

Л. Г. ЛОЙЦЯНСКИЙ и А. И. ЛУРЬЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ДИНАМИКА



ГГТИ



ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка (или формула)	Напечатано	Следует читать
67	Форм. (114)	$r_1 = \frac{1}{2} \left[B_1 e^{V \sqrt{-k} \cdot t} \right]$	$r_1 = \frac{1}{2} \left[B_1 e^{V \sqrt{-k} t} + \dots \right]$
100	3 стр. снизу	$\omega = 50 \pi \approx 157$	$\omega = 50 \pi \approx 157 \frac{1}{\text{сек.}}$
123	8 стр. снизу	На рис. 42б	На рис. 42а
156	1 стр. снизу	$(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi)^{-\frac{1}{2}} =$ $= 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi + \dots$	$(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi)^{-\frac{1}{2}} =$ $= 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi + \dots$
195	форм. (2)	$M(\ddot{\varphi} x_c - \dot{\varphi}^2 x_c) = \dots$	$M(\ddot{\varphi} x_c - \dot{\varphi}^2 y_c)$
196	форм. (7)	$K_y = -\varphi \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i$	$K_y = -\dot{\varphi} \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i$
197	форм. (13)	$\frac{dK_y}{dt} = J_{yz} \ddot{\varphi} - \dots$	$\frac{dK_y}{dt} = -J_{yz} \ddot{\varphi} - \dots$
201	6 стр. снизу	$J_{xy} = -\alpha_1 \beta_1 J_{x'x'} -$ $-\alpha_2 \beta_2 J_{y'y'} + \dots$	$J_{xy} = -\alpha_1 \beta_1 J_{x'x'} -$ $-\alpha_2 \beta_2 J_{y'y'} - \dots$
209	8 стр. снизу	N_2''	$-N_2''$
211	рис. 95	переставить местами размеры a и b	
268	17 стр. свер.	L_{eg}	L_g^e
281	2 стр. сверху	над буквами φ и ϑ поставить точки	
282	6 стр. снизу	$J \ddot{\psi} \varphi \sin \vartheta \sin \varphi - \dots$	$-J \ddot{\psi} \varphi \sin \vartheta \sin \varphi - \dots$
405	2 стр. сверху	$a_2 = \frac{38,73}{6} = 6,455$	$a_2 = -\frac{38,73}{6} = -6,455$
"	"	$a_3 = \frac{-4,60}{7} = 0,765$	$a_3 = -\frac{4,60}{7} = -0,765$
"	"	$a_4 = \frac{-2,91}{6} = 0,485$	$a_4 = -\frac{2,91}{6} = -0,485$
438	12 стр. снизу	$\mathcal{E}_1 = e^{-et} \mathcal{E}_0$	$\mathcal{E}_1 = e^{-et} \mathcal{E}_0$
443	5 стр. снизу	$\Delta \mathcal{F} = \dots$	$\mathcal{F} = \dots$

Л. Г. ЛОЙЦЯНСКИЙ и А. И. ЛУРЬЕ

профессора ленинградского физико-механического института

Теоретическая м е х а н и к а

Часть вторая

Д и н а м и к а

1933

государственное технико-теоретическое издательство
ленинград • москва

Предисловие.

Настоящая книга, являющаяся второй частью курса теоретической механики, посвящена изложению основных понятий и простейших теорем динамики. В число этих теорем (количеств движения, движения центра инерции, моментов, изменения кинетической энергии, закона сохранения энергии) мы сознательно не ввели начала Даламбера, помещаемого многими авторами на первый план. Сделали мы это потому, что содержащееся в этой теореме понятие о фиктивных силах инерции не может быть, как показывает наш опыт, правильно воспринято начинающим, еще недостаточно усвоившим понятие *физической силы*. Учащегося обычно особенно смущает, что силы инерции, применяемые при расчетах по методу Даламбера, совершенно опускаются при непосредственном применении дифференциальных уравнений динамики и пользовании основными теоремами, помещенными в настоящем выпуске. Порядок изложения, принятый нами, служит к устранению этого недоразумения. Громадное значение сил инерции в кинестатике будет отмечено нами в следующей третьей части курса.

Мы не проводим разделения динамики точки от динамики системы точек и в частности твердого тела, так как такое разделение мы считаем искусственным и лишаящим многие теоремы (особенно теорему количеств движения и моментов) материала для приложений. Кроме того оторванное изложение динамики точки приводит к ненужному параллелизму и повторениям.

Чтобы облегчить учащемуся усвоение основных понятий динамики (сила, масса, работа, энергия), мы даем целый ряд вводных бесед, причем наибольшая из них по объему, посвященная основным законам механики Ньютона, выделена особо в начале книги, а остальные помещены непосредственно в соответствующих темах и заданиях. Мы придаем большое значение этим местам курса, так как они должны ориентировать учащегося в проходимом им материале и истории развития основных положений динамики. К сожалению авторы не имели образцов последовательного изложения этих моментов в существующих учебниках механики, поэтому проводимые в настоящем курсе вводные беседы следует рассматривать как первую попытку в этом направлении.

Одной из особенностей нашего курса являются сильно развитые примеры и упражнения, помещаемые после прохождения отдельных мест теории. Как мы уже говорили во введении к первой части курса, при теоретическом изложении мы даем только самый основной материал. Теоретические детали переносятся в упражнения, где излагаются в связи с конкретными приложениями — отсюда

следует важная роль примеров и упражнений в нашем курсе. При подборе упражнений авторы не замыкались в традиционный круг „задач теоретической механики“, а старались выявить связь с другими физико-техническими дисциплинами, главным образом с сопротивлением материалов, гидравликой, прикладной механикой и др.

Следующая часть курса будет посвящена специальным методам динамики несвободной системы, уравнениям Лагранжа и теории колебаний, а также элементам аналитической механики.

Авторы должны отметить большую помощь, оказанную им инж. А. М. Бодзяком, составившим и сделавшим построение большинства чертежей книги.

Методические указания к прохождению настоящей книги. Содержание настоящей второй части курса представляет значительно большие затруднения для прохождения и вместе с тем имеет больший интерес, чем первая часть. В отличие от кинематики мы имеем здесь целый ряд принципиально сложных понятий, без достаточного усвоения которых невозможно дальнейшее образование учащегося.

Прежде всего учащийся должен внимательно прочесть содержание вводной беседы. Здесь приведены в систему сведения, вероятно известные уже учащемуся по общему курсу физики.

В начале каждой темы имеются страницы, посвященные выяснению значения и области приложений излагаемых в ней теорем, а также и связи их между собой. При первом прохождении книги многое здесь может оказаться не вполне понятным. Мы очень рекомендуем учащемуся после прохождения данного задания или темы вернуться к вводным замечаниям и вновь их прочесть так, чтобы принципиальная сторона в конце концов не ускользнула от внимания учащегося.

Надо отметить, что обыкновенно учащийся, прошедший курс механики, запоминает ряд отдельных теорем, простых самих по себе, и научается пользоваться ими при наличии заранее имеющегося указания о том, какую именно теорему для решения данной частной задачи нужно применять. Гораздо труднее выбрать самостоятельно те теоремы, пользование которыми дает наиболее простое и естественное решение стоящей перед учащимся задачи. Здесь обычно помогает практика решения большого числа задач, с другой стороны, для этого же служат и те указания, которые учащийся может найти во введениях в отдельные задания и темы, которые именно рассчитаны на повышение развития механических представлений у учащегося и расширения его кругозора.

При прохождении теоретических вопросов, из которых мы оставили только самые существенные и необходимые, перенеся детали на упражнения, учащийся должен тщательно усвоить и запомнить все основные формулировки и формулы, заключенные в рамочки.

В этой книге наибольшее внимание учащегося сосредоточивается на упражнениях. Количество упражнений весьма велико, причем в каждом из них обычно содержится целый ряд задач и расчетов. Мы рекомендуем учащемуся при наличии к тому возможности

проделать их все; более сложные из них можно при первом чтении пропустить, возвращаясь к ним после прохождения всей темы. По материалу эти упражнения заключают в себе ряд вопросов, тесно связанных с другими предметами втузовских учебных планов. Мы предполагаем в ряде примеров некоторое знакомство учащегося с элементами сопротивления материалов, гидравлики и общей теории машин.

Переходя к математическому аппарату, укажем прежде всего на желательность предварительного знакомства учащегося с простейшими операциями векторной алгебры, изложение которых в тексте весьма сжато. В остальном математический аппарат книги ограничивается основными вопросами втузовской программы, за исключением двух-трех мест, в которых сделаны соответствующие разъяснения и ссылки на литературу.

Мы ограничиваемся этими общими методическими указаниями, — подробные указания даны в отдельных темах.

Введение.

Основные понятия и законы динамики.

Мы предъявляем к теоретической механике совершенно естественное и определенное требование—дать нам такие представления о равновесии и движении материальных тел, которые в связи с применением методов математического анализа позволили бы решить ряд практических задач техники, физики и других областей знания.

Эти представления должны вытекать из всего накопленного до нас опыта, обобщить его в виде некоторых конкретных схем-законов и в своей совокупности образовывать теорию механики.

Ценность всякой теории заключается прежде всего в том единстве трактовки опытных фактов, на основе которых она выросла, а затем уже в тех путях дальнейшего накопления экспериментальных результатов, которые она указывает исследователю, являясь для него путеводным огнем в многообразии *возможных* экспериментальных исследований. Только руководясь некоторой теорией, экспериментатор может плодотворно работать и двигаться вперед; теория лежит в основе перспективного плана его работы, без нее он будет двигаться, как в потемках, иногда может быть и наталкиваясь на отдельные результаты, но никогда не будучи уверенным в дальнейшем. Подобно тому как всякий жизненный план, по мере своего развития, в процессе выполнения должен перестраиваться согласно новым фактам, так и теория в связи с расширением опыта должна перестраиваться, все время взаимодействуя с развивающимися на основании новых материалов взглядами исследователя.

Путь теоретической механики, в частности динамики, ничем не отличается от пути всякой другой науки. Развитие общих физических представлений шло всегда в ногу с наблюдениями физических явлений. Результаты этих наблюдений время от времени собирались, схематизировались и преподносились в виде так называемых *законов* механики. Проходило известное время, кругозор науки возрастал, и старые законы становились уже неприемлемыми, появлялись поправки к ним, законы давали толчок новым, иногда совершенно принципиально особенным опытным изысканиям, а эти в свою очередь служили для изживания тех законов, по указаниям которых они были поставлены. Так росла механика. Коперник (1473—1543), располагая значительно более обширным опытным материалом, чем Аристотель (384—322 до н. э.), был противником утверждения неподвижности и центральности земли, его смелая мысль перенесла центр мира на солнце, но мистическое

уважение Аристотеля к круговому движению (это единственное, по представлению Аристотеля, *совершенное* движение, не начинающееся и не кончающееся, так сказать — идеал движения) тяготет и над Коперником — утверждать эллиптичность орбит он не смеет — в его законах планеты двигаются по окружностям.

Кеплер (1571—1630) оторвался от этого представления. Экспериментальные приемы уже настолько развились, приборы настолько уточнились, что Кеплер может утверждать на основании отметок положения планет на небесном своде свой знаменитый закон об эллиптичности орбит планет. Уже из построения Коперника становится почти ясным с качественной стороны закон тяготения планет к солнцу, уже очень близко по времени появление закона всемирного тяготения, данного Ньютоном (1642—1726), и все же на вопрос схоластиков, почему планеты не падают на солнце, если они к нему тяготет, Кеплер в состоянии только дать ответ, более подходящий для эпохи Аристотеля: *„планеты и земля имеют душу, и она их ведет по существующим орбитам“*.

Галилей (1564—1642) — отец экспериментальной механики, автор большого числа опытов о падении тел, обрабатывая и изучая свои записи, приходит к необходимости ввести в рассмотрение *ускорение*, как меру изменения движения падающего тела. Введение понятия ускорения имеет грандиозное значение для развивающейся динамики (значение Галилея в значительной мере недооценено). Введя понятие об ускорении и получив таким образом в руки мощный критерий различения движений, Галилей прекрасно понимает динамическое значение силы¹⁾ (в его время сила рассматривалась только как давление, т. е. статистически) и так называемый закон инерции; но только Ньютон, введя понятие *массы*, впервые дает динамическое определение силы, приложенной к телу, как произведения массы на ускорение.

Но динамическое понятие силы в первое время после его появления представляется самому Ньютону и его современникам в каждом отдельном случае чем-то своеобразным. Появляются понятия *ускоряющей* силы, *движущей* силы, *центростремительной* силы, и многие другие. Это все, по представлениям той эпохи, силы, различные по своей сущности, обладающие своими характерными свойствами; объединить все эти понятия в одно общее, показать, что не только перечисленные силы, но и давление камня на неподвижную руку — та же по существу сила, т. е., как мы сейчас говорим, показать *тождественность* силы в ее *статическом* и *динамическом* проявлении — это станет возможным только в XIX веке, когда колоссальное многообразие физических сил (электрические, магнитные, силы упругости и т. п.) и общность в их кинематическом проявлении приведут к современному обобщению понятия силы.

Упомянем, наконец, что такое заведомо метафизическое понятие, как абсолютное пространство и время, принятое Ньютоном и положенное им в основание классической механики, продержалось

1) О разнице между статическим и динамическим измерением силы см. далее

до самого последнего времени. Сомнения в возможности выбора такого абсолютно неподвижного пространства, по отношению к которому можно изучать все движения, были уже у Эйлера (1707 — 1783) в его работе „Размышления о пространстве и времени“ (Мемуары Берлинской Академии Наук, 1748). Однако, только развитие теоретической и экспериментальной физики, характеризующее конец XIX и начало XX века, привело к поразительным результатам, составившим содержание общей теории относительности Эйнштейна (1916 г.). Эта теория дала возможность построить такую систему механики, которая совершенно *не зависит от представления абсолютного движения*, являющегося, по выражению Дюгамеля (1869), „*чистой химерой, основанной на другой такой же химере — постоянном и абсолютном пространстве*“.

После появления теории относительности механика Ньютона, или, как теперь говорят, классическая механика, стала рассматриваться только как известное приближение к общей физической механике, причем приближение, вполне достаточное для описания обычных движений в технике и не достаточное при исследовании движений, по скорости близких к скорости света. Мы в настоящее время, преподавая механику в связи с ее приложениями к техническим вопросам, сознательно даем курс классической механики, прекрасно понимая, что принципиально он основан на „химере“ абсолютного пространства и времени. Делаем мы это потому, что все результаты *классической* механики с достаточной для техники степенью точности согласуются с опытом, в вопросах же, например, электромагнитной теории света и др. вопросах физики *классическая* механика должна быть заменена *релятивистской* механикой, т. е. принципом относительности. Мы не переносим до сих пор в технику релятивистскую механику еще и потому, что применение ее связано с очень сложным математическим аппаратом, гораздо более сложным, чем аппарат механики классической.

Нечего, конечно, удивляться, что принципиальный переворот, произведенный теорией относительности в механике, не повлек за собой уничтожения старой механики как практического метода. Все дело здесь в том, что старая механика выросла в постоянном взаимодействии с опытом и поэтому, чем дальше она развивалась, тем все ближе подходила к удовлетворительному описанию механических явлений. Теория относительности обрушилась с глубокой принципиальной критикой на механику на том этапе ее развития, когда классическая механика уже стала давать достаточно хорошие результаты для практики. С другой стороны, только на этом этапе и могла появиться такая обобщающая глубокая теория как принцип относительности.

Из приведенных исторических примеров ясно, что все основные представления механики на длинном историческом пути своего появления и развития претерпевали много коренных ломок и изменений. Является вопрос: как сейчас, при изложении курса механики, давать учащемуся эти основные понятия и законы механики? Можно ли изложить курс механики дедуктивным методом, т. е., установив заранее некоторое число простейших опытных фактов или законов и условившись в содержании определенных терминов,

затем уже все выводить рассуждением и только проверять правильность выводов и иллюстрировать их на опытах?

До сих пор большинство курсов механики строится именно таким образом. Устанавливается система так называемых принципов или аксиом механики и уже затем идут доказательства теорем, проводимые обычным логическим приемом.

Следует отметить, что все существующие до сих пор группы аксиом механики, строго говоря, не удовлетворяют принципам логики. Как показали работы ряда ученых XIX века (Мах, Пуанкаре, Герц и др.) аксиоматика механики не выдерживает строгой критики; такие грубые логические ошибки, как „порочный круг“, т. е. содержание в аксиоме уже того утверждения, которое выводится на основании аксиомы, далее шаткость общепhilософских положений о законе симметрии и возможности применения их к механике, лишают эти аксиомы всех тех основных признаков, которыми определяется понятие „аксиома“. Кроме того вряд ли стоит аксиоматизировать классическую механику, когда, как мы только что упоминали, она целиком покоится на „химере“ абсолютности пространства и времени.

Мы считаем достаточно бесполезным наводить здесь какую бы то ни было формальную строгость. Единственное, что было бы действительно ценным и полезным для учащегося — это ознакомиться с подробным изложением истории развития механических представлений в связи с историей общего развития материальной культуры. Такой подход дал бы возможность учащимся гораздо глубже понять сущность основных определений и законов классической механики, чем перечисление формальных аксиом, дающих читателю ложное представление о пресловутой „строгости“ изложения.

В следующих параграфах мы излагаем основные понятия механики без претензии на полноту и аксиоматичность. Дать полный исторический очерк развития механики не входит в наши задачи, поэтому мы пытаемся только с возможной ясностью остановить внимание читателя лишь на происхождении и основных особенностях понятий механики.

§ I. Кинематика и динамика: различие их задач и методов.

Разнообразие движений материальных тел, как мы уже видели в кинематике, чрезвычайно велико: прямолинейные и криволинейные, равномерные и неравномерные движения материальной точки, поступательные и вращательные, плоские и неплоские движения твердого тела ставят перед нами ряд задач. Кинематика научила нас различать эти движения по определенным конкретным признакам, дала нам количественные меры этих движений: скорость линейная, угловая, ускорение линейное, угловое, траектория и пройденный путь или уравнения движения, содержащие все эти элементы не в обработанном виде.

Роль кинематических мер движения очень важна, но все же кинематическое исследование движения крайне поверхностно и односторонне. В самом деле, учащийся, знакомясь с кинематикой,

вероятно уже заметил одну чрезвычайно характерную черту кинематики — полное отсутствие интереса к каким бы то ни было физическим свойствам движущегося тела, кроме (в кинематике твердого тела) внешней его формы. Более того, *все приемы кинематики можно применять*, и мы это неоднократно делали, к *нематериальным телам*, например, к движению светового „зайчика“, к движению какой-нибудь чисто геометрической точки пересечения прямых, как, например, мгновенный центр и т. п. Не даром кинематику называют геометрией движения. Материя, со всем многообразием ее форм и законов, в кинематику не входила.

Конечно учащийся не должен забывать, что при своем зарождении и дальнейшем развитии кинематика не росла одиноко, отдельно от общей *физической* механики, поэтому она пронизана идеями, основанными на *опытном* материале наблюдений над движением *физических* тел, но, после естественной при колоссальности материала всей механики дифференциации механических дисциплин, к кинематике отошли лишь специфические для нее геометрические элементы. В результате этой узости кинематика имеет очень *ограниченные* возможности. Описать заданное наперед движение, рассказать, как с течением времени изменяется характер заданного движения, дать картину движения различных точек твердого тела в данный момент, при *заданных* основных элементах его движения — все это кинематика может, но, наоборот, предсказать, *как* будет двигаться тело при определенной физической обстановке, определить, при каких физических условиях определенное тело будет двигаться с теми кинематическими характеристиками, которые нам почему либо необходимы, всего этого кинематика дать не в состоянии, это выходит за пределы результатов ее методов подхода к изучению явлений.

И мы можем себе представить, что действительно для решения таких важных задач, как только что упомянутые, нужны гораздо более глубокие подходы с учетом многих физических свойств и самого изучаемого движущегося тела и других тел, его окружающих и влияющих на его движение.

Решением этих задач занимается другой отдел механики — *динамика*. Основным задачам динамики и приемам их решения посвящены настоящая и следующая за ней книги.

По сравнению с геометрией (мы подразумеваем классическую геометрию) кинематика располагала только одной лишней количественной мерой — *временем*. Введение времени позволило кинематике в отличие от геометрии заниматься не только описанием взаимного расположения тел и различия их форм (предмет геометрии), но и изучением взаимного их движения (не полным изучением, как мы уже указывали, а только классификацией и количественной характеристикой происходящих движений).

Динамика, очевидно, должна ввести в рассмотрение еще новые меры и из них хотя бы одну основную, характеризующую материальные свойства движущегося тела.

Как выбрать эту меру? Что принять за количественную характеристику данного материального тела? Для ответа на этот вопрос обратимся сначала к некоторым простым опытным фактам.

§ 2. Действие одного материального тела на другое. Сила, ее статическое и динамическое проявление.

Мы знаем, что все материальные тела *действуют* друг на друга. Рука давит на стол, всякое тело на поверхности земли притягивается землею, веревка не позволяет висящему на ней телу упасть на землю. Кусок железа притягивается магнитом, два электрических заряда разных знаков притягиваются, одинаковых — отталкиваются и т. д.

Действие одного материального тела на другое мы называем силой. В чем выражается это действие, каким образом мы его изучаем и количественно регистрируем, будет вскоре выяснено. Отметим прежде всего, что, как показывает повседневный опыт, действие одного тела на другое может сопровождаться двумя совершенно различными результатами:

1. Под влиянием действия одного тела рассматриваемое нами другое тело изменяет свое кинематическое состояние, т. е. из покоя приходит в движение или из одного движения — в другое. Например, давя на вагонетку, рабочий приводит ее в движение и затем, продолжая давить, заставляет ее двигаться быстрее или тише, заворачивать и пр. В этом случае будем говорить, что сила проявляется *динамически*.

2. Тело, действуя на другое тело, не изменяет кинематического состояния последнего, т. е. оставляет его в покое, если оно было в покое, или в том состоянии движения, которое было до появления силы; например, давя рукою на доску стола, мы при этом не нарушаем равновесия стола. Здесь сила проявляет себя *статически*.

В чем разница между статическим и динамическим действием одного тела на другое? Разница здесь не в самом действии — оно в обоих случаях одинаково, а в наличии действия других тел на наше исследуемое.

Рабочий приводит в движение вагонетку, если она свободно стоит на рельсах, — он производит при этом динамическое действие, но если вагонетка упирается на заградительные буфера в конце рельсового пути, то то же действие не вызовет движения вагонетки и будет статическим действием. Ясно, что все дело здесь в наличии действия этих заградительных буферов. Удалим буфера, и действие статическое, станет динамическим — вагонетка придет в движение из покоя. Мы объясняем обычно описанное явление тем, что действие рабочего на вагонетку уничтожается действием буферов на вагонетку, т. е. что действия эти уравниваются или, как еще говорят, приложенные силы уравниваются. Не следует однако думать, что действия или силы при этом пропадают, — пропадает только то изменение кинематического состояния тела, которое характеризует динамическое действие. Мы можем сказать, что действия нескольких тел на одно какое-нибудь тело при известных условиях проявляются *статически*. Выяснением этих условий занимается, как уже знает учащийся, *статика*. Такое отождествление силы при статическом и динамическом ее проявлении не легко досталось основателям механики. Вообще по-

нятие силы является не менее древним, чем понятие числа, измерения и т. п. Но долгое время, как мы уже упоминали, вплоть до работ Галилея по изучению падения тел, не подозревали, что сила, заставляющая камень давить на держащую его руку, по существу та же, что и сила, вызывающая его падение. Силой в то время называли только то физическое действие камня на руку человека, которое мы теперь определяем словом „давление“.

Интересно отметить, что и все основные элементы понятия силы: ее величина, направление действия, а также и место приложения, т. е. все то, что, по современной терминологии, определяет силу как вектор, было давно замечено, но понятие „вектор“, появившееся в XIX веке (Гамильтон, 1846 г.), вытекло уже как *обобщение свойства ряда механических величин иметь определенную интенсивность и направление* (скорость, ускорение, сила и другие). Основные операции над векторами, как мы уже упоминали в курсе кинематики, выражают схематически вполне определенные, имеющие физическое значение, комбинации векторов. Так сложение векторов по правилу параллелограмма отражает совокупное действие двух сил, сложение скоростей, моментов и т. д. (о правиле параллелограмма см. следующие параграфы), векторное умножение — понятие момента вектора и др.

§ 3. Статическое измерение силы. Килограмм. Взвешивание как способ измерять силы.

Статика дает нам возможность очень просто измерять действия материальных тел или, как мы теперь будем говорить, силы. Измерить *количественно* силу это значит сравнить ее с другой силой, причем сравнение это можно производить по двум принципам: 1) наблюдая обе силы в статическом их проявлении или 2) в динамическом их действии.

В первом случае, желая убедиться в одинаковости действий, т. е. в эквивалентности сил, мы должны, поставив взятое тело в *совершенно одинаковые условия* и приложив по очереди две испытываемые силы, удостовериться, что тело в том и другом случае не изменит своего кинематического состояния. Вся сложность такого опыта — в необходимости создания *одинаковости* обстановки опыта, т. е. в одинаковости действий на наше тело других тел, кроме тех, действие которых испытывается. Так, например, надавив на стол двумя различными силами, мы и в том и другом случае будем наблюдать неподвижность стола, отсюда еще не следует, что наши давления одинаковы; действительно, мы не знаем, одинаковы ли действия пола на ножки стола. Наоборот, статика нас учит, что реакция пола будет изменяться вместе с давлением на крышку стола.

Наиболее верным способом статического измерения сил является сравнение их с весом определенных тел, т. е. с действием притяжения земли на выбранные раз навсегда физические тела (эталоны, обыкновенные гири и пр.).

Установкой или аппаратом для сравнения данной силы с силой веса служат хорошо известные учащемуся весы. Основное назна-

чение весов — сравнивать между собою действие земли на разные тела, находящиеся на ее поверхности, т. е. взвешивание тел.

Выбрав какое-нибудь произвольное тело за образец (эталон), мы принимаем действие земли на него за единицу веса и все остальные веса выражаем в целых и дробных частях этой единицы. Такой эталон выбран и хранится в Париже в совершенно определенных условиях, — его вес называется *килограммом* (подробности известны учащемуся из физики).

Подвесив к концам равноплечного рычага два тела, мы по покою рычага судим о равенстве весов этих тел, и, таким образом, введя понятие о телах равного веса, можем: 1) создать с большой точностью много таких килограммов-гирь, т. е. получить возможность сравнивать вес тела с двумя, тремя и т. д. килограммами, и 2) создать разновески, т. е. такие более мелкие тела, которые, имея одинаковый друг с другом вес, в общей сложности дадут тело, имеющее вес, равный килограмму, — это позволит нам измерять дробные части килограмма и т. д.

Весы являются в своей современной конструкции одним из наиболее совершенных приборов по чувствительности и точности (до $10^{-7}\%$ в точных метрологических измерениях), их можно применять не только для взвешивания тел, но и для измерения всяких других сил. В настоящее время при точных статических измерениях сил пользуются всегда весовым принципом. Для этого при помощи тяг и других передач измеряемую силу прикладывают к одному концу равноплечного (иногда неравноплечного, как в десятичных весах) рычага, а другой конец уравнивают нагрузкой гирями. При этом сила будет измеряться килограммами и их частями. Таковы, например, *аэродинамические* весы, служащие для измерения сил сопротивления воздушного потока движущимся в нем телам или давления воздушного потока на неподвижное тело, таковы же и машины для испытания материалов, дающие предельные нагрузки, при которых данный образец рвется, ломается и т. п. Точно так же для получения определенных давлений пользуются весом ртутного или водяного столба или даже создают давления грузами. Существует и другой, менее точный и постоянный способ измерения действия одного тела на другое. Это — способ измерения силы по деформации определенного выбранного наперед упругого тела, вызванной приложенной силой. Если взять пружинный динамометр *D* (рис. 1) и закрепить один конец его на коромысле обычных весов в точке *C*, а другой *B* при помощи нити *AB* прикрепить к основанию весов, то, укорачивая нить *AB* и накладывая нагрузки на чашку *E*, мы можем добиться среднего положения стрелки весов *F* при различных показаниях пружинного динамометра и таким образом проградуировать шкалу динамометра непосредственной нагрузкой. Известно, что при некотором

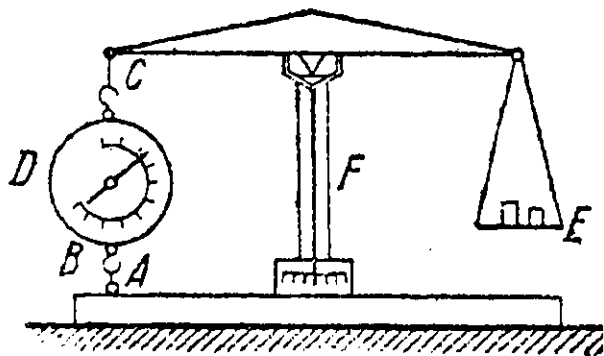


Рис. 1.

интервале нагрузок шкала динамометра окажется равномерной, т. е. деформации пружины динамометра будут пропорциональны нагрузкам (закон Гука). Проградуированный по непосредственным нагрузкам динамометр может сам служить для измерения сил и его часто применяют в тех случаях, когда измерение не должно быть очень точно и, с другой стороны, обстановка опыта такова, что применение весов неудобно. Иногда еще силы определяют по закручиванию упругой нити (крутильные весы) и по другим принципам, излагаемым в курсах физики. Обратимся теперь к динамическому определению силы.

§ 4. Динамическое измерение силы. Масса. Зависимость силы от ускорения.

Сравнивая силы динамически, мы должны наблюдать то изменение в кинематическом состоянии взятого для рассмотрения тела, которое производят сравниваемые силы. Будем сначала предполагать, как мы уже это делали в кинематике, что наше испытуемое тело настолько мало по размерам, что можно отвлечься от его вращения вокруг оси, т. е. пренебречь скоростями и ускорениями в его вращательном движении по сравнению с кинематическими элементами поступательного его движения. Такое тело мы называем материальной точкой. Всякое материальное тело можно разбить на такие материальные точки. Поэтому мы сначала обсудим случай материальной точки. Мы считаем, что две силы динамически эквивалентны, если, будучи приложены к одной и той же материальной точке при одинаковых действиях на нее других материальных тел, производят одинаковые изменения движения точки. Здесь мы опять оговариваем одинаковость действия других тел, чтобы исключить ошибки от изменения обстановки опыта при действии других тел на нашу материальную точку.

Итак, при динамическом подходе к измерению силы мы все сводим к наблюдению изменения движения точки. Что принять за меру этого изменения? В этом имеется некоторый произвол. Естественнее всего принять за такую кинематическую меру известное уже нам ускорение, так как эта величина как раз характеризует изменение скорости движения по величине и направлению. Условившись в выборе кинематической меры изменения движения, мы можем теперь сказать: „динамические действия двух тел на одну и ту же материальную точку одинаковы, если при прочих равных условиях они вызывают одинаковые ускорения точки“.

Мы уже указывали, что различие эффекта динамического и статического действия силы зависит не от того, что эти действия различны, — различна лишь обстановка, т. е. действие других тел на наше испытуемое. Мы этим утверждаем кроме того, что количественно сила, измеренная статически и динамически, должна выразиться одним и тем же числом (целым или дробным) килограммов.

В принятом нами условии — измерять силу динамически по производимому ею ускорению — заключается предположение, что при отсутствии силы наша материальная точка движется

с нулевым ускорением, т. е. прямолинейно и равномерно, или же находится в покое. В этом заключается знаменитый закон инерции материальной точки.

Интересно отметить, что до Галилея, т. е. примерно до начала XVII века, считали, что естественное состояние материи — находиться в состоянии абсолютного (!) покоя; если же материальное тело движется (хотя бы и равномерно), то только под влиянием внешнего действия; устранив это действие, материя вновь придет в состояние абсолютного покоя (а не будет продолжать двигаться равномерно и прямолинейно). Такие представления были вполне естественны для своего времени и основывались на опытном материале: тело само не приходит в движение, а будучи приведено в движение, останавливается. Теперь мы уже знаем, что остановка происходит благодаря торможению тела силами трения и другими вредными сопротивлениями. Кроме того понятие ускорения (замедления) объясняет нам, как тело из покоя приходит в движение, — без понятия ускорения трудно было согласиться с тем, что тело, получив с трудом скорость, сможет ее само сохранить без внешнего действия.

До настоящего времени можно встретить еще определение инерции или инертности материи, как свойства материи *сопротивляться изменению ее движения*. Нам кажется, что это определение содержит в себе остатки старинных представлений о „костности“ материи, о ее стремлении находиться в абсолютном покое. На самом деле материя вовсе не сопротивляется приведению ее в движение или вообще изменению ее движения. Под действием одного материального тела на другое, тела изменяют свое движение, но в зависимости от материальных свойств тел требуется *различное время* для приведения данного тела к *требуемой скорости*.

Одно и то же, например, давление руки, приложенное к вагону и маленькой вагонетке (мы отвлекаемся от сил трения) приведет оба тела к желательной скорости, но для вагона потребуется больше времени на разгон, чем для вагонетки. Вот это явление, заключающееся в том, что *для сообщения разным телам одной и той же скорости одним и тем же действием необходимо различное время* и характеризует разную инертность тел и дает понятие об инерции материи вообще.

Сравнивая по указанному признаку инертности различных тел с инертностью какого-нибудь одного, выбранного за образец (эталон), мы приходим к возможности количественного измерения инертности разных тел и установлению понятия массы. Об этом мы скажем несколько далее в этом же параграфе.

Защитникам определения инертности, как сопротивления изменению движения, хочется задать обратный вопрос: в каком случае они считали бы, что материя не сопротивляется изменению движения, — в том случае если бы, *не успев* еще прикоснуться к вагону, мы приводили бы его в *бесконечную* скорость? Все явления протекают во времени, и изменение движения тоже требует времени, для разных обстоятельств — различного.

Влияние силы на кривизну траектории также долго не могло стать понятным. Так, например, влияние тяжести на траекторию

брошенного под углом к горизонту снаряда *Зантбых* (1561) представлял себе так: снаряд летит сначала по прямой по направлению дула, а затем по вертикали вниз. *Тарталья* (1537) образовывал траекторию снаряда сначала из прямой, затем дуги круга и, наконец, касательной прямой в ее конце. *Бенедетти* (1585) тоже считал, что снаряд вылетает из дула по прямой линии. На эту мысль наталкивало наблюдение над вылетающими с большой скоростью снарядами из дула орудий тех времен. Только *Галилей* доказал, что траектория — парабола, и объяснил это до сих пор принятым приемом наложения ускоренного вертикального движения на равномерное горизонтальное.

Условившись таким образом в динамическом измерении силы, мы приходим к необходимости считать силу функцией ускорения. Каков вид этой функции? Для решения этого вопроса мы имеем, во-первых, *исходное обобщающее предположение тождественности силы при ее статическом и динамическом проявлении*, а во-вторых, весьма точные *опыты* показывают, что, например, *одно и то же тело* в разных местах земного шара имеет *статически разный вес и разное ускорение* падения в пустоте, причем *вес и ускорение свободного падения пропорциональны друг другу*, точно так же деформированная пружина, дающая статически упругую силу, по закону *Гука* пропорциональную деформации, сообщает данному телу ускорение, также пропорциональное деформации.

Мы этим приемом в дальнейшем постоянно будем пользоваться. Так, например, рассматривая *движение* под влиянием упругой силы: $F = c \cdot r$, где r — деформация в данный момент, при происходящем движении, а c — коэффициент упругости, мы для определения c всегда берем статическую деформацию r_{st} , соответствующую статической нагрузке F_{st} , и c определяем по формуле:

$$c = \frac{F_{st}}{r_{st}}.$$

Здесь мы, очевидно, как раз пользуемся эквивалентностью силы при динамическом и статическом ее проявлении. Все это приводит нас к заключению, что с динамической точки зрения, если одна сила F_1 вызывает у тела ускорение w_1 , а другая сила F_2 , у того же самого тела, — ускорение w_2 , то величина силы F_1 во столько раз больше величины силы F_2 , во сколько раз величина ускорения w_1 больше величины ускорения w_2 , т. е.

$$F_1 : F_2 = w_1 : w_2, \quad (1)$$

причем направление вектора силы мы условимся выбирать совпадающим с направлением ускорения, которое сила вызывает.

Из (1) сразу следует:

$$F_1 = \frac{F_2}{w_2} \cdot w_1. \quad (2)$$

Мы ничем не ограничили выбора движений. В частности в качестве второго опыта с силой F_2 и ускорением w_2 мы можем выбрать какое-нибудь хорошо известное, исследованное движе-

ние, тогда ф-ла (2) определит нам связь между приложенной динамически силой и вызываемым ею ускорением.

Исторически вся наша динамика выросла из *опытов над падением тел*. Главнейший из выводов этих многочисленных опытов, конечно, известный закон Галилея, который мы сформулируем так:

В данном месте земного шара, если отвлекаться от сопротивления воздуха, все тела падают с одинаковым ускорением.

Это—настоящий *опытный закон*, который был доказан большим числом опытов самого Галилея и других ученых. Он верен только для данного места земли и при условии небольшой высоты падения.

Если мы обозначим через p вес тела, а через g —ускорение силы тяжести, равное, как уже знает читатель из кинематики, приблизительно $9,81 \text{ м/сек}^2$, то из (2) будем иметь

$$F_1 = \frac{p}{g} w_1. \quad (3)$$

Дополнением к закону Галилея служат опыты, произведенные в *различных местах земного шара*. Эти опыты показали, что и *вес тела, и ускорения силы тяжести меняются на земле от места к месту*, но отношение их постоянно и характерно для данного тела. Это отношение является характерной материальной константой тела,—его называют *массой* тела и обозначают буквой m :

$$m = \frac{p}{g}. \quad (4)$$

Таким образом *вес тела не может быть принят за материальную меру, характеризующую взятое тело*, потому что эта мера меняется при переходе из одной точки пространства в другую. Только отношение веса к ускорению падения, которое оно вызывает или, что все равно (см. ф-лу (3), отношение любой силы к вызываемому ею кинематическому изменению движения тела—ускорению,—есть постоянная величина для данного тела, безотносительно к тому, какова приложенная сила и каково вызываемое ею ускорение. Это отношение силы к вызываемому ею ускорению мы и принимаем за материальную меру данного тела, за его *массу*. Вспоминая сказанное об инертности материи, можем еще рассматривать массу как меру инертности тела.

Сам Ньютон, да и многие авторы до сих пор определяют массу как *количество материи* в теле, причем Ньютон прямо говорит, что количество материи измеряется произведением плотности ее на объем. Такое представление заключает в себе порочный круг, так как понятие плотности подразумевает, конечно, понятие массы или веса. Вообще, хотя масса несомненно характеризует *материальные свойства* данного тела, все же не имеет смысла определять массу как *количество вещества* в теле, потому что вообще слово „определять“ означает сведение сложного понятия к более простому, а понятие *количества вещества* отнюдь не является более простым, чем понятие *массы*. Гораздо естественнее

сохранить за массой определение, данное нами выше, как *физической постоянной тела, равной отношению приложенной к нему силы к вызываемому ею ускорению*, в частности *отношению веса тела к ускорению силы тяжести в данном месте*. Физически это более правильно, так как до сих пор массу тела всегда определяют взвешиванием, безотносительно к тому, производят ли сравнение массы с эталоном массы или определяют вес тела, а потом делят его на ускорение силы тяжести (мы оставляем в стороне вопрос об определении электромагнитной массы).

Поскольку за единицу силы (безразлично, в статическом или динамическом ее проявлении) мы приняли килограмм, масса будет выражаться в $\frac{\text{кг. сек}^2}{\text{м}}$. Система единиц метр, тонна или килограмм (вес) — секунда носит название *технической системы единиц*. В этой системе масса не является основной единицей. Кроме кинематических единиц метр-секунда, сюда введена дополнительная динамическая мера силы — килограмм. Нам кажется методически это совершенно правильным и вытекающим исторически из зарождения и развития понятия силы в статическом и динамическом ее проявлении.

Наоборот, в физической системе за динамическую меру принята масса тела, а вес и вообще сила являются второстепенными элементами, производными единицами. Учащийся знаком с этой системой единиц из курса физики.

Итак мы имеем основное для всей динамики равенство:

$$F = m \cdot w. \quad (5)$$

Это соотношение между силой и вызываемым ею ускорением составляет содержание второго закона Ньютона.

Из динамического способа измерения силы между прочим сразу следует данное Ньютоном как дополнение ко второму закону правило сложения сил — *правило параллелограмма*. Действительно, если на тело действуют сразу две силы, то динамические проявления их, т. е. вызываемые ими ускорения, сложатся как вектора, по правилу параллелограмма, а вектора сил, как пропорциональные векторам ускорения и одинаково с ними направленные, сложатся тоже по правилу параллелограмма.

Учащийся должен заметить, что при сложении ускорений мы здесь не вводим никакой вращающейся системы и поэтому никакого дополнительного (Кориолисова) ускорения мы не должны вводить.

В заключение настоящего и предыдущего параграфов нам хочется еще раз резюмировать и подчеркнуть главные выводы:

- 1) статическое измерение сил сводится к непосредственному сравнению их между собою или с эталоном силы — килограммом веса — при помощи протарированного динамометра или весов;
- 2) динамически силы сравниваются, а следовательно и измеряются, по ускорениям, сообщаемым ими одному и тому же телу;
- 3) две статически равные силы, проявляясь динамически, сообщают одному и тому же телу одинаковые ускорения; ускорения, сообщаемые двумя разными силами одному и тому же телу, пропор-

циональны приложенным силам (опыты над падением тел на поверхности земли в одинаковых и различных пунктах, закон Гука и ускорение тела, подвешенного на упругой пружине, и другие);

4) отношение силы к кинематическому ее эффекту—ускорению—есть величина постоянная для данного тела. Эта величина является материальной мерой тела и называется *массой*. Массу можно измерять, например, отношением веса тела к ускорению свободного падения.

§ 5. Взаимодействие тел. Действие и противодействие.

До сих пор мы говорили о действии одного тела на другое, но не упомянули о том, что такое действие всегда сопровождается и обратным действием второго тела на первое. Если мы давим рукой на стол, то при этом прикладываем некоторую силу к столу, но и наша рука испытывает давление. Выясним, какова количественная связь между взаимными действиями материальных тел друг на друга. Для этого будем измерять эти действия статически. Поступим, например, так: чтобы измерить давление груза на стол, поместим между грузом и столом какой-нибудь упругий динамометр, например протарированную непосредственными нагрузками пружину: пружина сожмется. По деформации пружины можно одинаково судить, как о действии груза на стол, так и стола на груз. И то и другое действие, и та и другая сила статически определяются одной и той же деформацией пружины, что говорит за то, что силы при взаимодействии равны по величине и противоположны по направлению. Одну из сил, например действие груза на стол, можно называть „действием“, а вторую силу — стола на груз — „противодействием“.

„Действие всегда равно по величине и прямо противоположно по направлению противодействию“. Это интересное свойство сил взаимодействия двух материальных тел справедливо не только при статическом действии сил, но и при динамическом их проявлении. Желая, например, измерить силу тяги паровоза, мы поместим между паровозом и вагонным составом динамометр, тогда этот динамометр, безотносительно к тому, будет ли паровоз тянуть поезд ускоренно или равномерно, покажет одновременно и силу, приложенную от паровоза к поезду, и наоборот — от поезда к паровозу. Обе силы: двигательная сила паровоза и сила сопротивления поездного состава—будут измерены одновременно одним и тем же динамометром.

Это—все факты, хорошо известные учащемуся, но следует отметить одну часто допускаемую ошибку. Действие равно и прямо противоположно противодействию, но действие *не уравнивается* противодействием, потому что по известному свойству сил две равные и прямо противоположные силы только тогда уравниваются, когда они *приложены к одному и тому же телу*. Действие приложено ко *второму* телу и имеет источником первое, противодействие же приложено к *первому* телу и имеет источником *второе* тело. Вот почему неправильно рассуждение, иног-

да приводимое начинающими учащимися: если действие паровоза на вагон равно и прямо противоположно противодействию вагона на паровоз, то почему паровоз тянет вагон, а не вагон паровоз? Необходимо отдельно рассмотреть два материальных тела: паровоз и вагон. К паровозу приложены силы трения колес о рельсы, направленные по скорости паровоза, и сила противодействия вагона (мы пренебрегаем сопротивлением воздуха), так как силы трения, в своей совокупности определяющие двигательную способность паровоза, превышают силу противодействия вагона, то паровоз двигается вперед и тянет за собой вагон. К вагону приложено действие паровоза и силы трения в колесах; так как действие паровоза, направленное по скорости паровоза, превышает эти силы трения, то вагон двигается за паровозом.

Приведенный в этом параграфе результат: равенство действия и противодействия составляет содержание третьего закона Ньютона.

§ 6. Заключение. Абсолютное и относительное движение в динамике.

Мы уже упоминали, что коренным недостатком классической динамики является лежащее глубоко в ее основах метафизическое предположение о существовании такой „абсолютно-неподвижной“ системы координат, по отношению к которой справедливы законы Ньютона; сейчас мы можем уже разъяснить читателю смысл и необходимость такого предположения.

Ньютон прекрасно понимал, что все его опыты производятся по отношению к земле, а земля вертится вокруг своей оси, да кроме того еще перемещается по своей орбите вокруг солнца, а солнце в свою очередь может быть тоже движется и т. д. Что же в таком случае понимать под ускорением, вызываемым данной силой, т. е. действием одного тела на другое? Понимать ли ускорение относительно земли, или может быть относительно солнца, или другой системы координат? Ускорения эти, вообще говоря, совершенно различны; что же тогда такое сила?

Поясним это таким примером: предположим, что мы едем в трамвае по прямолинейному участку рельсов. В некоторый момент времени мы замечаем, что все стоящие в вагоне начинают не по собственной воле лететь стремглав к дверям. Для наблюдателя, сидящего в трамвае, явление рисуется так: пассажир, стоявший неподвижно (равномерного движения трамвая по отношению к земле наблюдатель не замечает), вдруг под влиянием, очевидно, некоторой силы начал двигаться ускоренно по отношению к трамваю в направлении, скажем, выхода. Что это за сила? Действие какого тела заставило пассажира лететь к дверям? Притягивает ли его дверь или что-нибудь другое? Будет бесполезно разыскивать источник этой силы. Наблюдатель, стоящий на земле, „прекрасно видит“, что никакой такой силы нет, более того, пассажира вовсе ничто и не влечет к дверям. Наш наблюдатель заметит, что пассажир вместе с трамваем двигался с некоторой скоростью; в некоторый момент времени *трамвай затормозили*, при этом

пассажир, стоявший в трамвае, продолжает, поскольку ему это позволяет сила трения ног, равномерно двигаться по отношению к земле, наоборот, трамвай замедляет свое движение и, следовательно, дверь приближается к пассажиру, причем это изменение движения двери вместе с трамваем объясняется вполне физической силой — трением заторможенных колес о рельсы. Что касается силы, которую мог подозревать наблюдатель, сидящий в трамвае, то ее с точки зрения связанного с землей наблюдателя вовсе нет. Эта сила, кажущаяся наблюдателю, связанному с ускоряющейся средой, называется *фиктивной силой инерции*. Силы инерции мы подробно будем изучать в третьей части курса; отметим лишь, что эти силы мы не можем считать физическими, потому что источниками их не являются никакие физические тела; нам кажется, что силы инерции существуют, когда мы сами под влиянием физических реальных сил двигаемся ускоренно.

Эти инерционные силы могут производить очень интересные кажущиеся эффекты, например при пуске в ход лифта вверх все тела увеличивают свой вес, конечно, только измеренный динамометром, соединенным с лифтом, наоборот при ускоренном опускании лифта вес уменьшается, *в лифте, летящем вниз с ускорением силы тяжести, все тела делаются для наблюдателя, летящего вместе с лифтом, невесомыми.*

Точно так же у авиатора при вираже самолета сила веса направлена не по земной вертикали того пункта, над которым он пролетает; делая мертвую петлю, он не рискует, как многие полагают, вылететь головой вниз из самолета, так как при петле с точки зрения среды — самолета — центробежная сила прижимает его к сидению самолета; точно так же вода не выливается из ведра при вертикальном вращении ведра с достаточной угловой скоростью; на самом же деле никакая сила не прижимает авиатора к сидению, а наоборот, аэроплан, делая вираж, давит на авиатора.

Вернемся после указания этих примеров к основному вопросу: что принимать за ускорение материальной точки? Мы видим, что это ускорение может заключать в себе целый ряд ускорений, объясняемых ускоренным движением того тела, относительно которого ускорение измерено. Соответствующие этим ускорениям силы не будут по нашим представлениям физическими силами, так как они не будут являться действием одного физического тела на другое. В кинематике мы легко отказались от представления абсолютности движения, считая всякое движение *только относительным* к данной среде или системе координат, в динамике дело обстоит не так.

Кинематическую относительность заметил, как мы уже упоминали, еще Эйлер, разобраться же в динамической относительности стало возможным лишь на рубеже XIX, XX веков.

Ньютон с полной определенностью заметил, что его законы (а следовательно и то, что говорилось в предыдущих параграфах) справедливы лишь или по отношению к абсолютно неподвижной системе координат, или по отношению к системе, равномерно и

поступательно двигающейся по отношению к абсолютной (так называемая Галилеева система); при применении же законов движения в *ускоренно* движущихся системах (т. е. с неравномерным переносным движением или равномерным, но не прямолинейным переносным движением) задача решается особым приемом, который мы изложим в третьей части курса, в задании об относительном движении, где вместе с физическими силами принимаются во внимание и фиктивные силы инерции.

Таким образом все основано на априорном (взятом наперед как правильное) предположении существования абсолютно неподвижного пространства. Сам Ньютон считал таким пространством область неподвижных звезд, до него, как мы уже упоминали, за абсолютно неподвижное пространство принимали вначале землю (геоцентрическое мировоззрение), затем солнце (гелиоцентрическое мировоззрение), после Ньютона за абсолютное неподвижное пространство приняли пресловутый гипотетический эфир, в котором происходят все физические явления. Борьба за уничтожение „хи-меры“ мирового эфира закончилась появлением общей теории относительности, которая показала, как можно изучать физические явления, не основываясь ни на каком предположении абсолютности пространства и времени.

Желая, по необходимости, оставаться в рамках классической механики по причинам практической простоты ее сравнительно со сложным аппаратом релятивистской механики, мы должны высказать следующее утверждение:

Будем считать правильными основные положения классической механики по отношению к такой системе координат, предположение „абсолютной“ неподвижности которой не приводит к появлению значительных по эффекту сил инерции.

Мы поясним это утверждение следующими примерами. Рассматривая движение машины, будем считать за основную „неподвижную“ систему землю. Это дает нам достаточную для практики возможность учета и объяснения всех входящих сил. Для объяснения отклонения падающих тел к востоку и югу, явления вращения плоскости колебания маятника в известном опыте Фуко, для объяснения закона Бэра размывания правого берега в реках (см. кинематику, а также следующую часть курса) и многих других метеорологических и геофизических явлений — мы принуждены перенести „неподвижность“ на солнце и т. д.

Если выяснится необходимость, как, например, это уже имеет место при расчете гироскопического компаса и др., принимать во внимание вращение земли вокруг собственной оси, тогда придется и для техники вводить в ряде вопросов гелиоцентрическую систему.

Наоборот, иногда, при очень приближенных расчетах, даже очевидно ускоренную систему можно принимать за неподвижную, например при изучении работы некоторых приборов на корабле: мы в первом приближении отвлекаемся от ускорения качки корабля, во втором приближении принимаем ее во внимание.

Все эти различные комбинированные подходы к каждому явлению со своей системой координат являются неотъемлемым недостатком классической механики и, повторяем, далеки от общ-

ности и строгости объяснения, даваемого общей теорией относительности.

Мы закончим нашу беседу тем, чем начали ее: основное значение и ценность теории — давать по возможности единое, общее объяснение самым разнообразным экспериментальным фактам. Чем новее, моложе теория, — тем, как правило, больше общность ее применения. Классической механике в этом смысле нельзя тягаться с современной релятивистской механикой. За механикой Ньютона остается одно преимущество — большая разработанность и простота практического расчета и достаточно хорошая точность совпадения результатов расчета с опытом.

Вот почему мы еще долго будем применять методы классической механики.

Приводим некоторые хронологические сведения о выходе в свет основных трудов по механике; появление каждого из этих трудов знаменовало новый этап в развитии механики. Здесь же указаны даты рождения и смерти творцов этих произведений. Некоторые из указанных в списке имен учащийся уже встречал в первой части нашей книги, — остальные он встретит в настоящей и следующей частях курса. Список современной литературы помещен в конце книги.

Аристотель, 384—322 до н. э.

Архимед, 287—212 до н. э.

Коперник, 1473—1543 (*De revolutionibus orbium caelestium*, 1543).

Стевин, 1548—1620 (*Hypomnemata mathematica*, 1608).

Кеплер, 1571—1630 (*Astronomia nova*, 1609; *Harmonices mundi*, 1619).

Галилей, 1564—1642 (*Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali*, 1638).

Ториччели, 1608—1647 (*De motu gravium naturaliter descendentium*).

Гюйгенс, 1629—1695 (*The law of motion on the collision of bodies*, 1669; *Horologium oscillatorium*, 1673).

Ньютон, 1642—1727 (*Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687).

Лейбниц, 1646—1716 (*Acta eruditorum*, 1680—1695).

Вариньон, 1664—1722 (*Nouvelle mécanique ou statique*, 1725).

Даниил Бернулли, 1700—1782 (*Hydrodynamica*, 1738).

Эйлер, 1707—1783 (*Mechanica sive motus scientia*, 1736; *Theoria motus corporum solidorum*, 1765).

Даламбер, 1717—1783 (*Traité de dynamique*, 1743).

Лагранж, 1736—1813 (*Mécanique analytique*, 1788).

Лаплас, 1749—1827 (*Mécanique céleste*, 1799).

Гаусс, 1777—1855 (*Neues Prinzip der Mechanik*, 1829).

Кулон, 1736—1806 (*Théorie des machines simples, en ayant égard au frottement de leurs parties etc.*, 1781).

Пуансо, 1777—1859 (*Eléments de statique*, 1804).

Кориолис, 1792—1843 (*Mécanique des corps solides et calcul de l'effet des machines*, 1829).
Понселе, 1788—1876 (*Cours de mécanique, appliquée aux machines*, 1826).
Якоби, 1804—1851 (*Vorlesungen über Dynamik*, 1866).
Гамильтон, 1805—1865 (*Lectures on quaternions*, 1853).
Майер, 1814—1878 (Установление закона сохранения энергии, *Annales Phys. et Chem.*, 1841).
Гельмгольц, 1826—1894 (*Über die Erhaltung der Kraft*, 1847).
Герц, 1857—1894 (*Die Prinzipien der Mechanik*, 1894).

Тема первая

Основные уравнения движения и общие теоремы о движении центра инерции и изменении количества движения.

Основные законы механики, о которых была речь во введении, выраженные математически, дают нам возможность составить систему дифференциальных уравнений, от решения которых зависит ответ на поставленный в задаче вопрос. Если бы нам удалось в большинстве случаев решать с достаточной для практики простотой и точностью эти уравнения, то мы имели бы исчерпывающие ответы для всех динамических задач. Однако, дифференциальные уравнения динамики настолько сложны, что даже в самых простейших случаях одной только материальной точки и то мы не всегда в состоянии дать полное решение этих уравнений. Вот почему из всех результатов, заключающихся в итоге полного решения системы дифференциальных уравнений, нам приходится часто довольствоваться только некоторыми, дающими не полное, а только частичное описание явления. Что значит дать *полное* решение динамической задачи? Это означает указать закон изменения со временем *всех* координат движущейся системы, закон изменения скоростей отдельных ее частиц, величину сил взаимодействия между всеми точками системы и многое другое. В большинстве случаев мы оказываемся не в состоянии ответить на все эти вопросы, но с другой стороны всегда ли представляет практический интерес это полное решение? Разве иногда не бывает гораздо более важным выделить только одну или несколько сторон явления как главнейшие и пренебречь остальными как второстепенными. Такой взгляд в значительной степени примиряет нас с теми ограниченными возможностями, которые дает нам математический анализ на его современном этапе, и направляет наши искания на методы выделения из всех решений системы динамических уравнений, наиболее интересных и важных в постановке данной конкретной задачи. Эти отдельные выводы из общих уравнений динамики, дающие обычно описание какой-нибудь одной стороны явления, составляют содержание так называемых *общих теорем динамики*. Общие теоремы замечательны тем, что, безотносительно к разбираемому частному случаю движения, они утверждают некоторые, настолько широкие соотношения между кинематическими и дина-

мическими элементами движения, что их можно с успехом применять в самых разнообразных задачах. Таковы теоремы о движении центра инерции системы точек и об изменении количества движения системы, излагаемые в настоящей теме, такова же и крайне важная теорема моментов, которой посвящена целиком вторая тема, и теорема об изменении кинетической энергии, изложенная в последней, третьей, теме настоящей книги.

По своей математической структуре общие теоремы представляют не что иное, как результаты или проведенного до конца интегрирования некоторых уравнений, выведенных из уравнений движения, или только определенным образом скомбинированные комплексы основных величин, входящих в уравнения движения. И в том и другом случае важно отметить, что математическая формулировка теорем представляет всегда более простую и наглядную форму соотношения между величинами, чем уравнения движения в необработанном виде. Общие теоремы освобождают нас от необходимости в каждом отдельном случае производить те математические преобразования, которые *раз навсегда* при выводе теорем произведены. Таким образом применение общих теорем динамики между прочим дает более экономный в смысле затраты времени подход для решения задач, а это при сложных расчетах имеет большое значение. Таковы формальные выгоды применения общих теорем, но главное значение теорем не в этом. В отличие от дифференциальных уравнений движения, связывающих изменение координат отдельных точек системы, проекций их скоростей и ускорений на некоторую систему координат с изменением времени, общие теоремы дают связь между гораздо более глубокими, общими характеристиками движения, охватывающими в одном или нескольких простых математических выражениях динамический характер процесса. Эти общие характеристики или меры движения (количество движения системы, кинетическая энергия, момент количества движения и др.) имеют или действительно очень простой наглядный физический смысл или при неоднократном применении приобретают во всяком случае большую конкретность и, так сказать, условную „физичность“ (например центр инерции системы), часто по аналогии с физическими понятиями, в порядке обобщения которых они появились. Отсюда следует самое, на наш взгляд, важное значение общих теорем динамики — возможность при помощи их войти в физический характер описываемого уравнениями явления или, во всяком случае, вместо чисто математических операций создать образы, являющиеся по меньшей мере аналогиями привычных нам физических картин. Значение такого подхода к описаниям явления очевидно.

При рассмотрении конкретной технической задачи мы применяем обычно не одну, а несколько теорем и в результате получаем ряд представляющих определенное значение результатов. Совокупность этих результатов дает обычно достаточную картину изучаемого процесса, причем конечно целый ряд деталей явления при этом от нас ускользает. Если полученное решение все же недостаточно охватит изучаемый процесс, то надо вернуться обратно к уравнениям движения, исключить из них все то, что мы уже узнали из теорем,

и полученные таким образом упрощенные уравнения решать одним из возможных способов.

Какие теоремы и когда применять? Об этом мы будем говорить во введениях к отдельным заданиям, а также попутно при решении задач на упражнениях, скажем здесь только одно: при подходе ко всякому техническому расчету надо всегда пытаться решать задачу при помощи общих теорем и уже только потом, при детализации и уточнении, обращаться к общим уравнениям.

В настоящей теме мы посвящаем первое сравнительно большое задание рассмотрению способов непосредственного решения дифференциальных уравнений в простейших случаях. Более сложные случаи учащийся найдет в третьей части курса, где будут, с одной стороны, рассмотрены задачи, обязательно требующие непосредственного интегрирования дифференциальных уравнений, а с другой — будут указаны преобразования уравнений движения системы к виду (уравнения Лагранжа), более удобному для практических расчетов. Два другие задания темы включают первые две общие теоремы динамики: теорему движения центра инерции системы материальных точек и теорему изменения количества движения системы в связи с их применениями в тех областях технических задач, для которых значение соответствующих теорем особенно важно.

Методические указания к первой теме. Из введения ясно, что, как при прохождении этой темы, так и вообще при прохождении всей книги учащийся должен сосредоточить все свое внимание главным образом на усвоении общих теорем динамики, в частности на тех двух, которые изложены в настоящей теме. Значение дифференциальных уравнений в настоящей книге отодвигается несколько на задний план. Мы все же посвящаем первое задание дифференциальным уравнениям потому, что во-первых, на них основан вывод общих теорем, во-вторых, необходимо выявить те совсем простые задачи, которые легко сразу решаются без применения общих теорем (главным образом прямолинейные движения), в третьих, мы считаем обязательным напомнить учащемуся математические приемы интегрирования уравнений тех типов, которые ему встретятся при применении общих теорем и, наконец, в четвертых, учащийся сможет впоследствии, применяя общие теоремы, сравнить между собою методы решения задач тем и другим способом. Именно под таким углом зрения учащийся и должен смотреть на первое задание. Кстати говоря, никакой теории оно почти и не включает и содержит только ряд отдельных, представляющих технический интерес задач, которые учащийся и должен тщательно проделать, обратив особое внимание на порядок и способы интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений.

Совершенно иначе следует отнестись ко второму и третьему заданиям. Начиная от формулировок общих теорем и их частных случаев и кончая специфическими особенностями применения этих теорем на отдельных задачах, учащийся должен самым тщательным образом усвоить. Надо разобрать все примеры, приведенные нами, решить ряд задач для самопроверки и тогда вновь вернуться к тео-

реческому материалу. *Формулировки общих теорем (их всего несколько) должны быть выучены наизусть, соответствующие им математические выражения (они у нас обычно стоят в рамочке) надо запомнить как в векторном виде, так и в проекциях.* После выклада каждой теоремы, перед примерами и упражнениями, у нас дается по возможности полное описание физического значения теоремы на нескольких явлениях, разбираемых с качественной стороны (количественная сторона углубляется в упражнениях). Учащийся должен отнестись со вниманием к этим описательным разъяснениям теорем. Наконец, мы рекомендуем после проработки настоящей темы в целом, а также и других тем этой книги прочесть еще раз введение к первой теме, которое имеет и резюмирующее значение. Таким образом учащийся уяснит себе роль общих теорем в динамике.

Методические детали к отдельным заданиям даются нами, как всегда, в тех местах соответствующих заданий, где это наиболее удобно.

Задание I-е

Дифференциальные уравнения движения системы материальных точек.

Статическое измерение силы и ее динамическая связь с ускорением, даваемая вторым законом Ньютона, взятая сама по себе, позволяет решать только одну простейшую задачу динамики — определение силы по заданному движению точки и ее массе. Эта задача в некоторых случаях представляет интерес, но не в ней значение динамики. Гораздо большие возможности открывает нам тот случай, когда мы в результате длинного ряда экспериментов установили закон изменения взаимодействия между телами при их движении, в зависимости от кинематических элементов движения (координат, времени, скорости). Имея такой общий закон (например Гук о зависимости упругой силы от деформационного смещения точки, закон тяготения или электростатического притяжения и отталкивания и др.) мы можем предсказать механическое явление, т. е. все обстоятельства движения в любой момент. Для этого (вторая задача динамики) нам приходится интегрировать систему дифференциальных уравнений, причем оказывается, что для полного решения вопроса недостаточно знать закон зависимости силы от кинематических элементов — необходимо еще задавать значение этих кинематических элементов в какой-нибудь один момент движения, например вначале (роль *начальных условий движения*).

Настоящее задание целиком посвящено иллюстрации методов решения этих двух задач динамики (главным образом второй, как наиболее интересной) на ряде примеров, представляющих конкретный технический интерес. Примеры выбраны весьма разнообразные, из самых различных областей физики и техники, и расположены в порядке возрастания сложности математического расчета. Предлагаемые примеры охватывают почти все главнейшие типы задач, решаемых элементарным способом. Более сложные типы урав-

нений встретятся в следующих заданиях, а также в третьей части курса.

Простота решения задачи часто зависит от выбора удачной системы координат (полярная система, сферическая система и др.) или от формы уравнений (естественные уравнения). В настоящем задании мы не имеем возможности достаточно глубоко это показать, все же на нескольких примерах это положение иллюстрируется. Дальнейшее развитие этой идеи можно найти во второй теме и особенно в третьей части курса, где эта идея приведет нас к выводу особого типа уравнений динамики — уравнений Лагранжа.

Мы не предполагаем в настоящем задании, что учащийся имеет серьезные знания по курсу дифференциальных уравнений и поэтому при решении их проводим все выкладки по возможности яснее.

§ 7. Основные дифференциальные уравнения движения материальной точки и системы точек. Векторная форма уравнений и проекции их на различные системы осей. Естественные уравнения.

В введении мы вывели основное соотношение между силой и вызываемой ею ускорением точки. Это соотношение имело следующую векторную форму:

$$m w = F, \quad (1)$$

где величина m , равная отношению веса материальной точки к ускорению силы тяжести:

$$m = \frac{p}{g}, \quad (2)$$

есть масса материальной точки, а F — равнодействующая всех приложенных к точке сил.

Вспоминая еще, что

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}. \quad (3)$$

где v — скорость, r — вектор-радиус точки, можем придать уравнению (1) один из следующих видов:

$$m \frac{dv}{dt} = F \quad (4)$$

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = F. \quad (5)$$

Точно так же, если мы имеем не одну материальную точку, а целую систему, состоящую из n точек M_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) с массами m_i , вектор-радиусами r_i , скоростями v_i , то для каждой точки могли бы написать любое из следующих основных соотношений:

$$m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} = F_i \quad (6)$$

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = F_i$$

$$m_i w_i = F_i$$

Здесь под $\vec{F}_i$ мы понимаем равнодействующую всех сил, приложенных к точке M_i (рис. 2). Ур-ния (1), (4), (5) представляют в различном виде *основные уравнения динамики точки*, точно так же уравнения (6) — *основные уравнения динамики системы точек*. От векторной формы этих основных соотношений можно перейти к любой другой в проекциях на некоторые оси. Наиболее принятая на практике форма, это — в проекциях на оси декартовой системы координат. Для получения этой формы достаточно спроектировать обе части векторного равенства на оси координат, тогда мы будем иметь:

а) для одной точки:

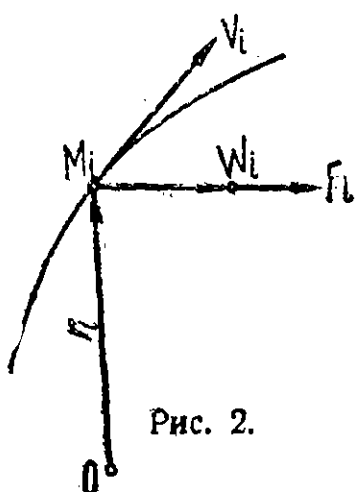


Рис. 2.

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x \\ m\ddot{y} &= F_y \\ m\ddot{z} &= F_z \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

б) для системы точек:

$$\left. \begin{aligned} m_i \ddot{x}_i &= F_{ix} \\ m_i \ddot{y}_i &= F_{iy} \\ m_i \ddot{z}_i &= F_{iz} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Кроме этой формы основного соотношения (1) или (6), отметим еще в частности другую, получающуюся проектированием уравнения (1) (в случае движения на плоскости) на направление вектора радиуса точки и ему перпендикулярное, в сторону возрастания полярного угла. Для этого вспомним упражнение 5 16-го задания нашего курса кинематики и спроектируем обе части (1) на направления r и φ . Будем иметь:

$$m\omega_r = F_r,$$

$$m\omega_\varphi = F_\varphi,$$

или:

$$\left. \begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) &= F_r \\ \frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) &= F_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Эти уравнения служат для изучения движения в полярных координатах и в дальнейшем нам очень пригодятся. Можно было бы написать уравнения динамики точки и в сферической или цилиндрической системе координат, а также и в любой другой криволинейной системе, мы однако сейчас отвлекаться этим сложным вопросом не будем и вернемся к нему в третьей части курса, в теме, посвященной лагранжевым уравнениям.

Особенно большое практическое значение имеют так называемые *естественные уравнения движения*. Эта особая форма уравнений динамики, получаемая проектированием основного ур-ния (1) на оси натурального триэдра, т. е. на направления касательной, нормали и бинормали к траектории в рассматриваемом положении

движущейся точки. Мы будем иметь (вспомнить сказанное в первой теме кинематики):

$$m\omega_{\tau} = m \frac{dv}{dt} = F_{\tau},$$

$$m\omega_n = m \frac{v^2}{\rho} = F_n,$$

$$m\omega_b = 0 = F_b.$$

Из последнего уравнения следует, что сила не дает проекцию на бинормаль к траектории, т. е. лежит в соприкасающейся плоскости, это действительно так и есть: сила направлена по ускорению. Опуская третье уравнение, как очевидное, перепишем естественное уравнение в форме:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= F_{\tau} \\ m \frac{v^2}{\rho} &= F_n \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В случае системы точек уравнения будут писаться, очевидно, аналогичным образом.

§ 8. Две основные задачи динамики и подход к их решению. Начальные условия движения и их значение для определения движения.

Перед динамикой стоят, собственно говоря, две основных задачи:

1°. Дано движение точки или системы точек определенной массы, т. е. даны все кинематические элементы движения в любой момент или, что все равно, кинематические уравнения движения, требуется найти силы, вызывающие это движение.

2°. (Обратная задача). Даны в любой момент времени силы, действующие на точку или систему точек определенной массы, требуется определить кинематические элементы движения, т. е. кинематические уравнения движения.

Обе задачи решаются основными динамическими уравнениями предыдущего параграфа, но методы решения их и по характеру и по сложности резко отличаются друг от друга. Остановимся на них подробнее.

Первая задача совсем проста и легко доводится до конца. Действительно, если, например, нам заданы кинематические уравнения в декартовой системе координат:

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

и масса точки m , то сила, вызывающая это движение, будет иметь проекции:

$$F_x = m\ddot{x} = m f_1''(t),$$

$$F_y = m\ddot{y} = m f_2''(t),$$

$$F_z = m\ddot{z} = m f_3''(t),$$

и таким образом в любой момент времени может быть подсчитана *простым дифференцированием*. Задача эта несколько усложняется требованием разыскания закона зависимости силы не от времени, а от положения точки или ее скорости, а кроме того и разыскания общих классов сил, вызывающих данный тип движений, но это уже углубление и обобщение первой задачи (задача Бертраана), в основном же первая задача решается легко и просто — ур-ние (1), написанное справа налево, решает задачу.

Совсем иначе обстоит дело со *второй* задачей. Здесь в том же ур-нии (1), или другом его виде, неизвестные координаты входят в левой части уравнений под знаком второй производной, причем, как мы сейчас выясним, правая часть может содержать неизвестные координаты и сами по себе и под знаком первой производной. Таким образом решение задачи сводится к необходимости интегрирования системы дифференциальных уравнений, т. е. задаче, представляющей часто непреодолимые математические трудности.

Прежде всего выясним на простейших примерах, как могут быть заданы силы.

Во-первых, сила может быть постоянной по величине и направлению, как это имеет место, например, для силы веса данной движущейся точки при незначительных изменениях ее расстояния до центра земли во время движения (полет снаряда на земле, движение аэроплана и др.), точно так же электрон,двигающийся в по-

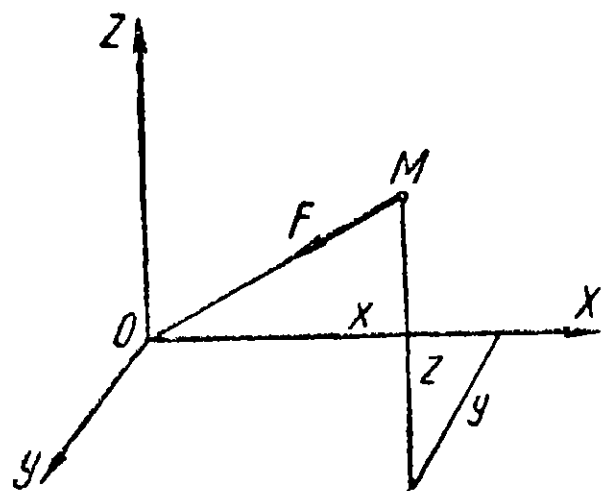


Рис. 3.

стоянном однородном электрическом поле, подвержен постоянной по величине и направлению силе, тело, спускающееся по наклонной шероховатой плоскости, тормозится постоянной силой трения и пр.

Во-вторых, сила может зависеть от времени, как, напр., та же сила взаимодействия электрона с электрическим, однородным, но переменным во времени, полем и другие случаи переменной во времени, например периодической силы, сможет легко придумать учащийся (притяжение якоря в однородном магнитном поле электромагнита, по обмотке которого пропускается переменный ток, тряска тела периодической силой, периодические толчки и др.).

В третьих, сила может зависеть от положения точки по отношению к действующим на нее телам. Здесь прежде всего следует упомянуть о силе упругости, пропорциональной по закону Гюка растяжению упругого тела, т. е. расстоянию данной частицы от равновесного ее положения, соответствующего отсутствию деформации. Если (рис. 3) M — одно из положений движущейся точки, O — равновесное ее положение, F — соответствующая упругая сила, стремящаяся вернуть точку M в ее первоначальное положение, то, по закону Гюка

$$F = -c \cdot r,$$

а проекции силы будут равны:

$$\begin{aligned}F_x &= -cx \\F_y &= -cy \\-F_z &= -cz,\end{aligned}$$

т. е. проекции силы пропорциональны координатам точки, если за начало принято равновесное положение точки.

Аналогично можно найти и проекции силы тяготения двух масс или притяжения (отталкивания) двух заряженных тел. В этом случае, помещая в точку O одну массу m_1 , а в точку M другую — m_2 , будем иметь по закону Ньютона (f — коэффициент пропорциональности)

$$\mathbf{F} = -f \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r},$$

откуда:

$$F_x = -f \frac{m_1 \cdot m_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot x$$

$$F_y = -f \frac{m_1 \cdot m_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot y$$

$$F_z = -f \frac{m_1 \cdot m_2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \cdot z.$$

Для нас сейчас важно только одно, что проекции силы могут быть заданы как известные функции неизвестных (во второй задаче) координат точки.

В четвертых, сила может зависеть от скорости движущейся точки. Примеров таких сил можно много указать при рассмотрении сил сопротивления среды движущимся в ней телам. Хорошо известно всякому, что чем быстрее движется тело в воздухе или жидкости, тем большую силу сопротивления оно испытывает своему движению. Многочисленные опыты (этим занимается гидро- и аэродинамика) показали, что при очень малых скоростях, очень малых размерах движущихся тел и большой вязкости жидкости сопротивление движению пропорционально первой степени скорости движения частицы и направлено в сторону, противоположную направлению скорости; при больших скоростях или больших размерах тел сопротивление в жидкости с малой вязкостью становится пропорциональным квадрату скорости частицы, причем законы эти приближенные, экспериментальные. Таким образом, например, при прямолинейном движении точки по направлению оси OX сила сопротивления движению будет иметь проекцию:

$$F_x = -\gamma x \quad \text{или} \quad F_x = -\gamma x^2,$$

в зависимости от размеров тела, порядка скорости и физических свойств жидкости; γ — экспериментально полученный коэффициент.

Мы в дальнейшем еще вернемся к этим законам зависимости силы от различных кинематических элементов, пока ограничимся этими несколькими примерами и сделаем следующий резюмирующий вывод:

„Силы, приложенные к движущейся точке, могут быть постоянны, зависеть явно от времени, положения точки и ее скорости“.

Проекций силы, например, на оси декартовых координат могут быть представлены как функции:

$$\begin{aligned} F_x &= F_x(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ F_y &= F_y(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ F_z &= F_z(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned}$$

В полярной системе мы имели бы:

$$\begin{aligned} F_r &= F_r(t; r, \varphi; \dot{r}, \dot{\varphi}) \\ F_\varphi &= F_\varphi(t; r, \varphi; \dot{r}, \dot{\varphi}). \end{aligned}$$

Мы свели здесь все случаи вместе, так как точка может, очевидно, подвергаться *одновременному* воздействию и сил упругости и сопротивления среды и других сил, как, например, это имеет место в колебаниях груза на пружине, помещенного в масло или других подобных случаях.

Остановившись подробнее на случае декартовых координат, (случай других координат приводит к совершенно аналогичным рассуждениям), выпишем теперь ур-ния (7) в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} &= F_y(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} &= F_z(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Мы видим, что для решения второй задачи мы должны решить систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В случае не одной, а нескольких материальных точек мы имели бы систему, состоящую из большего числа уравнений.

Известно, что решение такой системы возможно лишь в ряде самых простейших случаев и, собственно говоря, все содержание современной динамики сводится к разысканию решений этой системы и исследований этих решений в наиболее практически интересных случаях. Непосредственно после этого параграфа мы дадим большое количество примеров и упражнений на первую и вторую задачу, сейчас же сделаем в заключение некоторые общие замечания по поводу порядка решения второй задачи ¹⁾.

Предположим, что нам удалось один раз проинтегрировать ур-ния (11), т. е. освободиться от вторых производных координат по времени, тогда мы получим некоторые новые зависимости уже только от времени, координат и их первых производных, причем от трех интегрирований (по числу уравнений) у нас войдут три произвольных постоянных интегрирования. Поскольку мы имеем систему *совокупных* уравнений, при решении их нам, вообще говоря,

¹⁾ Заключительная часть этого параграфа может быть сначала пропущена и прочтена уже после примеров и упражнений. Учащийся, не боящийся общих, схематических рассуждений, пусть все же лучше идет по порядку, без пропусков. Заключительная часть дает некоторые общие подходы к решению задач динамики.

придется делать исключения неизвестных из одних уравнений и подстановку их в другие, поэтому в окончательном результате все переменные, а также и постоянные, введенные при интегрировании, перетасуются (в частных случаях это может и не случиться, но мы берем самый общий случай) и в результате мы получим такую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; C_1, C_2, C_3) &= 0 \\ \Phi_2(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; C_1, C_2, C_3) &= 0 \\ \Phi_3(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; C_1, C_2, C_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Эта система называется обыкновенно системой *первых интегралов* уравнений динамики точки (точно так же получаются первые интегралы уравнений динамики системы).

Если нам удастся совершить еще одно интегрирование, то мы освободимся и от первых производных координат по времени, при этом войдут новые три постоянные интегрирования: C_4, C_5, C_6 , причем, как и раньше, в зависимости от метода решения совместных ур-ний (12), постоянные могут перемещаться и войти во все уравнения так что мы будем иметь после второго интегрирования ур-ний (7) или еще одного интегрирования (12):

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1(t; x, y, z; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0 \\ \Psi_2(t; x, y, z; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0 \\ \Psi_3(t; x, y, z; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Полученная система представляет систему *вторых интегралов* уравнений динамики.

Вторые интегралы уже не содержат никаких производных и дают искомую связь между координатами и временем в конечном, а не дифференциальном виде. Считать ур-ния (13) окончательным решением второй задачи однако нельзя до тех пор, пока не определены постоянные интегрирования. Действительно, если найти из ур-ний (13) координаты как функции времени, то эти функции будут еще зависеть от шести произвольных постоянных, т. е. на поставленный во второй задаче вопрос получим не один, а целое многообразие ответов, в зависимости от того, какие значения мы придадим постоянным.

Легко понять, что такой результат физически естествен. Мы задали только закон изменения силы при движении точки и ее массу, но ни слова не сказали о том, из какого места пространства точка начала двигаться, с какой начальной скоростью и в каком направлении. Снаряд определенного веса, будучи выпущен из разных мест в разных направлениях, с разными скоростями вылета, очевидно, будет иметь совершенно различные траектории и различные уравнения движения. Следует все же оговориться, что под различными траекториями мы здесь не понимаем обязательно различные *по типу* кривые. Независимо от условий и места вылета, все снаряды (если отвлечься от сопротивления воздуха) будут описывать параболы, но параметры, координаты, вершины и др. элементы этих парабол будут различны, точно так же будут различны

плоскости этих парабол и расположения их на земле. В других случаях в зависимости от разных начальных условий могут получиться и другие по типу кривые. Ур-ния (13) дают только тип уравнений движения точки, ничего не говоря о том, какие именно уравнения надо взять для данного конкретного случая. Для этого выбора и служат начальные условия движения, которые должны быть заданы наперед — иначе задача остается по существу неопределенной.

Предположим, что нам заданы условия:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } t=t_0, \\ x=x_0, y=y_0, z=z_0 \\ \dot{x}=\dot{x}_0, \dot{y}=\dot{y}_0, \dot{z}=\dot{z}_0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

т. е. в некоторый момент времени заданы начальные координаты точки и проекции начальной скорости ее на оси декартовой системы, тогда задача станет уже вполне определенной. В самом деле подставим начальные условия в первые и вторые интегралы уравнений движения, тогда будем иметь такую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0; C_1, C_2, C_3) &= 0 \\ \Phi_2(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0; C_1, C_2, C_3) &= 0 \\ \Phi_3(t_0; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0; C_1, C_2, C_3) &= 0 \\ \Psi_1(t_0; x_0, y_0, z_0; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0 \\ \Psi_2(t_0; x_0, y_0, z_0; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0 \\ \Psi_3(t_0; x_0, y_0, z_0; C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Здесь у нас имеется шесть уравнений с шестью неизвестными: $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$. Решив такую систему, мы найдем вполне определенные значения для постоянных интегрирования и, подставив их в систему (13), сделаем ее также вполне определенной и теперь уже, решая систему ур-ний (13), после подстановки значений постоянных получим:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ y &= f_2(t; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \\ z &= f_3(t; x_0, y_0, z_0; \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Это и есть искомые уравнения движения точки; здесь x, y и z выражены в функции от времени, остальные же величины: $x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ — заданные наперед постоянные, выражающие начальные условия движения.

