$ по-прежнему связана с телом G_C , а система $A\bar{n}\bar{m}\bar{l}$ связана с телом G_1 , способным совершать угловые перемещения относительно тела G_C .

Используя разложение (2.8), напомним матричное уравнение

$$(\bar{p}, XYZ) = (\bar{p}, \overline{nhv}) (\overline{nhv}, \overline{hml}) (\overline{hml}, xyz) (xyz, XYZ). \quad (2.46)$$

По определению углов χ и φ получим, учитывая правила отсчета этих углов (рис. 28, б, в):

$$\begin{aligned} (\bar{p}, \overline{nhv}) &= \|\sin \chi, \cos \chi, 0\| = m_\chi^*, \\ (\overline{nhv}, \overline{hml}) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = M_\varphi. \end{aligned}$$

Последняя матрица в правой части уравнения (2.46):

$$(xyz, XYZ) = L \equiv \|L_{gh}\|$$

определяет угловое положение самолета в пространстве, и она зависит от трех углов Эйлера (§ 7, 8). Таким образом, $p^* = m_\chi^* M_\varphi TL$.

Вводя матрицу-строку $n^* = m_\chi^*(\chi) M_\varphi(\varphi)$,

$$n^* = \|\sin \chi, \cos \chi \cos \varphi, -\cos \chi \sin \varphi\|$$

и квадратную матрицу $N = TL$, перепишем уравнение (2.46) в виде

$$p^* = n^* N.$$

Разрешив это уравнение относительно матрицы n^* , получим

$$n^* = p^* N^{-1}.$$

Поскольку произведение N ортогональных матриц само является ортогональной матрицей, то

$$N^{-1} = N^T \text{ и } n^* = p^* N^T.$$

Вычисляя матричное произведение $p^* N^T$ и приравнявая соответственные элементы в обеих частях последнего матричного равенства, придем к трем скалярным уравнениям относительно трех неизвестных эйлеровых углов в любой из систем (§ 7), входящих в эти уравнения через посредство косинусов L_{gh} :

$$\left. \begin{aligned} p_1 N_{11} + p_2 N_{12} + p_3 N_{13} &= \sin \chi, \\ p_1 N_{21} + p_2 N_{22} + p_3 N_{23} &= \cos \chi \cos \varphi, \\ p_1 N_{31} + p_2 N_{32} + p_3 N_{33} &= -\cos \chi \sin \varphi. \end{aligned} \right\}. \quad (2.47)$$

Однако в силу ортогональности матрицы p^* , выражаемой соотношением $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$, из этих трех уравнений независимы лишь два и система (2.47) трех уравнений по существу является системой двух уравнений относительно трех неизвестных. Это математическое свойство системы (2.47) выражает тот механический факт, что с помощью только одного гиродатчика нельзя полностью определить угловое положение самолета в пространстве. Поэтому установим на самолете второй гиродатчик и, выписав для него одно из соотношений (2.47), получим недостающее независимое уравнение. При этом второй гиродатчик следует установить так, чтобы матрицы p^* и T второго гиродатчика не совпадали с соответствующими матрицами первого.

Обычно один прибор устанавливают как гировертикаль, а второй — как курсовой гироскоп. Условимся обозначать все параметры второго гиродатчика теми же символами, что и соответствующие параметры первого гиродатчика, но со штрихом. Со второго датчика достаточно снять одну координату, удобнее угол φ' , что мы и примем в дальнейшем.

Для получения искоемых соотношений, исключим $\cos \chi$ из двух последних уравнений системы (2.47) путем деления. Соотношение, подобное полученному после исключения $\cos \chi$, напомним и для второго гиродатчика. В итоге получим систему трех независимых конечных трансцендентных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} p_1 N_{11} + p_2 N_{12} + p_3 N_{13} &= \sin \chi, \\ \frac{p_1 N_{31} + p_2 N_{32} + p_3 N_{33}}{p_1 N_{21} + p_2 N_{22} + p_3 N_{23}} &= -\operatorname{tg} \varphi, \\ \frac{p_1' N_{31}' + p_2' N_{32}' + p_3' N_{33}'}{p_1' N_{21}' + p_2' N_{22}' + p_3' N_{23}'} &= -\operatorname{tg} \varphi'. \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

Уравнения (2.48) определяют искомые эйлеровы углы (ψ , ϑ , γ и т. д.) в функции трех независимых координат χ , φ , φ' гиродатчиков с учетом уходов гироскопов, погрешностей в установке гиродатчиков в самолете, смещений нулевых точек съемных устройств и при условиях а, б и в, приведенных в начале этого параграфа. Уравнения (2.48) суть рациональные относительно тригонометрических функций от эйлеровых углов.

Рассмотрим несколько примеров, начав с самых простых.

1) С гировертикали снимаются углы φ и χ ; нужно определить углы тангажа и крена самолета по отношению к неподвижной системе $OXYZ$. В силу равенства (2.44) $T = \mathcal{E}$, тогда $N = L$.

За неподвижную систему $OXYZ$ примем земную, направив ось OY вертикально вверх. Ось гироскопа, по определению гировертикали, также направлена вертикально: $\bar{p} = \bar{Y}^0$, т. е. $p^* = \|0, 1, 0\|$. Из формул (2.48) следует, что

$$L_{12} = \sin \chi; \quad \frac{L_{32}}{L_{22}} = -\operatorname{tg} \varphi.$$

В 1-й системе эйлеровых углов (§ 7)

$$L_{12} = \sin \vartheta, \quad L_{32} = -\sin \gamma \cos \vartheta, \quad L_{22} = \cos \gamma \cos \vartheta.$$

Тогда $\sin \vartheta = \sin \chi, \quad \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \varphi$

и на интервале $(-\pi/2, +\pi/2)$ смена координат гировертикали

$$\vartheta \equiv \chi; \quad \gamma \equiv \varphi.$$

Во 2-й системе косинусы L_{12} , L_{32} и L_{22} зависят от всех трех углов Эйлера Θ , Ψ , Γ и $\sin \chi = \cos \Psi \sin \Theta$,

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\sin \Psi \cos \Gamma \sin \Theta - \sin \Gamma \cos \Theta}{\sin \Psi \sin \Gamma \sin \Theta + \cos \Gamma \cos \Theta}. \quad (2.49)$$

Следовательно, в 1-й системе гировертикаль выдает непосредственно углы тангажа и крена независимо от курсового угла. Во 2-й же системе одной только гировертикали недостаточно для определения углов Θ тангажа и Γ крена, ибо на ее показания влияет значение курсового угла Ψ . Установив еще курсовой гироскоп, будем иметь в соответствии с равенствами (2.45):

$$T' = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.50)$$

Если $\bar{p}' = \bar{X}^0$, то

$$p^{*'} = \|1, 0, 0\|, \quad N'_{31} = L_{11}, \quad N'_{21} = L_{31}$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi' = -\frac{\cos \Psi \cos \Theta}{\sin \Psi \cos \Gamma \cos \Theta + \sin \Gamma \sin \Theta}. \quad (2.51)$$

Если $\bar{p}' = \bar{Z}^0$,

$$\text{то } p^{*'} = \|0, 0, 1\|, \quad N'_{33} = L_{13}, \quad \dot{N}'_{23} = L_{33}$$

и

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \Psi \sec \Gamma. \quad (2.52)$$

Таким образом, во 2-й системе углы Ψ , Θ , Γ определяются только совместно: тремя независимыми уравнениями (2.49) и (2.51), если гироскоп курсового датчика направлен вдоль горизонтальной оси OX и тремя независимыми уравнениями (2.49) и (2.52), если этот гироскоп направлен вдоль горизонтальной оси OZ . Для определения трех углов Θ , Ψ , Γ по координатам гиродатчиков χ , φ , φ' к гиродатчикам необходимо подключить счетно-решающее устройство, преобразующее эти входные данные в искомые углы Θ , Ψ , Γ по формулам (2.49) и (2.51) или (2.49) и (2.52).

2) Самолет летит с креном при нулевом угле тангажа. Оценим влияние крена на показания курсового гироскопа. Матрица T' имеет вид (2.50).

Пусть $\bar{p} = \bar{X}^0$. Тогда, в силу равенства (2.48), $-\operatorname{tg} \varphi' = L_{11}/L_{31}$. В 1-й системе эйлеровых углов, при $\vartheta = 0$

$$\frac{\operatorname{ctg} \psi}{\cos \gamma} = -\operatorname{tg} \varphi', \quad \text{или} \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{\operatorname{ctg} \varphi'}{\cos \gamma}.$$

Такое же соотношение справедливо и во 2-й системе при $\Theta = 0$:

$$\operatorname{tg} \Psi = -\frac{\operatorname{ctg} \varphi'}{\cos \Gamma}.$$

Если еще $\gamma = 0$, то $\psi = \varphi' + \frac{\pi}{2}$; если $\Gamma = 0$, то

$$\Psi = -\varphi'.$$

Пусть $\bar{p} = \bar{Z}^0$. Тогда $-\operatorname{tg} \varphi' = L_{13}/L_{33}$.

В 1-й системе $\operatorname{tg} \psi = -\operatorname{tg} \varphi' \cos \gamma$. Таким же образом во 2-й системе $\operatorname{tg} \Psi = -\operatorname{tg} \varphi' \cos \Gamma$.

Если еще $\gamma = 0$, то $\Psi = -\varphi'$; если $\Gamma = 0$, то

$$\Psi = -\varphi'.$$

3) Ось наружного кольца курсового гироскопа установлена в плоскости Nxy симметрии самолета (§ 1) или в плоскости, ей параллельной, с угловым отклонением ϵ от проектного направления, $\Theta = \angle(\bar{n}, \bar{j})$. Определим

искажение показания курсового угла ψ , обусловленное этим отклонением при произвольном пространственном движении самолета и при $\bar{p}' = \bar{X}^\circ$.

По правилу отсчета угла θ (рис. 28, з),

$$T' = \begin{vmatrix} -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \end{vmatrix}.$$

Последнее из равенств (2.48) примет вид:

$$\operatorname{tg} \varphi' = -\frac{N'_{31}}{N'_{21}}.$$

Далее, $N'_{31} = L_{11} \cos \theta + L_{21} \sin \theta$; $N'_{21} = L_{31}$
и в 1-й системе углов (§ 7)

$$\operatorname{tg} \varphi' = -\frac{\cos \psi \cos \vartheta \cos \theta + (\sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \cos \gamma \sin \vartheta) \sin \theta}{\sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \gamma \sin \vartheta},$$

откуда следует окончательно

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{(\cos \gamma \sin \theta - \sin \gamma \operatorname{tg} \varphi') \sin \vartheta - \cos \vartheta \cos \theta}{\cos \gamma \operatorname{tg} \varphi' + \sin \gamma \sin \theta}.$$

В частности, при полете без крена

$$\operatorname{tg} \psi \Big|_{\gamma=0} = -\cos(\vartheta + \theta) \operatorname{ctg} \varphi'.$$

Это означает, что при полете без крена угол θ отклонения оси наружного карданового кольца курсового датчика вызывает дополнительное искажение показания курсового угла, равносильное искажению от увеличения угла тангажа на этот же угол θ . При $\vartheta = -\theta$, искажение отсутствует и $\psi = \frac{\pi}{2} + \varphi'$.

4) При выполнении программных полетов, например, перечисленных в § 2, часто возникает необходимость осуществления заданного закона изменения абсолютных угловых координат самолета

$$\psi = f_1(t); \quad \vartheta = f_2(t); \quad \gamma = f_3(t). \quad (2.53)$$

Один из способов автоматического осуществления закона (2.53) состоит в перемещении (относительно самолета) нулевых точек съемных устройств гиродатчиков по программе

$$\chi = \chi(t); \quad \varphi = \varphi(t); \quad \varphi' = \varphi'(t), \quad (2.54)$$

отвечающей заданной программе (2.53) вращения самолета в неподвижном пространстве.

Смещение нулевых точек приборов по закону (2.54) равносильно искусственному введению рассогласования в следящую систему — самолет-автопилот (§ 2); последняя стремится уничтожить это рассогласование с помощью соответствующих отклонений органов управления и таким образом осуществляет требуемый разворот самолета в пространстве с точностью до переходного процесса.

Подсчитаем функции (2.54) по заданным функциям (2.53). Задано также угловое расположение гиродатчиков в самолете (матрицы T и T') и направления осей гироскопов в неподвижном пространстве (матрицы p^* и p'^*). Все эти матрицы могут зависеть от времени.

Решение задачи находится сразу с помощью уравнений (2.48), в которых левые части, по условию, известны. При этом, $N_{11} = T_{11}L_{11} + T_{12}L_{21} + T_{13}L_{31}$ и т. д., а косинусы $L_{gh} = L_{gh}(t)$ суть известные функции времени, коль скоро заданы функции (2.53). В частном случае, когда первый датчик сводится к гировертикали, а второй — к курсовому гироскопу и $\bar{p} = \bar{Y}^0$, $\bar{p}' = \bar{Z}^0$, матрица T — единичная ($T = \mathcal{E}$), матрица T' имеет вид (2.50) и

$$\sin \chi = L_{12}(t),$$

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = -\frac{L_{32}(t)}{L_{22}(t)}; \quad \operatorname{tg} \varphi'(t) = -\frac{L_{13}(t)}{L_{33}(t)},$$

где, в силу равенства (2.15)

$$L_{gh}(t) = L_{gh}[f_1(t), f_2(t), f_3(t)].$$

Например,

$$L_{13}(t) = -\sin f_1(t) \cos f_2(t).$$

Подобные же соотношения можно получить и при любом другом направлении вектора $\bar{p}'$.

Глава III

ХАРАКТЕРИСТИКИ САМОЛЕТА КАК ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Настоящая глава посвящена математическому описанию свойств самолета как объекта управления и свойств внешних сил, к нему приложенных. Содержание настоящей главы является в известном смысле подготовительным для следующей главы, в которой будут выведены уравнения динамики самолета.

§ 11. Динамика тела и точки переменного состава

а) *Определение твердого тела переменного состава.* Для количественного описания движения самолета введем понятие тела переменной массы или, точнее, тела переменного состава и, в частности, твердого тела переменного состава. Зададим некоторую замкнутую поверхность (односвязную или многосвязную), которую назовем **к о н т р о л ь н о й**; объем, ограниченный контрольной поверхностью, назовем **к о н т р о л ь н ы м**. Условимся, что контрольная поверхность непременно содержит неизменяемую часть (в частном случае, неизменяемая часть может совпадать со всей поверхностью). Остальная же часть контрольной поверхности может со временем изменять свои очертания, но так, что контрольная поверхность всегда остается замкнутой. Определенная таким образом поверхность может перемещаться в неподвижном пространстве, причем под перемещением контрольной поверхности понимается перемещение ее неизменяемой части.

Рассмотрим совокупность материальных частиц, находившихся в контрольном объеме в некоторый момент времени, принимаемый за начальный.

Пусть эта совокупность непременно содержит твердое тело G_C . Помимо тела G_C , в контрольном объеме могут находиться и другие тела — как твердые, так и не являющиеся твердыми. Последние могут включать газы, жидкости, пластические и упругие твердые тела, а также тела типа G_C^* — первоначально твердые, а затем изменяющие свои очертания (при горении или иных химических процессах). Для нашей задачи важны тела типа G_C^* , масса которых убывает со временем за счет выделения материальных частиц (твердое топливо). Тело типа G_C назовем твердым телом убывающей массы.

Уточним понятие твердого тела убывающей массы. В начальный момент $t = 0$, с которого начинается рассмотрение системы тел, заключенных в контрольном объеме, тело G_C принимается твердым и остается твердым до некоторого момента времени $t_0 \geq 0$ (с точностью до деформаций, влиянием которых на состояние системы мы можем пренебречь, исходя из критериев типа «а» и «б» § 1). В момент времени $t = t_0$ начинается процесс (химический, термический и т. п.), приводящий к излучению материальных частиц из состава тела G_C^* .

Условимся, что это излучение происходит исключительно за счет последовательного отделения частиц, первоначально принадлежавших телу G_C^* с его текущей наружной поверхности: сперва отделяется исходный наружный слой частиц и тогда слой, находившийся непосредственно под ним, становится благодаря этому наружным и в свою очередь отделяется; этот процесс продолжается до исчерпания всех материальных частиц, составлявших на отрезке времени $0 \leq t \leq t_0$ тело G_C . Относительные же перемещения частиц в слоях, относящихся в каждый данный момент процесса к внутренним, не имеют места. Ниже под твердым телом убывающей массы (телом типа G_C^*) будем понимать тело, обладающее только что описанными свойствами.

Примером тела G_C^* может служить шашка твердого топлива, используемая в ракетных двигателях на твердом топливе, а также корпус самолета или ракеты, обгорающий при полете с достаточно большой скоростью в плотных слоях воздуха.

Пусть некоторые из частиц, находившихся в начальный момент в контрольном объеме, с течением времени покидают

этот объем, перемещаясь изнутри во вне через определенные участки контрольной поверхности в результате излучения частиц с контрольной поверхности. Одновременно материальные частицы, первоначально находившиеся вне контрольного объема, могут проникать в него через известные участки контрольной поверхности. При этом процессы поступления наружных частиц в контрольный объем и истечения частиц из этого объема наружу обуславливаются как относительными перемещениями каждой из упомянутых частиц и неизменяемой части контрольной поверхности, так и деформацией ее изменяемой части.

Совокупность материальных частиц, заключенных в контрольном объеме, назовем телом переменного состава по отношению к выбранной контрольной поверхности и выбранному закону деформации ее изменяемой части.

Массу материальных частиц, заключенных в каждый момент времени в контрольном объеме, назовем *м а с с о й* *т е л а* *п е р е м е н н о г о* *с о с т а в а*. В общем случае эта масса меняется со временем в зависимости от изменения количества вещества в контрольном объеме.

Выражения «тело переменного состава» и «тело переменной массы», применяемые по отношению к одной и той же контрольной поверхности, имеют, в общем случае, различный смысл. Тело может сохранять постоянную массу, но не быть телом постоянного состава, ибо возможен такой закон изменения его состава, при котором в течение некоторого промежутка времени мгновенная масса частиц, покидающих контрольный объем, равняется мгновенной массе частиц, поступающих в этот объем извне. Однако при прочих равных условиях движение тела переменного состава и постоянной массы может отличаться от движения тела постоянного состава той же массы.

Ограничимся далее только тем случаем, когда количество вещества в контрольном объеме не возрастает со временем (т. е. убывает или остается постоянным), что соответствует ракетным двигателям на твердом и жидком топливах.

Рассмотрим в этом параграфе определенный частный вид тела переменного состава. Зададим механическую систему G_z , образованную жестким соединением твердого тела G_c и твердого тела G_c^* убывающей массы, что можно символически записать в виде:

$$G_z = G_c + G_c^*.$$

В качестве тела G_c выберем корпус ракеты (самолета), включая твердый полезный груз, жестко соединенный с корпусом, а в качестве тела G_c^* — шашку твердого топлива.

Примем, что соединение корпуса и шашки в совокупность, именуемую далее системой корпус-шашка (системой G_Σ), удовлетворяет двум условиям:

1) до начала горения шашки корпус и шашка жестко скреплены на некоторых участках их наружных поверхностей, не содержащих поверхности горения шашки (наружная поверхность понимается в смысле, указанном в § 1);

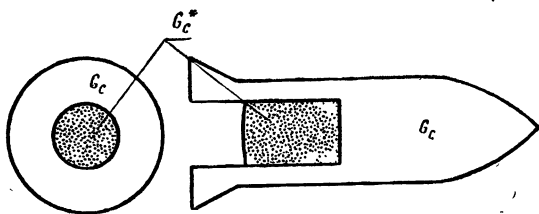


Рис. 29

2) в каждый момент горения шашки не сгоревшая ее часть остается твердым телом, жестко скрепленным с корпусом.

Условие 1 исключает случай расположения шашки во внутренних полостях корпуса ракеты. Условие 2 означает, что исходя из критерия типа «а» или «б» § 1 мы пренебрегаем влиянием на полет ракеты возможных деформаций части шашки, не сгоревшей к каждому данному моменту времени — например, деформаций, вызванных высокой температурой на поверхности горения. Образец системы корпус-шашка изображен на рис. 29.

Назовем текущей поверхностью шашки наружную поверхность ее части, не сгоревшей к каждому данному моменту горения.

Наружной поверхностью системы корпус-шашка (системы G_Σ) назовем поверхность, которая:

— совпадает с наружной поверхностью корпуса ракеты на всей ее части, не соприкасающейся с текущей поверхностью шашки,

—совпадает с текущей поверхностью шашки на всей ее части, не соприкасающейся с наружной поверхностью корпуса,
—содержит линию пересечения наружных поверхностей шашки и корпуса.

Наружную поверхность системы G_2 можно себе представить как поверхность, смачиваемую идеальной жидкостью при погружении в каждый данный момент времени системы G_2 в эту жидкость.

Контрольную поверхность, совпадающую в каждый момент времени с наружной поверхностью системы корпус-шашка, назовем естественной. Очевидно, что естественная контрольная поверхность содержит неизменяемую и изменяемую части.

Наконец, введем определение: *тело переменного состава, представляющее собой систему корпус-шашка, рассматриваемую по отношению к ее естественной контрольной поверхности, называется твердым телом переменного состава.*

Иногда говорят о твердом теле переменной массы, но слова «твердое тело переменного состава» более точно отвечают механическому смыслу введенного понятия и позволяют избежать двусмысленности, отмеченной несколько выше в настоящем пункте.

Поясним положения 1 и 2, введенные выше.

Механическое содержание понятия переменности состава и массы тела заключается в переменности количества вещества в наперед заданном объеме пространства (мы уже подчеркивали это обстоятельство в п. «г» § 3). Сами же материальные частицы тела остаются неизменяемыми — по крайней мере в рамках механического исследования. Поэтому понятие переменности состава и массы имеет смысл только при задании контрольного объема, по отношению к которому оно рассматривается. В зависимости от выбора этого объема, одно и то же количество вещества можно рассматривать как постоянное или переменное: например, пороховой двигатель представляет собой тело переменного состава по отношению к естественной контрольной поверхности. Излучение массы через контрольную поверхность происходит за счет горения пороховой шашки. Если же поместить работающий пороховой двигатель в закрытую камеру и в качестве контрольного объема выбрать объем этой камеры, то в данных условиях двигатель является уже телом постоянной массы — здесь ни одна материальная частица при горении шашки не покидает контрольного объема; следова-

тельно, горение пороха приводит лишь к перераспределению массы в контрольном объеме. Самолет или ракета в полете при работающем двигателе является телом переменного состава по отношению к естественной поверхности. Но этот самолет или ракета является телом постоянного состава, если за контрольный объем выбрать, например, сферу, содержащую всю траекторию полета и настолько большую, что отработанные газы не выйдут за ее поверхность в течение всего времени рассматриваемого движения. Однако такой выбор контрольной поверхности неудобен: внутри столь большой сферы будут находиться и отработанные газы и частицы воздуха (при полете в атмосфере). Тогда пришлось бы рассматривать не просто движение летательного аппарата, а движение всей системы летательный аппарат — отработанные газы — воздух в контрольной сфере, делать предположение о том, что воздух также не выходит за контрольную сферу и т. п. Все это ненужным образом усложняет исследование. Следовательно, метод сведения задачи о движении тела переменного состава к задаче о движении тела постоянного состава путем расширения контрольного объема подчас неудобен. Поэтому контрольный объем целесообразно выбирать возможно более узким (удобнее всего брать естественный объем) и применять соотношения механики тел переменного состава.

б) *Уравнение движения точки переменного состава.* Рассмотрим механическую систему — тело G^* массы m , состоящее из материальных частиц, заключенных, в момент времени t , в контрольном объеме, в качестве которого выбран шар V_d^* достаточно малого постоянного радиуса. По определению (п. «г» § 3), такая механическая система (тело G^*) называется точкой переменного состава (переменной массы). Исследуем движение точки переменного состава по отношению к неподвижной системе отсчета $OXYZ$.

Так как теорема о количестве движения применима к механической системе только постоянного состава, рассмотрим изменение количества движения за элементарный промежуток времени Δt всех материальных частиц, составляющих точку переменного состава в начальный момент t отсчета промежутка Δt .

В момент времени t точка переменного состава обладает абсолютным количеством движения:

$$\bar{Q} = \sum_{G^*} m_i \bar{v}_i(t).$$

Здесь $\bar{v}_i$ — абсолютная скорость частицы M_i , принадлежащей точке G^* , m_i — масса этой частицы.

По истечении элементарного промежутка Δt , та же совокупность материальных частиц (массы m), которая в момент t представляет собой точку переменного состава, будет обладать за счет возможного изменения скоростей $\bar{v}_i$ материальных частиц уже другим количеством движения:

$$\bar{Q}(t + \Delta t) = \sum_{G^*} m_i \bar{v}_i(t + \Delta t).$$

Обозначим через $\bar{F}^*$ среднее значение, за время Δt , главного вектора $\bar{F}$ внешних сил, приложенных к частицам, составлявшим в момент t точку переменного состава. По теореме о количестве движения

$$\bar{Q}(t + \Delta t) - \bar{Q}(t) = \bar{F}^* \Delta t. \quad (3.1)$$

Поскольку нас интересует движение точки переменного состава, т. е. материальных частиц, остающихся со временем в контрольном объеме V_d^* , подсчитаем изменение за то же время Δt количества движения этой точки. Изменение $\Delta \bar{Q}$ количества движения точки переменного состава происходит не только за счет изменения скоростей материальных частиц, ее составляющих, но также за счет убывания массы этой точки (массы вещества в контрольном объеме V_d^*), обусловленного излучением частиц из контрольного объема вовне. Обозначим через ΔG^* совокупность частиц, покинувших контрольный объем V_d^* за время Δt , а через Δm — массу этой совокупности (по физическому смыслу, $\Delta m < m$). Количество движения точки переменного состава изменится за время Δt на величину $\Delta \bar{Q}$:

$$\Delta \bar{Q} = \sum_{G^* - \Delta G^*} m_j \bar{v}_j(t + \Delta t) - \sum_{G^*} m_i \bar{v}_i(t). \quad (3.2)$$

Для подсчета величины $\Delta \bar{Q}$ выразим ее через импульс $\bar{F}^* \Delta t$. Преобразуем левую часть равенства (3.1):

$$\begin{aligned} \bar{Q}(t + \Delta t) - \bar{Q}(t) &= \sum_{G^* - \Delta G^*} m_j \bar{v}_j(t + \Delta t) + \\ &+ \sum_{\Delta G^*} m_j \bar{v}_j(t + \Delta t) - \sum_{G^*} m_i \bar{v}_i(t). \end{aligned}$$

В силу равенств (3.1) и (3.2)

$$\Delta \bar{Q} = \bar{F}^* \Delta t - \sum_{\Delta G^*} m_j \bar{v}_j(t + \Delta t).$$

Сумма в правой части последнего равенства характеризует влияние отделения частиц на движение точки переменного состава. Преобразуем эту сумму, введя абсолютный радиус-вектор $\bar{R}_j(t)$ j -й частицы, отделяющейся в момент t ,

$$\frac{d\bar{R}_j}{dt} = \bar{v}_j(t)$$

и абсолютный радиус-вектор $\bar{R}_U(t)$ центра масс отделяющихся частиц и его абсолютную скорость $\bar{U}(t)$.

Тогда

$$\sum_{\Delta G^*} m_j \bar{v}_j(t + \Delta t) = \sum_{\Delta G^*} m_j \bar{R}'(t + \Delta t).$$

Так как массы m_j частиц постоянны, то

$$\sum_{\Delta G^*} m_j \bar{v}_j(t + \Delta t) = \frac{d}{dt} \sum_{\Delta G^*} m_j \bar{R}_j(t).$$

Обозначим через Δm массу частиц, отделившихся за время Δt :

$$\Delta m = \sum_{\Delta G^*} m_j. \quad (3.3)$$

Тогда

$$\sum_{\Delta G^*} m_j \bar{v}_j(t + \Delta t) = \Delta m \bar{R}'_U(t + \Delta t) = \bar{U}(t + \Delta t) \cdot \Delta m.$$

Возвращаясь к приращению $\Delta \bar{Q}$ количества движения точки переменного состава за время Δt , получим:

$$\Delta \bar{Q} = \bar{F}^* \Delta t - \bar{U}(t + \Delta t) \cdot \Delta m,$$

т. е.

$$\frac{\Delta \bar{Q}}{\Delta t} = \bar{F}^* - \frac{\Delta m}{\Delta t} \bar{U}(t + \Delta t).$$

Величина Δm представляет собой сумму (3.3) постоянных элементарных масс m_j , излученных за время Δt . С изменением времени излучения частиц изменяется и их число, т. е. количество вещества, покидающего контрольный объем. Следовательно, масса Δm является функцией от промежутка времени Δt , на протяжении

которого происходит излучение из контрольного объема. В п. «г» § 3 мы условились, исходя из физического существа явления излучения материальных частиц, заменять дискретное изменение совокупности ΔG^* излучаемых частиц некоторым гладким интерполяционным законом:

$$\Delta m = f(\Delta t).$$

Очевидно, что $f(0) = 0$, так как интенсивность излучения не может быть неограниченно большой. В силу теоремы Лагранжа о конечном приращении функции

$$\Delta m = \Delta t \cdot f'(t + \theta_1 \cdot \Delta t), \quad 0 < \theta_1 < 1, \quad (3.4)$$

где штрих означает дифференцирование функции по независимому переменному, в данном случае по времени t .

С другой стороны, по определению массы Δm ,

$$\Delta m = m(t) - m(t + \Delta t),$$

где $m(t) = \sum_{\sigma_C} m_i$ — исходная масса точки переменной

массы, т. е. масса вещества в контрольном объеме V_d^* в начале промежутка Δt (в момент t); $m(t + \Delta t)$ — масса вещества в этом же контрольном объеме в конце промежутка Δt (в момент $t + \Delta t$). Следовательно,

$$\Delta m = -\Delta t \cdot m'(t + \theta_2 \cdot \Delta t), \quad 0 < \theta_2 < 1. \quad (3.5)$$

Сравнивая правые части выражений (3.4) и (3.5), получим, что

$$f'(t + \theta_1 \cdot \Delta t) = -m'(t + \theta_2 \cdot \Delta t).$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta \bar{Q}}{\Delta t} = \bar{F}^* + m'(t + \theta_2 \cdot \Delta t) \bar{U}(t + \Delta t).$$

Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, обозначая через $\bar{F} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{F}^*$ главный вектор внешних сил, приложенных к частицам в контрольном объеме в момент t , и заменяя обозначение $m'(t)$ производной dm/dt более привычным обозначением $\dot{m}(t)$, напишем уравнение количества движения точки переменного состава:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \bar{F}(t) + \dot{m}(t) \bar{U}(t). \quad (3.6)$$

Абсолютное количество движения точки переменного состава в момент времени t

$$\bar{Q} = m(t) \bar{v}(t),$$

где $\bar{v}$ — абсолютная скорость этой точки, отождествляемая со скоростью ее центра масс (п. «г» § 3). Абсолютная скорость центра отделившейся массы Δm представляет собой геометрическую сумму абсолютной скорости $\bar{v}$ точек переменного состава и относительной скорости $\bar{V}$ центра масс отделившихся частиц:

$$\bar{U} = \bar{v} + \bar{V}.$$

Подставляя эти выражения для $\bar{Q}$ и $\bar{U}$ в уравнение (3.6), получим уравнение движения точки переменного состава:

$$\frac{d}{dt} (m\bar{v}) = \bar{F} + \dot{m} (\bar{v} + \bar{V}),$$

или

$$m(t) \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{P}, \quad (3.7)$$

где $\bar{P} = \dot{m}(t) \bar{V}(t)$ — реактивная сила, обусловленная излучением частиц, происходящим с ненулевой относительной скоростью. В частном случае движения точки постоянного состава $\dot{m} = 0$ и $P = 0$.

