

Л. Г. ЛОЙЦАНСКИЙ и Л. И. ЛУРЬЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

КИНЕМАТИКА

ГГТИ



Л. Г. ЛОЙЦЯНСКИЙ и А. И. ЛУРЬЕ

профессора ленинградского физико-механического института

Теоретическая м е х а н и к а

Часть первая

Кинематика

1932

государственное технико-теоретическое издательство
ленинград • москва

*Авторы посвящают настоящий
Курс механики незабвенной памяти
безвременно погибшего учителя
профессора
Александра Александровича
Фридмана.*

От авторов.

Курс теоретической механики, первый выпуск которого представляет настоящая книга, является результатом многолетней преподавательской работы авторов в Ленинградском физико-механическом институте (бывш. Физико-механическом факультете Ленинградского политехнического института). Первая часть курса посвящена Кинематике, вторая часть, состоящая из двух выпусков, будет содержать изложение общих принципов Динамики и некоторых ее специальных задач (главным образом теорию колебаний). Отдел Статики в ее пропедевтическом изложении не вошел в программу настоящего курса и предполагается известным учащемуся. В дальнейшем авторы надеются восполнить этот пробел.

Авторы рассчитывают, что эта книга может оказать помощь в прохождении Механики не только студенту втуза, изучающему предмет под руководством преподавателя, но и служить руководством для самообразования, поэтому выделен ряд вводных замечаний, выясняющих целевую установку отдельных вопросов и заключающих ряд методических указаний для самостоятельного прохождения книги. Особенное внимание на эту сторону дела обращено во второй части (Динамика), содержащей больше принципиально трудных положений, чем первая часть (Кинематика).

Во всем курсе, последовательно развиваясь, применяется векторный метод изложения, причем знания элементов векторной алгебры и анализа от изучающего не требуется. Все основные приемы векторного исчисления в соответствующих местах изложены. Учащегося, достаточно знакомого с векторами, не затруднит эти места при чтении книги опустить.

Авторы приносят благодарность Б. Я. Лурье и Н. И. Шабод за помощь, оказанную при проведении в порядок рукописи. Редактирование книги было проведено с исключительным вниманием и любовью к делу редактора ГТТИ Е. В. Пулькиной, которой авторы особенно признательны.

Введение.

Под Механикой понимают весьма широкую область наук, занимающихся изучением *равновесия и движения материальных тел*. Зародившись из конкретных практических задач, Механика с течением веков накопила настолько большой материал, что смогла выделить из себя ряд обобщающих положений и методов, составивших предмет Теоретической механики. Расцвет математической мысли—появление анализа бесконечно-малых—дает сильный толчок к развитию *математических* методов Теоретической механики. Теоретическая механика все больше и больше отходит от связи с опытом, вдаваясь в развитие аналитических методов,— появляется специальная область Механики—Аналитическая механика.

Но жизненные запросы, в особенности с появлением машинной техники, не позволяют замереть Практической механике. Отказавшись от сложных математических методов, на простых опытных данных, с большим числом из опыта полученных коэффициентов и формул, строится новый отдел Механики—Прикладная механика. В этом отделе находится целый ряд необходимых для зарождающейся техники наук: Строительная механика, Гидравлика, Теория машин и механизмов, Сопротивление материалов и Теория упругости, Гидродинамика и Аэродинамика и др., чтобы потом вырасти в самостоятельные области Механики. Такое распадение на две, по своим методам крайне различные, ветви совершенно естественно для хозяйственной обстановки XIX и начала XX века. Бурно растущая промышленность и развитие путей сообщения ставят перед Механикой ряд неотложных практических задач, требуют немедленного разрешения их на месте; о глубоких математических подходах к практическим задачам не может быть и речи. Теоретической механике остается заниматься менее экстренными проблемами Физики и Астрономии, а у Прикладной механики—свой путь.

Математический анализ и в настоящее время не является еще методом широких масс инженерно-технических работников, но за последнее время мы становимся свидетелями нового пути развития механики—мощного синтеза теоретической и прикладной ветвей в единой, как ее сейчас называют, Технической механике.

К концу XIX века техника справилась с первыми насущными задачами машиностроения и транспорта. Появление новых задач, связанных с быстроходным транспортом (автомобиль, мощный паровоз, аэроплан) и быстроходными двигателями громадной мощности, ставит перед Механикой ряд таких вопросов, которые для своего разрешения требуют применения более углубленных математических методов. Старая Прикладная механика этого дать не могла. Необходим тонкий научный эксперимент, руководимый всей сово-

купностью обобщенного предыдущего опыта — теорией, нужно и дальнейшее развитие теории, т. е. подведение итогов, обобщение и схематизация все вновь и вновь накапливающегося опытного материала. Без этого синтеза теории и практики путей развития нет.

Как раз в самое последнее время мы являемся свидетелями того, как при заводах у нас в СССР и за рубежом разворачиваются лаборатории, как заводы превращаются в *опытные* заводы, научно-исследовательские институты начинают целиком перестраиваться на непосредственную связь с промышленностью, а некоторые вузы готовят инженеров повышенного типа с достаточным физико-механическим образованием.

Теоретическая механика не остается в стороне. Решительно повернувшись лицом к практике, теоретическая механика начинает заниматься разрешением совершенно конкретных промышленных заданий. Одна из первых и важнейших задач, разрешенных Теоретической механикой,—это несомненно задача о колебаниях в машинах (колебания фундаментов, поперечные и крутильные колебания валов и др.), затем нужно отметить теорию регулирования машин, далее сильно развившуюся за последнее время прикладную Теорию упругости материалов и Гидро-Аэродинамику и ряд других проблем.

Все эти области имеют совершенно определенного потребителя — технику, но методы у них имеют мало общего с прежней прикладной механикой. Настоящий глубокий математический аппарат: Лагранжевы уравнения, дифференциальные уравнения в частных производных, интегральные и интегро-дифференциальные уравнения, приближенные графические и аналитические методы решения дифференциальных уравнений — вот пути развития новой Технической механики.

Соответственно этому направлению современные учебники должны: 1) не избегать, как это было раньше, математических методов, и наоборот, пользоваться всей совокупностью знаний математического анализа и 2) заключать конкретный технический материал.

Надо решительно отказаться от решения задач чисто математического характера о движениях по нераспространенным на практике траекториям, хотя бы даже и интересным с математической стороны, от динамических задач с силами, в природе не встречающимися, пора покончить с задачами о „насекомых, ползущих по стержням, скользящим по данной кривой“, о „человеке, подпрыгивающем над землей и бросающем за спину гири“ и т. д.

Все задачи должны быть технически оформлены и учащемуся должно быть ясно, для чего они нужны.

Авторы предлагаемого курса Механики может быть где-нибудь и погрешили против поставленных выше двух принципов, но во всяком случае старались в упражнениях, примерах и контрольных задачах давать исключительно конкретный материал.

В настоящем курсе принят в основном векторный метод изложения (исключая, конечно, случая прямолинейного движения, когда векторный анализ не нужен). Надо отметить, что применение век-

торного метода обусловлено вовсе не краткостью вида формул, который он дает. Большинство механических величин является векторами, и поэтому векторное исчисление есть естественный язык Механики. Векторное исчисление именно и зародилось и выросло как обобщение и схематизация конкретных физических и механических понятий и явлений (работа, момент силы, взаимодействие магнитного поля и электрического заряда). В настоящее время этот метод все больше и больше проникает в технические журналы и учебники, и даже в таких популярных справочниках, как „Hütte“ и Большая техническая энциклопедия, отделы Механики изложены векторно.

В наших вузовских программах векторное исчисление еще только начинает входить в курс математики, поэтому мы напомним учащемуся в тех местах, где это следует, основные понятия теории векторов. Для усвоения материала было бы конечно лучше, чтобы изучающий заранее ознакомился с векторным анализом, хотя бы в том небольшом объеме, как это делается в курсе Смирнова, В. И.—Высшая математика (т. I, § 183—192 включительно, т. II, § 108 и 109).

Если исключить из рассмотрения специальные части Механики: механику упругих тел—Теорию упругости и механику жидких и газообразных тел—Гидро- и Аэродинамику, то основной курс Механики можно разделить на три отдела: Статику, Кинематику и Динамику.

В первом отделе—Статике—рассматриваются условия взаимного равновесия тел, т. е. покоя или равномерного прямолинейного движения их, во втором и третьем отделах—Кинематике и Динамике—излагаются методы исследования взаимного движения тел.

Кинематика занимается исключительно только изменениями в геометрическом расположении тел с течением времени, принимая движение заданным и устанавливая количественные меры, характеризующие движение; Динамика же рассматривает взаимодействия между телами, выясняет, какие движения могут происходить при данном законе взаимодействия тел и какие фактически происходят при определенных начальных условиях.

Конечно все эти отделы между собою тесно связаны. В Статике постоянно приходится в скрытом виде пользоваться кинематическими приемами, развитие Кинематики обусловлено динамическими задачами и, наконец, Статику и Динамику почти невозможно разграничить; Статику можно рассматривать как частный случай Динамики, Динамику можно определенным приемом сводить к Статике.

Все же, руководствуясь соображениями сложности материала и его роли для прохождения других технических дисциплин, принято разграничивать отделы Механики и преподавать их учащемуся в определенной последовательности, начиная со Статики и Кинематики и кончая Динамикой.

Считаясь с насущной необходимостью в учебных руководствах для вузов, мы в первую очередь выпускаем Кинематику и Динамику, откладывая выпуск Статики на второй план.

Настоящая книга содержит в себе изложение основных методов Кинематики точки и твердого тела.

Курс Кинематики не претендует на полноту материала. Все, что не необходимо для дальнейшего изложения Динамики или что не имеет очевидного применения на практике, авторами сознательно выпущено, чтобы не делать книгу слишком большой. Мы опустили, например, учение об Эйлеровых углах, выражение угловой скорости в случае вращения твердого тела около неподвижного центра через Эйлеровы углы, так как это имеет значение лишь в теории жиро-скопов и в других специальных случаях; опущена также теория криволинейных координат, имеющая значение для физиков. Все эти дополнения будут сделаны в следующих частях нашего курса Механики.

Все изложенное разбито на три темы: 1) Кинематика точки, 2) Кинематика твердого тела и 3) Относительное движение. Впереди каждой темы имеется краткое введение, характеризующее содержание и целевую установку темы, кроме того во введениях к отдельным заданиям имеются указания об особенностях соответствующего задания, сделаны ударения на важнейших пунктах заданий.

Значительная часть книги посвящена примерам и упражнениям, служащим, с одной стороны, для иллюстрации теоретических положений, а с другой, имеющих целью научить учащегося делать основные кинематические расчеты как аналитические, так и графические.

Материал для этих упражнений выбран главным образом из теории машин и механизмов, а также и из других отделов Технической механики. Большинство упражнений заканчивается численным подсчетом до конца, составлением диаграмм и графиков, выясняющих основные зависимости между рассматриваемыми величинами. Таковы же задачи и вопросы для самопроверки, помещенные в конце каждого задания.

Методические указания к прохождению курса Кинематики. Настоящая книга предназначена как для студентов втузов и вузов, так и для заочников и самообразования. Студенты, занимающиеся с преподавателями, получают методические указания от своих руководителей, поэтому настоящие указания больше всего относятся к лицам, проходящим курс Механики заочно.

Самый трудный вопрос, встающий перед самостоятельно прорабатывающим материал учащимся, это несомненно вопрос об отделении главного материала от второстепенного. Выяснить опорные пункты текста, понять их цель и назначение—это значит наполовину усвоить материал. Именно поэтому так ценно при самостоятельном чтении книг составлять конспект прочитанного. Идя в этом направлении навстречу учащемуся, мы в многочисленных введениях к темам, а также отдельным заданиям, делаем определенные ударения на том, что должно быть особенно тщательно проработано. Кроме того повсюду, где это было возможно, мы даем конкретные целевые установки тем, заданий и даже отдельных вопросов. С этой же целью основные определения и формулировки набраны *курсивом*, а главные формулы помещены в рамочку.

Мы считаем, что учащийся должен выучивать главные формулировки почти наизусть. Опыт педагогической работы с аудиторией показывает, что студенты обыкновенно совершенно не умеют вкратце формулировать утверждения, определения или методы подхода к разным задачам; им обыкновенно не хватает терминов и нужных слов. Получить эту возможность легче всего именно заучиванием тех нескольких десятков формулировок, которые делаются на протяжении различных проходимых ими курсов; только так постепенно вырабатывается умение кратко и определенно выражать и фиксировать свои мысли.

Мы советуем также учащемуся выучить и запомнить то небольшое число формул, которые стоят у нас в рамочках. Конечно при решении ряда задач учащийся постепенно, так или иначе, запомнит нужные формулы; все же пожалуй лучше будет, если при чтении и проработке книги он составит краткий конспект ее и выпишет в порядке главнейшие формулы; имея всегда их перед глазами при решении задач, он лучше всего их выучит.

При первом прохождении теоретической части задания учащийся не должен стремиться к полному ее усвоению; лучше, один раз прочтя, перейти к разбору примеров и упражнений, приведенных в конце каждого отдела теории. При разборе упражнений учащийся поневоле будет вновь возвращаться к теоретической части, иллюстрируемой на упражнениях, причем степень усвоения материала значительно повышается. Когда все упражнения разобраны, тогда надо вновь вернуться к теории, еще раз задание прочитать, выяснить до конца все неясные места; многое при этом откроется учащемуся из того, на что он при первом чтении не обратил внимания.

Проработка решенных в курсе задач не менее полезна, чем самостоятельное решение новых. На этих задачах следует учиться подходу к задаче, методике ее решения, а также тому фактическому материалу, которым наполнено большинство упражнений. Кроме того нами вынесено на упражнения много второстепенных теоретических пунктов программы.

Для контроля усвоения проработанного учащемуся в конце заданий предлагаются задачи и вопросы для самопроверки. Все эти задачи должны быть по возможности учащимся решены. Большинство контрольных задач, а также и упражнений сопровождается необходимостью вычерчивания графиков и составления чертежей (планы скоростей и ускорений). Учащиеся, в особенности те, у кого в учебном плане не имеется специального курса Прикладной механики, должны тщательно проделать все чертежи.

После проработки целой темы учащийся должен сделать контрольную работу. Материал для контрольной работы подобран таким образом, что в нее вошли все основные пункты темы. Сделав контрольную работу, учащийся имеет право считать, что тема проработана.

Желающие могут углубить свои знания, пользуясь литературой, как русской так и иностранной, список которой приложен в конце книги.

Тема первая.

Кинематика точки.

Мы начинаем изучение кинематических способов описания движения с самого простого случая — Кинематики точки. На первый взгляд может показаться неинтересным изучение движения точки, так как обычно на практике мы имеем дело не с точкой, а с твердым телом определенных размеров, но здесь следует иметь в виду следующее: 1) иногда представляется необходимым описать движение не всего твердого тела, а только отдельной его точки, например центра пальца кривошипа, конца стрелки гальванометра; 2) во многих случаях можно удовольствоваться изучением движения одной какой-нибудь наиболее просто движущейся точки тела, чтобы приблизительно судить о движении остальных, например при определении пути, проходимого трамваем, рассматривать движение центра тяжести трамвая, так как наперед ясно, что пути других точек, хотя и отличаются от взятого пути (особенно на закруглениях), но сравнительно мало; и наконец 3) имеются такие случаи движения (поступательное), как например движение крейцкопфа в направляющей линейке, или движение кузова трамвая на прямолинейном пути, при которых все точки двигаются совершенно одинаково, тогда достаточно изучить движение одной только точки, чтобы знать движение всех остальных.

Установим план, по которому мы будем в дальнейшем вести изложение первой темы.

Прежде всего мы в задании 1 напомним, как определяется *положение* точки на прямой линии — оси, а также пройденный ею *путь*. Закон изменения положения точки на оси, т. е. изменения ее абсциссы, с течением времени дает нам *уравнение движения* точки. На ряде примеров прямолинейного движения мы рассматриваем частные случаи этих уравнений, а также различные методы представления уравнений движения: аналитический и графический. В задании 2 мы развиваем эти основные представления уже на более сложных случаях движения, именно движения в пространстве. Здесь вводится понятие о *траектории* точки и способе подсчета *пути* в случае криволинейной траектории. Этот материал лучше всего усваивается на примерах простейших механизмов.

После установления этих основных понятий мы вводим следующие кинематические элементы, уже более глубоко характеризующие происходящее движение: *скорость* и *ускорение* движения. В задании 3 рассматриваются скорость и ускорение прямолинейного движения, причем центр тяжести внимания учащегося сосре-

доточивается на аналитической и графической связи скорости и ускорения движения с уравнением движения и его графическим представлением. В заданиях 4, 5 и 6 изучается более сложный случай — движение криволинейное. Здесь скорость и ускорение вводятся уже как векторы, причем вначале рассматриваются их проекции на оси координат и графическое представление их при помощи годографов. Задание 6 содержит очень важные для следующих тем понятия касательного и нормального ускорений. На этот вопрос как с теоретической, так и с прикладной точки зрения у нас обращено особое внимание.

Кроме общих методических указаний, относящихся ко всей книге в целом и помещенных в предисловии, мы обращаем внимание учащегося на ряд методических особенностей первой темы.

Методические указания к прохождению первой темы. Первые три задания темы заключают в себе весьма несложный теоретический материал, все внимание учащегося здесь должно быть сосредоточено на упражнениях. Упражнения даются в конце соответствующих параграфов, причем в подавляющем числе это не просто расчетные примеры, а главным образом небольшие исследования конкретных случаев теоретически или практически интересных движений, а также описание механизмов, производящих их.

Эти упражнения должны быть очень внимательно проработаны учащимся. В них он найдет не только иллюстрацию основных теоретических положений, но попутно и целый ряд полезных сведений о самых разнообразных сторонах описываемых движений, о различных методах, применяемых не только в Кинематике, но и в других науках. Даже целый ряд *теоретических*, общих положений, изложен у нас на *упражнениях*, так как такое наглядное доказательство часто больше дает учащемуся, чем отвлеченное. Укажем например, что с самого же начала первой темы, после нескольких строк теории, мы в упражнениях подробно излагаем гармоническое колебательное движение, причем обращаем особое внимание на самые разнообразные методы его получения (кулиса Вольфа, кривошипный механизм с шатуном, равным кривошипу, и др.), останавливаемся на применениях гармонического движения в аппаратах для получения равномерного движения и др. Колебательное движение исследуется не только обычными методами Кинематики, но и теми, которые применяются в Электротехнике. Говоря о способах регистрации движения, мы, сообщив об аналитическом и графическом методах, обращаем, хотя и вскользь, внимание учащегося и на современные лабораторные методы кино-записи.

После ознакомления с теорией, при проработке упражнений учащийся должен обязательно проделывать все выкладки, а также и составлять все указанные там чертежи: некоторые просто набросать карандашом, а *все графики движения тщательно вычертить на миллиметровой бумаге*.

Только после этого можно приступать к ответу на вопросы для самопроверки и к решению контрольных задач.

Последние три задания, как уже упоминалось, отличаются от предыдущих довольно большим теоретическим материалом. Не забывая того, что только-что говорилось о роли упражнений, уча-

щийся должен в этих заданиях проработать материал и теоретически. Такие сложные понятия, как ускорение в криволинейном движении, разложение ускорения на касательную и нормальную составляющие, значительно упрощаются в нашем изложении благодаря введению векторного метода. Учащийся обязан хорошо себе усвоить понятия вектор-функции, годографа, векторной производной. Современными курсами Механики, Физики, Электротехники пишутся с применением векторного метода, поэтому не только для усвоения последующих тем нашей книги, но и для общего своего развития, учащийся должен обратить сугубое внимание на теорию векторов.

Проработав теорию, при рассмотрении упражнений последнего задания учащийся должен особенно безупречно научиться пользоваться касательным и нормальным ускорениями. Не желая снижать значение всех остальных пунктов темы, мы все же должны указать, что без полного овладения этим вопросом учащийся не сможет решить буквально ни одной расчетной задачи второй и третьей тем.

Сводные контрольные задания по всей теме даются для того, чтобы учащийся отдал себе полный отчет в усвоении темы.

Некоторые более детальные методические указания разбросаны нами по всей теме.

Задание 1-е.

Прямолинейное движение точки и способы его задания.

В настоящем задании мы будем рассматривать исключительно только движение точки по прямой линии — так называемое *прямолинейное* движение. Этот случай движения представляет значительный практический интерес. Простейший случай падения тяжелого тела по вертикали, вылет пули из дула ружья, движение трамвая по прямолинейному пути и наконец один из наиболее распространенных видов движения — колебания различных рессор, пружин и т. п., все это или прямолинейные движения, или во всяком случае движения, настолько близкие к ним, что без большой ошибки могут приниматься за прямолинейные.

§ 1. Определение положения точки на прямой линии. Абсцисса и пройденный путь.

Прежде всего вспомним, как определяется положение точки на прямой линии. Для этого на прямой линии выбирается произвольная точка за начало и прямой сообщается некоторое определенное направление. Наша прямая линия становится осью (например осью *OX*, рис. 1). Положение какой-нибудь движущейся точки *M* на этой оси определяется ее расстоянием от выбранного начала *O*, причем это расстояние берется со знаком $+$, если точка лежит по ту сторону от начала *O*, куда направлена ось, и со знаком $-$, если точка лежит с противоположной стороны. Эта алгебраическая величина носит наименование *абсциссы точки*.

Как известно из геометрии, выбор начала абсцисс O и направления оси остается обычно совершенно произвольным, в Кинематике этой произвольностью пользуются для упрощения формул и выбирают по большей части за начало O ту точку оси, из которой начинается движение тела, а за направление оси — направление движения этого тела в начале движения. В других случаях за начало принимают какое-нибудь особенно интересное положение движущейся точки, например, если точка колеблется около какого-нибудь среднего положения, то *это* положение принимают за начало координат и т. д.

Таким выбором, обыкновенно, достигается большая простота формул, удобство отсчета абсцисс и т. п. В дальнейшем на ряде примеров мы убедимся в ценности этого методического указания.

Расстояние точки до начала координат (с определенным выше знаком) не следует смешивать с путем s , т. е. с расстоянием, которое прошла точка за некоторый промежуток времени при своем движении. Разница эта лучше всего будет видна на следующем примере. Предположим, что точка вышла из начала координат O и в положительном направлении удалилась на 10 см, а затем вернулась в прежнее положение. Абсцисса ее очевидно равна нулю, а пройденный путь — 20 см. Пройденный путь всегда растет и никогда не может уменьшиться, движение „назад“ сопровождается продолжением увеличения пройденного пути, в то время как абсцисс точки при этом уменьшается. Если следить во все время движения за абсциссой, то можно определить и пройденный путь.

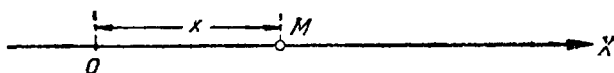


Рис. 1.

Для этого надо приращения абсциссы брать всегда положительными, несмотря на то, увеличивается или уменьшается абсцисса, и прибавлять это приращение к предыдущему значению абсциссы. Полная сумма и даст пройденное точкой расстояние.

Мы только-что видели, что для определения положения точки на прямой линии необходимо знать ее абсциссу x . Предположим теперь, что наша точка движется, занимая в разные моменты времени t разные положения x . Если бы мы имели возможность определять x каким-нибудь расчетом или графическим путем для любого заданного момента t , то этим самым мы вполне определили бы движение точки M .

§ 2. Прямолинейное движение точки. Уравнение движения.

Все дело сводится таким образом к заданию соответствия между численными значениями абсциссы точки и значениями времени, т. е. к заданию функциональной зависимости

$$x = f(t).$$

Это уравнение называется *уравнением прямолинейного движения*.

В следующих заданиях мы увидим, что имея уравнение движения, мы можем легко получить все кинематические характеристики движения. В настоящем задании займемся составлением уравнений некоторых наиболее практически интересных движений.

Примеры и упражнения.

1. Равномерное прямолинейное движение. Движение, при котором абсцисса точки растет пропорционально времени, т. е. является линейной функцией времени:

$$x = a + bt,$$

называется *равномерно-прямолинейным движением*.

Если в начальный момент $t=0$ начальная абсцисса была x_0 , то полагая в предыдущей формуле $t=0$, найдем $a = x_0$. Кроме того, так как движение происходит *все время в одну сторону*, например в сторону только положительных или только отрицательных значений x , то коэффициент b , равный:

$$b = \frac{x - x_0}{t},$$

определяет отношение *пройденного пути к протекшему времени*, взятое со знаком $+$ или $-$; это, как изучающему вероятно известно из элементарного курса физики, скорость равномерного движения $\pm v$. Таким образом окончательно имеем:

$$x = x_0 \pm vt.$$

Мы не останавливаемся подробно на этом элементарном примере, отметим лишь вскользь, что равномерное движение, являясь как будто самым простым движением в природе, требует для своего осуществления очень сложных регулирующих приспособлений. Применяется оно например в прямолинейном движении ленты самописца, ленты хронографа и др. Соединяя перо самописца с контактным прерывателем точного хронометра, по значкам, получаемым на ленте, можем сравнить значения x и t и таким образом убедиться, насколько удовлетворяется уравнение равномерного движения. На самом деле всегда имеются некоторые искажения линейности изменения абсциссы, так что приходится или вводить поправки на неравномерность, или пользоваться полученной неравномерной шкалой времени.

Неравномерность хода лент самописцев электрических приборов фирмы Hartmann & Braun не превосходит обычно $1/4\%$. Неравномерность хода лент точных хронографов доводится до $0,1\%$.

2. Прямолинейное гармоническое колебание точки. Этот вид движения точки представляет для нас очень большой практический интерес и требует серьезного изучения. Гармоническим колебательным движением точки называют такое прямолинейное движение ее, при котором абсцисса изменяется по закону синуса или косинуса, т. е.:

$$x = a \sin (\omega t + \alpha),$$

где a , ω и α — постоянные величины, смысл которых будет выяснен ниже.

Очевидно, что все равно брать ли синус или косинус, так как синус перейдет в косинус, если заменить постоянную величину α на $\frac{\pi}{2} + \alpha$; мы в дальнейшем выясним, что это будет обозначать кинематически.

Чтобы понять общий характер изучаемого движения прежде всего, посмотрим, как и где оно получается.

Рассмотрим механизм для получения гармонического прямолинейного колебания, так называемую кулису Вольфа (рис. 2).



Рис. 2. Кулиса Вольфа.
(Модель Кабинета механики
Ленинградского физико-механического института).

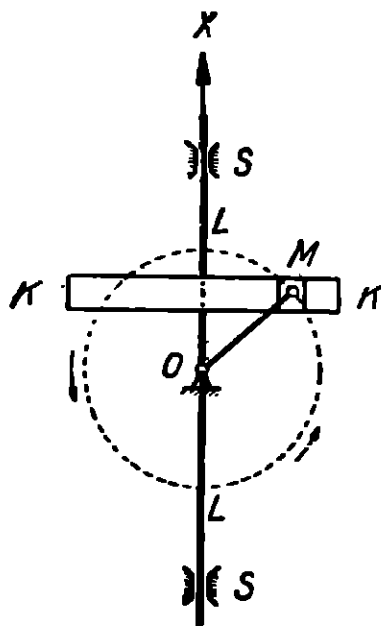


Рис. 3.

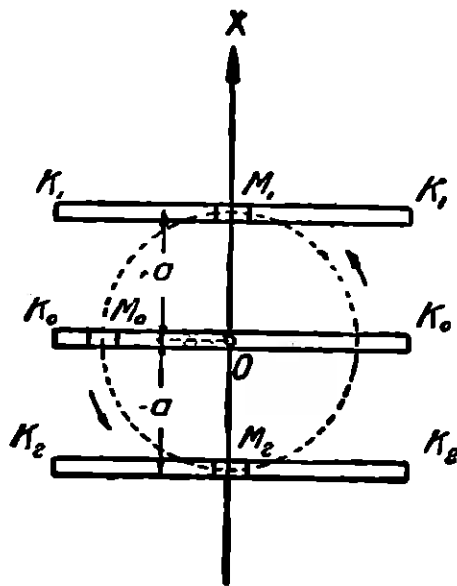


Рис. 4.

Устройство ее крайне просто. Сама кулиса состоит из рамки $КК$ (рис. 3) с прямолинейной прорезью; по этой прорези ходит ползунок (камень) $М$, соединенный шарнирно при помощи кривошипа $ОМ$ с неподвижной осью $О$. При равномерном вращении кривошипа $ОМ$ вокруг оси $О$ кулиса будет совершать вертикальные колебания вверх и вниз, скользя в прорезях SS . При равномерном вращении кривошипа угол, образованный им, например с горизонталью, равен $\omega t + \alpha$, где постоянный коэффициент ω определяет угол, описываемый кривошипом в 1 сек. (угловая скорость кривошипа), а постоянная α равна очевидно значению угла в начальный момент времени $t=0$. Абсцисса рамки x , как непосредственно видно из рисунка, равна

$$x = a \sin (\omega t + \alpha),$$

где a — длина кривошипа. Это и есть уравнение гармонического колебательного движения кулисы.

Общий характер движения механизма, вероятно, изучающему ясен. Рассмотрим его несколько ближе.

Рамка кулисы служит, как легко понять, для автоматического проектирования кругового движения камня $М$ на ось $ОХ$. Заметим,

что гармоническое колебательное движение получается при проектировании кругового движения точки на диаметр круга.

Кулиса займет крайнее верхнее положение $K_1 K_1$ (рис. 4), когда кривошип примет вертикальное положение OM_1 , при этом кулиса удалится от начала координат на расстояние a ; при нижнем положении $K_2 K_2$ кулиса отойдет на то же расстояние a , только в направлении отрицательных x .

Центральное или среднее положение кулисы соответствует нулевому значению x . Это положение будем называть *центром колебания* кулисы (рамки). Максимальное удаление кулисы a от центра колебания называется *амплитудой* колебания. Расстояние между двумя крайними положениями, равное $2a$, — *размахом* колебания.

Определим теперь продолжительность времени между двумя одинаковыми положениями кулисы, например время, нужное кулисе для того, чтобы выйдя из верхнего положения, вновь в него вернуться.

Это время, обозначим его через T , называется *периодом полного колебания* и очевидно совпадает с продолжительностью полного оборота кривошипа. Чтобы его определить, предположим, что кулиса занимала верхнее положение в момент t_1 , при этом угол кривошипа с горизонтальной прямой по предыдущему был равен $\omega t_1 + \alpha$; после полного оборота он стал равен величине $\omega(t_1 + T) + \alpha$, т. е. увеличился на ωT радианов, но, с другой стороны, увеличение это равно углу полного поворота кривошипа, т. е. 2π . Отсюда следует, что $\omega T = 2\pi$, т. е.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Формула эта крайне важна для дальнейшего. Она показывает, что период полного колебания рамки кулисы обратно пропорционален угловой скорости вращения кривошипа.

Величина ω , связанная с периодом колебания соотношением

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

называется *круговой частотой* гармонического колебательного движения. Она показывает, насколько часто совершаются колебания рамки.

Замечательно, что *период оказался независимым от постоянной a* , определяющей начальное значение угла кривошипа, или, иными словами, *период не зависит от начального положения колеблющейся точки*. Отметим, что постоянная a называется *начальной фазой колебания*.

Все, что мы сейчас установили относительно колебания рамки кулисы, в одинаковой степени конечно приложимо и к любому другому случаю прямолинейного гармонического колебания точки. Мы провели все рассуждение на частном случае кулисы Вольфа лишь для ясности и конкретности.

Примеров технических применений гармонического прямолинейного колебания можно было бы привести очень много. При качании длинных маятников при малых углах отклонения от вертикали

(обычно не более 5°) нижний конец маятника совершает гармонические колебания, причем в виду большой длины маятника и малости радиальной меры дуги, описываемой его концом (около 0,1), можно эту дугу принимать за прямолинейный отрезок. Точно так же, если закрепить один конец упругой пластинки и привести в движение другой, то последний придет в движение, причем при малых отклонениях будет совершать гармоническое колебательное движение, тем больше приближающееся к прямолинейному, чем длиннее пластинка или чем меньше размахи ее колебания.

Мы привели эти два примера из особых соображений. Дело в том, что периоды этих двух колебательных движений настолько постоянны и определены (причины этого будут выяснены в Динамике), что продолжительностями их удобно пользоваться для измерения времени или для создания движений, постоянных во времени, т. е. равномерных движений.

Применение маятника в часах общеизвестно. При колебании маятника „собачки“ (рис. 5) освобождают попеременно один за другим зубцы храпового колеса, так что каждому полному колебанию маятника соответствует перемещение колеса на один или два зубца; таким образом колесо получает *одинаковые углы поворота за одинаковые промежутки времени*, что и дает равномерное вращение, затем уже, при желании, превращаемое в равномерное прямолинейное движение. Прерывистость получаемого движения сглаживается в передаточном механизме при помощи различных регуляторов, о которых еще будет речь в нашем курсе. Такой механизм можно еще и сейчас встретить в часовых механизмах некоторых самописцев. В настоящее время хронографы делаются по другому принципу. Равные промежутки времени получаются не при

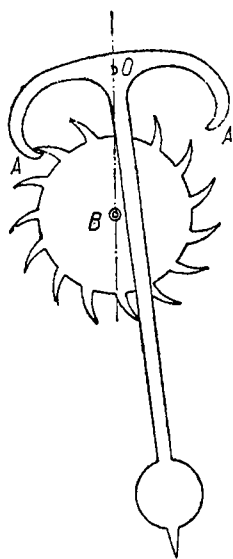


Рис. 5.

помощи маятника, а при помощи колебаний стальной пластинки (камертона), сцепленной колеблющимся концом подобно „собачкам“ А с зубчаткой. Механизм регулируется так, что каждый раз, сделав полное колебание, конец пластинки попадает на следующий зубец колесика. Таким образом изменяя период колебания пластинки (это достигается обычно заменой пластинок разной толщины, так как длина пластинки должна подходить под габарит хронографа), мы получаем различный, но равномерный ход ленты хронографа.

Так непрерывное и равномерное движение достигается при помощи прерывистого колебательного движения.

3. Не гармоническое. прямолинейное колебание точки. Прямолинейное колебательное движение точки может быть и не гармоническим, т. е. не представляться произведением некоторой постоянной a на синус или косинус угла. Такое движение во многом бывает похоже на гармоническое колебание и иногда очень близко к нему подходит. Прежде всего, как во всяком коле-

бании, мы имеем здесь возвратное движение взад и вперед, причем точка постоянно возвращается в свои прежние положения, но возвращение это может происходить уже не через равные промежутки времени, т. е. *колебание может быть и не периодическим*. Могут быть случаи и периодического, но все же не гармонического колебания; один такой пример мы тотчас рассмотрим. Что касается непериодических колебаний, то о них речь будет впереди.

Изучим прямолинейное движение крейцкопфа паровой машины по направляющей линейке.

Пусть в данном кривошипном механизме (рис. 6 и 7) OA — кривошип длины a см, AK — шатун длины l см, O — ось вала маховика, A — палец кривошипа, K — крейцкопф,двигающийся взад и вперед по направляющей линейке B . При заданном угле φ кривошипа с осью OX определим положение крейцкопфа K абсциссой его x .

Для определения x из $\triangle AOK$ найдем квадрат стороны AK , лежащей против угла AOK . Будем иметь:

$$l^2 = x^2 + a^2 - 2ax \cos \varphi,$$

отсюда

$$x = a \cos \varphi \pm \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2 \varphi}.$$

Из двух знаков перед корнем надо выбрать верхний, так как очевидно $x > a \cos \varphi$. Заметим, что нижний знак следовало бы взять, если бы крейцкопф был слева от точки O (на рисунке эта конфи-



Рис. 6. Кривошипный механизм с круглым эксцентриком. (Модель Кабинета механики Ленинградского физико-механического института).

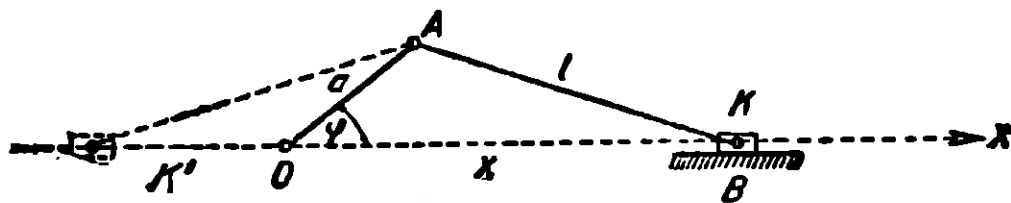


Рис. 7.

гурация показана пунктиром). Предполагая, что вал маховика вращается равномерно, т. е. что угол φ растет пропорционально времени, найдем:

$$\varphi = \omega t,$$

где ω — коэффициент пропорциональности, показывающий, на сколько радианов возрастает угол φ за 1 сек. (ω — угловая скорость вала маховика). Итак,

$$x = a \cos \omega t + \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2 \omega t}.$$

Движение крейцкопфа очевидно колебательное, так как при росте времени косинус и синус будут возвращаться к прежним зна-

чениям, и крейцкопф будет ходить влево и вправо по линейке между крайними своими положениями:

$$x_{\min} = l - a; \quad x_{\max} = l + a,$$

соответствующими горизонтальным расположениям кривошипа. Движение будет *периодическим*. Найдем его период. Для этого заметим, что $\sin^2 \omega t$ имеет период $\frac{\pi}{\omega}$ (сообразить почему?), а $\cos \omega t$ имеет период в два раза больший, т. е. $\frac{2\pi}{\omega}$; последний период включает в себе предыдущий, так что периодом движения будет

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

т. е., как и в предыдущем примере,—время полного оборота вала. И все же периодическое колебание крейцкопфа не является гармоническим: действительно, оно состоит из гармонического члена, представленного первым слагаемым в правой части уравнения движения, и дополнительного слагаемого—квадратного корня, которое портит гармоничность колебания.

При практических расчетах для удобства пользования таблицами и в целях облегчения составления графиков (о них речь в следующем параграфе) стараются *всякое* колебание привести если не к одному, то к *сумме нескольких гармонических колебаний*. В сложных случаях приходится брать очень много таких слагаемых (их называют „гармониками“), в простейших случаях можно довольствоваться двумя-тремя.

Покажем, что в разбираемом нами примере при известных ограничениях, накладываемых на соотношение длин кривошипа и шатуна, можно с вполне удовлетворительной для практики точностью представить уравнение движения крейцкопфа в виде суммы двух гармоник.

Для этого сделаем предположение, что отношение длины кривошипа к длине шатуна $\varepsilon = \frac{a}{l}$ мало. На практике $\varepsilon \leq 1/5$. При таком предположении уравнение движения, переписанное после введения ε в форме

$$x = l(\varepsilon \cos \omega t + \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \omega t}),$$

может быть упрощено. Именно, разлагая радикал в ряд:

$$\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \omega t} = (1 - \varepsilon^2 \sin^2 \omega t)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \omega t + \dots$$

и пренебрегая членами порядка ε^4 , в виду их незначительности, получим:

$$x = l \left(\varepsilon \cos \omega t + 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \sin^2 \omega t \right).$$

Далее, заменяя $\sin^2 \omega t$ на $\frac{1 - \cos 2\omega t}{2}$, окончательно получим:

$$x = l \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \varepsilon \cos \omega t + \frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2\omega t \right).$$

Мы видим, что наше колебание представилось как сумма постоянного члена $l \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right)$, от которого можно освободиться переносом начала координат в точку O' с абсциссой $l \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right)$, и двух гармоник с частотами ω и 2ω . В следующем параграфе мы еще более подробно, *графически*, исследуем этот результат.

4. Сложение гармоник одинаковой частоты. В предыдущем примере мы имели сумму двух гармоник разной частоты и выяснили, что движение было не гармоническим. Докажем теперь, что *сумма нескольких гармоник одинаковой частоты дает уравнение гармонического колебательного движения той же частоты*. Пусть общая частота гармоник — ω , амплитуды их — a_1 и a_2 , фазы — α_1 и α_2 , тогда уравнение движения будет:

$$x = a_1 \sin(\omega t + \alpha_1) + a_2 \sin(\omega t + \alpha_2).$$

Пользуясь известной формулой синуса суммы углов, перепишем после простого приведения x в виде:

$$x = (a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2) \sin \omega t + (a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2) \cos \omega t.$$

Введем теперь новые постоянные a и α , положив:

$$\begin{cases} a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2 = a \cos \alpha \\ a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2 = a \sin \alpha \end{cases} \quad (*)$$

Возведя обе части равенств (*) в квадрат и сложив их, найдем:

$$(a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2)^2 + (a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2)^2 = a^2,$$

откуда

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

Разделив одно из равенств (*) на другое, например нижнее на верхнее, получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2},$$

откуда

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{a_1 \sin \alpha_1 + a_2 \sin \alpha_2}{a_1 \cos \alpha_1 + a_2 \cos \alpha_2}.$$

Таким образом новые постоянные разысканы, и наше уравнение движения с их помощью принимает вид:

$$x = a \cos \alpha \sin \omega t + a \sin \alpha \cos \omega t = a \sin(\omega t + \alpha).$$

Мы действительно получили *одно* гармоническое колебание с частотой ω , амплитудой a и фазой α , определенными предыдущими равенствами (изложенный прием называют приведением сложного колебания к амплитуде и фазе).

Полученный результат можно очень изящно интерпретировать геометрически.¹⁾ Для этого вспомним, что всякое гармоническое колебание можно себе представить как проекцию равномерного кругового движения точки на диаметр круга, по которому она движется. Первая наша гармоника, обозначим ее через x_1 , соответствует вращению точки M_1 (рис. 8) по кругу I радиуса a_1 из начального положения, определяемого углом α_1 , вторая гармоника — вращению точки M_2 по кругу II радиуса a_2 из начального положения с углом α_2 ; тогда результирующая наша гармоника x полу-

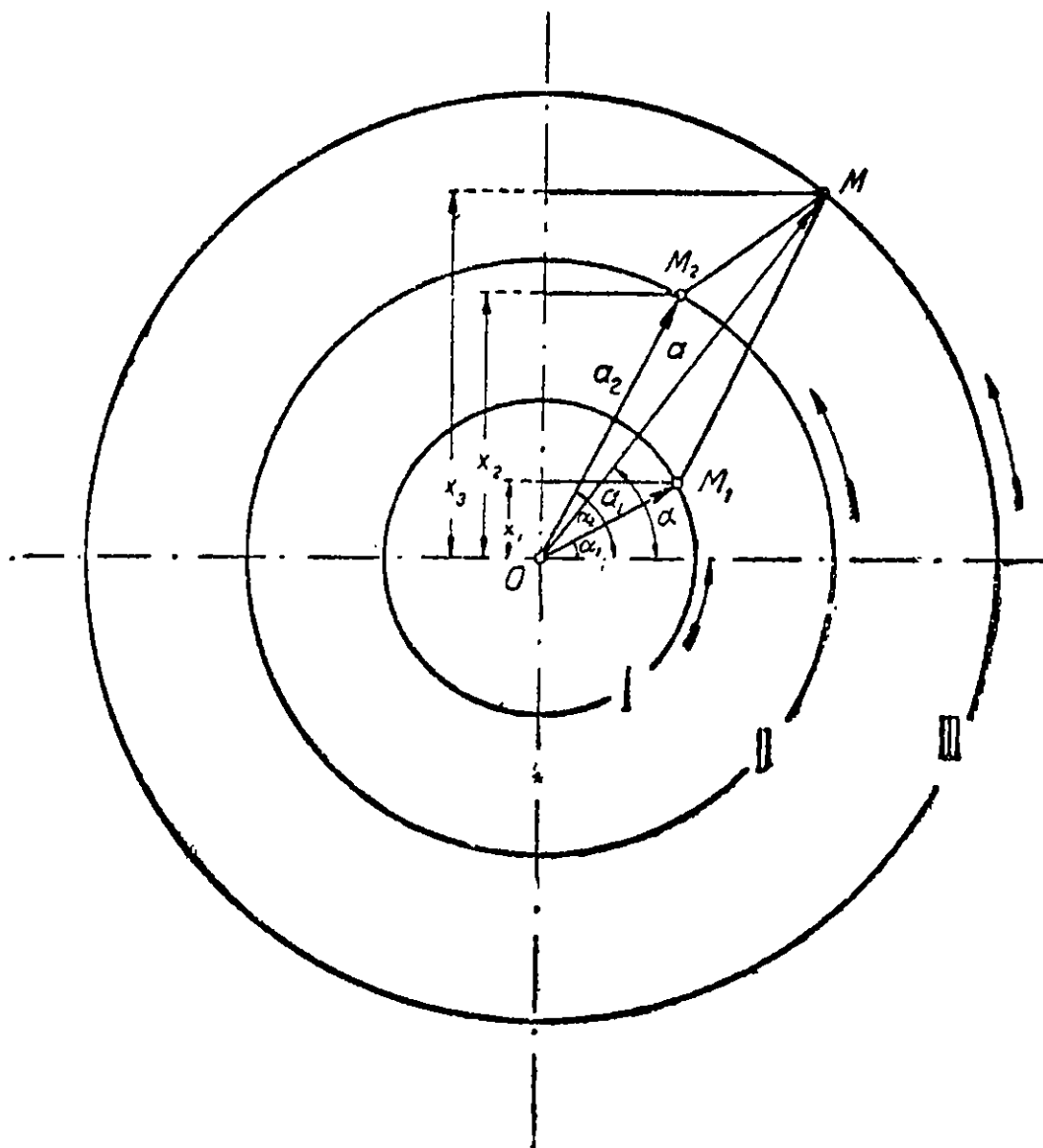


Рис. 8.

чается проектированием на ту же вертикальную ось точки M вращающейся по кругу радиуса, равного диагонали параллелограмма, построенного на вектор-радиусах a_1 и a_2 точек M_1 и M_2 .

Действительно, в этом можно убедиться и непосредственно по формулам для a и $\operatorname{tg} \alpha$ — предлагаем это сделать изучающему самому, — но можно показать и векторно. Для этого заметим, что по определению гармонического колебания:

$$x = x_1 + x_2 = \operatorname{pr}_x a_1 + \operatorname{pr}_x a_2 = \operatorname{pr}_x (a_1 + a_2) = \operatorname{pr}_x a,$$

¹⁾ Эту геометрическую интерпретацию учащийся поймет при условии, если предварительно проработает § 6 следующего задания, где познакомится с понятием вектор-радиуса точки. При первом чтении весь конец упражнения 4, начиная с этого места, лучше всего пропустить и вернуться к нему после выполнения задания 2.

что и требовалось доказать, так как сумма векторов a_1 и a_2 и есть диагональ параллелограмма, построенного на слагаемых векторах.

В электротехнике принят несколько иной прием получения гармонического колебания, более удобный при расчетах, именно, гармоническое колебание рассматривается как движение проекции N конца неподвижного вектора a , образующего с некоторым неподвижным направлением OA (рис. 9) постоянный фазовый угол α , на равномерно вращающуюся ось OX . Точка N при вращении оси OX с постоянной угловой скоростью ω будет совершать по ней гармоническое колебательное движение амплитудой a , частотой ω и фазой α .

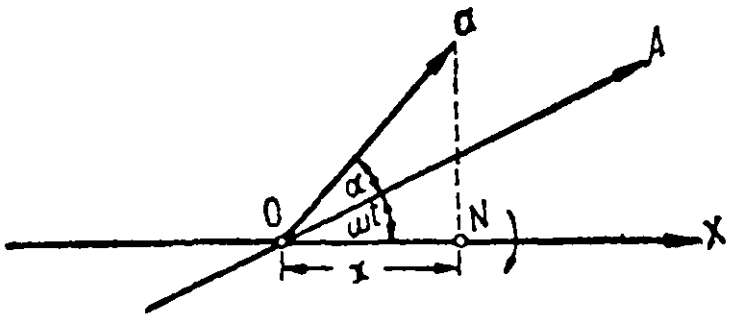


Рис. 9.

Такое представление связано в Электротехнике с получением переменного электрического тока в armатуре, вращающейся с угловой скоростью ω в некотором магнитном поле постоянного направления и интенсивности, характеризуемом вектором a . Условимся называть вектор a — *вектор-амплитудой* гармонического колебательного движения.

Если у нас имеется уравнение движения, слагающегося из нескольких гармоник одинаковой частоты, то каждую гармонику можно представить геометрически своей вектор-амплитудой. На основании предыдущего читатель легко докажет, что наше сложное движение определится вектор-амплитудой, равной сумме вектор-амплитуд слагаемых гармоник (рис. 10), т. е.

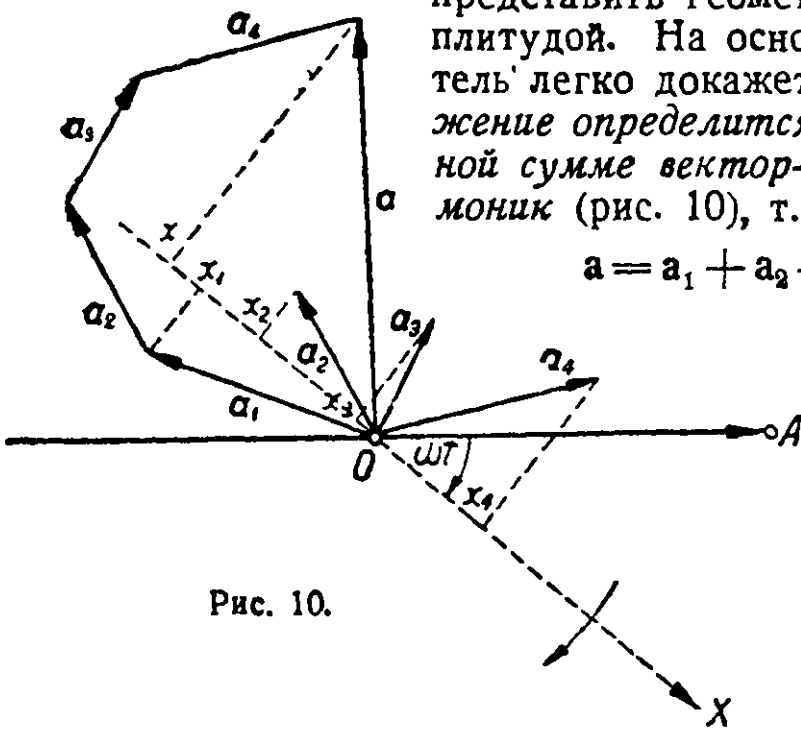


Рис. 10.

$$a = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

причем

$$x = a_{1x} + a_{2x} + a_{3x} + \dots$$

$$= x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

Учащемуся предлагается самостоятельно рассмотреть очень часто встречающийся случай сложения двух гармоник с разностью фаз $\alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{2}$; в этом случае параллелограмм вектор-амплитуд сведется к прямоугольнику, и формулы результирующих амплитуды и фазы будут иметь вид:

$$a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}; \quad \text{tg } \alpha = \frac{a_1 \text{ tg } \alpha_1 + a_2}{a_1 - a_2 \text{ tg } \alpha_1}.$$

Разность фаз двух гармоник называется обычно *сдвигом фазы*;

в только что предложенном читателю примере фазы двух гармоник сдвинуты на $\frac{\pi}{2}$.

Мы удовольствуемся этими начальными сведениями о векторных диаграммах гармонического колебательного движения. Развитие этого приема и многочисленные применения его интересующийся найдет в курсах переменного тока.

5. Сложение гармоник разной частоты. Мы уже знаем, что сложение гармоник разной частоты не приводит к гармоническому колебанию. Характер получаемого при этом движения будет ясно виден из графика, приведенного в следующем параграфе настоящего задания. Сейчас же выясним условия, при которых рассматриваемое движение будет периодическим.

Покажем, что *если частоты или периоды слагаемых гармоник соизмеримы, то движение периодическое; в противном случае не периодическое.*

Пусть уравнение нашего движения

$$x = a_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

или, что все равно,

$$x = a_1 \sin\left(\frac{2\pi}{T_1} t + \alpha_1\right) + a_2 \sin\left(\frac{2\pi}{T_2} t + \alpha_2\right)$$

и пусть периоды гармоник соизмеримы. Это значит, что отношение их представляет рациональное число, т. е.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

где n_1 и n_2 — обязательно целые числа, причем будем считать, что дробь уже сокращена и числа n_1 и n_2 несократимы. При этом

$$n_2 T_1 = n_1 T_2,$$

но тогда

$$T = n_2 T_1 = n_1 T_2$$

и будет искомым периодом, так как, по прошествии времени T повторится наименьшее (n_1 и n_2 — несократимы) целое число периодов обеих гармоник, при этом оба слагаемые вернутся к прежним значениям, а следовательно и сумма станет прежней. Поясним это примером. Если период одной гармоник $T_1 = 2$ сек., а второй $T_2 = 5$ сек., то период сложного движения будет $T = 10$ сек.; действительно, за 10 сек. повторится 5 раз полное колебание первой гармоник и 2 раза — второй, а поскольку прошло целое число периодов точка вернется в прежнее положение.

Обращаясь к частотам, видим, что

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{n_2 T_1} = \frac{2\pi}{n_1 T_2},$$

т. е.

$$\omega = \frac{\omega_1}{n_2} = \frac{\omega_2}{n_1}.$$

При несоизмеримых периодах движение будет не периодическим так как не существует числа, делящегося нацело на два между собою несоизмеримых числа.

Читателю известно, с другой стороны, что если отношение двух периодов несоизмеримо, то все же это отношение с любой степенью точности можно представить некоторой десятичной дробью, с тем большим числом десятичных знаков, чем большая точность требуется. Таким образом *приблизженно* можно и в этом случае получить периодическое движение, только период будет тем больше, чем большая точность требуется. Например, если отношение периодов слагаемых колебаний равно $\sqrt{2}$, то довольствуясь сотыми, получим:

$$T_1 = \sqrt{2} T_2 \approx 1,41 T_2,$$

откуда период результирующего колебания будет

$$T = 50 T_1 = 70,5 T_2,$$

т. е. сравнительно большой.

Очень интересен случай соизмеримых, но мало отличающихся друг от друга периодов слагаемых колебаний. В этом случае также получаются результирующие колебания большого периода. Например если периоды разнятся на 0,001 сек., а один из периодов слагаемых колебаний равен $T_1 = 1$ сек., то другой будет $T_2 = 0,999$ сек., и период результирующего колебания равен:

$$T = 999 \text{ сек.}$$

Такое периодическое колебание носит наименование биеения, мы его в следующем параграфе рассмотрим графически.

§ 3. Графики прямолинейного движения, составление их по заданному уравнению движения.

Уравнение движения вполне представляет нам движение, так как дает математическое выражение закона зависимости абсциссы точки от времени, но такое представление не всегда наглядно. Гораздо удобнее представлять движение *графически*, заменяя *уравнение движения соответствующей ему кривой линией*.

Для этого берем две взаимно перпендикулярных оси и откладываем на одной (обычно горизонтальной) шкалу времени t , а на другой (вертикальной) шкалу абсцисс x . Масштаб шкал совершенно конечно произволен и выбирается из соображений удобства и наглядности. Этот метод лучше всего выяснить на ряде примеров. Оставляя в стороне совсем очевидный и простой пример равномерного движения, график которого читатель вероятно строил уже в элементарном курсе математики или физики—обратимся к более интересным примерам, главным образом на различные колебательные движения.

Примеры и упражнения.

1. График гармонического колебательного движения. Покажем, как проще всего составить график гармонического колебания:

$$x = a \sin (\omega t + \alpha).$$

Вспомним данное в предыдущем параграфе определение гармонического колебания как проекции равномерного движения точки по окружности на диаметр ее.

Проведя окружность радиуса a (рис. 11), отложим прежде всего на ней дугу OM_0 , равную α , и через точку M_0 проведем горизонтальную прямую до пересечения с осью OX ; это нам даст начальную точку кривой, соответствующую моменту $t=0$ (действительно $x_0=a \sin \alpha$). Для построения всей кривой разметим прежде всего шкалу времени. Примем некоторый отрезок на оси t за период колебания $T=\frac{2\pi}{\omega}$ и разделим его на 8, 16, 32... или другое число

вида 2^n , что удобно, так как сводится к повторному делению отрезка пополам. У нас на чертеже период разделен на 8 частей; аналогично этому и дугу полной окружности, начиная от точки M_0 , разделим тоже на 8 частей. Через эти точки проведем горизонтальные прямые

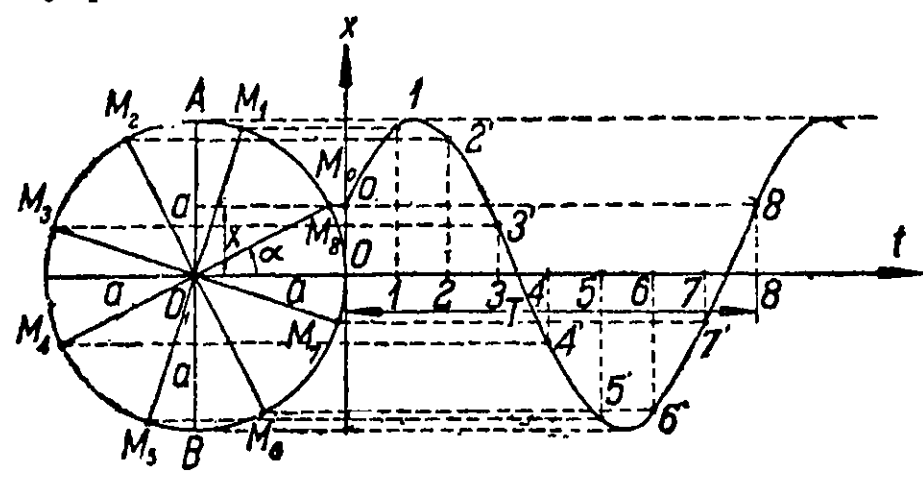


Рис. 11.

горизонтальные прямые до пересечения с перпендикулярами, восстановленными из точек деления периода T , имеющими соответствующие номера. Тогда в пересечении получатся искомые точки нашей кривой $1', 2'$ и т. д. Взяв достаточно большое число делений периода

да, мы настолько сблизим эти точки, что проведение через них плавной кривой (по лекалу или даже от руки) не составит труда. Горизонтальные прямые, проведенные через точки A и B окружности (эти точки могут и не войти в число точек $M_0, M_1, \dots$), дадут верхнюю и нижнюю границу нашей кривой.

Приведенное построение представляет собою очевидно не что иное, как построение синусоиды, вероятно знакомой уже учащемуся из математики. Итак, графиком гармонического колебательного движения служит синусоида.

Мы привели здесь этот геометрический прием потому, что он на практике гораздо проще, чем часто применяемое в математике построение на основании вычисленных по таблицам тригонометрических функций отдельных ординат кривой. Наше построение занимает очень небольшое время—учащийся должен обязательно сделать его самым тщательным образом, так как на нем основаны многие дальнейшие графики сложных колебательных движений.

2. Торможение точки средою, сопротивляющейся движению ее. Движение точки в некоторой сопротивляющейся среде (воде, масле, воздухе) тормозится, причем уравнение ее движения будет

$$x=a(1-e^{-\alpha t}),$$

где a и α — некоторые положительные постоянные, смысл которых будет выяснен в Динамике. Вычертим график такого движения. Отложим, как и в предыдущем примере, время по горизонтальной оси, абсциссу — по вертикальной. В начальный момент времени при $t=0$, $x=0$; затем с ростом времени вычитаемое в скобках очень быстро уменьшается, стремясь при $t \rightarrow \infty$ к нулю; таким образом x стремится к значению $x=a$. Кривая наша выходит из начала координат с угловым коэффициентом касательной

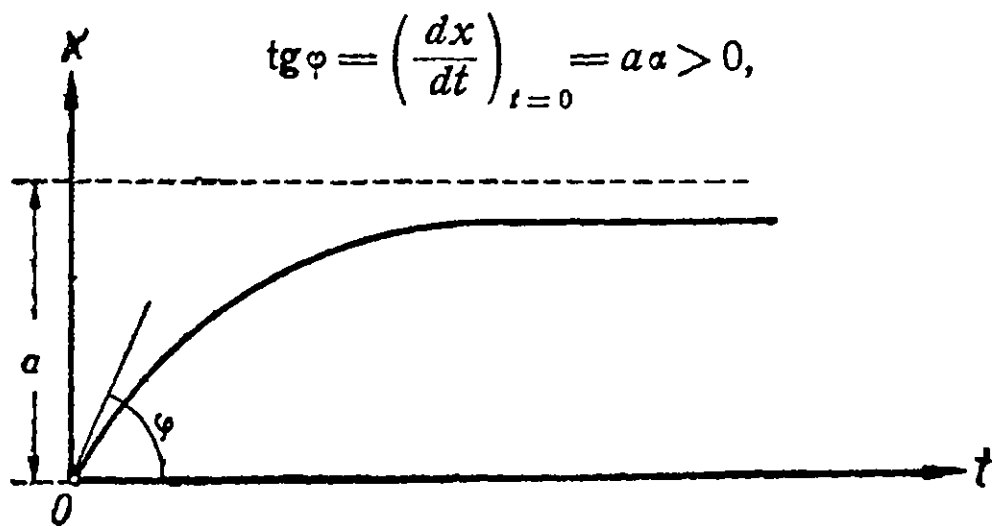


Рис. 12.

причем этот угловой коэффициент с ростом времени стремится к нулю. График имеет вид, показанный на рис. 12..

Характер и форма кривой ясны из этих небольших соображений о росте x и изменении углового коэффициента. Более точное проведение кривой можно было бы сделать, построив ее по точкам.

3. Сложение колебаний различного периода. Сложим графически два прямолинейных колебательных движения, у которых период одного, скажем, в два раза больше периода другого. Иными словами, вычертим график движения, имеющего уравнение:

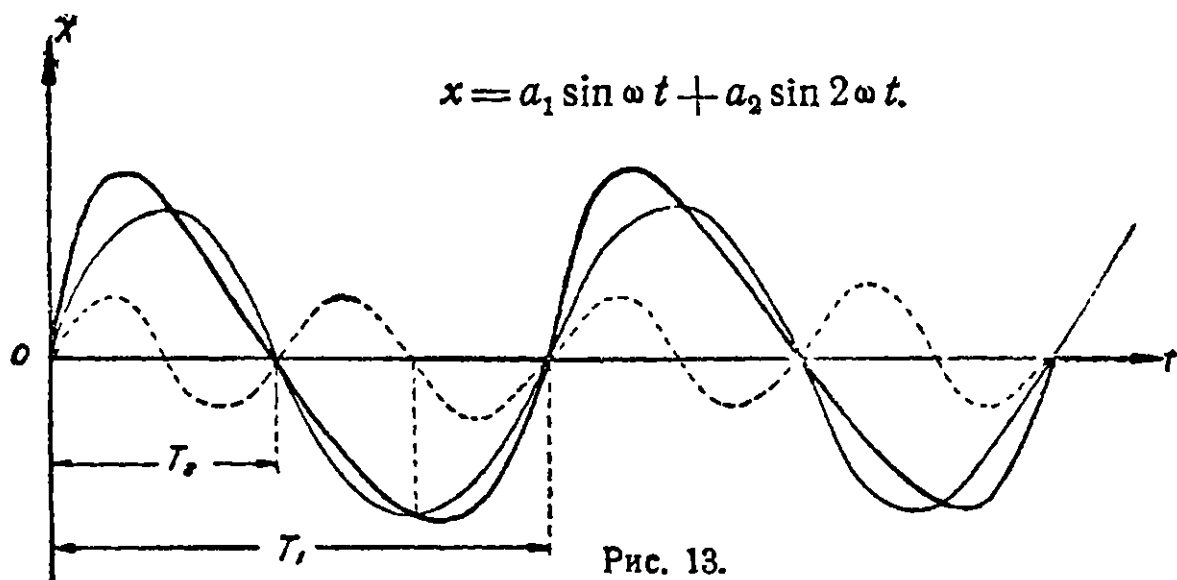


Рис. 13.

Для этого проще всего вычертить отдельно обе синусоиды и сложить (конечно алгебраически) их ординаты для каждого момента времени. При вычерчивании пользуемся методом, предложенным в примере 1 настоящего параграфа. Первая синусоида на рисунке показана тонкой линией, вторая — пунктирной линией (рис. 13),

результат показан жирной линией. Мы видим, что в результате получается периодическая кривая, но уже не синусоида, т. е. результирующее колебание не будет гармоническим. Это вполне соответствует тому, что говорилось в предыдущем параграфе. Период результирующего колебания равен наибольшему из периодов слагаемых колебаний. Действительно, здесь $T_1 = 2T_2$, следовательно период результирующего колебания равен

$$T = T_1 = 2T_2.$$

В чем различие полученного движения от гармонического колебания? По графику сразу видно, что время, нужное точке, чтобы, выйдя из центра колебания, достигнуть правого крайнего положения, меньше чем при обратном пути. Точка сравнительно быстро приходит в правое крайнее положение, затем медленно движется до левого крайнего и опять быстро возвращается в центральное положение и т. д. Здесь нет той симметрии движения, как в гармоническом колебательном движении.

4. График движения ползуна кривошипного механизма. Вычертим график движения ползуна кривошипного механизма. Для этого воспользуемся уравнением его движения

$$x = l \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right) + l\varepsilon \cos \omega t + l \frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2\omega t,$$

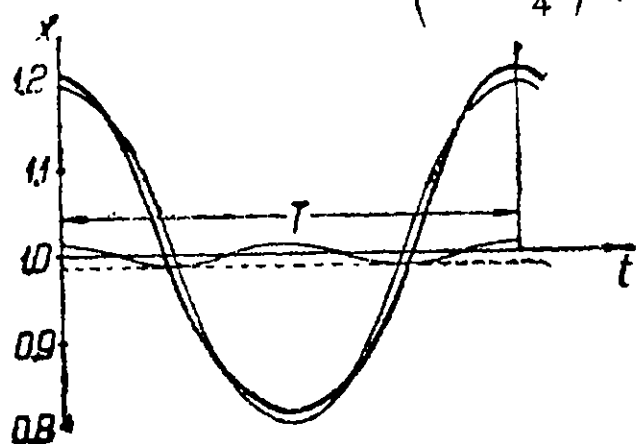


Рис. 14

выведенным в упражнении 3 § 2 настоящего задания.

Положим для ясности, что $l = 1$ м, $\varepsilon = 1/5$, и что вал делает 100 об/мин.

Тогда время полного оборота вала

$$T = \frac{60}{100} \text{ сек.}, \text{ а следовательно}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{60} \cdot 100 \cong 10 \frac{1}{\text{сек.}};$$

уравнение движения принимает вид:

$$x = 0,99 + 0,2 \cos 10t + 0,01 \cos 20t,$$

где x выражено в метрах. Желая вычертить график, задумываемся над вопросом о выборе масштаба. Мы должны показать на чертеже величину порядка единицы (первое слагаемое) и порядка одной сотой (третье слагаемое). Величины эти настолько различны, что откладывать их на чертеже в одном и том же масштабе невозможно. Для избежания этого неудобства мы поместим начало координат не в точку $x = 0$, а в точку $x = 1$ м (рис. 14), тогда первое слагаемое изобразится в виде прямой, параллельной оси времени и показанной на рисунке пунктиром. Нанеся обычным приемом два гармонических слагаемых и складывая по ординатам, получим искомую кривую (жирная линия). Все ординаты этой кривой укорочены на 1 м, который может быть при пользовании графиком добавляем. Впрочем во всех расчетах играет роль лишь гармоническая часть (второе и третье слагаемое) уравнения движения, первое же постоянное слагаемое значения не имеет. Таким

образом вычерченный нами график вполне удовлетворяет практическим задачам.

5. Сложение двух колебательных движений с близкими по величине периодами. Биение. В электротехнике (особенно в радиотехнике) часто приходится иметь дело с *биениями*, т. е. такими колебаниями, уравнение движения которых представляет результат сложения двух синусоид с очень близкими (соизмеримыми) частотами или периодами. Мы уже видели, что при этом получаются периодические движения, но с очень большими периодами.

Мы сейчас разберем конкретный случай движения, определенного уравнением

$$x = 2 \sin \frac{2\pi}{5} t + 3 \sin \frac{2\pi}{6} t$$

Здесь мы имеем:

$$T_1 = 5 \text{ сек.}, T_2 = 6 \text{ сек.},$$

$$T = 6T_1 = 5T_2 = 30 \text{ сек.}$$

График строим предыдущим методом. В результате получаем кривую (рис. 15, жирная кривая) с характерным периодическим раздуванием амплитуды, что и называется *биением* или *пульсацией*.

§ 4. Автоматические вычерчивания графиков движения различными самописцами. Переход от графика к уравнению движения.

В современной технике, изучая различные движения, стараются обыкновенно поставить такой прибор, который автоматически в известном масштабе записывал бы интересное нас движение. Такие приборы вообще называются *самописцами*. Принцип устройства этих приборов вероятно учащемуся известен. Напомним, что обыкновенно движущуюся точку (конец стрелки какого-нибудь прибора, движущийся штифт, рабочий инструмент станка) или не-

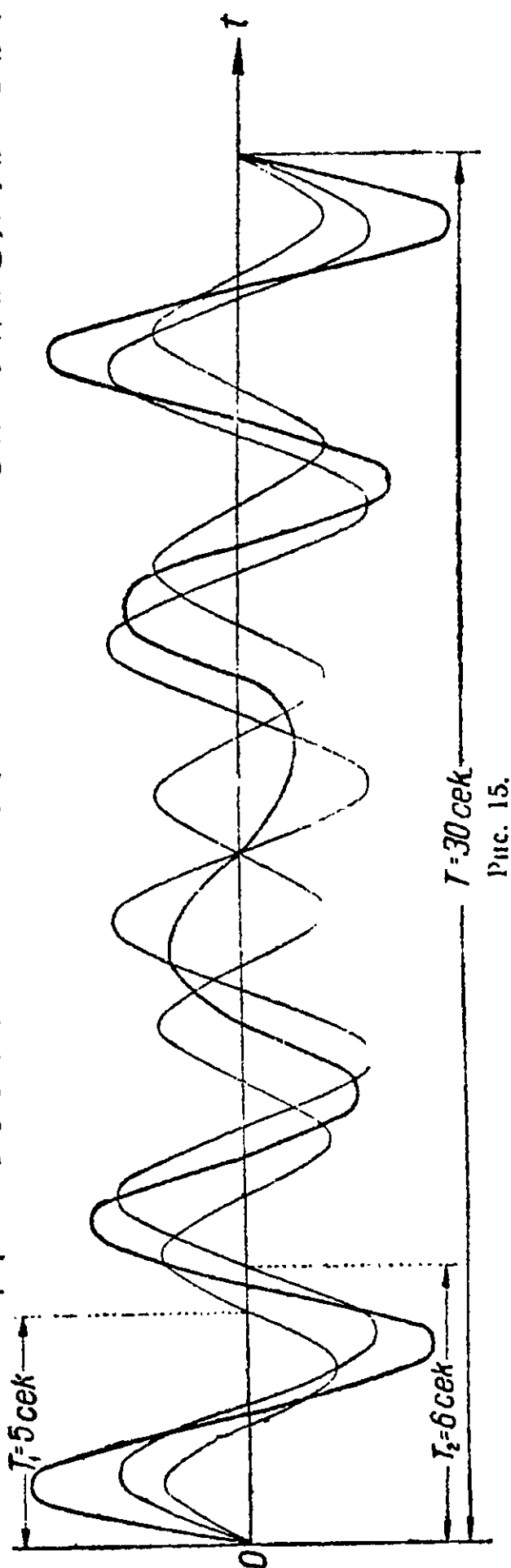


Рис. 15.

посредственно соединяют с карандашом (иногда пером), пишущим на бумажной ленте, или же снабжают зеркальцем, которое отражает луч света и дает световой „зайчик“ на фотоленте. При этом лента движется равномерно (прямолинейно или иногда навивается на вращающийся барабан), и таким образом каждый след пишущего приспособления относится к определенному моменту времени (рис. 16).

Элементарный расчет такого самописца мы дадим в задании, посвященном относительному движению. Здесь же отметим только, что в результате работы самописца мы получим на ленте кривую, отнесенную к осям x и t , причем ось времен идет вдоль ленты, ось значений x — поперек.

Самописцы употребляют по большей части для длительных или постоянных записей движения. В случаях же отдельных испытаний, вместо того чтобы приспособливать самописец, гораздо проще при современном состоянии техники заснять движение кино-

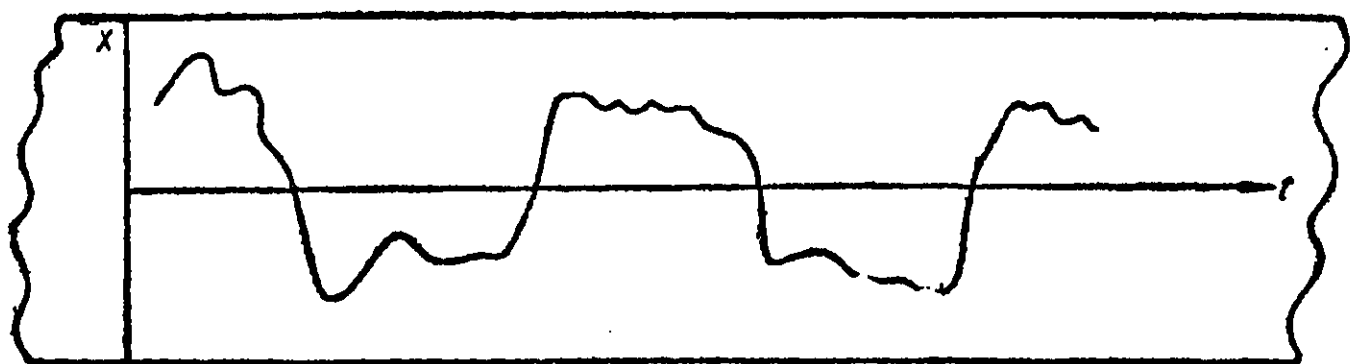


рис. 16.

аппаратом. Для этого производится киносъемка происходящего движения (колебание стрелки гальванометра, мениска микроманометра или других приборов) и рядом помещенного секундомера. При обработке полученного фильма абсцисса x получается непосредственным измерением по увеличенному кадру, а время t — по заснятому секундомеру. Результаты располагаются в таблицу, где в одном столбце помещается x , а в другом t . По этой таблице можно или составить график движения, или же непосредственными вычислениями (в этом заключается предмет теории интерполирования) найти приближенно уравнение движения. Для записи быстрых движений пользуются особым аппаратом — „лупой времени“ (Zeitlupe). Описание этого прибора, а также и много интересных приложений киносъемки к кинематическим исследованиям учащийся может найти в интересной популярной книжке Р. Тун, „Фильма и техника“, Ленинград, Теакинопечать, 1930, стр. 116 и стр. 177—231, а также в книге Н. А. Рынина „Кинематография“, Ленинград, ГИЗ, 1924, стр. 149—179. Полученные оттуда сведения могут очень пригодиться учащемуся в его лабораторной практике.

Движение на ленте самописца определяется сразу графически. Вместо уравнения движения мы получаем график движения, между тем для расчетов, основанных на записанном движении, гораздо удобнее может оказаться наличие аналитического уравнения дви-

жения. Встает вопрос, нельзя ли от графика движения перейти к уравнению его?

Как мы только что видели в предыдущем параграфе, переход от уравнения движения к графику довольно прост. Все сводилось к построению кривой по заданному уравнению ее. Обратная задача, стоящая сейчас перед нами, представляет неизмеримо большие трудности.

Мы укажем здесь некоторые общие пути приближенного решения задачи.

Если не требуется большой точности, можно стараться подогнать полученную кривую под какую-нибудь кривую, уравнение которой известно (прямая линия, парабола того или другого порядка, синусоида, логарифмическая кривая, показательная кривая и др.). При этом можно не обращать внимания на мелкие неправильности кривой, данной самописцем, так как они зависят обычно от недостатков самописца (люфты, затирания в передаточном механизме) или от тряски основания самописца, вызываемой работающими вблизи установками.

Имеются специальные способы разыскания уравнения движения по заданному графику его. Если кривая имеет явно периодический вид, то такую кривую обрабатывают по методам гармонического анализа ¹⁾ и представляют уравнение движения как сумму нескольких гармоник разных периодов. Этот метод является основным при исследовании периодических прямолинейных движений.

При наличии не периодического движения можно его представить в виде параболы

$$x = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_m t^m.$$

Для определения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ измеряют по имеющейся экспериментальной кривой значения x для разных значений t и подставляют эти значения в уравнение. Тогда получается линейная система уравнений с неизвестными $a_0, a_1, \dots, a_m$. Конечно число ординат, измеренных по кривой, надо взять большим или равным числу неизвестных коэффициентов. Обыкновенно параболу берут невысокого порядка, т. е. число m не превышающим 2, 3, 4, а число измеренных ординат легко взять большим. При этом уравнений получается гораздо больше, чем неизвестных.

Этим пользуются для розыскания наиболее подходящих значений для коэффициентов, обрабатывая уравнения по особому методу, играющему большую роль в приближенных вычислениях—по методу наименьших квадратов ²⁾.

График движения имеет значение не только как удобный показательный прием для описания движения. Графиком можно воспользоваться и для автоматического воспроизведения движения. Для этого можно например на вращающемся равномерно цилиндре

¹⁾ Учащийся, заинтересовавшийся этим вопросом, найдет изложение основных способов гармонического анализа например в книге проф. А. Ф. Гаврилова „Приближенные вычисления“, Ленинград, ГИЗ, 1926, стр. 126 и следующие.

²⁾ Изложение метода наименьших квадратов можно найти в только что рекомендованной книге проф. А. Ф. Гаврилова, стр. 142.

А (рис. 17) сделать прорезь по кривой, соответствующей графику интересующего нас движения, тогда штифт B , вынужденный двигаться по вертикальной направляющей линейке C и вставленный в прорезь, будет очевидно совершать как раз прямолинейное движение по заданному графиком закону.

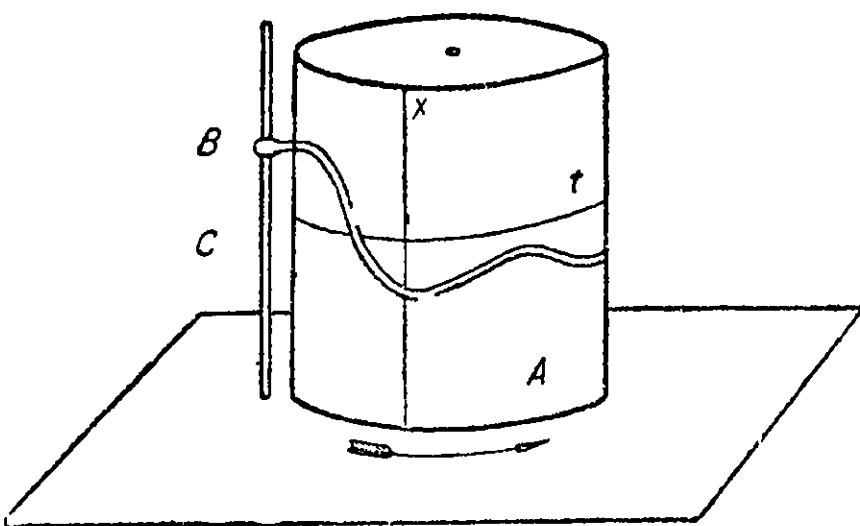


Рис. 17.

Такое применение графика движения часто встречается в различных автоматах, совершающих сложные фигурные движения.

§ 5. Пройденный путь. Его определение по уравнению движения. Уравнение пройденного пути.

Покажем, как по заданному уравнению движения точки найти путь, пройденный ею, за некоторый промежуток времени.

Для этого вспомним сказанное в конце § 1 настоящего задания. Когда абсцисса x получает бесконечно малое приращение dx , то путь s , пройденный точкой от начального момента времени t_0 до некоторого момента t , возрастает в свою очередь на бесконечно-малую величину ds , причем единственным отличием между dx и ds является то, что dx может быть и положительным (движение в положительном направлении оси OX) и отрицательным (движение в отрицательном направлении оси OX), в то время как ds всегда положительно. Что касается величины dx и ds , то они совершенно одинаковы. Поэтому мы можем написать:

$$ds = | dx |$$

где вертикальные черточки показывают, что для получения приращения пути следует взять абсолютное значение приращения абсциссы.

По заданному уравнению движения:

$$x = f(t),$$

найдем

$$dx = f'(t) dt.$$

Но dt по основному свойству времени является существенно положительной величиной, поэтому

$$ds = | f'(t) | dt.$$

Из этого равенства легко найти и пройденный путь s за любой промежуток времени (t_0, t_1) . Для этого по обычным способам интегрального исчисления нужно будет найти интеграл

$$s = \int_{s_0}^{s_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} |f'(t)| dt.$$

Мы еще раз подчеркиваем, что интеграл берется от абсолютного значения $f'(t)$, поэтому при вычислении этого интеграла в тех интервалах времени, где $f'(t)$ отрицательно, надо перед интегрируемой функцией менять знак на обратный.

Поясним сказанное на примере.

Найдем путь, пройденный точкой, совершающей гармоническое колебательное движение:

$$x = 10 \sin 2\pi t,$$

за $2\frac{1}{2}$ сек. от начала движения $t = 0$.

Имеем:

$$dx = 20\pi \cos 2\pi t dt,$$

и следовательно

$$s = 20\pi |\cos 2\pi t| dt,$$

а весь пройденный путь

$$s = \int_0^{2\frac{1}{2}} 20\pi |\cos 2\pi t| dt.$$

Для определения этого интеграла заметим, что функция $\cos 2\pi t$ положительна в интервалах:

$$\left(0, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}\right) \text{ и } \left(1\frac{3}{4}, 2\frac{1}{4}\right)$$

и отрицательна в интервалах:

$$\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right), \left(1\frac{1}{4}, 1\frac{3}{4}\right) \text{ и } \left(2\frac{1}{4}, 2\frac{3}{4}\right).$$

Поэтому искомый пройденный путь определится как сумма интегралов:

$$\begin{aligned} s &= 20\pi \left(\int_0^{\frac{1}{4}} \cos 2\pi t dt - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \cos 2\pi t dt + \int_{\frac{3}{4}}^{1\frac{1}{4}} \cos 2\pi t dt - \right. \\ &\quad \left. - \int_{1\frac{1}{4}}^{1\frac{3}{4}} \cos 2\pi t dt + \int_{1\frac{3}{4}}^{2\frac{1}{4}} \cos 2\pi t dt - \int_{2\frac{1}{4}}^{2\frac{3}{4}} \cos 2\pi t dt \right) = \\ &= \frac{20\pi}{2\pi} \left(\left[\sin 2\pi t \right]_0^{\frac{1}{4}} - \left[\sin 2\pi t \right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} + \left[\sin 2\pi t \right]_{\frac{3}{4}}^{1\frac{1}{4}} - \right. \\ &\quad \left. - \left[\sin 2\pi t \right]_{1\frac{1}{4}}^{1\frac{3}{4}} + \left[\sin 2\pi t \right]_{1\frac{3}{4}}^{2\frac{1}{4}} - \left[\sin 2\pi t \right]_{2\frac{1}{4}}^{2\frac{3}{4}} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 10 \left\{ (1 - 0) - (-1 - 1) + (1 + 1) - (-1 - 1) + (1 + 1) - (0 - 1) \right\} = \\ &= 10 \cdot 10 = 100 \text{ см.} \end{aligned}$$

К тому же результату можно было прийти проще, если заметить, что у рассматриваемого движения имеется период, равный 1 сек. За один период точка сделает путь, равный учетверенной амплитуде, т. е. 40 см. За время 2 сек. точка сделает 80 см. За промежуток времени от 2 сек. до 2½ сек. будет сделан путь 20 см, т. е. всего 100 см.

Мы удовлетворяемся одним этим примером, так как вычисления указанного типа приходится совершать крайне редко. Все же мы указали на него, чтобы учащийся мог в случае надобности разобраться в подобном расчете. Обычно в руководствах по Механике не отмечают встречающейся при вычислении пути необходимости интегрировать абсолютное значение функции, а это иногда приводит учащегося к большим недоразумениям.

Вычислив пройденный путь s в любой момент времени t , мы очевидно определим s как функцию t :

$$s = \varphi(t).$$

Последнее уравнение мы будем называть *уравнением пройденного пути*. Уравнение это не следует смешивать, как это ясно из предыдущего рассуждения, с уравнением движения.

Откладывая s по оси ординат, а время — по оси абсцисс, мы получим *график пройденного пути*.

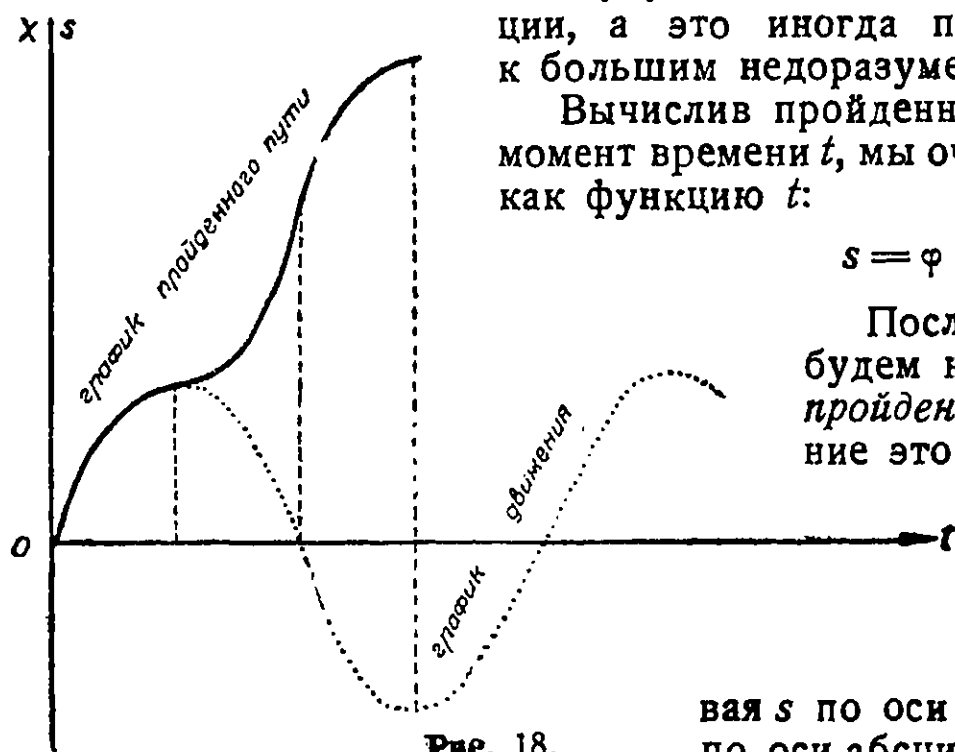


Рис. 18.

Отличительная черта этого графика заключается в том, что кривая постоянно растет, неуклонно поднимаясь вверх, и только иногда, при остановках точки, кривая превращается в прямую, параллельную оси времени. Мы приводим (рис. 18) для сравнения график пройденного пути и график движения в случае простого гармонического колебательного движения.

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. Колеблющийся на пружине груз занимает в начальный момент самое низкое положение, касаясь пола; при наивысшем положении груза высота его над полом равна 10 см. Продолжительность 10 размахов равна 15 сек. Написать уравнение движения груза.

2. Определить амплитуду и начальную фазу сложного колебания

$$x = 10 \sin(2t + 1) + 5 \cos(2t + 2).$$

3. Определить период биений, если слагающиеся колебания имеют частоты

$$\omega_1 = 10 \frac{1}{\text{сек}}, \quad \omega_2 = 11 \frac{1}{\text{сек}}.$$

4. Точка совершает гармоническое колебание амплитуды a и периода T . Определить, в какие моменты времени абсциссы точки будут равны

$$\pm \frac{a}{2}$$

5. Найти уравнение движения ползуна кривошипного механизма, у которого длина кривошипа равна длине шатуна. Вычертить график движения, приняв

$$l = a = 30 \text{ см}, \quad \omega = 10 \frac{1}{\text{сек.}}$$

Указание. В настоящем случае нельзя подобно упражнению 3 § 2 пользоваться приближенной формулой, так как $\epsilon = 1$ уже не мало. Но в этом и нет необходимости. Учащийся легко выведет и непосредственно крайне простое уравнение движения.

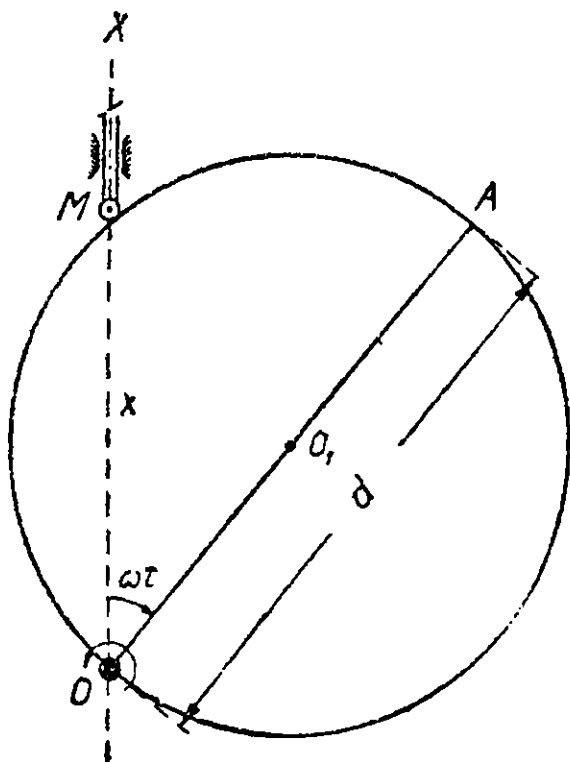


Рис. 19.

6. Найти уравнение прямолинейного движения стержня M (рис. 19) круглого эксцентрика, вращающегося равномерно вокруг точки O , лежащей на его окружности. Стержень M движется по вертикальной прямой (ось OX). Диаметр эксцентрика $d = 10 \text{ см}$, время полного оборота $T = 1 \text{ сек}$. Вычертить график движения.

Указание. Решение задачи сводится очевидно к разысканию $x = OM$ в функции от угла MOA .

7. Предыдущий пример усложняется тем, что центр вращения O переносится внутрь окружности, так что $\overline{OO_1} = a$ становится меньшим r . Доказать, что в этом случае уравнение движения кулачка M совпадает с уравнением движения ползуна кривошипного механизма, у которого шатун $MO_1 = r$, а кривошип $\overline{OO_1} = a$ (рис. 6).

8. В кривошипном механизме $a = 5 \text{ см}$, $l = 30 \text{ см}$, вал делает 60 об/мин. Написать приближенное уравнение движения ползуна и построить график этого движения.

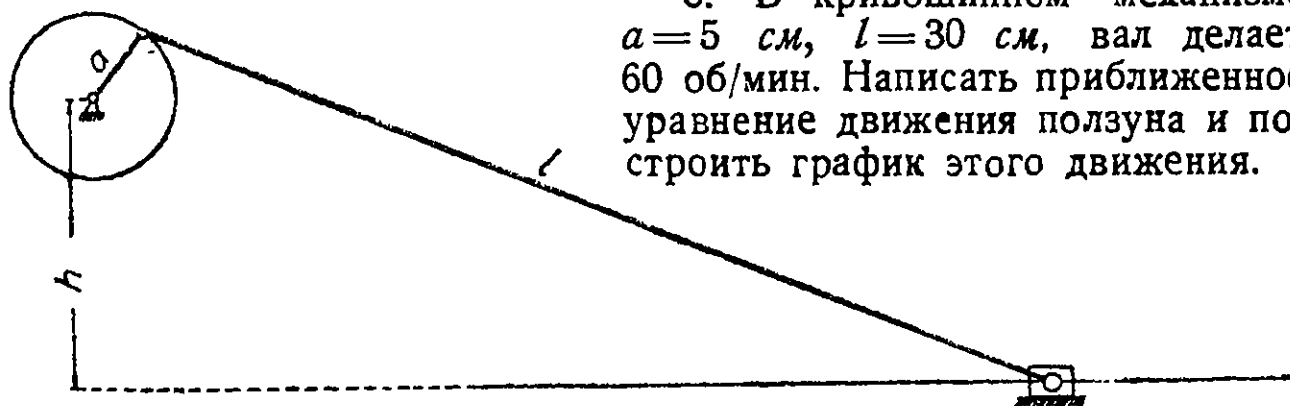


Рис. 20.

9. Написать приближенные уравнения движения ползуна кривошипного механизма, показанного на рис. 20; $h = 20 \text{ см}$, $a = 4 \text{ см}$, $l = 40 \text{ см}$, кривошип делает 120 об/мин. Составить график движения.

10. В предыдущем примере определить ход ползуна, т. е. расстояние между его крайними положениями.

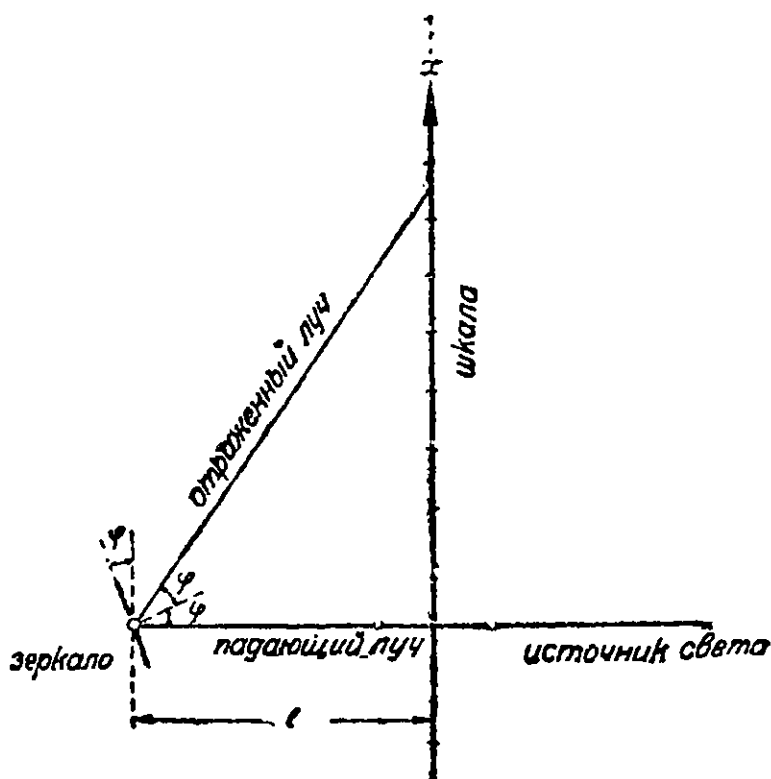


Рис. 21.

11. Найти уравнение движения светового „зайчика“ по прямолинейной шкале, если зеркальце вращается равномерно с угловой скоростью ω , а расстояние от шкалы до оси зеркальца l (рис. 21).

Найти уравнение движения зайчика в том случае, когда зеркальце колеблется гармонически по закону

$$\varphi = \varphi_0 \sin \omega t.$$

В частном случае очень малых колебаний зеркальца (φ_0 мало) показать, что зайчик будет совершать колебания, мало отличающиеся от гармонических. Определить амплитуду и частоту этих колебаний.

Задание 2-е.

Движение точки в пространстве.

§ 6. Определение положения точки в пространстве.

Из аналитической геометрии учащийся уже знает, что положение точки в пространстве трех измерений определяется заданием трех ее координат. Эти три величины $\overline{OM_1} = x$, $\overline{M_1M_2} = y$, $\overline{M_2M} = z$ (рис. 22), представляющие декартовы прямоугольные координаты точки, во многих случаях очень удобны для задания положения точки в пространстве. Однако следует отметить, что иногда полезнее пользоваться другими способами определения положения точки. Например при определении положения точки M по отношению к точке O при помощи какой-нибудь визирной трубы A в Астрономии, Геодезии гораздо удобнее задавать расстояние точки M от точки O , обозначив его через r , угол θ оси трубы (или дополнительный угол ее φ) с отвесом и угол ψ поворота верти-

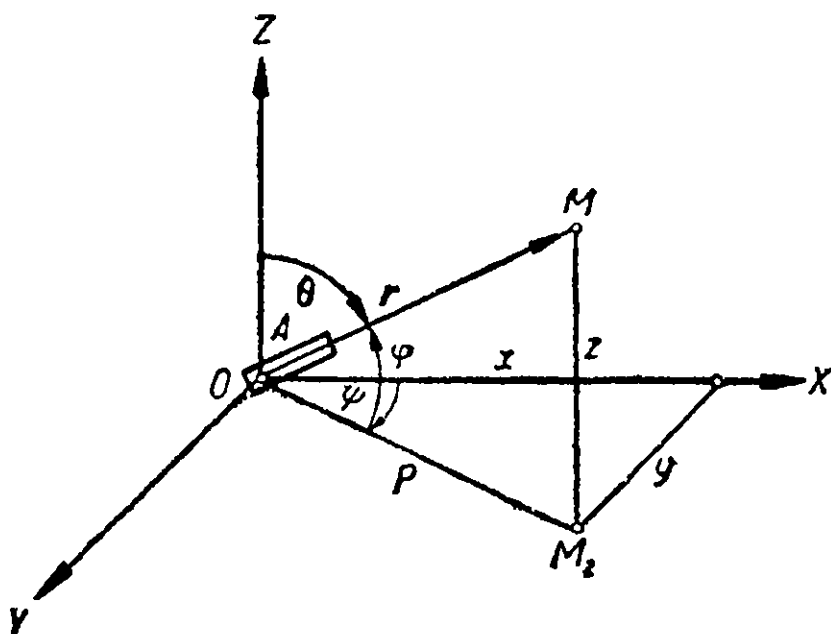


Рис. 22.

кального круга по отношению к фиксированному направлению OX . Величины, r , ψ и θ (их тоже три) с успехом заменяют декартовы координаты точки, — они называются *сферическими* координатами точки.

Можно было бы еще иначе задать положение точки M , а именно задав полярные координаты проекции z точки M на плоскость XY , т. е. точки M_2 , — ρ и ψ и затем высоту z точки M над плоскостью XY . Эти три величины: ρ , ψ , z называются *цилиндрическими* координатами точки M . Их опять конечно три, по числу измерений нашего пространства.

В дальнейшем на ряде примеров мы убедимся в удобствах применения различных координатных систем, отличных от декартовой системы. Заметим, что все эти системы носят наименование *криволинейных* координатных систем.

Положение конца стрелки указателя электрического прибора на шкале *никто никогда не станет определять декартовыми координатами*, потому что гораздо удобнее или давать соответствующее деление шкалы (если она уже нанесена), или же угол отклонения φ стрелки от некоторого первоначального ее положения и длину ее l (рис. 23), т. е. применять *полярную* систему координат.

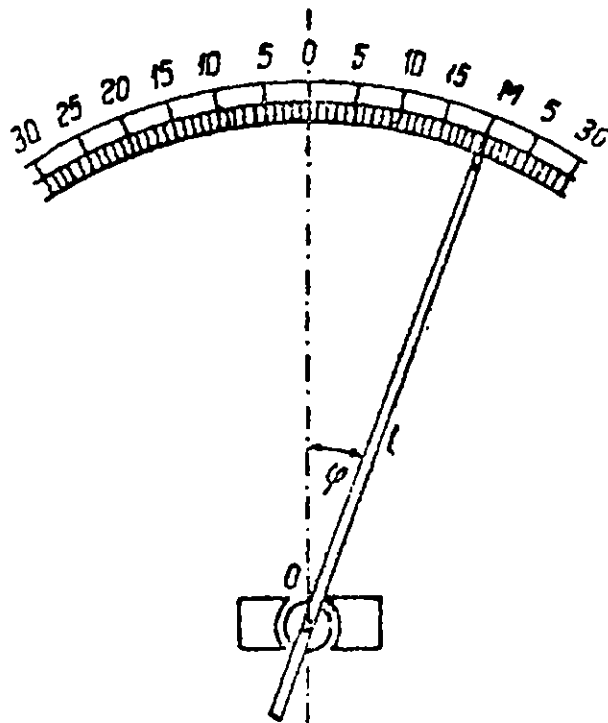


Рис. 23.

Кроме указанных способов определения положения точки: декартовых, полярных, сферических и цилиндрических координат, существует еще бесчисленное множество других способов, — мы остановились лишь на самых главных и общепринятых.

В дальнейшем нам понадобится еще один, весьма общий, заключающий в себе все другие способы, метод определения положения точки в пространстве — метод *векторный*.

Будем определять положение точки M (рис. 22) концом

→
стрелки OM , проведенной в пространстве из произвольной, но выбранной наперед точки O . Такую стрелку (направленный отрезок), имеющую определенную длину и направление в пространстве, мы будем называть *вектором-радиусом* точки M по отношению к точке O и обозначать жирной r , а длину ее курсивной буквой r .

Вектор-радиус точки дает нам пример более широкого понятия *вектора* вообще. Мы будем называть вообще *вектором* всякий *направленный отрезок, имеющий определенную длину, выражающую в масштабе какую-нибудь физическую величину*.

Учащийся уже имел в статике примеры векторов: силу, момент ее относительно точки, момент пары сил, в кинематике нам придется познакомиться с целым рядом новых векторов, как например

только-что приведенным примером вектор-радиуса точки, вектором скорости, ускорения и многими другими.

Из чертежа (рис. 22) сразу видно, что проекции вектора-радиуса точки M на оси декартовых координат (мы будем обозначать проекции вектора той же буквой, что и сам вектор, с подстрочным значком, указывающим на какую ось взята проекция) представляют собою не что иное, как координаты точки:

$$\boxed{r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z,} \quad (1)$$

причем длина вектора r будет равна:

$$\boxed{r = +\sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},} \quad (2)$$

а косинусы углов вектор-радиуса с осями декартовых координат определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{r, x}) &= \frac{r_x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; & \cos(\widehat{r, y}) &= \frac{r_y}{r} = \\ &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; & \cos(\widehat{r, z}) &= \frac{r_z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Учащийся вероятно заметит, что формулы эти совершенно такие же, как и формулы статики, выражающие величину силы и косинусы углов ее направления с осями координат через проекции силы. Почему это так? Конечно потому, что вывод всех этих формул как в статике, так и здесь, основан на простых соотношениях между проекциями направленного отрезка и его длиной. Следовательно, все дело здесь в том общем, что есть у силы и вектор-радиуса, а именно *сила и вектор-радиус точки — вектора*.

Мы уже упоминали, что у нас впереди еще много разных векторов: скорость, ускорение и др. Можно указать наперед, что и там будут те же формулы, как (1), (2) и (3), поэтому учащемуся рекомендуется лучше усвоить эти первые три формулы, они будут постоянно у нас повторяться.

Пользование вектор-радиусом вместо декартовых или других координат окажет нам в последующих заданиях ценные услуги.

Примеры и упражнения.

1. Зная вектор-радиус r_1 точки M_1 по отношению к точке O и вектор-радиус r_{12} точки M_2 по отношению к точке M_1 , найти вектор-радиус r_2 точки M_2 по отношению к точке O (рис. 24) и, наоборот, зная r_1 и r_2 , найти r_{12} .

Из чертежа видно, что задача решается известными читателю из статики операциями сложения и вычитания векторов:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 + r_{12}, \\ r_{12} &= r_2 - r_1. \end{aligned}$$

Проектируя второе равенство на оси координат и припоминая формулы (I), убедимся, что проекции произвольно расположенного отрезка на оси координат равны разностям соответствующих координат конца и начала отрезка.

2. По вектор-радиусам $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ концов отрезка $M_1 M_2$ найти вектор-радиус $\vec{r}_C$ середины отрезка C , а также вектор-радиус точки A , делящей отрезок $M_1 M_2$ в отношении $m:n$.