В случае не декартовой системы координат, например полярной или сферической, можно было бы привести буквально те же соображения, только всюду в формулах от (12) до (16) надо было бы заменить x, y, z на r, φ и θ для сферической системы и x, y — на r, φ — для полярной системы. Соответственно этому и начальные условия давали бы в начальный момент времени значения: $r_0, \varphi_0, \theta_0, \dot{r}_0, \dot{\varphi}_0$ и т. д.

Резюмируем метод решения второй задачи динамики; интегрируя основные дифференциальные уравнения динамики, мы получаем первые и вторые интегралы их. Подставив в первые и вторые интегралы начальные условия движения, находим произвольные постоянные интегрирования и уже после этого, заменяя во вторых интегралах постоянные интегрирования полученными их выражениями, находим окончательный вид искомых уравнений движения.

Дальнейшее исследование движения: определение траектории, скоростей, ускорений пройденного пути в любой момент времени — уже вопрос кинематический и решается по методам, изложенным нами в кинематике. Самое трудное, конечно, найти первые и вторые интегралы уравнений движения. Отметим, что иногда проще бывает по заданным дифференциальным уравнениям динамики найти сперва вторые интегралы, т. е. выражения, не содержащие производных, тогда первые интегралы легко находятся однократным дифференцированием по времени вторых интегралов.

Мы можем теперь перейти к иллюстрациям предыдущих теоретических соображений на примерах. Ниже приводятся только наиболее простые примеры и упражнения; как уже упоминалось, более сложные и подробные исследования некоторых интересных для техники задач мы дадим в конце настоящей книги.

Примеры и упражнения.

Мы предлагаем вниманию учащегося примеры на обе задачи динамики. Исторически обычно решалась вначале *первая задача*, т. е. из наблюдения движений заключали о законе зависимости силы от различных физических факторов. Только уже потом, установив эту закономерность, начали предсказывать формы движения, которые при заданных начальных условиях будут иметь место, т. е. решали *вторую задачу*. Таковы кинематические законы Кеплера, приведшие к динамическому закону Ньютона о всемирном тяготении, и ряд других исторических проблем.

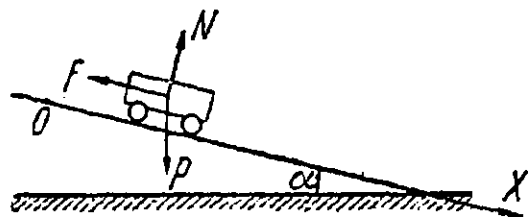


Рис. 4.

1. Движение незаторможенного вагона и влияние торможения. Вагон (рис. 4) скатывается вниз по рельсам, наклонным к горизонту под углом α . Поставим себе задачу, наблюдая за движением вагона, определить силу торможения вагона, вызываемую трением в осях колес, трением колес о рельсы и др. Предположим, что произведенное наблюдение показало *равномерную* ускоренность в скатывании вагона, причем оказалось, что постоянное ускорение равно w . Тогда сила трения может быть найдена методом решения первой задачи динамики.

Обозначим вес вагона через P , нормальную реакцию рельс — N , силу торможения, направленную в сторону, противоположную скатыванию вагона, через F . Написав дифференциальное уравнение движения вагона в проекции на ось x , будем иметь

$$mw_x = P_x - F, \quad \text{или} \quad \frac{P}{g} w_x = P \sin \alpha - F,$$

но, по условию, вагон движется равноускоренно с ускорением w , отсюда сразу находим

$$F = P \left(\sin \alpha - \frac{w}{g} \right). \quad (17)$$

Таким образом сила торможения найдена, она постоянна по величине. При больших скоростях, кроме сил торможения трением, входят еще силы сопротивления воздуха, кроме того и силы трения не постоянны и при разных скоростях имеют разное значение, при этом движение вагона не будет равнопеременным, а будет происходить по гораздо более сложному закону. Мы далее остановимся на этом вопросе, а пока сделаем все же *упрощающее предположение*, что *торможение постоянно*, тогда, вводя коэффициент трения

$$f = \frac{F}{N} = \frac{F}{P \cos \alpha},$$

будем иметь

$$f = \operatorname{tg} \alpha - \frac{w}{g \cos \alpha}. \quad (18)$$

Изменяя уклон, можно найти такое значение угла $\alpha = \varphi$, при котором вагон будет скатываться равномерно, т. е. w будет равняться нулю; при этом

$$f = \operatorname{tg} \varphi,$$

угол φ называется углом трения.

Как показали многочисленные опыты, коэффициент трения для железнодорожных вагонов можно приближенно принять по следующей экспериментальной формуле:

$$f = 0,0025 + b \left(\frac{V}{10} \right)^2,$$

где b очень малый коэффициент, близкий к 0,00005, а V — скорость поезда в км/час. При небольших скоростях можно принимать $f = 0,0025$, а следовательно, угол трения $\varphi \approx 9'$. При таком уклоне вагон должен идти, не ускоряясь и не замедляясь.

Определив при помощи кинематических наблюдений силу трения, т. е. решив первую задачу динамики, можно решать и ряд задач второго типа.

Например, решим такую задачу: зная коэффициент трения $f = 0,002$, определить скорость, которую приобретет вагон через 10 сек. после начала скатывания под уклон в 5° .

Напишем дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = P \sin \alpha - F = P \sin \alpha - f \cdot P \cos \alpha,$$

или, в данном случае, по малости угла $\alpha = 5^\circ \approx 0,09$:

$$\ddot{x} = 9,81 \cdot 0,09 - 0,002 \cdot 9,81 = 0,88,$$

интегрируя, найдем

$$\dot{x} = 0,88 t + C,$$

но в начальный момент $t=0$, $\dot{x}=0$, так что и $C=0$. Следовательно, скорость движения будет равна

$$v_x = \dot{x} = 0,88 t.$$

Например, по истечении 10 сек., $v = 8,8 \text{ м/сек} = 8,8 \cdot 3,6 \text{ км/час} \approx 32 \text{ км/час}$. Мы видим, что даже при начальной нулевой скорости эта сравнительно велика, вот почему при движении вниз даже по малым уклонам всегда необходимо поезд тормозить, вводя дополнительные трения тормозных колодок об обода колес. Замедление, даваемое тормозными колодками, зависит от скорости поезда. Мы даем на рис. 5 кривую зависимости замедления $w_{\text{торм.}}$ от времени, прошедшего от начала торможения. Кривая эта снята акселерометром (прибор для измерения ускорения), помещенным в опытный вагон. Скорость в момент начала торможения была равна 90 км/час . Мы видим по этой кривой, что в начале торможения при больших скоростях вагона замедление было мало, затем колебалось от $0,6$ до $0,8 \text{ м/сек}^2$ и перед самой остановкой быстро возросло почти до 2 м/сек^2 . Время торможения — около 28 сек. Зная начальную скорость и замедление, представленное нашей кривой, можно интегрированием найти и кривую скоростей, а затем и путь до полной остановки (так называемый „тормозной путь“). Примем для приближенного расчета

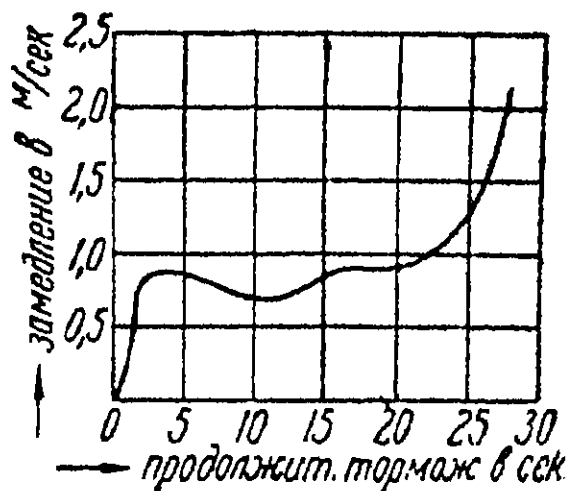


Рис. 5.

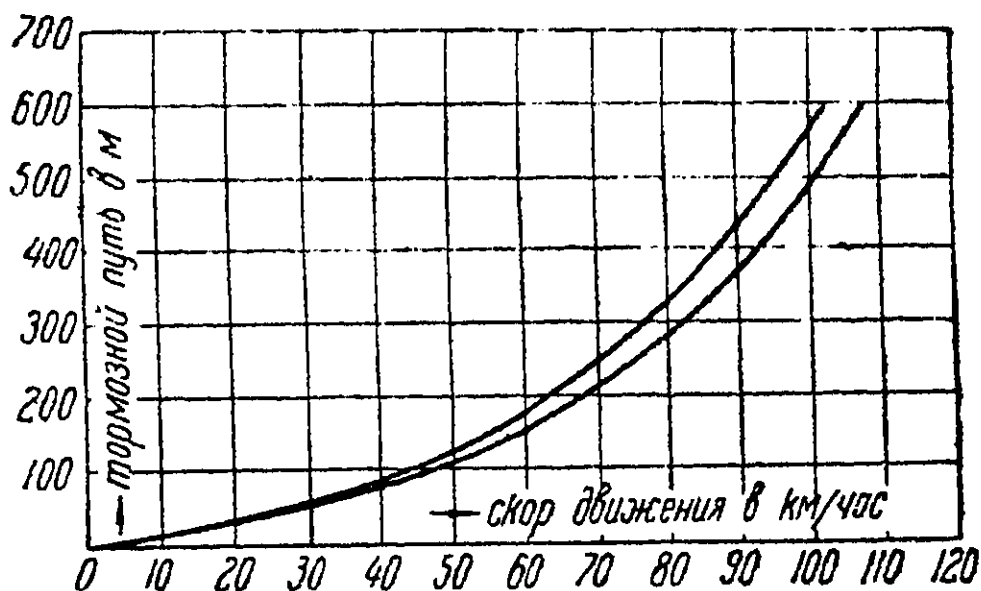


Рис. 6.

среднее замедление поезда равным $0,8 \text{ м/сек}^2$, тогда тормозной путь определится из простого уравнения:

$$s = \frac{v_0^2}{2w} = \left(\frac{90 \cdot 1000}{3600} \right)^2 \cdot \frac{1}{1,6} \approx 400 \text{ м.}$$

На рис. 6 мы даем интересный график зависимости длины тормозного пути от начальной скорости поезда при торможении тормозами Вестингауза на горизонтальном пути. Нижняя кривая соответствует 2- и 4-осным вагонам, у которых сила торможения доходит до 70% веса порожних вагонов, верхняя кривая дает условия торможения для 3-осных вагонов с тормозной силой, доходящей до 80% их веса.

2. Вертикальное падение тел в сопротивляющейся среде. Повседневный опыт говорит за то, что сопротивление всякой жидкой или газообразной среды движущемуся в ней телу очень сильно растет со скоростью тела и кроме того зависит от формы, величины этого тела и плотности, вязкости и других характеристик самой среды. Одно и то же тело в разных средах, например в воздухе и воде, имеет при той же скорости совершенно различные сопротивления, — двигаться человеку в воздухе не трудно, а в воде обычным шагом, при погружении выше груди, почти не пройти. Мы знаем, что аэропланы и дирижабли достигают громадных скоростей, а корабли имеют очень небольшие скорости, исключая так называемые глиссеры, которые достигают больших скоростей благодаря своему скольжению по поверхности воды. Зависимость сопротивления, например, воздуха от скорости движущегося в нем или обдуваемого им тела хорошо иллюстрируется тем общеизвестным фактом, что при возрастании скорости от 10 м/сек (свежий ветер, качаются ветви) до 20 м/сек (бура вырывает с корнями деревья) мы имеем далеко непропорциональный рост силы ветра.

Для того чтобы установить закон зависимости силы сопротивления от скорости, можно было бы наблюдать движение тела в данной среде и по ускорению судить о силе сопротивления (первая задача), например заставляя данное тело падать в неподвижном воздухе (опыты такого рода производил Эйфель в 1903—1905 гг.). Однако проще и точнее заставлять воздух обдувать неподвижное испытуемое тело, помещенное для этого в специальный канал — аэродинамическую трубу. В связи с развитием авиации вопрос этот экспериментально очень хорошо изучен, интересующиеся могут подробнее с ним ознакомиться по курсам прикладной аэродинамики. Многочисленные опыты показали, что сила сопротивления при обычных на практике скоростях для тел не микроскопических размеров ¹⁾ лучше всего выражается формулой:

$$R = \gamma \cdot v^2, \quad (19)$$

где γ в свою очередь пропорционально плотности ρ обтекающей жидкости и площади S поперечного направлению потока сечению тела, т. е.

$$R = C \rho S v^2. \quad (20)$$

Коэффициент сопротивления C определяется из опытов и зависит коренным образом от формы обдуваемого тела. Он безразмерен

¹⁾ В тех случаях, когда так называемое *Рейнольдсово число*, равное произведению скорости на линейный размер тела и деленному на коэффициент кинематической вязкости, превосходит несколько тысяч.

и имеет следующие приблизительные значения для наиболее распространенных форм тел:¹⁾

№№ по порядку	Название и форма обтекаемого тела	C
1	Плоская квадратная пластинка, поставленная нормально к направлению потока	0,64
2	Круглый плоский диск, поставленный нормально к направлению потока	0,56
3	Шар	0,25
4	Эллипсоид с большой осью, направленной перпендикулярно потоку	0,30
5	То же, но с большой осью по потоку	0,035
6	Веретенообразные тела с передним тупым, а задним заостренным концом (тело наилучшего обтекания) при отношении длины к диаметру 4:1 (ось по потоку)	0,013
7	Цилиндрические тела, имеющие в сечении форму наилучшего обтекания (стойки аэроплана) с осью, перпендикулярной к потоку	0,045
8	Цилиндрические тела, имеющие в сечении круг (круглые трубы, проволока)	0,60
9	Фюзеляжи — в зависимости от формы	{ 0,35 0,50
10	Кузов автомобиля (обычный тип)	0,06
11	То же, лодочной формы	0,03
12	То же, каплевой формы	0,015
13	Дирижабль (в зависимости от отношения длины к поперечному диаметру)	{ 0,02 0,04

При очень малых скоростях и ничтожных размерах тел сопротивление ближе подходит к закону зависимости от первой степени скорости, наоборот, при скоростях, близких к скорости звука, сопротивление следует полагать пропорциональным третьей степени скорости; за скоростями звука мы имеем вновь квадратичный закон.

Поставим теперь себе задачу — определить закон падения тела в сопротивляющейся среде (вторая задача динамики).

Примем вертикальную прямую за ось X (рис. 7) и направим ее вниз. Дифференциальное уравнение движения будет иметь вид



Рис. 7.

$$m\ddot{x} = P + R_x = P - \gamma \dot{x}^2,$$
(21)

или, заменяя m на $\frac{P}{g}$,

$$\ddot{x} = g - \frac{\gamma g}{P} \dot{x}^2 = \frac{\gamma g}{P} \left(\frac{P}{\gamma} - \dot{x}^2 \right).$$
(22)

¹⁾ Данные взяты по В. Александрову, Техн. энциклоп., т. I, 1931; В. Ю. Гиттису, Динамика автомобилей и тракторов, ч. I, Ленинград, 1931 и др. источникам.

Введем обозначения для постоянных:

$$\frac{\gamma g}{P} = a, \frac{P}{\gamma} = c^2, \quad (23)$$

и сделаем замену переменной:

$$\dot{x} = v. \quad (24)$$

Тогда дифференциальное уравнение (22) примет вид:

$$\frac{dv}{dt} = a(c^2 - v^2). \quad (25)$$

Оно с отделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{c^2 - v^2} = a dt,$$

и легко подвергается интегрированию. Интеграл от левой части берется так:

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{c^2 - v^2} &= \int \frac{1}{2c} \left\{ \frac{1}{c+v} + \frac{1}{c-v} \right\} dv = \\ &= \frac{1}{2c} \lg(c+v) - \frac{1}{2c} \lg(c-v) = \frac{1}{2c} \lg \frac{c+v}{c-v}; \end{aligned}$$

следовательно интеграл нашего уравнения (25) имеет вид:

$$\frac{1}{2c} \lg \frac{c+v}{c-v} = at + \alpha, \quad (26)$$

где α — произвольная постоянная интегрирования. Зададим такие начальные условия движения:

$$\text{при } t=0, \quad v=v_0$$

где $v_0 = (\dot{x})_{t=0}$ представляет не что иное, как начальную скорость, которую будем для определенности считать направленной вниз по оси X , т. е. $v_0 > 0$. Постоянная α при этом получает значение

$$\alpha = \frac{1}{2c} \lg \frac{c+v_0}{c-v_0},$$

и из уравнения (26) следует:

$$\frac{c+v}{c-v} = \frac{c+v_0}{c-v_0} e^{2act}. \quad (27)$$

Из этого уравнения легко найти и самую скорость, как функцию времени:

$$v = c \frac{(c+v_0) e^{2act} - (c-v_0)}{(c+v_0) e^{2act} + (c-v_0)}. \quad (28)$$

Формула эта значительно упрощается, если ввести в рассмотрение гиперболические функции:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

таблицы и свойства которых можно найти в справочниках. Из очевидного соотношения:

$$e^x = \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x$$

сразу следует, что ур-ние (28) может быть переписано в виде:

$$v = c \frac{c \cdot \operatorname{sh}(act) + v_0 \cdot \operatorname{ch}(act)}{c \cdot \operatorname{ch}(act) + v_0 \operatorname{sh}(act)}; \quad (29)$$

введем новые постоянные A и δ , удовлетворяющие равенствам:

$$c = A \operatorname{ch} \delta, \quad v_0 = A \operatorname{sh} \delta, \quad (30)$$

тогда, возвышая их в квадрат и вычитая из первого второе найдем

$$c^2 - v_0^2 = A^2 (\operatorname{ch}^2 \delta - \operatorname{sh}^2 \delta) = A^2,$$

так как по известному свойству гиперболических функций

$$\operatorname{ch}^2 \delta - \operatorname{sh}^2 \delta = 1,$$

отсюда

$$A = \sqrt{c^2 - v_0^2}.$$

Деля второе из равенств (30) на первое, получим

$$\frac{v_0}{c} = \operatorname{th} \delta, \quad (31)$$

где

$$\operatorname{th} \delta = \frac{\operatorname{sh} \delta}{\operatorname{ch} \delta} = \frac{e^{\delta} - e^{-\delta}}{e^{\delta} + e^{-\delta}};$$

при этом формула скорости v приобретает вид:

$$v = c \frac{A [\operatorname{sh}(act) \operatorname{ch} \delta + \operatorname{ch}(act) \operatorname{sh} \delta]}{A [\operatorname{ch}(act) \operatorname{ch} \delta + \operatorname{sh}(act) \operatorname{sh} \delta]} = c \frac{\operatorname{sh}(act + \delta)}{\operatorname{ch}(act + \delta)}, \quad (32)$$

как это следует из теоремы сложения гиперболических функций. Окончательно будем иметь:

$$v = c \cdot \operatorname{th}(act + \delta) = c \frac{e^{act + \delta} - e^{-act - \delta}}{e^{act + \delta} + e^{-act - \delta}} = c \frac{e^{2(act + \delta)} - 1}{e^{2(act + \delta)} + 1}. \quad (33)$$

Задавая величины a , c и δ , можем по таблицам сразу найти нужную скорость в любой момент времени.

По определению функции th видно, что при увеличении аргумента она быстро стремится к единице, так, например, уже при значении аргумента, равного 3, $\operatorname{th} 3 = 0,995$, т. е. только на $1/2\%$ разнится от единицы, таким образом скорость падения стремится к пределу

$$v = c,$$

не достигая его за конечный промежуток времени, но практически (с ошибкой $1/2\%$) уже по прошествии времени

$$t_1 = \frac{3 - \delta}{ac}, \quad (34)$$

мы будем иметь равномерное движение со скоростью c . Это — очень важный практический результат. Выразим t_1 через основные константы сначала в том частном случае, когда начальная скорость равна нулю, а следовательно $\delta = 0$. Припоминая значения a и c , найдем

$$t_1 = \frac{3}{g} \sqrt{\frac{P}{\gamma}} \approx 0,3 \sqrt{\frac{P}{C_p S}}. \quad (35)$$

Мы видим, что время это *возрастает с весом тела и убывает с коэффициентом его сопротивления, плотностью среды, в которой происходит падение, и площадью сечения тела, перпендикулярного потоку*. По прошествии этого времени тело будет иметь скорость

$$v = \sqrt{\frac{P}{\gamma}} \text{ (с точностью до } 1/2\% \text{)} \quad (36)$$

или, вводя явно аэродинамические постоянные:

$$v = \sqrt{\frac{p}{C_p S}}. \quad (37)$$

Так, например, если возьмем шар радиуса r и удельного веса λ , то

$$P = \lambda \cdot \frac{4}{3} \pi r^3, \quad S = \pi r^2, \quad C = 0,25,$$

откуда имеем:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= 0,69 \sqrt{\frac{\lambda \cdot r}{\rho}} \text{ сек} \\ v &= 2,3 \sqrt{\frac{\lambda \cdot r}{\rho}} \text{ м/сек} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Поясним эти формулы цифровым материалом. Возьмем *чугунный* сплошной шар в воздухе, для этого случая будем иметь:

$$\lambda = 7250 \text{ кг/м}^3, \quad \rho = 0,12 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4}$$

$$t_1 = 169,7 \sqrt{r} \text{ сек},$$

$$v = 565,8 \sqrt{r} \text{ м/сек},$$

т. е. *чугунный шар радиусом 0,04 м (4 см)* будет иметь максимальную скорость падения в воздухе около 115 м/сек и достигнет ее через 34 сек. после начала падения. Тот же шар в воде, для которой $\rho = 102 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4}$ будет иметь максимальную скорость только около 4 м/сек и достигнет ее почти через 1 сек.

При падении *деревянных шаров* в воздухе имеем:

$$t_1 = 45,1 \sqrt{r},$$

$$v = 148,3 \sqrt{r};$$

при радиусе $r = 4 \text{ см}$ максимальная скорость равна 30 м/сек и достигается по прошествии 9 сек.

Мы знаем уже из кинематики, что скорость v , которую достигает тело, упав с высоты h , определяется по простой формуле:

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Выясним теперь, как изменится эта формула вследствие сопротивления среды. Для этого прежде всего найдем второй интеграл уравнения движения (22); интегрируя, непосредственно, первый интеграл (33):

$$v_x = \dot{x} = \text{th}(act + \delta),$$

будем иметь

$$x = c \int \text{th}(act + \delta) dt + \beta. \quad (39)$$

Интеграл в правой части легко берется следующим образом:

$$\begin{aligned} \int \text{th}(act + \delta) dt &= \int \frac{\text{sh}(act + \delta)}{\text{ch}(act + \delta)} dt = \frac{1}{ac} \int \frac{d \text{ch}(act + \delta)}{\text{ch}(act + \delta)} = \\ &= \frac{1}{ac} \lg \text{ch}(act + \delta). \end{aligned}$$

Таким образом имеем

$$x = \frac{1}{a} \lg \text{ch}(act + \delta) + \beta. \quad (40)$$

Для определения произвольной постоянной β возьмем начальное условие:

$$\text{при } t=0 \quad x=0,$$

тогда

$$\beta = -\frac{1}{a} \lg \text{ch } \delta.$$

Для простоты остановимся на случае $\delta=0$, т. е. $v_0=0$, тогда $\text{ch } \delta=1$ и $\beta=0$; в этом случае окончательно имеем

$$x = \frac{1}{a} \lg \text{ch } act \quad (41)$$

а по (33):

$$v = c \cdot \text{th } act.$$

Из этих двух уравнений легко исключить время и найти зависимость v от пройденного пути $x=h$, именно, из (41) имеем

$$\text{ch } act = e^{ax} = e^{\frac{gh}{c^2}},$$

и подставляем во второе, переписанное так:

$$v = c \frac{\text{sh } act}{\text{ch } act} = c \frac{\sqrt{\text{ch}^2 act - 1}}{\text{ch } act} = c \sqrt{1 - \frac{1}{\text{ch}^2 act}},$$

тогда и будем иметь искомую зависимость:

$$v = c \sqrt{1 - e^{-\frac{2gh}{c^2}}}. \quad (42)$$

При очень малых γ , т. е. больших c , будем иметь, разлагая $e^{-\frac{2gh}{c^2}}$ в ряд:

$$v = c \sqrt{1 - 1 + \frac{2gh}{c^2} - \frac{2g^2h^2}{c^4} + \dots} = \sqrt{2gh} \sqrt{1 - \frac{gh}{c^2} + \dots} = \sqrt{2gh} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{gh}{c^2}\right).$$

Мы видим, что сопротивляющаяся среда вносит поправку в формулу скорости в пустоте, — происходит относительное уменьшение скорости в пустоте $v_{\text{пуст.}}$:

$$\frac{v - v_{\text{пуст.}}}{v_{\text{пуст.}}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{gh}{c^2}. \quad (43)$$

Определим попрежнему, на какой глубине h' от начальной точки установится практически (с точностью до $1/2\%$) равномерное движение со скоростью c м/сек. Для этого, как и раньше, положим $act = 3$ и получим

$$h' = \frac{1}{a} \lg ch 3 = \frac{2,31}{a} = 2,31 \frac{P}{\gamma g} = 0,24 c^2 \approx \frac{1}{4} c^2. \quad (44)$$

Так, например, для чугунного шара, рассмотренного выше, в воздухе, с желаемой точностью, равномерность установится только на глубине около 3,25 км, в воде — на глубине 4 м. Для деревянного шара в воздухе найдем $h' = 225$ м.

На основании ф-лы (44) для шара радиуса r , из любого материала удельного веса λ при падении в среде с плотностью ρ имеем такую постоянную приближенную ф-лу:

$$h' \approx \frac{\lambda \cdot r}{\rho} \text{ м.} \quad (45)$$

Эту формулу, наряду с ф-ми (41) и др. можно применять при приближенных подсчетах и не только для шара, но и для близких к нему тел.

Дадим в заключение материал по предельным скоростям аэробомб¹⁾, сброшенных с высоты 4500 м. Для бомб одинаковой формы, но разного размера и веса имеем:

Вес бомбы в кг	Конечная скорость в м/сек.
8	151
16	162
30	162
74	231
164	276

Интересно отметить, что при отсутствии сопротивления воздуха все бомбы, упав с высоты 4500 м, имели бы одинаковую скорость около 300 м/сек, так что наиболее легкая потеряла из-за сопро-

¹⁾ Данные взяты нами из интересной популярной брошюры В. В и у к о в а, Физика и война, в. 1, Гиз, 1931.

тивления воздуха половину своей скорости, тяжелая же потеряла сравнительно мало. Вообще легкие тела, даже очень малого объема, значительно теряют скорость, например свинцовая пуля весом 10 г при падении с той же высоты будет иметь скорость 40 м/сек, т. е. в $7\frac{1}{2}$ раз меньше, чем в пустоте. При хороших аэродинамических свойствах (удобообтекаемость), однако, и для легких тел потери неизмеримо меньше, например стрела весом 25—40 г, сброшенная с аэроплана с высоты 4500 м, имеет скорость 200 м/сек, т. е. только в $1\frac{1}{2}$ раза меньшую, чем в пустоте.

На разности сопротивлений тел основаны многочисленные способы сортирования и очистки зерен, семян, раздробленной руды и другие. В случае легких тел (зерно, семена) их засыпают в широкую струю воздуха (веялка, млынок), при этом в зависимости от тяжести и сопротивления воздуха зерно падает в разные места веялки и таким образом сортируется.

Тяжелые тела в воздухе при незначительных высотах падения не сортируются, что ясно из предыдущего. Их сортируют в воде, почти аналогичным приемом. Конечно, мы в этих случаях не будем иметь прямолинейного движения; сортируемые тела будут лететь по сложным траекториям. Дифференциальные уравнения их движения, подобно дифференциальным уравнениям движения снаряда в воздухе, брошенного под углом к горизонту, крайне сложны; в пустоте уравнения легко интегрируются, мы сделали уже это в кинематике (первая тема, задание V, § 2).

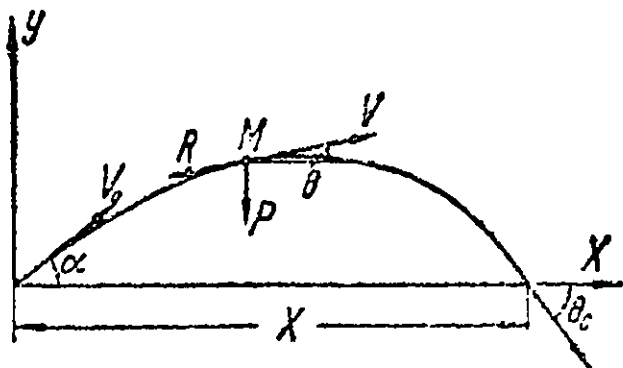


Рис. 8.

Приближенные приемы интегрирования уравнений движения снаряда в сопротивляющейся среде излагаются в курсах внешней баллистики. В следующем примере мы выясним, в чем сложность задачи движения снаряда в воздухе.

3. Движение в воздухе снаряда, выпущенного под углом к горизонту. Приближенные методы внешней баллистики. Рассмотрим задачу движения снаряда в сопротивляющейся среде, например в воздухе, причем для упрощения отвлечемся от влияния вращательного движения снаряда вокруг своего центра тяжести, связанного с целым рядом эффектов (гиропический эффект и эффект Магнуса), а примем снаряд за материальную точку. К этой точке приложены две силы: вес и сопротивление воздуха; последнее будем считать сначала, как в предыдущем примере, пропорциональным *квадрату* скорости.

Такой закон несколько отличается от действительности, но очень незначительно, во всяком случае его естественно принять за второе приближение после движения в пустоте (Кинематика, стр. 103—106). После этого рассмотрим и более общий случай. Мы остановимся лишь на случае *прицельной* стрельбы, т. е. такой, при которой угол вылета снаряда α (рис. 8) меньше 15° . Случай *навесной* стрельбы ($\alpha > 15^\circ$) представляет особые затруднения.

Составим дифференциальные уравнения движения снаряда:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv_x}{dt} &= -R \cos \theta \\ m \frac{dv_y}{dt} &= -R \sin \theta - P \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Здесь $m = \frac{P}{g}$, P — вес снаряда, R — сопротивление воздуха. Заменяя $v_x = v \cos \theta$, $v_y = v \sin \theta$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(v \cos \theta) &= -\frac{Rg}{P} \cos \theta \\ \frac{d}{dt}(v \sin \theta) &= -\frac{Rg}{P} \sin \theta - g \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Так как R есть заданная функция скорости:

$$R = \gamma v^2, \quad (48)$$

то последнюю систему можно рассматривать, как систему двух уравнений с двумя неизвестными v и θ , выраженными в функции от времени. Умножая первое уравнение на $v \sin \theta$, второе — на $v \cos \theta$ и вычитая первое уравнение из второго, найдем

$$v \cos \theta \frac{d}{dt}(v \sin \theta) - v \sin \theta \frac{d}{dt}(v \cos \theta) = -gv \cos \theta,$$

или, разделив еще обе части полученного уравнения на $v^2 \cos^2 \theta$, приведем левую часть к производной дроби:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v \sin \theta}{v \cos \theta} \right) = -\frac{g}{v \cos \theta},$$

откуда следует

$$\frac{d}{dt}(\operatorname{tg} \theta) = -\frac{g}{v \cos \theta}. \quad (49)$$

Введя для сокращения обозначение $v \cos \theta = v_1$, получим такое выражение для дифференциала времени:

$$dt = -\frac{v_1}{g} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}. \quad (50)$$

Пользуясь этим выражением из первого ур-ния (47), принимая во внимание (48), получим

$$dv_1 = \frac{\gamma}{P} v_1^3 \frac{d\theta}{\cos^3 \theta}. \quad (51)$$

Это уравнение с отделяющимися переменными и может быть проинтегрировано до конца, но в баллистике обычно для упрощения дальнейших выводов его еще заменяют более простым, приближенным. Для этого по способу Дидиона¹⁾ умножим обе

¹⁾ См. Н. Забудский, Внешняя баллистика, стр. 151, 1695.

части ур-ния (51) на некоторый, пока неопределенный, постоянный множитель λ :

$$d(\lambda v_1) = \frac{\gamma}{P} (\lambda v_1)^2 \frac{d\theta}{\lambda^2 \cos^3 \theta}, \quad (52)$$

и подберем этот множитель так, чтобы произведение $\lambda \cos \theta$ в среднем мало отличалось от единицы. В случае прицельной стрельбы можно принять наибольшее значение $\theta = \alpha = 15^\circ$, тогда величина λ будет иметь наименьшее значение, равное единице, и наибольшее

$$\frac{1}{\cos 15^\circ} = \frac{1}{0,966} = 1,035.$$

Можно принять в среднем $\lambda = 1,017$. Дидион для случая прицельной стрельбы дает для λ при $\alpha = 15^\circ$ значение 1,012.

Если ввести обозначение $\lambda v_1 = \lambda v \cos \theta = u$, то из последнего ур-ния (52), полагая в нем $\lambda \cos \theta = 1$, будем иметь

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{P \lambda}{\gamma} \frac{du}{u^3}. \quad (53)$$

Вставив эту величину в равенство

$$dx = v_1 dt = -\frac{v_1^2}{g} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{1}{\lambda^2 g} u^2 \frac{d\theta}{\cos^2 \theta},$$

найдем

$$dx = -\frac{P}{\lambda \gamma g} \cdot \frac{du}{u},$$

откуда после интегрирования

$$x = \frac{P}{\lambda \gamma g} \lg \frac{u_0}{u}, \quad (54)$$

где u_0 обозначает u в момент вылета, т. е. $u_0 = \lambda v_0 \cos \alpha$.

Из последнего уравнения можно найти скорость в функции от абсциссы x :

$$u = u_0 e^{\frac{-\lambda \gamma g x}{P}} = u_0 e^{-\xi}, \quad (55)$$

где

$$\frac{\lambda \gamma g}{P} x = \xi, \quad (56)$$

и заменяя u на $\lambda v \cos \theta$:

$$v = v_0 e^{-\xi} \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos \theta}. \quad (57)$$

Подставив в равенство (53) значение u через x или ξ по (55), найдем связь между θ и ξ в виде:

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{P \lambda}{\gamma u_0^2} e^{2\xi} d\xi,$$

откуда, после интегрирования

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \alpha - \frac{P \lambda}{2 \gamma u_0^2} (e^{2\xi} - 1). \quad (58)$$

Решая совместно (57) и (58), можем выразить скорость v в функции от ξ или, что то же, x .

Найдем уравнение траектории снаряда. Для этого заменим в последнем уравнении $\operatorname{tg} \theta$ на $\frac{dy}{dx}$, тогда будем иметь

$$dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot dx - \frac{P\lambda}{2\gamma u_0^2} (e^{2\xi} - 1) dx = \operatorname{tg} \alpha \cdot dx - \frac{P^2}{2\gamma^2 g u_0^2} (e^{2\xi} - 1) d\xi,$$

откуда следует

$$y = x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{P^2}{4\gamma^2 g u_0^2} (e^{2\xi} - 2\xi - 1). \quad (59)$$

Это и есть искомое *уравнение траектории*.

Для сравнения уравнения траектории в воздухе с уравнением траектории в пустоте (Кинематика, стр. 105):

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

разложим $e^{2\xi}$ в ряд:

$$e^{2\xi} = 1 + 2\xi + \frac{4\xi^2}{2} + \frac{8\xi^3}{6} + \dots$$

Тогда, очевидно, уравнение (59) переходит в такое:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 - \frac{\lambda \gamma g^2}{3P v_0^2 \cos^2 \alpha} x^3 - \dots \quad (60)$$

Мы видим, что первые два члена совпадают с уравнением траектории в пустоте, так что на небольших расстояниях от места вылета траектория снаряда почти совпадает с параболой, в дальнейшем кривые расходятся, причем, как видно из ур-ния (60), в воздухе кривая ложится ниже; чтобы определить дальность полета, нужно в уравнении траектории (60) положить $y = 0$, тогда, решая трансцендентное уравнение

$$\xi \sin 2\alpha = \frac{P}{2\gamma \lambda v_0^2} (e^{2\xi} - 2\xi - 1)$$

хотя бы графическим путем, найдем искомую дальность x (выраженную через ξ).

Многочисленные опыты показали, что предположение о квадратичной зависимости сопротивления от скорости оправдывается только в известных интервалах скоростей, именно, для скоростей, меньших 240 м/сек и больших 420 м/сек. Что касается до промежуточных скоростей, то здесь, в среднем, наиболее вероятен закон *четвертой* степени. Вообще, в современной баллистике принято траекторию разбивать на ряд участков и в каждом участке брать свой закон зависимости сопротивления от скорости.

Сиа ччи (1892) предложил следующий приближенный метод интегрирования уравнений полета снаряда.

Примем закон сопротивления в форме:

$$R = \frac{P}{cg} F(v),$$

где $F(v)$ — неопределенная пока функция скорости, а c — коэффициент, зависящий от веса снаряда, его формы и от других причин.

Из ур-ния (49) найдем

$$dt = -\frac{v \cos \theta}{g} d(\operatorname{tg} \theta) = -\frac{v}{g} \frac{d\theta}{\cos \theta},$$

а тогда из первого равенства системы (47) легко найти

$$dv_1 = \frac{R}{P} v_1 \frac{d\theta}{\cos \theta} = \frac{F(v)}{cg} v_1 \frac{d\theta}{\cos \theta}. \quad (61)$$

В случае *прицельной* стрельбы по методу Дидиона можно приближенно положить ($\lambda \cos \theta \approx 1$):

$$F(v) = \frac{F(\lambda v \cos \theta)}{\lambda \cos \theta} = \frac{F(u)}{\lambda \cos \theta}, \quad (62)$$

где λ — тот же множитель, что и раньше, обозначающий среднее значение $\frac{1}{\cos \theta}$ на траектории. При сделанном предположении ур-ние (61) приводится к уравнению с разделяющимися переменными, каков бы ни был вид функции F ; действительно, заменяя, как и раньше, $\lambda v_1 = u$, получим

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \lambda cg \frac{du}{uF(u)}. \quad (63)$$

Для определения x напомним по (50) и (63):

$$dx = v_1 dt = -\frac{v_1^2}{g} \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = -\frac{c}{\lambda} \frac{u du}{F(u)},$$

откуда

$$x = -\frac{c}{\lambda} \int_{u_0}^u \frac{u du}{F(u)} \quad (64)$$

или, вводя первую функцию Сиагчи:

$$D(u) = -\int \frac{u du}{F(u)}, \quad (65)$$

будем иметь

$$x = \frac{c}{\lambda} [D(u) - D(u_0)]. \quad (66)$$

Интегрируя (63), найдем

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} \alpha + \frac{\lambda c}{2} \int_{u_0}^u \frac{2g du}{uF(u)} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{\lambda c}{2} [I(u) - I(u_0)], \quad (67)$$

где

$$I(u) = -\int \frac{2g du}{uF(u)} \quad (68)$$

представляет вторую функцию Сиагчи.

Для получения уравнения траектории, как и раньше, положим

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dy}{dx}$$

или по (67) и (66)

$$\begin{aligned} dy &= \operatorname{tg} \theta \cdot dx = \operatorname{tg} \alpha \cdot dx - \frac{c^2}{2} [I(u) - I(u_0)] dD(u) = \\ &= \operatorname{tg} \alpha \cdot dx + \frac{c^2}{2} [I(u) - I(u_0)] \frac{u du}{F(u)}. \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя, найдем

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{c^2}{2} \{A(u) - A(u_0) - I(u_0)[D(u) - D(u_0)]\}, \quad (69)$$

где $A(u)$ обозначает третью функцию С и а ч ч и:

$$A(u) = - \int \frac{I(u) u du}{F(u)}. \quad (70)$$

Определим еще, наконец, время полета. Для этого заметим, что

$$dt = \frac{dx}{v_1} = \frac{\lambda dx}{u} = -c \frac{du}{F(u)}.$$

Отсюда получим

$$t = c [T(u) - T(u_0)], \quad (71)$$

где $T(u)$ — четвертая функция С и а ч ч и:

$$T(u) = - \int \frac{du}{F(u)}. \quad (72)$$

Функция $F(u)$ задается, как мы уже говорили, различным образом в разных интервалах скоростей, приближенно так:

$F(u) = 1,1 \cdot 10^{-4} u^2$	при	$0 < u < 240$	м/сек
$F(u) = 4,5 \cdot 10^{-7} u^3$	„	$240 < u < 295$	„
$F(u) = 5,2 \cdot 10^{-12} u^5$	„	$295 < u < 375$	„
$F(u) = 7,2 \cdot 10^{-7} u^3$	„	$375 < u < 419$	„
$F(u) = 3,0 \cdot 10^{-4} u^2$	„	$419 < u < 550$	„
$F(u) = 2,0 \cdot 10^{-3} u^{1,7}$	„	$550 < u < 800$	„
$F(u) = 5,5 \cdot 10^{-3} u^{1,55}$	„	$800 < u < 1100$	„

По этим значениям $F(u)$ подсчитываются и значения функций $D(u)$, $I(u)$, $A(u)$ и $T(u)$. Эти значения помещены в специальных *баллистических таблицах*. Пользуясь этими таблицами по заданному x , по (66), находим u , а отсюда и y по (69) и т. д.

Уравнению траектории можно еще придать вид:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{c \lambda}{2} \cdot x \cdot \left[\frac{A(u) - A(u_0)}{D(u) - D(u_0)} - I(u_0) \right]. \quad (73)$$

Полагая $u=0$, найдем, для определения скорости падения при заданном угле вылета или, наоборот, угла вылета по скорости падения:

$$\frac{A(u) - A(u_0)}{D(u) - D(u_0)} - I(u_0) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{c \lambda}; \quad (74)$$

угол падения θ_c удовлетворяет уравнению:

$$\operatorname{tg} \theta_c = \frac{c \lambda}{2} \left[I(u) - \frac{A(u) - A(u_0)}{D(u) - D(u_0)} \right]. \quad (75)$$

Мы удовольствуемся этими простейшими понятиями из внешней баллистики, отсылая интересующихся к специальным учебникам.

Дадим численный пример. При стрельбе из 12-сантиметровой пушки под углами, близкими к 15° к горизонту, средняя дальность из 30 выстрелов X была 5164 м, вес снаряда $P = 16,45$ кг, начальная скорость $v_0 = 468,1$ м/сек. Коэффициент $c = 1,06$, $\lambda = 1,013$, $u_0 = \lambda v_0 \cos \alpha \approx 456,1$ м/сек. Этому значению u_0 по баллистическим таблицам найдем значения функций *С* и *а ч ч*:

$$D(u_0) = 3182, \quad A(u_0) = 296,6, \quad I(u_0) = 0,1806, \quad T(u_0) = 4,550.$$

Вычисляем величину $\frac{\lambda X}{c} = 4955$, затем по (66) находим

$$D(u) = 4955 + 3182 = 8137.$$

По таблицам $D(u)$ находим соответствующее значение u и функций *С* и *а ч ч* в этой точке:

$$u = 209,3; \quad A(u) = 3705,6 \quad I(u) = 1,479, \quad T(u) = 22,30.$$

Отсюда по (74), (75) и (71) находим:

угол бросания

$$\alpha = 15^\circ 9',$$

угол падения

$$\theta_c = 22^\circ 58',$$

время полета

$$t = 18,74 \text{ сек},$$

скорость падения

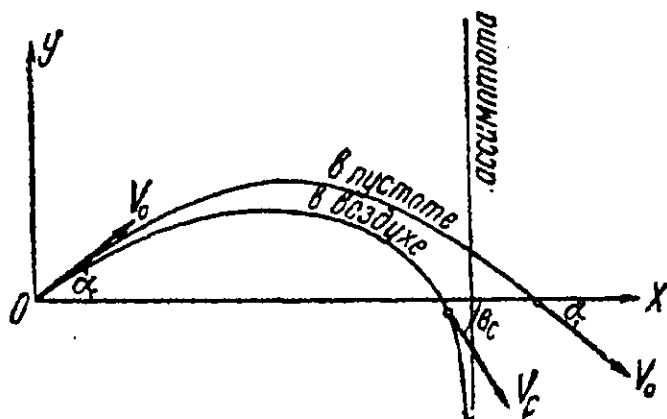


Рис. 9.

$$v_c = \frac{u}{\lambda \cos \theta_c} = 224,4 \text{ м/сек.}$$

Интересно отметить, что угол падения вообще больше угла вылета, а скорость падения почти вдвое меньше начальной скорости.

Отличительные особенности движения в воздухе вообще заключаются в следующем:

- 1) угол падения больше угла вылета,
- 2) скорость падения меньше скорости вылета,
- 3) траектория, в отличие от параболы, имеет вертикальную асимптоту (рис. 9).

В настоящее время для решения баллистической задачи пользуются еще непосредственным численным методом решения дифференциальных уравнений (метод Штёрмера).

4. Отклонение электрона в магнитном и электрическом поле. Как пример применения естественных уравнений движения, рассмотрим опыты Томсона, проведенные им для

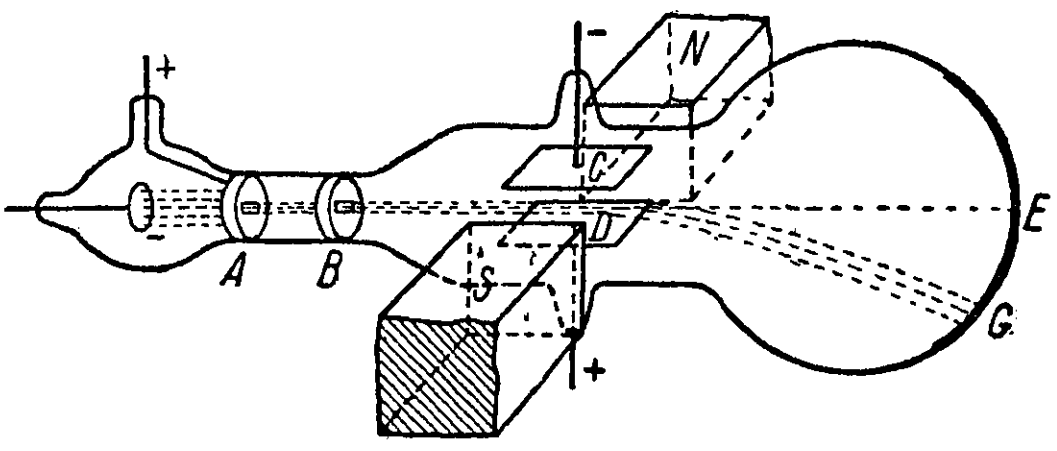


Рис. 10.

определения скоростей электронов и отношения их заряда к массе.

Катодные лучи пропускались сквозь щель в аноде A (рис. 10) и, пройдя сквозь диафрагму B, шли затем узким прямолинейным пучком до флуоресцирующего экрана, где в точке E давали светящийся след. Если по пути заставлять пучок проходить между заряженными пластинами C и D или между полюсами магнита, то

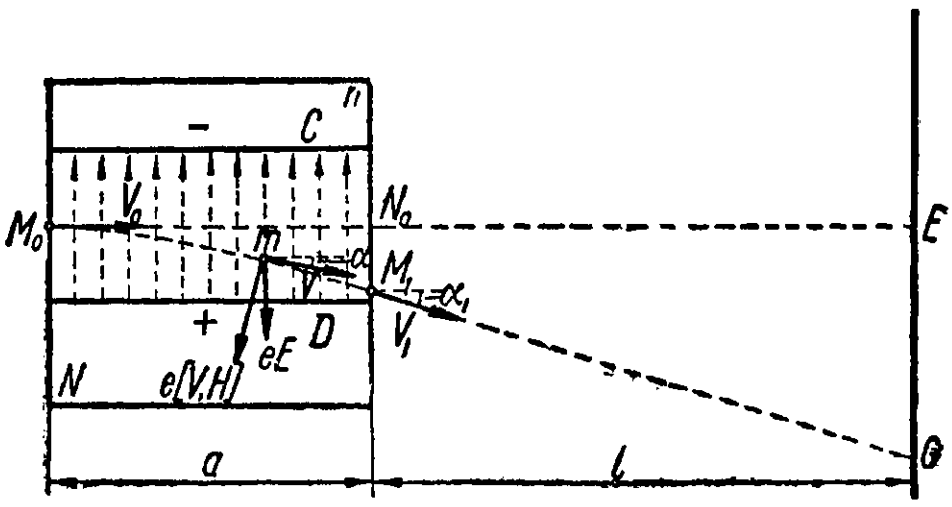


Рис. 11.

можно заметить отклонение катодных лучей из точки E в точку G. По величине этого отклонения можно, во-первых, найти скорость электрона при различных условиях, а во-вторых, отношение заряда его к массе. Мы выведем сейчас простые расчетные формулы для определения этих величин по наблюдаемому отклонению EG.

Начнем с отклонения электрона в электрическом поле. Между пластинами C и D (рис. 11) образуется однородное поле (мы пренебрегаем малой неоднородностью по краям пластины), направленное от + к -, напряжение его изображается постоянным

вектором E . На электрон, несущий отрицательный заряд, будет при этом действовать сила eE , направленная против поля ($e < 0$). Мы, очевидно, здесь имеем движение точки с массой m под влиянием постоянной силы. Уравнение этого движения будет

$$m\mathbf{w} = e\mathbf{E}. \quad (76)$$

Проинтегрировать такое уравнение не составляет никакого труда, мы это, собственно говоря, уже сделали в Кинематике (первая тема, упражнение 3 § 22), здесь мы покажем другой прием решения такой задачи — интегрирование естественных уравнений движения. Напишем уравнение (76) в „естественном“ виде, т. е. в проекциях на касательную и нормаль к траектории в рассматриваемой точке, а не в проекциях на произвольные оси декартовой системы. Тогда, введя в рассмотрение угол α между касательной в данном положении m и осью M_0E и обозначая через ρ — радиус кривизны траектории в этой точке, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= eE \sin \alpha \\ m \frac{v^2}{\rho} &= eE \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (77)$$

Свяжем при помощи этих уравнений угол отклонения скорости электрона от прямолинейного пути α с продольным расстоянием x , пройденным им от начала M_0 и поперечным отклонением y от оси M_0E . Для этого заметим, что:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{1}{v},$$

при этом система преобразуется так:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= eE \sin \alpha \\ mv \frac{d\alpha}{dt} &= eE \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (78)$$

откуда делением одного уравнения на другое получим

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{dv}{d\alpha} = \operatorname{tg} \alpha,$$

или интегрируя по α :

$$\lg v = -\lg \cos \alpha + \lg C,$$

$$v = \frac{C}{\cos \alpha},$$

подставляя начальные условия:
при

$$\alpha = 0, \quad v = v_0,$$

найдем

$$v = \frac{v_0}{\cos \alpha}. \quad (79)$$

Этот результат конечно можно было бы и сразу получить в форме: $v \cos \alpha = v_0$, так как ускорение поля перпендикулярно к горизонтальной проекции скорости и поэтому не может ее изменить.

Напишем, что:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{d\alpha} = v \cdot \cos \alpha \frac{dt}{d\alpha},$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{d\alpha} = v \cdot \sin \alpha \frac{dt}{d\alpha},$$

и заменим $\frac{dt}{d\alpha}$ через его выражение из второго уравнения системы (78) тогда, принимая еще во внимание (79), найдем:

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{mv_0^2}{eE} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha},$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = \frac{mv_0^2}{eE} \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}.$$

Отсюда при помощи простых интегрирований получим:

$$x = \frac{mv_0^2}{eE} \operatorname{tg} \alpha + C_1,$$

$$y = \frac{mv_0^2}{2eE} \cdot \frac{1}{\cos^2 \alpha} + C_2;$$

принимая во внимание начальные условия: при $\alpha = 0$, $x = 0$, $y = 0$, будем окончательно иметь:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{mv_0^2}{eE} \operatorname{tg} \alpha, \\ y &= \frac{mv_0^2}{2eE} \left(\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 \right) = \frac{mv_0^2}{2eE} \operatorname{tg}^2 \alpha \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Траектория, очевидно, *парабола*, мы ее уже исследовали в кинематике. Из первого равенства найдем угол α_1 отклонения направления скорости электрона в момент выхода из электрического поля от первоначального направления при входе в поле:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{e}{m} \cdot \frac{E}{v_0^2} \cdot a; \quad (81)$$

из второго найдем отклонение $\overline{NM}_1$:

$$\overline{NM}_1 = \frac{mv_0^2}{2eE} \cdot \frac{e^2}{m^2} \cdot \frac{E^2}{v_0^4} a^2 = \frac{eE}{2mv_0^2} a^2. \quad (82)$$

Так как после выхода из поля электрон летит прямолинейно, то полное отклонение его $\overline{EG}$ на экране, отстоящем от правого края пластин на расстоянии l , будет равно:

$$\overline{EG} = \overline{NM}_1 + l \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{eEa}{mv_0^2} \left(l + \frac{a}{2} \right). \quad (83)$$

Следует отметить, что применение естественных уравнений в рассмотренном случае никаких выгод не представило, вывод формулы (80) можно было провести гораздо проще в декартовых координатах. Иначе обстоит дело с движением электрона в *магнитном поле*. Здесь уже метод естественных уравнений дает громадные упрощения выкладок по сравнению с декартовыми проекциями.

Напряжение магнитного поля обозначим вектором $\mathbf{H}$. Вектор этот направлен от N к S , т. е. на рис. 11 перпендикулярно плоскости чертежа, к нам. Действие этого поля на заряд e определяется силой $e[\mathbf{v}, \mathbf{H}]$. В разбираемом случае $e < 0$, поэтому направление силы будет по нормали к траектории вниз, а величина силы, очевидно, равна $|e| \cdot vH$, так как угол между полем и плоскостью чертежа всегда равен 90° .

Естественные уравнения дают:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= 0 \\ m \frac{v^2}{\rho} &= evH \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

где, для краткости, под e мы понимаем абсолютную величину заряда. Из первого естественного уравнения следует

$$v = \text{const} = v_0,$$

тогда из второго находим

$$\rho = \frac{mv_0}{eH} = \text{const}, \quad (85)$$

т. е. траектория движения в этом случае уже не парабола, а *круг* радиуса ρ , определенного равенством (85).

В этом случае отклонение электрона на протяжении поля легко найдется, как стрелка (рис. 12), соответствующая полухорде длины a :

$$\overline{M_1N} = \rho - \rho \cos \alpha_1 = \rho (1 - \cos \alpha_1),$$

причем

$$\sin \alpha_1 = \frac{a}{\rho} = \frac{eH}{mv_0} a.$$

Считая угол отклонения α_1 малым, заменим

$$\sin \alpha_1 = \alpha_1,$$

$$\cos \alpha_1 = 1 - \frac{1}{2} \alpha_1^2,$$

тогда будем иметь

$$\overline{M_1N} = \frac{1}{2} \rho \alpha_1^2 = \frac{eH}{2mv_0} a^2,$$

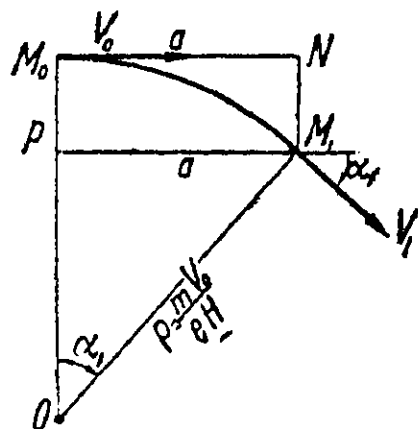


Рис. 12.

полное отклонение следа электронов на экране будет

$$\overline{EG} = \overline{M_1N} + l \operatorname{tg} \alpha_1 = \overline{M_1N} + l \sin \alpha_1 = \frac{eH}{2mv_0} a_2 + l \frac{e}{m} \frac{H}{v_0} a = \left. \begin{aligned} &= \frac{eHa}{mv_0} \left(l + \frac{a}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

Взяв отношение отклонений в электрическом и магнитном полях, найдем формулу для определения скорости электрона:

$$v_0 = \frac{E}{H} \cdot \frac{\delta_{\text{маг.}}}{\delta_{\text{эл.}}};$$

определив v_0 , затем уже найдем по отдельным отклонениям и отношение $\frac{e}{m}$.

В опытах Томсона v_0 изменялось от $2,2 \cdot 10^9$ см/сек до $3,6 \cdot 10^9$ см/сек, отношение $\frac{e}{m}$ оказалось в пределах $2,1 - 2,7 \cdot 10^{17}$

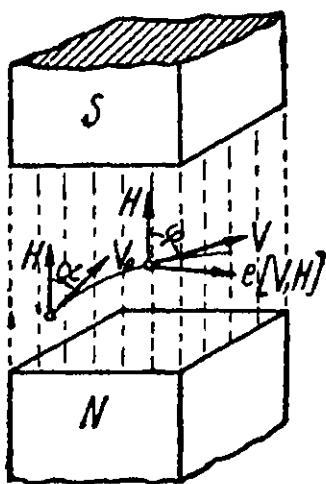


Рис. 13.

абс. эл.-ст. единиц. Из других опытов был найден заряд $e = 4,77 \cdot 10^{-10}$ абс. эл.-ст. единиц (Милликэн), отсюда для m получается значение около $5 \cdot 10^{-27}$ г. Полученная масса почти в 5000 раз меньше массы атома водорода.

Мы рассмотрели случай электрона, влетающего в электрическое и магнитное поле ортогонально к силовым линиям и того и другого, кроме того и сами поля взаимно перпендикулярны. Можно было бы рассмотреть и другие случаи, т. е. другое расположение полей и другие начальные условия, а также можно было бы исследовать движение электрона в наложенных друг на друга полях, а не отдельно в каждом поле, — мы не делаем этого, так как вопрос не представляет практического интереса. Читатель может найти подробное исследование этого вопроса в курсе теоретической механики Аппелля, т. I (имеется русский перевод).

Отметим лишь один частный случай, — электрона, влетающего в однородное магнитное поле под некоторым углом α (рис. 13) к силовым линиям. Напишем основное уравнение:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e [\mathbf{v}, \mathbf{H}],$$

(на рисунке векторное произведение взято при условии $e < 0$); проектируя обе части на направление поля $\mathbf{H}$ и вспоминая, что векторное произведение перпендикулярно своим сомножителям, будем иметь

$$\frac{dv_H}{dt} = 0,$$

т. е. $v_H = \text{const}$; с другой стороны, из естественных уравнений следует:

$$v = \text{const} = v_0$$

$$\rho = \frac{mv_0}{eH \sin \varphi},$$

где φ — угол между скоростью и полем. Так как $v_H = \text{const}$ и $v = v_0 = \text{const}$, то и $\cos \varphi = \frac{v_H}{v} = \text{const} = \cos \alpha$. Таким образом наша траектория имеет постоянный радиус кривизны:

$$\rho = \frac{mv_0}{eH \sin \alpha},$$

и образует постоянный угол с силовыми линиями. Это — винтовая линия на цилиндре радиуса ρ с образующими, параллельными полю. Ее шаг равен:

$$h = 2\pi\rho \tan \alpha = \frac{2\pi mv_0}{eH \cos \alpha}.$$

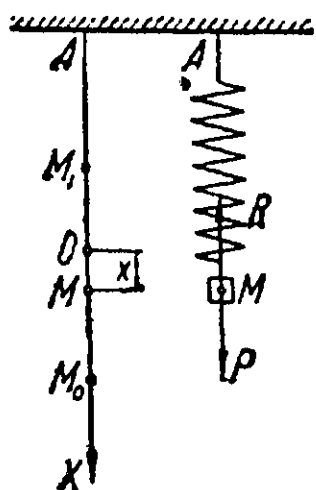
5. Гармонические колебания груза на пружине или рессоре. Подвесим на пружине (рис. 14) груз M весом p и дадим ему успокоиться. Положение равновесия примем за начало координат O оси OX (отнесенной на рисунке для удобства влево от прямой, по которой происходит колебание). Если $\overline{AM_1}$ обозначает расстояние груза от точки привеса при нерастянутой пружине, то отрезок $\overline{OM_1}$ представляет статическую деформацию пружины под нагрузкой p , т. е.:

$$\overline{OM_1} = \delta_{st} = \frac{p}{c},$$

где коэффициент упругости c равен отношению нагрузки к статической деформации:

$$c = \frac{p}{\delta_{st}}, \quad (87)$$

Рис. 14.



или, что все равно, нагрузке, вызывающей деформацию, равную единице длины. Отклоним груза из положения равновесия O до некоторого положения M_0 и приведем его в движение, тогда опыт показывает, что, если пренебречь влиянием торможения груза воздухом (об этом речь впоследствии) и силами трения в пружине, то можно наблюдать гармоническое колебание такого груза на пружине с некоторой амплитудой a и частотой ω . Докажем, что это колебание тяжелого груза, происходит вследствие силы, пропорциональной деформации пружины в данный момент, т. е. силы упругости пружины.

Напишем дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = p + R, \quad (88)$$

где R_x означает проекцию реакции пружины на ось x -ов. Найдем эту реакцию:

$$R_x = m\ddot{x} - p;$$

для этого из уравнения гармонического колебания:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha)$$

находим

$$\ddot{x} = -\omega^2 a \cos(\omega t + \alpha) = -\omega^2 x,$$

отсюда следует

$$R_x = -\frac{p}{g} \omega^2 x - p. \quad (89)$$

Замечая, что полная деформация δ пружины в данном положении груза равна:

$$\delta = \delta_{st} + x,$$

найдем

$$R_x = -\frac{p}{g} \omega^2 \delta + \frac{p}{g} \omega^2 \delta_{st} - p = -\frac{p}{g} \omega^2 \delta + \frac{p}{g} \delta_{st} \left(\omega^2 - \frac{gc}{p} \right),$$

но при $\delta = 0$ и $R_x = 0$ (не может быть натяжения без деформации), так что должно быть:

$$\omega = \sqrt{\frac{gc}{p}} = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}. \quad (90)$$

Если ввести в рассмотрение практически важную величину n , определяющую число колебаний в минуту, то

$$n = \frac{60 \omega}{2\pi} = 30 \sqrt{\frac{g}{\pi^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\delta_{st}}},$$

но отношение $\sqrt{\frac{g}{\pi^2}} = \sqrt{\frac{9,81}{9,87}} = 0,997 = 1 - 0,003$, таким образом с точностью до 0,3% можно пользоваться весьма удобной для запоминания формулой:

$$\left. \begin{aligned} n &= \frac{30}{\sqrt{\delta_{st}}} \text{ если } \delta_{st} \text{ выражено в метрах} \\ n &= \frac{300}{\sqrt{\delta_{st}}} \text{ если } \delta_{st} \text{ выражено в сантиметрах} \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

постоянно применяемой в машинной и строительной технике.

Выражение для периода колебаний будет:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{p}{gc}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = \sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} \approx 0,32 \sqrt{\delta_{st}} \text{ сек.} \quad (92)$$

Дадим несколько чисел. Тележка двадцатитонного пассажирского вагона с четырьмя осями, закрепленными попарно в двух тележках, имеет сложную систему рессор. Прогиб всего рессорного устройства равен 240 мм. Определим число колебаний в минуту такого вагона на рессорах.

По ф-ле (91) имеем

$$n = \frac{30}{\sqrt{0,240}} \approx 61 \text{ колебание в минуту,}$$

т. е. пассажирские вагоны имеют очень плавные колебания продолжительностью T , равной почти 1 секунде. Товарные вагоны имеют гораздо более жесткие рессоры: у них δ_{st} около 30 мм, так что

$$n = \frac{30}{\sqrt{0,030}} = 177 \text{ колебаний в минуту,}$$

а период T равен 0,34 сек., т. е. почти в три раза меньше.

Пользуясь формулами сопротивления материалов для статического прогиба балки пролета l , с моментом инерции поперечного сечения I и модулем E под сосредоточенной в центре нагрузкой при различных способах закрепления концов:

а) оба конца заделаны:

$$\delta_{st} = \frac{1}{192} \cdot \frac{Pl^3}{EI};$$

б) оба конца оперты:

$$\delta_{st} = \frac{1}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EI},$$

находим число колебаний их в минуту:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } n = \frac{30}{\sqrt{\delta_{st}}} = 416 \sqrt{\frac{EI}{Pl^3}} \\ \text{б) } n = 208 \sqrt{\frac{EI}{Pl^3}} \end{array} \right\} \text{ (все длины выражены в метрах).}$$

Мы видим, что для той же самой балки числа колебаний в минуту при двух различных случаях закрепления относятся, как 2:1, а периоды колебаний, как 1:2, причем в случае заделанных концов колебания получаются более быстрые.

Поставим теперь вопрос, каким образом, наоборот, зная закон упругой силы (закон Гюка) и имея коэффициенты упругости c , определить наперед движение, которое будет происходить. Это — уже вторая задача динамики.

Докажем, что под влиянием упругой силы тело будет совершать гармоническое колебательное движение и найдем уравнение этого движения.

Предположим, как и раньше, что начало координат помещено в положение равновесия тела, тогда дифференциальное уравнение движения (88) по (89) и (87) принимает вид:

$$m\ddot{x} = -cx; \quad (93)$$

для того чтобы его проинтегрировать, введем замену переменных, положив

$$\dot{x} = v_x, \quad (94)$$

тогда

$$\ddot{x} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \cdot v_x = \frac{d}{dx} \left(\frac{v_x^2}{2} \right),$$

и наше дифференциальное уравнение принимает вид:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{v_x^2}{2} \right) = -\frac{c}{m} x = -\omega^2 x;$$

взяв интегралы от обеих частей по переменному x , найдем

$$\frac{v_x^2}{2} = -\omega^2 \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} C_1,$$

где $\frac{1}{2} C_1$ — произвольная постоянная интегрирования. Полученное уравнение представляет, очевидно, *первый интеграл* уравнения движения, мы его перепишем в виде:

$$v_x^2 = \dot{x}^2 = C_1 - \omega^2 x^2. \quad (95)$$

Постоянную C_1 можно определить из начальных условий:

$$\text{при } t=0, \quad x=x_0, \quad v_x=v_{0x}. \quad (96)$$

Подставляя их в первый интеграл, будем иметь

$$C_1 = v_{0x}^2 + \omega^2 x_0^2. \quad (97)$$

Для разыскания *второго интеграла*, проинтегрируем уравнение (95), переписав его в виде:

$$\frac{dx}{\sqrt{C_1 - \omega^2 x^2}} = dt, \quad (98)$$

причем знак перед корнем берется одинаковый со знаком dx , так как dt всегда положительно.

Взяв от обеих частей интегралы, найдем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{C_1 - \omega^2 x^2}} = \frac{1}{\omega} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{C_1}{\omega^2} - x^2}} = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega x}{\sqrt{C_1}} = t + C_2.$$

Отсюда сразу следует

$$x = \frac{1}{\omega} \sqrt{C_1} \sin(\omega t + C_2 \omega). \quad (99)$$

Постоянная C_2 из принятых начальных условий должна быть равна:

$$C_2 = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{\omega x_0}{\sqrt{v_{0x}^2 + \omega^2 x_0^2}} = \frac{1}{\omega} \arcsin \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}}}.$$

Вводя обозначение:

$$\alpha = \arcsin \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}}}, \quad (100)$$

можем еще упростить его, написав, что

$$\sin \alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}}},$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\frac{v_{0x}}{\omega}}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}}},$$

а следовательно

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega x_0}{v_{0x}}, \quad \alpha = \arctg \frac{\omega x_0}{v_{0x}}. \quad (101)$$

Окончательно, исключая постоянные интегрирования, будем иметь такое выражение второго интеграла:

$$x = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha). \quad (102)$$

Итак мы действительно имеем гармоническое колебательное движение с амплитудой:

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}},$$

частотой ω , определенной равенствами (90) и фазой α , заданной равенством (101).

Отметим частные случаи:

1°. В начальный момент точка отклонена на расстояние x_0 и опущена без начальной скорости. При этом $v_{0x} = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = \infty$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, а следовательно уравнение (102) имеет вид:

$$x = x_0 \cos \omega t.$$

2°. Точке сообщается начальная скорость v_{0x} в тот момент, когда она находится в начале координат. В этом случае: $x_0 = 0$, $\operatorname{tg} \alpha = 0$, $\alpha = 0$ и мы имеем

$$x = \frac{v_{0x}}{\omega} \sin \omega t.$$

Мы обращаем внимание учащегося на очень важный физический факт: *начальные условия движения не влияют на частоту или период колебания, ими определяются только амплитуда и фаза.* Это свойство гармонических колебаний называется *изохронностью* их и объясняется пропорциональностью упругой силы вызываемой ею деформации. При больших амплитудах закон Гюка перестает быть верен и изохронность нарушается. Мы к этому вопросу вернемся еще в следующих темах.

Для иллюстрации предыдущей теории рассмотрим численный пример.

Для испытания упругой рессоры на удар, с высоты 1 м на середину ее падает груз весом 1 тонна. Зная, что статический про-

гиб рессоры под тем же грузом, сосредоточенным на середине ее, равен 1 мм, найти уравнение колебаний рессоры с грузом, после того, как он упадет на нее и будет двигаться совместно с нею.

В этом случае мы имеем как раз условия 2°, так как начальные условия движения таковы: при $t=0$, $x=0$, $\dot{x}=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\cdot 9,81\cdot 1}=4,4$ м/сек. Частоту колебаний найдем по формуле (90):

$$\omega = \sqrt{\frac{9,81}{0,001}} \approx 100 \frac{1}{\text{сек.}}$$

Амплитуда колебаний равна:

$$a = \frac{v_0}{\omega} = \frac{4,4}{100} = 0,044 \text{ м} = 4,4 \text{ см.}$$

Уравнение движения будет (если x выражено в см):

$$x = 4,5 \sin 100 t.$$

Обратим внимание на разницу между амплитудой колебаний и статическим прогибом рессоры. Амплитуда колебаний в 45 раз превосходит статическую деформацию.

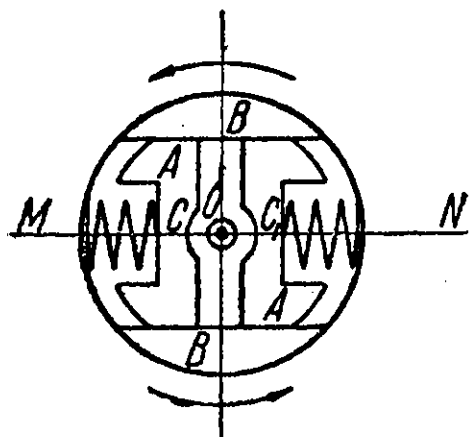


Рис. 15.

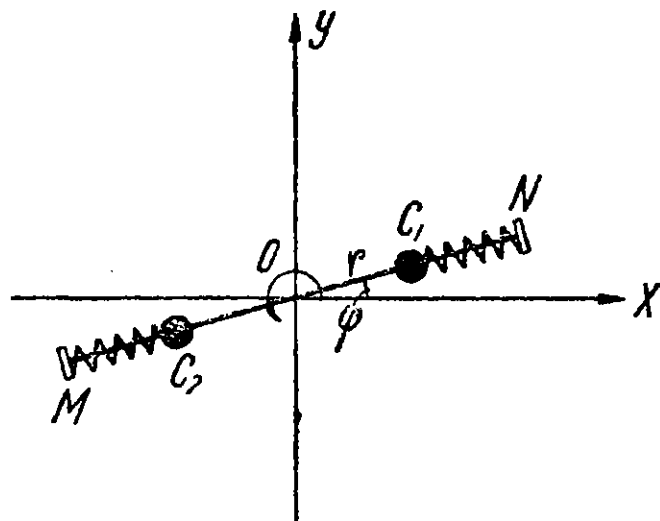


Рис. 16.

6. Регулятор Гартунга. Устойчивость и неустойчивость регулятора.

В качестве простейшего примера на применение дифференциальных уравнений в полярных координатах рассмотрим движение регулятора Гартунга.

Устройство его схематически следующее. Две одинаковых гири A (рис. 15) могут скользить в прорезях диска B, вращающегося в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O. Гири удерживаются двумя пружинами. Зная вес гирь P, угловую скорость вращения диска ω , считаемую постоянной, коэффициент упругости пружин c и расстояние h от точки O до центров тяжести C_1 и C_2 гирь при ненапряженных пружинах, надо определить, каково будет движение гирь при равномерном вращении диска. Трением гирь в прорези в первом приближении пренебрегаем. Отметим какое-нибудь промежуточное

положение гирь C_1 и C_2 на прямой MN при помощи полярных координат r и φ (рис. 16). Здесь, очевидно, по условию равномерного вращения диска $\varphi = \omega t$, а r — текущая координата. Единственная сила, дающая проекцию на ось MN есть сила упругости пружины, проекция которой на направление MN будет для гири C_1 равна $-c(r-h)$. Вспоминая ур-ния (9) § 7 будем иметь

$$m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -c(r-h),$$

или, подставляя заданные значения $m = \frac{p}{g}$, $\dot{\varphi} = \omega$ и собирая члены с переменной r в одну сторону:

$$\ddot{r} + \left(\frac{cg}{p} - \omega^2\right)r = \frac{cgh}{p}. \quad (103)$$

Введем обозначения:

$$\frac{cg}{p} - \omega^2 = k, \quad \frac{cgh}{p} = a, \quad (104)$$

тогда наше уравнение приобретает вид:

$$\ddot{r} + kr = a, \quad (105)$$

очень напоминающий дифференциальное уравнение колебаний с той только разницей, что в случае колебаний коэффициент при неизвестной функции в левой части уравнения равнялся квадрату частоты, т. е. был *существенно положителен*, здесь же коэффициент k в зависимости от соотношения между упругостью пружин, весами гирь и угловой скоростью диска может быть как положительным, так и отрицательным, а иногда и равным нулю.

Мы будем интегрировать это уравнение тем же приемом, как и в предыдущем примере. Прежде всего освободимся от постоянной a , стоящей в правой части уравнения. Для этого произведем замену $r = r_1 + \frac{a}{k}$, тогда уравнение (105) перейдет в такое:

$$\ddot{r}_1 + kr_1 = 0. \quad (106)$$

После этого положим, для понижения порядка уравнения, $\dot{r}_1 = v$, тогда

$$\ddot{r}_1 = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr_1} \cdot \frac{dr_1}{dt} = \frac{dv}{dr_1} \cdot v = \frac{d}{dr_1} \left(\frac{v^2}{2} \right),$$

и последнее уравнение переходит в такое:

$$\frac{d}{dr_1} \left(\frac{v^2}{2} \right) + kr_1 = 0. \quad (107)$$

Интегрируя почленно, получим *первый интеграл*:

$$-\frac{v^2}{2} + \frac{kr_1^2}{2} = \frac{A}{2}, \quad (108)$$

где A — какая-то произвольная постоянная, определяемая из начальных условий. Не задавая пока начальных условий, отметим, что

во всяком случае при $k \geq 0$, $A > 0$. Первый интеграл может быть переписан так:

$$\left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2 = A - kr_1^2,$$

или

$$\frac{\pm dr_1}{\sqrt{A - kr_1^2}} = dt, \quad (109)$$

где $+$ соответствует росту r_1 , $-$ убыванию r_1 .

Приступая к дальнейшему интегрированию, видим, что форма второго интеграла уравнений движения коренным образом зависит от знака величины k .

1°. Если $k > 0$, то и $A > 0$ и, взяв интегралы от обеих частей уравнения (109), будем иметь

$$\arcsin \sqrt{\frac{k}{A}} r_1 = \sqrt{k}t + B,$$

откуда

$$r_1 = \sqrt{\frac{A}{k}} \sin(\sqrt{k}t + B),$$

а следовательно

$$r = \frac{a}{k} + \sqrt{\frac{A}{k}} \sin(\sqrt{k}t + B), \quad (110)$$

т. е. мы имеем гармонические колебания гирь около положения равновесия, определяемого координатой:

$$r = \frac{a}{k} = \frac{cgh}{p\left(\frac{cg}{p} - \omega^2\right)}. \quad (111)$$

По написанной формуле сразу видно, что с ростом угловой скорости ω положение равновесия отодвигается все дальше и дальше от оси регулятора, причем если это положение выйдет за пределы, допустимые пружинами, то пружины сожмутся до отказа, гири просто остановятся, дойдя до краев диска, и регулятор перестанет работать. Мы, следовательно, не будем уже иметь колебательного движения, а получим движение в одну сторону до отказа регулятора работать.

2°. Если $k < 0$, то A может быть в зависимости от начальной скорости или больше или меньше нуля. И в том и другом случае имеем

$$\int \frac{dr_1}{\sqrt{r_1^2 - \frac{A}{k}}} = \sqrt{-k} \cdot t + B. \quad (112)$$

Интеграл в левой части берется при помощи логарифмов:

$$\int \frac{dr_1}{\sqrt{r_1^2 - \frac{A}{k}}} = \lg \left| r_1 + \sqrt{r_1^2 - \frac{A}{k}} \right|,$$

так что

$$r_1 + \sqrt{r_1^2 - \frac{A}{k}} = B_1 e^{V\sqrt{-k} \cdot t} \quad (113)$$

и r_1 будет выражаться в показательных функциях от времени, т. е. расти со временем. Никакого колебания мы при этом не получим. Действительно, умножая в левой части на сопряженное выражение и деля на него, будем иметь

$$\frac{r_1^2 - \left(r_1^2 - \frac{A}{k}\right)}{r_1 - \sqrt{r_1^2 - \frac{A}{k}}} = B_1 e^{V\sqrt{-k} \cdot t},$$

откуда

$$r_1 - \sqrt{r_1^2 - \frac{A}{k}} = \frac{A}{kB_1} e^{-V\sqrt{-k} \cdot t},$$

и складывая с ур-нием (113), получим

$$r_1 = \frac{1}{2} \left[B_1 e^{V\sqrt{-k} \cdot t} + \frac{A}{kB_1} e^{-V\sqrt{-k} \cdot t} \right], \quad (114)$$

причем $B_1 = e^B$ ни в коем случае в нуль не обращается, а всегда положительно. Таким образом мы всегда будем иметь движение в одну сторону, соответствующее беспредельному росту r_1 , а следовательно и r .

3°. Если $k=0$, то уравнение вообще упрощается и мы имеем

$$r = \frac{at^2}{2} + c_1 t + c_2,$$

т. е. опять-таки ускоренное движение гири в одну сторону.

Перейдем после этого математического исследования к практическим выводам.

Принцип регулирования заключается в том, что каждой угловой скорости вала соответствует определенное положение равновесия грузов на регуляторе, соединенном с вращающимся валом. При изменении угловой скорости грузы передвигаются и, действуя на управление машины, возвращают ее к прежней угловой скорости—таким образом достигается выравнивание угловой скорости вала. Для правильного действия регулятора необходимо, чтобы:

- 1) положения равновесия гирь, соответствующие различным угловым скоростям, все лежали в пределах $h < r < h_m$, где h_m определяет крайнее допустимое конструкцией положение центра гири;
- 2) все эти положения были бы положениями устойчивого равновесия, т. е. чтобы гири, будучи выведены из положения равновесия, совершали колебательные движения около них, а не двигались в одну сторону. Мы имеем, следовательно, условия:

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{cg}{p} - \omega^2 > 0 \\ h &< \frac{cgh}{p \left(\frac{cg}{p} - \omega^2 \right)} < h_m \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Рассматривая эти неравенства, видим, что они могут быть приведены к такому одному:

$$\omega^2 < \frac{cg}{p} \left(1 - \frac{h}{h_m}\right), \quad (116)$$

так как все остальные содержатся в нем.

Последнее неравенство и дает *основное условие расчета регулятора*.

Приведем несколько численных расчетов.

1) На каких угловых скоростях может работать регулятор с гирями весом по 20 кг каждая, если коэффициент упругости пружин $c = 30$ кг/см, $h = 5$ см, $h_m = 8$ см. Подставляя в формулу (116), имеем

$$\omega^2 < 558, \quad \omega < 23,6,$$

т. е. такой регулятор будет работать на угловых скоростях, меньших 240 об/мин.

2) Задавая отношение $h/h_m = 0,5$, $p = 30$ кг, определим коэффициент упругости пружин регулятора, предназначенного для паровой машины, вал которой делает не свыше 100 об/мин. Полагая $\omega \approx 10 \frac{1}{\text{сек.}}$ имеем

$$c > \frac{100 \cdot 30}{980 \cdot 0,5} \approx 61 \text{ кг/см.}$$

Отметим еще, что частота и период колебаний гирь будут, очевидно, равны:

$$\nu = \sqrt{\frac{cg}{p} - \omega^2}, \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{cg}{p} - \omega^2}},$$

причем по условию действия регулятора:

$$\nu > \sqrt{\frac{cg}{p} \cdot \frac{h}{h_m}}, \quad T < 2\pi \sqrt{\frac{p}{cg} \cdot \frac{h_m}{h}}.$$

7. Горизонтальные колебания тела, закрепленного на конце упругого вертикального стержня, заделанного нижним концом.

Рассмотрим вертикальный круглый стержень небольшого диаметра, заделанный нижним концом и нагруженный телом M веса P на верхнем конце (рис. 17). Если стержень вывести из положения равновесия и отпустить без начальной скорости или с начальной скоростью, лежащей в плоскости, проходящей через отклоненное и первоначальное положение стержня, то, пренебрегая малым опусканием груза по отношению к горизонтальной плоскости Π , мы будем иметь прямолинейные колебания (в направлении M_0M) его в плоскости Π , под влиянием восстанавливающей силы упругости стержня, направленной от отклоненного положения тела к равновесному.

Совсем другая картина получится, если мы, отклонив тело, дадим ему начальную скорость в плоскости Π под некоторым углом

к линии M_0M , тогда наш груз будет двигаться по плоскости Π , описывая некоторую кривую.