§ 12. Система твердых тел переменного состава

а) Структурная схема:

Условимся рассматривать самолет, как систему G твердых тел переменного состава (§ 11), образованную по схеме, изображенной на рис. 4. Конструктивная-схема соединений в системе G приведена на рис. 30. Связи между телами осуществляются с помощью механизмов различного рода — шарниров, в общем случае пространственных, стержневых соединений, винтов и т. п. Тела, вводимые в качестве связей для других тел системы G , сами являются телами типа $G_v^{(\sigma)}$ (§ 1) и принадлежат этой системе.

Каждое тело, составляющее систему G , является, в общем случае, твердым телом переменного состава и поэтому обязательно содержит неизменяемую часть. Неизменяемую часть тела $G_v^{(\sigma)}$ обозначим символом $G_C^{(\sigma)}$. Под

движением тел $G^{(a)}$ условимся понимать движение неизменяемых частей соответствующих тел. В системе G каждое тело $G^{(a)}$ может в общем случае иметь до шести степеней свободы включительно по отношению к соседнему телу.

На способ соединения каждой пары соседних тел системы G наложим определенное ограничение, обусловленное механическим содержанием понятия твердого тела переменного состава: соприкосновение двух последовательных тел происходит только по участкам наружной поверхности, принадлежащим неизменяемым частям наружных поверхностей соответствующих тел (§ 11). Это условие исключает использование топливных шашек в качестве

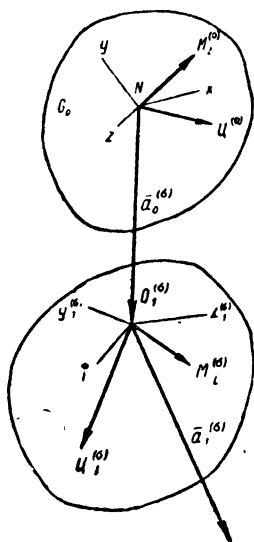
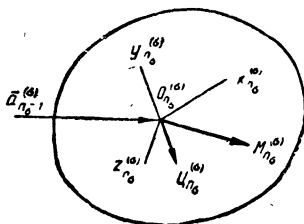


Рис. 30



держателей звеньев конструкции, ибо в противном случае при горении этих шашек система G могла бы распасться.

В летательных аппаратах телами $G^{(a)}$ или $G_C^{(a)}$ могут быть ракетные двигатели, установленные шарнирно (например, в кардановом подвесе), рули, триммеры, закрылки, подвижные крылья и т. д. (§ 3), роторы турбинных и нагнетательных установок, вращающиеся антенны и выдвижные телескопы, инерционные органы управления полетом (§ 3), подвижные части гироскопических датчиков и стабилизаторов, перемещающиеся части различных вспомогательных приводов и устройств, выдвижные шасси, посадочные палубы космических кораблей, способные перемещаться по отношению к их корпусу и т. д.

б) *Параметры системы G*. Примем обозначения, отвечающие обозначениям п. «в» § 9 для системы G твердых тел:

$Nxyz$ — прямоугольная правая система координат, связанная с неизменяемой частью G_C тела G_0 (навигационная система);

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — единичные векторы осей x, y, z этой системы соответственно;

$$e_C^* = \|\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\|;$$

m_0 — масса тела G_0 ,

$$I^{(0)} = \begin{vmatrix} A^{(0)} & -F^{(0)} & -E^{(0)} \\ -F^{(0)} & B^{(0)} & -D^{(0)} \\ -E^{(0)} & -D^{(0)} & C^{(0)} \end{vmatrix} -$$

матрица его моментов инерции относительно связанной системы координат $Nxyz$,

$$A^{(0)} = \sum_{G_0} m_i^{(0)} (y_i^2 + z_i^2), \dots, F^{(0)} = \sum_{G_0} m_i^{(0)} x_i y_i,$$

$m_i^{(0)}$ — масса i -ой материальной частицы $M_i^{(0)}$, принадлежащей в данный момент времени телу G_0 и находящейся в точке с координатами x_i, y_i, z_i в системе $Nxyz$;

$\theta_i^* = \|x_i, y_i, z_i\|$ — матрица координат точки $M_i^{(0)}$;

$c^* = \|c_1, c_2, c_3\|$ — матрица координат центра C масс тела G_0 в системе $Nxyz$;

$v^* = \|v_x, v_y, v_z\|$ — матрица проекций абсолютной скорости v начала N на оси x, y, z ;

$\omega^* = \|p, q, r\|$ — матрица проекций абсолютной угловой скорости неизменяемого тела G_C на эти же оси.

С неизменяемой частью $G_C^{(\sigma)}$ каждого из тел $G_v^{(\sigma)}$ свяжем прямоугольную правую систему координат $O_v^{(\sigma)} x_v^{(\sigma)} y_v^{(\sigma)} z_v^{(\sigma)}$, через $\bar{i}_v^{(\sigma)}, \bar{j}_v^{(\sigma)}, \bar{k}_v^{(\sigma)}$ обозначим единичные векторы осей $x_v^{(\sigma)}, y_v^{(\sigma)}, z_v^{(\sigma)}$ соответственно, $e_v^{*(\sigma)} = \|\bar{i}_v^{(\sigma)}, \bar{j}_v^{(\sigma)}, \bar{k}_v^{(\sigma)}\|$. Введем относительные радиусы-векторы $\bar{a}_{x-1}^{(\sigma)} = \bar{O}_{x-1}^{(\sigma)} O_x^{(\sigma)}$; в каждой σ -ой цепи $x=1, 2, \dots, n_\sigma$, причем под символом $O_0^{(\sigma)}$, отвечающим значению $x=1$, понимается, при любом $\sigma=1, 2, \dots, s$, начало N системы, связанной с телом G_C . Так, вектор $\bar{a}_0^{(\sigma)} = \bar{N}O_1^{(\sigma)}$ является радиусом-вектором начала $O_1^{(\sigma)}$, системы $O_1^{(\sigma)} x_1^{(\sigma)} y_1^{(\sigma)} z_1^{(\sigma)}$, связанной с телом $G_{C1}^{(\sigma)}$, относительно

начала N , связанного с неизменяемой частью G_C тела G_0 , $\bar{a}_1^{(\sigma)} = O_1^{(\sigma)} O_2^{(\sigma)}$, и т. д. Радиусу-вектору $\bar{a}_{x-1}^{(\sigma)}$ отвечает матрица $a_{x-1}^{(\sigma)} = \|d_{x-1}^{(\sigma)}, e_{x-1}^{(\sigma)}, f_{x-1}^{(\sigma)}\|$ проекций этого вектора на оси системы $O_{x-1}^{(\sigma)} x_{x-1}^{(\sigma)} y_{x-1}^{(\sigma)} z_{x-1}^{(\sigma)}$, связанной с телом $G_C^{(\sigma)}(x-1)$. Далее введем следующие обозначения применительно к телу $G_v^{(\sigma)}$: $m_v^{(\sigma)}$ — его масса,

$$I_v^{(\sigma)} = \begin{vmatrix} A_v^{(\sigma)} & -F_v^{(\sigma)} & -E_v^{(\sigma)} \\ -F_v^{(\sigma)} & B_v^{(\sigma)} & -D_v^{(\sigma)} \\ -E_v^{(\sigma)} & -D_v^{(\sigma)} & C_v^{(\sigma)} \end{vmatrix} -$$

матрица его моментов инерции относительно системы координат $O_v^{(\sigma)} x_v^{(\sigma)} y_v^{(\sigma)} z_v^{(\sigma)}$, связанной с неизменяемой частью $G_C^{(\sigma)}$ тела $G_v^{(\sigma)}$,

$$A_v^{(\sigma)} = \sum_{G_v^{(\sigma)}} m_{i_v}^{(\sigma)} [(y_{i_v}^{(\sigma)})^2 + (z_{i_v}^{(\sigma)})^2], \dots,$$

$m_{i_v}^{(\sigma)}$ — масса i -ой материальной частицы $M_{i_v}^{(\sigma)}$, принадлежащей в данный момент времени телу $G_v^{(\sigma)}$ и находящейся в точке $M_{i_v}^{(\sigma)}$ с координатами $x_{i_v}^{(\sigma)}, y_{i_v}^{(\sigma)}, z_{i_v}^{(\sigma)}$ в системе $O_v^{(\sigma)} x_v^{(\sigma)} y_v^{(\sigma)} z_v^{(\sigma)}$,

$\theta_{i_v}^{(\sigma)} = \|x_{i_v}^{(\sigma)}, y_{i_v}^{(\sigma)}, z_{i_v}^{(\sigma)}\|$ — матрица координат точки $M_{i_v}^{(\sigma)}$,

$c_v^{(\sigma)} = \|c_{1_v}^{(\sigma)}, c_{2_v}^{(\sigma)}, c_{3_v}^{(\sigma)}\|$ — матрица координат центра $C_v^{(\sigma)}$

масс тела $G_v^{(\sigma)}$ в той же системе координат $O_v^{(\sigma)} x_v^{(\sigma)} y_v^{(\sigma)} z_v^{(\sigma)}$, $l_{\lambda\mu}^{(\sigma)} = \|l_{gh}^{(\lambda\mu, \sigma)}\|$ ($g, h = 1, 2, 3; \lambda, \mu = 0, 1, 2, \dots, n_\sigma$) — матрица направляющих косинусов $(x_\lambda^{(\sigma)} y_\lambda^{(\sigma)} z_\lambda^{(\sigma)}, x_\mu^{(\sigma)} y_\mu^{(\sigma)} z_\mu^{(\sigma)})$ (см. § 5) между осями координатных трехгранников $x_\lambda^{(\sigma)} y_\lambda^{(\sigma)} z_\lambda^{(\sigma)}$ и $x_\mu^{(\sigma)} y_\mu^{(\sigma)} z_\mu^{(\sigma)}$, связанных с неизменяемыми частями тел $G_\lambda^{(\sigma)}$ и $G_\mu^{(\sigma)}$ соответственно. Как и выше, значениям $\lambda=0$ или $\mu=0$ отвечает при любом $\sigma = 1, 2, \dots, s$ система xyz , связанная с основным телом. Например, $l_{10}^{(\sigma)} = (x_1^{(\sigma)} y_1^{(\sigma)} z_1^{(\sigma)}, xyz)$. Оси координат $O_\lambda^{(\sigma)} x_\lambda^{(\sigma)}, O_\lambda^{(\sigma)} y_\lambda^{(\sigma)}, O_\lambda^{(\sigma)} z_\lambda^{(\sigma)}$, связанные с телами системы G , в общем случае не являются ни центральными, ни главными.

Движение тела $G_v^{(\sigma)}$ по отношению к предшествующему телу $G_{v-1}^{(\sigma)}$ определяется координатами $d_{v-1}^{(\sigma)}, e_{v-1}^{(\sigma)}, f_{v-1}^{(\sigma)}$

начала $O_v^{(\sigma)}$ в системе $O_{v-1}^{(\sigma)} x_{v-1}^{(\sigma)} y_{v-1}^{(\sigma)} z_{v-1}^{(\sigma)}$ и угловыми координатами $\psi_v^{(\sigma)}, \vartheta_v^{(\sigma)}, \gamma_v^{(\sigma)}$ трехгранника $x_v^{(\sigma)} y_v^{(\sigma)} z_v^{(\sigma)}$ относительно трехгранника $x_{v-1}^{(\sigma)} y_{v-1}^{(\sigma)} z_{v-1}^{(\sigma)}$. Координаты $\psi_v^{(\sigma)}, \vartheta_v^{(\sigma)}, \gamma_v^{(\sigma)}$ суть углы Эйлера в 1-й системе углов (§ 7).

Движение тела $G_v^{(\sigma)}$ определено выше, как движение его неизменяемой части — тела $G_{Cv}^{(\sigma)}$. Поэтому скорость относительного углового движения пары твердых тел определяется выражением (2.37). Как и в п. «В» § 9, символом $\omega_{\lambda\mu}^{*(\sigma)}$ будем обозначать матрицу-строку проекций $p_{\lambda\mu}^{(\sigma)}, q_{\lambda\mu}^{(\sigma)}, r_{\lambda\mu}^{(\sigma)}$ мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}_{\lambda\mu}^{(\sigma)}$ тела $G_{C\lambda}^{(\sigma)}$ по отношению к телу $G_{C\mu}^{(\sigma)}$ на оси $x_{\lambda}^{(\sigma)} y_{\lambda}^{(\sigma)} z_{\lambda}^{(\sigma)}$, связанные с телом $G_{C\lambda}^{(\sigma)}$. Значению $\mu = 0$ отвечает матрица $\omega_{\lambda 0}^{*(\sigma)} = \|p_{\lambda 0}^{(\sigma)}, q_{\lambda 0}^{(\sigma)}, r_{\lambda 0}^{(\sigma)}\|$, проекций мгновенной угловой скорости $\bar{\omega}_{\lambda 0}^{(\sigma)}$ тела $G_{C\lambda}^{(\sigma)}$ по отношению к основному телу на оси, связанные с телом $G_{C\lambda}^{(\sigma)}$.

Массы $m_{\lambda}^{(\sigma)}$, моменты инерции $A_{\lambda}^{(\sigma)}, \dots, F_{\lambda}^{(\sigma)}$ и координаты $c_{1\lambda}^{(\sigma)}, c_{2\lambda}^{(\sigma)}, c_{3\lambda}^{(\sigma)}$ тела $G_v^{(\sigma)}$ в общем случае зависят от времени ($\lambda = 0, 1, 2, \dots, n_{\sigma}$).

Система G твердых тел переменного состава рассматривается здесь по отношению к контрольной поверхности, которую в данной задаче выберем следующим образом: контрольная поверхность системы G совпадает, в каждый момент времени, с совокупностью материальных частиц, принадлежащих этой системе и смачиваемых идеальной жидкостью, если мысленно погрузить в эту жидкость всю систему.

Под движением самолета, отождествляемого с системой G , понимается движение основного тела G_0 — неизменяемой части G_C . Поступательным движением самолета называется движение начала N , связанного с телом G_C . Вращательным (угловым) движением самолета называется вращательное движение трехгранника xyz (навигационной системы), связанного с этим же телом G_C .

Каждое твердое тело переменного состава, принадлежащее системе G , будем рассматривать как совокупность точек переменного состава.

Ввиду сложного строения системы G , расчет удобнее вести на основе матричных методов (лекция II).

в) *Некоторые динамические величины.* Пусть G_0 — твердое тело, в общем случае переменного состава, и $Nxyz$ — си-

стема прямоугольных координат, с ним связанная; $x_i y_i z_i$ — координаты i -й материальной точки тела G_0 , m_i — масса этой точки (постоянная или убывающая со временем), $\theta_i^* = \|x_i, y_i, z_i\|$ — матрица координат точки массы m_i . Система $N_{хуз}$ не является обязательно центральной или главной для тела G_0 в точке N .

Рассмотрим матрицу $\sum_{G_0} m_i \tilde{\theta}_i^2$. В силу тождества (2.34),

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{G_0} m_i \tilde{\theta}_i^2 = \\
 & = \left\| \begin{array}{ccc} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{array} \right\| = I - \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

матрица моментов инерции тела G_0 относительно системы осей $N_{хуз}$.

Наряду с осевыми моментами инерции тела G_0 , рассмотрим плоскостные моменты инерции этого тела:

$$i_1 = \sum_{G_0} m_i x_i^2, \quad i_2 = \sum_{G_0} m_i y_i^2, \quad i_3 = \sum_{G_0} m_i z_i^2.$$

Плоскостные моменты связаны с осевыми моментами (по отношению к одной и той же системе координат) известными соотношениями:

$$i_1 = \frac{1}{2} (B + C - A), \quad i_2 = \frac{1}{2} (C + A - B),$$

$$i_3 = \frac{1}{2} (A + B - C).$$

Введем матрицу

$$j = \left\| \begin{array}{ccc} i_1 & F & E \\ F & i_2 & D \\ E & D & i_3 \end{array} \right\|. \quad (3.9)$$

Пусть, как и в § 9, a^* — матрица-строка. В приложениях в качестве a^* используются матрицы проекций угловой скорости и углового ускорения тела G_C .

Составим матрицу-строку в виде матричного произведения

$$a^* (I + j) \tilde{a},$$

где I и j — матрицы (3.8) и (3.9) соответственно. Непосредственным сложением матриц I и j можно убедиться, что

$$I + j = k\mathcal{E}, \quad k = \frac{1}{2}(A + B + C). \quad (3.10)$$

(Здесь, как и в главе II, $\mathcal{E}$ — единичная матрица.)

Таким образом,

$$a^*(I + j)\tilde{a} = ka^*\tilde{a}.$$

Но по свойству матрицы $\tilde{a}$ (п. «б» § 9), $a^*\tilde{a} = 0$ и справедливо матричное тождество

$$a^*(I + j)\tilde{a} = 0.$$

Отсюда следует, что матрицы — произведения $a^*\tilde{I}\tilde{a}$ и $-a^*j\tilde{a}$ равны:

$$a^*j\tilde{a} = -a^*\tilde{I}\tilde{a} = P^*, \quad (3.11)$$

где через P^* обозначено общее значение этих матриц.

[Было бы грубейшей ошибкой заключить из тождества (3.11), что матрицы j и $-I$ должны быть равны: матрица $\tilde{a}$ — особая и поэтому она не имеет обратной. В области скаляров этой ошибке соответствует нелепый вывод, например, $2=5$ из справедливого равенства $0 \times 2 = 0 \times 5 = 0$].

Вычисляя матрицу $P^* = \|P_1, P_2, P_3\|$, найдем:

$$P_1 = (B - C)a_3a_2 + D(a_2^2 - a_3^2) + \\ + (Ea_2 - Fa_3)a_1 \text{ и т. д.}$$

Пусть l — ортогональная матрица направляющих косинусов. Подсчитаем несколько важных матричных величин, связанных с моментами инерции тела G_0 и содержащих в качестве сомножителей матрицы-строки a^* и b^* , матрицы $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ и $\tilde{l}$:

$$1) \sum_i^* = \sum_{G_0} m_i \theta_i^* \tilde{a} \tilde{\theta}_i.$$

В силу тождества (2.31)

$$\sum_i^* = \sum_{G_0} m_i (-a^*) \tilde{\theta}_i^2 = -a^* \sum_{G_0} m_i \tilde{\theta}_i^2$$

и на основании соотношения (3.8)

$$\sum_i^* = a^* I, \quad (3.12)$$

$$2) \Sigma_2^* = \sum_{G_0} m_i \theta_i^* \tilde{a}^2 \tilde{\theta}_i.$$

В силу тождества (2.31)

$$\Sigma_2^* = - \sum_{G_0} m_i a^* \tilde{\theta}_i \tilde{a} \tilde{\theta}_i = - a^* \sum_{G_0} m_i \tilde{\theta}_i \tilde{a} \tilde{\theta}_i.$$

Последовательно перемножая матрицы $\tilde{\theta}_i$, $\tilde{a}$, $\tilde{\theta}_i$, под- считаем тройное матричное произведение

$$\begin{aligned} & \tilde{\theta}_i \tilde{a} \tilde{\theta}_i = \\ = & \left\| \begin{array}{cc} 0 & z_i^2 a_3 + z_i y_i a_2 + z_i x_i a_1, \\ -(z_i^2 a_3 + z_i y_i a_2 + z_i x_i a_1), & 0 \\ y_i^2 a_2 + y_i z_i a_3 + y_i x_i a_1, & -(x_i^2 a_1 + x_i y_i a_2 + x_i z_i a_3) \\ -(y_i^2 a_2 + y_i z_i a_3 + y_i x_i a_1) & \\ x_i^2 a_1 + x_i y_i a_2 + x_i z_i a_3 & \\ 0 & \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Умножая последнюю матрицу на массу m_i и производя суммирование по всем частицам тела G_0 , найдем, что

$$\begin{aligned} & - \sum_{G_0} m_i \tilde{\theta}_i \tilde{a} \tilde{\theta}_i = \\ = & \left\| \begin{array}{cc} 0 & -(i_3 a_3 + D a_2 + E a_1) \\ i_3 a_3 + D a_2 + E a_1, & 0 \\ -(i_2 a_2 + F a_1 + D a_3) & i_1 a_1 + E a_3 + F a_2 \\ i_2 a_2 + F a_1 + D a_3 & \\ -(i_1 a_1 + E a_3 + F a_2) & \\ 0 & \end{array} \right\|. \quad (3.13) \end{aligned}$$

Рассматривая матрицу в правой части равенства (2.13), легко обнаружить, что она представляет собой результат применения оператора « $\sim$ » к матрице-строке $a^* j$ произведения матрицы a^* на матрицу j (3.9):

$$a^* j = \| i_1 a_1 + F a_2 + E a_3, \quad F a_1 + i_2 a_2 + D a_3, \\ E a_1 + D a_2 + i_3 a_3 \|.$$

Поэтому из равенства (2.13) вытекает соотношение

$$\sum_{G_0} m_i \tilde{\theta}_i \tilde{a} \tilde{\theta}_i = - \overline{a^* j} \quad (3.14)$$

и

$$\Sigma_2^* = a^* (\overline{a^* j}).$$

В силу тождества (2.31)

$$\Sigma_2^* = -a^* j \tilde{a}.$$

Используя соотношение (3.11), получим окончательно

$$\Sigma_2^* = a^* I \tilde{a}. \quad (3.15)$$

$$3) \Sigma_3^* = \sum_{G_0} m_i \theta_i^* \tilde{b} l \tilde{a} l^T \tilde{\theta}_i.$$

На основании тождеств (2.33) и (2.31)

$$\Sigma_3^* = -b^* \sum_{G_0} m_i \tilde{\theta}_i \overline{a^* l^T \tilde{\theta}_i}.$$

Вводя матрицу

$$h^* = a^* l^T, \quad (3.16)$$

перепишем последнее равенство в виде

$$\Sigma_3^* = -b^* \sum_{G_0} \tilde{m}_i \tilde{\theta}_i \tilde{h} \tilde{\theta}_i.$$

В силу равенства (3.14)

$$\Sigma_3^* = b^* \overline{h^* j}.$$

Используем вновь тождество (2.31):

$$\Sigma_3^* = -h^* j \tilde{b}.$$

Исключая матрицу j с помощью равенства (3.10) и заменяя матрицу h^* ее выражением (3.16), получим

$$\Sigma_3^* = -a^* l^T (k \mathcal{E} - I) \tilde{b}. \quad (3.17)$$

$$4) \Sigma_4^* = \sum_{G_0} m_i \theta_i^* l \tilde{a}^2 l^T \tilde{\theta}_i.$$

Воспользуемся тождеством (2.31), тогда:

$$\Sigma_4^* = -a^* \sum_{G_0} m_i \theta_i^* \overline{l \tilde{a} l^T \tilde{\theta}_i}.$$

Учитывая тождество (2.33), преобразуем последнее равенство к виду

$$\Sigma_4^* = -a^* \sum_{G_0} m_i l^T \tilde{\theta}_i \tilde{a} l^T \tilde{\theta}_i.$$

Вновь используя это тождество, напомним, что

$$\Sigma_4^* = -h^* \sum_{G_0} \tilde{\theta}_i \tilde{h} \tilde{\theta}_i,$$

где матрица h^* определена равенством (3.16).

В силу равенства (3.14)

$$\Sigma_4^* = h^* \overline{h^* j}$$

и на основании тождества (2.31) получаем

$$\Sigma_4^* = h^* j \tilde{h}.$$

С помощью тождества (3.11) придем к окончательному выражению:

$$\Sigma_4^* = -h^* I \tilde{h} = -a^* l^T I l \tilde{a} l^T. \quad (3.18)$$

$$5) \Sigma_5^* = \sum_{G_0} m_i \theta_i^* l \tilde{a} l^T \tilde{\theta}_i.$$

Применим тождество (2.33) и введем матрицу h^* (3.16), тогда

$$\Sigma_5^* = \sum_{G_0} m_i \theta_i^* \tilde{h} \tilde{\theta}_i.$$

Сравнивая последнее равенство с равенством (3.12), найдем, что

$$\Sigma_5^* = h^* I = a^* l^T I. \quad (3.19)$$

§ 13. Внешние силы, действующие на самолет

Настоящий раздел посвящен математическому описанию внешних сил, приложенных к самолету. Вначале дается строгое описание этих сил, а далее приводятся различные упрощенные выражения внешних сил с указанием пределов их применимости. Выражения внешних сил и их моментов представлены в виде, пригодном для ввода их в правые части уравнений динамики полета самолета, которые будут получены в главе IV.

а) *Сила тяжести*. Рассмотрим две произвольных совокупности (системы) материальных частиц, не содержащие общих частиц и достаточно удаленные от всех других масс. Каждая из частиц любой из совокупностей испытывает притяжение как со стороны остальных частиц этой же совокупности, так и со стороны всех частиц другой совокупности. Силы взаимодействия частиц какой-либо совокупности

являются внутренними по отношению к данной совокупности, а силы, приложенные к этим же частицам со стороны частиц другой системы — внешними по отношению к данной совокупности. В механике принимают, что взаимодействие между каждой парой материальных частиц механической системы происходит строго по закону всемирного тяготения, как если бы эти две частицы были уединены от всех остальных.

Силой тяжести материальной частицы по отношению к определенной механической системе называется главный вектор сил притяжения, приложенных к этой частице со стороны всех частиц системы. Силой тяжести данной механической системы по отношению к другой механической системе называется главный вектор сил тяжести частиц данной системы по отношению к упомянутой другой системе.

Что касается главного вектора сил взаимного притяжения частиц внутри механической системы, то по третьему закону механики этот вектор равен нулю. Отметим попутно, что разделение сил на внутренние и внешние является условным и зависит от способа разбиения исходного запаса материальных частиц на совокупности. Эта свобода разбиения была использована в § 11 для установления понятия тела переменного состава и, в частности, твердого тела переменного состава. Здесь же эта свобода разбиения исходного запаса материальных частиц на совокупности используется для определения и подсчета веса твердого тела переменного состава по отношению к Земле.

Оставляя строгий подсчет силы тяжести и координат точки ее приложения до § 17, получим более простую рабочую оценку веса самолета, пригодную для исследования полета, в котором главный вектор всех негравитационных сил, приложенных к самолету (реактивной тяги, аэродинамической силы и т. д.), не является пренебрежимо малым по сравнению с его весом, в смысле критерия «а» § 1. Эта оценка основана на допущении, что поле тяготения однородно в габаритном объеме летательного аппарата.

По условию, в настоящей главе рассматривается силовое взаимодействие только двух тел — самолета и Земли. Поэтому к первой совокупности отнесем материальные частицы, составляющие в каждый момент времени самолет, как твердое тело переменного состава. Ко второй совокупности отнесем Землю (включая воздух), а также продукты

горения, ранее составлявшие топливные шашки и покинувшие к каждому данному моменту времени контрольный объем самолета.

Следовательно, весом самолета в некоторый момент времени называется вес всех материальных частиц, составляющих в данный момент времени систему твердых тел переменной массы, отождествляемую с самолетом. Вес самолета рассматривается по отношению к механической системе, образующей в тот же момент времени Землю.

Для упрощения преобразований, связанных с исследованием оговоренных выше видов полета, используем критерий типа «а» § 1 и введем следующее допущение: в габаритном объеме самолета поле тяготения Земли принимается однородным. Тем самым при определении веса самолета не учитывается возможное различие в расстояниях некоторых пар частиц самолета до центра масс Земли, а векторы сил тяжести всех частиц самолета считаются параллельными. Такое допущение оправдывается тем, что наибольшее различие в расстояниях пар частиц самолета до центра Земли не превышает наибольшего габаритного размера самолета, практически малого по сравнению с радиусом Земли. Соответственно вес самолета определяется, как вес условной материальной точки, имеющей массу, равную в каждый момент времени массе системы твердых тел переменного состава, отождествляемой с самолетом и совпадающей с его центром массы. По второму закону механики, вес материальной точки равен произведению ее массы на ускорение силы тяжести в точке пространства, в которой в данный момент времени находится центр массы самолета. Ускорение силы тяжести определяется распределением земных масс внутри Земли. Поэтому вес самолета определяется в каждый момент времени массой самолета (т. е. количеством вещества, находящимся в данный момент времени в контрольном объеме, отвечающем этому же моменту времени) и расположением центра массы самолета по отношению к центральной земной системе координат.

Поле тяготения Земли несколько отличается от центрального. Отклонение этого поля от центрального обуславливается, главным образом, наличием экваториального выступа Земли и некоторым избытком масс в южном полушарии по сравнению с северным. Из-за непрерывного перераспределения земных масс, вызываемого движением воздуха, вод и почв, а также из-за притока космической пыли, поле

тяготения Земли меняется во времени. Этим изменением будем пренебрегать.

Найдем выражение ускорения силы тяжести, обусловленного земным притяжением.

Обозначим через $\bar{R}$ радиус-вектор точки K пространства, имеющей координаты ξ, η, ζ в центральной земной системе отсчета, относительно геометрического центра O Земли — начала этой системы. Как и в п. 3 § 10, величины X, Y, Z означают координаты этой же точки в основной системе отсчета $OXYZ$ (§ 1):

$$\overrightarrow{OK} = \bar{R} = X\bar{X}^\circ + Y\bar{Y}^\circ + Z\bar{Z}^\circ = \xi\bar{\xi}^\circ + \eta\bar{\eta}^\circ + \zeta\bar{\zeta}^\circ,$$

где $\bar{X}^\circ, \bar{Y}^\circ, \bar{Z}^\circ, \bar{\xi}^\circ, \bar{\eta}^\circ, \bar{\zeta}^\circ$ — единичные векторы соответствующих осей.

Введем вектор $\bar{g} \equiv \bar{g}(\bar{R})$ ускорения силы тяжести, создаваемого полем земного тяготения в точке пространства, определяемой радиусом-вектором $\bar{R}$. Обозначим через g_X, g_Y, g_Z — проекции ускорения $\bar{g}$ на соответственные оси X, Y, Z основной системы, через g_ξ, g_η, g_ζ — его же проекции на соответственные оси ξ, η, ζ центральной земной системы. По определению

$$\bar{g} = g_X\bar{X}^\circ + g_Y\bar{Y}^\circ + g_Z\bar{Z}^\circ = g_\xi\bar{\xi}^\circ + g_\eta\bar{\eta}^\circ + g_\zeta\bar{\zeta}^\circ.$$

Иначе, $\bar{g} = g\bar{g}^\circ$, где $\bar{g}^\circ$ — единичный вектор ускорения силы тяжести,

$$g = |\bar{g}| = \sqrt{g_X^2 + g_Y^2 + g_Z^2} = \sqrt{g_\xi^2 + g_\eta^2 + g_\zeta^2}.$$

Поле тяготения Земли связано с центральной земной системой координат и участвует в собственном вращении Земли; поле описывается с помощью конечных соотношений:

$$g_\xi = g_1(\xi, \eta, \zeta), \quad g_\eta = g_2(\xi, \eta, \zeta), \quad g_\zeta = g_3(\xi, \eta, \zeta).$$

Функции g_1, g_2, g_3 определяются в теории земного тяготения на основании изучения распределения земных масс. В динамике полета эти функции считаются известными с той или иной степенью точности.