Направляя отрезки $\overrightarrow{M_1 C}$ и $\overrightarrow{M_2 C}$ как указано на рис. 25, будем иметь:

$$\vec{r}_C = \vec{r}_1 + \overrightarrow{M_1 C}$$

$$\vec{r}_C = \vec{r}_2 + \overrightarrow{M_2 C},$$

откуда, складывая эти равенства, найдем:

$$2\vec{r}_C = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + (\overrightarrow{M_1 C} + \overrightarrow{M_2 C}),$$

но вектора $\overrightarrow{M_1 C}$ и $\overrightarrow{M_2 C}$ равны по величине и противоположны по направлению, следовательно в сумме дадут нуль, и мы получаем:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{2} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2).$$

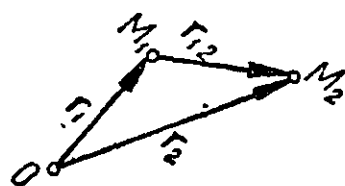


Рис. 24.

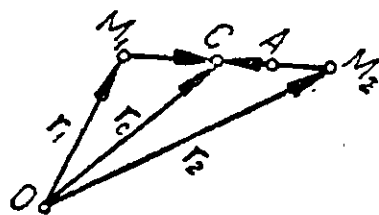


Рис. 25.

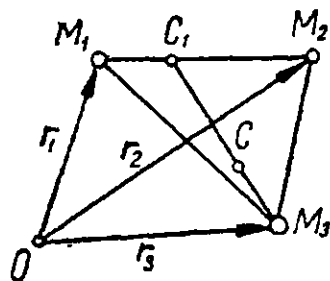


Рис. 26.

Повторяя то же рассуждение относительно точки A с той лишь разницей, что теперь уже

$$\frac{\overrightarrow{M_1 A}}{m} + \frac{\overrightarrow{M_2 A}}{n} = 0,$$

читатель должен самостоятельно найти важную формулу:

$$\vec{r}_A = \frac{n\vec{r}_1 + m\vec{r}_2}{m + n}.$$

3. Найти вектор-радиус центра тяжести системы трех грузов M_1, M_2, M_3 (рис. 26), связанных между собою тремя стержнями пренебрежимо малого веса по сравнению с весами грузов.

По только-что выведенной в предыдущем упражнении формуле найдем вектор-радиус центра тяжести C_1 первых двух грузов. Для этого вспомним, что центр тяжести лежит на линии, соеди-

няющей центры грузов в точке, делящей отрезок $\overline{M_1 M_2}$ обратно пропорционально массам грузов: m_1 и m_2 ; будем иметь:

$$r_{C_1} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}.$$

Далее сосредоточим в точке C_1 оба груза M_1 и M_2 и будем искать центр тяжести груза с массой $(m_1 + m_2)$ в точке C_1 и груза массы m_3 в точке M_3 ; по той же формуле найдем:

$$r_C = \frac{(m_1 + m_2) r_{C_1} + m_3 r_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

По самому ходу доказательства видно, что можно присоединять все новые и новые грузы с массами m_i и вектор-радиусами r_i и таким образом в результате получить такую общую формулу центра тяжести системы точек:

$$r_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i r_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Если спроектировать обе части этого равенства на оси координат, то получаются известные читателю из статики обычные формулы координат центра тяжести (убедиться в этом!). Векторный вывод этой формулы дал нам пищу для упражнения, в то же время самый результат нам будет необходим во второй части курса Механики — Динамике.

4. Доказать, что сумма произведений масс точек m_i на вектор-радиусы r_i этих точек по отношению к их общему центру тяжести всегда равна нулю, т. е. (рис. 27):

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + \dots = 0.$$

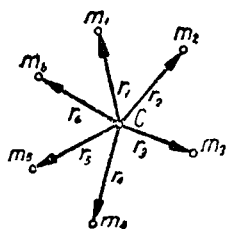


Рис. 27.

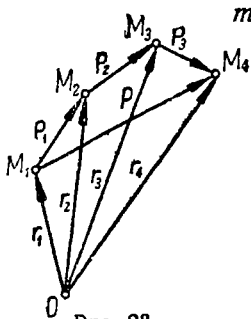


Рис. 28.

Доказательство предоставляем читателю.

5. Сложение перемещений точки. Перемещение точки выражается вектором, соединяющим начальное и конечное ее положение и направленным от начального положения к конечному.

Если точка занимала положение M_1 , определяемое вектор-радиусом r_1 , и переместилась в положение M_2 с вектор-радиусом r_2 , то перемещение p очевидно будет равно:

$$p = r_2 - r_1$$

Пусть точка из положения M_1 (рис. 28) перешла в положение M_2 , затем отсюда в точку M_3 и наконец заняла положение M_4 . Определим окончательное перемещение точки из положения M_1 в положение M_4 . Будем иметь:

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_4 - \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1$$

или

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3.$$

§ 7. Уравнения движения точки в пространстве. Графики движения.

Если точка не остается неподвижной в пространстве, то ее координаты изменяются с течением времени. По закону изменения этих координат мы можем судить о характере движения точки. Предположим, что нам заданы координаты точки в функции времени, т. е. заданы уравнения:

$$x = f_1(t); \quad y = f_2(t); \quad z = f_3(t).$$

Эти уравнения называются *уравнениями движения точки* в пространстве. Уравнения, только-что написанные, отличаются от уравнения прямолинейного движения точки тем, что их три, а не одно, согласно числу координат точки, необходимых для описания ее движения. Вместо декартовых координат x, y, z могли бы быть взяты какие угодно другие координаты: полярные, сферические, цилиндрические и пр. Выраженные в функции времени они давали бы также уравнения движения нашей точки. Мы разовьем тотчас же эти представления на ряде примеров и упражнений; отметим, что подобно предыдущему заданию, уравнения движения в пространстве могут быть представлены графически. Для этого придется каждое из уравнений представить в виде отдельной кривой и таким образом иметь два графика движения в случае движения в плоскости, три графика — в случае движения в пространстве. Такое представление крайне затруднительно, почему и применение графиков движения в случае непрямолинейного движения малоупотребительно. Здесь обычно или предпочитают график пройденного пути (о нем речь в следующем параграфе), или пользуются особыми уравнениями в криволинейных координатах.

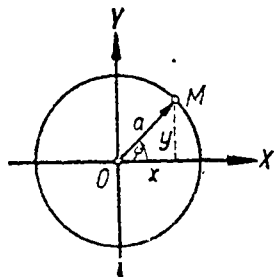


Рис. 29.

Примеры и упражнения.

1. Вращение точки по круговой орбите. Найдем уравнения движения точки M (рис. 29) по круговой орбите с радиусом a , если время ее полного обращения T . Обозначим через t какой-

нибудь момент времени, угол φ , образованный вектор-радиусом точки M с осью OX , будет определяться из соотношения:

$$\varphi : 2\pi = t : T,$$

откуда

$$\varphi = \frac{2\pi}{T} t.$$

Из чертежа сразу видно, что абсцисса и ордината точки M будут равны:

$$x = a \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T} t.$$

Это очевидно и есть уравнения движения точки. Мы видим, что абсцисса и ордината, являясь проекциями вектор-радиуса на две взаимно перпендикулярные оси, в полном согласии с первым заданием, представились гармоническими функциями времени с периодом, равным времени полного обращения точки.

Было бы проще писать уравнения движения в полярной системе координат (r, φ) . В этом случае уравнения движения примут вид:

$$r = a; \varphi = \frac{2\pi}{T} t.$$

Полученные уравнения очевидно проще предыдущих. Таковы будут, например, уравнения движения пальца кривошипа, движения электрона на круговой орбите.

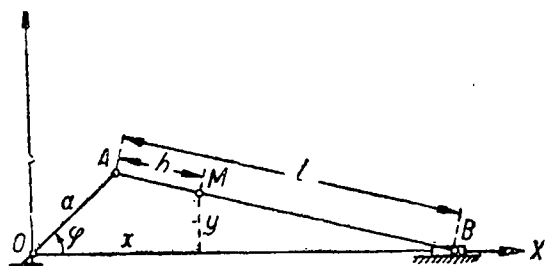


Рис. 30.

2. Уравнения движения точек шатуна кривошипного механизма. В предыдущем задании мы рассмотрели уже уравнения движения ползуна кривошипного механизма, обратимся теперь к выводу уравнений движения точек шатуна.

Возьмем какую-нибудь точку M шатуна (рис. 30), находящуюся на расстоянии h от пальца кривошипа A . Обозначая абсциссы и ординаты точек A, M, B соответствующими значками при x и y , можем написать:

$$\frac{x_M - x_A}{x_B - x_A} = \frac{h}{l}; \quad \frac{y_M - y_A}{y_B - y_A} = \frac{h}{l}.$$

Замечая, что

$$x_A = a \cos \varphi, \quad y_A = a \sin \varphi, \quad x_B = a \cos \varphi + \sqrt{l^2 - a^2 \sin^2 \varphi}^1), \quad y_B = 0,$$

$$\varphi = \omega t,$$

¹⁾ См. упражнение 3 § 2 предыдущего задания.

получим, опуская значки при x и y , относящиеся к точке M ,

$$x = a \cos \omega t + \frac{h}{l} \sqrt{l^2 - a^2} \sin^2 \omega t, \quad (1)$$

$$y = \left(1 - \frac{h}{l}\right) a \sin \omega t. \quad (2)$$

Таковы уравнения движения точки M .

При желании, первое из этих уравнений может быть упрощено заменой на приближенное уравнение, составленное по способу, изложенному в упражнении 3, § 2 предыдущего задания; будем иметь

$$x = a \cos \omega t + h \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \omega t\right) = h \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right) + a \cos \omega t + \frac{\varepsilon^2 h}{4} \cos 2 \omega t.$$

Отметим частные случаи:

1) $h=0$; точка M совпадает с пальцем кривошипа A . Уравнения движения принимают вид:

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t.$$

2) $h=l$; точка M совпадает с ползуном B ; уравнения движения будут:

$$x = a \cos \omega t + \sqrt{l^2 - a^2} \sin^2 \omega t, \quad y = 0,$$

т. е. мы вновь получаем уравнения упражнения 3, § 2 предыдущего задания.

3. Кривошипный механизм с шатуном, равным по длине кривошипу. Полагая в предыдущих уравнениях $l=a$, получим:

$$x = a \cos \omega t + \frac{h}{a} \cdot a \cos \omega t,$$

$$y = \left(1 - \frac{h}{a}\right) a \sin \omega t,$$

т. е.

$$x = (a + h) \cos \omega t; \quad y = (a - h) \sin \omega t.$$

Найдем уравнения движения точки M , лежащей на продолжении шатуна за пальцем кривошипа на расстоянии a от A (рис. 31). Чтобы найти искомые уравнения, положим $h = -a$ тогда будем иметь:

$$x = 0; \quad y = 2a \sin \omega t.$$

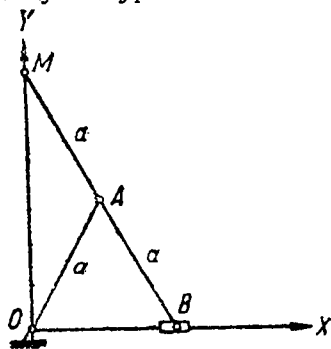


Рис. 31.

Из уравнений видно, что взятая нами точка M будет двигаться по оси OY (x постоянно равно нулю), причем движение это прямолинейное, гармоническое и колебательное. Характер движения точки M такой же, как и у точки B .

Поместим в точку M ползунок, направив его движение по оси OY . Тогда кривошип может быть опущен и движение шатуна AB

сведется к движению линейки MB , два конца которой скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым (осям OX и OY). Такое видоизменение кривошипного механизма называется *эллипсографом*. Причина этого наименования вскоре будет выяснена.

4. Некоторые случаи пространственного движения точки. Мы разберем два случая движения в пространстве: движение по винтовой линии на цилиндре и движение по различным кругам на сфере. Эти случаи наиболее употребительны на практике

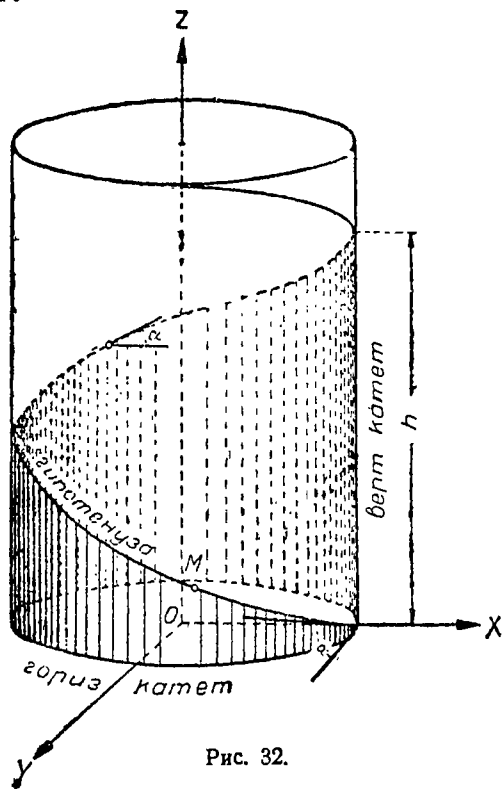


Рис. 32.

и довольно просто описываются при помощи уравнений движения. Особенно изящно и просто получают уравнения этих движений, если пользоваться криволинейными координатами. Мы сейчас это покажем:

а) Движение по винтовой линии. Напомним прежде всего, что винтовой линией называется пространственная линия, проведенная на круговом цилиндре под постоянным углом к его образующей. Получить эту линию можно, наворачивая прямоугольный треугольник на цилиндр так, чтобы один катет был параллелен образующей, а другой — перпендикулярен ей, тогда гипотенуза будет навиваться на цилиндр как раз по винтовой линии (рис. 32).

Таков геометрический способ получения винтовой линии. Однако на прак-

тике мы пользуемся обычно кинематическим способом. Так на-пример, нарезая винты, мы придаем цилиндру, на котором нужно нарезать винтовую линию (нарезку, нитку), вращательное движение вокруг оси и поступательное — вдоль оси. При равномерности обоих движений мы получаем винтовую линию с тем или другим шагом h (шагом называется отрезок образующей между двумя соседними витками одной и той же нитки). Определим движение резца по отношению к цилиндру, считая цилиндр неподвижным¹⁾. Резец, во-первых, вращается вокруг оси OZ по окружности радиуса a (радиус цилиндра) с некоторой угловой скоростью ω , делая n оборотов в минуту, и, во-вторых, движется равномерно, вдоль обра-

¹⁾ На самом деле резец бывает неподвижен, а цилиндр вращается и смещается вдоль своей оси или же цилиндр вращается, а резец только смещается. И в том и в другом случае по отношению к цилиндру резец будет совершать движение по винтовой линии, которое мы и рассматриваем.

зующей по прямой, параллельно оси OZ с постоянной скоростью c . Как видно из рис. 33, координаты x и y резца M в декартовой системе будут:

$$\begin{aligned}x &= a \cos \psi, \\y &= a \sin \psi,\end{aligned}$$

а принимая во внимание, что $\psi = \omega t = \frac{\pi n}{30} t$ и что по условию равномерности поступательного движения резца вдоль образующей $z = ct$, имеем следующие уравнения движения резца:

$$\begin{aligned}x &= a \cos \omega t, \\y &= a \sin \omega t, \\z &= ct.\end{aligned}$$

Определим, каково должно быть соотношение между угловой скоростью вала и поступательной скоростью резца для того, чтобы получилась винтовая нарезка данного шага h . Для этого воспользуемся условием, чтобы за время полного оборота T резец сместился на шаг h . Будем иметь (вспомнить примеры предыдущего задания):

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

$$h = cT.$$

Отсюда, исключая T , найдем:

$$\frac{c}{\omega} = \frac{h}{2\pi},$$

или, вводя еще вместо ω число оборотов в минуту n :

$$\frac{c}{n} = 15h.$$

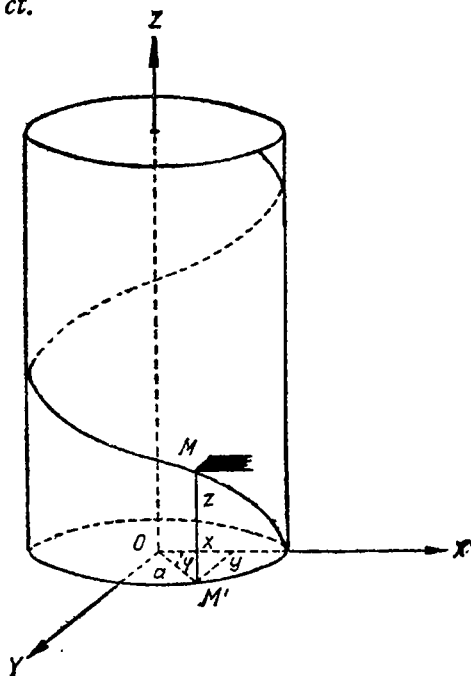


Рис. 33.

Более детальный расчет и численные примеры изучающий найдут в специальных курсах Прикладной механики и деталей машин. Совсем просто уравнения движения резца могут быть получены в цилиндрической системе координат. Действительно, из рисунка сразу видно, что:

$$r = a, \psi = \omega t, z = ct.$$

Эти уравнения, очевидно, гораздо проще, чем предыдущие уравнения в декартовой системе координат.

б) Движение на сфере. Рассмотрим вкратце движение точки по сфере радиуса R (рис. 34). Уравнения равномерного вращения

точки по большому вертикальному кругу, лежащему в плоскости yz , будут, как легко сообразить:

$$\begin{aligned}x &= 0, \\y &= R \cos \omega t \\z &= R \sin \omega t.\end{aligned}$$

В сферической системе координат уравнения движения будут:

$$r = R, \psi = \frac{\pi}{2}, \varphi = \omega t \text{ или } \theta = \frac{\pi}{2} - \omega t.$$

Простота этих уравнений по сравнению с предыдущими очевидна. Уравнения равномерного движения по параллели C_2 имеют в декартовой системе следующий вид (учащийся выведет их сам):

$$\begin{aligned}x &= R \sin \theta_0 \cos \omega t, \\y &= R \sin \theta_0 \sin \omega t, \\z &= R \cos \theta_0,\end{aligned}$$

где θ_0 — постоянный во все время движения угол, определяющий положение плоскости параллельного круга C_2 ; в сферической системе:

$$r = R, \psi = \omega t, \theta = \theta_0.$$

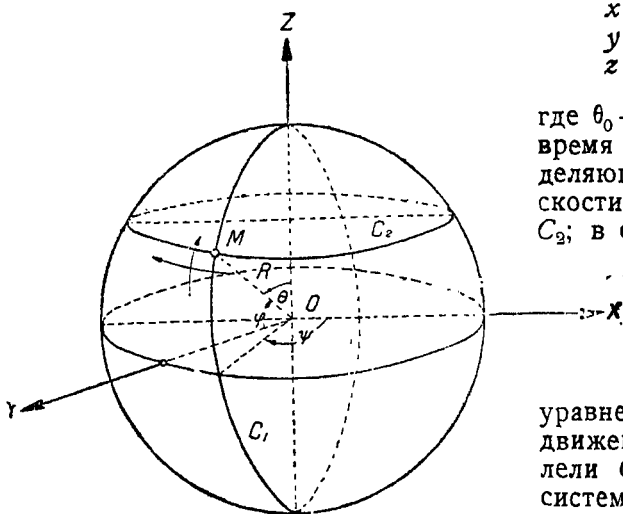


Рис. 34.

В виде упражнения предлагаем учащемуся написать уравнения равномерного движения точки по параллели C_2 в цилиндрической системе координат, а также найти уравнения равномерного движения точки по

вертикальному кругу, плоскость которого образует с плоскостью XOZ угол $\frac{\pi}{4}$.

§ 8. Траектория точки. Определение ее по заданным уравнениям движения.

Линия, по которой движется точка в пространстве, называется *траекторией* движущейся точки. Иногда еще траекторию определяют как линию, *описываемую* движущейся точкой в пространстве, или как геометрическое место положений движущейся точки в пространстве.

Решим следующий важный вопрос: как, имея уравнения движения, найти уравнения траектории точки?

Для решения этого вопроса вспомним, что уравнения движения определяют координаты, т. е. положение точки в данный момент

времени, уравнения же траектории связывают между собой координаты точки в любой момент времени и должны представить уравнение кривой, т. е. некоторую функциональную зависимость между x , y и z , не содержащую время, при чем эта зависимость должна являться следствием заданных уравнений движений. Отсюда ясно, что для получения уравнений траектории необходимо из уравнений движения исключить время.

Продemonстрируем сказанное на ряде примеров.

Примеры и упражнения.

1. Траектория точки шатуна кривошипного механизма.

Из уравнений движения, выведенных в примере 2 § 7 настоящего задания, можно исключить время следующим образом. Из уравнения (2) следует:

$$\sin \omega t = \frac{l}{l-h} \cdot \frac{y}{a},$$

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \sin^2 \omega t} = \frac{1}{(l-h)a} \sqrt{(l-h)^2 a^2 - l^2 y^2}.$$

Подставляя эти значения в уравнение (1), после простых выкладок найдем:

$$x = \frac{1}{l-h} \left[\sqrt{(l-h)^2 a^2 - l^2 y^2} + h \sqrt{(l-h)^2 - y^2} \right]. \quad (1)$$

К сожалению уравнение траектории не получается достаточно простым. Это алгебраическая кривая 4-го порядка, принадлежащая к типу так называемых „овалов“. Она, в отличие от эллипса, не имеет вертикальной оси симметрии, а напоминает яйцо, так как правый край (рис. 35) у нее тоньше, чем левый. Рассмотрим некоторые частные случаи:

1) $h=0$, т. е. движение пальца кривошипа A .

В этом случае уравнение (1) переходит в такое:

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = a^2,$$

т. е. уравнение окружности, что ясно конечно, и из самой конструкции.

2) $h=l$, т. е. движение крейцкопфа B . В этом случае условие действительности x приводит к уравнению:

$$y=0,$$

т. е. уравнению оси OX , что опять-таки ясно из рисунка.

3) Оставим произвольным расположение точки M на шатуне, но положим, что длина кривошипа равна длине шатуна. При этом

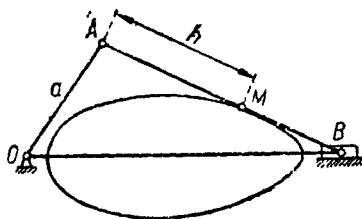


Рис. 35.

предположении уравнение траектории (1) принимает, как легко видеть, следующую форму:

$$x^2(l-h)^2 = (l+h)^2(l-h)^2 - (l+h)^2y^2,$$

или же после деления обеих частей равенства на $(l+h)^2(l-h)^2$ еще такой вид:

$$\frac{x^2}{(l+h)^2} + \frac{y^2}{(l-h)^2} = 1.$$

Это очевидно уравнение эллипса с осями симметрии, расположенными по осям OX и OY . Большая полуось этого эллипса равна $l+h$, меньшая $|l-h|$. Точка M_1 (рис. 36), лежащая на шатуне AB ($h > 0$), опишет эллипс C_1 , у которого горизонтальная полуось больше вертикальной, точка M_2 , взятая на продолжении шатуна, выше пальца кривошипа A ($h < 0$), опишет эллипс C_2 с большей вертикальной полуосью.

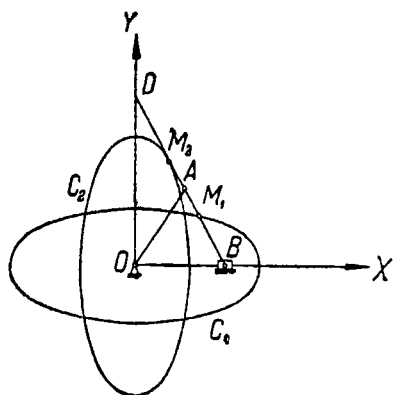


Рис. 36.

Мы уже упоминали, что точка D описывает отрезок оси OY , и поэтому в нее может быть помещен ползунок, а кривошип OA опущен. Такой механизм мы назвали *эллипсографом*. Теперь становится понятным происхождение этого наименования. Все точки линейки BD описывают эллипсы (кроме конечно точки A , дающей окружность, и D — прямую). Указанный механизм применяется на практике для вытравливания или вычерчивания эллипсов (рис. 37).

Некоторые обобщения указанного только-что механизма уча-

щийся найдет во второй теме, посвященной плоскому движению.

2. Колебания упругого стержня прямоугольного сечения. Фигуры Лиссажу. Предположим, что у нас имеется упругий (например стальной) стержень прямоугольного сечения, заделанный нижним концом в твердый фундамент (рис. 38). Такой стержень может совершать колебания по направлениям осей симметрии своего сечения, отмеченных у нас OX и OY . Каждое из этих двух (так называемых *главных*) колебаний имеет свою частоту, а следовательно и период, а также амплитуду и фазу. Частоты зависят от измерений прямоугольного сечения a и b . Физически совершенно ясно (в курсе Динамики это будет доказано и объяснено подробно), что чем больше, например, длина a , тем более быстрые колебания будет совершать наш стержень в направлении оси OX ; точно так же, чем меньше b , тем более медленные колебания будут в направлении OY . Если дать верхнему концу небольшое смещение и затем толчок в произвольном направлении, то верхняя площадочка придет в сложное движение, складывающееся из двух взаимно перпендикулярных колебаний по оси OX и OY , при этом, если смотреть сверху, то можно будет легко заметить, что траекториями конца стержня в плоскости XOY будут замысловатые,

но правильные фигуры. Эти фигуры, получающиеся в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний, носят наименование фигур Лиссажу и имеют большое прикладное значение в Электротехнике, Акустике, Оптике и Механике. По внешнему виду этих фигур, получаемых на экране или фотопластинке, судят о соотношениях между периодами двух взаимноперпендикулярных колебаний. Таково, например, применение фигур Лиссажу в катодном осциллографе. Рассмотренный нами прибор, состоящий из прямоугольного стержня, заделанного нижним концом, называется *калейдофоном* и служит для демонстрации законов сложения взаимно перпендикулярных гармонических колебаний. Мы поставим себе сейчас задачей определить траектории какой-нибудь метки верхнего

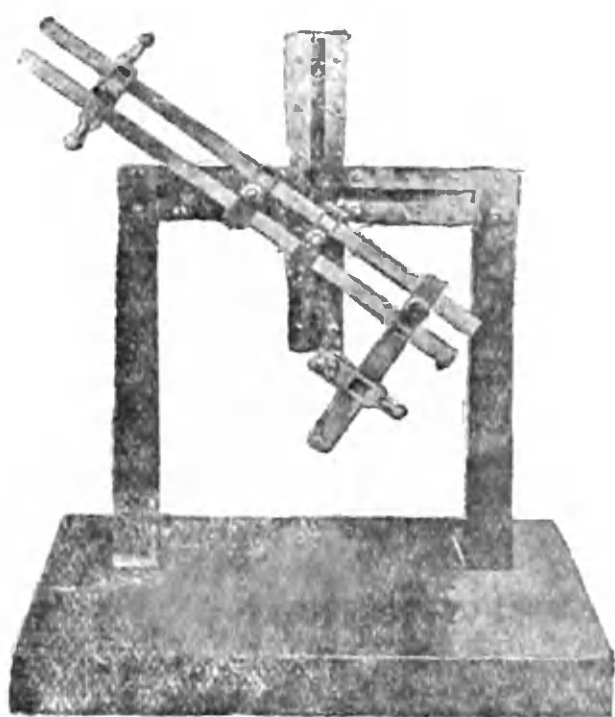


Рис. 37. Эллипсограф.
(Модель Кабинета механики Ленинградского физико-механического института).

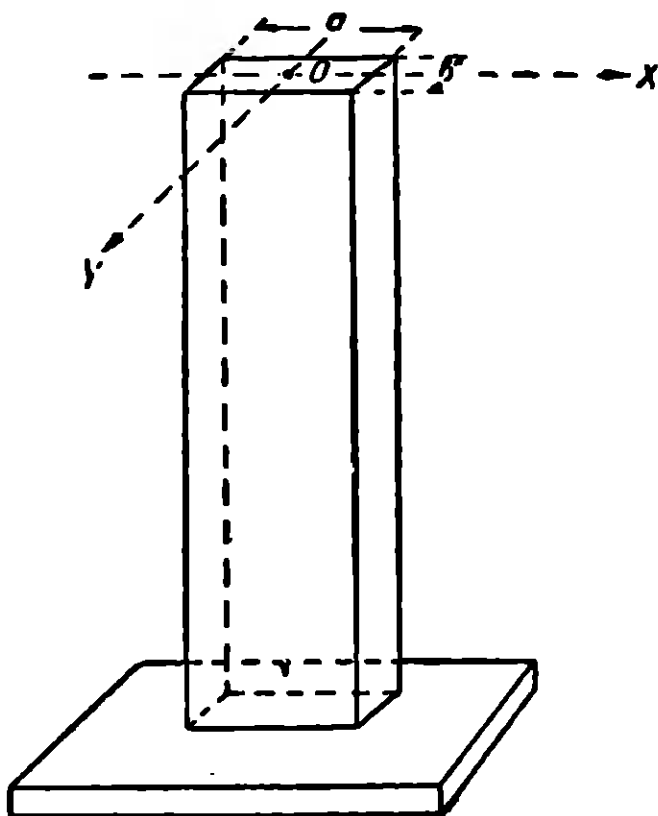


Рис. 38.

конца стержня, например середины площадки верхнего сечения, при одинаковых и различных частотах колебаний по осям OX и OY .

а) Случай одинаковых частот взаимноперпендикулярных колебаний. Возьмем самый общий случай, когда и амплитуды и фазы различны. Уравнения движения будут иметь вид:

$$x = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1),$$

$$y = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Для нахождения траектории этого движения будем по общему правилу исключать время из уравнений движения. Проще всего это сделать так. Развернем синус суммы по известной формуле тригонометрии, тогда уравнения движения примут вид:

$$x = a_1 \cos \varphi_1 \sin \omega t + a_1 \sin \varphi_1 \cos \omega t,$$

$$y = a_2 \cos \varphi_2 \sin \omega t + a_2 \sin \varphi_2 \cos \omega t.$$

Затем определим отсюда $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$, как два неизвестных из двух уравнений. Это нам даст

$$\sin \omega t = \frac{x a_2 \sin \varphi_2 - y a_1 \sin \varphi_1}{a_1 a_2 (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)},$$

$$\cos \omega t = \frac{y a_1 \cos \varphi_1 - x a_2 \cos \varphi_2}{a_1 a_2 (\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 - \cos \varphi_2 \sin \varphi_1)}.$$

Возвышая эти два уравнения в квадрат и складывая, после крайне простых выкладок получим уравнения траектории в следующем симметричном виде:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - 2 \frac{x}{a_1} \cdot \frac{y}{a_2} \cdot \cos (\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2 (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Это — уравнение эллипса, имеющего центр в начале координат, с осями симметрии, наклоненными к осям координат под некоторым углом. Мы сейчас исследуем этот эллипс. Заметим прежде всего, что форма и расположение этого эллипса зависят (как это

видно из уравнения его) не от значений фаз φ_1 и φ_2 в отдельности, а от разности их или, как говорят, от сдвига фаз $\varphi_1 - \varphi_2$, который мы обозначим через Θ .

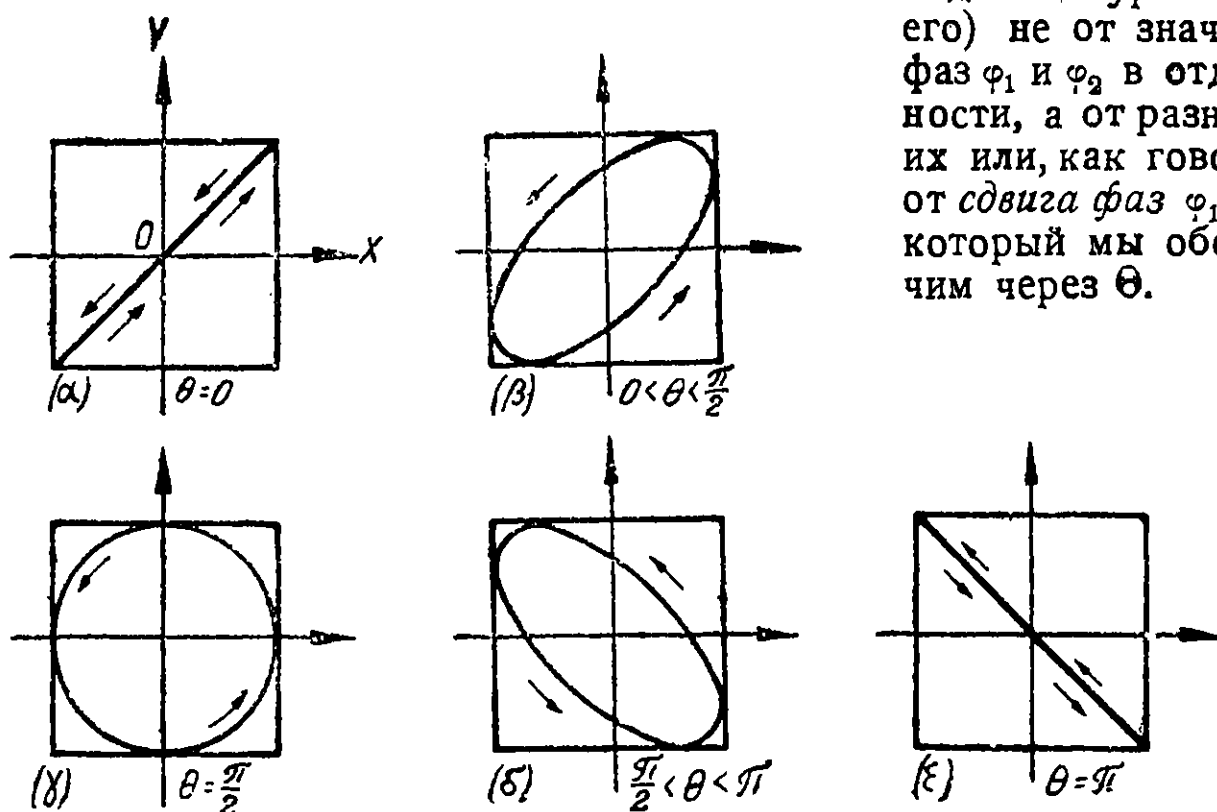


Рис. 39.

Вычертим фигуры Лиссажу в предположении, что $a_1 = a_2 = a$, т. е. что амплитуды слагаемых колебаний одинаковы. Общее уравнение этих фигур при произвольном сдвиге фаз переписывается тогда в виде

$$x^2 + y^2 - 2xy \cos \Theta = a^2 \sin^2 \Theta.$$

Вычертим траектории движения при различных значениях Θ . Легко видеть, что при $\Theta = 0$ эллипс вырождается в отрезок прямой

$$x - y = 0,$$

именно в диагональ квадрата со стороной $2a$ (рис. 39, а), при

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ мы получим эллипс, большая ось которого наклонена под острым углом к оси OX (рис. 39, β), при $\theta = \frac{\pi}{2}$ получим окружность: $x^2 + y^2 = a^2$ (рис. 39, γ), при $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ будем иметь снова эллипс (рис. 39, δ), но с большей осью, расположенной уже во 2-м и 4-м квадрантах, и наконец при $\theta = \pi$ мы снова получаем отрезок прямой (рис. 39, ϵ):

$$x + y = 0.$$

На всех рисунках стрелки показывают направления движения точки. При изменении θ от π до 2π получатся те же фигуры, только переменится направление движения. Как легко видеть из уравнений движения, x и y никогда не превосходят соответственно значений $\pm a_1$ и $\pm a_2$, так как синус всегда по модулю меньше единицы. Отсюда следует, что все фигуры Лиссажу ограничены прямоугольником со сторонами $2a_1$ и $2a_2$ (у нас на рисунке они все вписаны в квадрат со стороной $2a$).

Примечание. На только-что приведенном примере между прочим видно, что уравнение траектории не вполне точно определяет траекторию движения, т. е. при исключении времени мы теряем некоторые необходимые сведения о траектории. Например, в случаях $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ мы получаем уравнения:

$$x - y = 0,$$

$$x + y = 0,$$

т. е. уравнения бесконечных прямых, а на самом деле *траекториями служат лишь отрезки этих прямых, заключенные в квадрате со стороной $2a$* . Из уравнений движений это ясно видно, из уравнения траекторий же это явно не следует.

Мы взяли для примера случай $a_1 = a_2 = a$; если бы $a_1 \neq a_2$, то фигуры Лиссажу были бы те же, только в случае $\theta = \frac{\pi}{2}$ мы имели бы не окружность, а эллипс, для которого оси координат совпадали бы с осями симметрии.

б) Случай различных частот взаимно перпендикулярных колебаний. Определим траектории (фигуры Лиссажу) в случае неравных между собой частот взаимно перпендикулярных колебаний. Рассмотрим для простоты частный случай, когда частота одного из колебаний в два раза больше частоты другого, а фазы и амплитуды одинаковы.¹⁾

Уравнения движения пусть имеют вид:

$$x = a \sin(2\omega t - \alpha),$$

$$y = a \sin(\omega t - \alpha).$$

¹⁾ Равенство фаз не является ограничительным условием, так как всегда можно так изменить начало отсчета времени, что фазы станут одинаковыми. Такое уравнение фаз возможно лишь при *разных* частотах. Изучающий не затруднится доказать это предложение; мы на доказательстве не останавливаемся.

Здесь аналитическое исключение времени t очень затруднительно. Чтобы вычертить траекторию мы можем нанести на рисунке точки $M(x, y)$ при разных значениях t и потом их соединять плавной кривой. При этом получатся фигуры, показанные на рис. 40.

При значениях α от π до 2π получим фигуры, симметричные вычерченным относительно вертикали.

Интересно отметить, что в случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$ мы получаем отрезок параболы, заключенной, как и все фигуры Лиссажу, в квадрат со стороной $2a$. Действительно, в этом случае уравнения движения принимают вид:

$$x = a \sin \left(2\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -a \cos 2\omega t,$$

$$y = a \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = -a \cos \omega t.$$

Из этих двух уравнений время легко исключается:

$$x = a (\sin^2 \omega t - \cos^2 \omega t) = a(1 - 2 \cos^2 \omega t) = a \left(1 - 2 \frac{y^2}{a^2} \right),$$

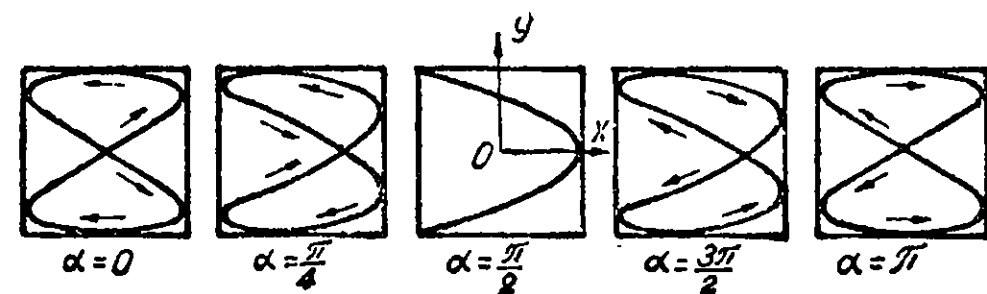


Рис. 40.

или

$$y^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a}{2} x,$$

а это есть уравнение параболы с вершиной в точке $(a, 0)$ и осью OX , служащей осью симметрии.

Примечание. Обратим внимание учащегося на следующее интересное свойство фигур Лиссажу: если частоты (или периоды) колебаний соизмеримы, то фигуры Лиссажу замыкаются, т. е. точка будет без конца описывать все одну и ту же фигуру, повторяя ее; если же периоды несоизмеримы, то точка никогда не попадет на старое место. Делая все новые и новые петли и оставаясь в границах квадрата или прямоугольника, наша точка будет повсюду плотно заполнять площадь, и фигура Лиссажу никогда не замкнется. Действительно, если между периодами перпендикулярных колебаний T_1 и T_2 существует соотношение:

$$n_1 T_1 = n_2 T_2,$$

где n_1 и n_2 — целые взаимно простые числа, то за время $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$ повторится целое число периодов x и y , т. е. и x и y вернутся к прежним положениям, и кривая замкнется сама на себя. После этого движение начнет повторяться и т. д. Если же периоды несоизмеримы, то такого значения T нельзя будет указать, и точка никогда не вернется в прежнее положение.

3. Движение центра тяжести трамвая. Определим траекторию центра тяжести кузова трамвая, совершающего гармонические вертикальные колебания на рессорах и в то же время равномерно и прямолинейно перемещающегося по рельсам вперед. Если направить ось OX по горизонтали в сторону движения трамвая, ось OY по вертикали, выбрав начало координат в той точке, в которой находился центр тяжести трамвая при начале движения, то уравнения движения будут:

$$x = ct,$$

$$y = a \sin (\omega t + \alpha).$$

Здесь c — скорость горизонтального движения трамвая, a — амплитуда колебаний кузова, ω — частота их и α — фаза. Время легко исключается из первого уравнения, и мы будем иметь уравнение траектории:

$$y = a \sin \left(\frac{\omega}{c} x + \alpha \right).$$

Мы видим, что центр тяжести кузова описывает синусоиду. Таким образом при прямолинейном движении трамвая центр кузова перемещается по волнистой кривой.

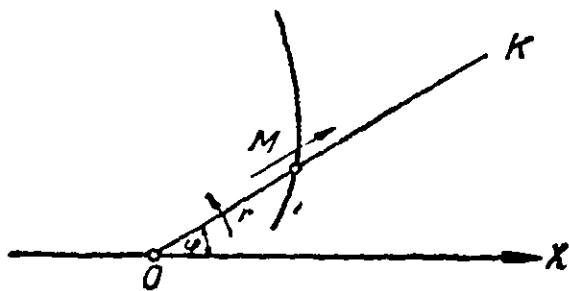


Рис. 41.

4. Пример на определение траектории в полярной системе координат. Предположим, что точка M (рис. 41) движется равномерно по прямолинейному отрезку OK , который вращается в свою очередь равномерно вокруг одной из своих точек O . Определим траекторию такого движения.

Если обозначить через c — скорость прямолинейного движения точки и через ω — угловую скорость вращения отрезка, то уравнения движения в полярной системе координат будут иметь вид:

$$\dot{r} = ct; \quad \varphi = \omega t; \quad 1)$$

исключая t , найдем:

$$r = \frac{c}{\omega} \varphi.$$

Это — уравнение Архимедовой спирали.

5. Траектория винтового движения. В примере 4 § 7 мы вывели уравнение движения точки по винтовой линии. Теперь, имея эти уравнения:

$$x = a \cos \omega t,$$

$$y = a \sin \omega t,$$

$$z = ct,$$

1) Здесь предполагается, что в начале движения при $t = 0$, $r = 0$, $\varphi = 0$; если бы при $t = 0$, $r = r_0$, то r равнялось бы $r_0 + ct$ и мы получили бы уравнение траектории $r = r_0 + \frac{c}{\omega} \varphi$, так называемую конхонду архимедовой спирали; это та же самая спираль, только повернутая на некоторый угол по отношению к предыдущей спирали.

выведем уравнения траектории точки, т. е. уравнение винтовой линии. Для этого по общему правилу исключим время t из уравнений движения. Из последнего уравнения определим t и подставим в первые два. Будем иметь:

$$x = a \cos \frac{\omega}{c} z,$$

$$y = a \sin \frac{\omega}{c} z,$$

но, по предыдущему, отношение $\frac{\omega}{c}$ представляет собою $\frac{2\pi}{h}$, где h —шаг винтовой линии, поэтому уравнения могут быть переписаны еще так:

$$x = a \cos 2\pi \frac{z}{h},$$

$$y = a \sin 2\pi \frac{z}{h}.$$

Каждое из этих уравнений в отдельности представляет уравнение цилиндрической поверхности: 1) с образующими, параллельными оси OY и направляющей косинусоидой в плоскости XZ и 2) образующей, параллельной оси OX и направляющей синусоидой в плоскости YZ .

Пересечение этих двух цилиндрических поверхностей и определяет винтовую линию.

Можно было бы исключение времени еще иначе провести так: возвести первые два уравнения в квадрат и сложить между собою, тогда мы получили бы уравнение прямого кругового цилиндра:

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

с образующими, параллельными оси OZ и направляющим кругом радиуса a с центром в начале координат и лежащим в плоскости xOy . Пересечение этого цилиндра с любой из предыдущих цилиндрических поверхностей и определит винтовую линию. На рис. 42 показано образование винтовой линии пересечением всех вышеприведенных цилиндрических поверхностей. Уравнения движения можно было бы рассматривать как параметрические уравнения винтовой линии. Исключив параметр t , мы перешли от параметрического представления кривой к обычному.

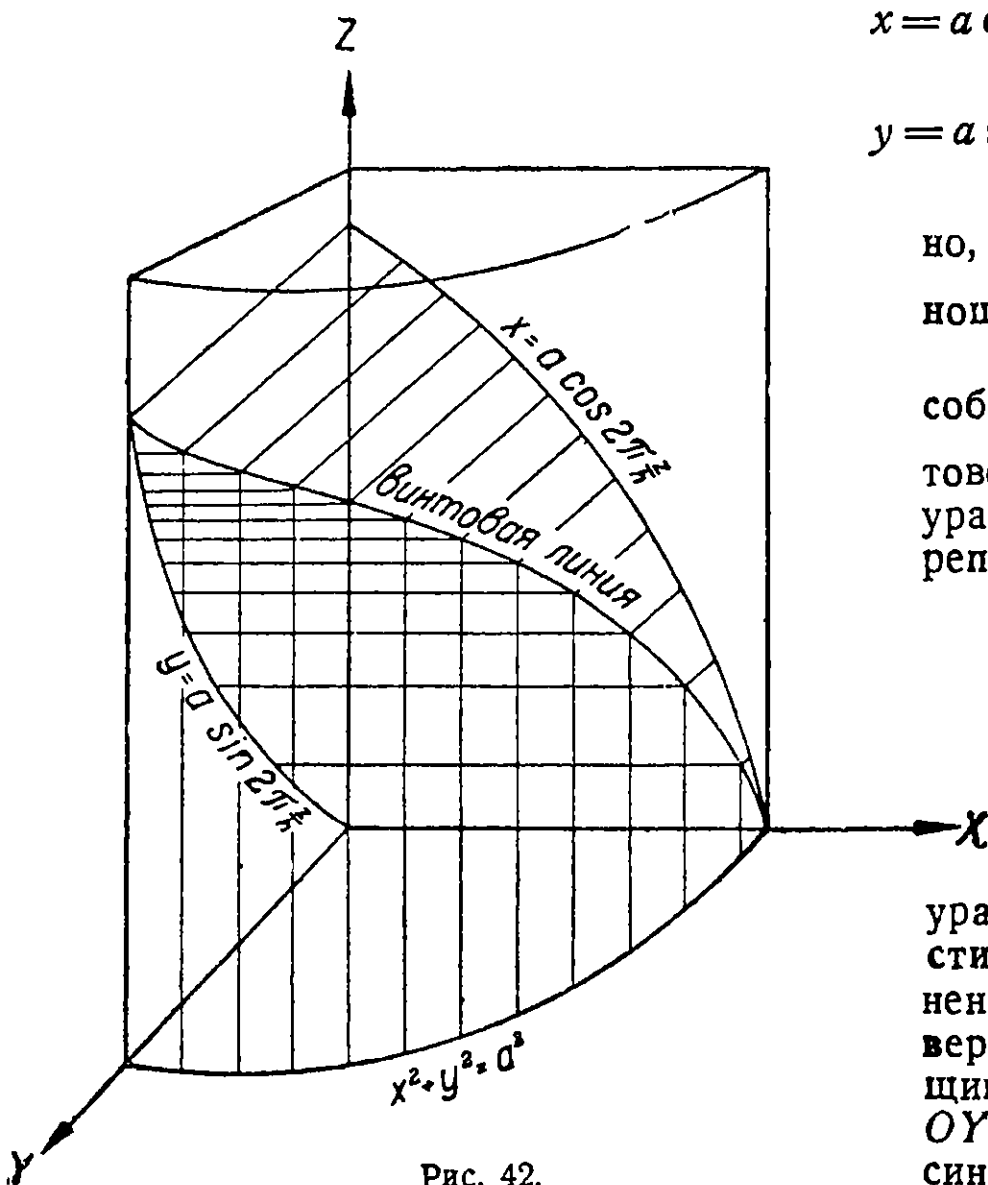


Рис. 42.

Примечание. Мы удовольствовались небольшим числом упражнений на траектории, так как в большинстве практических случаев приходится иметь дело со столь сложными кривыми (алгебраические кривые высокого порядка, трансцендентные кривые), что находить их уравнения исключением времени из уравнений движения или невозможно, или сложно; получаемое окончательное уравнение траектории чаще всего все равно геометрически мало изучено (пусть учащийся вспомнит, что в аналитической геометрии он изучил только кривые первого и второго порядка, а в дифференциальной геометрии небольшое число трансцендентных кривых). Не приходится совершенно иметь дело и с пространственными кривыми, так как они (кроме рассмотренной винтовой линии и нескольких сферических кривых) мало изучены и не представляют значительного интереса.

Что касается плоских кривых, являющихся траекториями различных плоских механизмов (о них речь во второй теме), то обычно предпочитают находить эти траектории чисто графическим путем, вычерчивая последовательно схемы механизма в различных его положениях. При этом имеются различные упрощающие способы (метод засечек, шаблоны). Обо всем этом читатель может узнать из отдела Прикладной механики, называемого Кинематикой механизмов.

§ 9. Пройденный путь. Уравнение пройденного пути. Связь с уравнениями движения.

В § 5 предыдущего задания мы изложили способ розыскания пройденного пути в случае прямолинейного движения. Легко обобщить указанный прием и на случай пространственного движения. Для этого заметим, что пройденный путь s (рис. 43) представляется как сумма дуг, пройденных нашей точкой, т. е. подобно предыдущему:

$$s = \int_{s_0}^{s_1} ds,$$

но

$$\boxed{ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

причем опять следует ставить перед радикалом знак $+$, чтобы путь возрастал.

Вспоминая заданные уравнения движения:

$$x = f_1(t)$$

$$y = f_2(t)$$

$$z = f_3(t),$$

найдем:

$$dx = f_1'(t)dt$$

$$dy = f_2'(t)dt$$

$$dz = f_3'(t)dt$$

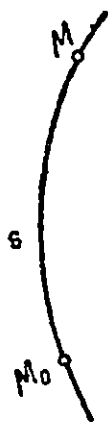


Рис. 43.

и следовательно:

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[f_1'(t)]^2 + [f_2'(t)]^2 + [f_3'(t)]^2} dt.$$

Таким образом пройденный путь определяется квадратурой. Следует отметить, что даже при самых простых уравнениях движения подинтегральная функция, содержа радикал, приводит к довольно сложным интегралам.

Поясним сказанное небольшим примером. Возьмем круговое движение (см. упражнение I, § 7).

Уравнения движения имеют вид:

$$x = a \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

где a — радиус круга, по которому движется точка, T — период полного ее обращения. Найдем путь, пройденный точкой за интервал времени $(0, t)$, где t — любой текущий момент. Имеем:

$$s = \int_0^t \sqrt{\left(a \frac{2\pi}{T}\right)^2 \left(\sin^2 \frac{2\pi}{T} t + \cos^2 \frac{2\pi}{T} t\right)} dt = \frac{2\pi a}{T} t.$$

Мы видим, что путь растет пропорционально времени, т. е. наше круговое движение *равномерно*. За промежуток времени $(0, T)$, т. е. за полный период обращения, будет пройден путь:

$$s = \frac{2\pi a}{T} \cdot T = 2\pi a,$$

т. е. полная окружность.

Здесь мы ограничимся только одним этим примером, так как вычисление пройденного пути сводится к более или менее сложным квадратурам, а это уже, собственно, предмет математики.

Пройденный путь, определенный только-что указанным путем как функция времени, дает *уравнение пройденного пути*:

$$s = \Phi(t).$$

Составляя график этой функции, мы получим (подобно § 5 предыдущего задания) график пройденного пути. Отметим, что уравнение пройденного пути, описывая некоторое криволинейное движение, равным счетом ничего не говорит о траектории, по которой происходит движение; поэтому в целом ряде вопросов (сравни последнее задание настоящей темы) уравнение пройденного пути (а следовательно и график его) совершенно недостаточны.

Как один из примеров когда график пройденного пути вполне выполняет свое назначение, отметим *железнодорожный график*.

Наблюдающему за движением поездов железной дороги чрезвычайно важно бывает знать, где в данный момент находится поезд, в каком месте скорый догоняет пассажирский, а пассажирский — товарный, необходимо урегулировать встречи поездов на станциях и т. д.

Разобраться в этих вопросах, пользуясь одним лишь расписанием поездов на дорогах с большим движением, конечно совершенно невозможно, между тем график дает чрезвычайно простой способ иметь всегда перед глазами полную картину движения. График поездов строится следующим образом. Нанесем например для участка Ленинград — Луга расстояния между станциями и Ленинградом в километрах (рис. 44), а время — в часах, начиная от 6 ч. вечера на оси абсцисс.

Расписание трех поездов (товарный, пассажирский и скорый), идущих в прямом и обратном направлениях за время от 6 ч. вечера

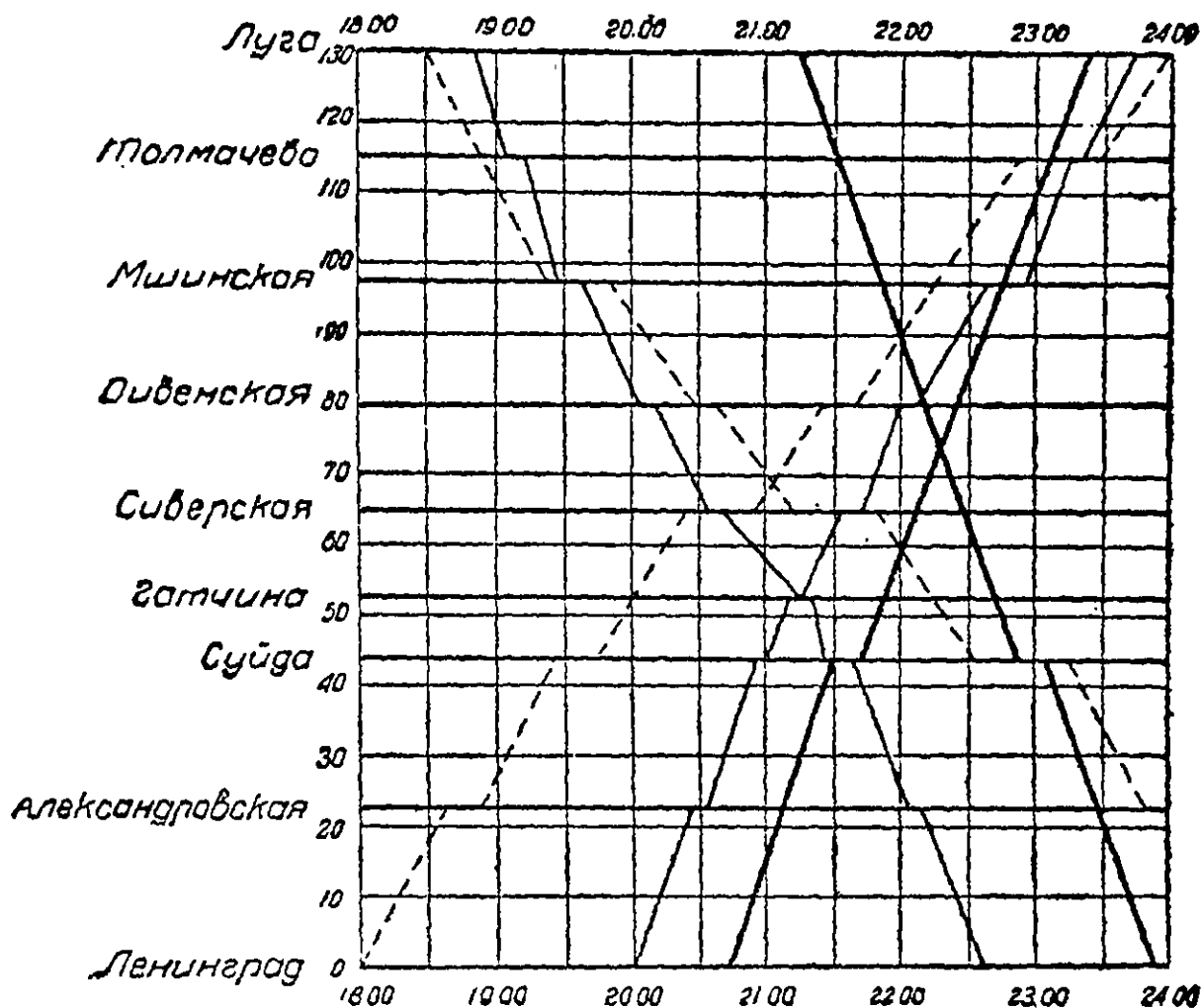


Рис. 44.

до 12 ч. ночи, дает ряд точек, определяющих положение поездов на станциях и время их прибытия и отбытия (пример табличного задания движения).

Соединяя пунктиром точки отбытия и прибытия на соседнюю станцию товарного поезда, мы получим приближенный (интерполируем закон изменения пути со временем на прогонах между станциями при помощи прямой линии, пренебрегая изменением скорости при разгоне и торможении) график движения товарного поезда. Аналогично получим графики пассажирского (простая линия) и скорого (жирная линия) поездов.

При одном взгляде на этот график, мы сразу получаем полное представление о движении за данный промежуток времени на данном участке пути. Пусть нам требуется узнать, где и когда встре-

чается скорый, вышедший из Ленинграда в 8 ч. 45 м., с пассажирским, вышедшим из Луги в 6 ч. 50 м.? Найдя пересечение соответствующих графиков, видим, что встреча происходит в Гатчине в 9 ч. 30 м., причем пассажирский стоит уже на станции, когда скорый приходит. Скорый обгоняет товарный, вышедший из Ленинграда в 6 ч., на ст. Толмачево в 11 ч. вечера. Товарный стоит на запасном пути с 10 ч. 45 м. до 11 ч. 30 м. В 11 ч. 20 м. на этой же станции его обгоняет и пассажирский, вышедший из Ленинграда в 8 ч. вечера, и т. д. Все это совершенно ясно видно на графике.

График движения ничего не говорит о траектории. С точки зрения пройденного пути, геометрический характер пути не играет никакой роли; мы далее увидим, что не все элементы движения могут быть найдены на графике движения, нужно еще знать форму траектории. В железнодорожном деле траекториями поездов служат рельсы, карты которых составлены.

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. Написать уравнения равномерного движения точки, описывающей окружность радиуса $r = 10$ см и делающей 2 об/мин., если в начальный момент она занимала положение $(0, -10)$.

2. Уравнения движения точки имеют вид:

$$\begin{aligned}x &= 5 - 3 \cos t, \\y &= 4 \sin t.\end{aligned}$$

Написать уравнение траектории, изобразить ее и указать на чертеже направление движения точки по ней.

3. Вычертить по точкам траекторию середины шатуна кривошипного механизма, для которого

$$e = \frac{a}{l} = \frac{1}{5}.$$

Зависит ли траектория от числа оборотов кривошипа в минуту?

4. Движение точки, описывающей фигуру Лиссажу, задается уравнениями:

$$\begin{aligned}x &= 2 \sin t, \\y &= 3 \cos 2t.\end{aligned}$$

Найти уравнение траектории, вычертить ее и указать направление движения точки по траектории в различные промежутки времени.

5. Паровоз совершает вертикальные колебания на рессорах амплитуды 3 см и периода 0,3 сек. Написать уравнение траектории центра тяжести, если проекция его на горизонтальные рельсы движется по закону:

$$x = 10 t,$$

где x выражено в метрах и t в сек.

6. Какую траекторию описывает груз, поднимаемый мостовым краном если:

1) движение крана вдоль мастерской происходит по закону:

$$x = 0,5 t;$$

2) движение тележки крана по рельсам крана происходит по закону:

$$y = 0,7 t;$$

3) цепь укорачивается пропорционально времени на $0,2$ м в каждую секунду; начальная длина цепи $l = 5$ м.

Задание 3-е.

Скорость и ускорение точки в прямолинейном движении.

Мы уже познакомились в предыдущих заданиях с целым рядом встречающихся на практике движений, научились составлять уравнения их, а также представлять их себе графически. Цель настоящего и трех последних заданий первой темы—углубить наши представления о движении, научить изучающего характеризовать движение некоторыми количественными признаками, позволяющими судить о движении с большей определенностью, чем раньше, дать возможные методы сравнения нескольких движений между собой, а также изучать изменения характера одного и то же движения с течением времени. Такими количественными чрезвычайно удобными и важными для практики характеристиками движения являются прежде всего *скорость* и *ускорение*.

Мы предпошлим введению этих понятий несколько замечаний об одном общем для всех естественных и экономических наук понятии—темпе развития или изменения одного объекта по сравнению с другим.

§ 10. Темп развития. Средний темп на некотором этапе и в данном пункте. Применение производной.

Подобно тому как понятие *движения* более широко на самом деле, чем мы его себе представляем в Механике (движение точки или тела), и включает в себе понятие *развития* вообще, т. е. является основным при изучении всякого явления природы, будь то явление биологическое, физическое или социальное, подобно этому и понятие *скорости* в Механике является частным случаем более общего, хорошо знакомого учащемуся представления—*быстроты* или *темпа развития* некоторого явления или процесса.

Как обычно характеризуется темп развития?

Обычно для этого производят сравнение или сопоставление развития исследуемого явления с каким-нибудь основным, общепринятым для сравнения. Таким явлением почти всегда принято считать *время*. С ростом или, как говорят, с течением времени сравнивают течение всех остальных процессов. Вращение земли (или небесного свода по отношению к земле) мы приняли за наиболее удобный объект для сравнения с ним всех остальных движений. С целью освобождения от затруднительных в повседневной работе астрономических наблюдений над движением небесного свода чело-

век создал особый механизм — часы, которые с большей или меньшей точностью воспроизводят это движение.

Желая например охарактеризовать продукцию какого-нибудь завода, мы обязательно скажем сперва число, характеризующее эту продукцию, а потом прибавим число, дающее интервал времени, в течение которого продукция вышла в свет; мы скажем: завод производит столько-то тысяч предметов в год или в месяц. Это отношение определит нам темп работы завода за год или месяц.

Желая охарактеризовать химическую реакцию, при которой образуется некоторое вещество, мы сопоставляем количество выделившегося вещества с протекшим временем и отношением этих двух величин выражаем скорость реакции.

В Кинематике, изучая движение, мы вводим быстроту (темп) роста пути, проходимого точкой с течением времени, эту величину мы называем *скоростью* точки, быстрота изменения угла поворота твердого тела со временем определяет *угловую скорость* тела, быстрота изменения скорости точки с течением времени, так сказать, „скорость скорости“ называется *ускорением* точки.

Но не всегда мы сравниваем изменение некоторой величины с течением времени, иногда приходится делать сравнение с изменением других каких-нибудь величин. Например быстрота изменения угла между касательной к кривой и осью OX с изменением длины дуги ее определяет *кривизну* кривой, изменение ординаты по сравнению с изменением абсциссы определяет *уклон* (крутизну) кривой и т. д.

Каким же образом количественно определить быстроту изменения одной величины, скажем x , с изменением другой, y ?

Предположим, что эти величины *сопоставлены* между собою так, что значению x_1 соответствует значение y_1 , значению x_2 соответствует y_2 и т. д. Тогда изменению x , например, $x_2 - x_1$, соответствует изменение y , равное $y_2 - y_1$. Отношение этих изменений

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

определяет *среднюю быстроту (темп) изменения величины y по сравнению с x в интервале (x_1, x_2)* . Поясним смысл слова „средняя быстрота“. Предположим, что между значениями $x: x_1$ и x_2 имеются еще промежуточные значения: x_1', x_2' ; соответствующие им значения y будут: y_1', y_2' . Тогда отношения:

$$\frac{y_1' - y_1}{x_1' - x_1}, \quad \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'}$$

дадут нам темпы изменения y с изменением x в интервалах (x_1', x_1) , (x_1', x_2') . Эти темпы, вообще говоря, окажутся неравными темпу в интервале (x_1, x_2) , заключающему в себе меньшие интервалы, но близкими к нему. Темп изменения в целом интервале (x_1, x_2) имеет некоторое среднее значение по сравнению с темпами в интервалах, являющихся его частями.

Поясним сказанное примером. Предположим, что мы записали

путь s , пройденный трамваем в 1, 2, 3 и т. д. минуты, и получили следующую таблицу:

t в минутах	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
s в километрах	0	0,3	0,7	1,2	1,7	2,2	2,8	3,3	3,9	4,4	4,9	5,5	6,0	6,5	7,1

Средняя скорость (темп изменения пути со временем) за первые 10 минут будет равна

$$\frac{4,9 - 0}{10 - 0} = 0,49 \text{ км/мин.}$$

Средние скорости за промежутки:

$$(0,2), (2,4), (4,6), \dots$$

будут: 0,35 км/мин, 0,50 км/мин, 0,55 км/мин, 0,55 км/мин и т. д. Величина 0,49 км/мин является средней величиной из только-что полученных.

Но понятие среднего темпа не всегда бывает достаточным с точки зрения практических расчетов. Иногда средний темп за большой промежуток времени слишком отличается от средних темпов изменения за отдельные малые интервалы времени, из которых состоит большой интервал. Так, в предыдущем примере средняя скорость за 10 мин. — 0,49 км/мин. значительно отличается от средней скорости за первые 2 минуты — 0,35 км/мин. Естественно, что в начале движения трамвай только-что начал разгоняться и имел малую скорость; этот факт в средней скорости за 10 мин. не нашел отражения, средняя скорость за 2 мин. все же отметила это явление, а если бы мы раздробили еще интервал (0,2 мин) на меньшие интервалы, то средние темпы, скажем за первую, вторую и т. д. секунду еще лучше бы описали явление пуска в ход трамвая. Имея возможность все дальше и дальше дробить интервалы, мы все ближе и ближе подошли бы к описанию характера движения на разных его этапах.

Мы можем высказать следующее предложение: „чем меньшие интервалы двух сравниваемых изменяющихся величин: Δx и Δy мы возьмем, тем более точно и определенно характеризует средний темп изменения y с изменением x , т. е. величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, характер сравнительного развития этих величин на этапе $(x, x + \Delta x)$ и $(y, y + \Delta y)$ “.

Отсюда ясно, что желая в точности определить темп сравнительного изменения двух каких-либо переменных величин в непосредственной близости от заданных, соответствующих друг другу значений x и y , мы должны вычислить величину

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

т. е. не что иное как производную одной переменной по другой:

$$\frac{dy}{dx}.$$

Таким образом например скорость движущейся точки в данный момент времени определится как производная пути по времени, т. е.

$$v = \frac{ds}{dt},$$

угловая скорость — как производная угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

ускорение — как производная скорости по времени, т. е.:

$$w = \frac{dv}{dt},$$

кривизна — как производная угла поворота касательной по длине дуги:

$$k = \frac{d\alpha}{ds}$$

и много других, о которых речь впереди.

В настоящем и последующих заданиях мы разовьем все эти представления, дополнив их некоторыми деталями, в основном же общее представление о темпе развития поможет нам в дальнейшем разобраться в ряде кинематических и динамических представлений.

§ II. Скорость в прямолинейном движении. Определение скорости по уравнению пройденного пути и по уравнению движения. График скорости.

В предыдущем параграфе было выяснено, что скорость движения определяется как производная пути по времени, т. е. $v = \frac{ds}{dt}$. Если нам задано уравнение пройденного пути:

$$s = \Phi(t),$$

то взяв первую производную от этой функции по времени, мы найдем скорость:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

Вспоминая, что было сказано в § 5 задания 1, видим, что v всегда положительно. Это и естественно, так как v есть величина скорости и знак $+$ или $-$ здесь не имел бы никакого смысла.

Величина v измеряется в единицах длины, деленных на единицы времени, т. е. в следующих, например, единицах:

$$\frac{м}{сек}; \frac{км}{час}; \frac{см}{мин}.$$

Приведем сравнительную таблицу часто встречающихся скоростей (см. табл. 1).

Покажем теперь, как определять скорость по заданному уравнению движения:

$$x = f(t).$$

Рассмотрим быстроту изменения абсциссы x с течением времени, т. е. величину:

$$\frac{dx}{dt} = f'(t).$$

Эта величина может быть и положительной и отрицательной, так как при движении точки x то возрастает, то убывает, но по абсолютной величине, как мы уже знаем, dx и ds равны, таким образом

$$\left| \frac{dx}{dt} \right| = \frac{|dx|}{dt} = \frac{ds}{dt} = v,$$

т. е. $\frac{dx}{dt}$ и есть скорость v , только со знаком $+$ либо $-$. Если движение происходит в направлении возрастания x , то $\frac{dx}{dt} > 0$, если

в направлении убывания x , то $\frac{dx}{dt} < 0$. Таким образом $\frac{dx}{dt}$ не только дает абсолютную величину скорости, но и говорит о направлении движения по оси x -ов. Мы введем обозначение:

$$\frac{dx}{dt} = v_x,$$

напоминающее проекцию вектора на ось; аналогия в следующем задании будет оправдана.

Итак

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f'(t),$$

$$|v_x| = v = \frac{ds}{dt} = \Phi'(t).$$

Откладывая v или v_x на осях ординат, а время t — на оси абсцисс, получим графики скорости. Проиллюстрируем изложенное в настоящем параграфе на ряде примеров.

Т а б л и ц а 1.

Название	Скорость в м/сек	Примечание
Пешеход	$1,7 \times 10^0$	Дана средняя скорость.
Пловец	$1,7 \times 10^0$	Рекордная СССР.
Бегун	1×10^1	СССР.
Конькобежец	$1,1 \times 10^1$	Дана средняя скорость.
Велосипедист	$1,6 \times 10^1$	Средняя скорость.
Миноносец	$1,7 \times 10^1$	" "
Цепелин (старый)	$2,5 \times 10^1$	" "
Почтовый голубь	$3,0 \times 10^1$	" "
Аэроплан	$3,0 \times 10^1$	Посадочная скорость.
"	$4,5 \times 10^1$	Средняя.
"	$1,5 \times 10^2$	Рекордная.
Электрич. поезд	$5,9 \times 10^1$	Средняя скорость.
Автомобиль	$6,3 \times 10^1$	—
Звук в воздухе	$3,4 \times 10^2$	—
Снаряд из даль- нобойного ору- дия	$2,6 \times 10^3$	—
Свет	$3,0 \times 10^8$	—

Примеры и упражнения.

1. Скорость точки, совершающей гармоническое колебательное движение. Уравнение движения точки будет:

$$x = a \sin(\omega t + \alpha).$$

Взяв производную по времени, найдем:

$$v_x = \dot{x} = a \omega \cos(\omega t + \alpha).^1)$$

Мы видим, что v_x в свою очередь есть гармоническая функция времени, причем она сдвинута по фазе относительно графика x на $\frac{\pi}{2}$. Вычертим на одном и том же чертеже графики x и v_x , полагая:

$$a = 10 \text{ см}; \quad \omega = 2 \text{ 1/сек.}; \quad \alpha = 0,5.$$

Заметим кстати, что масштабы x и v_x совершенно различны и произвольны, так что хотя в уравнениях:

$$\begin{aligned} x &= 10 \sin(2t + 0,5) \\ v_x &= 20 \cos(2t + 0,5), \end{aligned}$$

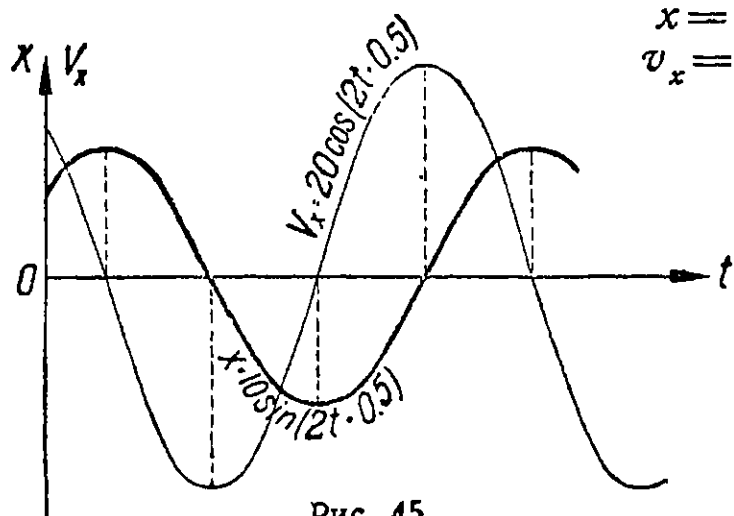


Рис. 45.

амплитуда второго в два раза больше, все же числа 10 и 20, выраженные в разных единицах, именно см и см/сек графически могут быть представлены произвольными отрезками.

График показан на рис. 45. Из графика сразу на пример, видно, что (см. вертикальные пунктиры) в центре

колебания ($x=0$) v_x имеет максимальное по абсолютной величине значение, в крайних положениях ($x=\pm 10$) v_x обращается в нуль — точка на мгновение останавливается и меняет направление движения. Имея такой график, мы в любой момент t сразу определяем и положение точки x и скорость ее v_x по величине и направлению.

2. График скорости ползуна кривошипного механизма. Возьмем приближенное уравнение движения ползуна (см. упражнение 4 § 3 первого задания):

$$x = 0,99 + 0,2 \cos 10t + 0,01 \cos 20t$$

и продифференцируем по времени. Найдем:

$$v_x = -2 \sin 10t - 0,2 \sin 20t.$$

Учащийся должен обязательно взять лист миллиметровой бумаги и построить оба графика.

¹⁾ Точкой над буквой мы обозначаем производную по времени; так, $\dot{x}$ означает $\frac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$, $\dot{s} = \frac{ds}{dt}$ и т. д.

По имеющемуся графику легко сразу описать движение ползуна и определить его скорость при любом положении.

3. Затухающее колебательное движение. Рассмотрим гармоническое колебание точки в некоторой среде, которая тормозит ее движение, заставляя колебания затухать. В Динамике будет доказано, что уравнение движения имеет вид:

$$x = ae^{-pt} \sin(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

где a , p и ω — положительные постоянные, p — коэффициент или фактор затухания, a и ω , как и раньше, амплитуда и частота колебания, φ — начальная фаза.

Исследуем рассматриваемое движение. Найдем его скорость:

$$v_x = \dot{x} = ae^{-pt} [\omega \cos(\omega t + \varphi) - p \sin(\omega t + \varphi)]. \quad (2)$$

Если приравняем скорость нулю, то найдем моменты времени, соответствующие крайним положениям точки; имеем уравнение

$$\omega \cos(\omega t + \varphi) - p \sin(\omega t + \varphi) = 0;$$

оно может быть переписано так:

$$\operatorname{tg}(\omega t + \varphi) = \frac{\omega}{p}, \quad (3)$$

отсюда

$$\omega t + \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{p} + n\pi, \quad (4)$$

где предполагается, что для $\operatorname{arctg} \frac{\omega}{p}$ взято его наименьшее положительное значение и $n = 0, 1, 2, \dots$. Обозначая n -ый корень ур-ния (4) через t_n и замечая, что

$$\omega t_0 + \varphi = \operatorname{arctg} \frac{\omega}{p}, \quad (5)$$

будем иметь:

$$t_n = t_0 + n \cdot \frac{\pi}{\omega}. \quad (6)$$

Мы видим, что моменты времени, для которых скорость обращается в нуль, т. е. моменты крайних положений точки, образуют арифметическую прогрессию с разностью $\frac{\pi}{\omega}$.

Найдем закон убывания амплитуд. Для этого определим абсциссы крайних положений точки. Подставим в ур-ние (1) значения t из ур-ния (6), будем иметь:

$$\begin{aligned} x_n &= ae^{-pt_n} \sin(\omega t_n + \varphi) = ae^{-pt_0 - pn \frac{\pi}{\omega}} \sin(\omega t_0 + \varphi + n\pi) = \\ &= (-1)^n ae^{-pt_0} \sin(\omega t_0 + \varphi) e^{-pn \frac{\pi}{\omega}} = (-1)^n x_0 e^{-pn \frac{\pi}{\omega}}. \end{aligned}$$

Замечая, что амплитуда a_n равна $|x_n|$, окончательно найдем:

$$a_n = a_0 e^{-pn \frac{\pi}{\omega}}. \quad (7)$$

Таким образом мы видим, что амплитуды рассматриваемого колебания убывают в геометрической прогрессии с знаменателем $e^{-p\frac{\pi}{\omega}}$; отношение двух последовательных амплитуд равно:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = e^{-p\frac{\pi}{\omega}}. \quad (8)$$

Эта величина меньше единицы, причем чем больше величина p , тем скорее происходит затухание амплитуд, поэтому p и называется фактором затухания.

Вместо фактора затухания обычно на практике пользуются величиной натурального логарифма отношения двух последовательных амплитуд:

$$\delta = \lg \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{\pi}{\omega} p = p \cdot \frac{T}{2}. \quad (9)$$

Эта величина называется *логарифмическим декрементом затухающего колебания*.

Мы видим, что логарифмический декремент пропорционален фактору затухания.

Вычертим график затухающего колебательного движения:

$$x = 10e^{-0,7t} \sin 3,927t.$$

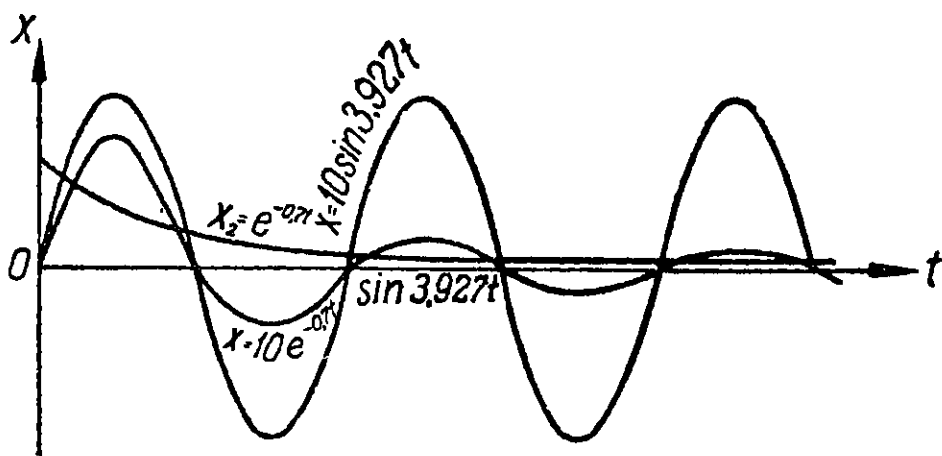


Рис. 46.

На рис. 46 отдельно вычерчены кривые $x_1 = 10 \sin 3,927t$,

$$x_2 = e^{-0,7t}, \quad x = x_1 x_2 = 10e^{-0,7t} \sin 3,927t.$$

Период этого движения:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{6,283}{3,927} \cong 1,6 \text{ сек.}$$

Фактор затухания и логарифмический декремент:

$$p = 0,7; \quad \delta = 0,7 \cdot \frac{1,6}{2} = 0,56.$$

Дадим еще численную таблицу значений x в разные моменты времени, на основании которых построен график.

Т а б л и ц а 2.

t в секундах	$x_1 = 10 \sin 3,927t$	$x_2 = e^{-0,7t}$	$x = 10e^{-0,7t} \sin 3,927t$
0	0	1,0	0
0,2	7,07	0,869	6,14
0,4	10,0	0,756	7,56
0,6	7,07	0,657	4,65
0,8	0	0,571	0
1,0	— 7,07	0,497	— 3,51
1,2	— 10,0	0,432	— 4,32
1,4	— 7,07	0,375	— 2,65
1,6	0	0,326	0
2,0	10,0	0,247	2,47
2,4	0	0,186	0
2,8	— 10,0	0,141	— 1,41
3,2	0	0,106	0
3,6	10,0	0,080	0,8
4,0	0	0,061	0
4,4	— 10,0	0,046	— 0,46
4,8	0	0,035	0
5,2	10,0	0,026	0,26
5,6	0	0,020	0
6,0	— 10,0	0,015	— 0,15
6,4	0	0,011	0

Из последнего столбца этой таблицы видно, насколько быстро убывают амплитуды колебания x ; например, при $t=6$ сек. амплитуда примерно в 40 раз меньше, чем при $t=0,2$ сек. Скорость только-что рассмотренного колебания будет очевидно равна

$$v_x = \dot{x} = e^{-0,7t} (39,27 \cos 3,927t - 7 \sin 3,927t).$$

Полагая

$$39,27 = A \sin \alpha, \quad 7 = A \cos \alpha,$$

найдем:

$$A = \sqrt{39,27^2 + 7^2} = 39,9,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 5,61 = 79^{\circ} 53' 30'' \cong 1,39,$$

и

$$v_x = -39,9e^{-0,7t} \sin (3,927t - 1,39);$$

мы видим, что скорость убывает с убыванием амплитуды, причем фактор затухания скорости и логарифмический декремент ее тот же, что и у абсциссы.

Предлагаем учащемуся в виде упражнения вычертить график v_x . Значения функции $e^{-0,7t}$ можно взять из таблицы 2.

4. Резонансное колебание. Исследуем еще резонансное колебание

$$x = at \sin \omega t; \tag{1}$$

мы получим это уравнение колебания точки в Динамике, а сейчас проведем его кинематическое исследование.

Определим скорость v_x :

$$v_x = \dot{x} = a (\sin \omega t + \omega t \cos \omega t). \quad (2)$$

Найдем, в какие моменты времени скорость обращается в нуль. Эти моменты будут соответствовать крайним положениям колеблющейся точки.

Уравнение

$$\sin \omega t + \omega t \cos \omega t = 0 \quad (3)$$

после замены ωt на новую переменную u , переходит в такое:

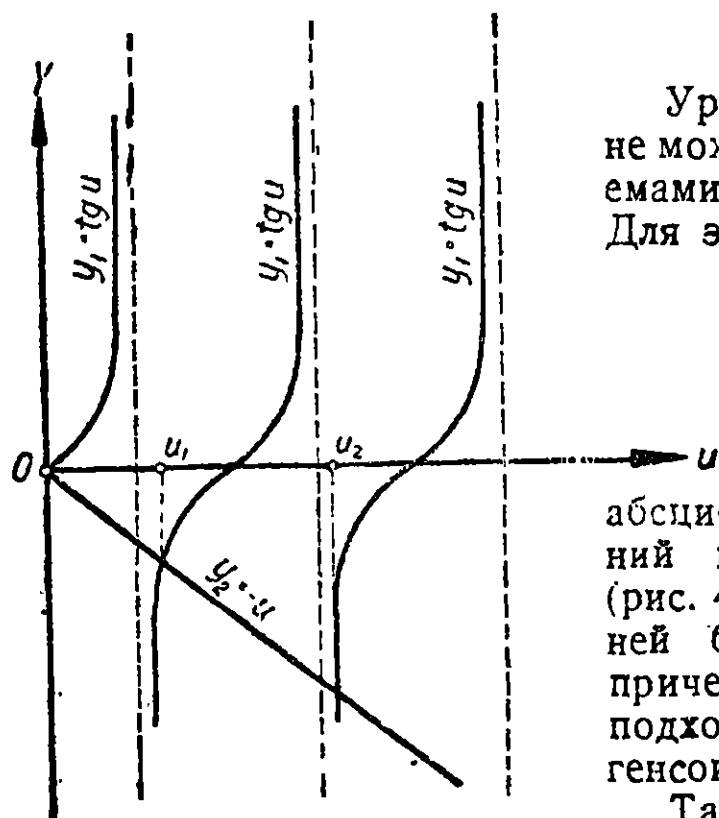
$$\operatorname{tg} u + u = 0. \quad (4)$$

Уравнение это трансцендентное и не может быть решено обычными приемами. Мы его решим графически. Для этого вычертим тангенсоиду

$$y_1 = \operatorname{tg} u$$

и прямую линию

$$y_2 = -u;$$



абсциссы точек пересечения этих линий и дадут искомые значения u (рис. 47). Из рисунка видно, что корней будет бесчисленное множество, причем корни все ближе и ближе подходят к абсциссам асимптот тангенсоиды.

Таким образом можно написать:

$$u_n = \frac{2n-1}{2} \pi + \varepsilon_n, \quad (5)$$

где $\varepsilon_n \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$. Ясно, что $u_0 = 0$. Переходя вновь от u к t , будем иметь:

$$t_n = \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{\omega} + \frac{n}{\omega}. \quad (6)$$

Из ур-ния (6) видно, что интервалы времени между двумя ближайшими крайними положениями точки неодинаковы. Действительно, выражение

$$t_n - t_{n-1} = \frac{\pi}{\omega} + \frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}{\omega},$$

при разных n будет иметь разное значение, но при больших n разность

$$\frac{\varepsilon_n - \varepsilon_{n-1}}{\omega}$$

очень мала, так что движение будет приближаться к периодическому.

Исследуем закон изменения амплитуд. Подставляя значение t_n из ур-ния (6) в (1), получим:

$$x_n = at_n \sin \omega t_n.$$

Замечая, что t_n мало отличается от $\frac{2n-1}{2} \cdot \frac{\pi}{\omega}$, заменим приближенно:

$$\sin \omega t_n \cong \sin \frac{2n-1}{2} \pi = (-1)^{n-1},$$

тогда получим:

$$x_n \cong (-1)^{n-1} \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{\omega} a$$

или

$$a_n \cong a \frac{2n-1}{2} \frac{\pi}{\omega}.$$

Последняя формула показывает, что последовательные амплитуды растут приблизительно в арифметической прогрессии с разностью

$$a_n - a_{n-1} = a \frac{\pi}{\omega}.$$

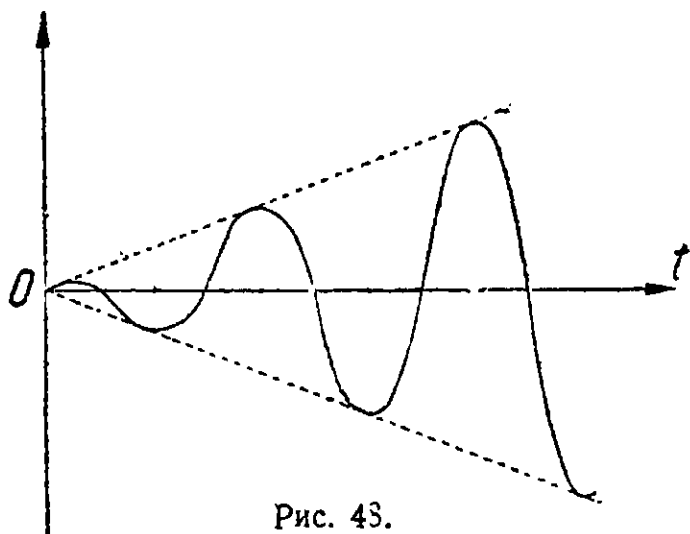


Рис. 48.

График движения показан на рис. 48.

§ 12. Определение уравнений движения и пройденного пути по заданному закону изменения v_x или v . Связь между графиками движения, пройденного пути и скорости.

Зная уравнение движения или уравнение пройденного пути, мы простым дифференцированием находим v_x и v . Может встретиться и обратная задача: определение пройденного пути или абсциссы точки в данный момент времени по заданной зависимости v_x или v от времени.

Так, предположим, что нам задан закон изменения скорости

$$v_x = 10 \sin 2\pi t$$

и требуется найти уравнение движения. Имеем:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 10 \sin 2\pi t$$

$$dx = 10 \sin 2\pi t dt$$

$$x = \int_0^t 10 \sin 2\pi t dt + C = \frac{-10}{2\pi} \cos 2\pi t + C.$$

Произвольная постоянная интегрирования остается неопределенной до тех пор, пока нам не будет дано дополнительных сведений о положении точки в какой-нибудь момент времени; например, если будет сказано, что при $t=0$ точка была в начале координат, т. е. $x=0$, то постоянная C определится из равенства

$$0 = -\frac{10}{2\pi} + C;$$

отсюда

$$C = \frac{5}{\pi}$$

и окончательно уравнение движения имеет вид:

$$x = \frac{5}{\pi} (1 - \cos 2\pi t).$$

Точно так же определится и пройденный путь по уравнению для v .

Скажем несколько слов о графическом решении задачи перехода от уравнения движения или пройденного пути к уравнению v_x или v .

Если нам задан график движения, то $v_x = \frac{dx}{dt}$ по графику легко может быть найдено как тангенс угла α наклона касательной к оси времен.

Точно так же, имея график пройденного пути, проведем в данной точке касательную, тогда тангенс угла наклона касательной к оси времен даст величину скорости v .

Проведение касательной производится или на-глаз, или следующим простым приближенным приемом. Желая построить касательную в точке M (рис. 49), отложим от нее вперед и назад по равным малым дугам MM'' и MM' (сделать это можно засечками циркуля, рассматривая дуги в виду малости их как прямые); затем проведем секущие $T'T'$ и $T''T''$.

Биссектриса угла между секущими даст нужное направление касательной с тем большей степенью приближения, чем меньше дуги MM' и MM'' или чем меньше кривизна кривой.

Желая, наоборот, по графику скорости v найти s за время (t_0, t_1) , мы должны будем взять графически интеграл

$$s = \int_{t_0}^{t_1} v dt = \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt.$$

Интеграл этот, как известно учащемуся, представится площадью, ограниченной графиком v , двумя ординатами, проведенными из концов абсцисс t_0 и t_1 , и наконец осью времен (рис. 50).

Измерение этой площади может быть произведено или подсчетом квадратиков по миллиметровке, или особым прибором, служащим для определения площадей, — *планиметром*.

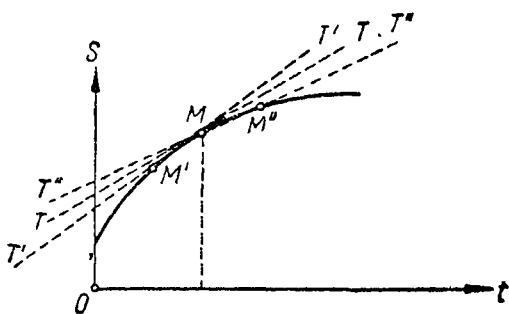


Рис. 49.

Существуют приближенные графические методы вычерчивания позаданной кривой соответствующей ей интегральной. Мы изложим один из них, отличающийся крайней простотой и дающий на практике достаточную точность.

Заметим прежде всего, что разбив всю площадь, подлежащую измерению, на узкие полоски при помощи равноотстоящих ординат (рис. 51) в точках A_1, A_2 и т. д., мы представим искомую площадь как сумму площадей: $A_1C_1A_2$, $A_2C_2A_3$ и т. д. Каждую из этих площадей можно приближенно считать равной произведению соответствующего отрезка оси времен на среднюю линию, показанную на рисунке пунктирами.

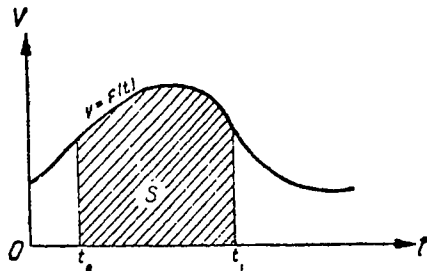


Рис. 50.

Отложим по оси времен отрезки: $\overline{B_1E_1}$, $\overline{B_2E_2}$, $\overline{B_3E_3}$..., равные единице по масштабу времен, и соединим точки E_1, E_2 ... соответственно с точками C_1, C_2, C_3 ... Затем из точки A_1 проведем отрезок $\overline{A_1D_1} \parallel \overline{E_1C_1}$, из точки D_1 — отрезок $\overline{D_1D_2} \parallel \overline{E_2C_2}$ и т. д. Лома-

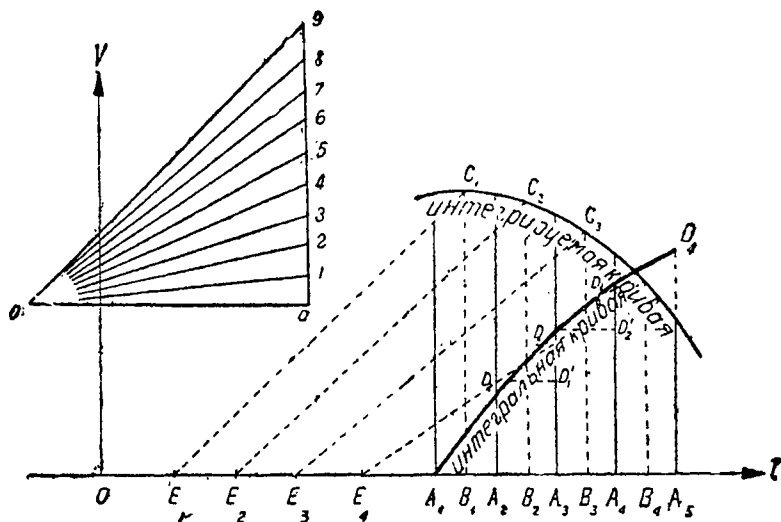


Рис. 51.

ная линия $A_1D_1D_2$... и представит приближенно интегральную кривую. В самом деле,

$$\overline{A_2D_1} : \overline{A_1A_2} = \widehat{\text{tg}} A_2A_1D_1 = \widehat{\text{tg}} B_1E_1C_1 = \overline{C_1B_1},$$

откуда

$$\overline{A_2D_1} = \overline{A_1A_2} \cdot \overline{C_1B_1} = \text{пл. } A_1C_1A_2.$$

Аналогично покажем, что

$$\overline{A_3 D_2} = \overline{A_3 D'_1} + \overline{D'_1 D_2} = \overline{A_2 D_1} + \overline{D'_1 D_2} = \text{пл. } A_1 C_1 A_2 + \text{пл. } A_2 C_2 A_3$$

и т. д. Чем меньше взяты интервалы $A_1 A_2, A_2 A_3 \dots$, тем точнее получится интегральная кривая. Имея интегральную кривую, можно в любой момент t по ординате этой кривой судить о пройденном пути.

Вместо того, чтобы откладывать отрезки $\overline{B_1 E_1}, \overline{B_2 E_2}$ и т. д. и затемнять тем самым график, иногда строят в стороне диаграмму, состоящую из единицы абсцисс $\overline{Oa}$, перпендикуляра из точки a , на нем шкалы и соответственно проведенных лучей. Откладывая на этой шкале циркулем отрезки, равные средним ординатам интегрируемой кривой, по лучам, проходящим через верхние концы этих отрезков, найдем направление интегральной кривой.

§ 13. Ускорение в прямолинейном движении. Определение ускорения по уравнению пройденного пути и по уравнению движения.

Как уже упоминалось в § 10, ускорение определяет темп изменения скорости движущейся точки с течением времени. Следовательно ускорение в *прямолинейном* движении определяется как производная от величины скорости по времени

$$w = \frac{dv}{dt}.$$

Ускорение измеряется в единицах скорости, разделенных на единицы времени, а поскольку единицы скорости получаются делением единиц длины на единицы времени, то единицы ускорения будут иметь измерение:

$$\frac{\text{единицы длины}}{(\text{единицы времени})^2}$$

Так например ускорение может измеряться в

$$\frac{м}{сек^2}, \quad \frac{км}{час^2}, \quad \frac{см}{мин^2} \text{ и т. д.}$$

Чтобы дать понятие о величине встречающихся ускорений укажем несколько чисел (таблица 3).

Численные значения ускорений при криволинейных движениях будут даны особо.

Введенная нами величина w , в отличие от v , уже не будет обязательно положительной величиной. Если движение ускоряется, т. е. скорость растет со временем, то $w > 0$, если движение замедляется, то $w < 0$.

Название движения	Ускорение в $\frac{м}{сек^2}$	Примечание
Ускорение трогającegoся поезда .	$1,1 \times 10^{-1}$	Среднее Максимально допустимое
Торможение трамвая	$2,5 \times 10^0$	
Ускорение силы тяжести:		
на луне	$1,6 \times 10^0$	
на земле	$9,8 \times 10^0$	
на солнце	$2,7 \times 10^1$	
Ускорение пули в стволе ружья .	$1,0 \times 10^5$	

По заданному уравнению пройденного пути

$$s = \Phi(t),$$

ускорение легко находится так:

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \ddot{s}.$$

Если же нам задано уравнение движения

$$x = f(t),$$

то взяв сначала первую производную от x по t , мы определим v_x , а уже затем, взяв производную от v_x по t , найдем величину, которую обозначим через w_x :

$$w_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x},$$

причем абсолютные величины w_x и w равны между собой. Действительно

$$|w_x| = \left| \frac{dv_x}{dt} \right| = \left| \frac{dv}{dt} \right| = |w|.$$

Обсудим теперь знак w_x .

Если точка движется в положительном направлении оси, то $v_x > 0$, причем в случае ускоряющегося движения: $w_x > 0$, замедляющегося $w_x < 0$.

Если точка движется в отрицательном направлении оси OX , $v_x < 0$, то в случае ускоряющегося движения, v_x отрицательная и растущая по модулю функция, т. е. убывающая функция времени, и

$w_x = \frac{dv_x}{dt} < 0$, если же движение замедленное, то v_x , как убывающая по модулю отрицательная функция, является растущей функцией, и следовательно $w_x > 0$.

Итак, можно резюмировать:

$$\begin{aligned} w_x > 0 & \begin{cases} \text{ускоренное движение по направлению оси } OX; \\ \text{замедленное движение против направления оси } OX; \end{cases} \\ w_x < 0 & \begin{cases} \text{замедленное движение по направлению оси } OX; \\ \text{ускоренное движение против направления оси } OX. \end{cases} \end{aligned}$$

В следующем задании будет показано, что w_x является проекцией вектора ускорения, и тогда это правило знаков станет более ясным.

Откладывая w или w_x по оси ординат, а время по оси абсцисс, мы можем вычертить график ускорения.

Между графиком ускорения и графиком скорости очевидно та же связь, как между графиком скорости и графиком пути или движения. Точно так же, как график пути являлся интегральной кривой для графика скорости, график скорости будет служить интегральной кривой для графика ускорений и, наоборот, график ускорений будет дифференциальной кривой для графика скорости. Мы удовольствуемся этими простейшими теоретическими соображениями и перенесем остальное на упражнения.

Примеры и упражнения.

1. **Равнопеременное движение.** Так называется прямолинейное движение с постоянным по величине ускорением $\pm a$; знак $+$ соответствует ускоренному движению, знак $-$ соответствует замедленному движению. Найдём общие формулы скорости и пройденного пути в равнопеременном движении. Элементарный вывод этих формул изучающему вероятно известен из курса физики, мы же дадим здесь несколько другой вывод.

Из равенства:

$$\frac{dv}{dt} = w, \quad (1)$$

и условия постоянства w , следует:

$$v = wt + c. \quad (2)$$

Полагая, что в начальный момент $t=0$, скорость точки была равна v_0 , найдём:

$$v_0 = w \cdot 0 + c, \text{ т. е. } c = v_0.$$

Отсюда следует формула скорости:

$$v = v_0 + wt.$$

В случае ускоренного движения $w = a$:

$$\boxed{v = v_0 + at} \quad (3)$$

В случае *замедленного* движения $w = -a$:

$$\boxed{v = v_0 - at.} \quad (4)$$

Обращаясь к определению пройденного пути, напомним:

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + wt, \quad (5)$$

откуда интегрированием найдем:

$$s = v_0 t + \frac{wt^2}{2} + c_1. \quad (6)$$

Для определения постоянной интегрирования, положим, что в начальный момент $t=0$, $s=s_0$, т. е. что уже был пройден некоторый путь s_0 (обычно принимается $s_0=0$). Тогда:

$$s_0 = v_0 \cdot 0 + w \frac{0}{2} + c_1, \text{ т. е. } c_1 = s_0,$$

и следовательно

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{wt^2}{2}.$$

Таким образом в случае *ускоренного* движения:

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}} \quad (7)$$

и в случае *замедленного*:

$$\boxed{s = s_0 + v_0 t - \frac{at^2}{2}.} \quad (8)$$

Формулы (3), (4), (7) и (8) являются основными в равнопеременном движении и имеют значение при многих расчетах. Отметим еще некоторые соотношения, являющиеся следствием их. Решим ур-ние (3) относительно t и подставим в ур-ние (7), тогда будем иметь для ускоренного движения (опуская s_0);

$$\boxed{s = \frac{v_0^2 + v^2}{2a},} \quad (9)$$

точно так же из (4) и (8) для *замедленного* движения:

$$\boxed{s = \frac{v_0^2 - v^2}{2a}.} \quad (10)$$

Последние две формулы, связывающие только путь и скорость, особенно удобны для расчетов. Мы проделаем сейчас несколько численных примеров на равнопеременные движения, отнеся другие на контрольные примеры.

а) Падение тяжелой точки в пустоте. Если мы будем пренебрегать сопротивлением среды, например, воздуха, в котором происходит падение тела, то ускорение его, обозначаемое всегда буквой g , равно $9,81 \text{ м/сек}^2$. Определим скорость тела, упавшего с высоты h , без начальной скорости. Для этого надо в формулу (9) подставить: $s=h$, $v_0=0$, $a=g$, тогда найдем известную формулу Торичелли:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Такова же будет и скорость водяной струи, падающей с горизонтального водослива, находящегося на высоте h .

Дадим количественное представление о скоростях падения тела с разных высот:

Т а б л и ц а 4.

$h \text{ в м}$	1	2	5	10	20	50	100	200	500	700	1 000
$v \text{ в м/сек.}$	4,4	6,3	9,9	14,0	19,8	31,3	44,3	62,6	99,0	117,2	140,0

Наоборот, зная v , можем найти высоту, с которой тело упало, по формуле

$$h = \frac{v^2}{2g}.$$

б) Восходящее движение тяжелого тела в пустоте. Движение очевидно будет равномерно-замедленным. Найдем высоту, на которую подыметс я тело, имеющее начальную скорость v_0 . Заметим, что в тот момент, когда тело займет наивысшее положение, скорость v обратится в нуль, так что подставляя в равенство (10): $s=h$, $v=0$, $a=g$, вновь найдем:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Мы получили интересный результат: высота, на которую поднимется тяжелое тело, брошенное в пустоте с вертикальной начальной скоростью v_0 , равна той высоте, упав с которой, тело приобретает ту же скорость.

в) Ускорение торможения трамвая. Определим ускорение торможения трамвая, если известно, что имея скорость 36 км/час , он должен затормозиться на расстоянии 30 м .

Предполагаем, что движение равномерно-замедленное. Для решения задачи применим опять формулу (10); положив $s=30$ м, $v=0$,

$$v_0 = 36 \text{ км/час} = 36 \frac{1000}{3600} = 10 \text{ м/сек},$$

найдем:

$$a = \frac{v_0^2}{2s} = 1,67 \text{ м/сек}^2.$$

Произведем еще такой расчет. Принимая максимальное ускорение торможения трамвая равным $2,5 \text{ м/сек}^2$, определим, насколько можно уменьшить скорость трамвая, идущего со скоростью 30 км/час , на пути, равном 3 м? Пользуясь равенством (10), получим:

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2as} = \sqrt{8,3^2 - 2 \cdot 2,5 \cdot 3} = 7,3 \text{ м/сек} = 26,3 \text{ км/час},$$

т. е. уменьшение скорости будет всего только на $3,7 \text{ км/час}$.