Мы исследуем сейчас оба случая. Для облегчения рассмотрения движения возьмем плоскость Π (рис. 18) и проведем в ней две взаимно-перпендикулярные оси, имеющие начало в равновесном положении груза. При исследовании первого случая проведем ось x -ов через начальное положение груза M_0 равное x_0 , и сообщим ему начальную скорость v_{0x} , направленную по или против оси x ; тогда мы будем иметь дифференциальное уравнение движения:

$$\frac{p}{g} \ddot{x} = R_x = -cx, \quad (117)$$

где c — коэффициент упругости стержня, численно равный статической силе, вызывающей отклонение стержня, равное единице длины. В данном случае будем иметь по известной формуле сопротивления материалов:

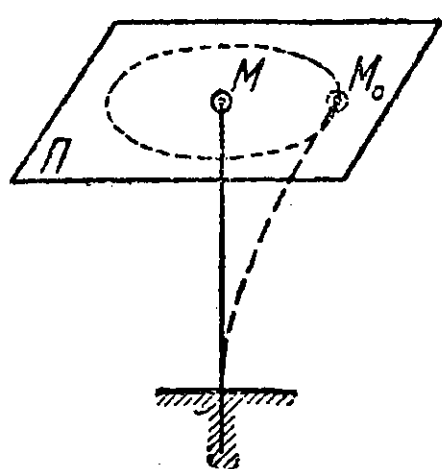


Рис. 17.

$$c = \frac{3EI}{l^3}. \quad (118)$$

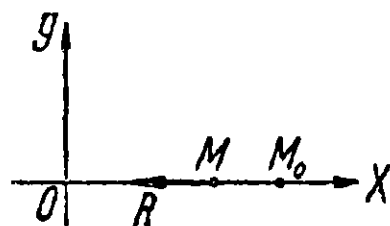


Рис. 18.

Ур-ние (117) интегрируется тем же приемом, как и в примере 5. Груз будет совершать прямолинейные гармонические колебания с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{cg}{p}} = \sqrt{\frac{3EIg}{Pl^3}}, \quad (119)$$

или периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{Pl^3}{3EIg}}. \quad (120)$$

Если измерить статическую деформацию δ_{st} стержня под влиянием как раз груза P при горизонтальном положении стержня, то можно будет опять применить формулу для числа колебаний в минуту:

$$n = \frac{30}{\sqrt{\delta_{st}}},$$

причем здесь δ_{st} будет равно:

$$\delta_{st} = \frac{P}{EJ} \frac{l^3}{3}.$$

Амплитуда и фаза будут, как всегда, зависеть от начального отклонения и начальной скорости. Так, например, при начальном отклонении a и отсутствии начального толчка уравнение движения груза будет

$$x = a \cos \omega t.$$

Для стального круглого стержня диаметром d см имеем

$$E = 2200000, \quad I = \frac{\pi d^4}{64},$$

так что

$$T \approx 0,0004 \sqrt{\frac{Pl^3}{d^4}}.$$

Если, например, взять стержень диаметром $d = 0,2$ см, длиной $l = 20$ см и нагрузить его телом весом $P = 0,1$ кг, то период горизонтальных колебаний будет равен:

$$T \approx 0,9 \text{ сек.}$$

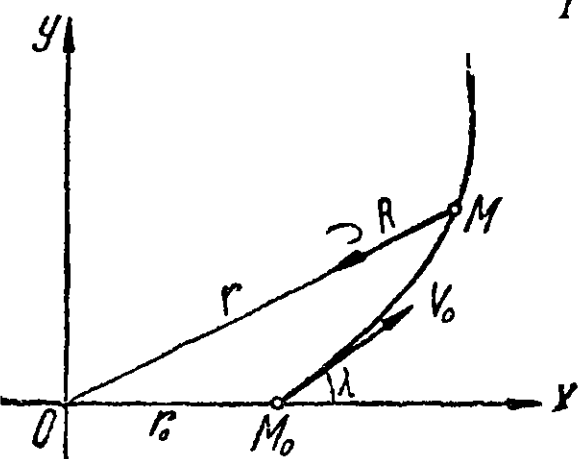


Рис. 19.

Период быстро убывает с увеличением диаметра (обратно пропорционально квадрату диаметра), так что при диаметре в два раза большем мы имели бы уже период около 0,2 секунды. Несколько медленнее (пропорционально полуторной степени) убывает период с уменьшением длины стержня.

Перейдем теперь ко второму случаю, когда начальная скорость не направлена по оси x -ов. Напишем дифференциальные уравнения движения точки M на плоскости Π (рис. 19); этих уравнений будет два:

$$m\ddot{x} = R_x, \quad m\ddot{y} = R_y,$$

где проекции упругой силы, как мы уже знаем, равны:

$$R_x = -cx, \quad R_y = -cy.$$

Таким образом нам необходимо проинтегрировать систему уравнений:

$$m\ddot{x} = -cx, \quad m\ddot{y} = -cy. \quad (121)$$

Но эта система дает не что иное, как два уравнения рассмотренного уже типа, поэтому напомним сразу интегралы на основании (102) предыдущего упражнения:

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{0x}^2}{\omega^2}} \sin(\omega t + \alpha) \\ y &= \sqrt{y_0^2 + \frac{v_{0y}^2}{\omega^2}} \sin(\omega t + \beta) \end{aligned} \right\} \quad (122)$$

где

$$\alpha = \arctg \frac{\omega x_0}{v_{0x}}, \quad \beta = \arctg \frac{\omega y_0}{v_{0y}}. \quad (123)$$

Исследуем траекторию полученного движения. Мы уже знаем из курса кинематики, что ур-ния (122) представляют параметрические уравнения фигур Лиссажу, причем в силу одинаковости частоты в обоих уравнениях эти кривые могут быть только эллипсами, кругами или прямыми.

Исследуем зависимость формы траектории от начальных условий движения. Мы уже знаем, что вид траектории зависит прежде всего от сдвига фаз:

$$\theta = \alpha - \beta = \arctg \frac{\omega x_0}{v_{0x}} - \arctg \frac{\omega y_0}{v_{0y}} = \arctg \frac{\omega \left(\frac{x_0}{v_{0x}} - \frac{y_0}{v_{0y}} \right)}{1 - \omega^2 \frac{x_0 \cdot y_0}{v_{0x} \cdot v_{0y}}}.$$

Нисколько не нарушая общности, расположим ось X так, чтобы она проходила через начальное положение точки M_0 и обозначим угол между направлением начальной скорости и осью X через λ , тогда $y_0 = 0$ и сдвиг фаз будет выражаться проще:

$$\theta = \arctg \frac{\omega x_0}{v_0 \cos \lambda}. \quad (124)$$

Уравнение траектории имеет вид (вспомнить Кинематику, § 8, упр. 2):

$$\frac{x^2}{x_0^2 + \frac{v_0^2 \cos^2 \lambda}{\omega^2}} + \frac{y^2}{\frac{v_0^2 \sin^2 \lambda}{\omega^2}} - 2 \frac{xy}{\sqrt{\left(x_0^2 + \frac{v_0^2 \cos^2 \lambda}{\omega^2} \right) \frac{v_0^2 \sin^2 \lambda}{\omega^2}}} \cos \theta = \sin^2 \theta. \quad (125)$$

Исключая случай $\lambda = 0$, уже ранее рассмотренный, видим, что траекторией будет вообще эллипс, причем если $\theta = \frac{\pi}{2}$, то эллипс имеет осями симметрии оси X и Y , это будет в том случае, когда

$$\frac{\omega x_0}{v_0 \cos \lambda} = \infty,$$

т. е. при $\lambda = \frac{\pi}{2}$ или $\frac{3\pi}{2}$, в этом случае начальная скорость перпендикулярна начальному вектор-радиусу точки.

Если в последнем случае выбрать начальную скорость под условием

$$v_0 = \omega x_0,$$

то траекторией будет круг радиуса $r_0 = |x_0|$. Во всех остальных случаях точка M будет описывать эллипсы. Отметим, что форма кривой зависит не только от начальных условий, но и от ω , т. е. от упругих свойств стержня и веса груза, на нем закрепленного.

Кривые—замкнутые. Период полного обращения точки M вокруг своего равновесного состояния равен, очевидно, периоду прямолинейных колебаний (119).

Рассмотренное нами движение легко наблюдать, зажав, например, стальную спицу в тисках и нагрузив верхний конец ее каким-нибудь телом. По этому принципу устроен прибор для демонстрации фигур Лиссажу—калейдофон.

8. Машина Атвуда (Atwood, 1784). Как один из простейших примеров на движение системы точек, рассмотрим машину Атвуда, служащую для демонстрации законов движения тел.

Схема машины такова: через блок пренебрежимо малого веса перекинута нить, к концам которой привешены два груза (рис. 20): M_1 веса p_1 и M_2 веса p_2 . Требуется, не учитывая массы блока и нитей, а также пренебрегая трением блока, определить движение грузов. Для решения этой задачи заметим, что к грузам приложены силы весов их и реакции (натяжения) нити, которые будем считать одинаковыми вдоль всей нити, так как идеальный блок только меняет направление силы, а не ее величину. Итак

$$S_1 = S_2 = S,$$

кроме того, очевидно, в силу нерастяжимости нити можно считать ускорения грузов одинаковыми по величине и разными по знаку, т. е.

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2. \quad (126)$$

Последнее равенство можно еще получить, замечая, что во все время движения

$$x_1 + x_2 = \text{const},$$

и дифференцируя его по времени два раза.

Дифференциальные уравнения движения грузов будут:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_1}{g} \ddot{x}_1 &= p_1 - S \\ \frac{p_2}{g} \ddot{x}_2 &= p_2 - S \end{aligned} \right\} \quad (127)$$

Исключая из этих уравнений S и заменяя x_2 на $-x_1$, по (126), найдем:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{p_1 - p_2}{p_1 + p_2} g, \\ \ddot{x}_2 &= \frac{p_2 - p_1}{p_1 + p_2} g. \end{aligned} \right\} \quad (128)$$

Мы видим, что ускорения грузов постоянны, так что машина может служить для получения падения груза с любым ускорением; ускорение это можно получать, изменяя величину одного из грузов, например p_2 . Взяв $p_2 < p_1$, получим ускоренное движение груза M_1 вниз; уравновесив грузы, будем иметь равномерное движение. Этим пользуются для демонстрации ускоренного и равномерного

движения. Обыкновенно берут одинаковые грузы p и на один из них, например M , надевают дополнительный грузик K (рис. 21) весом Δp . Проходя через колечко N , груз M оставляет на колечке дополнительную нагрузку K_1 , которая благодаря плечикам застревает в кольце; начиная с этого момента, груз M движется с той скоростью, какую он успел приобрести за время разгона с ускорением, рассчитанным по формуле (128):

$$w = \frac{\Delta p}{2p + \Delta p} g.$$

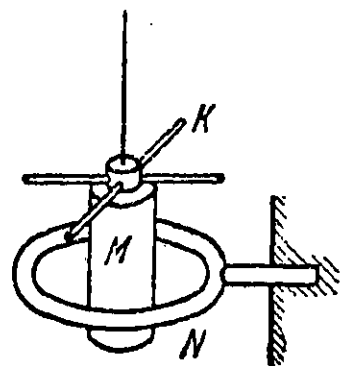


Рис. 21.

Если Δp мало сравнительно с $2p$, то ускорение близко к:

$$w = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{p} g.$$

Если обозначить время от начала движения до момента снятия нагрузки через t , то скорость равномерного движения будет

$$v = wt = \frac{1}{2} \frac{\Delta p}{p} gt.$$

На машине Атвуда можно экспериментально подтвердить правильность этой расчетной формулы, а также и многих других. На рис. 22 мы даем общий вид машины Атвуда, установленной в лаборатории механики Ленинградского Физико-механического института.

Ось блока покоится на двух колесиках, вращающихся с малым трением, при этом вращение блока происходит с совершенно ничтожным трением. Деталь этой установки блока и расчет ее изложены в третьей теме, фотография показана в увеличенном виде на рис. 167. Скорость движения грузов регистрируется замыканием тока в электромагнитах хронографа, сигналы времени даются от специальных часов с маятником на ленту хронографа.

9. Ускоренное движение паровоза с подвижным составом. Рассмотрим пример составления и интегрирования адифференциального уравнения движения системы точек в более сложном случае.

Представим себе схему паровоза и поездного состава в виде двух тел, связанных упругой пружиной (тяги, буфера). К точке П (паровоз) (рис. 23) приложена двигательная сила F , образующаяся за счет силы трения между *ведущими* колесами паровоза и рельсами, и упругая сила S натяжения тяг, соединяющих паровоз с подвижным составом. Силой сопротивления воздуха и трением *бегущих* колес паровоза пренебрегаем (или можем под F понимать двигательную силу, уменьшенную на сопротивление). К подвижному составу приложена упругая



Рис. 22. Машина Атвуда. (Модель кабинета механики Лен. Физ.-мех. института).

сила S и сопротивление трения R в бегущих колесах вагонов. Обозначим текущие координаты паровоза и подвижного состава, рассматриваемых как точки, через x_1 и x_2 . Тогда, обозначая еще через l расстояние между точками П и В при ненапряженных тягах, будем иметь уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{P_{\Pi}}{g} \ddot{x}_1 &= F - S \\ \frac{P_{\text{В}}}{g} \ddot{x}_2 &= S - R \end{aligned} \right\} \quad (129)$$

где

$$S = c(x_1 - x_2 - l),$$

а c — коэффициент упругости тяги. Уравнения (129) могут быть еще переписаны так:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{F}{P_{\Pi}} g - \frac{gc}{P_{\Pi}} (x_1 - x_2 - l) \\ \ddot{x}_2 &= -\frac{R}{P_{\text{В}}} g + \frac{gc}{P_{\text{В}}} (x_1 - x_2 - l) \end{aligned} \right\} \quad (130)$$

Чтобы разыскать x_1 и x_2 , найдем сначала их разность для этого

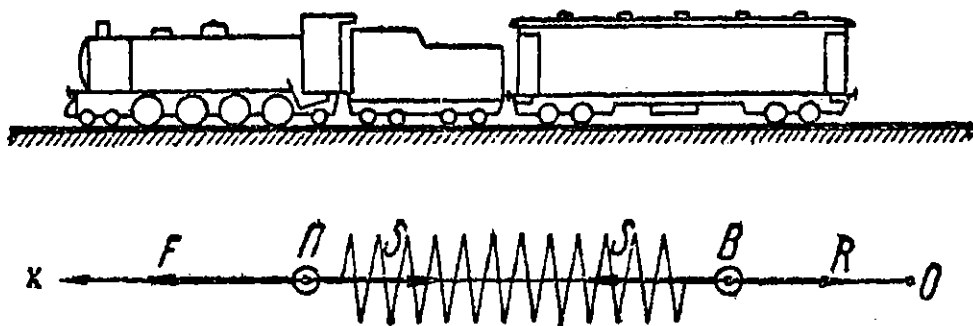


Рис. 23.

вычтем почленно уравнения (129) друг из друга; будем иметь одно уравнение:

$$\frac{d^2}{dt^2} (x_1 - x_2 - l) = \left(\frac{F}{P_{\Pi}} + \frac{R}{P_{\text{В}}} \right) g - gc \left(\frac{1}{P_{\Pi}} + \frac{1}{P_{\text{В}}} \right) (x_1 - x_2 - l). \quad (131)$$

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - x_2 - l &= \xi \\ \left(\frac{F}{P_{\Pi}} + \frac{R}{P_{\text{В}}} \right) g &= G \\ gc \left(\frac{1}{P_{\Pi}} + \frac{1}{P_{\text{В}}} \right) &= \omega^2 \end{aligned} \right\} \quad (132)$$

тогда уравнение принимает вид:

$$\ddot{\xi} = G - \omega^2 \xi. \quad (133)$$

Это уравнение подстановкой

$$\xi = \frac{G}{\omega^2} + \xi_1$$

приводится к известному уже нам типу:

$$\ddot{\xi}_1 = -\omega^2 \xi_1,$$

имеющему решение:

$$\xi_1 = A \sin(\omega t + \alpha),$$

так что

$$\xi = A \sin(\omega t + \alpha) + \frac{G}{\omega^2}, \quad (134)$$

а следовательно

$$\dot{\xi} = A \omega \cos(\omega t + \alpha). \quad (135)$$

Уравнение (134) представляет *второй* интеграл, а уравнение (135) — *первый*. Принимая во внимание начальные условия:

при $t=0$, $x_2=0$, $x_1=l$, $x_1-x_2=l$, т. е. $\xi=0$ и $\dot{x}_1-\dot{x}_2=\dot{\xi}=0$, (136) получим:

$$0 = A \sin \alpha + \frac{G}{\omega^2},$$

$$0 = A \omega \cos \alpha.$$

Отсюда следует, что при $A \neq 0$

$$\cos \alpha = 0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad A = -\frac{G}{\omega^2},$$

так что

$$\xi = x_1 - x_2 - l = \frac{G}{\omega^2} - \frac{G}{\omega^2} \cos \omega t. \quad (137)$$

С другой стороны, складывая уравнения (129), получим

$$\frac{1}{g} (P_{\Pi} \ddot{x}_1 + P_{\text{В}} \ddot{x}_2) = F - R, \quad (138)$$

или, интегрируя по времени, находим сначала *первый* интеграл:

$$\frac{1}{g} (P_{\Pi} \dot{x}_1 + P_{\text{В}} \dot{x}_2) = (F - R) t + C_1.$$

а затем и *второй*:

$$\frac{1}{g} (P_{\Pi} x_1 + P_{\text{В}} x_2) = (F - R) \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Постоянные определяются из начальных условий (136):

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{1}{g} P_{\Pi} l,$$

следовательно

$$\frac{1}{g} (P_{\Pi} x_1 + P_{\text{В}} x_2) = (F - R) \frac{t^2}{2} + \frac{1}{g} P_{\Pi} l. \quad (139)$$

Из двух уравнений: (137) и (139), можно найти отдельно x_1 и x_2 ; после простых преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= l + \frac{F-R}{P_{\Pi} + P_{\text{В}}} \frac{gt^2}{2} + \frac{P_{\Pi} P_{\text{В}}^2}{c(P_{\Pi} + P_{\text{В}})^2} \left(\frac{F}{P_{\Pi}} + \frac{R}{P_{\text{В}}} \right) (1 - \cos \omega t) \\ x_2 &= \frac{F-R}{P_{\Pi} + P_{\text{В}}} \cdot \frac{gt^2}{2} - \frac{P_{\Pi}^2 P_{\text{В}}}{c(P_{\Pi} + P_{\text{В}})^2} \left(\frac{F}{P_{\Pi}} + \frac{R}{P_{\text{В}}} \right) (1 - \cos \omega t). \end{aligned} \right\} \quad (140)$$

Мы имеем здесь, очевидно, наложение гармонического колебания на общее для паровоза и подвижного состава ускоренное движение вперед.

Частота колебания одинакова и у паровоза и у вагонов, она равна по (132):

$$\omega = \sqrt{gc \left(\frac{1}{P_{\Pi}} + \frac{1}{P_{\text{В}}} \right)},$$

что касается амплитуды, то, обозначая их: a_{Π} — для паровоза и $a_{\text{В}}$ — для вагонного состава, имеем:

$$\begin{aligned} a_{\Pi} &= \frac{P_{\Pi} P_{\text{В}}^2}{c(P_{\Pi} + P_{\text{В}})^2} \left(\frac{F}{P_{\Pi}} + \frac{R}{P_{\text{В}}} \right), \\ a_{\text{В}} &= \frac{P_{\Pi}^2 P_{\text{В}}}{c(P_{\Pi} + P_{\text{В}})^2} \left(\frac{F}{P_{\Pi}} + \frac{R}{P_{\text{В}}} \right), \\ a_{\Pi} : a_{\text{В}} &= P_{\text{В}} : P_{\Pi}. \end{aligned}$$

Совершенно естественно, что амплитуды обратно пропорциональны весам колеблющихся тел.

Дадим численный расчет.

При испытании упругости тяговых соединений паровоза их подвергали статической нагрузке 20 т, при этом статическое удлинение было равно 10 см, так что

$$c = \frac{20}{10} = 2 \frac{\text{т}}{\text{см}}.$$

Вес паровоза компаунд с тендером $P_{\Pi} \approx 100$ т, поезд в 40 осей при нагрузке 8 т на одну ось дает $P_{\text{В}} = 320$ т, отсюда сразу находим частоту колебаний:

$$\omega = \sqrt{980 : 2 \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{320} \right)} = 5 \frac{1}{\text{сек.}},$$

период колебаний около:

$$T = 1,3 \text{ сек.}$$

Эти колебания можно постоянно наблюдать при трогании поезда с места или переходе с одной скорости на другую, например при быстром торможении. Колебания эти быстро затухают благодаря наличию сил трения и других вредных сопротивлений. Мы видим,

что период не зависит ни от силы тяги паровоза, ни от сопротивлений подвижного состава, а только от упругих свойств тяговых приспособлений и весов паровоза и поезда.

Амплитуда колебаний, наоборот, коренным образом зависит от F и R . Вычислим амплитуды колебаний при прежних данных, к которым присоединим еще следующие:

$$F = 5,8 \text{ т}, R = 4,3 \text{ т}.$$

Вычисление дает

$$a_{\Pi} = 2,1 \text{ см}, a_{\text{В}} = 0,7 \text{ см}.$$

Мы видим, что амплитуда этих колебаний незначительна. При трогании с места сильно нагруженных вагонов она может быть и большей.

В заключение отметим еще, что член с квадратом времени в уравнениях (140) определяет путь, проходимый в ускоренном движении поезда; ускорение поезда в целом равно:

$$w = \frac{F - R}{P_{\Pi} + P_{\text{В}}} g. \quad (141)$$

В нашем случае имеем

$$w = \frac{5,8 - 4,3}{100 + 320} g \approx 0,004 g,$$

т. е.

$$w \approx 0,04 \text{ м/сек}^2.$$

В дальнейшем мы покажем, как такую же задачу можно проще решать, пользуясь теоремой движения центра инерции.

Задачи и вопросы.

1. Максимальное ускорение (замедление), допустимое в лифте, равно $0,2 g$. Зная вес лифта с пассажирами $P = 1 \text{ т}$, определить максимальное и минимальное значения натяжения троса, поддерживающего лифт. Почему при неравномерном движении лифта натяжение троса не равно весу лифта? Каково было бы натяжение троса, если бы лифт падал с ускорением g ?

2. Определить максимальный уклон, по которому может равномерно спускаться трамвай, если коэффициент трения заторможенных колес о рельсы равен $0,15$. Каково будет ускорение трамвая на этом уклоне, если прекратить торможение, уменьшив коэффициент трения до $0,005$?

3. Для спуска парохода из эллинга в воду были устроены подмости со средним уклоном в 2° и длиной в 225 м . Корпус парохода прошел этот путь равноускоренно в 60 сек. , определить коэффициент трения корпуса о смазанные салом доски эллинга.

4. Сколько времени будет падать на землю парашют весом 2 кг с человеком веса 65 кг , опущенный с высоты 300 м , если площадь парашюта $S = 8 \text{ м}^2$, а коэффициент C в формуле сопротивления $R = C\rho S v^2$ равен $1,6$? Какова будет скорость падения человека на землю; с какой высоты должен был соскочить

человек без парашюта, чтобы иметь ту же скорость при падении на землю? Какова должна быть площадь парашюта, чтобы скорость падения была та же, что и при скачке с высоты 1 м? Велико ли влияние высоты, с которой падает парашют, на скорость при соприкосновении с землей?

5. Для сортировки свинцовых дробинok диаметром 1 мм, 2 мм, 3 мм и 4 мм их опускают в цилиндр с водою глубиною 4 м. Принимая во внимание потерю веса дробинok в воде и сопротивление воды, определить пути, пройденные дробинками за то время, пока дробинки меньшего диаметра достигнут дна.

6. Чему равен коэффициент сопротивления бомбы с меделевым сечением 60 см^2 и весом 74 кг, если конечная скорость ее при падении в воздухе с высоты 4500 м равна 231 м/сек?

7. Вагон трамвая весом 15 т, двигаясь со скоростью 20 км/час, переходит с прямого пути на закругление радиусом 200 м. Насколько увеличится сила трения колес о рельсы, если на прямом пути коэффициент трения можно принять равным 0,02, а на закруглении 0,05?

Указание. Для определения дополнительного бокового давления колес на закруглении применить естественные уравнения.

8. Каков радиус закругления пути, если маятник, висящий в вагоне поезда, идущего со скоростью 60 км/час, отклоняется на 6° от вертикали? Чему будет равно при этом натяжение нити, если вес грузика маятника равен 0,4 кг?

Указание. Применить естественные уравнения.

9. Балка длиною 3 м, заделанная одним концом в стену, загружена на конце телом веса 10 кг, статический прогиб равен 5 см. Во сколько раз увеличится частота колебаний груза на балке, если его передвинуть на середину балки, а свободный конец заделать в другую стену?

10. Пароход „Трансбалт“ имеет вес 21 500 т и площадь ватерлинии 2320 м^2 . Определить период собственных колебаний парохода в спокойной воде при начальном погружении его ниже ватерлинии, соответствующей равновесию сил веса и давления воды.

Указание. При малых осадках можно считать стенки парохода вблизи ватерлинии вертикальными и площадь ватерлинии постоянной.

11. Квадратный деревянный брусок длиною 1 м и шириною 5 см падает вертикально в воду с высоты 1 м, отсчитанной от поверхности воды до нижнего основания бруска. Пренебрегая ударом основания бруска о воду и сопротивлением воды, определить амплитуду и период колебаний бруска в воде.

12. Как изменится период колебания груза, висящего на двух одинаковых пружинах, если от последовательного соединения пружин перейти к параллельному их соединению?

13. В лифте весом 1 т находятся 4 пассажира по 70 кг каждый. Определить максимальное и минимальное натяжения троса, а также максимальное и минимальное давления пассажиров на пол кабинки лифта, если предельное ускорение и замедление лифта равно $\pm 0,3 g$.

Движение центра инерции системы.

Теорема о движении центра инерции, доказанная впервые для частных случаев Ньютоном, является одним из следствий дифференциальных уравнений динамики. Значение этой теоремы в том, что она дает возможность при заданных взаимодействиях рассматриваемой системы с другими системами точек и при *любых* взаимодействиях точек изучаемой системы между собою выяснить некоторые важные обстоятельства движения системы, именно получить уравнение движения ее центра инерции. Центр инерции системы отдельных точек, являющийся обобщением понятия центра тяжести твердого тела, представляет собою геометрическую точку, положение которой между точками системы вполне определяется их взаимными расстояниями и массами. В большинстве случаев определить движение центра инерции системы означает узнать много весьма существенного и о движении самой системы. Так, например, если мы определим движение центра инерции аэроплана в воздухе, то этим самым опишем движение аэроплана. Конечно это описание будет неполным, вопросы движения отдельных звеньев аэроплана, его вращательных движений вокруг центра инерции, задача о колебаниях и качке аэроплана и прочее остаются при этом в стороне, но все же многое о движении самолета в целом мы из теоремы о движении центра инерции узнаем. Но можно указать очень важный случай, когда теорема о движении центра инерции позволяет судить и о движении отдельных тел, входящих в систему. Это тот случай, когда система состоит всего только из двух тел или, если из всех тел, образующих систему, только два имеют главное значение, причем движение одного из них из каких-нибудь дополнительных соображений задается. Тогда теорема движения центра инерции определяет движение второго тела. Так, например, рассматривая движение поршневой машины на подвижном основании (паровоз), мы разбиваем всю систему на два тела: 1) основание со станиной машины, движение которого неизвестно, 2) поршень, совершающий заданное колебательное движение. Найдя движение центра инерции, мы определим и движение подвижного основания машины. Точно так же, если нам задано движение всех тел системы кроме одного, то по уравнению движения центра инерции можно судить о движении этого тела. Если нам заданы движения всех тел системы без исключения, то теорема движения центра инерции определяет силы, действующие на тела системы.

Основная особенность теоремы о движении центра инерции заключается в том, что в формулировку теоремы не входят силы взаимодействия между отдельными точками рассматриваемой системы, а только силы *внешнего* воздействия на систему. Именно, благодаря этой возможности отвлечься от целого ряда сил, теорема о движении центра инерции и дает ту сравнительно простую зависимость между движениями точек системы и внешними силами, которая составляет главную ценность теоремы. Правда, теорема

не дает возможность определять силы внутреннего взаимодействия между телами системы, но этот недостаток легко избегается дроблением системы на части, причем внутренние силы переходят в разряд внешних и мы получаем дополнительные интересные нас сведения и о внутренних силах.

Большинство примеров на применение теоремы о движении центра инерции в настоящем задании посвящены как раз случаю, когда движение всех тел задается и разыскиваются внешние силы (опорные реакции, натяжения болтов в креплениях и др.), приложенные к системе, или же движение одного тела является известным и, применяя теорему движения центра инерции под влиянием заданных внешних сил, мы находим его движение. По своему техническому характеру задачи связаны с вопросами о колебаниях неподвижных фундаментов и подвижных сооружений, на которых находятся машины с вращающимися и поступательно двигающимися телами. Все эти вопросы представляют в настоящее время колоссальный интерес и получили очень большое развитие. Мы, конечно, остановились на самых простейших задачах, которые приводят к несложным математическим расчетам. Более сложные расчеты будут нами приведены в третьей части курса в специальных заданиях, посвященных вопросам колебаний.

При проработке задания следует обратить внимание на некоторые общие физические выводы из теоремы движения центра инерции, составляющие предмет специального параграфа (§ 10), из них вытекают пути главнейших применений рассматриваемой теоремы. Примеры и упражнения дают количественные расчеты. Все примеры, приведенные нами в настоящем задании, крайне важны и имеют конкретный технический смысл. Учащийся должен без пропуска все эти примеры тщательно проделать и уже затем перейти к самостоятельной работе над задачами и вопросами, данными в конце для самопроверки.

§ 9. Внешние и внутренние силы. Центр инерции системы и его движение. Главный вектор внешних и внутренних сил.

В последнем примере § 8 предыдущего задания мы видели, что простым сложением дифференциальных уравнений движения системы можно получить очень простое уравнение (138), связывающее координаты тел, входящих в систему и не заключающее сил взаимодействия между этими телами, а только внешние силы, приложенные к нашим телам от тел, не входящих в систему. Мы предлагаем учащемуся еще раз просмотреть составление уравнения (138) из системы (129). К паровозу была приложена сила S , к вагонам—равная и противоположная сила (противодействие)— S , так что при сложении *пропала* сила S и осталось очень простое уравнение (138), которое после интегрирования дало ускоренное движение, определяемое уравнением (139). Сравнивая его с ускорением w движения, которое мы называли движением поезда в целом, потому что отдельные звенья поезда—паровоз и вагоны—имели движения,

мало отличающиеся от этого ускоренного движения, видим, что ур-ние (139) § 8 можно переписать так:

$$\frac{P_{\Pi} x_1 + P_{\text{В}} x_2}{P_{\Pi} + P_{\text{В}}} = \frac{F - R}{P_{\Pi} + P_{\text{В}}} \cdot \frac{gt^2}{2} + \frac{P_{\Pi}}{P_{\Pi} + P_{\text{В}}} \cdot l$$

Замечая, что левая часть есть не что иное, как абсцисса центра тяжести системы, состоящей из паровоза и вагонов, т. е. абсцисса центра тяжести поезда:

$$x_c = \frac{P_{\Pi} x_1 + P_{\text{В}} x_2}{P_{\Pi} + P_{\text{В}}},$$

найдем

$$x_c = \frac{wt^2}{2} + \frac{P_{\Pi}}{P_{\Pi} + P_{\text{В}}} \cdot l.$$

Иным словами, в результате сложения дифференциальных уравнений движения системы, мы нашли уравнение движения центра тяжести системы, что касается остальных уравнений, содержащих упругие силы и гармонические колебания, то они говорили нам о движениях отдельных тел по отношению к этому основному движению центра тяжести поезда. Оказалось, что главное значение имеет именно это ускоренное движение поезда в целом и в сущности очень незначительными были отклонения паровоза и вагонов от этого общего движения.

Точно также и в ряде других движений систем тел для нас является важным движение системы в целом или движение ее центра тяжести, а не взаимные движения тел, входящих в систему.

Является естественный вопрос, *нельзя ли судить о движении центра тяжести системы без выписывания всех дифференциальных уравнений движения отдельных точек системы и их интегрирования?*

Мы сейчас докажем, что такой вывод может быть всегда сделан и обобщим таким образом способ, примененный в рассмотренном примере, на случай любой системы точек.

Предположим, что у нас имеется система, состоящая из n точек M_i с массами m_i и вектор-радиусами r_i . Совокупность точек M_i ($i=1, 2, \dots, n$) будем рассматривать, как данную систему точек, все остальные тела, окружающие нашу систему, как *внешние* по отношению к нашей системе тела, т. е. просто, как тела, в нее не включенные. Такое разделение тел на входящие в систему и не входящие в нее конечно зависит от способа рассмотрения. Мы можем (и в дальнейшем будем так неоднократно поступать) в зависимости от разных причин то включать некоторые тела в рассматриваемую систему, то исключать из нее. Например можно рассматривать поезд, как систему паровоза, тендера и вагонов, при этом земля с рельсами, заградительные буфера на тупиках и др. будут внешними телами. Можно далее рассматривать систему паровоза и тендера, тогда вагоны представят уже внешние тела, наоборот паровоз с тендером является внешним телом по отношению к вагонному составу. Все силы, приложенные к данной

системе, разобьем на две категории: 1) *внутренние* силы, т. е. силы взаимодействия тел, входящих в данную систему, и 2) *внешние* силы, имеющие своим источником тела внешние по отношению к взятой системе, в нее не входящие.

Так, например, если рассматривать поезд как одну систему, то *внутренними* силами будут упругие силы, образующиеся в тягах и буферах, силы давления пара на поршни и на стенки цилиндров, давления груза на пол вагона и др.; *внешними* силами будут реакции рельсов, силы трения между колесами и рельсами (трения *в осях* будут *внутренними* силами!), сопротивление воздуха.

Обозначим равнодействующую всех внешних сил, приложенных к точке M_i , через F_i , а всех внутренних — F'_i , дифференциальные уравнения движения системы точек могут быть написаны так:

$$m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}'_i. \quad (1)$$

Повторяя прием, примененный в ранее упомянутом примере, просуммируем уравнения (1) по всем точкам системы:

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^n \mathbf{F}'_i. \quad (2)$$

Сумма, стоящая в левой части, может быть представлена так

$$\sum_{i=1}^n m_i \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i.$$

Введем в рассмотрение точку C , с вектор-радиусом:

$$\mathbf{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}, \quad (3)$$

и назовем ее *центром инерции* системы. Учащийся вспомнит, что формула, аналогичная (3), определяла в статике центр тяжести твердого тела, здесь же мы имеем образ более общий, но менее физически конкретный. В самом деле центром тяжести в статике называлась такая точка, в которой прикладывалась равнодействующая всех сил веса отдельных частичек, образующих тела; точка эта обладала тем свойством, что, если подпереть тяжелое тело как раз в ней, то тело останется в положении безразличного равновесия и не упадет. Про центр инерции в случае нескольких отдельных точек нельзя сказать того же. Он вовсе не представляет точку приложения равнодействующей сил веса отдельных точек, потому что вообще нельзя говорить о равнодействующей сил, приложенных к *разным* телам; центр инерции является точкой, определенной только *геометрически*; но, например, поло-

жение его и одного из двух тел системы всегда скажет нам о положении другого тела и т. д., так что центр инерции имеет очень большое практическое значение при изучении движения систем точек, мы в этом скоро на примерах убедимся.

Если обозначить массу всей системы через M , т. е. положить

$$M = \sum_{i=1}^n m_i, \quad (4)$$

то

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = M \mathbf{r}_c,$$

и левая часть уравнения (2) примет вид:

$$M \frac{d^2 \mathbf{r}_c}{dt^2}.$$

Обратимся к рассмотрению правой части. Геометрическую сумму внешних сил, приложенных к *различным* точкам системы, конечно, нельзя рассматривать, как *равнодействующую* этих сил, потому что понятие *равнодействующей* предполагает возможность замены ею сил, приложенных к системе, причем от этой замены не должно измениться состояние движения системы. Совершенно ясно, что от переноса сил с одних точек системы на другие движение системы становится другим. Например, рассматривая движущую силу паровоза и сопротивление вагонов, мы получили явление колебания поезда около среднего движения, взяв же „равнодействующую“ их и приложив ее только к паровозу или только к вагонному составу, мы имели бы совсем другие уравнения движения *отдельных* тел системы (но то же уравнение центра инерции).

Векторную сумму

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{R}$$

назовем *главным вектором* внешних сил. Этот вектор строится по обычному правилу векторного сложения, т. е. по правилу многоугольника, но не имеет того физического смысла как *равнодействующая*.

Точно так же, рассматривая *главный вектор внутренних сил*

$$\mathbf{R}' = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}'_i,$$

и строя его по правилу многоугольника, мы должны будем включить в многоугольник *все* силы взаимодействия тел, входящих в систему. Но каждому действию, приложенному к одной точке от другой, соответствует противодействие, приложенное ко второй точке от первой. При сложении этих действий и противодей-

ствий в один главный вектор мы должны будем их все перенести в одну точку и тогда они попарно уничтожатся, т. е.

$$R' \equiv 0.$$

Возвращаясь к ур-нию (2), можем теперь переписать его в виде:

$$\boxed{M\ddot{r}_c = R} \quad (5)$$

Уравнение это имеет вид уравнения движения одной точки с вектор-радиусом r_c , массой M и равнодействующей приложенных к ней сил R . Таким образом мы приходим к следующей важной теореме:

центр инерции системы движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса системы и к нему приложены все внешние силы.

Эта теорема называется, обыкновенно, *теоремой движения центра инерции* системы материальных точек.

Мы обращаем внимание учащегося прежде всего на следующий важный факт: внутренние силы не входят в содержание теоремы, т. е. *внутренние силы не влияют на движение центра инерции*; если система находилась в покое, то никакими *внутренними* силами мы не можем вывести из покоя центра инерции, т. е. вызванное внутренними силами движение будет происходить так, что центр инерции останется неподвижным. Точно так же, если центр инерции находился в каком-нибудь движении, то никакими внутренними силами мы не сможем изменить движение центра инерции. В следующем параграфе мы дадим иллюстрации этого положения, а сейчас остановимся на некоторых частных случаях.

1°. Главный вектор внешних сил равен нулю. В этом случае из уравнения (5) сразу следует:

$$r_c = at + b,$$

т. е. центр инерции находится или в покое ($a=0$) или движется прямолинейно и равномерно со скоростью a по прямой, проходящей через точку с вектор-радиусом b , причем направление этой прямой совпадает с направлением вектора скорости a . Существование покоя или движения определяется начальными условиями.

2°. Проекция главного вектора внешних сил на некоторое направление во все время движения равна нулю.

Пусть, например,, $R_x = 0$, тогда, проектируя основное ур-ние (5) на эту ось, будем иметь

$$\ddot{x}_c = 0,$$

т. е.

$$x_c = at + b = v_{ox}t + x_{c0};$$

это означает, что проекция центра инерции на ось X -ов неподвижна или движется равномерно.

3°. Проекции главного вектора на две взаимно-перпендикулярные оси равны нулю.

В этом случае, например, $R_x = R_y = 0$, т. е.

$$\ddot{x}_c = 0 \text{ и } \ddot{y}_c = 0.$$

Это значит, что только проекция на ось Z -ов может перемещаться ускоренно, остальные проекции или неподвижны, или движутся равномерно (в зависимости от начальных условий).

Перейдем к описанию некоторых явлений, легко объясняемых теоремой движения центра инерции.

§ 10. Иллюстрации применения теоремы движения центра инерции к описанию некоторых явлений.

Мы дадим в этом параграфе несколько качественных описаний некоторых простейших явлений, что касается количественных расчетов, то мы, как всегда, относим их к отделу примеров и упражнений, помещенному после настоящего параграфа.

а) Роль трения и сопротивления среды при движении тел. Обычно трение и вязкость среды принято рассматривать как *вредные* сопротивления, тормозящие движения, вызывающие потери энергии (об этом подробнее в третьей теме) и т. п. Остановим внимание учащегося на „полезности“ этих „вредных“ сопротивлений.

Рассмотрим сначала движение паровоза по рельсам. Какие силы приложены к паровозу? Во-первых, внутренние силы давления пара на поршни, передаваемые шатунами на ведущие колеса. Может ли паровоз двигаться благодаря внутренним силам? Нет, не может, так как только внешние силы могут заставить перемещаться его центр тяжести. Каковы же эти внешние силы? Прежде всего вес паровоза и реакции рельсов, затем сопротивление воздуха и сопротивление вагонного состава. Последние два сопротивления, очевидно, только тормозят движение паровоза вперед, так что двигательную силу ему они дать не могут. Сила веса по направлению вертикальна и, по предыдущему, горизонтального движения центра тяжести паровоза дать не может. Остается рассмотреть *реакции рельсов*.

Реакции эти можно разложить на направление перпендикулярное и параллельное рельсам. Первая составляющая вертикальна, и горизонтального ускорения, а следовательно, движения паровоза дать не может. Все дело, повидимому, в горизонтальной составляющей реакции, т. е. в силе *трения* между колесами и рельсами. Каково направление этих сил трения? Следует различать два рода колес у паровоза: *ведущие* и *бегущие*. Ведущие, это — те колеса, которые соединены с шатунами, приводящими их во вращение. Прикладывая силу к этим колесам, мы заставляем их вращаться, при этом они зацепляются за рельсы (рис. 24), отталкиваются от них вперед силой $F_{\text{вед}}$. Главный вектор всех

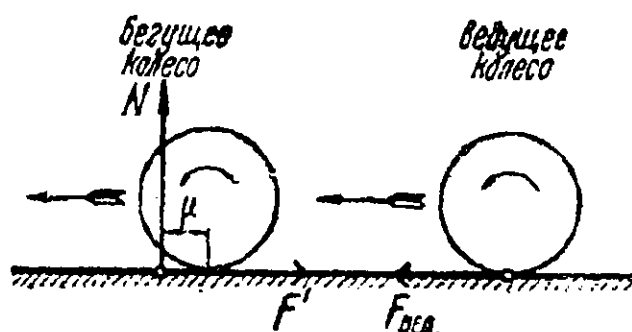


Рис. 24.

этих ведущих сил и дает двигательную силу паровозу, заставляет его центр инерции перемещаться по рельсам вперед. Что касается бегущих колес, то они свободно вращаются в подшипниках и никаких двигательных сил дать не могут, наоборот, они тормозят движение.

Предположим, что паровоз в начале движения стоял на месте. Пустив пар в цилиндры, мы приводим в движение ведущие колеса и при этом получаем двигательную силу за счет трения их о рельсы. Между колесом и рельсом развивается обычное трение скольжения, причем, если колесо скользит по рельсу, как это бывает в первый момент пуска в ход паровоза, то двигательная сила будет равна произведению коэффициента трения скольжения f на ту часть давления паровоза (веса его), которая приходится на оси ведущих колес— P_1 . Если же ведущие колеса не скользят, а катятся по рельсам, то можно только утверждать, что равнодействующая ведущих сил $\sum F_{\text{вед}}$ меньше $f \cdot P_1$ так как, при отсутствии скольжения, сила трения может иметь любое значение от нуля до максимального своего значения в момент начала скольжения.¹⁾

При условии

$$f \cdot P_1 > W,$$

где W обозначает полное сопротивление всего поезда, паровоз приведет в движение поезд, в противном случае ведущие колеса будут вращаться вхолостую, не приводя в движение поезд. При этом говорят, что паровоз буксует.

Сопротивление W складывается в основном из сил трения бегущих колес по рельсам, а эти силы трения при незаторможенных и хорошо смазанных осях сводятся к силам трения катания, главный момент которых можно принять равным

$$\mu Q,$$

где μ — коэффициент трения катания, а Q — полный вес поезда с паровозом, уменьшенный на P_1 (вес, приходящийся на ведущие оси). Разница в значениях f и μ и объясняет явление движения поезда. Хотя Q обычно в десять, а иногда и больше раз превосходит P_1 , но зато отношение коэффициента μ к радиусу, примерно, в 30—40 раз меньше чем f . За счет этой разницы и получается избыток сил, создающий ускорение в движении поезда. Подробнее о разнице между трением скольжения и катания мы расскажем в третьей теме.

Обстоятельства несколько меняются в дождливую, снежную и вообще сырую погоду. Коэффициент f от обычных значений 0,15—0,2 переходит к гораздо меньшим значениям, доходя до нескольких сотых, поэтому паровозу, при этих условиях, не хватает силы для приведения в движение поездного состава. Подсыпая песок из специальных песочниц, можно довести коэффициент трения f до 0,25.

¹⁾ Мы несколько упрощаем задачу, не различая коэффициента трения покоя от трения при движении.

Наоборот, желая затормозить поезд, мы тормозим бегущие колеса, заставляем их скользить по рельсам и, за счет появляющегося трения скольжения, при большом весе поездного состава получаем большую тормозящую силу.

Мы не останавливаемся на вопросе о роли трения при поднятии поезда по уклону. При больших уклонах сила $f \cdot P_1$ оказывается недостаточной ни при каких f . В этих случаях колеса паровоза делают зубчатыми, а рельсы в виде соответствующих реек (*кремальеры*). Сила трения заменяется давлением на зубцы. Такие зубчатые железные дороги устраивают в горных местностях для подъемов на крутые дороги.

Приведенные рассуждения конечно относятся не только к поезду, но и к трамваю и к автомобилю. Во всех этих случаях общим является разница между ролью бегущих и ведущих колес.

Перейдем теперь к таким движениям, где двигательная сила получается за счет второго типа вредных сопротивлений—сопротивления среды. Сюда относится парусное судно, пароход, аэроплан и др.

Очевидно, что пароход так же, как и паровоз, не мог бы привести себя в движение внутренними силами своей машины. Машина приводит во вращение винт, а последний уже благодаря давлению воды на вращающиеся лопасти винта приводит пароход в движение. Сопротивление воды корпусу парохода превосходило бы двигательную силу от винта, если бы винт двигался с той же скоростью по отношению к воде, что и корпус. Избыток силы получается за счет большего числа оборотов винта и закона пропорциональности силы сопротивления квадрату скорости, о котором уже была речь. К сожалению, при увеличении числа оборотов винта жидкость начинает настолько им увлекаться в совместное вращение, что увеличение двигательной силы перестает расти, между тем сопротивление движению корпуса растет с квадратом скорости парохода; вот почему пароходы не могут иметь больших скоростей движения (исключая кораблей особо обтекаемой формы, как, например, миноносцы, истребители; особенно интересны в этом отношении глиссеры).

Интересно отметить, что аэроплан получает свою подъемную силу не за счет давления на плоскость его крыльев набегающего потока, как это имеет место в несовершенных формах воздушных змеев (пластинка под углом к ветру), а за счет образования особых (циркуляционных) движений воздуха вокруг его крыльев, причем это движение образуется как раз благодаря наличию сил внутреннего трения в воздухе. В задачи конструктора входит подбор такой формы крыльев, чтобы, с одной стороны, крыло имело наименьшее сопротивление, а с другой—возможно наибольшую подъемную силу.

Перемещение аэроплана происходит за счет движущей силы пропеллера. Вращая пропеллер, внутренние силы мотора создают реакции воздуха движению пропеллера и за счет этих реакций аэроплан получает свое движение вперед.

В заключение отметим, что подобно паровозу и др. и человек не мог бы двигаться по гладкой плоскости. Только благодаря

силам трения подошв о пол мы получаем горизонтальную реакцию, переносящую центр инерции нашего тела в горизонтальном направлении. В гололедицу нам становится трудно ходить не только потому, что мы боимся упасть, но и потому, что двигательная сила значительно уменьшается. Вообще наша максимальная сила тяги равна весу человека на коэффициент трения подошв о пол. Если мы хотим получить большую двигательную силу, чтобы быстрее переходить от покоя к движению с большой скоростью, то принуждены на подметки приделывать шипы и даже острые гвозди, как это и делают обычно бегуны, ставящие рекорды на скорость.

б) Реактивные движения. Может ли человек, стоящий на совершенно гладком полу, привести себя внутренними силами в движение? Судя по предыдущему—нет! Но все же такой ответ будет опрометчивым. Ногами—действительно нет, но у него есть другой способ для этого. Если он снимет с себя пиджак и бросит в горизонтальном направлении, то при этом сам придет в движение в противоположном направлении. Действительно, *центр инерции системы должен остаться в прежнем положении*, но часть массы (пиджак) переместилась, следовательно и оставшаяся масса должна переместиться в противоположном направлении так, чтобы сумма произведений масс на абсциссы их осталась прежняя. Если бы пол был идеально гладок, человек пришел бы в движение и уже в дальнейшем, наоборот, не смог бы остановиться. Конечно, благодаря наличию хотя бы и небольшой силы трения, человек остановится, затормозив свое движение. Бросая предметы *в сторону своего движения*, человек может себя тормозить и без всякого трения.

На этом простом принципе, количественное оформление которого лучше рассматривать в следующем задании, где будет говориться о теореме количеств движения, основана идея *ракетного* движения, применяемого уже в настоящее время для земных движений (ракетный автомобиль) и развиваемая для межпланетных путешествий в будущем.

Снаряд выбрасывается с сравнительно большой скоростью и вылетает в верхние слои атмосферы, затем с него начинают производить выстрелы в сторону, противоположную его движению. Каждый такой выстрел выбрасывает с громадной скоростью часть массы и за счет реакций выстрелов снаряд получает новые и новые толчки к движению вперед. Подробнее мы рассмотрим это явление в следующем задании, где сможем рассчитать скорости движения такого снаряда.

В лаборатории механики Ленинградского Физико-механического института имеется следующий прибор Тёплера для демонстрации такого реактивного движения (рис. 25).

Массивный цилиндр прикреплен двумя вертикальными пружинами к раме и может кататься по рельсам, расположенным на платформе, которая в свою очередь опирается тщательно отполированной плоскостью на несколько шаров, катящихся почти без трения по гладкому отполированному столу. Если цилиндр притянуть нитью к одной из стоек рамы и визировать положение центра

инерции системы, то можно наблюдать, как после пережигания нити упругие силы пружин приведут цилиндр в колебание, причем рама будет двигаться в направлении, противоположном колебаниям цилиндра, *а центр инерции останется неподвижным.*

Упругие силы в данном случае являются внутренними силами и не могут изменить положения центра инерции. Вызванное упругими силами колебание должно было бы продолжаться сколь угодно долго, но силы трения, хотя и незначительные, а также и сопротивление воздуха, как внешние силы, заставляют в конце концов колебания затухнуть.

Реактивные движения можно постоянно наблюдать в повседневной жизни. Так, например, если перейти с одного конца лодки на другой, то лодка при этом передвинется в противоположном направлении. Если пренебречь малым сопротивлением воды при таком медленном движении, то легко подсчитать, насколько переместится лодка. Достаточно написать условие, что центр инерции системы, состоящей из лодки и человека, останется в прежнем положении — мы не будем здесь этого делать.

Человек, перемещаясь по дну лодки, прикладывает к ней горизонтальные реакции трения своих подошв о дно лодки; эти силы и перемещают лодку. Приходя в движение, человек ускоряется и ускоряет движение лодки, останавливаясь — замедляет свое движение и тем самым тормозит движение лодки. Таким образом движение это происходит за счет горизонтальных сил трения. Возможно ли было такое явление, если пол лодки был бы идеально гладок? Нет, потому что человек не смог бы по такому полу перемещаться.

Особенно интересны реактивные колебательные движения в фундаментах машин как неподвижных, так и подвижных (пароход, паровоз), им мы посвящаем следующий пункт.

в) Реактивные колебания в машинах с неподвижным и подвижным фундаментом. Рассмотрим обыкновенный стационарный поршневой двигатель (паровая машина, двигатель внутреннего сгорания). Если до пуска в ход он был неподвижен, то после пуска его центр инерции должен остаться неподвижен, так как появившиеся после пуска силы являются силами внутренними. Но при движении поршня (мы отвлекаемся от движений остальных частей машины) масса его перемещается взад и вперед по оси цилиндра (горизонтально в горизонтальных машинах, в вертикальных машинах — вертикально). Чтобы центр

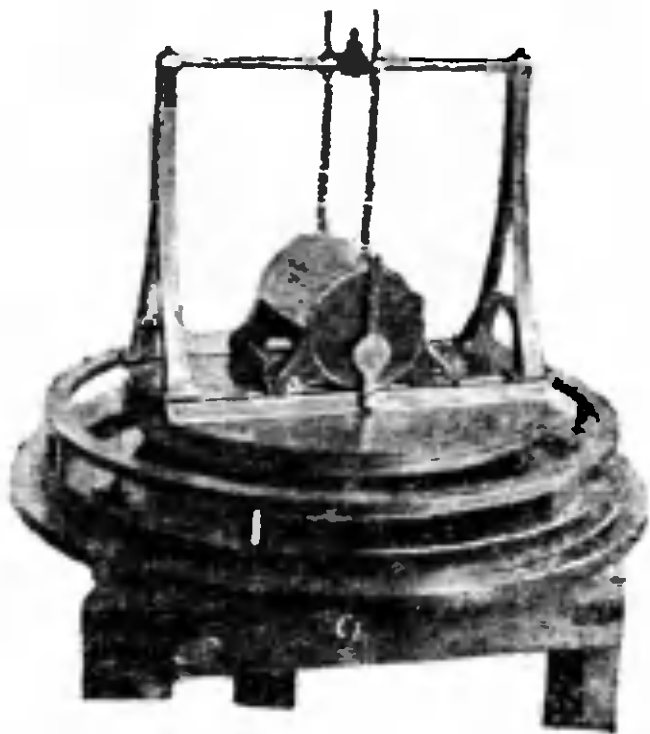


Рис. 25. Прибор Тёплера для демонстрации теоремы о движении центра тяжести. (Модель кабинета механики Лен. Физ.-мех. института).

инерции остался неподвижным, необходимо допустить противоположные колебания станины машины. Если бы станина была не закреплена, мы наблюдали бы ее движения в сторону, противоположную колебаниям поршня, причем ее перемещения были бы во столько раз меньшими, чем перемещения поршня, во сколько, примерно, масса поршня меньше массы станины. На самом деле машину жестко закрепляют на массивном фундаменте, который увеличивает массу станины и тем самым уменьшает амплитуду ее колебаний. Если бы фундамент был неподвижен, скажем, замурован в каменную породу очень больших размеров, то, практически, станина не имела бы колебаний. Так как фундамент сам лежит на упругом основании (земля в нижнем этаже, стропила — в верхних этажах здания завода), то он приходит в колебательное движение. Мы в дальнейшем к расчету этих колебаний неоднократно будем возвращаться.

Стесняя движения станины, фундамент прикладывает к ней внешние силы, действующие на болты, которыми обычно крепится станина к фундаменту. Находясь под переменной нагрузкой, эти болты обычно скоро изнашиваются, крепление разбалтывается и нуждается в постоянном ремонте. Тряска (вибрации) в машинах сильно отражается на ее работе, поэтому существует много методов для уменьшения ее; о них читатель узнает из дальнейших страниц курса.

Особенно ясно наблюдаются реактивные колебания в машинах без массивных фундаментов, например в автомобиле. Всякий из нас наблюдал, как при работе вхолостую неподвижный автомобиль трясется на рессорах. В хороших автомобилях движение поршней конструируется так, что общий их центр инерции при работе машины очень мало смещается. Для этого кривошипы располагаются под углами друг к другу так, что когда один поршень движется вниз — другой идет вверх, а так как цилиндров несколько, то можно в значительной степени уменьшить вибрацию кузова. Об этом мы расскажем подробно в задании, посвященном уравниванию поршневых двигателей (см. третью часть курса).

В непоршневых двигателях, например, электромоторах, не имеется поступательно-возвратно колеблющихся масс. В этих двигателях причина реактивных колебаний другая. Если центр инерции ротора (арматуры) не лежит на оси его вращения, то при вращении ротора центр инерции его, а следовательно, и всей системы как-то перемещается. Но вращение ротора производится внутренними силами, возникающими между ротором и статором, так что центр инерции должен был бы оставаться неподвижным, а для этого статор должен был бы сам двигаться, компенсируя движение ротора. Таким образом мы получили бы реактивные движения статора — колебания его за счет неуравновешенности ротора (недостаточная центровка ротора).

На самом деле явление более сложно. Электромотор закреплен на фундаменте (обычно на так называемых „салазках“), так что колебания его невозможны; уничтожение этих колебаний, в свою очередь, обуславливает переменную нагрузку на болты, которыми статор прикреплен к салазкам, а эти переменные реакции уже

вызывают колебания фундамента. Вибрацию электромоторов можно постоянно наблюдать в лабораториях, мастерских и т. п. Небольшие электромоторы обычно прямо крепятся к столу, кронштейну, стене; колебания статора передаются непосредственно на упругие тела, каковыми является доска стола, стержни кронштейна и др. — вся система приходит при этом в колебание.

Особенно интересен практически тот случай, когда *период обращения вала машины*, безразлично будет ли это поршневой двигатель, электромотор или другой тип машины, *совпадет с периодом колебаний упругой системы* (стол, кронштейн, фундамент, стропила и др.), на которой машина закреплена. В этом случае машина колеблет свой фундамент, в особо удачных условиях *попадая все время в такт колебаниям фундамента*, при этом она раскачивает фундамент до довольно значительной амплитуды, зависящей от разных других условий (вес фундамента, период колебаний и др.).

Это явление носит название *резонанса* и будет нами подробно изучено. Отметим здесь, что резонанс недопустим в машинах по двум причинам: 1) раскачивая фундамент, машина тратит на это непроизводительно энергию; об этом мы расскажем в одном из следующих упражнений и 2) машина может настолько сильно раскачать фундамент, что в некоторых случаях (электромотор на кронштейне, станок на балках полового настила) дело дойдет до катастрофы. Кроме того, излишняя тряска недопустима и с точки зрения правильности работы других машин и контрольно-измерительных приборов, расположенных вблизи резонирующей машины, и с точки зрения гигиены труда в связи с вредным влиянием колебаний на организм человека. Поэтому выявление резонанса предварительным расчетом и уничтожение его представляют важные задачи машинной техники. Мы сейчас переходим к расчетам реактивных колебаний в машинах и их фундаментах; более сложные расчеты с принятием в расчет крутильных колебаний валов и др. учащийся найдет в последующих заданиях.

Примеры и упражнения.

1. Колебания статора электромотора и влияние их на опорные реакции салазок. Предположим сначала, что электромотор, статор которого весит P кг, а ротор — p кг (рис. 26, а), может свободно скользить по салазкам в горизонтальном направлении, т. е. что он еще не прикреплен болтами к салазкам. Пусть ось вращения проходит через центр тяжести статора, а центр тяжести ротора отстоит от оси вращения на малое расстояние r см (эксцентриситет ротора). Пренебрегая силами трения между мотором и салазками, можем считать реакцию салазок N вертикальной. Координаты центра инерции G системы, состоящей из статора и ротора, будут:

$$x_G = \frac{Px_1 + px_c}{P + p}, \quad y_G = \frac{Py_1 + py_c}{P + p} = \frac{P}{P + p} y_c, \quad (6)$$

где x_1 и y_1 (мы считаем, что статор все время двигается по салазкам, т. е. $y_1 = 0$) — координаты центра тяжести статора O_1 (рис. 26, б),

а x_c и y_c — координаты центра тяжести ротора C , причем все координаты берутся по отношению к системе координат, связанной с неподвижным фундаментом, $X O Y$.

Внешними силами, приложенными к системе, будут: вес статора P , вес ротора p и опорная реакция салазок N .

Напишем дифференциальные уравнения движения центра инерции:

$$\frac{P+p}{g} \ddot{x}_G = 0, \quad \frac{P+p}{g} \ddot{y}_G = N - P - p. \quad (7)$$

Если обозначить через ω угловую скорость ротора, то координаты центра тяжести ротора будут:

$$\left. \begin{aligned} x_c &= x_1 + r \cdot \cos \varphi = x_1 + r \cdot \cos \omega t, \\ y_c &= r \cdot \sin \varphi = r \cdot \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

подставляя эти значения в дифференциальные уравнения центра инерции (7) и пользуясь (6), найдем:

$$\left. \begin{aligned} P\ddot{x}_1 + p\ddot{x}_1 - pr\omega^2 \cos \omega t &= 0 \\ -\frac{pr\omega^2}{g} \sin \omega t &= N - P - p. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

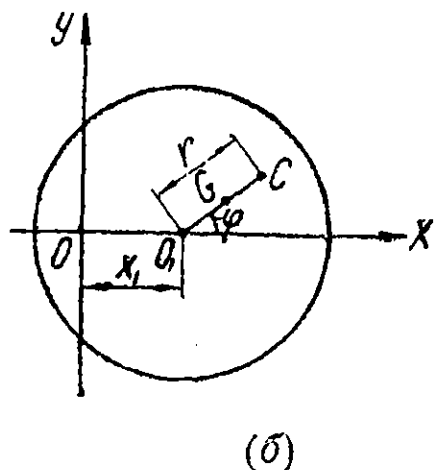
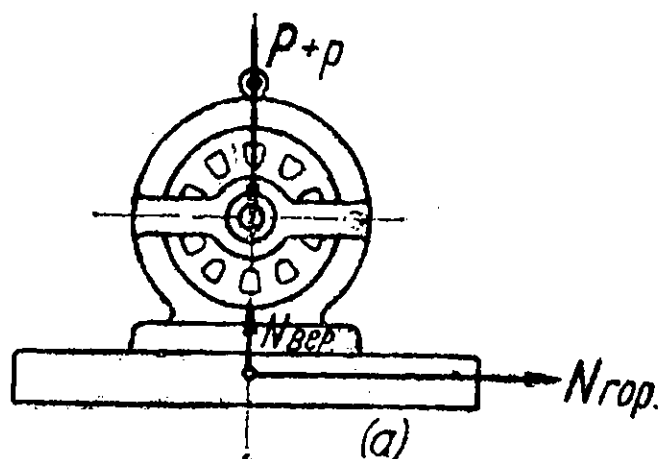


Рис. 26.

Из первого уравнения можно найти уравнение движения статора, из второго — переменное давление мотора на салазки. Для этого проинтегрируем первое равенство, переписанное в виде:

$$\ddot{x}_1 = \frac{p}{P+p} r \omega^2 \cos \omega t,$$

будем иметь:

$$\dot{x}_1 = \frac{p}{P+p} r \omega \sin \omega t + C_1,$$

$$x_1 = -\frac{p}{P+p} r \cos \omega t + C_1 t + C_2.$$

Замечая, что в начальный момент, до пуска в ход, статор был неподвижен, т. е. что при $t=0$, $\dot{x}_1=0$, найдем $C_1=0$, далее,

помещая начало координат O в начальное положение центра инерции системы G при $\varphi = 0$, будем иметь

$$C_2 = x_{10} + \frac{p}{P+p} r = \frac{Px_{10} + p(x_{10} + r)}{P+p} = x_{G0} = 0.$$

Таким образом окончательно получим уравнение реактивных колебаний статора на салазках:

$$x_1 = -\frac{p}{P+p} r \cos \omega t. \quad (10)$$

Мы видим, что это — гармонические колебания с амплитудой:

$$a = \frac{p}{P+p} r, \quad (11)$$

и частотой, как раз равной угловой скорости вращения ротора. Период этих колебаний равен времени оборота ротора.

Из второго равенства (9) находим

$$N = P + p - p \frac{r \omega^2}{g} \sin \omega t. \quad (12)$$

Мы предполагали, что вес статора настолько велик, что статор не подпрыгивает на салазках, т. е. что $N > 0$; если бы мы не делали этого предположения, то следовало наряду с x_1 ввести в рассмотрение и y_1 . Вычислим максимальные и минимальные значения опорной реакции:

$$\left. \begin{aligned} N_{\max} &= P + p \left(1 + \frac{r \omega^2}{g} \right) \\ N_{\min} &= P + p \left(1 - \frac{r \omega^2}{g} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Условие отсутствия вертикального движения статора будет иметь вид:

$$P + p \left(1 - \frac{r \omega^2}{g} \right) > 0,$$

т. е. при данных весах статора и ротора и эксцентриситете r , угловая скорость должна удовлетворять условию:

$$\omega^2 < \frac{P+p}{pr} \cdot g. \quad (14)$$

При невыполнении этого условия, т. е. при достаточно больших угловых скоростях, статор придет в вертикальное движение, подпрыгивая над салазками.

Под влиянием вертикальных внешних сил центр инерции может иметь только вертикальное движение, так что точка G двигается по вертикали, а O_1 — по горизонтали, при этом, как мы знаем из Кинематики, точка C будет описывать эллипс с полуосями: $\overline{O_1 C} = r$ и $\overline{C_1 C} = r \frac{p}{P+p}$. Закрепим теперь электромотор болтами на салаз-

ках и обозначим горизонтальную реакцию болтов $N_{\text{гор.}}$, а вертикальную — $N_{\text{вер.}}$. Помещая начало координат в центр тяжести статора, будем иметь $x_1 = 0, y_1 = 0$ так что

$$x_G = \frac{px_c}{P+p}, \quad y_G = \frac{py_c}{P+p}. \quad (15)$$

Дифференциальные уравнения движения будут иметь вид:

$$\frac{P+p}{g} \ddot{x}_G = N_{\text{гор.}}, \quad \frac{P+p}{g} \ddot{y}_G = N_{\text{вер.}} - P - p. \quad (16)$$

Из этих уравнений находим реакции:

$$\left. \begin{aligned} N_{\text{гор.}} &= \frac{p}{g} \ddot{x}_c = -\frac{p}{g} r \omega^2 \cos \omega t \\ N_{\text{вер.}} &= P + p - \frac{p}{g} r \omega^2 \sin \omega t \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Мы видим, что вертикальная реакция остается та же, а за счет уничтожения горизонтальных колебаний появляется горизонтальная реакция болтов. Реакция эта переменна по величине и направлению, максимальное ее значение:

$$N_{\text{гор.}}^{(\max)} = \frac{p}{g} r \omega^2,$$

численная величина горизонтальной реакции колеблется в пределах от 0 до $\frac{p}{g} r \omega^2$, проекция ее на ось X от $-\frac{p}{g} r \omega^2$ до $+\frac{p}{g} r \omega^2$.

Рассматривая равенства (17) видим, что движение ротора происходит так, как будто кроме сил веса к нему приложена еще дополнительная сила, имеющая величину $\frac{p}{g} r \omega^2$ и направленная от оси вращения по направлению к центру тяжести. Это так называемая центробежная сила, равная по величине произведению массы ротора на его центростремительное ускорение. Об этой силе мы будем говорить в третьей части курса.

Дадим численный расчет. Если маленькому электромотору весом 2 кг без ротора и 2,2 кг с ротором, имеющим эксцентриситет 5 мм (на ось насажен дополнительный грузик) дать 2000 об/мин, то вертикальное давление будет равно:

$$N_{\text{вер.}} = 2,2 - \frac{0,2}{981} 0,5 \cdot 200^2 \sin 200 t \approx 2,2 - 4 \sin 200 t,$$

т. е. колеблется в пределах $+6,2$ кг и $-1,8$ кг. Наш моторчик, если его не прикрепить к столу, будет подпрыгивать над столом.

В больших моторах с хорошо уцентрированными роторами эксцентриситет очень мал, обороты обычно не велики (до 1000 об/мин), отношение веса ротора к статору мало, все же при

работе мотора можно заметить вибрации, возбуждаемые неуравновешенностью ротора.

2. Поршневой двигатель на подвижном фундаменте. Предположим, например, что на корабле укреплен горизонтальный поршневой двигатель, причем сначала для простоты возьмем случай одноцилиндрового двигателя. Обозначая вес корабля вместе со стационарной частью двигателя — P , а вес поршня — p , и считая, что центр инерции корабля движется равномерно со скоростью V (сила тяги винта уравнивается сопротивлением воды и воздуха), напомним дифференциальное уравнение движения центра инерции корабля в проекции на горизонтальную

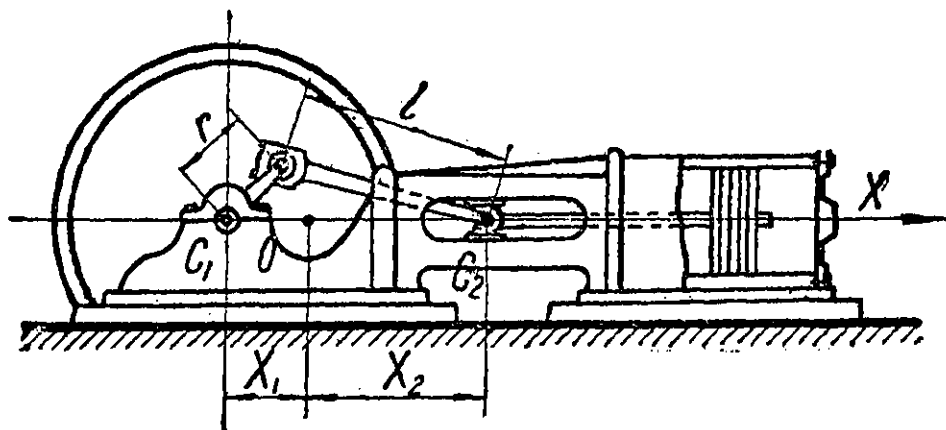


Рис. 27.

ось OX , перемещающуюся равномерно со скоростью V вместе с центром инерции корабля ¹⁾:

$$\frac{P+p}{g} \ddot{x} = 0 \text{ или } \ddot{x} = 0. \quad (18)$$

Но координату x центра инерции можно написать еще в виде:

$$x = \frac{Px_1 + px_2}{P+p},$$

где (рис. 27) x_1 обозначает абсциссу центра тяжести G_1 корабля, для простоты помещенного в центр вала, а x_2 — абсциссу центра тяжести поршня, уменьшенную на длину штока, таким образом будем иметь

$$Px_1 + px_2 = 0. \quad (19)$$

В курсе Кинематики было выведено приближенное уравнение колебаний поршня при равномерном вращении вала с угловой скоростью ω . При расположении, указанном на чертеже, будем иметь

$$-x_1 + x_2 = l \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4} + \epsilon \cos \omega t + \frac{\epsilon^2}{4} \cos 2\omega t \right), \quad (20)$$

где ϵ есть отношение длины кривошипа к длине шатуна. Подставляя значение x_2 из ур-ния (20) в ур-ние (19), найдем

$$Px_1 = -px_2 = -px_1 - pl \left(1 - \frac{\epsilon^2}{4} + \epsilon \cos \omega t + \frac{\epsilon^2}{4} \cos 2\omega t \right),$$

¹⁾ Это, как мы знаем, Галилеева система, т. е. по отношению к ней все выводы динамики таковы же, как и по отношению к неподвижной системе.

или

$$x_1 = -\frac{p}{P+p} l \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \varepsilon \cos \omega t + \frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2 \omega t \right). \quad (21)$$

Мы видим, что корпус корабля, двигаясь вместе с центром инерции со скоростью V , совершает сложные гармонические колебания около этого равномерного движения. Если пренебречь членом с ε^2 , то это колебание будет простым гармоническим с амплитудой

$$a = \frac{p}{P+p} r.$$

Амплитуда, как мы видим, та же, что и в случае предыдущего упражнения.

Рассмотрим теперь случай двухцилиндрового двигателя, например на паровозе. Здесь мы имеем два кривошипных механизма, приводящих в движение одну и ту же ось O_1 , причем кривошипы OA_1 и OA_2 образуют постоянный угол, обыкновенно равный 90° (рис. 28). В этом случае поршни имеют одинаковый (благодаря равенству длин кривошипов), но сдвинутый по фазе ход, причем сдвиг как раз равен 90° . Произведем расчет продольных, горизонтальных колебаний паровоза.

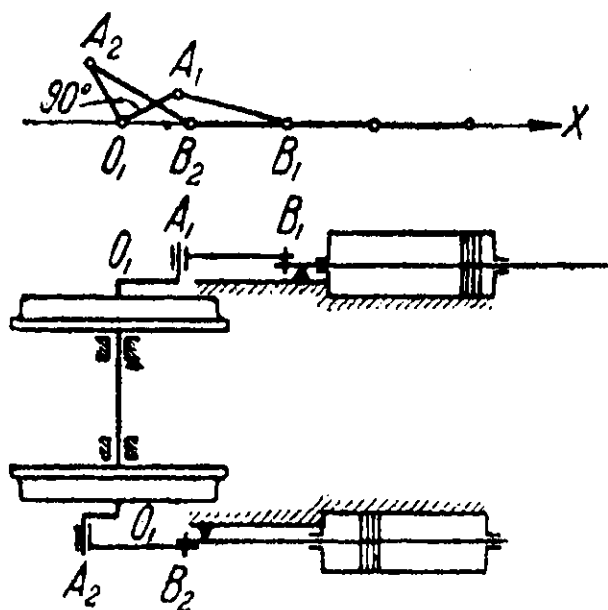


Рис. 28.

Если вес паровоза P , вес поршней p , то, помещая начало координат в центр инерции O системы, состоящей из паровоза и двух поршней, будем иметь на основании теоремы движения центра инерции, в случае равномерного хода паровоза:

$$\frac{Px_{\Pi} + p(x_1 + x_2)}{P + p} = 0, \quad (22)$$

где x_{Π} обозначает абсциссу центра тяжести паровоза без поршней, x_1 и x_2 — абсциссы поршней. Заметим, что центр тяжести паровоза не лежит на одной вертикали с осью O_1 , но абсцисса его отличается от абсциссы точки O_1 на какую-то *постоянную*, определяющую горизонтальное расстояние центра тяжести от оси O_1 . Как и в только что разобранном примере имеем

$$-x_{\Pi} + x_1 = l \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \varepsilon \cos \omega t + \frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2 \omega t \right), \quad (23)$$

что касается второго поршня, то для него напомним аналогичное уравнение, заменив ωt на $\omega t + \frac{\pi}{2}$, т. е.

$$-x_{\Pi} + x_2 = l \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} - \varepsilon \sin \omega t - \frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2 \omega t \right). \quad (24)$$

Отсюда находим x_1 и x_2 :

$$x_1 = x_{II} + l \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \varepsilon \cos \omega t + \frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2 \omega t \right)$$

$$x_2 = x_{II} + l \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} - \varepsilon \sin \omega t - \frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2 \omega t \right),$$

подставляя эти значения в основное уравнение (22), найдем

$$(P + 2p) x_{II} + 2pl \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} \right) + pl \varepsilon (\cos \omega t - \sin \omega t) = 0.$$

Отсюда

$$x_{II} = -\frac{pr\sqrt{2}}{P + 2p} \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right) + \text{const.} \quad (25)$$

Итак, мы получаем горизонтальные колебания паровоза с амплитудой

$$a = \frac{pr\sqrt{2}}{P + 2p}$$

и частотой, равной угловой скорости оси ведущего колеса. Эти продольные колебания носят название *поддергиваний*. Интересно отметить, что амплитуда поддергиваний не зависит от угловой скорости колес, т. е. вообще от скорости паровоза, а только от хода поршней и соотношения весов поршней и паровоза. Кроме того отметим, что при сдвиге кривошипов на $\frac{\pi}{2}$ у нас при сложении x_1 и x_2 пропал член с $\cos 2\omega t$, т. е. с точностью до высших степеней, чем вторая степень, поддергивания при сдвиге на $\frac{\pi}{2}$ дают гармоническое колебание.

Полагая следующие численные величины:

$$r = 300 \text{ мм}, \quad P = 70 \text{ т}, \quad p = 0,07 \text{ т},$$

найдем

$$a = 0,4 \text{ мм}.$$

Указанным путем можно подсчитать и колебания, вызываемые реактивным движением и в многоцилиндровых моторах автомобильного и авиационного типа. Отсылаем интересующихся к специальным курсам регулирования машин.

Для уменьшения поддергиваний на колеса паровоза прикрепляют противовесы, т. е. такие грузы, которые при вращении оси давали бы эффект, подобный описанному в предыдущем упражнении с электромотором. Грузы эти располагают таким образом, чтобы при вращении они компенсировали отклонение центра O_1 от центра инерции O . Об этом подробнее мы будем говорить в третьей части курса.

3. Реактивные колебания упругих фундаментов. До сих пор мы предполагали, что станина машины или жестко закреплена или наоборот свободно двигается в известном напра-

влении: теперь мы усложним этот вопрос, считая двигатель расположенным на упругом основании.

Желая конкретизировать задачу, рассмотрим электромотор на упругой балке (стропила полового настила и т. п.), заделанной двумя концами A и B в неподвижную стену (рис. 29). Обозначим, как и в первом упражнении, вес статора через P , вес ротора — через p , эксцентриситет ротора — через r , а угол поворота его $\varphi = \omega t$. Тогда, останавливаясь на *вертикальных* колебаниях электромотора и пренебрегая горизонтальными, будем иметь в качестве внешних сил: 1) вес P , 2) вес p и 3) упругую реакцию балки N , пропорциональную прогибу ее. Поместим начало координат в положение центра тяжести статора при равновесии неподвижного мотора, причем будем опять считать, что центр тяжести статора лежит на оси вращения ротора (в тех случаях, когда это заведомо

не так, прибавится постоянное слагаемое).

Обозначая ординату центра тяжести статора y_1 , а ротора y_2 , будем иметь следующее дифференциальное уравнение движения центра инерции системы G (массой балки мы пренебрегаем):

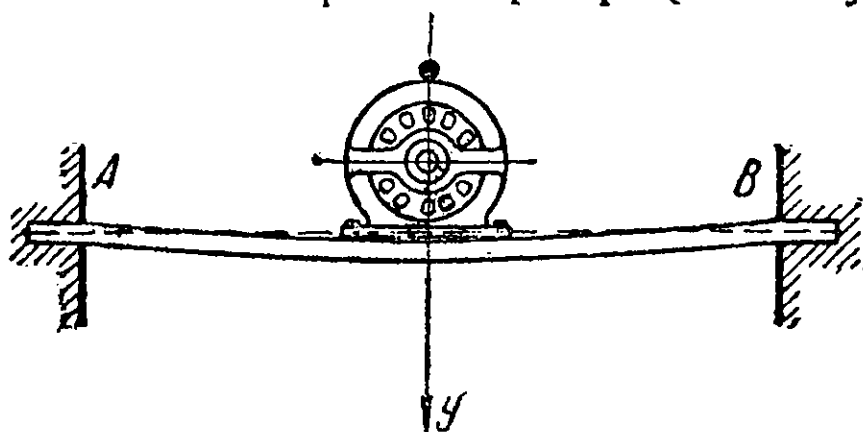


Рис. 29.

$$\frac{P+p}{g} \ddot{y}_G = P + p - c(y_1 + \delta_{st}), \quad (26)$$

где коэффициент упругости c балки по предыдущему равен:

$$c = \frac{\text{стат. нагрузка}}{\text{стат. прогиб}} = \frac{P+p}{\delta_{st}}, \quad (27)$$

причем для балки, заделанной двумя концами:

$$\delta_{st} = \frac{1}{192} \frac{(P+p) l^3}{EJ}, \quad (28)$$

так что

$$c = \frac{192 EJ}{l^3}. \quad (29)$$

Заменяя в уравнении (26)

$$y_G = \frac{Py_1 + py_2}{P+p},$$

а кроме того (подобно упражнению 1 настоящего задания), полагая

$$y_2 = y_1 + r \cos \omega t,$$

получим уравнение колебаний статора в такой форме:

$$\frac{P+p}{g} \cdot \frac{P\ddot{y}_2 + p(\ddot{y}_1 - r\omega^2 \cos \omega t)}{P+p} = P + p - cy_1 - c \cdot \frac{P+p}{c},$$

откуда, после простых сокращений:

$$\ddot{y}_1 = -\frac{cg}{P+p} y_1 + \frac{p}{P+p} r \omega^2 \cos \omega t. \quad (30)$$

Введем обозначения:

$$\frac{cg}{P+p} = v^2, \quad \frac{p}{P+p} r \omega^2 = h, \quad (31)$$

где v есть не что иное, как частота собственных колебаний электромотора на балке, т. е. частота тех колебаний, которые произойдут, если электромотор вывести из положения равновесия и предоставить колебаться.

Наше ур-ние (30) приводится к виду:

$$\ddot{y}_1 = -v^2 y_1 + h \cos \omega t. \quad (32)$$

Оно напоминает нам обычное уравнение гармонических колебаний, которое мы разобрали в 1-м задании, только здесь имеется еще член $h \cos \omega t$, содержащий явно время и играющий роль силы, зависящей от времени (сила эта отнесена к единице массы).

Ур-ние (32) можно привести к рассмотренному уже типу, если сделать подстановку, введя новое переменное η :

$$y_1 = \eta + A \cos \omega t, \quad (33)$$

и попытаться так подобрать A , чтобы член с $\cos \omega t$ пропал. Производя эту подстановку в ур-ние (32), будем иметь следующее равенство:

$$\ddot{\eta} - A \omega^2 \cos \omega t = -v^2 \eta - v^2 A \cos \omega t + h \cos \omega t,$$

или

$$\ddot{\eta} = -v^2 \eta + [A (\omega^2 - v^2) + h] \cos \omega t. \quad (34)$$

Подберем теперь A так, чтобы квадратная скобка обратилась в нуль. Для этого нужно положить $\omega \neq v$ и

$$A = \frac{h}{v^2 - \omega^2}. \quad (35)$$

Случай $\omega = v$ мы выделим особо и о нем скажем в дальнейшем.

Итак, в предположении, что $\omega \neq v$, имеем

$$\ddot{\eta} = -v^2 \eta. \quad (36)$$

Это — уравнение гармонического колебания и решение его имеет вид:

$$\eta = a \sin(vt + \alpha). \quad (37)$$

Подставляя в (33) найдем y_1 :

$$y_1 = a \sin(vt + \alpha) + \frac{h}{v^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (38)$$

Мы видим, что результат интегрирования уравнения (32) складывается из двух гармонических колебаний: 1) $a \sin(vt + \alpha)$, с ча-

стотой собственных колебаний и 2) $\frac{h}{\sqrt{2} - \omega^2} \cos \omega t$ с частотой, равной угловой скорости вращения ротора.