Проекции g_ξ, g_η, g_ζ удобно выразить через сферические координаты R, ν, λ точки пространства, определяемой радиусом-вектором $\bar{R}$. Вводя угловые сферические координаты ν (земная долгота) и λ (земная широта в первой

системе углов Эйлера, п. «г» § 10), выпишем геометрические соотношения (рис. 26), выражающие центральные земные координаты этой точки через ее сферические координаты:

$$\xi = R \cos \lambda \cos \nu, \quad \eta = R \sin \lambda, \quad \zeta = -R \cos \lambda \sin \nu. \quad (3.20)$$

Тогда

$$\bar{g} \equiv \bar{g}(R, \lambda, \nu);$$

$$g_{\xi} = g_{1S}(R, \lambda, \nu), \quad g_{\eta} = g_{2S}(R, \lambda, \nu), \quad g_{\zeta} = g_{3S}(R, \lambda, \nu),$$

где

$$g_{kS}(R, \lambda, \nu) = g_k(R \cos \lambda \sin \nu, R \sin \lambda, -R \cos \lambda \sin \nu),$$

$$k = 1, 2, 3.$$

Если поле тяготения Земли приближенно принять за центральное с началом в геометрическом центре O Земли, то величина g_C ускорения силы тяжести $\bar{g} \equiv \bar{g}_C$ зависит только от расстояния R данной точки пространства от этого центра:

$$\bar{g}_C(R, \lambda, \nu) = -\bar{g}(R) \bar{R}^{\circ},$$

$$\bar{g}^{\circ} = \bar{g}_C^{\circ} = -\bar{R}^{\circ},$$

где $\bar{R}^{\circ}$ — единичный вектор направления радиуса-вектора $\bar{R}$,

$$g_C = |\bar{g}_C| \equiv g_C(R) = \frac{m_e}{R^2}, \quad (3.21)$$

m_e — произведение массы Земли на постоянную тяготения, $m_e = \text{const.}$

Истинное ускорение $\bar{g}$ силы тяжести удобно представить в виде суммы основной составляющей — ускорения $\bar{g}_C$, отвечающего предположению о поле Земли, как о центральном и поправки — ускорения $\bar{e}_g$, определяющего отклонение поля Земли от центрального

$$\bar{g} = \bar{g}_C + \bar{e}_g. \quad (3.22)$$

В силу равенства (3.21)

$$\bar{g}_C = -\frac{m_e}{R^2} \bar{R}^{\circ} = \frac{m_e}{R^2} \bar{g}_C^{\circ}, \quad (3.23)$$

$\bar{g}_C^{\circ}$ — единичный вектор ускорения $\bar{g}_C = g_C \bar{g}_C^{\circ}$, направлен-

ный вдоль радиуса-вектора $\bar{R}$ к центру 0, т. е. $\bar{g}_C^\circ = -\bar{R}^\circ$. По определению поправочного ускорения $\bar{\varepsilon}_g$,

$$\bar{\varepsilon}_g \equiv \bar{\varepsilon}_g(R, \lambda, \nu).$$

Количественно ускорение $|\bar{\varepsilon}_g| = \varepsilon_g$ мало по сравнению с ускорением $g_C = m_e/R^2$. Однако в полете, в котором величина главного вектора негравитационных сил, приложенных к самолету, мала по сравнению с поправочным весом $m\varepsilon_g$, поправка $\bar{\varepsilon}_g$ оказывает заметное влияние на движение. Так, при обращении спутника Земли по орбите, именно составляющая $\bar{\varepsilon}_g$ изменяет наклон его орбиты к плоскости экватора.

Рассмотрим географическую систему координат $x\eta\zeta$ (п. «д» § 10) с началом в точке K . Единичные векторы осей x, η, ζ этой системы обозначим через $\bar{x}^\circ, \bar{\eta}^\circ, \bar{\zeta}^\circ$ соответственно. Очевидно, что $\bar{\eta}^\circ = \bar{R}^\circ$. Тогда

$$\bar{g}_C \bar{x}^\circ = \bar{g}_C \bar{\zeta}^\circ = 0; \quad \bar{g}_C \bar{\eta}^\circ = -\bar{g}_C \bar{R}^\circ = -g_C.$$

В силу выражения (3.22)

$$\bar{g}_C \bar{\eta}^\circ = -\frac{m_e}{R^2}.$$

Проектируя обе части векторного равенства (3.23) на оси географической системы $Kx\eta\zeta$, найдем проекции g_x, g_η, g_ζ ускорения силы тяжести в точке K на оси x, η, ζ соответственно:

$$g_a = \varepsilon_{ga}, \quad g_b = -g_C + \varepsilon_{gb}, \quad g_c = \varepsilon_{gc}. \quad (3.24)$$

Здесь $\varepsilon_{ga}, \varepsilon_{gb}, \varepsilon_{gc}$ — проекции поправочного ускорения на оси географической системы:

$$\varepsilon_{ga} \equiv \varepsilon_{ga}(R, \lambda, \nu), \quad \varepsilon_{gb} \equiv \varepsilon_{gb}(R, \lambda, \nu), \quad \varepsilon_{gc} \equiv \varepsilon_{gc}(R, \lambda, \nu).$$

Поправочные величины, определяющие отклонение поля тяготения Земли от центрального, считаются известными и в динамике полета служат входными величинами.

Рассмотрим теперь различные приближенные выражения для ускорения силы тяжести (3.23). Отметим прежде всего приближение, основанное на отождествлении поля земного тяготения с центральным полем:

$$g_a = g_c = 0, \quad g_b = g_C, \quad (3.25)$$

или, в проекциях на оси центральной земной системы,

$$g_{\xi} = -g_c \frac{\xi}{R} = -g_c \cos \lambda \cos \nu, \quad g_{\eta} = -g_c \frac{\eta}{R} = -g_c \sin \lambda,$$

$$g_{\zeta} = -g_c \frac{\zeta}{R} = g_c \cos \lambda \sin \nu,$$

причем, в силу соотношений (3.20), будет

$$\lambda = \arcsin \frac{\eta}{R}, \quad \nu = -\arcsin \frac{\zeta}{R}, \quad R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Постоянную m_e в соответствии (3.23) удобно выражать через величину g_{co} ускорения g_c , соответствующую некоторому определенному значению расстояния R . В качестве этого значения выберем радиус b_e Земли: $g_{co} = m_e / b_e^2$. Следовательно,

$$g_c(R) = g_{co} \left(\frac{b_e}{R} \right)^2.$$

Приближение (3.25) можно применять при исследовании полета, в котором величина главного вектора негравитационных сил, приложенных к самолету, существенно превышает величину ε_g второго слагаемого в первой части равенства (3.22) в смысле критерия типа «а» § 1.

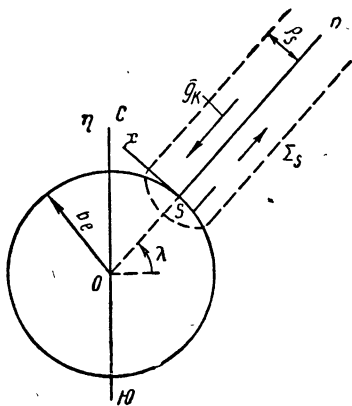


Рис. 31

Еще более грубое приближение ускорения силы тяжести получается путем представления земного тяготения полем параллельным: $\bar{g}^o = \text{const}$. Это приближение отвечает рассмотрению земной поверхности, как плоскости, проведенной через некоторую выбранную точку S земной поверхности перпендикулярно радиусу Земли OS . С упо-

мянутой плоскостью—горизонтом в точке S —свяжем географическую систему координат $S\xi\eta\zeta$ с началом в точке S (рис. 31). Около оси η построим прямую круговую цилиндрическую поверхность Σ_S некоторого радиуса ϱ_S , неподвижную относительно Земли. Тогда во всех точках

пространства, ограниченного данной цилиндрической поверхностью, направление ускорения силы тяжести принимается одинаковым и параллельным оси поверхности, т. е. радиусу Земли, проходящему через выбранную точку $S(\bar{g}^0 = -\bar{g}^0)$. Обозначим через H высоту рассматриваемой точки K пространства внутри поверхности Σ_S над плоскостью $S\bar{x}\bar{z}$. Величина g_K ускорения силы тяжести в точке K зависит от высоты H . На основании соотношения (3.23)

$$g_K \equiv g_K(H) = g_{CO} \left(\frac{b_e}{b_e + H} \right)^2, \quad g_{CO} = g_K(0). \quad (3.26)$$

Проекции g_a, g_b, g_c ускорения $\bar{g} = \bar{g}_K$ в точке K на оси географической системы имеют вид

$$g_a = 0, \quad g_b = -g_K(H), \quad g_c = 0. \quad (3.27)$$

Приближение (3.27) можно применять при исследовании полета, происходящего внутри цилиндрической поверхности Σ_S , радиус ϱ_S которой выбирается настолько малым, чтобы соблюсти критерий типа «а» § 1. Приближение (3.27) целесообразно выбирать при исследовании динамики вертикального взлета.

Дальнейшее огрубление выражения (3.24) приводит к приближенному представлению поля земного тяготения полем однородным $\bar{g} = \bar{g}_0 = \text{const}$:

$$g_a = 0, \quad g_b = -g_0 = \text{const}, \quad g_c = 0. \quad (3.28)$$

Пространство, в котором допустимо приближение (3.28), ограничено не только в плоскости местного горизонта, но также и по высоте, и представляет собой цилиндрический объем $\bar{x}^2 + \bar{z}^2 \leq \varrho_S^2$, $0 \leq H \leq H_S$. Радиус ϱ_S и высота H_S цилиндра выбираются настолько малыми, чтобы удовлетворить критерию типа «а» § 1. Приближение (3.28) полезно при исследовании динамики полета, ограниченного указанным цилиндрическим объемом, связанным с Землей.

Пусть поле земного тяготения определено с той или иной степенью приближения, тогда вес самолета в каждый момент времени равен произведению $m(t)\bar{g}$, где ускорение $\bar{g}$ относится к точке пространства, в которой находится центр массы самолета. Из изложения следует, что символом $\bar{g}$ здесь обозначено ускорение чисто гравитационной при-

роды; последнее не совпадает в общем случае с ускорением материальной точки, неподвижной по отношению к Земле и равной геометрической сумме гравитационного ускорения и ускорения от переносного движения Земли.

Условимся понимать под радиусом-вектором $\bar{R}$ радиус-вектор $\overline{ON}$ подвижного начала N , связанного с самолетом, т. е. с его неизменяемой частью. Таким образом, положение начала N навигационной системы координат (§ 1) определяется прямоугольными координатами: X, Y, Z в основной системе, ξ, η, ζ — в центральной земной, x, y, z — в географической. В центральной земной системе положение подвижного начала N определяется также сферическими координатами R, λ, ν , связанными с его прямоугольными координатами соотношениями (3.20). Траекторией самолета называется траектория его начала N .

Положение начала S географической системы в центральной земной системе задается сферическими координатами b_e, λ_0, ν_0 , где b_e — радиус Земли в начале S , а λ_0 и ν_0 , как и в п. «г» § 10, — земные долгота и широта начала S соответственно.

Положение центра масс C самолета по отношению к основной и центральной земной системам отсчета определяется радиусом-вектором $\bar{R}_C = \overline{OC} = \bar{R} + \bar{c}$ (где $\bar{c} = \overline{NC}$). Различие между значениями ускорения $\bar{g}$ силы тяжести в точках N и C имеет порядок, не превышающий порядка отношения наибольшего габаритного размера самолета к радиусу Земли. Поэтому при подсчете проекций веса самолета при исследовании динамики поступательного движения условимся считать его вес приложенным не к центру C масс самолета, а к подвижному началу N . Это допущение равносильно пренебрежению различием между значениями ускорения $\bar{g}$ в точках N и C . Оно отвечает смыслу предположений, на основании которых получены приближенные выражения (3.25), (3.27) и (3.28) ускорения $\bar{g}$.

Что касается влияния проекций момента силы тяжести на вращательное движение самолета, то им пренебрегать недопустимо, даже в рамках наиболее грубого приближения (3.28). Однако при подсчете проекций этого момента также допустимо заменить значение ускорения $\bar{g}$ в центре C его значением в точке N .

Для нахождения проекций ускорения g на оси системы x_{yz} , связанные с самолетом (§ 12), требуется произвести геометрический пересчет, который удобнее выполнить в матричном виде, с помощью соотношений, изложенных в главе II. Для этого введем матрицы-строки

$$g_S^* = \| \varepsilon_{ga}, \varepsilon_{gb} - g_C, \varepsilon_{gc} \|, \\ g_e^* = \| g_{\xi}, g_{\eta}, g_{\zeta} \|, \quad g^* = \| g_x, g_y, g_z \|$$

проекций ускорения $\bar{g}$ на оси систем географической, центральной земной и основной соответственно, а также матрицу

$$g_N^* = \| g_x, g_y, g_z \|$$

искомых проекций этого ускорения на оси самолетной системы x_{yz} . Выпишем также матрицы направляющих косинусов:

$$L_a = (xyz, XYZ) = \| L_{gh}^{(a)} \|, \\ l_e = (xyz, \xi\eta\zeta) = \| l_{gh}^{(e)} \|, \\ L_S = (\varkappa\upsilon\vartheta, \xi\eta\zeta) = \| L_{gh}^{(S)} \|, \\ l_S = (xyz, \varkappa\upsilon\vartheta) = \| l_{gh}^{(S)} \| \quad (g, h = 1, 2, 3).$$

Матрица L_S определена в п. «г» § 10. Косинусы $L_{gh}^{(S)}$ являются постоянными, так как обе системы осей — географическая $S\varkappa\upsilon\vartheta$ и центральная земная $O\xi\eta\zeta$ — по определению жестко связаны с Землей. Матрицы l_e , l_S и L_a выражаются через углы Эйлера, определяющие относительное угловое положение соответствующих координатных трехгранников.

С помощью матричного соотношения (2.6) выразим искомую матрицу g_N^* через каждую из известных матриц g^* , g_e^* , g_S^* :

$$g_N^* = g^* L_a^T = g_e^* l_e^T = g_S^* l_S^T. \quad (3.29)$$

Введем углы Эйлера, от которых зависят косинусы, служащие элементами матриц L_a , l_e , l_S , приняв для определенности первую систему этих углов (§ 7).

Пусть ψ_a , ϑ_a , γ_a — углы ψ , ϑ , γ (§ 7) координатного трехгранника x_{yz} , связанного с самолетом, по отношению к координатному трехграннику основной системы XYZ .

Этим углам отвечает схема на рис. 22, где под координатами ψ, ϑ, γ следует подразумевать координаты $\psi_a, \vartheta_a, \gamma_a$ соответственно. Следовательно, выражение матрицы L_a через углы $\psi_a, \vartheta_a, \gamma_a$ совпадает с выражением (2.15) матрицы $L \equiv L(\psi, \vartheta, \gamma)$ через углы ψ, ϑ, γ , т. е.

$$L_a = L(\psi, \vartheta, \gamma).$$

Например,

$$L_{11}^{(a)} = \cos \psi_a \cos \vartheta_a,$$

$$L_{21}^{(a)} = \sin \psi_a \sin \gamma_a - \cos \psi_a \cos \gamma_a \sin \vartheta_a$$

и т. д.

Пусть $\psi_e, \vartheta_e, \gamma_e$ — углы ψ, ϑ, γ координатного трехгранника xyz по отношению к координатному трехграннику $\xi\eta\zeta$ центральной земной системы. Тогда

$$l_e = L(\psi_e, \vartheta_e, \gamma_e).$$

Пусть $\psi_s, \vartheta_s, \gamma_s$ — углы ψ, ϑ, γ координатного трехгранника xyz по отношению к координатному трехграннику географической системы. Тогда

$$l_s = L(\psi_s, \vartheta_s, \gamma_s).$$

Все матрицы направляющих косинусов $L_a, \dots, l_s$ можно выражать через углы Эйлера, взятые и в других системах, описанных в § 7. Итак, соотношения (3.29) выражают проекции ускорения силы тяжести на оси x, y, z через соответствующие углы Эйлера, являющиеся зависимыми переменными в уравнениях полета.

Подсчитаем проекции момента $\overline{M}_g$ силы тяжести $m\overline{g}$ самолета относительно начала N навигационной системы $Nxyz$ на оси x, y, z . По определению момента

$$\overline{M}_g = \overline{c} \times m\overline{g}, \quad (3.30)$$

где

$$\overline{c} = \overline{N\Pi} = c_1 \overline{i} + c_2 \overline{j} + c_3 \overline{k},$$

Π — центр масс самолета.

Зададим матрицу — строку c^* координат c_1, c_2, c_3 центра Π масс в системе координат $Nxyz$, связанной с самолетом

$$c^* = \|c_1, c_2, c_3\|.$$

По формуле (2.32), матрица

$$M_g^* = \|M_{gx}, M_{gy}, M_{gz}\|$$

проекций момента M_g на оси системы xuz выражается соотношением

$$M_g^* = -mg_N^* \tilde{c}.$$

Последовательно заменяя матрицу g_N^* каждым из ее выражений (3.29), получим соотношения, определяющие искомую матрицу проекций момента силы тяжести:

$$M_g^* = -mg^* L_a^T \tilde{c} = -mg_e^* l_e^T \tilde{c} = -mg_s l_s^T \tilde{c}. \quad (3.31)$$

Каждая из систем равенств (3.29) и (3.31) содержит по три равносильных соотношения. Выбор того или иного из этих соотношений при составлении уравнений динамики полета определяется, в каждом конкретном исследовании, заданием неподвижной системы, выбором рабочего приближения выражения для ускорения силы тяжести и указанием системы координат для описания полета.

В заключение этого подраздела установим некоторые геометрические соотношения. Пусть, как и в п. «в» § 10,

$$R^* = \|X, Y, Z\|, \quad R_e^* = \|\xi, \eta, \zeta\|.$$

По формуле (2.6) имеем:

$$R_e^* = R^* \Phi_e, \quad R^* = R_e^* \Phi_e^T,$$

где матрица Φ_e перехода от основной системы к центральной земной определена в п. «г» § 10. Таким образом, координаты некоторой точки пространства (например, начала N) в основной и центральной земной системах связаны соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= X \cos \Phi - Z \sin \Phi, & X &= \xi \cos \Phi + \zeta \sin \Phi, \\ \eta &= Y, & Y &= \eta, \\ \zeta &= Z \cos \Phi + X \sin \Phi, & Z &= \zeta \cos \Phi - \xi \sin \Phi. \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

Выразим угловые координаты $\psi_a, \vartheta_a, \gamma_a$ самолета в основной системе через его угловые координаты $\psi_s, \vartheta_s, \gamma_s$ в географической системе, имеющей начало в точке $S(\lambda, \nu)$.

В силу равенства (2.7) $L_a = Q$, где

$$Q = l_s L_s \Phi_e^T = \|Q_{gh}\| \quad (g, h = 1, 2, 3).$$

Учитывая выражение матрицы L_S , найденное в п. 4 § 10, получим, что

$$Q \equiv Q(\Phi, \lambda_0, \nu_0; \psi_S, \vartheta_S, \gamma_S).$$

Применяя соотношения (2.16), получим искомые выражения:

$$\psi_a = -\operatorname{arctg} \frac{Q_{11}}{Q_{13}}, \quad \vartheta_a = \arcsin Q_{12}, \quad \gamma_a = -\operatorname{arctg} \frac{Q_{32}}{Q_{22}}.$$

В частности,

$$\vartheta_a = \arcsin (\cos \psi_S \sin \psi_S \cos \lambda + \sin \vartheta_S \sin \lambda).$$

б) *Аэродинамическая сила*. В полете с дозвуковой скоростью аэродинамическая сила определяется главным образом скоростным напором, скоростью, угловым положением самолета по отношению к набегающему потоку, координатами аэродинамических органов управления и числами Маха и Рейнольдса. В полете современных сверхзвуковых самолетов аэродинамическая сила зависит самым существенным образом также и от более сложных физических явлений и от явлений химической природы: от теплообмена между материалом самолета и воздушной средой, от диссоциации молекул в текущем слое воздуха, обдувающим самолет, от магнитоэлектрических процессов. При полете в сильно разреженных слоях воздуха на эти процессы заметно влияют космические излучения. Поэтому аэродинамические коэффициенты в общем случае существенно зависят также от скорости и высоты полета, влияющих на степень диссоциации молекул; с изменением высоты меняются также температура воздуха и интенсивность космических излучений. Зависимость аэродинамических коэффициентов от указанных процессов изучается в газовой динамике и теории теплопередачи, а в задачах управления полетом считается известной с той или иной степенью точности.

Зависимость аэродинамической силы от переменных $\alpha, \beta, Ma, Re, v_v$, высоты H и координат воздушных органов управления задается с помощью линейного аэродинамического коэффициента $\bar{C} = \bar{C}(\alpha, \beta, Ma, Re, v_v, H, \delta_i)$, где символ δ_i означает совокупность координат воздушных органов управления. Линейный аэродинамический коэффициент $\bar{C}$ всегда относится к некоторой характерной площади S_d (например, площади крыла самолета, площади поперечного сечения ракеты). Выражение аэродина-

мической силы в функции указанных величин принято записывать в виде

$$\bar{A} = \frac{1}{2} S_d \rho v_b^2 \bar{C}, \quad (3.33)$$

причем

$$\bar{C} = -c_{vx} \bar{v}^\circ + c_{vy} \bar{y}_v^\circ + c_{vz} \bar{z}_v^\circ;$$

здесь $\bar{v}^\circ = \bar{x}_v^\circ, \bar{y}_v^\circ, \bar{z}_v^\circ$ — единичные векторы поточных осей x_v, y_v, z_v соответственно (§ 1), а аэродинамические коэффициенты c_{vx}, c_{vy}, c_{vz} , представляющие собой проекции вектора $\bar{C}$ на оси поточной системы осей, называются: c_{vx} — коэффициент лобового сопротивления, c_{vy} — коэффициент подъемной силы, c_{vz} — коэффициент боковой силы. Каждый из этих коэффициентов зависит от углов атаки и скольжения, координат воздушных органов управления, чисел Ma и Re , скорости v_b и высоты H .

При произвольном выборе центра приведения аэродинамических сил, приложенных к самолету, на самолет действует также аэродинамический момент, представляющий собой главный момент аэродинамических сил относительно рассматриваемого центра приведения. Аэродинамический момент $\bar{M}_A$ определяется выражением:

$$\bar{M}_A = \frac{1}{2} S_d l_d \rho v_b^2 \bar{m}, \quad (3.34)$$

где l_d — характерный размер, а $\bar{m}$ — моментный аэродинамический коэффициент,

$$\bar{m} = m_{vx} \bar{v}^\circ + m_{vy} \bar{y}_v^\circ + m_{vz} \bar{z}_v^\circ.$$

Естественно, что при одних и тех же условиях обдува самолета, вектор $\bar{M}_A$ зависит от выбора центра приведения. Аэродинамические моментные коэффициенты m_{vx}, m_{vy}, m_{vz} , представляющие собой проекции вектора $\bar{m}$ на оси поточной системы, называются: m_{vx} — коэффициент момента крена, m_{vy} — коэффициент момента рыскания, m_{vz} — коэффициент продольного момента. При выборе центра приведения в подвижном начале N

$$\bar{m}_N = \bar{m}(\alpha, \beta, Ma, Re, v_b, H, \delta).$$

Коэффициенты $c_{vx}, \dots, m_{vz}$ определяются из аэродинамического расчета или из продувок в трубах и в динамике полета считаются известными функциями своих

аргументов при заданных значениях характерных величин S_d и l_d и определенном выборе центра приведения сил, приложенных к самолету.

Получим проекции силы $\bar{A}$ и момента $\bar{M}_A$ на связанные оси x, y, z (навигационные оси). Проекции c_x, c_y, c_z и m_x, m_y, m_z аэродинамических коэффициентов $\bar{C}$ и $\bar{m}$ на оси x, y, z соответственно определяются с помощью матрицы

$$l_v = l_v(\alpha, \beta)$$

(п. «1» § 10). В силу соотношения (2.6) имеем:

$$\| -c_x, c_y, c_z \| = \| -c_{vx}, c_{vy}, c_{vz} \| l_v^T,$$

$$\| m_x, m_y, m_z \| = \| m_{vx}, m_{vy}, m_{vz} \| l_v^T.$$

Воздушная скорость $\bar{v}_v$ подвижного начала N совпадает, по условию, со скоростью $\bar{v}_e$ этого начала относительно Земли.

Рассмотрим выражения скорости $\bar{v}_e$ в различных системах отсчета.

В центральной земной системе по определению

$$\bar{v}_e = \dot{\xi} \bar{\xi}^0 + \dot{\eta} \bar{\eta}^0 + \dot{\zeta} \bar{\zeta}^0 \quad (3.35)$$

и

$$v_e^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2.$$

В сферических координатах R, λ, ν начала N

$$v_e^2 = \dot{R}^2 + R^2 (\dot{\lambda}^2 + \dot{\nu}^2 \cos^2 \lambda).$$

В географической системе координат $S \xi \eta \zeta$

$$\bar{v}_e = \dot{\xi} \bar{\xi}^0 + \dot{\eta} \bar{\eta}^0 + \dot{\zeta} \bar{\zeta}^0 \quad (3.36)$$

и

$$v_e^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2.$$

Подсчитаем скорость $\bar{v}_e$ в основной системе координат, принимая ее за неподвижную. В этой системе скорость $\bar{v}_e$ подвижного начала N относительно Земли выражается векторной разностью между скоростью $\bar{v}$ начала N в основной системе и переносной скоростью, обусловленной вращением Земли:

$$\bar{v}_e = \bar{v} - \bar{\Omega}_e \times \bar{R}, \quad (3.37)$$

причем $\bar{\Omega}_e = \Omega_e Y^\circ$,

$$\bar{v} = \dot{X} \bar{X}^\circ + \dot{Y} \bar{Y}^\circ + \dot{Z} \bar{Z}^\circ.$$

Следовательно,

$$\bar{v}_e = (\dot{X} - \Omega_e Z) \bar{X}^\circ + \dot{Y} \bar{Y}^\circ + (\dot{Z} + \Omega_e X) \bar{Z}^\circ.$$

и

$$v_e^2 = (\dot{X} - \Omega_e Z)^2 + \dot{Y}^2 + (\dot{Z} + \Omega_e X)^2.$$

Выразим углы атаки и скольжения самолета через проекции v_{ex}, v_{ey}, v_{ez} его воздушной скорости $\bar{v}_e = \bar{v}_e$ на оси x, y, z , связанные с самолетом. По определению,

$$v_{ex} = \bar{v} \bar{i}, \quad v_{ey} = \bar{v} \bar{j}, \quad v_{ez} = \bar{v} \bar{k}.$$

Учитывая значения направляющих косинусов в первом столбце матрицы l_v (п. 1 § 10), получим, что

$$\begin{aligned} v_{ex} &= v_e \cos \alpha \cos \beta, & v_{ey} &= -v_e \sin \alpha \cos \beta, \\ v_{ez} &= v_e \sin \beta. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Отсюда следуют соотношения, определяющие углы α и β :

$$\alpha = -\arctg \frac{v_{ey}}{v_{ex}}, \quad \beta = \arcsin \frac{v_{ez}}{v_e} \quad (3.39)$$

$$(v_e = \sqrt{v_{ex}^2 + v_{ey}^2 + v_{ez}^2}).$$

Подсчитаем скорости v_{ex}, v_{ey}, v_{ez} в различных координатных системах. Для этого введем матрицу $v_e^* = \|v_{ex}, v_{ey}, v_{ez}\|$ и воспользуемся тождеством (2.6).

В географической системе координат скорость $\bar{v}_e$ определяется равенством (3.36) и ($H = v$)

$$v_e^* = \|\dot{x}, \dot{H}, \dot{z}\| l_S^T, \quad (3.40)$$

причем (п. 1),

$$l_S = L(\psi_S, \vartheta_S, \gamma_S).$$

В центральной земной системе координат скорость $\bar{v}_e$ определяется равенством (3.35) и

$$v_e^* = \dot{R}_e l_e^T, \quad (3.41)$$

где, как и выше, $R_e^* = \|\xi, \eta, \zeta\|$, а $l_e = (xyz, \xi\eta\zeta) =$

$= L(\psi_e, \vartheta_e, \gamma_e)$. В основной системе координат скорость $\underline{v}_e$ определяется равенством (3.37). Очевидно, что

$$\underline{v}_e^* = (\underline{v} - \underline{\Omega}_e \times \underline{R}) \|\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\| = v^* - (\underline{\Omega}_e \times \underline{R}) \|\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\|.$$

Введем матрицу Ω_e^* проекций скорости собственного вращения Земли на оси основной системы $\Omega_e^* = \|0, \Omega_e, 0\|$. Тогда в силу соотношений (2.30) и (2.31)

$$\underline{v}_e^* = v^* - [-\|R_x, R_y, R_z\| \|\Omega_{ex}, \Omega_{ey}, \Omega_{ez}\|],$$

где R_x, R_y, R_z — проекции радиуса-вектора $\underline{R} = \underline{ON}$ на оси x, y, z , соответственно, а $\Omega_{ex}, \Omega_{ey}, \Omega_{ez}$ — проекции угловой скорости $\underline{\Omega}_e$ на эти же оси. По формуле (2.6)

$$\|R_x, R_y, R_z\| = R^* L_a^T, \quad \|\Omega_{ex}, \Omega_{ey}, \Omega_{ez}\| = \Omega_e^* L_a^T$$

и

$$\underline{v}_e^* = v^* + R^* L_a^T \Omega_e^* L_a^T, \quad (R^* = \|X, Y, Z\|).$$

Применяя соотношение (2.33), найдем окончательно

$$\underline{v}_e^* = v^* + R^* \tilde{\Omega}_e L_a^T. \quad (3.42)$$

В зависимости от того, в какой из трех рассматриваемых координатных систем — географической, центральной земной или основной — описывается полет, проекции v_{ex}, v_{ey}, v_{ez} воздушной скорости на оси x, y, z , определяющие углы α и β (3.39), выражаются с помощью равенств (3.40), (3.41) или (3.42).

Плотность воздуха принимается в первом приближении зависящей только от высоты H самолета над местным уровнем моря: $\rho = \rho(H)$. При описании самолета в центральной земной системе координат

$$H = R - B_e,$$

$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad (3.43)$$

где B_e — местное значение радиуса Земли, точнее, расстояние от геометрического центра O Земли до точки пересечения радиуса-вектора $\underline{R}$ с поверхностью фигуры Земли. При подсчете плотности воздуха с помощью соотношения (3.43) недопустимо заменять фигуру Земли шаровой поверхностью, т. е. полагать $B_e = b_e = \text{const}$. Действительно, плотность воздуха на уровне моря на всей Земле приблизительно оди-

накова; в частности, значения плотности воздуха на экваторе и у полюсов на уровне моря практически равны.

Но разность между полярным радиусом Земли b_{Π} и ее экваториальным радиусом b_{Σ} составляет около $1/289$ среднего радиуса Земли (примерно 19 километров). А этой высоте отвечает изменение плотности воздуха почти в 13 раз. Поэтому если принять Землю сферической с радиусом, равным среднему радиусу b_e Земли и подсчитать плотность воздуха, обдувающего самолет, летящий на экваторе у поверхности моря, по формуле (3.43)

$$\varrho = \varrho \Big|_{B_e = b_e},$$

то получим значение плотности, отвечающее высоте $H = b_{\Sigma} - b_e \approx 10$ километров — в три раза меньше истинного значения плотности. Поэтому в формуле (3.43) местный радиус Земли нельзя заменять его средним значением. Местный радиус B_e зависит от географических координат λ (земная широта) и ν (земная долгота) самолета. Зависимость $B_e = B_e(\lambda, \nu)$ устанавливается в теории фигуры Земли. С хорошим приближением Земля отождествляется с эллипсоидом вращения, имеющим полуоси b_{Π} (по оси симметрии) и b_{Σ} (радиус в экваториальной плоскости); тогда $B_e \equiv B_e(\lambda)$. В динамике полета зависимость местного радиуса Земли от географических координат самолета (начала N) считается заданной.

В задачах полета, в которых поверхность Земли принимается плоской, плотность воздуха считается зависящей только от высоты H над плоскостью горизонта: $\varrho = \varrho(H)$. С известным приближением эта зависимость описывается так называемой стандартной атмосферой. В более грубом приближении зависимость плотности воздуха от высоты принимается экспоненциальной:

$$\varrho(H) = \varrho_0 e^{-\frac{H-H_0}{k}},$$

где H_0 — некоторое определенное значение высоты $\varrho_0 = \varrho(H_0)$. Постоянная $k > 0$, ибо с увеличением высоты плотность воздуха уменьшается. Для определения постоянной k , достаточно задать значение плотности воздуха еще при одном значении высоты $H = H_1 \neq H_0$. Тогда

$$\varrho_1 = \varrho_0 e^{-\frac{H_1-H_0}{k}} \quad \text{или иначе,} \quad \varrho_1 = \varrho(H_1).$$

Из последнего уравнения находим величину k :

$$k = (H_1 - H_0) \ln \frac{\rho_0}{\rho_1}.$$

Число Маха определяется отношением воздушной скорости $v_b = v_e$ к скорости звука a_s в данном месте:

$$Ma = \frac{v_e}{a_s}.$$

Скорость звука, как и плотность воздуха, зависит от высоты рассматриваемой точки над уровнем моря.

$$a_s \equiv a_s(H).$$

В центральной земной системе высота H выражается по-прежнему соотношением (3.43).