г) Вылет пули из дула ружья. Зная, что пуля при своем движении в дуле имеет ускорение $a = 1,0 \times 10^5 \text{ м/сек}^2$, и что длина дула равна 1 м, определим скорость пули в момент вылета, а также время движения ее в дуле. На первый вопрос очень просто ответить, подставляя в формулу (9):

$$v_0 = 0, \quad s = 1 \text{ м}, \quad a = 1,0 \times 10^5 \text{ м/сек}^2;$$

будем иметь:

$$v = \sqrt{2as} = 450 \text{ м/сек}.$$

Время прохождения пули внутри дула определится из равенства (3), куда надо подставить: $v = 450 \text{ м/сек}$, $v_0 = 0$, $a = 1,0 \times 10^5 \text{ м/сек}^2$; получим:

$$t = \frac{v}{a} = \frac{450}{10^5} = 0,0045 \text{ сек}.$$

2. Эксцентрики с прямолинейно-движущимся стержнем. Для осуществления некоторых периодических прямолинейных движений в машинах применяют эксцентрики. Схема их действия такова. Кулак K , имеющий определенный профиль Γ (рис. 52), вращается вокруг оси O , по его краю скользит стержень A , соприкасающийся с профилем кулака в точке C (обычно в точке C помещают ролик, катящийся по профилю) и тем или иным способом прижимающийся к нему. Зная, что кулак вращается равномерно, т. е. что угол θ изменяется пропорционально времени:

$$\theta = \omega t, \quad (1)$$

где ω — угловая скорость кулака, выраженная в радианах в секунду, нужно так определить вид профиля или его уравнение в полярных координатах:

$$r = f(\theta), \quad (2)$$

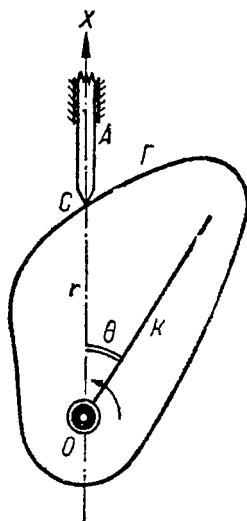


Рис. 52.

чтобы точка C стержня (а следовательно и весь стержень) двигалась согласно заданному наперед уравнению

$$x = F(t), \quad (3)$$

или заданному закону изменения скорости его, причем очевидно $r = x$.

Аналитически задача решается крайне просто. Из ур-ния (1) находим t и подставляем в ур-ние (3); тогда

$$x = r = F\left(\frac{\theta}{\omega}\right) = f(\theta),$$

и вид профиля определяется сразу.

Однако обыкновенно задается не уравнение движения (3), а закон изменения скорости или ускорения стержня и накладываются определенные требования на ускорение; в таких случаях задачу по преимуществу решают графически. Мы разберем сейчас несколько случаев определения профилей эксцентриков — это нам даст интересный материал для упражнения на скорость и ускорение прямолинейного движения.

а) Сердцевидный эксцентрик. Предположим, что нам надо создать равномерное движение стержня со скоростью v_0 в течение $\frac{T}{2}$ сек. и обратное движение его с той же скоростью в течение того же времени; здесь T — время полного оборота эксцентрика. Прежде всего определим необходимую угловую скорость кулака из условия, чтобы за время полного оборота кулака, равного $\frac{2\pi}{\omega}$ сек., стержень проделал полное колебание взад и вперед. Для этого должно быть:

$$\frac{2\pi}{\omega} = T, \text{ т. е. } \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Далее при равномерном движении стержня вверх:

$$x = v_0 t + x_0,$$

где x_0 представляет наименьшее расстояние конца стержня от оси вращения. Подставляя в уравнение движения вместо t его значение

$$\frac{\theta}{\omega} = \frac{\theta T}{2\pi},$$

получим полярное уравнение профиля:

$$r = \frac{v_0 T}{2\pi} \theta + r_0; \quad r_0 = x_0.$$

Это — Архимедова спираль. Построение ее проще всего осуществить так, как показано на рис. 53. От точки O отложим прежде всего отрезок $OC = r_0$, а затем отрезок $CB = \frac{v_0 T}{2}$. Разделив последний на-
пример на 6 частей, проведем концентрические окружности из точек:

С, 1,2,... до пересечения с лучами, делящими на 6 частей правую половину эксцентрика. Точки пересечения лучей с соответствующими окружностями и дадут точки профиля. Аналогично вычертим и левую половину эксцентрика.

Исследуем теперь полученный сердцевидный эксцентрик (рис.54) (его еще иногда называют кардиоидным) с точки зрения скорости и ускорения, которые он дает стержню.

Скорость здесь очевидно постоянна и равна v_0 , а ускорения нет, но при переходе стержня с правой половины эксцентрика на левую происходят скачки в направлении скорости. Лучше всего показать это на графике, откладывая на оси ординат совместно x и v_x , а на оси абсцисс — время. Из графика (рис. 55) видно, что расстояние x меняется непрерывно от r_0 до $r_0 + \frac{v_0 T}{2}$ (на рисунке тонкая линия), а скорость скачет от значения $+v_0$ до значения $-v_0$

в моменты $0, \frac{T}{2}, T, \frac{3T}{2}$. Такое движение, при котором скорость терпит разрывы непрерывности, изменяясь скачками, называется ударом. Мы видим, что кардиоидный эксцентрик имеет большой недостаток — удары. Эти удары портят весь механизм, частью которого является эксцентрик. Теоретически говоря, в точках разрыва ускорение бесконечно велико, а следовательно, как будет объяснено в Динамике, при этом образуются бесконечные силы, оказывающие губительное действие на конструкцию. На самом деле стержень несколько отходит от

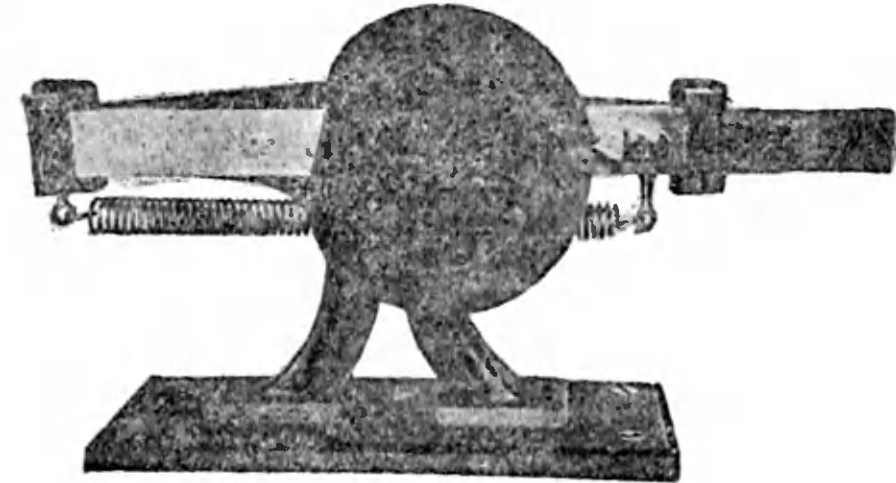


Рис. 54.

Кардиоидный эксцентрик (модель кабинета механики Ленинградского физико-механического института)

эксцентрика и тем смягчает силу удара, но все же она велика.

б) Эксцентрик Морена. Указанный недостаток кардиоидного эксцентрика в значительной степени устранен в эксцентрике Морена.

Движение стержня задается в этом случае так: скорость стержня

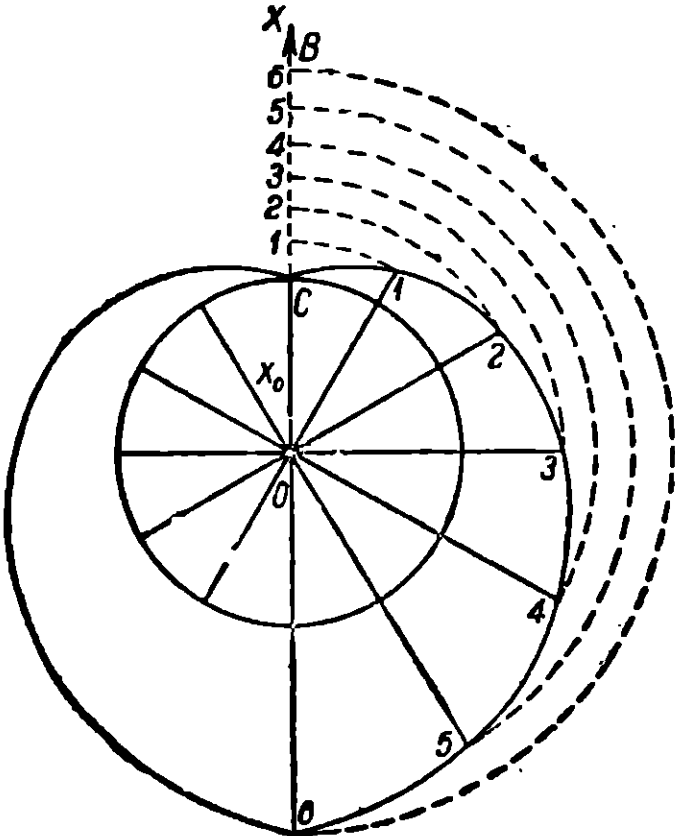


Рис. 53.

при котором скорость терпит разрывы непрерывности, изменяясь скачками, называется ударом. Мы видим, что кардиоидный эксцентрик имеет большой недостаток — удары. Эти удары портят весь механизм, частью которого является эксцентрик. Теоретически говоря, в точках разрыва ускорение бесконечно велико, а следовательно, как будет объяснено в Динамике, при этом образуются бесконечные силы, оказывающие губительное действие на конструкцию. На самом деле стержень несколько отходит от

возрастает равномерно за время $\frac{T}{4}$ от 0 до v_0 и затем убывает за то же время вновь до нуля и т. д. График скорости и ускорения показан на рис. 56. Время полного оборота эксцентрика T .

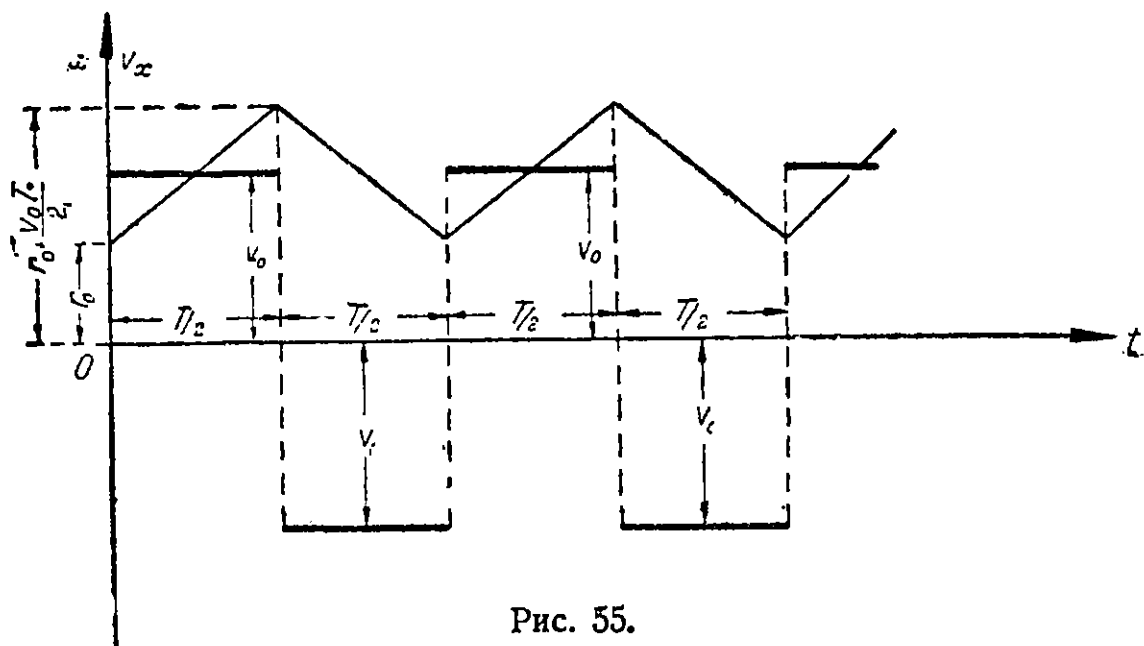


Рис. 55.

Здесь скорость изменяется непрерывно, без скачков, только ускорение меняет свой знак и претерпевает разрыв непрерывности в точках $0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}$ и т. д. Такое движение, при котором скорость непрерывна, а ускорение претерпевает разрывы, называют *мягким ударом* или *квази-ударом*.

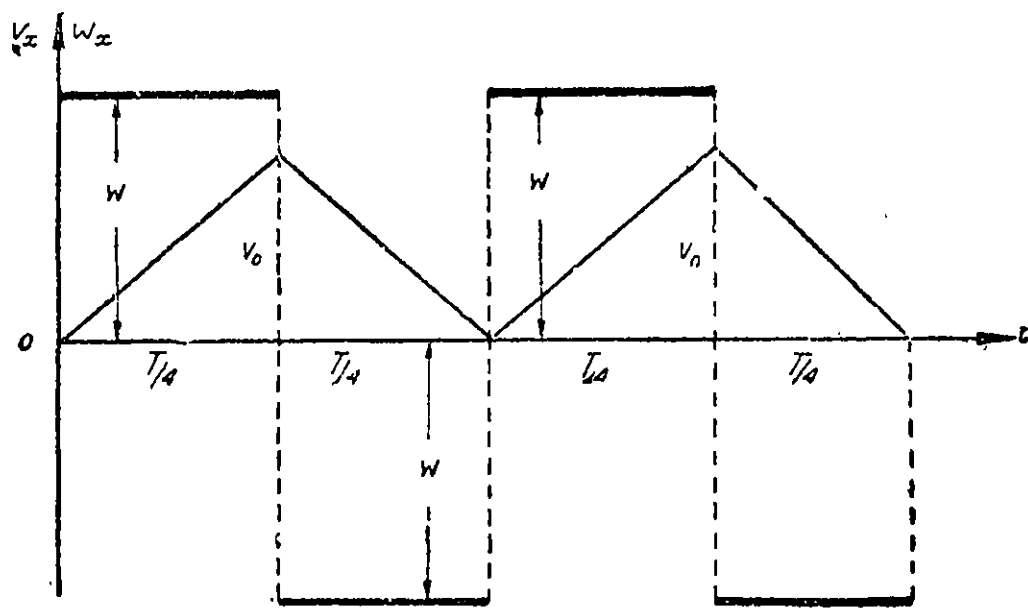


Рис. 56.

Примеры ударов и квази-ударов у нас впереди еще будут.

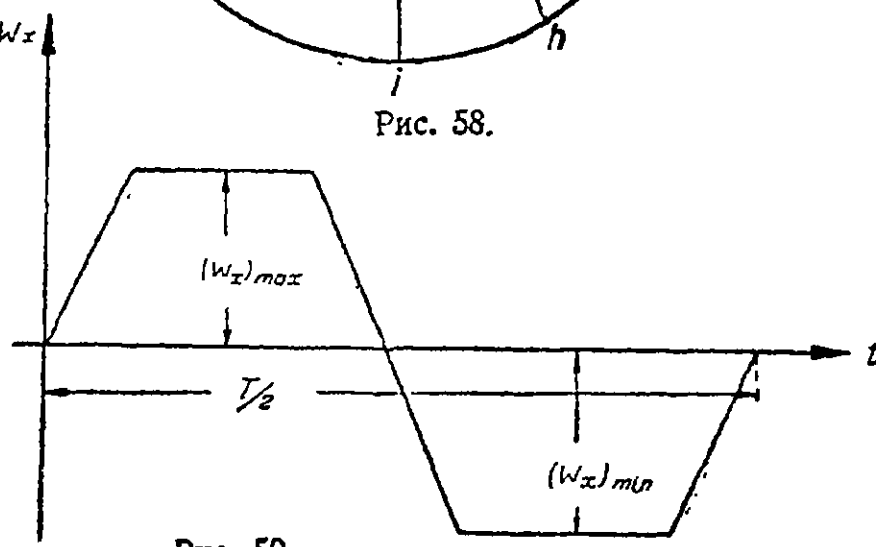
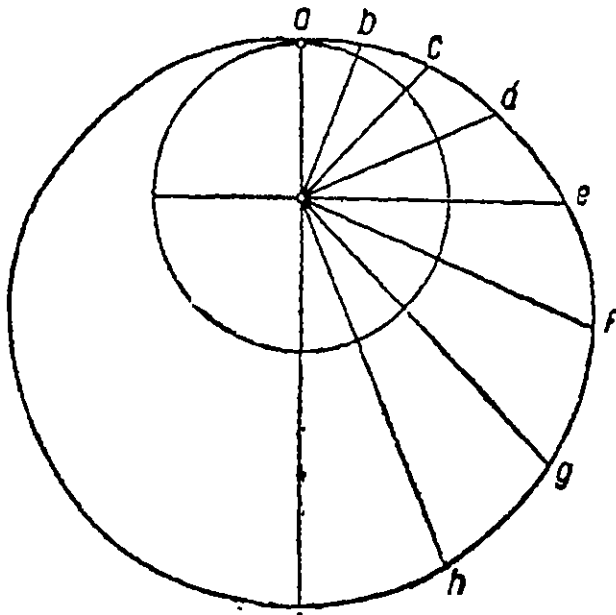
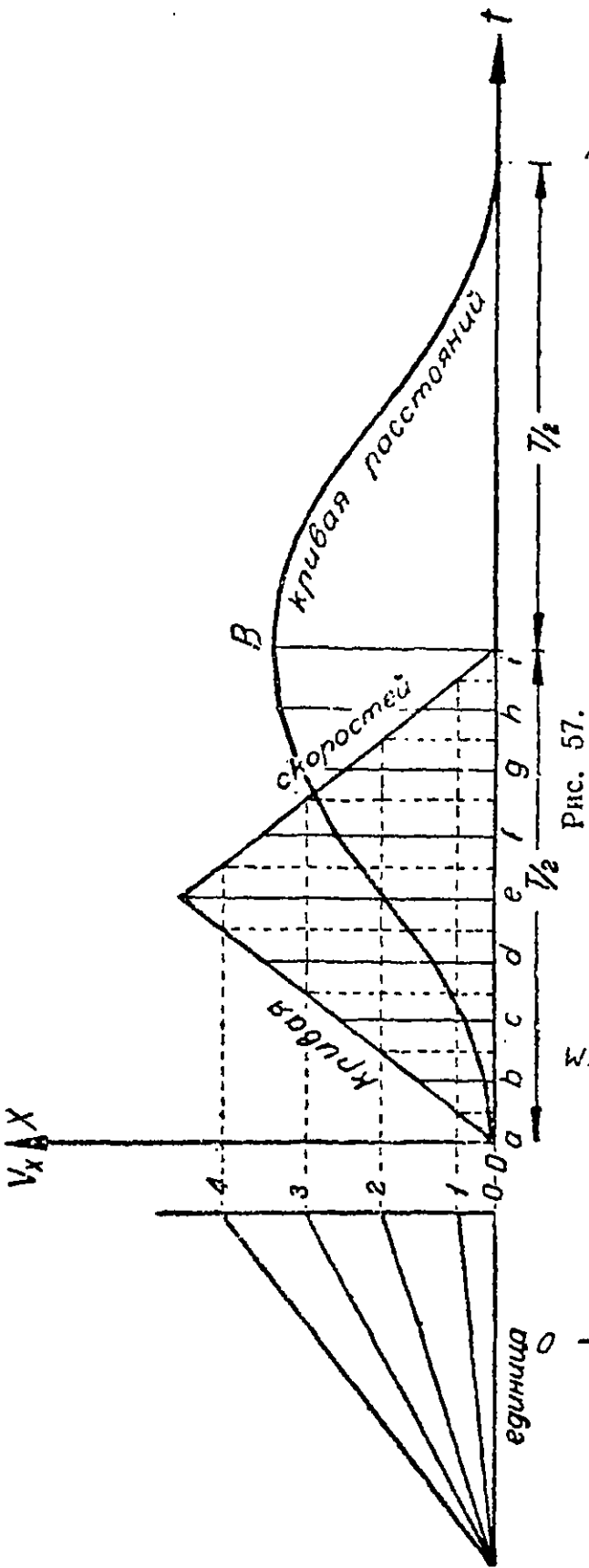
Чтобы построить профиль эксцентрика, остается найти график расстояний r . Мы приходим здесь к известной уже нам задаче построения графика движения по заданному графику скорости. Применим здесь в виде упражнения метод графического интегрирования, изложенный в § 12. Построение видно из рис. 57.

Кривые OA и AB являются симметричными кусками параболы, аналитическое уравнение которой изучающий не затруднится получить интегрированием закона скорости:

$$v_x = \frac{4v_0}{T}t; 0 \leq t \leq \frac{T}{4},$$

$$v_x = 2v_0 - \frac{4v_0}{T}t; \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2} \text{ и т. д.}$$

Имея график движения, по нему уже легко составим профиль. Для этого, взяв основную окружность радиуса $\overline{Oa}$, проводят лучи $\overline{Oa}$, $\overline{Ob}$... в таком количестве, сколько делений интервала на последнем графике, и откладывают по этим лучам отрезки $\overline{Oa}$,



$\overline{Ob}$,..., равные соответствующим ординатам графика (рис. 58). По форме профиля очевидно, что теперь в точках a и i скорость равна нулю, поэтому переход происходит плавно.

Иногда и наличие мягких ударов является недопустимым в эксцентрике, так как скачкам в ускорении соответствуют скачки в силах развивающихся в механизме. В этих случаях задают непрерывный график ускорений в виде трапеций (рис. 59). Графическим

интегрированием получают график скоростей и затем вторичным, графическим же, интегрированием — кривую расстояний, по которой уже и строят профиль эксцентрика. Изложение способа профилирования такого кулачного механизма можно найти в различных курсах прикладной механики.¹

Там же можно найти разбор и синусоидального или круглого эксцентрика, который дает совершенно плавное, без всяких ударов, движение стержня (см. также контрольные вопросы).

3. Ускорение в простом гармоническом колебательном движении. По уравнению простого гармонического движения

$$x = a \sin(\omega t + \alpha);$$

найдем:

$$w_x = \ddot{x} = -\omega^2 a \sin(\omega t + \alpha).$$

Обращаясь к уравнению движения, видим, что ускорение w_x может быть представлено еще так:

$$w_x = -\omega^2 x.$$

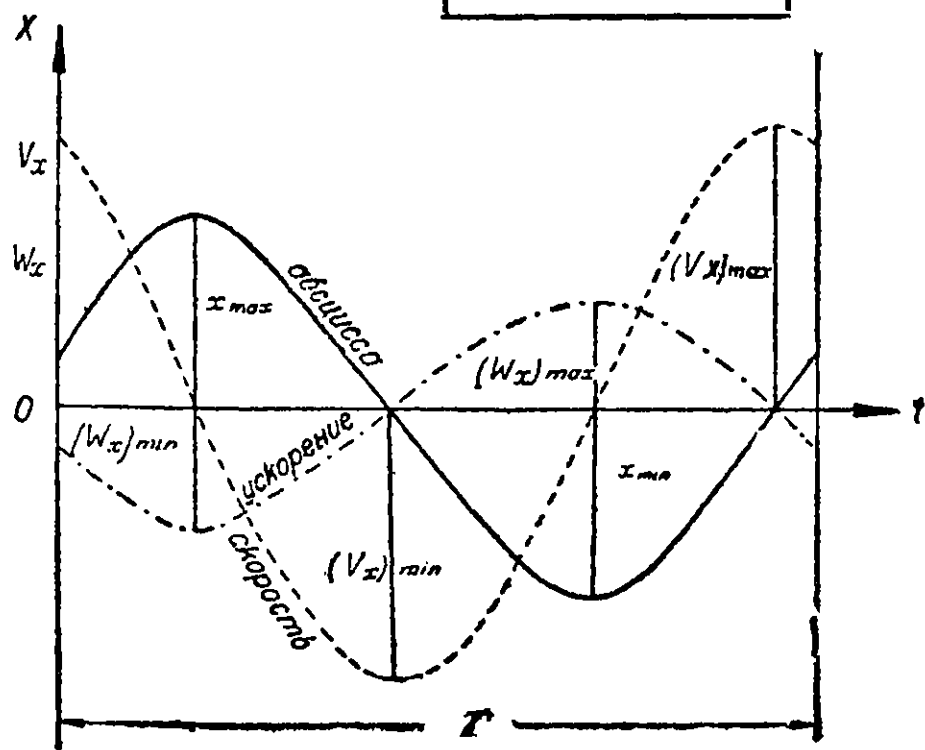


Рис. 60.

Вспоминая правило знаков, изложенное в § 13, получим результат: при гармонических колебаниях точки ускорение по величине пропорционально расстоянию от центра колебания, причем точка движется ускоренно, приближаясь к центру и замедленно, удаляясь от него.

На рис. 60 представлен график ускорения в колебательном движении совместно с графиком движения и скорости.

Из графика видно, что в тот момент, когда x принимает максимальное значение (например, крайнее правое положение колеблющейся точки) $v_x = 0$, а w_x достигает минимума, будучи отрицательным; по абсолютной величине оно имеет максимальное значение. Здесь происходит как бы мгновенная остановка точки, после этого точка двигается влево с убывающим по абсолютной величине ускорением и растущей по абсолютной величине скоростью.

¹ См. например. Л. Б. Левенсон, Кинематика механизмов, 1923, § 43, стр. 102, а также и § 40, 41.

В центре колебания $x=0$, скорость имеет по абсолютной величине максимальное значение, но так как v_x имеет знак минус, то v_x будет минимум, ускорение при этом равно нулю вместе с x (оно ведь пропорционально абсциссе).

При дальнейшем движении x становится отрицательным, скорость убывает с удалением от центра, ускорение, наоборот, возрастает и при левом крайнем положении $x=x_{\min}$, скорость опять нуль, ускорение, наоборот, максимум, точка на мгновение останавливается, чтобы двигаться затем вправо и т. д. Учащийся должен обязательно проследить полный цикл колебания самостоятельно, так как от понимания и усвоения этого цикла зависит очень многое в дальнейшем.

4. Ускорение в сложном колебательном движении. В случае сложного колебания:

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2),$$

ускорение будет равно

$$\begin{aligned} w_x = \ddot{x} = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 &= -\omega_1^2 a_1 \sin(\omega_1 t + \alpha_1) - \omega_2^2 a_2 \sin(\omega_2 t + \alpha_2) = \\ &= -\omega_1^2 x_1 - \omega_2^2 x_2. \end{aligned}$$

Мы видим, что ускорение складывается из ускорений составляющих колебаний. График ускорения получится сложением гармоник той же частоты, что и слагаемые гармоники в уравнении движения. Как пример рассмотрим приближенное уравнение ускорения ползуна кривошипного механизма. Взяв численные условия из упражнения 4 § 3 первого задания будем иметь:

$$\begin{aligned} x &= 0,99 + 0,2 \cos 10t + 0,01 \cos 20t \\ w_x = \ddot{x} &= -20 \cos 10t - 4 \cos 20t, \end{aligned}$$

график ускорения w_x легко вычертить обычным приемом алгебраических сложений ординат составляющих гармоник.

Мы предложим учащемуся на одном и том же листке миллиметровки вычертить для сопоставления график x , v_x и w_x . Тогда у него встанет перед глазами полная кинематическая картина движения ползуна кривошипного механизма.

5. Торможение движущейся точки вязкой средой. Мы уже разбирали в упражнении 2 § 3 движение точки в вязкой среде. Уравнение его будет:

$$x = a(1 - e^{-\alpha t}),$$

отсюда ускорение равно

$$w_x = \ddot{x} = -\alpha^2 a e^{-\alpha t}.$$

Сравнивая его со скоростью:

$$v_x = \dot{x} = \alpha A e^{-\alpha t},$$

найдем:

$$w_x = -\alpha \dot{x},$$

т. е. ускорение по величине пропорционально скорости. Знак минус показывает, что мы имеем здесь замедленное движение.

6. Ускорение в затухающем колебательном движении. Возьмем уравнение затухающих колебаний:

$$x = ae^{-pt} \sin(\omega t + \varphi).$$

Дифференцируя один раз по времени, найдем:

$$v_x = ae^{-pt} [\omega \cos(\omega t + \varphi) - p \sin(\omega t + \varphi)],$$

или по уравнению движения:

$$v_x = \dot{x} = ae^{-pt} \omega \cos(\omega t + \varphi) - px.$$

Дифференцируя еще раз, получим:

$$w_x = -p \cdot \underline{ae^{-pt} \omega \cos(\omega t + \varphi)} - a\omega^2 e^{-pt} \sin(\omega t + \varphi) - p\dot{x},$$

замечая, что подчеркнутое выражение равно

$$\dot{x} + px,$$

найдем:

$$w_x = -(p^2 + \omega^2)x - 2p\dot{x}.$$

Сопоставляя этот результат с предыдущими двумя упражнениями, видим, что в затухающем колебательном движении ускорение складывается из ускорения обыкновенного гармонического колебательного движения точки и торможения ее вязкой средой, сопротивляющейся движению.

В курсе Динамики мы увидим, что действительно затухающее колебательное движение получается при колебании точки в сопротивляющейся среде, как например маятника в воздухе или жидкости, медной пластинки в магнитном поле.

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. Определить скорость и ускорение груза в примере задания 1. Построить на одном и том же чертеже графики x , v_x , w_x .

2. Средняя точка рессоры совершает гармонические колебания амплитуды $a = 4$ мм и периода $T = 0,1$ сек. Определить максимальное значение скорости и ускорения этой точки.

3. Определить скорость и ускорение стержня круглого эксцентрика при данных примера 6 задания 1.

4. Определить скорость и ускорение светового „зайчика“ при данных примера 11 задания 1.

5. Определить скорость и ускорение ползуна кривошипного механизма при данных примера 8 задания 1 и построить на одном и том же чертеже графики x , v_x , w_x .

6. Та же задача для ползуна кривошипного механизма, линия движения которого не проходит через ось вращения кривошипа. Взять численные данные из примера 9 задания 1.

7. Считая посадочную скорость аэроплана равной 100 км/час, определить замедление его при посадке на пути $s = 100$ м.

8. Трамвай, трогая с места, проходит в течение 1 мин. путь 100 м. Считая, что в начале движения путь возрастает пропорционально кубу времени, написать уравнение движения, найти скорость и ускорение трамвая и построить их графики.

9. График ускорения трамвая изображен на рис. 61. Определить продолжительность t^* торможения трамвая. Построить график скорости и написать уравнения пройденного пути в промежутках времени (0—6 сек.), (6 сек.—10 сек.), (10 сек.—5 мин. 10 сек.), (5 мин. 10 сек.—5 мин. 10 сек. + t^*).

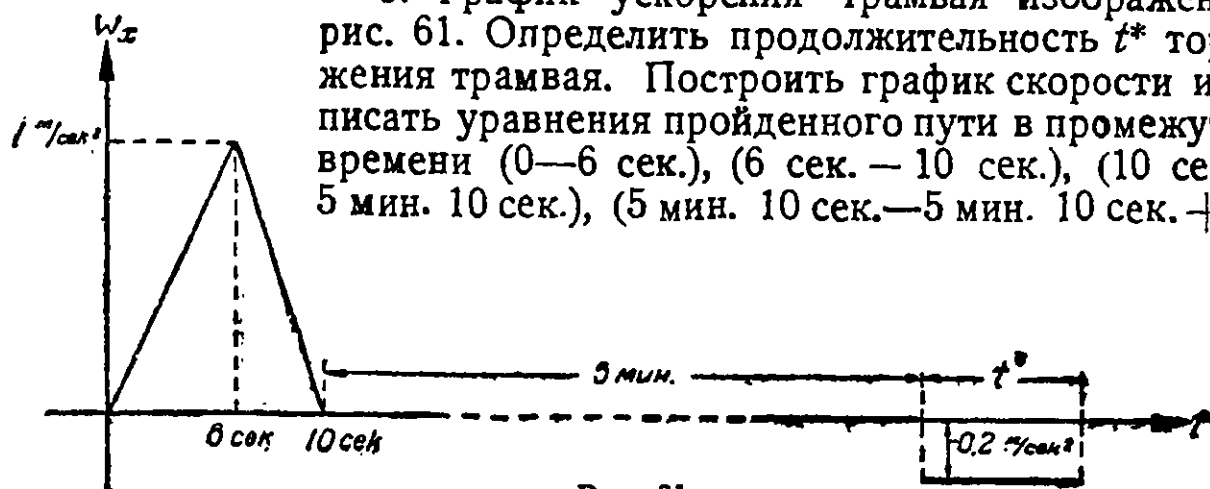


Рис. 61.

Задание 4-е.

Скорость в криволинейном движении.

Вопросу о скорости и ускорении материальной точки в общем случае какого-угодно (не прямолинейного) движения мы должны предпослать некоторые сведения из векторного исчисления. Это даст нам в руки орудие для наиболее наглядного и краткого изучения основных кинематических понятий, окажет нам большие услуги при всем дальнейшем прохождении Механики и будет полезным учащемуся при изучении ряда других дисциплин.

§ 14. Вектор-функция скалярного переменного.

Рассмотрим вектор A , изменяющийся с изменением некоторого скалярного аргумента u так, что каждому значению u в области его изменения соответствует определенное значение (определенная величина и определенное направление) вектора A . В этом случае говорят, что A есть вектор-функция переменного u и пишут:

$$A = A(u).$$

Как на пример вектор-функции можно указать на вектор-радиус r , определяющий положение какой-либо точки M (рис. 62) кривой CC_1 . Если выбрать на кривой начало отсчета дуг в точке M_0 и установить положительное направление отсчета, то этим самым всякой точке M кривой будет сопоставлено определенное (положительное или отрицательное) значение дуги $M_0M = \sigma$. Каждому значению переменного σ соответствует определенная точка M кривой и, следовательно, определенное значение вектор-радиуса r . Это значит, что последний можно рассматривать как вектор-функцию от σ :

$$r = r(\sigma). \quad (1)$$

Другие примеры механического характера мы встретим дальше. Скалярным переменным, от которого зависит вектор-функция, в кинематике обычно бывает время; например движущаяся материальная точка занимает в каждый момент времени определенное положение на своей траектории и вектор-радиус, определяющий это положение, является функцией времени:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (2)$$

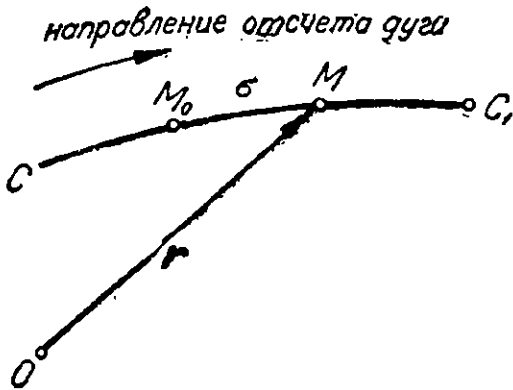


Рис. 62.

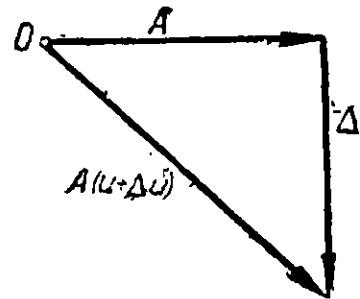


Рис. 63.

Определение понятия *непрерывности* вектор-функции совершенно идентично тому, которое дается в обычном (скалярном) анализе: придадим аргументу изменение Δu . При этом вектор A получит геометрическое приращение (рис. 63):

$$\Delta A = A(u + \Delta u) - A(u),$$

величина которого при непрерывности вектора A стремится к нулю вместе с Δu .

§ 15. Годограф вектора.

Пусть $A(u)$ непрерывная вектор-функция своего аргумента; при разных значениях аргумента мы имеем разные по величине, направлению и положению векторы (рис. 64):

$$A_0 = A(u_0), A_1 = A(u_1), A_2 = A(u_2).$$

Для удобства сравнения их между собой построим следующую векторную диаграмму: выбрав совершенно произвольно некоторый полюс O , условимся откладывать от него сравниваемые вектора; при этом начала векторов будут в одной точке, а концы в случае непрерывного изменения аргумента образуют некоторую сплошную кривую, называемую *годографом вектор-функции* $A(u)$. Годограф вектор-функции играет в векторном анализе ту же роль, что и график функции в обычном анализе.

Если, например, вектор A имеет *постоянную длину* A , то годографом его будет некоторая кривая, всеми точками своими лежащая на сфере радиуса A и с центром в полюсе годографа; в частном случае, когда при постоянной длине вектора он остается параллельным некоторой плоскости, годографом будет окружность. Годограф вектора *постоянного направления* есть прямая, параллельная этому направлению. Рассмотрим еще случай, когда пере-

менный вектор при всех своих изменениях имеет одну и ту же проекцию на некоторое направление (рис. 65). Примем это направление за ось OX и проекцию A на ось OX обозначим через A_x . По условию $A_x = \text{const}$. Годографом A является прямая, перпендикулярная оси OX и находящаяся на расстоянии $|A_x|$ от полюса O годографа.

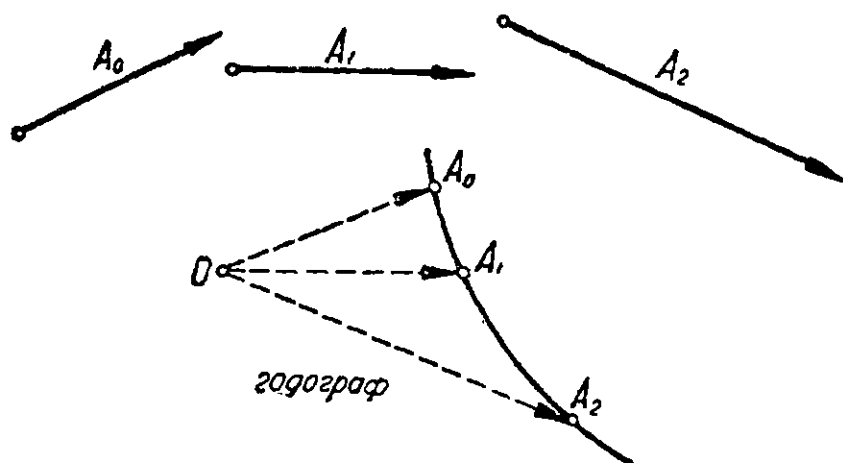


Рис. 64.

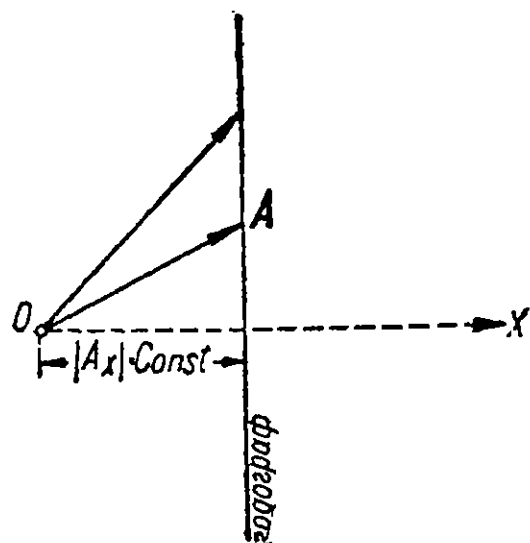


Рис. 65.

§ 16. Производная вектор-функции.

Рассмотрим два положения вектора $A: A(u)$ и $A(u + \Delta u)$. Будем считать при этом, что $\Delta u > 0$; геометрическая разность

$$\Delta A = A(u + \Delta u) - A(u)$$

имеет направление хорды MM_1 годографа (рис. 66) в сторону возрастания аргумента u . То же направление будет иметь очевидно и частное от деления этого вектора ΔA на любой положительный скаляр, в частности на Δu .

Итак

$$\frac{A(u + \Delta u) - A(u)}{\Delta u}$$

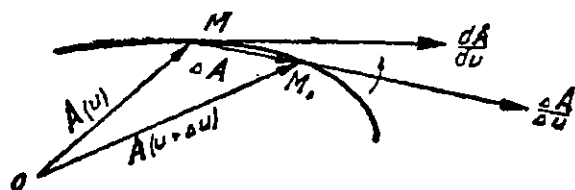


Рис. 66.

имеет направление секущей годографа. Будем теперь приближать Δu к нулю; точка M_1 будет приближаться к M и секущая MM_1 , поворачиваясь вокруг точки M , будет занимать все новые и новые положения; при $\Delta u = 0$ она займет предельное положение, называемое, как известно учащемуся, *касательной* к годографу.¹ При этом, т. е. при $\Delta u \rightarrow 0$, отношение

$$\frac{A(u + \Delta u) - A(u)}{\Delta u}$$

будет также стремиться к некоторому предельному значению. По аналогии с анализом этот предел можно назвать производной

¹ Не всякая непрерывная кривая имеет касательную, т. е. не всякая непрерывная функция имеет производную. Но с подобного рода аналитическими курьезами не приходится встречаться в приложениях, и мы вправе их игнорировать.

вектора A по u ; условившись обозначать этот предел через $\frac{dA}{du}$, имеем:

$$\boxed{\frac{dA}{du} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{A(u + \Delta u) - A(u)}{\Delta u}} \quad (3)$$

Вектор $\frac{dA}{du}$, т. е. производная вектора A , имеет таким образом направление касательной к годографу, проведенной в сторону возрастания аргумента. Вместе с тем, вектор $\frac{dA}{du}$ характеризует быстроту изменения значения вектора A , т. е. его величины и направления, с изменением аргумента u .

Величину производной $\frac{dA}{du}$ вектора A будем обозначать через $\left| \frac{dA}{du} \right|$. Напомним, что буквой A без стрелки наверху мы условились

обозначать величину вектора A ; поэтому $\frac{dA}{du}$ есть производная величины вектора A . Конечно величина производной вектора вовсе не равна абсолютному значению производной его величины:

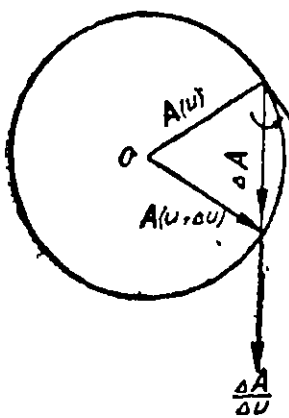


Рис. 67.

$$\left| \frac{dA}{du} \right| \neq \left| \frac{dA}{du} \right|, \quad (4)$$

ибо это два совершенно разных понятия. С одной стороны, идет речь о величине некоторого вектора $\frac{dA}{du}$, с другой — об абсолютном значении производной некоторого скаляра A — величины вектора A .

Покажем это на примере. Пусть A — вектор постоянной длины, при всех изменениях остающийся в некоторой плоскости. Годографом его является окружность (рис. 67). Касательная к ней очевидно перпендикулярна к вектор-радиусу, проведенному в точку касания. Итак $\frac{dA}{du}$ перпендикулярен A , если $A = \text{const}$. Вместе с тем, так как A изменяет свое направление, геометрическая разность

$$\Delta A = A(u + \Delta u) - A(u)$$

отнюдь не равна нулю; не равно нулю и отношение

$$\frac{A(u + \Delta u) - A(u)}{\Delta u},$$

а равно и его предел, т. е. $\frac{dA}{du}$. Итак

$$\frac{dA}{du} \neq 0.$$

Производная же A , т. е. производная *постоянной величины*, равна нулю:

$$\frac{dA}{du} = 0.$$

Итак,

$$\left| \frac{dA}{du} \right| \neq \left| \frac{dA}{du} \right|.$$

Отметим, что свойство производной вектора *постоянной длины* быть перпендикулярной дифференцируемому вектору остается справедливым и в общем случае, когда вектор, сохраняя постоянную величину, изменяет свое направление как угодно в пространстве. Предоставляем изучающему самостоятельно в этом убедиться. Это замечание неоднократно будет нами использовано в дальнейшем.

Пользуясь определением производной вектора, нетрудно показать, что при дифференцировании векторов сохраняются те же правила, что и при дифференцировании скалярных функций; например, производная геометрической суммы равна геометрической сумме производных, т. е. если

$$A = A_1 + A_2 + \dots + A_n,$$

то

$$\frac{dA}{du} = \frac{dA_1}{du} + \frac{dA_2}{du} + \dots + \frac{dA_n}{du}. \quad (5)$$

Точно так же сохраняется и правило дифференцирования произведения скаляра λ на вектор A :

$$\boxed{\frac{d}{du} (\lambda A) = \frac{d\lambda}{du} A + \lambda \frac{dA}{du}}. \quad (6)$$

Доказательство получается буквально так же, как в обычном анализе, — предоставляем его учащемуся.

Рассмотрим еще производную вектора *постоянного направления*. Заметим для этого предварительно, что всякий вектор A может быть представлен как произведение его величины A на *единичный вектор* e^1 того же направления (рис. 68)

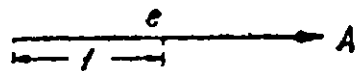


Рис. 68.

$$\boxed{A = A \cdot e} \quad (7)$$

Если теперь A имеет постоянное направление, то e , имея, кроме того, постоянную величину $e = 1$, является постоянным вектором, т. е.

$$\frac{de}{du} = 0,$$

¹Т. е. вектор, длина которого равна единице по выбранному масштабу.

и применяя формулу (6), имеем:

$$\frac{dA}{du} = \frac{dA}{du} \mathbf{e}.$$

Если $\frac{dA}{du} > 0$, т. е. A возрастает при возрастании u , то произ-

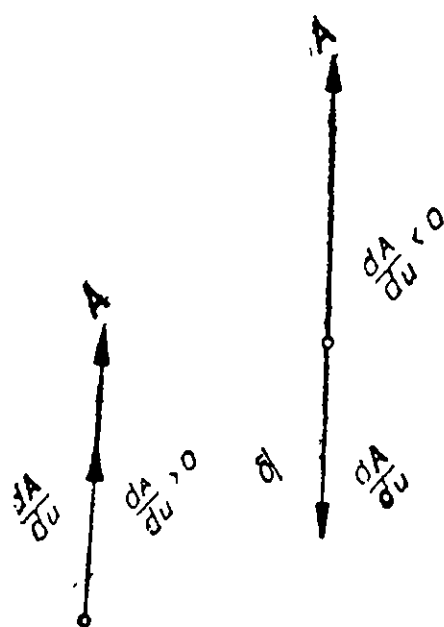


Рис. 69.

ведение $\mathbf{e}$ на положительное число $\frac{dA}{du}$ имеет то же направление что $\mathbf{e}$, т. е. направление вектора A ; в случае же $\frac{dA}{du} < 0$ произведение $\mathbf{e}$ на отрицательное число $\frac{dA}{du}$ имеет направление, противоположное $\mathbf{e}$ или, что то же, противоположное A . Итак, производная вектора *постоянного направления* имеет или то же самое направление, что и дифференцируемый вектор, если величина последнего возрастает при возрастании аргумента, или прямо-противоположное направление, если величина дифференцируемого вектора с возрастанием

аргумента убывает (рис. 69).

§ 17. Единичный вектор касательной к кривой.

Рассмотрим производную вектор-радиуса $\mathbf{r}$ по дуге σ (рис. 70). Согласно определению, имеем:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(\sigma + \Delta\sigma) - \mathbf{r}(\sigma)}{\Delta\sigma} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta\sigma}$$

Мы уже знаем, что $\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}$ имеет направление касательной к кривой в точке M в сторону возрастания дуги ($\Delta\sigma$ предполагаем положительным). Найдем теперь величину $\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}$.

Имеем:

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \right| = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \left| \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta\sigma} \right| = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{|\overrightarrow{MM_1}|}{\Delta\sigma},$$

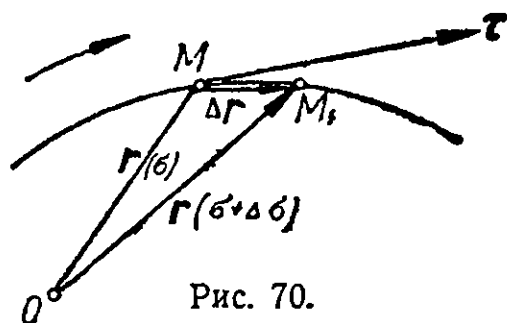


Рис. 70.

но, как известно из оснований дифференциального исчисления, предел отношения длины жорды к длине стягиваемой ею дуги, когда последняя стремится к нулю, равен единице:

$$\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{|\overrightarrow{MM_1}|}{\Delta\sigma} = 1.$$

Итак,

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \right| = 1,$$

т. е. $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ есть *единичный вектор касательной кривой в сторону возрастания дуги*. Будем обозначать его буквой τ :

$$\boxed{\tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds}} \quad (8)$$

Единичный вектор иногда называют *ортом* (от английского слова „orientation“); τ есть *орт касательной*.

§ 18. Разложение вектора по ортам.

Определим направление осей OX , OY , OZ тремя единичными векторами (ортами) $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ (рис. 71). Спроектируем вектор $\mathbf{A}$ на оси, причем проекции его, как уже упоминалось, обозначим буквой A без стрелки наверху и со значком внизу, указывающим наименование оси; например A_x есть проекция $\mathbf{A}$ на ось OX . Напомним, что (§ 1 задания 2)

$$\left. \begin{aligned} A_x &= A \cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{i}}) \\ A_y &= A \cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{j}}) \\ A_z &= A \cos(\widehat{\mathbf{A}, \mathbf{k}}) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из рис. 71 имеем:

$$\mathbf{A} = \vec{OM}_1 + \vec{M_1M_2} + \vec{M_2M}.$$

Величина вектора $\vec{OM}$ равна абсолютной величине проекции A_x и имеет то же направление, что и $\mathbf{i}$ при $A_x > 0$ и противоположное — при $A_x < 0$; но то же направление и ту же величину, что и $\vec{OM}_1$ имеет вектор $A_x \mathbf{i}$, ибо его величина равна $|A_x|$ (так как $|\mathbf{i}| = 1$); а направление совпадает с $\mathbf{i}$ при $A_x > 0$ и прямо противоположно $\mathbf{i}$ при $A_x < 0$. Итак,

$$\vec{OM}_1 = A_x \mathbf{i};$$

аналогично этому:

$$\vec{M_1M_2} = A_y \mathbf{j}, \quad \vec{M_2M} = A_z \mathbf{k}.$$

Таким образом получаем:

$$\boxed{\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}} \quad (10)$$

Эта формула представляет собою так называемое *разложение вектора по ортам*; вектор $\mathbf{A}$ представляется в виде геометрической суммы трех взаимно перпендикулярных векторов, параллельных координатным осям; коэффициенты при ортах координатных осей суть проекции вектора на соответствующую ось.

§ 19. Проекции производной вектора на оси.

Пусть A есть вектор-функция переменного u . Дифференцируя обе стороны (10) по u , получим, согласно формуле (5):

$$\frac{dA}{du} = \frac{d}{du} (A_x i) + \frac{d}{du} (A_y j) + \frac{d}{du} (A_z k);$$

далее, согласно формуле (6):

$$\frac{d}{du} (A_x i) = \frac{dA_x}{du} i + A_x \frac{di}{du} = \frac{dA_x}{du} i,$$

ибо производная i , как вектора постоянной длины и постоянного направления, равна нулю. Итак,

$$\boxed{\frac{dA}{du} = \frac{dA_x}{du} i + \frac{dA_y}{du} j + \frac{dA_z}{du} k.} \quad (11)$$

Эта формула представляет разложение по ортам вектора $\frac{dA}{du}$.

Коэффициенты $\frac{dA_x}{du}$, $\frac{dA_y}{du}$, $\frac{dA_z}{du}$ при ортах i, j, k суть, как сказано выше, не что иное, как проекции разлагаемого по ортам вектора $\frac{dA}{du}$ на соответствующие оси; но $\frac{dA_x}{du}$ является вместе с тем и производной от проекции A_x дифференцируемого вектора A . Итак, *проекции производной вектора равны производным от проекций дифференцируемого вектора.*

Величина вектора A выражается, как известно, через его проекции по формуле:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (12)$$

Следовательно величина производной будет:

$$\left| \frac{dA}{du} \right| = \sqrt{\left(\frac{dA_x}{du} \right)^2 + \left(\frac{dA_y}{du} \right)^2 + \left(\frac{dA_z}{du} \right)^2}; \quad (13)$$

конечно величина производной не равна $\left| \frac{dA}{du} \right|$, ибо дифференцируя (12), мы получили бы

$$\frac{dA}{du} = \frac{A_x \frac{dA_x}{du} + A_y \frac{dA_y}{du} + A_z \frac{dA_z}{du}}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}},$$

т. е. $\left| \frac{dA}{du} \right|$ отнюдь не равно $\left| \frac{dA}{du} \right|$, что мы уже подчеркивали выше.

Изложением этих сведений из векторного исчисления мы пока и ограничимся, так как необходимый вспомогательный аппарат для изложения вопроса о скорости в общем случае движения мы уже имеем.

§ 20. Скорость в криволинейном движении.

Пусть M и M_1 будут два положения движущейся точки в моменты времени t и $t + \Delta t$. Вектор (рис. 72)

$$\mathbf{p} = \vec{MM}_1 = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \quad (14)$$

называется, как мы знаем (§ 6, упражнение 5), перемещением точки за промежуток времени Δt . Взяв отношение

$$\frac{\mathbf{p}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} \quad (15)$$

получим некоторый вектор, имеющий то же направление, что и $\mathbf{p}$, и характеризующий среднюю быстроту, с которой перемещение происходило. Этот вектор называется *средней скоростью* за промежуток времени Δt и обозначается через $\mathbf{v}_{\text{ср.}}$. Как и в прямолинейном движении, чем меньшей величины мы возьмем промежуток времени Δt , тем более точное представление мы получим о скорости перемещения. Естественнo поэтому перейти к пределу и назвать *вектором скорости* $\mathbf{v}$

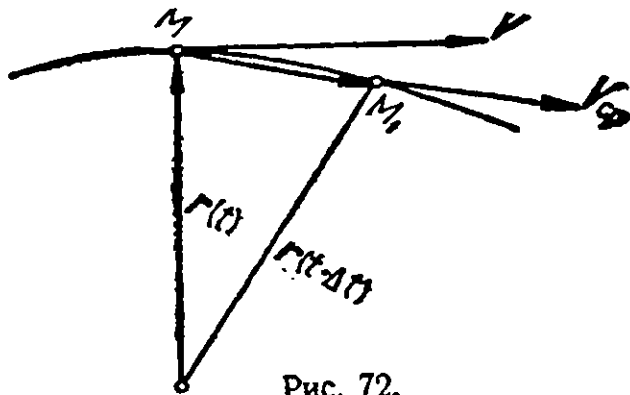


Рис. 72.

движущейся точки предел отношения вектора перемещения $\mathbf{p}$ к промежутку времени Δt , в течение которого перемещение происходило, когда этот промежуток стремится к нулю:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{v}_{\text{ср.}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}; \quad (16)$$

но по определению производной вектор-функции этот предел есть не что иное, как производная вектор-радиуса по времени:

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}}. \quad (17)$$

Итак, *скорость есть производная вектор-радиуса по времени.*

Разъяснив понятие скорости в случае криволинейного движения и дав ему точное определение, мы должны дать еще практические способы вычисления скорости в заданном движении. Будем различать два случая:

1) Заданы декартовы координаты x , y , z движущейся точки в функции времени:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (18)$$

В предыдущем параграфе было показано, что проекции производной равны производным от проекций дифференцируемого вектора. В нашем случае проекции дифференцируемого вектора $\mathbf{r}$ суть x, y, z , проекции же производной, т. е. скорости $\mathbf{v}$, на оси обозначим, согласно условию, через v_x, v_y, v_z . Получаем:

$$\boxed{v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z},} \quad (19)$$

где точкой сверху обозначена, как и раньше, операция дифференцирования по времени.

В прямолинейном движении, где у нас была одна только, абсцисса x , величина $\dot{x}$ равная v_x , вполне характеризовала скорость движения по оси OX . Мы видим, что в общем случае движения приходится определять скорость уже не одной, а тремя величинами. Мы как бы разлагаем движение в пространстве на три прямолинейных движения по трем осям координат. Зная эти движения, мы можем по ним воспроизвести и пространственное движение.

Вектор скорости $\mathbf{v}$ вполне определяется заданием его проекций. Величина его определяется по формуле:

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2},} \quad (20)$$

направление вектора $\mathbf{v}$ может быть определено косинусами углов, составляемых им с осями координат:

$$\boxed{\begin{aligned} \cos(\mathbf{v}, \wedge x) &= \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \\ \cos(\mathbf{v}, \wedge y) &= \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \\ \cos(\mathbf{v}, \wedge z) &= \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \end{aligned}} \quad (21)$$

2) Дана траектория движущейся точки и уравнение пройденного по ней пути s :

$$s = \Phi(t). \quad (22)$$

Имеем:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt},$$

где σ — дуга, определяющая положение точки на траектории (рис. 62, стр. 84).

Но согласно формуле (8) § 17

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\sigma} = \boldsymbol{\tau},$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — единичный вектор касательной, проведенный в сторону возрастания дуги. Итак,

$$\boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\tau} \frac{d\sigma}{dt} = \boldsymbol{\tau} \dot{\sigma}}, \quad (23)$$

т. е. скорость имеет то же направление, что и $\boldsymbol{\tau}$ при $\dot{\sigma} > 0$ и направление прямо противоположное $\boldsymbol{\tau}$ при $\dot{\sigma} < 0$. Величина вектора $\mathbf{v}$ определяется из (23) как произведение величины $\boldsymbol{\tau}$ на абсолютное значение $\dot{\sigma}$; но $\boldsymbol{\tau} = 1$ и следовательно

$$v = |\dot{\sigma}|. \quad (24)$$

Различие между σ и s в криволинейном движении таково же, как и между x и s в случае прямолинейного движения, т. е.

$$|d\sigma| = ds,$$

ибо s , как пройденный путь, всегда растет, а σ , отсчитываемое в определенном направлении, может то возрастать, то убывать.

Следовательно

$$\dot{s} = |\dot{\sigma}|,$$

и мы получаем:

$$\boxed{v = |\dot{\sigma}| = \dot{s}}. \quad (25)$$

Так как пройденный путь s по условию известен в функции времени, то и величину скорости, его производную, мы также должны считать известной. Наконец, поскольку задана траектория, то и направление касательной к ней, т. е. направление скорости, также может быть определено. Итак, по заданным траектории и уравнению пройденного пути вектор скорости может быть вполне определен.

Примеры и упражнения.

1. Скорость точки описывающей фигуры Лиссажу.

В § 8 (упражнение 2) мы познакомились с так называемыми *фигурами Лиссажу*. Ограничиваясь случаем одинаковых частот взаимно перпендикулярных колебаний, т. е. одинаковых жесткостей сечения колеблющегося стержня, определим теперь скорость метки, описывающей фигуры Лиссажу. Уравнения движения имеют вид:

$$\dot{x} = a \sin(kt + \varphi_1), \quad \dot{y} = b \sin(kt + \varphi_2). \quad (1)$$

Дифференцируя эти выражения, получим:

$$v_x = \dot{x} = ak \cos(kt + \varphi_1), \quad v_y = \dot{y} = bk \cos(kt + \varphi_2). \quad (2)$$

Отсюда найдем величину и направление скорости:

$$v = k \sqrt{a^2 \cos^2 (kt + \varphi_1) + b^2 \cos^2 (kt + \varphi_2)} \quad (3)$$

$$\cos(\widehat{v, x}) = \frac{ak \cos (kt + \varphi_1)}{v}, \quad \cos(\widehat{v, y}) = \frac{bk \cos (kt + \varphi_2)}{v}. \quad (4)$$

В предположении, что $a = b$, разберем несколько частных случаев.

а) Разность фаз равна нулю: $\varphi_1 = \varphi_2$. Движение происходит по прямой линии (рис. 39, стр. 48). В этом случае, согласно формуле (3):

$$v = ak \sqrt{2} |\cos (kt + \varphi_1)|.$$

Движение — гармоническое колебание по диагонали квадрата.

б) Разность фаз равна $\frac{\pi}{2}$; $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Уравнение движения принимает вид:

$$x = a \sin \left(kt + \varphi_2 + \frac{\pi}{2} \right) = a \cos (kt + \varphi_2), y = a \sin (kt + \varphi_2).$$

Движение происходит по кругу (рис. 73). Имеем:

$$v_x = -ak \sin (kt + \varphi_2), \quad v_y = ak \cos (kt + \varphi_2),$$

$$v = ak,$$

$$\cos(\widehat{v, x}) = -\sin (kt + \varphi_2), \quad \cos(\widehat{v, y}) = \cos (kt + \varphi_2).$$

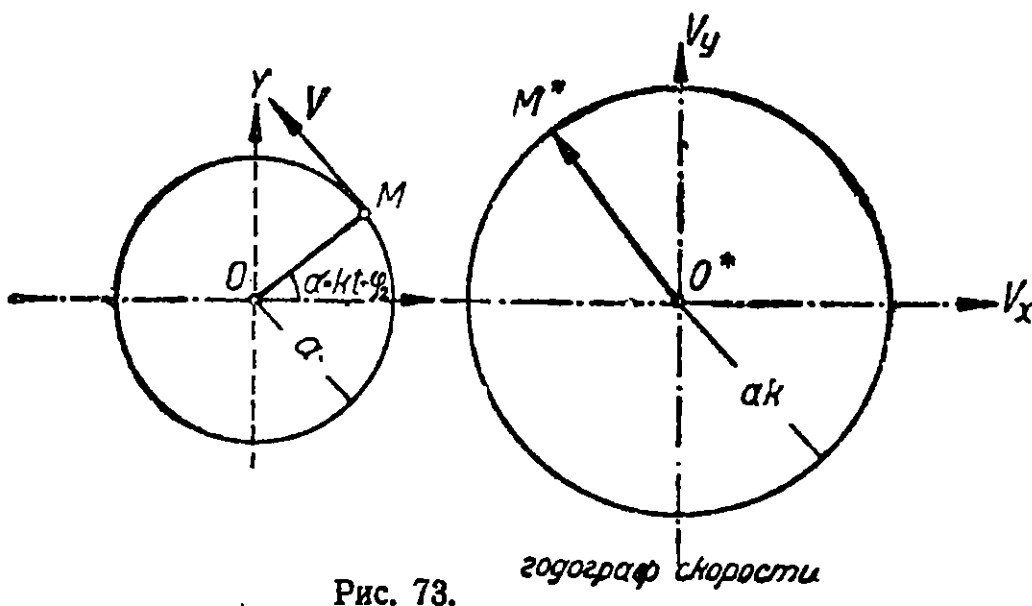


Рис. 73.

годограф скорости

Скорость постоянна по величине и, будучи направлена по касательной к кругу, перпендикулярна вектор-радиусу движущейся точки. Это можно установить также из наших формул. Имеем (рис. 73):

$$\cos(\widehat{v, x}) = -\sin (kt + \varphi_2) = -\sin \alpha = \cos (90^\circ + \alpha)$$

$$\cos(\widehat{v, y}) = -\cos (kt + \varphi_2) = \cos \alpha,$$

откуда следует, что

$$(\widehat{v, x}) = 90^\circ + \alpha, \quad (\widehat{v, y}) = \alpha,$$

где α — угол вектор-радиуса с осью Ox . Скорость перпендикулярна вектор-радиусу и при нашем расположении осей направлена против часовой стрелки.

Так как скорость постоянна, то годограф ее есть окружность радиуса ak с центром в полюсе годографа O^* . Чтобы получить

скорость в тот момент, когда точка занимает положение M , нужно очевидно, провести через O^* вектор-радиус O^*M^* годографа, перпендикулярный вектору-радиусу OM движущейся точки и повернутый в сторону движения, т. е. в нашем случае против часовой стрелки.

в) В случае $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ движение точки происходит по другой диагонали квадрата. Величина скорости та же, что и в случае а).

2. Кривошипный механизм. В § 7, упражнение 2, мы вывели уравнения движения любой точки шатуна кривошипного механизма. Найдем теперь в качестве упражнения *скорость середины шатуна*. Уравнения движения при равномерном вращении кривошипа имеют вид $\left(\epsilon = \frac{a}{l} \ll 1\right)$:

$$x = a \cos \omega t + \frac{l}{2} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2} \sin^2 \omega t\right)$$

$$y = \frac{a}{2} \sin \omega t.$$

Дифференцируя эти выражения по времени, получим проекции скорости:

$$v_x = \dot{x} = -a\omega \sin \omega t - \frac{l}{2} \frac{\epsilon^2}{2} \cdot 2\omega \sin \omega t \cos \omega t =$$

$$= -a\omega \left(\sin \omega t + \frac{\epsilon}{4} \sin 2\omega t\right).$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{a\omega}{2} \cos \omega t.$$

При переходе механизма через мертвые положения $\varphi = \omega t = 0$ или $\varphi = \pi$, $v_x = 0$, $v_y = \frac{a\omega}{2}$, т. е. скорость равна половине скорости пальца кривошипа $a\omega$ и направлена перпендикулярно шатуну.

При $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{2}$, v_y обращается в нуль, т. е. траектория имеет касательную, параллельную оси OX . В эти моменты $v_x = \pm a\omega$, т. е. скорость равна по величине скорости пальца кривошипа. В главе о плоском движении, мы найдем объяснение этим явлениям. Чтобы найти уравнение годографа скорости, нужно исключить время из выражений для v_x и v_y .

Имеем

$$\frac{v_x}{a\omega} = -\sin \omega t \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \cos \omega t\right), \frac{v_y}{a\omega} = \frac{\cos \omega t}{2}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{v_x}{a\omega} = \pm \sqrt{1 - 4 \left(\frac{v_y}{a\omega}\right)^2} \left(1 + \frac{\epsilon v_y}{a\omega}\right)$$

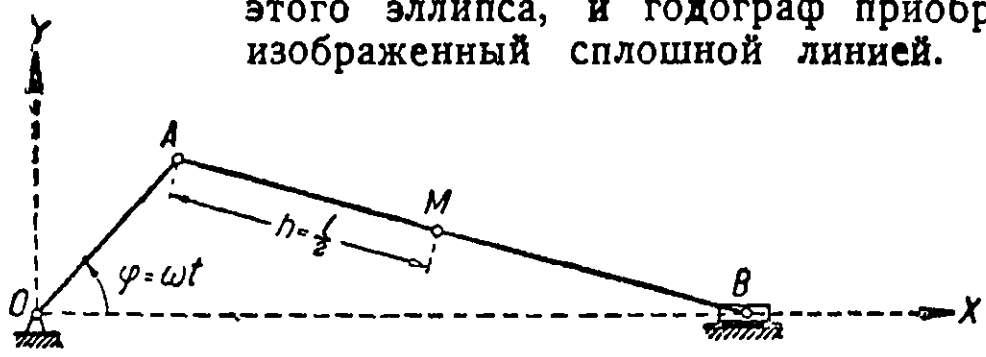
или

$$\left(\frac{v_x}{a\omega}\right)^2 = \left[1 - 4\left(\frac{v_y}{a\omega}\right)^2\right] \left(1 + \varepsilon \frac{v_y}{a\omega}\right)^2.$$

Если в первом приближении пренебречь членом $\varepsilon \frac{v_y}{a\omega}$ по сравнению с единицей, то уравнение годографа приобретает вид:

$$\frac{v_x^2}{(a\omega)^2} + \frac{v_y^2}{\left(\frac{a\omega}{2}\right)^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса с полуосями $a\omega$ и $\frac{a\omega}{2}$, изображенного на рис. 74 пунктиром. Наличие добавочных членов искажает форму этого эллипса, и годограф приобретает вид, изображенный сплошной линией.



Годограф скорости

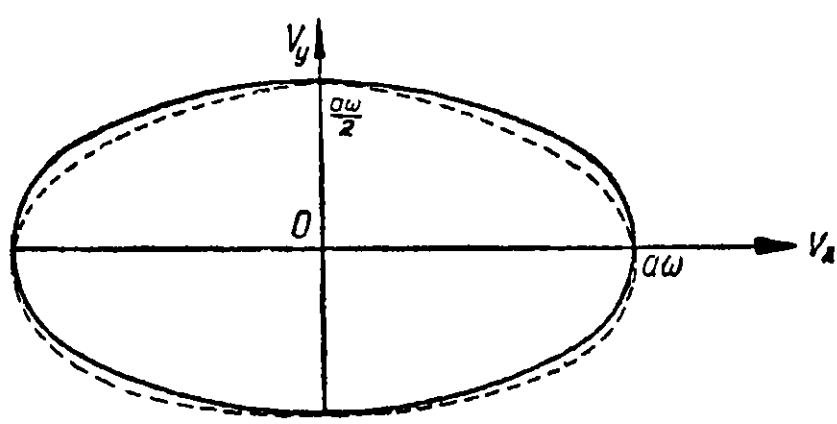


Рис. 74.

3. Винтовое движение. Мы видели в § 7 упражнение 4, что движение точки по винтовой линии задается уравнениями:

$$x = a \cos kt, y = a \sin kt, z = ct.$$

Найдем теперь величину и направление скорости в этом движении.

Имеем:

$$v_x = -ak \sin kt, v_y = ak \cos kt, v_z = c.$$

Проекция движущейся точки на плоскость XY описывает окружность со скоростью:

$$\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = ak$$

в направлении, обратном часовой стрелке, если смотреть с конца оси OZ (см. пример 1 этого параграфа). Вместе с тем точка перемещается вдоль оси OZ со скоростью $v_z = c$. Полная величина скорости:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{a^2 k^2 + c^2}.$$

Направление скорости, т. е. касательной к винтовой линии, определяется формулами:

$$\cos(\widehat{v, x}) = -\frac{ak \sin kt}{\sqrt{a^2 k^2 + c^2}}, \quad \cos(\widehat{v, y}) = \frac{ak \cos kt}{\sqrt{a^2 k^2 + c^2}}, \quad \cos(\widehat{v, z}) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + k^2}},$$

Годограф скорости есть окружность радиуса ak с центром на оси OZ в точке $v_z = c$; его уравнения:

$$v_x^2 + v_y^2 = a^2 k^2, \quad v_z = c.$$

Образующие прямого круглого конуса с вершиной в начале координат, имеющего в основании годограф, дают направление и величину скорости в различных положениях движущейся точки (рис. 75).

Годограф скорости

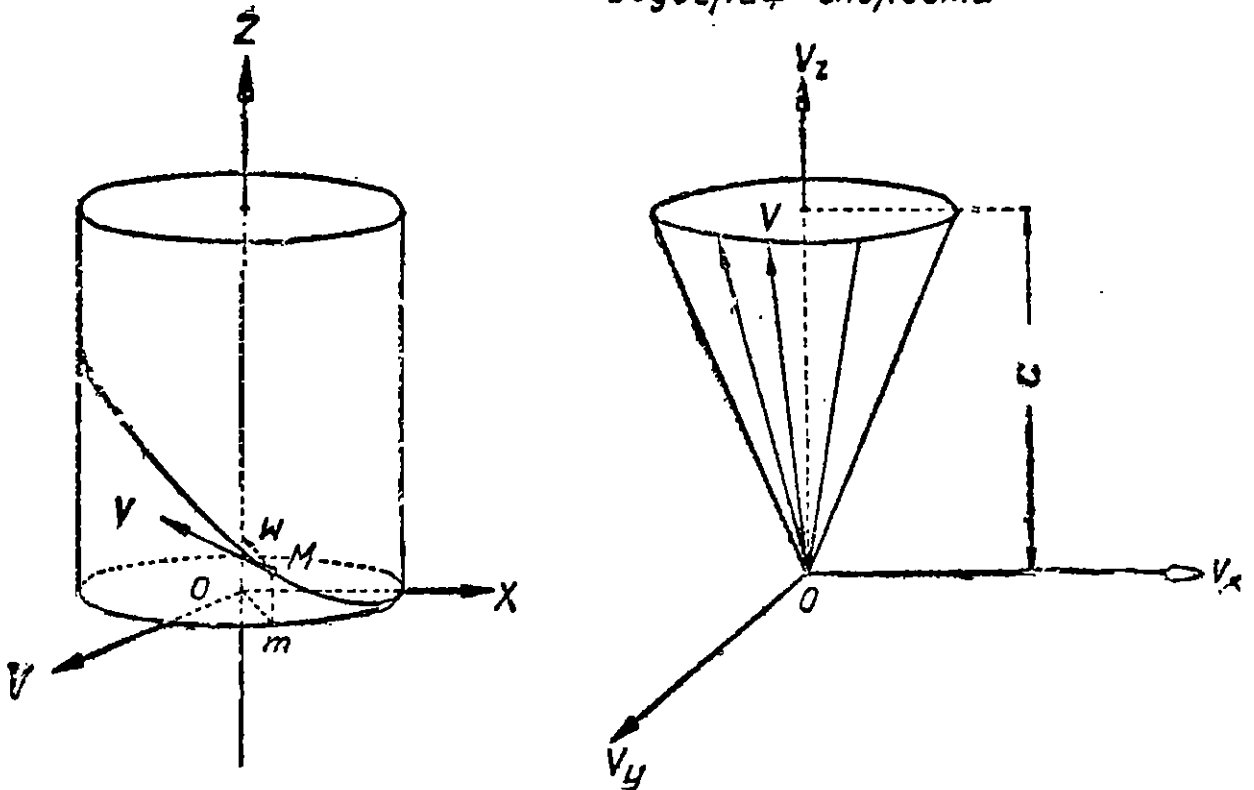


Рис. 75.

Этими тремя примерами на определение скорости мы пока ограничимся; многочисленные другие примеры будут разобраны в заданиях, посвященных ускорению.

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. Определить проекции скорости на оси в равномерном движении точки по окружности, найти уравнение и построить годограф скорости. Воспользоваться данными примера 1 задания 2.

2. То же для примера 2 задания 2.

3. Длина линейки эллипсографа (рис. 76) $AB = 2l = 20$ см. Кривошип OC вращается равномерно, делая 10 об/мин. Найти и по-

строить годограф скорости точки M , находящейся на расстоянии $AM = h = 8 \text{ см}$ от конца линейки.

4. Движение точки, описывающей фигуры Лиссажу, задается уравнениями:

$$\begin{aligned}x &= 2 \cos t \\y &= 3 \sin 2t.\end{aligned}$$

Построить по точкам траекторию; найти проекции скорости и по уравнению годографа скорости вычертить его.

5. Трамвай, двигаясь в горизонтальном направлении со скоростью $v_0 = 30 \text{ км/час}$, совершает вертикальные колебания на упругих рессорах амплитуды $a = 2 \text{ см}$ и периода $T = 0,5 \text{ сек}$. Сравнить максимальную вертикальную скорость с постоянной горизонтальной, выразив первую в процентах от второй.

6. Длина цепи мостового крана $l = 6 \text{ м}$. Груз, подвешенный к концу цепи, совершает колебания амплитуды $a = 30 \text{ см}$ и периода

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

в плоскости, перпендикулярной направлению движения крана.

Скорость движения крана постоянна и равна 1 м/сек . Считая

колебания груза в плоскости крана прямолинейными, определить проекции скорости его на направление движения крана и перпендикуляр к нему в горизонтальной плоскости и построить годограф скорости.

7. Построить по точкам годограф скорости середины шатуна кривошипного механизма при следующих данных:

$$\frac{a}{l} = \frac{1}{4}, \quad a = 15 \text{ см}, \quad \bar{\omega} = 2 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Сравнить построенную кривую с эллипсом):

$$\frac{x^2}{(a\omega)^2} + \frac{4y^2}{(a\omega)^2} = 1.$$

Задание 5-е.

Ускорение в криволинейном движении,

§ 21. Ускорение как вектор.

Понятие об ускорении в общем случае движения материальной точки (не прямолинейном) принадлежит к числу наиболее важных в Механике. Без отчетливого усвоения его невозможно сознательное

изучение Динамики. Поэтому изучающий должен с особым вниманием отнестись к содержанию этого и следующего задания.

Пусть в момент времени t движущаяся материальная точка, находясь в положении M , имела скорость, величина и направление которой определяются вектором v . В момент $t + \Delta t$ эта точка заняла положение (рис. 77) M_1 , имея скорость v_1 . Таким образом за промежуток времени Δt скорость получила геометрическое приращение

$$\Delta v = v_1 - v.$$

Вектор Δv можно построить, перенеся v_1 в точку M и найдя геометрическую разность v_1 и v . Составив отношение приращения Δv к промежутку времени Δt , мы получим некоторый вектор, имеющий то же направление, что и Δv . Обозначим его через w_{cp} и будем называть *средним ускорением за промежуток времени Δt* . Имеем:

$$w_{cp} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v}{\Delta t}. \quad (1)$$

Таким образом среднее ускорение характеризует среднее изменение скорости (по величине и направлению), отнесенное к единице времени.

Чтобы перейти теперь к определению истинного ускорения (или ускорения в данный момент), остается, уменьшая промежуток времени Δt , найти предел, к которому стремится отношение $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ при Δt стремящемся к нулю. Но этот предел, по определению производной вектор-функции, есть не что иное, как *производная вектора скорости v по времени*. Итак, вектор ускорения, характеризуя быстроту изменения вектора скорости, есть производная вектора-скорости по времени, т. е.

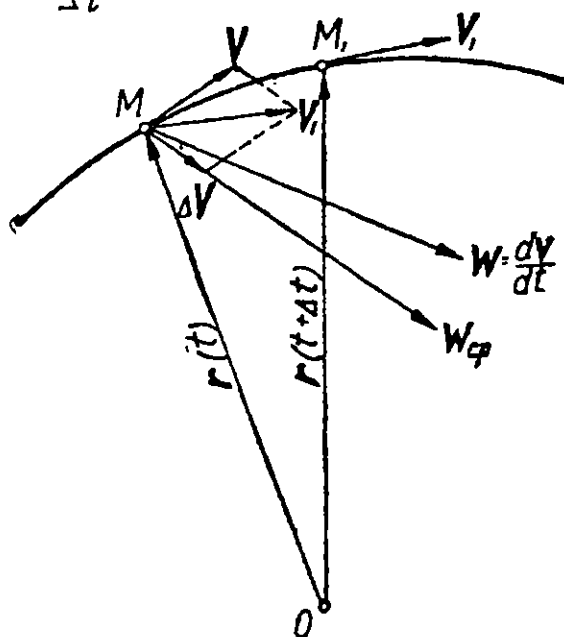


Рис. 77.

Чтобы предотвратить иногда встречающееся здесь недоразумение, мы должны остановить внимание учащегося на том факте, что из нашей формулировки *отнюдь не следует*, что

$$w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (2)$$

Чтобы предотвратить иногда встречающееся здесь недоразумение, мы должны остановить внимание учащегося на том факте, что из нашей формулировки *отнюдь не следует*, что

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = \left| \frac{dv}{dt} \right|,$$

т. е. что величина ускорения равна абсолютному значению производной величины скорости. Дело, конечно, в том, что величина производной вектора, как это уже подчеркивалось на стр. 87,

вовсе не равна абсолютному значению производной его величины. Возьмем для иллюстрации этого наглядный пример. Пусть движение материальной точки происходит с *постоянной по величине* скоростью по *криволинейной* траектории. По условию v (но не $v!$) постоянно, т. е.

$$\frac{dv}{dt} = 0.$$

Можно ли отсюда заключить, что и $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ также равно нулю?

Конечно нет. Имея постоянную величину, вектор скорости *изменяет* в криволинейном движении свое *направление и геометрическое приращение его $\Delta \mathbf{v}$ отнюдь не равно нулю*. Не равны нулю, следовательно, ни среднее ускорение, ни его предел, т. е. истинное ускорение.

Вместе с тем из сказанного следует, что только в *прямолинейном* движении с *постоянной скоростью* ускорение равно нулю в течение всего времени движения.

Итак, было бы не вполне точно дать определение ускорения как „производной скорости по времени“, ибо под словом „скорость“ можно было бы подразумевать только величину скорости. Говоря же „вектор скорости“, мы не рискуем сделать этой ошибки: термин „вектор“ с определенностью указывает, что данная физическая величина характеризуется не только своим численным значением, но и направлением; термином „производная вектора“ мы учитываем изменение и численного значения и направления последнего.

До сих пор мы имеем только принципиальное установление понятия ускорения. Нам остается теперь сделать из него необходимые выводы, которые дали бы возможность в каждом отдельном случае определить вектор ускорения, т. е. его величину и направление.

§ 22. Проекции ускорения на оси декартовой системы координат.

Мы знаем, что одним из способов задания вектора является задание его проекций на оси декартовой системы координат. Поэтому чтобы знать вектор ускорения, достаточно определить его проекции.

В § 19 было доказано, что проекции производной вектора равны производным его проекций. В нашем случае речь идет о производной вектора скорости $\mathbf{v}$, т. е. об ускорении $\mathbf{w}$ [см. формулу (2)]. Следовательно проекции этого последнего w_x, w_y, w_z на оси OX, OY, OZ суть производные соответствующих проекций v_x, v_y, v_z дифференцируемого вектора $\mathbf{v}$. Итак, имеем:

$$\boxed{w_x = \dot{v}_x, w_y = \dot{v}_y, w_z = \dot{v}_z} \quad (1)$$

Вспоминая, что в свою очередь

$$v_x = \dot{x}, v_y = \dot{y}, v_z = \dot{z},$$

получаем:

$$w_x = \ddot{x}, \quad w_y = \ddot{y}, \quad w_z = \ddot{z} \quad (2)$$

т. е. проекции ускорения на оси декартовой системы координат суть производные соответствующих проекций скорости или вторые производные соответствующих координат по времени.

Учащийся должен твердо усвоить этот результат.

Зная проекции вектора, мы можем определить его величину как корень квадратный из суммы квадратов его проекций. В данном случае имеем:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \quad (3)$$

Направление w мы можем определить заданием косинусов углов, составляемых им с осями:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{w, x}) &= \frac{w_x}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}} \\ \cos(\widehat{w, y}) &= \frac{w_y}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}} \\ \cos(\widehat{w, z}) &= \frac{w_z}{\sqrt{w_x^2 + w_y^2 + w_z^2}} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Примеры и упражнения.

1. Движение по кругу. В § 7, упражнение 1, было показано, что движение по кругу с постоянной скоростью может быть выражено помощью формул:

$$x = a \cos kt, \quad y = a \sin kt,$$

где $k = \frac{2\pi}{T}$.

Определим в этом движении проекции ускорения, его величину и направление. Имеем:

$$\begin{aligned} v_x = \dot{x} &= -ak \sin kt; & v_y &= ak \cos kt \\ w_x = \ddot{x} &= -ak^2 \cos kt; & w_y &= -ak^2 \sin kt. \end{aligned}$$

Величина ускорения, согласно формуле (3), будет:

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = ak^2.$$

Направление ускорения проще всего определить, обратив внимание на то, что

$$w_x = -ak^2 \cos kt = -k^2 x, \quad w_y = -ak^2 \sin kt = -k^2 y,$$

т. е. что проекции w противоположны по знаку и пропорциональны по величине координатам, т. е. проекциям вектор-радиуса r движущейся точки. Это показывает, что

$$w = -k^2 r,$$

т. е. что ускорение направлено к центру круга (рис. 78).

Заметим, что величина скорости в рассматриваемом движении постоянна:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = ak.$$

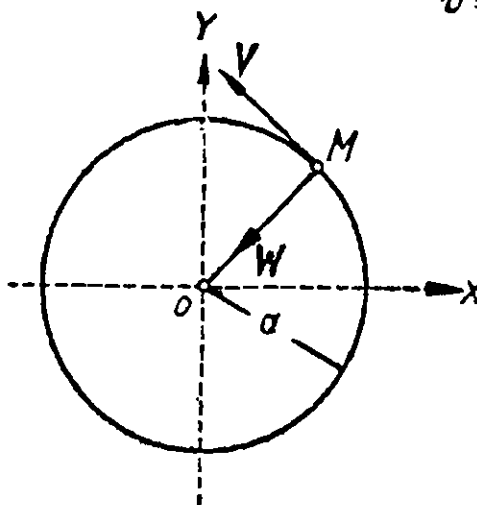


Рис. 78.

Таким образом пример иллюстрирует сказанное в предыдущем параграфе: скорость постоянна по величине, но ускорение не обращается в нуль, ибо движение происходит по криволинейной траектории и скорость все время изменяет свое направление.

2. В упражнении 1 § 20 задания 4 мы вычислили *скорость* метки, описывающей *фигуры Лиссажу* в случае одинаковых частот взаимно перпендикулярных колебаний. Определим теперь ее *ускорение*. Уравнения движения имеют вид:

$$x = a \sin(kt + \varphi_1), \quad y = b \sin(kt + \varphi_2).$$

Дифференцируя эти выражения два раза, получим:

$$w_x = \ddot{x} = -ak^2 \sin(kt + \varphi_1); \quad w_y = \ddot{y} = -k^2 b \sin(kt + \varphi_2).$$

Мы видим, что и в этом случае:

$$w_x = -k^2 x, \quad w_y = -k^2 y, \quad w = -k^2 r,$$

т. е. что и здесь ускорение всегда направлено к началу координат. Как учащийся увидит в Динамике, это объясняется тем обстоятельством, что и сила, действующая на движущуюся точку, также проходит постоянно через начало координат.

Пусть $a = b$. Разберем несколько частных случаев:

а) Разность фаз равна нулю: $\varphi_1 = \varphi_2$. Движение происходит по прямой линии (рис. 39 стр. 48):

$$x = y = a \sin(kt + \varphi_1).$$

Величина ускорения в этом случае равна

$$w = \sqrt{w_x^2 + w_y^2} = ak^2 \sqrt{2} |\sin(kt + \varphi_1)|.$$

б) Разность фаз равна $\frac{\pi}{2}$: $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. Уравнения движения принимают вид:

$$x = a \cos(kt + \varphi_2), \quad y = a \sin(kt + \varphi_2).$$

Движение происходит по кругу. Этот случай рассмотрен в предыдущем примере. Величина ускорения здесь постоянна.

в) Если разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, то движение происходит по прямой (рис. 39, стр. 48)

$$x = -y = a \sin(kt + \varphi_1).$$

Для величины ускорения получим, конечно, то же выражение, что и в случае а).

г) В общем случае какой угодно разности фаз движение происходит по эллипсу, расположенному, как указано на рис. 39, б при $\varphi_1 - \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$ и как указано на рис. 39, в при $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$; величина ускорения в обоих случаях будет

$$w = ak^2 \sqrt{\sin^2(kt + \varphi_1) + \sin^2(kt + \varphi_2)}.$$

3. Движение с постоянным ускорением. Рассмотрим случай движения с постоянным по величине и направлению ускорением. Такое движение будет совершать тяжелая точка, падающая близ поверхности земли под действием силы веса, если пренебречь сопротивлением воздуха. В этом случае, как известно читателю, ускорение равно по величине $g = 981 \text{ см/сек}^2$ и направлено вертикально вниз. Электрон, движущийся в однородном электрическом поле (между пластинами плоского конденсатора), также будет иметь постоянное ускорение,¹ перпендикулярное поверхности пластин.

Величину ускорения обозначим через a и выберем направление осей так, чтобы ось OY была направлена противоположно ускорению. Тогда будем иметь:

$$w_x = 0, \quad w_y = -a.$$

Определим скорость, уравнения движения и траекторию точки. Мы знаем вторые производные неизвестных нам функций времени x и y ; требуется найти их первые производные (проекции скорости) и сами эти функции. Задача должна быть решена интегрированием, подобно упражнению 1 § 13 задания 3. Вспоминая, что:

$$w_x = \dot{v}_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad w_y = \dot{v}_y = \frac{dv_y}{dt},$$

имеем:

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = -a,$$

откуда

$$v_x = C_1, \quad v_y = -\int a dt = -at + C_2.$$

При интегрировании можно было вынести a за знак интеграла, ибо ускорение, по условию, постоянно: C_1 и C_2 суть произвольные постоянные интегрирования. Для определения их должны быть

¹ Ускорение равно $\frac{e}{m} E$, где e — заряд электрона, m — его масса, E — напряженность поля, т. е. разность потенциалов между пластинами, деленная на расстояние между ними.

заданы начальные условия, т. е. величина и направление скорости в начальный момент времени; пусть при $t=0$, $v=v_0$ и направление начальной скорости лежит в плоскости XY и составляет угол α с осью OX (рис. 79). В таком случае проекции начальной скорости на оси будут:

$$v_{ox} = v_0 \cos \alpha, \quad v_{oy} = v_0 \sin \alpha.$$

Но проекция скорости на ось OX постоянна в течение всего времени движения и, следовательно, остается равной своему начальному значению. Итак:

$$v_x = v_{ox} = v_0 \cos \alpha.$$

Остается определить C_2 . Подставляя в выражение для v_y вместо t нуль, получим:

$$(v_y)_{t=0} = C_2,$$

но при $t=0$, т. е. в начальный момент:

$$v_y = v_{oy} = v_0 \sin \alpha.$$

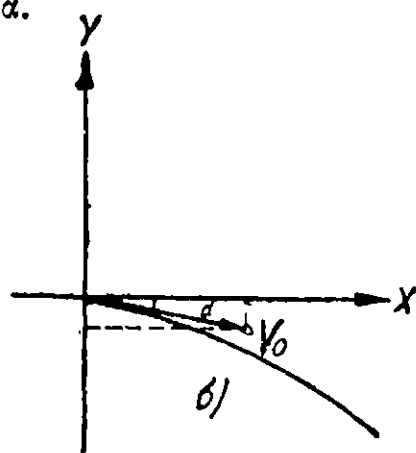
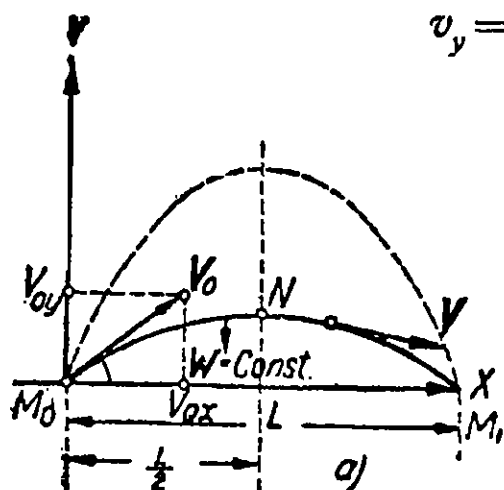


Рис. 79.

Следовательно

$$C_2 = v_{oy} = v_0 \sin \alpha.$$

и мы имеем:

$$v_y = -at + v_0 \sin \alpha.$$

Перейдем к уравнениям движения. Имеем:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos \alpha, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -at + v_0 \sin \alpha,$$

откуда следует, что

$$dx = v_0 \cos \alpha \cdot dt, \quad dy = (-at + v_0 \sin \alpha) dt.$$

Интегрируя, найдем:

$$x = \int v_0 \cos \alpha \cdot dt = v_0 t \cos \alpha + C_3,$$

$$y = \int (-at + v_0 \sin \alpha) dt = -a \int t dt + v_0 \sin \alpha \int dt = -\frac{at^2}{2} + v_0 t \sin \alpha + C_4.$$

Результат интегрирования содержит еще две произвольных постоянных C_3, C_4 . Для определения их нужно задать значение x и y в начальный момент движения, т. е. начальное положение движущейся точки. Таким образом прежде введенных начальных условий оказалось недостаточно для полного определения движения: полная система начальных условий должна определять не только начальную скорость, но и начальное положение движущейся точки. Впрочем физическое значение имеет только начальная скорость, так как, выбирая надлежащим образом начало координатных осей, мы можем придать начальным значениям x и y те значения, которые нам будут желательны — этим и пользуются, чтобы упростить получаемые уравнения движения.

Возвращаясь к нашему случаю, возьмем, например, начало координат в начальном положении движущейся точки. Это дает условие:

$$\text{при } t=0, \quad x=0, \quad y=0.$$

Подставляя в выражения для x и y их начальные значения, а вместо t нуль, получим:

$$0 = C_3, \quad 0 = C_4.$$

Окончательно мы найдем:

$$\begin{aligned} x &= v_0 t \cdot \cos \alpha \\ y &= v_0 t \sin \alpha - \frac{at^2}{2}. \end{aligned}$$

Чтобы получить теперь *траекторию*, нужно исключить время из уравнений движения; из первого уравнения находим:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha};$$

подставляя во второе уравнение, получим:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{ax^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

Итак y оказывается функцией второй степени от x , т. е. траектория движущейся точки есть парабола. Займемся ее построением.

Заметим прежде всего, что направление оси OX может быть всегда выбрано так, чтобы проекция начальной скорости на ось OX была положительной, т. е. чтобы $\cos \alpha > 0$ или $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.¹

В таком случае во все время движения

$$x = v_0 t \cos \alpha$$

будет оставаться положительным.

Найдем теперь точки пересечения кривой с осями координат. Полагая в уравнении траектории $y=0$, получим:

$$x \operatorname{tg} \alpha - \frac{ax^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0,$$

¹ Напомним, что направлением оси OY мы уже распоряжаться не можем, ибо оно выбрано противоположно ускорению.

откуда найдем:

$$x=0 \text{ или } x=\frac{v_0^2}{a} \sin 2\alpha.$$

Первый корень соответствует началу координат ($x=0$, $y=0$), в котором кривая пересекает обе оси OX и OY , что было заранее известно. Второй корень соответствует определенной точке пересечения кривой с осью OX лишь в том случае, если он положителен. Это будет иметь место, если $\sin 2\alpha > 0$, т. е. $\alpha > 0$ (ибо по условию, $|\alpha| < \frac{\pi}{2}$).

Дальнейшее исследование, таким образом, разбивается на два случая:

1) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Кривая пересекает ось OX в точке: $x=L=$
 $=\frac{v_0^2}{a} \sin 2\alpha$. Величина L называется *дальностью полета*. При задании v_0 максимальное значение дальности полета достигается при $\sin 2\alpha=1$, т. е. при $\alpha=45^\circ$; при этом $L_{\max}=\frac{v_0^2}{a}$. Заметим еще, что одна и та же дальность полета достигается при двух различных значениях угла α , ибо $\sin 2\alpha$ принимает одинаковое значение при $\alpha=\alpha_0$ и $\alpha=90-\alpha_0$; например, при $\alpha=30^\circ$, $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, но и при $\alpha=60^\circ$, $\sin 2\alpha=\sin 120^\circ=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Найдем еще вершину кривой. Для этого надо найти максимум y ; можно было бы приравнять нулю производную от y по x , но можно этого и не делать; достаточно сообразить, что y достигает максимального значения в тот момент, когда v_y обращается в нуль. В этот момент времени скорость точки равна своей проекции на ось OX и, следовательно, касательная к траектории параллельна оси OX . Приравнявая v_y нулю, получаем:

$$v_0 \sin \alpha - at = 0, \text{ т. е. } t = \frac{v_0 \sin \alpha}{a}.$$

В рассматриваемом случае $\sin \alpha > 0$, а следовательно и $t > 0$, т. е. кривая действительно имеет вершину. Найдем ее положение. Подставив для этого в уравнения движения полученное значение t , будем иметь:

$$x = \frac{v_0^2}{a} \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{L}{2}, \quad y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2a}.$$

Траектория построена на рис. 79а для двух значений угла α , дополняющих друг друга до 90° . Употребляя принятую в артиллерии терминологию, можно назвать параболу, соответствующую меньшему назначению угла α *настильной*, а большему α — *навесной* траекторией (пунктирная кривая).

Применим полученные формулы к численным примерам:

а) Струя воды выбрасывается пожарным рукавом под углом 30° к горизонту. Рукав поддерживается на высоте 1,5 м от земли, и струя падает на землю на расстоянии 25 м от места выхода. Определим по этим данным начальную скорость и построим траекторию частиц воды.

Для определения v_0 подставляем в уравнение траектории $\alpha = 30^\circ$, $x = 25$ м, $y = -1,5$ м, $a = g = 9,81$ м/сек², получаем:

$$-1,5 = 25 \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{9,81}{2v_0^2} \frac{25^2}{4}, \quad v_0 \cong 16 \text{ м/сек.}$$

Чтобы построить траекторию, вычисляем:

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha = \frac{256}{9,81} \frac{\sqrt{3}}{2} = 22,6 \text{ м}, \quad y_{\max} = 3,26 \text{ м.}$$

По этим данным парабола может быть построена при помощи одного из известных способов (см. например „Hütte“, том I, стр. 110, изд. 13).

б) Германская винтовка сообщает пуле начальную скорость $v_0 = 630$ м/сек. Максимальная дальность полета при этой скорости будет:

$$L_{\max} = \frac{v_0^2}{g} \cong 39 \text{ км.}$$

Фактически же благодаря сопротивлению воздуха винтовка бьет не далее чем на 4 км и не при $\alpha = 45^\circ$, а при $\alpha = 32^\circ$. Максимальная высота подъема не превосходит при этом 1 км, в то время как в пустоте имели бы (при $\alpha = 32^\circ$)

$$y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} \cong 5 \text{ км.}$$

Перейдем теперь к рассмотрению второго случая:

2) $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq 0$. Здесь $\sin \alpha < 0$ и y постоянно остается отрицательным. Кривая не имеет вершины, за исключением случая $\alpha = 0$, когда вершина есть начало координат. Траектория представлена на рис. 796.

Приведем один численный пример: электрон вступает в однородное электрическое поле с начальной скоростью $v_0 = 10^8$ см/сек; $\alpha = 0$, т. е. направление начального движения электрона параллельно пластинам конденсатора; примем еще $E = 1$ вольт/см, получим

$$y = -\frac{ax^2}{2v_0^2} = -\frac{Ee}{2mv_0^2}, \quad x^2 = \frac{10^8}{2 \cdot 10^{16}} x^2 \frac{e}{m}^1 = 5 \cdot 10^{-9} \frac{e}{m} x^2.$$

¹ 1 вольт = 10^8 абс. элм.г. единиц.

Эта формула позволяет вычислить по наблюдаемым y и x отношение $\frac{e}{m}$.

Построим еще в заключение годограф скорости в рассматриваемом движении. Так как (стр. 104)

$$v_x = v_0 \cos \alpha = \text{const},$$

то годограф скорости есть прямая, параллельная оси v_y и находящаяся от начала координат на расстоянии $v_0 \cos \alpha$ (рис. 80). Чтобы

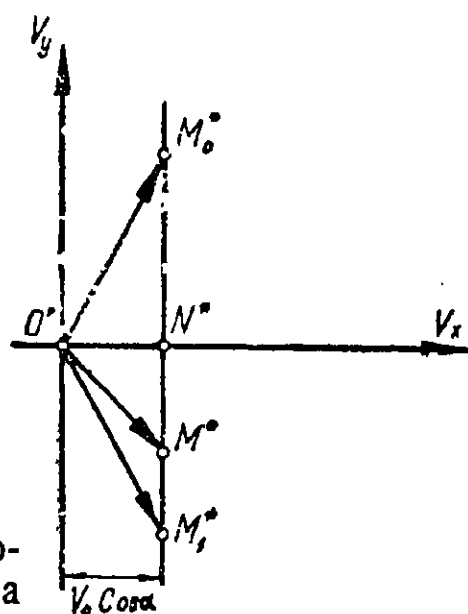
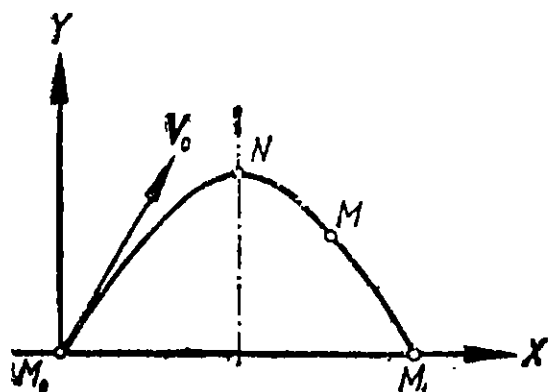


Рис. 80.

найти скорость движущейся точки в тот момент, когда она занимает положение M на своей траектории, нужно через полюс O^*

годографа провести вектор $\overrightarrow{O^*M^*}$, параллельный касательной к траектории в точке M . При движении по восходящей ветви параболы конец вектора скорости описывает отрезок $\overline{M_0^*N^*}$ годографа, при движении по нисходящей ветви он описывает отрезок $\overline{M_1^*N^*}$.

4. Движение по циклоиде. Колесо радиуса a катится без скольжения по прямой линии (рельсу). Пусть скорость центра колеса постоянна и равна v_0 . Напишем уравнения движения какой-либо точки на ободе колеса, найдем ее скорость и ускорение.

Рассмотрим траекторию точки M . Отложим от точки касания N в сторону, противоположную движению колеса, отрезок $\overline{NO} = \overline{NM}$ и примем точку O за начало координат. Угол $\angle MCN$ обозначим через φ . Из рис. 81 имеем:

$$x = \overline{OK} = \overline{ON} - \overline{CS} = \overline{NM} - \overline{CS} = a\varphi - a \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) = a(\varphi - \sin \varphi),$$

$$y = \overline{MK} = \overline{MS} + \overline{SK} = a + a \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = a(1 - \cos \varphi).$$

Остается выразить φ в функции от времени; так как скорость в центре постоянна, то пройденный им путь $s = v_0 t$; но движение

диаметра катящегося круга. Заметим еще, что $2a \sin \frac{kt}{2} = \overline{NM}$ и, следовательно, величина скорости

$$v = k \cdot \overline{NM} = \overline{NM} \cdot \frac{v_0}{a}.$$

Итак величина скорости любой точки окружности равна произведению постоянной величины k на длину радиус-вектора, соединяющего точку окружности с точкой соприкосновения; направление скорости перпендикулярно этому радиус-вектору. Мы вернемся еще к этому вопросу при изучении плоского движения (мгновенный центр).

Определим теперь пройденный точкой M путь; имеем:

$$v = \frac{ds}{dt},$$

откуда

$$ds = v dt = 2ak \left| \sin \frac{kt}{2} \right| dt, \quad s = \int_0^t 2ak \left| \sin \frac{kt}{2} \right| dt.$$

Пусть $t \leq \frac{2\pi}{k}$, т. е. $\varphi \leq 2\pi$; $\sin \frac{kt}{2} \geq 0$ и мы имеем

$$s = 2ak \int_0^t \sin \frac{kt}{2} dt = 4a \left(1 - \cos \frac{kt}{2} \right).$$

При $\varphi = 2\pi$, получаем: $s = 8a$, т. е. полная длина дуги циклоиды равна учетверенному диаметру катящегося круга. Заметим еще, что

$$\cos kt = 1 - \frac{y}{a}, \quad \cos^2 \frac{kt}{2} = \frac{1 + \cos kt}{2} = \frac{2a - y}{2a}$$

и следовательно:

$$s = 4a \left(1 - \sqrt{\frac{2a - y}{2a}} \right).$$

Перейдем к ускорению. Имеем:

$$w_x = \dot{v}_x = ak^2 \sin kt, \quad w_y = \dot{v}_y = ak^2 \cos kt, \quad w = ak^2$$

$$\cos(\widehat{w, x}) = \sin kt = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right), \quad \cos(\widehat{w, y}) = \cos kt = \cos \varphi.$$

Итак, ускорение постоянно по величине и составляет углы:

$$\angle(w, x) = \frac{\pi}{2} - \varphi, \quad \angle(w, y) = \varphi$$

с осями координат. Это показывает, что ускорение всегда проходит через центр катящегося круга. Мы поймем причину этого при изучении плоского движения.