Наблюдение показывает, что при $\omega \neq h$ статор приходит в колебательное движение с частотой ω , т. е. что первый член в предыдущей сумме при ω не слишком близких к ν , не играет роли. Мы покажем это впоследствии и теоретически, теперь же поясним, что колебания с частотой ν , при наличии сил трения в самой балке и сопротивления среды (воздуха), быстро затухают и теряют значение по сравнению со вторым слагаемым.

Второе, остающееся на рассмотрение, колебание имеет частоту ω , определяемую вращением ротора, вынуждающего реактивные колебания, поэтому это колебание называется *вынужденным колебанием*, член $h \cos \omega t$ в ур-нии (32) соответствует *вынуждающей силе*. Характерно, что это колебание совершенно *не зависит от начальных условий движения*, а только от весов колеблющихся тел, эксцентриситета и частот колебаний собственных и вынужденных. Начальные условия, как мы уже раньше видели, определяют постоянные интегрирования a и α , входящие в собственное колебание, которое затухает. Если бы первое слагаемое не затухало и имело значение, то режим колебаний мотора зависел бы от условий пуска, между тем физически ясно, что колебания мотора не могут зависеть от начального угла поворота ротора и других начальных условий.

Таким образом, для определения *вынужденных колебаний* мы имеем простой практический прием. Нужно составить общее дифференциальное уравнение и затем подобрать решение его в виде *той же* гармонической функции, что и стоящая в правой части, с неопределенным коэффициентом, который определяется из того условия, что при подстановке этого решения уравнение превращается в тождество.

Это решение, не зависящее от начальных условий движения, называется *частным* решением уравнения. Поясним метод численным примером.

Пусть в разбираемом нами примере с электромотором

$$P = 100 \text{ кг}, p = 4 \text{ кг}, r = 0,5 \text{ мм}, \omega = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2\pi \cdot 1500}{60} = 50\pi \frac{1}{\text{сек.}}$$

$$\delta_{st} = 5 \text{ мм},$$

тогда $c = 21 \text{ кг/мм}$.

Составляем дифференциальное ур-ние (32) колебаний статора при заданных числовых величинах:

$$\ddot{y}_1 = -1980 y_1 + 481 \cos 50\pi t. \quad (39)$$

Прежде чем составлять частное решение, сравним частоту собственных колебаний: $\nu = \sqrt{1980} = 44 \frac{1}{\text{сек.}}$ и частоту вынуждающей силы: $\omega = 50\pi \approx 157$. Мы видим, что они значительно друг от друга разнятся, так что можно применять вышеуказанный метод. Положим

$$y_1 = A \cos 50\pi t,$$

и для определения постоянной A , подставив значение y_1 в уравнение (39), будем иметь:

$$-A 2500 \pi^2 \cos 50 \pi t = -1980 A \cos 50 \pi t - 481 \cos 50 \pi t,$$

отсюда, сокращая по $\cos 50 \pi t$ в обеих частях уравнения, найдем

$$A \approx 0,02 \text{ мм},$$

т. е. вынужденные колебания дают совершенно почти незаметную дрожь (вибрацию) статора на упругой балке:

$$y_1 = -0,02 \cos 50 \pi t \text{ мм}.$$

Посмотрим еще раз вычисления и выясним, за счет чего амплитуда вынужденных колебаний оказалась так мала: конечно потому, что число 481 нам пришлось делить на разность (25000—1980), в которой уменьшаемое примерно в 13 раз больше вычитаемого. Что было бы, если угловая скорость мотора была бы меньше, так чтобы ω^2 было близко к $\nu^2 = 1980$? Возьмем например число оборотов ротора $n = 450$ об/мин, при этом $\omega = 15\pi \frac{1}{\text{сек}}$. Дифферен-

циальное уравнение примет вид:

$$\ddot{y}_1 = -1980 y_1 + 43,3 \cos 15 \pi t,$$

ищем опять частное решение вида $y_1 = A \cos 15 \pi t$; после простых выкладок найдем

$$A = 0,16 \text{ мм};$$

т. е. почти в 8 раз большую амплитуду.

Из разобранных примеров видно, что значение $\omega = \nu$ является особенным значением угловой скорости; при приближении ω к этому значению амплитуды вынужденных колебаний значительно возрастают, однако не нужно думать, что при $\omega = \nu$ мы имеем бесконечно большую амплитуду, как об этом можно было бы судить по равенству (35). Нужно вспомнить, что предыдущий вывод был сделан в предположении $\omega \neq \nu$. Не вдаваясь в математическое исследование—оно не имеет большого физического значения—укажем, что:

1. При приближении ω к ν , в случае отсутствия вредных сопротивлений, начинают играть роль собственные колебания статора на балке и, в результате сложения этих колебаний, получаются расходящиеся колебания типа:

$$y_1 = At \sin \nu t,$$

мы их рассмотрели в кинематике.

2. Благодаря неизбежному наличию вредных сопротивлений (трение, сопротивление среды) вынужденные колебания не безгранично увеличивают свою амплитуду; при приближении ω к ν оказывается, что при ω , близких к ν , устанавливаются режимы колебаний со сравнительно большими амплитудами. Величина этой амплитуды зависит от закона сопротивления (постоянная сила трения, сопротивление среды, пропорциональное первой степени скорости, сопротивление, пропорциональное второй степени скорости и др.).

Простому количественному подсчету поддается лишь случай сопро-
тивления, пропорционального первой степени скорости. Мы не бу-
дем на нем сейчас останавливаться, отсылая читателя к специаль-
ным вопросам теории колебаний, изложенным в третьей части
куса.

Во всяком случае мы можем констатировать сейчас следующий
результат: *при совпадении частоты вынуждающей силы с частотой
собственных колебаний системы получаются вынужденные
колебания со сравнительно большой амплитудой.*

Это явление носит название *резонанса*.

Не останавливаясь в подробностях на роли и значении резонанса
в различных областях техники (теория машин, фундаментов, соору-
жений и др., а также измерительных приборов), — обо всем этом
мы расскажем в третьей части курса, — заметим, что в рассматри-
ваемом нами случае мотора на упругом фундаменте *резонанс вреден*
по следующим соображениям:

1) при большой амплитуде колебаний и фундамент и сам мотор
сильно изнашиваются и могут довести даже до катастрофы (раз-
рушение креплений балки в стене, остаточные прогибы балки, по-
ломка ее);

2) при резонансе часть энергии, сообщаемой мотору, уходит на
тряску фундамента и, при больших амплитудах, эта энергия стано-
вится значительной частью всей энергии, получаемой мотором.
*Коэффициент полезного действия мотора (точно так же, как и
всякого двигателя), попавшего в резонанс со своим фундаментом,
сильно уменьшается.*

Вот почему угловую скорость мотора, равную частоте собствен-
ных колебаний мотора на фундаменте, называют *критической ско-
ростью мотора* и обозначают

$$\omega_{кр} = \nu.$$

Желая поместить данный мотор на упругое основание, мы должны
заранее обеспокоиться, чтобы

$$\omega \neq \omega_{кр},$$

и было бы от него по возможности далеко. Вспоминая формулы (31)
и (27), находим:

$$\omega_{кр} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{ст}}} = \frac{31,3}{\sqrt{\delta_{ст}}} \frac{1}{\text{сек.}}, \quad (40)$$

если $\delta_{ст}$ выражено в см.

Критическое число оборотов ротора в минуту будет с большой
точностью равно:

$$n_{кр} = \frac{300}{\sqrt{\delta_{ст}}} \text{ об/мин.}, \quad (41)$$

если $\delta_{ст}$ выражено в см.

Совпадения числа оборотов мотора с $n_{кр}$ можно избежать путем
соответствующего подбора длины стропильных балок, материала и
сечения, согласно формуле (29). Дадим численный пример.

Мотор весом 30 кг (вместе с ротором) делает 1500 об/мин и должен быть укреплен на корытном железном кронштейне, заделанном одним концом в стену (рис. 30). Выбрать длину корыта и поперечное сечение его.

Рассматривая кронштейн как балку, закрепленную одним концом, находим (см. курс Сопротивления материалов):

$$\delta_{st} = \frac{P}{EJ} \cdot \frac{l^3}{3}.$$

Модуль примем равным 2000 000 кг/см², корыто выберем (профиль № 20, норм. метр. сортам.) высотой $h = 20$ см, шириной $b = 7,5$ см, с толщиной стенки $d = 0,85$ см и толщиной полки $t = 1,25$ см; для такого корыта $I = 159,2$ см⁴ и, следовательно:

$$\delta_{st} = \frac{30 \cdot l^3}{2 \cdot 10^6 \cdot 160 \cdot 3} = 3 \cdot 10^{-8} l^3.$$

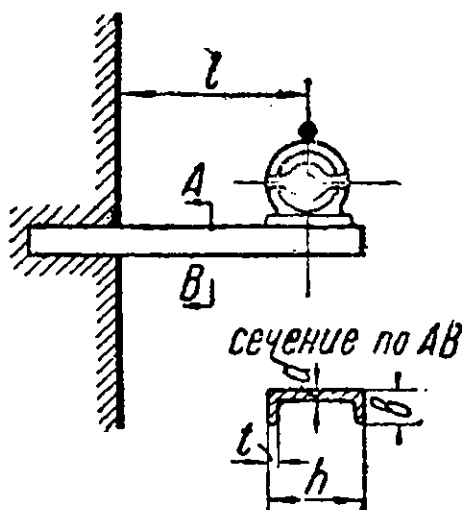


Рис. 30.

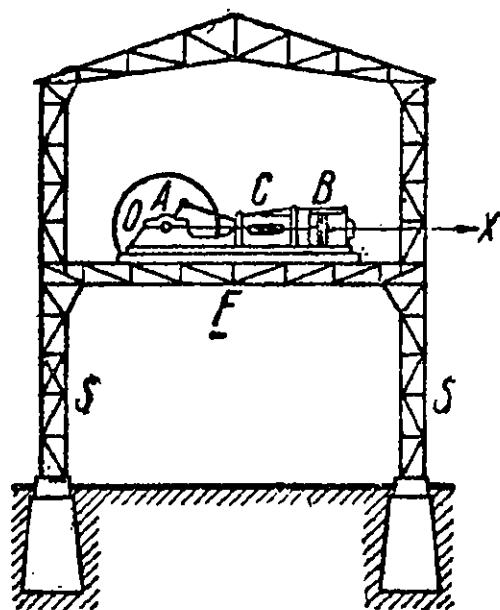


Рис. 31.

Определим критическую длину корыта $l_{кр}$, т. е. такую длину его, при которой электромотор придет в резонанс с кронштейном. Для этого положим $n = 1500$ об/мин равным $n_{кр}$:

$$n_{кр} = \frac{300}{\sqrt{3 \cdot 10^{-8} \cdot l_{кр}^3}} = 1500,$$

найдем

$$l_{кр} = 110 \text{ см.}$$

Таким образом, поместив мотор на расстоянии около 1 м 10 см от стены, мы получим резонанс с интенсивным раскачиванием кронштейна; помещая мотор на меньшем или большем расстоянии, мы можем быть спокойны, что резонанса не будет.

4. Колебания поршневого двигателя на рамном фундаменте. Рассмотрим в качестве последнего примера реактивные колебания горизонтальной паровой машины на рамном фундаменте (рис. 31).

Поступательно-возвратному ходу поршня B , под влиянием внутренних сил давления пара в цилиндре, соответствуют реактивные колебания фундамента F со станиной машины. Возьмем систему, состоящую из поршня B и остальной части машины (пластина F со станиной, маховик и др.). Единственной горизонтальной внешней силой является упругая сила деформации стоек S фундамента. Поэтому, применяя теорему движения центра инерции системы к горизонтальной проекции (на ось X , с началом в равновесном положении центра инерции системы), будем иметь, как и раньше:

$$\frac{P+p}{g} \ddot{x}_G = -c \cdot x_1, \quad (42)$$

где P — вес машины с фундаментом F (массой стоек пренебрегаем), p — вес поршня, x_G — абсцисса центра инерции системы, c — коэффициент упругости, x_1 — абсцисса центра инерции фундамента с машиной без поршня.

Вспоминая упражнение 2 настоящего задания, будем иметь

$$x_G = \frac{Px_1 + px_2}{P+p}, \quad (43)$$

где x_2 — абсцисса поршня. Опуская постоянное слагаемое, определяющее абсциссу центра инерции фундамента с машиной без поршня, по отношению к оси вала маховика, будем иметь

$$x_2 = x_1 + l \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4} + \varepsilon \cos \omega t + \frac{\varepsilon^2}{4} \cos 2\omega t \right). \quad (44)$$

Здесь, как и раньше, l — длина шатуна, ε — отношение длины кривошипа к длине шатуна.

Подставляя значение x_2 в x_G и затем в уравнение (42), будем иметь

$$\frac{P+p}{g} \ddot{x}_1 = -cx_1 + \frac{pr\omega^2}{2} (\cos \omega t + \varepsilon \cos 2\omega t). \quad (45)$$

Таково дифференциальное уравнение колебаний фундамента двигателя. Второе слагаемое в правой части уравнения, т. е.

$$\frac{pr\omega^2}{g} (\cos \omega t + \varepsilon \cos 2\omega t),$$

играет роль *вынуждающей силы*. Это уже не гармоническая сила, как в предыдущем примере с электромотором. Здесь мы имеем более сложную силу, составную из двух гармонических: 1) с амплитудой $\frac{pr\omega^2}{g}$ и частотой ω , равной угловой скорости вала и 2) с амплитудой $\varepsilon \frac{pr\omega^2}{g}$, т. е. примерно от 5 до 10 раз меньшей $\left(\varepsilon = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} \right)$ и с частотой в два раза большей.

Определим и в этом случае *вынужденные колебания*. Для этого перепишем основное уравнение (45) после сокращений в таком виде:

$$\ddot{x}_1 = -v^2 x_1 + h (\cos \omega t + \varepsilon \cos 2\omega t), \quad (46)$$

где, как и раньше:

$$v^2 = \frac{cg}{P+p}; \quad h = \frac{pr\omega^2}{P+p}. \quad (47)$$

Величина v опять является частотой собственных горизонтальных колебаний фундамента, нагруженного машиной.

Для разыскания частного решения уравнения (46) положим

$$x_1 = A \cos \omega t + B \cos 2\omega t \quad (48)$$

и подставим в ур-ние (46). Будем иметь

$$-A\omega^2 \cos \omega t - B \cdot 4\omega^2 \cos 2\omega t = -v^2 A \cos \omega t - v^2 B \cos 2\omega t + \\ + h \cos \omega t + h\varepsilon \cos 2\omega t,$$

отсюда, приравнивая коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\cos 2\omega t$, найдем такие условия для неопределенных коэффициентов A и B :

$$\left. \begin{aligned} A(v^2 - \omega^2) &= h \\ B(v^2 - 4\omega^2) &= h\varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Замечательно, что мы имеем здесь две критических угловых скорости вала:

$$\begin{aligned} \omega'_{кр} &= v, \\ \omega''_{кр} &= \frac{v}{2}. \end{aligned}$$

И при угловой скорости вала, равной частоте собственных горизонтальных колебаний рамной конструкции, и при угловой скорости, в два раза меньшей, мы будем наблюдать резонанс. Но второй резонанс менее заметен, так как вынуждающая сила, как мы уже отмечали, в этом случае меньше (множитель ε !). На самом деле, если не отбрасывать членов ε^2 и высшими степенями в ур-нии (44), то мы получим бесчисленное множество критических скоростей все меньших и меньших, но интенсивности соответствующих им колебаний будут все более и более незначительными. Кроме того, сам фундамент, являясь сложной рамной конструкцией, имеет несколько частот собственных колебаний, так что число резонансов, вообще говоря, велико и требует очень сложного анализа, — мы даем только крайне приближенный расчет, все же применяемый на практике.

Предположим теперь, что ω не равно критическим угловым скоростям, тогда уравнение вынужденных колебаний будет по (48) и (49) иметь вид:

$$x_1 = \frac{h}{v^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{h\varepsilon}{v^2 - 4\omega^2} \cos 2\omega t. \quad (50)$$

Это не гармоническое (как мы уже исследовали в Кинематике), но периодическое колебание. Период его равен:

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega},$$

т. е. времени полного оборота вала.

Задачи и вопросы.

1. Получая толчки на стыках рельсов, вагон весом 20 т движется со скоростью 60 км/час , совершая гармоническое колебательное движение амплитуды $a = 2\text{ см}$. Считая, что каждый стык является источником одного полного колебания, определить максимальное и минимальное давления вагона на рельсы. Вес тележек, на которые опираются рессоры, поддерживающие вагон, равен 2 т ; длина рельса 12 м .

2. Вертикальный насос, станина которого весит 3 т , а поршень 200 кг , закреплен на неподвижном фундаменте. Определить давление насоса на фундамент, если поршень делает 200 ходов в минуту, длина хода 20 см и движение поршня можно считать гармоническим.

3. Двупоршневый насос установлен на пловучем фундаменте, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда, с площадью ватерлинии 100 м^2 . Вес станины насоса, с фундаментом 8 т , каждый поршень весит 100 кг и имеет ход 10 см . Определить амплитуду вертикальных колебаний фундамента на воде, пренебрегая

силами сопротивления воды, если фазы колебания поршней одинаковы или разнятся:

а) на $\frac{\pi}{2}$, б) на π , а период колебаний поршней равен $0,5\text{ сек}$.

4. Электромотор, статор которого весит 1 кг , закреплен болтами на салазках. Определить равнодействующие горизонтальных и вертикальных составляющих опор-

ных реакций салазок, если ротор весит 50 кг , делает 900 об/мин , причем ротор несколько эксцентричен: его центр тяжести находится от оси вращения на расстоянии 1 мм .

5. Вибрационная машина, служащая для создания колебаний, состоит из двух дисков, насаженных эксцентрично на две параллельные оси (рис. 32). Вес каждого диска $p = 20\text{ кг}$, вес всей машины $P = 200\text{ кг}$. Эксцентриситет $\overline{O_1C_1} = \overline{O_2C_2} = 5\text{ см}$, разность углов поворота дисков α_1 и α_2 может меняться при различных опытах.

Установив машину на модель мостовой фермы, статический прогиб которой при этом оказался равным 1 мм , пустили вибрационную машину в ход, расположив диски симметрично так, чтобы $\alpha_1 + \alpha_2 = \pi$. Валы делают по 500 об/мин и вращаются в противоположные стороны. Пренебрегая весом фермы, определить амплитуду колебаний станины вибрационной машины.

6. Вибрационная машина, описанная в предыдущем примере, помещена на платформу весом в 500 кг , закрепленную на железной вертикальной балке, заделанной нижним концом в неподвижный фундамент. Длина балки 2 м , сечение квадратное со стороной 5 см . Заклинив диски одинаково ($\alpha_1 = \alpha_2$), сообщили ва-

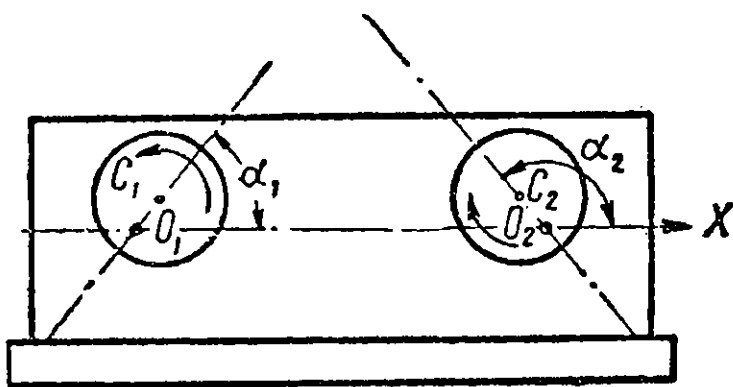


Рис. 32.

лам одинаковую по величине и направлению угловую скорость 1000 об/мин. Определить амплитуду колебаний верхнего конца балки.

7. Электромотор, статор которого весит 5 кг, а ротор — 0,5 кг, закреплен на кронштейне (рис. 33), заделанном в стену. Зная, что эксцентриситет ротора 0,5 мм и число оборотов в минуту равно 2000 — определить переменные напряжения в брусках АС и АВ; сравнить эти напряжения со статическими напряжениями при неподвижном моторе. Колебаниями кронштейна пренебрегаем.

8. В вертикальном дизеле, делающем 300 об/мин, длина кривошипа 10 см, шатуна 50 см. Вес станины дизеля с фундаментом 100 т, станины 10 т, поршня 250 кг. Зная, что упругое основание, на котором покоится фундамент, дает под дизелем осадку 2 см, определить амплитуду колебаний фундамента и максимальное и минимальное давления дизеля на фундамент. При расчете можно пренебречь квадратом и высшими степенями отношения длины кривошипа к длине шатуна.

9. Каков должен быть статический прогиб рессор железнодорожных вагонов для того, чтобы при скорости 60 км/час и длине каждого рельса в 12 м вагон не попадал в резонанс с толчками на стыках.

10. В Японском море период волн около 6,5 сек., амплитуда 2 м. Определить вынужденные колебания корабля весом 21 500 т с площадью ватерлинии 2320 м². Какова должна быть площадь ватерлинии для того, чтобы корабль попал в резонанс с волнами?

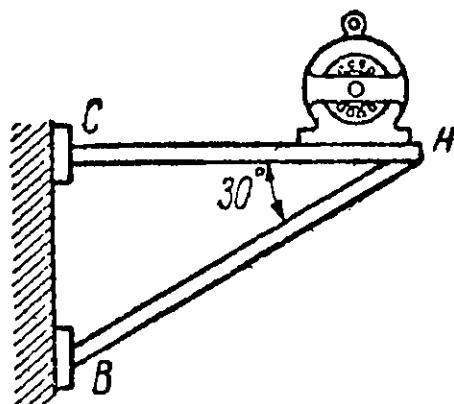


Рис. 33.

Задание 3-е.

Теорема количеств движения.

Теорема об изменении количества движения системы материальных точек с теоретической стороны ничем не отличается от теоремы о движении центра инерции системы. Во многих, особенно иностранных, руководствах эти обе теоремы объединяются под общим заголовком „теоремы импульсов“. Причина этого наименования будет учащемуся из дальнейшего понятна.

Мы разделяем эти теоремы в разные задания потому, что, как нам кажется и учащийся в этом убедится, у обеих теорем, несмотря на очень большую близость теоретической формулировки, совсем различные области применения.

Если теорема о движении центра инерции была удобна при рассмотрении движения систем из нескольких отдельных тел, то теорема количеств движения системы, наоборот, имеет весьма интересные применения к сплошным системам точек, т. е. например к жидкости, упругим телам и т. п. Как раз на этом вопросе мы и заостряем внимание учащегося в настоящем задании. Мы даем

ряд применений теоремы количеств движения (в форме теоремы Эйлера) в гидравлических вопросах.

После этого, преобразовав теорему количеств движения к несколько иному, интегральному виду (теорема импульсов), мы оста- навливаемся на применениях последней теоремы к теории особого явления, требующего отказа от модели абсолютно-твердого тела — явления удара.

Теория ударов материальных тел как упругих, так и жидких представляет значительный технический интерес (вопросы проч- ности материалов, ударные испытания, гидравлический удар в тур- бинах и насосах и пр.). В отличие от других курсов механики мы не выделяем удар в отдельное задание, а распределяем его по разным заданиям. В настоящем задании выясняется общая физическая сущность явления удара, а также решаются простей- шие вопросы об ударе материальной точки о массивную преграду и об ударе шаров (прямом и косом). Более глубокое изучение явления удара (удар, приложенный к вращающемуся телу, энерге- тическое рассмотрение явления удара и др.) проводится в сле- дующих двух темах.

Мы разобрали на упражнениях наиболее общие применения теорем количеств движения и импульсов — более элементарные задачи даны нами в вопросах для самопроверки.

§ II. Теорема количеств движения системы точек.

Выделим некоторую систему материальных точек M_i с массами m_i , скоростями v_i , ускорениями w_i и т. д. Если, как и в предыдущем задании, обозначить через F_i равнодействующую всех *внешних* сил, приложенных к точке M_i , а через F'_i — равнодействующую *вну- тренних* сил, приложенных к этой точке, то уравнение ее дви- жения можно представить в виде

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = F_i + F'_i,$$

или еще так:

$$\frac{d}{dt} m_i v_i = F_i + F'_i. \quad (1)$$

Если взять геометрическую сумму левых и правых частей уравне- ния (1), написанного для отдельных точек, по всем точкам системы: $M_1, M_2 \dots M_n$, то будем иметь

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i v_i = \sum_{i=1}^n F_i + \sum_{i=1}^n F'_i. \quad (2)$$

В левой части мы имеем геометрическую производную от суммы количеств движения $q_i = m_i v_i$ отдельных точек. Эту сумму обозна- чим через Q :

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i = \sum_{i=1}^n m_i v_i \quad (3)$$

и назовем *главным вектором количеств движения точек системы* или, кратко, *количеством движения системы*.

Справа мы имеем, очевидно, *главный вектор внешних сил*, так как второй член, представляющий геометрическую сумму внутренних сил, тождественно обращается в нуль. Итак, мы приходим к равенству:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = R} \quad (4)$$

представляющему теорему количеств движения:

„Векторная производная по времени от главного вектора количеств движения системы равна главному вектору внешних сил, приложенных к системе“.

Теорема количеств движения может быть легко приведена к теореме движения центра инерции. Достаточно только заметить, что

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = M \frac{d^2 \mathbf{r}_c}{dt^2}.$$

Эти две теоремы почти совпадают, и их часто даже не различают. Мы все же в дальнейшем покажем, что каждая из них имеет свою характерную область применения, так что обе теоремы естественно друг друга дополняют.

Прежде всего отметим, что в теореме количеств движения так же, как и в теореме движения центра инерции, совершенно не фигурируют *внутренние силы*. *Внутренние силы не могут влиять на изменение количества движения системы*. Если движущаяся система под влиянием внешних сил изменяет по какому-нибудь закону свое количество движения, то никакими внутренними силами она не может изменить этого закона. Если *главный вектор внешних сил во время движения равен нулю*, то количество движения системы сохраняет постоянную величину и никакими внутренними силами это постоянство нельзя нарушить. Предположим, что в начальный момент полное количество движения системы равнялось нулю—тогда при отсутствии внешних сил или равенстве нулю их главного вектора мы не сможем внутренними силами сообщить нашей системе какое-нибудь количество движения.

Эти выводы, являющиеся простыми следствиями понятия *взаимодействия* частиц материи, а также и основного закона Ньютона о связи изменения количества движения с приложенными силами, вызывают обычно большие недоумения и как будто противоречат опыту. Действительно, сидим мы, например, в неподвижной лодке. Полное количество движения системы, состоящей из лодки и человека, в ней сидящего, равно нулю. Встанем и будем ходить по лодке—тогда никаких новых внешних сил не появится и полное количество движения системы должно остаться равным нулю; между тем мы ходим, лодка движется, имеется налицо движение. Все дело конечно в том, что хотя при нашем хождении по

лодке количество движения лодки и человека отдельно нулю не равно, но *геометрическая сумма* количеств движения человека и лодки остается все время равной нулю. Если мы идем от кормы к носу с некоторой скоростью по отношению к лодке, то лодка при этом двигается в противоположном направлении, как раз с такой скоростью, чтобы количество движения человека было равно по величине и противоположно по направлению количеству движения лодки.

Сохраняемость количества движения всей системы в целом обуславливается тем, что изменения количеств движения отдельных частей системы, получающиеся при взаимодействии этих частей друг с другом, направлены в разные стороны, причем в сумме (векторной или геометрической) дают нуль, что и соответствует сохранению количества движения всей системы в целом.

Точно так же, как в примере с лодкой, можно понимать и одинаковость количества движения снаряда до взрыва и после взрыва. Хотя после взрыва осколки снаряда получают, очевидно, новые и очень большие количества движения, но *геометрическая сумма* всех количеств движения частиц, ранее образовывавших снаряд, остается той, которой была до взрыва.

Орудие, выпускающее снаряд, до выстрела имело количество движения, равное нулю, точно так же, как и снаряд, покоившийся в его дуле. После выстрела снаряд за счет действовавшего на него давления пороховых газов получил значительное количество движения, точно такое же количество движения получило в обратном направлении и орудие под действием тех же газов. Конечно скорость отката орудия во столько раз меньше скорости вылета снаряда, во сколько раз масса орудия больше массы снаряда. Этот закон обратной пропорциональности скоростей массам является простым следствием равенства количества движения отката орудия и вылета снаряда, а это соотношение в свою очередь обусловлено равенством действия и противодействия.

В последнем примере мы несколько упростили явление, отвлекшись от массы заряда, превращающейся в пороховые газы, которые также приходят в движение при выстреле, частично вылетая из дула вместе со снарядом, частично откатываясь вместе с орудием. Пусть M — масса орудия, m — масса снаряда, μ — масса заряда, v — начальная скорость отката орудия, V — начальная скорость вылета снаряда; тогда количество движения орудия будет равно Mv , количество движения снаряда и газов будет $(m + \beta\mu) V$, где β — некоторый поправочный коэффициент, который принимают обычно равным в среднем около 2,5. Принимая во внимание различие направления количеств движения орудия и снаряда с зарядом, получим по условию равенства нулю полного количества движения системы:

$$Mv = (m + \beta\mu) V,$$

откуда скорость отката (формула Сarro):

$$v = \frac{m + \beta\mu}{M} V.$$

Явление отката на самом деле более сложно. Начиная от момента выстрела, снаряд под влиянием давления пороховых газов на его дно приходит в ускоренное движение, причем его количество движения быстро растет от нуля до mV_{max} , соответствующего моменту вылета из дула. За время его движения в дуле и лафет имеет растущее количество движения от нуля до Mv_{max} , причем движение лафета тормозится силами трения колес и хобота о землю. До момента вылета снаряда из дула мы имеем ускоренное движение снаряда и орудия. После вылета снаряда лафет движется замедленно, тормозясь силами трения о землю, накатыванием на возвышение или сопротивлением специальных гидравлических тормозов. Приводим несколько численных данных для максимальной скорости отката орудия v_m и путей отката x —за время ускоренного движения лафета, соответствующего движению снаряда в дуле, и s —полный откат.

(Д. Козловский, Артиллерия, Гиз, 1929)

Название орудия	v_m в м/сек	x в см	s в см
76-мм полев. легк. пушка обр. 1902 г.	10,95	9,7	1 000
107-мм пушка обр. 1910 г. . .	10,95	14,9	1 250
122- „ гаубица „ 1910 г. . .	14,65	11,8	1 045
152- „ „ „ 1909 г. . .	12,30	12,0	1 220

Из таблицы видно, что x менее 0,01 s. Вычисление x и s может быть проведено по обычным формулам замедленного движения, если знать характер торможения.

Формулу Сарро можно применять и к случаю полета реактивных снарядов (ракеты, ракетопланы и др.). Каждый выстрел, произведенный из такого снаряда, дает ему реактивный толчок, увеличивающий его количество движения, а следовательно и скорость. На этом, как учащийся знает, основан принцип полета ракетных снарядов для межпланетных путешествий и др.

§ 12. Применение теоремы количества движения к сплошным системам. Теорема Эйлера.

Одно из наиболее интересных применений теоремы количества движения дают нам системы с бесконечным числом частиц, образующие некоторую сплошную среду, например жидкость, газ и др. Мы будем в дальнейшем предполагать эту жидкость несжимаемой. Это предположение вполне удовлетворяется в капельных жидкостях (вода, масло) и достаточно близко к действительности при движении газов с небольшими скоростями (далекими от скорости звука).

Выделим в жидкости некоторый объем τ , ограниченный поверхностью σ (контрольная поверхность), и будем изучать движение этого объема. Силы, приложенные к этому объему, разбиваются на

внешние и внутренние, причем, как мы уже знаем, внутренние силы не играют роли при изучении изменения количества движения выделенного объема.

Внешние силы, действующие на наш объем τ , т. е. взаимодействия жидкого объема с частицами остальной жидкости, а также и другими внешними телами, можно разбить на две группы:

1) силы *массовые или объемные*, т. е. такие, которые действуют на все частицы объема τ , как внутренние, так и находящиеся на поверхности, например силы веса частиц, и

2) силы *поверхностные*, действующие только на частицы, лежащие на поверхности объема τ — таковы силы давления на поверхность σ , со стороны окружающей ее жидкости или твердых стенок (русла), между которыми движение происходит. Точно так же к этой группе сил относятся силы трения нашего объема об окружающую жидкость или твердые стенки.

Обозначим главный вектор внешних объемных сил через $R_{об}$, — внешних поверхностных сил — $R_{пов}$.

Если количество движения жидкого объема в данный момент равно Q , то по теореме количеств движения имеем

$$\frac{dQ}{dt} = R_{об} + R_{пов}. \quad (5)$$

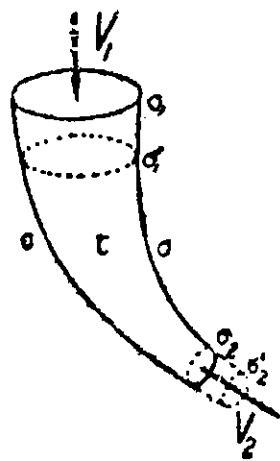


Рис. 34.

Предположим, что жидкость двигается в некоторой трубе переменного сечения (рис. 34). Рассмотрим объем жидкости между двумя какими-нибудь сечениями σ_1 и σ_2 , причем, отвлекаясь от разницы скоростей вблизи стенок и в середине

трубы, обозначим через v_1 скорость жидкости в сечении σ_1 , и v_2 — скорость жидкости в сечении σ_2 . Скорости v_1 и v_2 можно себе представить как некоторые средние скорости в сечениях σ_1 и σ_2 , перпендикулярных к ним.

Произведение $\sigma_1 \cdot v_1$ определит, очевидно, объем жидкости, протекающий в единицу времени сквозь сечение σ_1 . Поскольку жидкость несжимаема, этот же объем будет протекать и сквозь сечение σ_2 , т. е.

$$\sigma_1 v_1 = \sigma_2 v_2.$$

Если мы умножим этот объем жидкости, протекающий в единицу времени через любое сечение трубы, на плотность жидкости ρ , то получим массу жидкости, протекающую в единицу времени через любое сечение трубы. Эту массу обозначим через M :

$$M = \rho \sigma_1 v_1 = \rho \sigma_2 v_2 = \rho \sigma v. \quad (6)$$

Вычислим теперь изменение количества движения dQ выделенного объема τ за время dt . Для этого заметим, что за время dt частицы объема τ , за которыми мы следим, сместятся по трубе (на рис. 34 показано пунктиром) и изменят свои скорости в связи с переходом в другие сечения. Если средняя скорость в любом сечении трубы от времени не зависит, т. е. в данном сечении скорость все время одинакова (такое движение называют устано-

вившимся), то за время dt в объеме между сечениями σ_1' и σ_2 останутся частицы прежнего объема τ и новое количество движения в этой части объема будет то же, что и раньше. Таким образом изменение количества движения произойдет за счет потери количества движения в объеме между сечениями σ_1 , σ_1' и прибавления количества движения в объеме между сечениями σ_2 , σ_2' . Определяя количество движения в бесконечно малом объеме, как произведение массы (плотность $\times$ объем) на вектор скорости, получим

$$dQ = \rho \sigma_2 \cdot v_2 dt \cdot v_2 - \rho \sigma_1 v_1 dt \cdot v_1,$$

или по (6)

$$dQ = M(v_2 - v_1) dt.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{dQ}{dt} = M(v_2 - v_1). \quad (7)$$

Подставляя полученное значение изменения количества движения в основное уравнение (5), получим

$$Mv_1 - Mv_2 + R_{об} + R_{пов} = 0. \quad (8)$$

Эта формула была дана Эйлером. Ее легко запомнить благодаря следующей формулировке (теорема Эйлера):

„Главные вектора объемных и поверхностных сил и вектора количеств движения масс жидкости, входящих и выходящих сквозь сечения трубы в единицу времени, направленные внутрь выделенного объема, образуют замкнутый многоугольник, т. е. дают в сумме нуль“.

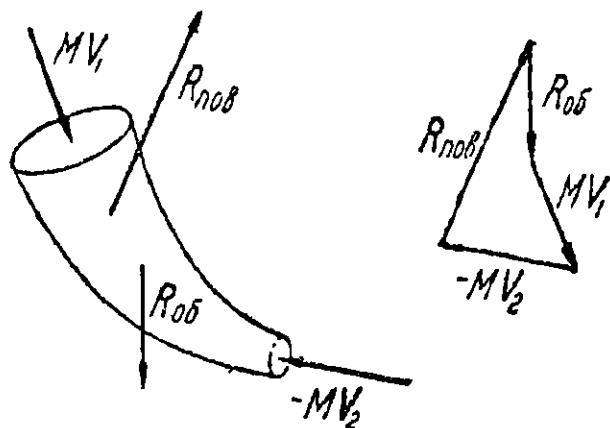


Рис. 35.

На рис. 35 показано расположение векторов, входящих в теорему Эйлера. Мы обращаем особое внимание учащегося на необходимость при применении теоремы Эйлера направлять вектор количества движения массы, проходящей в единицу времени, через нижнее (по течению) сечение, всегда внутрь выделенного объема жидкости в трубе.

Из формулы Эйлера можно найти и действие жидкости на трубу. Для этого достаточно по принципу равенства действия и противодействия заменить главный вектор поверхностных сил, приложенных от стенки к жидкости, на равный ему и прямо противоположный по направлению вектор.

Примеры и упражнения.

1. Давление жидкости на неподвижный сосуд. Предположим, что некоторый объем жидкости налит в сосуд (рис. 36). Если жидкость неподвижна в сосуде, то полное давление на сосуд равно просто весу жидкости. Откроем кран, тогда жидкость начнет выливаться с некоторою скоростью v_2 , а уровень

в сосуде будет понижаться со скоростью v_1 . Добавочное давление R на сосуд получим, складывая геометрически количества движения Mv_1 и $-Mv_2$ (силами трения и давления воздуха пренебрегаем).

Проекции этого добавочного давления на горизонтальную и вертикальную ось будут равны:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= -Mv_2 \cos \alpha \\ R_y &= -Mv_1 - Mv_2 \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Если жидкость в сосуде поддерживается на постоянном уровне и отверстие истечения мало сравнительно с площадью свободной поверхности в сосуде, то по известной формуле Торичелли можно положить

$$v_2 = \sqrt{2gh}, \quad v_1 = 0,$$

тогда будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= -M\sqrt{2gh} \cdot \cos \alpha \\ R_y &= -M\sqrt{2gh} \cdot \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Чтобы оценить реакцию выходящей струи, заметим, что проекции давления жидкости на площадку σ_2 нижнего конца, при закрытом кране, были бы равны:

$$\left. \begin{aligned} R'_x &= g\rho h\sigma_2 \cos \alpha \\ R'_y &= g\rho h\sigma_2 \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Заменяя в выражении (10) M на $\rho v_2 \sigma_2 = \rho \sigma_2 \sqrt{2gh}$ и сравнивая с (11) получим:

$$\left. \begin{aligned} R_x &= -\rho \sigma_2 \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{2gh} \cdot \cos \alpha = -2\rho gh\sigma_2 \cos \alpha = -2R'_x \\ R_y &= -\rho \sigma_2 \sqrt{2gh} \cdot \sqrt{2gh} \cdot \sin \alpha = -2\rho gh\sigma_2 \sin \alpha = -2R'_y \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

т. е. реакция выходящей струи по величине в два раза превосходит статическое давление на сечение и направлена в сторону, противоположную этому давлению:

$$R = -2R'.$$

Искусственно создавая большое давление на поверхность σ_1 , можно получить очень значительные скорости в выходном отверстии и, таким образом, значительные реакции вылетающей струи. На этом принципе основано движение известного учащегося Сегнерова колеса, а также реактивной турбины. Об этом мы расскажем в следующих двух темах.

Для количественной оценки предыдущего результата предположим, что вода поддерживается на одинаковом уровне в широком сосуде рассмотренного нами типа, причем ко дну сосуда припаяна длинная стеклянная трубка малого по сравнению с сосудом диаметра. Пусть длина трубки равна 2 м; диаметр ее 0,6 см

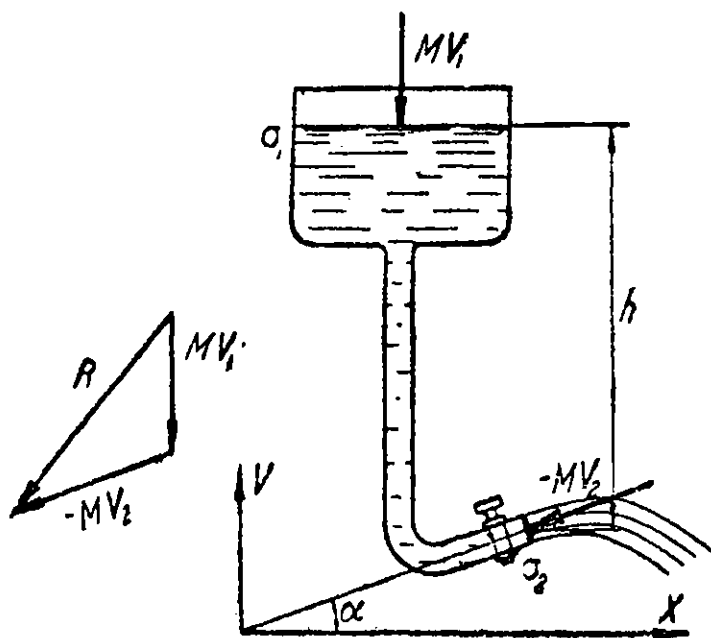


Рис. 36.

и на нижнем конце трубка изогнута под прямым углом, тогда горизонтальная реакция выходящей струи будет равна:

$$R_x = -2 \cdot \pi \cdot (0,3)^2 \cdot 100 \cdot \cos 0^\circ = -56,6 \text{ г} \approx 0,06 \text{ кг},$$

при скорости выходящей струи около 4,4 м/сек.

Если бы из той же трубки вода выходила под напором со скоростью в 3 раза большей, мы имели бы реакцию уже в 9 раз большую, т. е. свыше половины килограмма и т. д., так как реакция пропорциональна h , а h по формуле Торичелли, пропорционально квадрату скорости истечения.

2. Давление струи на пластинку. Теорема количества движения позволяет довольно удовлетворительно определять давление струи, падающей на пластинку, если только размеры пластинки значительно превосходят диаметр струи. Покажем это на нескольких примерах.

Если струя падает перпендикулярно на пластинку (рис. 37), то, предполагая, что скорость оттекания (а следовательно и пло-

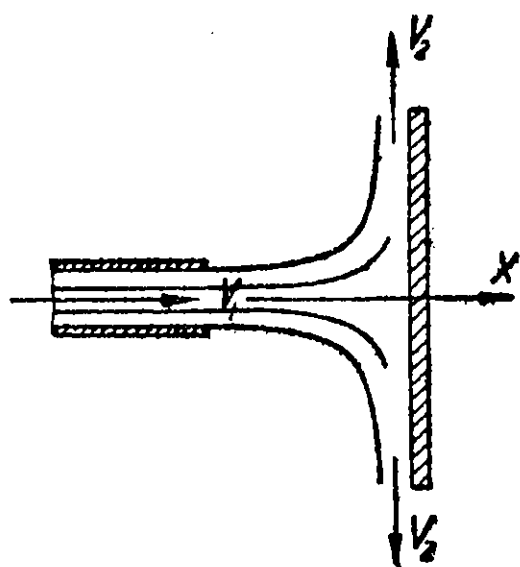


Рис. 37.

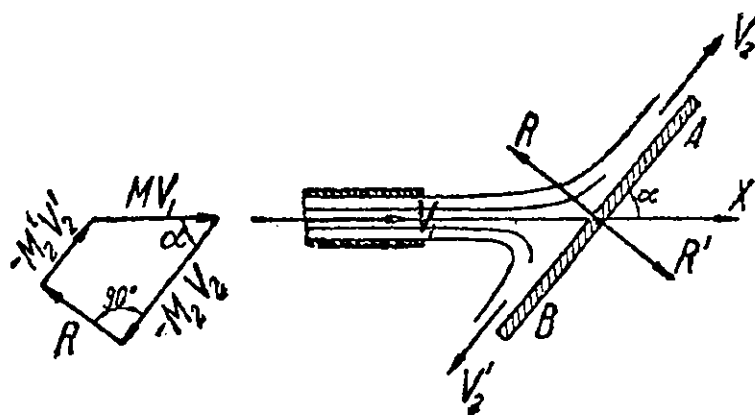


Рис. 38.

щадь сечения струи) мало изменяется, сможем, отвлекаясь от веса написать силу давления на пластинку:

$$R = Mv_1,$$

так как вектора количества движения растекающейся по поверхности пластинки жидкости $-\frac{1}{2}Mv_2$ равны и прямо противоположны. Заменяя здесь расход M его значением $\rho\sigma v_1$, будем иметь известную формулу Даниила Бернулли (1736):

$$R_x = \rho\sigma v_1^2, \quad (13)$$

здесь σ —площадь сечения струи у выхода из трубки, v_1 —скорость выхода, ρ —массовая плотность жидкости.

Если пластинка наклонена к направлению струи под углом α (рис. 38), то опять, предполагая, что размеры пластинки велики по сравнению с диаметром струи, будем иметь вектора Mv_1 , $-M_2v_2$, $-M_2'v_2'$ и давление R' пластинки на жидкость, которые образуют замкнутый четырехугольник. Давление жидкости на пла-

стинку или пластинку на жидкость будем считать нормальным к пластинке, так как трением жидкости о пластинку можно пренебречь. В предыдущем примере в силу симметрии мы считали, что секундные количества движения жидкости, оттекающей по пластинке в обе стороны одинаковы. Теперь мы уже не можем сделать этого предположения, как это сразу видно из диаграммы на рис. 38.

Обозначим массу жидкости, протекающую сквозь сечение струи в верхней части пластинки A через M_2 , а через сечение струи в нижней части B — через M_2' .

Проектируя вектора, образующие замкнутый четырехугольник, на направление нормали к пластинке, будем иметь

$$R_1 = Mv_1 \sin \alpha = \rho \sigma v_1^2 \sin \alpha. \quad (14)$$

Здесь опять σ обозначает площадь сечения струи у выхода из трубы. При $\alpha = \frac{\pi}{2}$ вновь получим формулу (13). Проектируя тот же четырехугольник на направление пластинки, получим

$$Mv_1 \cos \alpha + M_2'v_2' - M_2v_2 = 0. \quad (15)$$

Кроме того, из условия одинаковости расхода вдоль струи

$$M_2 + M_2' = M. \quad (16)$$

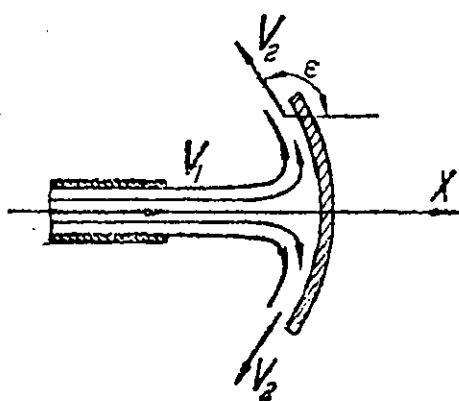


Рис. 39.

Из этих двух уравнений можно вычислить отдельно массы жидкости, растекающиеся в единицу времени в обе стороны пластинки. Обыкновенно считают, что скорости растекания струи одинаковы со скоростью струи при выходе из трубы, т. е. $v_2 = v_2' = v_1$, так что различие значений M_2 и M_2' происходит за счет разных сече-

ний струи в точках A и B . При таком упрощенном предположении будем иметь:

$$M_2 - M_2' = M \cos \alpha$$

$$M_2 + M_2' = M,$$

откуда находим

$$M_2 = M \frac{1 + \cos \alpha}{2}, \quad M_2' = M \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

Подобно тому, как мы вычислили давление струи на плоскую пластинку, точно так же можно найти и давление на криволинейную пластинку. Например, если струя ударяется об лопатку формы дуги круга (рис. 39), то по предыдущему будем иметь давление

$$R_x = Mv_1 - 2 \cdot \frac{M}{2} \cdot v_2 \cos \varepsilon,$$

или, полагая, как и ранее, $v_2 = v_1$, найдем

$$R_x = \rho \sigma v_1^2 (1 - \cos \varepsilon). \quad (17)$$

Если, например, лопатка имеет форму полуокружности, то $\varepsilon = \pi$ и мы получим максимальное давление:

$$R_x = 2\rho v_1^2, \quad (18)$$

т. е. в два раза большее давление, чем при натекании на перпендикулярную плоскую пластинку.

Мы удовольствуемся пока этими несколькими несложными примерами. Более интересные примеры учащийся найдет во второй теме, где теорему Эйлера уже можно будет применить к *вращающимся* лопаткам, т. е. перейти к вопросу о давлении на подвижные тела, что практически более интересно.

3. Давление жидкости на стенки подвижного канала. Определение вращающего момента турбины мы откладываем на следующую тему, здесь же изложим, как первое приближение, давление жидкости на стенки канала, двигающегося прямолинейно и поступательно.

Для большей конкретности возьмем канал между двумя лопатками паровой турбины (рис. 40). Предположим, что канал движется со скоростью v_e — переносной скоростью для частиц жидкости. Сами частицы имеют по отношению к каналу скорости: v'_1 — при входе, и v'_2 — при выходе, по отношению же к подводющему и отводящему аппарату AA скорости: v_1 — при входе в канал, v_2 — при выходе.

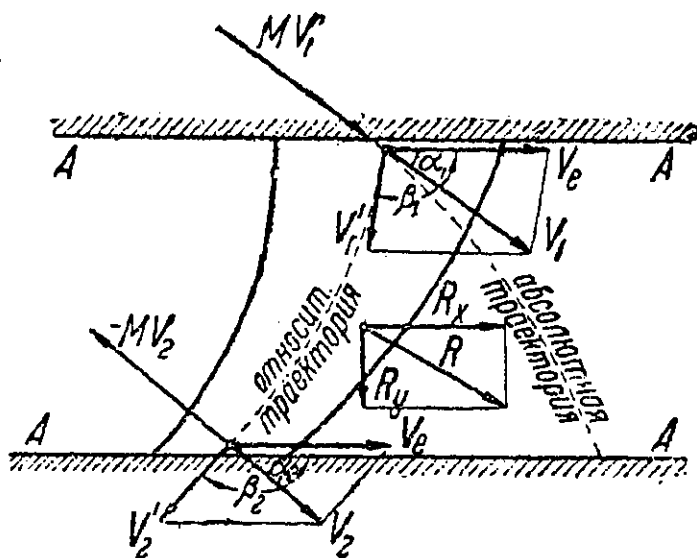


Рис. 40.

Применим теорему Эйлера к струе, в ее движении по отношению к подводющему аппарату. Поскольку масса жидкости, проходящая в единицу времени сквозь канал, очевидно, не зависит от того, по отношению к какой системе мы рассматриваем движение, будем иметь следующую формулу давления жидкости на лопатки:

$$R = Mv_1 - Mv_2. \quad (19)$$

Гораздо удобнее иметь формулу, выражающую давление через скорости движения жидкости по каналу. Для этого положим на основании теорем относительного движения:

$$\begin{aligned} v_1 &= v_e + v'_1 \\ v_2 &= v_e + v'_2 \end{aligned}$$

Тогда, очевидно, после подстановки в (19) переносная скорость сократится и мы будем иметь

$$R = M(v'_1 - v'_2), \quad (20)$$

или в проекциях на оси:

$$\begin{aligned} R_x &= M(v'_1 \cos \beta_1 - v'_2 \cos \beta_2) \\ R_y &= M(v'_1 \sin \beta_1 - v'_2 \sin \beta_2) \end{aligned} \quad (21)$$

Мы видим, что при поступательном движении давление на стенку канала (из составляющих R_x этих давлений складывается *движительная сила* турбины) не зависит от формы канала и переносной скорости движения ротора, а только от массы расхода жидкости в единицу времени, скоростей входа и выхода жидкости и углов этого входа и выхода. Напомним из Кинематики (тема III, задание 14), что углы входа в подводящем канале выбираются так, чтобы жидкость входила без удара в двигающийся канал, т. е. углы α_1 и α_2 определяются по выбранным v_e , β_1 , β_2 и v_1' .

4. Теория ракетного снаряда. В этом примере мы займемся, следуя Eberhard'y¹⁾ расчетом тех возможностей, которые открываются перед нами в вопросе о достижении очень удаленных от поверхности земли пространств помощью ракетных снарядов. Под ракетой мы будем понимать тело в форме снаряда, имеющее насадок, через который с большой скоростью вытекают газы, образующиеся от сгорания пороха, находящегося внутри ракеты. В популярных журналах и книгах часто утверждается возможность построения ракеты столь большой величины, что при помощи ее могла бы быть осуществлена переброска на луну человека или даже нескольких человек; обсуждение выполнимости такого проекта при современном положении вещей является сейчас нашей задачей.

Если ракетный снаряд должен попасть на луну, то необходимо сообщить ему такую начальную скорость, чтобы он пришел со скоростью, отличной от нуля, в ту точку A , в которой уравниваются силы притяжения земли и луны. Соответственно этому разобьем движение ракеты на три стадии. В первой стадии ракета движется с поверхности земли, постепенно увеличивая свою скорость и достигает пределов атмосферы, т. е. высоты 60—70 км над землей. Не трудно показать (что будет сделано в дальнейшем), что в том случае, когда ракета достигнет предела атмосферы со скоростью, превышающей некоторую определенную границу (около 11 000 м/сек), то во второй стадии своего движения (от пределов атмосферы до точки A) она достигнет точки A с отличной от нуля скоростью и, следовательно, в третьей стадии движения (от A до луны), повинаясь притяжению луны, достигнет последней. Все дело заключается поэтому в рассмотрении первой стадии движения, когда ракета движется благодаря противодействию уходящих газов. Составим уравнение движения ракеты в этой стадии, при чем, чтобы не усложнять очень вычислений, не будем принимать в расчет сопротивление воздуха.

Обозначим через m_t массу ракеты в момент времени t ; через $M = -\frac{dm_t}{dt}$ —секундный расход массы, т. е. массу горючего, выбрасываемого в виде газа через насадки в 1 секунду. Очевидно, что

$$m_t = m_0 - \int_0^t M dt, \quad (22)$$

¹⁾ Handbuch d. technischen und physikalischen Mechanik, Bd. 2, S. 268—275.

где m_0 — начальная масса ракеты. Если v' обозначает скорость газов относительно ракеты, то по теореме Эйлера реакция их на ракету определится формулой

$$F_1 = Mv';$$

кроме того на ракету действует сила притяжения земли F_2' ; если z — расстояние, пройденное ракетой от поверхности земли, r — радиус земли, m_s — масса земли, то

$$F_2 = f \frac{m_s m_t}{(r+z)^2},$$

причем $f m_s = gr^2$ (ф-ла (ж), стр. 153). Притяжением луны можно пренебречь, так как масса луны в 75 раз меньше массы земли; а с другой стороны, в первой стадии движения ракета находится на расстоянии от луны, примерно равном $60r$. Уравнение движения ракеты принимает вид

$$m_t \ddot{z} = \frac{-m_t gr^2}{(r+z)^2} + Mv'$$

или

$$\ddot{z} = \frac{-gr^2}{(r+z)^2} + \frac{Mv'}{m_0 - \int_0^t M dt}. \quad (23)$$

Считая ускорение $\ddot{z}$ постоянным, определим из этого уравнения M как функцию времени; можно считать, хотя бы теоретически, что благодаря надлежащему конструированию заполненных пороховым веществом каналов нужный закон изменения M во времени будет достигнут.

Если считать, что внутри ракеты находится живое существо, то для задания величины полного ускорения следует исходить из физиологических данных. Не фиксируя однако $\ddot{z}$ окончательно, примем его равным ρg , причем множителю ρ мы будем задавать различные значения от $\frac{1}{4}$ до 5. При этом $z = \frac{1}{2} \rho g t^2$, $\dot{z} = v = \rho g t = \sqrt{2g\rho z}$.

Переписывая теперь уравнение (23) в виде

$$\rho g = - \frac{gr^2}{\left(r + \frac{\rho g t^2}{2}\right)^2} - \frac{\frac{dm_t}{dt}}{m_t} v'$$

или

$$-v' \frac{dm_t}{m_t} = \left\{ \frac{gr^2}{\left(r + \frac{\rho g t^2}{2}\right)^2} + \rho g \right\} dt$$

и интегрируя (при $t=0, m_t=m_0$), получим

$$-v' \ln \frac{m_t}{m_0} = \rho g t + + gr^2 \left\{ \frac{t}{2r \left(r + \frac{\rho g t^2}{2} \right)} + \frac{1}{2r^2} \sqrt{\frac{2r}{\rho g}} \arctan \sqrt{\frac{\rho g}{2r}} t \right\} \tag{24}$$

Это уравнение дает искомый закон изменения массы ракеты.

По данным Eberhard'a (1930) максимальная скорость вытекания газов $v' = 2000$ м/сек. Мы примем $v' = 2000 \alpha$ м/сек, где $\alpha > 1$ (считаем, что в ракете будут достигнуты еще большие скорости). Если обозначить еще через $v_k = g \rho t_k$ конечную скорость первой стадии движения, то формула (24) определит отношение $\frac{m_t}{m_0}$ в момент достижения этой скорости. Найдем

$$\alpha \ln \left(\frac{m_t}{m_0} \right)_k = \frac{v_k}{2000} + \frac{v_k}{2000 \cdot 2\rho \left(1 + \frac{v_k^2}{2\rho g r} \right)} + + \frac{1}{2\rho} \frac{\sqrt{2\rho g r}}{2000} \arctan \frac{v_k}{\sqrt{2gr\rho}}.$$

Чтобы задаться определенным значением скорости v_k , отметим, что, поскольку движение происходит с постоянным ускорением:

$$v_k^2 = 2\rho g z_k. \tag{25}$$

С другой стороны, и v_k и z_k связаны другим соотношением, получающимся из рассмотрения второй стадии движения. Как

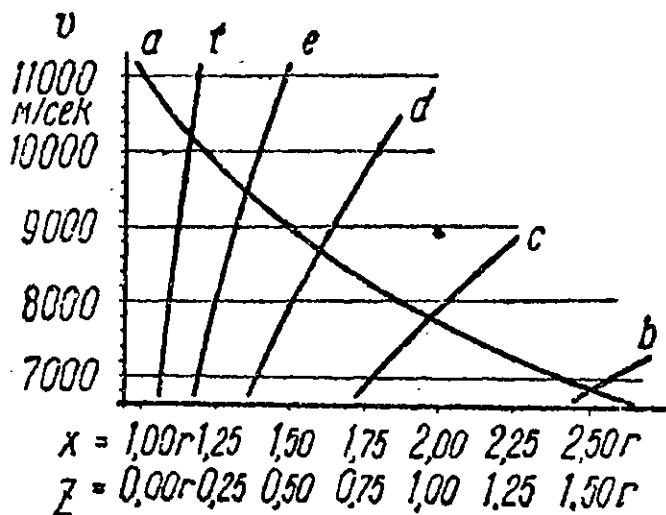


Рис. 41.

будет показано в примере 1 § 41 последнего задания, условием достижения снарядом упомянутой выше точки А является наличие между v_k и z_k связи, выражаемой графиком рис. 41 (кривая a). Полагая поэтому в ур-нии (25) последовательно

$$\rho = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 5$$

и находя точки пересечения кривых

$$v^2 = 2 \cdot \frac{g}{4} z, \quad v^2 = 2 \cdot \frac{g}{2} z, \quad v^2 = 2gz, \quad v^2 = 2 \cdot 2gz, \quad v^2 = 2 \cdot 5gz$$

(кривые b, c, d, e, f) с кривой (a), найдем соответствующие друг другу значения ρ и v_k . Формула (2) определит теперь соответствующее значение отношения $\left(\frac{m_t}{m_0} \right)_k$.

Полагая при вычислениях $r = 6360 \text{ км}$, $g = 9,83 \text{ м/сек}$ (на полюсе), получим результаты, приведенные в таблице, стр. 121.

Например, при $\rho = 2$ и $\alpha = 2$ к концу первой стадии движения остается только $\frac{1}{28}$ первоначальной массы ракетного снаряда. Данные последнего столбца (ρ практически равно бесконечности) дают предельное значение отношения $\left(\frac{m_t}{m_0}\right)_k$. Иными словами, максимальный остаток массы к концу первой стадии движения ни при каких обстоятельствах не превосходит $\sqrt[\alpha]{\frac{1}{252}}$ первоначальной массы ракеты.

ρ	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1,00	2	5	$0,97 \cdot 10^5$
$v_k \text{ м/сек}$	6800	6700	8650	9500	10200	11000
$z_k \text{ км}$	9440	6050	3800	2300	1060	$63,6 = 0,01$
$\left(\frac{m_t}{m_0}\right)_k$	$\frac{1}{66800}$	$\frac{1}{7685}$	$\frac{1}{1839}$	$\frac{1}{785}$	$\frac{1}{431}$	$\frac{1}{252}$
при $v' = 2000 \text{ м/сек}$						
То же, при $v' = 2000 \alpha \text{ м/сек}$	$\sqrt[\alpha]{\frac{1}{66800}}$	$\sqrt[\alpha]{\frac{1}{7685}}$	$\sqrt[\alpha]{\frac{1}{1839}}$	$\sqrt[\alpha]{\frac{1}{785}}$	$\sqrt[\alpha]{\frac{1}{431}}$	$\sqrt[\alpha]{\frac{1}{252}}$
То же, при $\alpha = 2$						
$v' = 4000 \text{ м/сек}$	$\frac{1}{258}$	$\frac{1}{87,5}$	$\frac{1}{42,7}$	$\frac{1}{28}$	$\frac{1}{20,8}$	$\frac{1}{15,8}$

Следует отметить, что сопротивление воздуха при прохождении атмосферы, а также необходимость торможения при падении на луну еще более уменьшают это отношение. Учитывая все эти обстоятельства, Eberhard заключает, что при самых благоприятных условиях может достигнуть луны только $\frac{1}{\sqrt[2]{823}}$ первоначальной массы ракеты.

§ 13. Теорема импульсов и ее применение к теории удара.

Следующим интересным применением теоремы количеств движения является ее применение в форме теоремы импульсов в теории явления удара.

Теорема импульсов получается из основного уравнения (4), если умножить обе его части на dt и проинтегрировать за некоторый промежуток времени (t_1, t_2) . Будем иметь

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dQ}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n F_i dt$$

или

$$Q_2 - Q_1 = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} F_i dt. \quad (26)$$

Слева мы получили векторное изменение полного количества движения системы точек за промежуток времени (t_1, t_2) , мы его будем в дальнейшем обозначать через ΔQ , что касается выражения, стоящего справа, то заметим, что вообще произведение вектора силы на время ее действия называют *импульсом* силы за это время.

Так, например, произведение

$$F dt = dS \quad (27)$$

определяет *элементарный импульс силы*, а

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} F dt = S} \quad (28)$$

дает *импульс силы за конечный промежуток*.

Импульс силы очевидно характеризует эффект силы в зависимости от ее величины и времени действия, измеряется импульс в кг/сек и др. соответствующих единицах.

Мы можем теперь переписать формулу (26) в виде

$$\boxed{\Delta Q = \sum_{i=1}^n S_i = S} \quad (29)$$

это и есть *теорема импульсов*:

„Изменение вектора количества движения системы за некоторый промежуток времени равно главному вектору импульсов внешних сил, приложенных к системе“.

Под главным вектором импульсов внешних сил мы понимаем, как обычно, векторную сумму этих импульсов.

Мы видим, что на изменение количества движения системы влияют только импульсы *внешних* сил, или, как мы будем в дальнейшем говорить, *внешние импульсы*, а ни в коей мере не *внутренние импульсы*.

В частном случае отдельной материальной точки мы будем иметь ту же формулу, что и (29), только слева будет стоять *изменение количества движения одной этой точки*, а справа *импульс равнодействующей всех приложенных к точке сил*.

Если сила постоянна по величине и направлению, то импульс этой силы за конечный промежуток времени будет точно описывать действие силы, если же (что как раз наиболее интересно) сила

переменна, то импульс силы за конечный промежуток времени дает только какой-то средний, суммарный эффект действия силы, именно окончательное изменение количества движения системы вместо закона этого изменения во времени. Применение же элементарного импульса, т. е. теоремы импульсов за очень малый промежуток времени, возвращает нас опять к теореме количеств движения в обычной ее формулировке; вот почему, вообще говоря, теорема импульсов не могла бы иметь больших практических применений. Но есть одна область явлений, где применение теоремы импульсов является совершенно необходимым и основным для всей теории явления, это — явление удара тел друг о друга.

Мы остановимся подробно на применении теоремы импульсов в теории удара, так как это, повидимому, единственная область применения нашей теоремы.

Явлением удара называют такое движение тела или системы тел, при котором за очень малый промежуток времени, по сравнению с обычными наблюдаемыми интервалами времени (например порядка тысячных и десятитысячных долей секунды) количество движения материальной точки или системы точек получает вполне конечное, а не малое изменение количества движения.

В этом определении нет точного отграничения явления удара от обычных движений, так как не дается точных указаний, при каких именно значениях интервалов времени и соответствующих им изменений количеств движения мы должны перенести рассматриваемое движение из класса обычных движений в класс ударов, но этого отграничения нет и по существу как в природе, так и во всей теории удара, — к некоторому уточнению понятия удара мы вскоре еще вернемся.

Поясним понятие удара на нескольких примерах.

Предположим, что материальная точка M при своем движении встречает преграду в виде неподвижной стенки AA (рис. 42а). Ударившись о нее со скоростью v_1 в момент t , через очень небольшой промежуток времени τ (время удара), наша точка отскочит уже с другой скоростью v_2 , причем изменение скорости представляется вектором Δv вполне конечных размеров, хотя время удара и было крайне мало. На рис. 42б мы имеем прямой, нормальный удар точки о преграду. В этом случае величина Δv равна сумме скоростей отражения v_2 (несколько меньшей скорости падения) и падения v_1 , т. е.

$$|\Delta v| = v_1 + v_2,$$

а это — величина того же порядка, что и сами скорости. Точно так же и в случае косоуго удара, изображенного на рис. 42б величина $|\Delta v|$ представляется вполне конечной.

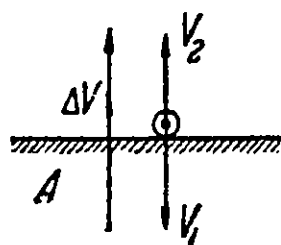


Рис. 42а.

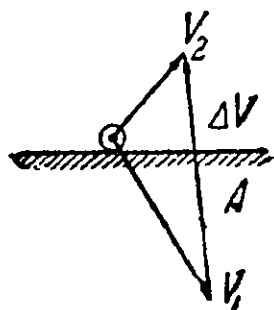


Рис. 42б.

В качестве другого примера рассмотрим пулю, пробивающую доску. В первый момент пуля имеет скорость v_1 (рис. 43), после прохода сквозь доску она значительно потеряет свою скорость, причем величина изменения будет равна

$$|\Delta v| = v_1 - v_2,$$

время удара—в данном случае время прохождения пули сквозь доску—крайне мало, между тем скачок в скоростях, а следовательно и в количествах движения, вполне конечен.

Мы удовольствуемся пока только этими простыми примерами, из которых виден основной характер явления удара: конечный скачок в скоростях или в количествах движения за очень малый промежуток времени.

Поставим себе вопрос: каковы силы взаимодействия тел за время их соударения. На этот важный вопрос нам дает ответ теорема импульсов. Применим ее сначала к одной точке за время удара $[t, t + \tau]$, тогда будем иметь

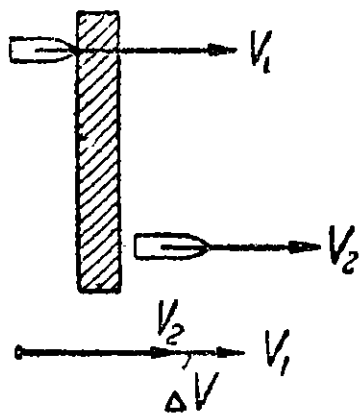


Рис. 43.

$$\Delta Q = \int_t^{t+\tau} F dt = S.$$

Слева стоит *конечный* скачок количества движения, справа также конечный импульс всех приложенных к точке сил во время удара, но продолжительность удара τ , как мы уже упоминали, крайне мала (порядка тысячных и десятитысячных долей секунды). Чтобы интеграл от функции в *очень малом интервале* аргумента мог дать *конечное* значение, необходимо, чтобы *интегрируемая функция была очень велика*, т. е. мы приходим к заключению, что во время удара должны образовываться очень большие силы взаимодействия. Что это за силы? Это, конечно, не обычные силы веса, тяготения, электрические и т. п., которые имеют конечную и при обычных условиях весьма ограниченную величину. При явлении удара появляются громадные силы упругости соударяющихся тел, соответствующие колоссальным замедлениям и последующим ускорениям тел при ударе. Эти силы, имея необычно значительную интенсивность, действуют крайне недолго и поэтому успевают произвести только конечный эффект—скачок в количествах движения. Чтобы оценить среднюю величину этой силы, укажем, например, что маленький стальной шарик веса 100 г, падая с высоты 4 м, ударяясь о плиту со скоростью около 9 м/сек, и отскакивая со скоростью 5 м/сек, при продолжительности удара $\tau = 0,0002$ сек. дает среднее значение силы удара около 700 кг.

Силы, развивающиеся при ударе тела о тело, называют *мгновенными* силами, желая оттенить те их особенности, о которых только что была речь.

Изучая явление удара, мы почти никогда не можем судить о законе изменения мгновенной силы во время удара, а считаемся только с эффектом действия мгновенной силы за промежуток вре-

мени удара. Таким образом, во все расчеты обычно входит не сама мгновенная сила, а ее импульс за время удара, т. е. вектор

$$S = \int_t^{t+\tau} F dt \quad (30)$$

который обычно называют ударом; мы будем, например, говорить: „к точке приложен удар“, „к системе точек приложены внешние удары“ и т. п., понимая под этим, что к точке или системе точек приложены мгновенные силы, импульсы которых за время соударения мы и называем ударами. Среднее значение мгновенной силы за время удара можно получить, разделив импульс S на продолжительность удара.

Определим, например, среднее значение мгновенной силы при ударе бабы весом 130 кг, падающей с высоты 6 м на сваю, если баба после соприкосновения со сваей движется с нею вместе в течение 0,1 сек. Скорость бабы в момент удара о сваю равна $\sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 6} = 10,85$ м/сек, ее количество движения будет $\frac{130 \cdot 10,85}{9,81} = 143$ кг. сек.

После удара количество движения равно нулю, так как баба не отскакивает от сваи. Импульс равен 143 кг. сек, а следовательно среднее значение мгновенной силы, забивающей сваю, равно $\frac{143}{0,1} = 1430$ кг, причем это — только среднее значение мгновенной силы, т. е. то значение, которое было бы у силы, если бы она была постоянна во все время удара. На самом деле эта сила переменна и имеет наряду с меньшими и большие значения.

Явление удара можно наблюдать не только на твердых телах, но и на жидких и газообразных. При закрывании кранов в трубах, а также всевозможных заслонок в гидравлических аппаратах мы получаем явление гидравлического удара. Приведем один пример. В трубе диаметром 150 мм движется столб воды длиной 10 м со скоростью 5 м/сек. Предположим, что движение преграждается краном в течение 0,1 сек. Тогда происходит быстрая остановка и удар жидкости о кран и стенки трубы с повышением давления. Это новышение давления легко подсчитать приближенно, если вычислить количество движения жидкого столба до остановки и разделить на время, в течение которого остановка произошла. Сечение трубы имеет площадь 1,76 дм², длина столба—100 дм, объем—176 дм³, т. е. вес столба—176 кг. Количество движения приблизительно (считаем скорости всех частиц одинаковыми) будет равно $\frac{176 \cdot 5}{9,81} = 90$ кг. сек, отсюда получаем среднее значение силы $\frac{90}{0,1} = 900$ кг или, переводя в давление на квадратный санти-

метр площади сечения (заслонки), получим $\frac{900}{176} = 5,1$ кг/см², т. е. около 5 атмосфер. Мы видим, что гидравлический удар может представлять большую опасность для правильной работы гидравлических

машин (турбин, насосов и пр.) По этой же причине следует крайне осторожно обращаться со стеклянными приборами, заключающими ртуть (тяжелее воды примерно в 13 раз). При быстром повороте чашечного барометра ртуть, больше чем на половину заполняющая трубку, может успеть разогнаться, приобрести благодаря значительной массе столба ртути большое количество движения и, ударившись о конец стеклянной трубки, разбить ее.

Интересно отметить, что та же идея удара лежит в основе замечательных работ Капицы по созданию электромагнитных полей громадных напряжений, но действующих очень малые времена. При помощи этих электромагнитных ударов удастся „разбивать“ атомные системы.

Мы можем теперь так проформулировать теорему импульсов (29) в применении к теории удара:

„Изменение количества движения системы за время удара равно главному вектору внешних ударов, приложенных к системе“.

Эта теорема, наряду с еще двумя теоремами, о которых будет речь в следующих темах, является основной для всей теории удара. Мы формулировали эту теорему на основании равенства (29), примененного к интервалу $(t, t + \tau)$. Учащийся заметит, что, хотя в правой части равенства (29) стоит сумма импульсов всех внешних сил, как мгновенных так и обычных, в окончательную формулировку вошли только удары, т. е. импульсы мгновенных сил. Объясняется это тем, что импульсы не мгновенных сил за время удара будут величинами того же порядка, что и продолжительность удара, т. е. пренебрежимо малыми по сравнению с импульсами мгновенных сил. Отсюда следует, что при рассмотрении удара можно совершенно опускать из рассмотрения все не мгновенные силы.

Покажем еще, что за время удара соударяющиеся тела не успевают переместиться в пространстве и поэтому могут считаться неподвижными.

Для этого из уравнения импульсов, написанного для одной точки в интервале (t_1, t) , где $t_1 < t < t_1 + \tau$:

$$m \mathbf{v} - m \mathbf{v}_1 = \int_{t_1}^t \mathbf{F} dt = \mathbf{S},$$

выведем

$$m \frac{d\mathbf{r}}{dt} - m \mathbf{v}_1 = \mathbf{S}$$

или, интегрируя за время удара $(t_1, t_1 + \tau)$:

$$\Delta \mathbf{r} - \mathbf{v}_1 \cdot \tau = \frac{1}{m} \int_{t_1}^{t_1 + \tau} \mathbf{S} dt,$$

а это показывает, что изменение положения точки есть величина порядка τ (так как $\mathbf{S}$ — конечный вектор). Отметим, что теорема движения центра инерции, изложенная в предыдущем задании, остается верна и для ударов, т. е. „центр инерции системы движется так, как будто в нем сосредоточена масса всей системы и к нему приложены все внешние удары.“

§ 14. Удар точки о преграду. Гипотеза Ньютона. Кинематический и динамический смысл коэффициента восстановления.

Рассмотрим явление удара материальной точки о преграду. Пусть в некоторый момент времени точка соприкасается с преградой (рис. 44), имея скорость v_1 , образующую с нормалью к стенке угол падения α , по прошествии малого промежутка времени τ точка отскакивает от стенки со скоростью v_2 , причем угол отражения равен β .

Перед нами задача: зная направление и величину скорости падения, найти величину и направление скорости отражения, а также вектор удара.

Решение этой задачи коренным образом зависит от упругих свойств самой материальной точки, а также и от свойств стенки, о которую точка ударяется.

Предположим, что точка и стенка идеально упруги и отполированы, тогда, разлагая скорости падения и отражения на нормальные и касательные составляющие, можно было бы утверждать, что

$$v_{2n} = v_{1n}, \quad v_{2t} = v_{1t},$$

а это означало бы, что $v_2 = v_1$ и $\alpha = \beta$. Кроме того, при этом легко было бы найти и импульс мгновенной силы, т. е. удар:

$$S = m v_2 - m v_1,$$

так как (учащегося не затруднит сделать чертеж)

$$S = 2 m v_1 \cos \alpha$$

и направлено перпендикулярно стенке снизу вверх.

На самом деле мы никогда не имеем дело с идеально упругими телами и отполированными поверхностями, поэтому необходимо ввести в теорию некоторые опытные коэффициенты.

Ньютон ввел гипотезу, которая и до сих пор применяется на практике. Содержание этой гипотезы в том, что отношение нормальной скорости отражения к нормальной скорости падения есть постоянная величина, не зависящая ни от скорости соударения, ни от размеров тел, а только от материала соударяющихся тел. По этой гипотезе

$$\frac{v_{2n}}{v_{1n}} = k, \quad (31)$$

где k — так называемый *коэффициент восстановления*.

Коэффициент восстановления характеризует, насколько восстанавливается нормальная составляющая скорости после удара. Если удар абсолютно упруг, $k = 1$; если, наоборот, мы имеем абсолютно неупругий удар, $k = 0$ — тела после удара не расходятся. На самом деле для обычных физических тел k есть некоторый коэффициент, лежащий между нулем и единицей:

$$0 < k < 1.$$

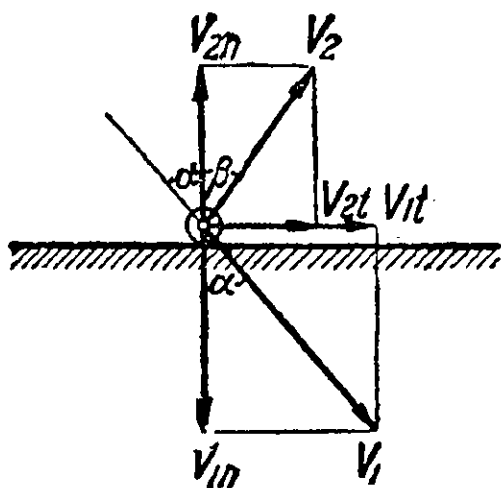


Рис. 44.

Приводим таблицу значений k для некоторых материалов.

Наименование ударяющихся тел	k
Дерево о гутаперчу	0,26
Деревянные шары	0,5
Стальные шары	5/9
Шары из слоновой кости	8/9
Стеклянные шары	0,94

Что касается изменения касательных составляющих скорости за время удара, то иногда вводят коэффициент мгновенного трения f , положив

$$\frac{v_{2t}}{v_{1t}} = f,$$

причем этот коэффициент должен быть определен из опыта. Иногда еще принимают, что касательный удар связан с нормальным так же, как обычная сила трения с нормальным давлением, причем за коэффициент трения принимают значение коэффициента трения для конечных, а не мгновенных давлений. Во всяком случае влияние трения меньше, чем упругости, поэтому удар по большей части определяют только коэффициентом восстановления, полагая $f=1$.

Найдем зависимость угла падения от угла отражения. Для этого заметим (рис. 44), что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{1t}}{v_{1n}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{v_{2t}}{v_{2n}},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \beta : \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_{2t}}{v_{1t}} : \frac{v_{2n}}{v_{1n}} = f : k,$$

или

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f}{k} \operatorname{tg} \alpha. \tag{32}$$

В случае идеально упругого удара и отсутствия трения $f=1$, $k=1$ мы получим

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha, \text{ т. е. } \beta = \alpha,$$

следовательно, в идеальном случае угол падения равен углу отражения.

На рис. 45 показан прибор для демонстрации зависимости углов падения и отражения. Скорость отражения может быть выражена через скорость падения так:

$$\begin{aligned} v_2 &= \sqrt{v_{2n}^2 + v_{2t}^2} = \sqrt{k^2 v_{1n}^2 + f^2 v_{1t}^2} = v_1 \sqrt{k^2 \cos^2 \alpha + f^2 \sin^2 \alpha} = \\ &= v_1 k \cos \alpha \sqrt{1 + \left(\frac{f}{k}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} = v_1 k \cos \alpha \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = v_1 k \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}. \end{aligned}$$

Импульс силы при ударе получим, проектируя удар S на касательную и нормаль:

$$S_t = m(v_{2t} - v_{1t}) = mv_{1t}(f - 1) = -m(1 - f)v_1 \sin \alpha,$$

$$S_n = m(v_{2n} - v_{1n}) = mv_{1n}(k + 1) = m(1 + k)v_1 \cos \alpha,$$

а отсюда получим и величину самого импульса

$$S = mv_1 \sqrt{(1 - f)^2 \sin^2 \alpha + (1 + k)^2 \cos^2 \alpha}.$$

Если пренебречь импульсом трения, то ($f = 1$) полный импульс сведется к величине

$$S = mv_1(1 + k) \cos \alpha \quad (33)$$

и будет направлен нормально к преграде. Из последней формулы видно, что чем больше коэффициент восстановления, тем больше и удар. При прочих равных условиях удар при абсолютной упругости ($k = 1$) в два раза превосходит удар при абсолютной неупругости ($k = 0$).

В гипотезе Ньютона коэффициент восстановления имеет кинематический смысл, именно, он определяется, как отношение скорости отражения к скорости падения. Можно дать этому коэффициенту и простой динамический смысл. Для этого разобьем весь промежуток удара τ на два: 1) промежуток τ_1 от момента первого соприкосновения до максимального сближения ударяющихся тел; в течение этого промежутка времени поверхности тел деформируются, сжимаясь до максимального значения деформации, и 2) промежуток τ_2 от момента максимального сближения до момента отделения поверхностей друг от друга; в этом промежутке происходит восстановление недеформированного состояния тел.

Если удар абсолютно упруг, то деформации полностью уничтожаются и явление протекает симметрично в интервалах τ_1 и τ_2 , которые равны между собой. Если удар абсолютно неупруг, то второй интервал τ_2 вообще отсутствует — явление удара заканчивается максимальной деформацией поверхностей без восстановительного этапа. Наконец, при неидеальном случае физического удара мы имеем оба этапа, но они уже не симметричны, деформации полностью не восстанавливаются, они частично остаются, как, например, при процессековки металла.