Если земная поверхность принимается плоской, то скорость звука считается зависящей только от высоты H над плоскостью горизонта.

Число Рейнольдса определяется отношением

$$Re = \frac{v_b}{\nu_k} h_k = \frac{v_e}{\nu_k} h_k,$$

где ν_k — кинематический коэффициент вязкости воздуха, h_k — характерная длина самолета. Как и величины q и a_s , коэффициент ν_k зависит от высоты H . Высота H по-прежнему определяется выражением (3.43) при описании полета в центральной земной системе и равна высоте самолета над плоскостью горизонта при приближении земной поверхности с плоскостью.

Описанные зависимости сомножителей в выражениях (3.33) и (3.34) аэродинамической силы и аэродинамического момента определяют проекции этих сил и момента на оси x , y и z , связанные с самолетом.

Глава IV

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ САМОЛЕТА

В общем случае летательный аппарат представляет собой систему G тел переменного состава, соединенных по схеме, приведенной на рис. 4. Полетом аппарата, выполненного по схеме системы G , называется движение неизменяемого тела аппарата, отождествляемое с движением трехгранника навигационной системы $Nxyz$.

Физические основы возникновения сил, действующих на самолет, в механике управляемого полета считаются уже известными: аэродинамические и реактивные силы — из курсов аэромеханики и газовой динамики, сила тяжести — из теории потенциала. Исходная задача динамики управляемого полета заключается в математическом описании полета, происходящего под действием сил как зависящих от управляющих воздействий, так и не зависящих от них.

В механике полета, как и в механике вообще, ставятся две задачи: прямая и обратная.

В прямой задаче заданы законы относительных перемещений тел системы и законы изменения тяг двигателей, а также указано исходное состояние самолета. Требуется найти дальнейшее движение самолета. Задача сводится к интегрированию дифференциальных уравнений движения тела G_c летательного аппарата при заданных начальных условиях. Ввиду сложности этих уравнений, в общем случае нелинейных и содержащих переменные коэффициенты, их часто исследуют методами машинной математики.

В обратной задаче задан закон навигации (§ 2) и законы относительных перемещений некоторых из тел системы G и законы изменения тяг некоторых из ее двигателей. Требуется найти закон относительных перемещений остальных

тел системы и законы изменения тяг остальных ее двигателей, обеспечивающие протекание полета в соответствии с законом навигации. Иными словами, требуется найти законы отклонения рулей и режимы горения топлива в двигателях, физически осуществляющие закон навигации. Закон навигации часто находится, как решение вариационной задачи полета, отвечающее определенным оптимальным свойствам полета (§ 2).

Задание закона навигации означает наложение некоторых зависимостей на переменные величины, характеризующие полет (координаты, скорости и т. д.). Поэтому обратная задача также приводится к исследованию уравнений движения тела G_c летательного аппарата, но уже относительно других переменных — координат органов управления и с учетом соотношений, выражаемых законом навигации.

Методы машинной математики также широко применяются и в решении обратной задачи.

Закон отклонения органов управления и изменения тяг двигателей, найденный путем решения обратной задачи механики полета для заданного закона навигации, определяет входной сигнал разомкнутой цепи комбинированной системы управления самолетом (§ 4).

Таким образом, для решения как прямой, так и обратной задачи механики полета, а также для разыскания оптимального закона навигации, необходимо знать уравнения движения летательного аппарата, как системы тел переменного состава.

Получение этих уравнений и является предметом настоящей главы.

§ 14. Уравнения движения самолета как системы тел переменного состава

а) Уравнения поступательного движения самолета.
Применим к каждой материальной точке системы G уравнение (3.7) движения материальной точки переменного состава:

$$m_i^{(0)}(t) \frac{d\bar{v}_i^{(0)}}{dt} = \bar{W}_i^{(0)} + \bar{B}_i^{(0)} \quad (\text{тело } G_0), \quad (4.1)$$

$$m_{i_v}^{(\sigma)}(t) \frac{d\bar{v}_{i_v}^{(\sigma)}}{dt} = \bar{W}_{i_v}^{(\sigma)} + \bar{B}_{i_v}^{(\sigma)} \quad (\text{тело } G_v^{(\sigma)}), \quad (4.2)$$

где $\bar{v}_i^{(0)}$ — абсолютная скорость точки $M_i^{(0)}$, $\bar{B}_i^{(0)}$ — главный вектор всех сил, приложенных к точке $\bar{M}_i^{(0)}$ со стороны всех остальных частиц системы G , $\bar{W}_i^{(0)} = \bar{P}_i^{(0)} + \bar{F}_i^{(0)}$, причем $\bar{P}_i^{(0)}$ — главный вектор всех реактивных сил, а $\bar{F}_i^{(0)}$ — главный вектор всех внешних сил (внешних по отношению к системе G), приложенных к точке $M_i^{(0)}$. Величины $\bar{v}_{iv}^{(\sigma)}$, $\bar{B}_{iv}^{(\sigma)}$, $\bar{W}_{iv}^{(\sigma)} = \bar{P}_{iv}^{(\sigma)} + \bar{F}_{iv}^{(\sigma)}$ имеют соответственный смысл для материальной точки $M_{iv}^{(\sigma)}$ тела $G_v^{(\sigma)}$.

Обратим внимание, что хотя цель исследования состоит в нахождении абсолютного движения неизменяемой части G_c тела G_0 , необходимо исследовать движение всей системы G , так как искомое движение зависит от перемещений всех тел системы G . Поэтому по отношению к любой материальной точке $M_{i\lambda}^{(\sigma)}$ ($\lambda = 0, 1, 2, \dots, n_\sigma$) системы G , внутренними силами являются силы, приложенные к ней со стороны частиц, принадлежащих (в данный момент времени) системе G , а внешними — силы, приложенные к ней со стороны частиц, не принадлежащих этой системе.

Для вычисления абсолютного ускорения $\bar{w}_{iv}^{(\sigma)} = d\bar{v}_{iv}^{(\sigma)}/dt$ точки $M_{iv}^{(\sigma)}$, выпишем выражение абсолютного радиуса-вектора $\bar{R}_{iv}^{(\sigma)}$ этой частицы:

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_{iv}^{(\sigma)} &= \bar{R} + \bar{q}_{iv}^{(\sigma)} \\ \bar{q}_{iv}^{(\sigma)} &= \overline{NM_{iv}^{(\sigma)}} = \sum_{x=1}^v \bar{a}_{x-1}^{(\sigma)} + \bar{r}_{iv}^{(\sigma)} \end{aligned} \right\}, \quad (4.3)$$

где $\bar{R}$ — абсолютный радиус-вектор подвижного начала N (рис. 30), $\bar{r}_{iv}^{(\sigma)} = \overline{O_v^{(\sigma)} M_{iv}^{(\sigma)}}$ — радиус-вектор точки $M_{iv}^{(\sigma)}$ относительно начала $O_v^{(\sigma)}$ системы, связанной с телом $G_v^{(\sigma)}$. Одновременно введем матрицу-строку $R_{iv}^{*(\sigma)}$ абсолютных координат точки M и матрицу-строку R^* абсолютных координат подвижного начала N (п. 3 § 10).

Умножив обе части векторного равенства (4.3) на матрицу-строку $\|\bar{X}^0, \bar{Y}^0, \bar{Z}^0\|$ единичных векторов неподвижной системы координат, получим матричное соотношение

$$\begin{aligned} R_{iv}^{*(\sigma)} &= R^* + \sum_{x=1}^v \|a_{(x-1)}^{(\sigma)}{}_x, a_{(x-1)}^{(\sigma)}{}_y, a_{(x-1)}^{(\sigma)}{}_z\| + \\ &+ \|r_{iv}^{(\sigma)}{}_x, r_{iv}^{(\sigma)}{}_y, r_{iv}^{(\sigma)}{}_z\|. \end{aligned}$$

Здесь $a_{(x-1)X}^{(\sigma)}, \dots$ — проекции вектора $\bar{a}_{x-1}^{(\sigma)}$ на неподвижные оси X, Y, Z , а $r_{ivX}^{(\sigma)}, \dots$ — проекций вектора $\bar{r}_{iv}^{(\sigma)}$ на те же оси. Используя соотношение (2.6) и применяя обозначения, введенные в п. «а», напомним:

$$\begin{aligned} & \|a_{(x-1)X}^{(\sigma)}, a_{(x-1)Y}^{(\sigma)}, a_{(x-1)Z}^{(\sigma)}\| = \\ & = a_{x-1}^{*(\sigma)} (x_{x-1}^{(\sigma)} y_{x-1}^{(\sigma)} z_{x-1}^{(\sigma)}, XYZ) = a_{x-1}^{*(\sigma)} l_{(x-1)0}^{(\sigma)} L; \\ & \|r_{ivX}^{(\sigma)}, r_{ivY}^{(\sigma)}, r_{ivZ}^{(\sigma)}\| = \\ & = \theta_{iv}^{*(\sigma)} (x_v^{(\sigma)} y_v^{(\sigma)} z_v^{(\sigma)}, XYZ) = \theta_{iv}^{*(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} L \end{aligned}$$

и

$$R_{iv}^{*(\sigma)} = R^* + \left(\sum_{x=1}^v a_{x-1}^{*(\sigma)} l_{(x-1)0}^{(\sigma)} \right) L + \theta_{iv}^{*(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} L, \quad (4.4)$$

где, как и ранее, $L = (xyz, XYZ)$.

Матрицы $l_{(x-1)0}^{(\sigma)}$, $l_{v0}^{(\sigma)}$ направляющих косинусов выражаются через матрицы направляющих косинусов между осями, связанными с последовательными парами тел $G_{C(k-1)}^{(\sigma)}$, $G_{Ck}^{(\sigma)}$ ($k = 1, 2, \dots, n_\sigma$) с помощью разложения (2.7).

Дифференцируя обе части равенства (4.4) по времени и учитывая кинематическое соотношение (2.24), найдем матрицу-строку проекций абсолютной скорости $\bar{v}_{iv}^{(\sigma)}$ на неподвижные оси:

$$\begin{aligned} \dot{R}_{iv}^{*(\sigma)} = \dot{R}^* + \left\{ \sum_{x=1}^v [\dot{a}_{x-1}^{*(\sigma)} l_{(x-1)0}^{(\sigma)} + a_{x-1}^{*(\sigma)} (\dot{l}_{(x-1)0}^{(\sigma)} - l_{(x-1)0}^{(\sigma)} \tilde{\omega})] + \right. \\ \left. + \theta_{iv}^{*(\sigma)} (\dot{l}_{v0}^{(\sigma)} - l_{v0}^{(\sigma)} \tilde{\omega}) \right\} L. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Заметим, что матрица $\theta_{iv}^{*(\sigma)}$ не зависит от времени в силу определения твердого тела переменного состава (§ 12); в самом деле, пока материальная точка $M_{iv}^{(\sigma)}$ тела $G_v^{(\sigma)}$ не находится на поверхности горения, она не может перемещаться относительно этого тела (т. е. относительно неизменяемого тела $G_{Cv}^{(\sigma)}$); координаты $x_{iv}^{(\sigma)}$, $y_{iv}^{(\sigma)}$, $z_{iv}^{(\sigma)}$ постоянны. Если же поверхность горения достигает со временем данной частицы, то она, приобретая относительную скорость, отделяется от тела $G_v^{(\sigma)}$ и, следовательно, с этого момента уже не принадлежит телу $G_v^{(\sigma)}$ и системе G . Влияние же процесса отделения частиц на движение системы учитывается через посредство реактивной силы.

Поэтому по отношению к дифференцированию по времени $\theta_{iv}^{(\sigma)} = \text{const}$.

Дифференцируя, в свою очередь, обе части равенства (4.5) по времени и используя кинематические соотношения (2.22) и (2.26), получим матрицу проекций абсолютного ускорения $\bar{w}_{iv}^{(\sigma)}$ на неподвижные оси:

$$\begin{aligned} \ddot{R}_{iv}^{(\sigma)} = & \left\{ \ddot{R}^* + \sum_{x=1}^v [\ddot{a}_{x-1}^{(\sigma)} l_{(x-1)0}^{(\sigma)} + 2\dot{a}_{x-1}^{(\sigma)} \dot{l}_{(x-1)0}^{(\sigma)} + \right. \\ & + a_{x-1}^{(\sigma)} \ddot{l}_{(x-1)0}^{(\sigma)} - 2(\dot{a}_{x-1}^{(\sigma)} \dot{l}_{(x-1)0}^{(\sigma)} + a_{x-1}^{(\sigma)} \ddot{l}_{(x-1)0}^{(\sigma)}) \tilde{\omega} + \\ & + a_{x-1}^{(\sigma)} l_{(x-1)0}^{(\sigma)} (\tilde{\omega}^2 - \dot{\tilde{\omega}})] + \theta_{iv}^{(\sigma)} [\ddot{l}_{v0}^{(\sigma)} - 2\dot{l}_{v0}^{(\sigma)} \tilde{\omega} + \\ & \left. + l_{v0}^{(\sigma)} (\tilde{\omega}^2 - \dot{\tilde{\omega}})] \right\} L. \end{aligned}$$

С помощью соотношения (2.6) перейдем к матрице строке $\bar{w}_{iv}^{(\sigma)}$ проекций абсолютного ускорения $\bar{w}_{iv}^{(\sigma)} = \frac{dv_{iv}^{(\sigma)}}{dt}$ на навигационные оси x, y, z :

$$\begin{aligned} \bar{w}_{iv}^{(\sigma)} = & \bar{w}^* + \theta_{iv}^{(\sigma)} \ddot{l}_{v0}^{(\sigma)} + \ddot{S}_v^{(\sigma)} - \\ & - 2(\theta_{iv}^{(\sigma)} \dot{l}_{v0}^{(\sigma)} + \dot{S}_v^{(\sigma)}) \tilde{\omega} + (\theta_{iv}^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} + S_v^{(\sigma)}) (\tilde{\omega}^2 - \dot{\tilde{\omega}}), \quad (4.6) \end{aligned}$$

где $\bar{w}^* = \dot{R}^* L^T = \|\bar{w}_x, \bar{w}_y, \bar{w}_z\|$ — матрица проекций абсолютного ускорения подвижного начала N на оси x, y, z ,

$$S_v^{(\sigma)} = \sum_{x=1}^v a_{x-1}^{(\sigma)} l_{(x-1)0}^{(\sigma)}.$$

Воспроизводя предыдущие рассуждения применительно к уравнению (4.1), выпишем матрицы-строки $\bar{v}_i^{*(0)}$ и $\bar{w}_i^{*(0)}$ проекций абсолютной скорости $\bar{v}_i^{(0)}$ и абсолютного ускорения $\bar{w}_i^{(0)}$ точки $M_i^{(0)}$ тела G_0 на оси x, y, z :

$$\bar{v}_i^{*(0)} = \bar{v}^* - \theta_i^{(0)} \tilde{\omega}, \quad (4.7)$$

$$\bar{w}_i^{*(0)} = \bar{w}^* + \theta_i^{(0)} (\tilde{\omega}^2 - \dot{\tilde{\omega}}). \quad (4.8)$$

Напишем уравнения (4.1) для всех точек тела G_0 , уравнения (4.2) — для всех точек всех тел $G_v^{(\sigma)}$. Затем сложим левые и правые части всех указанных векторных уравнений, после чего получим векторное равенство:

$$\sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} \sum_{G_v^{(\sigma)}} m_{iv}^{(\sigma)}(t) \bar{w}_{iv}^{(\sigma)} + \sum_{G_0} m_i^{(0)}(t) \bar{w}_i^{(0)} = \bar{W}, \quad (4.9)$$

где

$$\bar{W} = \bar{P} + \bar{F},$$

$$\bar{P} = \sum_{G_0} \bar{P}_i^{(0)} + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} \sum_{G_v^{(\sigma)}} \bar{P}_{iv}^{(\sigma)},$$

$$\bar{F} = \sum_{G_0} \bar{F}_i^{(0)} + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} \sum_{G_v^{(\sigma)}} \bar{F}_{iv}^{(\sigma)}.$$

Главный вектор всех внутренних сил в системе G равен нулю в любой момент времени. Воспользуемся определением внутренних и внешних сил в системе G , приведенным в начале настоящего подраздела. Согласно этому определению реакции связей в системе G принадлежат к числу внутренних сил и главный вектор $\bar{F}$ сил, внешних по отношению к системе G , от реакций связей не зависит.

Через P^* и F^* обозначим матрицы-строки проекций векторов $\bar{P}$ и $\bar{F}$ соответственно на навигационные оси x, y, z , через W^* —матрицу-строку $P^* + F^*$.

Умножая обе части векторного равенства (4.9) на матрицу-строку $\|\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\|$ единичных векторов навигационных осей (осей x, y, z), учитывая соотношения (4.6) и (4.8) и принимая во внимание, что

$$\left. \begin{aligned} \sum_{G_0} m_i^{(0)} &= m^{(0)}, \quad \sum_{G_v^{(\sigma)}} m_{iv}^{(\sigma)} = m_v^{(\sigma)}, \\ \sum_{G_0} m_i \theta_i^{*(0)} &= m^{(0)} c^{*(0)}, \quad \sum_{G_v^{(\sigma)}} m_{iv}^{(\sigma)} \theta_{iv}^{*(\sigma)} = m_v^{(\sigma)} c_v^{*(\sigma)}, \end{aligned} \right\} (4.10)$$

придем к матричному уравнению:

$$\begin{aligned} m\omega^* + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} m_v^{(\sigma)} \left[c_v^{*(\sigma)} \ddot{l}_{v0} + \sum_{x=1}^v (\ddot{a}_{x-1}^{*(\sigma)} l_{(x-1)0}^{(\sigma)} + \right. \\ \left. + 2\dot{a}_{x-1}^{*(\sigma)} \dot{l}_{(x-1)0}^{(\sigma)} + \ddot{a}_{x-1}^{*(\sigma)} \ddot{l}_{(x-1)0}^{(\sigma)}) \right] - 2 \left\{ \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} m_v^{(\sigma)} [c_v^{*(\sigma)} \dot{l}_{v0}^{(\sigma)} + \right. \\ \left. + \sum_{x=1}^v (\dot{a}_{x-1}^{*(\sigma)} l_{(x-1)0}^{(\sigma)} + \ddot{a}_{x-1}^{*(\sigma)} \dot{l}_{(x-1)0}^{(\sigma)})] \right\} \tilde{\omega} + \end{aligned}$$

$$+ \left[m^{(0)} c^{*(0)} + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_{\sigma}} (c_v^{*(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} + a_{x-1}^{*(\sigma)} l_{(x-1)0}^{(\sigma)}) \right] (\tilde{\omega}^2 - \dot{\tilde{\omega}}) = W^*, \quad (4.11)$$

где $m = m^{(0)} + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_{\sigma}} m_v^{(\sigma)}$ — масса системы G .

Подсчитаем правую часть уравнения (4.11). Обозначим через $P^{*(0)} = \|P_1^{(0)}, P_2^{(0)}, P_3^{(0)}\|$ матрицу проекций главного вектора $\bar{P}^{(0)}$ реактивных сил, приложенных к телу G_0 , на оси x, y, z , через $P_v^{*(\sigma)} = \|P_{v1}^{(\sigma)}, P_{v2}^{(\sigma)}, P_{v3}^{(\sigma)}\|$ — матрицу проекций главного вектора $\bar{P}_v^{(\sigma)}$ реактивных сил, приложенных к телу $G_v^{(\sigma)}$, на оси $x_v^{(\sigma)}, y_v^{(\sigma)}, z_v^{(\sigma)}$.

Мы проектируем реактивную силу, создаваемую горением твердого топлива каждого тела системы G , являющегося твердым телом переменного состава, на оси, связанные с ним же, поскольку элементарная реактивная сила направлена по нормали к поверхности горения в данной точке. Таким образом, направление главного вектора реактивной силы каждого тела, принадлежащего системе G , органически связано с этим телом. Что же касается направления главного вектора внешних сил, приложенных к какому-либо телу системы G , то оно в общем случае никак не связано с этим телом: в самом деле, сила тяжести тела всегда направлена к центру массы Земли и ее угловое положение относительно системы координат, связанной с телом, определяется угловым положением этой системы по отношению к местной вертикали; направление аэродинамической силы по отношению к телу зависит от углового положения тела относительно поточной системы координат (§ 1, 10, 13), т. е. от углов атаки и скольжения этого тела.

Ограничимся в этой главе учетом лишь сил тяжести и аэродинамической в качестве внешних сил. Введем обозначения:

$A^{*(0)} = \|A_1^{(0)}, A_2^{(0)}, A_3^{(0)}\|$ — матрица проекций аэродинамической силы, приложенной к телу G_0 , на оси x_v, y_v, z_v , связанные с потоком, его обдувающим;

α и β — углы атаки и скольжения соответственно тела G_0 по отношению к этому потоку;

$A_v^{*(\sigma)} = \|A_{v1}^{(\sigma)}, A_{v2}^{(\sigma)}, A_{v3}^{(\sigma)}\|$ — матрица проекций аэродинамической силы, приложенной к телу $G_v^{(\sigma)}$ на оси $x_{vv}^{(\sigma)}, y_{vv}^{(\sigma)}, z_{vv}^{(\sigma)}$, связанные с потоком, его обдувающим,

$\alpha_v^{(\sigma)}$ и $\beta_v^{(\sigma)}$ — углы атаки и скольжения соответственно тела $G_v^{(\sigma)}$ по отношению к этому потоку,

$$l_v = l_v(\alpha, \beta) = (xyz, x_v y_v z_v) \text{ (п. 1 § 10),}$$

$$\begin{aligned} l_{vv}^{(\sigma)} &= (x_v^{(\sigma)} y_v^{(\sigma)} z_v^{(\sigma)}, x_{vv}^{(\sigma)} y_{vv}^{(\sigma)} z_{vv}^{(\sigma)}) = \\ &= L(\beta_v^{(\sigma)}, \alpha_v^{(\sigma)}, 0) = l_v(\alpha_v^{(\sigma)}, \beta_v^{(\sigma)}). \end{aligned}$$

В силу соотношения (2.6) проекции аэродинамических сил, приложенных к телам $G_0, G_v^{(\sigma)}$ на оси x, y, z , определяются матрицами:

$$A^{*(0)} l_v^T, \quad A_v^{*(\sigma)} l_{vv}^{(\sigma)T} l_{v0}^{(\sigma)}.$$

Таким же образом проекции сил тяжести $m^{(0)} \bar{g}, m_v^{(\sigma)} \bar{g}$ тел $G_0, G_v^{(\sigma)}$ соответственно на оси x, y, z определяются матрицами

$$m^{(0)} g^* L^T, \quad m_v^{(\sigma)} g^* L^T$$

(матрица g^* введена в п. «а» § 13). Эти выражения отвечают предположению об однородности поля тяготения в габаритном объеме самолета.

Наконец, проекции главных векторов реактивных сил, приложенных к телам $G_0, G_v^{(\sigma)}$, на оси x, y, z определяются матрицами:

$$P^{*(0)}, \quad P_v^{*(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)}.$$

Подставляя найденные матрицы-строки проекций внешних и реактивных сил на оси x, y, z , связанные с основным телом системы G , в правую часть равенства (4.11) и заменяя матрицу ω^* ее выражением (2.29), выпишем матричное уравнение поступательного движения самолета как системы твердых тел переменного состава:

$$\begin{aligned} \frac{dv^*}{dt} &= v^* \tilde{\omega} + g^* L^T + \frac{1}{m} \left\{ P^{*(0)} + A^{*(0)} l_v^T + \right. \\ &+ \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} [P_v^{*(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} + A_v^{*(\sigma)} l_{vv}^{(\sigma)T} l_{v0}^{(\sigma)} - m_v^{(\sigma)} (c_v^{*(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} + \dot{S}_v^{*(\sigma)})] \Big\} + \end{aligned}$$

$$+ 2 \left[\sum_{\sigma=1}^s \sum_{\nu=1}^{n_{\sigma}} m_{\nu}^{(\sigma)} (c_{\nu}^{*(\sigma)} l_{\nu 0}^{(\sigma)} + S_{\nu}^{*(\sigma)}) \right] \ddot{\omega} - \\ - \left[m^{(0)} c^{*(0)} + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{\nu=1}^{n_{\sigma}} m_{\nu}^{(\sigma)} (c_{\nu}^{*(\sigma)} l_{\nu 0}^{(\sigma)} + S_{\nu}^{*(\sigma)}) \right] (\ddot{\omega}^2 - \dot{\omega}) \}. \quad (4.12)$$

Слагаемое $\sum_A^* = \sum_{\sigma=1}^s \sum_{\nu=1}^{n_{\sigma}} A_{\nu}^{*(\sigma)} l_{\nu 0}^{(\sigma)T} l_{\nu 0} + A^{*(0)} l_0^T$ иногда удобнее преобразовать с помощью введения обобщенного аэродинамического коэффициента системы G :

$$\bar{C}_G = -C_{Gx} \bar{i} + C_{Gy} \bar{j} + C_{Gz} \bar{k}.$$

Тогда

$$\sum_A^* = \frac{1}{2} S_d \rho v^2 C_G^*, \quad (4.13)$$

где

$$C_G^* = \| -C_{Gx}, C_{Gy}, C_{Gz} \|.$$

Аэродинамические коэффициенты C_{Gx} , C_{Gy} , C_{Gz} выражают влияние совокупности тел $G_{\nu}^{(\sigma)}$ и G_0 на величину и направление полной аэродинамической силы, действующей на самолет, отождествляемый с системой G . Эти коэффициенты зависят от относительных угловых координат $\psi_{\nu}^{(\sigma)}$, $\vartheta_{\nu}^{(\sigma)}$, $\gamma_{\nu}^{(\sigma)}$, линейных координат $d_{\nu-1}^{(\sigma)}$, $e_{\nu-1}^{(\sigma)}$, $f_{\nu-1}^{(\sigma)}$, от углов α и β и от их производных, а также от параметров подобия — чисел Ma , Re и т. д. [Они определяются теоретически или опытным путем с помощью продувок в трубах.

Исходя из критерия типа «а» или «б» § 1, иногда можно пренебрегать влиянием сил инерции, обусловленных относительными перемещениями тел $G_{\nu}^{(\sigma)}$, на поступательное движение самолета. Это можно сделать, например, при исследовании полета, в котором реактивная тяга существенно превосходит силы инерции, возникающие за счет внутренних движений в самолете. Наоборот, силы инерции, происходящие от внутренних перемещений, имеют важное значение при таких движениях, как сближение самолета с посадочным основанием. В самом деле, пусть шасси самолета уже находится у самого посадочного основания и при расчетном движении через небольшой промежуток времени должно наступить соприкосновение. Пусть далее перед самым соприкосновением одно из тел, принадлежащих са-

полету, совершает относительное перемещение, порождающее силу инерции, направленную от основания. Под действием этой силы, самолет замедлит расчетное сближение с основанием, что может вызвать опасные последствия — например, в случае посадки на палубу корабля при волнении.

б) *Уравнения вращательного движения самолета.* При составлении уравнений момента количества движения выберем в качестве центра приведения всех сил, приложенных к системе G — внешних, реактивных и инерции — начало N навигационной системы координат, т. е. системы, связанной с основным телом. Умножим обе части уравнения (4.1) векторно слева на радиус-вектор $\bar{r}_i^{(0)}$ точки $M_i^{(0)}$ относительно начала N :

$$\bar{r}_i^{(0)} \times m_i^{(0)} \bar{\omega}_i^{(0)} = \bar{r}_i^{(0)} \times (\bar{W}_i^{(0)} + \bar{B}_i^{(0)}). \quad (4.14)$$

Обе части уравнения (4.2) таким же образом умножим на радиус-вектор $\bar{q}_{iv}^{(\sigma)}$ (п. «а») точки $M_{iv}^{(\sigma)}$ тела $G_v^{(\sigma)}$ относительно того же начала N :

$$\bar{q}_{iv}^{(\sigma)} \times m_{iv}^{(\sigma)} \bar{\omega}_{iv}^{(\sigma)} = \bar{q}_{iv}^{(\sigma)} \times (\bar{W}_{iv}^{(\sigma)} + \bar{B}_{iv}^{(\sigma)}). \quad (4.15)$$

Напишем равенства (4.14) для всех частиц тела G_0 , равенства (4.15) — для всех частиц всех тел $G_v^{(\sigma)}$ и сложим левые и правые части указанных векторных равенств:

$$\begin{aligned} \sum_{G_0} (\bar{r}_i^{(0)} \times m_i^{(0)} \bar{\omega}_i^{(0)}) + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} \sum_{G_v^{(\sigma)}} (\bar{q}_{iv}^{(\sigma)} \times m_{iv}^{(\sigma)} \bar{\omega}_{iv}^{(\sigma)}) = \\ = \bar{M}^{(0)} + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} \sum_{G_v^{(\sigma)}} (\bar{q}_{iv}^{(\sigma)} \times \bar{W}_{iv}^{(\sigma)}). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Здесь $\bar{M}^{(0)} = \sum_{G_0} \bar{r}_i^{(0)} \times (\bar{F}_i^{(0)} + \bar{P}_i^{(0)})$ — главный момент всех реактивных сил и сил, внешних по отношению к системе G и приложенных к телу G_0 , относительно начала N .

Обозначим через $\bar{q}_{iv}^{*(\sigma)}$ матрицу-строку проекций радиуса-вектора $\bar{q}_{iv}^{(\sigma)}$ на оси x, y, z навигационной системы: $\bar{q}_{iv}^{*(\sigma)} = \bar{q}_{iv}^{(\sigma)} \bar{e}_c^*$. Умножая обе части векторного уравнения (4.16) на матрицу-строку $\bar{e}_c^*$ единичных векторов осей системы x, y, z , связанной с основным телом и учитывая соотношение (2.32), преобразуем уравнение (4.16) к матричному виду:

$$\begin{aligned}
& - \sum_{G_0} m_i^{(0)} w_i^{*(0)} \tilde{\theta}_i - \sum_{\sigma=1}^s \sum_{\nu=1}^{n_\sigma} \sum_{G_\nu^{(\sigma)}} m_{i\nu}^{(\sigma)} w_{i\nu}^{*(\sigma)} \tilde{q}_{i\nu}^{(\sigma)} = \\
& = M^{*(0)} - \sum_{\sigma=1}^s \sum_{\nu=1}^{n_\sigma} \sum_{G_\nu^{(\sigma)}} W_{i\nu(0)}^{*(\sigma)} \tilde{q}_{i\nu}^{(\sigma)}, \quad (4.17)
\end{aligned}$$

где $M^{*(0)} = e_C^* \bar{M}^{(0)} = \|M_x^{(0)}, M_y^{(0)}, M_z^{(0)}\|$ — матрица проекций момента $\bar{M}^{(0)}$ на оси x, y, z , $W_{i\nu(0)}^{*(\sigma)}$ — матрица проекций главного вектора сил—реактивных и внешних по отношению к системе G — и приложенных к точке $M_{i\nu}^{(\sigma)}$, взятых на оси x, y, z .