Построим, в заключение, годографы скорости и ускорения точки катящегося круга (рис. 82). Имеем:

$$v_x = ak(1 - \cos kt)$$

$$v_y = ak \sin kt.$$

Исключая время, найдем:

$$(v_x - ak)^2 + v_y^2 = (ak)^2.$$

Это — уравнение круга, проходящего через полюс годографа, с центром на оси v_x в точке $v_x = ak$ и радиуса ak , равного скорости центра катящегося круга (рис. 82). Годограф ускорения есть окружность с центром в полюсе годографа и радиуса ak^2 :

$$w_x = ak^2 \sin kt, \quad w_y = ak^2 \cos kt, \quad w_x^2 + w_y^2 = (ak^2)^2.$$

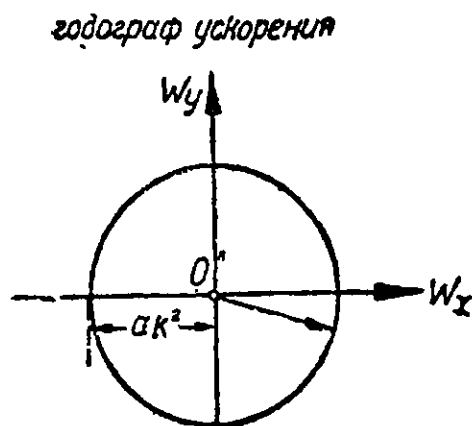
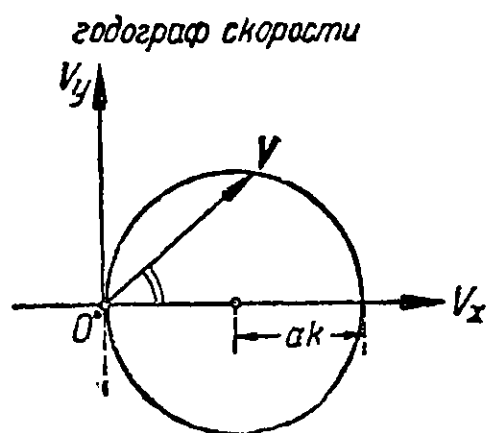
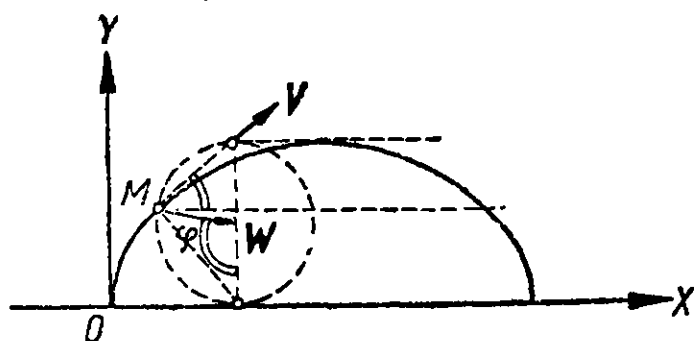


Рис. 82.

5. Движение по винтовой линии. В § 20 было рассмотрено движение по винтовой линии, определяемое уравнениями:

$$x = a \cos kt, \quad y = a \sin kt, \quad z = ct.$$

Определим величину и направление ускорения в этом движении. Имеем:

$$w_x = \ddot{x} = -k^2 a \cos kt, \quad w_y = -k^2 a \sin kt, \quad w_z = 0, \quad w = ak^2,$$

$$\cos(\hat{w}, x) = -\cos kt, \quad \cos(\hat{w}, y) = -\sin kt, \quad \cos(\hat{w}, z) = 0.$$

Ускорение направлено по перпендикуляру, опущенному из движущейся точки на ось цилиндра (рис. 75).

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. Вектор ускорения имеет направление касательной к годографу скорости. Почему?

2. Пуля, выпущенная из трехлинейной винтовки с начальной скоростью 800 м/сек под углом $3^\circ 40'$, бьет на 2500 м, падает под углом 8° , имеет скорость при падении 200 м/сек и летит 5,7 сек. Сравните эти данные с теми, которые получились бы, если можно было бы пренебречь сопротивлением воздуха: 1) принимая те же начальные данные 800 м/сек и $3^\circ 40'$, найдите разницу в последующих числах, 2) принимая $3^\circ 40'$ и 2500 м расстояния, определите необходимую для этого начальную скорость.

3. Построить годограф скорости снаряда, выпущенного со скоростью 300 м/сек из орудия, ось которого составляет угол 30° с горизонтом.

4. Мостовой кран идет вдоль мастерской с постоянной скоростью 2 м/сек, по нему катится в поперечном направлении тележка с постоянной скоростью 2,5 м/сек; одновременно с этим поднимают груз с постоянным ускорением $w = 0,1$ м/сек. Написать уравнения движения груза, определить траекторию и скорость.

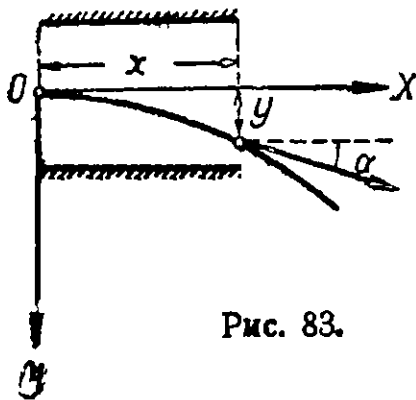


Рис. 83.

5. Электрон вступает в однородное электрическое поле напряжения $E = 2$ вольт/см со скоростью $v_0 = 10^8$ см/сек нормально к направлению поля. Определить смещение электрона y (рис. 83) от прямолинейного пути и угол выхода его α на участке длины

$$x = 5 \text{ см}; \quad \frac{e}{m} = 1,769 \cdot 10^7 \text{ абс. элмагн. ед.}$$

6. Паровоз движется со скоростью 60 км/час; радиус колеса его 1 м. Определить скорость и ускорение точки M обода и построить график зависимости величины скорости от времени, а также годографы скорости и ускорения.

7. Показать, что в случае движения точки по фигуре Лиссажу:

$$\begin{aligned} x &= 2 \sin t \\ y &= 3 \cos 2t; \end{aligned}$$

годограф ускорения будет отрезком параболы, заключенной в прямоугольнике со сторонами 4 и 24.

8. Определить в функции времени проекции ускорения середины шатуна кривошипного механизма и построить годограф ускорения, воспользовавшись данными примера 7 задания 4.

Задание 6-е.

Ускорение в криволинейном движении (продолжение).

Определение ускорения по его проекциям требует задания декартовых координат движущейся точки в функции времени. В том

случае, когда известна траектория и уравнение пройденного пути, нужно дать для определения ускорения метод, непосредственно связанный с этим способом задания движения. Вместо проектирования ускорения на искусственно вводимую систему декартовых осей является более целесообразным с точки зрения упрощения выкладок и большей физической наглядности разложение ускорения по направлениям, тесно связанным с самой траекторией. Получаемые результаты вместе с тем имеют весьма большое прикладное значение, служа основой часто встречающихся в инженерной практике расчетов так называемых „центробежных сил“.

§ 23. Некоторые сведения из геометрии.

Предварительно нам нужно сделать небольшое отступление в область геометрии.

Пусть дана некоторая кривая, вообще говоря, не плоская, а двоя-
кой кривизны (рис. 84). Установив на этой кривой начало отсчета дуг в точке M_0 и положительное направление его, будем определять положение какой-либо точки M на

кривой при помощи дуги $\overset{\frown}{MM_0} = \sigma$. Вместе с тем положение точки M может быть определено вектор-радиусом r , который будет заданной вектор-функцией дуги σ . Производная его по σ , как показано в § 4 задания 4, есть не что иное, как *единичный вектор (орт) касательной к кривой*:

$$\tau = \frac{dr}{d\sigma}. \quad (1)$$

Возьмем на кривой весьма близкую к M точку M_1 ; пусть положение ее определяется значением дуги $\sigma + \Delta\sigma$, причем $\Delta\sigma > 0$, т. е. M_1 лежит за M в сторону положительного отсчета дуги. Орт касательной в точке M_1 обозначим через τ_1 . Проведем через τ плоскость Π параллельную τ_1 ; чтобы построить ее, достаточно перенести τ_1 в точку M ; два вектора τ и τ_1 , имеющие начало в точке M , и определяют положение Π . При изменении положения M_1 плоскость Π , очевидно также, вообще говоря, изменяет свое положение, вращаясь вокруг τ ; если мы будем приближать M_1 к M , уменьшая $\Delta\sigma$ до нуля, то эта плоскость будет приближаться к некоторому предельному положению Π_0 , называемому *соприкасающейся плоскостью*.

В точке M проведем далее плоскость, перпендикулярную касательной. Эта плоскость называется *нормальной плоскостью* кривой. Очевидно, что любая прямая, проведенная в этой плоскости через точку M , будет перпендикулярна τ , т. е. будет *нормалью* кривой; линия пересечения нормальной и соприкасающейся плоскости опре-

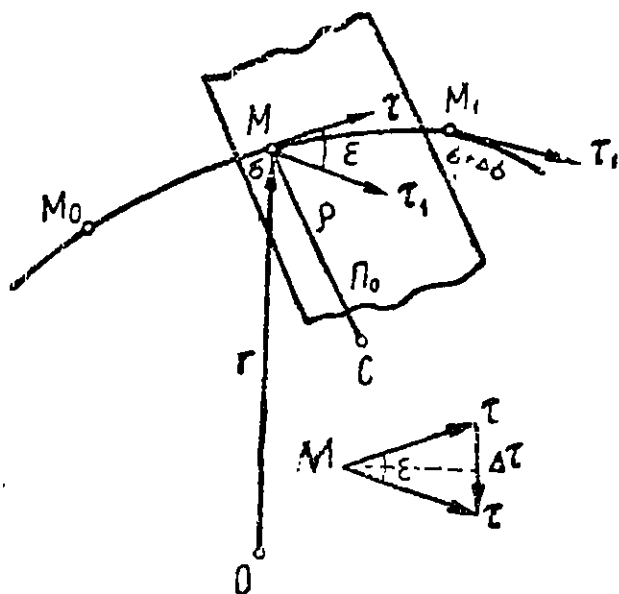


Рис. 84.

деляет *главную нормаль* кривой. Иными словами, *главной нормалью* называется нормаль, лежащая в *соприкасающейся плоскости*. Нормаль, перпендикулярная главной нормали, называется *бинормалью* кривой.

Если, в частности, кривая — плоская, то соприкасающаяся плоскость есть плоскость, в которой кривая лежит. Нормаль, в ней проведенная, и будет *главной нормалью*.

Для дальнейшего нам надо дать определение понятия *кривизны кривой*. Проведем для этого касательную к кривой в какой-либо ее точке M . При перемещении из M в M_1 эта касательная повернется на некоторый угол ε , так называемый *угол смежности*. Отношение этого угла к длине дуги $\Delta\sigma = \overset{\frown}{MM_1}$, определяющее поворот касательной, рассчитанный на единицу длины дуги, называется *средней кривизной* $K_{\text{ср}}$ кривой на участке $\overset{\frown}{MM_1}$:

$$K_{\text{ср}} = \frac{\varepsilon}{\Delta\sigma}.$$

Очевидно, что чем меньше повернется касательная на данном участке $\Delta\sigma$, тем меньше кривизна. При перемещении вдоль прямой поворота вообще не будет, т. е. *кривизна прямой линии равна нулю*. Рассмотрим еще случай окружности. Заметим, что здесь угол между касательными равен углу между перпендикулярными им радиусами, проведенными в точки касания (рис. 85), т. е. $\varepsilon = \Delta\varphi$; но

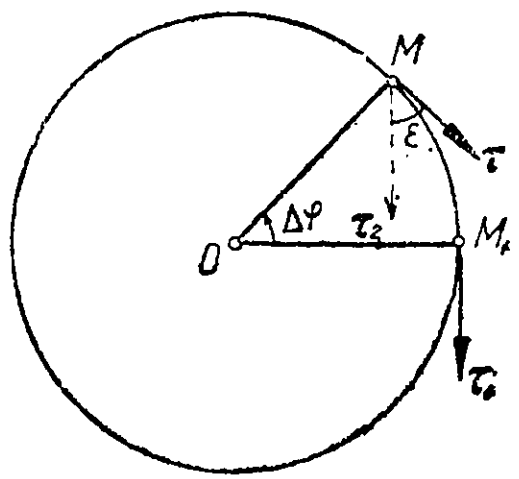


Рис. 85.

$$\overset{\frown}{MM_1} = \Delta\sigma = R \Delta\varphi,$$

где R — радиус круга. Итак, в случае окружности:

$$K_{\text{ср}} = \frac{\varepsilon}{\Delta\sigma} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma} = \frac{1}{R},$$

т. е. средняя кривизна окружности обратна радиусу и следовательно, одинакова на всех точках.

Перейдем к определению *понятия кривизны кривой в данной точке*. Очевидно, что чем меньший участок $\Delta\sigma$ мы возьмем для характеристики кривизны кривой на этом участке, тем лучше будет охарактеризована кривизна в окрестности данной точки. Поэтому естественно *кривизной кривой в данной точке назвать предел средней кривизны при $\Delta\sigma$, стремящемся к нулю*.

Обозначая ее буквой K , имеем таким образом:

$$K = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} K_{\text{ср}} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\varepsilon}{\Delta\sigma} \tag{2}$$

В случае окружности $K_{\text{ср}} = \frac{1}{R}$ есть постоянная величина. По-

этому и предел $K_{\text{ср}}$, как постоянной, равен этой постоянной, т. е. для окружности

$$K = \frac{1}{R}, \quad R = \frac{1}{K}.$$

По аналогии с этим в общем случае какой угодно кривой величину, обратную кривизне называют *радиусом кривизны кривой в данной точке*. Обозначая радиус кривизны буквой ρ , имеем:

$$\boxed{\rho = \frac{1}{K}}. \quad (3)$$

Отложим от точки M по главной нормали кривой в сторону вогнутости ее отрезок, равный по величине радиусу кривизны $MC = \rho$. Конец C этого отрезка называется *центром кривизны кривой*. Очевидно, что в случае окружности центр кривизны будет центром окружности.

Мы имеем теперь все необходимые предварительные сведения для вывода весьма важной для последующего формулы.

Обозначим через $\Delta\tau$ геометрическую разность τ_1 и τ и рассмотрим вектор

$$a_{\text{ср}} = \frac{\tau_1 - \tau}{\Delta\sigma} = \frac{\Delta\tau}{\Delta\sigma} \quad (4)$$

Этот вектор лежит в плоскости векторов τ_1 и τ , т. е. в упомянутой выше плоскости Π . Величина его равна

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta\tau}{\Delta\sigma} \quad (5)$$

но $\Delta\tau$ есть основание равнобедренного треугольника, образованного векторами τ и τ_1 (вспомнить что $\tau = \tau_1 = 1$). Поэтому

$$\frac{\Delta\tau}{2} = 1 \cdot \sin \frac{\epsilon}{2},$$

откуда следует, что

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta\tau}{\Delta\sigma} = \frac{2 \sin \frac{\epsilon}{2}}{\Delta\sigma} = \frac{2 \sin \frac{\epsilon}{2}}{\epsilon} \cdot \frac{\epsilon}{\Delta\sigma} = \frac{2 \sin \frac{\epsilon}{2}}{\epsilon} K_{\text{ср}} \quad (6)$$

Перейдем к пределу, полагая, что $\Delta\sigma$ стремится к нулю. Тогда из ур-ния (4) найдем:

$$a = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} a_{\text{ср}} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta\sigma} = \frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Мы можем сделать теперь следующие заключения насчет вектора a : 1) он лежит в соприкасающейся плоскости, являющейся предельным положением плоскости Π ; 2) имеет величину, равную кривизне кривой в данной точке, ибо:

$$a = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} a_{\text{ср}} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} K_{\text{ср}} \frac{2 \sin \frac{\epsilon}{2}}{\epsilon} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} K_{\text{ср}} \cdot \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\epsilon}{2}}{\epsilon} = K \cdot 1 = K;$$

3) перпендикулярен касательной, ибо производная вектора постоянной длины перпендикулярна самому вектору и в частности $\frac{d\tau}{ds}$ перпендикулярен τ ; 4) направлен в сторону вогнутости кривой, ибо таково направление $\Delta\tau$ (рис. 86 а и б).

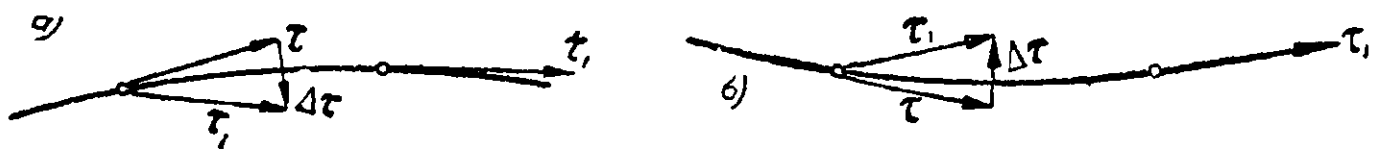


Рис. 86.

Из 1), 3) и 4) следует, что вектор $a = \frac{d\tau}{ds}$ направлен по главной нормали кривой к центру кривизны. Обозначая через n единичный вектор, отложенный по главной нормали к центру кривизны (орт главной нормали), имеем, таким образом:

$$a = Kn,$$

ибо направления и величины векторов в правой и левой части равенства одинаковы. Итак:

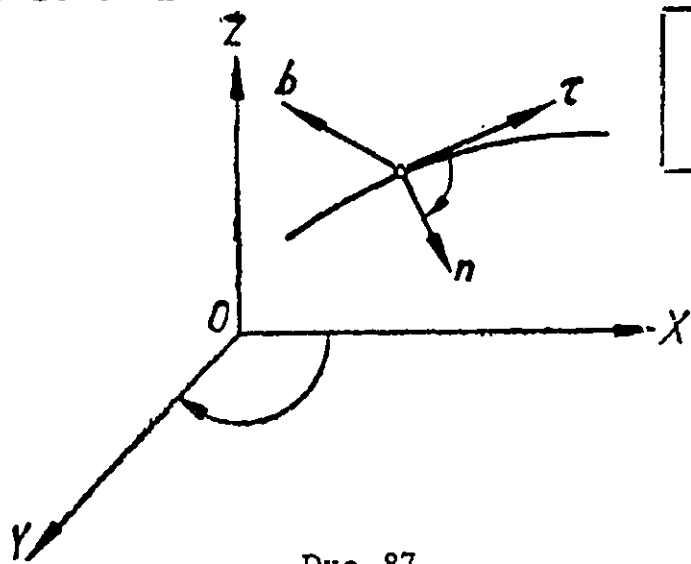


Рис. 87.

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{n}{\rho} = Kn$$

(7)

Совокупность трех взаимно перпендикулярных направлений:

- 1) касательной, направленной в сторону возрастания дуги τ ,
- 2) главной нормали, направленной к центру кривизны кривой (n), и
- 3) бинормали b , направленной по отношению к касательной и

главной нормали так же, как ось OZ расположена по отношению к осям OX и OY — образует так называемый *натуральный триэдр* (трехосник) кривой (рис. 87). В следующем параграфе, пользуясь формулой (7), мы без труда получим разложение ускорения по осям натурального триэдра.

§ 24. Проекции ускорения на оси натурального триэдра.

За положительное направление отсчета дуги траектории примем направление движения; тогда τ будет иметь то же направление, что и вектор скорости v , и мы можем написать:

$$v = v\tau,$$

(1)

где v — величина скорости, равная:

$$v = \dot{s} = \dot{\sigma},$$

(2)

ибо $|\dot{\sigma}| = \dot{\sigma}$, так как по условию отсчет дуги производится в сторону движения, т. е. $\dot{\sigma} > 0$.

Вспомним теперь, что вектор ускорения есть производная по времени вектора скорости, т. е.

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\tau).$$

Дифференцирование произведения вектора на скалярную величину производится согласно тому же правилу, что и дифференцирование произведения двух функций. Получаем:

$$\mathbf{w} = \frac{dv}{dt} \cdot \tau + v \frac{d\tau}{dt}. \quad (3)$$

Имеем:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\tau}{d\sigma} \dot{\sigma};$$

согласно формулам (2) этого параграфа и (7) § 23, найдем:

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{n}{\rho} v.$$

Подставляя это в формулу (3), получим:

$$\boxed{\mathbf{w} = \tau \frac{dv}{dt} + n \frac{v^2}{\rho}} \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{w}_1 = \tau \frac{dv}{dt}, \quad \mathbf{w}_2 = n \frac{v^2}{\rho} \quad (5)$$

и назовем $\mathbf{w}_1$ касательным, $\mathbf{w}_2$ нормальным или центростремительным ускорением.

Мы получаем, таким образом, теорему: ускорение в криволинейном движении является геометрической суммой двух ускорений, нормального и касательного:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2. \quad (6)$$

Нормальное ускорение $\mathbf{w}_2$ направлено по главной нормали к траектории к центру кривизны ее ¹ и равно по величине

$$\boxed{w_2 = \frac{v^2}{\rho}} \quad (7)$$

Касательное ускорение ² совпадает по направлению с τ или, что то же самое, с $\mathbf{v}$, если $\frac{dv}{dt} > 0$, т. е. если скорость возрастает со временем; оно противоположно по направлению скорости $\mathbf{v}$

¹ Этим объясняется наименование „центростремительное“ ускорение.

² Или тангенциальное.

если последняя со временем убывает. Величина касательного ускорения равна абсолютному значению производной скорости по времени:

$$w_1 = \left| \frac{dv}{dt} \right| = |\ddot{s}|$$

(8)

Заметим еще, что, ускорение лежит в плоскости векторов τ и n , т. е. в соприкасающейся плоскости; иными словами, проекция ускорения на третье направление натурального триэдра, бинормаль, равна нулю.

Мы обозначили выше, согласно принятому условию, величины векторов w_1 и w_2 светлым курсивом; проекции же w на касательную и главную нормаль будем обозначать через w_τ и w_n .

Очевидно, что $w_2 = w_n$, ибо w_2 всегда направлено в положительную сторону главной нормали (к центру кривизны), т. е. всегда $w_n > 0$; что же касается w_τ , то

$$w_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s},$$

(8a)

ибо касательное ускорение w_1 имеет направление скорости, т. е. проекция его w_τ положительна, при $\frac{dv}{dt} > 0$; при $\frac{dv}{dt} < 0$, w_1 направлено противоположно скорости, т. е. w_τ отрицательно.

Приводим в заключение таблицу встречающихся нормальных ускорений

Т а б л и ц а 5

Д в и ж е н и е	Нормальное ускорение в м/сек ²	П р и м е ч а н и е
Луна вокруг земли	$2,7 \times 10^{-3}$	—
Земля вокруг солнца	$5,9 \times 10^{-3}$	—
Ускорение поезда на закруглении	$5,6 \times 10^{-1}$	$\rho = 500 \text{ м}; v = 60 \text{ км/час.}$
Ускорение на ободе маховика паровой машины	$1,5 \times 10^3$	Диаметр = 3 м, число оборотов в минуту $n = 300$.
Ускорение на конце пропеллера .	$1,4 \times 10^4$	Диаметр = 2,5 м, число оборотов в минуту $n = 1\,000$.
Ускорение на ободе диска турбины Лаваля	$4,9 \times 10^6$	Диаметр = 1 м, число оборотов в минуту $n = 30\,000$.

Будучи геометрической суммой векторов w_1 и w_2 , ускорение w по величине и направлению изображается диагональю прямоугольника,

на них построенного (рис. 88). Величина w определяется обычным путем:

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = \sqrt{\frac{v^4}{\rho^2} + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}, \quad (9)$$

а направление — косинусами углов, составляемых с касательной и главной нормалью к траектории:

$$\cos(\widehat{w, \tau}) = \frac{w_\tau}{w}, \quad \cos(\widehat{w, n}) = \frac{w_n}{w}. \quad (10)$$

Отметим два частных случая:

а) Случай *равномерного* движения; скорость постоянна, т. е.

$$\frac{dv}{dt} = 0, \quad w_\tau = 0, \quad w = w_n = n \frac{v^2}{\rho}.$$

Величина ускорения w равна в этом случае w_n :

$$w = \frac{v^2}{\rho}.$$

б) Случай *прямолинейного* движения; кривизна прямой линии равна нулю.

Получаем:

$$w_n = 0, \quad w = w_\tau = \tau \frac{dv}{dt}, \quad w_\tau = \frac{dv}{dt} = \ddot{s}.$$

Рис. 88.

Из сопоставления этих двух случаев следует, что *только в равномерном и прямолинейном движении ускорение постоянно равно нулю.*

Физическое значение разложения ускорения на касательную и нормальную часть ясно из вышесказанного: вектор ускорения, определяющий быстроту изменения вектора скорости по величине и направлению, представляется как сумма касательного ускорения, характеризующего изменение *величины* скорости, и нормального, характеризующего изменение ее *направления*. Иногда называют еще касательное ускорение *продольным*, а нормальное *поперечным*: первое учитывает изменяемость скорости в направлении движения, а второе в направлении, ему перпендикулярном. В *прямолинейном* движении направление скорости не изменяется, и нормальное ускорение отсутствует; в движении *равномерном* не изменяется величина скорости и отсутствует касательное ускорение.

Примеры и упражнения.

1. Движение вагона на закруглении. Вагон движется по закруглению, состоящему из двух прямолинейных отрезков AB и CD и дуги круга BC (рис. 89).

а) Построим график *центростремительного* ускорения в предположении, что скорость вагона на дуге BC постоянна и равна v .

Обозначая моменты времени, когда вагон находился в точках A, B, C, D , соответственно через t_A, t_B, t_C и t_D , получим:

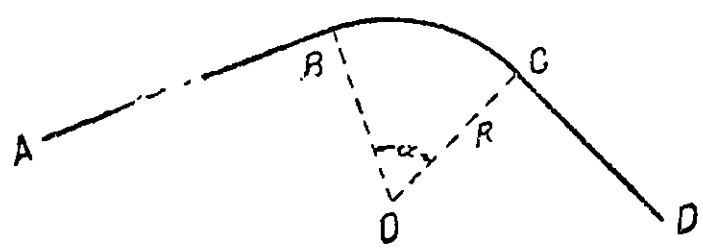


Рис. 89.

$$\omega_n = \begin{cases} 0 & \text{при } t_A < t < t_B \\ \frac{v^2}{R} & \text{„ } t_B < t < t_C \\ 0 & \text{„ } t_C < t < t_D \end{cases}$$

Мы получаем здесь разрывный график, изображенный на рис. 90.

Если скорость материальной точки имеет в некоторый момент времени разрыв, т. е. ее величина или направление резко изменяются, то как уже упоминалось выше, материальная точка испытывает жесткий удар; при разрыве только ускорения мы имеем дело с мягким ударом. Таким образом мягкий удара имеет место при входе и сходе вагона с окружности. Желая избежать мягкого удара, совершают переход от AB и CD к дуге BC не сразу, а постепенно по какой-нибудь кривой, для которой радиус кривизны быстро изменяется от бесконечности к требуемой величине R . При этом график приобретает вид, показанный на рис. 91.

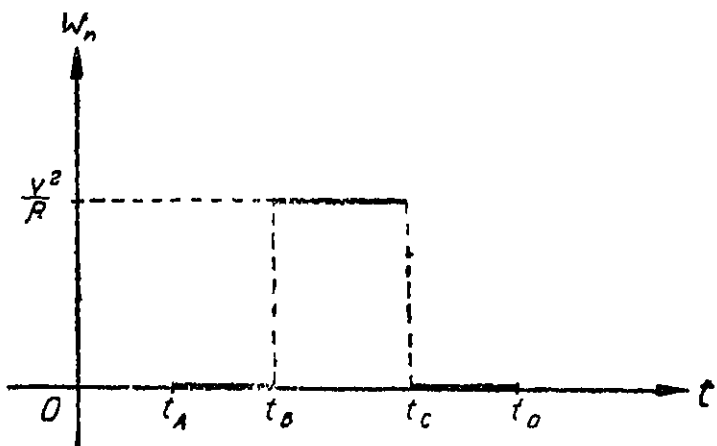


Рис. 90.

б) Отбросив предположение, что на дуге BC скорость постоянна, разберем численный пример. Пусть скорость вагона, равная в момент t_B $v_0 = 10$ м/сек, уменьшается вследствие торможения пропорционально времени на $a = 0,3$ м/сек в каждую секунду; $\alpha = 60^\circ$, $R = 100$ м. Построим график центростремительного ускорения при прохождении вагона по закруглению.

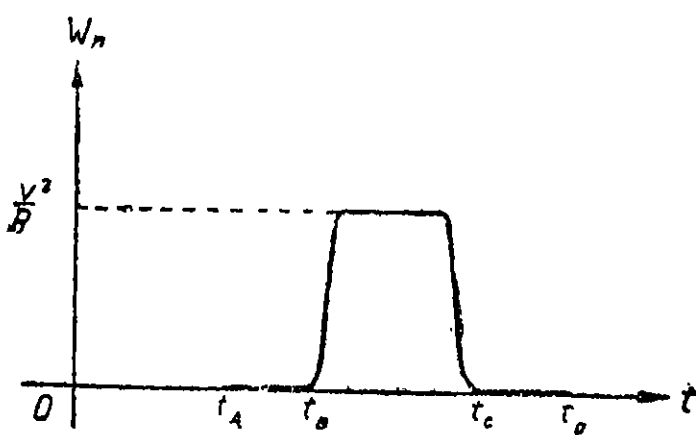


Рис. 91.

По условию, скорость вагона уменьшается на 0,3 м/сек в каждую секунду; это значит, что касательное ускорение равно 0,3 м/сек.², а так как движение замедленное, то оно направлено противоположно скорости, т. е.

$$\omega_\tau = -a = -0,3 \text{ м/сек}^2$$

Известная формула равно-замедленного движения дает:

$$v = v_0 + \omega_\tau t = v_0 - at = 10 - 0,3 t,$$

откуда следует, что

$$\omega_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - at)^2}{R} = \frac{(10 - 0,3 t)^2}{100}.$$

Для построения графика нужно знать момент t_c схода с дуги BC и величину ω_n в этот момент времени. Имеем:

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - at.$$

Интегрируя, найдем:

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2} + C;$$

но при $t=0$ пройденный по дуге путь равен нулю, т. е. $C=0$. Итак,

$$s = v_0 t - \frac{at^2}{2}.$$

Исключая из этого уравнения, а также и выражения для скорости, время t , получим:

$$s = v_0 \frac{v_0 - v}{a} - \frac{a}{2} \frac{(v_0 - v)^2}{a^2} = \frac{v_0^2 - v^2}{2a},^1$$

и следовательно

$$v^2 = v_0^2 - 2as;$$

пользуясь этим выражением, получаем:

$$\omega_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v_0^2}{R} - \frac{2as}{R}$$

или, так как в точке C $s = R\alpha$, то

$$\omega_n = \frac{v_0^2}{R} - 2a\alpha.$$

Остается вычислить, в какой момент происходит сход с закругления. Получим:

$$t = \frac{v_0 - v}{a} = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2as}}{a},$$

или, подставляя численные данные:

$$t = \frac{10 - \sqrt{100 - 2 \cdot 0,3 \cdot 100 \cdot \frac{\pi}{3}}}{0,3} \cong 13 \text{ сек.}$$

¹ Вспомнить формулу (10) упражнения I § 13.

Далее найдем:

$$\text{в момент } t_B \dots w_n = \frac{v_0^2}{R} = 1 \text{ м/сек.}^2$$

$$\begin{aligned} \text{в момент } t_C = t_B + 13 \text{ сек.} \dots w_n &= \frac{v_0^2}{R} - 2a a = \\ &= 1 - 0,6 \cdot \frac{\pi}{3} = 0,372 \text{ м/сек.}^2 \end{aligned}$$

Давая в выражении

$$w_n = \frac{(v_0 - at)^2}{R} = \frac{(10 - 0,3 t)^2}{100}$$

переменной t ряд значений в промежутке от 0 до 13, получим значения нормального ускорения в течение промежутка времени (t_B, t_C) прохождения вагона по дуге BC .

График центростремительного ускорения показан на рис. 92.

2. Радиус кривизны в параболическом движении с постоянным ускорением. В предыдущем задании было рассмотрено движение точки с постоянным по величине и направлению ускорением. Займемся теперь определением радиуса кривизны траектории (параболы) в этом движении. Мы сейчас покажем, что эта чисто геометрическая задача допускает весьма простое решение, основанное на кинематических соображениях.

Имеем:

$$w_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad \rho = \frac{v^2}{w_n},$$

но $v^2 = v_x^2 + v_y^2$ нам известно; остается определить w_n ; при этом, конечно, нельзя пользоваться формулой:

$$w_n = \frac{v^2}{\rho},$$

так как задача заключается как раз в определении ρ ; вместо этого заметим, что

$$w_n^2 = w^2 - w_\tau^2,$$

причем w нам задано, а w_τ легко определить дифференцированием, зная v как функцию времени.

Ход решения задачи ясен; остается сделать вычисления; имеем (см. § 21, стр. 101):

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - at)^2} = \\ &= \sqrt{v_0^2 - 2v_0 at \sin \alpha + a^2 t^2}; \end{aligned}$$

$$w_{\tau} = \frac{dv}{dt} = \frac{a^2 t - v_0 a \sin \alpha}{\sqrt{v_0^2 - 2v_0 a t \sin \alpha + a^2 t^2}}$$

$$w_n^2 = a^2 - \frac{(a^2 t - v_0 a \sin \alpha)^2}{v_0^2 - 2v_0 a t \sin \alpha + a^2 t^2} = \frac{a^2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{v^2}$$

$$w_n = \frac{av_0 \cos \alpha}{v}$$

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = \frac{v^3}{av_0 \cos \alpha}.$$

Подставляя вместо v его значение, получим:

$$\rho = \frac{(v_0^2 - 2v_0 a t \sin \alpha + a^2 t^2)^{\frac{3}{2}}}{av_0 \cos \alpha}.$$

Разберем численный пример: пусть $v_0 = 300$ м/сек. $\alpha = 30^\circ$, $a = g = 9,81$ м/сек².

Найдем радиус кривизны в вершине параболы и в начале координат.

а) В вершине параболы $v_y = 0$, а следовательно: $v = v_0 \cos \alpha$, отсюда:

$$\rho = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} = 6870 \text{ м.}$$

Этот результат можно было бы получить сразу, замечая, что ускорение в наивысшей точке, будучи направлено по оси OY , перпендикулярно скорости, направленной в этой точке параллельно оси OX ; следовательно ускорение направлено по главной нормали и $w = w_n = g$. В наивысшей точке $v = v_0 \cos \alpha$, отсюда получаем:

$$g = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{\rho}.$$

б) В начале координат $v = v_0$, так что:

$$\rho = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha} = 10620 \text{ м.}$$

3. Другие примеры определения радиуса кривизны по заданным уравнениям движения. Мы имеем по предыдущему:

$$\rho = \frac{v^2}{w_n}.$$

Если заданы уравнения движения, т. е. декартовы координаты x, y, z движущейся точки в функции времени, то v^2 вычисляется по формуле:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

Для отыскания w_n , как в предыдущем упражнении, пользуемся соотношением:

$$w_n^2 = w^2 - w_\tau^2,$$

причем

$$w^2 = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2; \quad w_\tau = \frac{dv}{dt}.$$

Разберем примеры движения по циклоиде и по винтовой линии.

а) Циклоида. Мы видели, что

$$w = ak^2, \quad v = 2ak \sin \frac{kt}{2}.$$

Находим:

$$w_\tau = ak^2 \cos \frac{kt}{2}, \quad w_n = \sqrt{w^2 - w_\tau^2} = ak^2 \sin \frac{kt}{2}$$

и следовательно

$$\rho = \frac{v^2}{w_n} = 4a \sin \frac{kt}{2}.$$

Отсюда получаем простое правило для построения центра кривизны циклоиды; соединив рассматриваемую точку M с точкой соприкосновения N катящегося круга, продолжаем отрезок $\overline{NM}$ на равное расстояние: $\overline{N\zeta} = \overline{MN}$. Точка ζ и будет центром кривизны; в самом деле (рис. 81):

$$\overline{NM} = 2a \sin \frac{kt}{2}, \quad \overline{M\zeta} = 2\overline{NM} = 4a \sin \frac{kt}{2} = \rho.$$

б) Винтовая линия. Предоставляем учащемуся проделать вычисления. Получим:

$$\rho = \frac{a^2 k^2 + c^2}{ak^2}.$$

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. Определить наименьший допустимый радиус кривизны мостов на шоссе, если предельная скорость автомобилей, проходящих шоссе, равна 140 км/час.

Указание. Нормальное ускорение не должно превосходить $g = 9,81 \text{ м/сек}^2$; в противном случае возможен взлет автомобиля над мостом.

2. Ремень охватывает два шкива одинаковых радиусов $r = 20 \text{ см}$. Шкивы делают 120 об/мин. Определить ускорение частицы ремня за период полного обращения его. Построить график ускорения; расстояние между центрами шкивов $d = 1 \text{ м}$.

3. При отходе от станции касательное ускорение поезда вследствие постепенного увеличения силы тяги возрастает пропорционально времени на $0,005 \text{ м/сек}^2$ в каждую секунду. Путь расположен по закруглению радиуса $R = 1000 \text{ м}$. Найти нормальное уско-

рение поезда через 1,5 минуты после момента отхода от станции и построить графики скорости и пройденного пути.

4. Точка движется по окружности радиуса 10 см, причем уравнение пройденного ею пути имеет вид:

$$s = 4t^3.$$

Найти касательное, нормальное и полное ускорения точки в тот момент, когда скорость имеет величину 6 м/сек.

5. Закругление состоит из дуг двух окружностей радиусов $r_1 = 300$ м и $r_2 = 400$ м, расположенных как указано на рис. 93. Построить график нормального ускорения вагона, проходящего по закруглению с постоянной скоростью $v = 36$ км/час.

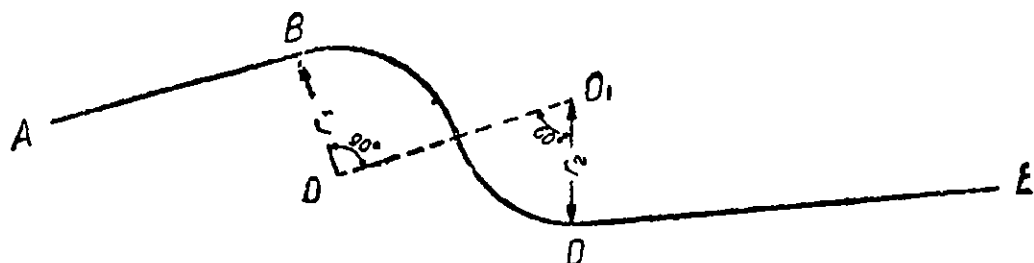


Рис. 93.

6. Движение точки задается уравнениями:

$$x = \frac{t^2}{2}, \quad y = \frac{t^3}{3}.$$

Построить траекторию, определить скорость и ускорение точки. Найти радиус кривизны траектории при $t=0$ и $t=1$.

7. Чему равно нормальное ускорение в точках перегиба траектории?

Контрольная работа к первой теме.

Контрольная работа состоит из двух отдельных заданий: аналитического и графического.

1. Пользуясь формулами касательного и нормального ускорений, определить радиус кривизны траектории какой-либо точки линейки эллипсографа в те моменты, когда линейка совпадает с осями крестовины.

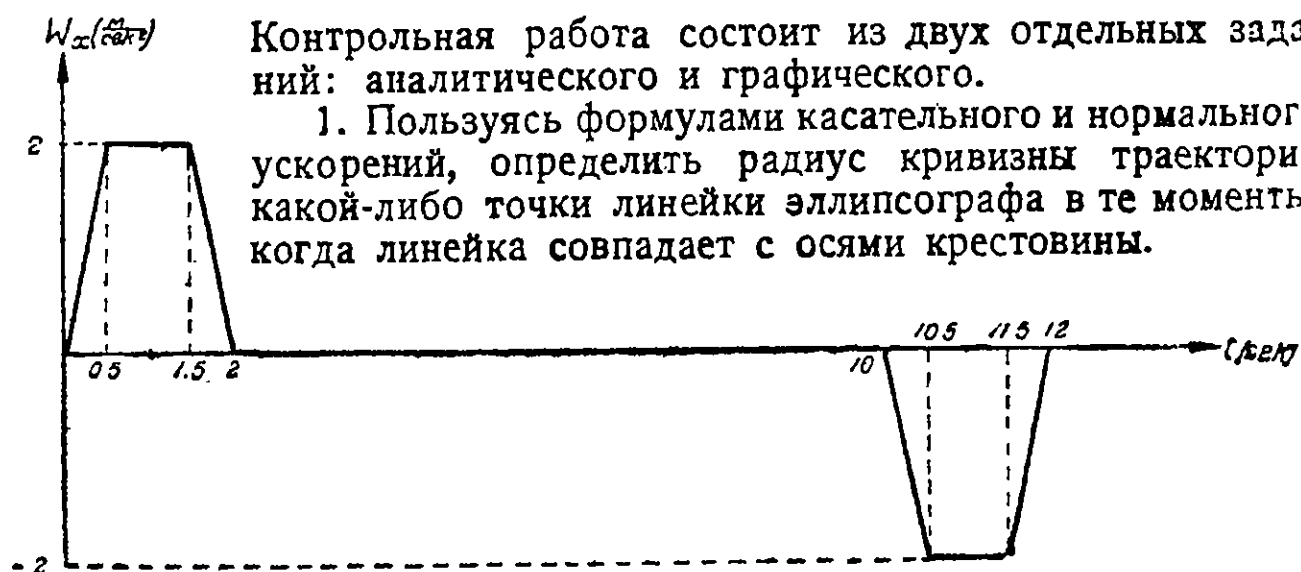


Рис. 94.

2. График ускорения поднимающегося лифта представлен на рис. 94. Пользуясь методом графического интегрирования, изложенным в задании 3, найти графики скорости и пройденного пути.

Вторая тема.

Кинематика твердого тела.

Установив в первой теме основные понятия Кинематики точки и ознакомившись с методами их применения к изучению заданных движений, мы должны теперь обратиться к приложению этих основных понятий к случаю движения уже не материальной точки, а твердого тела.

Начиная с простейшего случая движения ротора электродвигателя, вращающегося вокруг своей оси, и кончая замысловатыми, сложными движениями в парораспределительных механизмах и разного рода автоматах, а также и в других случаях, представляющих технический интерес, всюду мы имеем дело с движением твердого тела или системы твердых тел.

Поэтому с точки зрения приложений движение твердого тела представляет наиболее интересную и важную главу Кинематики. Изучение этого движения нам придется разбить на несколько отдельных этапов. Первые три задания (7, 8, 9) посвящаются разбору простейших случаев движения твердого тела: поступательного движения и вращения вокруг неподвижной оси. Эти случаи представляют значительный практический интерес; такие вопросы как расчет числа оборотов, угловых и окружных скоростей и ускорений являются насущной необходимостью для всякого техника. Помимо этого непосредственного технического интереса изучение двух указанных случаев движения твердого тела имеет еще то значение, что на них строится все дальнейшее здание Кинематики: *всякое движение можно представить слагающимся из поступательного движения и вращения вокруг некоторой оси*. Такого движения снаряда, вращающегося вокруг собственной оси, таково движение колеса по рельсу, шатуна паровой машины, перемещающегося поступательно и вместе с тем поворачивающегося, и т. д.

Последующие четыре задания (10—13) темы посвящены так называемому плоскому движению, т. е. такому движению твердого тела, при котором все точки его имеют скорости, параллельные некоторой плоскости.

То особое внимание, которое мы уделяем плоскому движению, объясняется его практической важностью и распространенностью: все механизмы, за отдельными немногочисленными исключениями, совершают плоское движение. Наряду с аналитическими методами, применимыми только в наиболее простых случаях, мы излагаем также и графические приемы определения кинематических элементов движения (скорости и ускорения), дающие простой и легкий

ответ там, где аналитические приемы привели бы только к нагромождению сложных формул.

В добавлении к теме мы знакомим учащегося с общим случаем движения твердого тела в пространстве. Таково будет движение аэроплана, совершающего качания при полете, движение волчка, снаряда, вращающегося вокруг своей оси, и т. д. Сравнительно меньшая распространенность и техническая важность этого случая движения позволяет нам не останавливаться столь подробно на его изучении. Вместе с тем векторная форма изложения открывает нам возможность в краткой форме дать все существенное для практического применения полученных результатов и понимания последующих частей курса.

Методические указания к прохождению второй темы. В первой теме учащийся ознакомился с основными кинематическими понятиями: уравнениями движения, скоростью и ускорением. В задачу второй темы, почти не содержащей уже принципиально новых представлений, входит только применение этих основных понятий к случаю движения твердого тела. Поэтому первым и необходимым условием изучения второй темы является отчетливое усвоение предшествующего материала.

Задание 1 настоящей темы (7-е) содержит весьма несложный теоретический материал; внимание учащегося должно быть сосредоточено на примерах, в которых на ряду с иллюстрациями теоретического материала он найдет ряд практически интересных и важных сведений. При решении задач учащийся должен поставить себе целью полное усвоение метода определения скоростей точек твердого тела по заданной угловой скорости и радиусу вращения.

В задании 8 учащийся знакомится с векторной формулой распределения скоростей и в связи с этим с операцией векторного умножения. Пользуясь этой операцией, мы получаем возможность представить линейную скорость любой точки вращающегося тела в таком виде, на котором в дальнейшем строится все последующее изложение.

Задание 9 посвящено вопросу об ускорениях точек тела, вращающегося вокруг оси. Результаты, здесь получаемые, крайне просты и очень важны. Знать, что такое вращательное и центростремительное ускорения и уметь их подсчитать должен каждый технически грамотный человек.

Более сложному вопросу—плоскому движению, посвящены остальные задания темы. Особое внимание учащегося должно быть здесь обращено на графические методы. При изучении плана скоростей ни в коем случае нельзя ограничиваться только чтением книги. Здесь особенно необходимо следить за построением шаг за шагом с карандашом и линейкой в руках. Запутанный чертеж с многочисленными линиями становится и простым и наглядным, если его самостоятельно проделать в той последовательности, в какой он возник. Еще в большей мере сказанное относится к изучению плана ускорений.

В задании 12 учащийся должен отчетливо усвоить понятие о мгновенном центре. Обращаем внимание на то, что приступая

к кинематическому изучению какого угодно механизма, следует прежде всего позаботиться о розыскании мгновенных центров его звеньев; это сразу делает картину движения, как бы сложна она ни была, наглядной и простой в каждый данный момент. Параграф, посвященный теореме о трех центрах, имеет более узкий и специальный интерес. При первом чтении книги он может быть без ущерба для понимания дальнейшего пропущен.

В задании 13 выводится формула распределения ускорений в движущейся плоской фигуре. Учащийся должен внимательно разобраться в выводе этой формулы и твердо усвоить смысл отдельных ее слагаемых. Без этого он не поймет построения плана ускорений.

В добавлении в краткой форме изложен общий случай движения твердого тела. Один пример, который приводится в тексте, имеет только иллюстративное значение, и внимание учащегося сосредоточивается на теоретическом материале, имеющем значение для последующей части курса. Учащийся должен обратить внимание на полную аналогию формул распределения скоростей и ускорений и выводов этих формул в общем случае движения и в плоском движении. Эта аналогия выступает особенно отчетливо благодаря векторному методу изложения, принятому в нашем курсе.

Нам остается теперь еще раз повторить указания, сделанные в методическом введении в первую тему. Книгу надо читать с карандашом в руках, все примеры должны быть пересчитаны, все графики и рисунки перечерчены, все пропущенные вычисления восстановлены учащимся.

Учащийся, пройдя все темы, накопит ряд важных формул, которые ему придется в дальнейшей его работе постоянно применять. Запомнить эти формулы (самые главные из них помещены у нас в рамках) довольно трудно, но совершенно необходимо. При решении большого числа задач и примеров они постепенно усваиваются.

При проверке правильности написанной формулы может пригодиться следующее замечание: каждая формула имеет определенную размерность. Неправильная размерность отдельных частей формулы обнаруживает ошибку в составлении ее. Хорошим примером может служить формула полного ускорения точки твердого тела, вращающегося около оси. В формуле этой

$$w = r\sqrt{\omega^4 + \epsilon^2}$$

учащийся иногда забывает последовательность показателей степени у ω и ϵ , ставя иногда у обеих букв вторые степени. Из соображений размерности сразу видно, что ω измеряется в $\frac{1}{\text{сек.}}$ а ϵ —

в $\frac{1}{\text{сек.}}$; таким образом ϵ^2 может складываться только с ω^4 . Кроме того под радикалом ϵ может входить только в квадрате, так как произведение r на ϵ имеет размерность ускорения: м/сек.^2 .

Простейшие случаи движения твердого тела. Поступательное движение. Вращение вокруг оси.

§ 25. Поступательное движение твердого тела.

Представим себе движение кузова вагона или платформы по прямолинейному рельсовому пути; в этом движении любая прямая, проведенная на полу вагона или на его стенке, остается все время себе параллельной. Возьмем другой пример: пусть тело S (рис. 95) приводится в движение двумя равными и параллельными кривошипными OA и O_1A_1 , присоединенными к нему шарнирно в точках A и A_1 , причем $\overline{OO_1} = \overline{AA_1}$. Очевидно, что и здесь прямая AA_1 остается параллельной OO_1 и, следовательно, себе самой во всех возможных положениях тела. Это же свойство движения имеет место и для всякой другой прямой, мысленно проведенной в теле.

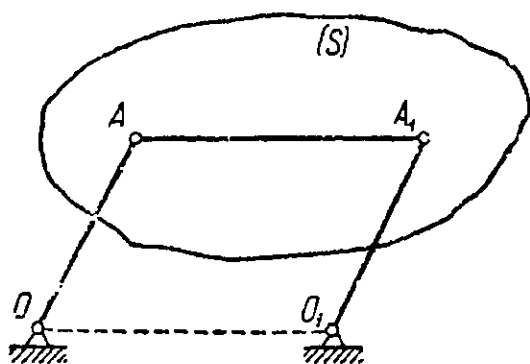


Рис. 95.

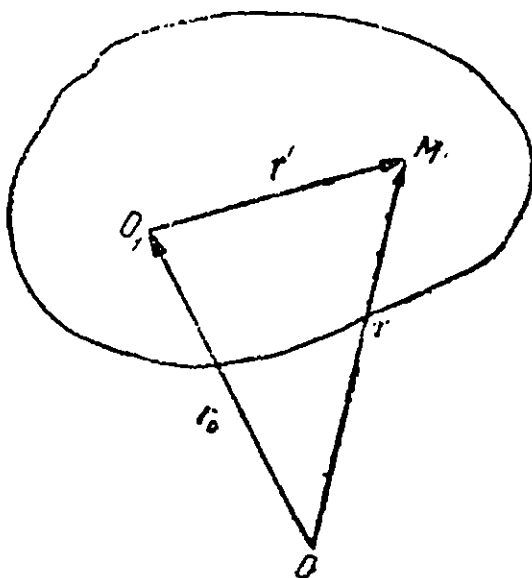


Рис. 96.

Свойство, только что отмеченное на двух примерах, является характерным для поступательного движения и может служить для его определения: *движение твердого тела называется поступательным, если любая прямая, проведенная в теле, во все время движения остается себе параллельной.*

Перейдем теперь к установлению основных свойств поступательного движения. Будем определять положение любой точки M твердого тела вектор-радиусом $\mathbf{r}'$, проведенным из некоторой точки O_1 , также принадлежащей телу (рис. 96). Если движение поступательное, то, в силу определения, $\mathbf{r}'$ остается себе параллельным. С другой стороны, величина вектора $\mathbf{r}'$ ($r' = \overline{O_1M}$) не изменяется, ибо тело — твердое. Итак $\mathbf{r}'$ не изменяет ни величины, ни направления и следовательно:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = 0. \quad (1)$$

Будем теперь определять положение точки O_1 относительно некоторой неподвижной точки O вектор-радиусом $\mathbf{r}_0$. Траектория

точки O_1 есть годограф конца r_0 . С другой стороны, непосредственно очевидное (рис. 96) равенство

$$r = r_0 + r' \quad (2)$$

показывает, что годограф конца r , т. е. траектория точки M , получается из траектории точки O_1 путем параллельного перенесения ее на постоянный по величине и направлению вектор r' . Итак траектории всех точек твердого тела, движущегося поступательно, суть тождественные кривые, получающиеся друг из друга путем параллельного переноса.

Дифференцируя обе части формулы (2) по времени, вспоминая определение скорости и воспользовавшись формулой (1), получим:

$$v = \frac{dr}{dt} = \frac{dr_0}{dt} = v_0, \quad (3)$$

т. е. скорости всех точек твердого тела, движущегося поступательно, друг другу равны по величине и направлению. Конечно, то же самое относится и к ускорениям.

Из доказанного следует, что в случае поступательного движения движение любой точки вполне определяется, коль скоро будет известно движение какой-нибудь одной из его точек; таким образом определений и выводов Кинематики точки совершенно достаточно для изучения поступательного движения тела. Нет поэтому надобности на нем останавливаться дальше.

§ 26. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Примеры вращательного движения вокруг неподвижной оси настолько общеизвестны, что нет необходимости их приводить. На-

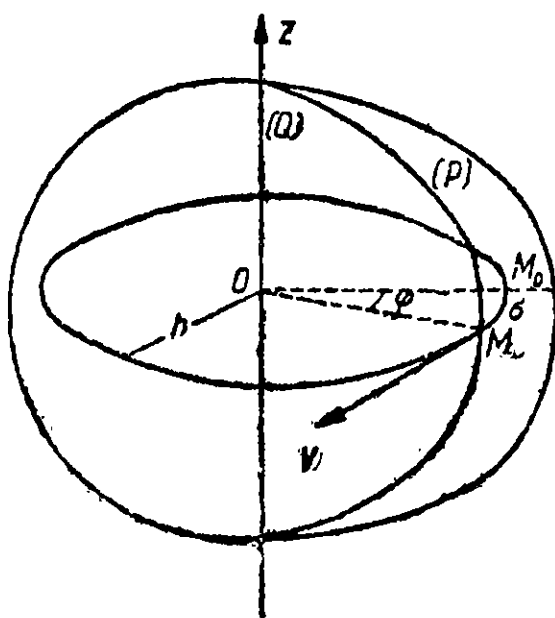


Рис. 97

шей задачей является кинематически описать это движение твердого тела и установить формулы для определения скоростей и ускорений различных его точек.

Пусть ось вращения совпадет с осью OZ . Чтобы определить положение тела, проведем через ось OZ две полуплоскости: подвижную Q , твердо связанную с вращающимся телом, и неподвижную P (рис. 97). Заданием двугранного угла φ между этими полуплоскостями положение твердого тела будет вполне определено. Нужно только условиться в вопросе об измерении и выборе знака (или направления отсчета) угла φ .

В аналитической геометрии пользуются двумя различными системами осей. В одной из них (рис. 98а) оси X, Y, Z расположены так, что наблюдатель, смотрящий с положительного конца оси OZ , увидит поворот на 90° , приводящий в совпадение положительную

ось OX с положительной осью OY , происходящим по часовой стрелке. Если поворачивать головку винта с левой нарезкой в направлении от OX к OY , то этот винт получит поступательное перемещение в положительном направлении оси OZ . По этой причине рассматриваемая система осей называется левой; ее называют также французской, так как она употребляется обычно французскими авторами.

Мы также, следуя большинству советских авторов, будем пользоваться и пользовались до сих пор левой системой. В противоположность этому английские авторы обычно принимают систему осей, изображенную на рис 98 б. Здесь наблюдатель, смотрящий с конца оси OZ , увидит вращение от OX к OY на угол 90° , происходящим против часовой стрелки. Винт с правой нарезкой, вращающийся от OX к OY на 90° , получит поступательное перемещение по положительному направлению оси OZ этой системы координат.

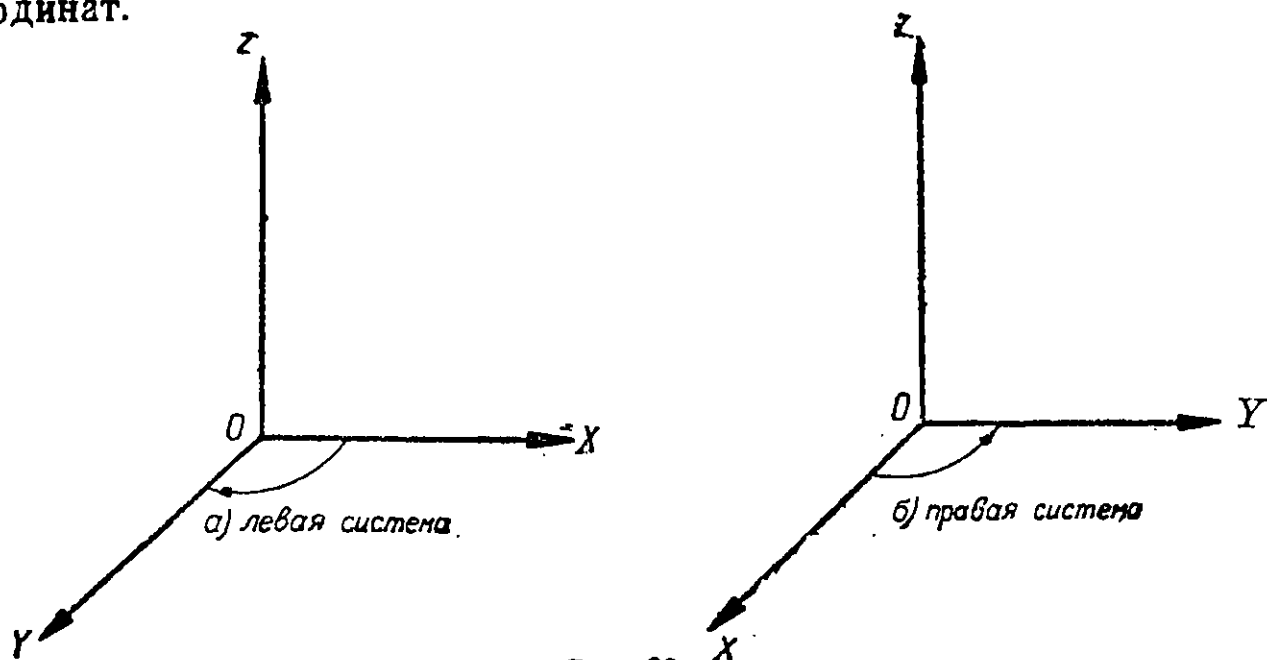


Рис. 98.

Установив это, дадим теперь формулировку правила для определения направления отсчета угла φ : будем считать угол φ положительным, если для наблюдателя, смотрящего с положительного конца оси OZ (оси вращения), он представляется отложенным в ту же сторону, что и угол между осями OX и OY (считая от OX к OY). Если принять, как мы это всегда будем делать, левую систему координатных осей, то угол φ будет положительным, если он представляется отложенным по часовой стрелке для нашего наблюдателя.

Численное значение угла φ условимся выражать в радианах. Напомним, что радианом называется центральный угол, длина дуги которого равна радиусу; выражая углы в радианах, т. е. отношением их дуги к радиусу, мы тем самым выражаем их отвлеченными числами.

Заметим еще, что так как длина окружности равна $2\pi r$ и это соответствует 360° , то один радиан содержит

$$\frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 17' 44'', 8.$$

Нет, впрочем, никакой нужды запоминать это число; гораздо важнее знать, что *полная окружность или один оборот содержит 2π радианов*.

Перейдем к вопросу о задании движения тела в рассматриваемом случае. Напомним, что задать движение тела значит задать его положение в любой момент времени. Иными словами, движение тела будет известно, коль скоро угол φ будет дан как функция времени:

$$\varphi = f(t). \quad (4)$$

Это уравнение называется *уравнением вращения*.

Примеры и упражнения.

1. Равномерное движение ротора динамомашины. При вращении ротора динамомашины угол поворота его возрастает пропорционально времени на 300 об/мин. Напишем уравнение вращения. Выражая угол в оборотах, а время в минутах, получим:

$$\varphi = 300 t.$$

Если же выражать t в секундах, а углы в радианах, то будем иметь:

$$\varphi = \frac{300 \cdot 2\pi t}{60} = 10\pi t = 31,4t.$$

2. Колебание стрелки гальванометра. Стрелка гальванометра совершает колебания амплитуды φ_0 и периода T . Считая колебания гармоническими, напишем уравнение вращения.

Вопрос о гармоническом колебании в прямолинейном движении подробно разбирался в задании 1 темы 1. Отличие настоящего случая лишь в том, что величиной, изменяющейся по гармоническому закону, является не абсцисса движущейся точки, а угол поворота тела. Получаем:

$$\varphi = \varphi_0 \sin(kt + \alpha),$$

где k —частота, связанная с периодом известной учащемуся формулой $k = \frac{2\pi}{T}$, φ_0 —амплитуда, α —начальная фаза.

Пусть например период колебания равен 4 сек., амплитуда равна 15° . Имеем:

$$k = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \text{ сек.};$$

амплитуда, выраженная конечно в радианах, будет:

$$\varphi_0 = \frac{\pi \cdot 15^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{12}.$$

Получаем:

$$\varphi = \frac{\pi}{12} \sin\left(\frac{\pi t}{2} + \alpha\right).$$

Для определения начальной фазы нужно условиться, в какой момент начался отсчет времени. Пусть например мы начали отсчитывать время в тот момент, когда конец стрелки занял крайнее положение на шкале; иными словами дано, что $\varphi = \varphi_0$ при $t = 0$. Тогда $\sin \alpha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, и мы получаем:

$$\varphi = \varphi_0 \sin \left(kt + \frac{\pi}{2} \right) = \varphi_0 \cos kt.$$

3. Вращение барабана под действием опускающегося груза. Барабан радиуса $r = 10$ см приводится во вращение гирей, подвешенной к нему на нити. В Динамике мы узнаем, что расстояние, проходимое гирей, возрастает пропорционально квадрату времени, так как движение ее равномерно-ускоренное; пусть наблюдение показало, что по истечении 20 сек. от начала движения гиря опустилась на 2 м; напишем уравнение вращения барабана.

Нетрудно сообразить, что пройденный грузом s и угол поворота барабана связаны соотношением:

$$s = r \varphi.$$

Но по условию s пропорционально квадрату времени (равномерно-ускоренное движение), т. е.

$$s = at^2.$$

Для определения коэффициента пропорциональности a воспользуемся условием, что при $t = 20$ сек. $s = 200$ см. Получим:

$$200 = a \cdot 20^2, \quad a = 0,5 \text{ см/сек}^2$$

и следовательно:

$$s = 0,5 t^2, \quad \varphi = \frac{s}{r} = 0,05 t^2.$$

§ 27. Угловая скорость.

Перейдем теперь к дальнейшему описанию рассматриваемого случая движения твердого тела.

Движения часовой стрелки, маховика паровой машины и пропеллера аэроплана имеют ту общую черту, что и то, и другое, и третье суть вращения вокруг оси. Бросающееся в глаза отличие этих движений друг от друга обусловлено, конечно, различной быстротой, с которой они совершаются. Поэтому при более детальном изучении вращательного движения вокруг неподвижной оси нужно ввести в рассмотрение некоторый новый фактор, учитывающий быстроту этого движения. Этот фактор называется *угловой скоростью тела*.

Остановимся сначала на случае равномерного вращения. Вращение тела называется равномерным, если за одинаковые промежутки времени тело поворачивается на одинаковые углы. Угол поворота за единицу времени будет в этом случае численно равен угловой скорости.

Последнюю будем обозначать, как это принято, буквой ω (омега). Согласно только-что данному определению:

$$\omega = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{t_2 - t_1},$$

где φ_2 и φ_1 суть значения угла поворота φ в моменты времени t_2 и t_1 .

Мы уже говорили, что за единицу угла принимается 1 радиан, за единицу времени 1 сек; тогда единицей угловой скорости будет $\frac{1}{\text{сек}}$. В технике угловую скорость машины обычно характеризуют

числом оборотов в минуту и обозначают в этом случае буквой n . Нетрудно установить связь между ω и n . В самом деле, замечая, что

$n \text{ об/мин.} = \frac{n}{60} \text{ об/сек.}$ и что 1 оборот содержит 2π радианов, получим:

$$\omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{\pi n}{30} \frac{1}{\text{сек}}.$$

Приведем несколько примеров:

а) Определить в $\frac{1}{\text{сек}}$ угловую скорость маховика, совершающего 500 об/мин.

$$\omega = \frac{500\pi}{30} = 52,36 \frac{1}{\text{сек}}.$$

б) Определить угловую скорость вращения земли. Земля совершает вокруг своей оси один оборот в сутки, т. е. в $24 \cdot 60^2$ сек. Следовательно

$$\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2} \frac{1}{\text{сек.}} = 0,0000726 \frac{1}{\text{сек.}}$$

в) Определить в $\frac{1}{\text{сек.}}$ угловую скорость: 1) вала быстроходной турбины $n = 30\,000$ об/мин.; 2) часовой стрелки.

$$\text{Ответы: 1) } \omega = 3141,6 \frac{1}{\text{сек.}}; \quad 2) \omega = 0,000145 \frac{1}{\text{сек.}}$$

Приводим таблицу некоторых угловых скоростей: (см. табл. на след. стр.)

Замечание. Сравнивая столбцы таблицы между собой, видим, что в грубом приближении угловая скорость, выраженная в об/мин., в 10 раз больше, чем в $\frac{1}{\text{сек.}}$. Действительно:

$$\frac{2\pi n}{60} = \frac{n}{10} \cdot \frac{2\pi}{6} \approx \frac{n}{10}.$$

Перейдем теперь к определению понятия угловой скорости в общем случае (неравномерного) вращения. Согласно сказанному выше, мы должны определить угловую скорость как быстроту изменения угла поворота φ со временем. Вспоминая же определение

Название	Об/мин.	Угловая скорость в $\frac{1}{\text{сек.}}$
Земля вокруг оси . .	$7,0 \times 10^{-4}$	$7,3 \times 10^{-5}$
Минутная стрелка . .	$1,7 \times 10^{-2}$	$1,8 \times 10^{-3}$
Секундная стрелка . .	$1,0 \times 10^0$	$1,0 \times 10^{-1}$
Паровая машина . . .	$3,0 \times 10^2$	$3,1 \times 10^1$
Пропеллер эроплана	$1,2 \times 10^3$	$1,3 \times 10^2$
Электромотор	$3,0 \times 10^3$	$3,1 \times 10^2$
Паровая турбина (много- ступенчатая) . . .	$5,0 \times 10^3$	$5,2 \times 10^2$
12" снаряд вокруг оси	$6,0 \times 10^3$	$6,3 \times 10^2$
Турбина Лавалья . . .	$3,0 \times 10^4$	$3,1 \times 10^3$
Пуля вокруг оси . . .	$1,5 \times 10^5$	$1,6 \times 10^4$
Максимальная, достигнутая в лабораторных условиях, угловая скорость (до 1930 г.)	$6,6 \times 10^5$	$6,9 \times 10^4$

понятия быстроты изменения одной величины при изменении другой (стр. 60), можем сразу написать:

$$\omega = \dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (1)$$

Если движение тела известно, то угол φ можно считать заданной функцией времени; следовательно и его производную, т. е. угловую скорость, легко найти дифференцированием.

Равномерное вращение является, как мы видим, теоретически наиболее простым случаем вращательного движения тела; практическое же его получение представляет проблему большой технической важности и достигается применением целого ряда вспомогательных приспособлений.

При установившемся движении, когда отдаваемая двигателем энергия равна потребляемой им, двигатель или идет равномерно (паровые турбины), или имеет периодическую неравномерность хода (поршневые машины): угловая скорость изменяется периодически, возвращаясь через определенный промежуток времени (период) к первоначальному значению; для двухтактного одноцилиндрового двигателя этот период равен времени оборота главного вала, для четырехтактного одноцилиндрового двигателя он равен времени двух оборотов и т. д. Чтобы угловая скорость изменялась в узких пределах, применяется маховик, благодаря инертности которого выравнивается ход машины.

Величина периодической неравномерности хода характеризуется так называемым коэффициентом неравномерности δ :

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{\text{ср}}},$$

где $\omega_{\max}$ — максимальное, $\omega_{\min}$ — минимальное, $\omega_{\text{ср}}$ — среднее значение угловой скорости, причем

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}.$$

Практика выработала для разного рода двигателей, в зависимости от их назначения, величины коэффициентов неравномерности, приводимые в таблице:

Т а б л и ц а 7
Коэффициенты неравномерности двигателей

Двигатель приводит в движение:	δ в %	
	от	до
1. Крупные прокатные станы	8	10
2. Мелкая прокатка	4	6
3. Насосы, лесопильные рамы, механические мастерские	3	5
4. Осветительные динамомашинны постоянного тока	1,5	2,5
5. Осветительные генераторы переменного тока	0,3	1,5

Маховик применяется для удержания в установившемся движении периодической неравномерности хода в заданных границах. При нарушении же баланса отдаваемой и потребляемой двигателем энергии, например при сбросе нагрузки вследствие остановки части станков, угловая скорость двигателя начинает изменяться, и маховик уже не в состоянии ее выровнять. Для этого употребляются другие приспособления—регуляторы различной системы, с простейшими конструкциями которых учащийся, вероятно, знаком.

Все эти вопросы регулирования хода машин, как указано уже, представляют громадную практическую важность. Они составляют содержание особой дисциплины—Динамики машин. Мы отчасти, коснемся их во второй и третьей частях нашей книги.

Примеры и упражнения.

1. Определение угловой скорости по заданному уравнению вращения. а) Определим угловую скорость, стрелки гальванометра в примере 2 § 26. Имеем:

$$\varphi = \varphi_0 \cos k t = \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{2} t.$$

Дифференцируя, найдем:

$$\omega = \dot{\varphi} = -\frac{\pi^2}{24} \sin \frac{\pi t}{2} \frac{1}{\text{сек.}}$$

Предлагаем учащемуся построить графики угла поворота и угловой скорости в функции времени.

б) Угловая скорость барабана в примере 3 § 26:

$$\omega = \dot{\varphi} = 0,1 t.$$

2. Пуск в ход и остановка двигателя. а) Примем, что угловая скорость маховика при пуске машины в ход возрастает пропорционально времени (мы увидим в Динамике, что это предположение справедливо при допущении, что вращающий момент остается постоянным) на $2\pi \frac{1}{\text{сек.}}$ в каждую секунду. Определим, сколько оборотов совершит двигатель по истечении 10 секунд от начала движения.

По условию, угловая скорость возрастает на $2\pi \frac{1}{\text{сек.}}$ в каждую секунду; следовательно, по истечении t сек мы будем иметь:

$$\omega = 2\pi t \frac{1}{\text{сек.}}$$

Таков закон изменения угловой скорости. Нашей же задачей является определение угла поворота. Имеем:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2\pi t,$$

следовательно

$$\varphi = 2\pi \int t dt = 2\pi \frac{t^2}{2} + \text{const.}$$

При $t=0$, $\varphi=0$, т. е. константа равна нулю. При $t=10$ сек. имеем:

$$\varphi = \pi 10^2 = 100\pi; \quad \frac{100\pi}{2\pi} \text{ об.} = 50 \text{ об.}$$

б) Маховику сообщена угловая скорость 300 об/мин. Будучи предоставлен самому себе, маховик остановился через 5 мин. вследствие трения в подшипниках. Считая, что угловая скорость убывает пропорционально времени, напишем уравнение вращения и найдем, сколько оборотов маховик совершит до остановки.

По аналогии с равнозамедленным движением, имеем для случая равнозамедленного вращения:

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t,$$

где ω_0 — начальная угловая скорость (300 об/мин.), ε — так называемое угловое ускорение, о котором ниже мы еще будем говорить подробно. Для определения ε воспользуемся условием, что при $t=5$ мин., $\omega=0$. Имеем:

$$0 = 300 - \varepsilon \cdot 5, \quad \varepsilon = 60 \text{ об/мин}^2.$$

Итак:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega = \omega_0 - \varepsilon t = (300 - 60t) \text{ об/мин.}$$

Интегрируя, найдем:

$$\varphi = (300t - 30t^2) \text{ оборотам}$$

При $t=5$ получим:

$$\varphi = 300 \cdot 5 - 30 \cdot 25 = 750 \text{ оборотам}$$

3. Периодическая неравномерность хода. Средняя угловая скорость двигателя $n=300$ об/мин; коэффициент неравномерности $\delta=0,03$. Определим максимальное и минимальное значения угловой скорости. Имеем:

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}}}{2};$$

$$\delta = \frac{\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}}{\omega_{\text{ср}}}.$$

Решая эти уравнения относительно ω_{max} и ω_{min} , найдем:

$$\omega_{\text{max}} = \omega_{\text{ср.}} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right)$$

$$\omega_{\text{min}} = \omega_{\text{ср.}} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right).$$

При наших численных данных получаем:

$$n_{\text{max}} = 300 \cdot 1,015 = 304,5 \text{ об/мин.}$$

$$n_{\text{min}} = 300 \cdot 0,985 = 295,4 \text{ об/мин.}$$

Чтобы написать закон изменения угловой скорости, будем предполагать, что колебание ее, т. е. разность $\omega - \omega_{\text{ср}}$ мгновенного и среднего значений, изменяется в течение периода по гармоническому закону:

$$\omega - \omega_{\text{ср}} = a \sin(kt + \alpha);$$

остается определить амплитуду a и частоту k ; величина начальной фазы не имеет значения, так как значение ее определяется только выбором момента начала отсчета времени; полагая, например, что при $t=0$, $\omega = \omega_{\text{ср.}}$, получим $\alpha = 0$.

Для определения амплитуды a , заметим, что $\omega = \omega_{\text{max}}$ при $\sin kt = 1$. Это дает условие:

$$\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{ср.}} = a;$$

заменяя ω_{max} его значением, получим:

$$\omega_{\text{ср.}} = \omega_{\text{ср.}} \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) - \omega_{\text{ср.}} = a,$$

т. е.

$$a = \frac{\delta}{2} \omega_{\text{ср.}}$$

При $\sin kt = -1$ получим:

$$\omega - \omega_{\text{ср.}} = -a = -\frac{\delta}{2} \omega_{\text{ср.}}$$

т. е.

$$\omega = \omega_{\text{ср.}} - \frac{\delta}{2} \omega_{\text{ср.}} = \omega_{\text{ср.}} \left(1 - \frac{\delta}{2} \right) = \omega_{\text{min}},$$

как это и должно быть.

Для определения частоты k нужно иметь дополнительные данные о роде двигателя и характере его рабочего процесса; если двигатель одноцилиндровый и двухтактный, то, как указывалось, период изменения угловой скорости равен продолжительности T одного оборота вала и

$$k = \frac{2\pi}{T} = \omega_{\text{ср.}}.$$

Для одноцилиндрового четырехтактного двигателя период равен времени двух оборотов ($2T$) вала, и

$$k = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\omega_{\text{ср.}}}{2}.$$

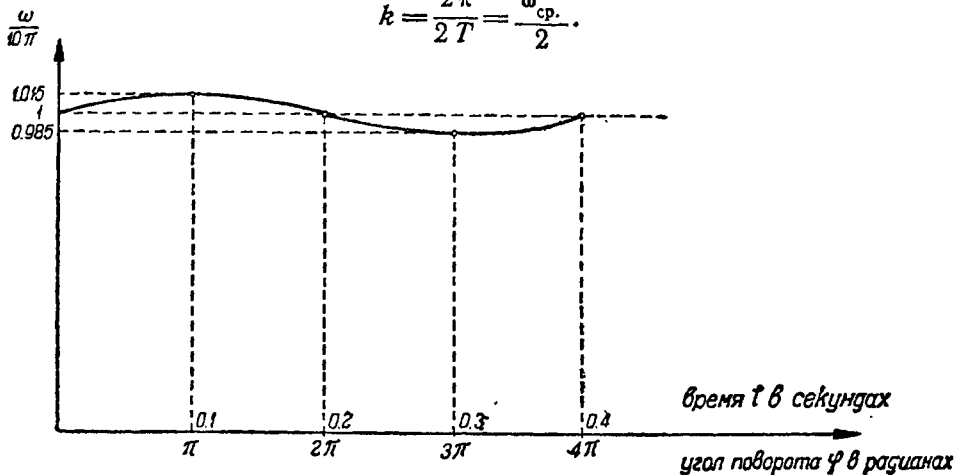


Рис. 99.

Остановившись на последнем случае, получаем:

$$\omega - \omega_{\text{ср.}} = \omega_{\text{ср.}} \frac{\delta}{2} \sin \frac{\omega_{\text{ср.}} t}{2}$$

или

$$\omega = \omega_{\text{ср.}} \left(1 + \frac{\delta}{2} \sin \frac{\omega_{\text{ср.}} t}{2} \right).$$

В нашем численном примере $\omega_{\text{ср.}} = \frac{300 \cdot 2\pi}{60} = 10\pi \frac{1}{\text{сек.}}$
 $\delta = 0,03$, и мы находим:

$$\omega = 10\pi \left(1 + 0,015 \sin \frac{\omega_{\text{ср.}} t}{2} \right) = 10\pi (1 + 0,015 \sin 5\pi t) \frac{1}{\text{сек.}}$$

График изменения угловой скорости представлен на рис. 99. Предлагаем учащемуся найти уравнение вращения и построить его график.

§ 28. Распределение скоростей в теле, вращающемся вокруг неподвижной оси.

Перейдем теперь к вопросу о скоростях точек вращающегося твердого тела. Совершенно очевидно, что различные точки тела имеют различные скорости — точки, расположенные ближе к оси вращения, имеют скорость меньшую, чем расположенные дальше. Чтобы получить формулу для определения величины скорости $\dot{\varphi}$ вспомним, что последняя равна производной пройденного точкой пути по времени; но в рассматриваемом случае траектория какой-нибудь точки M (рис. 97) есть окружность, расположенная в плоскости, проведенной через M перпендикулярно оси вращения; центр этой окружности находится в пересечении только-что упомянутой плоскости и оси вращения; ее радиус равен расстоянию h точки M от оси вращения. Дуга σ , отсчитанная от начального положения точки до положения ее в момент t , соответствующая углу φ , будет:

$$\sigma = h \varphi, \quad (1)$$

ибо дуга круга равна произведению его радиуса на центральный угол. Отсюда получим:

$$v = h |\dot{\varphi}| = h |\omega|. \quad (2)$$

Здесь ω должна быть, конечно, выражена в $\frac{1}{\text{сек.}}$, а не в об/мин.

Формула (1) дает только величину скорости; что касается ее направления, то последнее определяется, очевидно, касательной к траектории точки (т. е. окружности), проведенной в сторону вращения тела; иными словами вектор v скорости какой-нибудь точки направлен перпендикулярно плоскости, проведенной через эту точку и ось вращения, в сторону вращения.

Заметим еще, что с целью подчеркнуть отличие угловой скорости тела от скорости какой-либо его точки, последнюю называют часто *линейной скоростью*. Иногда, когда речь идет о скоростях точек на ободе вращающегося диска, ротора, маховика и т. д., употребляют термин *окружная скорость*.

Примеры и упражнения.

1. Определение линейной скорости точек вращающегося тела. Приведем несколько численных примеров на применение формулы (2).

а) Диаметр маховика, совершающего $n=240$ об/мин., равен 1,5 м. Определить скорость точек на ободе.

Имеем:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{240 \pi}{30} = 8 \pi \frac{1}{\text{сек.}}$$

$$h = \frac{D}{2} = 0,75 \text{ м,}$$

и следовательно

$$v = 0,75 \cdot 8 \pi = 18,85 \text{ м/сек.}$$

б) Для турбинного диска $n=18\,000$ об/мин.; радиус диска $r=35$ см; окружная скорость будет равна

$$v = \frac{\pi n r}{30} = \frac{18\,000 \pi}{30} \cdot 35 \text{ см/сек} = 659,7 \text{ м/сек};$$

при вычислениях следует пользоваться таблицей произведений целых чисел на π , помещаемой во всех справочниках.

в) Определим еще максимальное значение скорости конца стрелки гальванометра в примере 1а § 27. Длина стрелки $l=10$ см.

Имеем:

$$\omega_{\max} = \frac{\pi^2}{24} \frac{1}{\text{сек.}}$$

И следовательно:

$$v_{\max} = l \omega_{\max} = \frac{\pi^2}{24} \cdot 10 \text{ см/сек} = 4,12 \text{ см/сек.}$$

2. Передача вращения между параллельными осями при помощи цилиндрических зубчатых колес. Колесо I вращается с угловой скоростью ω_1 вокруг оси O_1 и находится в зацеплении с колесом II, вращающимся вокруг оси O_2 (рис. 100). Радиусы начальных или делительных окружностей колес обозначим соответственно через r_1 и r_2 .

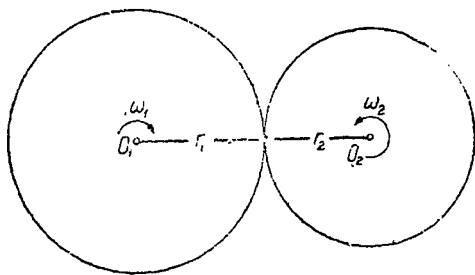


рис. 100.

Соприкосновение колес происходит в точках начальных окружностей. Найдем угловую скорость ω_2 второго колеса. Для этого достаточно выразить, что линейная скорость точки соприкосновения одинакова, будем ли мы считать эту точку принадлежащей первому колесу или второму:

$$r_1 \omega_1 = r_2 \omega_2. \quad (2)$$

Означая через z_1 и z_2 числа зубцов первого и второго колеса, а через t шаг зацепления, т. е. расстояние от середины до середины двух смежных зубцов, считаемое по начальной окружности, получим:

$$2\pi r_1 = z_1 t, \quad 2\pi r_2 = z_2 t.$$

Конечно в паре сцепляющихся колес шаги должны быть равны друг другу.

Мы получаем, таким образом, из (3):

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}, \quad (3)$$

т. е. угловые скорости колес обратно пропорциональны числам зубцов или радиусам начальных окружностей.

3. Эллиптические колеса. Формула (2) применима, очевидно, не только к случаю круглых (цилиндрических) колес, но и к любому случаю передачи вращения от одного вала к другому при помощи колес любых очертаний. Разница, конечно, в том, что в то время как для цилиндрических колес отношение $\frac{r_1}{r_2}$ постоянно, в общем случае это отношение переменное, и при постоянной угловой скорости ω_1 первого колеса мы получим переменную угловую скорость ω_2 второго колеса.

В качестве примера рассмотрим передачу вращения при помощи эллиптических колес (рис. 101 и 102). Оси O_1 и O_2 проходят через фокусы эллипсов. Оба эллипса совершенно одинаковы. Их большая полуось равна a , меньшая — b . Расстояние между фокусами

$$\overline{O_1 O_1'} = \overline{O_2 O_2'} = 2\sqrt{a^2 - b^2} = 2c.$$

Расстояние между осями

$$\overline{O_1 O_2} = 2a,$$

т. е. равно большой оси эллипса.

Имеем:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}.$$

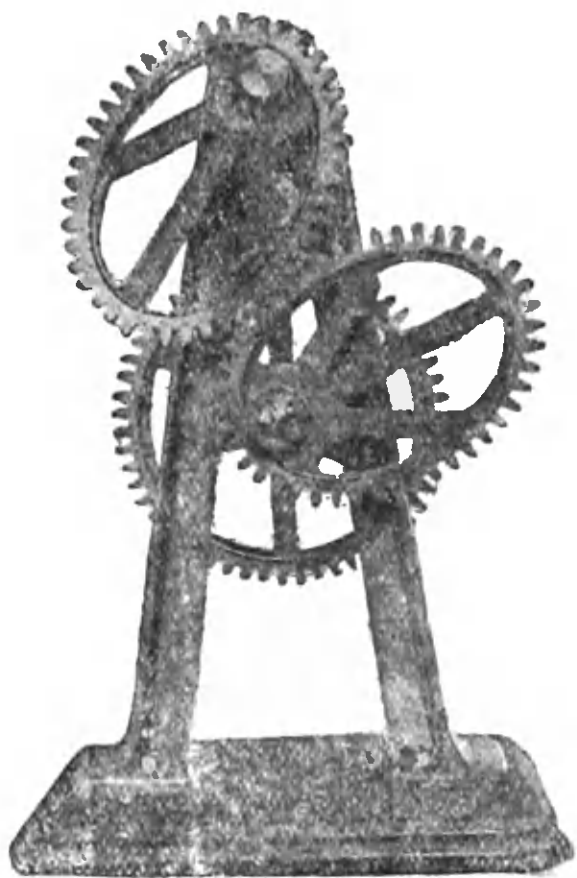


Рис. 101. Эллиптические колеса.
(Модель Кабинета механики Ленинградского физико-механического института).

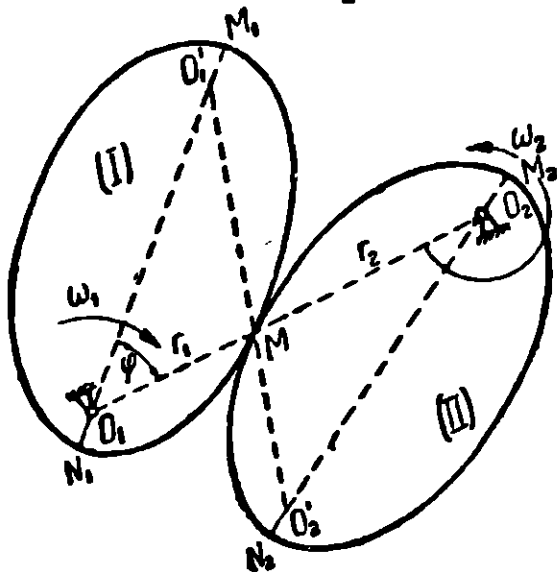


Рис. 102.

Найдем максимальное значение ω_2 . Оно будет иметь место при максимальном r_1 и минимальном r_2 , т. е. когда в соприкосновение вступят точки M_1 и M_2 ; но

$$\overline{O_1 M_1} = (r_1)_{\max} = a + \sqrt{a^2 - b^2} = a + c,$$

$$\overline{O_2 M_2} = (r_2)_{\max} = a - \sqrt{a^2 - b^2} = a - c.$$

Итак

$$(\omega_2)_{\max} = \frac{a + c}{a - c} \omega_1.$$

Точно так же найдем:

$$(\omega_2)_{\min} = \frac{a-c}{a+c} \omega_1.$$

Пусть, например,

$$a = 25 \text{ см}, \quad b = 20 \text{ см}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = 15 \text{ см}$$

и мы получаем:

$$(\omega_2)_{\max} = 4 \omega_1, \quad (\omega_2)_{\min} = \frac{\omega_1}{4},$$

т. е. угловая скорость второго колеса увеличивается в 16 раз в течение одного оборота.

Максимальное и минимальное значения ω_2 находятся, таким образом, весьма просто. Несколько сложнее получить закон передачи вращения.

Обозначим через φ угол поворота первого колеса и заметим, что

$$r_2 = \overline{O_2 M} = \overline{O_1' M},$$

ибо

$$r_1 + r_2 = \overline{O_1 O_2} = 2a$$

и с другой стороны, по свойству эллипса, сумма

$$r_1 + \overline{O_1' M}$$

также равна $2a$. Из треугольника $O_1 M O_1'$ имеем:

$$\overline{O_1' M}^2 = r_2^2 = r_1^2 + 4c^2 - 4c r_1 \cos \varphi,$$

но

$$r_2 = 2a - r_1$$

и следовательно:

$$(2a - r_1)^2 = 4a^2 - 4ar_1 + r_1^2 = r_1^2 + 4c^2 - 4c r_1 \cos \varphi,$$

т. е.

$$r_1 = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos \varphi}, \quad r_2 = 2a - r_1 = \frac{a^2 - 2ac \cos \varphi + c^2}{a - c \cos \varphi}.$$

Получаем:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r_1}{r_2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2 - 2ac \cos \varphi + c^2} \omega_1.$$

Это и есть искомый закон передачи вращения. При $\varphi = 0$ получаем:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{a^2 - c^2}{(a - c)^2} = \frac{a + c}{a - c} \omega_1 = (\omega_2)_{\max}.$$

При $\varphi = \pi$ получим:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{a^2 - c^2}{(a + c)^2} = \frac{a - c}{a + c} \omega_1 = (\omega_2)_{\min}.$$

Эти результаты уже были установлены выше. График изменения угловой скорости второго колеса в зависимости от угла поворота φ представлен на рис. 103, причем отношение $\frac{a}{c}$ принято равным $\frac{2}{3}$.

Эллиптические колеса находят иногда применение в строгальных станках: замедленное вращение вала используется для рабочего хода, ускоренное — для холостого. Ту же кинематическую задачу превращения равномерного вращения одного вала в попеременно замедленное и ускоренное вращение другого разрешает кулисный механизм Витворта, с которым мы познакомимся ниже. Изготовление эллиптических колес в виду сложности профилирования их затруднительно и дорого, вследствие чего и применяются они сравнительно редко.

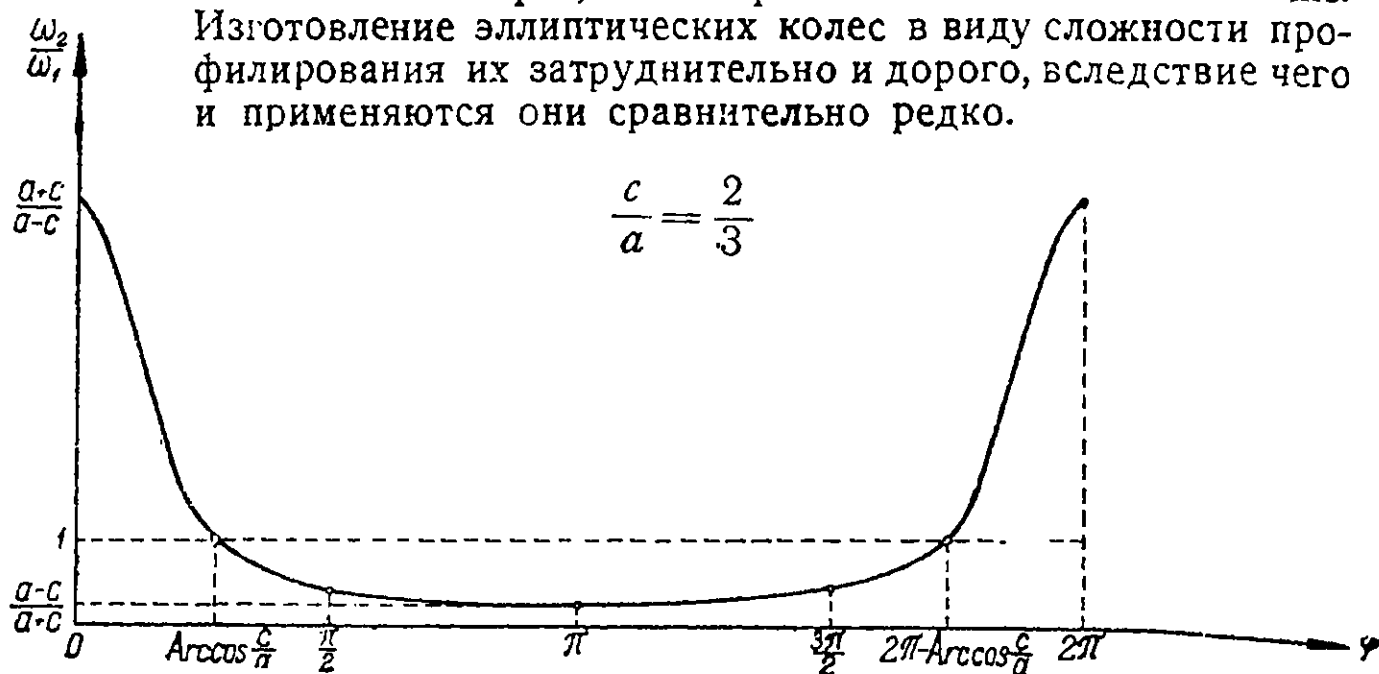


Рис. 103.

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. Написать уравнение вращения минутной стрелки часов.
2. Угол поворота ротора электродвигателя при пуске в ход возрастает пропорционально квадрату времени. По показанию счетчика оборотов, включенного через 30 сек. после пуска электродвигателя, ротор за последующие 1,5 мин. совершил 400 оборотов. Написать уравнение вращения и найти угловую скорость через 2 мин. после пуска.
3. Тело, подвешенное на проволоке, закручено на угол 30° и, будучи предоставлено самому себе, начинает совершать крутильные колебания вокруг оси проволоки с периодом 2 сек.

Написать уравнение вращения и выразить угловую скорость тела в функции времени.

Указание. При $t = 0$ $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

4. Уравнение затухающих колебаний стрелки гальванометра имеет вид:

$$\varphi = 2 + 0,2 e^{-0,3t} \sin 0,1t.$$

Определить период колебаний, логарифмический декремент и построить график колебания стрелки.

5. Средняя угловая скорость вала двигателя равна 420 об/мин., коэффициент неравномерности $\delta = 8\%$. Двигатель двухтактный и одноцилиндровый. Найти максимальное и минимальное значения угловой скорости и построить ее график, считая, что разность $\omega - \omega_{\text{ср}}$ изменяется по гармоническому закону.

6. Определить скорость любой точки жесткого треугольника $A_1 A_2 A_3$, приводимого в движение помощью трех равных и параллельных кривошипов $O_1 A_1 = O_2 A_2 = O_3 A_3 = 15 \text{ см}$ (рис. 104). Угловая скорость кривошипов 320 об/мин.

7. Найти уравнение вращения ведомого эллиптического колеса, когда ведущее вращается с постоянной угловой скоростью. Построить график зависимости угла поворота ведомого колеса от угла поворота ведущего, приняв $a = 25 \text{ см}$, $b = 20 \text{ см}$.

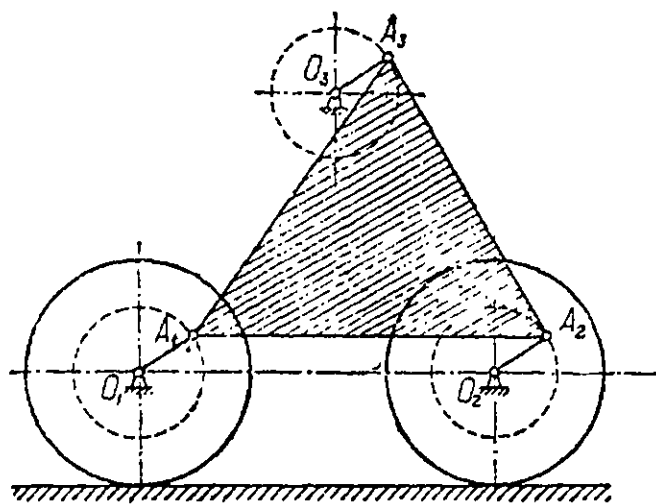


Рис. 104.

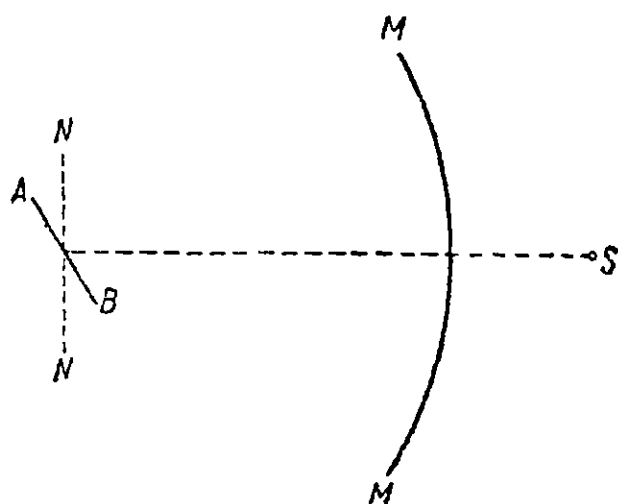


Рис. 105.

8. Зеркальце гальванометра AB совершает гармонические колебания периода 3 сек и амплитуды 15° вокруг оси (рис. 105), находящейся в центре шкалы MM . Луч света из источника S , отражаясь от зеркала, дает на шкале световое пятно („зайчик“). В начальный момент зеркало расположено по прямой NN , перпендикулярной падающему лучу. Определить скорость „зайчика“ по шкале в любой момент времени и ее максимальное значение. Радиус шкалы $r = 30 \text{ см}$.

Задание 8-е.

Распределение скоростей в твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной оси.

Формула (1) § 28 дает величину скорости любой точки твердого тела, вращающегося вокруг оси. Чтобы характеризовать вполне вектор скорости, мы должны были еще присоединить к этой формуле правило для определения направления скорости. Естественно возникает вопрос, нельзя ли одной формулой охарактеризовать вектор v вполне, т. е. и по величине и по направлению. Чтобы утвердительно ответить на него, нам понадобится ввести два новых понятия: 1) определить угловую скорость как вектор, 2) определить новую для нас операцию векторного умножения.

§ 29. Угловая скорость как вектор.

Для характеристики какого-либо вектора нужно дать два правила: одно для определения величины его, второе — для определения направления.

Что касается величины вектора угловой скорости ω ¹⁾, то за такую естественно принять величину угловой скорости:

$$\omega = \left| \frac{d\varphi}{dt} \right|.$$

Направление вектора угловой скорости естественно связать с направлением оси вращения, ибо только это направление остается неизменным во вращающемся твердом теле. Нужно только указать, в какую сторону по оси вращения откладывать вектор ω . Условимся это делать так, чтобы наблюдатель, смотрящий с конца вектора ω , видел вращение тела в положительном направлении, т. е. по часовой стрелке при выбранной нами левой системе координат (рис. 106).

Вопросы. 1) Указать направление вектора угловой скорости вращения земли (к северному или южному полюсу?), часовой стрелки (к наблюдателю, или внутрь циферблата?)²⁾.

2) Как определил бы направление вектора ω автор, пользующийся правой системой осей?

В заключение нам остается сделать еще одно замечание. Когда мы имеем дело с векторами силы, скорости, ускорения и т. д.,

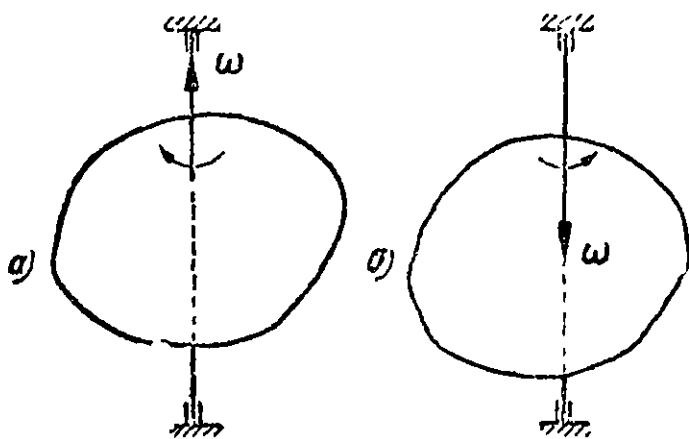


Рис. 106.

то все эти вектора имеют определенное направление, отнюдь не зависящее от выбора той или иной (правой или левой) системы координатных осей. Например, направление силы тяжести остается, разумеется, одним и тем же, какую бы систему координатных осей (правую или левую) мы ни предпочли. Совершенно иначе обстоит дело с вектором угловой скорости. Определение того или иного направления его вдоль оси вращения есть дело нашего

произвола. В левой системе оно будет одним, а в правой—другим для того же тела, вращающегося в ту же сторону.

Руководствуясь сказанным, мы можем теперь дать классификацию векторных величин: векторы, направление которых остается неизменным при переходе от одной (правой или левой) системы осей к другой (левой или правой) и определяется направлением той физической величины (силы, скорости), которая ими описывается, называются *истинными* векторами; в противоположность им векторы, направление которых нужно менять на прямо противоположное при замене левой системы осей на правую (или правой на левую) называются *псевдо-векторами*.

1) Согласно условию, величина вектора должна быть обозначена той же буквой, но светлым шрифтом, т. е. через ω . Но до сих пор у нас так обозначалась производная угла φ по времени. В дальнейшем в тех случаях, когда возможны недоразумения примем обозначение: $\dot{\varphi} = \tilde{\omega}$, так что $\tilde{\omega} = \omega$ при $\dot{\varphi} > 0$ и $\tilde{\omega} = -\omega$ при $\dot{\varphi} < 0$.

2) Если не оговорено противоположное, то мы пользуемся всегда левой системой осей.

Вместе с тем из сказанного следует, что *в раз навсегда выбранной* (левой или правой) системе координатных осей псевдо-вектор сохраняет неизменное направление и им можно пользоваться так же, как истинным.

Вопрос. Приведите из статики примеры псевдо-векторов.

§ 30. Векторное произведение.

Вспомним известное из статики определение момента силы относительно точки. Пусть сила $\mathbf{F}$ (рис. 107) приложена в точке M , положение которой относительно точки O определяется вектор-радиусом $\mathbf{r}$. Моментом $\mathcal{M}$ силы $\mathbf{F}$ относительно точки O называют вектор, равный по величине площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ или, что то же самое, произведению Fp , где p — длина перпендикуляра, опущенного из точки O на направление силы $\mathbf{F}$ ($p = r \sin \alpha$). Направление $\mathcal{M}$ определяется двумя условиями: а) $\mathcal{M}$ перпендикулярен плоскости векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$; б) с конца $\mathcal{M}$ сила $\mathbf{F}$ представляется вращающей вектор $\mathbf{r}$ в положительном направлении.

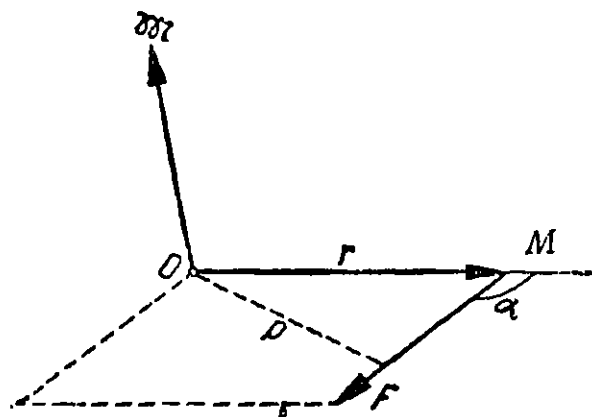


Рис. 107.

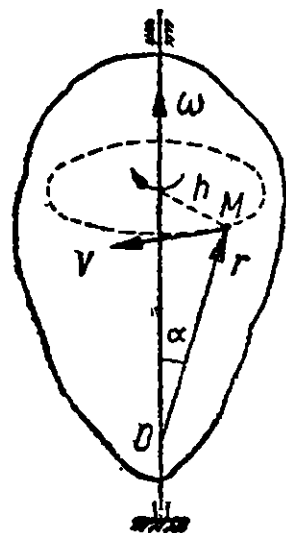


Рис. 108.

Определение момента силы относительно точки может быть обобщено на любой другой вектор. Чтобы убедиться в плодотворности такого обобщения, разберем другой пример.

Рассмотрим скорость $\mathbf{v}$ точки M твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рис. 108). Положение точки M будем определять вектор-радиусом $\mathbf{r}$, проведенным из произвольно выбранной на оси вращения точки O . Построим, согласно сказанному в предыдущем параграфе, вектор ω угловой скорости. Легко проверить, что $\mathbf{v}$ есть не что иное, как *момент вектора ω относительно точки M* .

В самом деле, величина скорости $v = h\omega$, где $h = r \sin \alpha$ есть длина перпендикуляра, опущенного из M на ось вращения. С другой стороны, направление скорости $\mathbf{v}$ совпадает с направлением момента вектора ω относительно точки M , в чем предлагаем убедиться учащемуся.