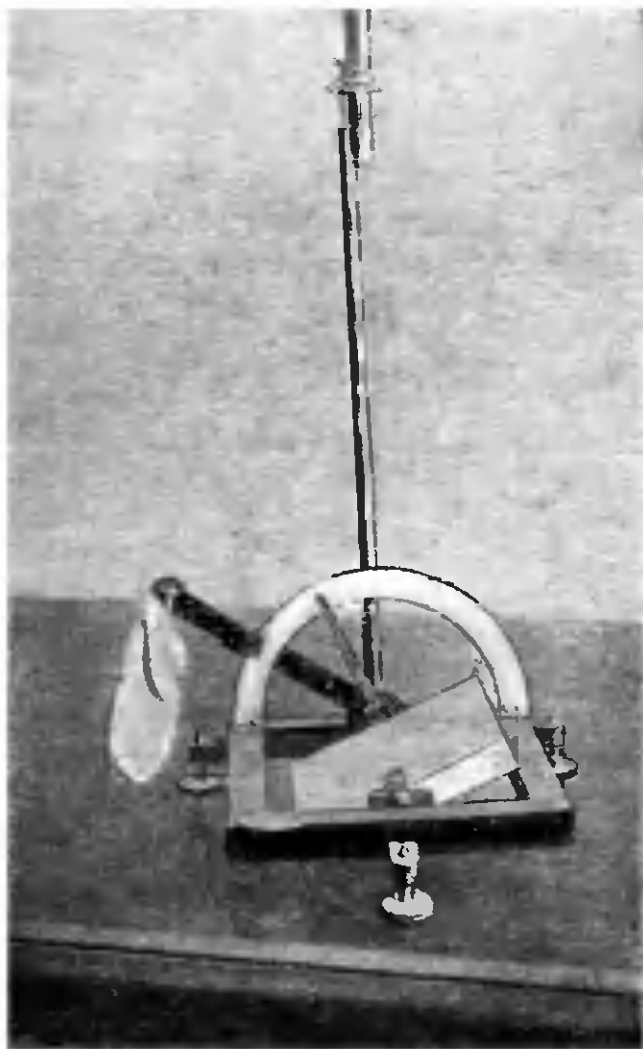


Рис. 45. Прибор для демонстрации явления удара. (Модель кабинета механики Ленингр. Физико-механического института).

В интервале τ_1 количество движения mv_1 уменьшается до нуля, что соответствует импульсу

$$S_1 = \int_t^{t+\tau_1} F dt = -mv_1,$$

во втором интервале количество движения увеличивается от нуля до mv_2 , а это дает импульс

$$S_2 = \int_{t+\tau_1}^{t+\tau} F dt = mv_2.$$

Второй импульс всегда по величине меньше первого, так как при ударе происходит потеря некоторого количества движения.

Легко видеть, что *отношение численных величин импульсов второго и первого этапов равно коэффициенту восстановления:*

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{mv_2}{mv_1} = \frac{v_2}{v_1} = k. \quad 1)$$

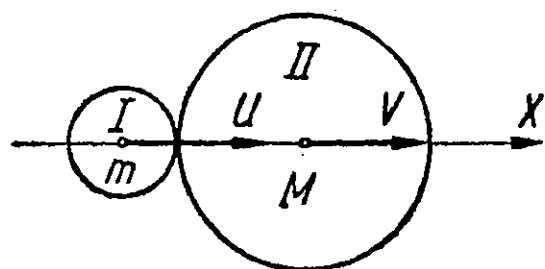


Рис. 46.

По направлению импульсы S_1 и S_2 одинаковы и складываются в полный импульс за время удара:

$$S = S_1 + S_2 = mv_2 - mv_1.$$

Мы видим, что импульсы отдельных этапов определяются по количествам движения при падении и отражении, что же касается среднего значения мгновенной силы, то оно может быть определено лишь по наблюдаемым временам τ_1 и τ_2 . К этому вопросу мы вернемся в конце задания при рассмотрении теорин Герца.

Примеры и упражнения.

1. **Прямой удар двух шаров.** Прямым ударом двух шаров называется такой их удар, при котором направление абсолютных скоростей центров шаров в первый момент соприкосания (начало удара) совпадает с линией центров шаров. Обозначим вектор скорости I шара (рис. 46) через u , а массу—через m , II шара— v и M .

Для того, чтобы удар был вообще возможен, необходимо прежде всего, чтобы до удара относительная скорость, например, первого шара по отношению ко второму была направлена к центру второго, т. е. чтобы

$$u_{1x} - v_{1x} > 0, \quad (34)$$

в противном случае шары не будут сталкиваться. Условие (34) означает, что или первый шар нагоняет второй ($u_{1x} > 0, v_{1x} > 0$) или шары двигаются навстречу друг другу ($u_{1x} > 0, v_{1x} < 0$); очевидно u_{1x} всегда можно считать положительным, направляя соответственно ось X .

1) Мы рассмотрели для простоты прямой удар. В случае косого удара следует повторить то же рассуждение для нормальных составляющих.

Перед нами стоит задача определения абсолютных скоростей шаров после удара, а также импульсов мгновенных сил, развивающихся при ударе.

Для решения первой части задачи применим теорему импульсов. Удар между шарами — внутренний, никаких внешних ударов нет, поэтому полное количество движения системы двух шаров до удара и после удара — одно и то же.

Имеем выражение этого результата в проекциях на ось X :

$$m u_{1x} + M v_{1x} = m u_{2x} + M v_{2x}. \quad (35)$$

В этом уравнении две неизвестных: u_{2x} и v_{2x} , задача неопределенная и остается, естественно, такою до тех пор, пока мы не зададимся характером удара, т. е. не зададим коэффициент восстановления.

В данном случае мы не имеем явления удара тела о неподвижную преграду; оба тела двигаются, поэтому под коэффициентом восстановления следует понимать частное от *разделения относительной скорости отражения к относительной скорости падения*, т. е.

$$k = \frac{v_{2x} - u_{2x}}{u_{1x} - v_{1x}}, \quad (36)$$

здесь знаки выбраны так, чтобы k было больше нуля. Таким образом мы получили второе уравнение, доопределяющее решение нашей задачи. Из этих двух уравнений найдем:

$$\left. \begin{aligned} u_{2x} &= \frac{(m - kM) u_{1x} + M(1 + k) v_{1x}}{M + m} \\ v_{2x} &= \frac{m(1 + k) u_{1x} + (M - km) v_{1x}}{M + m} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Первая часть задачи решена, для решения второй части определения удара S применим теорему импульсов *только к первому шару*, тогда внутренний удар в системе станет внешним ударом по отношению к первому шару и мы сможем написать

$$S_x = m(u_{2x} - u_{1x}),$$

откуда по (37)

$$S_x = -(1 + k) \frac{mM}{m + M} (u_{1x} - v_{1x}). \quad (38)$$

Знак минус при положительности остальных сомножителей [вспомнить условие (34)] говорит о направлении удара, приложенного к первому шару. Ко второму шару будет приложен такой же импульс, но в обратном направлении.

Рассмотрим некоторые частные случаи:

а) Абсолютно-упругий удар

$$(k = 1).$$

В этом случае формулы (37) и (38) дают:

$$\left. \begin{aligned} u_{2x} &= \frac{(m-M)u_{1x} + 2Mv_{1x}}{M+m} \\ v_{2x} &= \frac{2mu_{1x} + (M-m)v_{1x}}{M+m} \\ S_x &= -2\frac{mM}{m+M}(u_{1x} - v_{1x}) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

если массы шаров кроме того равны, то:

$$u_{2x} = v_{1x},$$

$$v_{2x} = u_{1x};$$

чрезвычайно интересный с физической стороны результат: *шары обменялись скоростями, а следовательно и количествами движения*. Таким путем происходит перенос количества движения в жидкостях и газах при сталкивании молекул. Шары, как будто, просто поменялись местами или проникли друг сквозь друга. Если, например, второй шар был неподвижен, а первый о него ударился, то второй придет в то движение, которое было у первого, а первый встанет на его место и будет неподвижен.

Все эти явления, а также и много других можно наблюдать на приборе, показанном на рис. 47.

б) Абсолютно неупругий удар ($k=0$).

Уравнения (37) принимают вид:

$$u_{2x} = \frac{mu_{1x} + Mv_{1x}}{M+m},$$

$$v_{2x} = \frac{mu_{1x} + Mv_{1x}}{M+m}.$$

Мы видим, что после удара скорости шаров становятся одинаковыми; это и естественно, так как шары после удара не расходятся, а двигаются вместе.

Если один шар до удара был неподвижен ($v_{1x}=0$), то после удара устанавливается скорость:

$$u_{2x} = v_{2x} = \frac{m}{M+m} u_{1x}.$$

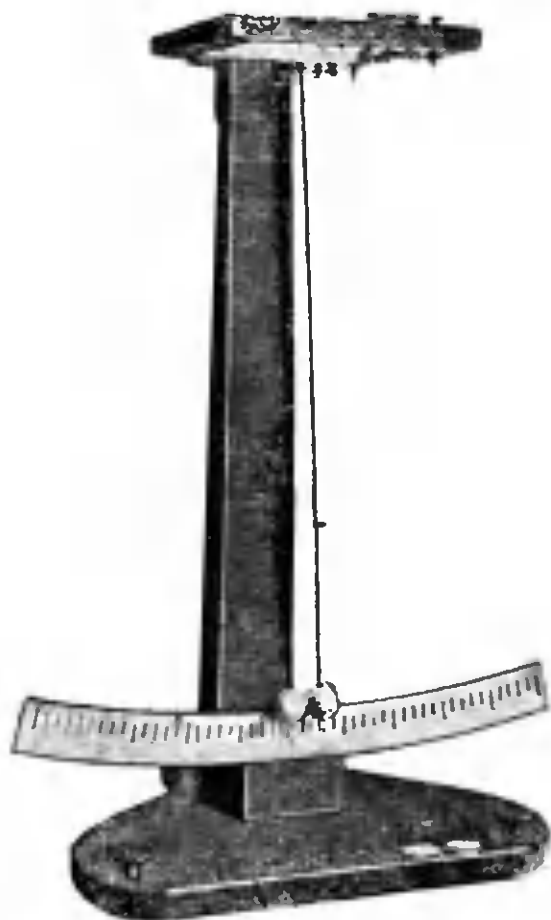


Рис. 47. Прибор для демонстрации удара шаров. (Модель кабинета механики Ленинградского Физико-механич. института).

Импульс силы при ударе равен

$$S = \frac{mM}{m+M} (u_{1x} - v_{1x}),$$

т. е. в два раза меньше, чем при абсолютно упругом ударе.

в) *Удар шара о преграду.* Этот случай, уже рассмотренный нами в § 14, можно получить из формул (37), если положить $v_{1x} = 0$,

$\frac{m}{M} = 0$, т. е. $M = \infty$. Деля числителя и знаменателя на M и переходя к пределу, когда $M = \infty$, получим:

$$\begin{aligned} u_{2x} &= -ku_{1x}, \\ v_{2x} &= 0, \end{aligned}$$

в полном соответствии с ранее изложенным.

Возвратимся к *общему* случаю. Введем в рассмотрение скорость движения центра тяжести с системы шаров; эта скорость будет одинаковой как до удара, так и после удара в силу того, что удар внутренний и, следовательно, на движение центра тяжести повлиять не может. По определению центра тяжести скорость его будет

$$c_x = \frac{mu_{1x} + Mv_{1x}}{m+M} = \frac{mu_{2x} + Mv_{2x}}{m+M}, \quad (40)$$

кроме того:

$$\left. \begin{aligned} c_x - u_{1x} &= \frac{M(v_{1x} - u_{1x})}{m+M} \\ c_x - v_{1x} &= \frac{m(u_{1x} - v_{1x})}{m+M} \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Переписывая равенства (37) в виде:

$$\begin{aligned} u_{2x} &= \frac{mu_{1x} + Mv_{1x}}{m+M} - k \frac{M}{m+M} (u_{1x} - v_{1x}), \\ v_{2x} &= \frac{mu_{1x} + Mv_{1x}}{m+M} + k \frac{M}{m+M} (u_{1x} - v_{1x}), \end{aligned}$$

и, пользуясь формулами (40) и (41), найдем:

$$\left. \begin{aligned} u_{2x} &= c_x + k(c_x - u_{1x}) \\ v_{2x} &= c_x + k(c_x - v_{1x}) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Скорость центра тяжести очевидно можно рассматривать и как общую скорость шаров в конце первого этапа удара, когда относительная скорость шаров стала равна нулю, чтобы после этого возрасти при отталкивании шаров.

Мы разбили сравнительно сложные системы формул (37) на две более простых: (40) и (42). В таком виде результат может быть сведен к простому графическому построению (диаграмма Максвелла), которое будет нами изложено в более общем случае *косого* удара шаров, в следующем упражнении.

2. Косой удар шаров. Диаграмма Максвелла. Косым ударом шаров называется такой удар двух шаров, при котором абсолютные скорости центров не направлены по линии центров (рис. 48). Мы отвлечемся от шероховатости поверхностей и примем во внимание только упругие явления; тогда, разлагая относительные скорости падения и отражения на направление общей нормали и на касательную, будем иметь для нормальных составляющих те же формулы, что и в предыдущем упражнении для прямого удара, т. е.

$$\left. \begin{aligned} u_{2n} &= c_n + k(c_n - u_{1n}) \\ v_{2n} &= c_n + k(c_n - v_{1n}) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

где

$$c_n = \frac{mu_{1n} + Mv_{1n}}{m + M} = \frac{mu_{2n} + Mv_{2n}}{m + M}. \quad (44)$$

Что касается касательных составляющих, то они при отсутствии трения останутся неизменными:

$$u_{1t} = u_{2t}, \quad v_{1t} = v_{2t}. \quad (45)$$

Формулы (43), (44) и (45) и дают решение задачи. Импульс определится по (34):

$$S_n = -(1 + k) \frac{mM}{m + M} (u_{1n} - v_{1n}) \quad (46)$$

Рис. 48.

Дадим графическое построение полученного результата, предложенное

Максвеллом в 1860 г. Для этого заметим прежде всего, что по заданным векторам скоростей до удара u_1 и v_1 легко построить вектор c ; достаточно соединить концы векторов u_1 и v_1 на диаграмме (рис. 49) и на полученном отрезке отложить точку, делящую отрезок обратно пропорционально массам шаров. Далее из конца вектора v_1 опустим перпендикуляр на ось t и, продолжив его, отложим отрезок, который относился бы к длине перпендикуляра, как $k : 1$, конец отрезка определит нам конец вектора v_2 , проведенного из общего полюса скоростей O . Проведя затем через концы векторов v_2 и c прямую до пересечения с перпендикуляром, опущенным из конца вектора u_1 на ту же ось t , получим в точке пересечения конец вектора u_2 , начало которого также в полюсе диаграммы.

Правильность построения очевидна из того, что, во-первых, проекции u_{1t} и u_{2t} равны между собой, точно так же $v_{1t} = v_{2t}$, так что условия (45) выполнены, во-вторых, проекции на n векторных разностей $u_2 - c$ и $c - u_1$, а также $v_2 - c$ и $c - v_1$ относятся между собой, как $k : 1$, что соответствует уравнениям (43).

Указанное построение еще упрощается, если удар можно рассматривать как абсолютно упругий. В этом случае $k = 1$ и концы векторов u_2 и v_2 получаются простым зеркальным отображением

концов векторов u_1 и v_1 относительно оси t , проведенной через конец вектора c (рис. 50).

Пользуясь выведенными формулами или графическим методом Максвелла, можно легко решать задачи на прямой и косой удар шаров, а также и других тел, если по характеру движения отличие их от шаров не имеет значения.

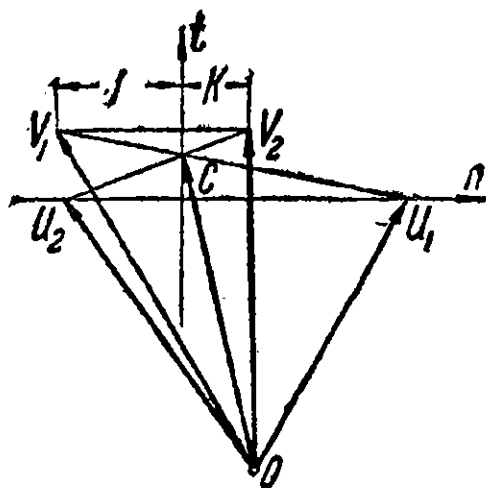


Рис. 49.

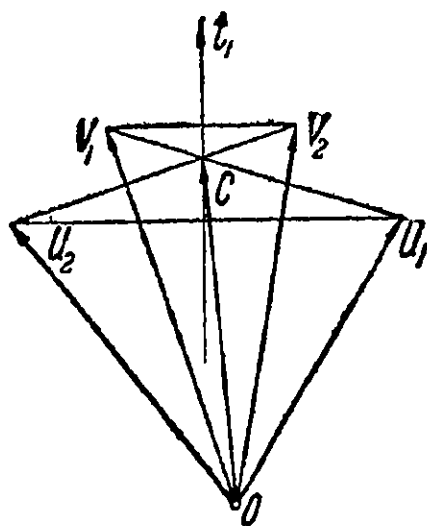


Рис. 50.

Заметим, что построение Максвелла легко выполнимо и для случая прямого удара. В этом случае (и при $k=1$ и при $k \neq 1$) диаграмма вытянется в одну линию, так как вектора u_1 , v_1 и u_2 , v_2 будут лежать на одной прямой; на этой же прямой будет находиться и точка O .

Очень любопытен случай косого удара, когда один шар, напр. II, до удара неподвижен; при этом $v_1=0$ и получаются диаграммы, изображенные на рис. 51 (мы взяли случай абсолютно упругого удара). Диаграмма а) относится к случаю неравных масс, диаграмма б) — к случаю равных масс. В последнем случае скорость налетающего шара является биссектрисой прямого угла, под которым разлетаются шары, причем скорости их равны одной и той же величине $u_1 \frac{\sqrt{2}}{2}$.

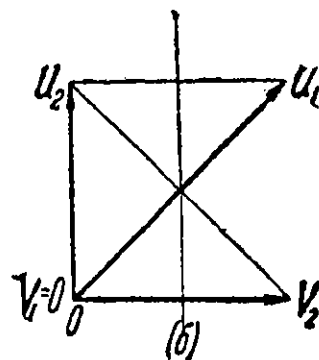
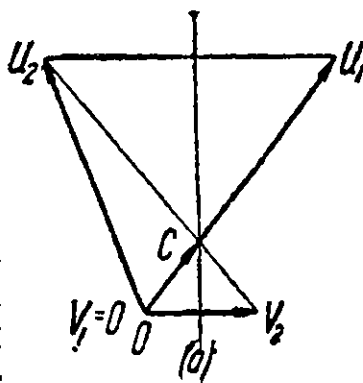


Рис. 51.

§ 15. Теория удара шаров по Герцу.

Герц (1881) предложил в высшей степени остроумную и простую теорию деформации тел при ударе, основанную на одной формуле теории упругости, которую мы дадим без вывода.

Если два шара радиусов r_1 и r_2 из разных материалов давят друг на друга некоторой силой F , то сближение ξ их центров при

деформации поверхностей соприкосновения связано с силой давления F соотношением

$$F = \gamma \xi^{3/2}, \quad (47)$$

где γ — коэффициент, зависящий от упругих свойств наших тел, а также и их размеров, т. е. радиусов. Зависимость эта дается формулой:

$$\gamma = \frac{16}{3} \frac{1}{\vartheta_1 + \vartheta_2} \sqrt{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}, \quad (48)$$

здесь константы ϑ_1 и ϑ_2 выражаются через упругие коэффициенты тел, именно, через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона σ по формулам:

$$\vartheta_1 = \frac{4(1 - \sigma_1^2)}{E_1}, \quad \vartheta_2 = \frac{4(1 - \sigma_2^2)}{E_2}. \quad (49)$$

Эти формулы Герца выведены из рассмотрения *равновесия* взаимно деформирующихся шаров при нажатии их друг на друга силой F , но Герц кладет их в основу теории *удара* шаров.

Предположим, что два шара радиусов r_1 и r_2 и масс M_1 и M_2 двигались к началу удара со скоростями v_1 и v_2 , тогда после начала удара и до конца его относительная их скорость может быть выражена через изменение расстояния между центрами шаров (смещение при деформации) так:

$$v_{1x} - v_{2x} = \frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi}.$$

Замечая, что скорость v_{1x} одного из шаров, например первого, во время удара может быть выражена через скорость c_x общего центра тяжести по формуле

$$v_{1x} = c_x + \frac{M_2(v_{1x} - v_{2x})}{M_1 + M_2} = c_x + \frac{M_2}{M_1 + M_2} \dot{\xi}.$$

Напишем уравнение количеств движения для первого шара:

$$\frac{d}{dt}(M_1 v_{1x}) = \frac{d}{dt} M_1 \left(\frac{M_2 \dot{\xi}}{M_1 + M_2} \right) = -F = -\gamma \xi^{3/2}.$$

или

$$\ddot{\xi} = -\gamma \mu \xi^{1/2}, \quad (50)$$

где через μ обозначено

$$\mu = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}. \quad (51)$$

Будем интегрировать уравнение Герца тем приемом, который мы уже применяли в первом задании. Положим

$$\dot{\xi} = \eta; \quad \ddot{\xi} = \frac{d\eta}{dt} = \frac{d\eta}{d\xi} \cdot \dot{\xi} = \frac{d\eta}{d\xi} \eta,$$

тогда ур-ние (50) переходит в такое:

$$\eta \frac{d\eta}{d\xi} = -\mu \gamma \xi^{3/2};$$

это уравнение с отделяющимися переменными. Переписывая его в виде

$$\eta d\eta = -\mu \gamma \xi^{3/2} d\xi$$

и интегрируя по ξ и η от начала удара ($\xi=0$, $\eta=\xi_0=v_{10}-v_{20}=V_0$) до какого-то промежуточного момента времени удара, получим

$$\frac{1}{2}(\eta^2 - V_0^2) = -\frac{2}{5}\mu \gamma \xi^{5/2}. \quad (52)$$

Из этого уравнения сразу можно найти максимальное сближение шаров, соответствующее максимальной их деформации, для этого достаточно положить $\eta=\xi=0$ (конец первого этапа удара, остановка перед восстановлением деформаций). Обозначая максимальное сближение через ξ_m , будем иметь

$$\xi_m = \left(\frac{5V_0^2}{4\mu\gamma} \right)^{2/5} \quad (53)$$

Для нашего случая шаров, подставляя значения μ и γ , получим

$$\xi_m = \left[\frac{15(\vartheta_1 + \vartheta_2) M_1 M_2}{64(M_1 + M_2)} \right]^{2/5} \cdot \left[\frac{r_1 + r_2}{r_1 \cdot r_2} \right]^{1/5} V_0^{4/5}. \quad (54)$$

Отсюда можно найти и максимальную силу давления между шарами:

$$F_m = \gamma \xi_m^{3/2} = \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{(\vartheta_1 + \vartheta_2)^{3/2}} \left[\frac{15 M_1 M_2}{64(M_1 + M_2)} \right]^{3/2} \left(\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right)^{1/2} V_0^{6/5}. \quad (55)$$

Переходя теперь к вычислению продолжительности удара T_0 имеем, согласно (52):

$$\eta^2 = \xi^2 = V_0^2 - \frac{4}{5}\mu \gamma \xi^{5/2}, \quad (56)$$

или, воспользовавшись ф-лой (53):

$$\xi^2 = V_0^2 \left\{ 1 - \left(\frac{\xi}{\xi_m} \right)^{5/2} \right\}.$$

Отсюда находим

$$\frac{d\xi}{dt} = \dot{\xi} = \pm V_0 \left\{ 1 - \left(\frac{\xi}{\xi_m} \right)^{5/2} \right\}^{1/2},$$

причем верхний знак нужно взять в течение первого промежутка процесса удара $(0, t_1)$, когда шары сближаются и ξ возрастают ($\dot{\xi} > 0$), а нижний в течение второго промежутка (t_1, T_0) , когда $\dot{\xi} < 0$ и центры шаров удаляются друг от друга.

Получаем:

$$V_0 dt = \pm \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_m} \right)^{5/2}}},$$

и следовательно

$$V_0 t_1 = V_0 \int_0^{t_1} dt = + \int_0^{\xi_m} \frac{d\xi}{V \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_m}\right)^{5/2}}}$$

$$V_0 (T_0 - t_1) = V_0 \int_{t_1}^{T_0} dt = - \int_{\xi_m}^0 \frac{d\xi}{V \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_m}\right)^{5/2}}} = - V_0 t_1.$$

Итак

$$T_0 = 2t_1 = \frac{2}{V_0} \int_0^{\xi_m} \frac{d\xi}{V \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_m}\right)^{5/2}}} = \frac{2\xi_m}{V_0} \int_0^{\xi_m} \frac{d\left(\frac{\xi}{\xi_m}\right)}{V \sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{\xi_m}\right)^{5/2}}}.$$

Вводя новое переменное интегрирования $\alpha = \frac{\xi}{\xi_m}$, получим

$$T_0 = \frac{2\xi_m}{V_0} \int_0^1 \frac{d\alpha}{V \sqrt{1 - \alpha^{5/2}}}. \quad (57)$$

Интеграл, фигурирующий в этой формуле, может быть вычислен одним из методов приближенного численного интегрирования¹⁾; получим

$$\int_0^1 \frac{d\alpha}{V \sqrt{1 - \alpha^{5/2}}} = 1,4716,$$

и следовательно

$$T_0 = 2,9432 \frac{\xi_m}{V_0}.$$

Для двух латунных шариков диаметром 26 мм при относительной скорости $V_0 = 73,7$ мм/сек, принимая

$$\sigma = 0,3, E = 0,9 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2,$$

находим, вычисляя по полученным формулам:

$$T_0 = 181 \cdot 10^{-6} \text{ сек.};$$

опыты Намбургера (1886) для этого случая дают $T_0 = 196 \cdot 10^{-6}$. Другие результаты опытов с теми же шариками и вычислений по формулам Герца приведены в таблице:

¹⁾ Учащийся, знакомый с теорией Эйлеровых интегралов, без труда докажет:

$$\int_0^1 \frac{d\alpha}{V \sqrt{1 - \alpha^{5/2}}} = \frac{2}{5} V \pi \frac{\Gamma\left(\frac{2}{5}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{10}\right)}$$

откуда по таблицам функций гамма и получается вышеуказанное значение интеграла.

V_0 в м/сек	73,7	122,9	192,1	295
T_0 в сек., вычисленное .	$181 \cdot 10^{-6}$	$164 \cdot 10^{-6}$	$150 \cdot 10^{-6}$	$138 \cdot 10^{-6}$
T_0 в сек., по опыту . .	$196 \cdot 10^{-6}$	$173 \cdot 10^{-6}$	$157 \cdot 10^{-6}$	$148 \cdot 10^{-6}$

Опыты Динника обнаруживают хорошее совпадение с теорией Герца для стальных шаров; для шаров, изготовленных из цинка, совпадение становится худшим; наконец, для свинцовых шариков никакого совпадения опыта и теории не получается. Подробности относительно этих опытов, а также рассмотрение напряжений, возникающих при ударе шаров, учащийся может найти в работах Динника (Журнал Русского Физико-химич. об-ва, 1914, том 41; Известия Киевского Политехнического института, 1909).

Задачи и вопросы.

1. Пушка весом 8 т выпускает снаряд весом 25 кг со скоростью 500 м/сек. Определить скорость отката пушки в момент выстрела, а также коэффициент трения подвижного лафета о землю, если расстояние, на которое откатывается пушка, равно 4 м.

2. После вылета из дула ядро распалось на две части, полетевшие в направлении выстрела одна за другой. Вес одной части — 5,5 кг и скорость — 210 м/сек, другой — 9 кг и 130 м/сек. Определить количество движения ядра до того, как оно раскололось.

3. Топор весом 1,2 кг входит в полено со скоростью 15 м/сек и тормозится в нем в течение 0,002 сек. Определить среднее значение мгновенной силы, развивающейся при ударе.

4. Доказать, что горизонтальная струя воды, вытекающая из сосуда под некоторым напором, давит на поставленную вблизи отверстия перпендикулярно струе пластинку силой, равной по величине и противоположной по направлению горизонтальной реакции струи на сосуд, из которого она выходит.

5. Сравнить формулу сопротивления пластинки, обтекаемой безграничным потоком, данную в упражнениях к первому заданию, с формулами давления ограниченной струи на ту же пластинку при условии, что поток перпендикулярен к пластинке. Считая ширину набегающей струи равной ширине пластинки, определить угол срыва струй с пластинки так, чтобы коэффициент сопротивления совпадал с опытным 0,6.

6. Струя воздуха выходит из цилиндрической трубки (сопла) диаметром 8 мм со скоростью 15 м/сек и ударяется в вогнутую поверхность одного из полушарий анемометра Робинсона. Определить давление струи на полушарие, если анемометр делает 1000 об/мин и радиус вращения равен 4 см.

Указание. При расчете давления нужно брать разность скоростей струи и полушария, т. е. вести расчет так, как будто полушарие неподвижно, а скорость набегающей струи равна относительной скорости струи и полушария.

7. По трубе длиной в 15 м движется вода со скоростью 18 м/сек. Опуская заслонку, останавливают всю массу воды в течение 0,1 сек. Какое давление на заслонку разовьется вследствие этого гидравлического удара?

Указание. Диаметр трубы не задается, но его величина и не нужна, так как разыскивается давление, т. е. сила на единицу площади.

8. Железнодорожный вагон весом 25 т,двигающийся со скоростью 12 км/час, нагоняет другой железнодорожный вагон весом 20 т,двигающийся со скоростью 8 км/час. Какова будет скорость вагонов после столкновения, если удар в буферах считать абсолютно упругим?

9. Молот весом 4,5 кг ударяется о наковальню весом 4 т со скоростью 6 м/сек. Определить скорость отражения молота, если коэффициент восстановления равен 0,5.

10. Гвоздь весом 0,1 кг вбивается в стену молотком весом 2 кг, ударяющимся о шляпку гвоздя со скоростью 5,6 м/сек. Считая, что удар абсолютно не упруг и зная, что после каждого удара гвоздь входит в стену на 5 мм, определить среднее значение сопротивления стены.

11. Струя из брандсбоя, отверстие которого имеет диаметр 4 см, вылетает со скоростью 10 м/сек, и ударяется в стенку под углом 45°. Определить давление струи на стену.

12. Определить давление на опору для колена трубы (рис. 52) диаметром $d=300$ мм, по которой течет вода со скоростью 2 м/сек.

13. Из крана, находящегося на высоте $h=2$ м над горизонтальным полом, вытекает горизонтально струя воды. Расход $Q=10$ л/сек. Определить давление струи на пол.

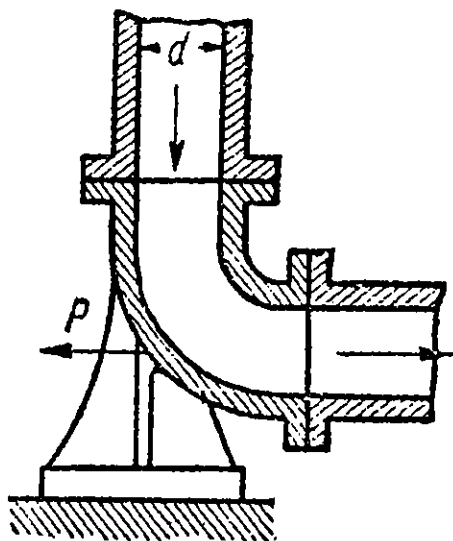


Рис. 52.

Тема вторая.

Теорема моментов.

В первой теме были изложены теоремы движения центра инерции и количества движения и даны разнообразные приложения этих теорем к изучению ряда физических явлений и технических вопросов. Во всех этих приложениях речь шла или о движении одной материальной точки, или о *поступательном* движении системы материальных точек, или, наконец, о движении центра инерции системы материальных точек. *Вращательное* же движение системы (хотя бы в простейшем случае вращение твердого тела) не может быть изучено при помощи методов, даваемых теоремами движения центра инерции и количества движения. Это объясняется тем, что динамическим элементом, определяющим вращательное движение, являются *моменты сил*, действующих на систему, но не на сами эти силы. Поэтому естественно, что, желая изучить вращательное движение, мы должны моменты сил связать не просто с кинематическими элементами движения и материальными характеристиками движущихся тел, как, например, количество движения, а с их моментами. Это и приводит к теореме моментов количества движения.

Вращательное движение принадлежит к числу наиболее распространенных и технически важных движений; с другой стороны, как известно из Кинематики, всякое движение может быть разложено на вращательное и поступательное. Поэтому приложения теоремы моментов весьма разнообразны и плодотворны. Этими изложениями, далеко не исчерпывая всех возможностей, мы занимаемся в ряде заданий настоящей темы.

Теорема моментов устанавливается в четвертом задании, т. е. первом задании этой темы. Как первое и наиболее важное приложение теоремы моментов в следующем задании рассматривается вопрос о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси. Техническая важность и распространенность этого случая движения, о которых уже говорилось в Кинематике, позволяют иллюстрировать теорию большим числом разнообразных приложений. Наряду с этим, в пятом задании учащийся впервые встретится с новой важной механической величиной — моментом инерции тела относительно оси, приучится к вычислению моментов инерции и ознакомится с экспериментальными методами определения их.

Целью шестого задания является разрешение важной практической задачи о динамическом уравнивании вращающегося тела, т. е. вопроса о том, как создать такие условия, при которых не создавались бы дополнительные динамические воздействия

на подшипники оси тела. Особенная важность этой задачи объясняется громадными угловыми скоростями в современном машиностроении: дело в том, что динамические воздействия на подшипники оси возрастают пропорционально квадрату угловой скорости вращения тела, так что повышение угловой скорости, например в 2 раза, увеличивает опасности от динамической неуравновешенности уже в 4 раза. В задачу курса теоретической механики может, конечно, входить только постановка вопроса о динамическом уравнивании, его теоретическое разрешение и некоторые простейшие иллюстрации. Технические подробности относятся к курсам динамики машин и двигателей.

Седьмое задание посвящено теореме моментов в относительном движении по отношению к центру инерции. Напомним, что классическая механика, механика Ньютона, относит движения к некоторой неподвижной координатной системе — практически такой системой является земля или в специальных вопросах, когда вращение земли надо учесть, система, связанная с „неподвижными“ звездами. Поэтому, желая применять теорему моментов по отношению к некоторой движущейся системе, мы должны предварительно выяснить, какие изменения в формулировке этой теоремы влечет за собой такая перемена координатной системы. Оказывается, что, взяв систему осей, поступательно движущуюся вместе с центром инерции, мы можем применять теорему моментов по отношению к центру инерции в той же формулировке, что и в случае неподвижной системы координат.

Распространив теорему моментов на область относительного движения по отношению к центру инерции, мы вместе с тем получаем возможность рассматривать это движение независимо от движения центра инерции. Как первое и наиболее важное применение этого обстоятельства, получается полная система Уравнений динамики плоского движения, которой главным образом и посвящена практическая часть седьмого задания.

Теория гироскопических явлений, т. е. явлений, сопровождающих всякий поворот оси быстро вращающегося тела, к которой мы переходим в последнем задании темы, охватывает большое число чисто технических вопросов и ставит ряд весьма важных теоретических проблем. Из всей этой громадной области в задачу общего курса механики может войти только изложение самых простых результатов и методов и иллюстрация их на ряде примеров.

Мы будем считать свою задачу выполненной, если учащийся в результате изучения этого задания, научившись самостоятельно разбираться хотя бы в качественной стороне гироскопических явлений, получит интерес к дальнейшему изучению теории гироскопов и обратится к специальным, посвященным ей сочинениям¹⁾.

¹⁾ См., например, прекрасную книгу А. Н. Крылова и Ю. А. Круткова Общая теория гироскопов и некоторых их технических применений. Издательство Академии Наук СССР, Лнг, 1932.

Методические указания по второй теме. При прохождении этой темы учащийся должен прежде всего усвоить общую формулировку теоремы моментов количеств движения как для точки, так и для системы материальных точек, чтобы затем свободно применять эти теоремы к ряду задач, изложенных в остальных заданиях. Необходимо четко различать при этом случаи, когда теорема моментов применяется в проекциях (случай неподвижной оси) или в векторной форме (теорема Резаля и ее применения).

Из всех применений теоремы моментов, независимо от той или иной специальности учащегося, особенно важным является случай вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, разбираемый в пятом задании. В порядке развития применений укажем далее на плоское движение и теорию гироскопов, имеющую уже более узкое и специальное значение.

Для того, чтобы в дальнейшем свободно применять теорему моментов при проработке пятого задания, необходимо научиться вычислять моменты инерции и усвоить механическое содержание понятия о моменте инерции, как о материальной константе тела, учитывающей распределение массы его относительно оси вращения и имеющей то же значение в вопросах вращательного движения, что и масса в случае движения поступательного.

Общие методические указания (необходимость твердо знать формулировки основных теорем, помнить ряд важнейших формул, приступать к решению задач не ранее полного усвоения всего материала задания), которые были даны в первой теме, конечно, сохраняют свое значение и здесь. Более подробные методические указания даются перед каждым заданием в отдельности, а также по всему тексту книги.

Задание 4-е.

Теорема моментов количеств движения для точки и системы материальных точек.

Это небольшое по объему теоретического материала задание посвящено выводу теоремы моментов сначала в случае одной материальной точки, а потом и для системы точек. На этой теореме будет базироваться все дальнейшее содержание темы и по мере того, как будет умножаться число конкретных приложений теоремы моментов, значение ее будет становиться для учащегося все более и более наглядным и та, на первый взгляд, искусственно придуманная мера движения, о которой будет все время идти речь (момент количеств движения), приобретет конкретность и реальное содержание.

Учащийся, интересующийся преимущественно техническими приложениями, может без ущерба для понимания дальнейшего, опустить первый и второй примеры § 17 и сосредоточить свое внимание на изучении теории и примеров математического маятника и гидравлической турбины. Вывод и формулировку теоремы мо-

ментов учащийся должен хорошо разобрать и запомнить. Многочисленные технические приложения теоремы моментов будут даны в следующих заданиях; чтобы перейти к этим приложениям, учащийся должен будет предварительно ознакомиться с некоторыми новыми важными понятиями и формулами. Поэтому непосредственные приложения, которые могут быть даны уже сейчас, весьма немногочисленны, и этим объясняется, почему настоящее задание не снабжено, как обычно, контрольными задачами для самопроверки.

§ 16. Теорема моментов количеств движения для одной материальной точки¹⁾.

Напомним сначала определение момента силы относительно точки (часть 1, стр. 151). Пусть сила F приложена к точке M , положение которой относительно некоторого начала (точки O) определяется вектор-радиусом r (рис. 53). Моментом L силы F относительно точки O называется вектор, по величине и направлению определяемый векторным произведением r на F :

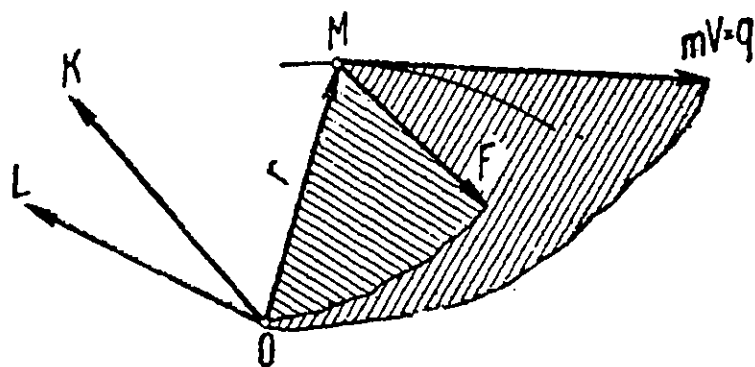


Рис. 53.

Совершенно так же, как момент силы, может быть определен момент любого другого вектора, и в частности вектора количества движения $q = mv$.

$$L = [r, F]. \quad (1)$$

Совершенно так же, как момент силы, может быть определен момент любого другого вектора, и в частности вектора количества

движения материальной точки $q = mv$. Моментом количества движения будет вектор k , величина и направление которого определяются векторным произведением r и q :

$$k = [r, q]. \quad (2)$$

Дифференцируя это выражение по времени, получим

$$\frac{dk}{dt} = \left[\frac{dr}{dt}, q \right] + \left[r, \frac{dq}{dt} \right]; \quad (3)$$

но первое слагаемое правой части равно нулю, ибо

$$\left[\frac{dr}{dt}, q \right] = [v, mv] = 0;$$

далее, на основании теоремы количеств движения:

$$\frac{dq}{dt} = F,$$

и мы получаем

$$\frac{dk}{dt} = [r, F] = L, \quad (4)$$

¹⁾ Рекомендуем предварительно повторить § 30 стр. 147 1-й части курса.

т. е. векторная производная по времени от момента количества движения материальной точки равна взятому относительно того же начала моменту приложенной к точке силы (или точнее главному моменту всех приложенных к точке сил, так как под $\mathbf{F}$ надо подразумевать их равнодействующую).

Теорема моментов количеств движения в приложении к одной материальной точке представляет простое преобразование основного закона Ньютона — это преобразование приходится особо подчеркивать и выделять, потому что в ряде случаев применение его является весьма удобным приемом решения задач динамики. Каковы эти случаи? Ответ на этот вопрос дается самой формой ур-ния (4).

1. Если сила $\mathbf{F}$ все время остается в одной плоскости с некоторой прямой, например, с осью X , т. е. или пересекает эту ось или ей параллельна, то проекция момента $\mathbf{L}$ на эту ось или, что то же самое, момент силы $\mathbf{F}$ относительно этой оси равен нулю:

$$L_x = 0,$$

и ур-ние (4) дает

$$\frac{dk_x}{dt} = 0;$$

интегрируя, найдем

$$k_x = \text{const.}$$

Вспоминая выражения для проекций векторного произведения на оси, получим

$$m(yv_z - zv_y) = \text{const.}$$

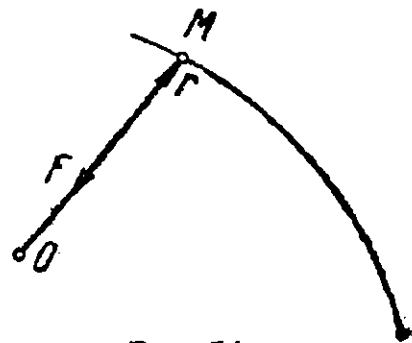


Рис. 54.

Применение теоремы моментов, таким образом, позволило получить некоторую зависимость между проекциями скорости и координатами движущейся точки; эта зависимость не содержит ускорения, т. е. вторых производных координат, и представляет поэтому один из первых интегралов уравнений динамики.

2. Случай центральной силы. Центральной называется сила, линия действия которой во все время движения проходит через одну и ту же неподвижную точку (центр) (рис. 54). По величине сила может зависеть, как уже упоминалось в 1-м задании, от разных геометрических и кинематических величин (от времени, координат, скорости). Мы остановимся лишь на наиболее интересном с физической стороны случае, когда величина силы зависит только от расстояния движущейся точки M от неподвижного центра O .

Принимая O за начало вектора $\mathbf{r} = \vec{OM}$, можем написать

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{r}}{r} \varphi(r). \quad (5)$$

Эта формула выражает, что $\mathbf{F}$ имеет то же направление, что и $\mathbf{r}$, или противоположное ему, согласно тому, положительно или отрицательно $\varphi(r)$. Величина силы F будет

$$F = |\varphi(r)|,$$

так как $\frac{\mathbf{r}}{r}$ есть единичный вектор.

Как пример центральной силы можно указать на Кулонову силу взаимодействия двух точечных электрических зарядов:

$$\varphi(r) = \frac{1}{\epsilon} \frac{ee_1}{r^2},$$

где ϵ — диэлектрическая постоянная среды, e и e_1 — электрические заряды, которые могут быть одинаковых или различных знаков. Другим примером служит Ньютонова сила тяготения двух материальных точек:

$$\varphi(r) = -f \frac{mm_1}{r^2},$$

где f — константа, зависящая от выбора единиц, m и m_1 — притягивающиеся массы.

Возвращаясь к закону моментов, получим

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \mathbf{L} = [\mathbf{r}, \mathbf{F}] = \frac{f(r)}{r} [\mathbf{r}, \mathbf{r}] = 0,$$

и, следовательно, вектор

$$\mathbf{k} = [\mathbf{r}, \mathbf{q}] = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}]$$

сохраняет постоянное направление и имеет постоянную величину. Это показывает, что вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$ все время остаются в неподвижной плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$, т. е. траектория движущейся точки есть плоская кривая.

Заметим далее, что

$$[\mathbf{r}, m\mathbf{v}] = m \left[\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right],$$

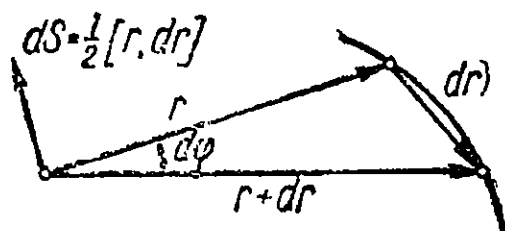


Рис. 55.

где векторное произведение $\frac{1}{2} [\mathbf{r}, d\mathbf{r}]$, обозначим его через dS , по величине равно площади $\frac{1}{2} r dr \sin(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$ (рис. 55), описываемой вектор-радиусом $\mathbf{r}$ за промежуток времени dt и, следовательно, $\frac{dS}{dt}$ есть *секториальная скорость* (часть 1, стр. 281) рассматриваемой точки. Таким образом

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = \frac{k}{2m} = \text{const} = C, \quad (6)$$

откуда следует, что

$$S = Ct + C_0, \quad (7)$$

т. е. в движении под влиянием центральной силы площадь, описываемая вектор-радиусом, изменяется пропорционально времени. Это, так называемый, закон площадей, заключающий в себе, как частный случай, известный второй закон Кеплера движения планет.

§ 17. Теорема моментов количества движения для системы материальных точек.

Число точек, входящих в систему, обозначим через n . Для любой точки с номером i мы можем написать теорему моментов:

$$\frac{dk_i}{dt} = L_i + L'_i, \quad (8)$$

причем L_i — момент внешних по отношению к системе сил, приложенных в рассматриваемой точке, а L'_i — момент внутренних сил, т. е. сил воздействия на рассматриваемую точку со стороны остальных точек, включенных нами в систему. Каждой внутренней силе, приложенной к какой-либо точке системы, соответствует другая сила, равная ей по величине и прямо противоположная по направлению. Следовательно, сумма моментов всех внутренних сил равна нулю:

$$\sum_{i=1}^n L'_i = 0. \quad (9)$$

Суммируя теперь ур-ния (8) по всем точкам системы, получим

$$\sum_{i=1}^n \frac{dk_i}{dt} = \sum_{i=1}^n L_i. \quad (10)$$

Главным моментом количества движения системы относительно некоторой точки O назовем геометрическую сумму моментов количества движения относительно той же точки O всех входящих в систему материальных точек. Обозначая главный момент через K

$$K = \sum_{i=1}^n k_i = \sum_{i=1}^n [r_i, m_i v_i], \quad (10a)$$

получим

$$\boxed{\frac{dK}{dt} = L} \quad (11)$$

причем $L = \sum_{i=1}^n L_i$ обозначает главный момент всех внешних сил, приложенных к системе.

Формула (11) выражает теорему моментов для системы материальных точек: *векторная производная по времени главного момента количества движения системы равна взятому относительно той же точки главному моменту всех внешних сил, приложенных к системе.*

Проектируя ур-ние (11) на оси, получим

$$\frac{dK_x}{dt} = L_x, \quad \frac{dK_y}{dt} = L_y, \quad \frac{dK_z}{dt} = L_z, \quad (12)$$

т. е. *производная по времени главного момента количества движения системы относительно некоторой оси равна главному моменту*

внешних сил относительно этой оси. Если при этом все внешние силы лежат в одной плоскости с одной из осей, например с осью X , то

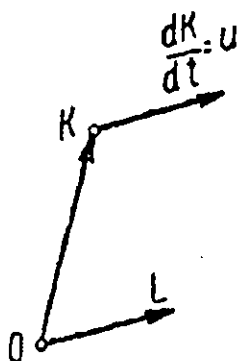
$$L_x = \sum_{i=1}^n L_{ix} = 0, \quad (13)$$

и мы получаем теорему сохранения момента количества движения системы относительно оси:

$$K_x = \text{const}, \quad (13a)$$

т. е. главный момент количества движения системы относительно оси сохраняет постоянное значение, если момент внешних сил относительно этой оси равен нулю. Мы увидим, что эта теорема часто весьма упрощает решение многих задач.

Дадим, в заключение, другую формулировку теореме моментов, облегчающую рассмотрение многих вопросов. Вспомним для этого, что производная вектора по времени есть не что иное, как скорость конца этого вектора; в частности:



$$u = \frac{dK}{dt} \quad (14)$$

есть скорость конца вектора K . Теорема моментов, таким образом, дает

$$u = L, \quad (15)$$

Рис. 56.

т. е. скорость конца главного момента количества движения системы относительно некоторой точки равна главному моменту относительно той же точки всех внешних сил, приложенных к системе. В этой формулировке теорему моментов называют теоремой Резаля (рис. 56).

Примеры и упражнения.

1. Модель атома Резерфорда-Бора. По мысли Резерфорда атом всякого вещества построен из ядра, содержащего некоторый заряд E положительного электричества, вокруг которого, подобно планетам вокруг солнца, движутся электроны. Орбиты электронов представим себе в виде окружностей, общий центр которых расположен в ядре, которое в первом приближении считаем неподвижным. Заряд ядра $E = Ne$, где e — заряд электрона, N — порядковый номер элемента, равный числу вращающихся вокруг ядра электронов. Для атома водорода $N=1$, $E=e$.

Чтобы определить радиусы возможных орбит электронов, Бор предложил гипотезу, выводы которой обнаруживают поразительно точное совпадение с опытом: движение электрона может происходить только по таким орбитам, на которых момент количества движения электрона равен целому кратному от $\frac{h}{2\pi}$, где h — постоянная Планка (квант действия); $h = 6,547 \cdot 10^{-27} \text{ г.см.сек}$

Найдем, исходя из этой гипотезы, радиусы возможных круговых орбит и скорости движущихся по ним электронов.

Количество движения при движении электрона по орбите с номером i (рис. 57):

$$q_i = mv_i;$$

его момент относительно центра окружности имеет величину

$$k_i = mv_i a_i,$$

где a_i — радиус орбиты; согласно гипотезе Бора, получаем

$$mv_i a_i = i \frac{h}{2\pi}, \quad (a)$$

где i — целое число, указывающее номер орбиты ($i = 1, 2, 3 \dots$).

Чтобы найти по отдельности v_i и a_i , необходимо составить еще одно уравнение, их связывающее. Это будет уравнение движения, выражающее равенство силы массе, умноженной на ускорение:

$$m w = F. \quad (б)$$

В нашем случае F есть сила Кулонова притяжения электрона положительным ядром:

$$F = \frac{E e}{a_i^2}.$$

Замечая еще, что

$$w = w_n = \frac{v_i^2}{a_i},$$

получим

$$m \frac{v_i^2}{a_i} = \frac{E e}{a_i^2}. \quad (в)$$

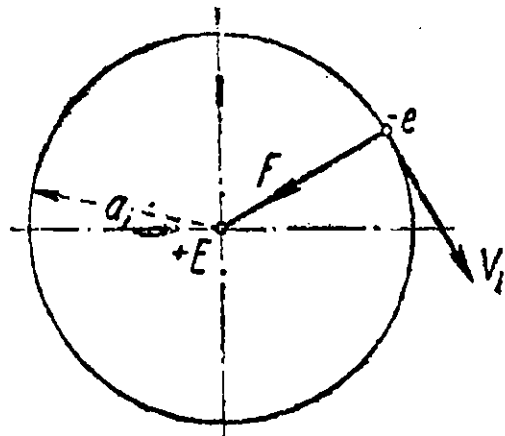


Рис. 57.

Из ур-ний (а) и (в) найдем

$$a_i = \frac{h^2}{4\pi^2 m e E} i^2, v_i = \frac{2\pi E e}{h} \frac{1}{i}. \quad (г)$$

В этих формулах $e = 4,774 \cdot 10^{-10}$ C.G.S. эл.-стат. ед., $m = 0,9 \cdot 10^{-27}$ г; для атома водорода $E = e$ и мы получим

$$a_i = 0,55 \cdot 10^{-8} i^2 \text{ см.}$$

Число оборотов электрона в секунду будет

$$n_i = \frac{v_i}{2\pi a_i} = \frac{4\pi^2 m E^2 e^2}{h^2 i^3},$$

что для атома водорода дает

$$n_i = \frac{6,2 \cdot 10^5}{i^3} \text{ об/сек.}$$

Законы перехода электронов с одной орбиты на другую будут изложены в задании, посвященном теореме живых сил.

2. Закон тяготения и движения планет. Мы видели, что второй закон Кеплера является непосредственным следствием того обстоятельства, что движение планет происходит под действием центральной силы. Выведем теперь два других закона Кеплера, принимая закон тяготения планет к солнцу, данный Ньютоном:

$$F = -\frac{r}{r} f \frac{mm_1}{r^2}$$

здесь через f обозначена постоянная тяготения, m_1 — масса солнца, m — масса планеты; солнце принимается за неподвижный центр.

Спроектируем уравнение движения планеты:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{F}$$

на направление $\mathbf{r}$. Вспоминая (часть 1, стр. 281), что

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2,$$

получим

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -f \frac{m_1}{r^2}. \quad (\text{a})$$

По закону площадей

$$\frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi} = C, \quad \dot{\varphi} = \frac{2C}{r^2},$$

и мы получаем:

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = \frac{2C}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} = -2C \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi} = -2C \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} \cdot \frac{2C}{r^2},$$

откуда следует, что

$$w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 = -\frac{4C^2}{r^2} \left\{ \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} \right\}.$$

Эта формула носит название формулы Бинет (Binet). Подстановка в (a) дает

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{fm_1}{4C^2} = \frac{1}{p},$$

где введено обозначение

$$p = \frac{4C^2}{fm_1}. \quad (*)$$

Применение формулы Бинет позволило, таким образом, преобразовать уравнение (a) в линейное уравнение с постоянными коэффициентами

интегрируя это уравнение, считая за искомую функцию $\frac{1}{r}$, получим

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + D \cos(\varphi - \varepsilon),$$

где D и ε — произвольные постоянные интегрирования; вводя для них новые обозначения $D = \frac{e}{p}$, $\varphi - \varepsilon = \varphi_1$, найдем

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_1}.$$

Мы получили уравнение траектории в полярных координатах. Это — коническое сечение с фокусом в начале координат, которое при $e < 1$ является эллипсом, при $e > 1$ — гиперболой, при $e = 1$ — параболой.

В случае планет, движущихся по замкнутым траекториям, $e < 1$, и мы получаем *первый закон Кеплера*: планеты движутся по эллипсам, в фокусе которых находится солнце.

Пусть a и b будут полуоси эллипса (рис. 58). Найдем геометрическое значение констант p и e в уравнении (б). Наименьшему и наибольшему значению r , т. е. большой оси эллипса, как показывает уравнение (б), соответствуют значения φ_1 равные 0 и π . Но

$$r_{\max} = a + c, \quad r_{\min} = a - c,$$

где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ — расстояние от фокуса до центра эллипса. Получаем

$$a + c = \frac{p}{1 - e}, \quad a - c = \frac{p}{1 + e},$$

откуда находим

$$e = \frac{c}{a}, \quad p = \frac{b^2}{a},$$

где e — эксцентриситет, p — параметр эллипса.

Вернемся к формуле (*). Называя через T продолжительность обращения планеты по ее орбите и замечая, что площадь орбиты равна πab , получим на основании закона площадей

$$C = \frac{\pi ab}{T},$$

и ф-ла (а) дает

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2 f m_1},$$

т. е.

$$f m_1 = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}. \quad (B)$$

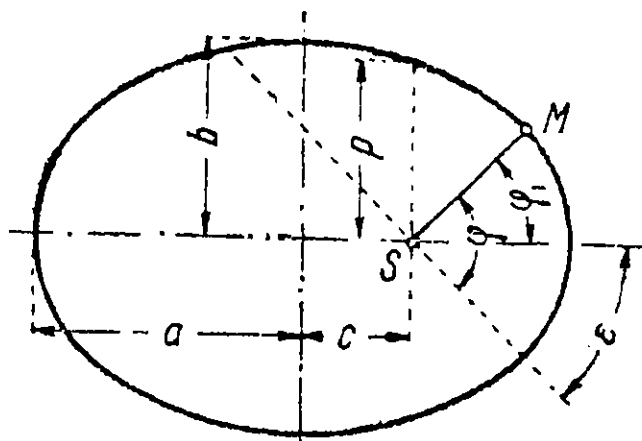


Рис. 58.

Величина fm_1 одинакова для всех планет; мы получаем, таким образом, *третий закон Кеплера*: квадраты времен обращения планет относятся как кубы больших полуосей описываемых ими эллипсов. Заметим, что этот закон верен лишь приближенно. Если принять в расчет, что солнце не остается неподвижным, а движется под влиянием притяжения его планетой, то в третий закон войдет некоторая весьма малая поправка.

Дадим некоторые приложения полученных результатов. За притягивающий центр примем землю; тогда формула (в) может быть применена к ее спутнику, т. е. к луне. Найдем, какое ускорение сообщает земной шар материальной точке массы m , расстояние которой от центра земли обозначим через r . Имеем¹⁾

$$F = f \frac{mm_3}{r^2} = m\omega,$$

где m_3 — масса земли. Согласно ф-ле (в), имеем

$$fm_3 = 4\pi^2 \frac{a_l^3}{T_l^2} \quad (г)$$

где T_l и a_l — продолжительность обращения и радиус орбиты луны. Итак

$$\omega = 4\pi^2 \frac{a_l^3}{T_l^2 r^2}.$$

Расположим теперь притягиваемую массу на поверхности земли, т. е. положим r равным земному радиусу r_3 . Получим

$$\omega = 4\pi^2 \frac{a_l^3}{T_l^2 r_3^2} \quad (д)$$

Подставляя численные данные $a_l = 60r_3$, $T = 27,33$ суток, $r_3 = 636 \cdot 10^4$ м, получим

$$\omega = 9,8 \text{ м/сек}^2 = g. \quad (е)$$

Результат этот знаменует один из важнейших этапов в истории науки. Обнаружив тождество силы, заставляющей падать тела на землю, и силы, удерживающей луну на ее орбите, Ньютон впервые получил подтверждение закона всемирного тяготения, который он раньше интуитивно предвидел.

Из ф-л (г), (д), (е) получаем

$$g = f \frac{m_3}{r_3^2}$$

Имея в виду, что

$$m = \frac{4}{3} \pi \delta r_3^3,$$

¹⁾ В теории притяжения доказывается, что однородный шар притягивает внешнюю точку так, как если бы вся масса шара была сосредоточена в его центре (см. задание 9-е).

где δ — средняя плотность земли, получим

$$f = \frac{gr_3^2}{m_3} = \frac{3g}{4\pi\delta r_3}. \quad (\text{ж})$$

Принимая на основании многочисленных опытов среднюю плотность земли $\delta = 5,52 \text{ г/см}^3$, получим

$$f = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ г}^{-1} \text{ сек}^{-2} \text{ см}^3$$

в физической системе единиц.

Определим еще на основании наших результатов массу солнца. Из (в) и (ж) получаем

$$\frac{m_1}{m_3} = \frac{4\pi^2 a_3^3}{T_3^2 g r_3^2};$$

здесь $a_3 = 23700 r_3$, $T_3 = 24 \cdot 60 \cdot 365 \text{ сек.}$, $r_3 = 636 \cdot 10^4 \text{ м.}$ Получаем $m_1 = 355000 m_3$.

3. Математический маятник. Груз, подвешенный помощью нерастяжимой и невесомой нити к неподвижной точке, называется маятником. Будучи отклонен от положения равновесия и затем предоставлен самому себе, маятник в последующем своем движении будет совершать колебания вокруг оси, проходящей через точку привеса и перпендикулярной плоскости качаний. Поставим себе задачу написать дифференциальное уравнение движения маятника и найти период колебания. К схеме движения маятника может быть приведено весьма большое число вопросов динамики; поэтому наша задача, не говоря уже о непосредственных применениях самого маятника в разного рода приборах, регистрирующих колебания, имеет весьма важное прикладное значение.

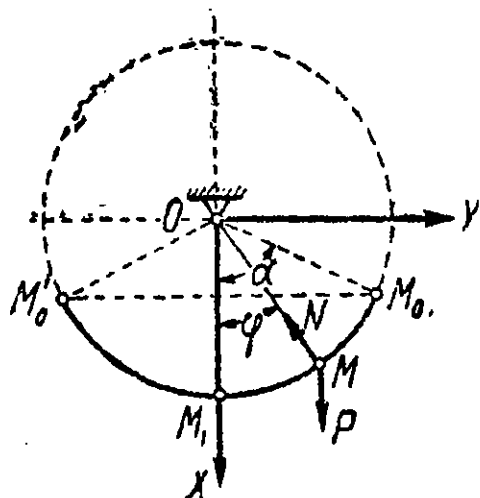


Рис. 59.

К грузу приложены 1) его вес P и 2) реакция нити N . Направим оси X и Y , как указано на рис. 59. Тогда ось Z , если принять левую систему, будет направлена от читателя перпендикулярно чертежу.

Беря момент количества движения относительно оси Z :

$$k_z = \frac{P}{g} (xv_y - yv_x)$$

и замечая, что $v_x = -\dot{\omega}y$, $v_y = \dot{\omega}x$ (см. часть 1, стр. 155), $x^2 + y^2 = l^2$, получим

$$k_z = \frac{P}{g} l^2 \dot{\omega} = \frac{P}{g} l^3 \dot{\phi}.$$

Момент силы веса относительно оси Z будет

$$L_z = -Py = -Pl \sin \phi.$$

Момент натяжения нити N будет очевидно равен нулю; применяя теорему моментов, мы, таким образом, достигаем исключения неизвестной силы из уравнения движения.

На основании теоремы моментов

$$\frac{dk_z}{dt} = L_z$$

получаем

$$-\frac{P}{g} l^2 \ddot{\varphi} = -Pl \sin \varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} = -\frac{g}{l} \sin \varphi.$$

Пусть в начальный момент маятник был отклонен от положения равновесия на угол α и предоставлен самому себе, т. е. начал движение без начальной скорости. Иными словами, при $t=0$, $\varphi = \alpha$, $\dot{\varphi} = 0$. Это будут начальные условия нашей задачи.

Для интегрирования ур-ния (3) применим знакомый уже нам прием: умножим обе части (3) на $\dot{\varphi}$. Замечая, что

$$\ddot{\varphi} \dot{\varphi} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} \right),$$

$$\dot{\varphi} \sin \varphi = -\frac{d}{dt} (\cos \varphi),$$

получим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\varphi}^2}{2} \right) = \frac{g}{l} \frac{d(\cos \varphi)}{dt},$$

откуда следует, что

$$\dot{\varphi}^2 = 2 \frac{g}{l} \cos \varphi + C,$$

но при $\varphi = \alpha$, $\dot{\varphi} = 0$ и, следовательно, константа $C = -\frac{2g}{l} \cos \alpha$. Получаем

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \pm \sqrt{2 \frac{g}{l} (\cos \varphi - \cos \alpha)},$$

$$dt = \pm \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}}$$

Выражение, стоящее под знаком корня, должно быть всегда положительным, т. е. $\cos \varphi \geq \cos \alpha$ и, следовательно, угол φ в течение движения остается по абсолютной величине меньше угла первоначального отклонения α : $-\alpha < \varphi < \alpha$. Движение маятника есть колебание на угол α по обе стороны от положения равновесия (не следует думать, что колебание это является гармоническим).

При движении из M_0 в M_1 угол φ уменьшается, $\dot{\varphi} < 0$ и перед

радикалом надо взять нижний знак. Продолжительность τ_0 перехода точки из положения M_0 в M_1 будет

$$\int_0^{\tau_0} dt = \tau_0 = -\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\alpha}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}} = \\ = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}}.$$

В момент $t = \tau_0$, $\varphi = 0$, $\cos \varphi = 1$ и маятник проходит через положение равновесия с максимальной скоростью. Скорость снова обращается в нуль в крайнем положении M_0' при $\varphi = -\alpha$. На участке $M_1 M_0'$ φ продолжает убывать (возрастает по абсолютному значению) и перед радикалом надо сохранить знак минус. Продолжительность прохождения участка $M_1 M_0'$ снова будет равна τ_0 ; действительно

$$-\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{-\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}}.$$

На участке $M_0' M_1$, $\varphi > 0$; перед радикалом нужно взять плюс; время прохождения будет

$$\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\alpha}^0 \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}} = \tau_0.$$

Наконец, на участке $M_1 M_0$ имеем опять $\varphi > 0$ и то же значение τ_0 для времени прохождения.

Полный период колебаний маятника будет, таким образом, равен $4\tau_0$:

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi - \cos \alpha)}}.$$

Преобразуем полученное выражение к более удобному виду. Заметим для этого прежде всего, что

$$\cos \varphi = 1 - 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

и, следовательно,

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}. \quad (a)$$

Введем теперь новую переменную интегрирования ψ , связав ее с φ равенством:

$$\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \psi = \sin \frac{\varphi}{2}. \quad (6)$$

Получим

$$\begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \psi \cdot d\psi &= \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi} d\varphi, \\ \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} &= \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi} = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \psi \end{aligned}$$

подставляя в (а), получим

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{d\psi}{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \psi}}. \quad (в)$$

Новые пределы интегрирования находятся из формулы (6): при $\varphi = 0$ получается $\psi = 0$, при $\varphi = \alpha$, $\psi = \frac{\pi}{2}$.

Интеграл в формуле (в) не может быть выражен через элементарные функции. Его называют *полным эллиптическим интегралом первого рода* и обозначают буквой K :

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \sin^2 \psi}}.$$

Мы получаем таким образом

$$\boxed{T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K} \quad (16)$$

Некоторые значения K при различных α помещены в таблице на стр. 157; $k = \sin \frac{\alpha}{2}$ называется модулем эллиптического интеграла.

Выведем теперь приближенные формулы для периода колебаний при малых значениях первоначального отклонения α . Разложим для этого подынтегральное выражение в ряд:

$$\left(1 - \sin \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi\right)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \psi + \dots$$

Ограничиваясь только написанными членами, получим

$$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi\right)d\psi=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Полагая еще для малых

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2},$$

найдем

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}\left(1+\frac{\alpha^2}{16}\right)}$$

(17)

Если пренебречь членом $\frac{\alpha^2}{16}$ по сравнению с единицей, то получим

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(18)

α	$k=\sin\frac{\alpha}{2}$	$K=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}$
0°	0,0000	1,5708
5°	0,0436	1,5715
10°	0,0872	1,5738
20°	0,1736	1,5828
40°	0,3420	1,6200
60°	0,5000	1,6858
90°	0,7071	1,8541
120°	0,8660	2,1565
150°	0,9659	2,7681
180°	1,0000	∞

Это значение для периода колебаний мы нашли бы сразу, если бы в уравнении движения маятника заменили для малых углов $\sin\varphi$ на φ . При этом мы получили бы линейное уравнение с постоянными коэффициентами

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\varphi=0,$$

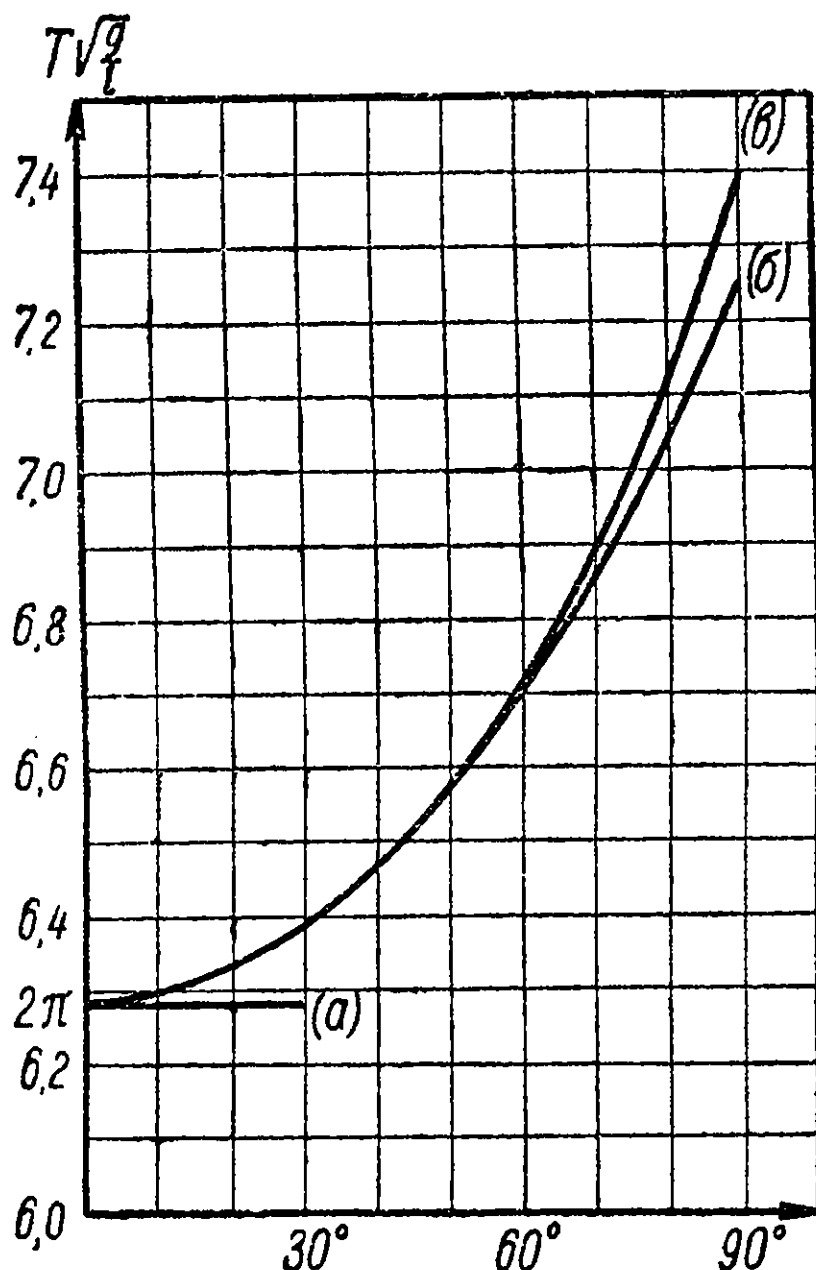
решение которого при наших начальных условиях имеет вид

$$\varphi=\alpha\cos\sqrt{\frac{g}{l}}t,$$

откуда и следует формула (18). Период колебаний оказывается не зависящим от первоначального отклонения α ; *малые колебания маятника изохронны*. Таблица показывает, что при $\alpha < 20^\circ$ ошибка, которую мы делаем, принимая изохронность колебаний, не превосходит

$$\frac{1,5828 - 1,5708}{1,5708} \approx 0,8\%.$$

При больших углах следует пользоваться формулой (17). В следующей табличке приведено значение множителя $1 + \frac{\alpha^2}{16}$.



α	$1 + \frac{\alpha^2}{16}$
5°	1,0005
10°	1,0019
20°	1,0076
40°	1,0304
60°	1,0684
90°	1,1539

Следует обратить внимание на ф-лу (17), ибо она с большой точностью заменяет точную формулу (16) в пределах для α до 60° . Для сравнения на рис. 60 даны графики значений периода T , вычисленные по трем формулам:

а) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

б) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)}$

в) $T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K.$

Рис. 60.

Приложениям теоремы моментов в случае системы точек посвящены три остальные задания этой темы. Поэтому здесь мы ограничимся только одним примером.

4. Основное уравнение теории гидравлических турбин. Мы ставим себе задачу определить вращающий момент, сообщаемый протекающей жидкой струей каналу между лопатками турбинного колеса, когда последнее вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси.

Применим теорему моментов к совокупности частиц жидкости, заполняющей в момент времени t канал между лопатками колеса. Имеем

$$\frac{dK_z}{dt} = L_z,$$

где L_z — главный момент относительно оси турбины (оси Z) внешних сил, приложенных к рассматриваемому объему жидкости. Этими внешними силами являются вес жидкости и реакции на нее стенок канала. Но момент веса относительно оси Z равен нулю и, следовательно, под L_z надо понимать момент реакции стенок; последний же равен по величине и противоположен по знаку искомому вращающему моменту L_z^* ; получаем

$$L_z^* = -L_z = -\frac{dK_z}{dt}.$$

Остается вычислить $\frac{dK_z}{dt}$.

Вода, заполняющая в момент t канал $abcd$ (рис. 61), к моменту $t + dt$ получит некоторое перемещение, причем частицы, находившиеся в сечении ab , займут положение a_1b_1 ; частицы же, занимавшие положение ed , окажутся в e_1d_1 . При этом, вследствие несжимаемости воды, объем aba_1b_1 равен объему ede_1d_1 ; вес воды в этом объеме будет Qdt , где через Q обозначен расход, т. е. вес воды, протекающей через канал в единицу времени.

В момент времени t главный момент количества движения воды в канале относительно вертикальной оси можно представить состоящим из двух частей:

- а) главного момента количества движения воды в объеме aba_1b_1 (обозначим его через K_z'),
- б) главного момента количества движения воды в объеме a_1b_1ed .

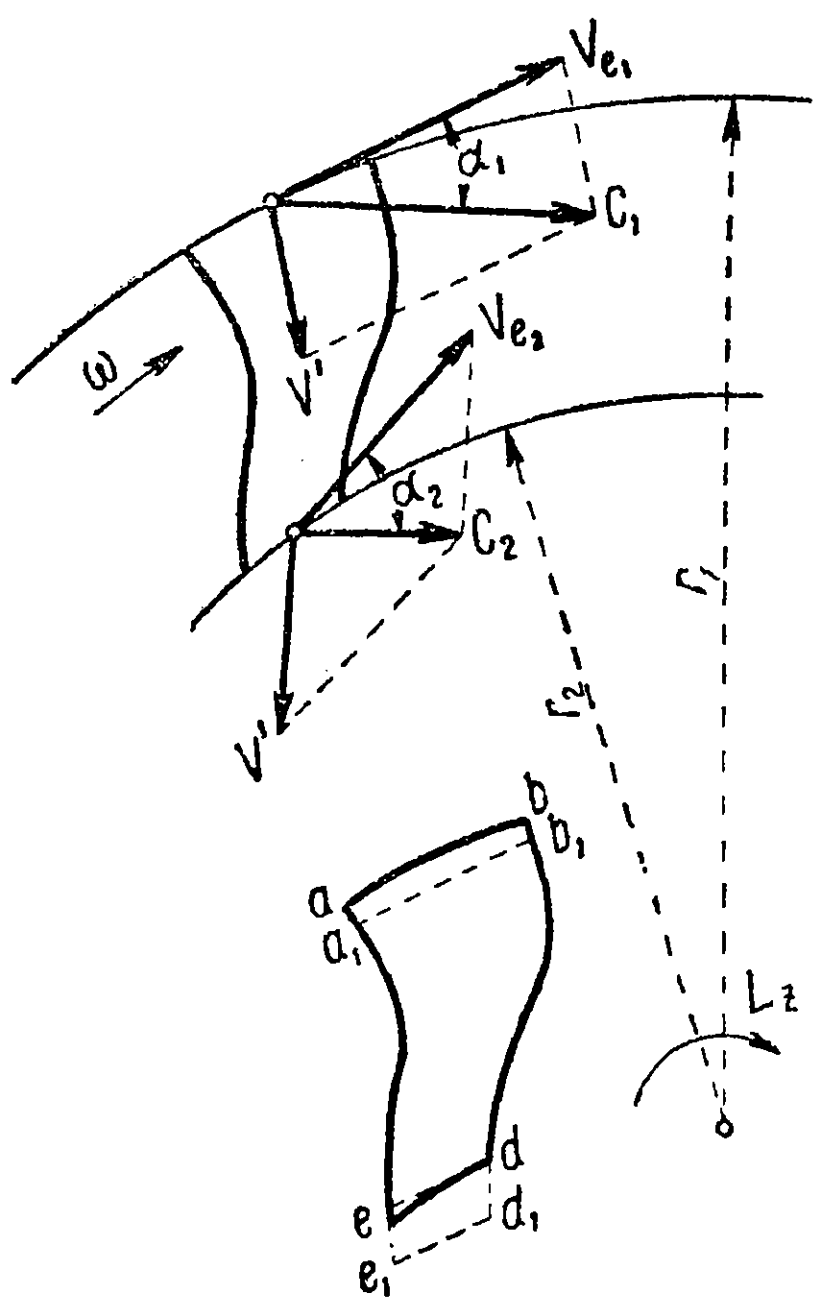


Рис. 61.

Если обозначить через c_1 скорость воды (относительно земли, а не относительно вращающегося канала) при входе в колесо, то при обозначениях, указанных на рис. 61, получим

$$K'_z = \frac{Q}{g} dt r_1 c_1 \cos \alpha_1.$$

В момент времени $t + dt$ главный момент количества движения воды, занимающей теперь объем $a_1 b_1 e_1 d_1$, будет складаться из:

а) главного момента количества движения (K''_z) частиц воды в объеме $e d e_1 d_1$:

$$K''_z = \frac{Q}{g} dt r_2 c_2 \cos \alpha_2,$$

причем c_2 — „абсолютная“ скорость воды в выходном сечении канала;

б) главного момента количества движения воды в объеме $a_1 b_1 e d$.

Считая угловую скорость турбины постоянной и движение установившимся, мы должны принять, что скорости и, следовательно, моменты количества движения воды в объеме $a_1 b_1 e d$ одинаковы для двух рассматриваемых моментов времени t и $t + dt$. Поэтому приращение dK_z момента количества движения за промежуток времени dt будет обусловлено только разностью моментов количества движения объемов $a b a_1 b_1$ и $e d e_1 d_1$. Получаем

$$dK_z = K''_z - K'_z = \frac{Q}{g} dt (r_2 c_2 \cos \alpha_2 - r_1 c_1 \cos \alpha_1).$$

Отсюда найдем

$$L_z^* = - \frac{dK_z}{dt} = \frac{Q}{g} (r_1 c_1 \cos \alpha_1 - r_2 c_2 \cos \alpha_2). \quad (a)$$

Полученная формула носит название *Эйлера турбинного уравнения*. Вращающий момент оказывается не зависящим от формы канала и обуславливается значениями скоростей („абсолютных“, т. е. относительно земли) воды во входном и выходном отверстиях. Угол α_2 обычно мало отличается от 90° , т. е. $\cos \alpha_1 \approx 0$. Уравнение (a) принимает упрощенный вид:

$$L_z^* = \frac{Q}{g} r_1 c_1 \cos \alpha_1 = \frac{Q}{g} r_1 c_{u1},$$

где через $c_{u1} = c_1 \cos \alpha_1$ обозначена, как принято в литературе, проекция скорости c_1 на касательную к окружности колеса (через $u_1 = \omega r_1$, $u_2 = \omega r_2$ обычно обозначаются окружные скорости во входном и выходном сечениях).

В качестве примера рассмотрим движение так называемого Сегнерова колеса; оно представляет собою цилиндрический сосуд, могущий вращаться вокруг вертикальной оси; к отверстиям на дне сосуда приделаны маленькие трубочки, изогнутые так, что вода, наполняющая сосуд, может вытекать по этим трубкам только в направлении касательных к окружности радиуса r , концентрической с окружностью основания цилиндра. Высота жидкости в сосуде поддерживается на одном и том же уровне h , так что ско-

рость v' жидкости относительно сосуда на дне его может быть принята равной $v' = \sqrt{2gh}$; скорость c_2 в выходном отверстии по отношению к земле будет

$$c_2 = v' + v_0.$$

Проектируя это геометрическое равенство на направление касательной к выходной окружности (в сторону, противоположную вращению колеса), получим

$$c_{u2} = \sqrt{2gh} - \omega r.$$

Скорость c_1 может быть принята равной нулю, так как площадь сечения трубочек значительно меньше поперечного сечения сосуда. Формула (а) дает:

$$L_z^* = -\frac{Q}{g} r (\sqrt{2gh} - \omega r).$$

Одинаковый знак у L_z^* и ω в этой формуле указывает, что момент L_z^* поддерживает вращение в направлении угловой скорости ω .

Мы вернемся еще к Эйлерову турбинному уравнению в задании, посвященном теореме живых сил.

Задание 5-е.

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси.

Как первое и наиболее важное приложение теоремы моментов в пятом задании рассматривается вопрос о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси, т. е. выводится дифференциальное уравнение вращения, позволяющее предсказать характер движения, когда заданы силы, или определить момент относительно оси вращения действующих на тело сил в заданном движении. Несложный теоретический материал задания иллюстрируется рядом примеров, взятых из самых разнообразных областей. Попутно, при выводе дифференциального уравнения вращения мы впервые встречаемся с весьма важной механической величиной — моментом инерции тела относительно оси. Нашей задачей было не только показать, как вычисляются моменты инерции, но и сделать наглядной необходимость и неизбежность введения в динамику вращательного движения этой материальной константы тела, имеющей здесь то же значение, что и масса в случае поступательного движения.