Так как (п. «а»)

$$\bar{q}_{i\nu}^{(\sigma)} = \sum_{x=1}^y \bar{q}_{x-1}^{(\sigma)} + \bar{r}_{i\nu}^{(\sigma)};$$

то

$$q_{i\nu}^{*(\sigma)} = e_C^* \left(\sum_{x=1}^y \bar{a}_{x-1}^{(\sigma)} + \bar{r}_{i\nu}^{(\sigma)} \right).$$

В силу соотношения (2.6)

$$q_{i\nu}^{*(\sigma)} = \sum_{x=1}^y a_{x-1}^{*(\sigma)} l_{(x-1)0}^{(\sigma)} + \theta_{i\nu}^{*(\sigma)} l_{\nu 0}^{(\sigma)}.$$

На основании соотношения (2.33)

$$\begin{aligned}
\tilde{q}_{i\nu}^{(\sigma)} &= \sum_{x=1}^y l_{(x-1)0}^{(\sigma)T} \bar{a}_{x-1}^{(\sigma)} l_{(x-1)0}^{(\sigma)} + l_{\nu 0}^{(\sigma)T} \tilde{\theta}_{i\nu}^{(\sigma)} l_{\nu 0}^{(\sigma)} = \\
&= \tilde{S}_\nu^{(\sigma)} + l_{\nu 0}^{(\sigma)T} \tilde{\theta}_{i\nu}^{(\sigma)} l_{\nu 0}^{(\sigma)}. \quad (4.18)
\end{aligned}$$

В левой части равенства (4.17) заменим матрицу $\tilde{q}_{i\nu}^{(\sigma)}$ ее выражением (4.18), а матрицы $w_i^{*(0)}$ и $w_{i\nu}^{*(\sigma)}$ — их выражениями (4.8) и (4.6) соответственно. В правой части равенства (4.17) матрица $W_{i\nu(0)}^{*(\sigma)}$ представляет собой матрицу проекций главного вектора сил—реактивных и внешних по отношению к системе и приложенных к точке $M_{i\nu}^{(\sigma)}$ — взятых на оси x, y, z . Выразим эту матрицу через матрицу $W_{i\nu}^{*(\sigma)}$ проекций этого же главного вектора на оси $x_\nu^{(\sigma)}, y_\nu^{(\sigma)}, z_\nu^{(\sigma)}$, связанные с телом $G_\nu^{(\sigma)}$. По формуле (2.6)

$$W_{i\nu(0)}^{*(\sigma)} = \tilde{W}_{i\nu}^{*(\sigma)} l_{\nu 0}^{(\sigma)}.$$

Очевидно, что

$$\sum_{G^{(\sigma)}} W_{iv}^{*(\sigma)} = W_v^{*(\sigma)} \quad (4.19)$$

есть матрица-строка проекций главного вектора $\bar{W}_v^{(\sigma)}$ сил-реактивных и внешних по отношению к системе G и приложенных к телу $G_v^{(\sigma)}$, — взятых на оси $x_v^{(\sigma)}$, $y_v^{(\sigma)}$, $z_v^{(\sigma)}$.

Выпишем теперь матрицу-строку $M_v^{*(\sigma)}$ проекций главного момента $\bar{M}_v^{(\sigma)}$ этих же сил (т. е. реактивных и внешних по отношению к системе G и приложенных к телу $G_v^{(\sigma)}$) относительно начала $O_v^{(\sigma)}$ системы координат, связанной с телом $G_v^{(\sigma)}$ на оси $x_v^{(\sigma)}$, $y_v^{(\sigma)}$, $z_v^{(\sigma)}$ этой системы:

$$M_v^{*(\sigma)} = e_v^* \bar{M}_v^{(\sigma)} = e_v^{*(\sigma)} \sum_{G_v^{(\sigma)}} \bar{r}_{iv} \times \bar{W}_{iv}^{(\sigma)}.$$

$$(e_v^{*(\sigma)} = \| \bar{i}_v^{(\sigma)}, \bar{j}_v^{(\sigma)}, \bar{k}_v^{(\sigma)} \|).$$

По формуле (2.32)

$$M_v^{*(\sigma)} = - \sum_{G_v^{(\sigma)}} W_{iv}^{*(\sigma)} \tilde{\theta}_{iv}^{(\sigma)}. \quad (4.20)$$

Выполнив указанные преобразования в обеих частях уравнения и замечая, что в силу равенств (2.24) и (2.26)

$$\dot{l}_{v0}^{(\sigma)} = -\tilde{\omega}_{v0}^{(\sigma)} l_v^{(\sigma)}, \quad \ddot{l}_{v0}^{(\sigma)} = [(\tilde{\omega}_{v0}^{(\sigma)})^2 - \ddot{\omega}_{v0}^{(\sigma)}] l_{v0}^{(\sigma)},$$

получим

$$\begin{aligned} & m^{(0)} \omega^* \tilde{c}^{(0)} + \sum_{G_0} m_i \theta_i^* \tilde{\omega}^2 \tilde{\theta}_i - \sum_{G_0} m_i \theta_i^* \tilde{\omega} \tilde{\theta}_i + \\ & + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} \left\{ m_v^{(\sigma)} [\omega^* + \ddot{S}_v^{*(\sigma)} - 2\dot{S}_v^{*(\sigma)} \tilde{\omega} + \right. \\ & + S_v^{*(\sigma)} (\tilde{\omega}^2 - \ddot{\omega})] (\tilde{S}_v^{(\sigma)} + l_{v0}^{(\sigma)T} \tilde{c}_v^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)}) + \\ & + m_v^{(\sigma)} c_v^{*(\sigma)} [\ddot{l}_{v0}^{(\sigma)} - 2\dot{l}_{v0}^{(\sigma)} \tilde{\omega} + l_{v0}^{(\sigma)} (\tilde{\omega}^2 - \ddot{\omega})] \tilde{S}_v^{(\sigma)} + \\ & + \sum_{G_v^{(\sigma)}} m_{iv}^{(\sigma)} [\theta_{iv}^{*(\sigma)} (\tilde{\omega}_{v0}^{(\sigma)})^2 \tilde{\theta}_{iv}^{(\sigma)} - \theta_{iv}^{*(\sigma)} \tilde{\omega}_{v0}^{(\sigma)} \tilde{\theta}_{iv}^{(\sigma)} + \\ & + 2\theta_{iv}^{*(\sigma)} \tilde{\omega}_{v0}^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} \tilde{\omega} l_{v0}^{(\sigma)T} \tilde{\theta}_{iv}^{(\sigma)} + \theta_{iv}^{*(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} \tilde{\omega}^2 l_{v0}^{(\sigma)T} \tilde{\theta}_{iv}^{(\sigma)} - \\ & \left. - \theta_{iv}^{*(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} \tilde{\omega} l_{v0}^{(\sigma)T} \tilde{\theta}_{iv}^{(\sigma)}] l_{v0}^{(\sigma)} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \sum_{\sigma=1}^s \sum_{\nu=1}^{n_{\sigma}} \left(\sum_{G_{\nu}^{(\sigma)}} W_{i\nu}^{*(\sigma)} l_{\nu 0}^{(\sigma)} \tilde{S}_{\nu}^{(\sigma)} + \right. \\ \left. + \sum_{G_{\nu}^{(\sigma)}} W_{i\nu}^{*(\sigma)} \tilde{\theta}_{i\nu}^{(\sigma)} l_{\nu 0}^{(\sigma)} \right) - M^{*(0)}. \quad (4.21)$$

Завершим суммирование по всем частицам тел G_0 и $G_{\nu}^{(\sigma)}$ в левой части равенства (4.21).

В силу соотношения (3.12)

$$\sum_{G_0} m_i \theta_i^* \tilde{\omega} \tilde{\theta}_i = \dot{\omega}^* I^{(0)}, \\ \sum_{G_{\nu}^{(\sigma)}} m_{i\nu}^{(\sigma)} \theta_{i\nu}^{*(\sigma)} \tilde{\omega}_{\nu 0}^{(\sigma)} \tilde{\theta}_{i\nu}^{(\sigma)} = \dot{\omega}_{\nu 0}^{*(\sigma)} I_{\nu}^{(\sigma)}.$$

В силу соотношения (3.15)

$$\sum_{G_0} m_i \theta_i^* \tilde{\omega}^2 \tilde{\theta}_i = \omega^* I^{(0)} \tilde{\omega}, \\ \sum_{G_{\nu}^{(\sigma)}} m_{i\nu}^{(\sigma)} \theta_{i\nu}^{*(\sigma)} (\tilde{\omega}_{\nu 0}^{(\sigma)})^2 \tilde{\theta}_{i\nu}^{(\sigma)} = \omega_{\nu 0}^{*(\sigma)} I_{\nu}^{(\sigma)} \tilde{\omega}_{\nu 0}^{(\sigma)}.$$

В силу соотношения (3.17)

$$\sum_{G_{\nu}^{(\sigma)}} m_{i\nu}^{(\sigma)} \theta_{i\nu}^{*(\sigma)} \tilde{\omega}_{\nu 0}^{(\sigma)} l_{\nu 0}^{(\sigma)} \tilde{\omega} l_{\nu 0}^{(\sigma) T} \tilde{\theta}_{i\nu}^{(\sigma)} = \\ = \omega^* l_{\nu 0}^{(\sigma) T} (I_{\nu}^{(\sigma)} - k_{\nu}^{(\sigma)} \mathcal{E}) \tilde{\omega}_{\nu 0}^{(\sigma)}, \\ k_{\nu}^{(\sigma)} = \frac{1}{2} (A_{\nu}^{(\sigma)} + B_{\nu}^{(\sigma)} + C_{\nu}^{(\sigma)}).$$

В силу соотношения (3.18)

$$\sum_{G_{\nu}^{(\sigma)}} m_{i\nu}^{(\sigma)} \theta_{i\nu}^{*(\sigma)} l_{\nu 0}^{(\sigma)} \tilde{\omega}^2 l_{\nu 0}^{(\sigma) T} \tilde{\theta}_{i\nu}^{(\sigma)} = -\omega^* l_{\nu 0}^{(\sigma) T} I_{\nu}^{(\sigma)} \tilde{\omega} l_{\nu 0}^{(\sigma) T}.$$

В силу соотношения (3.19)

$$\sum_{G_{\nu}^{(\sigma)}} m_{i\nu}^{(\sigma)} \theta_{i\nu}^{*(\sigma)} l_{\nu 0}^{(\sigma)} \tilde{\omega} l_{\nu 0}^{(\sigma) T} \tilde{\theta}_{i\nu}^{(\sigma)} = \dot{\omega}^* l_{\nu 0}^{(\sigma) T} I_{\nu}^{(\sigma)}.$$

При суммировании по всем частицам тел $G_{\nu}^{(\sigma)}$ в правой части равенства (4.21) учтем соотношения (4.19) и (4.20). Матрицу ω^* заменим ее выражением (2.29). Перенесем в левую часть равенства (4.19) все члены, содержащие матрицу-строку $\tilde{\omega} = d\tilde{\omega}/dt$ углового ускорения,

а в правую—все остальные члены. Наконец, вынесем за скобку матрицу $\tilde{\omega}$; для этого преобразования воспользуемся соотношениями

$$S_v^{*(\sigma)} \tilde{\omega} = -\dot{\omega}^* \tilde{S}_v^{(\sigma)},$$

$$c_v^{*(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} \tilde{\omega} = \dot{\omega}^* \overline{(c_v^{*(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)})} = -\dot{\omega}^* l_{v0}^{(\sigma)T} \tilde{c}_v^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)},$$

следующим из тождеств (2.31) и (2.33). В итоге, получим матричное уравнение вращательного движения самолета в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{d\omega^*}{dt} \left\{ I^{(0)} + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_{\sigma}} [l_{v0}^{(\sigma)T} I_v^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} - \right. \\ & \left. - m_v^{(\sigma)} \tilde{S}_v^{(\sigma)} (\tilde{S}_v^{(\sigma)} + l_{v0}^{(\sigma)T} \tilde{c}_v^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)}) - m_v^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)T} \tilde{c}_v^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)T} \tilde{S}_v^{(\sigma)}] \right\} = \\ & = M^{*(0)} + m^{(0)} (\dot{v}^* - v^{*T} \tilde{\omega}) \tilde{c}^{(0)} + \dot{\omega}^* I^{(0)} \tilde{\omega} + \\ & + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_{\sigma}} \{ M_v^{*(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} - W_v^{*(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} \tilde{S}_v^{(\sigma)} + m_v^{(\sigma)} [\dot{v}^* - \\ & - v^{*T} \tilde{\omega} + \tilde{S}_v^{*(\sigma)} - 2\tilde{S}_v^{*(\sigma)} \tilde{\omega} + S_v^{*(\sigma)} \tilde{\omega}^2] (\tilde{S}_v^{(\sigma)} + \\ & + l_{v0}^{(\sigma)T} \tilde{c}_v^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)}) + m_v^{(\sigma)} c_v^{*(\sigma)} [(\tilde{\omega}_{v0}^{(\sigma)})^2 - \tilde{\omega}_{v0}^{(\sigma)} + \\ & + 2\tilde{\omega}_{v0}^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} \tilde{\omega} l_{v0}^{(\sigma)T} + l_{v0}^{(\sigma)} \tilde{\omega}^2 l_{v0}^{(\sigma)T}] l_{v0}^{(\sigma)} \tilde{S}_v^{(\sigma)} + \\ & + [\omega_{v0}^{*(\sigma)} l_v^{(\sigma)} \tilde{\omega}_{v0}^{(\sigma)} - \dot{\omega}_{v0}^{*(\sigma)} l_v^{(\sigma)} + 2\omega_{v0}^{*(\sigma)T} l_v^{(\sigma)} - \\ & - k_v^{(\sigma)} \mathcal{E}] \tilde{\omega}_{v0}^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} - \dot{\omega}^* l_{v0}^{(\sigma)T} l_v^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} \tilde{\omega} \}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Матричное уравнение (4.22) выписано в виде, не разрешенном относительно матрицы $\dot{\omega}^* = d\omega^*/dt$. Уравнение (4.22) всегда можно разрешить, умножив его обе части на матрицу, обратную по отношению к матричной сумме, заключенной в фигурных скобках в левой части уравнения. Эта обратная матрица существует, так как ее элементы, в силу ее происхождения, представляют собой моменты инерции всей системы G (относительно системы координат $Nxyz$). По физическому смыслу матрицы моментов инерции, ее определитель никогда не обращается в нуль. Однако в прикладных задачах подчас нет надобности разрешать уравнение (4.22) относительно производной $\dot{\omega}^*$, так как цифровые счетно-решающие устройства и электронные модели

позволяют исследовать соответствующую систему скалярных уравнений в виде, не разрешенном относительно производных от независимых переменных. По этой же причине, нет надобности заменять в правой части уравнения (4.22) производную $\dot{v}^* = dv^*/dt$ ее выражением (4.12) и исключать производную $\dot{\omega}$ в правой части уравнения (4.12).

Как и в п. «а», рассмотрим в качестве внешних сил силы аэродинамические и тяжести. Рассмотрим слагаемое

$$\sum_M^* = \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} (M_v^{*(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} - W_v^{*(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} \tilde{S}_v^{(\sigma)}) + M^{*(0)} \quad (4.23)$$

правой части матричного уравнения (4.22).

Составляющую $(\sum_M^*)_A$ этого слагаемого, обусловленную аэродинамическими силами, преобразуем с помощью обобщенного моментного аэродинамического коэффициента $\bar{m}_G$:

$$\bar{m}_G = m_{Gx} \bar{i} + m_{Gy} \bar{j} + m_{Gz} \bar{k};$$

$$(\sum_M^*)_A = \frac{1}{2} S_d b_d \rho v_e^2 m_G^*,$$

где

$$m_G^* = \| m_{Gx}, m_{Gy}, m_{Gz} \|.$$

Коэффициенты m_{Gx} , m_{Gy} , m_{Gz} выражают влияние совокупности тел $G_v^{(\sigma)}$ и G_0 на величину и направление главного момента аэродинамических сил, действующего на систему G . Подобно коэффициентам C_{Gx} , C_{Gy} , C_{Gz} , моментные коэффициенты m_{Gx} , m_{Gy} , m_{Gz} зависят от координат $\psi_v^{(\sigma)}$, $\vartheta_v^{(\sigma)}$, $\gamma_v^{(\sigma)}$, $d_{v-1}^{(\sigma)}$, $e_{v-1}^{(\sigma)}$, $f_{v-1}^{(\sigma)}$, α , β , v и H (иногда и от их производных) и параметров подобия.

Составляющая $(\sum_M^*)_g$ матрицы $\sum_M^*$, обусловленная силами тяжести тел системы, отлична от нуля, коль скоро центр масс системы G не совпадает с началом N системы координат, связанной с основным телом. Считая поле тяготения по-прежнему однородным в габаритном объеме самолета, подсчитаем составляющие матриц $(M^{*(0)})_g$ и $(M_v^{*(\sigma)})_g$ соответственно, происходящие от силы тяжести. По формуле (4.20)

$$(M_v^{*(\sigma)})_g = - \sum_{G_v^{(\sigma)}} m_{iv}^{(\sigma)} g_v^{*(\sigma)} \tilde{\theta}_{iv}^{(\sigma)} = - g_v^{*(\sigma)} \sum_{G_v^{(\sigma)}} m_{iv}^{(\sigma)} \tilde{\theta}_{iv}^{(\sigma)},$$

где $g_v^{*(\sigma)}$ — матрица-строка проекций ускорения g на оси $x_v^{(\sigma)}, y_v^{(\sigma)}, z_v^{(\sigma)}$. В силу соотношения (2.6)

$$g_v^{*(\sigma)} = g^* L^T l_{v0}^{(\sigma)} = g^* L^T l_{v0}^{(\sigma)T}$$

и

$$(M_v^{*(\sigma)})_g = -m_v^{(\sigma)} g^* l_{v0}^{(\sigma)T} \tilde{c}_v^{(\sigma)}. \quad (4.24)$$

Подобным же образом

$$(M^{*(0)})_g = -m^{(0)} g^* L^T \tilde{c}^{(0)}.$$

Подсчитаем составляющие $(W^{*(0)})_g$ и $(W^{*(\sigma)})_g$ матриц $W^{*(0)}$ и $W_v^{*(\sigma)}$ соответственно, происходящие от силы тяжести. По формуле (4.19)

$$(W^{*(\sigma)})_g = \sum_{G_v^{(\sigma)}} m_{iv}^{(\sigma)} g_v^{*(\sigma)} = m_v^{(\sigma)} g_v^{*(\sigma)}.$$

При подсчете моментов от реактивных сил рассмотрим случай, когда газовая струя является однородной в каждом сопле системы G . Обозначим через $\bar{P}_v^{(\sigma)}$ главный вектор реактивных сил, приложенных к телу $G_v^{(\sigma)}$. Тогда составляющая $(M_v^{*(\sigma)})_P$ матрицы $M_v^{*(\sigma)}$, обусловленная реактивными силами, представляет собой матрицу-строку проекций момента главного вектора $\bar{P}_v^{(\sigma)}$ относительно начала $O_v^{(\sigma)}$, взятых на оси $x_v^{(\sigma)}, y_v^{(\sigma)}, z_v^{(\sigma)}$:

$$(M_v^{*(\sigma)})_P = e_v^{*(\sigma)} \bar{r}_v^{(\sigma)} \times \bar{P}_v^{(\sigma)},$$

где $\bar{r}_v^{(\sigma)} = x_v^{(\sigma)} \bar{i}_v^{(\sigma)} + y_v^{(\sigma)} \bar{j}_v^{(\sigma)} + z_v^{(\sigma)} \bar{k}_v^{(\sigma)}$ — радиус-вектор произвольной точки, лежащей на линии действия вектора $\bar{P}_v^{(\sigma)}$. С помощью тождества (2.32) приведем последнее равенство к виду:

$$(M_v^{*(\sigma)})_P = -P_v^{*(\sigma)} \tilde{\theta}_v^{(\sigma)},$$

где

$$\theta_v^{*(\sigma)} = \bar{r}_v^{(\sigma)} e_v^{*(\sigma)} = \|x_v^{(\sigma)}, y_v^{(\sigma)}, z_v^{(\sigma)}\|.$$

Подобным же образом составляющая $(M^{*(0)})_P$ матрицы $M^{*(0)}$, обусловленная реактивной силой, приложенной к основному телу, определяется соотношением:

$$(M^{*(0)})_P = -P^{*(0)} \tilde{\theta}^{(0)},$$

где $\theta^{*(0)} = \|x_0, y_0, z_0\|$ — матрица-строка координат x_0, y_0, z_0 любой точки на линии действия главного вектора

$\bar{P}^0$ реактивных сил, приложенных к основному телу. Что касается составляющей $(W_v^{*(\sigma)})_P$ матрицы $W_v^{*(\sigma)}$, обусловленной реактивной силой, приложенной к телу $G_v^{*(\sigma)}$, то по определению $(W_v^{*(\sigma)})_P = P_v^{*(\sigma)}$.

Подставив подсчитанные выражения в левую часть равенства (4.23), получим следующее выражение для матриц внешних и реактивных сил в рассматриваемом случае:

$$\begin{aligned} \Sigma_M^* &= \frac{1}{2} S_d b_d q v_e^2 m_G^* - g^* L^T [m^{(0)} \tilde{c} + \\ &+ \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} m_v^{(\sigma)} (\tilde{S}_v^{(\sigma)} + l_{v0}^{(\sigma)T} \tilde{c}_v^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)})] - \\ &- P^{*(0)} \tilde{\theta}^{(0)} - \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} P_v^{*(\sigma)} (\tilde{\theta}_v^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} + l_{v0}^{(\sigma)T} \tilde{S}_v^{(\sigma)}). \end{aligned}$$

Итак, если внешние силы, приложенные к самолету, сводятся к силам тяжести и аэродинамической, вращательное движение самолета описывается матричным уравнением

$$\begin{aligned} \frac{d\omega^*}{dt} \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} \{ I^{(0)} + l_{v0}^{(\sigma)T} I_v^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} - m_v^{(\sigma)} [(\tilde{S}_v^{(\sigma)})^2 + U_v^{(\sigma)} + \\ + U_v^{(\sigma)T}] \} = \omega^* I^{(0)} \tilde{\omega} + \frac{1}{2} S_d b_d q v_e^2 m_G^* - P^{*(0)} \tilde{\theta}^{(0)} + \\ + (\dot{v}^* - v^* \tilde{\omega} - g^* L^T) \left[m^{(0)} \tilde{c}^{(0)} + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} m_v^{(\sigma)} (\tilde{S}_v^{(\sigma)} + \right. \\ \left. + l_{v0}^{(\sigma)T} \tilde{c}_v^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)}) \right] - \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} P_v^{*(\sigma)} (\tilde{\theta}_v^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} + \\ + l_{v0}^{(\sigma)T} \tilde{S}_v^{(\sigma)}) + \sum_{\sigma=1}^s \sum_{v=1}^{n_\sigma} \{ m_v^{(\sigma)} (\ddot{S}_v^{(\sigma)} - 2 \dot{S}_v^{(\sigma)} \tilde{\omega} + \\ + S_v^{*(\sigma)} \tilde{\omega}^2) (\tilde{S}_v^{(\sigma)} + l_{v0}^{(\sigma)T} \tilde{c}_v^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)}) + m_v^{(\sigma)} c_v^{*(\sigma)} [(\tilde{\omega}_{v0}^{(\sigma)})^2 - \\ - \tilde{\omega}_{v0}^{(\sigma)} + 2 \tilde{\omega}_{v0}^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} \tilde{\omega} l_{v0}^{(\sigma)T} + l_{v0}^{(\sigma)} \tilde{\omega}^2 l_{v0}^{(\sigma)T}] l_{v0}^{(\sigma)} \tilde{S}_v^{(\sigma)} + \\ + [\omega_{v0}^{*(\sigma)} I_v^{(\sigma)} \tilde{\omega}_{v0}^{(\sigma)} - \dot{\omega}_{v0}^{*(\sigma)} I_v^{(\sigma)} + 2 \omega^* l_{v0}^{(\sigma)T} (I_v^{(\sigma)} - \\ - k_v^{(\sigma)} \mathcal{E}) \tilde{\omega}_{v0}^{(\sigma)}] l_{v0}^{(\sigma)} - \omega^* l_{v0}^{(\sigma)T} I_v^{(\sigma)} l_{v0}^{(\sigma)} \tilde{\omega} \}, \quad (4.25) \end{aligned}$$

причем

$$U_v^{(s)} = \tilde{S}_v^{(s)} l_{v0}^{(s)T} \tilde{c}_v^{(s)} l_{v0}^{(s)}.$$

З а м е ч а н и е. Матричные уравнения (4.12) и (4.25) динамики полета самолета, как системы G тел переменного состава, есть уравнения абсолютного движения самолета, так как они получены путем преобразований из уравнений (4.1) и (4.2) абсолютного движения точки переменного состава. Неизвестными величинами являются линейные и угловые координаты самолета, а именно абсолютные координаты X, Y, Z начала N , связанного с основным телом самолета, и абсолютные угловые координаты ψ, ϑ, γ , определяющие угловое положение системы xyz , связанной с основным телом, в неподвижном пространстве. Матрицы v^* и ω^* , связаны с матрицами R^* и Λ^* (§ 8) кинематическими дифференциальными уравнениями, приведенными в § 8 и в п. 3 § 10.

Совокупная система дифференциальных уравнений (4.12) и (4.25) динамики и указанных кинематических уравнений полностью описывает абсолютное движение самолета при заданных внешних и реактивных силах и законах относительных перемещений в системе, включая перемещения органов управления. При переходе к скалярам получается система двенадцати уравнений относительно переменных $v_x, v_y, v_z, p, q, r, X, Y, Z, \psi, \vartheta, \gamma$. В правых частях уравнений (4.12) и (4.25) не учтены силы инерции, возникающие за счет относительного движения газовых струй в сопловых каналах. Эти силы подробно описаны в литературе.

§ 15. Некоторые прикладные задачи

1. Составить уравнения движения самолета с качающимся двигателем.

Рассмотрим самолет, в котором корпус двигателя подвешен шарнирно в корпусе самолета (рис. 32). Основное тело — корпус самолета — представляет собой твердое тело G_c . Подвес двигателя в основном теле выполнен следующим образом: около оси, неподвижной в основном теле, может поворачиваться кольцо $G_{C1}^{(1)}$, также являющееся твердым телом. Корпус двигателя может качаться по отношению к кольцу $G_{C1}^{(1)}$ около оси, закрепленной в этом кольце. Оси вращения кольца $G_{C1}^{(1)}$ в основном

теле и корпуса двигателя в кольце $G_{C1}^{(1)}$ перпендикулярны и пересекаются. Точку пересечения этих осей назовем центром подвеса. Двигатель представляет собой твердое тело $G_2^{(1)}$ переменного состава. Его неизменяемая часть $G_{C2}^{(1)}$ выполнена в виде жесткого соединения внутреннего кольца подвеса, показанного на рис. 32, с корпусом топливной шашки. Твердое топливо, показанное на рис. 32

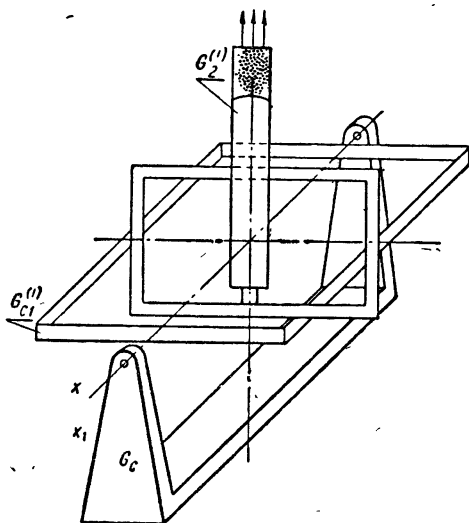


Рис. 32

точками, заполняет сопловой канал корпуса шашки. Реактивная струя вытекает из соплового канала в направлении, указанном стрелками.

Двигатель в шарнирном подвесе может применяться для управления линейным и угловым движением самолета (§ 3). Таким образом, в данном случае самолет, как система G , состоит из трех тел:

$$G = G_C + G_{C1}^{(1)} + G_2^{(1)},$$

причем тело $G_2^{(1)}$ — двигатель — является твердым телом переменного состава, а остальные тела суть твердые. Очевидно, что $s = 1$, $n_1 = 2$. В качестве неподвижной системы зададим основную (§ 1).

Введем системы координат, по отношению к которым определяются параметры системы G , входящие в уравнения (4.12) и (4.25). Начала N , $O_1^{(1)}$, $O_2^{(1)}$ систем координат, связанных с телами G_C , $G_{C1}^{(1)}$, $G_{C2}^{(1)}$, выберем в одной и той же точке — центре шарнирного подвеса двигателя. По конструкции подвеса, его центр является неподвижной точкой для тел $G_{C1}^{(1)}$ и $G_{C2}^{(1)}$ по отношению к основному телу G_C . Ось x навигационной системы $Nxyz$, связанной с основным телом, проведем по оси вращения кольца $G_{C1}^{(1)}$ в основном теле, причем пусть эта ось является главной осью тела G_C в точке N , тогда оси y и z проведем в теле G_C по главным направлениям в нем по правилу правой системы. Центр масс тела G_C в общем случае не совпадает с центром N подвеса и находится в точке с координатами c_1, c_2, c_3 в системе $Nxyz$, $\|c_1, c_2, c_3\| = c^* = \text{const}$. Ось качания двигателя в кольце $G_{C1}^{(1)}$ выберем за ось $z_1^{(1)}$ системы координат $Nx_1^{(1)}y_1^{(1)}z_1^{(1)}$, связанной с этим кольцом. Ось $x_1^{(1)}$ примем совпадающей с осью x вращения кольца в основном теле, а ось $y_1^{(1)}$ проведем по правилу правой системы. По конструкции кольца, оси $x_1^{(1)}$, $y_1^{(1)}$ и $z_1^{(1)}$ являются осями его симметрии, т. е. главными и центральными, следовательно $c_1^{*(1)} = 0$.

Назовем осью двигателя ось соплового канала, вдоль которой направлена и тяга $\bar{P}_2^{(1)} = \bar{P}$ двигателя. По конструкции, корпус двигателя скреплен с внутренним кольцом так, что ось двигателя проходит через центр подвеса — общее начало N систем координат, связанных с телами G_C , $G_{C1}^{(1)}$, $G_{C2}^{(1)}$. Ось двигателя примем за ось $x_2^{(1)}$ системы $Nx_2^{(1)}y_2^{(1)}z_2^{(1)}$, связанной с неизменяемой частью $G_{C2}^{(1)}$ двигателя $G_2^{(1)}$.

Направим ось $x_2^{(1)}$ в сторону выброса газовой струи, тогда

$$\bar{P} = -P_2^{(1)}.$$

Ось $z_2^{(1)}$ выберем совпадающей с осью $z_1^{(1)}$ качания двигателя в кольце $G_{C1}^{(1)}$, ось $y_2^{(1)}$ проведем по правилу правой системы. Предположим, что выгорание твердого топлива происходит симметрично относительно оси двигателя и что неизменяемая часть двигателя симметрична

относительно этой же оси. Тогда центр масс двигателя $G_2^{(1)}$ всегда находится на его оси (оси $x_2^{(1)}$), и $c_2^{(2)} \equiv c_3^{(2)} \equiv 0$. Координату $c_2^{(1)}$ центра масс двигателя, равную текущему расстоянию этого центра от центра подвеса, обозначим для простоты записи через c ; $c \equiv c(t)$. Следовательно, $c_2^{*(1)} = \|c, 0, 0\|$.

Зададим относительные угловые координаты двигателя. Перемещение двигателя по отношению к кольцу $G_{C1}^{(1)}$ определяется углом $\chi = \angle(x_2^{(1)}, y_1^{(1)})$, перемещение коль-

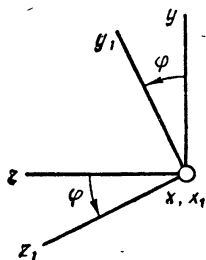


Рис. 33

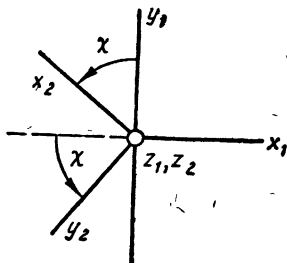


Рис. 34

ца $G_{C1}^{(1)}$ по отношению к основному телу — углом $\varphi = \angle(y_1^{(1)}, y)$. Правила отсчета углов φ и χ показаны на рис. 33 и 34.

Для составления уравнений движения системы G в скалярном виде выпишем матрицы, входящие в уравнения (4.12) и (4.25), и выполним соответствующие действия над матрицами.