В разобранных двух примерах мы встречаемся, по существу говоря, с *одной и той же операцией*, произведенной в первом случае над векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$, во втором — над ω и $\mathbf{r}$. Эта операция называется *векторным умножением*, а результат ее *векторным*

произведением двух векторов. Дадим его точное определение: векторным произведением двух векторов a и b называется третий вектор c , определяемый следующими условиями:

а) величина вектора c равна площади параллелограмма, построенного на векторах a и b , т. е.

$$c = ab \sin(\widehat{a, b}), \quad (1)$$

где (a, b) есть угол между a и b $[(a, b) < 180^\circ]$;

б) вектор c перпендикулярен плоскости векторов a и b и ориентирован относительно a и b так же, как ось OZ принятой системы координат ориентирована относительно осей OX и OY . Иными словами, наблюдатель, смотрящий с конца c , увидит поворот от a к b (но не от b к a) на угол (a, b) в положительном направлении (рис. 109).

Для обозначения векторного произведения не существует, к сожалению, раз навсегда

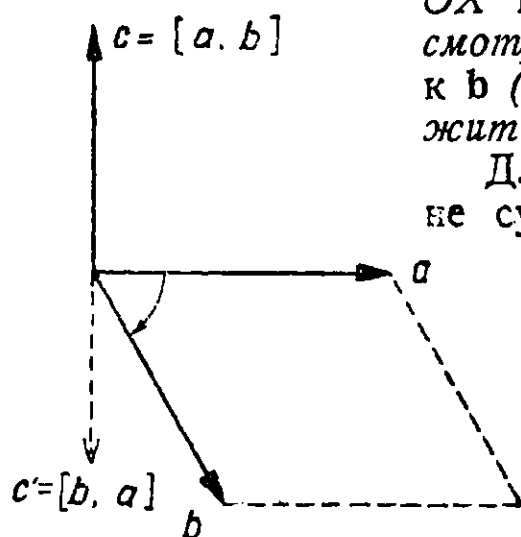


Рис. 109.

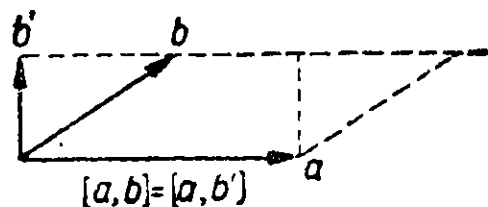


Рис. 110.

установленного соглашения. Мы, следуя большинству авторов, будем обозначать его следующим образом:

$$c = [a, b],$$

т. е. заключать вектора-сомножители в квадратные скобки, разделяя их запятой. Некоторые авторы заменяют это обозначение другими; например, пишут $c = a \times b$ или $c = a \wedge b$ (итальянские и французские авторы).

Из сказанного следует, что вектор $c' = [b, a]$, будучи по величине равен величине вектора $c = [a, b]$, прямо противоположен ему по направлению (рис. 109). В самом деле, смотря с конца c' , мы должны увидеть поворот от первого вектора-множителя ко второму в положительном направлении; но для c' первым множителем является b , а вторым a , в то время как для c мы имели обратное.

Итак

$$c' = -c,$$

или иными словами:

$$[a, b] = -[b, a]. \quad (2)$$

Свойство произведения скалярных величин не изменяться при перемене порядка сомножителей ($ab = ba$) называется коммутативным (переместительным) законом умножения.

Результат, выражаемый формулой (2), можно формулировать так: векторное произведение не следует коммутативному закону;

при перемене порядка сомножителей следует изменить знак произведения.

Начинающий изучать иногда становится втупик перед этим результатом. Чтобы рассеять могущие возникнуть недоразумения, напомним еще раз ход нашей мысли. На примерах мы убедились, что часто в прикладных вопросах мы приходим к операции составления по определенным правилам некоторого вектора по заданным двум векторам. Эту операцию, следуя установившейся терминологии, мы называли векторным умножением. Таким образом ни откуда не следует, что этот род умножения должен иметь свойства обычного умножения чисел. Оказывается, что, действительно, коммутативный закон не сохраняется для векторного произведения. Естественно возникает вопрос: сохраняются ли другие свойства умножения? На него мы сейчас и должны ответить.

Если произведение ab двух чисел равно нулю, то или a , или b (или и то и другое) равно нулю. В случае же векторного произведения условие

$$[a, b] = 0 \tag{3}$$

может быть удовлетворено и в том случае, когда ни a ни b не равны нулю. В самом деле, вспоминая, что величина векторного произведения равна $ab \sin(a, b)$, можем заключить, что последнее обращается в нуль, если $(a, b) = 0$ или π . Таким образом и здесь мы встречаемся со свойством векторного произведения, не оправдывающимся для произведения скалярных величин. Формула (3) устанавливает условие параллельности двух векторов a и b . В частности, мы имеем всегда:

$$[a, a] = 0. \tag{4}$$

Займемся теперь проверкой так называемого дистрибутивного (распределительного) закона умножения, т. е. свойства последнего, выражаемого формулой

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Сохраняется ли это свойство в случае векторного произведения, т. е. справедливо ли соотношение:

$$[a, b + c] = [a, b] + [a, c]. \tag{5}$$

Мы сейчас убедимся, что ответ на этот вопрос должен быть утвердительный.

Заметим, прежде всего, что векторное произведение $[a, b]$ не изменяется, если конец вектора b скользит вдоль прямой, параллельной вектору a ; в самом деле, при этом ни величина площади параллелограмма, ни направление вектора $[a, b]$ не изменяются. В частности, не изменяя векторного произведения $[a, b]$, можно заменить вектор b , его составляющей b' , перпендикулярной a (рис. 110), т. е.

$$[a, b] = [a, b'].$$

Таким образом для доказательства справедливости соотношения (5) достаточно показать, что

$$[a, b' + c'] = [a, b'] + [a, c'],$$

где векторы b' и c' и следовательно их сумма $b' + c'$ перпендикулярны a . Итак, отбрасывая штрихи, будем считать b и c перпендикулярными a .

Плоскость векторов b и c примем за плоскость чертежа (рис. 111); вектор a будет перпендикулярен к этой плоскости; пусть он направлен к учащемуся. Нетрудно сообразить далее, что векторы $[a, b]$ и $[a, c]$ получаются из b и c поворотом на 90° в положительном направлении; с другой стороны величины этих векторов суть ab и ac (ибо синус угла между a и b и a и c равен единице). Итак, параллелограм, составленный из векторов $[a, b]$ и $[a, c]$, подобен параллелограму векторов b и c в силу равенства их углов и пропорциональности сторон; поэтому диагонали этих параллелограмов, как и стороны их, друг другу перпендикулярны, и диагональ первого получается из диагонали второго умножением

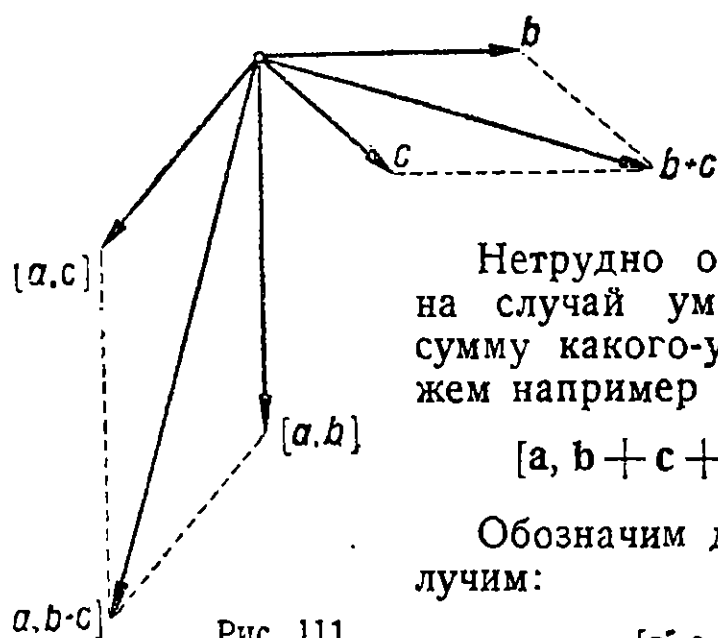


Рис. 111.

на a . Но это значит, что диагональ параллелограмма, построенного на $[a, c]$ и $[a, b]$, есть действительно $[a, b + c]$, т. е. формула (5) доказана.

Нетрудно обобщить теперь формулу (5) на случай умножения на геометрическую сумму какого-нибудь числа векторов; докажем например что

$$[a, b + c + d] = [a, b] + [a, c] + [a, d]. \quad (6)$$

Обозначим для этого $b + c$ через e . Получим:

$$[a, e + d] = [a, e] + [a, d],$$

в силу соотношения (5). Далее по тем же соображениям:

$$[a, e] = [a, b + c] = [a, b] + [a, c]$$

и формула (6) доказана.

Совершенно также доказывается соотношение:

$$[a + b, c + d] = [a, c] + [a, d] + [b, c] + [b, d], \quad (7)$$

что предлагается проверить учащемуся.

Примеры и упражнения.

1. Теорема о площади параллелограмма. При помощи операций векторного исчисления очень легко доказывается целый ряд теорем элементарной геометрии. Рассмотрим, например, произведение:

$$[a - b, a + b].$$

Раскрывая его, получим согласно формулам (7), (2), (4):

$$[a - b, a + b] = [a, a] + [a, b] - [b, a] - [b, b] = 2[a, b]$$

или

$$[a, b] = \frac{1}{2} [a - b, a + b]. \quad (8)$$

Но $a - b$ и $a + b$ суть диагонали параллелограмма, построенного на векторах a и b (рис. 112). Формула (8) выражает, таким образом, известное соотношение элементарной геометрии: площадь параллелограмма равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

2. Момент силы как векторное произведение. Пусть r — вектор-радиус точки приложения силы F . Легко проверить, что векторное произведение

$$M = [r, F] \quad (9)$$

есть не что иное, как вектор-момент силы относительно начала O вектора r . Предлагаем сделать это учащемуся (рис. 107).

3. Теорема Вариньона. Доказанный выше [формула (5)] дистрибутивный закон для векторного умножения учащийся встречал уже в статике. В самом деле, соотношение

$$[r, F_1 + F_2] = [r, F_1] + [r, F_2]$$

может быть сформулировано так: *момент равнодействующей, т. е. $F_1 + F_2$, равен геометрической сумме моментов слагаемых сил*; это — так называемая теорема Вариньона.

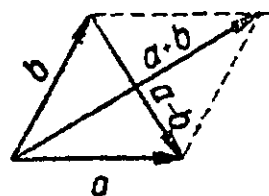


Рис. 112.

Точно так же соотношение

$$[r, F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n] = [r, F_1] + [r, F_2] + [r, F_3] + \dots + [r, F_n]$$

показывает, что момент главного вектора системы сил $F_1, F_2, \dots, F_n$ равен геометрической сумме моментов слагаемых.

§ 31. Проекции векторного произведения на оси.

Вектор часто задается его проекциями; обратно, часто бывает необходимо найти проекции на оси заданного вектора; поэтому естественно возникает вопрос: по заданным проекциям векторов a и b определить проекции их векторного произведения $c = [a, b]$.

Остановимся сначала на выводе формул векторного умножения ортов, т. е. единичных векторов координатных осей (стр. 89).

Легко проверить, что

$$[i, j] = k.$$

В самом деле, величина $[i, j]$ равна произведению величины i , т. е. единицы, на величину j , т. е. тоже на единицу, и на синус угла между ними, т. е. опять-таки на единицу; с другой стороны, направление $[i, j]$ должно совпадать с направлением оси OZ , т. е. должно быть перпендикулярно плоскости XY и обращено в такую сторону, чтобы, смотря с конца $[i, j]$, мы видели бы поворот от i к j на угол 90° совершающимся в положительном направлении. Итак, произведение $[i, j]$ есть единичный вектор, направленный вдоль положительной оси OZ , т. е.

$$[i, j] = k. \quad (1)$$

Совершенно аналогично доказывается, что

$$[j, k] = i \quad (2)$$

$$[k, i] = j. \quad (3)$$

В силу свойств векторного произведения, будем иметь далее:

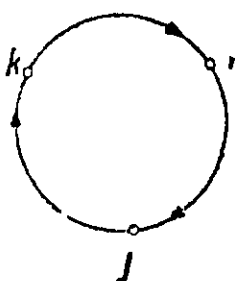


Рис. 113.

$$[j, i] = -k \quad (4)$$

$$[k, j] = -i \quad (5)$$

$$[i, k] = -j \quad (6)$$

$$[i, i] = 0 \quad (7)$$

$$[j, j] = 0 \quad (8)$$

$$[k, k] = 0. \quad (9)$$

Для запоминания формул (1—6) может служить следующее правило: обозначим три точки круга (рис. 113), следующие друг за другом в порядке часовой стрелки, через i, j, k ; тогда произведение двух единичных векторов будет равно третьему, если наименования их написаны на круге в порядке часовой стрелки; в противном случае это произведение будет равно третьему, взятому со знаком минус (правило *круговой подстановки*).

Перейдем теперь к составлению проекций векторного произведения. Напомним, что если a_x, a_y, a_z суть проекции вектора a , то последний может быть представлен в виде:

$$a = a_x i + a_y j + a_z k. \quad (10)$$

Обратно, если некоторый вектор представлен в таком виде, то коэффициенты при i, j, k суть проекции этого вектора на оси X, Y, Z .

Пусть проекции векторов a и b будут $a_x, a_y, a_z; b_x, b_y, b_z$. Имеем

$$c = [a, b] = [a_x i + a_y j + a_z k, b_x i + b_y j + b_z k].$$

Пользуясь дистрибутивным законом умножения и формулами (1) — (9), получим далее:

$$\begin{aligned} c &= a_x b_x [i, i] + a_x b_y [i, j] + a_x b_z [i, k] + a_y b_x [j, i] + a_y b_y [j, j] + \\ &\quad + a_y b_z [j, k] + a_z b_x [k, i] + a_z b_y [k, j] + a_z b_z [k, k] = \\ &= (a_x b_y - a_y b_x) k + (a_z b_x - a_x b_z) j + (a_y b_z - a_z b_y) i. \end{aligned}$$

Согласно сделанному выше замечанию, проекции c на оси будут:

$$\left. \begin{aligned} c_x &= a_y b_z - a_z b_y \\ c_y &= a_z b_x - a_x b_z \\ c_z &= a_x b_y - a_y b_x \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

В качестве примера дадим применение этих формул к отысканию проекций на оси момента силы относительно начала координат (т. е. моментов силы относительно осей). Мы имели:

$$\mathfrak{M} = [r, F].$$

В данном случае проекции r_x, r_y, r_z суть не что иное, как декартовы координаты конца вектора $\mathbf{r}$, т. е. точки приложения силы. Применяя формулы (11), получим:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

Для удобства запоминания формул (11) можно пользоваться правилом круговой подстановки, аналогичным вышеприведенному; предлагаем учащемуся его составить.

Заметим в заключение, что векторное произведение двух истинных векторов есть псевдо-вектор. В самом деле, при переходе от левой системы осей к правой (или наоборот) направление истинных векторов-сомножителей не изменяется; следовательно, направление их векторного произведения должно измениться на прямо противоположное; изучающий без труда проверит также, что векторное произведение псевдо-вектора на истинный есть истинный вектор. С примером такого векторного произведения мы встретимся в следующем параграфе.

§ 32. Линейная скорость как векторное произведение.

Мы уже говорили, что линейную скорость какой-либо точки M твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, можно представить как момент относительно точки M вектора угловой скорости. Если определить положение точки M относительно какой-либо точки O на оси вращения вектор-радиусом $\mathbf{r}$, то вектор-радиус, имеющий начало в M и конец в O , будет равен $-\mathbf{r}$ и мы получим [ср. формулу (9) § 30]:

$$\mathbf{v} = [-\mathbf{r}, \boldsymbol{\omega}] = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]. \quad (1)$$

Нетрудно проверить, что эта формула действительно представляет вектор скорости. В самом деле, величина векторного произведения равна

$$\omega r \sin(\omega, \mathbf{r}) = \omega \cdot h,$$

т. е. величине скорости; пусть далее мы приняли левую систему осей; тогда при указанном стрелкой направлении вращения вектор угловой скорости должен быть построен как указано на рис. 114а. Векторное произведение

$$[\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}]$$

должно быть перпендикулярно $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{r}$ и направлено так, чтобы смотря с его конца, мы видели поворот от $\boldsymbol{\omega}$ к $\mathbf{r}$ на наименьший угол по часовой стрелке; но это и будет направление скорости $\mathbf{v}$. Если бы мы приняли правую систему (рис. 114б), то направление $\boldsymbol{\omega}$ нужно было бы переменить на прямо противоположное; но теперь

смотря с конца векторного произведения, мы должны были бы видеть вращение от ω к r против часовой стрелки и направление

$$\mathbf{v} = [\omega, \mathbf{r}]$$

осталось бы прежним. Так, конечно, и должно быть: направление истинного вектора $\mathbf{v}$ не может зависеть от выбора той или иной

системы координат и определяется всецело направлением вращения тела (см. конец § 31).

Формулу (1), которая является основной для всего последующего, следует твердо запомнить. Дадим другой вывод ее. Вспомним для этого, что вектор скорости есть производная вектор-радиуса по времени, т. е.

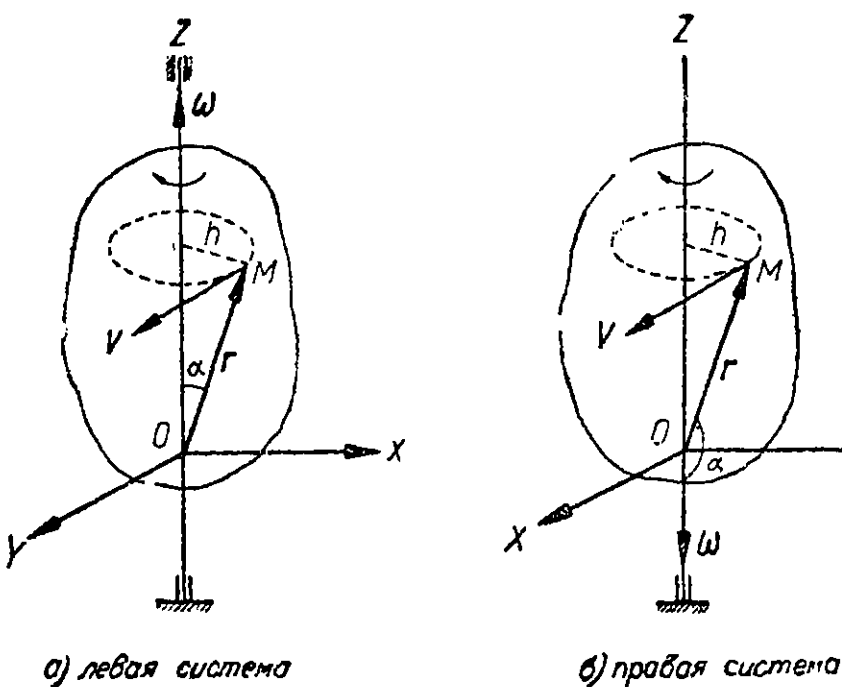


Рис. 114.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \quad (2)$$

но производная вектора постоянной длины перпендикулярна самому вектору, а в данном случае $r = \text{const}$, ибо тело — твердое; с другой стороны, производная вектора r должна быть направлена по касательной к его годографу; последним же в данном случае служит окружность, служащая основанием конуса, описываемого вектором r . Но касательная к этой окружности при всех положениях тела перпендикулярна оси вращения.

Таким образом скорость $\mathbf{v}$, будучи перпендикулярна оси вращения и вектору r , может быть представлена в виде $[\omega, r]$, ибо векторное произведение перпендикулярно векторам-сомножителям. Остается показать, что и величина v скорости равна величине векторного произведения; это мы уже сделали выше.

Итак

$$\mathbf{v} = [\omega, \mathbf{r}] = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

(3)

Примеры и упражнения.

1. Проекции скорости на оси. а) Если ось вращения принять за ось OZ , то проекции вектора ω будут:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \bar{\omega},$$

причем $\bar{\omega} = \omega$ при $\varphi > 0$, т. е. если вращение тела представляется происходящим в положительном направлении, если смотреть на него

с положительного конца оси OZ и $\tilde{\omega} = -\omega$ при $\dot{\varphi} < 0$. Обозначая координаты какой-либо точки тела (рис. 115) через x и y (координата z может быть произвольной), получим по формулам (11) § 31:

$$\boxed{v_x = -\tilde{\omega} y, \quad v_y = \tilde{\omega} x, \quad v_z = 0.} \quad (4)$$

б) В общем случае, когда ось вращения составляет какие угодно углы с осями координат (рис. 116), обозначая через $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ проекции ω на оси, получим:

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x \end{aligned}} \quad (5)$$

Это — так называемые формулы Эйлера.

2. Численный пример. Горизонтальная ось вращения проходит через центр турбинного диска, но вследствие неправильного рассверливания втулки составляет с перпендикуляром к его плоскости угол $\alpha = 2^\circ$. Диаметр диска $d = 50$ см, число оборотов в ми-

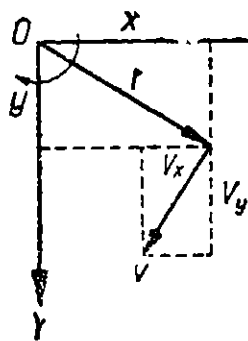


Рис. 115.

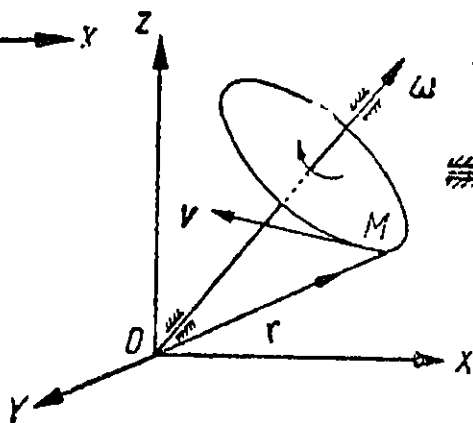


Рис. 116.

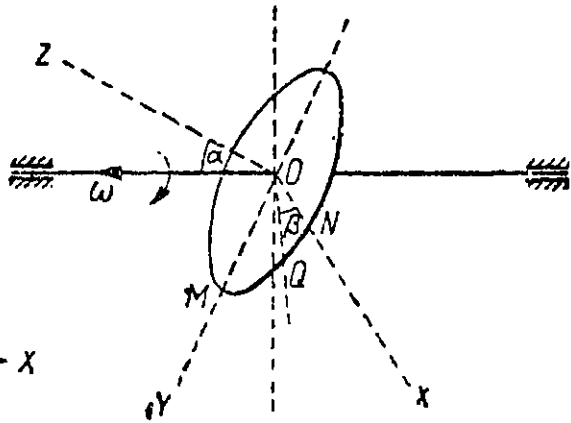


Рис. 117.

нуту $n = 18\,000$ об/мин. Определить проекции окружной скорости точки M в тот момент, когда она занимает наинизшее положение, на перпендикуляр к плоскости диска и на горизонтальную прямую ON , проведенную в этой плоскости (рис. 117).

Примем за координатные оси перпендикуляр к плоскости диска (Z), прямые ON (X) и OM (Y).

Проекция вектора ω на эти оси будут:

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = \omega \sin \alpha, \quad \omega_z = \omega \cos \alpha.$$

Координаты точки M суть:

$$x = 0, \quad y = 25, \quad z = 0.$$

По формулам (5) предыдущего упражнения получим:

$$v_x = -\omega \cdot 25 \cos \alpha, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Проделав вычисления, найдем:

$$v_x = -47\,100 \text{ см/сек}, \quad v_y = 0, \quad v_z = 0.$$

Для точки N :

$$x = 25, \quad y = 0, \quad z = 0$$

и мы получим:

$$v_x = 0, \quad v_y = 47\,100 \text{ см/сек}, \quad v_z = -1650 \text{ см/сек}.$$

Наконец, для точки Q ($\angle \beta = 30^\circ$):

$$x = 25 \cos \beta, \quad y = 25 \sin \beta, \quad z = 0.$$

$$v_x = -23\,570 \text{ см/сек}, \quad v_y = 40\,600 \text{ см/сек}, \quad v_z = -1430 \text{ см/сек}.$$

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. Цилиндр диаметра $D = 20 \text{ см}$ и высоты $H = 30 \text{ см}$ вращается вокруг оси $O_1 O_2$, проходящей через его центр тяжести O , с угловой скоростью $\omega = 10 \frac{1}{\text{сек}}$.

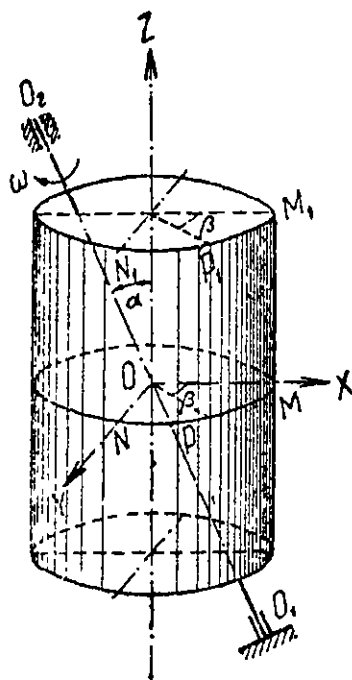


Рис. 118.

Определить проекции на оси X, Y, Z скоростей точек M, N, P , а также M_1, N_1, P_1 (рис. 118), причем OZ есть ось цилиндра, OY перпендикулярна OZ и оси вращения $O_1 O_2$, OX лежит в плоскости этих прямых и перпендикулярна OZ ; $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$.

2. Выразить орт бинормали через орт касательной и главной нормали.

3. Проверить, что векторное произведение ω на вектор $[\omega, \mathbf{r}]$ всегда направлено по перпендикуляру, опущенному из конца вектора $\mathbf{r}$ на ось вращения и имеет величину

$$\omega^2 r \sin(\omega, \mathbf{r}).$$

Задание 9-е.

Распределение ускорений в твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной оси.

§ 33. Угловое ускорение.

Быстрота изменения угла поворота со временем характеризуется, как мы знаем, угловой скоростью. Чтобы характеризовать быстроту изменения угловой скорости, вводят в рассмотрение еще один элемент, служащий для описания вращательного движения, — угловое ускорение.

Обозначим угловое ускорение через $\tilde{\epsilon}$; будучи быстротой изменения угловой скорости со временем, $\tilde{\epsilon}$ выразится формулой:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{d\omega}{dt}.$$

(1)

Итак, угловое ускорение равно производной угловой скорости по времени. Вспоминая, что последняя в свою очередь является производной по времени угла поворота, получим:

$$\boxed{\ddot{\epsilon} = \ddot{\varphi}} \quad (2)$$

По аналогии с ускорением прямолинейного движения точки, легко заключить, что

$$\ddot{\epsilon} > 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{в ускоренном вращении, в положительную сторону} \\ \text{„ замедленном „ „ отрицательную „} \end{array} \right.$$

$$\ddot{\epsilon} < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{в ускоренном вращении, в отрицательную сторону} \\ \text{„ замедленном „ „ положительную „} \end{array} \right.$$

Рассмотрим случай *равнопеременного* вращения. Так называется вращательное движение с *постоянным угловым ускорением*. Перепишав формулу (1) в виде

$$d\tilde{\omega} = \tilde{\epsilon} dt,$$

мы можем в этом случае при интегрировании вынести $\tilde{\epsilon}$, как постоянную, за знак интеграла. Получим:

$$\tilde{\omega} = \tilde{\epsilon} t + \tilde{\omega}_0; \quad (3)$$

постоянная интегрирования $\tilde{\omega}_0$ есть значение $\tilde{\omega}$ при $t=0$, т. е. угловая скорость в момент, принимаемый за начало отсчета времени.

Решая ур-ние (3), найдем:

$$\tilde{\epsilon} = \frac{\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0}{t}. \quad (4)$$

Отсюда следует, что за единицу углового ускорения следует принять угловое ускорение такого равнопеременного вращения, в котором за каждую единицу времени угловая скорость возрастает на единицу угловой скорости; в самом деле, согласно (4), при $t=1$ и $\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0 = 1$, $\tilde{\epsilon}$ также оказывается равным единице.

Если за единицу угла принять 1 радиан, а времени — 1 секунду, то единицей углового ускорения будет:

$$\frac{1}{\text{сек.}^2};$$

если же за единицу угла принять 1 оборот и за единицу времени 1 минуту, то единица углового ускорения обозначится так:

$$\text{об/мин}^2.$$

Вопрос о переходе от одних единиц к другим поясним на примерах:

а) Выразить в $\frac{1}{\text{сек.}^2}$ угловое ускорение, равное 10 об/мин.².

Имеем:

$$10 \text{ об/мин.}^2 = 10 \frac{2\pi}{60^2} \frac{1}{\text{сек.}^2} = \frac{\pi}{180} \frac{1}{\text{сек.}^2},$$

ибо 1 оборот = 2π радианов, 1 мин. = 60 сек.

б) Выразить в об/мин.² угловое ускорение $\pi \frac{1}{\text{сек.}^2}$. Имеем:

$$\pi \frac{1}{\text{сек.}^2} = \pi \frac{60^2}{2\pi} \text{ об/мин.}^2 = 1800 \text{ об/мин.}^2.$$

Обратимся к дальнейшему изучению равнопеременного вращения тела. Замечая, что

$$\bar{\omega} = \frac{d\varphi}{dt},$$

получим из формулы (3):

$$d\varphi = \bar{\omega}_0 dt + \bar{\epsilon} t dt.$$

Интегрируя, найдем:

$$\varphi = \varphi_0 + \bar{\omega}_0 t + \frac{\bar{\epsilon} t^2}{2}.$$

(5)

Постоянная интегрирования φ_0 есть значение угла поворота при $t=0$. Формулы (3) и (5) совершенно аналогичны соответствующим формулам равнопеременного прямолинейного движения.

Примеры и упражнения.

1. Пуск в ход и остановка машины. Формулы равнопеременного вращения (3) и (5) часто применяются при решении вопросов, связанных с пуском в ход и остановкой двигателя. Предположение о постоянстве углового ускорения или, как мы уже упоминали, предположение о постоянстве вращающего момента, может быть принято только как самое грубое приближение к действительности, но приходится все же им пользоваться, так как характер изменения вращающего момента или момента тормозящего (сил трения в подшипниках) остается часто неизвестным.

а) При пуске в ход двигателя угловая скорость его возрастает пропорционально времени и достигает величины $10\pi \frac{1}{\text{сек.}}$ по истечении 10 сек. Сколько оборотов совершит двигатель за это время?

В формуле (3) нужно положить $\omega_0 = 0$, ибо в момент пуска двигатель еще не имел угловой скорости. Получаем:

$$\omega = \bar{\epsilon} t.$$

При $t=10$ сек., мы должны иметь $\bar{\omega} = 10\pi \frac{1}{\text{сек.}}$. Это дает:

$$\bar{\epsilon} = \pi \frac{1}{\text{сек.}^2}.$$

Формула (5) дает теперь:

$$\varphi = \pi \frac{10^2}{2} = 50\pi = 25 \text{ оборотам.}$$

б) Угловая скорость двигателя, равная 1 200 об/мин., вследствие увеличения нагрузки, падает в течение 1,5 минуты до 800 об/мин. Вычислим угловое ускорение, считая его постоянным, и число оборотов, совершенных двигателем за указанный промежуток времени.

Имеем:

$$\bar{\omega}_0 = 1\,200 \text{ об/мин.}, \quad \bar{\omega} = (1\,200 + \bar{\epsilon}t) \text{ об/мин.};$$

при $t = 1,5$ мин., $\bar{\omega} = 800$ об/мин., что дает:

$$\bar{\epsilon} = \frac{800 - 1\,200}{1,5} = -\frac{400}{1,5} \text{ об/мин.}^2 = -267 \text{ об/мин.}^2.$$

Далее получим:

$$\varphi = 1\,200t - \frac{400t^2}{1,5 \cdot 2} = 1\,200 \cdot 1,5 - \frac{400}{1,5} \cdot \frac{1,5^2}{2} = 1\,500 \text{ оборотам.}$$

в) Маховик, вращаясь равномерно, делает 90 об/мин. С некоторого момента он начинает замедлять ход и, сделав 10 оборотов, останавливается.

Определим время его замедленного хода.

Имеем:

$$\bar{\omega}_0 = 900 \text{ об/мин.}, \quad \varphi = 10 \text{ оборотам.}$$

Обозначая через t искомый промежуток времени до остановки маховика, получим:

$$\bar{\omega}_0 + \bar{\epsilon}t = 0$$

$$\bar{\omega}_0 t + \bar{\epsilon} \frac{t^2}{2} = 10$$

и, исключая $\bar{\epsilon}$, найдем:

$$t = 1,33 \text{ сек.}$$

г) Отбросив теперь предположение, что угловое ускорение постоянно, разберем еще один пример.

При постепенном выключении реостата угловое ускорение вала электродвигателя возрастает пропорционально времени, причем постоянная вначале угловая скорость, равная $\bar{\omega}_0 = 20\pi \frac{1}{\text{сек.}}$, по истечении двух секунд от момента включения реостата возросла до $22\pi \frac{1}{\text{сек.}}$. Сколько оборотов совершит вал за этот промежуток времени?

Согласно условию, имеем:

$$\bar{\epsilon} = kt = \frac{d\bar{\omega}}{dt},$$

ибо $\bar{\epsilon}$ возрастает пропорционально времени и в момент $t = 0$ (до момента выключения реостата) равнялось нулю.

Интегрируя, найдем:

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \frac{kt^2}{2},$$

где постоянная интегрирования $\bar{\omega}_0 = 20\pi \frac{1}{\text{сек.}}$.

Интегрируя вторично, получим:

$$\varphi = -\frac{kt^3}{6} + \bar{\omega}_0 t.$$

Дальнейшее предоставляем учащемуся. Получаем:

$$\varphi = 20,67 \text{ оборотов.}$$

2. Определение углового ускорения по заданному закону изменения угловой скорости. Если угловая скорость известна в функции времени, то простое дифференцирование дает угловое ускорение.

Приведем два примера:

а) Определить угловое ускорение машины

в упражнении 3 § 27 задания 7 (стр. 138).
Имеем:

$$\omega = 10\pi(1 + 0,015 \sin 5\pi t).$$

Дифференцируя, найдем:

$$\varepsilon = 0,75\pi^2 \cos 5\pi t = 7,4 \cos 5\pi t \frac{1}{\text{сек.}^2}.$$

Максимальное значение ε , $\varepsilon_{\max} = 7,4 \frac{1}{\text{сек.}^2}$ даже

при малой неравномерности (3%), таким образом, довольно значительно.

б) Определить угловое ускорение эллиптического колеса II, если колесо I вращается равномерно (упражнение 3, § 28 задания 7).

Рис. 119.

Мы имеем (стр. 143):

$$\bar{\omega}_2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2 + c^2 - 2ac \cos \varphi} \bar{\omega}_1.$$

Дифференцируя, найдем:

$$\varepsilon_2 = -\frac{2ac(a^2 - c^2) \sin \varphi}{(a^2 + c^2 - 2ac \cos \varphi)^2} \bar{\omega}_1^2.$$

График изменения ε_2 представлен на рис. 119 при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$, $\varepsilon = 0$, что и должно быть, так как в этих положениях $\bar{\omega}_2$ имеет экстремальные значения.

§ 34. Угловое ускорение как вектор.

Для упрощения последующего изложения целесообразно ввести в рассмотрение понятие о векторе углового ускорения ε :

$$\boxed{\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}}. \quad (1)$$

Так как вращение происходит вокруг неподвижной оси, то направление ω постоянно; следовательно (стр. 88), ε , как производная вектора постоянного направления, имеет то же направление, что и ω при $\frac{d\omega}{dt} > 0$ и прямо противоположное направление при $\frac{d\omega}{dt} < 0$.

Величина вектора ε , которую, согласно условию, следует обозначить через ε , т. е. той же буквой, но светлым шрифтом, равна

$$\varepsilon = \left| \frac{d\omega}{dt} \right| = |\ddot{\varphi}|, \quad (2)$$

ибо величина производной вектора постоянного направления равна абсолютному значению производной величины дифференцируемого вектора (стр. 88). Как и в § 29, придется в тех случаях, когда возможны недоразумения, отличать $\varepsilon = \left| \frac{d\omega}{dt} \right| = |\ddot{\varphi}|$ от $\tilde{\varepsilon} = \frac{d\dot{\omega}}{dt} = \ddot{\varphi}$. Очевидно, что $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ при $\ddot{\varphi} > 0$ и $\varepsilon = -\tilde{\varepsilon}$ при $\ddot{\varphi} < 0$.

Вопрос. Замедленное вращение вокруг вертикальной оси происходит по часовой стрелке для наблюдателя, смотрящего сверху. Как направлены вектора ω и ε ?

§ 35. Распределение ускорений во вращающемся теле.

Вопрос, к которому мы сейчас переходим, является с точки зрения приложений одним из наиболее важных в Механике. Вероятно многие из учащихся знают о случаях разрыва маховиков при очень больших угловых скоростях; другим известно, что при больших угловых скоростях не вполне точно собранные или, как говорят, „неуравновешенные“ двигатели проявляют признаки беспокойной работы, выражающиеся в преждевременном износе подшипников, дрожании фундамента и т. д. Все эти вопросы будут освещены в Динамике. Теперь же нашей задачей является дать необходимый для этого подготовительный кинематический материал.

Чтобы не прерывать последующего изложения, выведем здесь формулу дифференцирования векторного произведения.

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — вектор-функции скалярного аргумента t ; докажем, что производная по этому аргументу их векторного произведения определяется формулой

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \left[\mathbf{a}, \frac{d\mathbf{b}}{dt} \right] + \left[\frac{d\mathbf{a}}{dt}, \mathbf{b} \right]. \quad (1)$$

Полная аналогия этой формулы с соответствующей формулой анализа, дающей производную произведения двух функций, подсказывает, что и выводы этих формул совершенно аналогичны.

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [a, b] &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[a + \Delta a, b + \Delta b] - [a, b]}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[a + \Delta a, b + \Delta b] - [a + \Delta a, b]}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[a + \Delta a, b] - [a, b]}{\Delta t} = \\ &= \left[a, \frac{db}{dt} \right] + \left[\frac{da}{dt}, b \right], \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Переходим к определению ускорения любой точки M твердого тела. Определяя положение точки M относительно некоторой точки C , произвольно взятой на оси вращения, вектор-радиусом r имеем согласно § 32, задания 8.

$$v = [\omega, r] = \frac{dr}{dt}. \quad (2)$$

С другой стороны мы знаем, что вектор ускорения w является производной вектора скорости по времени:

$$w = \frac{dv}{dt}. \quad (3)$$

Пользуясь теперь формулами (2) и (1) найдем:

$$w = \frac{d}{dt} [\omega, r] = \left[\frac{d\omega}{dt}, r \right] + \left[\omega, \frac{dr}{dt} \right].$$

Но

$$\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon, \quad \frac{dr}{dt} = v$$

и мы получаем:

$$w = [\varepsilon, r] + [\omega, v]. \quad (4)$$

Введем обозначения:

$$w_1 = [\varepsilon, r], \quad w_2 = [\omega, v]. \quad (5)$$

Нетрудно убедиться, что w_1 и w_2 суть не что иное, как касательная и нормальная слагающие вектора ускорения w . Они называются еще соответственно *вращательным* и *центростремительным* ускорением. В самом деле, величина w_1 равна (рис. 120):

$$w_1 = \varepsilon \cdot r \cdot \sin(\varepsilon, r) = \varepsilon \cdot h. \quad (6)$$

Направление w_1 совпадает с направлением скорости $v = [\omega, r]$ или прямо противоположно ему, сообразно тому, совпадают ли по направлению или прямо противоположны друг другу векторы ω и ε (см. § 34). Но и направление вращательного ускорения совпадает

с направлением скорости, если последняя возрастает, и противоположно ей, если она убывает по величине. С другой стороны, величина касательного ускорения равна:

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = \frac{d}{dt} (h \omega) = h \left| \frac{d\omega}{dt} \right| = h\epsilon,$$

т. е. равна ω_1 . Итак, ω_1 , будучи по величине и направлению равно касательному ускорению, и есть не что иное, как это последнее.

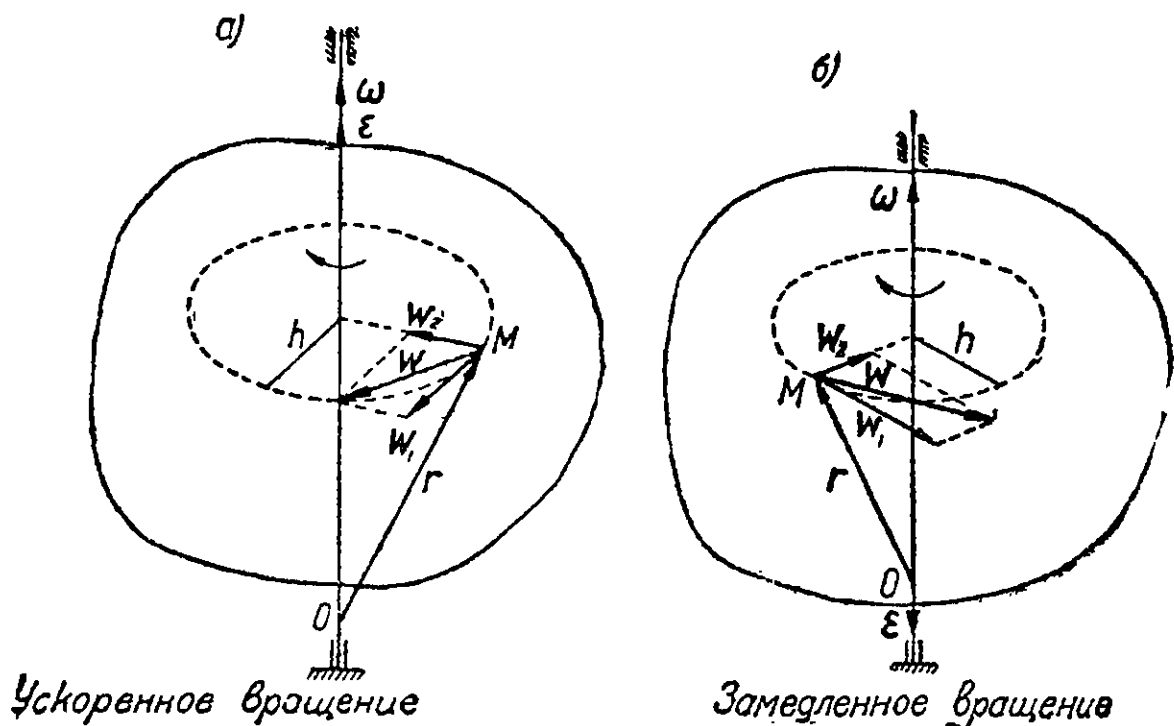


Рис. 120.

Проекцию ускорения w на касательную к траектории точки M , т. е. на касательную к описываемой ею окружности, обозначим, как и выше (стр. 118), через ω_τ . Очевидно, что

$$\boxed{\omega_\tau = \epsilon h} \quad (6a)$$

и при $\epsilon > 0$ $\omega_\tau = \omega_1$, при $\epsilon < 0$, $\omega_\tau = -\omega_1$.

Перейдем к рассмотрению второго члена w_2 в формуле (4). Величина w_2 определится из формулы:

$$\omega_2 = \omega \cdot v \cdot \sin(\omega, v) = \omega \cdot v \sin 90^\circ = \omega \cdot v.$$

С другой стороны, $v = \omega h$ и мы получаем:

$$\boxed{\omega_2 = \omega^2 h.} \quad (7)$$

Учащийся без труда убедится, пользуясь правилом для определения направления векторного произведения, что w_2 направлено перпендикулярно оси вращения от рассматриваемой точки M к этой оси или, что то же самое, по радиусу круга, описываемого

точкой M к его центру. Иными словами, направление вектора w_2 совпадает с направлением нормального ускорения; величина же последнего, как мы знаем, равна

$$\frac{v^2}{h} = \frac{(\omega h)^2}{h} = \omega^2 h.$$

Таким образом w_2 действительно представляет нормальную составляющую вектора ускорения w .

Проекцию ускорения w на направление нормали к траектории, т. е. на радиус описываемой точкой окружности, обозначим, как и на стр. 118, через w_n . Так как w_n всегда положительно, то

$$w_n = w_2 = \omega^2 h.$$

Полученный результат формулируется так: *ускорение любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равно геометрической сумме двух ускорений:*

$$w = w_1 + w_2.$$

Касательное или вращательное ускорение w_1 равно по величине $\varepsilon \cdot h$ и направлено в ту же сторону, что скорость v , или обратно ей, соответственно тому, возрастает ли или убывает последняя со временем, т. е. ускорено или замедлено вращение.

Нормальное или центростремительное ускорение w_2 равно по величине $\omega^2 h$ и направлено по радиусу круга, описываемого рассматриваемой точкой, к его центру.

Полное ускорение равно по величине

$$w = \sqrt{w_n^2 + w_\tau^2} = h \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \quad (8)$$

и направлено по диагонали прямоугольника, построенного на векторах w_1 и w_2 .

Изучающий должен твердо запомнить эти результаты и формулы (6) и (7).

Примечание. Мы применили векторный метод вывода формул распределения скоростей и ускорений в теле, вращающемся вокруг неподвижной оси, главным образом потому, что этот способ приводит к формулам, сохраняющим свой вид и в более сложных случаях движения твердого тела. Учащийся без труда сравнит их с соответствующими формулами распределения скоростей и ускорений в плоском движении твердого тела, а также и в общем случае произвольного движения в пространстве.

Примеры и упражнения.

1. Численные примеры на отыскание нормального и касательного ускорений. а) Определить ускорение точек обода турбинного диска радиуса $r = 35$ см, совершающего $n = 18000$ об/мин.

В этом случае $\omega = \text{const}$, $\varepsilon = 0$, $w = w_n = r\omega^2$. Сделав вычисления, найдем:

$$\omega = \frac{2\pi \cdot 18000}{600} = 600\pi \frac{1}{\text{сек}}, \quad w = w_n = r\omega^2 = 35 \cdot 6^3 \cdot 10^4 \pi^2 \cong \cong 1260 \text{ км/сек}^2.$$

Обращаем внимание учащегося на громадную величину результата, обусловленную конечно большой угловой скоростью диска и тем обстоятельством, что *нормальное ускорение пропорционально квадрату угловой скорости*. Затруднения, связанные с созданием двигателей с большой угловой скоростью, обуславливаются как раз возникновением громадных нормальных ускорений. Современная паровая турбина, делающая тысячи оборотов в минуту, могла быть построена только тогда, когда было найдено средство к устранению этих затруднений.

б) Для сравнения с предыдущим результатом найдем нормальное ускорение на ободе маховика при $r = 0,9 \text{ м}$, $n = 360 \text{ об/мин}$. Получаем:

$$\omega = \frac{\pi \cdot 360}{30} = 12\pi \frac{1}{\text{сек}}, \quad w = w_n = 0,9 \cdot \pi^2 \cdot 12^2 \cong 1280 \text{ м/сек}^2.$$

Ускорение в предыдущем примере примерно в 1000 раз больше только-что вычисленного. Этим объясняется, что и методы устранения опасности от так называемых центробежных сил, проявляющихся при наличии нормальных ускорений, совершенно различны в сравнительно медленных паровых машинах и быстроходных паровых турбинах. В то время как в первых все дело сводится к точному центрированию и отысканию надлежащих прочных размеров, в паровых турбинах всего этого недостаточно. Мы вернемся к этому вопросу в Динамике.

б) Найти касательное и нормальное ускорение конца стрелки гальванометра в примере 1 в § 27 задания 7.

Имеем:

$$\varphi = \frac{\pi}{12} \sin \frac{\pi t}{2}, \quad \bar{\omega} = \dot{\varphi} = \frac{\pi^2}{24} \cos \frac{\pi t}{2}, \quad \bar{\varepsilon} = \ddot{\varphi} = -\frac{\pi^3}{48} \sin \frac{\pi t}{2}.$$

По формулам (6) и (7) получим:

$$w_\tau = \bar{\varepsilon} l = -\frac{\pi^3}{48} \cdot 10 \sin \frac{\pi t}{2} \text{ см/сек}^2, \quad w_n = 10 \cdot \frac{\pi^4}{24^2} \cos^2 \frac{\pi t}{2} \text{ см/сек}^2.$$

2. Проекция ускорения на оси координат. Примем ось вращения за ось OZ . В таком случае (см. прим. 1, § 32 задания 8). Имеем:

$$\varepsilon_x = 0, \quad \varepsilon_y = 0, \quad \varepsilon_z = \bar{\varepsilon},$$

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 0, \quad \omega_z = \bar{\omega}.$$

Вспоминая, что:

$$\mathbf{w} = [\mathbf{s}, \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}]$$

и пользуясь формулами для проекций векторного произведения (11) § 31, получим:

$$w_x = -\tilde{\epsilon}_y - \tilde{\omega}v_y, \quad w_y = \tilde{\epsilon}_x + \tilde{\omega}v_x.$$

Подставляя сюда вместо v_x и v_y их значения, найдем:

$$w_x = -\tilde{\epsilon}_y - \omega^2 x, \quad w_y = \tilde{\epsilon}_x - \omega^2 y.$$

В общем случае, когда ось OZ направлена как угодно, проекции ускорения проще всего найти, дифференцируя формулы (5) § 32 для проекций скорости. Мы не будем останавливаться на этом и ограничимся одним численным примером.

3. Численный пример. Определить проекции ускорения точек M, N, Q на ободе турбинного диска на оси координат в примере 3, § 32 задания 8.

Так как $\tilde{\omega} = \text{const}$, то $\tilde{\epsilon} = 0$ и следовательно:

$$w_1 = [\mathbf{s}, \mathbf{r}] = 0.$$

Далее получим:

$$w_{2x} = \omega_y v_z - \omega_z v_y = \omega_y(\omega_x y - \omega_y x) - \omega_z(\omega_z x - \omega_x z)$$

$$w_{2y} = \omega_z v_x - \omega_x v_z = \omega_z(\omega_y z - \omega_z y) - \omega_x(\omega_z y - \omega_y x)$$

$$w_{2z} = \omega_x v_y - \omega_y v_x = \omega_x(\omega_z x - \omega_x z) - \omega_y(\omega_y z - \omega_z y).$$

Замечая, что в плоскости диска $z = 0$ и подставляя значения проекций вектора $\tilde{\omega}$, получим:

$$w_{2x} = -x\omega^2, \quad w_{2y} = -y\omega^2 \cos^2 \alpha, \quad w_{2z} = y\omega^2 \cos \alpha \sin \alpha.$$

Проделав вычисления, найдем:

для точки $M(0; 25; 0): w_{2x} = 0, w_y = -90 \pi^2 \text{ км/сек}^2, w_z = 3,11 \pi^2 \text{ км/сек}^2$

„ „ $N(25; 0; 0): w_x = -90 \pi^2 \text{ км/сек}^2, w_y = 0, w_z = 0$

„ „ $Q(21,6; 12,5; 0): w_x = -78 \pi^2 \text{ км/сек}^2, w_y = -45 \pi^2 \text{ км/сек}^2$
 $w_z = 1,55 \pi^2 \text{ км/сек}^2.$

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. Маховик, которому сообщена угловая скорость 400 об/мин., предоставленный самому себе, останавливается вследствие трения в подшипниках через 2 мин. Считая, что угловое ускорение постоянно, определить число оборотов, которое маховик сделает до остановки.

2. Двигатель при пуске в ход приобретает за 1,5 минуты угловую скорость 500 об/мин. Вычислить угловое ускорение и число оборотов двигателя за эти 1,5 минуты.

3. В опытах Депрэ по определению коэффициента трения в подшипниках получилась следующая таблица значений угловой скорости в различные моменты времени:

Составить по этим данным путем графического интегрирования график угла поворота, а путем графического дифференцирования график углового ускорения в функции времени.

4. Диск, подвешенный на проволоке, совершает крутильные колебания амплитуды 30° и периода $T=4$ сек вокруг оси проволоки. Диаметр диска 20 см. Определить вращательное и центростремительное ускорения точки на ободе.

5. Определить проекции на оси ускорения точек M, N, P, M_1, N_1, P_1 в примере 4 предыдущего задания (рис. 118).

6. Ведущий вал II (рис. 121) лобовой передачи делает 500 об/мин. и на ходу передвигается так, что расстояние d меняется по закону:

$$d = (10 - 0,4 t) \text{ см.}$$

Определить угловое ускорение (замедление) вала I , пренебрегая скольжением между колесами, а также угловую скорость колеса I при $t=0$ и $t=10$ сек.

t (мин.)	n (об/мин.)	t (мин.)	n (об/мин.)
0,5	535	5,5	315
1,0	506	6,0	301
1,5	478	6,5	287
2,0	451	7,0	273
2,5	426	7,5	260
3,0	403	8,0	248
3,5	382	8,5	238
4,0	363	9,0	229
4,5	346	9,5	219
5,0	330	10,0	209

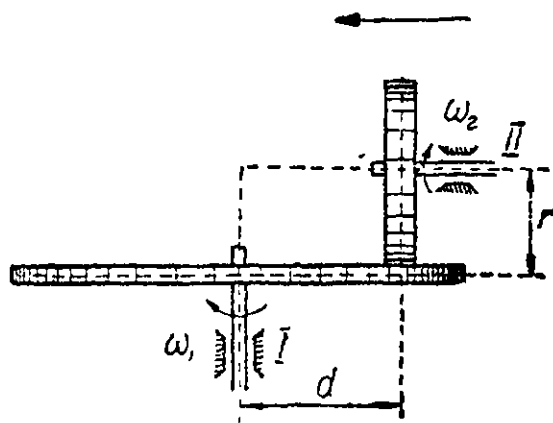


Рис. 121.

Задание 10-е.

Плоское движение твердого тела. Задание движения, перемещения и траекторий точек.

Движение твердого тела называется плоским, если все точки его имеют скорости, параллельные некоторой плоскости. Выделение этого случая движения в самостоятельный отдел Кинематики обуславливается его большим техническим значением. Рассмотрим, например, входящий в состав любого поршневого двигателя кривошипный механизм (см. задания 1 и 2); все звенья, его составляющие, движутся параллельно одной плоскости; параллельно этой же плоскости движутся также многочисленные звенья, входящие в систему кулисного парораспределения и получающие движение от главного вала. Этим примером дело, конечно, не ограничивается: все механизмы, встречающиеся в технике, за одним или двумя исключениями совершают плоское движение. В частности и вращение тела вокруг неподвижной оси является специальным случаем плоского движения; движение колеса по прямолинейному

пути дает еще один пример его; плоское движение совершают также механизмы для вычерчивания разных кривых (эллипсограф, конхотограф), всевозможные кулисные механизмы, входящие в состав громадного числа передач, шарнирный четырехсторонник и многие другие; мы познакомимся с ними в дальнейшем.

Техническая важность и сравнительная простота рассмотрения плоского движения обусловили появление разнообразных — графических и аналитических — способов его изучения. Целью этого и последующих заданий является ознакомление с некоторыми из них.

Мы уже видели, что изучение кинематики какого-либо объекта (точки, твердого тела) строится по такому плану: сначала выясняется вопрос о способах задания положения этого объекта и его движения, а затем дается подробное изучение характеризующих движение элементов: траекторий, скоростей и ускорений.

Этого плана мы будем придерживаться и при изучении плоского движения.

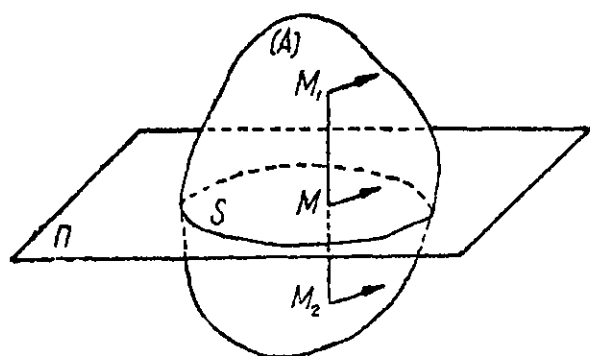


Рис. 122.

Пусть тело A (рис. 122) совершает движение, параллельное плоскости P . Проведем мысленно в теле ряд плоскостей, параллельных P . Наше тело разобьется на ряд плоских фигур, наложенных друг на друга, подобно листам книги. Все точки, принадлежащие какой-нибудь фигуре, имеют

скорости, направленные в плоскости фигуры, и следовательно фигура движется в своей плоскости. Движение одной такой плоской фигуры вполне определяет движение всего твердого тела, так как плоскости, которыми мы разбили твердое тело, друг с другом неизменно связаны и не могут двигаться друг по отношению к другу.

Если мы возьмем в какой-нибудь фигуре S точку M и восставим в ней перпендикуляр к плоскости фигуры S , то все точки: M_1 , M_2 и т. д. остальных фигур, лежащие на этом перпендикуляре, будут иметь одинаковое движение, т. е. будут описывать одинаковые траектории, иметь одинаковые скорости, одинаковые ускорения.

Мы приходим таким образом к возможности значительного упрощения изучения плоскости движения твердого тела: мы будем изучать движение плоской фигуры в своей плоскости; по движению этой фигуры нетрудно будет уже судить о движении всего твердого тела.

§ 36. Задание положения и движения плоской фигуры.

Возьмем две системы осей в плоскости фигуры: одну систему (рис. 123) XOY — неподвижную, другую $X'O'Y'$, неизменно связанную с движущейся фигурой, на ней начерченную и следовательно с нею движущуюся. Положение какой-либо точки M фигуры будем

определять или вектор-радиусом $\mathbf{r}$, проведенным из начала O неподвижной системы осей, или вектором $\mathbf{r}'$, проведенным из O' ¹⁾ — начала подвижной системы. Вектор-радиус начала O' , отсчитываемый от O , обозначим через $\mathbf{r}_0$. Проекции вектора $\mathbf{r}$ на оси X и Y будут декартовы координаты x и y точки M в неподвижной системе осей; при движении фигуры изменяется ее положение, в то время как оси X и Y остаются, по условию, неподвижными; иными словами, координаты X и Y изменяются со временем; в противоположность этому проекции вектора $\mathbf{r}'$ на подвижные оси, т. е. декартовы координаты x' и y' точки M в системе подвижных осей в течение движения остаются постоянными, ибо расстояние точек твердой фигуры до прямых, на ней проведенных, не изменяется.

Всякой точке фигуры соответствует определенная пара чисел x' и y' ; обратно, всякой паре чисел (x', y') можно сопоставить определенную точку. В частности, точке O' , началу подвижной системы, соответствуют значения x' и y' , равные нулю, — значения координат x и y для этой точки обозначим через x_0 и y_0 (проекции вектора $\mathbf{r}_0$).

Чтобы определить положение подвижной системы осей относительно неподвижной достаточно задать: 1) положение начала O' , т. е. его координаты x_0 и y_0 или, что то же, вектор-радиус $\mathbf{r}_0$, 2) угол одной из подвижных осей с одной из неподвижных; например угол φ осей X' и X . Последнее требует некоторого уточнения: условимся считать, что перпендикулярная к плоскости фигуры ось Z направлена так, что оси XYZ и $X'Y'Z'$ составляют левые системы. Это определит положительное направление отсчета угла φ : смотря с конца оси Z , мы должны видеть поворот от оси X к оси X' происходящим по часовой стрелке. В изображенном на рисунке расположении осей ось Z направлена от учащегося внутрь чертежа; поэтому для учащегося положительный поворот от оси X к оси X' происходит против часовой стрелки. Заданием трех величин x_0 , y_0 и φ положение системы подвижных осей вполне определяется, так как по этим данным она может быть без труда построена. Вместе с тем по этим данным определяется и положение неизменно связанной с координатной системой $X'O'Y'$ плоской фигуры.

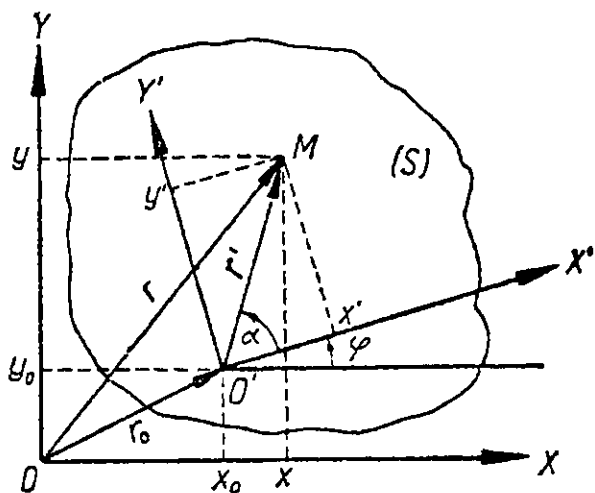


Рис. 123.

Задать движение тела — это значит задать его положение в любой момент времени. Таким образом движение плоской фигуры следует считать известным, если в любой момент известны значения величин x_0 , y_0 , φ или, что то же самое, заданы значения их в функции времени.

Будем называть начало O' подвижной системы *основной точкой*; угол φ будет в таком случае углом поворота вокруг основной точки. Пользуясь этими наименованиями, мы можем формулировать

¹⁾ Эту точку называют часто *полусом* фигуры.

вышесказанное так: плоское движение твердого тела определяется:
1) заданием движения основной точки:

$$x_0 = f_1(t), \quad y_0 = f_2(t), \quad (1)$$

т. е. заданием декартовых координат в функции времени, 2) заданием угла поворота вокруг основной точки или так называемого уравнения вращения:

$$\varphi = f_3(t). \quad (2)$$

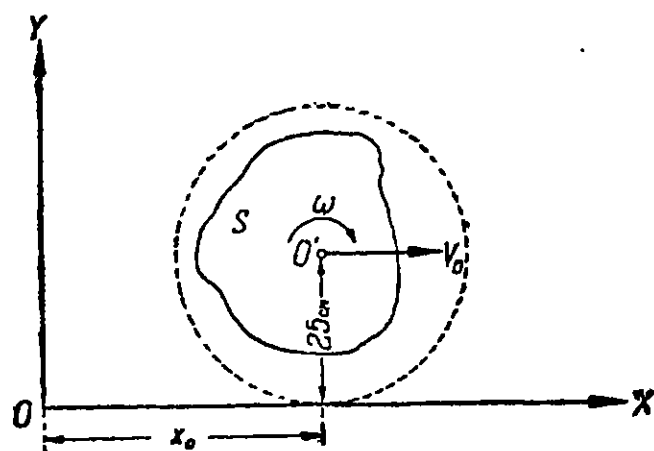


Рис. 124.

Примеры и упражнения.

1. Движение колеса по прямолинейному пути. Движение плоской фигуры задано следующим образом: точка O' фигуры (рис. 124) движется параллельно оси OX по прямой, находящейся на расстоянии 25 см от этой оси, в положительную сторону со скоростью $v_0 = 10$ см/сек; фигура вращается равномерно

вокруг O' с угловой скоростью $\omega = 0,4 \frac{1}{\text{сек}}$. Написать уравнения движения фигуры.

Выбрав оси, как указано на рис. 124, будем иметь: 1) уравнения движения основной точки:

$$x = v_0 t = 10t \text{ см}, \quad y = \text{const} = 25 \text{ см};$$

2) уравнение вращения:

$$\varphi = \omega t = 0,4 t.$$

Описываемое движение будет совершать колесо радиуса 25 см, если покатить его без скольжения со скоростью $v_0 = 10$ см/сек по оси X . В самом деле, за промежуток времени $t = \frac{2\pi}{\omega}$, пока угол φ изменится на 2π , т. е. колесо совершит полный оборот, центр его переместится вдоль оси X на $2\pi r = 2\pi \cdot 25 = v_0 t = v_0 \frac{2\pi}{\omega}$. Отсюда при $v_0 = 10$ см/сек, найдем $\omega = \frac{v_0}{r} = 0,4 \frac{1}{\text{сек}}$, т. е. заданное нам значение.

2. Кривошипный механизм. Составим уравнения движения плоской фигуры, связанной с шатуном кривошипного механизма. Предполагается, что кривошип вращается с постоянной угловой скоростью ω .

Принимая точку (рис. 125) A за основную и направляя оси, как показано на рисунке, получим:

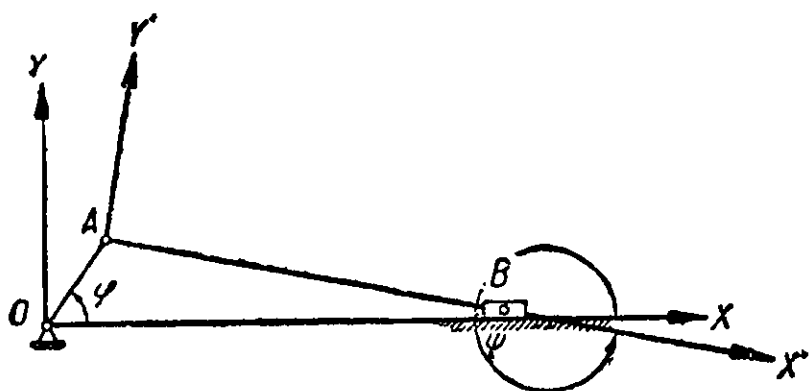


Рис. 125.

$$x_0 = a \cos \varphi = a \cos \omega t, \quad y_0 = a \sin \varphi = a \sin \omega t.$$

Это — уравнение движения основной точки. Угол ψ выражается как функция времени помощью соотношения:

$$\sin \psi = -\frac{a}{l} \sin \varphi = -\frac{a}{l} \sin \omega t;$$

здесь l — длина шатуна AB , a — длина шатуна OA . Предлагаем учащемуся построить графически ψ в функции угла поворота кривошипа φ , задавшись каким-либо численным значением отношения $\frac{a}{l}$.

3. Механизм паровой машины с качающимся цилиндром. Точка (рис. 126) A стержня AB описывает окружность радиуса a , в то время как сам стержень проходит постоянно через точку N , лежащую на той же окружности. Это осуществляется тем, что в точке N стержень проходит через ползунок, свободно вращающийся вокруг N . Кривошип OA вращается равномерно с угловой скоростью ω . Написать уравнения движения стержня.

Точку A примем за основную и направим ось X' вдоль BA . Тогда ось Y' должна пройти через точку M , лежащую на противо-

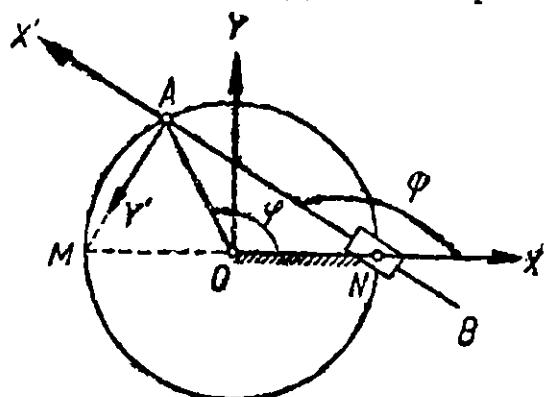


Рис. 126.

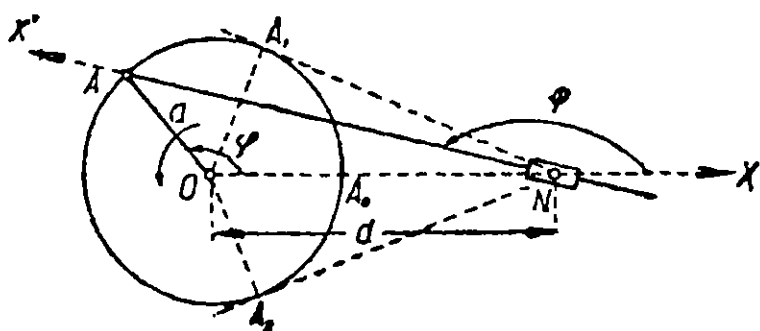


Рис. 127.

положном конце диаметра, проведенного через N ($\angle MAN$, как прямой, опирается на диаметр). Называя через ψ угол осей X и X' и через φ — угол кривошипа OA с осью X , имеем:

$$\varphi = \omega t,$$

откуда следует:

$$x_0 = a \cos \omega t, \quad y_0 = a \sin \omega t.$$

Это — уравнения движения основной точки. Далее из простых геометрических соображений найдем:

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega t}{2}.$$

Простота результата объясняется тем обстоятельством, что $ON = OA$. Если отбросить это предположение, то получим механизм паровой машины с качающимся цилиндром (рис. 127). Здесь при равномерном вращении кривошипа OA угол ψ уже не будет изменяться пропорционально времени, и угловая скорость ползуника будет переменной: при вращении кривошипа в направлении, указанном стрелкой, ползунок совершит размах сверху вниз, пока криво-

шип повернется на дугу A_1AA_2 ; обратный же размах снизу вверх совершится быстрее, ибо при этом палец кривошипа опишет дугу $A_2A_0A_1$, меньшую предыдущей. Этим свойством пользуются для того, чтобы сообщить движение столу, на котором закрепляется обрабатываемый предмет в малых строгальных станках: медленное движение используется для рабочего хода, быстрое — для холостого.

Чтобы составить уравнение вращения, заметим, что

$$\frac{\sin(\psi - \varphi)}{d} = \frac{\sin \psi}{a}, \quad (a = OA, \quad d = ON),$$

откуда найдем:

$$\sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi = \frac{d}{a} \sin \psi,$$

или

$$\operatorname{ctg} \psi = \operatorname{ctg} \varphi - \frac{d}{a \sin \varphi}.$$

Предлагаем изучающему, задавшись определенным численным значением отношения $\frac{a}{d}$, подсчитать для ряда значений угла φ соответствующие ψ и по результатам построить график уравнения вращения.

§ 37. Траектории точек плоской фигуры.

Сохраняя обозначения предыдущего параграфа, мы можем написать очевидное геометрическое равенство:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'. \quad (1)$$

Это уравнение, будучи спроектировано на оси X и Y , дает уравнения движения точки M — конца вектор-радиуса $\mathbf{r}$.

Проектируя обе стороны ур-ния (1) на ось X , получим (рис. 123):

$$x = x_0 + r' \cos(\varphi + \alpha) = x_0 + r' \cos \alpha \cdot \cos \varphi - r' \sin \alpha \sin \varphi;$$

но

$$r' \cos \alpha = x', \quad r' \sin \alpha = y'$$

и мы получаем:

$$x = x_0 + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi. \quad (2)$$

Аналогично получим:

$$y = y_0 + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi. \quad (2a)$$

Если плоское движение задано, то x_0 , y_0 , φ суть заданные функции времени. Ур-ния (2) и (2a) суть уравнения движения точки M , или, что то же самое, параметрические уравнения ее траектории. Исключая из них время, получим уравнение траектории.

Ур-ние (1) есть параметрическое уравнение траектории в векторной форме.

Примеры и упражнения.

1. Эллиптическое движение. Займемся определением траектории любой точки $M(x', y')$ плоской фигуры S , неизменно связанной с линейкой эллипсографа ($AB = 2l$).

За основную точку примем середину линейки O' . Уравнения движения основной точки будут (рис. 128):

$$x_0 = l \sin \varphi, \quad y_0 = l \cos \varphi.$$

Угол φ является некоторой функцией времени. Поскольку речь идет об определении только траекторий, вид этой функциональной зависимости не имеет значения. Все точки фигуры S описывают вполне определенные траектории, независимо от того, по какому закону изменяется во времени угол φ .

Ур-ния (2) и (2а) дают:

$$\left. \begin{aligned} x &= l \sin \varphi + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi = (l - y') \sin \varphi + x' \cos \varphi \\ y &= l \cos \varphi + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi = (l + y') \cos \varphi + x' \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Решая эти уравнения относительно $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, получим:

$$\sin \varphi = \frac{x'y - x(l + y')}{x'^2 + y'^2 - l^2}, \quad \cos \varphi = \frac{xx' - (l - y')y}{x'^2 + y'^2 - l^2}.$$

Исключая теперь φ при помощи соотношения $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, получим:

$$[x'y - x(l + y')]^2 + [xx' - (l - y')y]^2 = (x'^2 + y'^2 - l^2)^2; \quad (4)$$

путем простых преобразований ур-ние (4) может быть приведено к виду:

$$Ax^2 + By^2 - 2Cxy = D, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} A &= x'^2 + (l - y')^2, \\ B &= (l + y')^2 + x'^2, \\ C &= 2x'l, \\ D &= (x'^2 + y'^2 - l^2)^2. \end{aligned}$$

Полученная кривая, будучи второго порядка, является эллипсом, ибо коэффициенты A, B, C ур-ния (5) удовлетворяют условию:

$$C^2 - AB = -(x'^2 + y'^2 - l^2)^2 < 0,$$

что, как известно из Аналитической геометрии, характеризует эллипс.

Центр эллипса находится в начале координат, ибо ур-ние (5) не содержит членов первой степени относительно x и y .

Если, в частности, точка взята на линейке, то $x' = 0$ и мы получаем:

$$x^2(l + y')^2 + y^2(l - y')^2 = (y'^2 - l^2)^2$$

или по упрощении:

$$\frac{x^2}{(y' - l)^2} + \frac{y^2}{(y' + l)^2} = 1. \quad (6)$$

В этом частном случае, рассмотренном уже выше (стр. 46), осями симметрии эллипса являются координатные оси.

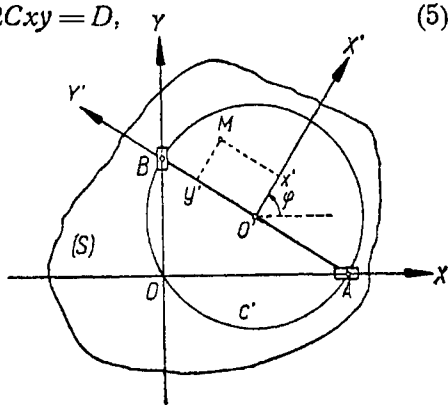


Рис. 128.

Рассмотрим другой частный случай, когда точка M лежит на окружности C' радиуса l с центром в O' . В этом случае x' и y' связаны уравнением окружности:

$$x'^2 + y'^2 = l^2,$$

и мы получаем:

$$A = x'^2 + y'^2 + l^2 - 2ly' = 2l(l - y'), \quad B = 2l(l + y'),$$

$$C = 2lx' = 2l\sqrt{l^2 - y'^2}, \quad D = 0.$$

Ур-ние (5) приобретает вид:

$$(l - y')x^2 + (l + y')y^2 - 2\sqrt{l^2 - y'^2}xy = 0$$

или

$$(\sqrt{l - y'}x - \sqrt{l + y'}y)^2 = 0,$$

$$\frac{x}{\sqrt{l + y'}} = \frac{y}{\sqrt{l - y'}}.$$

Таким образом точки, лежащие на круге C' , описывают прямую, проходящую через начало координат. К этому вопросу мы еще вернемся в задании 12. На рис. 129 показано одно из применений эллипсографа для превращения вращательного движения в прямолинейное колебательное.

Рис. 129. Механизм для превращения вращательного движения в возвратно-поступательное. (Модель кабинета Механики Ленинградского физико-механического института).

2. Обращенное эллиптическое движение. Мы видели в предыдущем упражнении, что любая точка движущейся плоскости $X'O'Y'$, связанной с линейкой эллипсографа, описывает эллипс: карандаш, неизменно связанный с ней (x' и y' — постоянные), вычертит эллипс на листе бумаги, скрепленном с плоскостью XOY . Представим себе теперь, что карандаш неизменно связан с плоскостью XOY (x и y — постоянны), а лист бумаги скреплен с плоскостью $X'O'Y'$. Мы получаем в таком случае обращенное эллиптическое движение, которое можно осуществить, закрепив линейку AB и предоставив возможность сторонам прямого угла XOY постоянно проходить через неподвижные точки A и B , для чего в этих точках можно поставить вращающиеся ползунки A и B (рис. 130).

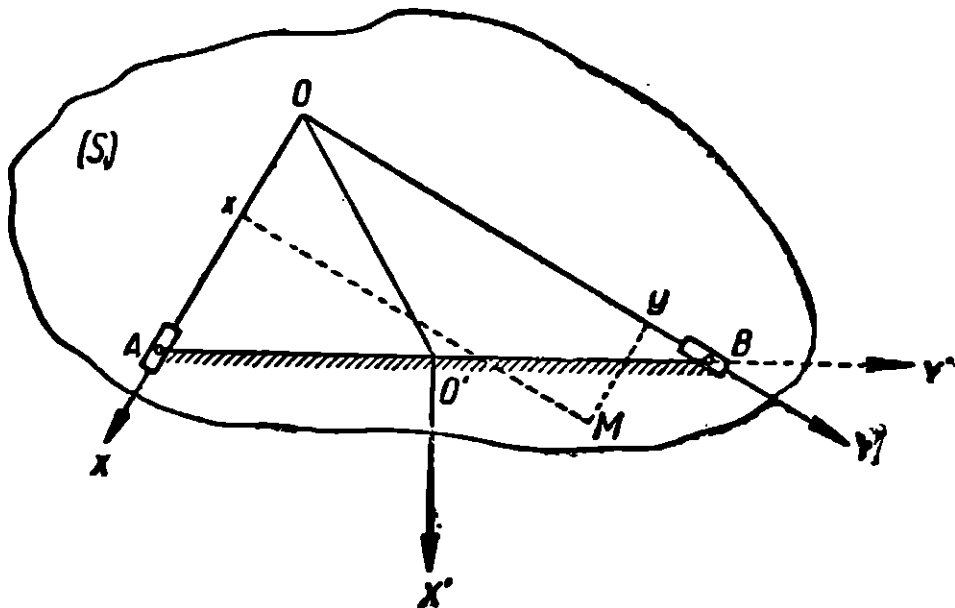


Рис. 130.

Найдем уравнение траектории какой-либо точки $M(x, y)$ плоской фигуры S_1 , связанной с подвижной системой XOY . Ур-ния (3), устанавливающие связь между координатами точки M в системах XOY и $X'OY'$, очевидно имеют место и в рассматриваемом случае, ибо геометрическая картина рис. 130 ничем не отличается от той, которую мы имели раньше на рис. 129. Разница лишь в том, что прежде мы считали x' и y' постоянными, а x и y переменными координатами, в обратном же движении постоянными будут x и y , а переменными x' и y' . Уравнение траектории, которое есть не что иное, как результат исключения φ из ур-ний (3) и в обратном движении представляется тем же выражением (4):

$$[x'y - x(l + y')]^2 + [xx' - (l - y')y]^2 = (x'^2 + y'^2 - l^2)^2, \quad (4)$$

в котором только уже x' и y' — текущие координаты, а x и y — постоянные числа. Полученное уравнение алгебраической кривой 4-го порядка представляет так называемую улитку Паскаля или конхоиду круга. Мы не будем останавливаться на изучении этого уравнения, так как целью наших рассуждений было только ознакомление учащегося с так называемым „принципом обращения механизмов“, пример которого мы здесь имеем.

Отметим лишь один частный случай: пусть $x = y = 0$. Ур-ние (4) дает:

$$x'^2 + y'^2 = l^2,$$

т. е. вершина прямого угла XOY (начало координат) описывает окружность, что впрочем было непосредственно ясно из геометрических соображений.

На основании изложенного устроен столик Леонардо-да-Винчи, имеющий применение в токарном деле для вытачивания овалов-эллипсов. Механизм показан на рис. 131. Вокруг точек A и B , находящихся на неподвижном устое, могут вращаться два ползунка. На них надет круглый диск с крестообразным выдолбленным каналом, в котором ползунки могут скользить. Точка O , т. е. центр диска, описывает окружность радиуса $AO' = O'B = l$, а точка P на кресте — улитку Паскаля.

Будем рассматривать теперь диск как горизонтальный подвижной столик; положим на него и прикрепим к нему лист какого-

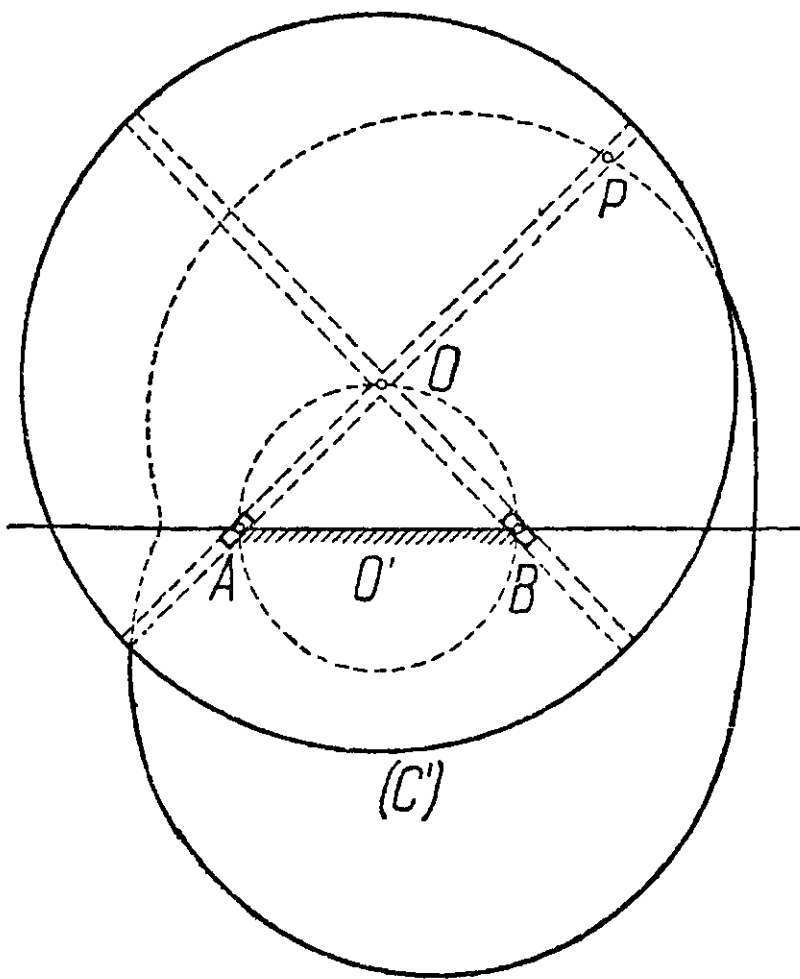


Рис. 131.

нибудь материала; тогда если поднесем к нему сверху во время движения резец, то резец вырежет из материала эллипс. В самом деле, резец, будучи неподвижен, принадлежит устою, т. е. линейке AB . Следовательно по отношению к движущемуся столу резец выполняет эллиптическое движение и вытачивает поэтому эллипс.

Заметим еще, что один из ползунков A или B может быть удален и заменен кривошипом $O'O$, вращающимся вокруг неподвижной оси, проходящей через O' .

3. Конхоидограф. Изображенный на рис. 132 механизм носит название конхоидографа, так как любая точка линейки AM описывает кривую, называемую конхойдой. Устройство механизма ясно из рисунка.

Определим траекторию точки M ($AM = ON = d$). Примем точку A за основную. Ее уравнения движения будут:

$$x_0 = f(t), \quad y_0 = 0,$$

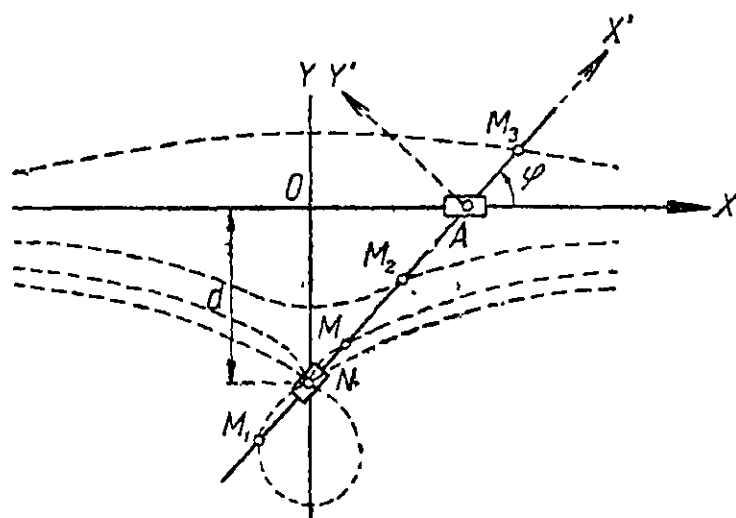


Рис. 132.

причем, поскольку речь идет только об определении траекторий, вид функциональной зависимости x_0 от t не играет роли. Уравнение вращения получим, замечая, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{x_0}.$$

По формулам (2) и (2a) получим ($x' = -d$, $y' = 0$):

$$x = x_0 - d \cos \varphi, \\ y = -d \sin \varphi.$$

Исключим из этих уравнений φ и x_0 . Имеем:

$$x_0 = d \operatorname{ctg} \varphi$$

и следовательно

$$x = d(\operatorname{ctg} \varphi - \cos \varphi) = -d \cos \varphi \left(1 + \frac{d}{y}\right), \quad \cos \varphi = -\frac{xy}{d(d+y)}.$$

Пользуясь соотношением $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$, получим:

$$x^2 y^2 + y^2 (y + d)^2 = d^2 (y + d)^2$$

или

$$x^2 y^2 = (d^2 - y^2) (d + y)^2.$$

Это уравнение конхойды. Изучение его довольно сложно, но вид кривой непосредственно очевиден из способа ее получения при помощи нашего механизма, и кривая может быть легко построена по точкам. На рис. 132 траектория точки M , а также траектории других точек M_1 , M_2 , M_3 линейки показаны пунктиром.

Приведенные примеры показывают, что аналитическое определение траекторий сопровождается довольно громоздкими выклад-

ками. Для более сложных механизмов с большим числом звеньев вычисления становятся уже настолько сложными, что практически не представляется возможности довести их до конца; с другой стороны полученные результаты, как мы убедились, мало наглядны. Поэтому на практике построение траекторий или, как говорят, разметку путей различных точек делают графическим путем, вычерчивая механизм в ряде положений. За подробностями отсылаем учащегося к курсам Прикладной механики.

§ 38. Перемещение плоской фигуры.

Перейдем теперь к вопросу о перемещениях плоской фигуры.

Положение плоской фигуры может быть задано положением двух ее точек O' и M или отрезком $\overline{O'M}$ (рис. 133).

Пусть фигура $O'M$ переместилась из положения I в положение II . Мы можем разбить этот переход на две части. Сперва наша фигура переместилась поступательно в положение I' , причем все точки ее получили перемещения, геометрически равные перемещению $\overrightarrow{O'O_1}$ точки O' , а затем уже повернулась на $\angle M'O_1M_1$ вокруг оси, проходящей через точку O_1 перпендикулярно плоскости. Здесь за основную точку принята точка O' , но угол поворота не зависит от выбора основной точки. В самом деле, тот же переход из положения I во II можно осуществить, переместив сначала фигуру в положение I'' , причем все ее точки получают перемещения, геометрически равные $\overline{MM_1}$, а затем, перевернув фигуру на $\angle O''M_1O_1$ вокруг оси, проходящей

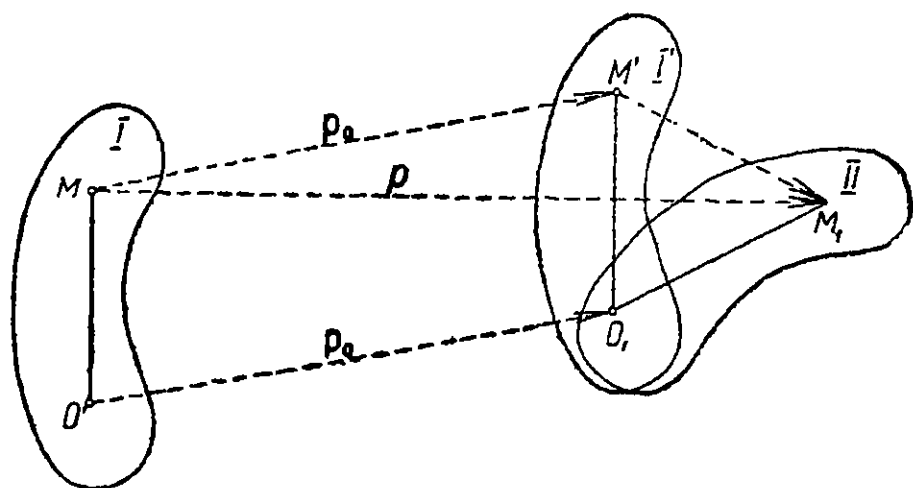


Рис. 133.

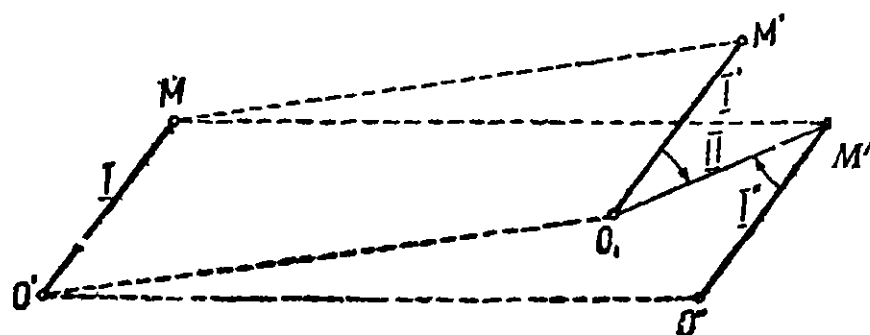


Рис. 134.

через M_1 . Но по свойству поступательного перемещения $\overline{O''M_1}$ параллельно $\overline{O'M}$ и точно так же $\overline{O_1M'}$ параллельно $\overline{O'M}$. Следовательно $\overline{O''M_1}$ и $\overline{O_1M'}$ параллельны между собой и $\angle O''M_1O_1 = \angle M'O_1M_1$ (рис. 134). Вместе с тем и поворот вокруг точек O_1 и M_1 в том и другом случае происходит в одну сторону (на нашем чертеже по часовой стрелке).

Возвращаясь к рис. 133, обозначим перемещение основной точки O'

через p_0 , а перемещение M через p . Замечая, что $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{O'O_1} = p_0$, получим:

$$p = p_0 + \overrightarrow{M'M_1}. \quad (1)$$

Здесь $\overrightarrow{M'M_1}$ есть перемещение вследствие поворота фигуры вокруг основной точки. Обозначая угол поворота через θ , будем иметь из $\triangle O_1M_1M'$:

$$M'M_1 = O_1M' \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2}.$$

В дальнейшем нас будут интересовать лишь бесконечно-малые перемещения. В этом случае можно заменить синус его аргументом; получим:

$$\overline{M'M_1} = \overline{O_1M'} \cdot \theta = r' \cdot \theta.$$

Через r' обозначен вектор-радиус точки M , отсчитываемый от основной точки O' .

Чтобы указать также направление вектора $M'M_1$, введем в рассмотрение так называемый вектор поворота θ , определив его следующим образом: 1) величина вектора поворота равна величине угла поворота, 2) по направлению θ перпендикулярно плоскости движения, причем, смотря с его конца, мы увидели бы поворот фигуры происходящим по часовой стрелке.

Введя вектор θ , мы можем представить $\overrightarrow{M'M_1}$, в виде

$$M'M_1 = [\theta, r'].$$

Действительно, это векторное произведение имеет величину $\theta r' \sin(\theta, r') = \theta r$. С другой стороны, оно направлено так же, как и $\overrightarrow{M'M_1}$, в предельном случае бесконечно-малого перемещения (т. е. перпендикулярно r' в сторону поворота фигуры). Формула (1) дает теперь:

$$\boxed{p = p_0 + [\theta, r]} \quad (2)$$

Эта формула будет иметь большое значение в последующем.

Докажем теперь теорему Эйлера-Шалля: *Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в своей плоскости может быть произведено одним вращением вокруг некоторого центра.*

Пусть опять фигура переместилась из положения I в положение II (рис. 135).

Восставим из середин перемещений точек A и B , т. е. из середин отрезков $\overline{AA'}$ и $\overline{BB'}$, перпендикуляры и найдем пересечение их в точке C . Докажем, что фигура I может быть переведена в положение II вращением вокруг центра C на $\angle ACA' = \angle BCB'$. В самом деле, треугольники ACB и $A'CB'$ равны между собой, так как $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, в силу неизменяемости фигуры, и $\overline{AC} = \overline{A'C}$, $\overline{BC} = \overline{B'C}$, по построению.

Следовательно

$$\angle ACB = \angle A'CB,$$

или, прибавляя к обеим частям этого равенства по одинаковому $\angle BSA'$, найдем, что

$$\angle ACA' = \angle BCB'.$$

Повернем теперь фигуру I на угол $\angle ACA'$, тогда $\overline{AC}$ совместится с $\overline{A'C}$, $\overline{BC}$ с $\overline{B'C}$, так как углы равны и $\overline{AB}$ совместится с $\overline{A'B'}$, что и доказывает теорему Шалля.

Построение, указанное нами, не дает результата в двух случаях: 1) если перпендикуляры, восстановленные из середин перемещений, сливаются в одну линию (рис. 136); тогда очевидно центр вращения лежит на пересечении отрезков AB и $A'B'$; 2) если перпендикуляры параллельны между собой, что имеет место при поступательном перемещении; этот случай мы из формулировки исключили.

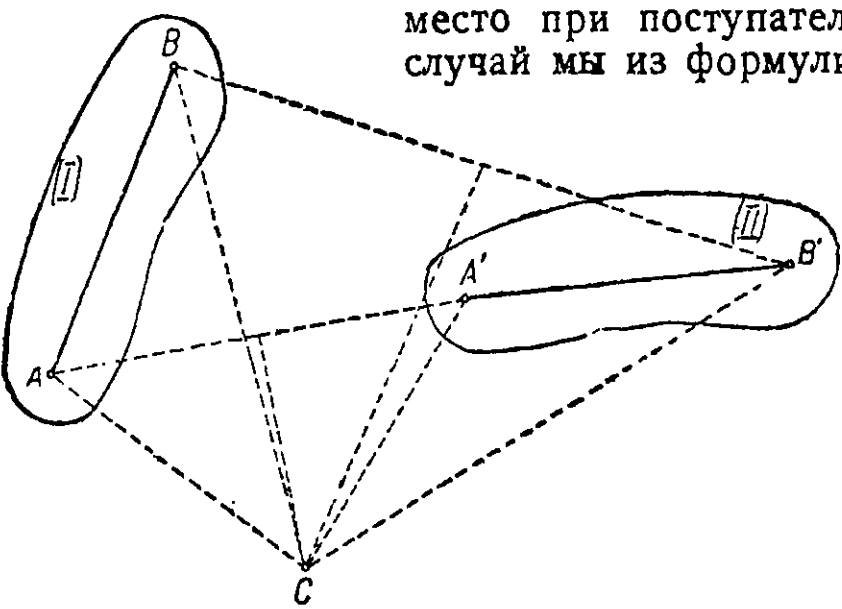


Рис. 135.

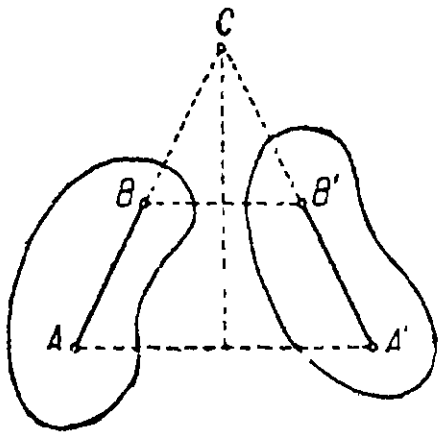


Рис. 136.

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. Колесо равномерно вращается вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью $n = 150$ об/мин. Ось колеса, опирающаяся на ресоры, совершает вертикальные гармонические колебания амплитуды $a = 2$ см и периода $T = 0,4$ сек. Найти траекторию любой точки обода; радиус колеса $r = 20$ см (рис. 137).

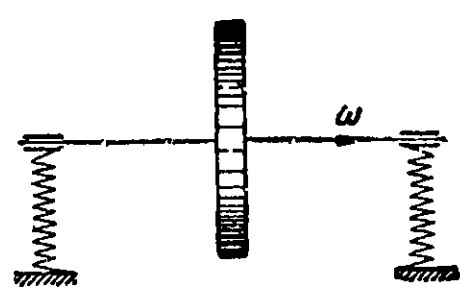


Рис. 137.

2. На рис. 138 изображена схема горизонтального маятника паллографа Шлика, служащего для измерения вибраций корабля. Кривошип OA , вращаясь вокруг неподвижной точки O , приводит в движение шатун AB , проходящий через вращающийся вокруг O_1 ползунок. Груз W маятника присоединен к точке C , лежащей на продолжении шатуна. В положении равновесия кривошип и шатун располагаются по вертикальной прямой OO_1 , и углы φ и ψ равны нулю. При малых отклонениях

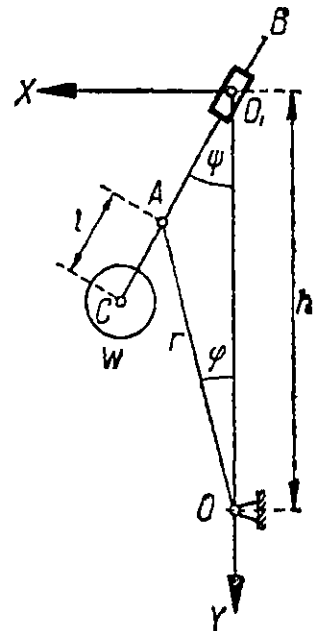


Рис. 138

маятника от положения равновесия углы φ и ψ остаются весьма малыми и в первом приближении можно положить:

$$\sin \varphi = \varphi, \quad \sin \psi = \psi$$

$$\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}, \quad \cos \psi = 1 - \frac{\psi^2}{2}.$$

Составить уравнение траектории центра тяжести C груза при малых отклонениях и проверить, что при $h - r > \sqrt{lr}$ груз начинает движение *опускаясь*, т. е. что положение равновесия его неустойчиво; при $h - r < \sqrt{lr}$ положение равновесия груза устойчиво, т. е. он *поднимается* при малом отклонении маятника.

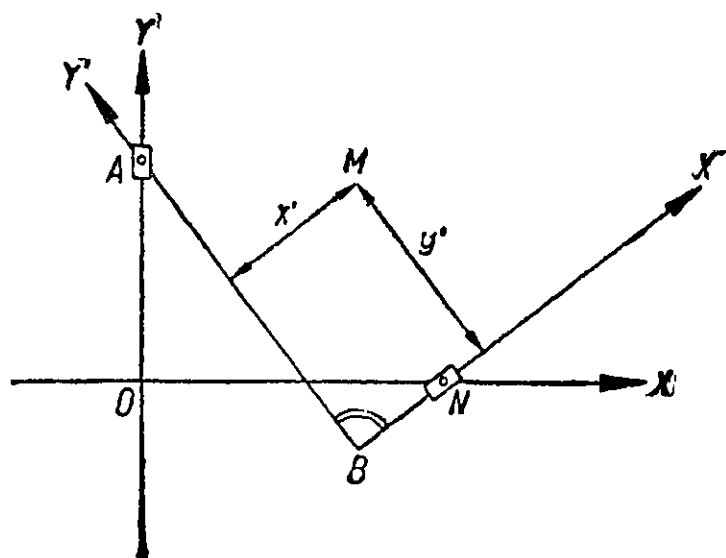


Рис. 139.

Вычертить траекторию центра тяжести груза при малых отклонениях, полагая:

- 1) $h = 100, l = 15, r = 65$;
- 2) $h = 100, l = 20, r = 80$.

3. Сторона AB жесткого прямого угла скользит своим концом A вдоль оси OY , в то время как другая сторона постоянно проходит через точку N , для чего в последней поставлен вращающийся ползунок. $AB = ON = a$.

Найти уравнение траектории вершины угла B (рис. 139).

4. Для построения осей эллипса, описываемого любой точкой M плоскости, неизменно связанной с линейкой эллипсографа, проводим через M диаметр круга C' (рис. 128).

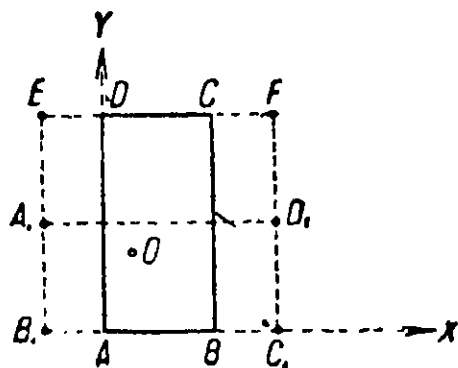


Рис. 140.

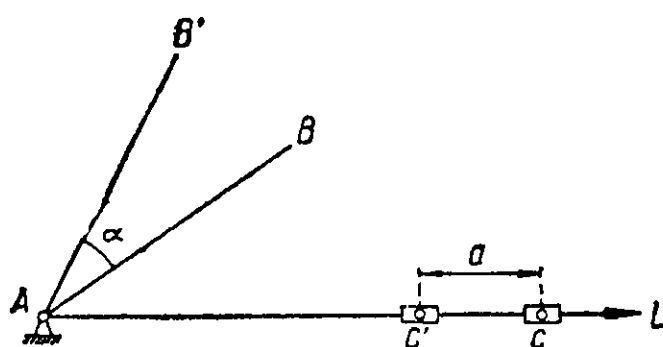


Рис. 141.

Соединяя концы этого диаметра с началом координат, получим искомые оси. Объяснить построение.

5. Доска складного стола, имеющего форму прямоугольника $ABCD$ со сторонами $AB = a$ и $AD = 2a$, поворачивается вокруг шипа O так, что занимает положение $A_1B_1C_1D_1$, причем $AB_1 = BC_1$; при раскладывании затем получается квадрат B_1EFC_1 . Найти, пользуясь построением Шаля, положение шипа (рис. 140).

6. Кривошип AB вращается около точки A . Найти, какую точку

этого кривошипа надо соединить при помощи шатуна с ползуном C , движущимся вдоль прямой AL , для того чтобы при повороте кривошипа из положения AB на угол α в положение AB' ползун переместился вдоль AL на данное расстояние a (рис. 141).

Указание. Центр поворота лежит на пересечении перпендикуляра из середины CC' и биссектрисы угла α .

Задание 11-е.

Распределение скоростей в движущейся плоской фигуре.

Вопрос о распределении скоростей в движущейся в своей плоскости фигуре возникает перед инженером при проектировании парораспределений, автоматов и вообще во всех случаях, где имеет значение согласование движений отдельных звеньев механизма. Существуют различные методы изучения распределения скоростей. Можно изучать его аналитически; с этого мы и начнем, выведя основную формулу распределения скоростей. Однако в применении к ряду технически важных задач формула эта практически не решает вопроса. Дело в том, что движения, совершаемые звеньями даже наиболее простых механизмов, определяются аналитически весьма громоздкими формулами. Поэтому для изучения распределения скоростей здесь следует предпочесть путь графического решения задачи. В других случаях наиболее наглядную картину распределения скоростей дает пользование представлением о так называемом мгновенном центре. В содержание этого задания входит, как уже указано, изложение сначала аналитического решения вопроса о распределении скоростей; это дает фундамент для дальнейших теоретических выводов и послужит основанием изучения графического метода, который также будет здесь изложен на ряде примеров.

§ 39. Распределение скоростей в движущейся плоской фигуре.

Будем пользоваться ранее введенными обозначениями. Пусть в момент времени t фигура занимала положение I , а в момент $t + \Delta t$ положение II . За промежуток времени Δt , считаемый весьма малым, точка фигуры получит перемещение, состоящее из перемещения p_0 основной точки O' и перемещения $[\theta, r']$ поворота вокруг основной точки. По определению скорости (стр. 91)

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p}{\Delta t}. \quad (1)$$

Но, как было показано выше:

$$p = p_0 + [\theta, r'], \quad (2)$$

и следовательно

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\theta}{\Delta t}, r' \right]. \quad (3)$$

Первое слагаемое, т. е.