Учащийся должен отчетливо усвоить понятие момента инерции и научиться вычислять в простейших случаях моменты инерции, выведя самостоятельно несколько формул из прилагаемой таблицы. Следует также твердо запомнить важнейшую формулу динамики твердого тела, дающую момент относительно оси вращения количества движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. В примерах на приложение дифференциального уравнения

вращения твердого тела надо обратить особое внимание на изучение методов экспериментального определения моментов инерции. Изучение затухающих колебаний, рассматриваемых на примере стрелки гальванометра, может быть опущено при первом чтении книги. К нему учащийся должен будет вернуться и внимательно его проштудировать при изучении общей теории колебаний в третьей части курса.

§ 18. Момент количества движения твердого тела относительно оси вращения. Понятие о моменте инерции.

Перейдем к приложениям теоремы моментов. Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси $O_1 O_2$ и поставим себе задачу вычислить главный момент количества движения этого тела относительно оси вращения. Это даст нам возможность, как мы увидим в § 20, без труда написать дифференциальное уравнение вращения тела.

Ось вращения примем за ось Z . Момент количества движения частицы m_i (рис. 62) относительно оси Z будет

$$k_{iz} = m_i(x_i v_{iy} - y_i v_{ix});$$

вспоминая, что (часть 1, стр. 155)

$$v_{ix} = -\bar{\omega} y_i \quad v_{iy} = \bar{\omega} x_i$$

где $\bar{\omega} = \dot{\varphi}$ есть угловая скорость, получим

$$k_{iz} = \bar{\omega} m_i (x_i^2 + y_i^2) = \bar{\omega} m_i h_i^2.$$

Главный момент количества движения относительно оси Z будет .

$$K_z = \sum_{i=1}^n k_{iz} = \bar{\omega} \sum_{i=1}^n m_i h_i^2. \tag{1}$$

Величина

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

(2)

зависящая только от формы тела и расположения масс в этом теле, но не зависящая от того состояния движения, в котором тело находится, называется *моментом инерции тела относительно оси Z* .

Момент инерции тела имеет размерность массы, умноженной на квадрат длины. Техническая единица момента инерции поэтому будет

$$1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^2.$$

Отношение

$$\frac{J_z}{M},$$

где M — масса тела, имеет таким образом, размерность квадрата длины. Обозначим его через ρ^2 :

$$\rho^2 = \frac{J_z}{M}, \quad J_z = M\rho^2. \quad (3)$$

Величина ρ называется *радиусом инерции тела относительно оси Z*.

Понятие момента инерции тела принадлежит к числу основных и важнейших в динамике. Вместе с тем это понятие лишено той непосредственной физической осязательности, которую учащийся привык встречать в других механических определениях и величинах. Поэтому, что бы облегчить учащемуся усвоение вопроса, напомним еще раз ход наших рассуждений.

Нашей задачей было вычисление главного момента количества движения. Эта динамическая величина, подобно количеству движения, должна представлять произведение двух факторов — одного кинематического, характеризующего движение тела, другого — материального, характеризующего само вращающееся тело. Первым фактором естественно является угловая скорость. Что касается второго, то он должен учитывать не только массу тела, но и распределение в нем массы относительно оси вращения. Действительно, частицы тела, находящиеся дальше от оси, вносят в общую сумму:

$$K_z = \sum_{i=1}^n k_{iz}$$

большую долю, так как скорость этих частиц и плечо момента их больше, чем для частиц, расположенных ближе к оси. Поэтому материальным фактором, входящим в главный момент количества движения, и является момент инерции, т. е. сумма

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2,$$

распространенная по всем точкам тела. В этой сумме масса каждой частицы умножается на квадрат ее расстояния до оси, т. е. частицы, находящиеся от оси на большом расстоянии, входят в эту сумму большими слагаемыми, что и требуется от нашего фактора.

Вычисление моментов инерции однородных тел правильной геометрической формы делается при помощи методов интегрального исчисления. В случае тел, не имеющих правильной формы, моменты инерции определяются или экспериментально, или приближенно путем вычислений — нужно разбить данное тело на несколько, имеющих правильную геометрическую форму. Таким образом, моменты инерции определяются немногим сложнее, чем, например, масса тела; и в этом случае мы имеем тот же вычислительный путь по методам интегрального исчисления или путь экспериментального определения, о методах которого мы будем говорить ниже.

Возвращаясь к формуле (1), получим

$$\boxed{K_z = J_z \bar{\omega}}, \quad (4)$$

т. е. главный момент относительно оси вращения количества движения тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен произведению момента инерции относительно этой оси на угловую скорость. Учащийся должен хорошо запомнить эту весьма важную для всей динамики формулу.

§ 19. Моменты инерции некоторых тел. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей.

По определению момента инерции имеем:

$$J_z = \sum_{i=1}^n m_i h_i^2.$$

При непрерывном распределении масс следует заменить m_i на dm , h_i^2 на h^2 , причем h — расстояние рассматриваемого элемента массы dm до оси, относительно которой берется момент инерции. Сумма заменяется интегралом, распространенным по всему объему (τ) тела:

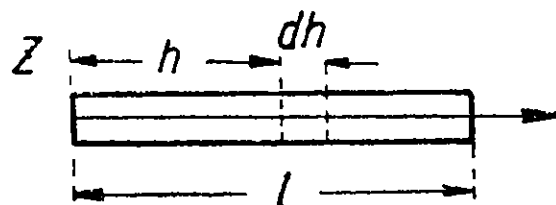


Рис. 63.

$$J_z = \int_{(\tau)} h^2 dm. \quad (5)$$

Обозначая плотность тела через δ , а элемент объема — через $d\tau$, будем иметь:

$$dm = \delta d\tau, \quad J_z = \int_{(\tau)} \delta h^2 d\tau.$$

В случае однородного тела

$$\delta = \frac{M}{\tau} = \text{const},$$

где M — масса тела. Получаем

$$J_z = \frac{M}{\tau} \int_{(\tau)} h^2 d\tau. \quad (6)$$

Перейдем к частным случаям.

а) Момент инерции однородного тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец. Согласно формуле (6) имеем (рис. 63)

$$J_z = \frac{M}{\tau} \int h^2 d\tau = \frac{M}{l} \int_0^l h^2 dh = \frac{Ml^2}{3}. \quad (7)$$

ибо в рассматриваемом случае $d\tau = \sigma dh$, $\tau = \sigma l$, где σ — площадь поперечного сечения стержня; интегрирование по объему заменяется интегрированием по длине. Радиус инерции стержня будет

$$\rho = \sqrt{\frac{J_z}{M}} = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0,576 l.$$

б) Момент инерции однородного полого цилиндра относительно его оси. За элемент объема примем цилиндрический слой, образуемый двумя коаксиальными цилиндрами радиусов h и $h + dh$ (рис. 64). Получим

$$d\tau = H \cdot 2\pi h dh, J_z = \frac{2\pi MH}{\tau} \int_{R_0}^R h^3 dh = \frac{\pi MH(R^4 - R_0^4)}{2\tau}.$$

С другой стороны,

$$\tau = \pi (R^2 - R_0^2) H,$$

и мы получаем

$$J_z = \frac{M}{2} (R^2 + R_0^2). \quad (8)$$

Для сплошного цилиндра $R_0 = 0$ и момент инерции будет:

$$J_z = \frac{MR^2}{2}. \quad (9)$$

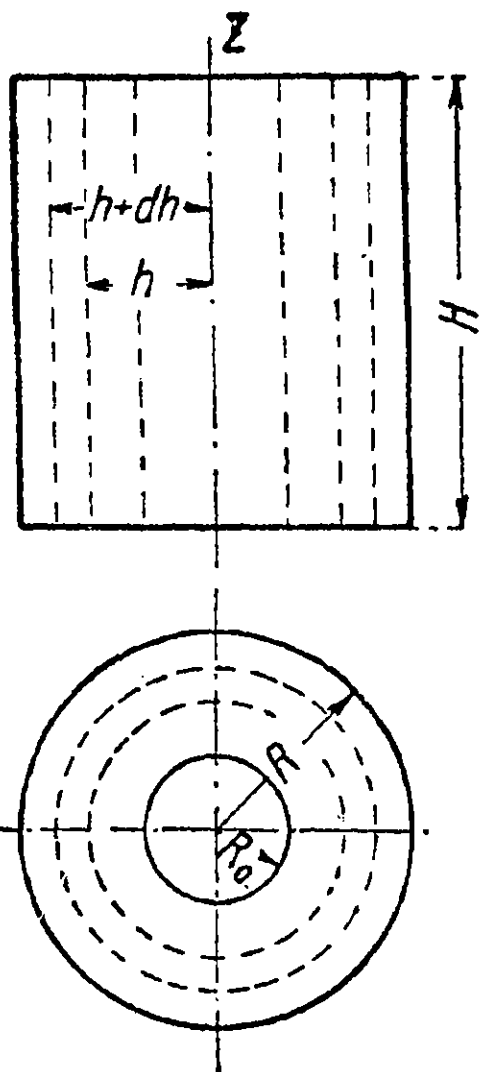


Рис. 64.

Докажем теперь весьма часто применяемую привычку в численных моментах инерции теорему Штейнера: момент инерции тела относительно некоторой оси Z равен моменту инерции относительно параллельной оси Z_c , проходящей через центр тяжести тела C , сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния d между осями:

$$J_z = J_{zc} + M d^2 \quad (10)$$

Имеем (рис. 65)

$$h_i^2 = h_{ic}^2 + d^2 - 2 dh_{ic} \cos \alpha.$$

Если направить ось X в плоскости осей Z и Z_c перпендикулярно этим осям, то $h_{ic} \cos \alpha_i = x_i$ и мы получаем:

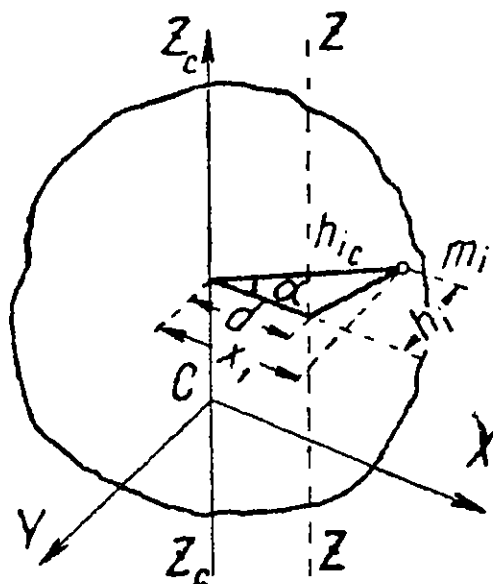


Рис. 65.

$$\sum_{i=1}^n m_i h_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i h_{ic}^2 + \\ + d^2 \sum_{i=1}^n m_i - 2 d \sum_{i=1}^n m_i x_i$$

или:

$$J_z = J_{zc} + d^2 M - 2 d \sum_{i=1}^n m_i x_i.$$

С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i = 0,$$

ибо центр тяжести, по условию, лежит на оси Z_c . Формула (10) доказана.

В качестве примера найдем момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через его центр тяжести и перпендикулярной стержню. В этом случае имеем

$$J_z = \frac{Ml^2}{3}, d = \frac{l}{2}$$

и формула (10) дает

$$J_{zc} = \frac{Ml^2}{12}.$$

Приводим в заключение небольшую таблицу моментов инерции для некоторых тел (см. также „Техническую энциклопедию“ т. 13 или Hütte I, стр. 244—250). Читатель должен самостоятельно вывести несколько формул этой таблицы (см. пример 31).

Примеры и упражнения.

1. Вес вагонного колесного ската $P = 1000$ кг, радиус колес $a = 50$ см. Если принять колеса за однородные диски, то радиус инерции ската относительно его оси будет

$$\rho_1 = \frac{a}{\sqrt{2}} = 35,3 \text{ см.}$$

Считая всю массу колеса сосредоточенной на его ободе, мы имели бы

$$\rho_2 = a = 50 \text{ см.}$$

Экспериментальное определение момента инерции ската дано

$$T = 1,630 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2,$$

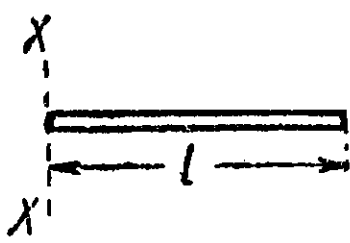
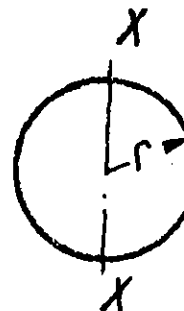
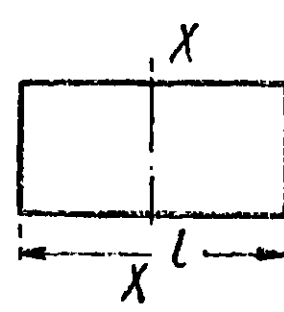
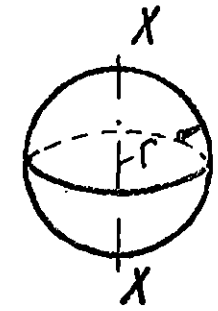
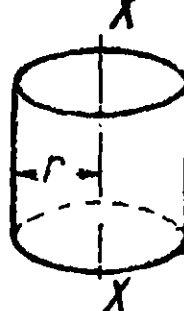
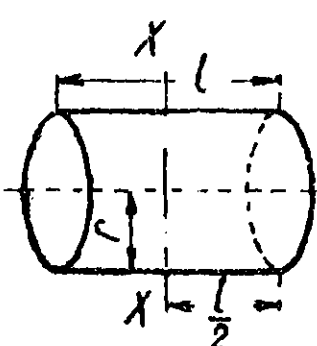
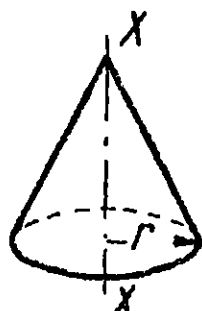
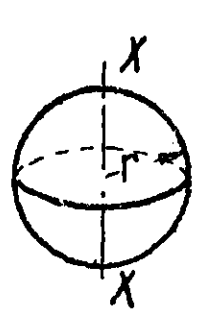
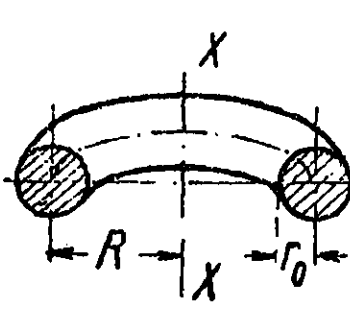
что соответствует радиусу инерции:

$$\rho = \sqrt{\frac{J}{M}} = \sqrt{\frac{Tg}{P}} = 40 \text{ см.}$$

Таким образом, как и можно было предвидеть:

$$\rho_1 < \rho < \rho_2.$$

Моменты инерции однородных тел.

Род тела	Э с к и з	Момент инерции J_x	Радиус инерции
Стержень весьма малого поперечного сечения		$\frac{Ml^2}{3}$	$\frac{l}{\sqrt{3}} = 0,577 l$
Круглая пластинка весьма малой толщины		$\frac{Mr^2}{4}$	$0,5 r$
Прямоугольная пластинка весьма малой толщины		$M \frac{l^2}{12}$	$\frac{l}{2\sqrt{3}} = 0,289 l$
Полый шар со стенкой пренебрегаемо малой толщины		$\frac{2}{3} Mr^2$	$\sqrt{\frac{2}{3}} r = 0,816 r$
Круглый цилиндр		$\frac{Mr^2}{2}$	$\frac{r}{\sqrt{2}} = 0,707 r$
То же		$\frac{M}{12} (l^2 + 3r^2)$	$\sqrt{\frac{l^2 + 3r^2}{12}}$
Прямой круговой конус		$0,3 Mr^2$	$0,548 r_0$
Шар		$\frac{2}{5} Mr^2$	$0,632 r$
Тор		$M \left(R^2 + \frac{3r_0^2}{4} \right)$	$0,5 \sqrt{4R^2 + 3r_0^2}$

2. Вычислить момент инерции тела, состоящего из двух железных шаров, деревянных цилиндрических стержней и деревянной втулки, относительно оси вращения ZZ . Обозначения указаны на рис. 66. Размеры: $R=58$ см, $a=10$ см, $\beta=10$ см, $r_1=8$ см, $r=5$ см, $\rho=1$ см; вес единицы объема железа $\gamma=7,6$ г/см³, дерева $\gamma_1=0,5$ г/см³.

Момент инерции J тела представим как сумму моментов инерции его отдельных элементов: шара J_1 , стержня — J_2 , втулки — J_3 . Получим

$$J = 2 J_1 + 2 J_2 + J_3.$$

Согласно формулам, приведенным в таблице и теореме о моментах инерции относительно параллельных осей, имеем:

а) Шар

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{2}{5} M_1 a^2 + M_1 R^2 = \\ &= \frac{4}{3} \frac{\gamma}{g} \pi a^3 \left(\frac{2}{5} a^2 + R^2 \right). \end{aligned}$$

б) Стержень

$$J_2 = \frac{M_2}{12} \left[(R - a - r_1)^2 + 3 \rho^2 \right] + \frac{M_2}{4} (R - a - r_2)^2,$$

причем

$$M_2 = \frac{\gamma_1}{g} \pi \rho_2 (R - a - r_1).$$

в) Втулка

$$J_3 = M_3 \frac{r_1^2 + r^2}{2} = \frac{\gamma_1}{2g} \beta \pi (r_1^4 - r^4),$$

так как

$$M_3 = \beta \pi (r_1^2 - r^2) \frac{\gamma_1}{g}.$$

Подставляя численные данные, найдем:

$$J_1 = 108,93 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек.}^2$$

$$J_2 = 0,059 \text{ " " "}$$

$$J_3 = 0,028 \text{ " " "}$$

$$J_4 = 2 J_1 + 2 J_2 + J_3 = 218 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек.}^2,$$

Вычисление проведено с целью показать ничтожно малое влияние плеч и втулок на общий момент инерции тела. Этого и следовало ожидать, так как эти части не только имеют малый вес, но и расположены близко к оси, в то время как шары от нее удалены.

Достаточно точный результат можно было бы получить, даже пренебрегая размерами шаров и трактуя их как материальные

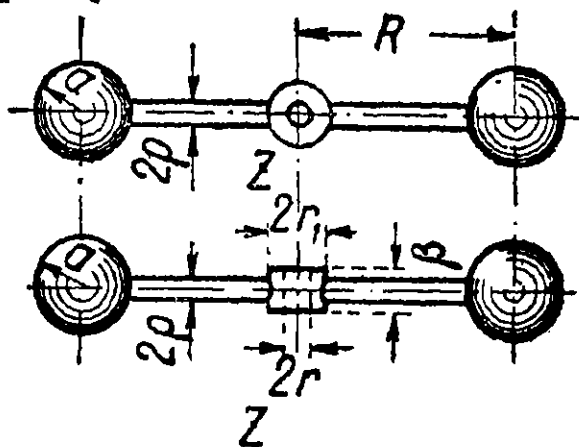


Рис. 66.

точки, масса которых сосредоточена на их центре. Мы получили бы

$$J_1 \text{ (прибл.)} = MR^2,$$

в то время, как точное значение

$$J_1 = MR^2 \left(1 + \frac{2}{5} \frac{a^2}{R^2} \right) = MR^2 1,0085,$$

т. е. ошибка приближенного значения J_1 меньше 1%.

3. Моменты инерции однородного тела вращения. Примем ось вращения за ось Z и будем пользоваться цилиндрическими координатами r, z, φ . Сечение тела плоскостью меридиана, т. е. плоскостью, проходящей через ось вращения, ограничено кривой C (рис. 67); на участке $M_1 M' M_2$ уравнение этой кривой пусть будет

$$r' = f_1(z); \quad (a)$$

на участке же $M_2 M'' M_1$ имеем

$$r'' = f_2(z). \quad (б)$$

Для момента инерции относительно оси Z имеем:

$$\begin{aligned} J_z &= \int \int \int_{(\tau)} (x^2 + y^2) dm = \\ &= \int \int \int_{(\tau)} r^2 dm = \delta \int \int \int_{(\tau)} r^2 d\tau, \end{aligned}$$

причем интегрирование распространяется по объему тела, δ — масса единицы объема, $d\tau$ — элемент объема; в цилиндрических координатах

$$d\tau = r dr d\varphi dz.$$

Получаем

$$\begin{aligned} J_z &= \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{r'}^{r''} r^3 dr = \delta \cdot \frac{\pi}{2} \int_{z_1}^{z_2} (r''^4 - r'^4) dz = \\ &= \delta \frac{\pi}{2} \int_{z_1}^{z_2} \{ [f_2(z)]^4 - [f_1(z)]^4 \} dz. \end{aligned}$$

Если известна общая масса тела, то замечая, что

$$\delta = \frac{M}{\tau}$$

и подставляя для τ его значение:

$$\tau = \int \int \int_{(\tau)} d\tau = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_1}^{z_2} dz \int_{r'}^{r''} r dr = \pi \int_{z_1}^{z_2} \{ [f_2(z)]^2 - [f_1(z)]^2 \} dz,$$

получим

$$J_z = \frac{M}{2} \frac{\int_{z_1}^{z_2} \{ [f_2(z)]^4 - [f_1(z)]^4 \} dz}{\int_{z_1}^{z_2} \{ [f_2(z)]^2 - [f_1(z)]^2 \} dz}. \quad (\text{в})$$

Переходим к вычислению моментов инерции относительно осей X и Y перпендикулярных оси вращения; очевидно, что

$$\int \int \int_{(\tau)} x^2 dm = \int \int \int_{(\tau)} y^2 dm = \frac{1}{2} \int \int \int_{(\tau)} (x^2 + y^2) dm = \frac{1}{2} J_z,$$

ибо расположения масс относительно осей X и Y ни чем друг от друга не отличаются. Получаем

$$\begin{aligned} J_x = J_y &= \int \int \int_{(\tau)} (z^2 + x^2) dm = \\ &= \int \int \int_{(\tau)} (z^2 + y^2) dm = \int \int \int_{(\tau)} z^2 dm + \frac{1}{2} J_z. \end{aligned}$$

Остается вычислить первый интеграл. Получаем

$$\begin{aligned} \int \int \int_{(\tau)} z^2 dm &= \delta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{z_1}^{z_2} z^2 dz \int_{r'}^{r''} r dr = \\ &= \delta \pi \int_{z_1}^{z_2} \{ [f_2(z)]^2 - [f_1(z)]^2 \} z^2 dz. \end{aligned}$$

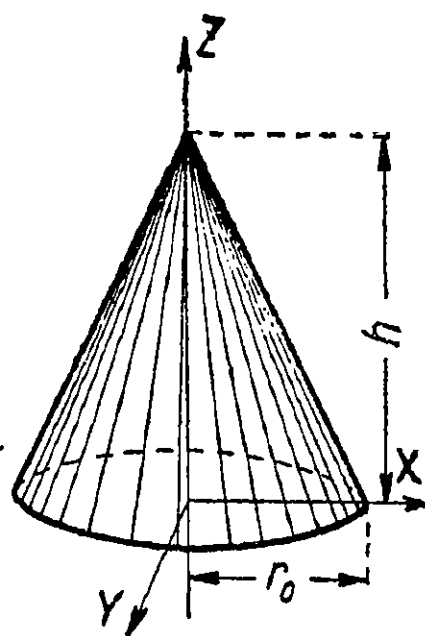


Рис. 68.

Подставляя вместо δ его значение, найдем

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z + M \frac{\int_{z_1}^{z_2} \{ [f_2(z)]^2 - [f_1(z)]^2 \} z^2 dz}{\int_{z_1}^{z_2} \{ [f_2(z)]^2 - [f_1(z)]^2 \} dz}. \quad (\text{г})$$

Заметим, что в случае тела вращения моменты инерции J_x и J_y относительно поперечных осей X , Y называются часто *экваториальными* моментами инерции.

Пользуясь формулами (в) и (г), легко вывести большинство формул таблицы моментов инерции приведенной выше. Например, для конуса (рис. 68), имеем

$$r' = 0, r'' = f_2(z) = r_0 \left(1 - \frac{z}{h} \right), z_1 = 0, z_2 = h.$$

Получаем

$$J_z = \frac{M}{2} \frac{\int_0^h r_0^4 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^4 dz}{\int_0^h r_0^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz} = 0,3 Mr_0^2.$$

Располагая оси X и Y в плоскости основания конуса, найдем также

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z + M \frac{\int_0^h r_0^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 z^2 dz}{\int_0^h r_0^2 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz} = 0,15 Mr_0^2 + 0,1 Mh^2.$$

При вычислении момента инерции тора (см. таблицу) имеем

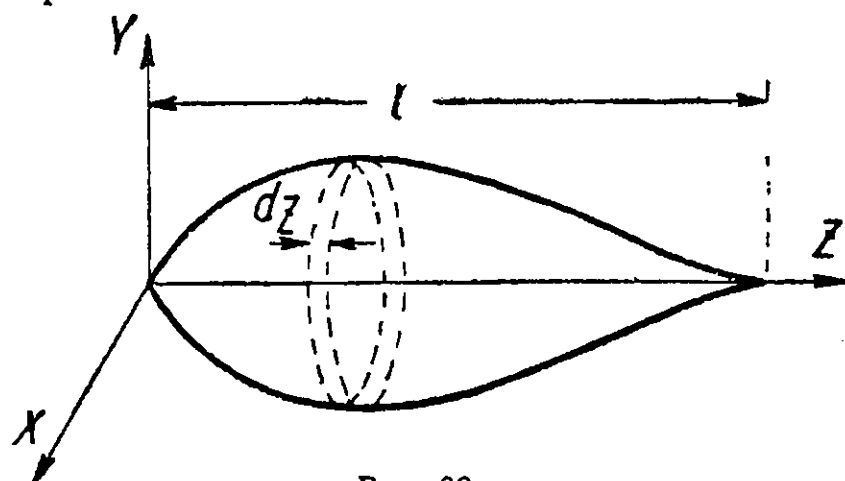


Рис. 69.

$$r' = R - \sqrt{r_0^2 - z^2},$$

$$r'' = R + \sqrt{r_0^2 - z^2},$$

$$z_1 = -r_0, \quad z_2 = r_0,$$

и подстановка в формулу (в) приводит к указанному в таблице выражению. Вычисления предлагаем проделать учащемуся.

4. Момент инерции оболочки воз-

душного судна ¹⁾. Воздушное судно имеет форму поверхности вращения с уравнением линии обвода (рис. 69).

$$r = \frac{b}{l} (l - z) \sqrt{z(l + z)}, \quad (a)$$

Известны следующие данные: вес оболочки $Q = 1682$ кг; длина судна $l = 80,7$ м; постоянная $b = 0,2025$.

Определим момент инерции оболочки относительно оси вращения Z и относительно перпендикулярной к ней оси X , проходящей через носовую точку. Имеем

$$J_z = \int \int \int (x^2 + y^2) dm = \int \int \int r^2 dm = \delta \int \int r^2 d\sigma,$$

где последнее интегрирование распространено по поверхности тела

¹⁾ Пример взят из практики Научно-исследовательского аэродинамического института в Ленинграде. Данные сообщены студ. Чекмаревым.

σ, δ — масса единицы поверхности оболочки, $d\sigma$ — элемент поверхности, причем (см. рис. 69)

$$d\sigma = 2\pi r dz.$$

Получаем

$$J_z = 2\pi\delta \int_0^l r^3 dz.$$

Замечая, что

$$\delta = \frac{M}{\sigma},$$

где M — масса, σ — поверхность оболочки, значение которой определяется формулой

$$\sigma = 2\pi \int_0^l r dz,$$

найдем

$$J_z = M \frac{\int_0^l r^3 dz}{\int_0^l r dz}.$$

Рассуждая далее совершенно так же, как и в предыдущем примере, получим

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z + M \frac{\int_0^l r z^2 dz}{\int_0^l r dz}.$$

Этими формулами определяются моменты инерции любой поверхности вращения. Переходя к интересующему нас случаю, мы должны подставить вместо r его выражение через z по формуле (а). Получим

$$J_z = \frac{Mb^2}{l^2} \frac{\int_0^l (l-z)^3 [z(l+z)]^{1/2} dz}{\int_0^l (l-z) \sqrt{z(l+z)} dz},$$

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z + M \frac{\int_0^l z^2 (l-z) \sqrt{z(l+z)} dz}{\int_0^l (l-z) \sqrt{z(l+z)} dz}.$$

Сделав подстановку $z = ls$, приведем наши выражения к виду:

$$J_z = Mb^2 l^2 \frac{\int_0^1 \frac{(1-s)^3 s^2 (1+s)^2}{\sqrt{s(1+s)}} ds}{\int_0^1 \frac{s(1-s)(1+s)}{\sqrt{s(1+s)}} ds},$$

$$J_x = J_y = \frac{1}{2} J_z + Ml^2 \frac{\int_0^1 \frac{s^3 (1-s)(1+s)}{\sqrt{s(1+s)}} ds}{\int_0^1 \frac{s(1-s)(1+s)}{\sqrt{s(1+s)}} ds}.$$

Задача сводится к вычислению интегралов вида:

$$A_k = \int_0^1 \frac{s^{k-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+s}} ds,$$

где k принимает целые значения от 1 до 7.

Замечая, что

$$\int \frac{s^{k-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1+s}} ds = 2\sqrt{1+s} s^{k-\frac{1}{2}} - 2\left(k-\frac{1}{2}\right) \int \frac{s^{k-\frac{3}{2}}(1+s)}{\sqrt{1+s}} ds,$$

$$(k=1, 2, 3, \dots),$$

получим рекуррентную формулу:

$$A_k = \frac{\sqrt{2}}{k} - \frac{2k-1}{2k} A_{k-1}. \quad (6)$$

Далее имеем

$$A_0 = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{s(1+s)}} = \ln(3 + 2\sqrt{2}) = 1,763.$$

и формула (6) дает:

$$\begin{array}{ll} A_1 = 0,523 & A_5 = 0,129 \\ A_2 = 0,315 & A_6 = 0,118 \\ A_3 = 0,209 & A_7 = 0,093 \\ A_4 = 0,171 & \end{array}$$

Сделав вычисления, получим теперь без труда

$$J_z = 0.150 Mb^2 l^2, \quad J_x = J_y = (0.255 + 0.075 b^2) Ml^2,$$

воспользовавшись нашими численными данными, окончательно найдем

$$J_z = 6828 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2, \quad J_x = J_y = 288200 \text{ кг} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2.$$

§ 20. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

Приложенные к телу заданные силы обозначим через $F_1, F_2, \dots, F_n$ (рис. 62, стр. 162). Кроме этих сил, к числу внешних принадлежат также реакции подшипников N_1 и N_2 . Однако моменты этих реакций относительно оси вращения равны нулю. Поэтому, в правую часть уравнения моментов количества движения относительно оси Z (стр. 147 ур-ние (12) входят только моменты заданных сил F_i .

Подставляя в только что упомянутое уравнение моментов количества движения относительно оси Z вместо K_z его значение:

$$K_z = J_z \dot{\omega} = J_z \dot{\phi}$$

будем иметь

$$J_z \ddot{\phi} = J_z \dot{\omega} = J_z \ddot{\phi} = L_z = \sum_{i=1}^n L_{iz} \quad (11)$$

Полученное дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси представляет полную аналогию с дифференциальным уравнением прямолинейного движения точки:

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix} \quad (*)$$

Роль массы в нашем ур-нии (11) играет момент инерции, вместо сил фигурирует их главный момент и, наконец, линейное ускорение заменено угловым. Так как все выводы и предположения динамики точки являются непосредственными следствиями ур-ния (*) (т. е. второго закона Ньютона), то легко заключить из сказанного, что все эти предложения и выводы можно перенести на случай твердого тела, вращающегося вокруг оси, если заменить:

- слово скорость словом угловая скорость,
- слово ускорение словом угловое ускорение,
- слово перемещение словом угол поворота,
- слово масса словом момент инерции,
- слово сила словом момент силы.

Допустим, что $\sum_{i=1}^n L_{iz} = 0$; уравнение (11) показывает тогда, что $\dot{\omega} = \text{const}$. Иными словами, вращение тела с постоянной угловой скоростью (по инерции) возможно лишь в том случае, когда главный момент всех приложенных к нему сил равен нулю. Например, равномерное вращение вала машины имеет место лишь в случае равенства моментов движущих сил и сил сопротивления. Если первый момент превосходит по величине второй, то $\dot{\omega} > 0$, т. е. угловая скорость машины возрастает; обратное имеет место, когда момент движущих сил меньше момента сил сопротивления; тогда $\dot{\omega} < 0$, и машина замедляет свой ход. Вращение с постоянным

угловым ускорением возможно, когда $\sum_{i=1}^n L_{iz} = \text{const}$ (см. часть 1, стр. 158).

Примеры и упражнения.

1. Определение вращающего момента по заданному закону вращения тела. Если закон вращения тела известен, т. е. угол поворота φ задан как функция времени, то, вычислив $\ddot{\omega} = \ddot{\varphi}$ и $\dot{\varepsilon} = \ddot{\varphi}$, найдем $J_z \ddot{\varphi}$ и, следовательно, L_z ; главный момент относительно оси вращения всех приложенных к телу сил (вращающий момент) будет определен. Приведем два примера.

а) На вал, делающий 100 об/мин, насажен маховик весом 1000 кг и диаметром 2 м. Определим максимальное значение вращающего момента, если коэффициент неравномерности вращения $\delta = 0,02$. При вычислении момента инерции маховика полагаем, что 0,9 всей его массы сосредоточено на ободе.

Полагая, что изменение угловой скорости происходит по гармоническому закону (часть 1, стр. 138), имеем (берем случай одноцилиндрового двухтактного двигателя):

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_{\text{ср}} \left(1 + \frac{\delta}{2} \sin \tilde{\omega}_{\text{ср}} t \right)$$

$$\dot{\tilde{\omega}} = \tilde{\omega}_{\text{ср}}^2 \frac{\delta}{2} \cos \tilde{\omega}_{\text{ср}} t.$$

Отсюда найдем

$$L_{\text{max}} = J \tilde{\omega}_{\text{ср}}^2 \frac{\delta}{2} = \frac{1000 \cdot 0,9}{981} \cdot 100^2 \left(\frac{\pi \cdot 100}{30} \right)^2 0,01 = 10000 \text{ кг} \cdot \text{см}.$$

Этот момент передается маховику валом; в свою очередь последний находится под действием равного по величине, но противоположного по направлению момента. Таким образом, даже весьма небольшая неравномерность хода вызывает довольно значительные динамические напряжения вала. Пусть, например, диаметр вала $d = 10$ см. Напряжения на поверхности вала, по известной формуле сопротивления материалов, будут

$$(p_t)_{\text{max}} = \frac{16 L_{\text{max}}}{\pi d^3} \approx 51 \text{ кг/см}^2.$$

б) Передача вращения от вала I к валу II осуществлена при помощи двух равных эллиптических колес с отношением полуосей $\frac{a}{b} = \frac{5}{4}$. Вал I вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_1 = 15 \frac{1}{\text{сек}}$, на валу II заклинено маховое колесо весом 120 кг с радиусом инерции $\rho = 0,8$ м. Найдем по этим данным максимальное значение передаваемого валу II момента (рис. 70). Валы помещены в фокусах эллипсов.

Пренебрегая моментами инерции колес по сравнению с моментом инерции маховика, получим

$$L = J\ddot{\epsilon}_2 = -J\omega_1^2 \frac{(a^2 - c^2) 2ac \sin \varphi}{(a^2 + c^2 - 2ac \cos \varphi)^2},$$

где $J = \frac{P}{g} \rho^2$ — момент инерции маховика и где вместо $\ddot{\epsilon}_2$ подставлено его значение (часть 1, стр. 160).

Максимальное значение L имеет место при

$$\cos \varphi = -\frac{a^2 + c^2}{4ac} + \sqrt{\left[\frac{a^2 + c^2}{4ac}\right]^2 + 2}$$

что читатель сам без труда проверит; вместо $\frac{c}{a}$ следует подста-

вить его значение $\frac{c}{a} = 0,6$. Дальнейшие подробности вычислений опускаем. Найдем

$$L_{\max} = 8650 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

Предлагаем учащемуся найти максимальное значение давления на зубец в точке соприкосновения колец; большая ось эллипса $2a = 40 \text{ см}$.

2. Определение угловой скорости по заданному вращающему моменту. В противоположность предыдущей, эта задача требует интегрирования дифференциального уравнения вращения. Для полного определения движения должны быть заданы еще начальные условия, т. е. значения $\bar{\omega}$ и φ при $t = 0$.

Разберем один пример. Маховое колесо приводится во вращение от электромотора постоянного тока, зависимость вращающего момента которого от угловой скорости (характеристика) может быть представлена уравнением:

$$L = L_0 \left(1 - \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right),$$

где L_0 — момент на валу электромотора, когда он трогает с места (при $\bar{\omega} = 0$), ω_1 — угловая скорость холостого хода (когда $L = 0$, т. е. электромотор не совершает полезной работы). Момент сил трения в подшипниках маховика обозначим через $L_{\text{тр}}$; момент инерции маховика — через J . Определим по этим данным угловую скорость маховика.

Имеем

$$J \frac{d\omega}{dt} = L_0 \left(1 - \frac{\bar{\omega}}{\omega_1}\right) - L_{\text{тр}}$$

Вводя обозначения

$$L_0 - L_{\text{тр}} = a, \quad \frac{L_0}{\omega_1} = b,$$

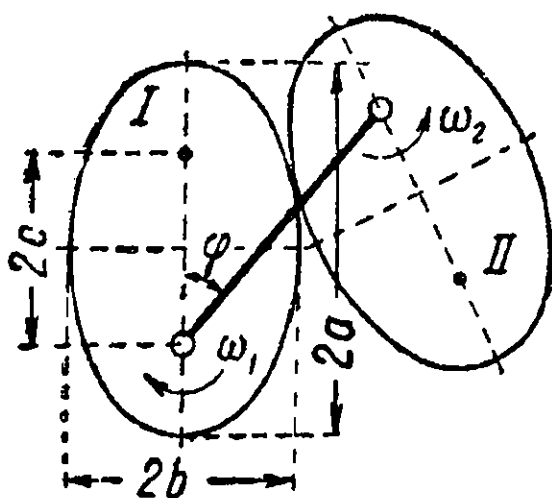


Рис. 70.

получим

$$J \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = a - b \tilde{\omega},$$

или

$$\frac{d\tilde{\omega}}{a - b \tilde{\omega}} = \frac{dt}{J}.$$

Интегрируя, найдем

$$\lg(a - b \tilde{\omega}) = -\frac{bt}{J} + c,$$

где c — постоянная, определяемая из условия $\tilde{\omega} = 0$ при $t = 0$.
Получаем

$$\tilde{\omega} = \frac{a}{b} \left(1 - e^{-\frac{bt}{J}}\right). \quad (a)$$

По истечении некоторого промежутка времени (теоретически бесконечного) $e^{-\frac{bt}{J}}$ станет весьма мало по сравнению с единицей и маховик будет вращаться с постоянной угловой скоростью $\omega^* = \frac{a}{b} = \omega_1 \frac{L_0 - L_{\text{тр}}}{L_0}$.

Для определения момента трения $L_{\text{тр}}$ можно поступать следующим образом: сообщив маховику некоторую угловую скорость ω_0 , предоставим его самому себе и найдем из опыта промежуток времени t_1 , по истечении которого маховик остановится под влиянием сил трения в подшипниках (пренебрегаем, как и выше, сопротивлением воздуха). Имеем

$$J \frac{d\tilde{\omega}}{dt} = -L_{\text{тр}}, \quad J \tilde{\omega} = -L_{\text{тр}} t + c;$$

определив константу из условия, что при $t = 0$, $\tilde{\omega} = \omega_0$, получим $J(\omega_0 - \tilde{\omega}) = L_{\text{тр}} t$;

при $t = t_1$, $\tilde{\omega} = 0$. Это дает

$$L_{\text{тр}} = \frac{J \omega_0}{t_1}.$$

Возьмем численный пример: $L = 36,3 \text{ кг} \cdot \text{м}$; $\omega_1 = 36,3 \pi \frac{1}{\text{сек}}$ ¹⁾:

$\omega_0 = 10 \pi \frac{1}{\text{сек}}$; $t_1 = 1,5 \text{ мин.}$; вес маховика $P = 150 \text{ кг}$, радиус инерции $\rho = 0,6 \text{ м}$.

По этим данным получим

$$L_{\text{тр}} = \frac{150 \cdot 0,6^2 \cdot 10 \pi}{9,81 \cdot 90} = 1,9 \text{ кг} \cdot \text{м}$$

Далее найдем:

$$\omega^* = \frac{a}{b} = 36,3 \pi \frac{36,3 - 1,9}{36,3} = 34,4 \pi \frac{1}{\text{сек}} \approx 1040 \text{ об/мин.}$$

$$\frac{b}{J} = \frac{L_0}{\omega_1 \cdot J} = \frac{36,3}{36,3 \pi} \cdot \frac{9,81}{150 \cdot 0,6^2} = 0,058 \frac{1}{\text{сек}}$$

¹⁾ Томелен „Основы электротехники“, стр. 267.

Формула (а) примет вид:

$$\bar{\omega} = 34,4 \pi (1 - e^{-0,058 t}) \frac{1}{\text{сек.}}$$

Уже по истечении 100 сек. от начала движения $e^{-0,058 t} \approx 0,003$ и практически можно считать $\bar{\omega} = \omega^* = 34,4 \pi \frac{1}{\text{сек.}}$

3. Колебания магнитной стрелки. В однородное магнитное поле помещен элементарный магнитный диполь, т. е. воображаемый магнит, магнитные массы которого $+m$ и $-m$ сосредоточены в его концах (рис. 71); пусть ось магнита составляет угол φ с направлением магнитного поля. Если назвать через H напряжение поля, т. е. силу, действующую на единицу положительной магнитной массы, помещенной в магнитное поле, то к концам нашего элементарного магнита будут приложены равные и противоположно направленные силы $+mH$ и $-mH$. Эти силы образуют пару, момент которой по величине равен:

$$L = mlH \sin \varphi = MH \sin \varphi \tag{*}$$

Произведение $ml = M$ называется магнитным моментом нашего элементарного диполя. Выведенная формула (*) имеет место и для всякого физического магнита; нужно только под буквой M понимать магнитный момент этого физического магнита, т. е. сумму ΣM_i моментов элементарных магнитных диполей, на которые физический магнит может быть мысленно разложен.

Допустим теперь, что магнит, помещенный в магнитное поле земли, может вращаться вокруг вертикальной оси Z , проходящей через центр тяжести магнита. Сила H будет в этом случае горизонтальной слагающей магнитного поля земли, ее направление определит магнитный меридиан в данном месте, и угол φ будет отсчитываться теперь от плоскости этого меридиана.

Назовем через J момент инерции магнита относительно оси вращения. Дифференциальное уравнение вращения магнита будет

$$J \ddot{\varphi} = -MH \sin \varphi.$$

(Учащийся сам разберется в знаке правой части). Представим наше уравнение в виде:

$$\ddot{\varphi} + \frac{MH}{J} \sin \varphi = 0;$$

оно отличается от уравнения колебаний математического маятника (стр. 154) только заменой постоянной $\frac{g}{l}$ на $\frac{MH}{J}$. Поэтому период колебаний магнита определится формулой:

$$T = 4 \sqrt{\frac{J}{MH}} K \approx 2 \pi \sqrt{\frac{J}{MH}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right), \tag{а}$$

где α —угол первоначального отклонения от плоскости магнитного меридиана.

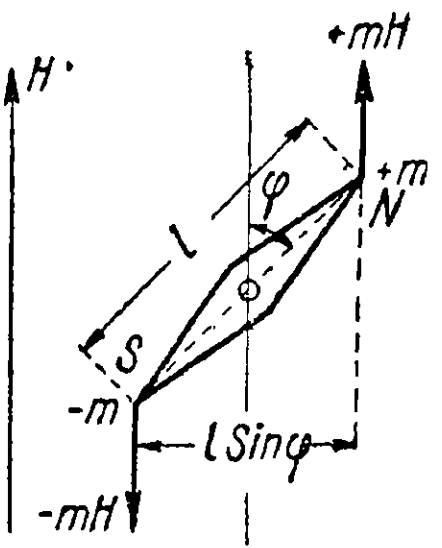


Рис. 71.

Для весьма малых колебаний формула (а) дает

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MH}}. \quad (б)$$

Зная J , можно по наблюдению периода колебаний T определить произведение MH . Для определения горизонтальной слагающей H земного магнитного поля нужно иметь еще одно уравнение, связывающее M и H . Это уравнение получается из наблюдения вспомогательного магнита в поле нашего качающегося магнита при вполне определенном взаимном расположении того и другого магнита. Изложение дальнейших подробностей не входит в нашу задачу.

Магнитные измерения производятся с максимальной возможной точностью. Поэтому в формулу (а) вносятся еще ряд поправок на силы сопротивления, на кручение нити, при помощи которой магнит подвешен, на температурные влияния и т. д. Для нас будет интересно только указать, что момент инерции J не может быть с достаточной точностью определен путем вычисления,

ввиду неизбежных неоднородностей материала магнита. Поэтому его находят опытным путем. Для этого определяют сначала период T_1 малых колебаний магнита, а затем, присоединив к магниту эталонное тело правильной геометрической формы с известным моментом инерции J_0 относительно оси вращения, находят период колебания T_2 для этого случая. На основании (б) имеем в первом и втором случаях

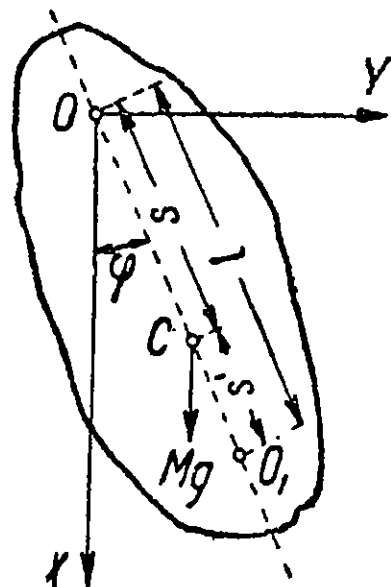


Рис. 72.

$$T_1^2 = \frac{4\pi^2 J}{MH}, \quad T_2^2 = \frac{4\pi^2 (J + J_0)}{MH}$$

откуда получаем

$$J = \frac{J_0}{\left(\frac{T_2^2}{T_1^2} - 1\right)}. \quad (в)$$

4. Физический маятник. Физическим маятником называется тяжелое твердое тело произвольной формы, имеющее неподвижную горизонтальную ось вращения; эта ось называется осью привеса маятника.

Пусть плоскость чертежа (рис. 72) представляет вертикальную плоскость, перпендикулярную оси привеса и проходящую через центр тяжести C тела. Расстояние OC центра тяжести от оси привеса обозначим через s , угол между OC и вертикалью OX через φ . Радиус инерции тела относительно оси, параллельной оси привеса и проходящей через центр тяжести C , обозначим через ρ ; тогда момент инерции относительно оси привеса будет (формулы (3) и (10))

$$J = M(\rho^2 + s^2).$$

Если пренебречь силами сопротивления воздуха и моментом трения в оси, то внешними силами, приложенными к телу, будут реакция оси N и сила веса Mg . Но момент реакции N относительно

оси привеса равен нулю, момент же силы веса равен $-Mgs \sin \varphi$. Дифференциальное уравнение вращения тела принимает вид:

$$M(\rho^2 + s^2)\ddot{\varphi} = -Mgs \sin \varphi,$$

или

$$\ddot{\varphi} + \frac{gs}{\rho^2 + s^2} \sin \varphi = 0.$$

В уравнение колебаний математического маятника вместо $\frac{gs}{\rho^2 + s^2}$ входило $\frac{g}{l}$. Поэтому длина l эквивалентного математического маятника (имеющего тот же период, что и рассматриваемый физический) будет

$$l = \frac{\rho^2 + s^2}{s}. \quad (a)$$

Период колебаний определяется формулой:

$$T = 4 \sqrt{\frac{\rho^2 + s^2}{gs}} K \approx 2\pi \sqrt{\frac{\rho^2 + s^2}{gs}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right), \quad (б)$$

в случае же малых колебаний получим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho^2 + s^2}{gs}}. \quad (в)$$

Вдоль OC отложим от оси привеса отрезок $OO_1 = l$. Прямая, проходящая через конец O_1 этого отрезка параллельно оси привеса, называется осью качаний физического маятника. Существует замечательное свойство взаимности этих двух осей. Для вывода его перепишем уравнение (a) в виде:

$$s^2 - ls + \rho^2 = 0.$$

Называя через s и s' корни этого квадратного уравнения, будем иметь

$$s + s' = l \quad ss' = \rho^2. \quad (г)$$

Таким образом, данный период колебаний T или, что то же самое, данную длину эквивалентного математического маятника l , можно получить, поместив ось привеса или на расстоянии s или на расстоянии s' от центра тяжести тела. В первом случае ось качаний будет находиться на расстоянии $l - s = s'$, а во втором — на расстоянии $s = l - s'$ от центра тяжести. Иными словами, ось качаний станет во втором случае осью привеса, а ось привеса — осью качаний. В обратном маятнике Катера (фотография которого дана на рис. 73), служащем для точного определения ускорения g силы тяжести, использовано это свойство физического маятника. Регулируя положение грузов и их величину, можно добиться, чтобы период колебаний был одним и тем же, будет ли маятник вращаться вокруг ребра призмы A или вокруг ребра призмы B . Расстояние AB будет длиной l эквивалентного математического маятника, и g найдется по формуле

$$g = \frac{4l\pi^2}{T^2}.$$

5. Способы экспериментального определения моментов инерции. Опишем некоторые простейшие способы экспериментального определения моментов инерции.

а) *Маятниковые колебания.* Пусть требуется определить момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр тяжести (центральной оси). Подвесив тело так, чтобы ось привеса была параллельна интересующей нас центральной оси, определяют



Рис. 73. Оборотный маятник Катера. (Модель кабинета механики Ленинградского Физико - механического института.)



Рис. 74. Определение момента инерции по наблюдениям маятниковых колебаний. (Модель кабинета механики Ленинградского Физико - механического института.)

из опыта период колебаний получающегося физического маятника. При принятых в предыдущем примере обозначениях имеем

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\rho^2 + s^2}{gs}},$$

откуда найдем ρ^2 , а потом и $M\rho^2 = J$; получим

$$J = Qs \left(\frac{T^2}{4\pi^2} - \frac{s}{g} \right),$$

где $Q = Mg$ — вес тела.

Численный пример, иллюстрирующий метод, учащийся найдет в конце задания. Фотография установки для измерений дана на рис. 74.

б) *Крутильные колебания.* Испытуемое тело подвешивается в центре тяжести на проволоке к неподвижной точке O (рис. 75). Проволока закручивается на некоторый угол, после чего тело, будучи предоставлено самому себе, начинает совершать крутильные колебания вокруг оси OA проволоки.

Составим дифференциальное уравнение вращения тела. Момент силы веса относительно оси вращения равен нулю, ибо ось вращения вертикальна; моментом сил сопротивления воздуха пренебрегаем; остается момент упругих сил проволоки, пропорциональный углу закручивания ее: $L_z = -k\varphi$, где коэффициент пропорциональности k зависит от размеров и упругих свойств проволоки.

Если обозначить через J момент инерции тела относительно оси OA , то получим

$$J\ddot{\varphi} + k\varphi = 0.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением малых колебаний математического маятника, находим

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k}}.$$

Для определения постоянной k находят период крутильных колебаний T_0 на той же проволоке эталонного тела с известным моментом инерции J_0 . Имеем

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0}{k}},$$

и, следовательно:

$$J = J_0 \frac{T^2}{T_0^2}.$$

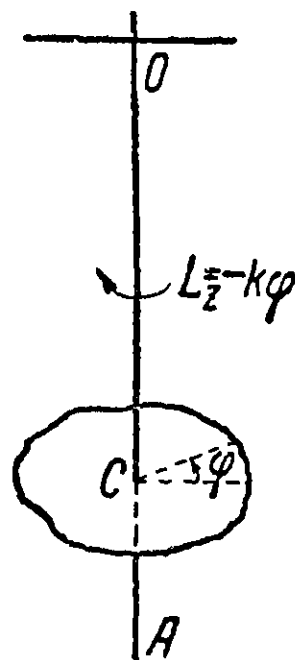


Рис. 75.

В одном из изменений, произведенных в кабинете механики Физико-механического ин-та, было получено

$$50 T = 138 \text{ сек.}, \quad 50 T_0 = 126 \text{ сек.}$$

Эталоном служил круглый диск диаметра $D = 30 \text{ см}$ и веса $Q = 1,33 \text{ кг}$. По этим данным получим

$$J_0 = \frac{Q}{g} \frac{D^2}{8} = \frac{1,36}{981} \cdot \frac{900}{8} \text{ кг.см.сек}^2.$$

$$J_1 = \frac{1,36 \cdot 900 (138)^2}{981 \cdot 8 \cdot (126)^2} = 0,189 \text{ кг.см.сек}^2.$$

На рис. 76 дана фотография установки.

в) *Наблюдение падающего груза.* Испытуемое тело надевается на вертикальную ось OO_1 и закрепляется гайками наглухо на ней. Вращение получается от падающего груза, который при своем падении разворачивает нить, накрученную на шкив N радиуса r и перекинутую через блок A (рис. 77). Для определения момента инерции тела относительно оси OO_1 наблюдают продолжительность T падения груза с высоты h .

Составим уравнение вращения тела. Если пренебречь сопротивлениями воздуха и трением, то внешними силами, приложенными к испытываемому телу, будет сила веса, реакции оси и натяжение S нити. Но первые две не дают момента относительно оси вращения.

Момент силы S равен rS . Получаем

$$J\ddot{\varphi} = rS, \quad (a)$$

где J — момент инерции тела относительно оси вращения (моментом инерции шкива и оси с гайками пренебрегаем). Для исключения неизвестного натяжения S нити нужно составить еще уравнение движения груза:

$$\frac{P}{g}\ddot{z} = P - S, \quad (б)$$

где P — вес груза (массой нити пренебрегаем). Замечая теперь, что в силу нерастяжимости нити $z = r\varphi$, $\ddot{z} = r\ddot{\varphi}$ и, исключая S из уравнений (a) и (б), получим

$$\ddot{z} = g \frac{Pr^2}{Jg + Pr^2}.$$

Интегрируя два раза это выражение, найдем:

$$z = g \frac{Pr^2}{Jg + Pr^2} \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

В начальный момент $z = 0$, и система находится в покое, т. е. $\dot{z} = 0$. Это дает $C_1 = 0$, $C_2 = 0$. При $t = T$, $z = h$. Получаем

$$h = g \frac{Pr^2}{Jg + Pr^2} \frac{T^2}{2},$$

откуда найдем

$$J = \frac{P}{g} r^2 \left\{ \frac{gT^2}{2h} - 1 \right\}.$$

Рис. 76.
Определение момента инерции по методу крутильных колебаний. (Модель кабинета механики Ленинградского Физико-механического института.)

В одном из измерений кабинета механики было определено $T = 4,25$ сек. при $h = 100$ см. Вес падающего груза $P = 0,1$ кг, $r = 2,5$ см. Получаем

$$J = \frac{0,1 \cdot 6,25}{981} \left\{ \frac{981 \cdot 18,06}{2 \cdot 100} - 1 \right\} = 0,0558 \text{ кг. см. сек}^2.$$

Фотография измерительной установки дана на рис. 78.

6. Колебания стрелки гальванометра. а) Уравнение движения. В приборах, предназначенных для точных измерений силы тока, т. е. в гальванометрах, употребляется магнитная стрелка или магнит иной формы. Магнит в горизонтальном положении кла-

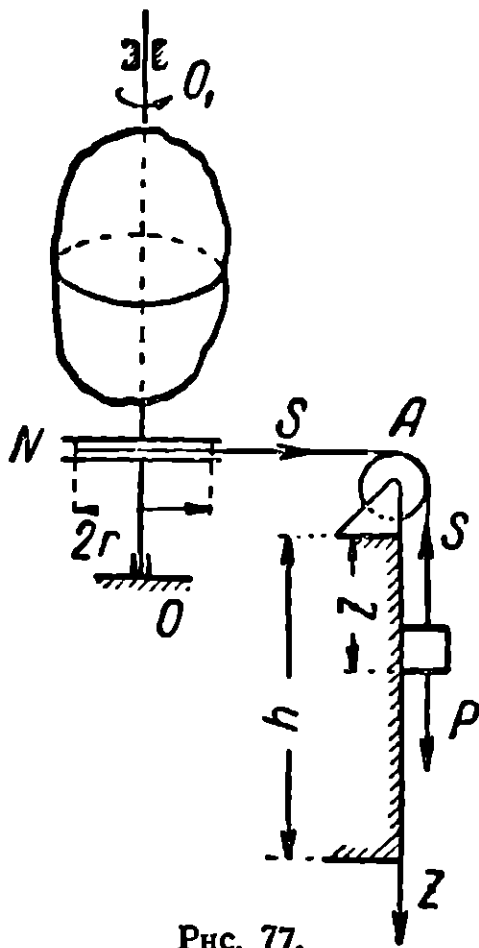


Рис. 77.

дется на острие или подвешивается на коконовой нити. Центр магнита помещается в центре катушки, состоящей из некоторого числа правильно расположенных витков изолированной проволоки, причем плоскости витков приводятся в положение, параллельное магнитному меридиану (рис. 79). При отсутствии тока в катушке магнит устанавливается в магнитном меридиане; при прохождении же тока он отклоняется на некоторый угол φ . Этот угол определяется или при посредстве круга с делениями и указателя, присоединенного к магниту, или при помощи отражения света от зеркальца, укрепленного на подвесе магнита и вращающегося вместе с последним.

Обозначим через G величину силы, с которой по направлению, перпендикулярному плоскостям оборотов катушки, действует на единицу магнитной массы в полюсе магнита ток, проходящий в обмотке гальванометра и имеющий силу, равную единице. Тогда сила, действующая на магнитную массу m_1 в этом полюсе и происходящая от тока силы i , выразится через miG . Момент вращения, от действия которого на магнит может произойти увеличение угла φ , равняется $mlGi \cos \varphi$, где через l обозначено междуполусное расстояние (рис. 80). Обозначая магнитный момент магнита ml через M , мы получаем для момента вращения от электромагнитных сил выражение $MGi \cos \varphi$.

При отклонении магнита от магнитного меридиана на угол φ действие магнитного поля земли стремится уменьшить угол φ . Момент вращения выразится через $MH \sin \varphi$ (см. формулу (*) примера 3 этого параграфа). Моментом кручения нити можно пренебречь.

Для уничтожения (гашения) колебаний магнита галь-

ванометр обычно снабжается так называемыми магнитными успокоителями. Такие успокоители представляют собою металлическую массу, расположенную вблизи магнита гальванометра. При колебании магнита в этой массе индуцируются электрические токи, действующие на магнит в направлении, прямо противоположном тому движению, какое имеет в данный момент магнит. Если металлическая масса имеет такую форму, что при всех положениях магнита,



Рис. 78. Определение момента инерции по наблюдению падения груза. (Модель кабинета механики Ленинградского Физико-механического института.)

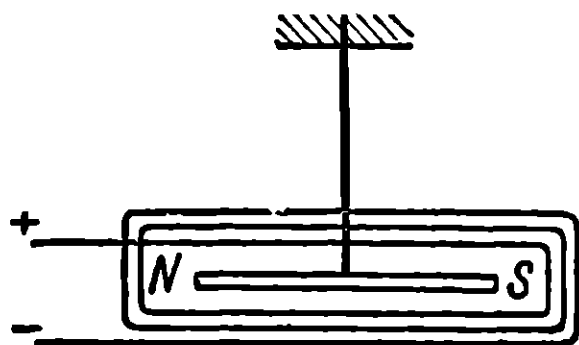


Рис. 79.

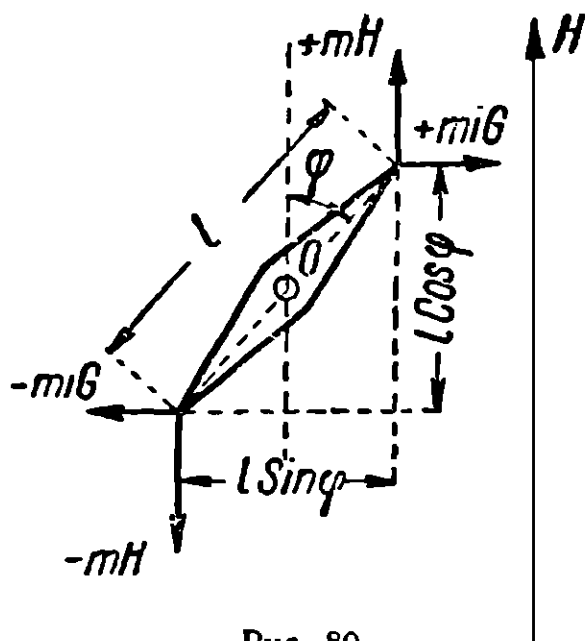


Рис. 80.

колеблющегося вокруг вертикальной оси, относительно расположение магнита и этой массы одинаково (например горизонтальный медный диск, находящийся под горизонтальным магнитом, который колеблется вокруг оси, проходящей через центр диска), то момент сил торможения, испытываемых магнитом от возбуждаемых им токов, не будет зависеть от угла поворота магнита и будет пропорционален его *угловой скорости*, что следует из основного закона индукции. Обозначим этот момент через $\beta \dot{\varphi}$.

Составим дифференциальное уравнение вращения магнита. Обозначая момент инерции магнита относительно оси вращения через J , получим

$$J\ddot{\varphi} = MGi \cos \varphi - MH \sin \varphi - \beta \dot{\varphi}. \quad (a)$$

К этому уравнению мы вернемся в дальнейшем, а теперь займемся рассмотрением *свободных* колебаний, т. е. движением магнита, отклоненного от положения равновесия при отсутствии тока в цепи ($i=0$). Ограничиваясь еще малыми колебаниями, положим $\sin \varphi = \varphi$. Получим

$$J\ddot{\varphi} + \beta \dot{\varphi} + MH \varphi = 0. \quad (б)$$

Вводя обозначения

$$\frac{MH}{J} = k^2, \quad \frac{\beta}{J} = 2\varepsilon, \quad (в)$$

приведем ур-ние (б) к виду:

$$\boxed{\ddot{\varphi} + 2\varepsilon \dot{\varphi} + k^2 \varphi = 0} \quad (г)$$

К этому же дифференциальному уравнению приводится весьма большое число задач механики. Рассмотрим, например, успокоение колебаний при помощи так называемых катаррактв: к телу, совершающему колебания, на пружине присоединен поршень, движущийся в сосуде, заполненном какой-нибудь вязкой жидкостью, и перегоняющий эту жидкость из этого сосуда в другой. Принимая, что сила сопротивления жидкости движению поршня пропорциональна первой степени скорости его, получим

$$\frac{P}{g} \ddot{x} = -cx - \beta \dot{x}$$

(x отсчитывается от положения равновесия, P — вес тела, c — жесткость пружины, $-\beta \dot{x}$ — проекция на ось X силы сопротивления, направленной противоположно скорости и ей пропорциональной). Если ввести обозначения:

$$\frac{cg}{P} = k^2, \quad \frac{\beta g}{P} = 2\varepsilon,$$

то это уравнение примет вид ур-ния (г).

Заметим, что предположение о пропорциональности силы сопротивления первой степени скорости тела соответствует действительному закону сопротивления только при весьма малых величинах

скорости. Наряду с этим, такое предположение с математической стороны является наиболее простым. Поэтому даже в тех случаях, когда закон сопротивления неизвестен, чтобы ориентироваться в колебательном процессе, возникающем при наличии сопротивлений, принимают, что последнее пропорционально первой степени скорости. Известно, например, что амплитуды колебаний подвешенного на пружине груза и в воздухе будут убывать, пока по истечении некоторого промежутка времени груз не остановится. Силами сопротивления в этом случае, помимо сопротивления воздуха, имеющего второстепенное значение, являются силы внутреннего трения в пружине, на преодоление которых тратится постепенно энергия колебаний груза. Закон сопротивления здесь неизвестен и для изучения движения принимают закон пропорциональности силы сопротивления первой степени скорости вследствие его с математической стороны сравнительной простоты.

Возвращаясь к интегрированию уравнения (г), отметим, что надлежащей подстановкой можно всегда достичь уничтожения в линейном дифференциальном уравнении второго порядка члена, содержащего первую производную искомой функции. Ограничиваясь интересующим нас случаем постоянных коэффициентов, введем для этого вместо φ новую неизвестную функцию θ подстановкой:

$$\varphi = e^{-\varepsilon t} \theta.$$

Получим

$$\dot{\varphi} = e^{-\varepsilon t} (\dot{\theta} - \varepsilon \theta), \quad \ddot{\varphi} = e^{-\varepsilon t} (\ddot{\theta} - 2\varepsilon \dot{\theta} + \varepsilon^2 \theta)$$

и подстановка в (г) дает

$$e^{-\varepsilon t} \left\{ \ddot{\theta} - 2\varepsilon \dot{\theta} + \varepsilon^2 \theta + 2\varepsilon \dot{\theta} - 2\varepsilon^2 \theta + k^2 \theta \right\} = 0$$

или по упрощении

$$\ddot{\theta} + (k^2 - \varepsilon^2) \theta = 0. \quad (e)$$

Характер движения будет существенно отличен в зависимости от того, будет ли $k^2 - \varepsilon^2$ положительно или отрицательно.

б) *Затухающие колебания.* В случае $k^2 - \varepsilon^2 > 0$, который можно назвать случаем малого сопротивления, мы приходим к хорошо известному нам дифференциальному уравнению гармонических колебаний; θ изменяется по гармоническому закону:

$$\theta = a \sin (\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t + \alpha)$$

Период колебаний для θ определяется формулой

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}} = \frac{2\pi}{k \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^2}}, \quad (ж)$$

где $T_0 = \frac{2\pi}{k}$ период малых колебаний при отсутствии сопротивления, т. е. при $\beta = 0$ (см. пример 3).

Возвращаясь к углу поворота магнитной стрелки φ , получим [см. (д) и (е)]:

$$\boxed{\varphi = ae^{-\varepsilon t} \sin(\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t + \alpha)} \quad (3)$$

причем константы a и α определяются из начальных условий.

Полученное движение, с которым мы уже ознакомились в первой части курса, где дано его графическое изображение, имеет колебательный характер, так как φ периодически изменяют свой знак в зависимости от изменения знака синуса. Амплитуды колебаний постоянно убывают по показательному закону $e^{-\varepsilon t}$, вследствие чего эти колебания называются *затухающими*.

Найдем максимальные отклонения стрелки от положения равновесия. Приравнивая для этого нулю производную $\dot{\varphi}$ по времени, получим:

$$\dot{\varphi} = ae^{-\varepsilon t} \left\{ \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} \cos(\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t + \alpha) - \varepsilon \sin(\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t + \alpha) \right\} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}(\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t + \alpha) = \frac{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon},$$

и моменты времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$), когда максимальные отклонения (по обе стороны от положения равновесия) имеют место, будут

$$t_n = \frac{\operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} - \alpha + n\pi}{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}} \quad (и)$$

Соответствующие максимальные отклонения $\bar{\varphi}_n$ будут:

$$\bar{\varphi}_n = ae^{-\varepsilon t_n} \sin\left[\operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} + n\pi\right] = (-1)^n e^{-\varepsilon t_n} \frac{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}}{k}. \quad (к)$$

Сравним величины двух последовательных максимальных отклонений (размахов); составляя для этого отношение $\left| \frac{\bar{\varphi}_n}{\bar{\varphi}_{n+1}} \right|$, получим

$$\eta = \left| \frac{\bar{\varphi}_n}{\bar{\varphi}_{n+1}} \right| = e^{-\varepsilon(t_n - t_{n+1})} = e^{\frac{\pi \varepsilon}{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}}} = e^{\frac{\varepsilon T}{2}},$$

откуда

$$\boxed{\lg \eta = \frac{T \varepsilon}{2}} \quad (л)$$

$\lg \eta$, т. е. натуральный логарифм отношения двух последовательных размахов, называется, как известно, логарифмическим декрементом колебаний. Определяя из наблюдений размахи и период колебаний и вычислив декремент, можно определить по ф-ле (л) ε , а, следовательно, и коэффициент сопротивления.

Для оценки влияния сопротивления на период колебаний и степень затухания их, преобразуем ф-лу (л) к иному виду. Имеем на основании (ж):

$$\epsilon^2 = \left(1 - \frac{T_0^2}{T^2}\right) k^2 = \left(1 - \frac{T_0^2}{T^2}\right) \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = 4\pi^2 \frac{T^2 - T_0^2}{T^2 T_0^2}$$

и, следовательно:

$$\lg^2 \eta = \frac{\epsilon^2 T^2}{4} = \pi^2 \frac{T^2 - T_0^2}{T_0^2},$$

$$\frac{T}{T_0} = \sqrt{1 + \left(\frac{\lg \eta}{\pi}\right)^2}$$

(м)

Зависимость между η и отношением $\frac{T}{T_0}$ изображена

на графике рис. 81. Из этого графика видно, что сопротивление весьма мало влияет на период колебаний. Пусть, например, $\eta = 2$, т. е. каждый следующий размах вдвое меньше предыдущего (по истечении

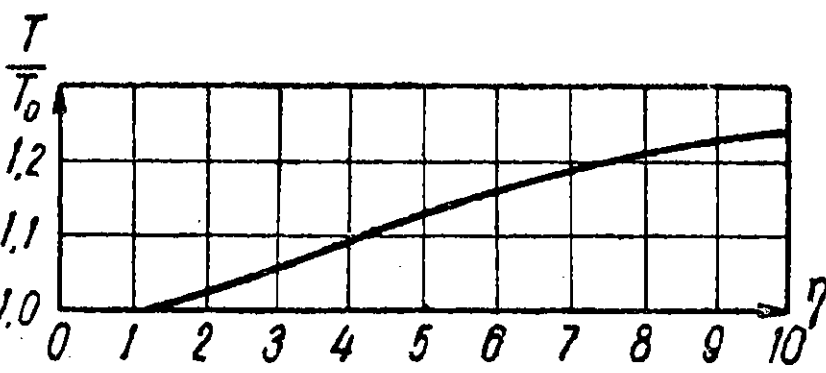


Рис. 81.

периода размахи уменьшаются в четыре раза); период же колебаний увеличивается от введения сопротивления только на 2,4% ($\frac{T}{T_0} = 1,024$); увеличение периода на 10% имеет место при $\eta = 4,2$, что соответствует весьма значительному сопротивлению (по истечении двух периодов отклонения стрелки сделаются в $4,2^2 \approx 311$ раз меньше первоначальных и движение можно считать остановившимся). Итак, *если сопротивление не слишком велико, то влияние его на период колебаний весьма незначительно и часто практически можно им пренебречь; влияние же даже малого сопротивления на размахи, вследствие уменьшения их в геометрической прогрессии, весьма заметно.*

в) *Апериодическое движение.* Если сопротивление столь велико, что $k^2 - \epsilon^2 < 0$, то общий интеграл уравнения (е):

$$\ddot{\theta} - (\epsilon^2 - k^2) \theta = 0$$

можно представить в виде (стр. 66):

$$\theta = C_1 \text{ch} \sqrt{\epsilon^2 - k^2} t + C_2 \text{sh} \sqrt{\epsilon^2 - k^2} t$$

и формула (д) дает

$$\varphi = e^{-\epsilon t} (C_1 \text{ch} \sqrt{\epsilon^2 - k^2} t + C_2 \text{sh} \sqrt{\epsilon^2 - k^2} t).$$

Полученное движение (оно называется *апериодическим*) уже не имеет колебательного характера: достаточно большое сопротивление

совершенно уничтожило свободные колебания. При весьма больших значениях аргумента можно приближенно положить

$$\operatorname{ch} x \approx \operatorname{sh} x \approx \frac{1}{2} e^x,$$

и, следовательно:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[e^{(-\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - k^2})t} \right] = 0,$$

т. е. φ асимптотически приближается к нулю при возрастании t до бесконечности; практически φ уже при малых t станет, вследствие быстрого убывания показательной функции $e^{-\varepsilon t}$, настолько малым, что стрелку можно будет считать вернувшейся в положение равновесия.

В зависимости от начальных условий (той или иной начальной угловой скорости) апериодическое движение будет иметь различный характер. Пусть при $t=0$, $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi} = \tilde{\omega}_0$. Определяя по этим условиям произвольные постоянные в ф-ле (18), получим

$$\varphi = e^{-\varepsilon t} \left\{ \varphi_0 \operatorname{ch} \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t + \frac{\tilde{\omega}_0 + \varepsilon \varphi_0}{\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t \right\}, \quad (\text{н})$$

φ_0 можно считать положительным; $\tilde{\omega}_0$ может быть и отрицательным и положительным. Для построения графика движения найдем экстремальные значения φ . Составляя производную

$$\dot{\varphi} = e^{-\varepsilon t} \left\{ \tilde{\omega}_0 \operatorname{ch} \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t - \frac{\varepsilon \tilde{\omega}_0 + k^2 \varphi_0}{\sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} \operatorname{sh} \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t \right\}$$

и приравнявая ее нулю, получим для определения момента времени t_m , когда φ достигает экстремального значения, уравнение:

$$\operatorname{th} \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t_m = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - k^2} \tilde{\omega}_0}{\varepsilon \tilde{\omega}_0 + k^2 \varphi_0} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2}}{1 + \vartheta}, \quad (\text{о})$$

причем

$$\vartheta = \frac{k^2 \varphi_0}{\varepsilon \tilde{\omega}_0}.$$

Значение φ в этот момент времени будет

$$\begin{aligned} \varphi_m &= e^{-\varepsilon t_m} \varphi_0 \left\{ 1 + \frac{\tilde{\omega}_0 + \varepsilon \varphi_0}{\varphi_0 \sqrt{\varepsilon^2 - k^2}} \operatorname{th} \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t_m \right\} \operatorname{ch} \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t_m = \\ &= e^{-\varepsilon t_m} \varphi_0 \left\{ 1 + \frac{1 + \frac{\tilde{\omega}_0}{\varepsilon \varphi_0}}{1 + \vartheta} \right\} \operatorname{ch} \sqrt{\varepsilon^2 - k^2} t_m. \end{aligned} \quad (\text{п})$$

При изменении аргумента x от $-\infty$ до $+\infty$ функция $\operatorname{th} x$ монотонно возрастает от -1 до $+1$, причем $\operatorname{th} x > 0$ при $x > 0$ и $\operatorname{th} x < 0$ при $x < 0$. Отсюда следует, что существование положительного

корня t_m (который только и может нас интересовать) уравнения (о) обуславливается выполнением неравенства:

$$0 < \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2}}{1 + \vartheta} < 1. \quad (p)$$

Если это неравенство соблюдается, то уравнение (о) имеет один положительный корень. Будем в дальнейшем различать три случая:

1°. Неравенство (p) соблюдается при $\vartheta > 0$, т. е. $\tilde{\omega}_0 > 0$; φ_m также будет положительным [см. (п)]; график движения представлен на рис. 82а.

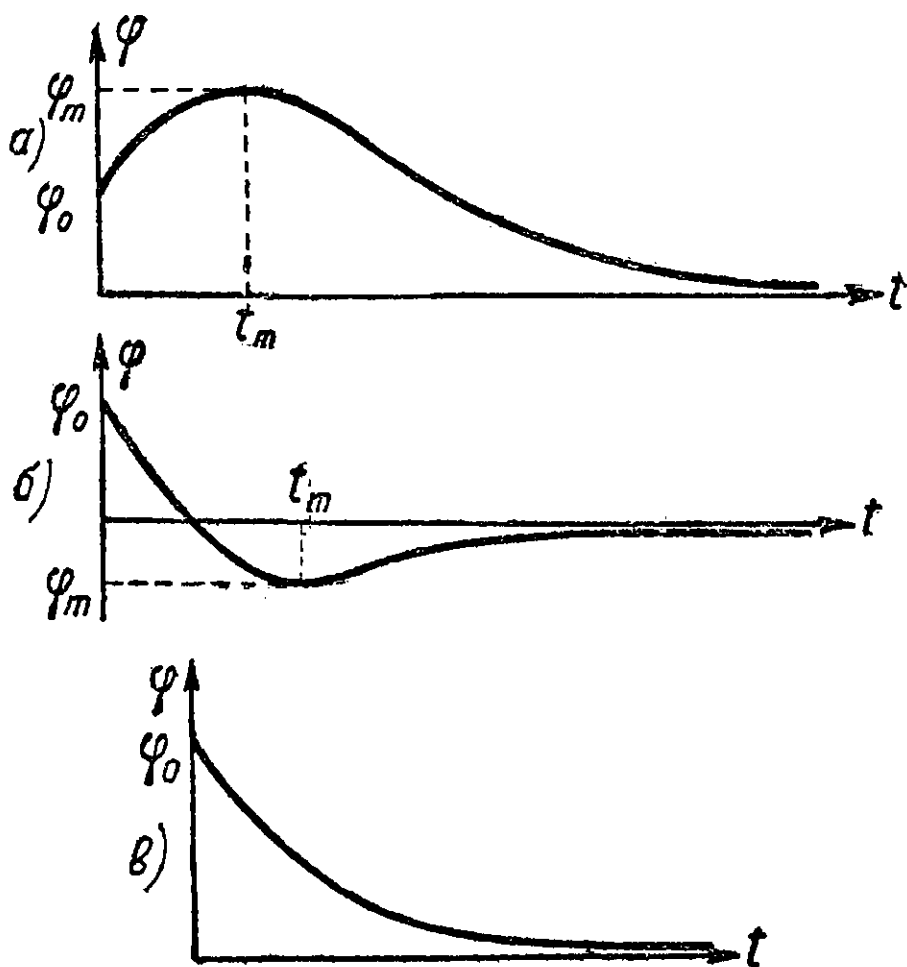


Рис. 82.

Наличие начальной угловой скорости в направлении начального отклонения φ_0 вызывает увеличение угла до некоторого максимума φ_m , после чего стрелка возвращается постепенно в положение равновесия, не переходя через него.

2°. Если $\vartheta < 0$, причем $\vartheta > -\left(\frac{k}{\varepsilon}\right)^2$ (это соответствует $\tilde{\omega}_0$ отрицательному и большему по абсолютному значению, чем $\varepsilon\varphi_0$), то (p) также имеет место; φ_m при этом оказывается отрицательным [см. (п)], так как $|\vartheta| = \frac{k^2\varphi_0}{\varepsilon|\tilde{\omega}_0|} < \frac{|\tilde{\omega}_0|}{\varepsilon\varphi_0}$. График движения представлен на рис. 82б. Получив угловую скорость, достаточно большую по величине ($|\tilde{\omega}_0| > \varepsilon\varphi_0$) и направленную в сторону, противоположную первоначальному отклонению φ_0 , стрелка успевает один раз пройти

через положение равновесия, отклонившись в отрицательную сторону на угол $|\varphi_m|$, после этого начинается возвращение в положение равновесия.

3°. Если $\vartheta < -\frac{k^2}{\varepsilon^2}$, т. е. $\tilde{\omega}_0 < 0$ и $|\tilde{\omega}| < \varepsilon\varphi_0$, то неравенство (p) не имеет места и φ монотонно убывает с течением времени (при $t > 0$); $\varepsilon\varphi_0 + \tilde{\omega}_0 > 0$, и ф-ла (н) показывает, что φ остается всегда положительным. График движения представлен на рис. 82в. Стрелка возвращается в положение равновесия, не переходя через него; начальная угловая скорость для этого уже недостаточно велика.

В случае 3° движение называется аperiодическим 1-го рода; в случаях 1° и 2° имеем аperiодическое движение 2-го рода.

г) *Предельное аperiодическое движение.* При $k^2 - \varepsilon^2 = 0$ ур-ние (е) дает

$$\ddot{\theta} = 0,$$

откуда следует, что

$$\theta = C_1 t + C_2;$$

ф-ла (д) дает:

$$\varphi = e^{-\varepsilon t} (C_1 t + C_2).$$

Полученное движение по характеру своему не отличается от аperiодического. Оно называется предельным аperiодическим движением.

В зависимости от начальных условий будем иметь предельное аperiодическое движение 1-го или 2-го рода. Исследование этих случаев предлагаем сделать учащемуся.

Вопросы и упражнения.

1. Определить момент инерции маховика относительно оси X (рис. 83). Размеры: $R=2$ м; $a=0,3$ м; $b=0,2$ м; $\rho_1=0,08$ м; $r_1=0,4$ м; $r=0,2$ м; $\beta=0,4$ м. Вес единицы объема $\gamma=7,5$ т/м³.
2. Даны два шара, алюминиевый и свинцовый, одинакового диаметра и веса. Какой шар имеет больший момент инерции? Поверхности шаров выкрашены одинаковой краской. Опишите простой физический опыт, позволяющий отличить шары друг от друга.
3. Определить момент инерции объема воздушного судна при условиях примера 4 § 19. Вес 1 м наполняющего оболочку водорода равен 0,09 кг/м³.
4. Маховые массы, насаженные на вал 1 и 2, имеют моменты инерции, соответственно равные $J_1=1000$ кг.см.сек², $J_2=800$ кг.см.сек². Передача вращения от вала 1 к валу 2 осуществляется помощью зубчатых колес с отношением чисел зубцов:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{2}.$$

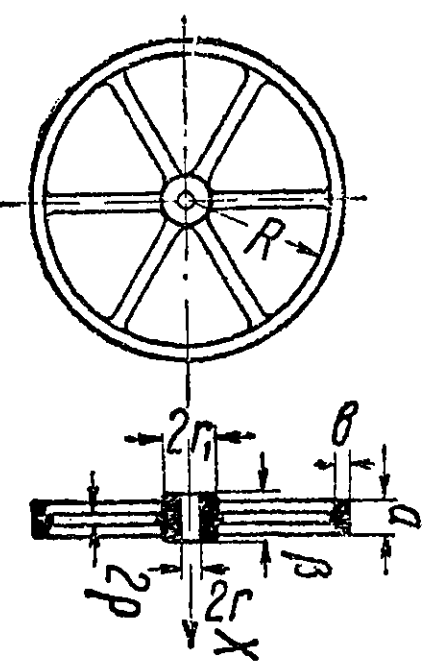


Рис. 83.