В силу правил отсчета углов φ и χ :

$$l_{10}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix};$$

$$l_{21}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\sin \chi & \cos \chi & 0 \\ -\cos \chi & -\sin \chi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из описания системы следует, что $S_1^{*(1)} = S_2^{*(1)} = 0$, поэтому в уравнениях (4.25) $U_1^{(1)} = U_2^{(1)} = 0$,

$$I^{(0)} = \begin{vmatrix} A^{(0)} & 0 & 0 \\ 0 & B^{(0)} & 0 \\ 0 & 0 & C^{(0)} \end{vmatrix},$$

$$I_1^{(1)} = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_k & 0 & 0 \\ 0 & B_k & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{C}_k \end{vmatrix},$$

$$I_2^{(1)} = \begin{vmatrix} A_g & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{A}_g & -D_g \\ 0 & -D_g & \mathcal{A}_g \end{vmatrix}.$$

Здесь для краткости записи момент инерции $A_2^{(1)}$ обозначен через A_g и т. д. Применительно к телам, имеющим ось симметрии (массовой) символ $\mathcal{A}$ означает экваториальный момент инерции.

Масса m всей системы определяется равенством

$$m = m^{(0)} + m_1^{(1)} + m_2^{(1)},$$

причем $m_2^{(1)} \equiv m_2^{(1)}(t)$, а массы остальных составляющих тел постоянны.

Подсчитаем матрицы $\omega_{10}^{*(1)}$ и $\omega_{20}^{*(1)}$ относительных угловых скоростей. По формуле (2.23)

$$\overline{\omega_{10}^{(1)}} = -\dot{l}_{10}^{(1)} l_{10}^{(1)T} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\varphi} \\ 0 & \dot{\varphi} & 0 \end{vmatrix},$$

т. е.

$$\omega_{10}^{*(1)} = \|\dot{\varphi}, 0, 0\|.$$

Эту матрицу можно подсчитать и с помощью кинематических уравнений Эйлера (2.25), записанных через направляющие косинусы $l_{gh}^{(10,1)}$ элементы матрицы $l_{10}^{(1)}(g, h = 1, 2, 3)$.

Например,

$$\begin{aligned} p_{10}^{(1)} &= l_{31}^{(10,1)} \dot{l}_{21}^{(10,1)} + l_{32}^{(10,1)} \dot{l}_{22}^{(10,1)} + l_{33}^{(10,1)} \dot{l}_{23}^{(10,1)} = \\ &= (-\sin \varphi) (-\dot{\varphi} \sin \varphi) + \cos \varphi (\dot{\varphi} \cos \varphi) = \dot{\varphi}, \\ q_{10}^{(1)} &= r_{10}^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Таким же образом $\omega_{21}^{*(1)} = \| 0, 0, \dot{\chi} \|$. Применяя соотношение (2.37), найдем, что

$$\omega_{20}^{*(1)} = \omega_{21}^{*(1)} + \omega_{10}^{*(1)} l_{21}^{(1)T} = \| -\dot{\varphi} \sin \chi, -\dot{\varphi} \cos \chi, \dot{\chi} \|.$$

Приступим к подсчету матриц сил — внешних и реактивных. В уравнении (4.12) сила тяжести учитывается с помощью матрицы $g^* L^T$. Так как за неподвижную систему принята основная система, то элементы матрицы $g^* = \| g_x, g_y, g_z \|$ суть проекции ускорения $\bar{g}$ силы тяжести в точке пространства, совпадающей в каждый момент времени с точкой приложения главного вектора сил тяжести системы G , на оси основной системы. Величины g_x и g_z представляют собой проекции ускорения g в этой точке на оси X и Z основной системы. Эти оси проведем в плоскости небесного экватора. Величина g_y представляет собой проекцию ускорения g на ось мира.

Исходя из критерия типа «а» § 1, поле тяготения Земли условимся считать в данной задаче центральным с центром, находящимся в точке пересечения плоскости экватора с осью вращения Земли (осью мира). Линия действия ускорения силы тяжести в данной задаче проходит через начало O неподвижной системы. Пользуясь вновь критерием типа «а» § 1, сделаем еще одно упрощающее предположение: при описании поступательного движения за точку приложения главного вектора сил тяжести системы G примем начало N навигационной системы координат (§ 13).

Благодаря указанным двум предположениям подсчет матрицы $g^* L^T$ значительно упрощается ценой потери в точности, несущественной при полетах с работающим двигателем, продолжающихся не слишком долго. Выразим прямоугольные абсолютные координаты подвижного начала через его сферические координаты (п. «а» § 13) R, λ, Φ_c в неподвижном пространстве:

$$X = R \cos \lambda \cos \Phi_c, \quad Y = R \sin \lambda, \quad Z = -R \cos \lambda \sin \Phi_c.$$

Ускорение $\bar{g}$ действует вдоль абсолютного радиуса-вектора $\bar{R} = \overline{ON}$ точки N и направлено противоположно вектору $\bar{R}$. Следовательно, направляющие косинусы ускорения $\bar{g}$ в неподвижной системе координат равны:

$$\cos(\bar{g}, X) = -\frac{X}{R} = -\cos \lambda \cos \Phi_c, \quad \cos(\bar{g}, Y) = -\sin \lambda,$$

$$\cos(\bar{g}, \bar{Z}) = \cos \lambda \sin \Phi_C,$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} g^* &= \bar{g} \parallel \bar{X}^\circ, \bar{Y}^\circ, \bar{Z}^\circ \parallel = \\ &= -g \parallel \cos \lambda \cos \Phi_C, \sin \lambda, -\cos \lambda \sin \Phi_C \parallel \end{aligned}$$

и

$$g^* L^T = \|g_x, g_y, g_z\|,$$

где

$$g_x = -(L_{11} \cos \lambda \cos \Phi_C + L_{12} \sin \lambda - L_{13} \cos \lambda \sin \Phi_C) \quad (4.26)$$

и т. д.

Косинусы

$$L_{gh} = L_{gh}(\psi, \vartheta, \gamma) \quad (g, h = 1, 2, 3)$$

определяются равенством (2.15). Подчеркнем, что углы ψ, ϑ, γ — соответственно углы рыскания, тангажа и крена тела самолета по отношению к основной системе отсчета, а не по отношению к системе координат, связанной с Землей. Значение ускорения g в соотношениях (4.26) определяется зависимостью (§ 13):

$$g = g_0 \left(\frac{b_e}{R} \right)^2.$$

При подсчете аэродинамической силы, действующей на самолет, учтем, что наружная поверхность сопла двигателя принадлежит наружной поверхности самолета в силу ее определения (§ 1, 11). Действительно, сопло двигателя по самому его назначению непременно должно сообщаться с пространством, окружающим самолет. Поэтому аэродинамическая сила зависит, в числе прочих параметров, от угловых параметров φ и χ , определяющих текущее расположение двигателя в самолете (в общем случае, и от производных $\dot{\varphi}$ и $\dot{\chi}$). Эта зависимость обуславливается, главным образом, влиянием газов, извергаемых из сопла, на обдув части поверхности самолета, примыкающей к сопловому отверстию. Введем обобщенные аэродинамические коэффициенты самолета (п. «а» § 14): C_{gx}, C_{gy}, C_{gz} . Здесь эти коэффициенты зависят от переменных $\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \varphi, \chi, \dot{\varphi}, \dot{\chi}, v, H, Ma, Re$. Они определяются из газовой динамики или путем продувки само-

лета (или его модели) в аэродинамической трубе при включенном двигателе. Таким образом (п. «б» § 13, п. «а» § 14):

$$A^{*(0)} = \frac{1}{2} S_a q v_e^2 C_G^* = A^*,$$

$$C_G^* \equiv C_G^*(\alpha, \beta, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, \varphi, \chi, \dot{\varphi}, \dot{\chi}, v, H, Ma, Re).$$

Реактивная сила учитывается с помощью матрицы

$$P_2^{*(1)} = \|P, 0, 0\| = P^*,$$

причем величина тяги в общем случае может меняться со временем:

$$P \equiv P(t).$$

Уравнение (4.12) принимает применительно к данной задаче о движении самолета с качающимся двигателем следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dv^*}{dt} = & v^* \tilde{\omega} + g^* L^T + \frac{1}{m} \{ P^* l_{20}^{(1)} + A^* l_v^T + \\ & + m_2^{(1)} c_2^{*(1)} (2 \dot{l}_{20}^{(1)} \tilde{\omega} - \ddot{l}_{20}^{(1)}) - \\ & - [(m^{(0)} c^{*(0)} + m_2^{(1)} c_2^{*(1)} l_{20}^{(1)}) (\tilde{\omega}^2 - \dot{\tilde{\omega}})] \}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

В силу соотношений (2.26) и (2.24)

$$\ddot{l}_{20}^{(1)} = \left[\left(\overline{\omega_{20}^{(1)}} \right)^2 - \overline{\dot{\omega}_{20}^{(1)}} \right] l_{20}^{(1)}, \quad \dot{l}_{20}^{(1)} = -\tilde{\omega}_{20}^{(1)} l_{20}^{(1)}.$$

По формуле (2.7) имеем:

$$\begin{aligned} l_{20}^{(1)} &= l_{21}^{(1)} l_{10}^{(1)} = \\ &= \begin{vmatrix} -\sin \chi & \cos \chi \cos \varphi & \cos \chi \sin \varphi \\ -\cos \chi & -\sin \chi \cos \varphi & -\sin \chi \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Так как $c_2^{*(1)} = c \|1, 0, 0\|$, в каждой из матриц $\dot{l}_{20}^{(1)} = \sigma$ и $\ddot{l}_{20}^{(1)} = \mu$ понадобятся лишь элементы первой строки.

Очевидно, что

$$\sigma_{11} = -\dot{\chi} \cos \chi, \quad \sigma_{12} = -(\dot{\chi} \sin \chi \cos \varphi + \dot{\varphi} \cos \chi \sin \varphi),$$

$$\sigma_{13} = \dot{\varphi} \cos \varphi \cos \chi - \dot{\chi} \sin \chi \sin \varphi,$$

$$\mu_{11} = -\ddot{\chi} \cos \chi + \dot{\chi}^2 \sin \chi,$$

$$\begin{aligned}\mu_{12} &= -[(\ddot{\chi} \sin \chi + \dot{\chi}^2 \cos \chi) \cos \varphi - \\ &- 2\dot{\chi}\dot{\varphi} \sin \chi \sin \varphi + (\ddot{\varphi} \sin \varphi + \dot{\varphi}^2 \cos \varphi) \cos \chi], \\ \mu_{13} &= (\ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi) \cos \chi - \\ &- 2\dot{\chi}\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \chi - (\ddot{\chi} \sin \chi + \dot{\chi}^2 \cos \chi) \sin \varphi.\end{aligned}$$

Учитывая выражение матрицы l_v (п. 1 § 10), выражение матрицы $\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}$ (п. «а» § 9) и выполняя действия, указанные в правой части матричного уравнения (4.27), выпишем скалярные уравнения поступательного движения самолета:

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= v_y r - v_z q + g_x L_{11} + g_y L_{12} + g_z L_{13} + \\ &+ \frac{1}{m(t)} P(t) \sin \chi + \frac{1}{2m(t)} S_d Q v_e^2 (-C_{Gx} \cos \alpha \cos \beta + \\ &+ C_{Gy} \sin \alpha - C_{Gz} \cos \alpha \sin \beta) + \\ &+ \frac{m_2^{(1)}(t)}{m(t)} c(t) [2(\alpha_{12} r - \sigma_{13} q) - \mu_{11}] - \\ &- \frac{1}{m(t)} \{m^{(0)} c_1 + m_2^{(1)} c(t) [(r^2 + q^2) \sin \chi + \\ &+ (pq - \dot{r}) \cos \chi \cos \varphi + (pr + \dot{q}) \cos \chi \sin \varphi]\}.\end{aligned}$$

Два других уравнения составляются по такому же образцу. Воздушная скорость $v_e = v_v$ определяется соотношением (3.42), плотность воздуха — соотношением $\varrho \equiv \varrho(H)$, где высота H над уровнем моря задана выражением (3.42).

Перейдем к уравнениям (4.25) вращательного движения самолета.

Будем выписывать различные слагаемые в обеих частях уравнения (4.25):

$$\begin{aligned}& l_{10}^{(1)T} I_1^{(1)} l_{10}^{(1)} = \\ &= \left\| \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_k & 0 & 0 \\ 0 & B_k \cos^2 \varphi + \mathcal{E}_k \sin^2 \varphi & \frac{1}{2} (B_k - \mathcal{E}_k) \sin^2 \varphi \\ 0 & \frac{1}{2} (B_k - \mathcal{E}_k) \sin^2 \varphi & B_k \sin^2 \varphi + \mathcal{E}_k \cos^2 \varphi \end{array} \right\|, \\ & l_{20}^{(1)T} I_2^{(1)} l_{20}^{(1)} = \|\Lambda_{gh}\|, \quad (g, h = 1, 2, 3),\end{aligned}$$

где

$$\Lambda_{11} = A_g \sin^2 \chi + \mathcal{A}_g \cos^2 \chi,$$

$$\Lambda_{12} = \Lambda_{21} = \frac{1}{2} (\mathcal{A}_g - A_g) \cos \varphi \sin 2\chi - D_g \cos \chi \sin \varphi,$$

$$\Lambda_{13} = \Lambda_{31} = \frac{1}{2} (\mathcal{A}_g - A_g) \sin \varphi \sin 2\chi + D_g \cos \chi \cos \varphi, \dots$$

В правой части уравнения (4.25) член $\omega^* I^{(0)} \tilde{\omega}$ принимает вид:

$$\omega^* I^{(0)} \tilde{\omega} = \|(B^{(0)} - C^{(0)}) r q, (C^{(0)} - A^{(0)}) p r, (A^{(0)} - B^{(0)}) q p\|.$$

Реактивная тяга проходит через центр подвеса, поэтому $\tilde{\theta}_2^{(1)} = 0$. Тела G_C и $G_1^{(1)}$ — твердые, следовательно,

$$P^{*(0)} = P_1^{*(1)} = 0,$$

$$\tilde{c} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ -c & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Вычисляя последующие члены в уравнении (4.25), получим:

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma=1}^1 \sum_{\nu=1}^{n_\sigma} m_\nu^{(\sigma)} (S_\nu^{(\sigma)} + l_{\nu 0}^{(\sigma)T} \tilde{c}_\nu^{(\sigma)} l_{\nu 0}^{(\sigma)}) = \\ & = m_2^{(1)} c(t) \begin{vmatrix} 0 & \sin \chi \sin \varphi & -\sin \chi \cos \varphi \\ -\sin \varphi \sin \chi & 0 & \cos \chi \\ \cos \varphi \sin \chi & -\cos \chi & 0 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

$$\sum_{\sigma=1}^1 \sum_{\nu=1}^{n_\sigma} P_\nu^{*(\sigma)} (\tilde{\theta}_\nu^{(\sigma)} l_{\nu 0}^{(\sigma)} + l_{\nu 0}^{(\sigma)} \tilde{S}_\nu^{(\sigma)}) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma=1}^1 \sum_{\nu=1}^{n_\sigma} m_\nu^{(\sigma)} c_\nu^{*(\sigma)} [(\tilde{\omega}_{\nu 0}^{(\sigma)})^2 - \tilde{\omega}_{\nu 0}^{(\sigma)} + 2 \tilde{\omega}_{\nu 0}^{(\sigma)} l_{\nu 0}^{(\sigma)} \tilde{\omega} l_{\nu 0}^{(\sigma)T} + \\ & + l_{\nu 0}^{(\sigma)} \tilde{\omega}^2 l_{\nu 0}^{(\sigma)T}] l_{\nu 0}^{(\sigma)} \tilde{S}_\nu^{(\sigma)} = 0, \end{aligned}$$

так как для кольца и двигателя матрицы $\tilde{S}_1^{(1)}$ и $\tilde{S}_2^{(1)}$ равны нулю. Далее

$$\omega_{20}^{*(1)} l_2^{(1)} \tilde{\omega}_{20}^{(1)} l_{20}^{(1)} = \|j_1, j_2, j_3\|.$$

Здесь

$$j_1 = D_g \dot{\chi}^2 \sin \chi - \frac{1}{2} (A_g - \mathcal{D}_g) \dot{\varphi} \dot{\chi} \sin 2\chi, \dots,$$

$$\dot{\omega}_{10}^{*(1)} I_1^{(1)} l_{10}^{(1)} = \|\mathcal{D}_k \ddot{\varphi}, 0, 0\|,$$

$$\omega_{20}^{*(1)} = \|\ddot{\varphi} \sin \chi + \dot{\varphi} \dot{\chi} \cos \varphi\|,$$

$$-\ddot{\varphi} \cos \chi + \dot{\varphi} \dot{\chi} \sin \chi, \ddot{\chi}\|,$$

$$\dot{\omega}_{20}^{*(1)} I_2^{(1)} l_{20}^{(1)} = \|\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\|,$$

где

$$\varepsilon_1 = (A_g \sin^2 \chi + \mathcal{D}_g \cos^2 \chi) \ddot{\varphi} + \\ + \frac{1}{2} (A_g - \mathcal{D}_g) \dot{\varphi} \dot{\chi} \sin 2\chi + D_g \ddot{\chi} \cos \chi$$

и т. д.

Продолжая расчет, получим:

$$k_1^{(1)} = \frac{1}{2} (2\mathcal{D}_k + B_k), \quad k_2^{(1)} = \frac{1}{2} (2\mathcal{D}_g + A_g),$$

$$I_1^{(1)} - k_1^{(1)} \mathcal{E} = \left\| \begin{array}{ccc} -\frac{1}{2} B_k & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} (B_k - 2\mathcal{D}_k) & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} B_k \end{array} \right\|, \dots,$$

$$\omega^* l_{10}^{(1)T} (I_1^{(1)} - k_1^{(1)} \mathcal{E}) \widetilde{\omega}_{10}^{(1)} l_{10}^{(1)} = \dot{\varphi} \|\xi_1, \xi_2, \xi_3\|,$$

где $\xi_1 = 0$,

$$\xi_2 = (B_k - \mathcal{D}_k) q \sin 2\varphi - (B_k \cos 2\varphi + 2\mathcal{D}_k \sin^2 \varphi) r, \dots,$$

$$\omega^* l_{20}^{(1)T} (I_2^{(1)} - k_2^{(1)} \mathcal{E}) \widetilde{\omega}_{20}^{(1)} l_{20}^{(1)} = \|\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3\|.$$

Здесь

$$\Gamma_1 = \dot{\chi} \left[-\frac{A_g - \mathcal{D}_g}{2} p \sin 2\chi + \left(\frac{A_g}{2} \cos 2\chi - \mathcal{D}_g \cos^2 \chi \right) \times \right. \\ \left. \times (q \cos \varphi + r \sin \varphi) + D_g (r \cos \varphi - q \sin \varphi) \sin \chi \right], \dots$$

Наконец,

$$\omega^* l_{20}^{(1)T} I_2^{(1)} l_{20}^{(1)} \widetilde{\omega} = \|K_1, K_2, K_3\|,$$

где

$$K_1 = (A_g - \mathcal{D}_g) \left[qr \cos^2 \chi \cos 2\varphi - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -p(r \cos \varphi - q \sin \varphi) \frac{\sin 2\chi}{2} + (r^2 - q^2) \frac{\sin 2\varphi}{2} \cos^2 \chi \Big] + \\
& + D_g [(r^2 - q^2) \sin \chi \cos 2\varphi - 2qr \sin \chi \sin 2\varphi - \\
& - p(q \cos \varphi + r \sin \varphi) \cos \chi], \dots \\
& \omega^* l_{10}^{(1)T} l_1^{(1)} l_{10}^{(1)} \tilde{\omega} = \|L_1, L_2, L_3\|,
\end{aligned}$$

$$L_1 = (B_k - \mathcal{E}_k) \left[\frac{1}{2} (r^2 - q^2) \sin 2\varphi + qr \cos 2\varphi \right], \dots$$

Подставим полученные выражения в уравнения (4.25) вращательного движения самолета. Переходя к скалярам, получим дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}
& A \frac{dp}{dt} - F \frac{dq}{dt} - E \frac{dr}{dt} = \\
& = [B^{(0)} - C^{(0)} - (B_k - \mathcal{E}_k) \cos 2\varphi] qr + \\
& + \frac{1}{2} S_d b_d q v_e^2 m_{Gx} + [\dot{v}_y + v_x r - v_z p - \\
& - (g_x L_{21} + g_y L_{22} + g_z L_{23})] (m^{(0)} c_3 - m_2^{(1)} c \sin \varphi \sin \chi) + \\
& + [\dot{v}_z + v_y p - v_x q - (g_x L_{31} + g_y L_{32} + g_z L_{33})] \times \\
& \times [m_2^{(1)} c \cos \varphi \sin \chi - m^{(0)} c_2] + \\
& + j_1 - e_1 - \mathcal{E}_k \ddot{\varphi} + 2\Gamma_1 - K_1 - L_1.
\end{aligned}$$

Здесь $A, \dots, F$ — моменты инерции системы G в навигационной системе координат $Nxyz$.

$$A = A^{(0)} + \mathcal{E}_k + \Lambda_{11}, \dots$$

Два другие уравнения вращательного движения находятся таким же образом.

2. *Вывести уравнения движения самолета как твердого тела переменного состава.* Пусть самолет представляет собой твердое тело переменного состава. При отождествлении самолета с одним твердым телом переменного состава система G сводится к системе $G_s = G_c + G^*$ (п. «а» § 11), $s = 0$. Матричные уравнения (4.12) и (4.25) принимают вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dv^*}{dt} &= v^* \tilde{\omega} + g^* L^T + \frac{1}{m^{(0)}(t)} (P^{*(0)} + A^{*(0)} l_v^T) - \\
&- c^{*(0)} (\tilde{\omega}^2 - \dot{\tilde{\omega}}),
\end{aligned}$$

$$\frac{d\omega^*}{dt} I^{(0)} = \omega^* I^0 \tilde{\omega} + \frac{1}{2} S_d b_d q v_e^2 m_G^* - P^{*(0)} \tilde{b}^{(0)} + \\ + m^{(0)}(t) (\dot{v}^* - v^* \tilde{\omega} - g^* \tilde{L}^T) \tilde{c}^{(0)}(t).$$

За неподвижную систему отсчета примем географическую систему $S_{гг}$. Пусть поле тяжести — однородное, $\theta^{*(0)} = 0$, $c^{*(0)} = \|c(t), 0, 0\|$.

Учтем соотношения (3.28), (3.33), (3.34), (2.15) и выражение матрицы $\tilde{\omega}^2 - \tilde{\omega}$ (п. «а» § 9). Тогда перемещение начала N навигационной системы N хуз тела G_z определяется скалярными уравнениями

$$\frac{dv_x}{dt} = v_y r - v_z q + c(t) (r^2 + q^2) - g_0 \sin \vartheta + \\ + \frac{1}{m^{(0)}} \left\{ P^{(0)}(t) + \frac{1}{2} S_d q v^2 [-c_{vx}(\alpha, \beta, Ma, \delta_i) \cos \alpha \cos \beta + \right. \\ \left. + c_{vy}(\alpha, \beta, Ma, \delta_i) \sin \alpha - c_{vz}(\alpha, \beta, Ma, \delta_i) \cos \alpha \sin \beta] \right\}, \dots,$$

а движение тела G_z около начала N — скалярными уравнениями

$$\frac{dp}{dt} = \frac{\tilde{\Gamma}}{A^{(0)}(t)} \left\{ [B^{(0)}(t) - C^{(0)}(t)] q r + F^{(0)}(t) (\dot{q} - p r) + \right. \\ \left. + E^{(0)}(t) (\dot{r} + p q) + D^{(0)}(t) (q^2 - r^2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} S_d b_d q v^2 [m_{vx}(\alpha, \beta, p, q, r, Ma, Re, \delta_i) \cos \alpha \cos \beta + \right. \\ \left. + m_{vy}(\alpha, \beta, p, q, r, Ma, Re, \delta_i) \sin \alpha - \right. \\ \left. - m_{vz}(\alpha, \beta, p, q, r, Ma, Re, \delta_i) \cos \alpha \sin \beta] \right\}, \dots, \quad (4.29)$$

Символ δ_i под знаками аэродинамических коэффициентов указывает на зависимость последних от координат воздушных рулей, например,

$$m_{vx} = m_{vx}^{\alpha}(Ma) \alpha + m_{vx}^{\beta}(Ma) \beta + m_{vx}^p(Ma) p + \\ + m_{vx}^q(Ma) q + m_{vx}^r(Ma) r + m_{vx}^{\delta_a}(Ma) \delta_a + \\ + m_{vx}^{\delta_b}(Ma) \delta_b + m_{vx}^{\delta_n}(Ma) \delta_n.$$

§ 16. Уравнения продольного движения самолета

Полет самолета называется продольным, если его основное тело G_C совершает плоско-параллельное движение в плоскости, являющейся вертикальной в некоторой географической системе осей. Среди частных видов движения самолета продольный полет имеет особо важное значение, так как он охватывает прямолинейный и горизонтальный полет самолета, взлет, посадку и многие другие виды движения. Выпишем уравнения продольного движения самолета, как твердого тела переменного состава, в плоскости $S_{\xi\eta}$ географической системы координат $S_{\xi\eta\zeta}$, принимаемой здесь за неподвижную систему $OXYZ$.

По определению, в продольном полете

$$\dot{z} \equiv Z \equiv 0, \quad \beta \equiv 0, \quad v_z \equiv 0, \quad \psi \equiv \gamma \equiv 0. \quad (4.30)$$

Траектория начала N навигационной системы $N_{ху\zeta}$ самолета описывается уравнениями (2.41):

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= v_x \cos \vartheta - v_y \sin \vartheta, \\ \dot{Y} &= v_x \sin \vartheta + v_y \cos \vartheta. \end{aligned} \right\} \quad (4.31)$$

$$(X = \xi; \quad Y = \eta = H).$$

Эти же соотношения следуют из равенства (3.40). Кинематические уравнения (2.20) сводятся к уравнениям

$$p \equiv q \equiv 0, \quad \omega = r = \dot{\vartheta}.$$

Матрица L сводится [к матрице l_ϑ (§ 7). На основании соотношений (2.40)

$$\cos(\bar{v}, X) = \cos \vartheta \cos \alpha - (-\sin \vartheta) \sin \alpha = \cos(\vartheta - \alpha),$$

$$\cos(\bar{v}, Y) = \sin(\vartheta - \alpha).$$

Следовательно,

$$\angle(\bar{v}, X) = \vartheta - \alpha, \quad \angle(\bar{v}, Y) = \frac{\pi}{2} - (\vartheta - \alpha).$$

Обозначим

$$\theta = \vartheta - \alpha. \quad (4.32)$$

Очевидно, что угол θ представляет собой угол возвышения вектора $\bar{v}$ скорости самолета над осью OX , т. е. угол наклона траектории самолета к этой оси (рис. 35). Динамика продольного полета определяется уравнениями (4.28) и (4.29) при условиях (4.30). Пусть ось двигателя образует

с продольной осью Nx угол $\varphi_g = \text{const}$. В области пространства, в которой рассматривается перемещение самолета, поле тяготения примем параллельным. Учитывая выражения для внешних сил и моментов (§ 13) и соотношения (4.30), выпишем уравнения динамики продольного полета:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{m} \left[P \cos \varphi_g - \frac{1}{2} S_d \rho v^2 C_x(\alpha, \dot{\alpha}, \delta, \dot{\delta}, v, H, Ma, Re) \right] - \\ - g \sin \vartheta + \omega v_y + c_2 \dot{\omega} + c_1 \omega^2 \equiv \Phi_x, \quad (4.33)$$

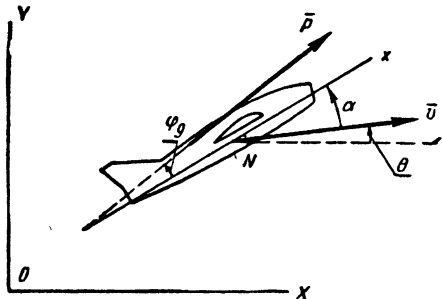


Рис. 35

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{1}{m} \left[P \sin \varphi_g + \frac{1}{2} S_d \rho v^2 C_y(\alpha, \dot{\alpha}, \delta, \dot{\delta}, v, H, Ma, Re) \right] - \\ - g \cos \vartheta - \omega v_x - c_1 \dot{\omega} + c_2 \omega^2 \equiv \Phi_y, \quad (4.34)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{C} [c_2 \omega_x - c_1 \omega_y - r_P P + \\ + \frac{1}{2} S_d b_d \rho v^2 m_z(\alpha, \dot{\alpha}, \delta, \dot{\delta}, \omega, v, H, Ma, Re) - \\ - mg(c_1 \sin \vartheta + c_2 \cos \vartheta)].$$

Здесь $\delta = \delta_y$ — координата руля высоты (согласно расчетной схеме, выбранной в этом параграфе, инерцией руля высоты в его относительном движении пренебрегаем), r_P — плечо тяги по отношению к началу N , $\omega_x = \dot{v}_x - \omega v_y$, $\omega_y = \dot{v}_y + \omega v_x$. Уравнения (4.33) и (4.34) поступательного движения самолета получены проектированием сил на оси, связанные с самолетом. Удобнее описать это движение с помощью уравнений в проекциях на оси естественного трехгранника траектории самолета, т. е. проектируя силы

на направления касательной и нормали к траектории начала N . Для этого преобразуем уравнения (4.33) и (4.34). Продифференцируем по времени обе части равенств (3.38), рассматриваемых при $\beta = 0$:

$$\dot{v}_x = \dot{v} \cos \alpha - v \dot{\alpha} \sin \alpha, \quad \dot{v}_y = v \dot{\alpha} \cos \alpha - \dot{v} \sin \alpha. \quad (4.35)$$

Разрешая систему (4.35) линейных алгебраических уравнений относительно величин $\dot{\alpha}$ и $\dot{v}$, будем иметь:

$$\dot{v} = \Phi_x \cos \alpha - \Phi_y \sin \alpha, \quad \dot{\alpha} = -\frac{1}{v} (\Phi_x \sin \alpha + \Phi_y \cos \alpha).$$

Заменяя в правых частях последних равенств ускорения Φ_x и Φ_y их выражениями (4.33) и (4.34) соответственно, напомним соотношения

$$\begin{aligned} \dot{v} = & \frac{1}{m} \left[P (\cos \varphi_g \cos \alpha - \sin \varphi_g \sin \alpha) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} S_d \rho v^2 (c_x \cos \alpha + c_y \sin \alpha) \right] + \\ & + g (\cos \vartheta \sin \alpha - \sin \vartheta \cos \alpha) + (c_2 \cos \alpha + c_1 \sin \alpha) \dot{\omega} + \\ & + \omega^2 (c_1 \cos \alpha - c_2 \sin \alpha), \\ - v \dot{\alpha} = & \frac{1}{m} \left[P (\cos \varphi_g \sin \alpha + \sin \varphi_g \cos \alpha) + \right. \\ & + \frac{1}{2} S_d \rho v^2 (c_y \cos \alpha - c_x \sin \alpha) - \\ & - g (\cos \vartheta \cos \alpha + \sin \vartheta \sin \alpha) + \\ & + \omega [(-v \sin \alpha) \sin \alpha + (-v \cos \alpha) \cos \alpha] + \\ & + (c_2 \sin \alpha - c_1 \cos \alpha) \dot{\omega} + (c_1 \sin \alpha + c_2 \cos \alpha) \omega^2. \end{aligned}$$

Во втором из этих двух уравнений перенесем член $-\omega v$ в левую часть уравнения и заметим, что в силу соотношения (4.32)

$$v (\omega - \dot{\alpha}) = v \frac{d(\vartheta - \alpha)}{dt} = v \dot{\vartheta}.$$

Из описания аэродинамической силы (п. «б» § 13) следует, что в продольном полете

$$\| -c_{vx}, c_{vy}, 0 \| = \| -c_x, c_y, 0 \| \cdot \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тяга двигателя в пустоте определяется соотношением $P = \dot{m}V$ (п. «г» § 3), где по-прежнему V — средняя относительная скорость истечения газов из сопла, $V \equiv V(\dot{m})$. При полете в воздухе тяга несколько уменьшается из-за противодавления воздуха, величина которого зависит от плотности воздуха, т. е. от высоты полета и

$$P = \dot{m}V - P_g(H), \quad P_g \geq 0,$$

где функция $P_g(H) \approx k_g \rho \equiv k_g \rho(H)$, $k_g = \text{const} > 0$. При $V = \text{const}$ управление изменением тяги осуществляется изменением массового расхода $\mu = \dot{m}$, т. е. регулированием подачи топлива в камеры сгорания.