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0}{\Delta t},$$

есть не что иное как скорость основной точки:

$$v_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0}{\Delta t}. \quad (4)$$

Входящий же во второе слагаемое вектор $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta}{\Delta t}$ есть не что иное, как *вектор угловой скорости вращения фигуры*:

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta}{\Delta t}} \quad (5)$$

Действительно, направление ω совпадает с направлением θ , так что: 1) вектор ω перпендикулярен плоскости движения, 2) если смотреть с конца ω , то вращение фигуры представится происходящим в положительном направлении. Величина ω равна абсолютному значению производной угла поворота φ вокруг основной точки по времени:

$$\omega = |\dot{\varphi}|$$

Последнее станет ясным, если вспомнить, что θ есть угол поворота фигуры вокруг основной точки. Если назвать значение угла φ в моменты t и $t + \Delta t$ соответственно через φ и $\varphi + \Delta\varphi$, то $\theta = \Delta\varphi$ и следовательно:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dot{\varphi}.$$

Как и раньше в тех случаях, когда возможны недоразумения, будем отличать $\omega = |\dot{\varphi}|$ от $\tilde{\omega} = \dot{\varphi}$.

Отметим еще, что вектор угловой скорости ω не изменяется при замене основной точки, ибо θ , как мы видели, от выбора основной точки не зависит. Это и дает нам право называть ω вектором угловой скорости *фигуры*.

Вернемся к формуле (3). Подставляя вместо

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0}{\Delta t}, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta}{\Delta t}$$

их значения (4) и (5), получим:

$$\boxed{v = v_0 + [\omega, r']}. \quad (6)$$

Чтобы лучше усвоить смысл слагаемых, входящих в правую часть этой формулы, рассмотрим два частных случая:

1. Поступательное движение: $\omega = 0$, и формула (6) дает:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0,$$

т. е. скорости всех точек одинаковы и равны скорости основной точки, как это уже было отмечено при рассмотрении поступательного движения твердого тела.

2. Вращение вокруг неподвижной оси: $\mathbf{v}_0 = 0$ и мы получаем:

$$\mathbf{v} = [\omega, \mathbf{r}'],$$

т. е. уже известный нам закон распределения скоростей при вращении тела вокруг неподвижной оси.

Таким образом в общем случае плоского движения скорость любой точки складывается из той скорости, которую она имела бы, если бы тело двигалось только поступательно, со скоростью $\mathbf{v}_0$, и из вращательной скорости, которая имела бы место, если бы основная точка была неподвижна, и тело вращалось вокруг нее с угловой скоростью ω (рис. 142).

Формула (6) носит название *формулы распределения скоростей в плоском движении*. Учащийся должен хорошо усвоить ее содержание и разобраться в рис. 142.

Отметим еще одно следствие формулы (6), имеющее значение для последующего. Будем исходить из векторного уравнения (стр. 172):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'.$$

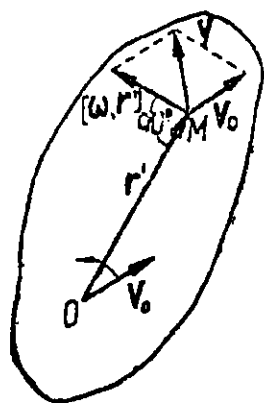


Рис. 142.

Вспоминая, что вектор скорости $\mathbf{v}$ есть производная вектор-радиуса по времени (стр. 91), получим:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt},$$

но первое слагаемое есть не что иное, как скорость основной точки $\mathbf{v}_0$ и следовательно

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}.$$

Сравнивая этот результат с формулой (6), получим:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = [\omega, \mathbf{r}'], \quad (7)$$

т. е. вращательная скорость вокруг основной точки есть производная вектор-радиуса $\mathbf{r}'$ по времени. Предлагаем учащемуся установить этот результат непосредственно из рассмотрения перемещений (ср. стр. 154).

Прежде чем перейти к примерам, условимся в некоторых обозначениях: вектор скорости будем снабжать значком внизу, указывающим наименование точки, скорость которой рассматривается; например, $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$ и т. д. будут обозначать скорости точек A , B и

т. д. Вектор-радиус точки B , если за начало его принята точка A , будем обозначать $\vec{r}'_{AB}$; наконец вращательную скорость точки B , когда за основную принята точка A , назовем через $\vec{v}_{AB}$. Формула распределения скоростей примет при этом вид (рис. 143)

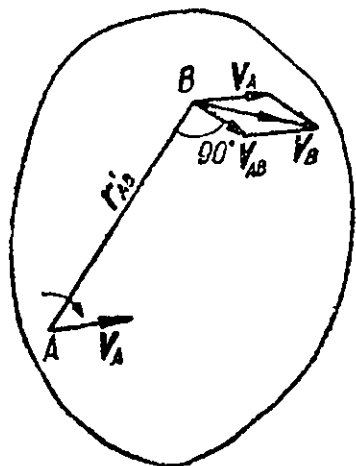


Рис. 143.

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB}, \quad (6a)$$

причем

$$\vec{v}_{AB} = [\omega, \vec{r}'_{AB}], \quad (8)$$

т. е. $\vec{v}_{AB}$ равно по величине $\overline{AB}\omega$ и направлено перпендикулярно $\overline{AB}$ в сторону вращения фигуры.

Примеры и упражнения.

1. Эпициклическое зацепление. На палец A (рис. 144) кривошипа OA , вращающегося вокруг оси O , свободно насажено зубчатое колесо II радиуса r_2 ; при вращении кривошипа оно катится по неподвижному зубчатому колесу I радиуса r_1 , имеющему центр на оси O . Угловая скорость кривошипа равна ω ; найти угловую скорость ω_2 колеса II .

Рассмотрим движение колеса II . Скорости двух точек его нам известны: точка A имеет скорость $(r_1 + r_2)\omega$, ибо она принадлежит также рукоятке; точка C , будучи в соприкосновении с колесом I , неподвижна. Итак:

$$v_A = \omega(r_1 + r_2), \quad v_C = 0.$$

Примем A за основную точку; в таком случае:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_{AC} \text{ или } \vec{v}_A + \vec{v}_{AC} = 0,$$

так как $\vec{v}_C = 0$.

Итак, $\vec{v}_{AC}$ равно по величине $\omega(r_1 + r_2)$ и направлено противоположно $\vec{v}_A$; с другой стороны, $\vec{v}_{AC} = \omega_2 r_2$; получаем:

$$\omega_2 r_2 = \omega(r_1 + r_2), \quad \text{т. е. } \omega_2 = \omega \frac{r_1 + r_2}{r_2}.$$

Примем, что рукоятка вращается по часовой стрелке. В таком случае $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_{AC} = -\vec{v}_A$ получают указанные на рис. 144 направления, и вращение колеса II будет также происходить по часовой стрелке. Итак, вращение колеса и рукоятки происходит в одну сторону.

Описанное соединение колес носит название *эпициклической траектории точек—эпициклоиды*. Зная угловую скорость ω_2 второго колеса и скорость основной точки A , легко определить скорость любой его точки. Например скорость точки B будет:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{AB},$$

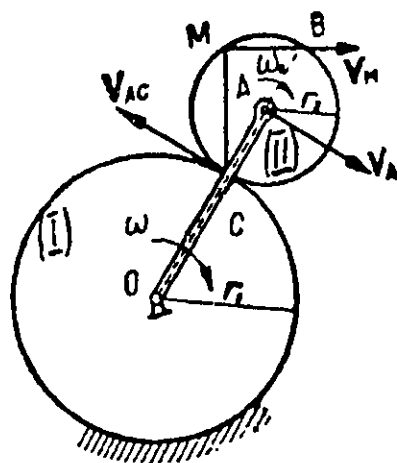


Рис. 144.

где $v_{AB} = \omega_2 r_2$; но v_A и v_{AB} имеют одинаковое направление, и геометрическое сложение можно заменить алгебраическим. Получим:

$$v_B = v_A + \omega_2 r_2 = \omega(r_1 + r_2) + \omega \frac{r_1 + r_2}{r_2} \cdot r_2 = 2\omega(r_1 + r_2).$$

Гораздо проще было бы получить этот результат, приняв точку C за основную. В таком случае:

$$v_C = 0, \quad v_B = v_{CB}, \quad v_B = \omega_2 \cdot \overline{BC} = 2r_2 \omega_2 = 2\omega(r_1 + r_2).$$

Скорость какой-либо точки M :

$$v_M = v_{CM} = [\omega_2, r_{CM}]$$

перпендикулярна вектор-радиусу r_{CM} и, следовательно, проходит через противоположный точке C конец B диаметра колеса (прямой угол опирается на диаметр). С аналогичным свойством движения круга, катящегося по прямой линии, мы встречались уже при изучении циклоидального движения.

Рассмотрим теперь случай, когда колесо II катится по неподвижному колесу I , находясь внутри него (рис. 145). Учащийся без труда убедится, что в этом случае

$$\omega_2 = \omega \frac{r_1 - r_2}{r_2},$$

вращение колеса II и рукоятки происходит в различные стороны.

Точки окружности колеса II описывают в этом случае так называемые *гипоциклоиды*; описываемое соединение можно называть *гипоциклическим*.

2. Колесо между движущимися рейками. Две параллельные рейки движутся в противоположные стороны со скоростями v_1 и v_2 . Между ними находится диск радиуса a , который вследствие трения о рейки катится по ним без скольжения, так что скорости точек соприкосновения M_1 и M_2 соответственно равны v_1 и v_2 (рис. 146).

Определим скорость v_0 центра диска O и угловую скорость ω диска.

Как и в предыдущем примере, мы знаем скорости двух точек M_1 и M_2 . Примем за основную точку O . Имеем:

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= v_0 + v_{OM_1} \\ v_2 &= v_0 + v_{OM_2} \end{aligned} \right\}$$

Будем считать, что $v_1 > v_2$. В таком случае вращение фигуры будет иметь указанное на рис. 146 направление. Проектируя написанные выше геометрические равенства на ось X , получим:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_0 + \omega a \\ -v_2 &= v_0 - \omega a. \end{aligned}$$

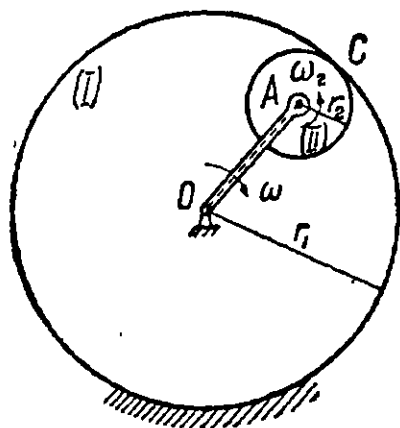


Рис. 145.

Отсюда находим:

$$v_0 = \frac{v_1 - v_2}{2}$$

$$\omega = \frac{v_1 + v_2}{2a}.$$

Если $v_1 = v_2$, то центр диска остается неподвижным.

3. Скорости точек линейки эллипсографа. Конец A линейки эллипсографа движется со скоростью v_A в отрицательную сторону оси X . Определим скорость конца B и угловую скорость линейки; $\overline{AB} = l$ (рис. 147).

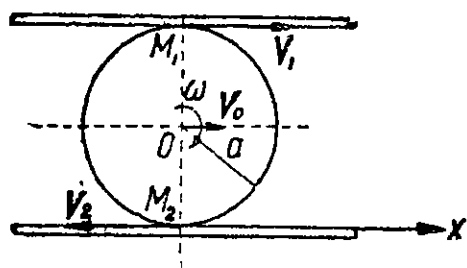


Рис. 146.

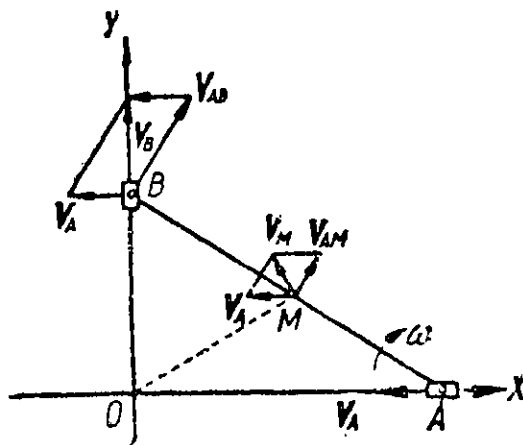


Рис. 147.

Имеем:

$$v_B = v_A + v_{AB}$$

Но v_B направлено вдоль оси Y , т. е.

$$v_{BX} = v_{AX} + v_{ABX} = 0 \quad \text{или} \quad -v_A + \omega l \sin \varphi = 0.$$

Отсюда находим:

$$\omega = \frac{v_A}{l \sin \varphi}.$$

Проектируя теперь геометрическое равенство:

$$v_B = v_A + v_{AB}$$

на ось Y , получим:

$$v_B = \omega l \cos \varphi = \frac{v_A}{l \sin \varphi} l \cos \varphi = v_A \operatorname{ctg} \varphi.$$

Определим теперь скорость середины линейки. Имеем:

$$v_M = v_A + v_{AM}$$

и, проектируя на оси X и Y , найдем:

$$v_{MX} = -v_A + \omega \cdot \frac{l}{2} \sin \varphi = -\frac{v_A}{2}$$

$$v_{MY} = \omega \frac{l}{2} \cos \varphi = \frac{v_A}{2} \operatorname{ctg} \varphi$$

и следовательно

$$v_M = \sqrt{v_{Mx}^2 + v_{My}^2} = \frac{v_A}{2} \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} = \frac{v_A}{2 \sin \varphi}.$$

4. Проекции скорости точек плоской фигуры на оси. В § 39 была выведена основная формула (6):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\omega, \mathbf{r}'];$$

по формулам (4) § 32 получим, проектируя на неподвижные оси (рис. 123):

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{ox} - \bar{\omega}(y - y_0) \\ v_y &= v_{oy} + \bar{\omega}(x - x_0) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

так как проекции $\mathbf{r}'$ на оси X и Y в данном случае равны $x - x_0$ и $y - y_0$.

Если движение плоской фигуры известно, то x_0, y_0, φ заданы в функции времени; по этим заданиям вычисляются

$$v_{ox} = \dot{x}_0, \quad v_{oy} = \dot{y}_0, \quad \bar{\omega} = \dot{\varphi},$$

и скорость любой точки может быть определена по формулам (9).

Предлагаем учащемуся проверить, что проекции скорости на оси подвижной системы $X'O'Y'$ выражаются формулами:

$$\left. \begin{aligned} v_{x'} &= v_{ox} \cos \varphi + v_{oy} \sin \varphi - \bar{\omega} y' \\ v_{y'} &= -v_{ox} \sin \varphi + v_{oy} \cos \varphi + \bar{\omega} x' \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

5. Численный пример. Применим формулы (9) к определению скорости точки M конхоидографа, траекторию которой мы рассмотрели в § 38 предыдущего задания (стр. 176). Пусть точка A движется с постоянной скоростью $v_0 = 5$ см/сек. в положительную сторону оси X и в начальный момент A находится в начале координат; задано: $d = 15$ см.

Будем пользоваться формулами (9). Имеем:

$$v_{ox} = v_0 = 5 \text{ см/сек.}, \quad v_{oy} = 0, \quad x - x_0 = -d \cos \varphi, \quad y = -d \sin \varphi.$$

Уравнение вращения имеет вид:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d}{x_0}, \quad (*)$$

причем, по условию, $x_0 = v_0 t = 5t$ см.

Дифференцируя выражение (*), получим:

$$\frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} = -\frac{d\dot{x}_0}{x_0^2} = -\frac{v_0 d}{x_0^2},$$

ибо $x_0 = v_0 t$.

Итак,

$$\bar{\omega} = \dot{\varphi} = \frac{v \cdot d}{x_0^2} \cos^2 \varphi.$$

По заданному $\operatorname{tg} \varphi$ вычисляем $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$. Получаем:

$$\cos \varphi = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + d^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{d}{\sqrt{d^2 + x_0^2}}.$$

Остается сделать подстановку в формулы (9). Опуская промежуточные выкладки, которые учащийся должен самостоятельно восстановить, получим:

$$v_x = \left[1 - \frac{d^3}{(d^2 + x_0^2)^{\frac{3}{2}}} \right] v_0, \quad v_y = \frac{d^2 \cdot x_0}{(d^2 + x_0^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot v_0.$$

Остается подставить вместо d , v_0 , x_0 их значения. Найдем

$$v_x = 5 - \frac{135}{(t^2 + 9)^{\frac{3}{2}}}, \quad v_y = \frac{9t}{(t^2 + 9)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

§ 40. План скоростей.

Разберем теперь несколько примеров графического построения скоростей различных точек движущейся плоской фигуры.

1. Кривошипный механизм. По заданной скорости пальца кривошипа A (рис. 148) построим скорость ползуна B . Будем исходить из основного уравнения:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AB}. \quad (1)$$

Величина и направление вектора $\mathbf{v}_A$ нам известны; известны также линии, по которым направлены вектора $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_{AB}$ — первый вдоль направляющей линейки, второй перпендикулярно шатуну $\overline{AB}$ (на-

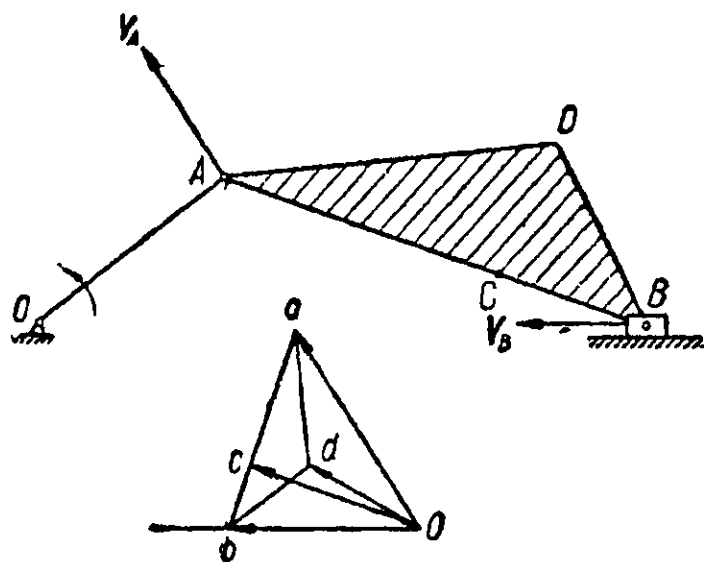


Рис. 148.

помним, что $\mathbf{v}_{AB} = [\omega, \mathbf{r}'_{AB}]$). Остается определить величины этих векторов. Откладываем для этого из точки O — так называемого полюса, вектор $\vec{Oa} = \mathbf{v}_A$ и проводим из его начала (т. е. из полюса) линию, параллельную геометрической сумме $\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AB} = \mathbf{v}_B$, а из конца a линию, параллельную второму слагаемому $\mathbf{v}_{AB}$, т. е. перпендикулярную шатуну. Называя через b точку пересечения этих линий, будем иметь:

$$\vec{Ob} = \vec{Oa} + \vec{ab}. \quad (2)$$

Сравнивая (2) и (1), заключаем, что $\vec{Ob} = \mathbf{v}_B$, $\vec{ab} = \mathbf{v}_{AB}$, ибо по

построению $\overrightarrow{Oa} = \mathbf{v}_A$, и вектора $\overrightarrow{Ob}$ и $\overrightarrow{ab}$, параллельны $\mathbf{v}_B$ и $\mathbf{v}_{AB}$, что и требуется.

Из нашего построения легко найти также угловую скорость вращения шатуна. В самом деле, мы имеем:

$$v_{AB} = AB \cdot \omega$$

и следовательно

$$\omega = \frac{v_{AB}}{AB} = \frac{\overline{ab}}{AB}.$$

Пусть теперь требуется определить скорость какой-нибудь точки C шатуна. Построим для этого на отрезке $\overline{ab}$ точку c , делящую его в том же отношении, в каком C делит $\overline{AB}$:

$$\frac{\overline{ac}}{\overline{ab}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Соединив теперь полюс O с точкой c , получим вектор $\overrightarrow{Oc}$, изображающий скорость $\mathbf{v}_C$ точки C . Чтобы убедиться в этом, заметим, что:

$$\overrightarrow{Oc} = \overrightarrow{Oa} + \overrightarrow{ac};$$

отрезок $\overline{ac}$, будучи перпендикулярен шатуну AB , имеет, вместе с тем, величину вращательной скорости $\mathbf{v}_{AC}$. В самом деле:

$$ac = ab \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ab}}{\overline{AB}} \cdot \overline{AC} = \omega \cdot \overline{AC}.$$

Итак, $\overrightarrow{ac} = \mathbf{v}_{AC}$ и мы получаем:

$$\overrightarrow{Oc} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AC}$$

и следовательно

$$\overrightarrow{Oc} = \mathbf{v}_C.$$

Построим теперь скорость жестко соединенной с шатуном точки D . Мы имеем:

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AD}, \quad (3)$$

причем $\mathbf{v}_{AD}$ перпендикулярен $\overline{AD}$. Если мы проведем поэтому из конца a вектора $\overrightarrow{Oa}$ перпендикуляр к $\overline{AD}$, то на нем должна находиться точка d , соединив которую с полюсом O , получим вектор $\overrightarrow{Od} = \mathbf{v}_D$. Это следует из написанного выше равенства (3), которое и выражает то обстоятельство, что конец вектора $\mathbf{v}_D$ лежит на прямой: 1) проходящей через конец a вектора $\overrightarrow{Oa}$ и 2) перпендикулярной $\overline{AD}$.

Примем теперь за основную точку B . Имеем:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{BD},$$

откуда следует, что искомая точка d лежит также на перпендикуляре, опущенном из конца b вектора $\vec{Ob}$ на направление BD . Итак, точка пересечения с ранее построенным перпендикуляром определит конец вектора $\vec{Od} = \vec{v}_D$.

Полученное построение называется *планом скоростей*. Согласно обозначениям, которых мы придерживались, конец вектора скорости какой-либо точки механизма A , B и т. д. обозначался соответствующей малой буквой a , b и т. д. ($\vec{v}_A = \vec{Oa}$, $\vec{v}_B = \vec{Ob}$ и т. д.). Это дает простое мнемоническое правило для построения и проверки плана скоростей: *отрезки, обозначенные на плане скоростей малыми*

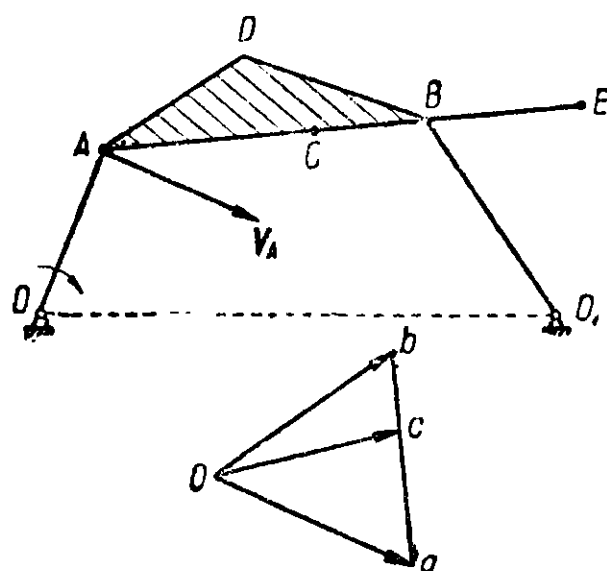


Рис. 149.

буквами, перпендикулярны отрезкам, обозначенным на фигуре соответствующими большими буквами (ab перпендикулярна AB и т. д.). Вместе с тем из сказанного следует, что любая фигура (треугольник, многоугольник), получающаяся на плане скоростей, подобна соответствующей, т. е. обозначенной теми же большими буквами фигуре на чертеже механизма, так как все стороны этих фигур повернуты друг относительно друга на 90° , и следовательно соответствующие углы между ними на плане скоростей и чертеже механизма друг другу равны.

2. Двукривошипный механизм (шарнирный четырехсторонник). Этот механизм встречается весьма часто в различных передачах движения. Назначение его состоит в преобразовании вращательного движения кривошипа OA во вращательное или колебательное движение рычага O_1B (рис. 149).

Решим такую задачу: по заданной угловой скорости ω_1 кривошипа OA , построить скорость точки B .

Скорость точки A нам известна: ее величина равна $\omega_1 \cdot OA$; направление вектора $\vec{v}_A$ перпендикулярно OA . Направление скорости точки B также известно: $\vec{v}_B$ перпендикулярно O_1B . Проводим из полюса вектор $\vec{Oa}$, геометрически равный $\vec{v}_A$. Через начало его O проводим перпендикуляр к O_1B , через конец a — перпендикуляр к AB . Пересечение их определит конец b вектора скорости $\vec{Ob} = \vec{v}_B$. Если бы требовалось найти скорость какой-либо точки C , делящей AB в заданном отношении, то построив на

отрезке ab точку c , делящую его в том же отношении, мы нашли бы $\vec{Oc} = v_c$

Вопросы. 1. Чему равна угловая скорость шатуна $\overline{AB}$? Кривошипа $\overline{O_1B}$?

2. Точка D жестко соединена с шатуном. Построить ее скорость.

3. Точка E лежит на продолжении шатуна $\overline{AB}$. Построить ее скорость.

Рассмотрим теперь пример построения плана скоростей более сложного механизма. Дело сведется к повторению прежних построений несколько раз.

3. Механизм насоса Holst'a (рис. 150). По заданной угловой скорости кривошипа $\overline{OB}$ требуется построить скорость поршня E .

Шатун $\overline{ED}$ получает движение от точки D . Последняя жестко соединена с шатуном $\overline{AB}$ шарнирного четырехсторонника $OBAO_1$.

Порядок построения плана скоростей: по заданной по направлению и величине скорости точки B строим скорость точки A , направление коей также известно. Это дает возможность определить

скорость точки D , жестко связанной с $\overline{AB}$. Зная же последнюю, строим скорость точки E , направление которой заранее известно.

Из полюса O откладываем $\vec{Ob} = v_B$ и проводим из O и b перпендикуляры к $\overline{O_1A}$ и $\overline{AB}$. Пересечение их определяет точку a . Опуская из a и b перпендикуляры на $\overline{AD}$ и $\overline{BD}$, получаем в пересечении их точку d . Из нее опускаем перпендикуляр на $\overline{DE}$, пересечение которого с проведенной из полюса прямой, параллельной скорости точки E , определит точку e . Соединяя e с полюсом, получим $\vec{Oe} = v_e$.

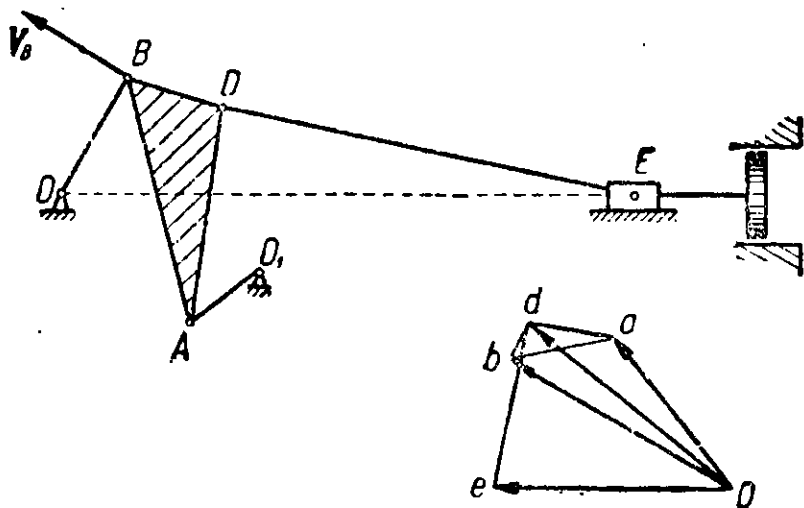


Рис. 150.

Сделаем теперь некоторые выводы из рассмотренных примеров. Учащийся заметил, что при построении плана скоростей нам приходилось каждый раз решать одну и ту же задачу: по заданной по величине и направлению скорости одной точки плоской фигуры и направлению скорости другой ее точки определить скорость последней. Другим элементом наших построений было определение скорости какой-либо точки фигуры по заданным скоростям двух ее точек. Вспомним, например, построение плана скоростей в при-

мере насоса Holst'a: чтобы построить скорость точки E , известную по направлению, мы должны были предварительно определить величину и направление скорости точки D . Это мы могли сделать, построив предварительно скорости двух точек A и B плоской фигуры ABD . Для построения же скорости точки A , известной по направлению, мы, зная величину и направление скорости точки B , опять-таки решили нашу первую основную задачу.

К этой же задаче мы еще раз должны будем обратиться в следующем задании. В заключение же отметим, что указанные методы не всегда являются достаточными для построения плана скоростей любого механизма. Рассмотрим, например, кулису Стефенсона, схема которой изображена на рис. 165. Кулиса BD , шарнирно сочлененная в точках B, D, E с тремя стержнями $\overline{BA}$, $\overline{CD}$ и $\overline{O_1E}$, представляет пример трехповодкового звена. Здесь по заданным скоростям точек A и C нельзя непосредственно построить ни скорости точки B , ни скорости точки D , ибо направления их заранее неизвестны. Дальнейшее рассмотрение задачи требует введения понятия „мгновенного центра“ и будет сделано в следующем задании.

Точно так же отметим, что приведенный метод является недостаточным и в том случае, когда в число звеньев механизма входят ползунки, совершающие плоское движение, т. е. одновременно движущиеся и поступательно и вращательно. Таков например, механизм Витворта, к которому мы вернемся в следующей теме.

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. Определить скорость точки на ободе колеса в примере 1, задания 10.

2. В примере 3 задания 10 определить скорость вершины угла B при $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Ползунок A движется с постоянной скоростью v_A в положительном направлении оси Y .

3. Доказать, что проекции скорости концов отрезка на его направление равны между собой.

Указание. Воспользоваться формулой:

$$v = v_0 + [\omega, r'],$$

принимая за основную точку один из концов отрезка.

4. Воспользовавшись теоремой предыдущего примера, определить в функции угла φ :

а) скорость конца B линейки эллипсографа, когда скорость v_A другого конца A задана (рис. 128);

б) скорость точки линейки конхоидографа (рис. 132), проходящей в рассматриваемый момент через вращающийся ползунок. Скорость v_A ползунок A задана.

5. Для построения скорости ползуна кривошипного механизма применяется следующее весьма простое построение (рис. 151): продолжаем AB до пересечения в точке B_1 с диаметром OA_1 , перпен-

дикулярным линии движения ползуна. Отрезок OB_1 изображает скорость точки B в том же масштабе, в каком OA изображает скорость пальца кривошипа A :

$$\frac{\overline{OB_1}}{\overline{OA}} = \frac{v_B}{v_A}.$$

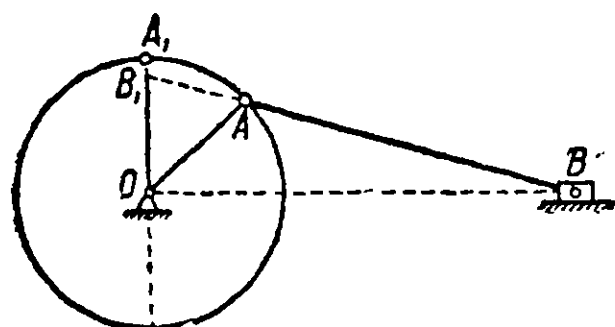


Рис. 151.

Объяснить построение.

6. На рис. 152 изображена схема механизма двукривошипного конвейера, употребляемого для транспорта сыпучих материалов. По заданной угловой скорости кривошипа OA построить скорость жестко связанного с ползуном C же-

лоба, по которому производится подача материала.

7. Для передачи движения от паровой машины к воздушному насосу применяется механизм, схема которого изображена на рис. 153. Кривошип OA вращается равномерно с заданной угловой скоростью. Поршень насоса движется вместе с точкой F . Передача движения от точки B к точке F осуществляется помощью качающегося около неподвижной точки C углового рычага DCE , который одной точкой E соединен шарнирно с шатуном EF , а другой точкой D при посредстве тяги BD сочленен с точкой B .

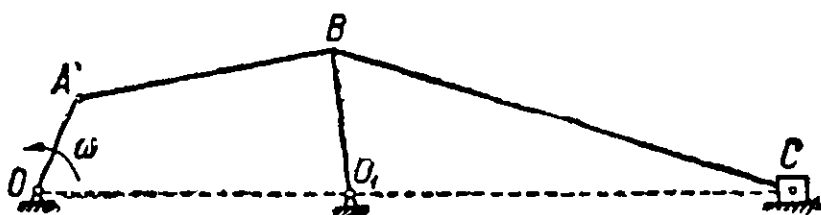


Рис. 152.

Построить для заданного положения механизма скорость точки F .

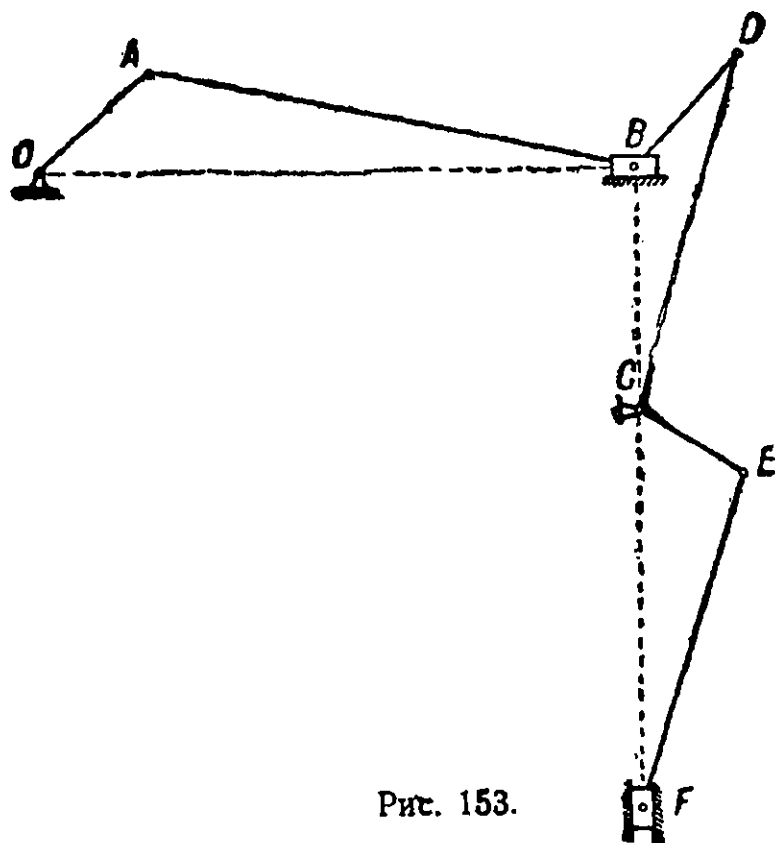


Рис. 153.

Задание 12-е.

Мгновенный центр и центроиды.

В этом задании мы продолжаем изучение вопроса о распределении скоростей в плоском движении твердого тела, вводя понятие о „мгновенном центре скоростей“. Этим достигается значительное упрощение в понимании картины движения; движение и распределение скоростей раз-

личных звеньев самых сложных механизмов становится ясным и наглядным, и бывает достаточно одного взгляда, чтобы в них разобраться, коль скоро мгновенные центры этих звеньев найдены.

Установив понятие мгновенного центра и дав ряд иллюстраций значения его при изучении плоского движения, мы переходим к вопросу о так называемых *центроидах*, т. е. геометрических местах мгновенных центров в движущейся фигуре и неподвижной плоскости. С понятием центроид связан ряд вопросов Прикладной кинематики, например, задача профилирования зубчатых колес, выбор очертаний в механизме катящихся рычагов и пр. Помимо этого, пользуясь центроидами, мы во многих случаях получаем возможность глубже проникнуть в сущность изучаемого движения: движения, осуществляемые с внешней стороны совершенно различными способами, оказываются кинематически совершенно эквивалентными, выясняется принципиальная возможность осуществления любого движения помощью качания без скольжения одного контура по другому (подвижной центроиды по неподвижной), получает новое объяснение, упомянутое уже выше на примере эллипсографа (стр. 174) обращенное движение механизма и т. д.

§ 41. Мгновенный центр скоростей.

В предыдущем задании была выведена формула распределения скоростей:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + [\omega, \mathbf{r}'_{AB}]. \quad (1)$$

Согласно этой формуле скорость любой точки B может быть представлена как геометрическая сумма скорости точки A и вращательной скорости вокруг точки A . Как уже отмечено на одном примере (стр. 185), пользование этой формулой значительно упрощается, если за точку A выбрать такую скорость, которой в данный момент обращается в нуль. Тогда $\mathbf{v}_A = 0$, и мы получаем:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{AB} = [\omega, \mathbf{r}'_{AB}],$$

т. е. скорость любой точки может быть определена как вращательная скорость вокруг той точки, скоростью которой в данный момент обращается в нуль.

Чтобы это построение было возможным, необходимо предварительно доказать, что во всяком непоступательном движении плоской фигуры в каждый момент существует точка, скоростью которой в этот момент обращается в нуль. Эта точка называется *мгновенным центром скоростей*.

Убедиться в справедливости этой теоремы чрезвычайно просто. Достаточно только обратить внимание на то обстоятельство, что вращательная скорость точек, расположенных на перпендикуляре AM (рис. 154) к скорости $\mathbf{v}_A$ точки A , будучи перпендикулярна MN , параллельна $\mathbf{v}_A$ и направлена ей противоположно при принятом на рисунке направлении вращения. Возьмем теперь на этом перпен-

дикулярно такую точку, вращательная скорость которой по величине равнялась бы v_A . Пусть эта точка будет P . Тогда по условию

$$v_{AP} = \omega \overline{AP} = v_A,$$

откуда при $\omega \neq 0$, т. е. при непоступательном движении, найдем

$$\overline{AP} = \frac{v_A}{\omega}.$$

Точка P и будет искомым *мгновенным центром*. В самом деле, по формуле (1), имеем:

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{AP} = 0, \quad (2)$$

ибо, согласно сказанному, $\mathbf{v}_{AP}$ направлено противоположно $\mathbf{v}_A$ и по величине равно $AP \cdot \omega$, т. е. v_A . Итак, доказано существование в непоступательном движении плоской фигуры *мгновенного центра вращения*, т. е. точки, скорость которой в данный момент обращается в нуль.

Вычитая почленно ур-ние (2) из (1), получим:

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{AB} - \mathbf{v}_{AP} = [\omega, \mathbf{r}'_{AB}] - [\omega, \mathbf{r}'_{AP}] = [\omega, \mathbf{r}'_{AB} - \mathbf{r}'_{AP}],$$

но согласно рис. 154

$$\mathbf{r}'_{AB} - \mathbf{r}'_{AP} = \mathbf{r}'_{PB}.$$

и следовательно

$$\mathbf{v}_B = [\omega, \mathbf{r}'_{PB}].$$

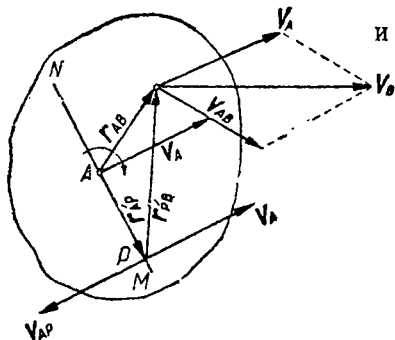


Рис. 154.

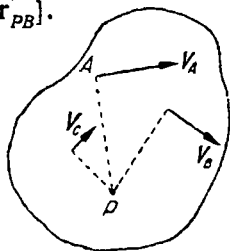


Рис. 155.

Совершенно аналогичный закон распределения скоростей мы имеем при вращении тела вокруг неподвижной оси (стр. 154). Таким образом *распределение скоростей в фигуре, совершающей плоское движение, в каждый момент таково, как если бы фигура вращалась вокруг неподвижной оси, проходящей через мгновенный центр*; иными словами, скорость любой точки плоской фигуры по направлению перпендикулярна вектор-радиусу, соединяющему эту точку с мгновенным центром, а по величине равна $\omega r'_{PB}$, т. е. пропорциональна расстоянию до мгновенного центра (рис. 155).

Итак, распределение скоростей в плоском движении для каждого заданного момента времени ничем не отличается от распределения скоростей при вращении вокруг неподвижной оси. Но в первом мы имеем материально осуществленную неподвижную ось, вокруг которой тело вращается в течение всего движения, во втором,

т. е. в плоском движении, мгновенный центр является осью вращения только для данного момента времени; в процессе же следующего затем движения мгновенный центр занимает различные положения в движущейся фигуре, совпадая с ее различными точками. Вместе с тем та материальная точка фигуры, через которую проходила в некоторый момент ось вращения, перемещается вместе с фигурой по неподвижной плоскости.

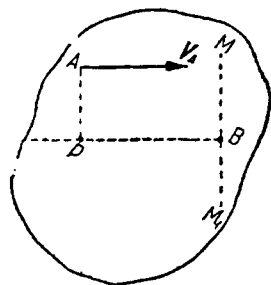


Рис. 156.

Пользуясь понятием мгновенного центра, чрезвычайно просто получить решение той задачи, которую мы формулировали в конце предыдущего параграфа: по заданной величине и направлению скорости одной точки фигуры и по известному направлению скорости другой ее точки найти распределение скоростей, имеющее в данный момент место в движущейся фигуре. Мы видели, что к этой задаче сводится почти всегда вопрос об исследовании скоростей различных точек всевозможных механизмов.

Пусть v_A — известная по величине и направлению скорость точки A ; MBM_1 — линия, параллельно которой направлена скорость точки B (рис. 156). Мгновенный центр должен лежать на пересечении перпендикуляров к v_A и BM , проведенных через точки A и B , ибо вектор-радиусы, соединяющие мгновенный центр с точками фигуры, перпендикулярны, как уже указано, их скоростям.

Предполагая, что эти перпендикуляры действительно пересекаются, что будет иметь место, если v_A не параллельно MBM_1 , мы найдем положение мгновенного центра. Для полной характеристики распределения скоростей нужно знать еще величину угловой скорости и направление вращения. Последнее определяется по задан-

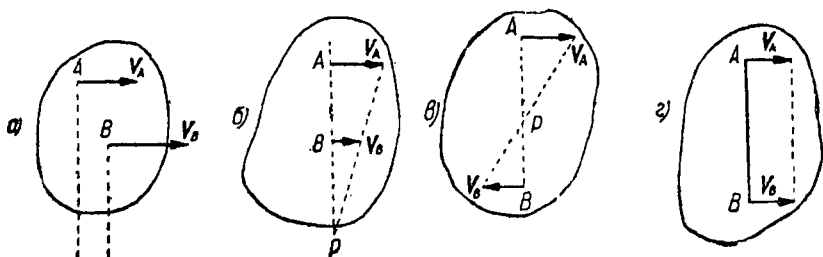


Рис. 157.

ному направлению скорости v_A ; что же касается величины ω , то зная v_A , находим:

$$\omega = \frac{v_A}{AP}.$$

В том случае, когда v_A параллельно v_B , причем точка B не лежит на перпендикуляре, проведенном через A к v_A (рис. 157а), вышеуказанные перпендикуляры не пересекаются, т. е. мгновенного

центра в данный момент не существует, и движение фигуры поступательное: все точки ее имеют в этот момент геометрически равные скорости.

Возможен еще случай, когда v_A параллельно v_B , причем точка B лежит на перпендикуляре, проведенном к v_A через точку A (рис. 157б, 157в, 157г). Тех данных, которые мы имеем, уже недостаточно для определения распределения скоростей. Нужно знать еще скорость v_B точки B по величине и направлению. Положение мгновенного центра и угловая скорость фигуры определятся из условий:

$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB} = \omega; \quad \overline{PA} \mp \overline{PB} = \overline{AB},$$

причем верхний знак соответствует одинаковому направлению скоростей v_A и v_B (рис. 157б), а нижний — противоположному (рис. 157в).

Наконец, если в рассматриваемом случае $v_A = v_B$, то опять-таки имеем в данный момент поступательное движение фигуры.

В приложениях часто приходится еще иметь дело с движением плоской фигуры, когда ограничивающий ее контур C' катится без скольжения по неподвижной кривой C (рис. 158). Таково, например, движение колеса по прямолинейному рельсу или качение подвижной шестерни по неподвижной. Легко убедиться, что в этом

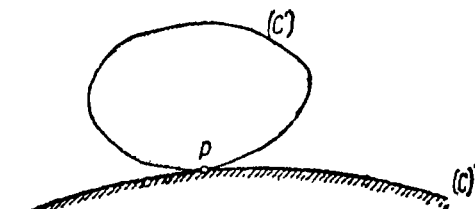


Рис. 158.

случае мгновенный центр находится в точке соприкосновения P подвижной кривой C' и неподвижной C . Действительно, качение происходит без скольжения, т. е. точка соприкосновения P обеих кривых имеет одинаковую скорость, будем ли мы ее считать принадлежащей кривой C' или C (колесу или рельсу). Но кривая C неподвижна; значит скорость точки P равна нулю, т. е. P есть мгновенный центр.

Примеры и упражнения.

1. Кривошипный механизм. Найдём мгновенный центр и угловую скорость ω_1 шатуна кривошипного механизма. Угловая скорость кривошипа ω задана рис. 159.

Представим себе, что с шатуном AB неизменно связана плоская фигура S . Нам известна скорость точки A по величине ($v_A = \omega \cdot \overline{OA}$) и по направлению: принадлежа кривошипу, вращающемуся вокруг неподвижной оси O , точка A имеет скорость, перпендикулярную $\overline{OA}$. Скорость точки B направлена по прямой $\overline{OB}$. Согласно вышесказанному, находим мгновенный центр P , на пересечении перпенди-

куляров к скоростям, т. е. на перпендикуляре $\overline{BP_1}$ к $\overline{OB}$ и на продолжении радиуса OA . Далее получим:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{AP_1} = \omega \frac{\overline{OA}}{\overline{AP_1}}.$$

При движении механизма мгновенный центр P_1 , как видно из нашего построения, перемещается, занимая различные положения на фигуре S и на неподвижной плоскости. В частности при $\varphi=0$ и $\varphi=\pi$, т. е. в мертвых положениях механизма, P_1 займет положение B , как это и должно быть, так как при переходе через мертвое положение ползун имеет скорость, равную нулю. В эти моменты скорость любой точки шатуна пропорциональна расстоянию ее от ползуна, на что мы уже указывали на стр. 95. При $\varphi = \frac{\pi}{2}$

v_A параллельна v_B , и движение шатуна поступательное: все точки его имеют одинаковые скорости, равные скорости точки A .

Предположим теперь, что шатун $\overline{AB}$ соединен шарниром C с коромыслом $\overline{CD}$ (рис. 159), другой конец которого получает движение по дуге круга при помощи рычага $\overline{DE}$. Найдем мгновенный центр коромысла. Задача ничем не отличается от предыдущей: опять скорость точки C известна по величине:

Рис. 159.

$$v_C = \omega_1 \cdot \overline{P_1C} = \omega \frac{\overline{OA}}{\overline{AP_1}} \cdot \overline{P_1C}$$

и направлению, перпендикулярному $\overline{P_1C}$, скорость точки D перпендикулярна $\overline{DE}$. Мгновенный центр P_2 найдем, таким образом, в пересечении $\overline{P_1C}$ и $\overline{DE}$. Угловая скорость ω_2 коромысла будет

$$\omega_2 = \frac{v_C}{\overline{P_2C}} = \omega \frac{\overline{OA}}{\overline{AP_1}} \cdot \frac{\overline{P_1C}}{\overline{P_2C}}.$$

2. Двукривошипный конвейер. На рис. 160 изображена схема двукривошипного конвейера, употребляемого для транспорта сыпучих материалов. Поставим задачу определить скорость жестко связанного с ползуном C желоба, по которому производится подача материала. Угловая скорость ω кривошипа $\overline{OA}$ задана.

Мгновенный центр P_2 шатуна $\overline{BC}$ найдем в пересечении O_1B и перпендикуляра к линии движения $\overline{CN}$ точки C (он не показан на рисунке). Чтобы найти угловую скорость ω_2 шатуна BC , необходимо знать скорость его точки B . Для этого, очевидно, нужно построить предварительно мгновенный центр P_1 коромысла AB

(пересечение $\overline{OA}$ и $\overline{O_1B}$) и определить его угловую скорость ω_1 .
Получаем:

$$\omega_1 = \frac{v_A}{P_1 A} = \frac{\omega \cdot \overline{OA}}{P_1 A}$$

$$v_B = \omega_1 \cdot \overline{P_1 B}$$

$$\omega_2 = \frac{v_B}{P_2 B} = \omega_1 \frac{\overline{P_1 B}}{\overline{P_2 B}} = \omega \frac{\overline{OA}}{\overline{P_1 A}} \cdot \frac{\overline{P_1 B}}{\overline{P_2 B}}$$

и следовательно искомая скорость v_c желоба будет

$$v_C = \omega_2 \cdot \overline{P_2C} = \omega \frac{\overline{OA}}{\overline{P_1A}} \cdot \frac{\overline{P_1B}}{\overline{P_2B}} \cdot \overline{P_2C}.$$

Отрезки $\overline{P_1A}$, $\overline{P_1B}$ и т. д. берем непосредственно с чертежа. Этими двумя примерами шарнирных механизмов мы пока ограничиваемся. Предлагаем учащемуся найти, пользуясь понятием мгновенного центра, скорость цилиндра в схеме насоса Holst'a по заданной угловой скорости кривошипа (стр. 191).

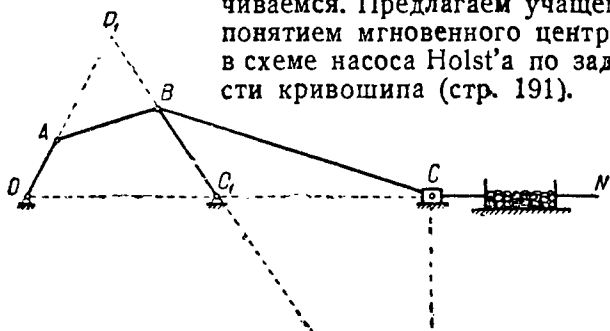


Рис. 160.

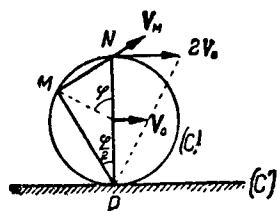


Рис. 161.

3. Движение колеса по прямолинейному рельсу. В § 22 (стр. 108) мы рассмотрели траектории, скорости и ускорения точек колеса, катящегося без скольжения по прямолинейному рельсу. Пользуясь понятием мгновенного центра, мы можем теперь непосредственно получить те результаты относительно распределения скоростей, которые были там достигнуты путем ряда вычислений.

Пусть v_0 — скорость центра колеса (рис. 161), a — его радиус. Так как колесо катится без скольжения, то мгновенный центр находится в P и мы получаем:

$$\omega = \frac{v_0}{a}.$$

Скорость любой точки M на окружности колеса перпендикулярна PM и, следовательно, проходит через противоположную точке P конец N диаметра колеса.

Ее величина будет равна

$$v_M = \overline{PM} \omega = 2a \cdot \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \frac{v_0}{a} = 2v_0 \cdot \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Максимальную скорость имеет точка N :

$$v_N = 2v_0.$$

4. Колесо между движущимися рейками. В § 39 (пример 2) мы рассмотрели движение колеса, помещенного между двумя движущимися в противоположные стороны рейками. Найдем теперь мгновенный центр колеса.

Согласно сказанному выше (стр. 196, рис. 157в) имеем:

$$\frac{v_1}{PM_1} = \frac{v_2}{PM_2} = \omega, \quad \overline{PM_1} + \overline{PM_2} = \overline{M_1M_2} = 2a.$$

Составив производную пропорцию, получим:

$$\frac{v_1 + v_2}{v_2} = \frac{\overline{PM_1} + \overline{PM_2}}{\overline{PM_2}} = \frac{2a}{\overline{PM_2}},$$

и следовательно

$$\overline{PM_2} = \frac{2av_2}{v_1 + v_2}, \quad \overline{PO} = \overline{PM_2} - a = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} a,$$

$$\omega = \frac{v_2}{\overline{PM_2}} = \frac{v_1 + v_2}{2a}.$$

Скорость центра колеса v_0 определим из соотношения:

$$v_0 = \omega \cdot \overline{PO} = \frac{v_1 + v_2}{2a} \cdot \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \cdot a = \frac{v_1 - v_2}{2}.$$

5. Планетный механизм Уатта. Уатт в своих первых паровых машинах применял для преобразования качаний балансира во вращательное движение вала так называемый *планетный меха-*

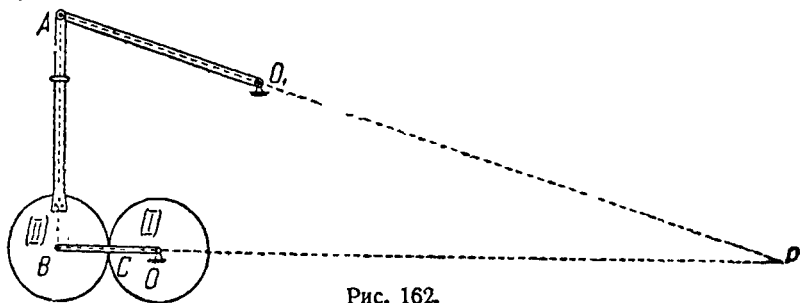


Рис. 162.

низм (рис. 162), употреблявшийся также в приборах, служащих для иллюстрации движений небесных светил.

Балансир $\overline{O_1A}$, качаясь вверх и вниз вокруг оси O_1 при посредстве шатуна $\overline{AB}$, передает движение кривошипу $\overline{OB}$, свободно сидящему на оси O . На этой же оси закреплено колесо I ; другое колесо II наглухо соединено с шатуном AB и сочленено с кривошипом $\overline{OB}$ помощью шарнира B . Радиусы колес I и II одинаковы ($r_1 = r_2 = r$), $\overline{OB} = 2r$. Угловая скорость кривошипа $\overline{OB}$ равна ω . Найдем угловую скорость ω_1 колеса I .

Мгновенный центр плоской фигуры, состоящей из шатуна AB и колеса II , найдем в пересечении $\overline{AO_1}$ и $\overline{OB}$. Угловая скорость ее ω_2 будет:

$$\omega_2 = \frac{v_B}{PB} = 2\omega \frac{r}{PB}.$$

Чтобы перейти к определению угловой скорости колеса I нужно выразить, что скорость точки соприкосновения C колес I и II останется одной и той же, будем ли мы считать ее принадлежащей колесу I или колесу II :

$$v_C = \omega_2 \overline{PC} = \omega_1 \cdot \overline{OC} = \omega_1 \cdot r$$

Итак

$$\omega_1 = \omega_2 \cdot \frac{\overline{PC}}{r} = 2\omega \frac{\overline{PC}}{PB} = 2\omega \frac{\overline{PC}}{\overline{PC} + r}.$$

Угловая скорость колеса I будет, таким образом, переменной. Если $\overline{PC}$ значительно больше r , то приближенно можно считать:

$$\omega_1 = 2\omega \frac{1}{1 + \frac{r}{\overline{PC}}} \simeq 2\omega.$$

§ 42. Теорема о трех центрах.

Отыскание мгновенных центров сложных многосвязных механизмов очень упрощается, если пользоваться теоремой Аригольда-Кеннеди или *теоремой о трех центрах*.

Пусть A, B, C — три каких-нибудь звена механизма (рис. 163). Предположим сначала, что звено C неподвижно, и найдем мгновенные центры звеньев A и B , обозначив их соответственно через P_{AC} , P_{BC} . Легко убедиться, что P_{AC} есть то же самое, что P_{CA} , т. е. мгновенный центр звена A при неподвижном звене C совпадает с мгновенным центром звена C при неподвижном A . В самом деле, P_{AC} , будучи мгновенным центром звена A , имеет скорость, равную нулю, т. е. принадлежит также и звену C . Итак, P_{AC} есть общая точка обоих звеньев A и C . То же относится и к P_{CA} . Если бы P_{AC} и P_{CA} были различными точками, то два звена A и C имея две общие точки, были бы жестко друг с другом связаны, т. е. представляли бы одно звено.

Пусть теперь P_{AB} будет мгновенным центром звена B при неподвижном звене A (или наоборот). Мы уже доказали, что P_{AB} есть общая точка звеньев A и B . При неподвижном звене C эта точка, если считать ее принадлежащей звену A , имела бы скорость v_1 ,

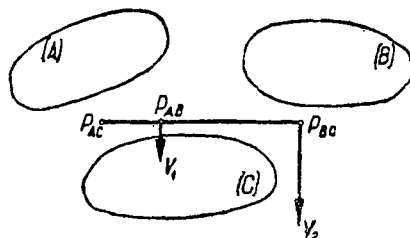


Рис. 163.

перпендикулярную отрезку $\overline{P_{AC}P_{AB}}$, соединяющему ее с мгновенным центром P_{AC} ; но если ту же точку P_{AB} считать принадлежащей звену B , то скорость ее v_2 была бы перпендикулярна $\overline{P_{BC}P_{AB}}$. Необходимо, чтобы v_1 и v_2 имели одинаковые направления: это возможно только в том случае, когда P_{AB} лежит на прямой $\overline{P_{AC}P_{BA}}$. Итак, три мгновенных центра: P_{AB} , P_{AC} , P_{BC} , подстроичные знаки

которых AB , AC , BC представляют различные соединения трех букв A , B , C по две, лежат на одной прямой. Это и есть теорема о трех центрах.

В качестве примера найдем мгновенный центр кулисы Стефенсона (рис. 164), о которой мы уже упоминали в конце предыдущего задания. Точки O и O_1 принадлежат неподвижному звену, которое мы обозначили номером 1. Обозначения (номера) остальных звеньев указаны на рис. 165. Нашей задачей является отыскание мгновенного центра P_{15} . Если бы звено 2 было неподвижно, то мгновенным центром звена 3 был бы, очевидно, шарнир A ; обозначим его поэтому через P_{23} . Аналогичным образом обозначатся остальные шарниры. На основании теоремы о трех центрах находим P_{25} в точке пересечения прямых $\overline{P_{35}P_{23}}$ и $\overline{P_{45}P_{24}}$. На прямой $\overline{P_{25}P_{12}}$ должен лежать искомый мгновенный центр P_{15} . С другой стороны, он лежит также на продолжении рычага O_1E , т. е. на прямой $\overline{P_{16}P_{56}}$. Итак, P_{15} находится в точке пересечения этих прямых. Зная P_{15} , находим направления скоростей точек B и D кулисы. Этого достаточно для построения плана скоростей, отчего мы в конце предыдущего задания должны были отказаться. Из полюса O плана скоростей

Рис. 164. Кулиса Стефенсона и золотниковое парораспределение.

(Модель кабинета Механики Ленинградского физико-механического института).

откладываем вектор скорости точки A $\vec{Oa} = v_A$ и проводим направление скорости точки B (перпендикулярно прямой $\overline{P_{15}B}$); затем

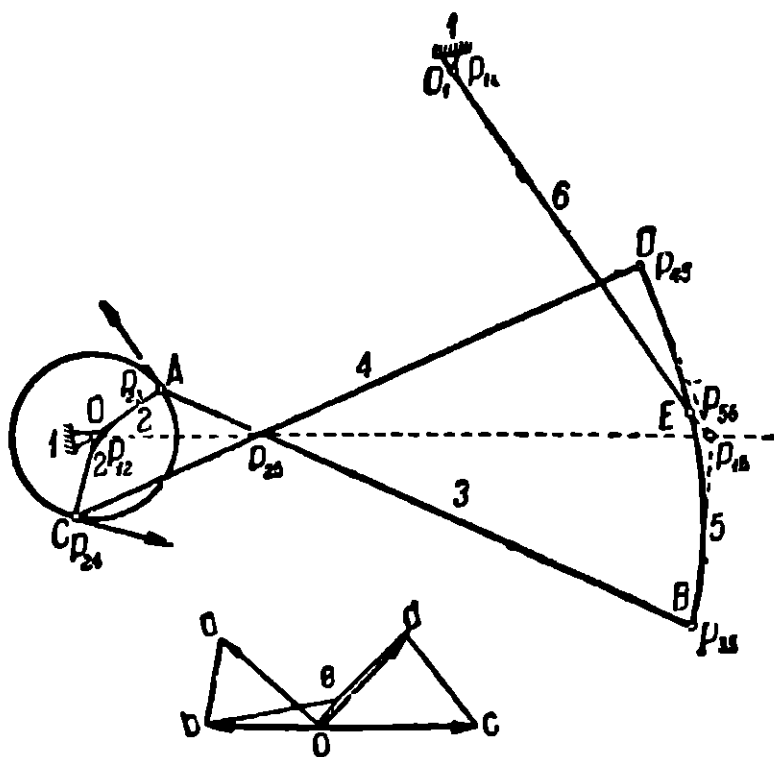


Рис. 165.

откладываем вектор скорости точки A $\vec{Oa} = v_A$ и проводим направление скорости точки B (перпендикулярно прямой $\overline{P_{15}B}$); затем

из конца a вектора $\vec{Oa}$ проводим перпендикуляр к $\vec{AB}$ до пересечения его в точке b с только-что упомянутым направлением скорости точки B . Вектор $\vec{Ob} = \vec{v}_B$ и будет искомой скоростью точки B . Аналогично строим скорость точки D . Контролем чертежных операций может служить то обстоятельство, что $\vec{bd}$ должно быть перпендикулярно $\vec{BD}$.

§ 43. Центроиды.

Мы уже говорили в начале этого задания, что мгновенный центр скоростей перемещается как по самой движущейся фигуре, совпадая в процессе движения с ее различными точками, так и по неподвижной плоскости.

Точки фигуры, послужившие уже мгновенным центром, а также те ее точки, которые в процессе движения им еще станут; располагаются по некоторой кривой, называемой *подвижной центроидой* (C'). В неподвижной плоскости геометрическое место мгновенных центров образует *неподвижную центроиду* (C).

Прежде чем продолжать изучение общего случая, дадим иллюстрацию сказанного на простом примере.

Рассмотрим центроиды в эллиптическом движении, изученном в конце задания этой темы.

В изображенном на рис. 166 положении линейки мгновенный центр занимает положение P . Очевидно, что $\vec{OP} = \vec{AB}$; иными словами, каково бы ни было положение линейки, мгновенный центр P всегда находится на постоянном расстоянии $AB = 2l$ от начала координат неподвижной системы осей O , т. е. неподвижная центроида в рассматриваемом случае есть окружность C радиуса $2l$ с центром в O . С другой стороны $O'P = \frac{1}{2}OP = l$ также постоянно, и мгновенный центр находится на одном и том же расстоянии от принадлежащей фигуре и движущейся с ней вместе точки O' . Это значит, что подвижной центроидой является окружность C' радиуса l и с центром в O' .

Итак, в движущейся фигуре мгновенные центры расположены по начерченной на этой фигуре и с ней жестко связанной окружности C' , в неподвижной плоскости они расположены по окруж-

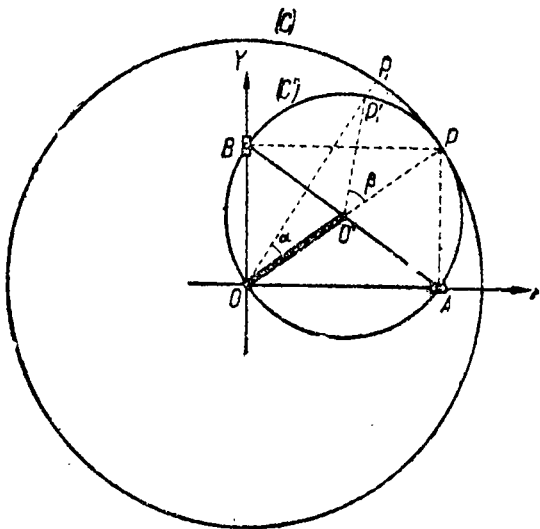


Рис. 166.

ности C . Какая-нибудь точка P_1 окружности C станет в некоторый момент движения мгновенным центром; пусть в этот момент с ней придет в совпадение точка P'_1 подвижной центроиды. Легко заметить, что $\widetilde{PP'_1} = \widetilde{PP_1}$. В самом деле, мы знаем, что траекторией точки P'_1 является прямая, проходящая через начало координат O (стр. 174); поэтому P'_1 придет в P_1 , двигаясь по отрезку прямой P'_1P_1 , причем три точки O, P'_1, P_1 лежат на этой прямой.

Теперь имеем:

$$\widetilde{P_1P} = 2l\alpha, \quad P'_1P = l\beta,$$

но $\beta = 2\alpha$, и мы получаем:

$$\widetilde{PP_1} = \widetilde{PP'_1}.$$

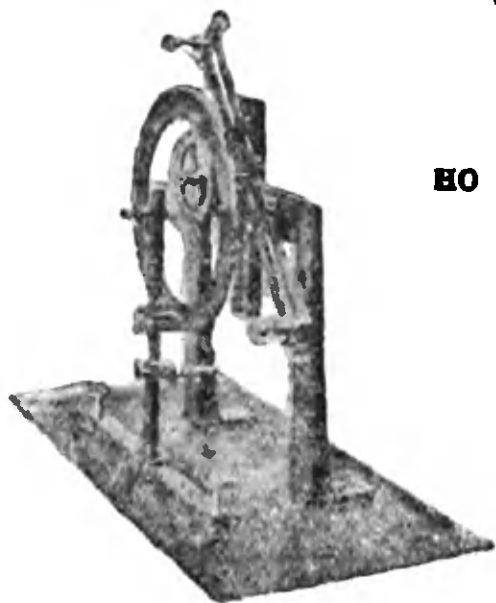


Рис. 167. Центроиды эллипсографа.

(Модель кабинета Механики Ленинградского физико-механического института).

Из доказанного равенства дуг $\widetilde{PP_1}$ и $\widetilde{PP'_1}$ следует, что в рассматриваемом движении качение подвижной центроиды по неподвижной происходит без скольжения. Его можно осуществить материально, заменив, например, окружности C и C' подвижным и неподвижным зубчатыми колесами и покотив первое по второму помощью рукоятки OO' (гипоциклическое зацепление, стр. 185). Любой диаметр колеса C' будет при этом совершать то же самое

движение, которое совершала линейка эллипсографа, любая точка его будет описывать эллипс. Таким образом два движения — линейки эллипсографа и колеса C' в гипоциклическом зацеплении одного колеса с другим вдвое меньшего радиуса, — с внешней стороны совершенно различно осуществляемые, кинематически оказываются друг другу совершенно эквивалентными (рис. 167).

Свойство центроид, отмеченное в только-что разобранном примере, имеет место и в общем случае движения: *в непоступательном движении плоской фигуры подвижная центроида катится без скольжения по неподвижной, соприкасаясь с ней.*

Докажем это. Пусть мгновенный центр, находившийся в положении P , переместившись по движущейся фигуре, занял по прошествии весьма малого промежутка времени Δt положение P'_1 на подвижной центроиде (рис. 168). За этот промежуток времени элемент дуги $\Delta\sigma = \widetilde{PP'_1}$ подвижной центроиды повернулся на некоторый угол $\Delta\varphi$ вместе с фигурой вокруг мгновенного центра P (ибо P является центром поворота) и занял положение $\widetilde{PP_1}$ на неподвижной центроиде C . Согласно сказанному $\Delta PP'_1P_1$ является равнобедрен-

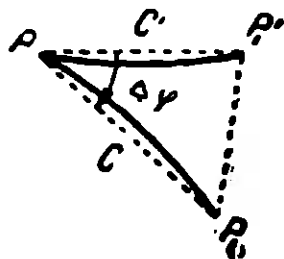


Рис. 168.

ным, ибо равным дугам $\overline{PP_1} = \overline{P'P'_1}$ соответствуют равные с точностью до малых высших порядков хорды.

Отсюда получаем:

$$\overline{P_1P'_1} = 2\overline{PP_1} \sin \frac{\Delta\varphi}{2} \simeq \overline{PP_1} \cdot \Delta\varphi \simeq \Delta\sigma \cdot \Delta\varphi.$$

Но $\Delta\sigma$ и $\Delta\varphi$ являются малыми того же порядка малости, что и Δt , а следовательно $P_1P'_1$ будет величиной 2-го порядка малости. Это значит, что кривые C и C' соприкасаются друг с другом в точке P , так как в случае их пересечения расстояние $P_1P'_1$ было бы величиной того же порядка, что и $\Delta\sigma$. С другой стороны, точка соприкосновения кривых P , будучи по условию мгновенным центром, т. е. имея скорость, равную нулю, не скользит по неподвижной центроиде.

Итак, кривая C' , во-первых, соприкасается с кривой C , во-вторых, не скользит по ней. Это и доказывает, что C' катится по C без скольжения.

Примеры и упражнения.

1. Колесо между движущимися рейками. Найдем центроиды в движении колеса между двумя движущимися рейками, рассмотренном уже в примере 4 § 41 и в примере 2 § 39.

Мгновенный центр P , как мы уже знаем, находится на постоянном расстоянии

$$\overline{OP} = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \cdot a$$

от центра O колеса. Следовательно, геометрическое место точек колеса, с которыми в процессе движения совпадает мгновенный центр, т. е. подвижная центроида, есть окружность радиуса $\overline{OP}$, concentрическая с колесом (рис. 169).

Неподвижная центроида, т. е. геометрическое место мгновенных центров в неподвижной плоскости, есть прямая, находящаяся на расстоянии $\overline{OP}$ от центра колеса.

Если насадить на ось колеса concentрически с ним диск радиуса

$$r = \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} a$$

и покатить его без скольжения по прямой C , сообщив центру диска скорость

$$\dot{v}_0 = \frac{v_1 - v_2}{2},$$

то рейки, соприкасающиеся с колесом в точках M_1 и M_2 , придут в движение со скоростями v_1 и v_2 , направленными в противоположные стороны. Итак, движение диска C' по прямой C совершенно

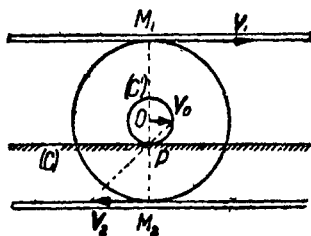


Рис. 169.

кинематически эквивалентно рассматриваемому движению колеса между двумя рейками.

2. Обращенное эллиптическое движение. Это движение мы рассмотрели в § 37 (пример 2). Найдем центроиды (рис. 170).

Скорости тех точек сторон движущегося прямого угла, которые в данный момент проходят по ползункам A и B , направлены вдоль прямых $\overline{AO}$ и $\overline{OB}$. Следовательно, мгновенный центр находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к $\overline{AO}$ и $\overline{OB}$ в точках A и B . По построению $AOBP$ есть прямоугольник, т. е. $OP = AP = 2l$. Точка P находится на постоянном расстоянии $2l$ от вершины подвижного прямого угла, т. е. подвижная центроида C' есть окружность радиуса $2l$ с центром в O . Неподвижная центроида есть окружность с центром в O' и вдвое меньшего радиуса l . Срав-

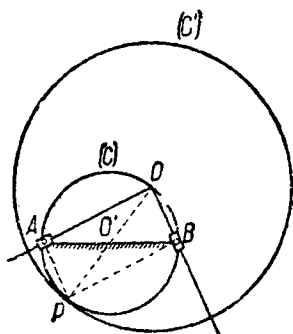


Рис. 170.

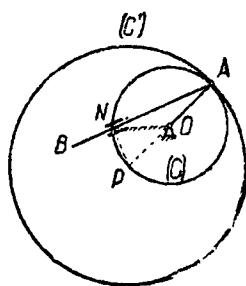


Рис. 171.

нивая этот результат с тем, который мы получили в тексте, рассматривая эллиптическое движение, видим, что подвижные и неподвижные центроиды поменялись ролями. Итак, если покатыть большой круг по малому, то полученное движение будет кинематически эквивалентно обращенному эллиптическому движению. Вообще, меняя роль центроид, т. е. *делая подвижную — неподвижной и неподвижную — подвижной*, мы получаем движение, называемое *обращенным* по отношению к первоначальному.

Рассмотрим еще центроиды линейки AB механизма, изображенного на рис. 171 и знакомого уже нам из примера 3 § 36.

Мгновенный центр P находится на пересечении перпендикуляра $\overline{NP}$ к шатуну $\overline{AB}$ и продолжения $\overline{OP}$ кривошипа $\overline{OA}$. Эти две прямые при всех положениях механизма пересекаются на окружности C , описываемой кривошипом, ибо прямой угол ANP должен опираться на диаметр. Итак, мгновенный центр при движении механизма будет последовательно приходить в совпадение с точками окружности C , которая и будет неподвижной центроидой. Подвижной центроидой C' будет окружность вдвое большего радиуса с центром в A , ибо при всех положениях линейки AB точка P находится от A на постоянном расстоянии. Рассматриваемое движение, таким образом, кинематически эквивалентно обращенному эллипти-

ческому движению, так как центры в том и другом случае одни и те же. Действительно, на рис. 170 можно отбросить линейку OB и ползунок B , заменив их кривошипом $O'O$, ибо точка O , как мы видели, описывает окружность; но тогда мы получим как раз рассматриваемый нами механизм. В этом примере рассмотрение центров показало нам опять кинематическую эквивалентность движений, осуществленных с внешней стороны различными путями; один механизм можно заменить другим, совершенно не изменяя характера движения.

3. Антипараллелограм. Рассмотрим механизм антипараллелограмма, т. е. частного случая двукривошипного механизма, противолежащие звенья которого равны

$$AB = ED = 2a; BE = AD = 2c.$$

В плоском движении, совершаемом звеном $\overline{BE}$, известны траектории двух его точек B и E ; это — окружности радиусов $\overline{AB}$ и $\overline{DE}$. Мгновенный центр лежит на пересечении нормалей к этим окружностям (или перпендикуляров к скоростям точек B и E), т. е. в точке P (рис. 172).

Имеем

$$\triangle ABE = \triangle ADE,$$

так как $\overline{AD} = \overline{EB}$, $\overline{AB} = \overline{ED}$ и $\overline{AE}$ — общая сторона.

Следовательно

$$\angle ABE = \angle ADE.$$

Далее

$$\angle APD = \angle EPB,$$

что при равенстве $\overline{AD} = \overline{EB}$ дает:

$$\triangle APD = \triangle EPB.$$

Отсюда получаем:

$$\overline{AP} = \overline{PE}, \quad \overline{BP} = \overline{PD}$$

и поэтому

$$\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{AP} + \overline{PD} = \overline{AB} = 2a.$$

Рис. 172.

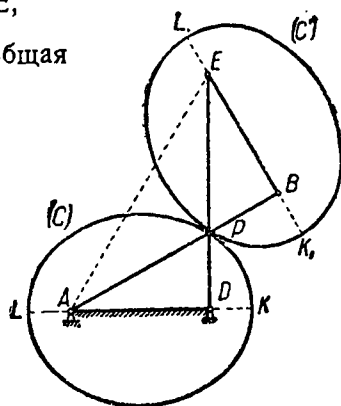
Точно так же

$$\overline{EP} + \overline{PD} = \overline{EP} + \overline{PB} = 2a.$$

Итак, сумма расстояний мгновенного центра P от двух неподвижных точек A и D есть величина постоянная. Неподвижная центроида C есть эллипс с фокусами в точках A и D , с большой полуосью a и малой

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Аналогично этому подвижная центроида C' есть также эллипс с полуосями той же величины и с фокусами в E и B , ибо, как доказано, сумма расстояний мгновенного центра от E и B есть величина постоянная и равна $2a$.



Итак, движение, при котором эллипс C' катится без скольжения по неподвижному эллипсу C , кинематически эквивалентно движению звена $\overline{BE}$ антипараллелограмма.

Из сказанного следует, что если закрепить звено $\overline{AB}$ и освободить звено $\overline{AD}$ (рис. 173), то движение, которое мы получим, кинематически эквивалентно рассмотренному в § 28 движению эллиптических колес. В частности, закон передачи угловой скорости от кривошипа AD кривошипу EB ничем не отличается от введенного нами при рассмотрении эллиптических колес.

Чтобы механизм (рис. 173) мог пройти через мертвые положения, следует поставить в точках K и L_1 вилки, а в точках L и K_1 стерженьки, которые взаимным давлением обеспечат непрерывное вращение механизма. Эти вилки и стерженьки соответствуют концам больших полуосей эллипсов ($\overline{LK} = \overline{L_1 K_1} = 2a$).

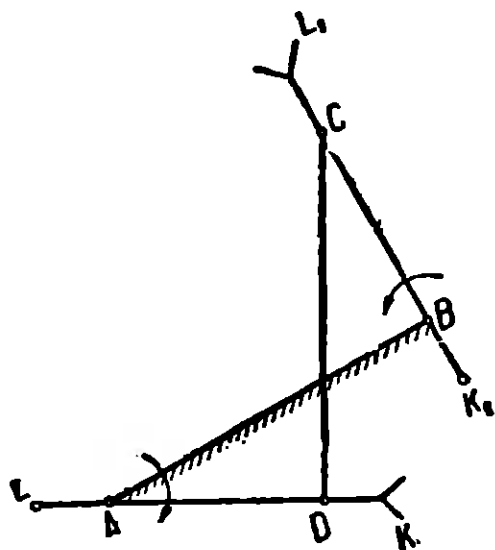


Рис. 173.



Рис. 174. Центроиды кривошипного механизма.

(Модель кабинета Механики Ленинградского физико-механического института).

4. Центроиды конхоидографа. Механизм рассмотрен в прим. 5 § 39, а также в § 38. Здесь путем простых геометрических соображений, как это имело место в только-что разобранных примерах, центроид найти нельзя. Обратимся к вычислению.

Мгновенный центр P (рис. 175) найдем в пересечении перпендикуляров к оси X в точке A и к линейке $\overline{AB}$ в точке N . Выразим координаты мгновенного центра в функции угла φ . Имеем:

$$x_P = \overline{OA} = \frac{\overline{ON}}{\operatorname{tg} \varphi} = d \operatorname{ctg} \varphi,$$

$$y_P = -\overline{AP} = -\frac{\overline{AN}}{\sin \varphi} = -\frac{d}{\sin^2 \varphi}$$

ибо

$$\overline{AN} = \frac{d}{\sin \varphi}.$$

Исключая из этих уравнений угол φ , получим уравнение неподвижной центроиды C :

$$y_p = -\frac{x_p^2}{d} - d.$$

Это — уравнение параболы с вершиной в точке N .

Чтобы найти подвижную центрoиду, выразим в функции угла φ координаты точки P в подвижной системе осей. Имеем:

$$x'_p = - \overline{AN} = - \frac{d}{\sin \varphi},$$

$$y_p' = -\overline{NP} = -\overline{AN} \operatorname{ctg} \varphi = -d \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}.$$

Из этих формул получим:

при ... $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$, $-\infty \leq x'_p \leq -d$, $-\infty \leq y'_p \leq 0$

$$\text{при } \dots \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi, \quad -d \geq x'_p \geq -\infty, \quad 0 \leq y'_p \leq +\infty,$$

т. е. при движении механизма, когда φ изменяется в промежутке от 0 до π , x'_p остается отрицательным и большим d по абсолютному значению. Если провести через точку M ($\overline{AM} = d$) параллельно оси y' прямую, то подвижная центроида C' расположится влево от этой прямой, ибо $x'_p \leq -d$. C' проходит через точку M , касаясь в ней указанной прямой (производная $\frac{dy'_p}{dx'_p}$ в этой точке обращается в бесконечность).

На основании этих замечаний можно отдать себе отчет о форме и расположении подвижной центроиды. Она построена на рис.176. Уравнение ее можно получить исключив φ из параметрических уравнений. Результат исключения имеет вид:

$$d^2 y_p'^2 = x_p'^2 (x_p'^2 - d^2),$$

т. е. подвижная центроида есть алгебраическая кривая четвертого порядка. Конечно исследование ее и построение выполняются значительно проще при пользовании параметрическими уравнениями.

5. Координаты мгновенного центра в подвижной и неподвижной системе осей. В упражнении 4 § 39 мы вывели

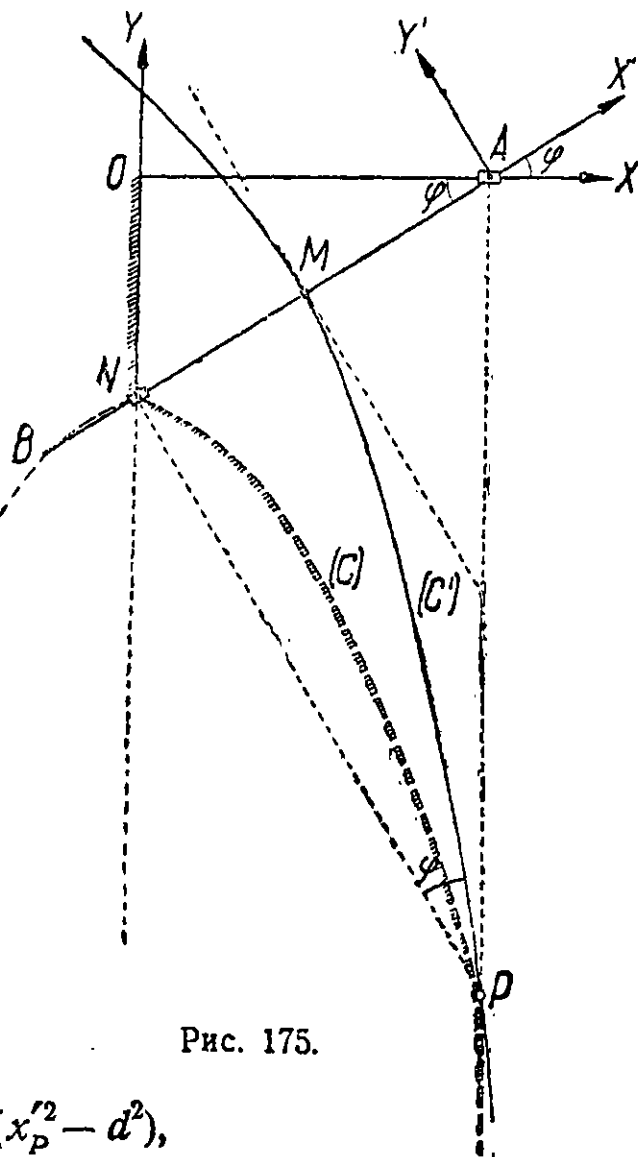


Рис. 175.

формулы, дающие проекции скорости любой точки движущейся фигуры на оси подвижной и неподвижной системы. Пользуясь ими, определим теперь координаты x_P и y_P мгновенного центра. Имеем:

$$v_x = v_{0x} - \bar{\omega}(y - y_0)$$

$$v_y = v_{0y} + \bar{\omega}(x - x_0).$$

Но для мгновенного центра $v_x = v_y = 0$; иными словами, если в наши формулы вставить, вместо x и y , x_P и y_P , то левые части их обратятся в нуль.

Получаем:

$$v_{0x} - \bar{\omega}(y_P - y_0) = 0$$

$$v_{0y} + \bar{\omega}(x_P - x_0) = 0,$$

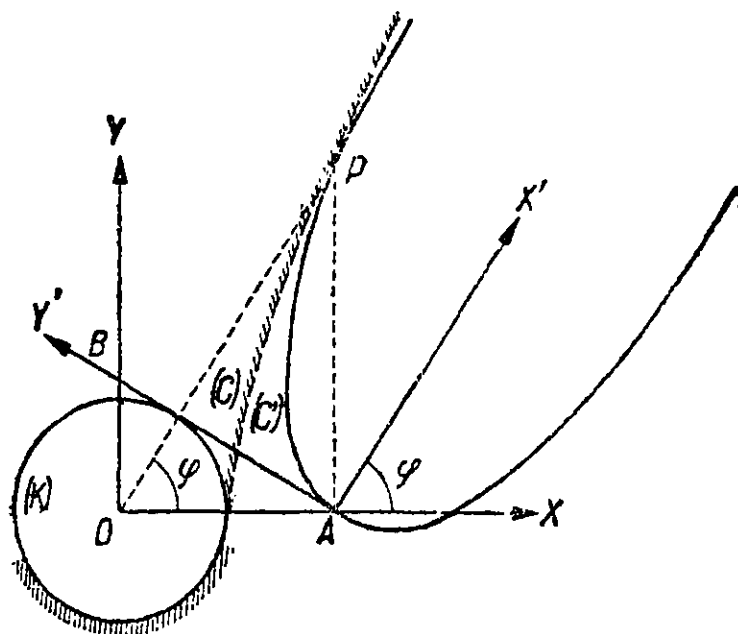
откуда найдем:

$$\left. \begin{aligned} x_P &= x_0 - \frac{v_{0y}}{\bar{\omega}} \\ y_P &= y_0 + \frac{v_{0x}}{\bar{\omega}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Аналогично найдем из формул (10) стр. 187 координаты x'_P и y'_P мгновенного центра в подвижной системе:

$$\left. \begin{aligned} x'_P &= \frac{v_{0x} \sin \varphi - v_{0y} \cos \varphi}{\bar{\omega}} \\ y'_P &= \frac{v_{0x} \cos \varphi + v_{0y} \sin \varphi}{\bar{\omega}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

рис. 176.



В заданном плоском движении x_0 , y_0 , φ , а следовательно их производные v_{0x} , v_{0y} , $\bar{\omega}$ суть известные функции времени. Иными словами, уравнения (1) и (2) дают нам координаты мгновенного центра в функции времени. Результат исключения времени из уравнений (1) и (2) представит *подвижную и неподвижную центроиду*.

6. Пример. В качестве примера на применение формул (1) и (2) найдем центроиды в движении стержня AB (рис. 176), когда он, опираясь на окружность K, скользит своим концом A вдоль прямой OX; проходящей через центр окружности.

Уравнения движения основной точки A будут:

$$x_0 = \frac{a}{\cos \varphi}, \quad y_0 = 0.$$

Угол φ при движении является некоторой функцией времени, причем, поскольку речь идет лишь об определении центроид, вид этой функциональной зависимости нас не может интересовать. Положение мгновенного центра определяется в данном случае геометрической конфигурацией движущейся системы и не зависит от того, как движение протекает во времени.

Имеем:

$$v_{0x} = \dot{x}_0 = \frac{a\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} \sin \varphi = \frac{a\dot{\omega} \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad v_{0y} = 0.$$

Подстановка в (1) и (2) дает:

$$x_P = \frac{a}{\cos \varphi}, \quad y_P = \frac{a \sin \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$x'_P = a \operatorname{tg}^2 \varphi, \quad y'_P = a \operatorname{tg}^2 \varphi.$$

Исключая φ , найдем уравнения подвижной и неподвижной центроид:

$$y_P'^2 = ax'_P, \quad a^2 y_P^2 = x_P^2 (x_P^2 - a^2).$$

Сравним полученные уравнения с уравнениями центроид в примере 4; оказывается, что подвижная центроида линейки конхоидографа имеет в точности то же уравнение, что и неподвижная центроида в рассматриваемом движении стержня; точно так же уравнение неподвижной

центроиды первого движения и подвижной центроиды второго выражает ту же самую параболу, так как эти уравнения отличаются друг от друга только переменной наименований осей и постоянной, соответствующей переносу начала системы координат.

Отсюда следует, что движение линейки конхоидографа представляет обращение рассматриваемого движения. В самом деле, если в последнем сделать неподвижным звеном стержень $\overline{AB}$ и предоставить двигаться прямой $\overline{OA}$ и окружности K , то получаемый механизм (рис. 177) будет только внешним образом отличаться от конхоидографа. Можно, отбросив круг K и прямую AB , заменить их ползунком O и прямой OL ; таким образом, не изменяя кинематического характера движения, мы получим снова тот же конхоидограф.

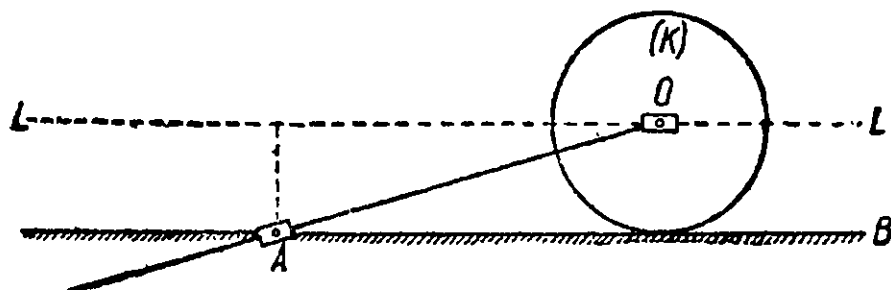


Рис. 177.

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. Показать, что разность угловых скоростей задних колес автомобиля, идущего по закруглению без скольжения, прямо пропорциональна расстоянию между колесами, средней линейной скорости и обратно пропорциональна радиусу колеса и среднему радиусу закругления.

Под средним радиусом закругления понимается радиус кривизны окружности, описываемой точкой, лежащей на оси между колесами на равных от них расстояниях; ее скорость — средняя линейная скорость.

2. В кривошипном механизме длина кривошипа $\overline{OA} = 10$ см, шатуна $\overline{AB} = 20$ см; кривошип делает 120 об/мин. Определить вели-

чину скорости ползуна B , когда $\angle AOB$ равен 45° , пользуясь построением мгновенного центра.

3. В кривошипном механизме длина кривошипа $a = 2$ см и шатуна $l = 80$ см; кривошип вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = 6\pi \frac{1}{\text{сек}}$. Найти угловую скорость шатуна, скорость его середины и скорость ползуна при четырех положениях механизма, для которых угол φ равен соответственно: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$ (рис. 178).

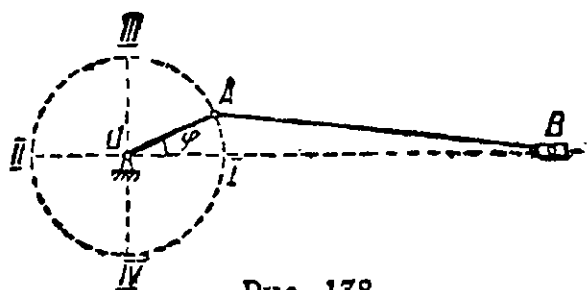


Рис. 178.

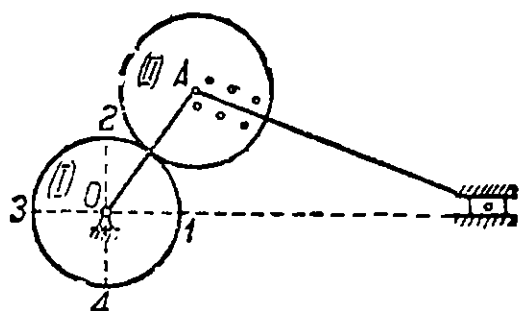


Рис. 179.

4. На ось O насажены: зубчатое колесо I диаметром 20 см и кривошип OA длины 20 см, не связанные между собой. С шатуном AB наглухо скреплено зубчатое колесо II того же диаметра 20 см; длина шатуна 1 м. Колесо I вращается равномерно с угловой скоростью $\omega = 2\pi \frac{1}{\text{сек}}$ и, захватывая зубцы колеса II , приводит в движение шатун AB и кривошип OA . Определить угловую скорость ω_1 кривошипа в любом положении механизма, выразив ее через отношения получаемых на чертеже отрезков (ср. пример 5 § 41) и довести вычисления до конца при четырех указанных на рис. 179 положениях кривошипа.

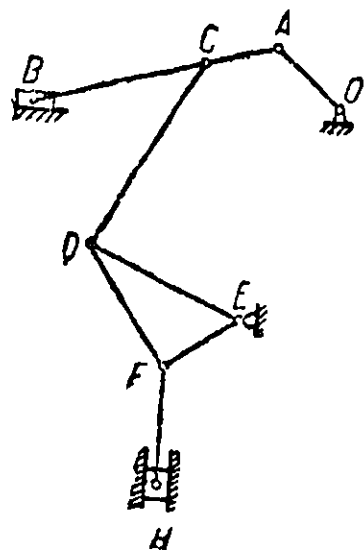


Рис. 181.

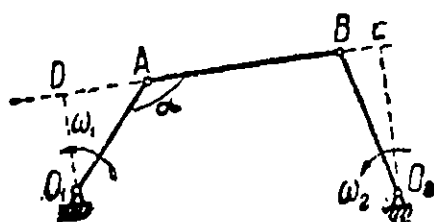


Рис. 180.

5. Доказать, что угловые скорости кривошипов двукривошипного механизма обратно пропорциональны расстояниям от осей вращения соответствующих кривошипов до шатуна:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{O_1 D}{O_2 E}.$$

Указание. Построить мгновенный центр шатуна (рис. 180).

6. Найти построением ту точку M шатуна AB двукривошипного

механизма, скорость которой в рассматриваемом положении механизма направлена вдоль шатуна.

Кривошип $\overline{OA}$ имеет длину 20 см и вращается с угловой скоростью 30 об/мин.; угол OAB в рассматриваемом положении равен $\alpha = 120^\circ$. Определить величину скорости точки M (рис. 180).

7. Последовательным построением мгновенных центров определить по заданной угловой скорости кривошипа OA скорость ползуна H , выразив ее через отношения получаемых на чертеже отрезков (ср. пример 1 § 41) (рис. 181).

8. По заданной скорости ползуна построить план скоростей изображенного на рисунке механизма (рис. 182).

9. Определить подвижную и неподвижную центроиды антипараллелограмма, большее звено которого сделано неподвижным; $AD = BE$, $DE = AB$ (рис. 183).

Указание. Сравнить с примером 3 § 43.

10. Найти уравнения и построить неподвижную и подвижную центроиды в движении прямого угла, описанном в примере 3 § 37.

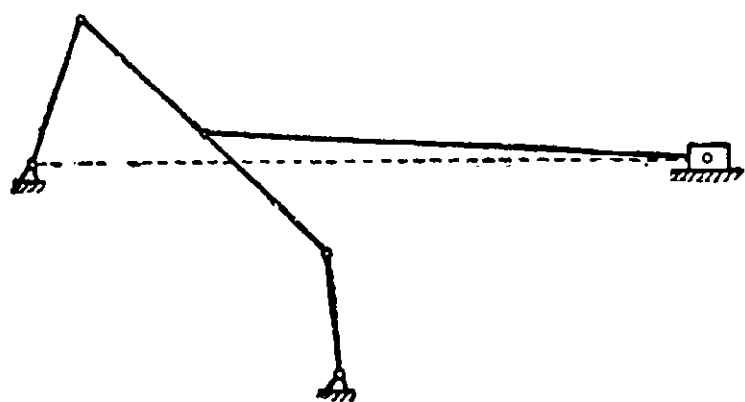


Рис. 182.

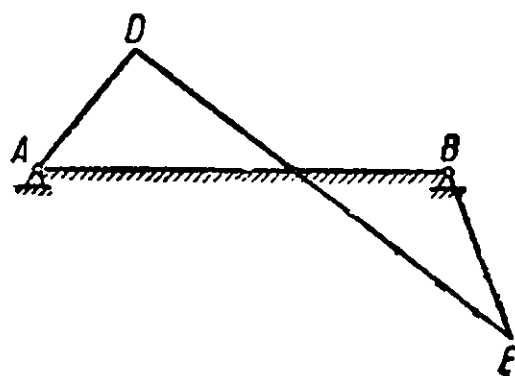


Рис. 183.

Задание 13-е.

Распределение ускорений в движущейся плоской фигуре.

При проектировании новых механизмов и изучении работы существующих имеет большое практическое значение учет так называемых сил инерции. К этому вопросу сводится часто весь расчет механизма, особенно в тех случаях, когда инерционные усилия, которым это звено подвергается, имеют значительную величину (иногда во много раз превосходящую все прочие к нему приложенные нагрузки). Мы увидим в Динамике, что учет сил инерции сводится к разысканию ускорений. Этим обстоятельством и объясняется тот интерес, который представляет для инженера изучение вопроса об ускорении вообще и об ускорениях в плоском движении в частности.

При изложении вопроса об ускорении в плоском движении, мы будем придерживаться той же последовательности, что и в задании 11; сначала будет выведен общий закон распределения ускорений и приведен разбор нескольких задач; затем на уже рассмотренных в задании 11 примерах мы познакомим учащегося с графическими способами построения ускорений плоской фигуры — составления плана ускорений.

§ 44. Распределение ускорений в движущейся плоской фигуре.

Для определения ускорения любой точки плоской фигуры, мы должны, согласно определению ускорения (стр. 99), найти производную вектора скорости.

Имеем (стр. 182):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\omega, \mathbf{r}']$$

и следовательно:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d}{dt} [\omega, \mathbf{r}'] = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \left[\frac{d\omega}{dt}, \mathbf{r}' \right] + \left[\omega, \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right]. \quad (1)$$

Разберемся в значении отдельных слагаемых правой части этого равенства.

1. Первое слагаемое:

$$\mathbf{w}_0 = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} \quad (2)$$

есть очевидно *ускорение основной точки*.

2. Второе слагаемое — обозначим его через $\mathbf{w}_1$, — будет равно

$$\mathbf{w}_1 = \left[\frac{d\omega}{dt}, \mathbf{r}' \right] = [\varepsilon, \mathbf{r}']. \quad (3)$$

С вектором углового ускорения

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$$

мы уже встречались при изучении ускорений тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Напомним, что величина этого вектора равна

$$\varepsilon = \left| \frac{d\omega}{dt} \right|,$$

а направление ε или совпадает с направлением, ω , или противоположно ω , сообразно тому, будет ли $\frac{d\omega}{dt} > 0$ или $\frac{d\omega}{dt} < 0$.

Вектор $\mathbf{w}_1$ перпендикулярен $\mathbf{r}'$ и направлен в ту же сторону, что и вращательная скорость $[\omega, \mathbf{r}']$ вокруг основной точки или в противоположную, смотря по тому, положительна или отрицательна производная $\frac{d\omega}{dt}$. Величина w_1 равна

$$w_1 = \varepsilon r' \cdot \sin(\varepsilon, \mathbf{r}') = \varepsilon \cdot r' \cdot 1 = \varepsilon r'.$$

Мы будем называть w_1 *вращательным ускорением*.

3. Остается рассмотреть третье слагаемое:

$$\mathbf{w}_2 = \left[\omega, \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right].$$

Мы имеем [§ 39, формула (7)]:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = [\omega, \mathbf{r}'] = \mathbf{v}^*,$$

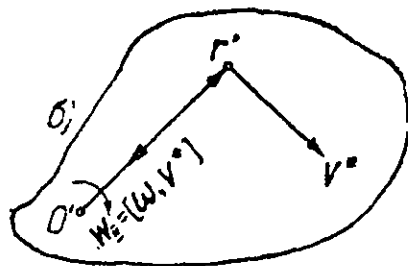
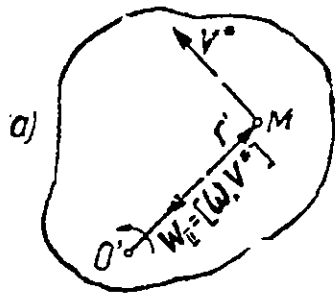
где $\mathbf{v}^*$ — вращательная скорость рассматриваемой точки M вокруг основной O' .

Итак

$$\mathbf{w}_{II} = [\omega, \mathbf{v}^*],$$

т. е. величина вектора $\mathbf{w}_{II}$ будет

$$w_{II} = \omega v^* = \omega \cdot \omega r' = \omega^2 r'.$$



а) направлено внутрь чертежа

б) направлено к читателю

Рис. 184.

По направлению $\mathbf{w}_{II}$ перпендикулярен ω и $\mathbf{v}^*$, т. е. имеет или то же направление, что и вектор-радиус $\mathbf{r}'$, или прямо противоположное ему. Легко проверить, что в действительности может иметь место только второе предположение (рис. 184 а, б). Итак, будучи по величине равно $\omega^2 r'$ и направлено противоположно $\mathbf{r}'$, $\mathbf{w}_{II}$ может быть представлено в виде

$$\mathbf{w}_{II} = -\omega^2 \mathbf{r}'. \quad (4)$$

$\mathbf{w}_{II}$ называется *центростремительным ускорением*.

Мы получаем таким образом:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \mathbf{w}_I + \mathbf{w}_{II} = \mathbf{w}_0 + [\epsilon, \mathbf{r}'] - \omega^2 \mathbf{r}', \quad (5)$$

т. е.

ускорение любой точки в плоском движении складывается из поступательного ускорения, общего всем точкам фигуры, вращательного вокруг основной точки и центростремительного (рис. 185).

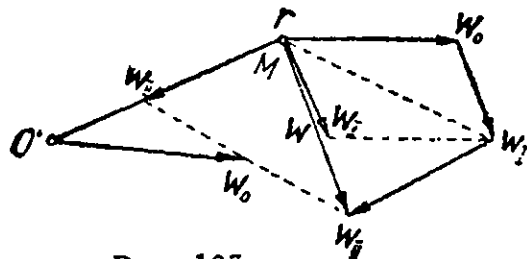


Рис. 185.

Заметим, что поступательное ускорение $\mathbf{w}_0$ отсутствует, если основная точка движется равномерно и прямолинейно; $\mathbf{w}_I = 0$, если $\epsilon = 0$, т. е. вращение фигуры происходит с постоянной угловой скоростью; наконец $\mathbf{w}_{II} = 0$ при $\omega = 0$, т. е. при поступательном движении.

Условимся в дальнейшем обозначать значками наименования точек, ускорение которых рассматривается; например w_A , w_B и т. д. будут ускорения точек A , B и т. д.; геометрическую сумму вращательного и центростремительного ускорений точки B , когда за основную принята точка A , назовем через w_{AB} :

$$w_{AB} = [\epsilon, r'_{AB}] - \omega^2 r_{AB};$$

отдельные слагаемые этой суммы, вращательное и центростремительное ускорения, будем обозначать:

$$w_{AB}^{(s)} = [\epsilon, r'_{AB}], \quad w_{AB}^{(u)} = -\omega^2 r'_{AB}. \quad (7)$$

Формула (5) примет вид:

$$w_B = w_A + w_{AB} = w_A + w_{AB}^{(s)} + w_{AB}^{(u)}. \quad (8)$$

Замечая, что $w_{AB}^{(s)}$ и $w_{AB}^{(u)}$ взаимно перпендикулярны, получим:

$$w_{AB} = r' \sqrt{\epsilon^2 + \omega^4} \quad (9)$$

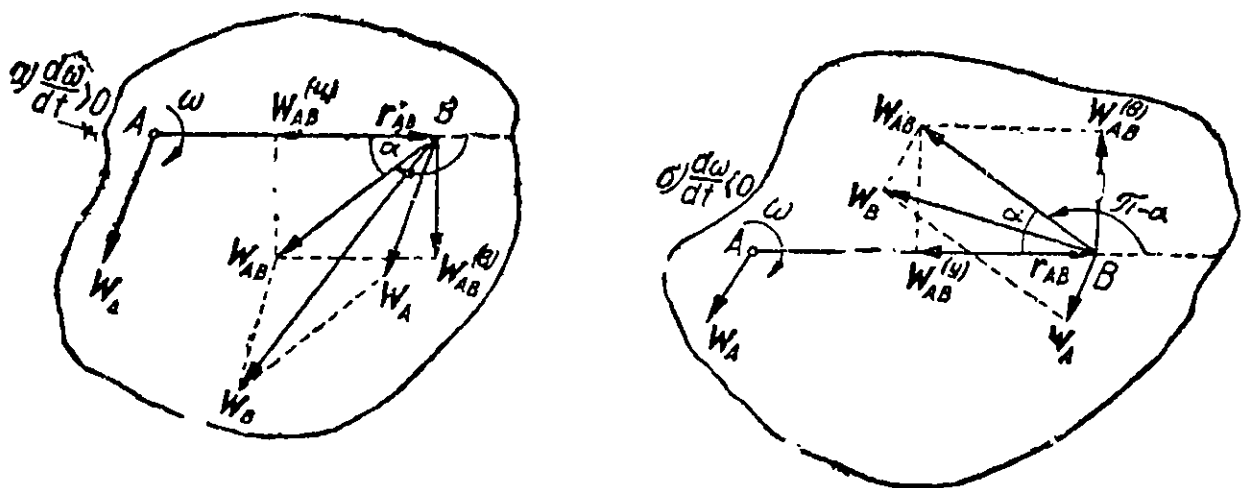


Рис. 186.