Вал 1 приводится во вращение из состояния покоя равноускоренно, причем по истечении 10 сек. его угловая скорость становится равной 1500 об/мин. Вычислить вращающий момент, который нужно приложить к валу и найти давление между зубцами колес. Радиус первого зубчатого колеса $r_1 = 10$ см (рис. 84).

5. Барабан подъемного крана приводится во вращение через передаточную шестерню при помощи электромотора (рис. 85). Даны:

Начальное ускорение груза $\omega_0 = 0,10$ м/сек².

Максимальная скорость подъема $v_{\max} = 15$ м/сек.

Диаметр барабана $2r = 0,6$ м.

Момент инерции ¹⁾ якоря электромотора $J_1 = 0,25$ кг.м.сек².

Момент инерции передаточных шестерен $J_2 = 0,1$ кг.м.сек².

Момент инерции барабана, включая шестерню $J_3 = 1,2$ кг.м.сек².

Массой подвижного блока пренебрегаем.

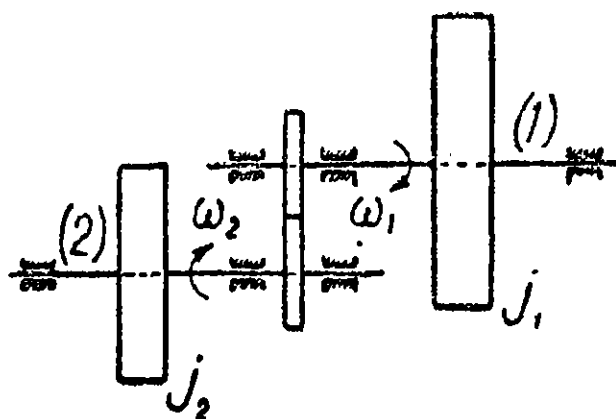


Рис. 84.

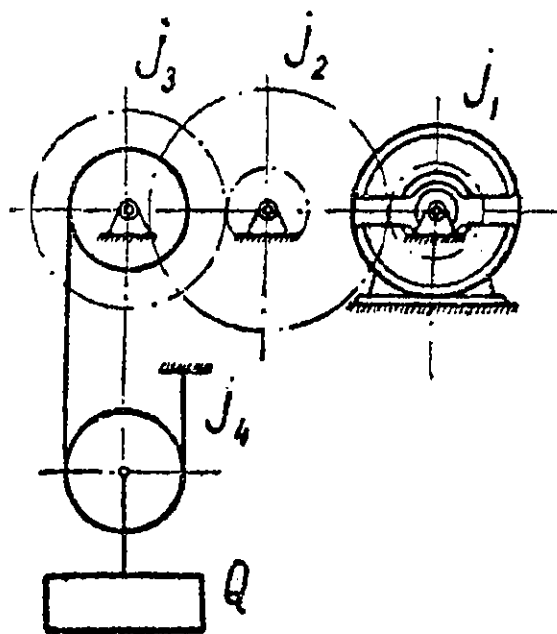


Рис. 85.

Вес груза $Q = 5000$ кг.

Передаточные числа от мотора к шестерне и от шестерни к барабану $i_1 = i_2 = 5 : 1$.

Пренебрегаем трением и весом канатов. Движение равноускоренное. Определить: а) при какой высоте подъема будет достигнута максимальная скорость, б) в каких пределах будет изменяться вращающий момент мотора?

6. Маховое колесо веса $G = 4770$ кг подвешено при помощи канатов длины $l = 3,25$ м к неподвижной балке. Раскачав колесо, сосчитали число колебаний $n = 30$, совершенных им в минуту. Определить по этим данным момент инерции маховика относительно его оси (рис. 86).

7. Однородный диск радиуса $r = 50$ см и веса $Q = 300$ кг может вращаться вокруг оси, проходящей через его центр. На расстоянии s

¹⁾ Моменты инерции даны относительно соответствующих осей вращения.

от центра диска выточено отверстие радиуса $\rho = 4 \text{ см}$. Найти период малых колебаний диска (рис. 87).

8. Для определения момента инерции J шатуна относительно оси, проходящей через центр тяжести, шатун опирают в точке A на ребро призмы и определяют продолжительность пятидесяти колебаний $50 T = 100 \text{ сек}$. Затем для определения положения

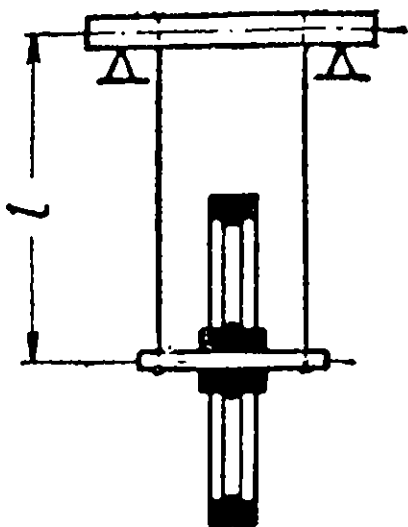


Рис. 86.

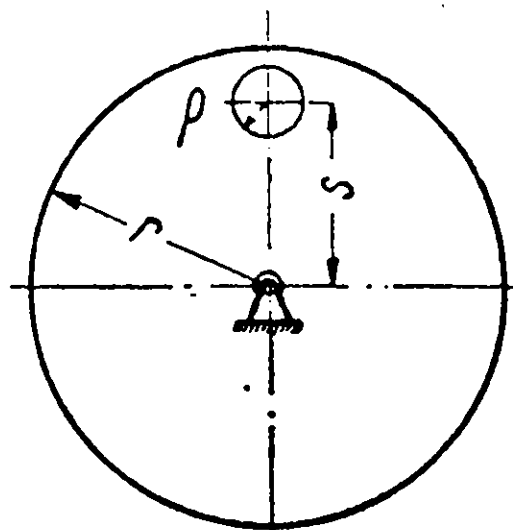


Рис. 87.

центра тяжести шатун кладут горизонтально, оперев его на платформу десятичных весов; давление на платформу при этом оказалось равным $P = 50 \text{ кг}$; вес шатуна $Q = 80 \text{ кг}$. Расстояние $l = 1 \text{ м}$; радиус втулки $\rho = 4 \text{ см}$. Найти момент инерции шатуна (рис. 88).

9. Для определения коэффициента вязкости жидкости наблюдают крутильные колебания круглого диска, подвешенного на проволоке

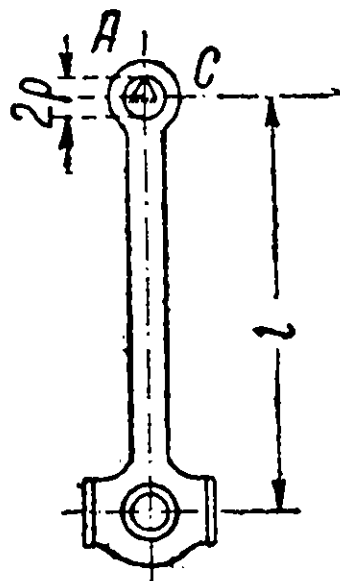
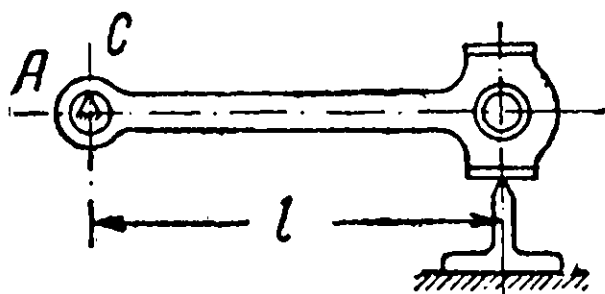


Рис. 88.

сначала в воздухе, а потом в жидкости. Вес диска $Q = 200 \text{ г}$, радиус $r = 7,5 \text{ см}$, периоды колебаний в воздухе $T_1 = 0,25 \text{ сек}$, в жидкости $T_2 = 0,5 \text{ сек}$. Определить по этим данным коэффициент вязкости жидкости k , принимая во внимание, что сила сопротивления, испытываемого элементом поверхности диска, равна произведению этого коэффициента k на площадь элемента и на его скорость; трением при колебаниях диска в воздухе пренебрегаем. Найти отношение

двух последовательных амплитуд колебаний диска в жидкости. Может ли описываемый метод привести к цели в случае жидкости малой вязкости?

10. Указатель электрического измерительного прибора, вращающийся вокруг неподвижной оси, совершает затухающие колебания с периодом $0,22$ сек.; момент инерции вращающейся системы относительно оси вращения равен $0,06$ г. см. сек², два последовательных размаха по обе стороны от положения равновесия составляют 20° и -2° . Вычислить, как повлияет на период колебаний и на величины последовательных размахов увеличение момента инерции до $0,12$ г. см. сек² при тех же упругих постоянных и при том же коэффициенте затухания прибора.

11. Изменится ли период колебаний физического маятника, если прикрепить небольшую массу в центре качаний?

Задание 6-е.

Реакции оси вращающегося тела. Удар.

В предыдущем задании мы сосредоточили свое внимание на изучении вращения тела под действием заданных сил. В задачу настоящего задания входит уже не рассмотрение самого вращения тела, а изучение воздействий, оказываемых вращающимся телом на поддерживающие его неподвижные тела — подшипники оси. При этом мы отказываемся от введения в рассмотрение фиктивных сил инерции, а основываемся исключительно на рассмотрении действия физических сил — сил взаимодействия материальных тел — подшипников и оси вращающегося тела. Инженеру в его практической работе и в литературе, посвященной „уравновешиванию сил инерции“, с этими силами инерции придется всегда иметь дело. Поэтому мы должны были о них упомянуть (мы еще ими займемся подробнее в следующей части курса), но в задачу курса теоретической механики должно было войти выяснение принципиально верных взглядов на природу сил инерции. Мы знаем, что, следуя традиционному способу изложения, т. е. введя в вопрос об уравновешивании вращающегося тела с самого начала силы инерции, мы, пожалуй, с внешней стороны и могли бы упростить дело, но рисковали бы при этом запутать его принципиальную сторону.

В процессе решения задачи о динамическом уравновешивании мы встречаемся с понятием о центробежных моментах инерции. Это принуждает нас, как и в предыдущем задании, сделать отступление в сторону, чтобы развить уже учение о моментах инерции в полном объеме, нужном для последующего. Заключительные параграфы посвящены вопросу об ударе. В соответствии с целями этого задания при этом разрешается также вопрос об уравновешивании вращающегося тела при действии на него удара, т. е. устанавливаются условия, при которых приложение к телу удара не вызывает ударных воздействий на подшипники оси.

Теоретический материал шестого задания сложнее, чем двух предыдущих. Учащийся хорошо сделает, если перед изучением его повто-

рит § 48 первой части курса, что пригодится также и в § 30 восьмого задания этой темы. Не следует стараться запоминать формулы, которые выводятся в тексте при отыскании реакций подшипников или при изучении моментов инерции. Учащийся должен только ясно отдавать себе отчет в методе вывода этих формул, например, нужно обратить внимание и знать, что для определения реакций подшипников составляются уравнения движения центра инерции и уравнения моментов количеств движения относительно двух осей, перпендикулярных оси вращения, причем последние уравнения содержат центробежные моменты. Точно так же нужно твердо усвоить понятие о тензоре инерции и о главных осях инерции, но нет нужды запоминать формулы преобразования моментов инерции при переходе от одной системы осей к другой (впрочем эти формулы вследствие их симметричности запоминаются очень легко). Должны быть твердо усвоены условия полного уравнивания вращающегося тела и выяснен характер воздействия тела на подшипники, когда соблюдено только одно из условий уравнивания. Все примеры нужно основательно разобрать. Эти же замечания относятся к § 25, посвященному определению реакций оси вращающегося тела при действии на него удара и вопросу о центре удара. Предыдущий § 24, в котором трактуется вопрос о влиянии внешних ударов на момент количества движения системы, содержит простой теоретический материал и представляет непосредственное приложение к вращательному движению основных правил учета действия мгновенных сил. Примеры этого параграфа (за исключением последнего, который может быть и опущен) нужно внимательно проработать, так как они дают важный практический материал и кроме того хорошо иллюстрируют теорию.

§ 21. Реакции неподвижной оси вращающегося тела.

Мы обратили уже внимание на то, что реакции неподвижной оси не входят в дифференциальное уравнение вращения тела. Благодаря этому мы и имели возможность составить это дифференциальное уравнение и отделить таким образом вопрос об определении движения от задачи нахождения реакций. Обращаясь теперь к этой задаче, заметим, что всего мы имеем шесть неизвестных проекций реакций N_1 и N_2 двух закрепленных точек (рис. 89):

$$N_{1x}, N_{1y}, N_{1z}.$$

$$N_{2x}, N_{2y}, N_{2z}.$$

Для определения этих шести неизвестных в нашем распоряжении есть пять уравнений: 1) три уравнения движения центра инерции тела, 2) два уравнения моментов относительно осей X и Y (уравнение моментов относительно оси Z уже использовано при составлении дифференциального уравнения вращения тела; реакции N_1 и N_2 в него не входят).

Обозначим через x_c, y_c, z_c координаты центра инерции тела. Так как движение тела есть вращение вокруг неподвижной оси Z ,

то (см. часть 1, стр. 166) проекции ускорения w_c центра инерции будут:

$$w_{cx} = -\ddot{\varphi} y_c - \dot{\varphi}^2 x_c, \quad w_{cy} = \ddot{\varphi} x_c - \dot{\varphi}^2 y_c, \quad w_{cz} = 0;$$

уравнения движения центра инерции примут вид:

$$-M(\ddot{\varphi} y_c + \dot{\varphi}^2 x_c) = \sum_{i=1}^n F_{ix} + N_{1x} + N_{2x} \quad (1)$$

$$M(\ddot{\varphi} x_c - \dot{\varphi}^2 y_c) = \sum_{i=1}^n F_{iy} + N_{1y} + N_{2y} \quad (2)$$

$$0 = \sum_{i=1}^n F_{iz} + N_{1z} + N_{2z} \quad (3)$$

или в векторной форме:

$$M w_c = \sum_{i=1}^n F_i + N_1 + N_2.$$

Остается написать уравнения моментов относительно осей X и Y :

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum_{i=1}^n L_{ix} - b N_{1y} + a N_{2y} \quad (4)$$

$$\frac{dK_y}{dt} = \sum_{i=1}^n L_{iy} + b N_{1x} - a N_{2x}; \quad (5)$$

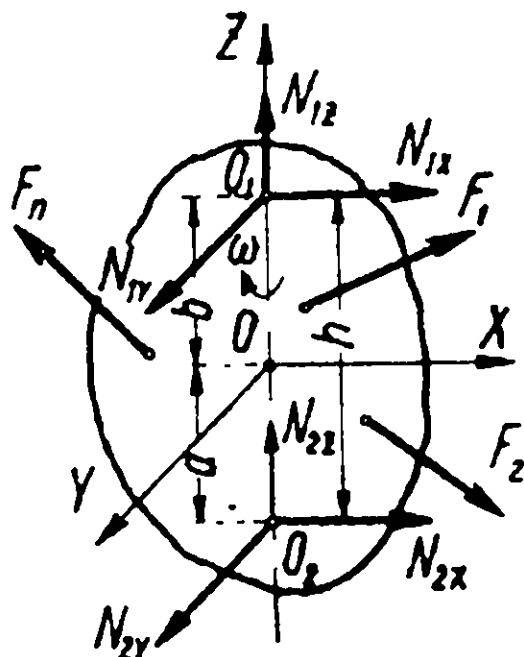


Рис. 89.

через L_{ix} , L_{iy} обозначены моменты заданных сил F_i относительно осей X и Y , а $b N_{1x}$, $a N_{2y}$ и т. д. суть моменты реакций относительно этих осей; начало координат взято в произвольной точке на оси вращения O ($\overline{O_2 O} = a$, $\overline{O_1 O} = b$, $\overline{O_1 O_2} = a + b = h$).

Если бы под действием сил F_i тело не вращалось, то реакции оси N_1' и N_2' (назовем их статическими реакциями) определились бы из уравнений статики:

$$0 = \sum_{i=1}^n F_{ix} + N_{1x} + N_{2x} \quad (1')$$

$$0 = \sum_{i=1}^n F_{iy} + N_{1y}' + N_{2y}' \quad (2')$$

$$0 = \sum_{i=1}^n F_{iz} + N_{1z}' + N_{2z}' \quad (3')$$

$$0 = \sum_{i=1}^n L_{ix} - b N_{1y}' + a N_{2y}' \quad (4')$$

$$0 = \sum_{i=1}^n L_{iy} + b N_{1x}' - a N_{2x}' \quad (5')$$

Вычитая эти уравнения почленно из ур-ний (1) — (5), получим:

$$-M(y_c \ddot{\varphi} + x_c \dot{\varphi}^2) = (N_{1x} - N'_{1x}) + (N_{2x} - N'_{2x}) = N''_{1x} + N''_{2x} \quad (1'')$$

$$M(x_c \ddot{\varphi} - y_c \dot{\varphi}^2) = (N_{1y} - N'_{1y}) + (N_{2y} - N'_{2y}) = N''_{1y} + N''_{2y} \quad (2'')$$

$$0 = (N_{1z} - N'_{1z}) + (N_{2z} - N'_{2z}) = N''_{1z} + N''_{2z} \quad (3'')$$

$$\frac{dK_x}{dt} = -b(N_{1y} - N'_{1y}) + a(N_{2y} - N'_{2y}) = -bN''_{1y} + aN''_{2y} \quad (4'')$$

$$\frac{dK_y}{dt} = b(N_{1x} - N'_{1x}) - a(N_{2x} - N'_{2x}) = bN''_{1x} - aN''_{2x} \quad (5'')$$

Разности $N_{1x} - N'_{1x}$, $N_{1y} - N'_{1y}$ и т. д., обозначенные нами через N''_{1x} , N''_{1y} и т. д. суть проекции на оси тех *добавочных* реакций $N''_1 = N_1 - N'_1$, $N''_2 = N_2 - N'_2$, которые возникают вследствие *вращения тела*.

Четыре неизвестных: N_{1x} , N_{2x} , N_{1y} , N_{2y} , т. е. проекции реакций на перпендикулярные оси вращения оси X и Y (поперечные реакции) определяются из четырех ур-ний (1) — (2) и (4) — (5). Что касается продольных реакций, т. е. проекций N_{1z} и N_{2z} на ось вращения, то для их определения мы имеем только одно ур-ние (3), дающее сумму $N_{1z} + N_{2z}$. Для нахождения каждой из величин N_{1z} и N_{2z} в отдельности нужно еще задать дополнительные физические условия о способе закрепления оси в точках O_1 и O_2 . Если, например, мы имеем в точке O_2 подпятник, а в O_1 подшипник, через который ось может свободно проходить, то $N_{1z} = 0$ и N_{2z} определится из ур-ния (3). В общем же случае задача определения продольных реакций является, как и в статике, неопределенной и лишнее неизвестное находится из рассмотрения деформаций тела. Заметим еще, что N_{1z} и N_{2z} определяются из того же самого уравнения, что и статические реакции N'_{1z} и N'_{2z} (см. (3) и (3')). Поэтому $N_{1z} = N'_{1z}$, $N_{2z} = N'_{2z}$, т. е. продольные добавочные динамические реакции равны нулю.

Обратимся к ур-ниям (4'') — (5''). Для дальнейшей разработки их следует заняться вычислением проекций K_x и K_y главного момента количеств движения и их производных. Имеем (стр. 147):

$$\left. \begin{aligned} K_x &= \sum_{i=1}^n k_{ix} = \sum_{i=1}^n m_i (y_i v_{iz} - z_i v_{iy}) \\ K_y &= \sum_{i=1}^n k_{iy} = \sum_{i=1}^n m_i (z_i v_{ix} - x_i v_{iz}) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

но в рассматриваемом случае (см. ч. 1, стр. 155)

$$v_{ix} = -\dot{\varphi} y_i, \quad v_{iy} = x_i \dot{\varphi}, \quad v_{iz} = 0,$$

и подстановка в (6) дает

$$K_x = -\dot{\varphi} \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i, \quad K_y = -\dot{\varphi} \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i \quad (7)$$

До сих пор мы могли ничего не говорить о выборе осей X и Y . Теперь же примем, что эти оси твердо связаны с телом и вращаются вместе с ним. Такой выбор осей, правда, требует соблюдения известных предосторожностей при определении производных от K_x и K_y , но имеет то преимущество, что координаты x_i, y_i любой точки тела будут при этом постоянными величинами, не изменяющимися при вращении тела; получившиеся у нас суммы

$$\sum_{i=1}^n m_i z_i x_i = J_{zx}, \quad \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i = J_{yz} \quad (8)$$

также будут постоянными величинами, не зависящими от состояния движения тела и определяемые всецело формой тела и распределением в нем масс относительно координатных осей. Эти суммы называются *центробежными моментами* инерции относительно осей Z и X и соответственно Y и Z . Мы получаем таким образом

$$K_x = -J_{zx}\dot{\varphi}, \quad K_y = -J_{yz}\dot{\varphi}. \quad (9)$$

Переходя к вычислению производных $\frac{dK_x}{dt}, \frac{dK_y}{dt}$, применим к вектору K формулу, устанавливающую связь между производными любого вектора в движущихся друг относительно друга системах координат (часть 1, стр. 252); имеем

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d'K}{dt} + [\omega, K], \quad (10)$$

где производные $\frac{dK}{dt}$ и $\frac{d'K}{dt}$ определяются двумя различными наблюдателями; первая—наблюдателем неподвижным, т. е. связанным с землей или вообще с той координатной системой, в которой мы непосредственно применяем законы механики и в частности теорему моментов; вторая—наблюдателем, связанным с движущейся вместе с телом системой осей XY .

Проектируя (10) на оси X и Y , получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dK_x}{dt} &= \frac{d'K_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y = \frac{d'K_x}{dt} - \dot{\varphi} K_y \\ \frac{dK_y}{dt} &= \frac{d'K_y}{dt} + \omega_z K_x - \omega_x K_z = \frac{d'K_y}{dt} + \dot{\varphi} K_x \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ибо $\omega_x = \omega_y = 0, \omega_z = \dot{\varphi}$. Далее не трудно видеть, что

$$\frac{d'K_x}{dt} = -J_{zx}\ddot{\varphi}, \quad \frac{d'K_y}{dt} = -J_{yz}\ddot{\varphi}, \quad (12)$$

ибо наблюдатель, связанный с вращающимся телом, может отметить только изменение угловой скорости; величины же J_{zx} и J_{yz} остаются для него неизменными.

Окончательно получаем:

$$\frac{dK_x}{dt} = -J_{zx}\ddot{\varphi} + J_{yz}\dot{\varphi}^2, \quad \frac{dK_y}{dt} = J_{yz}\ddot{\varphi} - J_{zx}\dot{\varphi}^2, \quad (13)$$

и формулы (4'')—(5'') принимают вид:

$$J_{xx}\ddot{\phi} - J_{yz}\dot{\phi}^2 = bN''_{1y} - aN''_{2y}, \quad (14)$$

$$J_{yz}\ddot{\phi} + J_{xx}\dot{\phi}^2 = -bN''_{1x} + aN''_{2x}, \quad (15)$$

присоединяя сюда уравнения (1'') и (2''):

$$M(y_c\ddot{\phi} + x_c\dot{\phi}^2) = -N''_{1x} - N''_{2x},$$

$$M(x_c\ddot{\phi} - y_c\dot{\phi}^2) = N''_{1y} + N''_{2y},$$

получаем полную систему уравнений для определения неизвестных добавочных реакций, возникающих вследствие вращения тела. Прежде чем перейти к различным приложениям этих уравнений, нужно заняться подробнее учением о моментах инерции тела.

§ 22. Тензор инерции. Главные оси инерции.

В какой-либо точке O твердого тела построим систему трех взаимно-перпендикулярных осей XYZ . Для характеристики распределения массы тела в точке O служат, как мы знаем, моменты инерции относительно осей X , Y , Z ; принимая для них в этом параграфе несколько измененное обозначение, имеем

$$J_{xx} = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2), J_{yy} = \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2), J_{zz} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2). \quad (16)$$

При изучении действия вращающегося тела на подшипники вала распределение массы в теле пришлось еще характеризовать так называемыми центробежными моментами инерции; эти величины определяются формулами:

$$J_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i, J_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i, J_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i. \quad (17)$$

Совокупность шести величин:

$$\begin{matrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ & J_{yy} & J_{yz} \\ & & J_{zz} \end{matrix} \quad (18)$$

определяет *тензор инерции тела* в рассматриваемой точке O ; величины J_{xx} , J_{xy} и т. д. называются составляющими тензора. Имея в виду, что согласно формулам (17), $J_{xx} = J_{xx}$, $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{yz} = J_{zy}$, можно было бы написать таблицу (18) в виде:

$$\begin{matrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{matrix} \quad (18a)$$

и говорить, что тензор инерции характеризуется девятью величинами, причем симметричные относительно диагонали составляющие его попарно равны друг другу — мы имеем здесь дело с *симметричным тензором*.

Чтобы пояснить определение тензора, будет полезно вспомнить, как вводится понятие вектора. Для этого мы имеем два способа: или, руководствуясь непосредственным физическим значением вектора, определить его как величину, имеющую определенное численное значение и определенное направление; или же характеризовать вектор A аналитически, как совокупность трех определяющих его чисел—проекций A_x, A_y, A_z вектора на оси выбранной системы координат. Этим (аналитическим способом) мы и определили пока встреченный нами впервые тензор как величину, задаваемую шестью числами, — составляющими тензора (в случае несимметричного тензора, которого мы не касаемся, — девятью числами). Естественно возникает вопрос, как характеризовать тензор не составляющими его в случайно выбранной системе осей, а на основании присущих ему физически—*инвариантных* (неизменных)—свойств (аналогично первому из вышеуказанных определений вектора).

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно обратиться к выяснению закона преобразования составляющих тензора при переходе от одной системы декартовых прямоугольных осей XYZ к другой $X'Y'Z'$. Пусть косинусы углов, образуемых новыми осями со старыми, задаются таблицей:

	X	Y	Z
X'	α_1	β_1	γ_1
Y'	α_2	β_2	γ_2
Z'	α_3	β_3	γ_3

(19)

(например γ_2 есть косинус угла между Y' и Z). Начала обеих систем будем считать совпадающими. Девять косинусов $\alpha_1, \beta_1, \dots, \gamma_3$ связаны, как известно, шестью соотношениями:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 & \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3 &= 0 \\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 & \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 &= 0 \\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 &= 1 & \gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

причем три последних формулы выражают условия взаимной перпендикулярности осей $X'Y'Z'$. Точно так же имеют место соотношения:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1 \quad \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 = 0 \quad (20a)$$

и т. д., являющиеся следствием формул (20).

Если x, y, z — координаты какой-либо точки M в системе XYZ , а x', y', z' — координаты той же точки в системе $X'Y'Z'$, то на основании известных из аналитической геометрии формул преобразования координат, имеем:

$$\begin{aligned} x' &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z; \end{aligned} \quad (21)$$

обратно, старые координаты выражаются через новые формулами:

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 y' + \alpha_3 z' \quad (22)$$

и т. д.

Проекции какого-либо вектора A преобразуются при переходе от одной системы к другой по тем же формулам (21) или (22):

$$\begin{aligned} A_x' &= \alpha_1 A_x + \beta_1 A_y + \gamma_1 A_z, \\ A_y' &= \alpha_2 A_x + \beta_2 A_y + \gamma_2 A_z, \\ A_z' &= \alpha_3 A_x + \beta_3 A_y + \gamma_3 A_z. \end{aligned} \quad (23)$$

или

$$A_x = \alpha_1 A_x' + \alpha_2 A_y' + \alpha_3 A_z' \quad (24)$$

и т. д.

Действительно, вектор характеризует некоторую физическую инвариантную величину; это значит, что ни длина, ни направление изображающего вектор отрезка не изменяются, когда одну систему осей мы заменяем другой; и в старой и в новой системе осей проекции вектора суть разности координат концов этого отрезка, очевидно, что эти разности преобразуются по тем же формулам, что и сами координаты; отсюда и следуют ф-лы (23) и (24).

Руководствуясь этим, мы можем теперь дать более строгое аналитическое определение вектора: совокупность трех чисел A_x, A_y, A_z , преобразуемых при переходе от одной системы декартовых прямоугольных осей к другой по ф-лам (23), т. е. по тем же ф-лам, что и сами координаты, определяют некоторый вектор A .

Определение тензора также должно содержать указание на закон преобразования его составляющих. Этот закон в случае тензора инерции легко получить, руководствуясь определением его составляющих, даваемых ф-лами (16) и (17).

Имеем

$$J_{x'x'} = \sum_{i=1}^n m_i (y_i'^2 + z_i'^2),$$

подставляя сюда вместо y_i' и z_i' их значения по ф-лам (21) и опуская для простоты письма значок суммирования i , получим:

$$\begin{aligned} J_{x'x'} &= \sum m [(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z)^2 + (\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z)^2] = (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) \sum m x^2 + \\ &+ (\beta_2^2 + \beta_3^2) \sum m y^2 + (\gamma_2^2 + \gamma_3^2) \sum m z^2 + 2(\alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3) \sum m x y + 2(\beta_2 \gamma_2 + \\ &+ \beta_3 \gamma_3) \sum m y z + 2(\gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3) \sum m z x. \end{aligned} \quad (25)$$

Далее по формулам (20) и (20а) имеем:

$$\begin{aligned} \alpha_2^2 + \alpha_3^2 &= 1 - \alpha_1^2 = \beta_1^2 + \gamma_1^2, & \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_3 \beta_3 &= -\alpha_1 \beta_1, \\ \beta_2^2 + \beta_3^2 &= 1 - \beta_1^2 = \gamma_1^2 + \alpha_1^2, & \beta_2 \gamma_2 + \beta_3 \gamma_3 &= -\beta_1 \gamma_1, \\ \gamma_2^2 + \gamma_3^2 &= 1 - \gamma_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2, & \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 &= -\gamma_1 \alpha_1, \end{aligned}$$

и подстановка в (25) дает:

$$J_{x'x'} = (\beta_1^2 + \gamma_1^2) \sum m x^2 + (\gamma_1^2 + \alpha_1^2) \sum m y^2 + (\alpha_1^2 + \beta_1^2) \sum m z^2 - \\ - 2 \alpha_1 \beta_1 \sum m x y - 2 \beta_1 \gamma_1 \sum m y z - 2 \gamma_1 \alpha_1 \sum m z x = \alpha_1^2 \sum m (z^2 + y^2) + \\ + \beta_1^2 \sum m (x^2 + z^2) + \gamma_1^2 \sum m (y^2 + x^2) - 2 \alpha_1 \beta_1 \sum m x y - 2 \beta_1 \gamma_1 \sum m y z - \\ - 2 \gamma_1 \alpha_1 \sum m z x.$$

Воспользовавшись теперь формулами (16) и (17), получим

$$J_{x'x'} = \alpha_1^2 J_{xx} + \beta_1^2 J_{yy} + \gamma_1^2 J_{zz} - 2 \alpha_1 \beta_1 J_{xy} - 2 \beta_1 \gamma_1 J_{yz} - 2 \gamma_1 \alpha_1 J_{zx} \quad (26)$$

Эта формула определяет через составляющие тензора инерции момент инерции относительно произвольной оси по заданному направлению этой оси (характеризуемому ее направляющими косинусами $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$).

Тем же способом находим:

$$J_{x'y'} = \sum m x' y' = \sum m (\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z) (\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z) = \\ = \alpha_1 \alpha_2 \sum m x^2 + \beta_1 \beta_2 \sum m y^2 + \gamma_1 \gamma_2 \sum m z^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \sum m x y + \\ + (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) \sum m y z + (\gamma_1 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_1) \sum m z x = - (\beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2) \sum m x^2 - \\ - (\gamma_1 \gamma_2 + \alpha_1 \alpha_2) \sum m y^2 - (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2) \sum m z^2 + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \sum m x y + \\ + (\beta_1 \gamma_2 + \gamma_1 \beta_2) \sum m y z - (\gamma_1 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_1) \sum m z x.$$

Пользуясь определением моментов инерции и центробежных моментов, получим теперь

$$J_{x'y'} = - \alpha_1 \alpha_2 J_{xx} - \beta_1 \beta_2 J_{yy} - \gamma_1 \gamma_2 J_{zz} + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2) J_{xy} + \\ + (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) J_{yz} + (\gamma_1 \alpha_2 + \gamma_2 \alpha_1) J_{zx} \quad (27)$$

Круговой перестановкой значков получим из формул (26) и (27) выражения для моментов инерции $J_{y'y'}$, $J_{z'z'}$ относительно осей Y и Z , а также центробежных моментов $J_{y'z'}$, $J_{z'x'}$. Обратно, выражения для моментов инерции и центробежных моментов J_{xx} , J_{yy} и т. д. через составляющие тензора инерции в системе $X'Y'Z'$ будут

$$J_{xx} = \alpha_1^2 J_{x'x'} + \alpha_2^2 J_{y'y'} + \alpha_3^2 J_{z'z'} - 2 \alpha_1 \alpha_2 J_{x'y'} - 2 \alpha_2 \alpha_3 J_{y'z'} - 2 \alpha_3 \alpha_1 J_{z'x'} \quad (28) \\ J_{xy} = - \alpha_1 \beta_1 J_{x'x'} - \alpha_2 \beta_2 J_{y'y'} + \alpha_3 \beta_3 J_{z'z'} + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) J_{x'y'} + \\ + (\alpha_2 \beta_3 + \beta_2 \alpha_3) J_{y'z'} + (\alpha_3 \beta_1 + \alpha_1 \beta_3) J_{z'x'} \text{ и т. д.}$$

Эти формулы выражают искомый закон преобразования составляющих тензора инерции при переходе от одной системы декартовых прямоугольных осей к другой. Естественно поставить вопрос, нельзя ли надлежащим выбором системы осей $X'Y'Z'$ упростить

эти формулы. Покажем, что это возможно; вместе с тем мы достигнем и поставленной выше цели — дать инвариантное определение тензора.

Именно, мы докажем, что в любой точке твердого тела всегда можно определить три таких направления осей, что *центробежные моменты относительно этих осей обращаются в нуль*. Эти направления называются главными осями тензора инерции или *главными осями инерции*: моменты инерции относительно этих осей называются главными значениями тензора инерции или *главными моментами инерции* тела в рассматриваемой точке. Главные оси и главные значения тензора, аналогично численному значению и направлению вектора характеризуют тензор инвариантным образом независимо от выбора той или иной системы координат.

Пусть оси $X'Y'Z'$ будут главными осями; для главных моментов инерции относительно этих осей, вместо прежних обозначений $J_{x'x'}$, $J_{y'y'}$, $J_{z'z'}$ примем обозначения J_1 , J_2 , J_3 . Ф-лы (28) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} J_{xx} &= \alpha_1^2 J_1 + \alpha_2^2 J_2 + \alpha_3^2 J_3, & J_{xy} &= -\alpha_1 \beta_1 J_1 - \alpha_2 \beta_2 J_2 - \alpha_3 \beta_3 J_3, \\ J_{yy} &= \beta_1^2 J_1 + \beta_2^2 J_2 + \beta_3^2 J_3, & J_{yz} &= -\beta_1 \gamma_1 J_1 - \beta_2 \gamma_2 J_2 - \beta_3 \gamma_3 J_3, \\ J_{zz} &= \gamma_1^2 J_1 + \gamma_2^2 J_2 + \gamma_3^2 J_3, & J_{zx} &= -\gamma_1 \alpha_1 J_1 - \gamma_2 \alpha_2 J_2 - \gamma_3 \alpha_3 J_3. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Эти формулы определяют моменты инерции и центробежные моменты относительно любой оси по заданным главным моментам инерции и направлениям главной оси. Обратно, если известны все составляющие тензора инерции $J_{xx} \dots J_{zz}$ в системе осей XYZ , то шесть ур-ний (29), совместно с шестью ур-ниями (20), определяют 9 неизвестных направляющих косинусов главных осей и три главных момента инерции.

Задача решения полученной системы уравнений, обобщенная на случай произвольного числа переменных, играет большую и важную роль во многих вопросах механики, теоретической физики и астрономии. Ей можно дать также простое геометрическое истолкование. Для этого напишем выражение для момента инерции J относительно произвольной оси OM , направление которой будем в системе осей XYZ характеризовать направляющими косинусами a , b , c , а в системе главных осей $X'Y'Z'$ — направляющими косинусами a' , b' , c' . Согласно ф-лам (26) и (29) получим

$$\begin{aligned} J &= a^2 J_{xx} + b^2 J_{yy} + c^2 J_{zz} - 2ab J_{xy} - 2bc J_{yz} - 2ca J_{zx} = \\ &= a'^2 J_1 + b'^2 J_2 + c'^2 J_3. \end{aligned} \quad (30)$$

Вдоль оси OM отложим отрезок $\overline{ON} = \frac{1}{\sqrt{J}}$. Координаты конца N этого отрезка в системе осей XYZ и $X'Y'Z'$ будут соответственно:

$$\left. \begin{aligned} x &= \overline{ON} \cos(\widehat{OM, x}) = \frac{a}{\sqrt{J}}, & y &= \frac{b}{\sqrt{J}}, & z &= \frac{c}{\sqrt{J}} \\ x' &= \frac{a'}{\sqrt{J}}, & y' &= \frac{b'}{\sqrt{J}}, & z' &= \frac{c'}{\sqrt{J}}. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Подставляя в (30) вместо a, a' и т. д. их значения по ф-лам (31) и сокращая на J , получим

$$\left. \begin{aligned} J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx = \\ = J_1x'^2 + J_2y'^2 + J_3z'^2 = 1. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Поверхность, изображаемая этими уравнениями в системах XYZ и $X'Y'Z'$, представляет геометрическое место конца отрезка $\overline{ON}$ при любом направлении оси OM , относительно которой вычисляется момент инерции. Но J_1, J_2, J_3 , по определению моментов инерции, суть положительные величины и ур-ния (32)

$$J_1x'^2 + J_2y'^2 + J_3z'^2 = 1,$$

которое может быть переписано в виде

$$\frac{x'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{J_1}}\right)^2} + \frac{y'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{J_2}}\right)^2} + \frac{z'^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{J_3}}\right)^2} = 1, \quad (33)$$

выражает не что иное, как эллипсоид

с полуосями $\frac{1}{\sqrt{J_1}}, \frac{1}{\sqrt{J_2}}, \frac{1}{\sqrt{J_3}}$; глав-

ные оси инерции $X'Y'Z'$ являются осями этого эллипсоида. Вектор-радиус, проведенный из центра эллипсоида к любой точке его поверхности, по величине обратно пропорционален квадратному корню из момента инерции относительно

оси, имеющей направление этого вектора-радиуса. Эллипсоид (33) дает, таким образом, наглядную картину изменения величины момента инерции при изменении направления оси. Его называют *эллипсоидом инерции* тела в рассматриваемой точке (рис. 90).

В системе осей XYZ эллипсоид инерции тела имеет уравнение:

$$J_{xx}x^2 + J_{yy}y^2 + J_{zz}z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}zx = 1. \quad (34)$$

Задача определения главных осей инерции оказывается, таким образом, эквивалентной задаче отыскания главных осей эллипсоида по заданному его уравнению. Аналитически она сводится, как мы видели, к решению системы 12 ур-ний (29) и (20) с 12 неизвестными. Замечательным приемом решение этой системы может быть сведено к решению одного уравнения третьей степени, корни которого определяют главные значения тензора (т. е. главные оси эллипсоида или главные моменты инерции) и к трем системам линейных уравнений с тремя неизвестными, определяющими девять направляющих косинусов главных осей. Отсылая учащегося за подробностями этого решения к курсам аналитической геометрии (см., например, Андреев, Основной курс аналитической геометрии или Молодзевский, Аналитическая геометрия в пространстве), мы не будем дальше останавливаться на этом вопросе, так как в приложениях направление главных осей инерции в громадном большинстве случаев может быть определено из простых соображений симметрии расположения массы тела. Принципиально было важно установить существование в любой точке твердого тела произволь-

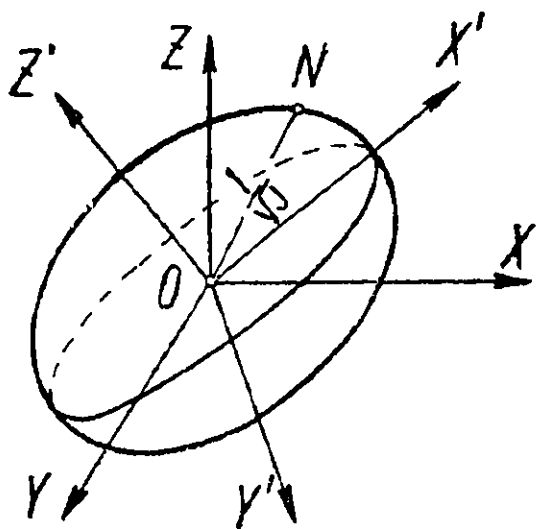


Рис. 90.

ной формы трех главных осей инерции; можно считать это существование доказанным, так как наличие во всяком эллипсоиде трех осей симметрии является известным геометрическим фактом.

Главные оси инерции, проходящие через центр инерции тела, называются *главными центральными осями инерции*. Моменты инерции относительно этих осей будут *главными центральными моментами инерции*. Обозначим их через

$$J_1^{(c)}, J_2^{(c)}, J_3^{(c)};$$

пользуясь теоремой Штейнера (§ 19 5 задания, стр. 165) легко выразить момент инерции относительно произвольной оси через главные центральные моменты инерции. В самом деле, согласно только что упомянутой теореме, момент инерции J относительно произвольной оси OL_1 , направление которой характеризуется косинусами углов α, β, γ , составляемыми ею с главными центральными осями инерции X_c', Y_c', Z_c' будет

$$J = J^{(c)} + Md^2, \quad (35)$$

где $J^{(c)}$ — момент инерции относительно оси CL , параллельной OL_1 , проходящей через центр инерции тела, d — расстояние между осями, M — масса тела, но по ф-ле (29) имеем

$$J^{(c)} = J_1^{(c)} \alpha^2 + J_2^{(c)} \beta^2 + J_3^{(c)} \gamma^2, \quad (36)$$

и, следовательно:

$$J = Md^2 + J_1^{(c)} \alpha^2 + J_2^{(c)} \beta^2 + J_3^{(c)} \gamma^2. \quad (37)$$

До сих пор мы ограничивались рассмотрением распределения массы тела вокруг какой-либо одной его точки — или произвольной, или центра инерции. Для дальнейшего важно выяснить следующее обстоятельство: предположим, что в некоторой точке O тела определено направление главных осей $X'Y'Z'$. Если перейти из точки O в другую точку M , лежащую на оси Z' на расстоянии $\overline{MO} = a$ от точки O , то направление оси Z' уже, вообще говоря, не будет главной осью инерции в точке M . В самом деле, построим в точке M систему осей XYZ , параллельных главным осям $X'Y'Z'$ в точке O (рис. 91); координаты какой-либо частицы m_i в системе осей XYZ будут:

$$x_i = x_i' \quad y_i = y_i' \quad z_i = z_i' - a,$$

где x_i', y_i', z_i' — координаты этой частицы в системе $OX'Y'Z'$. Центробежные моменты инерции относительно осей Y и Z , а также Z и X будут:

$$\left. \begin{aligned} J_{yz} &= \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i = \sum_{i=1}^n m_i y_i' (z_i' - a) = \sum_{i=1}^n m_i y_i' z_i' - a \sum_{i=1}^n m_i y_i', \\ J_{zx} &= \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i = \sum_{i=1}^n m_i (z_i' - a) x_i' = \sum_{i=1}^n m_i z_i' x_i' - a \sum_{i=1}^n m_i x_i'; \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

но z' есть главная ось инерции, т. е.

$$\sum_{i=1}^n m_i y_i' z_i' = 0, \quad \sum_{i=1}^n m_i z_i' x_i' = 0,$$

с другой стороны

$$\sum_{i=1}^n m_i x_i' = M x_c', \quad \sum_{i=1}^n m_i y_i' = M y_c'$$

где x_c', y_c' — координаты центра тяжести, M — масса тела.
Получаем

$$J_{yz} = -M a y_c, \quad J_{zx} = -M a x_c, \quad (39)$$

т. е. главная ось инерции Z' в точке O не является уже таковой в точке M . Это будет иметь место в том случае, когда $x_c = y_c = 0$, т. е. когда Z' проходит через центр инерции тела. *Главная центральная ось инерции является главной осью инерции во всех ее точках.*

Мы уже указали выше, что направления главных осей инерции тела весьма часто определяются соображениями симметрии. Пусть, например, однородное тело имеет некоторую *ось симметрии*, примем ее за ось Z ; очевидно, что на этой оси будет лежать центр инерции тела. Легко доказать, что ось Z будет в рассматриваемом случае главной центральной осью инерции. В самом деле, поскольку ось Z есть ось симметрии, для всякой точки M с координатами x, y, z , можно будет найти симметрично расположенную относительно оси Z точку M_1 с координатами — $x, -y, z$; массы m_i , сосредоточенные в точках M и M_1 можно в силу однородности тела считать равными. Таким образом, в сумме

$$J_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i$$

каждому слагаемому $m_i y_i z_i$ будет соответствовать равное по величине, но противоположное по знаку слагаемое — $m_i y_i z_i$; получаем

$$J_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i = 0$$

и, аналогично:

$$J_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i = 0,$$

т. е. ось Z является главной центральной осью инерции тела. Из доказательства следует также, что требование однородности тела не является необходимым. Достаточно, чтобы ось Z была осью материальной симметрии тела, т. е. чтобы каждой частице массы m_i можно было сопоставить симметрично расположенную относительно оси частицу той же массы; такая материальная симметрия будет, например, иметь место, если ось Z является осью геометрической

симметрии, а плотность тела зависит только от координаты z , но не зависит от двух других координат.

Если тело имеет плоскость материальной симметрии Π (рис. 92), то любая прямая, перпендикулярная этой плоскости, будет главной осью инерции в точке пересечения ее O с плоскостью Π . Действительно, если принять эту прямую за ось Z и принять O за начало координат, то для любой точки M с координатами x_i, y_i, z_i можно

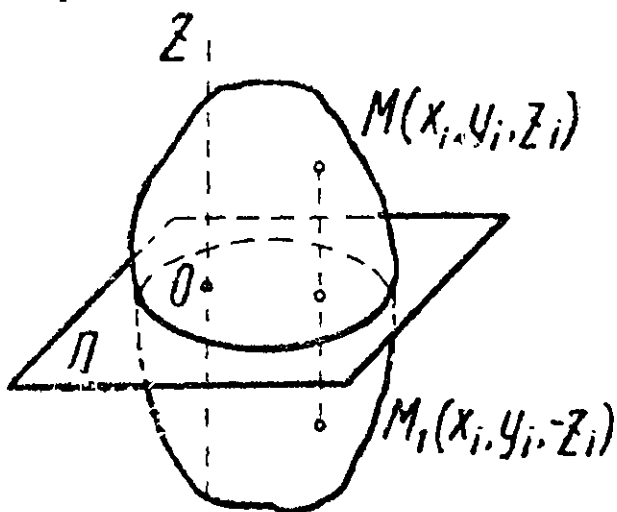


Рис. 92.

найти точку M_1 с теми же x_i и y_i и с третьей координатой — z_i ; массы, сосредоточенные в точках M и M_1 , можно считать равными, так как Π есть плоскость материальной симметрии. Таким образом, суммы

$$J_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i,$$

$$J_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i$$

и в этом случае обращаются в нуль, т. е. ось Z является главной осью в точке O .

Рассмотрим, в заключение, однородное тело вращения вокруг некоторой оси, которую назовем через Z . Так как ось вращения является осью симметрии, то она является главной центральной осью. Вместе с тем две любые взаимно перпендикулярные прямые, перпендикулярные оси вращения, могут быть приняты за главные оси инерции в какой-либо точке оси вращения тела. Действительно, для тела вращения всякая плоскость, проходящая через ось, является плоскостью симметрии; следовательно, перпендикулярная к этой плоскости прямая, т. е. любая прямая, является главной осью. Предположение об однородности тела и здесь не является необходимым; достаточно предположить, что плотность, изменяясь вдоль оси Z , не зависит от двух других координат x и y .

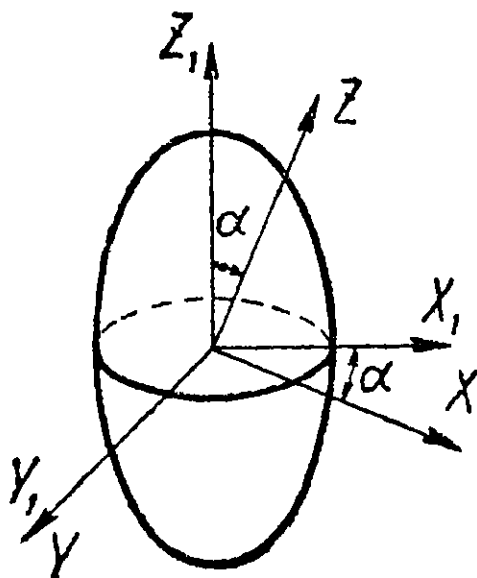


Рис. 93.

Примеры и упражнения.

1. Центробежные моменты инерции для тела вращения. В примере 3 § 19 предыдущего задания были даны формулы для вычисления главных моментов инерции тела вращения. Пользуясь только что выведенными ф-лами (29) не трудно дать теперь выражения для центробежных моментов.

Пусть $X_1 Y_1 Z_1$ будут главные оси инерции (Z_1 — ось вращения), моменты инерции относительно этих осей будут $J_1 = J_2, J_3$. Рассмотрим ось Z , составляющую угол α с осью вращения, и, построив

систему осей XYZ , определим центробежные моменты относительно этих осей (рис. 93). Чтобы упростить результаты, направим ось X_1 в плоскости осей Z и Z_1 , а ось Y_1 перпендикулярно к этой плоскости; ось Y примем совпадающей с осью Y_1 , тогда ось X будет расположена в плоскости Z_1X_1 . Имеем таблицу косинусов:

	X	Y	Z
X_1	$\alpha_1 = \cos \alpha$	$\beta_1 = 0$	$\gamma_1 = \sin \alpha$
Y_1	$\alpha_2 = 0$	$\beta_2 = 1$	$\gamma_2 = 0$
Z_1	$\alpha_3 = -\sin \alpha$	$\beta_3 = 0$	$\gamma_3 = \cos \alpha$

Ф-лы (29) дают

$$\left. \begin{aligned} J_{xy} &= 0, \quad J_{yz} = 0 \\ J_{zx} &= -\cos \alpha \sin \alpha J_3 + \cos \alpha \sin \alpha J_1 = \frac{J_1 - J_3}{2} \sin 2\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

2. Случай, когда эллипсоид инерции превращается в шар. Если все три главных момента инерции в некоторой точке тела оказываются равными друг другу ($J_1 = J_2 = J_3 = J$), то эллипсоид инерции превращается в шар и момент инерции относительно любой оси, независимо от ее направления, будет равен J .

В качестве примера рассмотрим главные центральные момент инерции однородного круглого цилиндра. Момент инерции относительно оси вращения определяется в этом случае формулой (см. табл. моментов инерции)

$$J_3^{(c)} = \frac{1}{2} Mr^2;$$

моменты инерции относительно двух других главных центральных осей будут

$$J_1^{(c)} = J_2^{(c)} = \frac{1}{4} Mr^2 + \frac{1}{12} Ml^2.$$

Условие равенства моментов инерции $J_1^{(c)}$ и $J_3^{(c)}$ дает

$$\frac{1}{4} Mr^2 = \frac{1}{12} Ml^2; \quad \frac{r}{l} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Таково должно быть отношение радиуса цилиндра к его высоте, чтобы центральный эллипсоид инерции превращался в шар.

В случае прямого круглого конуса имеем

$$J_3^{(c)} = \frac{3}{10} Mr^2, \quad J_1^{(c)} = J_2^{(c)} = \frac{3}{20} Mr^2 + \frac{3}{80} Mh^2,$$

и центральный эллипсоид инерции будет шаром при условии

$$\frac{r}{h} = \frac{1}{2}.$$

§ 23. Уравновешивание вращающегося тела.

Вернемся теперь к рассмотрению реакций оси вращающегося тела (§ 21) и постараемся выяснить, при каких условиях динамические реакции оси оказываются равными статическим, т. е. силы N_1'' и N_2'' обращаются в нуль. Согласно формулам (1'')—(2'') и (14)—(15) § 21, имеем в этом случае:

$$\begin{aligned}x_c \ddot{\varphi}^2 + y_c \ddot{\varphi} &= 0 \\ -x_c \ddot{\varphi} + y_c \ddot{\varphi}^2 &= 0 \\ J_{xz} \ddot{\varphi} - J_{yz} \ddot{\varphi}^2 &= 0 \\ J_{zx} \ddot{\varphi}^2 + J_{yz} \ddot{\varphi} &= 0.\end{aligned}$$

Так как величина $\ddot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2$ (определитель той и другой системы уравнений) не обращается в нуль, то единственным решением этих уравнений является:

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{x_c = 0 \quad y_c = 0} \\ \boxed{J_{yz} = 0 \quad J_{zx} = 0} \end{array} \right\} \quad (40)$$

Иными словами, тело не оказывает дополнительных динамических воздействий на ось вращения при соблюдении следующих условий:

1) центр тяжести тела должен лежать на оси вращения;
2) ось вращения должна быть главной осью инерции тела (мы отметим выше, что главная центральная ось является главной во всех своих точках). Итак, если ось вращения является главной центральной осью инерции тела, то реакции подшипников этой оси (а также, конечно, и воздействия тела на подшипники) при вращении тела ничем не отличаются от статических реакций. В этом случае говорят, что вращающееся тело уравновешено.

Предположим, что тело не уравновешено и будем различать три случая.

1. Если центр тяжести лежит на оси вращения ($x_c = 0$, $y_c = 0$), но ось вращения не является главной осью, то из уравнений (1'')—(2'') § 21 следует, что

$$N_1'' = -N_2'',$$

т. е. дополнительное динамическое воздействие вращающегося тела на ось вращения приводится к паре сил; момент этой пары определится из уравнений (14)—(15) § 21. Получим

$$L = hN_1'' = h \cdot \sqrt{N_{1x}''^2 + N_{1y}''^2} = \sqrt{J_{xz}^2 + J_{yz}^2} \cdot \sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}^4}. \quad (41)$$

2. Рассмотрим теперь другой имеющий большое практическое значение случай, когда центр тяжести не лежит на оси вращения, но тело имеет плоскость материальной симметрии Π (рис. 91), пер-

пендикулярную оси вращения; в этой плоскости, которую мы примем теперь за плоскость XY , будет очевидно находиться центр тяжести C тела.

Ось вращения будет главной осью в точке O , т. е. центробежные моменты J_{zx} и J_{yz} обратятся в нуль. Получим

$$bN_{1x}'' - aN_{2x}'' = 0, \quad bN_{1y}'' - aN_{2y}'' = 0$$

или

$$bN_1'' = aN_2''. \quad (42)$$

Отметим еще, что согласно формулам (1'') — (2''), имеем

$$N_1'' + N_2'' = Mw_c = M \{ [k, r] \ddot{\varphi} - r_c \dot{\varphi}^2 \}, \quad (43)$$

где r_c — вектор-радиус центра инерции, имеющий начало в точке O , k — единичный вектор оси вращения Z , w_c — ускорение центра инерции.

Согласно формуле (42) дополнительные динамические реакции N_1'' и N_2'' подшипников на тело представляют две параллельные силы, равнодействующая которых V приложена в центре инерции; эта равнодействующая (см. (43)) равна по величине массе тела, умноженной на ускорение w_c его центра инерции и имеет направление w_c . Это обстоятельство, являясь непосредственным следствием теоремы движения центра инерции, конечно, имеет место и в общем случае, но только предположение о наличии плоскости материальной симметрии позволяет заключить, что равнодействующая реакции подшипников N_1'' и N_2'' приложена в центре инерции тела.

К подшипникам со стороны вращающегося тела приложены дополнительные динамические воздействия $-N_1''$ и $-N_2''$, равные по величине N_1'' и N_2'' и противоположные им по направлению. Дело обстоит так, как если бы в центре инерции тела к телу была приложена сила:

$$F = -Mw_c = -(N_1'' + N_2''); \quad (44)$$

распределяясь по правилу рычага, эта сила F дает силы $-N_1''$ и N_2'' , действующие на подшипники (рис. 94). Силу F называют „силой инерции“, причем ее слагающая $F_1 = Mr_c \dot{\varphi}^2$ называется „центробежной силой“, а слагающая $F_2 = -M\ddot{\varphi} [k, r_c]$ — „касательной силой инерции“. Надо подчеркнуть, что сила инерции F — фиктивное понятие, т. е. ни о какой физически реальной силе, приложенной к вращающемуся телу в его центре инерции и направленному противоположно ускорению, не может быть речи. Реакция подшипников на тело N_1'' и N_2'' , а также и воздействия тела на

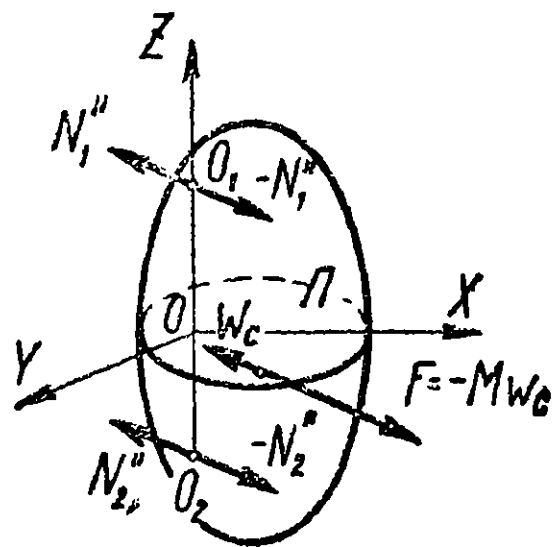


Рис. 94.

подшипники ($-N_1''$ и $-N_2''$) представляют взаимодействия тел друг на друга, поэтому они являются физическими реальными силами. Силы N_1'' и N_2'' могут быть заменены одной равнодействующей $V = N_1 + N_2$, приложенной к вращающемуся телу в его центре инерции и имеющей *направление ускорения* w_c ; сила V , как равнодействующая двух физических сил, приложенных к тому же телу, также является физической силой. Если же теперь обратиться к „силе“ F , то, будучи равнодействующей двух сил ($-N_1''$ и $-N_2''$), приложенных к *подшипникам*, она не может быть физической реальной силой, приложенной к *вращающемуся телу*.

Введение в рассмотрение фиктивной силы F представляет значительные формальные удобства; действительно, приложив в центре инерции тела эту силу $F = -Mw_c$, мы можем, забыв о том, что тело вращается, вычислить реакции подшипников N_1 и N_2 . Задача динамики будет, таким образом, сведена к задаче статики. Этот результат является следствием гораздо более общего положения (так называемого начала Даламбера, изложение которого будет дано в третьей части курса, согласно которому всякой задаче динамики можно *придать вид* задачи статики, если присоединить к физическим силам фиктивные „силы инерции“. Отметим еще раз, чтобы избежать путаницы понятий, что речь идет только о формально-удобном приеме решения задачи: ведь те же реакции мы уже вычислили выше, совершенно не упомянув даже о силах инерции.

3. В общем случае, когда центр инерции не лежит на оси вращения и последняя не является главной осью, для определения добавочных динамических реакций подшипников на ось вращающегося тела имеем уравнения (1'')—(2'') и (14)—(15) § 21. Решая совместно эти уравнения и вводя для краткости обозначения:

$$hS_x = J_{yz}\ddot{\varphi} + J_{zx}\dot{\varphi}^2, \quad hS_y = -J_{xx}\ddot{\varphi} - J_{zy}\dot{\varphi}^2, \quad Mw_c = V,$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} N_{1x}'' &= \frac{a}{h} V_x + S_x, & N_{2x}'' &= \frac{b}{h} V_y - S_x \\ N_{1y}'' &= \frac{a}{h} V_y + S_y, & N_{2y}'' &= \frac{b}{h} V_y - S_y \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

или в векторном обозначении:

$$N_1'' = \frac{a}{h} \mathbf{V} + \mathbf{S}, \quad N_2'' = \frac{b}{h} \mathbf{V} - \mathbf{S}. \quad (45a)$$

Динамические реакции подшипников на вращающееся тело, таким образом, статически эквивалентны: 1) силе V , приложенной в плоскости XY , 2) двум равным и направленным в противоположные стороны силам $\mathbf{S}$ и $-\mathbf{S}$, образующим пару с моментом

$$L = h[\mathbf{k}, \mathbf{S}], \quad (46)$$

где $\mathbf{k}$ — единичный вектор оси вращения. Величина момента этой пары определяется формулой (41).

Приложив мысленно к телу „силу инерции“

$$\mathbf{F} = -\mathbf{V} = -M\mathbf{w}_e,$$

а также „момент сил инерции“

$$\mathbf{L}_1 = -\mathbf{L} = -h [\mathbf{k}, \mathbf{S}],$$

мы можем вычислить воздействия тела на подшипники по правилам статики, совершенно не заботясь о вращении тела. Конечно, и „сила инерции“ и „момент сил инерции“ суть фиктивные понятия, вводимые только для удобства вычисления (сведение задачи динамики к задаче статики): к вращающемуся телу приложены сила $\mathbf{V}$ и пара $\mathbf{L}$, а не сила $\mathbf{F}$ и пара $\mathbf{L}_1$.

Примеры и упражнения.

1. Статическая неуравновешенность. Центр тяжести маховика находится на расстоянии e от оси вращения; маховик вращается с постоянной угловой скоростью ω ; вес его равен P . Определим реакции подшипников (рис. 95).

К статическим реакциям от веса маховика (ось вращения предполагаем горизонтальной), имеющим постоянное направление (вертикально вверх), присоединяются динамические реакции; плоскость, проходящую через центр тяжести перпендикулярно оси вращения, будем считать плоскостью материальной симметрии маховика. В таком случае приложив, согласно сказанному выше, в центре тяжести силу инерции

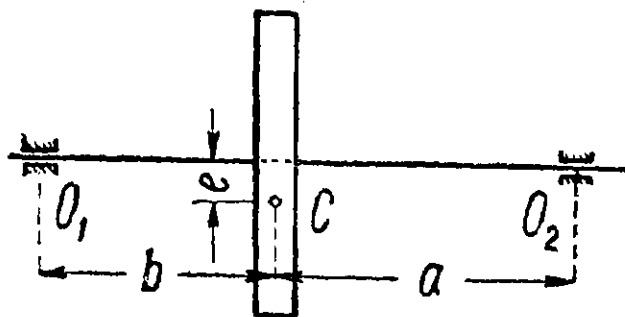


Рис. 95.

$$\mathbf{F} = -M\mathbf{w}_e = M\omega^2 e = \frac{P}{g} \omega^2 e,$$

мы сведем задачу определения добавочных динамических реакций к простой задаче статики; обозначая через a и b расстояния центра тяжести от подшипников O_1 и O_2 , найдем:

$$N_1'' = -\frac{b}{a+b} \frac{P}{g} \omega^2 e, \quad N_2'' = -\frac{a}{a+b} \frac{P}{g} \omega^2 e.$$

Неуравновешенность в рассматриваемом случае называется статической, так как ее можно обнаружить статическим испытанием: маховик двумя концами его оси укладывают на два хорошо выверенных горизонтальных параллельных бруска. Если центр тяжести находится на оси вращения, то тело будет находиться в равновесии в любом положении; в противном случае оно покатится, пока центр тяжести не займет наинизшего положения.

Рассмотрим два численных примера:

а) Вес маховика

$$P = 3 \text{ т}, \quad e = 1 \text{ мм}, \quad n = 300 \text{ об/мин}, \quad a = b.$$

Статические реакции будут:

$$N_1' = N_2' = \frac{P}{2} = 1,5 \text{ т.}$$

Добавочные динамические реакции:

$$N_1'' = N_2'' = \frac{Pe}{2g} \omega^2 = \frac{3000 \cdot 0,1}{2,981} (10 \pi)^2 \approx 150 \text{ кг.}$$

По сравнению со статическими, динамические реакции в этом примере не велики; это объясняется малым эксцентриситетом e и сравнительно малым числом оборотов. Последний фактор имеет преобладающее значение, так как реакции пропорциональны квадрату числа оборотов. Это иллюстрируется следующим примером:

б) Вес турбинного диска

$$P = 20 \text{ кг, } n = 12000 \text{ об/мин, } e = 0,1 \text{ мм, } a = b.$$

Получим

$$N_1' = N_2' = 10 \text{ кг}$$

$$N_1'' = N_2'' = \frac{20 \cdot 0,01}{2 \cdot 981} (400 \pi)^2 \approx 160 \text{ кг,}$$

т. е. добавочные динамические реакции превосходят статические в 16 раз при $e = 0,1 \text{ мм}$. Как бы тщательно ни была произведена сборка, избежать столь малого эксцентриситета весьма трудно; поэтому задача уравнивания тела при очень больших угловых скоростях разрешается иным путем (см. § 28, пример 5. Следствием неуравновешенности будет изгиб оси вала, который мы в наших расчетах считали абсолютно твердым.

2. Динамическая неуравновешенность (частный случай). Мы уже отметили выше, что если центр тяжести лежит на оси вращения, но эта ось не является главной осью инерции тела, то добавочные динамические реакции образуют пару сил с моментом

$$L = h [k, S],$$

причем

$$S_x = \frac{1}{h} (J_{yz} \ddot{\varphi} + J_{zx} \dot{\varphi}^2), \quad S_y = \frac{1}{h} (-J_{zx} \ddot{\varphi} + J_{zy} \dot{\varphi}^2),$$

и величина момента пары определяется формулой:

$$L = \sqrt{J_{zx}^2 + J_{yz}^2} \cdot \sqrt{\ddot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}^4}.$$

Неуравновешенность в этом случае называется динамической, так как она может быть обнаружена только динамическими испытаниями при помощи специальных приспособлений (см., наприм., Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле, стр. 46—52, ГНТИ, 1931). Разберем численный пример.

Вследствие неправильного рассверливания втулки ось вращения турбинного диска составляет с перпендикуляром к плоскости диска угол $\alpha = 1^\circ$. центр тяжести диска лежит на оси вращения; вес

диска $P = 20$ кг, радиус $r = 20$ см, угловая скорость постоянна и равна $n = 12000$ об/мин; расстояние между подшипниками $\overline{O_1 O_2} = h = 1$ м. Определим реакции подшипников.

Выбрав оси координат, как указано на рис. 96, получим (см. пример 1, § 22, стр. 206)¹⁾:

$$J_{zx} = \frac{J_1 - J_3}{2} \sin 2\alpha, \quad J_{zy} = 0.$$

При вычислении моментов инерции считаем диск однородным и пренебрегаем его толщиной, получим

$$J_3 = \frac{P}{g} \frac{r^2}{2}, \quad J_1 = \frac{P}{g} \frac{r^2}{4}, \quad J_{zx} = -\frac{P}{g} \frac{r^2}{4} \sin 2\alpha \approx -\frac{P}{g} \frac{r^2}{4} 2\alpha.$$

$$S_x = -\frac{1}{h} \frac{P}{g} \frac{r^2}{4} 2\alpha \cdot \omega^2, \quad S_y = 0.$$

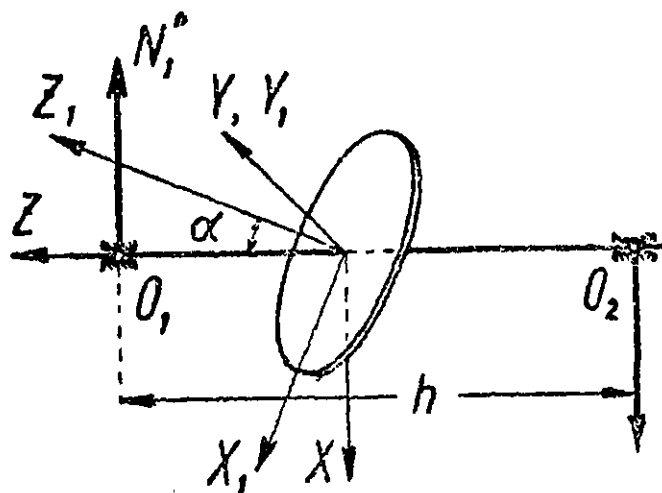


Рис. 96.

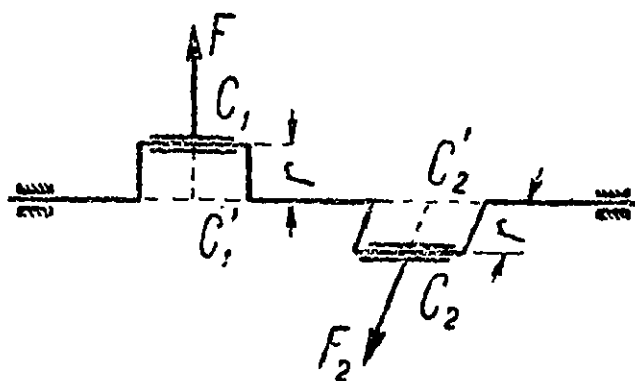


Рис. 97.

Подставляя наши численные данные, получим

$$S_x = -\frac{20 \cdot 20^2}{100 \cdot 981 \cdot 4} 2 \cdot \frac{\pi}{180} \left(\frac{\pi \cdot 12000}{30} \right)^2 = -1120 \text{ кг}$$

и, следовательно:

$$N''_{1x} = -1120 \text{ кг}, \quad N''_{2x} = 1120 \text{ кг}.$$

По сравнению с весом диска добавочные динамические давления на подшипники (равные N''_{1x} и N''_{2x} по величине и направленные в противоположную сторону) получились очень значительными; дело ухудшается еще тем, что эти давления изменяют свое направление, вращаясь вместе с диском; условия работы подшипника таковы, как если бы его 12000 раз в минуту ударяли силой в 1,12 тонны, — причиной же этого явилась ошибка в сборке всего на 1°.

3. Динамическая неуравновешенность. (Общий случай). В качестве примера рассмотрим добавочные динамические

¹⁾ На рис. 96 для простоты изображен момент, когда оси Z и Z_1 лежат в вертикальной плоскости, проходящей через ось вращения; надо иметь в виду, что система осей ZXY вращается вместе с телом.

реакции подшипников коленчатого вала двухцилиндрового двигателя, изображенного в перспективе на рис. 97, оба колена одинаковы и заклинены под углом 90° друг к другу; центры тяжести их C_1 и C_2 находятся на расстоянии $r = 12$ см от оси вала, вес каждого колена $P = 200$ кг; $\omega = 15\pi \frac{1}{\text{сек.}}$.

Решение задачи можно значительно упростить, если, не прибегая к общим формулам, ввести в рассмотрение силы инерции. Каждое колено в отдельности представляет лишь статически неуравновешенное тело (плоскость, проходящая через центр тяжести колена перпендикулярно оси вала, есть плоскость материальной симметрии). Приложив силы инерции F_1 и F_2 , как указано на рис. 97:

$$F_1 = F_2 = \frac{200}{981} \cdot 12 (15\pi)^2 = 5400 \text{ кг},$$

приведем задачу определения реакции к задаче статики, на решении которой нет необходимости здесь останавливаться.

§ 24. Влияние внешних ударов на момент количества движения системы.

Пусть на систему материальных точек начинают в момент времени t_0 действовать мгновенные силы, прекращающие свое действие в момент $t_0 + \tau = t$, где τ — весьма малый промежуток времени. Результатом действия мгновенных сил будет, как мы знаем, резкое изменение скоростей точек системы, а следовательно, и ее главного момента количества движения. Мы имеем

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n [r_i, F_i]; \quad (47)$$

в течение короткого промежутка времени τ действия мгновенных сил следует пренебречь действием всех прочих сил, поэтому, прилагая ур-ние (47) к этому промежутку времени, мы должны в правой части под F_i подразумевать только мгновенные силы, а под $L_i = [r_i, F_i]$ — их моменты.

Из ур-ния (47) получаем

$$dK = \sum_{i=1}^n [r_i, F_i] dt$$

или, интегрируя в пределах от t_0 до t :

$$K - K_0 = \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t [r_i, F_i] dt, \quad (48)$$

где K и K_0 — значения главного момента количества движения в моменты t и t_0 . Мы знаем далее (стр. 126), что за время действия мгновенных сил можно пренебречь перемещениями точек системы;

иными словами, вектор-радиус $\mathbf{r}_i$ можно при интегрировании считать постоянным:

$$\int_{t_0}^t \mathbf{L}_i dt = \int_{t_0}^t [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i] dt = [\mathbf{r}_i, \int_{t_0}^t \mathbf{F}_i dt]$$

или

$$\int_{t_0}^t \mathbf{L}_i dt = [\mathbf{r}_i, \mathbf{S}_i], \quad (49)$$

где $\mathbf{S}_i = \int_{t_0}^t \mathbf{F}_i dt$ — импульс мгновенной силы $\mathbf{F}_i$. Ур-ние (48) принимает вид:

$$\boxed{\mathbf{K} - \mathbf{K}_0 = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i, \mathbf{S}_i]} \quad (50)$$

т. е. геометрическое приращение главного момента количества движения системы в течение весьма короткого промежутка времени действия мгновенных сил равно геометрической сумме моментов импульсов всех внешних мгновенных сил (ударов). Если, в частности, речь идет о вращении твердого тела вокруг неподвижной оси, то, проектируя ур-ние (50) на ось вращения (ось Z), получим

$$J_z(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) = \sum_{i=1}^n (x_i S_{iy} - y_i S_{ix}), \quad (51)$$

где J_z — момент инерции тела относительно оси вращения, $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}_0$ — угловые скорости его в моменты t и t_0 ; в правой части уравнения стоит сумма моментов импульсов внешних мгновенных сил относительно оси Z ; отметим еще, что к числу таких сил принадлежат и мгновенные силы реакции в подшипниках, появляющиеся вследствие действия мгновенных сил; в ур-ние (50) импульсы этих реакций, конечно, не входят, так как моменты их относительно оси вращения равны нулю.

Примеры и упражнения.

1. Молот и кулачная шестерня. Шестерня, снабженная несколькими кулаками, приводит в движение молот (рис. 98). Угловая скорость шестерни до удара равна ω_{10} . Считая удар неупругим, вычислим изменение угловой скорости $\omega_1 - \omega_{10}$ шестерни и скорость v_2 молота после удара.

К шестерне в течение весьма короткого промежутка времени действия удара приложены мгновенный импульс реакции молота $\mathbf{H}$ и мгновенный импульс реакции оси. Согласно ур-нию (51), имеем

$$J(\omega_1 - \omega_{10}) = -Hr_1,$$

где J — момент инерции шестерни относительно оси вращения; $J = \frac{G_1 \rho_1^2}{g}$ (G_1 — вес, ρ_1 — радиус инерции шестерни).

Для молота будем иметь

$$\frac{G_2}{g} v_2 = H,$$

где G_2 — вес молота, v_2 — скорость его после удара (начальная скорость молота $v_{20} = 0$). Так как удар неупругий, то

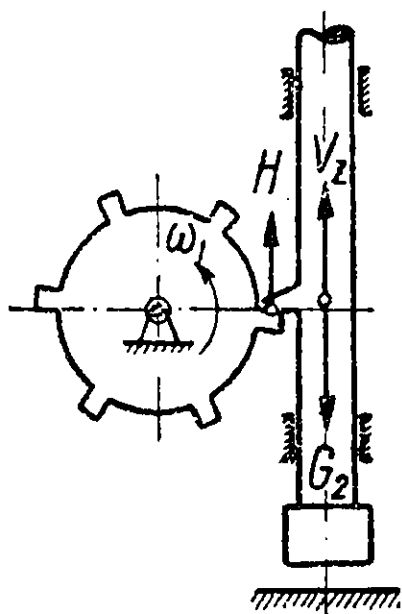
$$v_2 = r_1 \omega_1.$$

Трех полученных уравнений достаточно для определения трех неизвестных ω_1 , v_2 , H . Получим

$$\omega_1 = \frac{G_1 \rho_1^2 \omega_{10}}{G_1 \rho_1^2 + G_2 r_1^2} = \frac{\omega_{10}}{1 + \frac{G_2}{G_1} \left(\frac{r_1}{\rho_1} \right)^2} \quad (a)$$

$$v_2 = r_1 \omega_1 = \frac{r_1 \omega_{10}}{1 + \frac{G_2}{G_1} \left(\frac{r_1}{\rho_1} \right)^2} \quad (b)$$

$$H = \frac{G_2}{g} \frac{r_1 \omega_{10}}{1 + \frac{G_2}{G_1} \left(\frac{r_1}{\rho_1} \right)^2}. \quad (B)$$



Пусть, например:

$$\begin{aligned} G_1 &= 35 \text{ кг} & G_2 &= 30 \text{ кг} \\ r_1 &= 20 \text{ см} & \rho_1 &= 0,8 r_1. \end{aligned}$$

Получим

$$\frac{\omega_1}{\omega_{10}} = \frac{1}{1 + \frac{30}{35} (0,8)^2} \approx 0,645,$$

Рис. 98.

т. е. угловая скорость шестерни уменьшается приблизительно на 35%.

Принимая продолжительность удара $\tau = 0,05$ сек. и $\omega_{10} = 2\pi \frac{1}{\text{сек.}}$, определим среднее значение усилия

$$F = \frac{H}{\tau},$$

передаваемого молоту в течение удара. Получим

$$F \approx 50 \text{ кг.}$$

2. Два шкива вращаются в одной плоскости вокруг своих осей с угловой скоростью $\bar{\omega}_{10}$, $\bar{\omega}_{20}$ (рис. 99). Определим, как изменяются угловые скорости после того, как на шкивы будет накинута ремень. Радиусы шкивов равны соответственно R_1 и R_2 ; пренебрегаем скольжением ремня.

Применяя ф-лу (51) к вращению первого шкива, имеем

$$I_1 (\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_{10}) = S R_1,$$

где S — импульс мгновенной силы натяжения ремня (помимо этого импульса, к шкиву приложен импульс мгновенной реакции оси; его момент относительно оси вращения равен нулю).

Для второго шкива получим

$$J_2(\ddot{\omega}_2 - \ddot{\omega}_{20}) = -SR_2$$

и так как скольжение ремня отсутствует, то

$$\ddot{\omega}_1 R_1 = \ddot{\omega}_2 R_2.$$

Отсюда находим

$$\frac{\ddot{\omega}_2}{R_1} = \frac{\ddot{\omega}_1}{R_2} = \frac{J_1 R_2 \ddot{\omega}_{10} + J_2 R_1 \ddot{\omega}_{20}}{J_1 R_2^2 + J_2 R_1^2}.$$

Применим этот результат к численному примеру: мотор, приводящий в движение станок, делает на холостом ходу 1500 об/мин. Определим мгновенное изменение угловой скорости мотора в момент пуска станка в работу и мгновенное натяжение ремня. Примем следующие данные:

для мотора $J_1 = 0,02 \text{ кг.м.сек}^2$, $R_1 = 0,1 \text{ м}$, $\ddot{\omega}_{10} = 1500 \text{ об/мин.}$
 „ станка $J_2 = 0,04 \text{ кг.м.сек}^2$, $R_2 = 0,3 \text{ „}$ $\ddot{\omega}_{20} = 0$

Получаем,

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_1 &= \frac{J_1 R_2^2}{J_1 R_2^2 + J_2 R_1^2} \ddot{\omega}_{10} = \\ &= \frac{\ddot{\omega}_{10}}{1 + \frac{J_2}{J_1} \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2} \approx 1225 \text{ об/мин.} \end{aligned}$$

$$|S| = \frac{J_1 |\ddot{\omega} - \ddot{\omega}_{10}|}{R_1} \approx 5,76 \text{ кг.сек.}$$

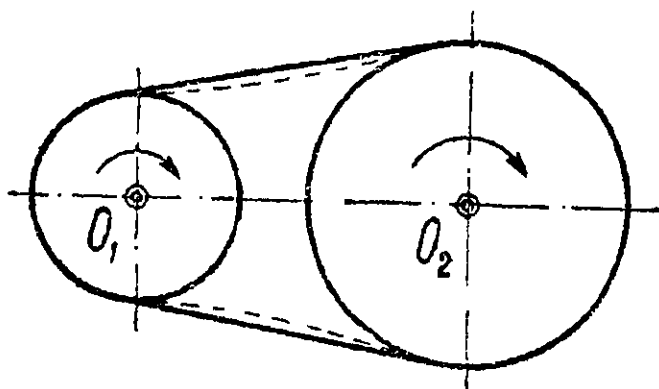


Рис. 99.

Если продолжительность удара принять равной 0,2 сек., то дополнительное натяжение ремня будет $\frac{5,76}{0,2} \approx 29 \text{ кг.}$

3. Измерение кратковременных токов при помощи баллистического гальванометра. Для измерения силы токов, существующих в течение очень короткого промежутка времени, или, точнее, для измерения количества электричества, протекающего по цепи в течение такого промежутка, употребляются гальванометры (стр. 182) с большим периодом свободных колебаний, т. е. с магнитами, имеющими сравнительно большой момент инерции. Такие гальванометры называются „баллистическими“.