Учитывая последние равенства, геометрическое соотношение (4.32) и производя упрощения, выпишем уравнения динамики продольного полета в окончательном виде:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} \left[P \cos(\alpha + \varphi_g) - \frac{1}{2} S_d \rho v^2 c_{vx}(\alpha, \dot{\alpha}, \delta, \dot{\delta}, \right. \\ \left. v, Ma, Re) \right] - g \sin \theta + [c_2(m) \cos \alpha + c_1(m) \sin \alpha] \dot{\omega} + \\ + [c_1(m) \cos \alpha - c_2(m) \sin \alpha] \omega^2, \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{v} \left\{ \frac{1}{m} \left[P \sin(\alpha + \varphi_g) + \frac{1}{2} S_d \rho v^2 c_{vy}(\alpha, \dot{\alpha}, \right. \right. \\ \left. \left. \delta, \dot{\delta}, v, H, Ma, Re) \right] - g \cos \theta + [c_2(m) \sin \alpha - \right. \\ \left. - c_1(m) \cos \alpha] \dot{\omega} + [c_1(m) \sin \alpha + c_2(m) \cos \alpha] \omega^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{C(m)} \hat{F}, \quad (4.38)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{F} = \frac{1}{2} S_d b_d \rho v^2 m_z(\alpha, \dot{\alpha}, \delta, \dot{\delta}, \omega, v, H, Ma, Re) - \\ - r_p P + m \{ [c_2(m) \cos \alpha + c_1(m) \sin \alpha] \dot{v} + \\ + [c_2(m) \sin \alpha - c_1(m) \cos \alpha] v \dot{\theta} + [c_1(m) \sin \theta - \\ - c_2(m) \cos \theta] g \}, \end{aligned}$$

$$\frac{dm}{dt} = \mu. \quad (4.39)$$

Кинематика продольного полета описывается уравнениями

$$\frac{dX}{dt} = v \cos \theta, \quad (4.40)$$

$$\frac{dH}{dt} = v \sin \theta, \quad (4.41)$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega. \quad (4.42)$$

Геометрическая связь характеризуется соотношением (4.32)

$$\alpha = \vartheta - \theta. \quad (4.43)$$

К уравнениям (4.36)–(4.43) следует добавить конечные соотношения (§ 13)

$$g \equiv g(H) = g_0 \left(\frac{b_e}{b_e + H} \right)^2, \quad (4.44)$$

$$\varrho \equiv \varrho(H), \quad (4.45)$$

$$Ma = \frac{v}{a_s(H)}, \quad (4.46)$$

$$Re \equiv Re(v, H), \quad (4.47)$$

$$P = V\mu - P_g(H). \quad (4.48)$$

Таким образом, продольный полет описывается системой тринадцати дифференциальных и конечных уравнений (4.36) — (4.48) относительно тринадцати переменных

$$\alpha, \theta, \vartheta, v, \omega, Ma, Re, H, X, \varrho, m, P, g.$$

При этом возможны две постановки задачи: прямая и обратная. В прямой задаче заданы закон $\delta(t)$ отклонения руля высоты и расход $\mu(t)$ массы топлива в единицу времени, надо найти закон движения самолета. В обратной задаче заданным считается закон навигации. Например, предписана траектория полета или закон поступательного движения самолета или наибольшее допустимое значение угла атаки и т. п. Неизвестными же будут расход $\mu(t)$ массы и закон $\delta(t)$ отклонения руля высоты. В обеих задачах зависимость момента инерции C самолета и координат c_1 и c_2 его центра масс считается заданной функцией от массы, определяемой расположением топливных шашек в самолете и их формой. Масса же самолета определяется очевидным равенством

$$m = m(0) + \int_0^t \mu(\tau) d\tau. \quad \text{В прямой задаче переменные } m,$$

c_1 , c_2 и C являются известными функциями от времени:

$$c_1 \equiv c_1[m(t)] = c_{1m}(t), \quad c_2 = c_{2m}(t), \quad C \equiv C[m(t)] \equiv C_m(t).$$

В рассматриваемой идеализации полета, координата X — горизонтальная дальность полета — входит только в одно уравнение системы в прямой задаче. Поэтому уравнение (4.40) отщепляется от системы:

$$X = X(0) + \int_0^t v(\tau) \cos \theta(\tau) d\tau.$$

Если решение системы уравнений (4.36) — (4.39) и (4.41) — (4.48) получено, нахождение дальности сводится к квадратурам. Если же учесть в уравнениях полета влияние собственного вращения Земли, выбрав в качестве неподвижной системы систему основную (§ 1), то координата X войдет и в уравнения динамики.

§ 17. Особенности механики космического полета

а) Общие замечания. Накопленные научные данные позволяют утверждать, что в мировом пространстве существует обширная область, охватывающая нашу солнечную систему, в которой движение тел повсюду подчиняется одним и тем же физическим законам. Поэтому, исходя из критерия типа «б» § 1 примем, что все механические перемещения, рассматриваемые в настоящем курсе, исчерпывающим образом описываются основными законами механики. Следовательно, в принципиальном отношении движение в космосе ничем не отличается от движения в окрестности Земли. Если механике космического полета и присущи некоторые особенности по сравнению с механикой полета вблизи Земли, то эти особенности имеют исключительно количественный характер: некоторые силы и моменты, существенно влияющие на полет у Земли, оказывают лишь незначительное влияние на движение (в смысле критериев «а» и «б» § 1) вдали от Земли и наоборот. Так, на достаточно большом удалении от Земли аэродинамическая сила практически отсутствует, зато в заметной мере проявляются моменты сил, обусловленные неоднородностью поля тяготения даже в габаритном объеме летательного аппарата, давлением световых лучей на поверхность аппарата, влиянием магнитного поля Земли и т. п.

б) *Выбор неподвижной системы в межпланетном полете.* При полетах внутри солнечной системы существенное значение имеют силы инерции, обусловленные ускорениями планет, с которыми связаны расчетные системы координат. Поэтому при исследовании динамики межпланетного полета следует в качестве неподвижной системы координат выбирать солнечную систему отсчета (§ 1). При исследовании орбитальных движений около данной планеты, иногда, в силу критерия типа «а» § 1, допустимо пользоваться в качестве неподвижной системы основной системой отсчета для данной планеты.

в) *Силы тяготения в космическом пространстве.* При полете в пределах солнечной системы к каждой материальной частице летательного аппарата приложены силы притяжения со стороны всех остальных частиц солнечной системы. Из числа последних исключим из рассмотрения все те, чье влияние на данный полет или пренебрежимо мало в смысле критерия типа «а» § 1, или неощутимо в смысле критерия типа «б» § 1; все материальные образования (массы), притяжение которых не является пренебрежимо малым для данного полета, назовем существенными для этого полета. Например, в полете с Земли на Луну существенными являются Земля, Луна и Солнце.

Силой притяжения, действующей на материальную частицу, принадлежащую летательному аппарату, назовем главный вектор сил притяжения этой частицы всеми существенными массами солнечной системы. Силой притяжения летательного аппарата назовем главный вектор сил притяжения всех частиц, образующих в данный момент времени летательный аппарат. Моментом силы притяжения летательного аппарата относительно некоторого центра называется главный момент сил притяжения частиц летательного аппарата относительно этого же центра. За точку приложения силы притяжения летательного аппарата принимается всякая точка пространства, по отношению к которой момент силы притяжения летательного аппарата равен нулю. Например, в однородном поле тяготения сила притяжения летательного аппарата приложена к его центру массы.

Введем в рассмотрение напряженность поля тяготения, т. е. ускорение силы притяжения. В точке пространства с координатами X, Y, Z в солнечной системе отсчета ускорение $\vec{g}$, создаваемое воздействием существенных масс сол-

нечной системы на единичную массу, определяется соотношением

$$\bar{g} \equiv \bar{g}(X, Y, Z, t),$$

или в проекциях на оси солнечной системы координат,

$$g_x = g_1(X, Y, Z, t), \quad g_Y = g_2(X, Y, Z, t), \\ g_z = g_3(X, Y, Z, t). \quad (4.49)$$

Так как различным полетам могут отвечать и различные перечни существенных масс, функции g_h ($h = 1, 2, 3$) в уравнениях (4.49) зависят также и от вида исследуемого полета.

Ускорение $\bar{g}$ может зависеть явно от времени за счет относительных перемещений масс в солнечной системе (их орбитальных и суточных движений). Функции $g_h(X, Y, Z, t)$ считаются для каждого исследуемого полета заданными из небесной механики.

Подсчитаем силу и момент, приложенные к твердому телу G_C в поле тяготения (4.49). С телом G_C , как обычно, свяжем навигационную систему координат $Nxyz$. Под абсолютными координатами X, Y, Z будем понимать координаты начала N в неподвижной (солнечной) системе отсчета. Обозначим через x_i, y_i, z_i координаты материальной частицы M_i тела G_C в связанной с ним системе координат $Nxyz$. В поле тяготения (4.49) на частицу M_i действует сила

$$\bar{F}_i = m_i \bar{g}_i.$$

Здесь m_i — масса частицы,

$$\bar{g}_i \equiv \bar{g}(X_i, Y_i, Z_i, t),$$

где X_i, Y_i, Z_i — абсолютные координаты частицы.

Очевидно, что

$$\overline{OM}_i = \overline{ON} + \overline{NM}_i, \quad (4.50)$$

где $\overline{ON} = \bar{R}$ — абсолютный радиус-вектор подвижного начала N ; $\bar{R} = X\bar{X}^\circ + Y\bar{Y}^\circ + Z\bar{Z}^\circ$, O — начало неподвижной системы координат.

Через $\bar{r}_i = \overline{NM}_i$ обозначим относительный радиус-вектор частицы M_i , $\bar{r}_i = x_i\bar{i} + y_i\bar{j} + z_i\bar{k}$. Введем матрицу $L = (xyz, XYZ) = \|L_{gh}\|$ ($g, h = 1, 2, 3$) направляющих косинусов (§ 5), определяющую абсолютное угловое поло-

жение тела G_C . Умножая обе части векторного равенства (4.50) на матрицу $\|\bar{X}^0, \bar{Y}^0, \bar{Z}^0\|$ единичных векторов осей абсолютной системы координат (солнечной) получим, что

$$\|X_i Y_i Z_i\| = \|X, Y, Z\| + \|r_{ix}, r_{iy}, r_{iz}\|.$$

- Применим соотношение (2.6), тогда

$$\|X_i, Y_i, Z_i\| = \|X, Y, Z\| + \|x_i, y_i, z_i\| L.$$

Последнее равенство определяет абсолютные координаты частицы M_i через абсолютные координаты начала N навигационной системы и абсолютные углы Эйлера ψ, ϑ, γ этой системы:

$$X_i = X + \xi_i, \quad Y_i = Y + \eta_i, \quad Z_i = Z + \zeta_i,$$

где

$$\left. \begin{aligned} \xi_i &= x_i L_{11} + y_i L_{21} + z_i L_{31}, \\ \eta_i &= x_i L_{12} + y_i L_{22} + z_i L_{32}, \\ \zeta_i &= x_i L_{13} + y_i L_{23} + z_i L_{33}. \end{aligned} \right\} L_{gh} \equiv L_{gh}(\psi, \vartheta, \gamma).$$

Сила $\bar{F}$, приложенная ко всему телу G_C со стороны поля тяготения (4.49), равна, по определению, величине

$$\bar{F} = \sum_{G_C} m_i \bar{g}_i. \quad (4.51)$$

Проекции F_1, F_2, F_3 вектора $\bar{F}$ на неподвижные оси определяются выражениями

$$F_h = \sum_{G_C} m_i g_h (X + \xi_i, Y + \eta_i, Z + \zeta_i, t) \quad (h = 1, 2, 3).$$

Проекции F_x, F_y, F_z вектора $\bar{F}$ на навигационные оси находятся с помощью соотношения (2.6),

$$\|F_x, F_y, F_z\| = \|F_1, F_2, F_3\| L^T.$$

Сила $m_i \bar{g}_i$, приложенная к частице M_i , создает момент относительно подвижного начала N , равный

$$\bar{r}_i \times m_i \bar{g}_i.$$

По определению, приложенный ко всему телу G_C со стороны поля тяготения (4.49) момент

$$\bar{M} = \sum_{G_C} \bar{r}_i \times m_i \bar{g}_i. \quad (4.52)$$

Проекции M_1, M_2, M_3 момента $\bar{M}$ на неподвижные оси определяются выражениями

$$M_1 = \sum_{G_C} m_i [\eta_i g_3 (X + \xi_i, Y + \eta_i, Z + \zeta_i, t) - \zeta_i g_2 (X + \xi_i, Y + \eta_i, Z + \zeta_i, t)], \dots$$

Проекции момента $\bar{M}$ на навигационные оси определяются выражениями $\|M_x, M_y, M_z\| = \|M_1, M_2, M_3\| L^T$.

Для выполнения суммирования в правых частях соотношений (4.51) и (4.52) необходимо знать закон (4.49) распределения поля тяготения в пространстве и закон распределения массы в теле G_C .

В частном случае однородного поля ($\bar{g} \equiv \bar{g}_0 = \text{const}$) соотношение (4.51) принимает обычный вид

$$\bar{F} = m \bar{g}_0,$$

где m — масса тела G_C . Если к тому же подвижное начало N выбрано в центре массы тела G_C , то соотношение (4.52) сводится к очевидному равенству $M = 0$.

В общем случае поля (4.49) главный вектор приложен к той точке тела G_C , для которой момент $\bar{M}$ (4.52) уничтожается. Эта точка, вообще говоря, не совпадает с центром массы тела G_C , так как центром масс называется точка приложения главного вектора сил тяжести тела в однородном поле. Больше того, точка приложения главного вектора сил притяжения может перемещаться в теле G_C , в зависимости от изменения его линейных и угловых координат, так как элементарные силы притяжения зависят от абсолютных координат частиц тела и от его углового положения в пространстве.

Поэтому в неоднородном поле тяготения главный момент сил тяжести тела относительно его центра масс в общем случае не равен нулю. Это обстоятельство приводит к возникновению угловых колебаний тела (либрации). Характерным примером служат либрационные колебания Луны и искусственных спутников Земли.

г) *Прочие силы, действующие на летательный аппарат в космическом пространстве.* Перечислим наиболее важные из сил, действующих на тело, движущееся в космическом пространстве:

1) сила, приложенная со стороны световых лучей: на каждый элемент наружной поверхности аппарата, освещен-

ной солнцем, действует световая сила. Световое давление на 1 квадратный метр плоской черной поверхности, перпендикулярной направлению на солнце, составляет около 0,43 миллиграмма на расстоянии одной астрономической единицы от солнца. Если главный вектор световых сил не проходит через центр массы тела G_C , то главный момент световых сил относительно центра массы отличен от нуля. Тогда световая сила порождает, помимо ускорения поступательного движения тела, также и угловое ускорение тела. Применяя тела типа $G^{(c)}$ (§ 1) для изменения наружной освещаемой поверхности тела, можно изменять главный вектор и главный момент световых сил, приложенных к телу. Управление угловым движением тела с помощью выдвигаемых поверхностей, регулирующих световую силу, называется управлением с помощью солнечного паруса;

2) силы и моменты, обусловленные магнитными полями тел солнечной системы: магнитные поля планет и солнца вызывают появление сил и моментов, приложенных к проводящим материалам летательного аппарата. Если в системе летательного аппарата используются токи (для нужд управления, создания тяги и иных целей), то эти токи будут взаимодействовать с магнитным полем, что приведет к дополнительным силовым воздействиям, могущим служить также целям управления;

3) релятивистский эффект; он возникает при полете со скоростью, начиная с которой этот эффект может быть обнаружен существующими приборами;

4) магнитодинамическая сила; при полете в воздушных слоях, окружающих некоторые планеты, со скоростью, существенно превышающей местную скорость звука, магнитодинамические явления приобретают особенное значение;

5) сила, обусловленная термическим воздействием воздуха на материал летательного аппарата; при полете в воздушных слоях с очень большой скоростью частицы набегающего потока разрушают поверхностный слой вещества наружной обшивки летательного аппарата и вызывают истечение молекул этого вещества в сторону воздушной скорости аппарата. Это истечение образует тормозящую реактивную струю; одновременно происходит уменьшение массы аппарата по отношению к исходной контрольной поверхности (§ 11). Указанное явление было замечено при наблюдении падения метеоров.

Глава V

ЗАКОН РЕГУЛИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ САМОЛЕТ-АВТОПИЛОТ

В реальных условиях полета осуществление программных отклонений органов управления, отвечающее решению обратной задачи механики полета, еще не обеспечивает выполнения закона навигации (§2): из-за влияния различных непредвиденных возмущений, а также из-за неизбежных ошибок в определении характеристик и параметров самолета и регулирующих устройств полет в общем случае может существенно отклониться от предписанного по закону навигации.

Для поддержания заданного закона движения самолета (закона навигации) в условиях воздействия явлений, не учтенных в программе управления самолетом, в систему управления вводится замкнутая цепь — автопилот (§4). Автопилот воспринимает отклонения регулируемых переменных полета от их требуемого закона их изменения и вырабатывает поправочные движения органов управления, подавляющие эти отклонения.

В настоящей главе рассматривается задача построения закона регулирования (§2) автопилота. Этот закон строится исходя из механических свойств самолета, как объекта управления и требований к процессу подавления возмущенного движения.

Среди программных движений, подлежащих автоматическому поддержанию с помощью автопилота, наибольшее прикладное значение имеют движения неустановившиеся. Начальные отклонения переменных полета от программных значений в общем случае велики. Поэтому линеаризация уравнений движения в этих условиях недопустима. Следовательно, система самолет-автопилот в общем

случае является нелинейной и содержит переменные параметры.

В главе V излагается один из способов построения закона регулирования в системах самолет-автопилот, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами (§ 14) при произвольных начальных отклонениях переменных полета от их невозмущенного течения. Система принимается детерминированной, а ее свойства — полностью известными. В качестве возмущений рассматриваются начальные мгновенные отклонения переменных полета. Для таких систем излагаемый способ позволяет построить закон регулирования, обеспечивающий: 1) асимптотическую устойчивость закона навигации при $t \rightarrow \infty$ по отношению к мгновенному возмущению его, 2) заранее предписанное ограничение возмущенного движения по регулируемым переменным и 3) аperiодическое течение этого движения. Одновременно определяются требования к характеристикам регулирующих устройств приборов и приводов, физически осуществляющих закон регулирования. Осуществление этого закона существенно опирается на использование счетно-решающих устройств.

Указанный способ излагается применительно к двум прикладным задачам (§ 18 и 19). Методика построения закона регулирования остается неизменной и в других задачах стабилизации закона навигации.

§ 18. Автоматическая стабилизация углового положения самолета в процессе вертикального взлета

а) *Постановка задачи.* Рассмотрим вертикальный подъем самолета (пример 1 § 2). Пусть это движение происходит в строгом соответствии с законом навигации: $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\dot{\eta} = H(t) \geq 0$ и $\dot{H} \geq 0$ при $0 < t < T$. В момент времени $t = t_0$ в промежутке (1.1) на автомат управления элеронами поступает команда осуществить разворот самолета на угол Γ_0 около продольной оси, остающейся, по условию, вертикальной на всем промежутке (1.1); разворот требуется завершить к моменту $t = T$ с соблюдением условия $p(T) = 0$, где $p \equiv p(t) = \dot{\Gamma}$ — угловая скорость вращения тела G_c самолета по отношению к местному горизонту, а $\Gamma = \angle(z, \dot{z})$ — угловая координата самолета в процессе вертикального взлета по отношению к пло-

скости $S_{\xi\zeta}$ местного горизонта — плоскости $S_{\xi\zeta}$ географической системы координат $S_{\eta\zeta}$.

Такой поворот на угол Γ_0 может понадобиться для последующего вывода самолета на продольную траекторию (§ 16) в определенном азимутальном направлении в координатной плоскости $S_{\xi\zeta}$ в условиях, когда это направление еще не известно в начале взлета и выявляется лишь к моменту времени $t = t_0 > 0$. В теории автоматического регулирования рассматриваемая команда называется толчкообразным входом.

Пусть поворот на угол Γ_0 осуществляется с помощью воздушных элеронов, приводимых в действие рулевой машиной, управляемой в свою очередь последовательным кор-

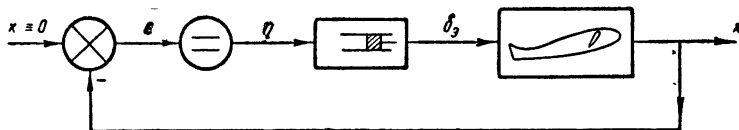


Рис. 36

ректирующим звеном — регулятором (§ 2). Последнее преобразует выходной сигнал измерителя текущего значения угла Γ (регулируемой координаты) в управляющее воздействие η (входной сигнал рулевой машины). Измерителем угла может быть гироскопический датчик.

Желая сосредоточить внимание на существе способа построения закона регулирования (характеристики регулятора), рассмотрим задачу о построении этого закона при упрощающих предположениях: измеритель и регулятор примем безынерционным, а зависимость аэродинамических коэффициентов самолета от числа Re пренебрежем.

Будем отсчитывать регулируемую координату Γ от ее требуемого значения $\Gamma = \Gamma_0$, для чего сделаем замену переменной: $x = \Gamma_0 - \Gamma$; тогда

$$x(t_0) = \Gamma_0 \text{ и } x(T) = 0.$$

Стабилизируемое значение новой регулируемой переменной x равно нулю. Схема системы автоматического регулирования рассматриваемого разворота показана на рис. 36, где символы те же, что и на рис. 7.

В реальных системах все требования задаются с некоторыми допусками, определяемыми техническими условиями. Поэтому требование о завершении поворота на угол Γ_0 к моменту $t = T$ заменим менее жестким: к моменту $t = T$ самолет должен повернуться на угол $\Gamma_0 - \gamma_0$, $0 \leq \gamma_0 \leq \Gamma^*$, где $0 < \Gamma^* \ll \Gamma_0$ — достаточно малая ошибка по азимуту, допускаемая при выводе самолета на продольную траекторию после выполнения вертикального взлета; к этому же моменту угловая скорость p должна уменьшиться по абсолютной величине до значения p_0 , $0 \leq p_0 \leq p^*$, где $p^* > 0$ — абсолютная величина достаточно малой допустимой скорости. Угол Γ_0 примем положительным, что не ограничивает общности метода.

Сведем предыдущие рассуждения к следующей постановке задачи: найти характеристику $\eta = f(x)$ регулятора, в силу которой регулируемая координата x монотонно уменьшится за время $T - t_0$ от исходного значения $x(t_0) = \Gamma_0 > 0$ до требуемого значения $x(T) = \gamma_0$ ($0 \leq \gamma_0 \leq \Gamma^* \ll \Gamma_0$), а ее производная $\dot{x} = -p$ изменится за это же время от исходного значения $p(t_0) = 0$ до требуемого значения $p(T) = -p_0$ ($0 \leq p_0 \leq p^*$), имея за время $t_0 < t < T$ один минимум. По отношению к бесконечному промежутку времени $0 \leq t \leq \infty$, процесс должен быть аperiodическим, и стабилизируемое значение $x = 0$ — асимптотически устойчивым по отношению к мгновенному начальному возмущению по регулируемой координате.

Качественный вид желаемого течения величин x и p изображен на рис. 37; очевидно, что поставленные требования исключают перерегулирование. Постановка задачи остается такой же, если угол Γ_0 не задан заранее, а является случайным мгновенным отклонением, вызванным возмущающими воздействиями; тогда система регулирования должна восстановить исходное состояние $x = 0$ за время $T - t_0$ с указанной точностью.

Рассматриваемое угловое движение около продольной оси Nx самолета, принимаемого в качестве твердого тела переменного состава, описывается уравнением (4.29) при $q = r = 0$, $v_y = v_z = 0$, $v_x = v = \dot{H}(t)$, $\beta = \alpha = 0$,

$$q \equiv q[H(t)] = f_n(t), \quad Ma = \frac{\dot{H}(t)}{a_s[H(t)]} = f_M(t),$$

$$m_{vx} = m_{vx}^p(Ma) \Phi(p) + m_{vx}^{\delta}(Ma) \delta_{\alpha},$$

где $\Phi(p)$ — функция, характеризующая естественное демпфирование самолета в движении по крену. По условию, плоскость $Nx\eta$ является плоскостью геометрической симметрии самолета (§ 1) и поэтому $\Phi(p) = -\Phi(-p)$; в первом приближении $\Phi(p) = -k_n p$ ($k_n = \text{const}$). Коэффициент $m_{vx}^{\delta_s}$ (Ма) — эффективность элеронов — представим в виде произведения $m_{vx}^{\delta_s} = m_s y_s$ (Ма). Функция y_s (Ма) характеризует зависимость этой эффективности от числа Ма, а постоянный множитель m_s определяется аэро-

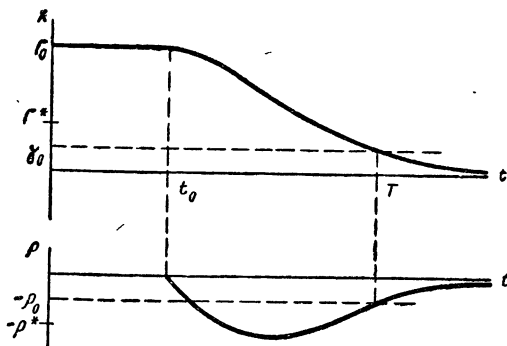


Рис. 37

динамическим качеством элеронов и играет роль аэродинамического усиления. Типовой график функции y_s (Ма) изображен на рис. 38. Таким образом,

$$m_{vx} = f_p(t) \Phi(p) + f_s(t) \delta_s,$$

где

$$f_p(t) = m_{vx}^p [f_M(t)]; \quad f_s(t) = m_s y_s [f_M(t)].$$

Следовательно, уравнение динамики процесса имеет вид

$$\frac{dp}{dt} = f_1(t) \Phi(p) + f_2(t) \delta_s, \quad (5.1)$$

причем

$$f_1 = f_0(t) f_p(t); \quad f_2 = f_0(t) f_s(t), \quad f_0 = \frac{S_d b_d}{2A^{(0)}(t)} f_n(t) [\dot{H}(t)]^2.$$

Закон подъема самолета задан, поэтому задан и закон изменения массы самолета по отношению к естественной

контрольной поверхности (§ 11). Следовательно, задана и функция $A^{(0)}(t)$.

Кинематическое уравнение имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = -p. \quad (5.2)$$

Рулевую машину опишем линейным уравнением первого порядка:

$$\frac{d\delta_s}{dt} = -k_0 \delta_s + k_1 \eta, \quad (5.3)$$

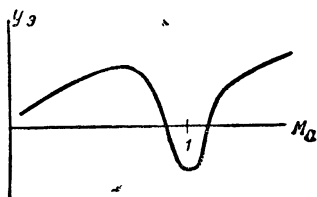


Рис. 38



Рис. 39

где $k_0 > 0$, $k_1 > 0$ — постоянные; а $\eta = f(x)$ — искомая характеристика регулятора. Разворот самолета описывается системой уравнений (5.1), (5.2) и (5.3) при начальных условиях:

$$x(t_0) = \Gamma_0, \quad p(t_0) = 0, \quad \delta_s(t_0) = 0.$$

б) *Решение задачи.*

Отобразим отрезок $[0, \Gamma_0]$ переменного x на положительную полуось $0 \leq u \leq \infty$ нового вещественного переменного u с помощью функции

$$x = W(u), \quad (5.4)$$

дифференцируемой на этой полуоси необходимое число раз и такой, что

$$W(0) = \Gamma_0, \quad W(\infty) = 0, \quad (5.5)$$

$$W'(0) = 0, \quad W'(u) < 0 \quad \text{при} \quad 0 < u < \infty. \quad (5.6)$$

Например,

$$W = \Gamma_0 D^{-\lambda u} (2 - D^{-\lambda u}), \quad (5.7)$$

где $\lambda > 0$ и $D > 1$ — постоянные (рис. 39). При выборе (5.7) функции W , требования (5.5) выполняются. Так как

$$W'(u) = -2\lambda d_0 D^{-\lambda u} (1 - D^{-\lambda u}),$$

где

$$d_0 = \ln D > 0.$$

то требования (5.6) также выполняются.

Если по мере возрастания времени от t_0 до ∞ функция $u(t)$ будет монотонно возрастать от 0 до ∞ , то разворот самолета будет происходить по закону (5.7): угол x монотонно убывает от величины Γ_0 при $t = t_0$ до нуля при $t = \infty$ (рис. 37). Это свойство координаты u наверное будет иметь место, если эта координата удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{du}{dt} = F(u), \quad (5.8)$$

где функция $F(u)$ такова, что интеграл

$$t = \int_0^u \frac{ds}{F(s)} \equiv Q(u)$$

расходится при $u \rightarrow \infty$, сохраняя положительный знак: $Q(\infty) = \infty$, а при $0 \leq u < \infty$ этот интеграл везде имеет смысл. Уравнение (5.8) рассматривается при начальном условии $t = t_0$, $u = 0$. Например, выберем функцию $F(u)$ в виде:

$$F(u) = kE^{-cu}, \quad (5.9)$$

причем $k > 0$, $c > 0$ и $E > 1$ — постоянные. Тогда уравнение $du/dt = kE^{-cu}$ имеет решение

$$t = Q(u) = t_0 + \frac{1}{ke_0}(E^{cu} - 1), \quad (5.10)$$

$$(e_0 = \ln E > 0), \quad Q(\infty) = \infty,$$

или

$$u = \frac{1}{c} \log_E [1 + ke_0(t - t_0)].$$

Функция $u(t)$ монотонно возрастает при $t > t_0$, $u(\infty) = \infty$, а $u(t_0) = 0$. Продифференцируем обе части равенства (5.4) по времени:

$$\dot{x} = W'(u) \dot{u}.$$

В силу уравнения (5.8)

$$\dot{x} = W'(u) F(u). \quad (5.11)$$

Таким образом, преобразования (5.7) и (5.9) удовлетворяют начальному условию $p(t_0) = 0$; это вытекает из первого соотношения (6) и равенства $\dot{u} = F$.