Обозначим через $\pi - \alpha$ (всегда тупой) угол, образуемый векторами r'_{AB} и w_{AB} .

Легко видеть, что (рис. 186 а и б):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{w_{AB}^{(s)}}{w_{AB}^{(u)}} = \frac{r' \epsilon}{r' \omega^2} = \frac{\epsilon}{\omega^2}. \quad (10)$$

При $\frac{d\omega}{dt} > 0$ угол $(\pi - \alpha)$ отсчитывается от r'_{AB} в сторону вращения фигуры и в противоположную сторону при $\frac{d\omega}{dt} < 0$ (рис. 186 б). Отметим, что угол α одинаков для всех точек фигуры.

§ 45. Мгновенный центр ускорений.

Докажем, что в каждый момент существует точка плоской фигуры, ускорение которой в этот момент равно нулю. Эта точка называется мгновенным центром ускорений. Чтобы убе-

даться в существовании центра ускорений, проведем через какую-нибудь точку A полупрямую AL под углом α (см. формулу (10) § 44) к w_A , отсчитывая α от w_A в сторону вращения фигуры или противоположно ему, сообразно тому, будет ли $\frac{d\omega}{dt} > 0$ или $\frac{d\omega}{dt} < 0$ (рис. 187 а, б). Отложим далее на AL отрезок

$$r'_{AQ} = AQ = \frac{w_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (1)$$

Конец Q этого отрезка и будет мгновенным центром ускорений. В самом деле, согласно формуле (9) § 44, имеем:

$$w_{AQ} = r'_{AQ} \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = w_A.$$

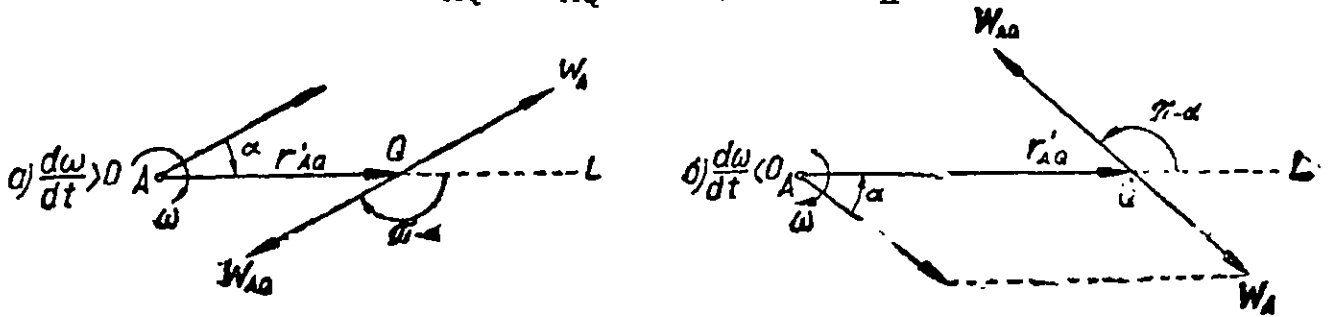


Рис. 187.

С другой стороны, построив w_{AQ} согласно правилу, формулированному в конце § 44, найдем, что w_{AQ} противоположно w_A по направлению. Итак,

$$w_{AQ} = -w_A,$$

т. е.

$$w_A + w_{AQ} = 0. \quad (2)$$

Отсюда на основании (8) § 44 заключаем, что

$$w_Q = 0,$$

т. е. Q есть мгновенный центр ускорений.

Построение мгновенного центра ускорений, на основании сказанного, требует знания ускорения w_A какой-либо точки фигуры и угла α ; последний же может быть известен, коль скоро заданы в данный момент ε и ω^2 . Покажем теперь, как построить мгновенный центр ускорений, имея ускорения двух точек фигуры. Заметим для этого, что, зная w_A и w_B , мы тем самым можем определить на основании формулы (8) § 44:

$$w_{AB} = w_B - w_A,$$

и, следовательно, угол α будет вполне определен. Теперь можем построить луч AL , на котором лежит мгновенный центр ускорений Q . Нет надобности вычислять положение точки Q по формуле (1), так как можно построить его графическим путем, проведя луч BM под углом α к w_B . Пересечение лучей AL и BM и определит точку Q . Построение произведено на рис. 188. По заданным w_A и w_B найдена

их разность $w_{AB} = w_B - w_A$. Это определяет угол $(\pi - \alpha)$, отсчитываемый от r'_{AB} к w_{AB} . В этом же направлении отсчета отложен угол α от направлений w_A и w_B , и проведены лучи AL и BM . Их пересечение определило точку Q .

Имея мгновенный центр ускорений, мы получаем весьма наглядную картину распределения ускорений в плоской фигуре. Действительно, подставляя в формулу (8) § 44 Q вместо A и замечая, что по определению $w_Q = 0$, получим:

$$w_B = w_{QB} = w_{AB}^{(s)} + w_{QB}^{(u)} = [\varepsilon, r'_{QB}] - \omega^2 r'_{AB}. \quad (3)$$

Первое слагаемое есть *вращательное ускорение* вокруг мгновенного центра ускорений; оно направлено по перпендикуляру к вектор-радиусу, соединяющему центр ускорений с рассматриваемой точкой в ту сторону, куда происходит вращение, или в противоположную, смотря по тому, возрастает или убывает угловая скорость ($\frac{d\omega}{dt} > 0$ или $\frac{d\omega}{dt} < 0$).

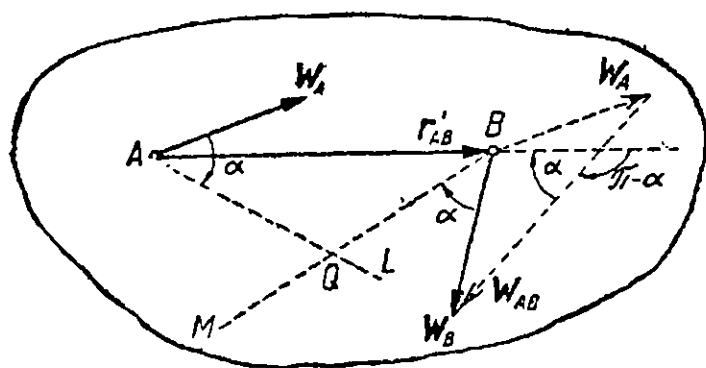


Рис. 188.

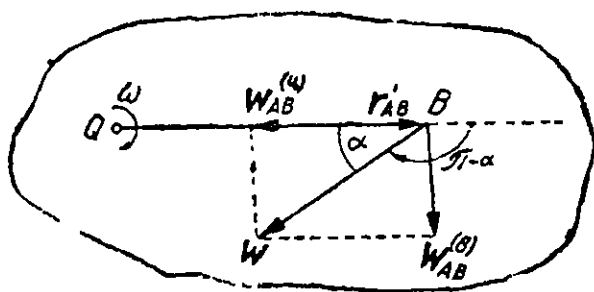


Рис. 189.

Второе слагаемое направлено всегда от точки к центру ускорений. Это *центростремительное ускорение* вращения вокруг центра ускорений.

Расположение их видно на рис. 189. По величине эти ускорения соответственно равны:

$$w_B^{(s)} = w_{QB}^{(s)} = \varepsilon \cdot r'_{QB}, \quad (4)$$

$$w_B^{(u)} = w_{QB}^{(u)} = \omega^2 r'_{AB}. \quad (5)$$

В каждый данный момент полное ускорение w_B любой точки фигуры пропорционально ее расстоянию от центра ускорений:

$$w_B = r'_{QB} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \quad (6)$$

и направлено под одинаковым для всех точек фигуры углом $\pi - \alpha$ к вектор-радиусу, соединяющему рассматриваемую точку с мгновенным центром.

Не следует смешивать вращательного ускорения $w_B^{(s)}$ с касательным w_1 , а центростремительного — с нормальным w_2 . В самом деле, касательное и нормальное ускорения направлены по

касательной и главной нормали к траектории, т. е. по перпендикуляру к вектор-радиусу $\mathbf{r}'_{PB}$, соединяющему рассматриваемую точку с мгновенным центром скоростей P и вдоль этого вектор-радиуса, в то время как $\mathbf{w}_B^{(s)}$ и $\mathbf{w}_B^{(u)}$ направлены перпендикулярно и вдоль вектор-радиуса $\mathbf{r}'_{QB}$ (рис. 190).

Примеры и упражнения.

1. Движение колеса по рельсу. Колесо катится без скольжения по прямолинейному рельсу с постоянной скоростью v_0 (рис. 191). Найдем ускорение любой точки обода.

Мгновенный центр ускорений находится в центре колеса, ибо эта точка движется прямолинейно и равномерно. Замечая, что

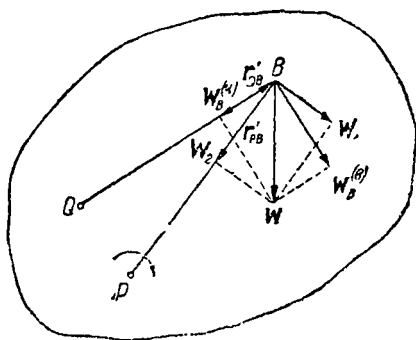


Рис. 190.

$$\omega = \frac{v_0}{a} = \text{const}$$

и следовательно, $\varepsilon = 0$, найдем, что ускорение любой точки обода направлено к центру колеса и равно по величине

$$w = \omega^2 a = \frac{v_0^2}{a}.$$

Этот результат мы уже получили при изучении движения по циклоиде.

2. Эпициклическое и гипоциклическое зацепления. Мы рассматривали уже этот пример в § 39. За основную точку примем центр A (рис. 192) колеса II . Ее ускорение направлено от A к O и равно по величине

$$w_A = \omega^2 (r_1 + r_2).$$

Угловая скорость ω_2 колеса II , как мы видели, будет

$$\omega_2 = \omega \frac{r_1 + r_2}{r_2};$$

$\varepsilon = 0$, ибо ω_2 — постоянная величина; поэтому $w_I = 0$.

Далее имеем:

$$\mathbf{w}_{II} = -\omega_2^2 \mathbf{r}' = -\omega^2 \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_2^2} \mathbf{r}'.$$

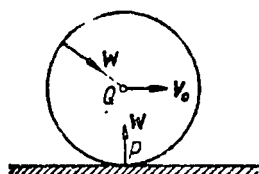


Рис. 191.

Рассмотрим, в частности, ускорение точек B и C . Для точки B имеем:

$$w_{II} = \omega^2 \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_2^2} r_2 = \omega^2 \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_2},$$

и w_{II} направлено от B к A , т. е. так же, как и ускорение w_0 . Полное ускорение точки B будет

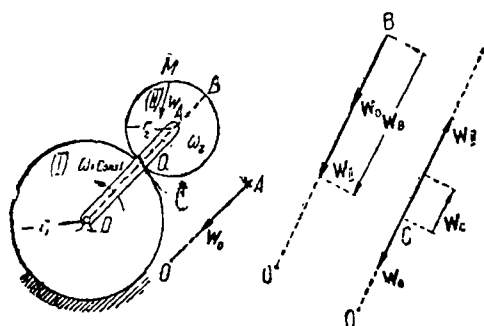


Рис. 192.

$$\begin{aligned} w_B &= \omega^2 (r_1 + r_2) + \\ &+ \omega^2 \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_2} = \\ &= \omega^2 \frac{(r_1 + r_2)(r_1 + 2r_2)}{r_2}, \end{aligned}$$

ибо w_A и w_{II} имеют одинаковые направления и геометрическое суммирование можно заменить арифметическим. Точно так же для точки C получим:

$$w_C = \omega^2 \frac{(r_1 + r_2)^2}{r_2} - \omega^2 (r_1 + r_2) = \omega^2 (r_1 + r_2) \frac{r_1}{r_2}.$$

Ускорения w_B и w_C направлены к центру диска.

Найдем еще мгновенный центр ускорений колеса II. В этой точке $w_{II} = -w_0$; следовательно она должна лежать на радиусе AC , ибо для точек этого радиуса w_{II} направлено противоположно w_A . Расстояние мгновенного центра ускорений r' от центра колеса определится из уравнения

$$\omega^2 \left(\frac{r_1 + r_2}{r_2} \right)^2 r' = \omega^2 (r_1 + r_2)$$

откуда

$$r' = \frac{r_2^2}{r_1 + r_2}.$$

В случае гипоциклического зацепления (рис. 193) имеем:

$$w_A = \omega^2 (r_1 - r_2), \quad \omega_2 = \omega \frac{r_1 - r_2}{r_2}.$$

Для точек C и B получим:

$$w_C = \omega^2 \frac{(r_1 - r_2)^2}{r_2} + \omega^2 (r_1 - r_2) = \omega^2 \frac{r_1 - r_2}{r_2} r_1$$

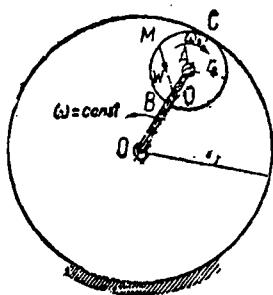


Рис. 193.

$$w_B = \omega^2 \frac{(r_1 - r_2)^2}{r_2} - \omega^2 (r_1 - r_2) = \omega^2 \frac{(r_1 - r_2)(r_1 - 2r_2)}{r_2}$$

При $r_1 > 2r_2$, w_B направлено к точке A , при $r_1 = 2r_2$, $w_B = 0$, наконец при $r_1 < 2r_2$, w_B получается отрицательным; это указывает, что оно направлено в этом случае в ту же сторону, что и w_A .

Мгновенный центр ускорений находится на радиусе AB , причем расстояние его r' от центра колеса II определится из уравнения

$$\omega^2 \frac{(r_1 - r_2)^2 r'}{r_2^2} \omega^2 (r_1 - r_2) = 0,$$

откуда найдем:

$$r' = \frac{r_2^2}{r_1 - r_2}.$$

3. Эллипсограф. Движение линейки $\overline{AB} = 2l$ эллипсографа (рис. 194) осуществляется при помощи кривошипа $\overline{OO'} = l$, вращающегося с постоянной угловой скоростью. Мы знаем, что это движение кинематически эквивалентно движению колеса II в гипоциклическом зацеплении, в котором $r_2 = \frac{r_1}{2}$, причем угловая скорость

рукоятки равна угловой скорости ω кривошипа OO' эллипсографа. Мгновенный центр ускорений находится, как мы видели, в точке O ; $a = 0$ и, следовательно, уско-

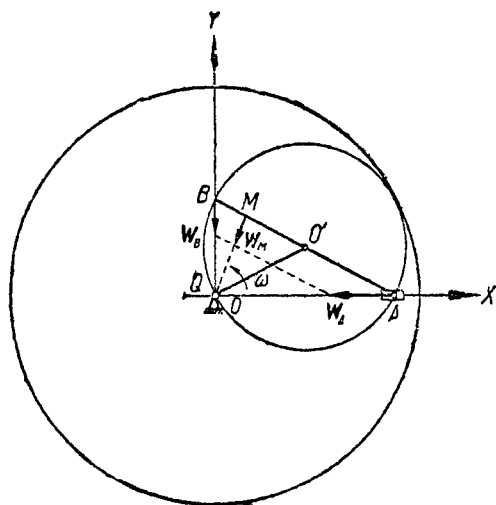


Рис. 194.

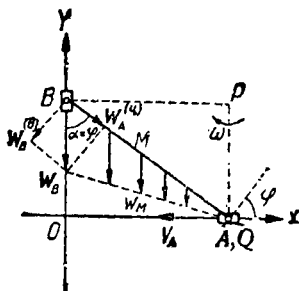


Рис. 195.

рение любой точки M линейки направлено к точке O и равно по величине

$$w_M = OM \cdot \omega^2.$$

Предположим теперь, что в том же механизме эллипсографа мы двигаем точку A с постоянной скоростью v_A в сторону отрицательной оси x и найдем ускорения всех прочих точек линейки. Так как движение точки A равномерное и прямолинейное, то она и является центром ускорений. Чтобы найти распределение ускорений, нужно знать угловую скорость и угловое ускорение. Имеем (рис. 195):

$$\omega = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_A}{2l \cos \varphi},$$

откуда найдем:

$$w_B^{(u)} = \omega^2 \cdot 2l = \frac{v_A^2}{2l \cos^2 \varphi},$$

и, следовательно:

$$w_B = \frac{w_B^{(u)}}{\cos \varphi} = \frac{v_A^2}{2l \cos^3 \varphi}.$$

w_B направлено по оси Y к началу координат, ибо его центростремительная составляющая идет от B к A .

На основании свойств центра ускорений, ускорения всех прочих точек линейки пропорциональны расстоянию до точки A и имеют то же направление, что и w_B . Если соединить конец вектора w_B с мгновенным центром ускорений прямой линией, то на ней расположатся концы векторов, изображающих ускорения точек линейки.

4. Численный пример на построение центра ускорений по заданным ускорениям двух точек фигуры. Концы стержня AB имеют ускорения, равные друг другу по величине

$$w_A = w_B = w,$$

направление их: w_A вдоль AB , w_B перпендикулярно AB . Определим по этим данным ускорение середины C стержня (рис. 196).

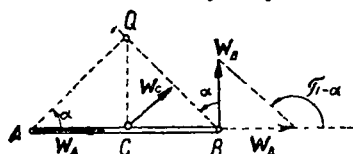


Рис. 196.

Согласно сказанному в § 45 строим геометрическую разность $w_B - w_A = w_{AB}$, — это определит нам величину и направление отсчета угла α ; получим $\alpha = 45^\circ$. Мгновенный центр ускорений Q найдем на пересечении лучей, проведенных из A и B под углом 45° , т. е. в вершине равнобедренного прямоугольного треугольника, имеющего AB гипотенузой. Ускорение точки C по величине равно

$$w_C = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \overline{QC} = \frac{w}{AQ} \overline{QC} = \frac{w}{\sqrt{2}},$$

направление w_C составляет угол 135° с вектор-радиусом $\overrightarrow{QC}$.

5. Проекции ускорения на оси и координаты центра ускорений. Согласно формуле (5) § 44 имеем:

$$w = w_0 + [\varepsilon, r'] - \omega^2 r'.$$

Замечая, что

$$r' = r - r_0$$

найдем (ср. § 35, пример 2):

$$\left. \begin{aligned} w_x &= w_{ox} - \varepsilon(y - y_0) - \omega^2(x - x_0) = \ddot{x}_0 - \ddot{\varphi}(y - y_0) - \dot{\varphi}^2(x - x_0) \\ w_y &= w_{oy} + \varepsilon(x - x_0) - \omega^2(y - y_0) = \ddot{y}_0 + \ddot{\varphi}(x - x_0) - \dot{\varphi}^2(y - y_0) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Если плоское движение задано, то координаты основной точки: x_0 и y_0 , а также угол поворота φ известны в функции времени, и все

величины, фигурирующие в правых частях наших формул, могут быть вычислены.

Для мгновенного центра ускорений $w_x = w_y = 0$, поэтому если в правой части наших формул вместо x и y подставить координаты центра ускорения x_Q и y_Q , то левые части обратятся в нуль.

Получаем:

$$\begin{aligned} w_{ox} - \omega^2(x_Q - x_0) - \varepsilon(y_Q - y_0) &= 0 \\ w_{oy} + \varepsilon(x_Q - x_0) - \omega^2(y_Q - y_0) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда найдем:

$$\left. \begin{aligned} x_Q &= x_0 + \frac{\omega^2 w_{ox} - \varepsilon w_{oy}}{\omega^4 + \varepsilon^2} \\ y_Q &= y_0 + \frac{\omega^2 w_{oy} + \varepsilon w_{ox}}{\omega^4 + \varepsilon^2} \end{aligned} \right\} (8)$$

§ 46. План ускорений.

Аналитическое изучение вопроса о распределении ускорений в плоской фигуре дает в приложениях к конкретным задачам наглядные результаты лишь в очень редких и самых простых случаях. Во многих случаях даже сравнительно простых механизмов вычисления становятся очень громоздкими, а результаты, весьма сложными, так что практически не представляется возможным их использовать. Поэтому является чрезвычайно важным дать графические методы изучения распределения ускорений. Это мы сейчас и сделаем на ряде примеров.

1. Кривошипный механизм. Будем предполагать, что кривошип OA вращается равномерно с заданной угловой скоростью и займемся графическим построением ускорения ползуна B . При этом считается, что план скоростей механизма построен, т. е. все данные о скоростях его точек мы имеем (рис. 197).

Исходим из основного ур-ния (8) § 44:

$$w_B = w_A + w_{AB}^{(u)} + w_{AB}^{(s)}.$$

Величина и направление вектора w_A нам известны ($w_A = -\overrightarrow{OA} \omega^2$); известны также направление вектора $w_{AB}^{(u)}$ (от B к A) и его величина

$$w_{AB}^{(u)} = \omega_1^2 \overline{AB} = \frac{(\overline{ab})^2}{\overline{AB}},$$

ибо

$$\overline{ab} = v_{AB} = \omega_1 \cdot \overline{AB},$$

где ω_1 — угловая скорость шатуна; наконец известно, что ускорения w_B и $w_{AB}^{(s)}$ направлены — первое вдоль линейки, второе — перпендикулярно AB . Остается определить их величины.

Отложим для этого из точки O_1 так называемого полюса вектор $\overrightarrow{O_1 a_1} = w_A$ и проведем через полюс прямую, параллельную w_B . Далее из конца a_1 вектора $\overrightarrow{O_1 a_1}$ откладываем второе известное нам слагае-

мое $w_{AB}^{(u)} = a_1 h$. Остается в точке n провести прямую, перпендикулярную шатуну, т. е. параллельную третьему слагаемому $w_{AB}^{(s)}$. Точка пересечения этой прямой с ранее проведенной параллельно вектору w_B и дает искомый конец b_1 вектора $\overrightarrow{O_1 b_1} = w_B$. Действительно, по построению (рис. 197) имеем:

$$\overrightarrow{O_1 b_1} = \overrightarrow{O_1 a_1} + \overrightarrow{a_1 n} + \overrightarrow{n b_1}, \quad (2)$$

причем $\overrightarrow{O_1 a_1} = w_A$, $\overrightarrow{a_1 n} = w_{AB}^{(u)}$; $\overrightarrow{O_1 b_1}$, $\overrightarrow{n b_1}$ параллельны соответственно линейке и перпендикуляру к шатуну. Вычитая из формулы (1) формулу (2), получим:

$$(w_B - \overrightarrow{O_1 b_1}) = (w_{AB}^{(s)} - \overrightarrow{n b_1}).$$

Векторы, стоящие в левой и правой части, имеют заведомо различные направления, и знак равенства между этими частями возможен лишь в том случае, когда каждая из них равна нулю. Это значит, что

$$\overrightarrow{O b_1} = w_B, \quad \overrightarrow{n b_1} = w_{AB}^{(s)},$$

что и требовалось доказать.

На нашем чертеже мы получаем также угол α и вектор w_{AB} :

$$w_{AB} = \overrightarrow{a_1 n} + \overrightarrow{n b_1} = \overrightarrow{a_1 b_1}.$$

Вспоминая еще, что:

$$w_{AB} = \overrightarrow{a_1 b_1} = \overline{AB} \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4},$$

найдем также:

$$\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = \frac{\overline{a_1 b_1}}{\overline{AB}}. \quad (3)$$

Пусть теперь требуется найти ускорение какой-либо точки C шатуна. Для этого строим на отрезке $\overline{a_1 b_1}$ точку c_1 , делящую его в том же отношении, в каком C делит AB :

$$\frac{\overline{a_1 c_1}}{\overline{a_1 b_1}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}.$$

Соединив теперь полюс O_1 с точкой c_1 , получим вектор $\overrightarrow{O_1 c_1} = w_C$. Действительно, мы имеем:

$$\overrightarrow{O_1 c_1} = \overrightarrow{O_1 a_1} + \overrightarrow{a_1 c_1};$$

вектор $\overrightarrow{a_1 c_1}$, будучи повернут относительно шатуна на угол $\pi - \alpha$,

имеет направление w_{AC} ; вместе с тем он имеет и ту же величину, что вектор w_{AC} . В самом деле:

$$\overrightarrow{a_1 c_1} = \frac{\overrightarrow{a_1 b_1}}{\overrightarrow{AB}} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} \overrightarrow{AC} = w_{AC}.$$

Итак,

$$\overrightarrow{a_1 c_1} = w_{AC}$$

и мы получаем;

$$\overrightarrow{O_1 c_1} = \overrightarrow{O_1 a_1} + \overrightarrow{a_1 c_1} = w_A + w_{AC} = w_C.$$

Построим теперь ускорение жестко присоединенной к шатуну точки D . Имеем:

$$w_D = w_A + w_{AD}^{(u)} + w_{AD}^{(s)}, \quad (4)$$

причем вектор $w_{AD}^{(u)}$ известен по направлению (от D к A) и по величине

$$w_{AD} = \omega^2 \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{(\overrightarrow{ad})^2}{\overrightarrow{AD}}.$$

Отложим от точки a_1 вектор

$$\overrightarrow{a_1 l} = w_{AD}^{(u)}$$

и проведем из его конца l перпендикуляр к $\overrightarrow{AD}$ (или к $\overrightarrow{a_1 l}$); на этом перпендикуляре должна лежать точка d_1 , соединив которую с полюсом O_1 , получим $\overrightarrow{O_1 d_1} = w_D$. Это следует из (4), которое как раз и выражает, что конец вектора w_D лежит на перпендикуляре к $\overrightarrow{AD}$, проведенном через конец вектора $(w_A + w_{AD}^{(u)})$.

Примем теперь за основную точку B . Имеем:

$$w_D = w_B + w_{BD}^{(u)} + w_{BD}^{(s)};$$

откуда следует, что искомая точка d_1 лежит также на перпендикуляре, опущенном на $\overrightarrow{BD}$ из конца m вектора $(w_D + w_{BD}^{(u)})$. Пересечение с ранее построенным перпендикуляром определит конец вектора $w_D = \overrightarrow{O_1 d_1}$.

Полученное построение называется планом ускорений. Заметим, что концы векторов, изображающих ускорения точек механизма, обозначались соответствующей малой буквой (со знаком внизу, в отличие от плана скоростей); например $w_A = \overrightarrow{O_1 a_1}$, $w_B = \overrightarrow{O_1 b_1}$ и т. д. По свойству ускорения вектора $\overrightarrow{a_1 b_1}$, $\overrightarrow{a_1 d_1}$ и т. д. повернуты на угол π — относительно соответствующих отрезков $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и т. д. Отсюда получается простое правило для проверки построения плана ускорений: отрезки, обозначенные на плане скоростей

Отметим, что определение величин

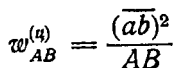


Рис. 198.

$$\frac{\overline{KS}}{\overline{KN}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{KM}}, \text{ т. е. } \overline{KS} = \frac{(\overline{ab})^2}{\overline{AB}} = w_{AB}^{(u)}.$$

The diagram shows a mechanism with a slider block and a rotating arm. A horizontal slider block is in contact with a vertical guide. A vertical arm is pivoted at the bottom and has a horizontal arm attached to its top. The horizontal arm is in contact with the slider block. The vertical arm has a length l and is at an angle θ to the vertical. The slider block has a horizontal displacement x and a vertical displacement y . The vertical arm has an angular velocity ω_1 and the slider block has a horizontal velocity v_A .

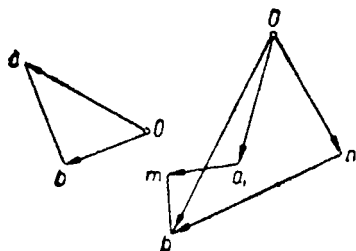


Рис. 199.

Мы имеем:

$$W_B = W_A + W_{AB}^{(4)} + W_{AB}^{(8)}.$$

$$\mathbf{W}_B = \mathbf{W}_{B1} + \mathbf{W}_{B2}, \quad \mathbf{W}_{B2} = -\omega_2^2 \overrightarrow{DB}, \quad \omega_{B2} = \frac{v_B^2}{DB} = \frac{(\overline{Ob})^2}{DB}.$$

Проводим из полюса O_1 плана ускорений вектора

$$\overrightarrow{O_1 a_1} = w_A, \quad \overrightarrow{O_1 n} = w_{B2}.$$

226

$\vec{w}_{AB}^{(u)} = a_1 m$ и проводим перпендикуляр к нему mb_1 (параллельный третьему слагаемому $\vec{w}_{AB}^{(s)}$). Точка b_1 пересечения этого перпендикуляра и ранее проведенной через n прямой и будет искомой: $\vec{O_1 b_1} = \vec{w}_B$.

Предлагаем учащимся построить ускорение точки C шатуна и жестко соединенной с ним точки E . Дело сводится к буквальному повторению построений примера 1.

3. Механизм насоса Holst'a. План скоростей этого механизма построен на стр. 191. Приводим построение плана ускорений (рис. 200), в котором учащийся должен разобраться самостоятельно на основании первых двух примеров. Предполагается, что кривошип OA вращается равномерно.

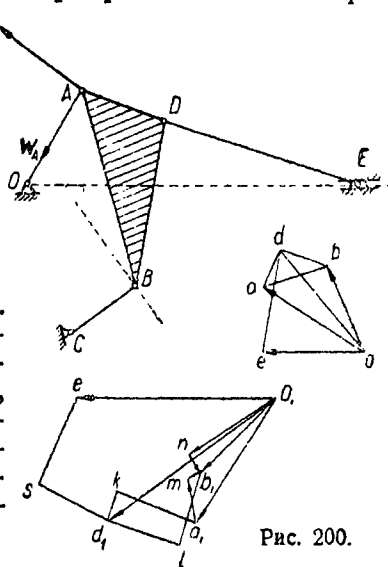


Рис. 200.

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. Определить ускорение точки обода колеса в примере 1 § 36. Найти мгновенные центры скоростей и ускорений колеса.
2. Совершающий плоское движение стержень AB проходит через вращающийся вокруг неподвижной точки O ползунок. Если принять какую-либо точку, например A , этого отрезка за основную, то вращательное ускорение точки стержня AB , проходящей в рассматриваемый момент через ползунок, направлено по нормали к траектории этой точки, а центростремительное по касательной. Почему? (рис. 201).

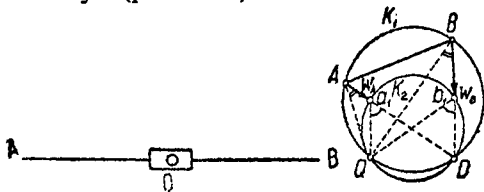


Рис. 201.

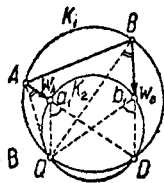


Рис. 202.

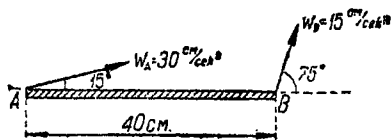


Рис. 203.

3. Построить план ускорений механизма конвейера (пример 6, стр. 193), предполагая, что кривошип OA вращается равномерно.
4. Построить план ускорений механизма, осуществляющего передачи движения от машины к насосу (пример 7, стр. 193). Предполагается, что кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью.
5. Заданы ускорения w_A и w_B двух точек A и B движущейся плоской фигуры. Найдем точку пересечения D векторов w_A и w_B и проведем через A , B и D окружность (K_1) . Далее строим вторую

окружность (K_2), проходящую через D , и концы a_1 и b_1 векторов w_A и w_B (рис. 202).

Доказать, что вторая точка пересечения Q окружностей (K_1) и (K_2) есть мгновенный центр ускорений.

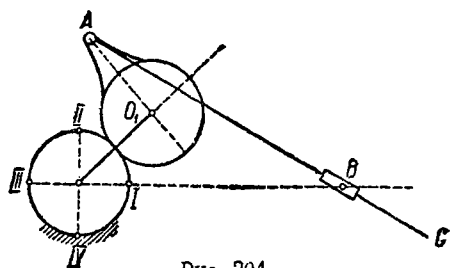


Рис. 204.

Указание. Рассмотреть треугольники QAa_1 и QBb_1 .

6. Построить (графически) мгновенный центр ускорений шатуна кривошипного механизма. Кривошип вращается с постоянной угловой скоростью.

Указание. Определив ускорение ползуна, применить построение, указанное в тексте.

7. Величина и направление ускорений концов A и B стержня $\overline{AB}$, совершающего плоское движение, показаны на рис. 203. Найти положение мгновенного центра ускорений и вычислить ускорение середины стержня C , а также угловую скорость его и угловое ускорение в рассматриваемом положении.

Контрольная работа ко второй теме.

Построить план скоростей изображенного на рис. 204 и 205 сложного планетного механизма, задавшись скоростью точки O ; проследить за движениями точки A и построить мгновенный центр рычага AC в указанных на рис. 204 положениях рукоятки I, II, III, IV .

Добавление ко второй теме.

В предыдущих заданиях мы подробно изучили основные и наиболее важные с точки зрения приложений случаи движения твердого тела. Дадим теперь в краткой форме в добавление к этому необходимые для понимания некоторых вопросов остающейся части курса сведения о движении твердого тела в самом общем случае. Задача, которую мы себе ставим, состоит в обобщении на этот случай формул распределения скоростей и ускорений, доказанных для плоского движения.

Предварительно необходимо разобрать вопрос о вращении твердого тела, имеющего неподвижную точку, так как движение в общем случае, как будет показано ниже, может быть представлено сложением из поступательного движения тела и вращения его вокруг некоторого центра.

§ 1. Теорема о перемещении твердого тела, имеющего неподвижную точку.

Вопрос о вращении твердого тела около неподвижной точки может быть легко сведен к вопросу о перемещении сферической фигуры на сфере.

В самом деле, проведем из неподвижной точки O как центра ряд концентрических сфер возрастающих радиусов. Тогда наше твердое тело может быть рассматриваемо как состоящее из отдельных друг

на друга наложенных и твердо скрепленных сферических фигур, полученных в сечении твердого тела указанными сферами.

Перемещение твердого тела вполне определится указанием перемещения какой-нибудь сферической фигуры по своей сфере. Все

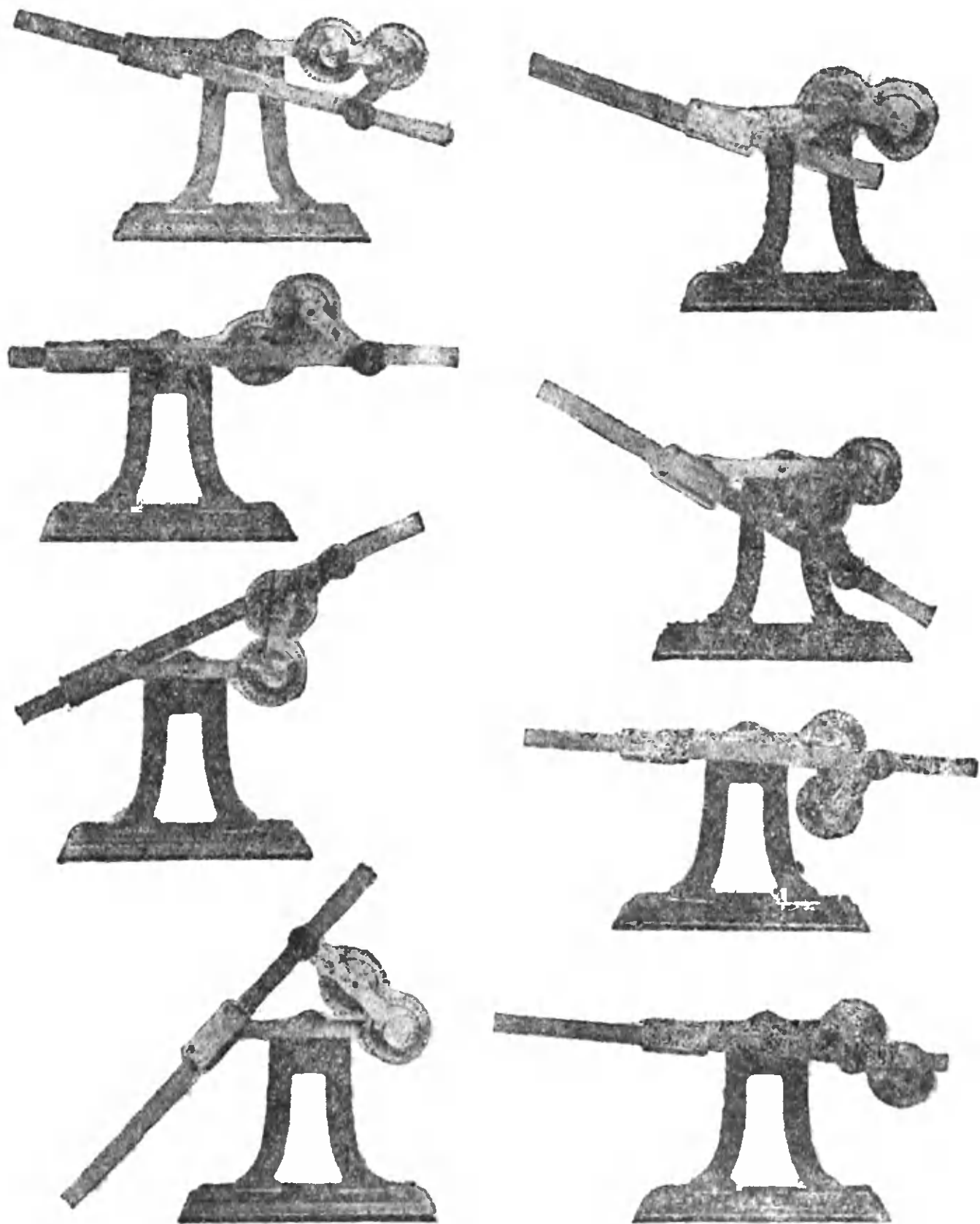


Рис. 205. Сложный планетный механизм.
(Модель кабинета Механики Ленинградского физико-механического института).

точки, лежащие на одном и том же радиусе сферы, будут иметь параллельные, но не равные друг другу перемещения.

Подобно тому как на плоскости положение плоской фигуры определяется двумя точками ее, так и на сфере положение сфери-

ческой фигуры задается двумя точками этой фигуры или дугой большого круга, их соединяющей.

Теорема Шаля, доказанная для плоской фигуры (стр. 178), легко обобщается на случай сферы; иными словами, всякое перемещение твердого тела, имеющего неподвижную точку, может быть осуществлено одним поворотом около некоторой оси, проходящей через эту точку.

Пусть первоначальное положение сферической фигуры будет AB , а окончательное $A'B'$. Отметим сферические перемещения точек A и B , т. е. проведем дуги больших кругов $\widehat{AA'}$, $\widehat{BB'}$ (рис. 206). Через середины этих дуг проведем перпендикулярные к ним дуги большего круга. Эти дуги обязательно пересекутся в некоторой точке J сферы, как всякие две дуги большего круга.

Перемещение сферической фигуры из первоначального положения в окончательное может быть произведено одним поворотом

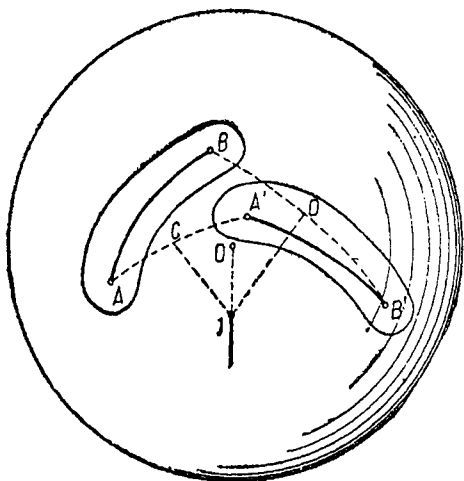


Рис. 206.

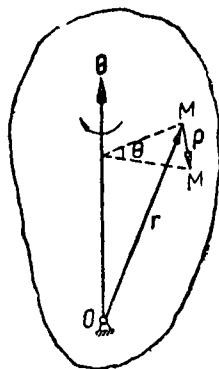


Рис. 207.

около центра J на $\angle AJA' = \angle BJB'$. Это доказывается путем тех же рассуждений, что и в плоском случае; нужно только заменить повсюду слова „отрезок“, „треугольник“ и т. д. словами „дуга большого круга“, „сферический треугольник“ и т. д.

Переходя от сферической фигуры обратно к перемещающемуся вокруг неподвижной точки твердому телу, видим, что все точки концентрических сфер, лежащие на одном и том же радиусе OJ , будут служить центрами вращения соответствующих сферических фигур, так что *линия OJ будет служить осью вращения твердого тела* при переходе из одного положения в другое, что и доказывает теорему Шаля для случая перемещения тела, имеющего неподвижную точку.

Рассмотрим теперь два близких друг другу положения твердого тела, имеющего неподвижную точку. Так как переход из первого положения во второе можно осуществить одним поворотом на малый угол θ вокруг некоторой оси, то рассматриваемое переме-

шение может быть, как и в случае плоского движения, вполне охарактеризовано *вектором поворота* θ ; величина этого вектора равна углу поворота θ , а направление откладывается по оси, которая может быть определена построением Шаля, в такую сторону, что, смотря с конца θ , мы увидим поворот тела происходящим в положительном направлении.

Если ввести в рассмотрение вектор поворота θ , то бесконечно-малое перемещение $\vec{p} = \overrightarrow{MM'}$ (рис. 207) какой-либо точки может быть представлено в виде векторного произведения

$$\vec{p} = [\theta, \vec{r}], \quad (1)$$

где вектор-радиус $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Это доказывается совершенно так же, как в случае плоского движения. Существенное отличие рассматриваемого случая от плоского состоит в том, что теперь вектор θ не имеет постоянного направления, а перемещается как в движущемся теле, совпадая с его различными точками, так и для наблюдателя, следящего за движением тела.

§ 2. Скорости и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

Вспомним определение скорости:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\theta}{\Delta t}, \vec{r} \right]. \quad (1)$$

Предел отношения вектора поворота θ к промежутку времени Δt , в течение которого поворот происходит, называется *вектором угловой скорости вращения тела*:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta}{\Delta t}. \quad (2)$$

Вектор ω имеет, таким образом, направление, определяемое предельным положением вектора θ при $\Delta t = 0$. По аналогии с мгновенным центром, также являющимся предельным положением центра поворота, получаемого на основании построения Шаля, прямую, по которой в данный момент располагается вектор ω , называют *мгновенной осью вращения*. Точки тела, попавшие в некоторый момент на мгновенную ось, имеют в этот момент скорость, равную нулю. В другой момент на эту ось попадут другие точки тела, т. е. мгновенная ось меняет свое положение в движущемся теле, а также для наблюдателя, следящего за его движением.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим движение конуса, катящегося без скольжения по плоскости (рис. 208). Неподвижной точкой здесь является вершина O (рис. 209) конуса. Точки образующей OA имеют скорость, равную нулю, ибо в этих точках происходит соприкосновение конуса с неподвижной плоскостью, а сколь-



Рис. 208. Модель катящегося по плоскости конуса. (Кабинет Механики Ленинградского физико-механического ин-та).

жение по условию отсутствует. Образующая $\overline{OA}$ и является мгновенной осью. В другой момент времени мгновенной осью станет

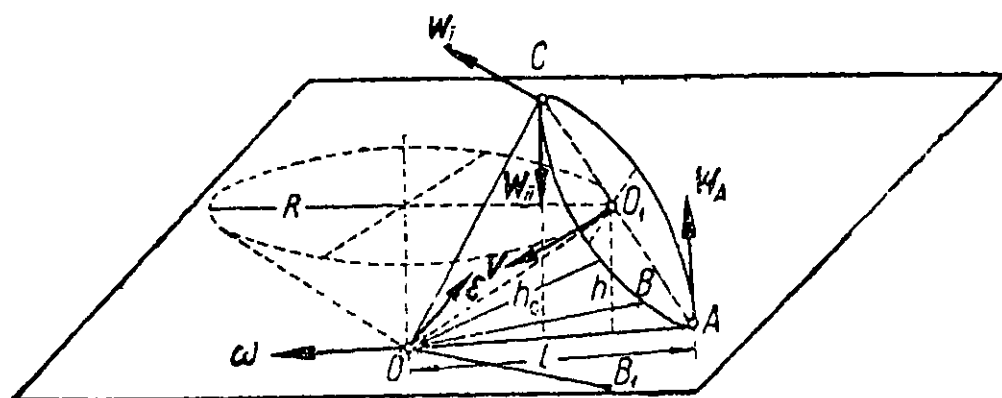


Рис. 209.

другая образующая конуса, например $\overline{OB}$, которая займет при этом новое положение OB_1 на неподвижной плоскости.

Возвращаясь к формуле (1), получим теперь

$$\mathbf{v} = [\omega, \mathbf{r}], \quad (3)$$

т. е.

распределение скоростей в теле, совершающем движение вокруг неподвижной точки в каждый данный момент таково, как если бы тело вращалось вокруг неподвижной в этот момент оси.

Величина скорости v равна

$$v = \omega \cdot r \cdot \sin(\omega, \mathbf{r}) = h \cdot \omega, \quad (4)$$

где h — расстояние рассматриваемой точки от оси вращения (рис. 210).

Переходя к вопросу о распределении ускорений, вспомним, что:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} [\omega, \mathbf{r}] = \left[\frac{d\omega}{dt}, \mathbf{r} \right] + \left[\omega, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right]. \quad (5)$$

По аналогии с случаем плоского движения, назовем производную вектора угловой скорости по времени вектором углового ускорения

$$\mathbf{s} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (6)$$

Следует отметить, что в противоположность плоскому случаю $\mathbf{s}$ не направлено по мгновенной оси, ибо ω не имеет постоянного направления. Точно так же величина вектора $\mathbf{s}$, т. е. $\mathbf{s}$ не равна $\left| \frac{d\omega}{dt} \right|$, ибо, как мы уже неоднократно повторяли, величина производной вектора не равна абсолютному значению производной его величины (стр. 86).

Первое слагаемое в формуле (5)

$$\mathbf{w}_1 = [\mathbf{s}, \mathbf{r}] \quad (7)$$

называется *вращательным ускорением*. По величине оно равно

$$w_1 = s \cdot r \cdot \sin(\mathbf{s}, \mathbf{r}) = h_1 \cdot s. \quad (8)$$

Направление w_I определяется направлением векторного произведения, согласно известному правилу.

Переходя ко второму слагаемому, заметим, что производная по времени вектор-радиуса r , т. е. $\frac{dr}{dt}$, есть не что иное, как вектор скорости v . Итак

$$w_{II} = \left[\omega, \frac{dr}{dt} \right] = [\omega, v]; \quad (9)$$

w_{II} называется *центростремительным ускорением*. Его величина будет:

$$w_{II} = \omega \cdot v \sin(\omega, v).$$

Замечая, что ω и v взаимно перпендикулярны (см. формулу (3)) и пользуясь формулой (4), найдем:

$$w_{II} = \omega^2 h. \quad (10)$$

Определяя направление векторного произведения, найдем, что центростремительное ускорение w_{II} всегда направлено по перпендикуляру MS , опущенному из рассматриваемой точки M на мгновенную ось от M к S .

Итак, ускорение любой точки твердого тела, совершающего движение вокруг неподвижной точки, является геометрической суммой вращательного ускорения w_I и центростремительного w_{II} .

$$w = [\epsilon, r] + [\omega, v] = w_I + w_{II}.$$

В качестве примера вернемся к рассмотренному уже выше движению конуса (рис. 210). Пусть длина образующей $l = 20$ см, угол при вершине 60° ; центр O_1 основания конуса описывает окружность в течение 1 сек. Определим векторы ω и ϵ .

Мы уже говорили, что мгновенную ось является образующая $\overline{OA}$. Следовательно вектор ω должен быть направлен по этой образующей. Предполагая, что точка O_1 движется по своей окружности K в указанном стрелкой направлении, получим показанное на рис. 209 направление ω . Скорость точки O_1 получим, рассматривая ее движение по окружности K :

$$v = R \cdot 2\pi \text{ см/сек} = 30\pi \text{ см/сек},$$

ибо $R = \overline{OO_1} \cos 30^\circ = \overline{OA} \cdot \cos^2 30^\circ = 20 \cdot \frac{3}{4} = 15$ см. С другой стороны, применяя (4), имеем:

$$v = \omega \cdot h = \omega \cdot \overline{OO_1} \cos 60^\circ = 5\sqrt{3} \omega \text{ см/сек},$$

следовательно:

$$\omega = \frac{v}{5\sqrt{3}} = \frac{30\pi}{5\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\pi \frac{1}{\text{сек}}.$$

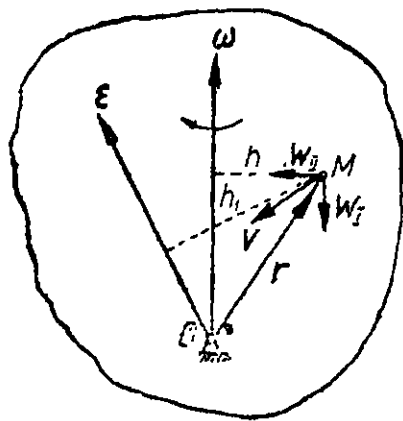


Рис. 210.

Заметим далее, что на основании формулы (6) можно тракто-

вать ε как скорость конца вектора ω . Но последний делает по условию 1 оборот в секунду и величина скорости его конца будет

$$\varepsilon = 2\pi \cdot \omega = 4\sqrt{3} \pi^2 \frac{1}{\text{сек}^2}$$

по направлению ε перпендикулярно ω (ибо производная вектора постоянной длины перпендикулярна этому вектору) и лежит в плоскости, по которой происходит качение.

Найдем, например, ускорение точки A . Так как эта точка лежит на мгновенной оси, то центростремительное ускорение ее равно нулю. Что касается вращательного ускорения, то получим:

$$\omega_I = \omega_A = \overline{OA} \cdot \varepsilon = 80\sqrt{3} \pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Направление ω_A указано на рис. 209.

Найдем еще скорость и ускорение точки C . Получим:

$$v_c = h_c \omega = 60\pi.$$

Для центростремительного ускорения получим:

$$\omega_{II} = h_c \omega^2 = 120\sqrt{3} \pi^2 \text{ см/сек}^2.$$

Направление ω_{II} указано на рис. 209. Далее найдем:

$$\omega_I = \overline{OC} \varepsilon = 80\sqrt{3} \pi^2 \text{ см/сек}^2;$$

ω_I направлено перпендикулярно $\overline{OC}$ в указанную на рис. 209 сторону.

Полное ускорение найдется как диагональ параллелограмма, построенного на ω_I и ω_{II} . Его величина будет

$$\omega = \sqrt{\omega_I^2 + \omega_{II}^2 - 2\omega_I \cdot \omega_{II} \cos 60^\circ} = 40\pi^2 \sqrt{21} \text{ см/сек}^2.$$

§ 3. Перемещение твердого тела в общем случае.

Пусть твердое тело, занимая ранее положение I , переместилось в положение II . Мы можем разбить это перемещение на два следующих частных перемещения:

1) Тело переместилось поступательно в положение I , причем все его точки получили одинаковые перемещения, равные перемещению $p_0 = \overrightarrow{O_1 O'_1}$ какой-либо точки O_1 , принимаемой за основную.

2) Имея точку O_1 неподвижной, тело переместилось из положения I в окончательное положение II . На основании доказанной в § 1 теоремы Шала для этот переход можно осуществить путем одного поворота вокруг некоторой оси $O'_1 M$, проходящей через O_1 .

Докажем теперь, что ни направление этой оси, ни величина угла поворота не зависят от выбора основной точки.

В самом деле, рассмотрим некоторую плоскость Π , связанную с движущимся телом и перпендикулярную оси $O'_1 M$. Поступательное перемещение $p_0 = \overrightarrow{O_1 O'_1}$ не изменяет направления этой плоскости; таким образом и поворот вокруг оси $O'_1 M$, по условию перпендикулярной Π , не изменяет ее направления. Переведем теперь обратно

тело из положения II в исходное положение I , принимая за основную некоторую точку O_2 . Поступательное перемещение $\vec{O_2'O_2}$ вместе с этой новой основной точкой опять-таки направления Π не изменяет. Остается еще сделать поворот вокруг оси O_2N , проходящей через O_2 . Направление Π останется при этом неизменным только в том случае, если ось O_2N параллельна O_1M .

Возьмем теперь некоторую прямую L , лежащую в плоскости Π . Поступательное перемещение $\vec{O_1'O_1}$ не изменяет ее направления, поворот же вокруг $O_1'M$ переводит ее в новое положение L' , лежащее в той же плоскости. Обратное поступательное перемещение $\vec{O_2'O_2}$ не влияет на направление L' , так что последующий поворот вокруг O_2N , приводящий ее в исходное положение L , должен совершаться на тот же угол, на который повернулась раньше прямая L вокруг $O_1'M$.

Будем считать теперь положение II весьма близким к положению I . В таком случае, характеризуя вращение вектором поворота θ , мы можем представить перемещение p_2 какой-либо точки M тела при этом повороте в виде векторного произведения:

$$p_1 = [\theta, r'],$$

где $r' = \vec{O_1'M}$ — вектор-радиус, характеризующий положение точки M и имеющий начало в основной точке. Полное перемещение p точки M за весь процесс перехода из положения I в II складывается из поступательного перемещения p_0 и из p_1 :

$$p = p_0 + p_1 = p_0 + [\omega, r'].$$

Пользуясь этой формулой, мы без труда получим теперь закон распределения скоростей и ускорений в твердом теле в общем случае его движения.

§ 4. Распределение скоростей и ускорений в общем случае движения твердого тела.

Мы имеем:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\theta_1}{\Delta t}, r' \right],$$

но

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_0}{\Delta t} = v_0$$

есть скорость основной точки. Далее, согласно § 2, имеем:

$$\lim_{\Delta t} \frac{\theta}{\Delta t} = \omega,$$

где ω — вектор угловой скорости. Направление его определяется предельным положением вектора поворота θ , причем по доказанному выше ни это направление, ни величина вектора ω не зависят от выбора основной точки.

Итак

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']$$

(1)

т. е.

скорость любой точки твердого тела равна геометрической сумме скорости основной точки $\mathbf{v}_0$ и вращательной скорости $\mathbf{v}^* = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']$ вокруг некоторой мгновенной оси, проходящей через основную точку.

Характеризуя положение точки M относительно некоторой неподвижной точки O вектор-радиусом $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$, а положение основной точки O_1 вектор-радиусом $\overrightarrow{OO_1} = \mathbf{r}_0$, будем иметь:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}'. \quad (2)$$

Дифференцируя это равенство по времени, получим:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt},$$

но по определению скорости:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \mathbf{v}_0,$$

и следовательно

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'] = \mathbf{v}^*. \quad (3)$$

Этим результатом, знакомым нам уже из плоского движения, мы сейчас воспользуемся.

Переходим к вопросу о распределении ускорений. Имеем:

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d}{dt} [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}'] = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \mathbf{r}' \right] + \left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right].$$

Первое слагаемое

$$\frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{w}_0$$

есть ускорение основной точки.

Второе слагаемое

$$\mathbf{w}_1 = \left[\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}, \mathbf{r}' \right] = [\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{r}']$$

есть вращательное ускорение. Его величина и направление были выяснены в § 2.

Наконец третье слагаемое

$$\mathbf{w}_2 = \left[\boldsymbol{\omega}, \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right] = [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}^*]$$

есть центростремительное ускорение. Здесь также ничего не нужно прибавлять к сказанному в § 2.

Все вышесказанное резюмируется теоремой Ривальса: ускорение в каждой точке твердого тела состоит из трех составляющих: поступательного, вращательного и центростремительного ускорения:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + [\mathbf{\epsilon}, \mathbf{r}'] + [\mathbf{\omega}, \mathbf{v}^*] .$$

Поступательное ускорение для всех точек твердого тела одинаково и совпадает с ускорением основной точки; вращательное ускорение перпендикулярно плоскости, проведенной через эту точку и вектор углового ускорения, по величине равно произведению величины углового ускорения на кратчайшее расстояние точки до оси вектора углового ускорения и направлено в сторону положительного вращения для наблюдателя, смотрящего с конца этого вектора; центростремительное ускорение направлено от точки по перпендикуляру к мгновенной оси вращения и по величине равно произведению квадрата угловой скорости на кратчайшее расстояние от точки до мгновенной оси вращения.

Тема третья.

Относительные движения.

Наиболее основные понятия и методы кинематики точки и твердого тела изложены нами в первых двух темах. Нам остается в заключительной теме дополнить изложение кинематики еще одним специальным вопросом, общим и для кинематики точки и для кинематики твердого тела — вопросом о способах изучения так называемых относительных ¹⁾ движений.

Общая постановка задачи об относительном движении такова: происходящее в пространстве движение точки, твердого тела или системы их, регистрируется по способам, изложенным в предыдущих темах, наблюдателями, связанными с двумя различными координатными системами, причем эти системы двигаются известным образом друг по отношению к другу. Каждый наблюдатель определяет кинематические элементы движения: траекторию, скорость и ускорение по отношению к *своей* системе координат.

Ставится задача: *зная движение одной системы по отношению к другой, найти связь между кинематическими элементами движения точки по отношению к каждой системе в отдельности.*

На первый взгляд может показаться, что такая задача является несколько абстрактной и не представляет интереса в технических вопросах. Известно, что в астрономии или геофизике нам приходится часто рассматривать движение небесных тел, то по отношению к земле, то к солнцу (в геофизике такая перемена осей объясняет ряд интереснейших явлений на земле, об этом будет еще речь впереди), но в технике, где все движения естественно, казалось бы, рассматривать по отношению к той только системе, с которой связаны фундаменты всех машин, — земле, применение координатных систем, двигающихся друг по отношению к другу, требует разъяснений, — мы сейчас вкратце их дадим.

Рассматривая одно и то же движение с точки зрения различных координатных систем, мы заметим, что в одной системе (*A*) оно представляется сложным, в другой (*B*) более простым. Если движение системы (*B*) по отношению к системе (*A*) не сложно, то можно сказать, что сложное по отношению к системе (*A*) движение распадается на два более простых: одно по отношению к (*B*) и другое движение самой системы (*B*) по отношению к (*A*). Тогда по методу относительного движения мы сначала определяем кинематические

¹⁾ Иногда разбираемую в настоящей теме проблему называют изучением составного движения; причины этого будут вскоре выяснены.

элементы этих простых движений, а затем уже по общим формулам теории относительного движения переходим и к элементам сложного или, как говорят, *составного* движения. В этой *возможности разлагать сложное движение на простые* и заключается все значение метода относительного движения для прикладных задач. Поясним сказанное хотя бы одним примером. Мы уже знаем, что шатун кривошипного механизма совершает сложное движение по отношению к фундаменту машины. Но если мы рассмотрим его движение по отношению к ползуну, то заметим, что это будет простое вращение вокруг крейцкопфа; в свою очередь движение самого ползуна тоже очень просто — это поступательное движение. Таким образом сложное движение шатуна можно рассматривать как составное из двух простых: вращения вокруг крейцкопфа и поступательного движения самого крейцкопфа. Элементы этих движений разыскиваются без труда, а по ним уже определяются и элементы составного движения шатуна по отношению к фундаменту машины.

Следует отметить, что иногда мы применяем относительное движение не для упрощения движения, а наоборот, для усложнения рассматриваемого движения, если, конечно, такое усложнение полезно. Так например, желая записать колебание стрелки какого-нибудь измерительного прибора, мы заставляем штифт (карандаш), прикрепленный к стрелке, писать на равномерно вращающемся барабане. Это значит, что мы простое, например, прямолинейное колебательное движение штифта по отношению к основанию прибора заменяем сложным синусоидальным движением по ленте барабана и по этому сложному судим о простом. Выгодно, очевидно, здесь то, что заставив карандаш двигаться по синусоиде на барабане, мы получаем сразу *график* движения, так как каждое положение штифта оказывается отнесенным к определенному моменту времени.

Укажем вскользь, что применение метода относительного движения сыграло большую историческую роль в развитии наших представлений о мироздании. Птоломей, описывавший движение небесных светил в системе координат, связанной с землей (*геоцентрическая* система), получил очень сложную картину небесной механики. Планеты, по его представлениям, имели сложные вращательные движения около некоторых центров, которые сами в свою очередь вращаются около земли (*система эпициклов*). Такое сложное движение осталось бы наверное надолго необъяснимым, если бы не смелая мысль Коперника — отнести движение планет к солнцу (*гелиоцентрическая* система). В системе координат, связанной с солнцем, небесные движения сразу упростились — планеты представились вращающимися по софокусным эллипсам, в общем фокусе которых находится солнце (закон Кеплера). Только после этого стало возможным появление закона Ньютона о всемирном тяготении, объяснившего движение планет общим притяжением их к солнцу.

Относительное движение приобретает еще особую ценность при изучении различных явлений в подвижных системах, например поведение маятника в поезде или на аэроплане, движение частиц воды или пара в каналах ротора турбины и многие другие. В первом

задании (14-м) мы изложим основную для всей теории относительного движения лемму о связи между изменениями вектора в двух системах координат, взаимное движение которых задано, а затем применим эту лемму к определению зависимости между *скоростями* точки по отношению к двум подвижным системам.

Во втором задании (15-м) мы остановимся на специальной, очень важной для Прикладной кинематики проблеме *сложения вращений* (угловых скоростей) около двух параллельных и пересекающихся осей. Как приложение этой теории мы дадим способ Виллиса расчета систем цилиндрических и конических колес с подвижными осями.

Наконец в третьем задании (16-м) мы рассмотрим применение вышеуказанной леммы к вопросу о связи между *ускорениями* точки по отношению к двум различным подвижным координатным системам. Этим вопросом мы закончим наш курс Кинематики.

Мы обращаем внимание учащегося на одну особенность в нашем изложении теории относительного движения. Во многих руководствах задача об относительном движении ставится как задача об определении связи между движениями по отношению к неподвижной абсолютной системе координат и подвижной (относительной) системе. При такой постановке вопроса одна система как-то особенно выделяется, принимается за неподвижную, а другая движется по отношению к ней. Такая постановка вопроса принципиально недопустима, так как данная система координат, будучи неподвижной по отношению к одной системе координат, движется по отношению к другой, и ни про одну систему нельзя сказать, что она неподвижна (такую воображаемую систему раньше называли *абсолютной* системой); такое утверждение было бы бессодержательным. Вот почему мы, отказавшись от установленной терминологии, в дальнейшем будем избегать называть какую бы то ни было систему абсолютной.

Всякое движение рассматривается как относительное движение в выбранной системе координат.

В заключение заметим, что излагаемая в настоящей теме задача об относительном движении не имеет ничего общего с теорией относительности Эйнштейна. Последняя теория включает в себя ряд совершенно *свообразных утверждений*, ставящих ее вне рамок классической Механики, и составляет предмет специального отдела курса Теоретической физики.

Методические указания к третьей теме. В последней теме настоящей книги нам приходится широко пользоваться предыдущим материалом. Без достаточно полной проработки первой и второй темы приступать к третьей нельзя; с другой стороны, на упражнениях и примерах этой темы учащийся должен окончательно закрепить усвоенный им ранее материал.

При прохождении этой темы необходимо сосредоточить все внимание на трех главных пунктах: 1) параллелограм скоростей, 2) сложение вращений около параллельных и пересекающихся осей и 3) теорема Кориолиса. Эти три пункта больше всех других могут пригодиться учащемуся при дальнейшем его образовании и в практической работе.

Материал темы несложен. Наиболее трудно для усвоения—понятие переносного движения и его элементов. Прежде чем учащийся на ряде разрешенных контрольных примеров не убедится, что это понятие им усвоено, ему не следует браться за следующее (15-е) и особенно последнее, 16-е задание.

Во втором задании (15-м) учащемуся необходимо выучиться применять метод Виллиса к расчету эпициклических механизмов; здесь особенно трудно определять знак у передаточного числа и у отдельных угловых скоростей колес в относительных их движениях. Правило Виллиса очень хорошо иллюстрирует пользу излагаемой в задании 15-м теории.

В третьем задании (16-м) вводится новое представление о кориолисовом ускорении. В отличие от относительного и переносного ускорения, это ускорение не имеет простого конкретного смысла. Учащийся должен примириться с тем векторным определением, которое мы ему даем, и научиться вычислять кориолисово ускорение одним из двух указанных приемов. При определении ускорения по правилу (теореме) Кориолиса нужно на чертеже с большой осторожностью размечать направление отдельных составляющих ускорения, особенно касательной и нормальной составляющей относительного ускорения и вращательной и центростремительной составляющих переносного ускорения. При этом учащийся очень хорошо повторяет главные моменты первой и второй темы.

Задание 14-е.

Траектории и скорости в относительных движениях.

В настоящем задании мы введем основные понятия и определения учения об относительных движениях. Выяснив их содержание на ряде примеров, мы затем остановимся на вопросе о зависимости между уравнениями движения, траекториями и скоростями точки по отношению к двум разным системам координат, двигающимся друг относительно друга. Последний из этих вопросов в технических задачах сводится к применению правила сложения и разложения скоростей, называемого *правилом параллелограмма или треугольника скоростей*.

Правило параллелограмма скоростей является одним из тех правил Механики, которыми инженеру приходится постоянно пользоваться в повседневных расчетах. Будучи очень элементарно по существу, оно в то же время значительно упрощает многие сложные аналитические и графические расчеты, в особенности построения планов скоростей и ускорений сложных плоских механизмов. Как уже упоминалось в предыдущей теме, в ряде случаев, без применения правила сложения скоростей, планы скоростей, а следовательно и ускорений не могут быть построены. По своему значению для Прикладной кинематики правило параллелограмма скоростей может быть сравнено с правилом параллелограмма (треугольника) сил, играющего столь видную роль в Статике, Графостатике и Сопротивлении материалов. Кстати заметим, что оба эти

правила очень друг на друга похожи, и все приемы сложения и разложения сил, изложенные в статике, целиком переносятся и в Кинематику на сложение и разложение скоростей. Мы увидим во втором задании, что эта аналогия переносится и на угловые скорости.

§ 47. Кинематические элементы относительных движений. Уравнения относительных движений. Относительные траектории.

Предположим, что точка M (рис. 211) движется в пространстве, причем движение ее рассматривается в двух координатных системах: $OXYZ$ и $O'X'Y'Z'$.

Системы эти, в свою очередь, не остаются неподвижными, а движутся определенным образом. Движение точки M по отношению

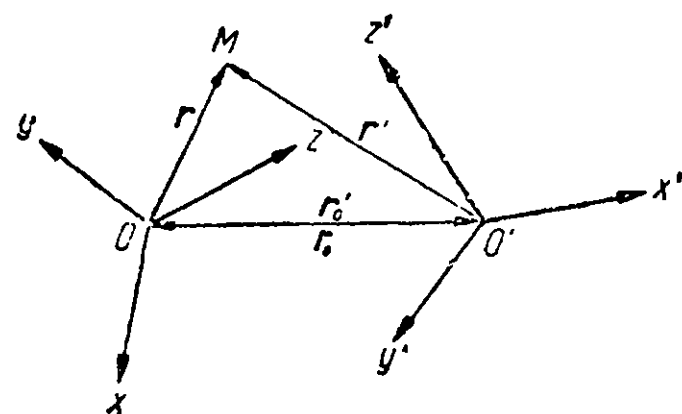


Рис. 211.

к координатной системе зависит, конечно, от движения самой системы, поэтому поскольку системы $OXYZ$ и $O'X'Y'Z'$ движутся различным образом, движение точки M по отношению к разным системам будет также различным. Оба эти движения мы будем называть относительными движениями: одно — относительно системы $OXYZ$, другое — относительно $O'X'Y'Z'$. Обычно, придерживаясь старинной терминологии, одно из этих движений называют *абсолютным*, другое *относительным*, причем оговариваются, что любое движение можно назвать абсолютным, тогда другое будет относительным.

Мы не будем в дальнейшем придерживаться этой терминологии и примем просто разное обозначение для величин, связанных с различными координатными системами.

Условимся все геометрические и кинематические элементы движения точки M по отношению к системе $OXYZ$ обозначать так, как это было принято в предыдущих темах, т. е.: x, y, z ; v, w и др., а по отношению к системе $O'X'Y'Z'$ — теми же символами, только со штрихами, т. е.: x', y', z' ; v', w' и др.

По сравнению с предыдущими темами нам надо ввести одно новое в высшей степени важное понятие, о так называемом *переносном движении* точки.

Переносным движением точки будем называть движение того пункта одной из систем координат, через который в данный момент проходит наша движущаяся точка, причем движение этого пункта рассматривается по отношению ко второй системе координат.

Понятие переносного движения включает в себе значительные трудности для усвоения, поэтому мы посвятим некоторое время для разъяснения его.

Будем отличать движущуюся точку M от той точки принадлежащей системе координат $O'X'Y'Z'$, которую заняла бы точка

M , если бы она остановилась, прекратив свое относительное движение. И та и другая точка обозначены на рисунке одной буквой M , так как рисунок не передает движения, а способен лишь запечатлеть одно из положений движущейся картины, но на самом деле это *две различные точки, двигающиеся друг по отношению к другу*. Если рассматривать движение этих точек по отношению к системе $OXYZ$, то движение точки M , принадлежащей системе $O'X'Y'Z'$, и будет переносным движением точки, на рисунке с нею совпадающей, по отношению к системе $OXYZ$. Точно так же если рассматривать движение по отношению к системе $O'X'Y'Z'$, то переносным движением точки M будет движение того пункта системы $OXYZ$, с которым на рисунке совпадает наша движущаяся точка M .

Рассмотрим ряд примеров.

Если человек идет по движущейся платформе, то можно рассматривать два относительных движения человека: 1) относительно платформы и 2) относительно земли.

Останавливаясь на случае движения относительно земли, скажем, что движение по отношению к земле того места платформы, по которому в данный момент идет человек, и есть переносное движение человека. Здесь человека надо рассматривать схематически, как одну точку, и под „местом платформы“ понимать ту точку платформы, через которую проходит эта точка (человек).

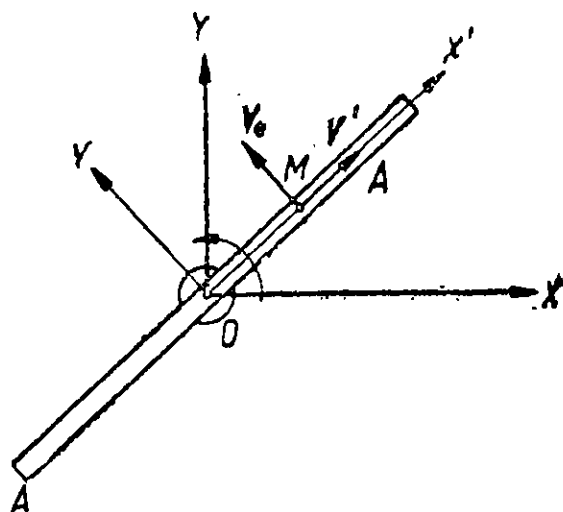


Рис. 212.

Точно так же, если поезд идет через Москву, то движение Москвы вместе с землею по отношению к солнцу будет переносным движением поезда по отношению к солнцу.

Уточним теперь понятие переносного движения на следующем примере. Частица жидкости M движется равномерно по трубке AA' (рис. 212) со скоростью v' , причем трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω . В этом случае скорость относительно трубки определится вектором v' , причем штрихом отмечено то, что это — скорость по отношению к системе $O'X'Y'$, связанной жестко с вращающейся трубкой. *Переносной скоростью будет скорость v_0 той точки внутри трубки, через которую в рассматриваемый момент протекает наша частица M . У этой точки трубки своя скорость, равная по величине*

$$v_0 = \omega \cdot \overline{OM}$$

и направленная по перпендикуляру к радиусу $\overline{OM}$ в сторону вращения трубки. Скорость v_0 ничем не связана со скоростью v' , это скорости двух различных точек: определенного места трубки и частицы жидкости, проходящей по этому месту.

Условимся все кинематические элементы переносного движения

обозначать обычными нашими символами с прибавлением только снизу значка „ e “ — первой буквы французского слова *entraînement* что значит перенос или процесс увлечения; переносная скорость будет следовательно обозначаться — v_e , ускорение w_e и т. д., причем в зависимости от того, по отношению к какой координатной системе рассматривается переносное движение, ставится значок штрих или же он опускается.

Возвращаясь к рис. 211, легко найдем зависимость между вектор-радиусами точки M в разных системах координат. Если обозначить вектор-радиусы точки M : r — в системе $OXYZ$ и r' — в системе $O'X'Y'Z'$, точно так же вектор-радиус точки O' по отношению к системе $OXYZ$ через r_0 без штриха и вектор-радиус точки O в системе $O'X'Y'Z'$ через r'_0 , то из $\triangle OMO'$ сразу следует:

$$\left. \begin{aligned} r &= r_0 + r' \\ r' &= r'_0 + r \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

причем, конечно,

$$r'_0 = -r_0.$$

По этим формулам можно, зная уравнения движения точки в одной системе координат и уравнения движения самой системы по отношению к другой какой-нибудь системе, найти уравнения движения точки по отношению ко второй системе координат.

Мы покажем, как это сделать в случае *плоского движения*, так как общий случай движения в пространстве, не представляя практического интереса и ничем принципиально от плоского случая не отличаясь, отвлек бы наше внимание более сложными формулами.

Итак, пусть точка M движется в плоскости чертежа, причем движение ее рассматривается в двух координатных системах OXY и $O'X'Y'$, перемещающихся друг по отношению к другу (рис. 213).

Взаимное движение координатных систем зададим уравнениями изменения со временем: угла φ между осями OX и $O'X'$ и вектор-функций r_0 или r'_0 , определяющих движение начала O' в системе OXY или начала O в системе $O'X'Y'$. Заметим, что на основании теоремы о разложении векторов по ортам:

$$\left. \begin{aligned} r &= xi + yj; & r_0 &= x_0i + y_0j \\ r' &= x'i' + y'j'; & r'_0 &= x'_0i' + y'_0j' \\ i' &= \cos \varphi \cdot i + \sin \varphi \cdot j \\ j' &= -\sin \varphi \cdot i + \cos \varphi \cdot j \\ i &= \cos \varphi \cdot i' - \sin \varphi \cdot j' \\ j &= \sin \varphi \cdot i' + \cos \varphi \cdot j' \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Тогда, подставляя в первое равенство системы (1) разложение всех входящих туда векторов по ортам системы OXY , будем иметь:

$$xi + yj = x_0i + y_0j + x'(\cos \varphi i + \sin \varphi j) + y'(-\sin \varphi i + \cos \varphi j) = \\ = (x_0 + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi) i + (y_0 + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi) j,$$

откуда сравнением коэффициентов при одинаковых ортах в левой и правой частях уравнений найдем:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y &= y_0 + x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Это — известные уже учащемуся формулы перехода от одной системы координат к другой.

Точно таким же образом из второй формулы системы (1), разложив все вектора по ортам системы $O'X'Y'$, найдем:

$$x'i' + y'j' = x_0'i' + y_0'j' + x(\cos \varphi i' - \sin \varphi j') + y(\sin \varphi i' + \cos \varphi j') = \\ = (x_0' + x \cos \varphi + y \sin \varphi) i' + (y_0' - x \sin \varphi + y \cos \varphi) j',$$

и сравнивая опять коэффициенты при одинаковых ортах:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x_0' + x \cos \varphi + y \sin \varphi; \\ y' &= y_0' - x \sin \varphi + y \cos \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из формул (3) и (4) видно, что координаты точки M в разных системах связаны между собою совершенно одинаковым образом. Формулы (4) получаются из (3) заменой x на x' , x_0 на x_0' и т. д. и заменой φ на $-\varphi$, так как если одна из систем повернута к другой на угол φ , то последняя повернута относительно первой на $-\varphi$.

Отметим частный случай *поступательного движения* систем друг по отношению к другу. В этом случае φ — постоянный угол и нисколько не нарушая общности, можно выбрать так оси, чтобы φ постоянно равнялось нулю. При этом формулы (3) и (4) переходят в такие:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + x'; & x' &= x_0' + x; \\ y &= y_0 + y'; & y' &= y_0' + y. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В случае взаимного *вращения* систем около общего центра будем иметь, перенося оба начала координат в этот центр:

$$\left. \begin{aligned} x &= x' \cos \varphi - y' \sin \varphi \\ y &= x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и обратные преобразования:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Формулы (3) и (4) решают задачу о зависимости между уравнениями движения точки в разных системах координат.

Действительно, если нам, например, задано движение точки в системе $O'X'Y'$ уравнениями:

$$x' = f_1(t), \quad y' = f_2(t),$$

и заданы уравнения движения системы $O'X'Y'$ по отношению к системе OXY (т. е. уравнения плоского движения тела):

$$x_0 = f_3(t); \quad y_0 = f_4(t); \quad \varphi = f_5(t),$$

то подставляя эти заданные функции в равенство (3), найдем уравнения движения точки в системе OXY :

$$\begin{aligned} x &= f_3(t) + f_1(t) \cos [f_5(t)] - f_2(t) \sin [f_5(t)] \\ y &= f_4(t) + f_1(t) \sin [f_5(t)] + f_2(t) \cos [f_5(t)]. \end{aligned}$$

Точно так же, если бы нам было задано уравнение движения точки в системе OXY и движение самой системы по отношению к системе $O'X'Y'$, то мы из равенств (4) нашли бы уравнения движения точки по отношению к $O'X'Y'$.

Получив, таким образом, уравнения относительных движений точки и исключая из них время, мы найдем *относительные траектории* движения точки, т. е. те кривые, которые опишет движущаяся точка в разных системах.

Здесь интересно отметить, что *одна и та же точка* описывает сразу *две* различных кривых; благодаря взаимному движению координатных систем, точка движется *различно* по отношению к каждой из них и при этом, естественно, вычерчивает разные траектории. Мы уже имели такой факт в плоском движении, когда мгновенный центр при своем движении в неподвижной и подвижной фигуре образовывал две centroиды: неподвижную и подвижную.

Примеры и упражнения.

1. Применение самописцев к регистрации движений. Мы уже говорили в первой теме о роли самописцев, теперь мы можем дать некоторые элементарные расчеты.

Предположим, что лента самописца идет с постоянной скоростью s , навиваясь с правого барабана на левый (рис. 214). Самописец регистрирует вертикальные колебания пера M .

Предположим, что уравнение движения пера дано:

$$y' = a \sin (\omega t + \alpha);$$

найдем уравнения движения пера по отношению к движущейся ленте. Для этого заметим, что система OXY двигается по отношению к системе $O'X'Y'$ поступательно (можно легко отвлечься от наворачивания ленты на барабан и считать, что лента просто двигается в плоскости, уходя влево), так что по формулам (5):

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y'.$$

В данном случае:

$$x_0 = \overline{OO'} = ct; \quad y_0 = 0; \quad x' = 0; \quad y' = a \sin (\omega t + \alpha),$$

следовательно имеем:

$$x = ct, \quad y = a \sin (\omega t + \alpha).$$

Уравнение относительной траектории на ленте:

$$y = a \sin \left(\frac{\omega}{c} x + \alpha \right),$$

это обыкновенная синусоида.

Из выведенного уравнения траектории видно, как надо обрабатывать запись на ленте. Амплитуда записываемого колебания и фаза его передаются без искажений, что касается частоты ω колебания, то она связана с частотой синусоиды на самописце ν соотношением

$$\nu = \frac{\omega}{c}.$$

Период τ синусоиды на ленте связан с периодом колебания T точки, очевидно, так:

$$\tau = cT.$$

Таким образом, зная скорость ленты, по периоду записанной кривой судят о периоде регистрируемого движения. Например, если лента идет со скоростью 2 см/сек, а период синусоиды на ленте оказался равным 3,24 см, то период записанного колебания

$$T = \frac{3,24}{2} = 1,62 \text{ сек.}$$

В последнее время стали во многих случаях применять запись не на ленту, а на вращающийся диск, причем пишущий штифт движется по радиусу диска (иногда по дуге круга, описываемого концом указателя). Предположим, что точка M (рис. 215) движется по оси OX , согласно уравнению:

$$x = f(t),$$

а диск вращается равномерно с угловой скоростью ω , так что

$$\varphi = \omega t.$$

Найдем уравнения движения и траекторию точки M по отношению к вращающемуся диску. Применим формулу (7), приняв во внимание, что здесь $y = 0$:

$$x' = x \cos \varphi = f(t) \cos \omega t,$$

$$y' = -x \sin \varphi = -f(t) \sin (\omega) t.$$

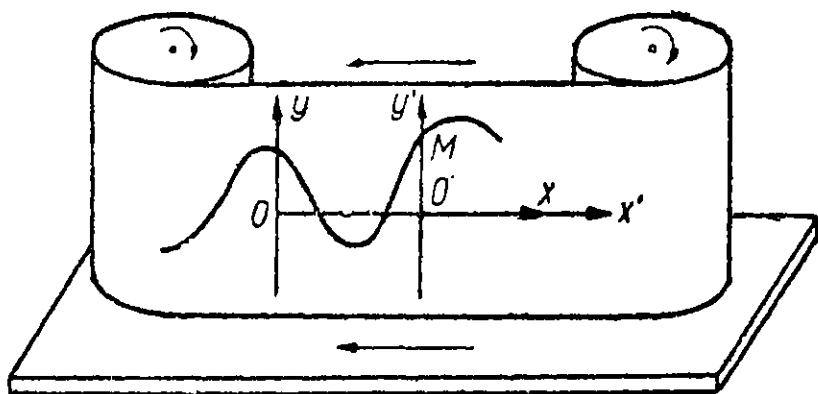


Рис. 214.

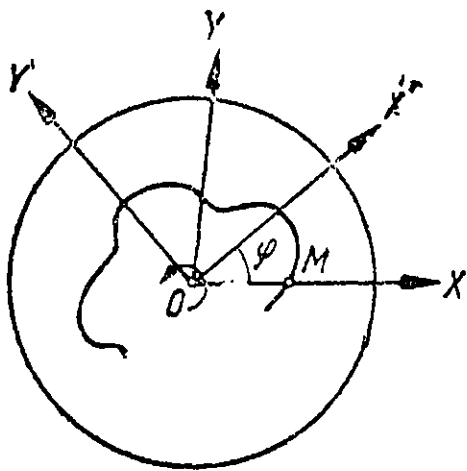


Рис. 215.

В данном случае лучше применять полярную систему координат, именно найдем:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = x = f(t), \quad \varphi = \omega t.$$

Траектория будет иметь вид:

$$\rho = f\left(\frac{\varphi}{\omega}\right);$$

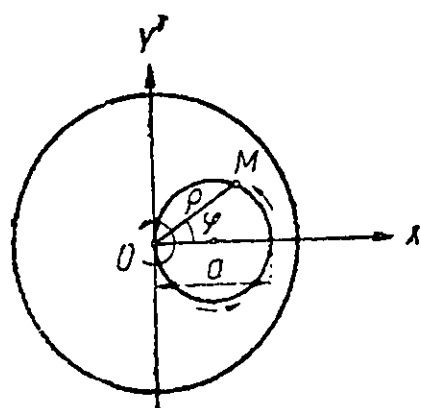


Рис. 216.

равномерному движению точки M по оси OX будет соответствовать *архимедова спираль* на диске. Интересно еще рассмотреть колебание точки с амплитудой a и частотой, равной угловой скорости диска. В этом случае уравнения

$$\rho = a \cos \omega t, \quad \varphi = \omega t.$$

дают

$$\rho = a \cos \varphi,$$

т. е. полярное уравнение круга диаметра a .

На рис. 216 показано расположение этого круга на диске. Замечательно, что за время полного колебания точка M два раза опишет на диске окружность диаметра a . Пусть учащийся возьмет лист бумаги, начертит на нем оси $O'X'$ и $O'Y'$ и проследит, как при движении точки M справа налево за первую четверть периода обращения она опишет верхнюю половину окружности, за вторую четверть — нижнюю, за третью опять верхнюю и т. д.

2. Движение тяжелой точки в вагоне. Рассмотрим свободное падение точки в вагоне,двигающемся равномерно на прямолинейном пути. Связав с вагоном (рис. 217) систему координат $O'X'Y'$, а с землей (рельсами) систему OXY и, считая скорость вагона равной c , найдем по (5):

$$x = ct + x', \\ y = y'.$$

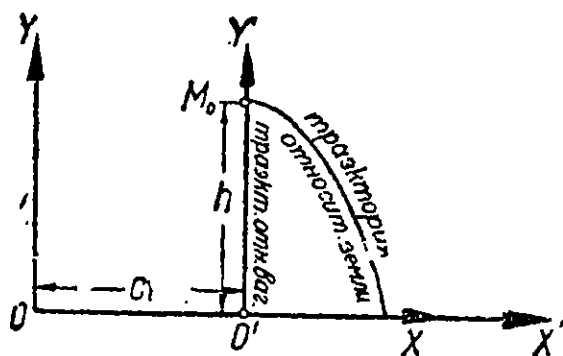


Рис. 217.

Если точка падает в вагоне по оси $O'Y'$ с высоты h без начальной скорости относительно вагона, то уравнения движения относительно вагона будут:

$$x' = 0, \quad y' = h - \frac{gt^2}{2}$$

а следовательно относительно земли:

$$x = ct, \\ y = h - \frac{gt^2}{2}.$$

Из этих уравнений видно, что траекторией относительно земли будет служить парабола

$$y = h - \frac{g}{2c^2} x^2,$$

в то время как относительно поезда траекторией служит прямая линия — ось $O'Y'$; обе относительные траектории вычерчены на рис. 217.

Рассмотрим еще такой случай. В тот момент, когда поезд трогается, имея постоянное ускорение a , начинает свое падение с высоты h в пустоте тяжелая точка; найдем траекторию точки относительно поезда и земли.

Предполагая, что в начальный момент точка O' (рис. 218) совпала с O и пользуясь формулами (5), будем иметь:

$$x' = x'_0 + x = -\frac{at^2}{2}$$

$$y' = y'_0 + y = h - \frac{gt^2}{2}.$$

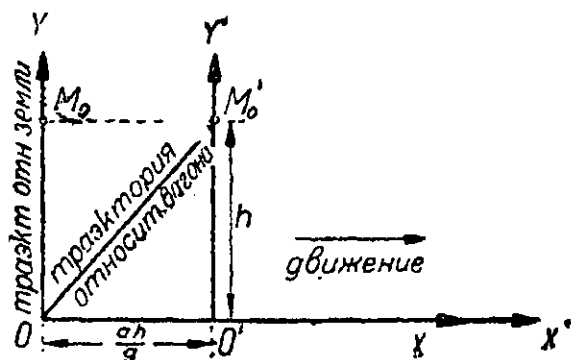


Рис. 218.

Мы здесь воспользовались соображением, что по отношению к земле точка будет совершать свободное падение. Траекторией будет очевидно служить прямая линия:

$$y' = h - \frac{g}{a} x'.$$

Когда точка дойдет до пола вагона, ее отнесет в сторону, противоположную движению вагона, на отрезок длины $\frac{ah}{g}$.

Предполагая, например, ускорение трогającego поезда равным $a = 1,1 \text{ м/сек}^2$, найдем, что предмет, упавший с верхней полки $h = 3 \text{ м}$, отклонится от вертикали на $\frac{1,1 \cdot 3}{9,81} = 0,34 \text{ м}$, т. е. почти на 34 см. Предполагается, конечно, что за время падения ускорение поезда сохраняется постоянным.

3. Запись колебаний на поступательно-возвратно движущуюся пластинку. Иногда приходится регистрировать колебания отдельных частей машины на пластинку, движение которой связано с ходом какой-нибудь основной части машины. Например, индикаторная диаграмма в паровой машине получается как след пера, показывающего давление пара в цилиндре, на пластинку, движение которой воспроизводит в известном масштабе ход поршня.

Предположим, что вертикальные гармонические колебания пера M (рис. 219) амплитуды a и частоты ω , происходящие на оси OY , записываются на пластинке, совершающей в свою очередь гори-

горизонтальные гармонические колебания амплитуды b и частоты ν . Легко видеть, что уравнения движения точки M по пластинке (т. е. по отношению к системе $O'X'Y'$) будут;

$$x' = b \sin(\nu t + \beta)$$

$$y' = a \sin(\omega t + \alpha).$$

Траекториями такого движения будут, как мы видим, известные уже нам фигуры Лиссажу. Если колебания пластинки и колебания

пера M будут иметь одинаковую частоту, то получатся в общем случае эллипсы, если нет — то другие фигуры.

Обычная индикаторная диаграмма не представляет собою фигуру Лиссажу, потому что, как мы выяснили еще в первой теме, ход поршня не представляет гармонического колебания, точно так же и колебания

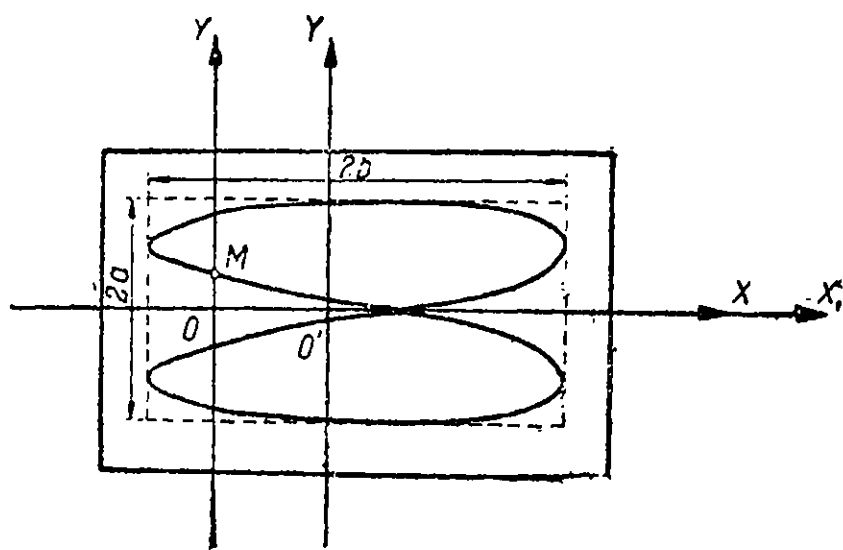


Рис. 219.

давления не происходят по гармоническому закону.

Фигуры Лиссажу получают часто именно таким путем при лабораторной работе, записывая на колеблющуюся фотопластинку колебания светового зайчика от зеркальца или непосредственно от светового источника.

Мы удовольствуемся небольшим числом примеров на теорию, изложенную в настоящем параграфе, так как метод достаточно прост.

§ 48. Связь между относительными изменениями векторов.

Прежде чем перейти к установлению зависимости между скоростями двух относительных движений точки, т. е. между производными относительных вектор-радиусов ее по времени, выведем одну, в высшей степени важную для всей теории относительного движения, общую формулу, связывающую между собою относительные изменения некоторого вектора в двух перемещающихся системах координат.

Рассмотрим некоторый вектор a , изменяющийся с течением времени по величине и перемещающийся в пространстве. За малый промежуток времени Δt его изменение, наблюдаемое в системе $OXYZ$, обозначим через Δa , а в системе $O'X'Y'Z'$ — через $\Delta' a$. Мы уже знаем, что благодаря взаимному перемещению координатных систем эти изменения не равны между собою. Найдем связь между ними.

Для этого построим векторную диаграмму изменения $\mathbf{a}$ (рис. 220). От произвольного полюса O отложим вектор $\mathbf{a}$, соответствующий моменту t . За промежуток Δt наш вектор получит изменение по отношению к системе $O'X'Y'Z'$, равное $\Delta' \mathbf{a}$, и превратится в вектор $\mathbf{a} + \Delta' \mathbf{a}$; по отношению к другой системе его изменение будет $\Delta \mathbf{a}$ и он станет равным $\mathbf{a} + \Delta \mathbf{a}$. За счет чего получилось различие в изменении векторов по отношению к разным системам?

Если бы системы за время Δt взаимно не переместились, то изменение вектора в обеих системах, как в одной целой системе, было бы одинаковым; далее, если бы системы *сместились поступательно*, то различия опять не получилось бы, потому что при поступательном перемещении системы относительно вектора или, наоборот, вектора относительно системы, вектор остается равным и параллельным самому себе, т. е. на диаграмме никакого изменения не было бы замечено.

Припоминая, что самое *общее перемещение системы состоит из поступательного и вращательного*, видим, что разница в изменении вектора: $\delta = \Delta \mathbf{a} - \Delta' \mathbf{a}$ могла получиться только за счет взаимного поворота систем $OXYZ$ и $O'X'Y'Z'$ между собою вокруг некоторой оси, определяемой вектором поворота θ . Но во второй теме было выяснено, что перемещение конца некоторого вектора $\mathbf{A}$ при повороте его, определенном по величине и направлению вектором поворота θ , будет равно: $[\theta, \mathbf{A}]$.

В нашем случае (рис. 220) повороту подвергается вектор $\mathbf{a} + \Delta' \mathbf{a}$, так что

$$\delta = [\theta, \mathbf{a} + \Delta' \mathbf{a}] = [\theta, \mathbf{a}] + [\theta, \Delta' \mathbf{a}].$$

Мы рассматриваем поворот за малое время Δt , при этом вектор поворота θ также мал, и второй член имеет второй порядок малости по сравнению с первым.

Из диаграммы сразу видно, что

$$\Delta \mathbf{a} = \Delta' \mathbf{a} + \delta = \Delta' \mathbf{a} + [\theta, \mathbf{a}] + [\theta, \Delta' \mathbf{a}].$$

Деля обе части на Δt и переходя к пределу, когда Δt становится равным нулю, получим:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta' \mathbf{a}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\theta}{\Delta t}, \mathbf{a} \right] + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\theta}{\Delta t}, \Delta' \mathbf{a} \right].$$

Замечая, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta}{\Delta t} = \omega, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta' \mathbf{a} = 0,$$

где ω — угловая скорость взаимного вращения систем $OXYZ$ и $O'X'Y'Z'$ и, отмечая еще штрихом производную, определяющую

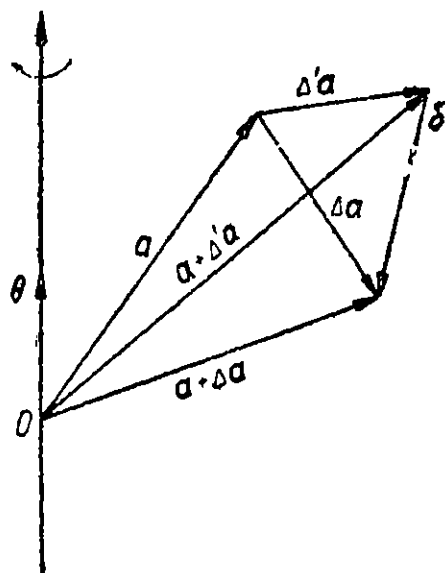


Рис. 220.

изменение с течением времени вектора по отношению к системе $O'X'Y'Z'$, найдем:

$$\frac{da}{dt} = \frac{d'a}{dt} + [\omega, a].$$

Это и есть нужная нам вспомогательная теорема (лемма) об относительных изменениях вектора:

Векторная производная по времени от некоторой вектор-функции, взятая в одной системе координат, отличается от производной того же вектора в другой системе, вращающейся по отношению к первой с определенной угловой скоростью, на векторное произведение этой угловой скорости на самый вектор.

§ 49. Скорости в относительных движениях. Правило параллелограмма.

Найдем теперь связь между скоростями точки по отношению к двум системам координат. Для этого, взяв основное соотношение (1) § 47:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{r}', \quad (1)$$

продифференцируем обе части по времени:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \quad (2)$$

Как было выяснено в первой теме:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}; \quad \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} = \mathbf{v}_0, \quad (3)$$

где $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_0$ —скорости точек M и O' по отношению к системе $OXYZ$. Далее, на основании леммы:

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + [\omega, \mathbf{r}']. \quad (4)$$

Здесь $\frac{d'\mathbf{r}'}{dt}$ является скоростью изменения вектора $\mathbf{r}'$ в своей системе $O'X'Y'Z'$, т. е. определяет скорость точки M по отношению к системе $O'X'Y'Z'$ и может быть обозначена $\mathbf{v}'$. Равенство (2) теперь переписывается в таком виде:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + [\omega, \mathbf{r}']. \quad (5)$$

Последние два слагаемые в правой части в сумме определяют (вспомнить вторую тему) скорость по отношению к $OXYZ$ того пункта системы $O'X'Y'Z'$, который на рисунке обозначен точкой M , и, следовательно, того, через который в данный момент проходит наша движущаяся точка. Как было объяснено в § 47, эта скорость называется *переносной* скоростью и обозначается символом $\mathbf{v}_e$. Таким образом (5) принимает окончательный вид:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_e. \quad (6)$$

Мы приходим к следующей важной теореме:

Скорость точки по отношению к одной системе координат равна скорости ее по отношению к другой системе, сложенной геометрически с переносной скоростью точки по отношению к первой системе.

Учащийся может встретиться и с другой чрезвычайно распространенной формулировкой этой же теоремы. Мы уже упоминали, что иногда одну из систем называют условно *абсолютной* системой, а вторую — *относительной*, тогда под *переносным движением* обязательно понимают движение того пункта *относительной системы*, через который в данный момент проходит движущаяся точка. Кинематические элементы движения по отношению к абсолютной системе отмечают индексом *a* (от слова *absolu* — абсолютный), по отношению к относительной системе — индексом *r* (от слова *relatif* — относительный), при этом формула (6) принимает вид:

$$v_a = v_r + v_e$$

и формулируется кратко так:

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скорости ее.

Предлагаемая нами формулировка (предыдущая) быть может менее удобна для запоминания, но зато, как нам кажется, больше передает цель задачи об относительном движении: связать между собою скорости точки в двух каких-то подвижных системах, вполне, так сказать, равноправных. Ни одна система не выдвигается на первый план в качестве привилегированной — абсолютной.

Учащемуся все же необходимо понять и выучить обе формулировки, потому что во многих специальных технических книгах он может встретиться и с той и с другой формулировкой.

Полученная нами теорема носит еще наименование *правила параллелограмма скоростей*. Происхождение этого названия ясно из рис. 221, представляющего диаграмму сложения векторов относительной и переносной скоростей.

Как уже говорилось во введении к настоящему заданию, правило параллелограмма является основой почти всех главных расчетов в теоретической и прикладной Кинематике. Мы сейчас покажем ряд применений его, причем иногда будем пользоваться правилом параллелограмма, а иногда *правилом треугольника*. На рис. 221 показаны обе диаграммы — учащийся знает из Статики, что между ними никакого различия по существу нет.

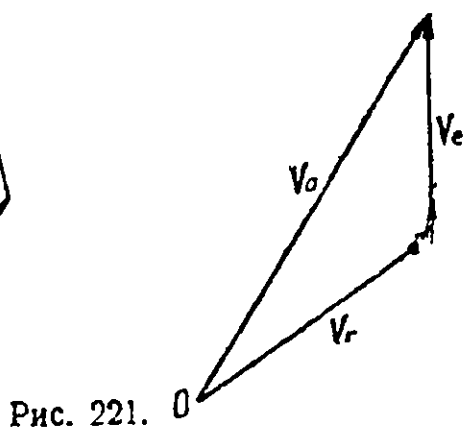
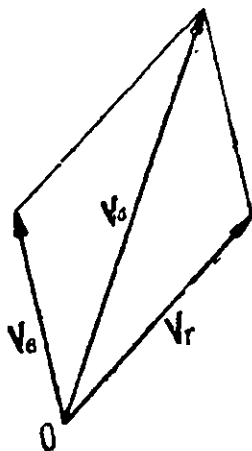


Рис. 221.

Примеры и упражнения.

1. Численные примеры на применение правила параллелограмма скоростей к простейшим расчетам. Мы здесь дадим несколько простеньких задач на применение правила параллелограмма, другие задачи того же типа учащийся найдет в контрольных вопросах и задачах.

1) Следы капель дождя дают на стеклах идущего трамвая черточки, образующие с вертикалью угол 30° . Зная скорость трамвая: $v_0 = 10$ км/час и предполагая, что нет ветра, определить скорость дождевых капель по отношению к земле.

Прежде всего выясним, что здесь является переносной скоростью. Мы рассматриваем движения дождевой капли относительно земли и трамвая, причем знаем скорость трамвая по отношению к земле; поэтому здесь естественно с землей соединить одну систему координат, с трамваем другую, а скорость точки стекла трамвая, в которой остался след капли, принять за переносную скорость.

Переходя к построению диаграммы скоростей, заметим, что начинать надо всегда (подобно построению треугольника сил) с известного по величине и направлению вектора, в данном случае — вектора переносной скорости $v_e = v_0$, имеющего горизонтальное направление и величину: $v_0 = 10$ км/час (рис. 222).

Скорость v' капли по отношению к трамваю образует, по условию, с вертикалью угол 30° , но неизвестна по величине, поэтому проводим луч BC до пересечения в точке C с лучом AC , имеющим направление скорости v капли относительно земли (при безветрии капли дождя падают вертикально). Вспоминая, что $v = v_e + v'$, даем направление отрезкам как показано на рисунке. Из треугольника ABC сразу следует:

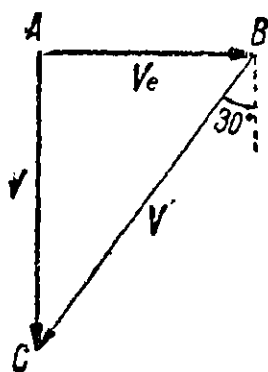


Рис. 222.

$$v = v_e \operatorname{tg} 60^\circ = 10 \cdot \sqrt{3} = 17 \text{ км/час.}$$

2) Радиальная водяная турбина. Определим углы входа и выхода воды в канал радиальной турбины, если известно, что вода подходит без ударов к вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω колесу, по направлению радиуса.

Здесь опять у нас две системы: одна связана с фундаментом турбины и с подводящим и отводящим воду аппаратом, другая с вращающимся турбинным колесом. Переносными скоростями являются скорости точек канала, сквозь который проходит жидкость. Условие, чтобы вода входила без удара в канал турбины, заключается в том, что скорость частиц воды относительно колеса должна быть направлена по касательной к профилю канала. Действительно, при этом вода устремится по каналу, не ударяясь о стенки. Определим угол α , образуемый входом в канал с радиусом (рис. 223), зная скорость воды v и переносную скорость v_e .

в точке A . Диаграмма скоростей имеет вид, показанный на рис. 224. Из треугольника сразу определяется:

$$\sin \alpha_1 = \frac{v_e}{v} = \frac{\omega}{v} r_1,$$

точно так же найдем и для точки B выхода:

$$\sin \alpha_2 = \frac{v_e}{v} = \frac{\omega}{v} r_2.$$

Мы предположим здесь, что канал турбины постоянен по ширине, так что из условия одинаковости расхода у входа и выхода следует равенство скоростей v . Подставим численные значения. Предположим, что турбина делает 100 об/мин, т. е. $\omega = 10 \frac{1}{\text{сек}}$, $r_1 = 20 \text{ см}$,

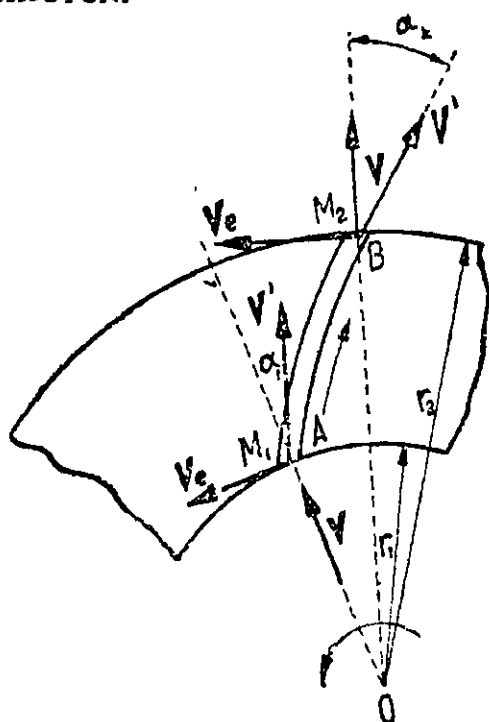


Рис. 223.

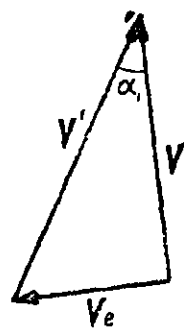


Рис. 224.

$r_2 = 30 \text{ см}$; радиальная скорость 8 м/сек . Тогда будем иметь:

$$\sin \alpha_1 = \frac{10}{8} \cdot 0,2 = 0,25; \quad \sin \alpha_2 = \frac{10}{8} \cdot 0,3 = 0,375,$$

отсюда находим углы входа и выхода:

$$\alpha_1 = 14^\circ 29', \quad \alpha_2 = 22^\circ 2'.$$

3) Ветряной двигатель. Определим угловую скорость ω крыльев ветряного двигателя, если угол атаки крыльев $\alpha = 30^\circ$, а ветер дует со скоростью 20 м/сек , причем ветер обдувает крылья без удара. Мы имеем задачу, подобную предыдущей. Если KK (рис. 225) представляет след сечения крыла с плоскостью чертежа, то углом атаки называется острый угол α между направлением ветра v и плоскостью крыла.

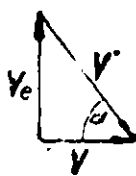
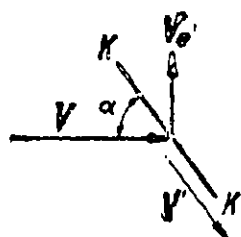


Рис. 225.

Здесь, очевидно, переносной скоростью будут окружные скорости точек крыла; v — скорость ветра по отношению к земле, v' — по отношению

к крылу. Из диаграммы на рисунке имеем:

$$v_e = v \operatorname{tg} \alpha,$$

отсюда, подставляя числа, найдем:

$$v_e = 20 \cdot 0,58 = 11,6 \text{ м/сек},$$

так что, обозначая среднее расстояние крыла до оси через r и полагая $r = 5 \text{ м}$, будем иметь:

$$\omega = \frac{v_e}{r} = \frac{11,6}{5} = 2,32 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Это значит, что ветряной двигатель делает около 23 об/мин.

Конечно, приведенный расчет является грубым и приближенным, мы здесь пренебрегли скольжением крыльев, неодинаковостью скорости воздуха около крыльев и многим другим.

2. План скоростей кривошипно-кулисного механизма. В предыдущей теме мы уже указывали, что в механизмах с сложно двигающимися ползунками обычным приемом план скоростей вычерчен быть не может. На помощь нам в этом случае приходит правило параллелограмма скоростей. Мы сейчас покажем это на примерах двух кривошипно-кулисных механизмов, носящих иногда название *механизмов Витворта*.

а) Механизм с качающейся кулисой. Устройство легко понять из рис. 226. Основной ведущий вал O соединен с кривошипом OC , на конце которого шарнирно закреплена ползушка C . Сквозь нее проходит качающаяся около оси O_1 кулиса O_1A ; верхний конец ее A соединен с шатуном AB . При равномерном вращении кривошипа OC , кулиса, а вместе с тем и ползунок B получают сложные колебательные движения, причем легко сооб-

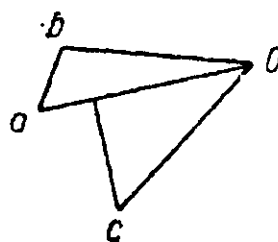
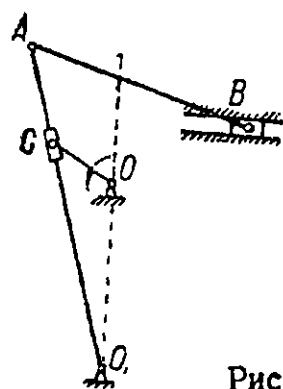


Рис. 226.

разить, что при равномерном вращении кривошипа в направлении, указанном на рисунке, ползун B будет *медленно* двигаться справа налево и *быстро* возвращаться в прежнее положение слева направо. Этим как раз и пользуются, применяя кулисный механизм в различных станках, причем движение справа налево соответствует рабочему

ходу инструмента (например строганию материала), движение слева направо — холостому ходу (возвращение ножа в исходное положение).

Определим графически скорость ползунка B в данном на рисунке положении механизма, по заданной скорости кривошипа. Откладывая на диаграмме (рис. 226) скорость v_c ползунка в виде отрезка $\overline{Oc}$, перпендикулярного кривошипу OC , разложим ее на направление кулисы и направление, перпендикулярное к ней, тогда отрезок $\overline{Oc'}$ на диаграмме даст переносную скорость точки C кулисы (а не ползунка!). Откладывая далее в том же направлении $\overline{Oa}$ так, чтобы:

$$\overline{Oa} : \overline{Oc'} = \overline{O_1A} : \overline{O_1C},$$

найдем скорость v_a , тогда, по предыдущему, отрезок $\overline{Ob}$ даст искомую скорость ползуна B , а отрезок $\overline{ab}$ — геометрическое место концов векторов скорости точек шатуна.

Мы обращаем внимание учащегося еще раз на то место, где нам пришла на помощь теория относительного движения. Благодаря правилу параллелограмма мы смогли перейти от скорости точки C кривошипа к точке C кулисы — одна и та же точка на чертеже, но на самом деле здесь две различных точки с разными скоростями. На этом примере еще раз иллюстрируется понятие переносной скорости.

б) Механизм с вращающейся кулисой отличается от предыдущего механизма тем, что у него расстояние между осями O и O_1 меньше длины кривошипа. Последнее обстоятельство позволяет кулисе O_1A иметь полное вращение вокруг оси O_1 . Ползунок B здесь опять имеет неравное по продолжительности хода движение взад и вперед, чем и пользуются в применениях этого механизма. Учащегося не затруднит построить план скоростей механизма (рис. 227)¹.

3. Выражение скорости в полярных координатах. Как на еще одно применение правила параллелограмма скоростей укажем на вывод составляющих вектора скорости по направлению вектор-радиуса движущейся точки и ему перпендикулярному направлению.

Для этого движение точки M по траектории KK (рис. 228) разложим на два движения: 1) движение точки по вектор-радиусу $\vec{OM}$ и 2) переносное движение, т. е. движение той точки M на вектор-радиусе, по которой проходит движущаяся точка M .

Обозначая первую скорость через v' (ее обычно называют *радиальной* скоростью), а вторую, имеющую направление перпендикулярное, в сторону возрастания полярного угла φ , через v'' , будем иметь, по правилу параллелограмма:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}''$$

Проекции этих векторов на направление вектор-радиуса и перпендикулярное обозначим, как это обычно делают, через v_r и v_φ , тогда легко сообразить, что:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}.$$

Первое выражение получается по формуле прямолинейного движения, второе — по формуле линейной скорости точки, принадлежащей твердому телу.

Отметим еще важную формулу квадрата скорости:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2,$$

которая нам пригодится в Динамике.

¹ Подробное описание движения кулисных механизмов учащийся найдет в книге проф. Л. Б. Левсона. Кинематика механизмов. Гостехиздат, 1923, стр. 140—143.

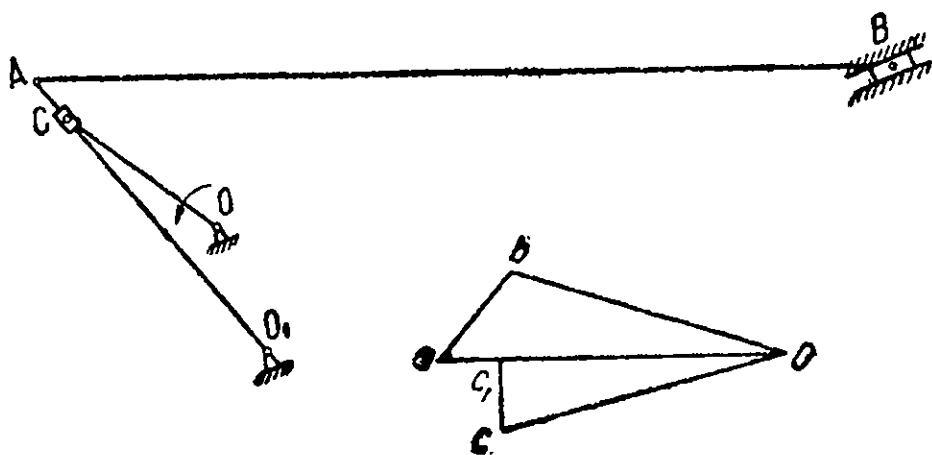


Рис. 227.

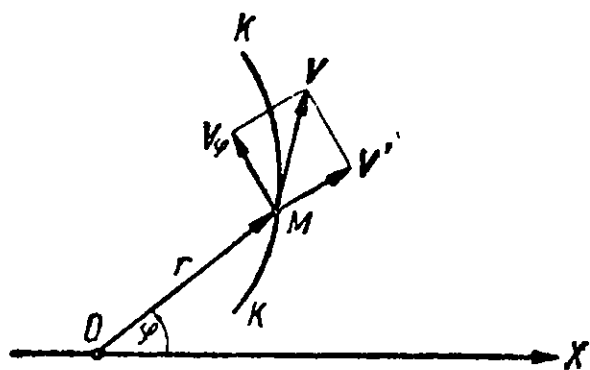


Рис. 228.

4. Способ Роберваля построения касательной. Пользуясь правилом параллелограмма скоростей, можно строить касательные к тем кривым, которые могут быть получены как траектории составных движений. Продемонстрируем способ на примере *циклоиды*. Мы уже напоминали в первой теме, что циклоида получается как траектория точки круга, катящегося без скольжения по прямой линии. Заметив (рис. 229), что в любом положении круга дуга MC равна дуге M_0C , можем рассматривать движение точки M как составное из поступательного движения центра O круга и вращательного движения вокруг центра круга. Скорости этих движений v' и v_0 , показанные на рисунке, равны между собою, так как за равное время в этих движениях будут сделаны равные пути M_0C и CM . Величина этой скорости не имеет значения.

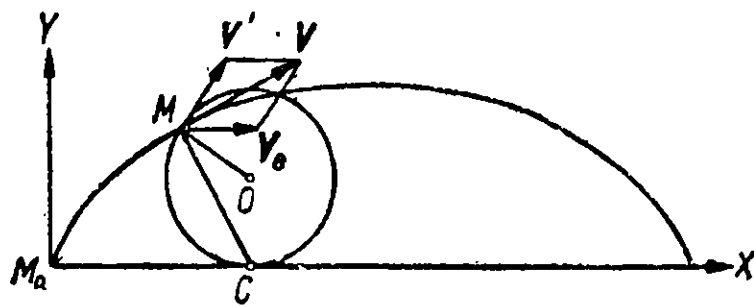


Рис. 229.

Отложив вектора v' и v_0 равными по величине, построим ромб, тогда диагональ ромба даст нам направление скорости точки M относительно системы координат M_0XY , т. е. как раз направление касательной к циклоиде. Скорость v , как легко видеть из чертежа,

перпендикулярна отрезку MC (вспомнить, что C — мгновенный центр). Аналогичным методом очень легко построить касательную к конхонде прямой, конхонде круга (улитка Паскаля), архимедовой спирали.

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. Винт входит в неподвижную гайку, делая 5 об/мин; шаг винта 6 мм. Найти скорость относительно гайки точки нарезки, если внешний радиус нарезки равен 1,5 см.

2. Какого направления должен держаться дирижабль, имеющий собственную скорость (т. е. скорость по отношению к воздуху) 7,5 м/сек при восточном ветре, имеющем скорость 10 м/сек, если он желает идти на северо-запад? Найти также скорость дирижабля по отношению к земле.

3. Крыльчатый анемометр делает 1000 об/мин. Считая среднее расстояние от оси вращения до центра крылышка равным 3 см и предполагая, что при равномерном движении анемометра воздух подходит к крылышку без удара, определить скорость ветра. Угол атаки равен $\alpha = 30^\circ$ (рис. 230).

4. Дирижабль (рис. 231) проходит за время t_1 расстояние $S = \overline{AB}$ идя по прямолинейному пути, при направлении ветра, составляющем угол α с направлением AB . Обратный путь при ветре той же силы и направления совершается за время t_2 . В прямой и обратный путь дирижабль отправляется под тем же самым углом β к направлению $\overline{AB}$.

По заданным S, t_1, t_2, α вычислить: 1) угол β , 2) скорость ветра, v по отношению к земле, 3) собственную скорость дирижабля v_2 .

5. Фундамент совершает гармонические вертикальные колебания амплитуды 2 мм и частоты, равной угловой скорости вала уста-

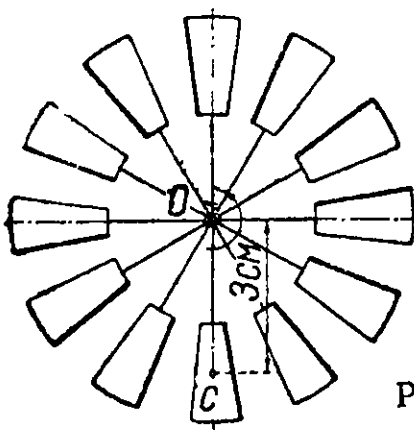


Рис. 230.

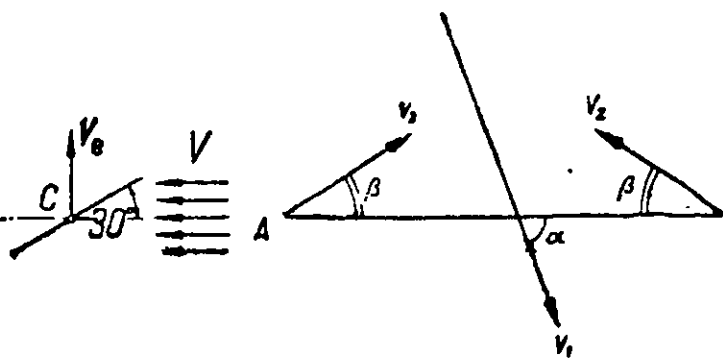


Рис. 231.

новленного на нем вертикального двигателя. Считая, что отношение $\frac{a}{l}$ (рис. 232) пренебрежимо мало, т. е. что движение ползуна есть гармоническое колебание, определить скорость ползуна по отношению к опоре фундамента при $a=10$ см. Угловая скорость вала равна 400 об/мин. Сдвиг фазы между колебаниями ползуна и фундамента равен 0,1.

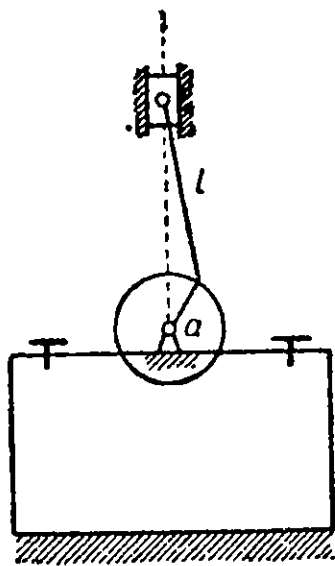


Рис. 232.

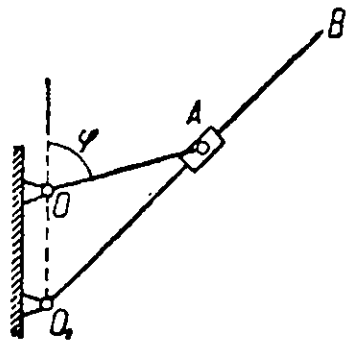


Рис. 233.

6. В механизме Витворта (рис. 233) кривошип $\overline{OA}$ вращается с постоянной угловой скоростью ω . Вычислить угловую скорость ω_1 кривошипа $\overline{OB}$, выразив его через угол φ поворота кривошипа $\overline{OA}$; найти минимальное и максимальное значение ω_1 и построить его график: $OA=a, OO_1=d (d < a)$.

Задание 15-е.

Сложение вращений.

Переходя от рассмотрения относительных движений точки к относительным движениям твердого тела, естественно прежде всего определить зависимость между векторами угловой скорости в двух системах координат, перемещающихся друг по отношению к другу.

Найти эту зависимость все равно, что решить более общую задачу об относительном движении твердого тела, потому что через угловые скорости, как мы уже знаем, выражаются и линейные скорости точек твердого тела.

Но для технических применений общая задача не представляет большой ценности. Для техники единственно важным является вопрос как раз о связи между относительными вращениями (угловыми скоростями) или, как говорят, вопрос о *сложении вращений*. Теория, которую мы сейчас изложим, позволяет вести расчеты систем зубчатых колес, как цилиндрических, так и конических, с осями, перемещающимися во время движения. Эти системы, применяемые в различных станках и автоматах, главным образом для получения больших передаточных чисел, т. е. больших угловых скоростей у инструмента, за счет небольшой угловой скорости ведущего вала, а также для многих других целей, представляют значительный кинематический интерес. Расчет серий зубчатых колес с бегающими осями, как их иногда называют, на первый взгляд представляет непреодолимые трудности, но достаточно применить способ относительного движения (способ Виллиса), и система сразу становится простой и легкой для расчета.

Нам кажется, что метод Виллиса, наряду с правилом параллелограмма скоростей, дает пример наиболее блестящего применения теории относительного движения к практическим вопросам.

В настоящем задании учащийся найдет ряд примеров применения способа Виллиса к расчету плоских и неплоских серий зубчатых колес с бегающими осями.

§ 50. Сложение вращений вокруг параллельных осей.

Нам предстоит сначала решить следующую теоретическую задачу:

Твердое тело K (рис. 234) вращается по отношению к системе координат $O'X'Y'Z'$ с угловой скоростью ω' вокруг, например, оси $O'Z'$, причем система $O'X'Y'Z'$ в свою очередь вращается вокруг оси OZ другой системы $OXYZ$ с угловой скоростью ω_e ; требуется определить ось вращения и вектор угловой скорости ω тела по отношению к системе $OXYZ$, предполагая, что вектора ω' и ω_e параллельны.

Мы дадим простое векторное решение этой задачи. Заметим прежде всего, что по условию параллельности векторов ω_e и ω' движение тела и по отношению к системе $OXYZ$ и к системе $O'X'Y'Z'$ будет плоским, поэтому, располагая оси так, чтобы плоскости $O'X'Y'$ и OXY сливались, сведём задачу к рассмотрению плоского движения фигуры F по отношению к системам координат OXY и $O'X'Y'$. Скорость какой-нибудь точки M этой плоской фигуры, имеющей в момент, представленный на рисунке, вектор-радиус r' , по отношению к O' и r по отношению к O , будет в системе OXY равна геометрической сумме скорости по отношению к $O'X'Y'$: $v' = [\omega', r'] = [\omega', r - r_0]$ и переносной скорости $v_e = [\omega_e, r]$ так что, соединяя члены с r и r_0 :

$$v = [\omega_e + \omega', r] - [\omega', r_0]. \quad (1)$$

Вращаясь около точки O' и перемещаясь в то же время вместе с нею вокруг точки O_1 , плоская фигура будет совершать общее плоское движение. Мы уже знаем, что его можно представить как мгновенное вращение около оси, проходящей через мгновенный центр и перпендикулярной к плоскости движения. Найдем прежде всего положение этой оси. Для этого обозначим вектор-радиус мгновенного центра C через $\mathbf{r}_c$ и напишем условие, что скорость точки C равна нулю. Полагая в равенстве (1) $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c = 0$, найдем:

$$[\omega_c + \omega', \mathbf{r}_c] = [\omega', \mathbf{r}_0]. \quad (2)$$

Замечая, что первый сомножитель левого векторного произведения параллелен первому сомножителю правого произведения, произведения геометрически равны, а сомножители взаимно перпендикулярны, заключим, что и вторые сомножители параллельны, т. е.

$$\mathbf{r}_c = \lambda \mathbf{r}_0, \quad (3)$$

где λ — некоторый скалярный множитель. Чтобы его найти, подставим значение $\mathbf{r}_c$ из (3) в (2), тогда, собирая члены по ассоциативному закону, будем иметь:

$$[\lambda(\omega_c + \omega') - \omega', \mathbf{r}_0] = 0,$$

но первый сомножитель не может быть параллелен второму (он ему перпендикулярен) и кроме того $\mathbf{r} \neq 0$, остается лишь положить:

$$\lambda(\omega_c + \omega') - \omega' = 0. \quad (4)$$

Спроектировав обе части на ось OZ и замечая, что проекции ω_c и ω' будут равны численным величинам угловых скоростей, взятым со знаками $\pm$, в зависимости от направления вращения, т. е.: $\tilde{\omega}_c, \tilde{\omega}'$, найдем:

$$\lambda = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}_c + \tilde{\omega}'}.$$

Таким образом по (3) положение мгновенного центра определяется так:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\tilde{\omega}'}{\tilde{\omega}_c + \tilde{\omega}'} \mathbf{r}_0. \quad (4')$$

Мы видим, что при любых зависимостях между $\tilde{\omega}'$ и $\tilde{\omega}_c$ мгновенный центр находится на линии OO' .

Чтобы найти угловую скорость вращения вокруг мгновенного центра, вычтем из равенства (1) очевидное равенство

$$0 = [\omega_c + \omega', \mathbf{r}_c] - [\omega', \mathbf{r}_0],$$

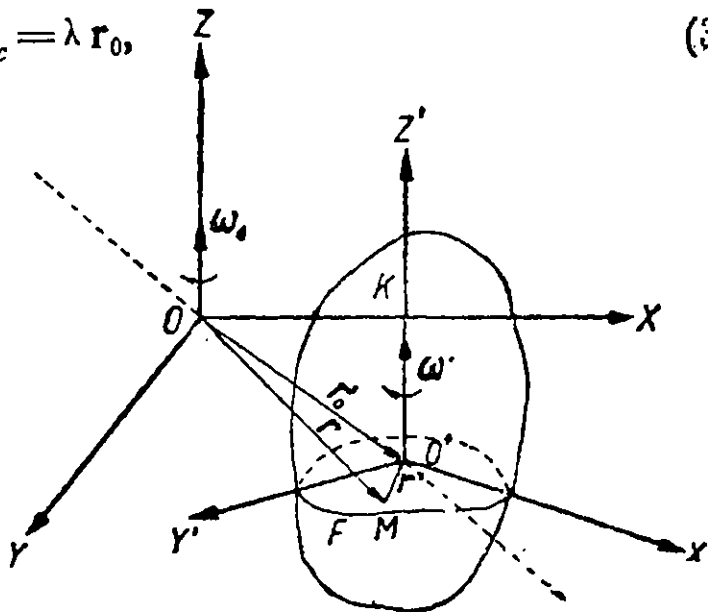


Рис. 234.

тогда получим:

$$\mathbf{v} = [\omega_e + \omega', \mathbf{r} - \mathbf{r}_c]. \quad (5)$$

Это — формула вращательной скорости вокруг точки C с угловой скоростью, равной

$$\omega = \omega_e + \omega'. \quad (6)$$

Итак, мы пришли к следующему результату: относительное движение тела в системе $OXYZ$ есть вращение вокруг оси, проходящей через мгновенный центр C с угловой скоростью, равной геометрической сумме переносной угловой скорости и угловой скорости относительно другой системы.

Отметим частные случаи расположения мгновенной оси.

1) Направления вращений одинаково, т. е. ω' и ω_e имеют один и тот же знак, например положительный, т. е. вектора направлены параллельно оси OZ (рис. 235). В этом случае из ур-ния (4) сразу видно, что точка C лежит между центрами O и O' на расстояниях от них, обратно пропорциональных величинам угловых скоростей, т. е.

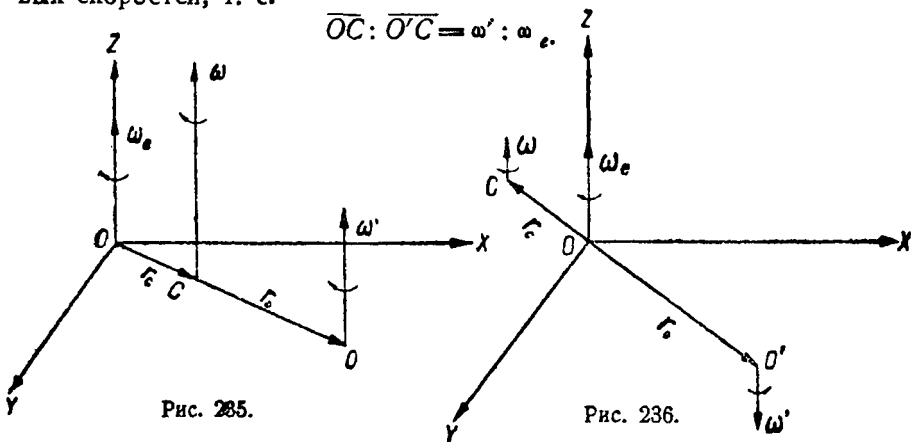


Рис. 235.

Рис. 236.

Угловая скорость вращения вокруг оси, проходящей через точку C , по (6) равна сумме

$$\omega = \omega_e + \omega'$$

и направлена в ту же сторону, что и они.

2) Направление вращений различно, т. е. ω' и ω_e имеют различные знаки, например $\omega_e > 0$, а $\omega' < 0$, причем положим для определенности $\omega_e > \omega'$. В этом случае из равенства (4) следует:

$$r_c = -\frac{\omega'}{\omega_e - \omega'} r_0.$$

Точка C , следовательно, лежит за точкой O (рис. 236) в глубине чертежа. Расстояние $O'C$, равное сумме длин r_0 и r_c , будет

$$\overline{O'C} = r_0 + \frac{\omega'}{\omega_e - \omega'} \cdot r_0 = \frac{\omega_e}{\omega_e - \omega'} \cdot r_0,$$

так что опять, как и в предыдущем случае:

$$\overline{OC} : \overline{O'C} = \omega' : \omega_e,$$

т. е. мгновенная ось расположена вне отрезка OO' со стороны большей угловой скорости на расстояниях от осей ω_e и ω' , обратно пропорциональных величинам этих угловых скоростей.

Если бы ω_e было меньше ω' , то мы бы имели:

$$r_c = \frac{\omega'}{\omega' - \omega_e} r_0.$$

Точка C при этом оказалась бы вне отрезка OO' , но уже за точкой O' , так как знаменатель меньше числителя и следовательно $r_c > r_0$. Легко заметить, что в этом случае (рисунка мы не приводим — он очевиден) мгновенная ось опять расположится на расстояниях, обратно пропорциональных величинам угловых скоростей ω_e и ω' .

И в том и другом случае величина ω равна

$$\omega = |\omega_e - \omega'|.$$

причем ω направлено в сторону большей угловой скорости.

3) Направление вращений различно, но угловые скорости их равны по величине.

Этот случай представляет некоторую особенность. Здесь $r_c = \infty$, а $\omega = 0$. Вектора ω_e и ω' образуют пару векторов (рис. 237). Так как $\omega = 0$, то мы имеем здесь очевидно поступательное движение тела по отношению к системе $OXYZ$, а при поступательном движении мгновенный центр действительно уходит на бесконечность.

Сводя воедино все три случая, мы приходим к следующему чрезвычайно удобному для запоминания результату:

В составных вращениях вокруг параллельных осей угловые скорости складываются так же, как в Статике параллельные силы.

При проведении этой аналогии нужно рассматривать переносную угловую скорость и одну из относительных как *слагаемые силы*, тогда другая относительная угловая скорость будет соответствовать *равнодействующей силе*.

Мы видим, что подобно параллелограмму скоростей, угловые скорости также складываются по правилу сложения векторов; у сил и скоростей общее то, что и те и другие — векторы.

Перейдем к приложениям полученного результата.

Примеры и упражнения.

1. Эпициклическое зацепление колес. Формула Виллиса. Обычно *эпициклическим* или *планетным* механизмом

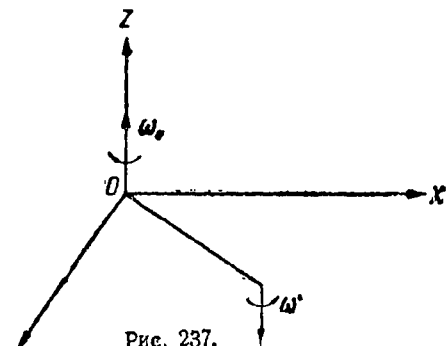
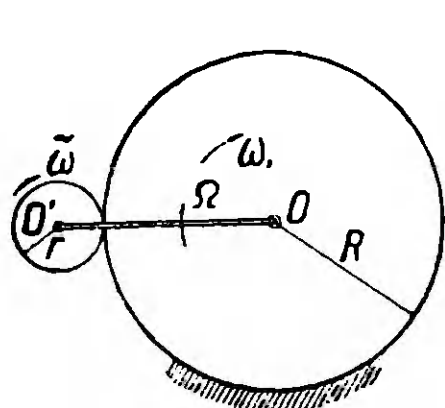


Рис. 237.

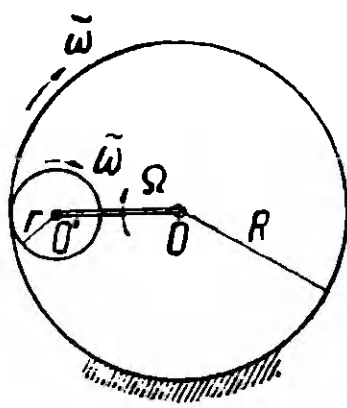
называют сцепление двух или нескольких колес, из которых одно вращается около неподвижной, соединенной с основанием механизма оси, другие — около осей, закрепленных на подвижной рукоятке (рис. 238 и 239), причем зацепление может быть внешним или внутренним.

Колеса, соединенные с вращающейся рукояткой, называют *сателлитами*.

Выведем сначала общее соотношение между угловыми скоростями колес и рукоятки по отношению к основанию механизма в случаях внешнего и внутреннего зацепления. На рисунке все угловые скорости показаны в направлении по часовой стрелке.



внешнее зацепление



внутреннее зацепление

Рис. 238.



Рис. 239. Эпициклический механизм.

(Модель кабинета Механики Ленинградского физико-механического института).

Знак в дальнейшем нам скажет об истинном направлении вращений.

Для вывода искомого соотношения применим следующий метод Виллиса. Дадим основанию механизма вращение с угловой скоростью, равной по величине угловой скорости рукоятки, только в противоположном направлении. При этом, рассматривая движение, например, относительно пола, будем иметь отрицательное вращение основания механизма относительно пола — Ω , но зато рукоятка будет неподвижна и мы от механизма с бегающей рукояткой перейдем к обыкновенной системе двух зубчатых колес с неподвижными осями. Колеса при этом уже будут вращаться не с прежними угловыми скоростями, а со скоростями, уменьшенными на Ω , т. е. $\bar{\omega} - \Omega$, и $\bar{\omega}_1 - \Omega$.

Тогда пользуясь известным соотношением между угловыми скоростями и радиусами, найдем:

$$\frac{\bar{\omega} - \Omega}{\bar{\omega}_1 - \Omega} = - \frac{R}{r}$$

для внешнего зацепления и

$$\frac{\bar{\omega} - \Omega}{\bar{\omega}_1 - \Omega} = \frac{R}{r},$$

для внутреннего. Знак минус в ур-нии (1) поставлен потому, что при внешнем зацеплении направление вращений сцепленных колес противоположное.

Полученные формулы (1) и (2) носят имя Виллиса и являются основными при расчете целого ряда механизмов. Некоторые из них мы сейчас рассмотрим.

2. Колеса Лагира. Рассмотрим внутреннее зацепление двух колес, причем пусть радиус внутреннего колеса в два раза меньше радиуса большего колеса. Закрепим наружное колесо, т. е. положим в формуле (2) $\omega_1 = 0$; тогда при $r = \frac{1}{2} R$ найдем:

$$\bar{\omega} = -\Omega$$



Рис. 240. Зацепление Лагира.

(Модель кабинета Механики Ленинградского физико-механического института).



Рис. 241. Планетный механизм Уатта.

(Модель кабинета Механики Ленинградского физико-механического института).

Мы получаем несколько парадоксальный на первый взгляд результат: меньшее колесо имеет ту же угловую скорость, что и рукоятка; на самом деле, когда рукоятка сделает один оборот, то внутреннее колесо тоже сделает один оборот по отношению к основанию механизма — в этом легко непосредственно убедиться. Вспомним еще, что колеса Лагира аналогичны центроидам эллипсографа, а там за один полный оборот рукоятки описывается полный эллипс (рис. 240).

3. Колеса Уатта. Если при внешнем зацеплении взять колеса одинаковых радиусов, причем наружное колесо перемещать поступательно ($\omega = 0$), то по (1):

$$\bar{\omega}_1 = 2\Omega.$$

Следовательно за один оборот рукоятки основной вал O сделает два оборота в ту же сторону. Уатт применил это в своем известном планетном механизме (рис. 241). Колесо C_1 (рис. 242) жестко связано с шатуном, колесо C свободно насажено на ось O . Соб-

ственно говоря, здесь колесо C_1 не перемещается поступательно, а совершает качания вместе с шатуном, но за полный оборот кривошипа оно вернется к прежнему положению, не сделав ни одного оборота; можно по *конечному* результату, оставляя в стороне отклонения во время движения, считать, что оно переместилось поступательно, при этом колесо C за время полного оборота кривошипа сделает два полных оборота.

4. Механизм точильного станка. Для получения больших угловых скоростей при малых оборотах ведущего вала применяют следующий механизм (рис. 243). Рукоятка IV вращается около неподвижного центра O и несет на своем конце O_1 колесо II , сцепленное с неподвижной обоймой III . Полученное таким образом вращение колесо II передает колесу I , свободно насаженному на ось O . Найдем связь между угловыми скоростями рукоятки и колеса I . Для этого опять, применяя способ Виллиса, дадим основанию механизма вращение, обратное вращению рукоятки, с угло-

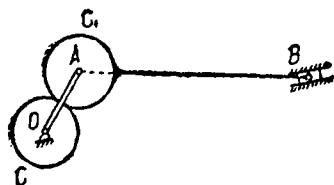


Рис. 242.

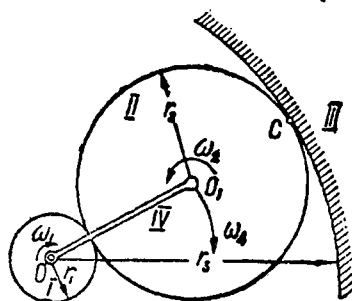


Рис. 243.

вой скоростью, равной угловой скорости рукоятки. Тогда обойма будет иметь угловую скорость $(-\omega_4)$, рукоятка станет неподвижной, а колесо I получит угловую скорость $\omega_1 - \omega_4$. При таком рассмотрении оси O и O_1 неподвижны, а колесо II становится паразитным, не влияющим на абсолютное значение коэффициента передачи, а только на направление. В нашем случае благодаря паразитному колесу передаточное число отрицательно, и мы имеем по обычной формуле зависимости между угловыми скоростями и радиусами сцепленных колес:

$$\frac{\omega_1 - \omega_4}{-\omega_4} = -\frac{r_3}{r_1}.$$

Отсюда:

$$\omega_1 = \frac{r_3 + r_1}{r_1} \omega_4.$$

Взяв, например, $r_3 = 9r_1$, будем иметь:

$$\omega_1 = 10\omega_4,$$

т. е. колесо I получает угловую скорость в 10 раз большую, чем приводящая его в движение рукоятка. Такой механизм часто применяют в ручных точилах.

§ 51. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей.

Предположим, что тело вращается по отношению к системе координат $OX'Y'Z'$ (рис. 244) вокруг оси OZ' с угловой скоростью ω' , причем сама система вращается вокруг оси OZ с угловой скоростью ω_e . Определим движение тела по отношению к системе $OXYZ$. Мы уже знаем из второй темы, что всякое движение тела вокруг неподвижного центра можно себе представить как вращение вокруг мгновенной оси. В данном случае мы как раз имеем этот тип движения, так как оси OZ' и OZ пересекаются в одной точке O .

Определим направление мгновенной оси и найдем соответствующую угловую скорость мгновенного вращения.

Для этого возьмем какую-нибудь точку M тела с вектор-радиусом $\mathbf{r}$ и напишем по теореме о сложении скоростей:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_e. \quad (1)$$

В данном случае

$$\mathbf{v} = [\omega, \mathbf{r}], \quad (2)$$

где ω — искомая угловая скорость тела относительно $OXYZ$,

$$\mathbf{v}' = [\omega', \mathbf{r}], \quad (3)$$

а переносная скорость:

$$\mathbf{v}_e = [\omega_e, \mathbf{r}]. \quad (4)$$

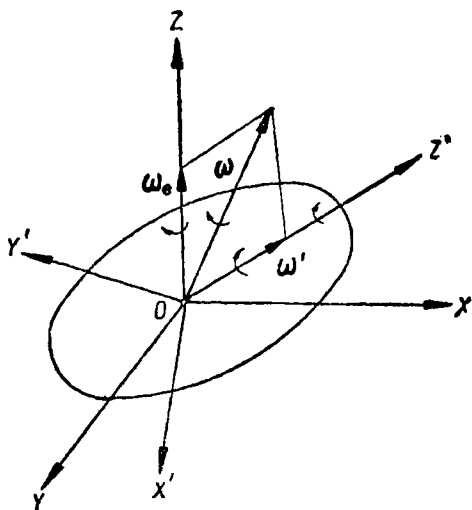


Рис. 244.

Подставляя значения $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{v}_e$ из (2), (3) и (4) в (1), получим после простого соединения двух произведений в одно:

$$[\omega, \mathbf{r}] = [\omega' + \omega_e, \mathbf{r}]. \quad (5)$$

Отсюда в силу произвольности $\mathbf{r}$ следует:

$$\boxed{\omega = \omega' + \omega_e} \quad (6)$$

Мы видим, что и в этом случае угловые скорости складываются по правилу параллелограмма.

Диагональ параллелограмма, построенного на векторе угловой скорости тела по отношению к одной системе координат и переносной угловой скорости, дает вектор угловой скорости тела по отношению к другой системе координат.

Мы применим эту теорему к расчету систем зубчатых конических колес с подвижными осями.

В некоторых случаях бывает выгодно данный вектор угловой скорости разложить на два составляющих вектора. Разложение производится, конечно, по тому же правилу треугольника или параллелограмма угловых скоростей.

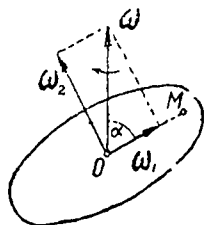


Рис. 245.

Желая, например, найти скорость точки M диска, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг некоторой оси, наклоненной к плоскости диска под постоянным углом α (рис. 245), вместо того, чтобы определять скорость v_M как произведение ω на кратчайшее расстояние точки M до оси ω , т. е. $\omega \cdot OM \cdot \sin \alpha$, можно разложить ω на два вектора: ω_1 , проходящий через точку M , не дающий слагающей

скорости точке M , и вектор ω_2 , перпендикулярный плоскости диска. Скорость точки M будет равна $\omega_2 \cdot OM = \omega \cdot \sin \alpha \cdot OM$. Другой пример такого разложения мы будем иметь при изложении теории бегунной мельницы в упражнениях к настоящему параграфу.

Примеры и упражнения.

1. Эпициклическое зацепление конических колес. Рамка BB (рис. 246) вращается вокруг оси XX с угловой скоростью Ω и увлекает с собою ось AA . На эту ось надета шестерня (сателлит), состоящая из двух наглухо скрепленных между собою колес радиусов r_1 и r_2 , свободно вращающихся на оси AA . Колеса эти спарены с двумя колесами радиусов R_1 и R_2 , имеющими ту же ось вращения, что и рамка BB , но ничем с нею не связаны. Обозначив угловые скорости как показано на чертеже, найдем зависимости между угловыми скоростями колес и рамки.

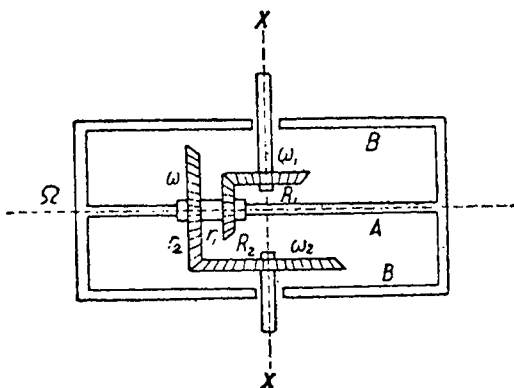


Рис. 246.

Для этого опять применим способ Виллиса. Дадим всему основанию механизма вращение, противоположное вращению рамки и равное ему по величине. Тогда по отношению к полу рамка станет неподвижна, угловые скорости ω_1 и ω_2 станут равными $\omega_1 - \Omega$ и $\omega_2 - \Omega$, что касается угловой скорости сателлита относительно рамки, то назовем ее $\tilde{\omega}$. При остановившейся рамке будем иметь из условия спаренности верхних колес:

$$\frac{\bar{\omega}_1 - \Omega}{\bar{\omega}} = \frac{r_1}{R_1}, \quad (1)$$

а из условия спаренности нижних:

$$\frac{\bar{\omega}_2 - \Omega}{\bar{\omega}} = -\frac{r_2}{R_2}. \quad (2)$$

В равенстве (2) поставлен отрицательный знак, потому что колеса R_1 и R_2 вращаются в противоположных направлениях.

Деля (1) на (2) после простых выкладок, получим:

$$\Omega \left(\frac{R_1}{r_1} + \frac{R_2}{r_2} \right) = \bar{\omega}_1 \frac{R_1}{r_1} + \bar{\omega}_2 \frac{R_2}{r_2}. \quad (3)$$

Это основная формула расчета элициклических серий конических колес.

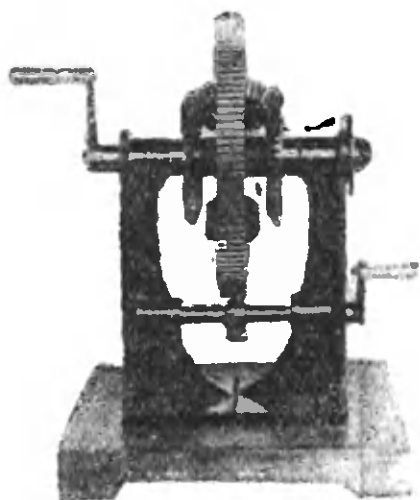


Рис. 247. Дифференциальное зацепление.
(Модель кабинета Механики Ленинградского физико-механического института).

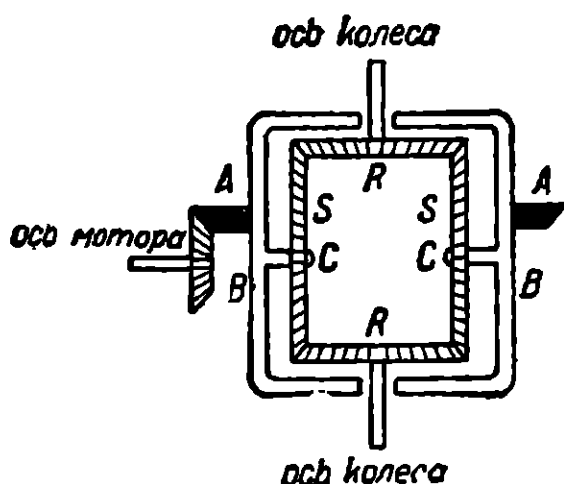


Рис. 248.

Полагая в формуле (3) $r_1 = r_2$ и $R_1 = R_2$, т. е. беря сателит не двойным, а ординарным, получим механизм *автомобильного дифференциала*.

Формула (3) при этом перепишется в виде:

$$\Omega = \frac{\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2}{2}. \quad (4)$$

Устройство автомобильного дифференциала видно из рис. 247. Вращение с оси мотора передается на коническое колесо AA (рис. 248), жестко соединенное с кожухом дифференциала BB . Кожух, вращаясь вокруг той же оси, около которой вращаются автомобильные колеса, увлекает ось CC , на которые насажены сателлиты.

Сателлиты сцеплены с колесами RR , которые жестко соединены с колесами автомобиля.

Условие (4) показывает, что $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ каждое в отдельности произвольны, но в среднем арифметическом должны давать угло-

вую скорость кожуха. Этим свойством дифференциала и пользуются. На прямолинейном пути угловые скорости колес автомобиля одинаковы: $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$ и $\Omega = \bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_2$; при этом, как видно из (1) или (2), $\omega = 0$, т. е. сателиты не вращаются вокруг осей CC .

На заворотах колеса описывают окружности разных радиусов и имеют разные скорости, $\omega_1 \neq \omega_2$, но Ω может оставаться прежним, лишь бы полусумма ω_1 и ω_2 сохраняла свою величину. При движении на заворотах сателиты приходят во вращение и таким образом берут на себя разницу угловых скоростей колес.

2. Бегуны или чилийская мельница. Схема устройства чилийской мельницы, применяемой в горном деле, видна из рис. 249.

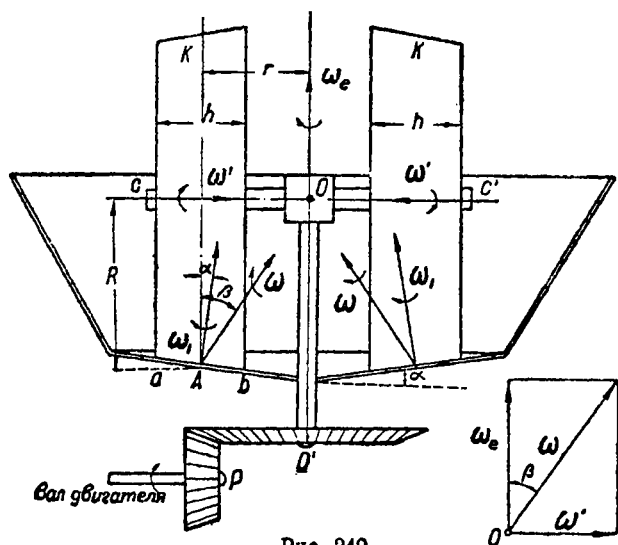


Рис. 249.

Бегуны KK , представляющие массивные чугунные колеса со стальными ободами, катятся по дну бегунной чаши, вращаясь вокруг подвижной оси CC' с относительной угловой скоростью ω' . Ось CC' приводится во вращение с угловой скоростью ω_e вокруг вертикальной оси при помощи конической передачи от мотора.

Определим движение бегунов относительно чаши. Мы имеем здесь, очевидно, случай сложения вращений около пересекающихся осей OO' и CC' . По диаграмме сразу находим направление и величину вектора ω , т. е. направление мгновенной оси и величину угловой скорости вращения бегуна по отношению к чаше. Чтобы получить расположение оси, вспомним, что ось пройдет через точку O пересечения осей слагаемых вращений. Линия касания колеса с дном ab , как мы видим, не является мгновенной осью, но среди всех точек соприкосновения имеется одна, имеющая мгновенную скорость нуль. Крайние точки обода a и b при этом будут скользить по дну чаши.

Определив ω и зная ширину обода колеса и угол α , образованный дном чаши и горизонтальной прямой, можно найти и величину скорости скольжения точек a и b .

Для этого найдем составляющую ω на направление перпендикуляра к дну чаши. Величина этой составляющей будет

$$\omega_1 = \omega \cos(\beta - \alpha) = \omega_e \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\cos \beta},$$

где

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{R},$$

а r и R — среднее расстояние колеса до оси OO' и средний радиус бегуна. При этом, считая середину отрезка ab — точку A , за точку пересечения мгновенной оси и линии касания колеса с дном и замечая, что $ab = \frac{h}{\cos \alpha}$, найдем:

$$\begin{aligned} v_a = v_b = \omega_1 \frac{ab}{2} &= \omega_e h \frac{\cos(\beta - \alpha)}{2 \cos \alpha} = \frac{1}{2} \omega_e h \frac{\cos(\beta - \alpha)}{\cos \alpha \cos \beta} = \\ &= \frac{1}{2} \omega_e h (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta). \end{aligned}$$

Приведем численный расчет.

Двухбегунная чаша на Березовском руднике имеет средний радиус бандажа $R = 0,99$ м, средний радиус вращения $r = 0,54$ м, ось бегунов делает 11 об/мин., что дает, примерно, $\omega_e = 1,1 \frac{1}{\text{сек}}$. Прежде всего определим β ; для этого имеем уравнение:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{0,54}{0,99} = 0,545, \text{ или } \beta = 28^\circ 36'.$$

Отсюда, вспоминая диаграмму на рисунке, находим ω :

$$\omega = \frac{\omega_e}{\cos \beta} = \frac{1,1}{0,878} = 1,25 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Считая $\alpha = 8^\circ$ и ширину бегуна $h = 30$ см, будем иметь

$$v_a = v_b = 0,18 \text{ м/сек},$$

т. е. около 20 см/сек; это весьма заметная скорость, улучшающая эффект растирания руды в чаше. Сравнивая ее с линейной скоростью той точки рукоятки OC , которая находится посередине втулки бегуна на расстоянии $r = 0,5$ м от точки O , найдем, что отношение этих скоростей равно около $\frac{1}{3}$, т. е. скорость скольжения представляет по величине около 30% окружной скорости бегуна.

Возвращаясь еще раз к общей формуле скорости скольжения, видим, что при данных α , ω_e и h скорость скольжения, а вместе с тем и эффект растирания тем больше, чем больше β , т. е. чем меньше радиус колеса. Конечно, при этом должен быть выдержан определенный вес бегуна. Обычно вес бегуна бывает от 2,5 до 5 т.

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. На рис. 250 изображен эпициклический механизм с возвратным рядом. Колесо *I* свободно насажено на ось O_1 , вокруг которой может вращаться рукоятка *A*; через рукоятку проходит ось O_2 , на которой наглухо заклинены колеса *II* и *III*, так что угловые скорости последних равны между собой. Колесо *IV* неподвижно. Определить отношение угловой скорости колеса *I* и рукоятки при $r_1 = r_3 = 100$ мм, $r_2 = 99$ мм, $r_4 = 101$ мм.

2. Показанный на рис. 251 эпициклический механизм состоит из трех рукояток $\overline{O_1O_4}$, $\overline{O_4O_3}$, $\overline{O_3O_2}$ и четырех шестерен *I*, *II*, *III*, *IV* с радиусами, соответственно равными $r_1 = 51$ мм, $r_2 = 76$ мм, $r_3 = 114$ мм и $r_4 = 139$ мм; $O_1O_2 = O_3O_4 = 253$ мм, $O_1O_4 = O_2O_3 = 180$ мм. Колесо *I* неподвижно. Вычислить угол поворота колеса *II* при подъеме рукоятки O_3O_4 на высоту $h = 75$ мм.

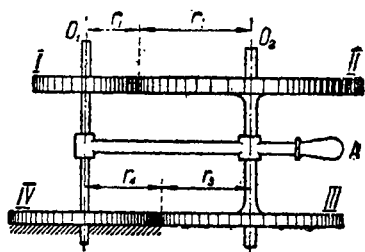


Рис. 250.

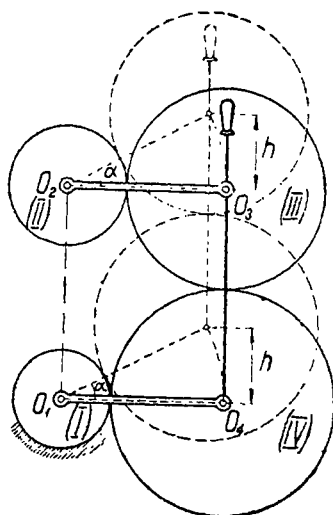


Рис. 251.

3. Аэроплан делает вираж радиуса 50 м. Плоскость крыльев образует с горизонтом угол 20° . Зная, что скорость аэроплана на вираже 200 км/час, определить угловую скорость его вращения вокруг оси, перпендикулярной к плоскости крыльев (регистрируемую указателем виражей).

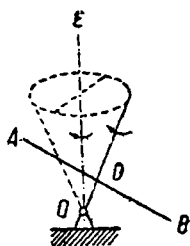


Рис. 252.

4. Круглая площадка *AB* вращается вокруг оси *OC*, проходящей через ее центр, делая 5 об/мин., ось *OC* вращается в том же направлении вокруг вертикали *OE*, делая 10 об/мин. Угол между осями $\alpha = 20^\circ$, диаметр площадки равен 4 м, расстояние $OD = 2$ м. Определить скорость точек *A* и *B* площадки, занимающих в рассматриваемый момент самое высокое и самое низкое положения (рис. 252).

5. Автомобиль на завороте описал колею шириной в 2 м, радиус внешней окружности колеи 20 м, скорость центра тяжести автомобиля при этом была равна 25 км/час. Зная, что радиус задних колес автомобиля = 60 см, определить угловую скорость кожуха дифференциала и скорости вращения сателлитов, если радиусы их

равны 2,5 см, а радиусы спаренных с ними шестерен, заклиненных на осях колес автомобиля, равны 5 см.

6. Крестовина $A_1A_2B_1B_2$ универсального шарнира Кардана-Гука (рис. 253), схема которого показана на рис. 254, совершает сложное вращательное движение вокруг неподвижной точки C . Найти зависимость между угловыми скоростями валов, связанных этим шарниром, в двух положениях механизма: 1) когда плоскость вилки $A_1O_1B_1$ горизонтальна и перпендикулярна плоскости чертежа, а плоскость второй вилки $A_2O_2B_2$ совпадает с плоскостью чертежа и 2) когда, наоборот, плоскость первой вилки лежит в плоскости чертежа, а вторая перпендикулярна ей. Угол между осями постоянен и равен α .

Указание. Разложить угловую скорость крестовины, с одной стороны, на угловую скорость вращения оси A_1B_1 и вращения вокруг этой оси, с другой стороны, на вращение оси A_2B_2 и вращения вокруг нее. В случае 1) взять проекции на направление ω_1 , в случае 2) на ось ω_2 .



Рис. 253. Шарнир Кардана.
(Модель кабинета Механики Ленинградского
физико-механического института).

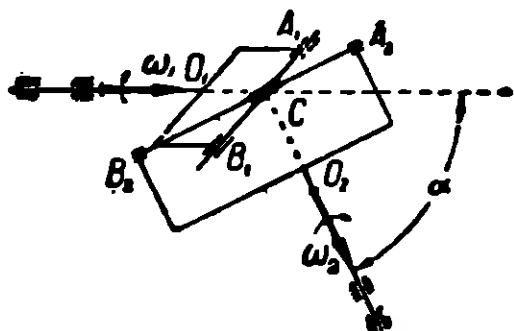


Рис. 254.

Задание 16-е.

Ускорения в относительных движениях.

Нам остается, наконец, рассмотреть связь между ускорениями движущейся точки по отношению к разным системам координат. Как мы увидим в настоящем задании, между относительными ускорениями и ускорением переносного движения — переносным ускорением — нет такой простой связи, как в случае скоростей. Правило параллелограмма ускорений может применяться только в том простейшем случае, когда взаимное движение систем представляет собою движение *поступательное*. Что касается общего случая вращения систем $OXYZ$ и $O'X'Y'Z'$ друг по отношению к другу, то в этом случае, кроме переносного ускорения, появляется еще одно дополнительное слагаемое — *поворотное* или *кориолисово* ускорение. Таким образом вместо *параллелограмма ускорений* мы приходим в общем случае к правилу *параллелепипеда ускорений*.

Этот метод определения ускорений в связи с общей идеей разложения движения на простейшие, о которой была речь в предыдущих заданиях настоящей темы, имеет ряд в высшей степени полезных применений в теории машин, при изучении движения жидкости по вращающимся каналам, как, например, в теории гидравлических турбин, а также в геофизике (ветры, течения воды в реках),

§ 52. Теорема Кориолиса.

Теорема Кориолиса определяет связь между ускорениями точки в двух системах координат, движущихся друг по отношению к другу. Мы дадим векторный вывод этой теоремы, основанный на доказанной в первом задании лемме об изменениях вектора в разных системах координат.

Будем исходить из основной формулы параллелограмма скоростей, взятой в форме равенства (5) § 49

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{v}_0 + [\omega, \mathbf{r}']. \quad (1)$$

Возьмем от обеих частей этого равенства производную по времени в системе $OXYZ$, тогда получим:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}'}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \left[\frac{d\omega}{dt}, \mathbf{r}' \right] + \left[\omega, \frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right]. \quad (2)$$

Преобразуем это равенство так, чтобы производные от векторов брались в той системе координат, к которой дифференцируемый вектор отнесен; так, например, $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ берется в системе $OXYZ$, потому что $\mathbf{v}$ есть скорость по отношению к системе $OXYZ$; $\frac{d\mathbf{v}'}{dt}$ необходимо преобразовать в таком виде, чтобы входила производная $\frac{d'\mathbf{v}'}{dt}$, так как $\mathbf{v}'$ есть вектор скорости по отношению к системе $O'X'Y'Z'$. Замечая, что на основании леммы:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}'}{dt} &= \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} + [\omega, \mathbf{v}'], \\ \frac{d\mathbf{r}'}{dt} &= \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} + [\omega, \mathbf{r}'], \end{aligned}$$

и что, кроме того,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{w}; \quad \frac{d'\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{w}'; \quad \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} = \mathbf{w}_0; \quad \frac{d'\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}'; \quad \frac{d\omega}{dt} = \varepsilon; \\ [\omega, \mathbf{r}'] &= \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0, \end{aligned}$$

найдем:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}_0 + [\varepsilon, \mathbf{r}'] + [\omega, \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_0] + 2[\omega, \mathbf{v}']. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{w}$ — ускорение точки в ее движении относительно $OXYZ$; $\mathbf{w}'$ — ускорение по отношению к системе $O'X'Y'Z'$; совокупность 2, 3 и 4 слагаемых определяет, как было выяснено во второй теме, ускорение точки твердого тела ε вектор-радиусом $\mathbf{r}$, т. е. ускорение пункта системы координат $O'X'Y'Z'$, через который проходит в данный момент движущаяся точка, т. е. переносное ускорение, и наконец, последнее слагаемое является дополнительным по сравнению с правилом параллелограмма — его называют *кориолисовым* или *поворотным* ускорением и обозначают символом $\mathbf{w}_c$.

Итак, мы имеем окончательно:

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}' + \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_c.$$

(4)

Формула (4) и дает теорему Кориолиса:

Ускорение точки по отношению к некоторой системе координат складывается геометрически из ускорений этой точки по отношению к другой системе, переносного ускорения и кориолисова ускорения.

Ускорение составного движения, таким образом, складывается по правилу параллелепипеда (рис. 255) из составляющих его слагаемых.

Первые две составляющие ничего нового для нас не представляют. Слагаемое $\mathbf{w}'$ определяется по правилам Кинематики точки (первая наша тема), $\mathbf{w}_e$ рассчитывается, как ускорение точки твердого тела (вторая тема). Остановимся подробнее на определении третьего слагаемого — кориолисова ускорения.

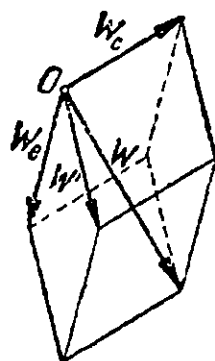


Рис. 255.

§ 53. Кориолисово ускорение. Способы его определения.

Как непосредственно следует из определения кориолисова ускорения:

$$\mathbf{w}_c = 2 [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}'],$$

(5)

при практических расчетах величину кориолисова ускорения можно находить по формуле:

$$w_c = 2 \omega v' \sin(\widehat{\boldsymbol{\omega}, \mathbf{v}'}),$$

(6)

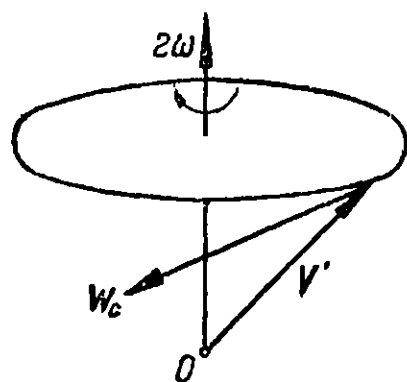


Рис. 256.

а направление — по общему правилу векторного умножения, т. е. направлять кориолисово ускорение по перпендикуляру к плоскости, содержащей $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}'$, в ту сторону, откуда вращение $\boldsymbol{\omega}$ к $\mathbf{v}'$ на наименьший угол будет видно положительным; если $\boldsymbol{\omega}$ и $\mathbf{v}'$ не лежат в одной плоскости, то можно перенести их параллельно самим себе так, чтобы они пересеклись,

и уже тогда восставлять перпендикуляр к плоскости, определенной их пересечением. Такой прием практически удобен и прост, и хотя мы будем и в дальнейшем им пользоваться, все же изложим и другой часто употребляемый способ.

Построим следующую диаграмму (рис. 256): отложим от некоторой точки O вектор $2\boldsymbol{\omega}$, параллельный вектору угловой скорости вращения системы $O'X'Y'Z'$, и от этой же точки вектор, равный и параллельный вектору $\mathbf{v}'$ скорости точки по отношению к системе $O'X'Y'Z'$.

Если будем вращать вектор $\mathbf{v}'$ вокруг оси с угловой скоростью 2ω , то окружная скорость конца вектора $\mathbf{v}'$, будет равна:

$$[2\omega, \mathbf{v}'] = 2[\omega, \mathbf{v}'],$$

т. е. будет как раз представлять вектор $\mathbf{w}_c$ кориолисова ускорения.

Только-что указанный прием применяют обычно те авторы, которые при изложении Кинематики не пользуются векторным методом и не вводят понятия векторного произведения.

Отметим некоторые частные случаи определения кориолисова ускорения, встречающиеся на практике.

1. Кориолисово ускорение равно нулю, если:

а) $\omega = 0$, т. е. в случае поступательного движения систем $OXYZ$ и $O'X'Y'Z'$ друг по отношению к другу;

б) вектор ω параллелен $\mathbf{v}$, т. е. если точка в системе $O'X'Y'Z'$ движется параллельно оси вращения системы.

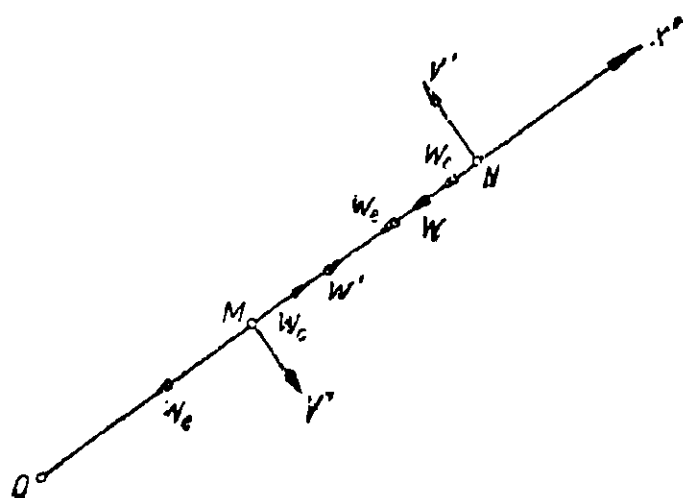
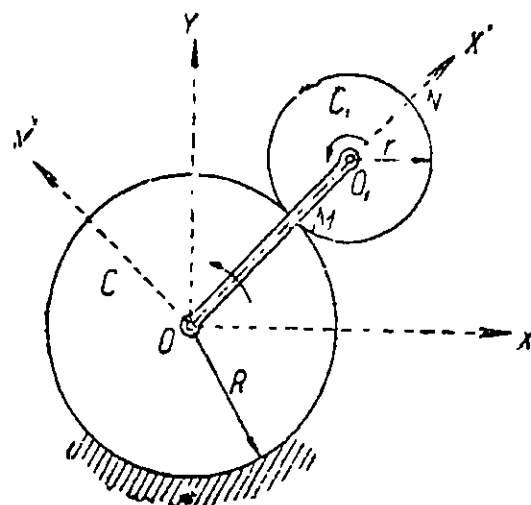


Рис. 257.

2. Кориолисово ускорение равно $2\omega v'$, если точка движется в плоскости, перпендикулярной оси вращения системы

Примеры и упражнения.

1. Ускорения в эпициклических механизмах. Определим ускорение точек M и N (рис. 257) колеса C_1 радиуса r , катящегося без скольжения по неподвижному колесу C радиуса R , если рукоятка вращается равномерно с угловой скоростью ω .

Свяжем систему $OX'Y'$ с вращающейся рукояткой и замечая, что угловая скорость колеса C_1 по отношению к рукоятке будет равна $\frac{R}{r}\omega$, найдем:

а) для точки M :

$$\omega' = \left(\frac{R}{r}\omega\right)^2 r = \frac{R^2}{r}\omega^2; \quad w_e = \omega^2 R \text{ и } w_c = 2\omega r \cdot \frac{R}{r}\omega = 2\omega^2 R;$$

б) для точки N :

$$\omega' = \frac{R^2\omega^2}{r}, \quad w_e = \omega^2(R + 2r), \quad w_c = 2\omega^2 R.$$

Направление соответствующих ускорений показано на рис. 257.

Мы видим, что все ускорения располагаются по одной прямой, поэтому полное ускорение по отношению к системе OXY определится как алгебраическая сумма составляющих:

а) для точки M :

$$w = 2\omega^2 R + \frac{R^2}{r}\omega^2 - \omega^2 R = \omega^2 R \left(1 + \frac{R}{r}\right)$$

и направлено от M к N ;

б) для точки N :

$$w = \frac{R^2}{r}\omega^2 + \omega^2(R + 2r) + 2\omega^2 R = \omega^2 \left(3R + 2r + \frac{R^2}{r}\right)$$

и направлено от N к M .

Если радиусы R и r одинаковы, то:

$$w_M = 2\omega^2 R,$$

$$w_N = 6\omega^2 R.$$

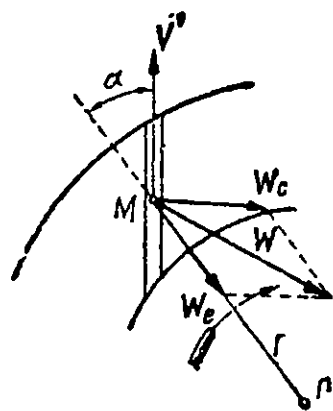


Рис. 259.

2. Колеса Лагира. В случае внутреннего зацепления колес, при отношении диаметров внешнего и внутреннего колеса 2:1 (рис. 258), определим ускорения точек внутреннего колеса, находящихся на его ободе.

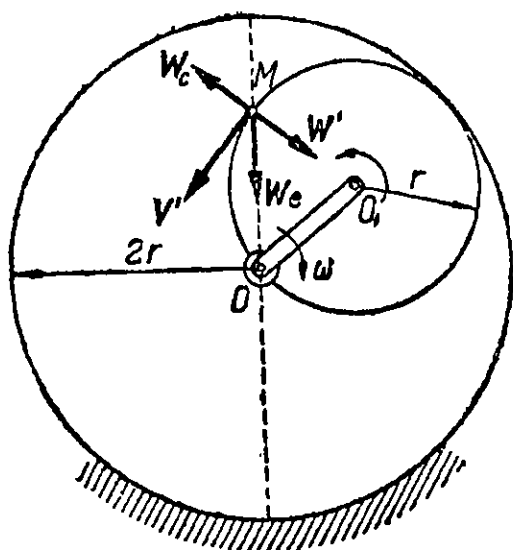


Рис. 258.

Вспоминая, что в этом случае угловая скорость малого колеса по отношению к рукоятке в два раза больше угловой скорости рукоятки, будем иметь:

$$w' = (2\omega)^2 r = 4\omega^2 r,$$

$$e = \omega^2 \cdot \overline{OM},$$

$$w_c = 2\omega \cdot 2\omega r = 4\omega^2 r.$$

Направление этих ускорений показано на рисунке. Мы видим, что в любой точке M обода кориолисово

ускорение равно по величине ускорению точки по отношению к рукоятке и противоположно ему по направлению, так что ускорение w по отношению к основанию механизма сводится к ускорению переносного движения. Таким образом имеем:

$$w = \omega^2 \overline{OM},$$

причем ускорение всегда имеет направление к центру O . Это — ускорение прямолинейного гармонического колебания точки M по прямой, указанной на рисунке пунктиром, с периодом, равным

периоду полного оборота рукоятки. Мы снова получаем известный уже учащемуся из предыдущего факт: точка M (ползушка эллипсографа) описывает прямую и совершает гармонические колебания по ней.

3. Ускорение частицы воды в прямолинейном канале ротора турбины. Если частица M (рис. 259) имеет постоянную скорость v' по отношению к турбинному колесу, то $w' = 0$. Переносное ускорение w_e определится по угловой скорости колеса ω и расстоянию r того места канала M , по которому проходит частица, от оси O , именно, $w_e = \omega^2 r$.

Кориолисово ускорение в этом случае будет равно по величине $w_c = 2\omega v'$, так как ось вращения перпендикулярна к каналу.

Направление ускорений показано на рисунке. Полное ускорение определится по правилу параллелограмма (здесь, как уже было упомянуто, $w' = 0$). Обыкновенно при расчетах турбины представляют интерес проекции ускорения частицы: 1) на направление радиуса, мы ее обозначим w_r и 2) на направление, перпендикулярное к радиусу, w_τ . Вторая проекция имеет значение при определении вращающей силы турбины, первая — при расчете давления на ось. Если обозначим угол канала с радиусом через α , то будем иметь:

$$w_r = -w_e - w_c \sin \alpha = -\omega^2 r - 2\omega v' \sin \alpha,$$

$$w_\tau = w_c \cdot \cos \alpha = 2\omega v' \cos \alpha.$$

4. Кориолисово ускорение на поверхности земли. Рассмотрим ускорение точки, двигающейся на поверхности земли,

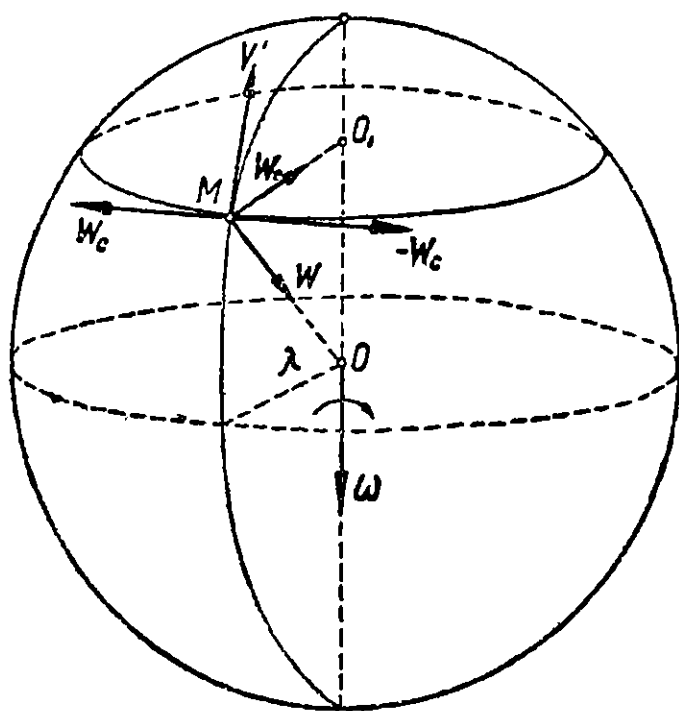


Рис. 260.

причем примем во внимание *вращение земли*. Сравним между собою движение точки в системе, связанной с вращающейся землею, и системе, по отношению к которой земля вращается, например, системе, связанной с солнцем. Тогда ряд явлений, представляющихся нам в нашей земной системе непонятными, становится простым и естественным с точки зрения наблюдателя, с землею не связанного. Несколько таких примеров мы сейчас и укажем.

Выведем сначала общее выражение ускорения точки w' по отношению к земле через ускорение w той же точки в системе, поступатель-

но движущейся по отношению к солнцу (рис. 260).

Из общей формулы (4) следует:

$$w' = w - w_e - w_c.$$

Разобьем правую часть на два слагаемых:

$$w' = w_1 - w_c,$$

где

$$w_1 = w - w_c.$$

Вектор w_c , равный по величине центростремительному ускорению и противоположный ему по направлению, называется *центробежным ускорением*. Вектор w представляет собою ускорение, вызываемое притяжением точки M землею. Это—то ускорение, которое заставляет точку двигаться по земле и не допускает возможности сорваться с земли. Центробежное ускорение, наоборот, стремится дать движение точке от земли. Ускорение силы тяжести $g = 9,81$ м/сек, наблюдаемое нами на поверхности земли, есть не что иное, как w , исправленное на центробежное ускорение, т. е. как раз вектор w_1 . Благодаря центробежному ускорению, ускорение силы тяжести направлено не к центру земли, а несколько отклонено (рис. 261). Рассмотрим ускорение w_c (его иногда называют *составным центробежным ускорением*). Это ускорение лежит в горизонтальной плоскости, если точка движется по меридиану; ускорение это направлено по касательной к параллели.

Определим величину этого ускорения.

Рассмотрим точку M , имеющую географическую широту λ идвигающуюся по меридиану, тогда:

$$w_c = 2 \omega v' \sin \lambda,$$

здесь v' — скорость точки по отношению к земле, ω — угловая скорость вращения земли, равная:

$$\omega = \frac{2\pi}{24,3600} = 7,2 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{сек.}}$$

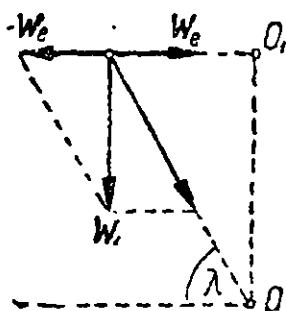


Рис. 261.

широта Ленинграда $\lambda = 60^\circ$, т. е. $\sin \lambda = 0,87$, и мы получим:

$$w_c = 12,5 \cdot 10^{-5} v'.$$

Составное центробежное ускорение, по общему правилу, направлено будет: а) в северном полушарии — с запада на восток, если точка движется с юга на север, и с востока на запад, если точка движется с севера на юг (учащийся должен проверить это, обратив внимание на то, что вектор угловой скорости земли направлен с севера на юг!), б) в южном полушарии — наоборот.

Таким образом всякое тело, *двигающееся по меридиану* с некоторой скоростью, получает *добавочное боковое ускорение*, вызывающее его отклонение в направлении параллели.

Это замечательное явление, вызванное вращением земли, действительно наблюдается на ряде земных явлений.

Если, например, река течет в северном полушарии с севера на юг или с юга на север по меридиану (Волга), то частицы ее, получая дополнительное боковое ускорение с востока на запад или с запада на восток, постоянно подмывают правый берег (если

смотреть вниз по течению), почему он и становится обрывистым, а левый берег, наоборот, остается отлогим (закон Бэра). В южном полушарии у рек, текущих по меридиану, правый берег отлогий, а левый — обрывистый.

Точно также правый рельс железнодорожного пути, расположенного по меридиану в северном полушарии, всегда более истерт, чем левый.

Легко подсчитать добавочное давление поезда на рельс, обусловленное этим ускорением. На нашей широте величина кориолисова ускорения при скорости курьерского поезда, равной 80 км/час или 22,2 м/сек будет:

$$w_c = 12,5 \cdot 10^{-5} \cdot 22,2 = 2,77 \cdot 10^{-3} \text{ м/сек}^2,$$

т. е. около 0,03% от ускорения силы тяжести g . Сила бокового давления, как вероятно известно учащемуся из физики, будет равна произведению массы поезда на это ускорение, т. е.:

$$\frac{P w_c}{g} = 0,0003 P,$$

где P — вес поезда. Полагая P , например, равным 500 т, найдем дополнительное давление равным около 150 кг.

Кориолисовым ускорением объясняются также и некоторые морские и воздушные течения (пассаты).

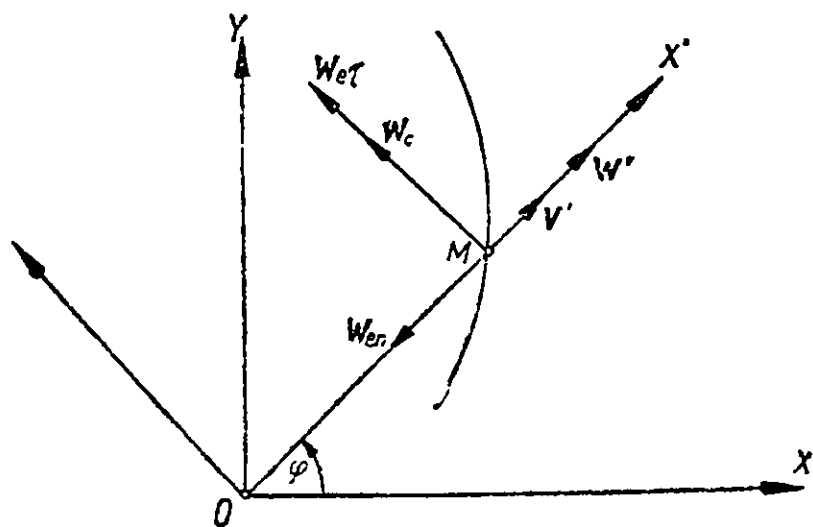


Рис. 262.

5. Проекция ускорения на оси полярной системы координат. Мы можем воспользоваться теоремой Кориолиса для вывода выражений проекций ускорения точки на оси полярных координат, т. е. на направление радиуса-вектора точки и перпендикуляра к нему, направленного в сторону возрастания угла. Для этого направим (рис. 262) по радиусу в сторону его возрастания ось OX' , а перпендикулярно к нему в сторону возрастания угла — ось OY' . При движении точки M , система $OX'Y'$ будет вращаться с угловой скоростью $\dot{\omega} = \dot{\varphi}$, причем вектор ω направлен вглубь чертежа.

Легко сообразить, что в данном случае: $v' = \dot{r}$, $w' = \ddot{r}$. Что касается переносного ускорения, то оно складывается из двух: вращательного $w_{\epsilon\tau}$ и центростремительного w_{en} , равных соответственно:

$$w_{\epsilon\tau} = r\ddot{\varphi} \text{ и } w_{en} = r\dot{\varphi}^2.$$

Кориолисово ускорение будет равно

$$w_c = 2\dot{\varphi}\dot{r}.$$

Из рисунка сразу видно, что проекции ускорения на оси X' и Y' — мы их обозначим w_r и w_φ — будут равны

$$\begin{aligned} w_r &= \ddot{r} - \dot{r}^2 \varphi^2 \\ w_\varphi &= r \ddot{\varphi} + 2 \dot{\varphi} \dot{r} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}) \end{aligned} \quad (1)$$

Выражение $r^2 \dot{\varphi}$, входящее в формулу w_φ , имеет интересный кинематический смысл. Чтобы его выяснить, рассмотрим площадь S (рис. 263), заштрихованную радиусом-вектором r точки M за время прохождения от M_0 до M . Если за время Δt точка перейдет из положения M в M' , то площадь S возрастет на ΔS . Эта малая площадь будет равна

$$\Delta S = \frac{1}{2} r (r + \Delta r) \cdot \Delta \varphi = \frac{1}{2} r^2 \Delta \varphi + \frac{1}{2} r \Delta r \Delta \varphi.$$

Деля на Δt и переходя к пределу, когда Δt стремится к нулю, получим:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} \quad (2)$$

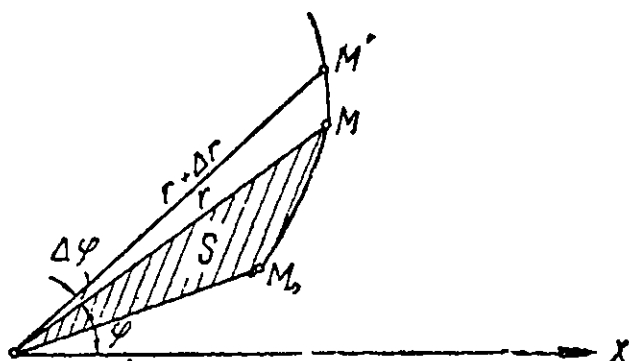


Рис. 263.

Эта производная, определяющая быстроту изменения площади, заштриховываемой радиусом-вектором при движении точки, называется *секториальной скоростью точки* и обозначается через A . Секториальная скорость измеряется в $\text{м}^2/\text{сек}$ или $\text{см}^2/\text{мин}$. и др.

Вводя секториальную скорость, перепишем w_φ так:

$$w_\varphi = \frac{2}{r} \frac{dA}{dt}. \quad (3)$$

Применим выведенные формулы к решению следующей задачи. Определить *ускорение планеты*, вращающейся по эллиптической орбите, в фокусе которой расположено солнце, если вращение происходит с постоянной секториальной скоростью (второй закон Кеплера).

По условию задачи:

$$r^2 \dot{\varphi} = 2A = \text{const.}$$

Следовательно $w_\varphi = 0$, т. е. ускорение направлено по радиусу, к центру или от центра. Определим это ускорение. Для этого возьмем уравнение эллипса в полярных координатах:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

где p — параметр эллипса, e — эксцентриситет. Дифференцируя по времени, найдем:

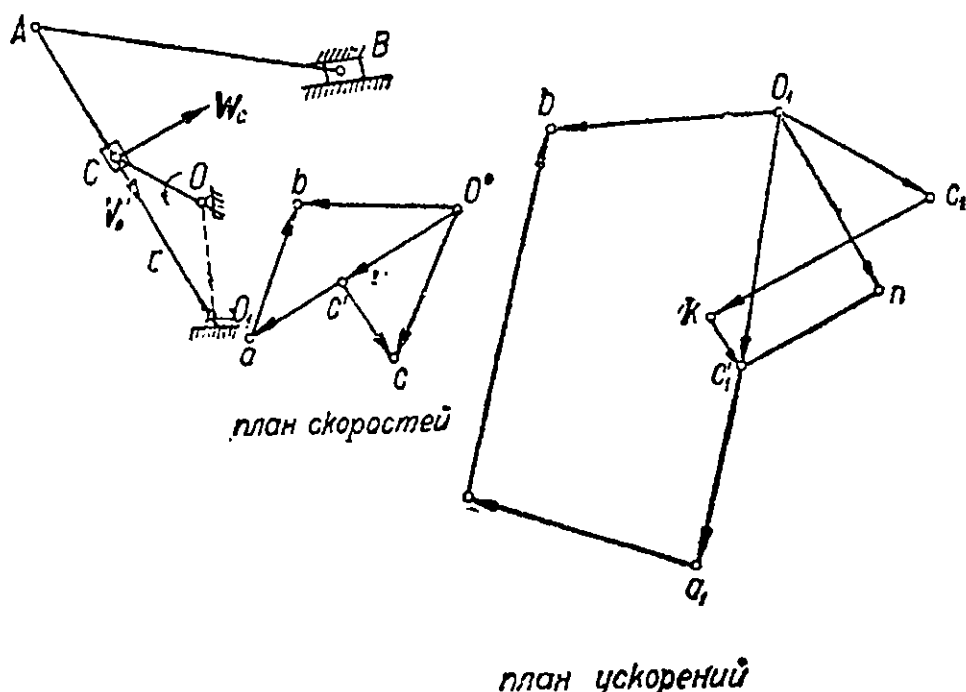
$$\dot{r} = \frac{pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} \dot{\varphi} = \frac{e}{p} r^2 \sin \varphi \dot{\varphi} = 2 \frac{eA}{p} \sin \varphi,$$

$$\ddot{r} = 2 \frac{eA}{p} \cos \varphi \dot{\varphi} = \frac{4eA^2}{p} \cdot \frac{\cos \varphi}{r^2}.$$

Отсюда, по (1):

$$w_r = \frac{4eA^2}{p} \frac{\cos \varphi}{r^3} - \frac{4A^2}{r^3} = \frac{4A^2}{r^2} \left(\frac{e}{p} \cos \varphi - \frac{1}{r} \right) = - \frac{4A^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Мы видим, что ускорение планеты направлено всегда к солнцу, а по величине обратно пропорционально квадрату расстояния ее до солнца. Если вспомнить, что сила притяжения равна произведению массы на ускорение, то мы придем к известному закону всемирного тяготения, утверждающему, что притяжение двух масс обратно пропорционально квадрату расстояния между ними.



план ускорений
Рис. 264.

6. План ускорений механизма с качающейся кулисой. План скоростей этого механизма мы построили на рис. 264. Предполагая, что кривошип OC вращается равномерно, займемся теперь построением плана ускорений. Наиболее существенным вопросом всего построения является определение переносного ускорения w_c точки C . После того как последнее будет найдено, легко строится ускорение точки A , а вслед за этим и ползуна B .

На основании теоремы сложения ускорений в относительном движении мы можем написать:

$$w_e = w_{eI} + w_{eII} = w - w' - w_c,$$

причем в левой части мы разложили ускорение w_e точки кулисы, через которую проходит в рассматриваемый момент ползушка, на вращательную w_{eI} и центростремительную w_{eII} части.

Из полюса O_1 плана ускорений откладываем вектор:

$$\overrightarrow{O_1 n} = w_{eII},$$

направленный параллельно кулисе от C к O_1 и равный по величине:

$$w_{eII} = \frac{v_e^2}{\rho} = \frac{(\overline{Oc'})^2}{O^*c},$$

где O^*c — отрезок плана скоростей, изображающий переносную скорость.

Конец вектора w_e должен лежать на перпендикуляре к $\overrightarrow{O_1 n}$, проведенном через его конец n , ибо w_{eII} перпендикулярно w_{eI} , и:

$$w_e = w_{eI} + w_{eII}.$$

Обратимся теперь к построению правой части нашей формулы, т. е. геометрической разности

$$w - w_c - w'.$$

Из полюса плана ускорений откладываем вектор:

$$\overrightarrow{O_1 c_1} = w,$$

направленный параллельно кривошипу от C к O (кривошип вращается равномерно) и равный по величине:

$$w = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(\overline{O^*c})^2}{\overline{OC}}.$$

Из конца его откладываем вектор w_c . Величина ускорения Кориолиса будет:

$$w_c = 2\omega_1 \cdot v' = 2 \cdot \frac{\overline{O^*c'}}{\overline{O_1c}} \cdot \overline{c'c},$$

ибо угловая скорость переносного вращения равна $\frac{v_e}{r} = \frac{\overline{O^*c'}}{\overline{O_1c}}$, а от-

носительная скорость $v' = \overline{c'c}$. Направление кориолисова ускорения указано на рис. 264. Отложим из конца c_1 вектор

$$\overrightarrow{c_1 k} = -w_c,$$

и проведем из конца k этого вектора прямую, параллельную относительному ускорению w' . На этой прямой должен по построению лежать конец вектора:

$$w - w_c - w' = w_e.$$

Но конец вектора w_e лежит и на прямой, ранее проведенной через точку n и следовательно точка пересечения c_1 этих прямых и определит конец вектора w_e .

Дальнейшее построение не представляет труда. Учащийся сам проследит по рисунку определение ускорения точки B .

Задачи и вопросы для самопроверки.

1. Определить ускорение ползуна B по отношению к опоре фундамента в примере 5 в конце задания 14.

2. Ось паровой турбины расположена вдоль корпуса парохода, испытывающего килевую качку (т. е. колеблющегося вокруг поперечной оси AB). Ротор турбины имеет диаметр 2 м и делает 500 об/мин. Амплитуда колебаний корпуса парохода равна 5° , период колебания его равен 8 сек. Какая точка обода ротора имеет максимальное кориолисово ускорение? Вычислить его значение в тот момент, когда угловая скорость колебаний корпуса достигает максимального значения (рис. 265).

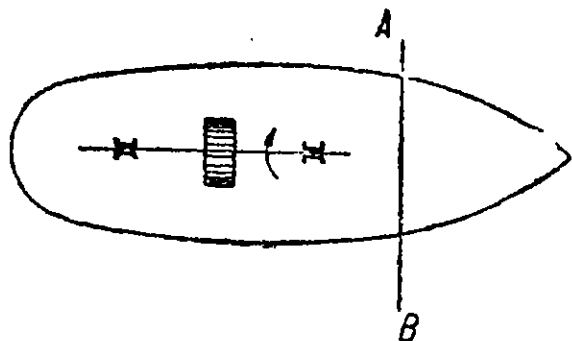


Рис. 265.

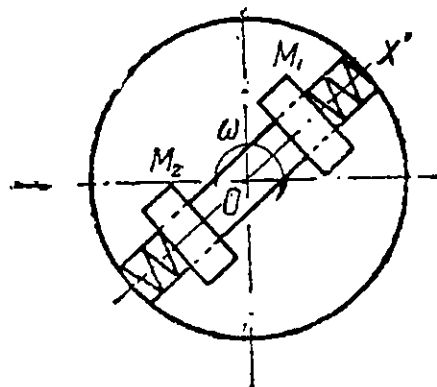


Рис. 266.

3. В регуляторе Гартунга грузы M_1 и M_2 совершают гармонические колебания вдоль паза (OX'). Амплитуда колебания $a = 2$ см, период $T = 0,25$ сек. В начальный момент центр тяжести груза находится на расстоянии 15 см от оси вращения кожуха. Определить максимальное значение кориолисова ускорения груза, когда кожух совершает 240 об/мин. (рис. 266).

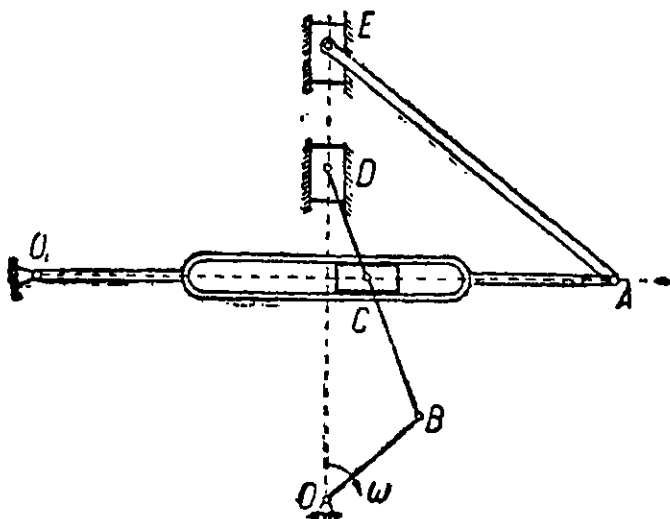


Рис. 267.

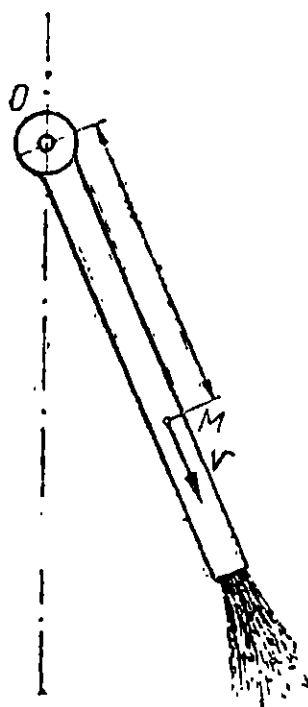


Рис. 268.

4. Определить угловое ускорение кривошипа OB механизма Витворта: 1) дифференцируя выражение угловой скорости по времени, 2) найдя переносное ускорение точки A (см. пример 6 настоящего задания).

5. Пользуясь построением плана ускорений, определить ускорение ползуна E в механизме двигателя системы Crossley, изображенном на рис. 267, считая, что кривошип $\overline{OB}$ вращается равномерно.

6. Трубка, по которой течет вода с относительной скоростью V' , направленной по оси трубки вниз, совершает колебания амплитуды φ_0 и частоты γ . Определить ускорение Кориолиса частицы воды, находящейся на расстоянии r от оси трубки (благодаря этому ускорению колебания трубки будут тормозиться) (рис. 268).

Контрольная работа и третьей теме.

Механизм „мальтийского креста“, применяемый в кинопроекторных аппаратах, а также и в различных станках, представлен схематически на рис. 269. Пока зуб M ведущего колеса O_1 не вошел в прорезь, крест неподвижен (рис. 269а); в момент входа угловая

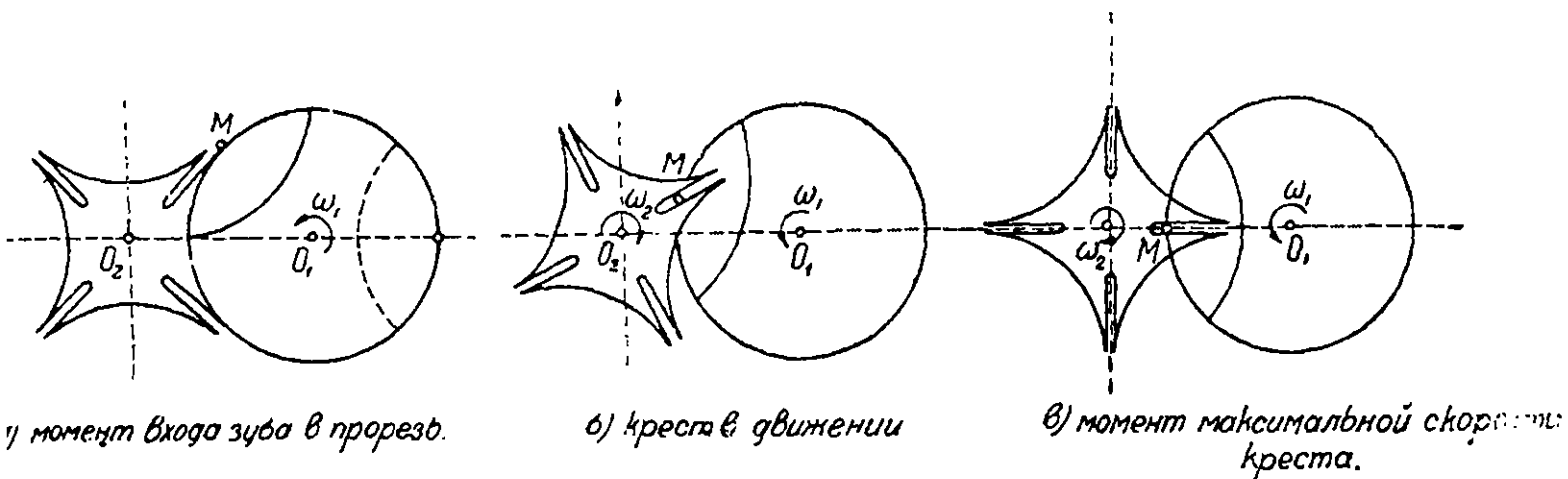


Рис. 269.

скорость креста ω_2 равна нулю; затем крест приходит во вращение (рис. 269 б); при расположении, указанном на рис. 269 в крест имеет максимальную угловую скорость и т. д.

1) Пользуясь правилом параллелограмма скоростей, вычертить график угловой скорости мальтийского креста за полный оборот ведущего колеса, задавшись постоянной угловой скоростью ведущего колеса, расстоянием зуба от оси O и расстоянием между осями O_1 и O_2 .

2) Определить величину углового ускорения креста в моменты а и б. Показать, что в эти моменты угловое ускорение креста имеет максимальное и минимальное значения.

Указание. Применить метод, приведенный в упражнении на механизм с качающейся и вращающейся кулисой.

Рекомендуемая литература по кинематике.

А. На русском языке.

1. Николаев, Е. Л. Лекции по теоретической механике, часть II. Ленинград ГНТИ, 1031.
2. Крылов, А. Н. Курс теоретической механики, Отдел II, СПб 1912.
3. Мещерский, И. В. Курс теоретической механики, часть I и II, ГИЗ, 1927—28.
4. Жуковский, Н. Е. Теоретическая механика, ч. II, 1931.
5. Сомов, П. О. Основания теоретической механики, СПб 1904.
6. Фридман, А. А. и Лойцянский, Л. Г. Кинематика. Ленинград 1924.
7. Зернов, Д. С. Прикладная механика. Лиг. 1925.
8. Левенсон, Л. Б. Кинематика механизмов, М. Лиг. 1923.

Б. На иностранных языках.

9. Lecomte, L. Cours de mécanique, t I, Paris 1920.
 10. Koenigs, G. Leçons de Kinématique, Paris 1899.
 11. Reuleaux, F. Theoretische Kinematik, Bd. 1—2, Braunschweig 1875—1890.
 12. Burmester, L. Lehrbuch der Kinematik, Lpz. 1888.
 13. Bouasse, H. Cours de mécanique rationnelle et expérimentale, Paris.
 14. Grübler, M. Getriebelehre. Berlin 1921.
 15. Chrismann, A. und Baer H. Grundzüge der Kinematik, Berlin 1929.
 16. Wittenbauer, F. Graphische Dynamik, Berlin 1923.
 17. Marcolongo, R. Theoretische Mechanik, Bd. 1—2. Lpz. 1911—12.
 18. Heck, R. C. Mechanics of Machinery. N. Y. 1923.
-

Ответственный редактор *Е. В. Пулькина.*

Сдана в набор 9/III 1932 г.

Формат 62 × 84.

Технический редактор *М. А. Фишман.*

Подписана к печати 16/VII 1932 г.

Тип. зн. в 1 печ. л. 53.424.

ТТ—15-5-2. ОНТИ № 64/л.

Тираж 15.000—18 л.

Заказ № 2519.

Лекторлит № 48470.

Содержание.

Стр.

Введение	4
--------------------	---

Тема первая. Кинематика точки.

Задание 1-е. Прямолинейное движение точки и способы его задания.

§ 1. Определение положения точки на прямой. Абсцисса и пройденный путь	11
§ 2. Прямолинейное движение точки. Уравнение движения. Примеры и упражнения	12
§ 3. Графики прямолинейного движения, составление их по заданному уравнению движения. Примеры и упражнения	23
§ 4. Автоматическое вычерчивание графиков движения различными самописцами. Переход от графика к уравнению движения	27
§ 5. Пройденный путь. Его определение по уравнению движения. Уравнение пройденного пути	30

Задание 2-е. Определение положения точки в пространстве.

§ 6. Определение положения точки в пространстве. Примеры и упражнения	34
§ 7. Уравнение движения точки в пространстве. Графики движения. Примеры и упражнения	39
§ 8. Траектория точки. Определение ее по заданным уравнениям движения. Примеры и упражнения	44
§ 9. Пройденный путь. Уравнение пройденного пути. Связь с уравнениями движения	53

Задание 3-е. Скорость и ускорение точки в прямолинейном движении.

§ 10. Темп развития. Средний темп на некотором этапе и в данном пункте. Применение производной	57
§ 11. Скорость в прямолинейном движении. Определение скорости по уравнению пройденного пути и по уравнению движения. График скорости. Примеры и упражнения	60
§ 12. Определение уравнений движения и пройденного пути по заданному закону изменения v_x или v . Связь между графиками движения, пройденного пути и скорости	67
§ 13. Ускорение в прямолинейном движении. Определение ускорения по уравнению пройденного пути и по уравнению движения. Примеры и упражнения	70

Задание 4-е. Скорость в криволинейном движении.

§ 14. Вектор-функция скалярного переменного	83
§ 15. Годограф вектора	84
§ 16. Производная вектор-функции	85
§ 17. Единичный вектор касательной к кривой	88
§ 18. Разложение вектора по ортам	89
§ 19. Проекция производной вектора на оси	90
§ 20. Скорость в криволинейном движении. Примеры и упражнения	91

Задание 5-е. Ускорение в криволинейном движении.

§ 21. Ускорение как вектор	98
§ 22. Проекция ускорения на оси декартовой системы координат. Примеры и упражнения	100

Задание 6-е. Ускорение в криволинейном движении (продолжение).

§ 23. Некоторые сведения из геометрии	113
§ 24. Проекция ускорения на оси натурального триэдра. Примеры и упражнения	116

Тема вторая. Кинематика твердого тела.

Задание 7-е. Простейшие случаи движения твердого тела. Поступательное движение. Вращение вокруг оси.

§ 25. Поступательное движение твердого тела	129
§ 26. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Примеры и упражнения.	130
§ 27. Угловая скорость. Примеры и упражнения	133
§ 28. Распределение скоростей в теле, вращающемся вокруг неподвижной оси. Примеры и упражнения.	140

Задание 8-е. Распределение скоростей в твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной оси.

§ 29. Угловая скорость как вектор	145
§ 30. Векторное произведение. Примеры и упражнения	147
§ 31. Проекция векторного произведения на ось	151
§ 32. Линейная скорость как векторное произведение. Примеры и упражнения.	153

Задание 9-е. Распределение ускорений в твердом теле, вращающемся вокруг неподвижной оси.

§ 33. Угловое ускорение. Примеры и упражнения.	156
§ 34. Угловое ускорение как вектор	161
§ 35. Распределение ускорений во вращающемся теле. Примеры и упражнения.	161

Задание 10-е. Плоское движение твердого тела.

§ 36. Задание положения и движения плоской фигуры. Примеры и упражнения.	168
§ 37. Траектории точек плоской фигуры. Примеры и упражнения	172
§ 38. Перемещение плоской фигуры.	177

Задание 11-е. Распределение скоростей в движущейся плоской фигуре.

§ 39. Распределение скоростей в движущейся плоской фигуре. Примеры и упражнения	181
§ 40. План скоростей	188

Задание 12-е. Мгновенный центр и центроиды.

§ 41. Мгновенный центр скоростей. Примеры и упражнения	194
§ 42. Теорема о трех центрах	201
§ 43. Центроиды. Примеры и упражнения	203

Задание 13-е. Распределение ускорений в движущейся плоской фигуре.

§ 44. Распределение ускорений в движущейся плоской фигуре	214
§ 45. Мгновенный центр ускорений. Примеры и упражнения	216
§ 46. План ускорений	223

Добавление ко второй теме.

§ 1. Теорема о перемещении твердого тела, имеющего неподвижную точку.	228
§ 2. Скорости и ускорения точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной точки	231
§ 3. Перемещение твердого тела в общем случае	234
§ 4. Распределение скоростей и ускорений в общем случае движения тела	235

Тема третья. Относительные движения.

Задание 14-е. Траектории и скорости в относительных движениях.

§ 47. Кинематические элементы относительных движений. Уравнения относительных движений. Относительные траектории. Примеры и упражнения.	242
§ 48. Связь между относительными изменениями векторов.	250
§ 49. Скорости в относительных движениях. Правило параллелограмма. Примеры и упражнения	252

Задание 15-е. Сложение вращений.

§ 50. Сложение вращений вокруг параллельных осей. Примеры и упражнения.	260
§ 51. Сложение вращений вокруг пересекающихся осей. Примеры и упражнения.	267

Задание 16-е. Ускорения в относительных движениях.

§ 52. Теорема Кориолиса	274
§ 53. Кориолисово ускорение. Способы его определения. Примеры и упражнения.	275