Задание требует окончить разворот с точностью до допустимых ошибок γ_0 и p_0 по регулируемой координате x и скорости $-p$, соответственно, не при $t = \infty$, а к определенному моменту $t = T$. Поэтому подберем постоянные, D, E, λ, k и c в выражениях функций W и F , исходя из условий $x(T) = \gamma_0$, $p(t) = p_0$. Для этого разрешим сначала уравнение (5.7) относительно нового переменного u :

$$D^{-\lambda u} = \frac{1}{\sqrt{\Gamma_0}} (\sqrt{\Gamma_0} - \sqrt{\Gamma_0 - x}).$$

Так как функция (5.4), определяемая соотношением (5.7), невозрастающая при $u \geq 0$, каждому значению на отрезке $[0, \Gamma_0]$ отвечает единственное значение переменного u на полуоси $u \geq 0$. Поэтому из двух решений квадратного уравнения (5.7) смысл имеет только одно. Этому решению отвечает знак « $-$ » перед корнем, ибо только при этом знаке $D^{-\lambda u} = 0$ при $x = 0$ ($u = \infty$):

$$D^{-\lambda u} = 1 - \sqrt{1 - \frac{x}{\Gamma_0}}. \quad (5.12)$$

Обозначим через U значение переменного u при $t = T$: На основании равенства (5.10)

$$U = \frac{1}{c} \log_E [1 + k e_0 (T - t_0)].$$

Полагая в равенстве (5.12) $x = \gamma_0$ и $u = U$, получим соотношение между постоянными c, E, k, D и λ :

$$c = -\lambda \frac{\log_E [1 + k e_0 (T - t_0)]}{\log_D \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\gamma_0}{\Gamma_0}} \right)}, \quad (5.13)$$

выражающее условие выполнения требования $x(T) = \gamma_0$. Для обеспечения требования $x(T) = -p_0$ эти же постоянные следует подчинить еще одному соотношению. Обращаясь к уравнениям (5.11) и (5.9), получим:

$$\dot{x}(T) = -2\lambda d_0 k D^{-\lambda U} (1 - D^{-\lambda U}) E^{-cU}.$$

Используя равенства (5.10) и (5.12), рассматриваемые при $t = T$, выпишем искомое соотношение:

$$\lambda = p_0 \frac{1 + k e_0 (T - t_0)}{2d_0 k \sqrt{1 - \frac{\gamma_0}{\Gamma_0}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\gamma_0}{\Gamma_0}} \right)}. \quad (5.14)$$

Единственное ограничение на постоянные c , λ и k , обуславливающее используемые свойства функций (5.7) и (5.9), заключается в том, что эти постоянные положительны, а постоянные D и E еще и больше 1. По условию задачи $0 \leq \gamma_0 \leq \Gamma^* \ll \Gamma_0$ и поэтому $1 - \gamma_0/\Gamma_0 > 0$; по заданию начальных условий $p_0 > 0$. Следовательно, правая часть равенства (5.14) положительна ($\lambda > 0$) при любом выборе параметров $k > 0$, $D > 1$, $E > 1$. В числителе правой части выражения (5.13) логарифм положителен, а в знаменателе — отрицателен, поэтому $c > 0$. Таким образом, принятый выбор (5.7) и (5.9) функций W и F удовлетворяет поставленным требованиям при любых значениях постоянных $k > 0$, $D > 1$, $E > 1$; постоянная λ находится из равенства (5.14), а постоянная c — из равенства (5.13). Тем самым полностью определены параметры в выражениях функций (5.7) и (5.9) и остается получить выражение $f(x)$ закона регулирования.

Из уравнений (5.2) и (5.11) следует, что $p = -W'(u)F(u)$. Заменяя в уравнении (5.1) скорость p ее последним выражением, а время t под знаком функций f_1 и f_2 — его значением (5.10), будем иметь:

$$\begin{aligned} & -[W''(u)F(u) + W'(u)F'(u)]F(u) = \\ & = n_1(u)B(u) + n_2(u)\delta_s, \end{aligned}$$

где

$$n_1 = f_1[Q(u)]; \quad n_2 = f_2[Q(u)]; \quad B = Q[W'(u)F(u)].$$

Отсюда находим требуемый закон отклонения руля в функции переменного u :

$$\begin{aligned} \delta_s &= \Delta_s(u) = \\ &= -\frac{1}{n_2(u)} \{ [W''(u)F(u) + W'(u)F'(u)]F(u) + n_1(u)B(u) \}. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Заменяя в уравнении (5.3) координату δ_s ее выражением $\Delta_s(u)$, найдем управляющее воздействие η :

$$\eta = \frac{1}{k_1} [F(u)\Delta'_s(u) + k_0\Delta_s(u)]. \quad (5.16)$$

Новое переменное u выражается через измеряемую координату x с помощью уравнения (5.12):

$$u = -\frac{1}{\lambda} \log_D \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x}{\Gamma_0}} \right). \quad (5.17)$$

Соотношения (5.16), (5.15) и (5.17) выражают в параметрическом виде искомый закон регулирования $\eta = f(x)$, причем параметром служит новое переменное u . Регулятор, физически осуществляющий этот закон, состоит из счетно-решающих устройств, выполняющих преобразования, предусмотренные законом регулирования. Так как в силу преобразования (5.4) значению $x = 0$ отвечает значение $u = \infty$, непосредственное воспроизведение зависимости (5.17) с помощью физических звеньев может оказаться затруднительным. Поэтому исключим параметр u из закона регулирования: в выражении производной $W'(u)$ заменим величину $D^{-\lambda u}$ ее выражением (5.12), тогда

$$W'(u) = -2\Gamma_0 \lambda d_0 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x}{\Gamma_0}}\right) \sqrt{1 - \frac{x}{\Gamma_0}} = X_1(x), \quad (5.18)$$

$$W''(u) = 2\Gamma_0 \lambda^2 d_0^2 D^{-\lambda u} (1 - 2D^{-\lambda u}).$$

На основании равенства (5.12) $W''(u) = X_1'(x) X_1(x)$. Таким же образом определяется величина $W'''(u)$, входящая в выражение производной $\Delta_s'(u)$: $W'''(u) = X_1'(x) X_1^2(x)$. Полагая, для упрощения выкладок, $E = D$ в равенстве (5.9) и применяя соотношение (5.17), найдем выражение функций $F(u)$, $F'(u)$ и $F''(u)$ через измеряемую координату x :

$$F(u) = k \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x}{\Gamma_0}}\right)^{\frac{c}{\lambda}} \equiv F_x(x),$$

$$F'(u) = -cd_0 F(u) = -cd_0 F_x(x),$$

$$F''(u) = c^2 d_0^2 F_x(x),$$

причем

$$F_x'(x) X_1(x) = -cd_0 F_x(x).$$

Таким же образом, в силу равенств (5.10), (5.17) и $E = D$

$$Q(u) = t_0 + \frac{1}{kd_0} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x}{\Gamma_0}}\right)^{-\frac{c}{\lambda}} \equiv Q_x(x).$$

Функция $t = Q_x(x)$ неограниченно возрастает при $x \rightarrow 0$. Однако функции

$$n_{1x} = f_1[Q_x(x)], \quad n_{2x}(x) = f_2[Q_x(x)]$$

всегда ограничены по их механическому смыслу. В самом деле, обращаясь к исходным выражениям этих функций (п. «а»), заметим, что функция $A^{(0)}(t)$, определяющая

момент инерции самолета и находящаяся в знаменателе функции $f_0(t)$, никогда не уничтожается. Скорость $\dot{H}(t)$ подъема самолета и характеристики $m_{\delta x}^p$, $m_{\delta x}^{\delta}$ и $\rho(H)$ ограничены и тем самым ограничены и функции f_1 и f_2 . Поэтому нет надобности воспроизводить в регуляторе функцию $Q_x(x)$, а следует сразу строить функции $n_{1x}(x)$ и $n_{2x}(x)$.

Пусть далее:

$$Q[X_1(x)F_x(x)] \equiv Q_x(x),$$

тогда

$$B'(u) = Q'_x(x) \frac{dx}{du} = Q'_x(x) W'(u) = Q'_x(x) X_1(x),$$

$$n'_1(u) = n'_{1x}(x) X_1(x); \quad n'_2(u) = n'_{2x}(x) X_1(x).$$

Заметим еще, что

$$X''_1(x) = \frac{dX'_1(x)}{du} \frac{du}{dx} = \frac{d}{du} \left[\frac{W''(u)}{X_1} \right] \cdot \frac{1}{X'_1},$$

т. е.

$$X_1 X''_1 = X'_1 (X_1 - X'_1).$$

Используя найденные зависимости, приведем выражение (5.16) закона регулирования к окончательному виду:

$$\eta = f(x) = \frac{1}{k_1} [F_x(x) \Delta'(x) X_1(x) + k_0 \Delta(x)], \quad (5.19)$$

где

$$\Delta(x) = \frac{1}{n_{2x}} [(X'_1 - cd_0) X_1 F_x^2 - n_{1x} Q_x], \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \Delta'(x) = \frac{1}{n_{2x}} \{ & [(X_1 - 3cd_0) X'_1 + 2c^2 d_0^2] F_x^2 - \\ & - (n'_{1x} Q_x + n_{1x} Q'_x) - \\ & - \frac{n'_{2x}}{n_{2x}^2} [(X'_1 - cd_0) X_1 F_x^2 - n_{1x} Q_x] \}. \end{aligned}$$

При выборе функций W и F в виде (5.7) и (5.9) соответственно и при условии $E = D$, функция $X_1(x)$ определяется выражением (5.18).

Соотношения (5.19) и (5.20) определяют также наименьшую эффективность элеронов и наименьшее усиление рулевой машины, необходимые для физического осуществления требуемого разворота на основе найденного

закона регулирования. Действительно, по техническому смыслу конструкции элеронов, наибольшее отклонение $\delta_0 = \max |\delta_s|$ ограничено ($\delta_0 \ll \pi/2$). Привод рулевой машины, как и всякий физический усилитель, обладает свойством насыщения. Например, в гидравлическом усилителе наибольшая выходная скорость достигается (при неизменной нагрузке и неизменном давлении масла на входе) в момент полного открытия золотникового окна, а при дальнейшем перемещении золотника эта скорость остается постоянной. Поэтому для обеспечения разворота самолета на угол $\Gamma_0 - \gamma_0$ за время $T - t_0$ по закону регулирования (5.19) необходимо соблюдение условий $m_s \geq m_s^*$, $k_1 \geq k_1^*$; здесь m_s^* и k_1^* — критические значения постоянной m_s в выражении эффективности $m_{\sigma x}^{\delta}$ и усиления k_1 рулевой машины в уравнении (5.3).

Обозначим через Δ^* — наибольшее значение функции (5.20) на отрезке $[0, \Gamma_0]$ переменного x . Тогда критическое усиление сигнала, управляющего элеронами, определяется из уравнения $\Delta^* = \delta_0$. Соответствующее уравнение имеет место и для критической величины k_1^* .

Отметим в заключение этого параграфа, что закон (5.19) справедлив при любом значении начального отклонения Γ_0 регулируемой величины от ее стабилизируемого значения $x = 0$. (Так как координата x угловая, ее возможные значения ограничены, по техническому смыслу задачи, отрезком $0 \leq |x| \leq \pi$; под словами «любое значение координаты x » подразумевается любое значение ее на этом отрезке.) Поэтому этот закон обеспечивает асимптотическую устойчивость состояния $x = 0$ и требуемое качество переходного движения, по отношению к любому начальному отклонению $x(t_0) = \Gamma_0$.

§ 19. Автоматическая стабилизация неустановившегося закона навигации в продольном полете

а) Постановка задачи. Пусть самолет, рассматриваемый как твердое тело, планирует по нисходящей продольной траектории в соответствии с законом навигации

$$\theta = \chi(t), \quad (5.21)$$

$\chi(t) < 0$, — предписывающим закон изменения угла наклона траектории подвижного начала N (§ 16). Такая программа

встречается при выполнении движения, описанного в примере 4 § 2. Функция $\chi(t)$ предполагается достаточно гладкой. Самолет управляется с помощью воздушного руля высоты (п. «а» § 3). Система управления является комбинированной (§ 4): программный механизм отклоняет руль по закону $\delta = \nabla(t)$, отвечающему закону (5.21) при отсутствии возмущений.

В момент времени $t = t_0$, под действием мгновенного импульса возмущающих сил, возникло отклонение угла ϑ тангажа от его программного значения $\vartheta_n(t_0)$. Вследствие непрерывности координат самолета, как функций от времени, исходное невозмущенное движение невозможно восстановить мгновенно, и в системе самолет-автопилот начнется переходное движение по всем переменным полета. Требуется построить закон регулирования следящей цепи комбинированной системы, обеспечивающий во-первых, асимптотическую устойчивость невозмущенного полета при $t \rightarrow \infty$, во-вторых, апериодическое течение переходного движения по углу θ и, в-третьих, заранее заданное ограничение $|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon_0 (0 \leq t \leq \infty)$ отклонения

$$\varepsilon = \theta(t) - \chi(t) \quad (5.22)$$

этого угла от его невозмущенного течения, отвечающего закону (5.21).

б) *Программа разомкнутой цепи комбинированной системы.* Выберем начало N навигационной системы координат в центре масс самолета и примем $v(t_0) > 0$, $g = g_0 = \text{const}$. Движение самолета происходит по нисходящей траектории, и аэродинамическое сопротивление существенно противодействует росту скорости. Исходя из критерия типа «а» § 1, зависимостью аэродинамических коэффициентов самолета от чисел Ma и Re можно пренебречь, если начальное значение $v(t_0)$ скорости существенно меньше скорости звука. По условию $P = 0$, $m = \text{const}$. Учитывая закон навигации (5.21), выпишем уравнения программного полета (§ 16):

$$\dot{v} = -a_0 \rho(H_n) v_n^2 c_{vx}(\alpha_n) - g_0 \sin \chi(t), \quad (5.23)$$

$$0 = a_0 \rho(H_n) v_n c_{vy}(\alpha_n) - \frac{g_0}{v_n} \cos \chi(t) - \chi'(t), \quad (5.24) \quad \left. \begin{array}{l} \text{I} \end{array} \right\}$$

$$\dot{H}_n = v_n \sin \chi(t), \quad (2.25)$$

$$\vartheta_n = \alpha_n + \chi(t). \quad (5.26) \quad \left. \begin{array}{l} \text{II} \end{array} \right\}$$

$$\dot{\vartheta} = \omega_n, \quad (5.27) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{III}$$

$$\dot{\omega}_n = a_1 \varrho(H_n) v_n^2 [m_z^a \alpha_n + m_z^w \omega_n + m_z^{\delta} \nabla(t)]. \quad (5.28)$$

Здесь $a_0 = S_d/(2m)$, $a_1 = S_d l_d/(2C)$, а индекс «н» указывает на невозмущенное (программное) течение соответствующего переменного. Благодаря наложению связи (5.21), уравнения движения распадаются на независимые системы (I), (II) и (III). Исключение угла α_n из уравнения (5.23) с помощью соотношения (5.24)

$$\alpha_n \equiv A_n(v_n, H_n, t)$$

приводит уравнения (I) к системе двух дифференциальных уравнений относительно скорости v_n и высоты H_n . Решение $v_n \equiv v_n(t)$ и $H_n \equiv H_n(t)$ при $v_n(t_0) > 0$ строится с помощью счетно-решающих устройств. Тогда величина α_n определится выражением:

$$\alpha_n = A_n[v_n(t), H_n(t), t] \equiv \alpha_n(t).$$

Уравнение (5.26) определяет программный закон $\dot{\vartheta} = \alpha_n(t) + \chi(t) \equiv \dot{\vartheta}_n(t)$ изменения угла тангажа. После этого функция $\nabla(t)$ находится из уравнений (5.27) и (5.28) путем дифференцирования. Отклонение руля по программе $\delta = \nabla(t)$ осуществляется в разомкнутой цепи управления комбинированной системы самолет-автопилот.

Из вида уравнений (5.23), (5.24) и (5.25) следует, что закон (5.21) физически осуществим с помощью руля высоты при любых функциях $\chi(t)$ дифференцируемых достаточно число раз — по крайней мере на некотором промежутке (1.1).

в) *Уравнения следящей цепи комбинированной системы самолет-автопилот в возмущенном полете.* Так как регулируемую координату θ трудно измерять непосредственно, выберем в качестве аргументов закона регулирования отклонения v и h координат ϑ и H соответственно от их программного течения: $v = \vartheta(t) - \vartheta_n(t)$, $h = H(t) - H_n(t)$. Значения величин $v(t)$ и $h(t)$, измеряемые непрерывно, будем считать известными в каждый момент времени. Введем также отклонения y и ζ скорости v полета и угла α атаки соответственно от программного течения: $y = v(t) - v_n(t)$, $\zeta = \alpha(t) - \alpha_n(t)$. С учетом соотношения (5.22), выпишем уравнения следящей цепи системы самолет-автопилот:

$$\begin{aligned} \dot{y} = & -a_0 \Pi_p(h, t) [v_n(t) + y]^2 c_{vx}(\alpha) - \\ & - g_0 \sin [\chi(t) + \varepsilon] - v_n'(t) \equiv f_v(\varepsilon, h, y, t), \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} = & a_0 \Pi_p(h, t) [v_n(t) + y] c_{vy}(\alpha) - \\ & - \frac{g_0}{v_n(t) + y} \cos [\chi(t) + \varepsilon] - \chi'(t), \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\dot{h} = v \sin [\chi(t) + \varepsilon] - H_n'(t), \quad (5.31)$$

причем

$$\begin{aligned} \Pi_p = & q [H_n(t) + h], \\ v = & \alpha + \chi(t) - \vartheta_n(t) + \varepsilon, \end{aligned} \quad (5.32)$$

$$\dot{v} = \omega - \vartheta_n'(t), \quad (5.33)$$

$$\dot{\omega} = a_1 \Pi_p(h, t) [v_n(t) + y]^2 \{m_z^\alpha \alpha + m_z^\omega \omega + m_z^\delta [\nabla(t) + \sigma]\}, \quad (5.34)$$

$$\dot{\sigma} = -k_0 \sigma + k_1 \xi. \quad (5.35)$$

Здесь σ — составляющая отклонения руля, $\sigma = \delta - \nabla(t)$, обусловленная действием замкнутой (следящей) цепи комбинированной системы управления самолет-автопилот, ξ — соответствующая составляющая управляющего сигнала рулевой машины, описываемой по-прежнему уравнением (5.3), $\xi = f(v, h)$ — искомый закон регулирования.

По условию (п. «а»), начальные значения переменных следующие:

$$y(t_0) = 0, \quad \varepsilon(t_0) = 0, \quad h(t_0) = 0, \quad v(t_0) = v_0 \neq 0. \quad (5.36)$$

Учитывая эти значения в соотношении (5.32), рассматриваемом при $t = t_0$, найдем, что

$$\zeta(t_0) = v(t_0) - \alpha_n(t_0) + \vartheta_n(t_0) - \chi(t_0).$$

Используя еще соотношение (5.26), найдем начальное значение отклонения ζ угла атаки:

$$\zeta(t_0) = v_0. \quad (5.37)$$

Рассматривая уравнения (5.30) и (5.24) при $t = t_0$ и вычитая правую и левую части уравнения (5.24) из соответствующих частей уравнения (5.30) и учитывая условия (5.36) и (5.37), получим:

$$\dot{\varepsilon}(t_0) = a_0 q [H_n(t_0)] v_n(t_0) [c_{vy}(\alpha_0 + v_0) - c_{vy}(\alpha_0)]. \quad (5.38)$$

Пусть значение $\alpha = \alpha_0$ принадлежит восходящему участку характеристики подъемной силы (рис. 10). Тогда при лю-

бых начальных отклонениях v_0 угла тангажа, при которых координата $\alpha(t_0) = \alpha_0 + v_0$ не выходит за границы этого участка, справедливо равенство:

$$\text{sign } \dot{\varepsilon}(t_0) = \text{sign } v_0. \quad (5.37)$$

Если полет протекает на нисходящей ветви этой характеристики, то

$$\text{sign } \dot{\varepsilon}(t_0) = -\text{sign } v_0.$$

г) *Решение задачи.* Следуя способу, примененному в § 18, введем новое переменное u с помощью преобразования регулируемой величины ε : $\varepsilon = W(u)$, $0 \leq u \leq \infty$. Выберем функцию $W(u)$ в виде:

$$W = bD^{-\lambda u} (1 - D^{-\lambda u}), \quad (5.40)$$

где $b \neq 0$, $\lambda > 0$, $D > 1$ — постоянные. Очевидно, что $W(0) = W(\infty) = 0$,

$$W'(u) = -b\lambda d_0 D^{-\lambda u} (1 - 2D^{-\lambda u}), \quad d_0 = \ln D > 0$$

и

$$W'(0) = b\lambda d_0. \quad (5.41)$$

Функцию $F(u)$ в уравнении (5.8) зададим по-прежнему в виде (5.9). Так как значению $t = t_0$ отвечают значения $u = 0$ и $\varepsilon = 0$ и

$$\dot{\varepsilon} = W'(u)F(u), \quad (5.42)$$

из равенств (5.41) и (5.42) вытекает соотношение

$$\dot{\varepsilon}(t_0) = b\lambda d_0 k,$$

в котором величина $\dot{\varepsilon}(t_0)$ определена равенством (5.38) и начальными значениями (5.36) и (5.37).

При $0 \leq u < \infty$ функция (5.40) имеет единственный экстремум $b/4$, достигаемый при

$$u = u_* = \frac{1}{\lambda} \log_D 2.$$

По условию (п. «а»), $|\varepsilon| \leq |b|/4 = \varepsilon_0$, т. е. $|b| = 4\varepsilon_0$. График функции (5.40) приведен на рис. 40 при условиях (5.39) и $v_0 > 0$, т. е. $\dot{\varepsilon}(t_0) > 0$ и $b = 4\varepsilon_0 > 0$, $W'(0) > 0$. Заменим в уравнениях (5.29) и (5.30) величины ε и $\dot{\varepsilon}$ их выражениями (5.40) и (5.42) соответственно. На каждом из участков монотонности характеристики $c_{vy} = c_{vy}(\alpha)$

уравнение $z = c_{vy}(\alpha)$ разрешимо относительно угла α единственным образом. С достаточно хорошей точностью (рис. 10) зависимость коэффициента c_{vy} от угла α описывается соотношением

$$c_{vy} = c_0 \alpha^2 + c_1 \alpha + c_2$$

$$(c_0 < 0, c_1 = c_{vy}^a > 0, c_2 \leq 0 - \text{постоянные}) \text{ и}$$

$$\alpha = \frac{1}{2c_0} \left[\sqrt{c_1^2 + 4c_0(z - c_2)} - c_1 \right] \equiv A(u, h, y, t), \quad (5.43)$$

где

$$z \equiv z(u, h, y, t) =$$

$$= \frac{W'(u) F(u) + \frac{g_0}{v_n(t) + y} \cos [\chi(t) + W(u)] + \chi'(t)}{a_0 \pi_p(h, t) [v_n(t) + y]}.$$

В программе счетно-решающего устройства, осуществляющего закон регулирования, следует избегать машинного

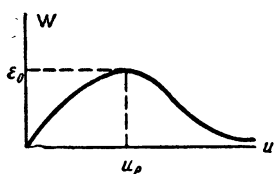


Рис. 40

дифференцирования, поскольку эта операция способна приводить к заметным погрешностям. Поэтому при воспроизведении производных по времени от функций $\chi(t)$, $v_n(t)$, $\omega_n(t)$, $\nabla(t)$, отвечающих невозмущенному движению (5.21), можно пользоваться двумя приемами:

1) эти функции известны заранее (п. «б») и поэтому значения их производных возможно протабулировать предварительно, вплоть до нужного порядка; 2) время t под знаком этих функций выражается через новое переменное u с помощью соотношения (5.10); это обстоятельство уже использовалось в задаче, рассмотренной в § 18.

Подставляя в уравнение (5.32) вместо величины α ее выражение (5.43), получим

$$v = A(u, h, y, t) - \alpha_n(t) + W(u).$$

В случае 2) функция A не зависит от времени в явном виде. Отклонение y вырабатывается на выходе счетно-решающего устройства, интегрирующего уравнение (5.29)

$$y = \int_0^t f_v[W(u), h, y, t] dt. \quad (5.44)$$

Для определения величины ξ используем уравнения (5.33), (5.34) и (5.35). Последовательно дифференцируя функцию A по времени

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial u} \dot{u} + \frac{\partial A}{\partial h} \dot{h} + \frac{\partial A}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial A}{\partial t}, \dots,$$

заменяем, во избежание выполнения дифференцирования по времени с помощью вычислительных устройств, производные $\dot{u}$, $\dot{h}$ и $\dot{y}$ их выражениями в силу соответствующих уравнений:

— производную $\dot{u}$ — функцией $F(u)$ (5.9),

— производную $\dot{h}$ — правой частью уравнения (5.31),

$$\dot{h} = [v_n(t) + y] \sin [\chi(t) + W(u)] - \dot{H}_n(t),$$

— производную $\dot{y}$ — функцией $f_v(\varepsilon, h, y, t)$. Тогда приходим к выражению управляющей координаты:

$$\xi = \xi(u, \sigma, h, y, t).$$

Здесь величина y определяется выражением (5.44). Переменное u выражается через регулируемую координату ε с помощью уравнения (5.40), квадратного по отношению к величине $D^{-\lambda u}$:

$$D^{-\lambda u} = \begin{cases} s_1(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4}{b} \varepsilon} \right), & 0 \leq u \leq u_e, \\ s_2(\varepsilon) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4}{b} \varepsilon} \right), & u_e \leq u \leq \infty. \end{cases} \quad (5.45)$$

Остается выразить регулируемую координату через измеряемые координаты v и h . Из уравнения (5.32) следует, что

$$\varepsilon = v - A(u, h, y, t) - \alpha_n(t), \quad (5.46)$$

а из уравнения (5.45) —

$$u = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} \log_D s_1(\varepsilon), & 0 \leq u \leq u_e, \\ \frac{1}{\lambda} \log_D s_2(\varepsilon), & u_e \leq u \leq \infty. \end{cases} \quad (5.47)$$

Соотношения (5.46) и (5.47) определяют координату ε через величины v и h . Тем самым построение закона регулирования завершено.

З а м е ч а н и е. Выражение закона регулирования значительно упростится, если имеется возможность непо-

средственно измерять еще и скорость полета. Наоборот, если отказаться от непосредственного измерения высоты самолета и ограничиться измерением только угла тангажа, возникнет необходимость введения дополнительного интегрирующего устройства для вычисления отклонения h на основании уравнения (5.31).

Эти примеры указывают, что идеальные измерители физических переменных и идеальные автоматические вычислительные устройства равносильны в детерминированных системах с полностью известными свойствами в том смысле, что определенные измерители и вычислительные устройства взаимозаменяемы.

ЛИТЕРАТУРА

О системах отсчета в мировом пространстве

- В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. ГТТИ, 1945.

Общие вопросы механики

- Ф. Р. Гантмахер. Лекции по аналитической механике. Физматгиз, 1960.
А. И. Лурье. Аналитическая механика. Физматгиз, 1961.
Г. К. Суслов. Теоретическая механика. ГТТИ, 1946.

Вопросы механики авиационных и ракетных систем

- А. М. Богданов-Черрин. Механика в авиационной технике. Оборонгиз, 1952.
А. И. Гуринов. Основы механики тел переменной массы и ракетодинамики. Ч. I, Издание Моск. гор. педагогического ин-та, 1960.

О функциях с ограниченным изменением

- И. П. Натансон. Теория функций вещественного переменного. ГТТИ, 1950.

Теоремы существования и единственности системы обыкновенных дифференциальных уравнений

- В. В. Немыцкий и В. В. Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений, ГТТИ, 1949.
И. Г. Петровский. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений (любое издание).
В. В. Степанов. Курс дифференциальных уравнений, 7-е издание, 1958.
Л. С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Физматгиз, 1961.

Теорема о существовании решения дифференциального уравнения на одностороннем отрезке независимого переменного

Н. М. Матвеев. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. Ленинградского Ун-та, 1955.

Устойчивость движения

Б. В. Булгаков. Колебания. ГТТИ, 1954.

Г. Н. Дубошин. Основы теории устойчивости движения. Изд. Московского ун-та, 1952.

А. М. Летов. Устойчивость нелинейных регулируемых систем, 1955.

Н. Г. Четаев. Устойчивость движения. ГТТИ, 1955.

Оптимальные законы регулирования

Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов, Физматгиз, 1961.

Л. И. Розоноэр. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. «Автоматика и телемеханика», 20, № 10, 11, 12, 1959.

В. К. Исаев. Принцип максимума Л. С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет. «Автоматика и телемеханика» 22, № 8, 1961.

Аэродинамика самолета

В. В. Голубев. Лекции по теории крыла. ГТТИ, 1949.

Б. Т. Горощенко. Динамика полета самолета. Оборонгиз, 1954.

А. К. Мартынов. Экспериментальная аэродинамика. Оборонгиз, 1953.

И. В. Остославский. Аэродинамика самолета. Оборонгиз, 1957.

Комбинированная система управления

А. Г. Ивахненко. Техническая кибернетика. Киев, ГТТИ, УССР, 1959.

Н. К. Шувалов. Системы программного регулирования, работающие на комбинированном принципе. Судпромгиз, 1960.

Линейная алгебра и матричное исчисление

А. Г. Курош. Курс высшей алгебры. Физматгиз, 1959.

П. И. Романовский. Начала линейной алгебры. МАИ, Оборонгиз, 1960.

Р. Фрезер, В. Дункан, А. Коллар. Теория матриц. М.—Л. 1950.

Матричные методы в кинематике

Г. Голдстейн. Классическая механика. ГТТИ, 1957,

Механика тел переменного состава (массы)

- М. Ш. Аминов. Некоторые вопросы движения и устойчивости твердого тела переменной массы. Казанск. Авиац. ин-т, вып. XVIII, 1959.
- У Ф. Р. Гантмахер и Л. М. Левин. Теория полета неуправляемых ракет. Физматгиз, 1959.
- В. М. Карагодин. Некоторые вопросы механики тела переменной массы. МАИ, вып. 63, Оборонгиз, 1956.
- А. А. Космодемьянский. Курс теоретической механики. Учпедгиз, 1956.

Влияние относительного движения газовых частиц в реактивном сопле на угловое движение самолета

- Ф. Р. Гантмахер и Л. М. Левин. Теория полета неуправляемых ракет. Физматгиз, 1959.
- В. И. Федосьев и Г. А. Синярев. Введение в ракетную технику. Оборонгиз, (любое издание).

Теория продольного движения самолетов

- И. В. Остославский, С. Г. Калачев. Продольная устойчивость и управляемость самолета. Оборонгиз (любое издание).

Динамика системы самолет-автопилот

- В. А. Боднер, М. С. Козлов. Стабилизация летательных аппаратов и автопилотов. Оборонгиз, 1961.
- Вопросы автоматического регулирования движущихся объектов. Под ред. акад. Б. Н. Петрова. МАИ, вып. 139. Оборонгиз, 1961.
- Вопросы расчета авиационных приборов и систем управления. Под ред. проф. Б. А. Рябова. МАИ, вып. 120, Оборонгиз, 1960.
- М. З. Литвин-Седой. О качестве автоматической стабилизации неустойчивой машины. Известия АН СССР, ОТН, «Энергетика и автоматика», № 4, 1961.
- С. П. Колосов и В. М. Строилов. Основы автоматического пилотирования. МАИ. Оборонгиз, 1959.
- И. В. Остославский и И. В. Стражева. О формировании контура управления самолетом. МАИ, вып. 124, Оборонгиз, 1960.
- В. П. Селезнев. Навигационные устройства, Оборонгиз, 1961.
- Г. О. Фридлендер. Инерциальные системы навигации. Физматгиз, 1961.
- А. Ф. Хохлов. Теория и технические применения автоматических устройств. Машгиз, 1959.
- Б. В. Широкопад. О существовании цикла вне условий абсолютной устойчивости. Автоматика и телемеханика, XIX, № 10, 1958.

Применение счетно-решающих устройств в системах автоматики

- А. А. Фельдбаум. Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, 1959.

О г л а в л е н и е

	Стр.
Предисловие	3
<i>Глава I. Основные понятия механики управляемого полета</i>	5
§ 1. Системы координат	5
§ 2. Общая постановка задачи об автоматическом управлении полетом	19
§ 3. Органы управления самолетом	31
§ 4. Комбинированная система управления самолетом	61
<i>Глава II. Геометрия и кинематика управляемого полета</i>	65
§ 5. Матрицы направляющих косинусов	66
§ 6. Сложение конечных поворотов	71
§ 7. Системы углов Эйлера	76
§ 8. Кинематические уравнения	82
§ 9. Кинематика углового движения прямоугольного трехгранника	88
§ 10. Прикладные задачи	96
<i>Глава III. Характеристики самолета как объекта управления</i>	
§ 11. Динамика тела и точки переменного состава	112
§ 12. Система твердых тел переменного состава	121
§ 13. Внешние силы, действующие на самолет	130
<i>Глава IV. Уравнения движения самолета</i>	
§ 14. Уравнения движения самолета, как системы тел переменного состава	150
§ 15. Некоторые прикладные задачи	166
§ 16. Уравнения продольного движения самолета	179
§ 17. Особенности механики космического полета	184
<i>Глава V. Закон регулирования в системе самолет-автопилот</i>	190
§ 18. Автоматическая стабилизация углового положения самолета в процессе вертикального взлета	191
§ 19. Автоматическая стабилизация неустановившегося закона навигации в продольном полете	201

39 коп.

ВЫСШАЯ ШКОЛА · 1962