Дифференциальное уравнение движения магнита гальванометра при отклонении его на угол φ от положения покоя (в магнитном меридиане) и при наличии в обмотке тока силы i имеет вид (стр. 184):

$$J\ddot{\varphi} = MG i \cos \varphi - MH \sin \varphi - \beta \dot{\varphi}. \quad (a)$$

Но если магнит до пропускания через гальванометр тока находится в покое в магнитном меридиане и если исследуемый ток имеет весьма малую продолжительность τ (по сравнению с периодом T свободных колебаний магнита), то, в согласии со сказанным в этом параграфе, мы можем, во-первых, считать, что угол φ во

все время пропускания тока остается равным нулю, во-вторых, пренебречь в правой части уравнения (а) членами, выражающими момент сил магнитного поля земли и силы сопротивления. Уравнение (а) принимает вид:

$$J\ddot{\varphi} = MG i, \quad (б)$$

или, умножая на dt и интегрируя от 0 до τ :

$$J(\bar{\omega}_1 - \bar{\omega}_0) = MG \int_0^{\tau} i dt. \quad (в)$$

Замечая, что

$$\int_0^{\tau} i dt = Q, \quad \bar{\omega}_0 = 0,$$

где Q — количество электричества, протекшее через цепь, получим

$$\bar{\omega}_1 = \frac{MG}{J} Q. \quad (г)$$

С этой угловой скоростью начнется движение магнита. Предполагая, что сопротивление достаточно мало, т. е. что движение магнита представляет затухающее колебание, получим, согласно формуле (з) стр. 186,

$$\varphi = ae^{-\varepsilon t} \sin(\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t + \alpha).$$

При $t=0$ имеем $\varphi=0$, $\dot{\varphi}=\bar{\omega}_1$ (отсчет времени ведется теперь от момента начала движения магнита, т. е. по истечении времени τ от начала пропускания тока). Эти условия определяют постоянные a и α . Найдем

$$a = \frac{\bar{\omega}_1}{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}}, \quad \alpha = 0.$$

Максимальное отклонение магнита $\bar{\varphi}_0$ от плоскости магнитного меридиана определится из формул (и) и (к) на стр. 186 при $n=0$.

Получим

$$\bar{\varphi}_0 = \frac{\bar{\omega}_1}{k} e^{\frac{-\varepsilon}{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}} \arctg \frac{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}}.$$

Преобразуя по ф-лам (ж) — (м) стр. 186, найдем:

$$\bar{\varphi}_0 = \frac{T}{2\sqrt{\pi^2 + \lg^2 \eta}} \bar{\omega}_1 e^{\frac{-\lg \eta}{\pi} \arctg \frac{\pi}{\lg \eta}}$$

где T — период свободных колебаний, $\lg \eta$ — логарифмический декремент. Ф-ла (г) дает теперь

$$Q = \frac{J}{MG} \frac{2\sqrt{\pi^2 + \lg^2 \eta}}{T} e^{\frac{\lg \eta}{\pi} \arctg \frac{\pi}{\lg \eta}} \bar{\varphi}_0$$

или, замечая, что

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{MH}}$$

и, снова пользуясь (м), стр. 186, получим

$$Q = \frac{1}{2} \frac{H}{G} \frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \lg^2 \eta}} \frac{\lg \eta}{\pi} \arctg \frac{\pi}{\lg \eta} \varphi_0 e \quad (д)$$

Эта формула определяет количество протекающего через цепь электричества по наблюдаемому отклонению стрелки φ_0 и известным постоянным прибора.

§ 25. Влияние удара на ось вращающегося тела.

Предположим, что в некоторой точке M твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, приложена мгновенная сила, импульс которой обозначим через S . Приложение этой силы вызывает, как уже указывалось, появление мгновенных реакций в точках O_1 и O_2 закрепления оси (в подшипниках); импульсы этих реакций или удары, приложенные к оси, назовем через S_1 и S_2 . Займемся определением их. Для упрощения формул примем ось вращения за ось Z , а плоскость, проходящую через точку M перпендикулярно оси вращения, за плоскость XY , причем ось X направим через точку M (рис. 100). В таком случае координаты этой точки будут:

$$x_M = OM = s, \quad y_M = 0, \quad z_M = 0.$$

Проектируя на оси X, Y, Z ф-лу (50) § 24 (стр. 215), получим

$$\begin{aligned} K_x - K_{0x} &= -aS_{1y} + bS_{2y}, \\ K_y - K_{0y} &= aS_{1x} - bS_{2x} - S_z \cdot s, \\ K_z - K_{0z} &= S_y \cdot s; \end{aligned}$$

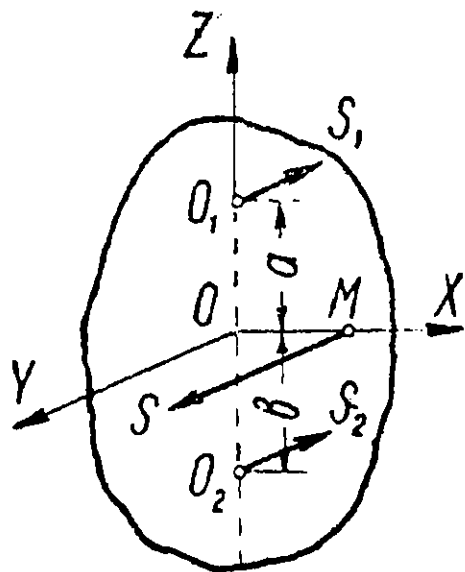


Рис. 100.

но для случая твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, согласно формуле (9) § 21 (стр. 197), имеем

$$K_x = -J_{zx} \tilde{\omega}, \quad K_y = -J_{yz} \tilde{\omega}, \quad K_z = J_z \tilde{\omega} = M \rho^2 \tilde{\omega}$$

(ρ — радиус инерции тела относительно оси вращения); получаем

$$\left. \begin{aligned} -J_{zx}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) &= -aS_{1y} + bS_{2y} \\ -J_{yz}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) &= aS_{1x} - bS_{2x} - S_z \cdot s \\ M \rho^2(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) &= S_y s \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Теперь нужно применить еще к промежутку времени действия мгновенной силы теорему движения центра инерции. Имеем

$$M(v_c - v_{c0}) = S_1 + S_2 + S, \quad (53)$$

где v_c — скорость центра инерции; проектируя на оси и замечая, что $v_{cx} = -\tilde{\omega} y_c$, $v_{cy} = \tilde{\omega} x_{cy}$, $v_{cz} = 0$, получим:

$$\left. \begin{aligned} -My_c(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) &= S_{1x} + S_{2x} + S_x \\ Mx_c(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) &= S_{1y} + S_{2y} + S_y \\ 0 &= S_{1z} + S_{2z} + S_z \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Ур-ния (52) и (54) определяют импульсы S_1 и S_2 мгновенных реакций оси при ударе. Конечно, поперечные реакции ими определяются вполне, а продольные только в их сумме.

Естественно возникает практически весьма существенный вопрос об определении тех условий, при которых ось вращающегося тела не испытывает удара вовсе, т. е.

$S_{1x}, S_{1y}, S_{1z}, S_{2x}, S_{2y}, S_{2z}$ обращаются в нуль.

Ур-ния (52) и (54) получают при этом вид:

$$J_{xx}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) = 0 \quad (a) \qquad -My_c(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) = S_x \quad (г)$$

$$J_{yy}(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) = 0 \quad (б) \qquad Mx_c(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) = S_y \quad (д)$$

$$Mr^2(\tilde{\omega} - \tilde{\omega}_0) = S_z \quad (в) \qquad S_z = 0 \quad (е)$$

Искомые условия можно теперь формулировать так:

1) Согласно (е) удар S должен быть направлен перпендикулярно оси вращения.

2) Согласно (а) и (б) $J_{xx} = J_{yy} = 0$: ось вращения должна быть главной осью в точке пересечения ее с плоскостью XU .

3) Согласно (г) и (д), имеем $x_c S_x + y_c S_y = 0$, т. е. вектор S и вектор-радиус r_c центра инерции должны быть взаимно перпендикулярны, иными словами, удар должен быть направлен перпендикулярно плоскости, проведенной через ось вращения и центр тяжести.

4) Из (в) и (д) находим, наконец:

$$\boxed{x_c \cdot s = r^2} \quad (55)$$

Эта формула определяет положение точки приложения удара.

При соблюдении этих четырех условий ось вращения не будет испытывать удара вовсе, какова бы ни была его величина.

Примеры и упражнения.

1. Случай тела, имеющего плоскость материальной симметрии. Полученные условия очень упрощаются, если тело имеет перпендикулярную оси вращения плоскость материальной симметрии Π . Ось вращения будет в этом случае главной осью инерции в точке пересечения ее O с плоскостью Π ; центр тяжести тела C также лежит в плоскости Π . Мгновенные реакции оси обратятся в нуль при соблюдении следующих условий (рис. 101).

1°. Удар S должен лежать в плоскости Π и быть направленным перпендикулярно $\overline{OC}$.

2°. Расстояние точки M приложения удара до оси вращения должно определяться формулой:

$$\overline{OM} = \frac{\rho^2}{\overline{OC}}, \quad (a)$$

где ρ — радиус инерции тела относительно оси вращения; иными словами, точка приложения удара должна совпадать с осью качаний, соответствующей оси вращения тела (стр. 179).

При соблюдении этих условий точка M называется *центром удара*.

Ф-лу (a) можно преобразовать, замечая, что

$$\rho^2 = \rho_c^2 + \overline{OC}^2, \quad \overline{OM} = \overline{OC} + \overline{CM}.$$

Получим

$$\overline{CM} = \frac{\rho_c^2}{\overline{OC}}, \quad (б)$$

где ρ_c — радиус инерции относительно оси, проходящей через центр инерции тела параллельно оси вращения. На рис. 101 дано графическое построение центра удара на основании ф-лы (б).
Условие (a) или (б) должно соблюдаться, например, в ручном молотке, чтобы ось вращения молотка (кистевое сочленение) не испытывала удара. Очевидно, что условие наличия плоскости симметрии и условие 1° здесь соблюдены. При работе молотком положение оси вращения, при котором рука не испытывает удара, мы находим на рукоятке инстинктивно.

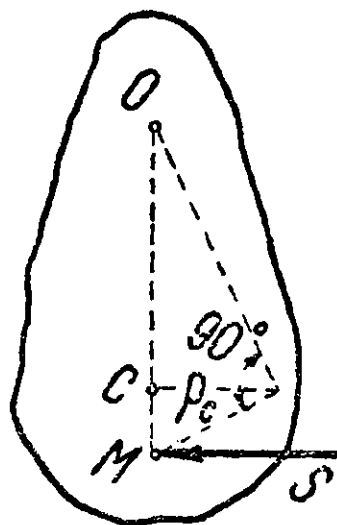


Рис. 101.

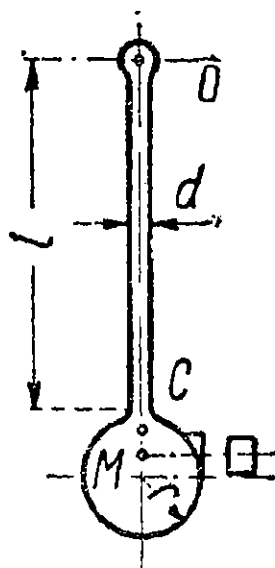


Рис. 102.

Приведем численный пример (рис. 102).

Маятник ударной машины состоит из стального диска радиуса $r = 10$ см и толщины $\delta = 5$ см и из стального круглого стержня диаметра $d = 2$ см и длины $l = 90$ см. Найдем, на каком расстоянии x от оси вращения нужно поместить разбиваемый машиной брусок, чтобы ось вращения не испытывала удара.

$$\text{Имеем } \overline{OC} = \frac{q \frac{l}{2} + Q(l+r)}{q+Q}, \quad \rho^2 = \frac{q \frac{l^2}{3} + Q(l+r)^2 + Q \cdot \frac{r^2}{2}}{q+Q}$$

где q и Q — веса стержня и диска; обозначая через γ вес единицы объема стали, имеем

$$q = \gamma l \frac{\pi d^2}{4}, \quad Q = \gamma \pi r^2 \delta$$

$$\overline{OA} = \frac{\rho^2}{\overline{OC}} = \frac{\frac{l^3 d^2}{12} + r^2 \delta \left[(l+r)^2 + \frac{r^2}{2} \right]}{\frac{l^2 d^2}{8} + r^2 \delta (l+r)} \approx 97,5 \text{ см.}$$

2. Случай пластинки. Приложим теперь результаты § 25 к случаю тела, имеющего форму весьма тонкой пластинки произвольного очертания (рис. 103), вращающейся вокруг неподвижной оси, лежащей в плоскости пластинки. Чтобы мгновенные реакции оси обращались в нуль, нужно, чтобы удар был перпендикулярен плоскости пластинки, так как центр тяжести лежит в этой плоскости. Этому условию, очевидно, недостаточно; необходимо, чтобы удар был приложен в вполне определенной точке M — центре удара пластинки. Для определения положения этой точки, заметим, что в рассматриваемом случае

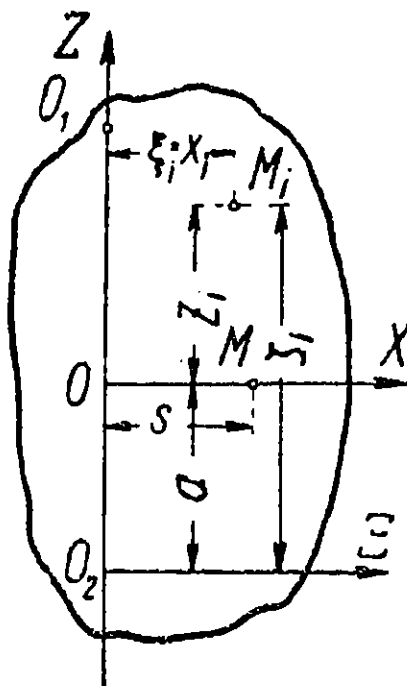


Рис. 103

$$J_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i z_i y_i = 0,$$

так как $y_i = 0$ для любой массы m_i . Остается выразить, что и $J_{zx} = 0$. Вводя систему осей ξZ , имеем

$$z_i = \xi_i - a, \quad \xi_i = x_i,$$

и на основании фл. (38) § 22

$$J_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i \xi_i x_i - M a x_c.$$

Но $J_{zx} = 0$; следовательно

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \xi_i x_i}{M x_c}.$$

Далее, согласно (55), получим

$$s = \frac{\rho^2}{x_c} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i^2}{M x_c}.$$

Эти формулы определяют координаты центра удара. В случае однородной пластинки имеем, заменяя суммы интегралами:

$$a = \frac{\iint_{\sigma} x \xi d\sigma}{x_c \sigma}, \quad s = \frac{\iint_{\sigma} x^2 d\sigma}{x_c \sigma};$$

в этих формулах через σ обозначена площадь пластинки, $d\sigma$ — элемент площади.

Например для прямоугольной мишени для стрельбы (рис. 104) в силу симметрии имеем $a = 0$; далее находим

$$s = \frac{\iint_{\sigma} x^2 d\sigma}{x_c \sigma} = \frac{\int_0^h x^2 dx \cdot l}{\frac{h}{2} \cdot hl} = \frac{2h}{3}.$$

Вопросы и упражнения.

1. На обод колеса (рис. 105) в концах диаметра насажены равные друг другу добавочные грузы q_1 ; два других добавочных груза q_2 помещены на оси колеса на одинаковом расстоянии l от плоскости колеса; радиус колеса равен R ; его вес G можно считать равномерно распределенным по ободу. Установить неравенства, которым должно удовлетворять l , чтобы ось колеса была осью наименьшего, среднего и наибольшего главного центрального момента инерции (установка Прандтля для демонстрации устойчивости вращения вокруг главных осей инерции; см. стр. 287).

2. Колесо ветряной мельницы состоит из n одинаковых лопастей, центры тяжести которых расположены по кругу на одинаковых угловых расстояниях друг от друга. Массу лопасти счи-

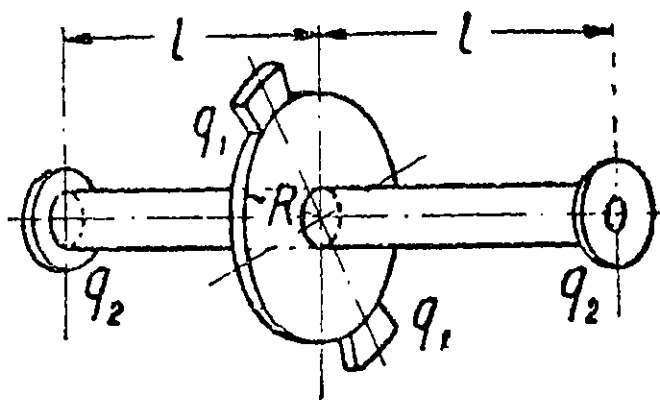


Рис. 105.

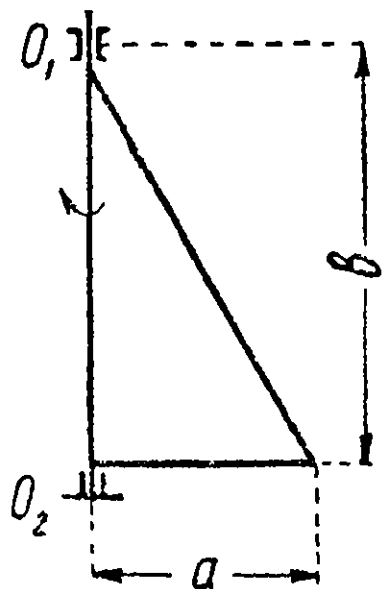


Рис. 106.

таем распределенной по радиусу колеса и сосредоточенной в его средней плоскости. Убедиться, что при $n \geq 3$ центральный эллипсоид инерции колеса обращается в эллипсоид вращения (ось вращения перпендикулярна плоскости колеса). Чему равно отношение осей эллипсоида? Во что обращается эллипсоид инерции при $n = 2$?

3. Пластина, имеющая форму прямоугольного треугольника с катетами a и b , вращается вокруг вертикальной оси, совпадающей с одним из катетов. Вес пластины G . Определить реакции подшипника O_1 и подпятника O_2 (рис. 106).

4. Чтобы уравновесить момент реакций в подшипниках в условиях примера 3 § 23 применен диск, заклиненный на оси вала под углом $\alpha = 75^\circ$ к оси; радиус диска $r = 20$ см, его центр тяжести лежит на оси вала. Определить вес диска. Как изменится вес диска, если принять угол $\alpha = 60^\circ, 45^\circ$?

5. Определить добавочные динамические реакции подшипников оси (считая ее абсолютно твердой) в примере 2 § 23, полагая, что, наряду с указанной там ошибкой в ориентировке плоскости диска относительно оси вала, при сборке допущен небольшой эксцентриситет $e = 0,5$ мм (расстояние центра тяжести диска от геометрической оси вращения вала).

6. Вращающееся вокруг неподвижной оси вполне уравновешен-

ное тело подвергается удару. Возможно ли создать при этом такие условия, при которых мгновенные реакции подшипников оси обра- щались в нуль?

7. Молот приводится во вращение шестерней, снабженной ку- лаком, как показано на рис. 107. Момент инерции молота относи-

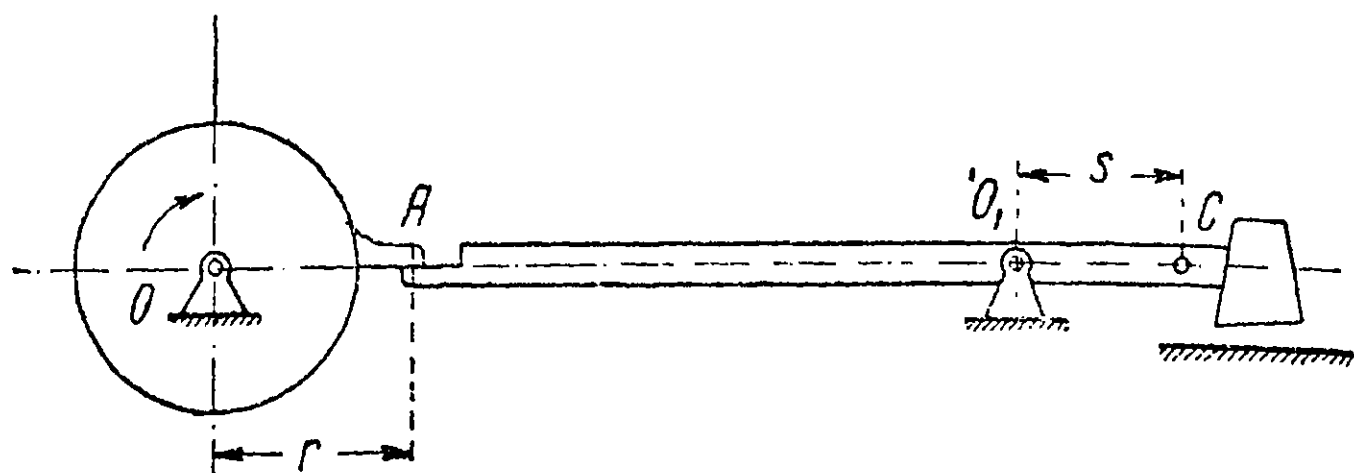


Рис. 107.

тельно оси O_1 равен $J_1 = 0,20 \text{ кг. см. сек}^2$, его вес $G = 20 \text{ кг}$; центр тяжести молота находится на расстоянии $s = 15 \text{ см}$ от оси O_1 . Момент инерции шестерни $J_2 = 0,25 \text{ кг см сек}^2$; радиус $\overline{OA} = r = 12 \text{ см}$. При ударе в точке A ось молота O_1 не испытывает удара. Угловая скорость шестерни до удара $n_{10} = 60 \text{ об/мин}$, молота $n_{20} = 0$. Считая удар неупругим, вычислить угловую скорость n_2 молота после удара и величину импульса.

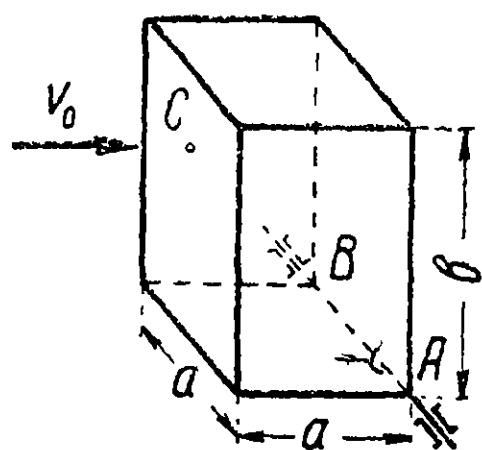


Рис. 108.

8. Мишень представляет однородную призму веса Q с квадратным основанием и высотой b (сторона квадрата $= a$); в се- редину C боковой грани противоположащей оси AB ударяет пуля веса p со скоростью v_0 . С какой скоростью начнет вращаться вокруг оси AB мишень после удара? Удар неупругий. Вычислить мгновенные реакции подшипников оси A и B (рис. 108).

Задание 7-е.

Теорема моментов в относительном движении по отношению к центру инерции.

Изучение этого задания мы начнем с установления теоремы моментов в относительном движении по отношению к центру инерции. Практическая важность этой теоремы состоит в том, что она позволяет перенести в динамику твердого тела прием, которым мы уже постоянно пользовались в кинематике: движение твердого тела разбивается на движение поступательное и вращательное;

при этом в противоположность кинематике выбор основной точки уже не является произвольным — ею должен быть центр инерции тела. Поступательное движение мы определяем, пользуясь теоремой движения центра инерции, тогда как вращательное движение вокруг центра инерции изучается при помощи теоремы моментов. Этот метод мы применяем в динамике плоского движения, которой в основном посвящено седьмое задание.

Прежде чем перейти к изучению этой с точки зрения приложений наиболее интересной части задания, учащийся должен проработать весьма простой по содержанию и характеру сопровождающих его иллюстраций и примеров параграф о сохранении момента количества движения относительно какой-либо оси в том случае, когда главный момент внешних сил по отношению к этой оси равен нулю. Эти примеры и иллюстрации, хотя и лишены непосредственного прикладного значения, но хорошо уяснят характер задач, разрешаемых помощью теоремы моментов, а следовательно, и раскрывают смысл самой этой теоремы. Параграф о плоском движении содержит несложный теоретический материал, для лучшего усвоения которого рекомендуется предварительно повторить соответствующие вопросы кинематики. Главное внимание учащегося должно быть сосредоточено на приложениях теории плоского движения. Наиболее важны с точки зрения непосредственных технических применений примеры 4, 2 и 5, причем при изучении первого из них надо шаг за шагом выполнять все графические построения. К вопросу, поставленному в 4 примере, мы вернемся более обстоятельно в следующей части курса в связи с принципом Даламбера. Мы однако считали важным уже здесь дать этот пример, чтобы еще раз показать возможность определить все могущие нас интересовать динамические величины, не прибегая к фиктивным представлениям о силах инерции, применение которых считается по традиции неизбежным в вопросах динамического исследования механизмов. Примеры 1 и 6, выясняющие весьма существенные вопросы о силах трения при скольжении и качении, также должны быть внимательно разобраны учащимся.

§ 26. Теорема моментов в относительном движении системы по отношению к ее центру инерции.

Вывод теоремы моментов основывался в конечном счете на втором законе Ньютона, справедливом лишь по отношению к неподвижной системе координатных осей. Поэтому теорема моментов имела место только в этой неподвижной системе: мы вычисляли главный момент количества движения K относительно начала нашей неподвижной системы осей XYZ .

Докажем теперь, что теорема моментов сохраняет свою формулировку и по отношению к координатным осям $X'Y'Z'$, имеющим начало в центре инерции C системы и движущимся вместе с ним *поступательно*; при этом момент количества движения должен быть вычислен также относительно центра инерции.

Обозначим (рис. 109) через $\mathbf{r}_i$ вектор-радиус, определяющий положение i -ой частицы относительно неподвижной точки O , через $\mathbf{r}'_i$ — вектор-радиус этой частицы относительно центра инерции C , наконец, через $\mathbf{r}_c$ — вектор-радиус центра инерции. В таком случае

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i. \quad (1)$$

Умножая обе части (1) на массу m_i и суммируя по всем точкам системы, получим

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c \sum_{i=1}^n m_i + \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}'_i.$$

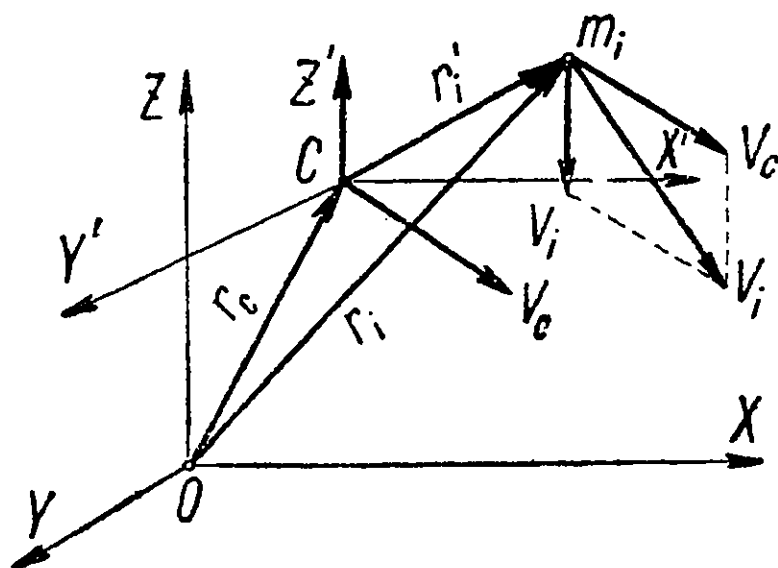


Рис. 109.

Но по определению центра инерции

$$\mathbf{r}_c \sum_{i=1}^n m_i = \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i,$$

и, следовательно:

$$\sum m_i \mathbf{r}'_i = 0; \quad (2)$$

это уравнение, конечно, выражает, что центр тяжести является началом векторов $\mathbf{r}'_i$.

Пусть далее $\mathbf{v}_i$ обозначает скорость нашей частицы по отношению к неподвижным осям, $\mathbf{v}'_i$ — ее скорость по отношению к системе осей $X'Y'Z'$, поступательно движущейся вместе с центром инерции со скоростью центра инерции $\mathbf{v}_c$. На основании теоремы сложения скоростей в относительном движении (часть 1, стр. 252), получим

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i + \mathbf{v}_c, \quad (3)$$

причем

$$\mathbf{v}'_i = \dot{\mathbf{r}}'_i, \quad (4)$$

и, следовательно, на основании ф-лы (2):

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}'_i = 0. \quad (5)$$

Преобразуем теперь, пользуясь (1) и (3), выражение для главного момента количества движения системы K . Имеем

$$K = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i] = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i' + \mathbf{r}_c, \mathbf{v}_i' + \mathbf{v}_c] = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i', \mathbf{v}_i'] + \\ + \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i', \mathbf{v}_c] + \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_c, \mathbf{v}_i'] + \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_c, \mathbf{v}_c];$$

но $\mathbf{r}_c$ и $\mathbf{v}_c$ можно вывести за знак суммы; на основании (2) и (5) получим:

$$\sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i', \mathbf{v}_c] = \left[\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i', \mathbf{v}_c \right] = 0, \\ \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_c, \mathbf{v}_i'] = \left[\mathbf{r}_c, \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i' \right] = 0, \\ \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_c, \mathbf{v}_c] = [\mathbf{r}_c, \mathbf{v}_c] \sum_{i=1}^n m_i = [\mathbf{r}_c, M\mathbf{v}_c],$$

где через $M = \sum_{i=1}^n m_i$ обозначена масса всей системы.

Мы получим таким образом

$$K = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i', \mathbf{v}_i'] + [\mathbf{r}_c, M\mathbf{v}_c] \quad (6)$$

Но сумма

$$\sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i', \mathbf{v}_i] = K' \quad (7)$$

есть не что иное как главный момент количества движения в движении системы по отношению к ее центру инерции, вычисленный относительно начала осей $X'Y'Z'$, т. е. относительно центра инерции. Мы получаем таким образом

$$\boxed{K = K' + [\mathbf{r}_c, M\mathbf{v}_c]}, \quad (8)$$

т. е. главный момент количества движения системы равен геометрической сумме главного момента количества движения ее по отношению к центру инерции и момента количества движения всей массы системы, мысленно сосредоточенной в центре инерции и движущейся вместе с центром инерции.

Вспомним теперь, что главный момент L внешних сил, приложенных к системе, выражается формулой:

$$L = \sum_{i=1}^n L_i = \sum_{i=1}^n [\mathbf{r}_i, \mathbf{F}_i],$$

в которой r_i мы можем заменить его выражением (1). Получим

$$L = \sum_{i=1}^n [r_i' + r_c, F_i] = \sum_{i=1}^n [r_i', F_i] + \left[r_c, \sum_{i=1}^n F_i \right], \quad (9)$$

но сумма

$$\sum_{i=1}^n [r_i', F_i] = L^{(c)} \quad (10)$$

есть не что иное, как главный момент внешних сил относительно центра инерции; ф-ла (9) дает

$$L = L^{(c)} + \left[r_c, \sum_{i=1}^n F_i \right]. \quad (11)$$

На основании теоремы моментов имеем

$$\frac{dK}{dt} = L;$$

подставляя сюда вместо K и L их выражения (8) и (11), получим

$$\frac{dK'}{dt} + \frac{d}{dt} [r_c, Mv_c] = L^{(c)} + [r_c, \sum_{i=1}^n F_i]. \quad (12)$$

Но, как мы уже отметили в § 16 при выводе теоремы моментов

$$\frac{d}{dt} [r_c, Mv_c] = [\dot{r}_c, Mv_c] + [r_c, Mw_c] = [r_c, Mw_c],$$

так как $\dot{r}_c = v_c$ и векторное произведение $[v_c, Mv_c] = 0$. Ф-ла (12) дает

$$\frac{dK'}{dt} + [r_c, Mw_c] = L^{(c)} + \left[r_c, \sum_{i=1}^n F_i \right]. \quad (13)$$

На основании теоремы движения центра инерции имеем

$$Mw_c = \sum_{i=1}^n F_i, \quad (14)$$

и подстановка в (13) дает

$$\frac{dK'}{dt} + \left[r_c, \sum_{i=1}^n F_i \right] = L^{(c)} + \left[r_c, \sum_{i=1}^n F_i \right]$$

и, следовательно, вторые слагаемые левой и правой части ф-лы (13) друг другу равны, значит друг другу равны и первые слагаемые. Получаем

$$\boxed{\frac{dK'}{dt} = L^{(c)}} \quad (15)$$

т. е. векторная производная по времени от главного момента количества движения системы в ее движении по отношению к центру инерции равна главному моменту всех внешних сил, приложенных к системе относительно центра инерции. Иными словами, теорема моментов сохраняет свою формулировку для относительного движения системы по отношению к центру инерции, причем как главный момент количества движения, так и главный момент внешних сил надо брать относительно центра инерции.

Приложения этой теоремы будут даны в следующих параграфах.

§ 27. Приложения теоремы сохранения главного момента количества движения относительно оси.

В § 16 4-го задания было доказано, что главный момент количества движения системы относительно некоторой оси, например оси X , сохраняет постоянное значение

$$K_x = \text{const}, \quad (16)$$

если главный момент внешних сил относительно этой оси равен нулю

$$L_x = 0.$$

Разложим движение системы на поступательное вместе с центром инерции и вращательное вокруг центра инерции. Теорема сохранения главного момента количества движения системы относительно оси будет иметь место и в относительном движении по отношению к центру инерции, так как, согласно § 26, теорема моментов сохраняет в этом движении свою формулировку. Иными словами, если главный момент внешних сил, действующих на систему, относительно какой-либо оси X' , проходящей через центр инерции, равен нулю, то проекция на эту ось главного момента количества движения системы в относительном движении ее по отношению к центру инерции сохраняет постоянное значение; иными словами, при

$$L_{x'}^{(e)} = 0$$

имеем

$$K_{x'} = \text{const}. \quad (16a)$$

Приведем несколько примеров, иллюстрирующих сказанное.

1. Неизменяемая плоскость планетной системы. Солнечная система, т. е. солнце, планеты и их спутники, представляют пример изолированной системы: силы взаимного притяжения между телами, входящими в систему, суть внутренние силы; внешние же силы, если пренебречь действием неподвижных звезд, отсутствуют.

Возьмем звездную координатную систему, т. е. направим оси координат к трем неподвижным звездам. Момент количества движения K' солнечной системы относительно ее центра инерции должен оставаться постоянным по величине и сохранять неизменное направление в выбранной нами звездной системе координат. Направление вектора K' определяет перпендикулярную к нему плоскость, остающуюся неизменной в звездной координатной системе. Суще-

ствование этой плоскости было впервые обнаружено Л а п л а с о м, который назвал ее неизменяемой плоскостью. Движения небесных светил относят в астрономии к этой плоскости.

2. Поворот человека на абсолютно гладком полу. В § 10 было указано на невозможность перемещения человека по абсолютно гладкому полу. В связи с этим возникает другой вопрос: может ли стоящий на абсолютно гладком полу человек повернуться вокруг вертикальной оси, проходящей через его (неподвижный) центр тяжести? Мы увидим сейчас, что на этот вопрос должен быть дан положительный ответ.



Рис. 110. Столик Жуковского. (Кабинет механики Ленинградского Физико-механического Института).

Внешними силами, приложенными к человеку, являются его вес и реакция пола. Обе эти силы вертикальны и момент их относительно вертикальной оси Z равен нулю. По предположению отсутствует и трение. Итак

$$L_z = 0,$$

откуда следует, что

$$K_z = \text{const} = 0.$$

Константа равна нулю, ибо в начале человек неподвижен. Предположим теперь, что человек начнет вращать над головой руку, с угловой скоростью $\tilde{\omega}_1$, описывая ею круги в горизонтальной плоскости. Если назвать через J_1 момент инерции руки относительно оси Z , то момент количества движения ее относительно этой оси будет $J_1 \tilde{\omega}_1$. Но главный момент количества движения системы относительно оси Z , должен оставаться равным

нулю. Значит необходимо предположить, что все тело человека начнет вращаться в противоположную сторону так, чтобы момент количества движения тела компенсировал момент количества движения руки. Назовем через J_2 момент инерции тела человека, через $\tilde{\omega}_2$ его угловую скорость. Получим

$$J_1 \tilde{\omega}_1 + J_2 \tilde{\omega}_2 = 0.$$

откуда найдем

$$\tilde{\omega}_2 = -\tilde{\omega}_1 \frac{J_1}{J_2}.$$

Чтобы ускорить поворот тела, нужно или увеличить $\tilde{\omega}_1$ или же увеличить J_1 , для чего человек должен взять в руку какой-либо

предмет, например длинный стержень, или, еще лучше, вращающееся колесо. Для иллюстрации сказанного служит столик Жуковского, фотография которого приведена на рис. 110. Круглая площадка может поворачиваться вокруг вертикальной оси, причем влияние трения сведено к минимуму, так как площадка установлена на шариках. Человек, стоящий на площадке и имеющий в руке вращающееся колесо или просто вращающий руку, будет поворачиваться вместе с площадкой в сторону, противоположную вращению руки.

3. Задача о падающей кошке. Способность кошки, падающей с большой высоты лапками вверх, переворачиваться в воздухе во время падения и становиться в результате благополучно на землю также может быть объяснена с точки зрения теоремы сохранения момента количества движения. Внешняя сила—вес—не дает момента относительно оси, проходящей через центр тяжести. Вращая быстро хвостом, кошка поворачивает свое тело в противоположную сторону; момент количества движения в относительном движении по отношению к центру инерции остается при этом равным нулю, как и в начале падения.

4. Прыжок акробата. Акробат, совершающий сальто-мортале, отталкиваясь от земли, сообщает своему телу угловую скорость вокруг горизонтальной оси, проходящей через его центр тяжести. Так как внешняя сила—вес—приложена в центре тяжести, то момент количества движения относительно центра инерции человека сохранит постоянное значение, какие бы телодвижения он ни совершал. Увеличить же свою угловую скорость ω , чтобы успеть к концу прыжка стать ногами на землю, акробат может. Для этого он поджимает ноги к туловищу, уменьшая тем самым момент инерции своего тела относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести; ω при этом увеличивается, так как произведение $J\omega$ должно оставаться постоянным.

Примеры и упражнения.

1. Вращение диска под влиянием движущегося по нему тела. Круглый горизонтальный диск может вращаться без трения вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр. По окружности диска идет человек веса p со скоростью v' относительно диска (рис. 111). Радиус диска R , его вес P . Определим угловую скорость диска при условии, что в начале система находилась в покое.

Внешними по отношению к рассматриваемой системе (диск и человек на нем) силами являются веса человека и диска и реакции оси. Все эти силы не дают момента относительно вертикальной оси Z вращения диска:

$$L_z = 0;$$

поэтому момент количества движения системы относительно оси Z сохраняет постоянное значение:

$$K_z = \text{const};$$

но при $t=0$ диск и человек неподвижны, следовательно:

$$K_z = 0.$$

С другой стороны, K_z равно алгебраической сумме моментов количества движения диска $K_z^{(1)}$ и человека $K_z^{(2)}$:

$$K_z = K_z^{(1)} + K_z^{(2)} = 0. \quad (a)$$

Называя через ω абсолютное значение угловой скорости диска и считая ось Z направленной к читателю, будем иметь при принятых на рис. 111 направлениях движения человека и диска:

$$K_z^{(1)} = -J\omega = -\frac{P}{2g} R^2 \omega.$$

При вычислении $K_z^{(2)}$ мы должны взять скорость v человека по отношению к земле. На основании теоремы сложения скоростей

$$v = v' + v_c,$$

причем в рассматриваемом случае переносная скорость $v_c = R\omega$. Получаем

$$v = v' - R\omega$$

и, следовательно:

$$K_z^{(2)} = \frac{P}{g} v \cdot R = \frac{P}{g} R (v' - R\omega).$$

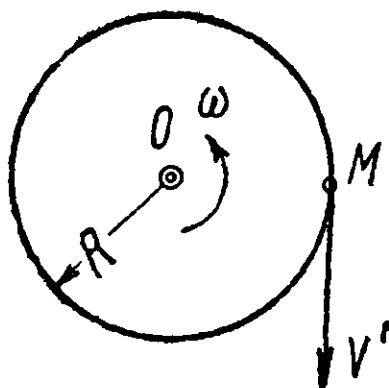


Рис. 111.

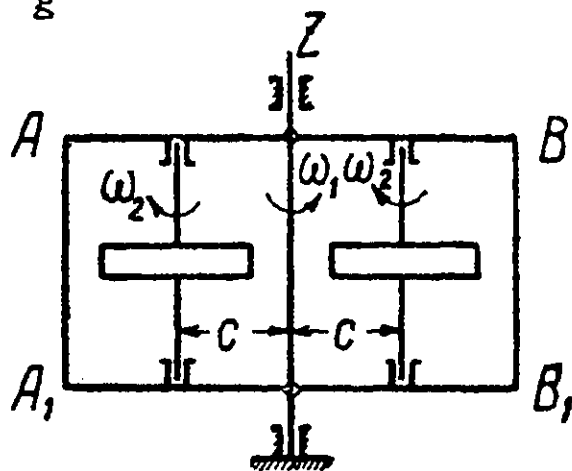


Рис. 112.

Подстановка в (a) дает

$$\frac{P}{g} R (v' - R\omega) - \frac{P}{2g} R^2 \omega = 0,$$

откуда получим

$$\omega = \frac{2p}{P + 2p} \frac{v'}{R}.$$

Угол поворота φ диска найдем из уравнения:

$$\varphi = \int_0^t \omega dt = \frac{2p}{P + 2p} \int_0^t \frac{v'}{R} dt = \frac{2p}{P + 2p} \frac{s'}{R},$$

где s' — пройденный человеком по диску путь. Когда человек сделает полный оборот по диску $s' = 2\pi R$ и

$$\varphi = 2\pi \frac{2p}{P + 2p} = \frac{2p}{P + 2p} \text{ оборота.}$$

2. Рамка ABA_1B_1 может вращаться вокруг проходящей через ее центр тяжести вертикальной оси Z ; в рамке симметрично относительно оси Z укреплены вертикальные оси двух одинаковых дисков веса Q (рис. 112). Вначале система находится в покое, а затем диски начинают вращаться в одну сторону с одинаковыми угловыми скоростями ω_2 относительно рамки. Чтобы осуществить это, не вводя внешних по отношению к системе сил, в рамке имеется (не показанный на рисунке) часовой механизм, отпускающий в некоторый момент пружину, которая и приводит диски во вращение. Определим угловую скорость рамки.

Как и в предыдущем примере, имеем

$$K_z = K_z^{(1)} + 2K_z^{(2)},$$

причем момент количества движения рамки определяется формулой:

$$K_z^{(1)} = -J_1\omega_1,$$

где J_1 — момент инерции рамки относительно оси вращения, ω_1 — абсолютное значение ее угловой скорости; знак минус поставлен потому, что рамка очевидно будет вращаться в сторону, противоположную вращению дисков.

Для вычисления момента количества движения диска $K_z^{(2)}$ воспользуемся ф-лой (8). Называя через J_2 момент инерции диска относительно его оси и замечая, что угловая скорость диска по отношению к земле будет $\omega_2 - \omega_1$ найдем

$$K_z^{(2)} = J_2(\omega_2 - \omega_1) - \frac{Q}{g}c^2\omega_1,$$

где второе слагаемое представляет момент количества движения относительно оси Z всей массы диска, сосредоточенной в его центре инерции (см. ф-лу (8) § 26).

Мы получаем таким образом

$$-J_1\omega_1 + 2J_2(\omega_2 - \omega_1) - 2\frac{Q}{g}c^2\omega_1 = 0,$$

откуда найдем

$$\omega_1 = \frac{2J_2\omega_2}{2J_2 + 2\frac{Q}{g}c^2 + J_1}.$$

С этой угловой скоростью и будет совершаться вращение рамки.

§ 28. Динамика плоского движения.

С кинематической точки зрения движение плоской фигуры, как мы знаем, вполне характеризуется движением основной точки и вращением вокруг основной точки (рис. 113). Иными словами, для определения всех элементов плоского движения (т. е. траекторий, скоростей и ускорений точек движущейся фигуры) необходимо знать в функции времени: а) координаты основной точки C :

$$x_c = f_1(t), \quad y_c = f_2(t); \quad (17)$$

б) угол поворота φ фигуры вокруг основной точки:

$$\varphi = f_3(t). \quad (18)$$

Внешние силы, приложенные к телу, обозначим через $F_1, F_2, \dots, F_n$. Движение тела под действием этих сил может быть плоским при следующих условиях: 1) проекция равнодействующей их на ось Z , перпендикулярную плоскости движения, равна нулю; 2) суммы моментов этих сил относительно каждой из осей X, Y , расположенных в плоскости движения, также равны нулю:

$$\sum_{i=1}^n F_{iz} = 0, \quad \sum_{i=1}^n L_{ix} = 0, \quad \sum_{i=1}^n L_{iy} = 0.$$

Эти условия будут во всяком случае выполнены, если все силы расположены в одной плоскости XY .

В кинематике та или иная точка плоской фигуры принималась за основную в зависимости от тех упрощений, которые этим вносились в рассмотрение задачи. В динамике же за основную точку C следует, конечно, принять центр инерции тела, так как этим достигается исключение внутренних сил из уравнений движения.

Дифференциальные уравнения движения центра инерции и уравнение моментов в относительном движении по отношению к центру инерции определяют вторые производные по времени искомых функций x_c, y_c, φ . Называя массу тела через M , момент

инерции относительно оси Z , перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр инерции, через J_c , получим, применив теорему движения центра инерции и теорему моментов в относительном движении:

$$M\ddot{x}_c = \sum_{i=1}^n F_{ix} \quad M\ddot{y}_c = \sum_{i=1}^n F_{iy} \quad (19)$$

$$J_c \ddot{\varphi} = \sum_{i=1}^n L_{iz}^{(c)} = L_z^{(c)}, \quad (20)$$

где $L_{iz}^{(c)}$ — момент силы F_i относительно упомянутой оси Z , $L_z^{(c)}$ — главный момент всех внешних сил, относительно этой оси.

Если все внешние силы известны, то, интегрируя систему дифференциальных уравнений (19) — (20), получим x_c, y_c, φ как функции времени, т. е. уравнения (17) и (18); задача определения движения будет решена. Обратно, уравнения (19) и (20) определяют внешние силы по заданному движению. В приложениях весьма часто x и y_c бывают заранее известны, как функции φ (или вообще

две из величин x, y, φ известны как функции третьей). Движение плоской фигуры вполне определяется в этом случае заданием одного лишь угла φ и каждому значению этого угла соответствует определенное положение тела, совершающего плоское движение. Во всех механизмах, которые мы рассматривали в кинематике, это условие было выполнено. Выражая в этом случае $\ddot{x}, \ddot{y}$ через $\ddot{\varphi}$ и его производные по времени, мы получим три уравнения, служащие для определения $\ddot{\varphi}$ и двух неизвестных внешних сил (реакций опор).

Определение сил в заданном плоском движении. В векторном виде уравнения плоского движения имеют вид (ε — вектор углового ускорения):

$$Mw_c = F, J_c \varepsilon = L^{(c)} \quad (19a) \text{---} (20a)$$

Первое уравнение определяет величину и

направление равнодействующей $F = \sum_{i=1}^n F_i$

всех внешних сил, приложенных к движущейся заданным образом плоской фигуре, второе послужит нам для определения линии действия равнодействующей. Пусть Q будет центром ускорений фигуры (§ 45 часть 1); в таком случае (рис. 114):

$$F = Mw_c = M\{-\omega^2 r'_{QC} + [\varepsilon, r'_{QC}]\}. \quad (21)$$

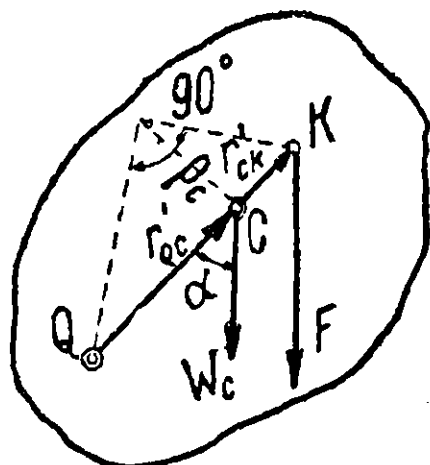


рис. 114.

С другой стороны, равнодействующую F можно всегда перенести вдоль линии действия ее в точку пересечения K с линией QC ; следовательно:

$$L^{(c)} = [r'_{CK}, F] = M\{-\omega^2 [r'_{CK}, r'_{QC}] + [r'_{CK}, [\varepsilon, r'_{QC}]]\}. \quad (22)$$

Первое слагаемое обращается в нуль, так как перемножаемые вектора параллельны. Что касается второго слагаемого, так называемого тройного векторного произведения, то в рассматриваемом случае значение его может быть легко определено. В самом деле, вектор $[\varepsilon, r'_{QC}]$, стоящий во внутренних скобках, имеет величину $\varepsilon \overline{QC}$ и по направлению перпендикулярен ε и r'_{QC} , а следовательно, и r'_{CK} ; таким образом, в тройном произведении $[r'_{CK}, [\varepsilon, r'_{QC}]]$ перемножаемые вектора r'_{CK} и $[\varepsilon, r'_{QC}]$ перпендикулярны друг другу и лежат в плоскости рисунка, следовательно, это произведение равно по величине $\overline{CK} \cdot \overline{QC} \cdot \varepsilon$, а по направлению перпендикулярно рисунку, т. е. имеет (в чем учащийся легко убедится) направление вектора ε . Имеем ¹⁾

$$[r'_{CK}, [\varepsilon, r'_{QC}]] = \varepsilon \overline{CK} \cdot \overline{QC};$$

¹⁾ Учащийся, знакомый с основами векторной алгебры, легко получит этот результат непосредственно по формуле $[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b)$ (см. конец 10 задания).

теперь на основании (20а) и (22) получаем

$$J_{\epsilon} = Mz \cdot \overline{CK} \cdot \overline{QC}.$$

Обозначая через ρ_{ϵ} радиус инерции относительно центра инерции, найдем

$$\boxed{\rho_{\epsilon}^2 = \overline{CK} \cdot \overline{QC}} \quad (23)$$

Эта формула и определяет точку приложения K равнодействующей внешних сил, приложенных к фигуре. Способ построения центра ускорений указывался в первой части курса (§ 45 и пример 2 стр. 227). На рис. 114 дано графическое построение, определяющее K (см. также стр. 221 рис. 101).

Примеры и упражнения.

1. Качение по наклонной плоскости. Цилиндр, ось которого горизонтальна, катится по неподвижной плоскости, наклоненной к горизонту под углом α (рис. 115). Внешними силами, приложенными к цилиндру, будут: а) его вес G , б) нормальная реакция плоскости N , в) сила трения T_1 . Моментом сопротивления качению (см. задание 9) мы пренебрегаем.

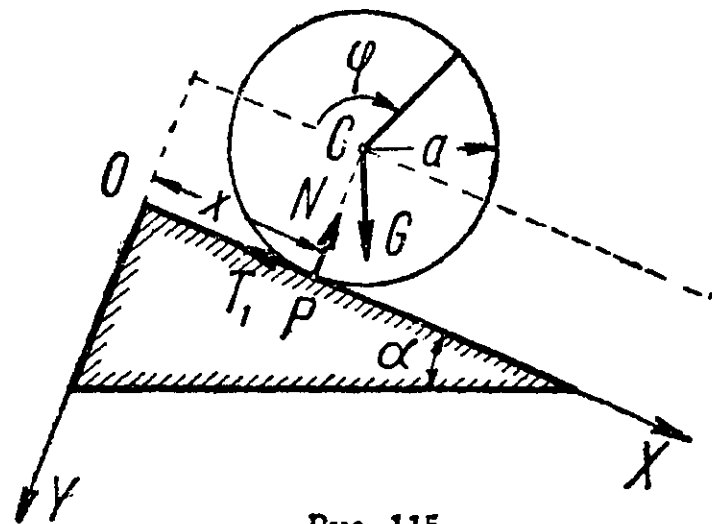


Рис. 115.

Рассмотрим сначала случай чистого качения. Кинематически это обозначает, что точка соприкосновения P цилиндра с плоскостью является мгновенным центром. Называя угловую скорость цилиндра через ω , его радиус через a , получим в таком случае

$$v_x = \dot{x} = a\omega = a\dot{\varphi}, \quad (a)$$

где $v_x = \dot{x}$ есть скорость центра тяжести цилиндра ($v_y = 0$).

Располагая неподвижные оси X и Y , как указано на рис. 115, будем иметь

$$y = -a = \text{const}, \quad \dot{y} = \ddot{y} = 0, \quad \ddot{x} = a\ddot{\varphi},$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = G \sin \alpha - T_1, \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = G \cos \alpha - N, \quad L_z^{(c)} = T_1 a,$$

и уравнения плоского движения (19) — (20) примут вид:

$$\frac{G}{g} a\ddot{\varphi} = G \sin \alpha - T_1 \quad (б)$$

$$0 = G \cos \alpha - N \quad (в)$$

$$J_{\epsilon} \ddot{\varphi} = \frac{G}{g} \rho_{\epsilon}^2 \ddot{\varphi} = T_1 a. \quad (г)$$

Уравнение (в) определяет нормальную реакцию. Уравнения же (б) и (г) послужат для определения углового ускорения $\ddot{\varphi}$ и силы трения T_1 . Решая эти уравнения относительно $\ddot{\varphi}$ и T_1 , получим

$$\ddot{\varphi} = \frac{ga}{a^2 + \rho_c^2} \sin \alpha \tag{д}$$

$$T_1 = G \frac{\rho^2}{a^2 + \rho_c^2} \sin \alpha = \mu G \sin \alpha. \tag{е}$$

Линейное ускорение центра инерции цилиндра будет

$$w_x = \ddot{x} = a \ddot{\varphi} = \frac{a^2}{a^2 + \rho_c^2} g \sin \alpha = \nu g \sin \alpha. \tag{ж}$$

Здесь введены обозначения:

$$\mu = \frac{\rho_c^2}{a^2 + \rho_c^2}, \quad \nu = 1 - \mu = \frac{a^2}{a^2 + \rho_c^2}. \tag{з}$$

Все сказанное относится в равной мере к тому случаю, когда катящееся тело является не цилиндром, а шаром или колесом; в последнем случае будем считать массу колеса сосредоточенной на его ободе (обруч) Коэффициенты μ и ν имеют при этом значения, приведенные в таблице:

Форма тела	$\frac{\rho^2}{a^2}$	$\mu = \frac{\rho_c^2}{a^2 + \rho_c^2}$	$\nu = \frac{a^2}{a^2 + \rho_c^2}$	$\alpha_0 = \arctg \frac{f}{\mu}$		
				$f = 0,05$	$f = 0,10$	$f = 0,15$
Шар	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{7} \approx 0,29$	$\frac{5}{7} \approx 0,71$	10°	19°20′	27°30′
Цилиндр	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3} \approx 0,33$	$\frac{2}{3} \approx 0,67$	8°30′	16°40′	24°10′
Обруч	1	$\frac{1}{2} = 0,50$	$\frac{1}{2} = 0,50$	5°40′	11°20′	16°40′

Пройденный центром инерции путь легко определяется из уравнения (ж). Так как ускорение w_x постоянно, то, считая начальную скорость равной нулю, получим

$$x = \frac{w_x t^2}{2} = \nu \frac{g \sin \alpha}{2} t^2. \tag{и}$$

За то же самое время t тело (любой формы), скользя по абсолютно гладкой плоскости, по которой качение невозможно, прошло бы путь

$$x^* = \frac{g \sin \alpha}{2} t^2. \tag{к}$$

Наша таблица показывает, что шар проходит при чистом качении 71% этого пути; цилиндр, двигаясь немного медленнее, сделает 0,67%,

наконец, всего медленнее станет в наших условиях двигаться обруч—его путь составляет только половину x^* .

Рассматриваемый случай чистого качения может иметь место лишь при условии, что сила трения качения не превосходит по величине силы трения скольжения T_2 . Последняя же, согласно закону Кулона, определяется формулой:

$$T_2 = fN = fG \cos \alpha, \quad (\text{л})$$

и вышеуказанное условие принимает вид (см. ф-лу (е):

$$\mu G \sin \alpha \leq fG \cos \alpha, \quad (\text{м})$$

откуда получаем

$$\mu \operatorname{tg} \alpha \leq f, \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{f}{\mu}, \quad (\text{н})$$

т. е. качение не будет сопровождаться скольжением, если угол α не превосходит некоторой величины α_0 , определяемой неравенством (н). Например, при $f = 0,05$ обруч начнет скользить при $\alpha = \alpha_0 = \arcsin \frac{f}{\mu} = \arcsin \frac{0,1}{0,5}$; скольжение же шара при том же f начнется лишь при $\alpha \geq 10^\circ$. Ряд значений α_0 при различных f дан в приведенной выше таблице.

Если $\alpha > \alpha_0$, то качение сопровождается скольжением и трение тела о плоскость будет трением скольжения, определяемым законом Кулона (л). Чтобы составить себе наглядное представление о законе изменения силы трения, построим графики кривых:

$$F_1(\alpha) = \mu \sin \alpha, F_2(\alpha) = f \cos \alpha;$$

при различных значениях α (не превосходящих 90°). Точка пересечения этих кривых определит угол α_0 , начиная с которого качение уже сопровождается скольжением. Жирноочерченные части кривых дают график изменения силы трения (ее отношения к весу тела) при различных α (рис. 116).

Пусть $\alpha > \alpha_0$; движение будет происходить со скольжением и ур-ние (а) уже не имеет места. Уравнения движения тела (цилиндра, шара или обруча) принимают вид:

$$\frac{G}{g} \ddot{x} = G \sin \alpha - T_2, \frac{G}{g} \rho_c^2 \ddot{\varphi} = T_2 a; \quad (\text{о})$$

подставляя вместо T_2 его значение, получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= g (\sin \alpha - f \cos \alpha) \\ \ddot{\varphi} &= \frac{ag}{\rho_c^2} f \cos \alpha \end{aligned} \right\} \quad (\text{п})$$

откуда x и φ могут быть легко определены интегрированием.

Разность

$$v_x^* = \dot{x} - a\varphi \quad (\text{р})$$

есть скорость скольжения точки соприкосновения P цилиндра

с плоскостью. Назовем ее скоростью скольжения цилиндра. Из ур-ния (п), получим

$$\frac{dv_x^*}{dt} = \ddot{x} - a\ddot{\varphi} = g \left(\sin \alpha - f \cos \alpha - f \frac{a^2}{\rho_c^2} \cos \alpha \right) = \\ = g \cos \alpha \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{f}{\mu} \right).$$

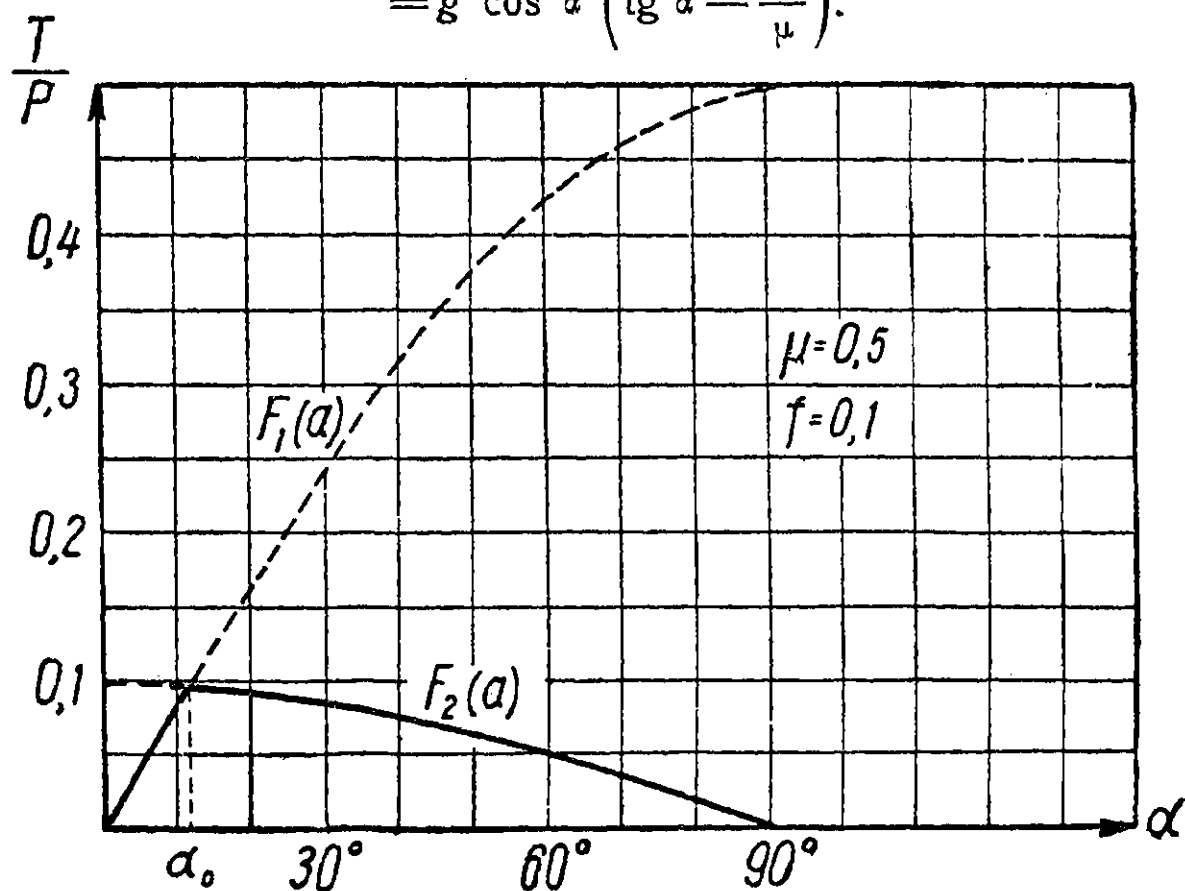


Рис. 116.

При $\alpha > \alpha_0$ величина в скобках является положительной и скорость скольжения v_x^* будет все время возрастать по мере опускания тела по плоскости.

2. Движение электровоза. Чтобы упростить задачу, будем рассматривать электровоз, имеющий только одну пару ведущих и одну пару ведомых колес. Внешними силами, приложенными к электровозу, будут (рис. 117):

а) веса ведущих колес (G_1), бегущих колес (G_2) и кузова (G_3);

б) силы трения ведущих (R_1) и бегущих колес (R_2) о рельсы. Мы уже выяснили в § 10, что первая сила направлена в сторону движения, вторая — противоположно движению;

в) сила сопротивления (S) прицепных вагонов (так называемая сила тяги на крюке) и сила сопротивления воздуха (W). Последнюю будем считать приложенной в центре тяжести кузова;

г) нормальные реакции N_1 и N_2 в точках соприкосновения ведущего и бегущего колес с рельсами.

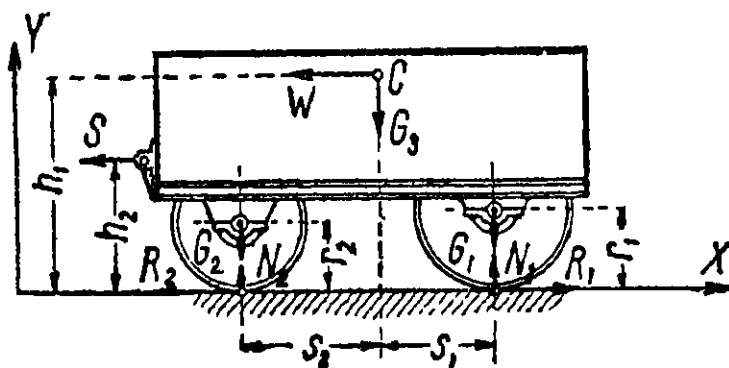


Рис. 117

Уравнение движения центра тяжести системы имеет вид:

$$\frac{G_1 + G_2 + G_3}{g} \ddot{x} = R_1 - R_2 - W - S. \quad (a)$$

В вертикальном направлении внешние силы уравновешиваются ($\ddot{y} = 0$), т. е.

$$0 = N_1 + N_2 - (G_1 + G_2 + G_3). \quad (б)$$

Для определения ускорения $\ddot{x}$ и неизвестных сил R_1 , R_2 , N_1 , N_2 обратимся к составлению дифференциальных уравнений движения отдельных частей электровоза, т. е. ведущих и ведомых колес и кузова.

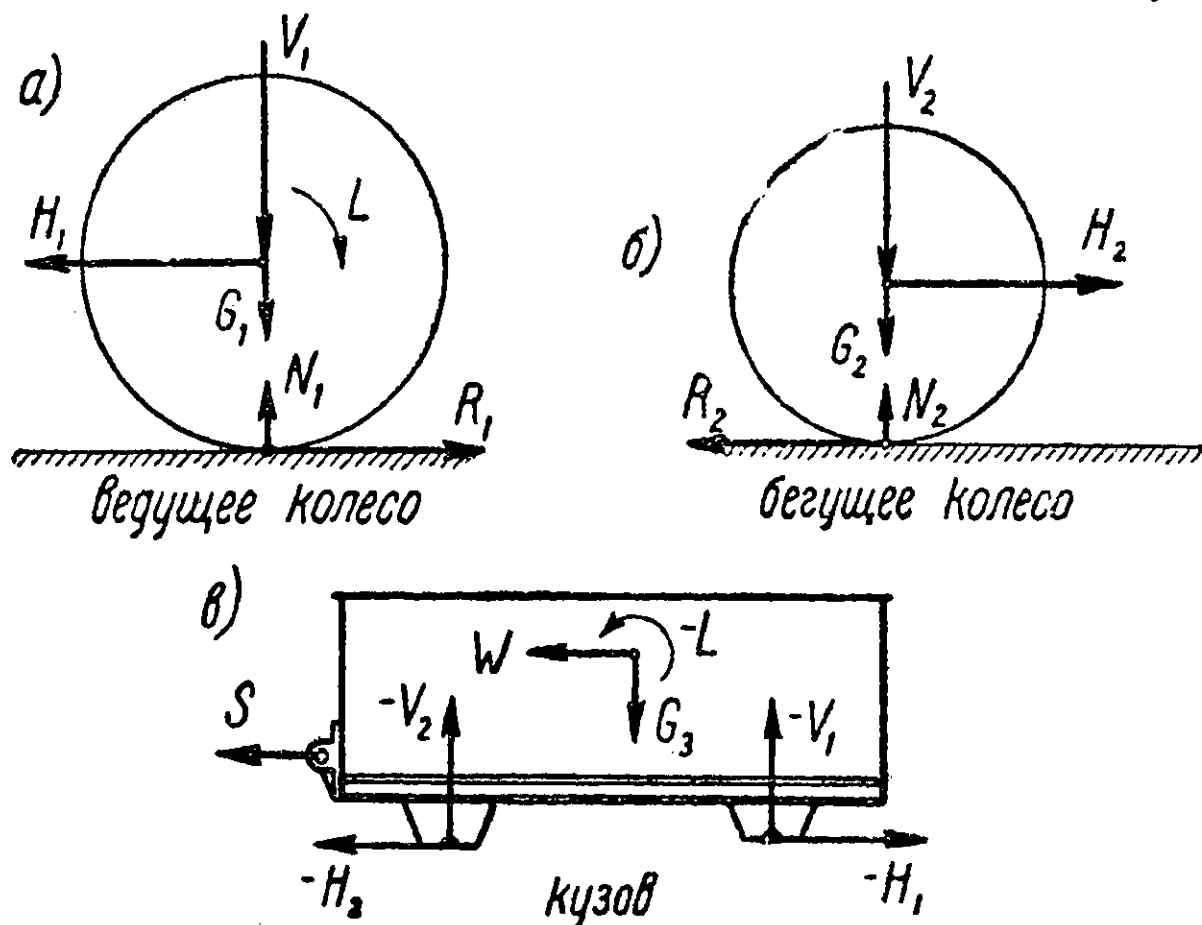


Рис. 118.

1. Ведущие колеса. Внешние силы и моменты (рис. 118а):

а) вес (G_1),

б) горизонтальная (H_1) и вертикальная (V_1) реакции подшипников.

в) сила трения (R_1),

г) вращающий момент (L) электромотора,

д) реакция рельс (N_1).

Моментом трения в подшипниках мы пренебрегаем.

Под влиянием этих сил ведущие колеса совершают плоское движение. Уравнения движения будут иметь вид:

$$\frac{G_1}{g} \ddot{x} = R_1 - H_1, \quad (в)$$

$$0 = N_1 - V_1 - G_1, \quad (г)$$

$$\frac{G_1}{g} r^2 \ddot{\varphi} = L - r_1 R_1. \quad (д)$$

Считая, что движение колес не сопровождается скольжением, будем иметь

$$r_1 \ddot{\varphi} = \ddot{x}.$$

Вводя еще принятое в технической литературе обозначение

$$\frac{\rho_1^2}{r_1^2} = \vartheta_1,$$

приведем (д) к виду:

$$\frac{G_1}{g} \vartheta_1 \ddot{x} = \frac{L}{r_1} - R_1. \quad (д')$$

2. *Бегущие колеса.* Внешние силы (рис. 118б):

а) вес (G_2),

б) горизонтальная (H_2) и вертикальная (V_2) реакции подшипников,

в) сила трения (R_2),

2) реакция рельс (N_2).

Уравнения движения будут иметь вид:

$$\frac{G_2}{g} \ddot{x} = H_2 - R_2 \quad (е)$$

$$0 = N_2 - V_2 - G_2 \quad (ж)$$

$$\frac{G_2}{g} \vartheta_2 \ddot{x} = R_2, \quad (з)$$

причем принято обозначение

$$\vartheta_2 = \frac{\rho_2^2}{r_2^2}$$

3. *Кузов электровоза.* Внешние силы и моменты (рис. 118а):

а) вес (G_3);

б) реакции подшипников: горизонтальные ($-H_1, -H_2$) и вертикальные ($-V_1, -V_2$);

в) силы сопротивления вагонов (S) и воздуха (W);

г) реактивный момент в статоре электромотора ($-L$), равный и направленный противоположно моменту, вращающему ведущие колеса.

Уравнения движения центра инерции кузова будут:

$$\frac{G_3}{g} \ddot{x} = H_1 - H_2 - W - S \quad (и)$$

$$0 = V_1 + V_2 - G_3 \quad (к)$$

Кузов совершает поступательное движение и, следовательно, главный момент внешних сил относительно центра инерции его должен равняться нулю; это условие дает

$$0 = H_2 (h_1 - r_2) - H_1 (h_1 - r_1) + V_2 s_2 - V_1 s_1 + S (h_1 - h_2) - L. \quad (л)$$

Ур-ние (а) является следствием ур-ний (в), (е) и (и). Действительно, складывая последние, мы получаем (а), так как внутренние для всего электровоза в целом силы H_1 и H_2 при сложении пропа-

дают. Точно так же, складывая (г), (ж) и (к), получаем (б) — при этом пропадают внутренние силы V_1 и Y_2 .

Мы получаем, таким образом, всего девять не зависящих друг от друга уравнений с девятью неизвестными:

$$\ddot{x}, R_1, R_2, V_1, V_2, H_1, H_2, N_1, N_2.$$

Веса частей электровоза G_1, G_2, G_3 , а также силы сопротивления W и S мы считаем при этом известными.

Обратимся сначала к определению ускорения. Для этого надо подставить в (а) вместо R_1 и R_2 их значения из уравнений (д') и (з). Получаем

$$\frac{G_1 + G_2 + G_3}{g} \ddot{x} = \frac{L}{r_1} - \frac{G_1}{g} \vartheta_1 \ddot{x} - \frac{G_2}{g} \vartheta_2 \ddot{x} - (W + S),$$

откуда будем иметь

$$\ddot{x} = \frac{g}{G + G_1 \vartheta_1 + G_2 \vartheta_2} \left[\frac{L}{r_1} - (W + S) \right], \quad (м)$$

где через G обозначен полный вес электровоза, т. е. сумма $G_1 + G_2 + G_3$. Зная силы W и S , а также момент L_1 , которые вообще говоря, будут зависеть от скорости и времени, мы, интегрируя (м), получим закон движения электровоза. Не занимаясь этой задачей, обратимся к выяснению тех условий, при которых электровоз может тронуться места. Для этого $\ddot{x}$ должно быть положительно, т. е. согласно (м), вращающий момент должен удовлетворять неравенству

$$\frac{L}{r_1} \geq W + S. \quad (н)$$

Будучи необходимым, условие (м) не является достаточным для того, чтобы электровоз мог тронуть с места. Нужно еще поставить требование отсутствия скольжения между ведущими колесами и рельсами; в противном случае эти колеса будут вращаться на месте (буксовать) и электровоз останется в покое. Итак, движение колес должно быть качением без скольжения, т. е. сила трения R_1 не должна превосходить силы трения скольжения fN_1 (f — коэффициент трения):

$$R_1 \leq fN_1. \quad (о)$$

Согласно (д) и (н), R_1 выражается формулой:

$$R_1 = \frac{L}{r_1} - \frac{G_1 \vartheta_1}{G + G_1 \vartheta_1 + G_2 \vartheta_2} \left[\frac{L}{r_1} - (W + S) \right] = \frac{G + G_2 \vartheta_2}{G + G_1 \vartheta_1 + G_2 \vartheta_2} \frac{L}{r_1} + \frac{G_1 \vartheta_1 (W + S)}{G + G_1 \vartheta_1 + G_2 \vartheta_2} \quad (п)$$

и условие отсутствия буксования (о) примет вид:

$$\frac{L}{r_1} \leq fN_1 \frac{G + G_1 \vartheta_1 + G_2 \vartheta_2}{G + G_2 \vartheta_2} - \frac{G_1 \vartheta_1}{G + G_2 \vartheta_2} (W + S). \quad (р)$$

Ф-лы (н) и (р) дают минимальное и максимальное значения необходимого при трогании с места вращающегося момента. Как следствие этих формул, будем иметь

$$fN_1 \frac{G + G_1 \vartheta_1 + G_2 \vartheta_2}{G + G_2 \vartheta_2} - \frac{G_1 \vartheta_1}{G + G_2 \vartheta_2} (W + S) \geq W + S;$$

собирая члены, содержащие $(W + S)$ в одну сторону и сокращая на общий множитель, получим

$$fN \geq W + S. \quad (с)$$

Увеличение силы трения fN_1 достигается увеличением N_1 , для чего увеличивают вес электровоза и, в частности, вес его ведущих колес; для повышения коэффициента трения иногда приходится посыпать рельсы песком.

Обратимся теперь к определению неизвестных реакций. Для упрощения выкладок остановимся на простом случае одинаковых колес:

$$G_1 = G_2 = G' \\ r_1 = r_2 = r, \quad \vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta,$$

кроме того будем полагать, что $s_1 = s_2 = s$.

Ур-ния (в) и (е) определяют горизонтальные реакции подшипников. Подставляя вместо R_1, R_2 , их значения (п), (з) и (н), получим:

$$H_1 = \frac{L}{r} - \frac{1 + \vartheta}{G + 2G'\vartheta} \left[\frac{L}{r} - (W + S) \right] \\ H_2 = \frac{1 + \vartheta}{G + 2G'\vartheta} \left[\frac{L}{r} - (W + S) \right] \quad (г)$$

Теперь мы можем обратиться к формулам (к) и (л) для определения вертикальных реакций. Получим:

$$V_1 = \frac{L h_1}{2rs} + S \frac{h_1 - h_2}{2s} + \frac{G_3}{2} + \frac{h_1 - r}{s} \frac{(1 + \vartheta) G'}{G + 2G'\vartheta} \left[\frac{L}{r} - (W + S) \right], \\ V_2 = \frac{L h_1}{2rs} - S \frac{h_1 - h_2}{2s} + \frac{G_3}{2} - \frac{h_1 - r}{s} \frac{(1 + \vartheta) G'}{G + 2G'\vartheta} \left[\frac{L}{r} - (W + S) \right].$$

Наконец N_1 и N_2 определяются из формул (г) и (ж):

$$N_1 = V_1 + G' \\ N_2 = V_2 + G'.$$

3. Эпициклический механизм. В качестве примера динамического исследования движения механизмов рассмотрим эпициклический механизм. К рукоятке его O_2O_1 приложен постоянный вращающий момент L_0 (рис. 119). Колесо I неподвижно. Определим движение системы и окружное усилие, передаваемое зубцу колеса II, находящемуся в соприкосновении с неподвижным колесом. При этом будем предполагать, что движение происходит в горизонтальной плоскости, так что силу веса можно не принимать в расчет. Напомним еще, что между угловыми скоростями

рукоятки ($\tilde{\omega}_3$) и колеса ($\tilde{\omega}_2$) имеет место соотношение (стр. 184, часть 1)

$$\frac{\tilde{\omega}_3}{\tilde{\omega}_2} = \frac{r_2}{r_1 + r_2}. \quad (a)$$

Обозначим через J_3 и J_2 моменты инерции рукоятки и колеса II относительно осей, перпендикулярных плоскости движения и проходящих соответственно через неподвижный шарнир O_2 и центр тяжести O_1 колеса. Вес колеса обозначим через P_2 , а рукоятки — через P_3 .

Согласно ф-ле (8) стр. 227 момент количества движения колеса $K_z^{(2)}$ относительно неподвижной оси вращения рукоятки будет

$$K_z^{(2)} = J_2 \tilde{\omega}_2 + \frac{P_2}{g} (r_1 + r_2)^2 \tilde{\omega}_2, \quad (б)$$

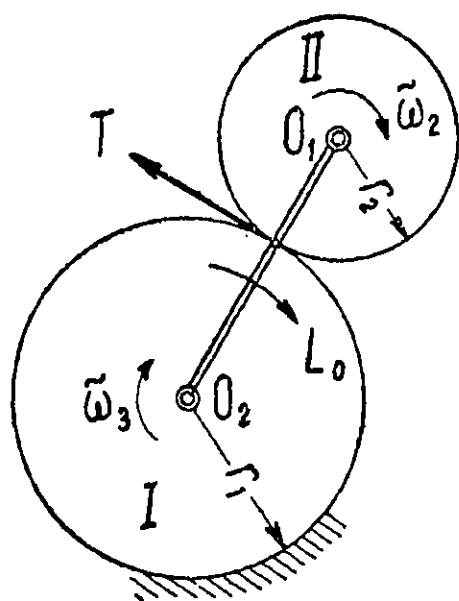


Рис. 119.

где $J_2 \tilde{\omega}_2$ — момент количества движения колеса в относительном движении вокруг центра тяжести, $\frac{P_2}{g} (r_1 + r_2)^2 \tilde{\omega}_2$ — момент количества движения всей массы колеса, мысленно сосредоточенной в центре тяжести и движущейся вместе с последним.

Момент количества движения K_z всей системы — колеса и рукоятки — относительно той же неподвижной оси вращения O_2 получим, прибавляя к предыдущему выражению момент количества движения рукоятки $K_z^{(3)}$:

$$K_z^{(3)} = J_3 \tilde{\omega}_3. \quad (в)$$

Мы имеем таким образом

$$K_z = J_2 \tilde{\omega}_2 + J_3 \tilde{\omega}_3 + \frac{P_2}{g} (r_1 + r_2)^2 \tilde{\omega}_3. \quad (г)$$

Чтобы применить теорему моментов, остается еще вычислить момент относительно оси O_2 внешних сил, приложенных к нашей системе. Пренебрегая трением в шарнирах и обозначая через T окружное усилие, передаваемое колесу II, получим

$$L_z = L_0 - T r_1, \quad (д)$$

где L_0 — момент, вращающий рукоятку.

Согласно теореме моментов

$$\frac{dK_z}{dt} = L_z,$$

т. е. в нашем случае

$$J_2 \tilde{\omega}_2 + \left[J_3 + \frac{P_2}{g} (r_1 + r_2)^2 \right] \tilde{\omega}_3 = L_0 - T r_1. \quad (е)$$

Ур-ний (а) и (е) недостаточно для определения трех неизвестных $\ddot{\omega}_2$, $\ddot{\omega}_3$, T . Какое же уравнение мы можем еще составить для определения наших неизвестных? Если бы мы остановились на уравнении вращения рукоятки:

$$J_3 \ddot{\omega}_3 = \sum_{i=1}^n L_{i3}, \quad (\text{ж})$$

то в правой части мы получили бы момент неизвестной нам реакции шарнира O_1 . Эта же реакция вошла бы в уравнение движения центра инерции колеса. Новое уравнение ввело бы новое неизвестное и цель не была бы достигнута. Уравнение движения центра инерции всей системы (колеса и рукоятки) также содержало бы неизвестную внешнюю силу — реакцию неподвижного шарнира O . Нам остается, следовательно, применить к колесу уравнение моментов в относительном движении его вокруг центра тяжести O_1 . Неизвестная реакция шарнира O_1 не войдет в это уравнение, так как ее момент относительно O_1 , конечно, равен нулю. Получим

$$J_2 \ddot{\omega}_2 = T r_2, \quad (\text{з})$$

ибо единственной внешней по отношению к колесу силой, момент которой относительно O_1 не обращается в нуль, является окружное усилие T .

Решая совместно ур-ние (а), (е) и (ж), найдем:

$$T = \frac{L_0}{r_1 + r_2} \frac{1}{1 + \frac{J_3 r_2^2}{J_2 (r_1 + r_2)^2} + \frac{P_2 r_2^2}{g J_2}}, \quad (\text{и})$$

после чего (з) и (а) определяют угловые ускорения $\ddot{\omega}_2$ и $\ddot{\omega}_3$ колес.

Будем считать колесо II однородным диском, а рукоятку стержнем длиной $(r_1 + r_2)$. В таком случае

$$J_2 = \frac{P_2}{g} \frac{r_2^2}{2}, \quad J_3 = \frac{P_3}{g} \frac{(r_1 + r_2)^2}{3}$$

и мы получаем

$$T = \frac{L_0}{r_1 + r_2} \frac{1}{1 + \frac{2}{3} \frac{P_3}{P_2} + \frac{1}{2}} = \frac{2L_0}{3(r_1 + r_2)} \frac{1}{1 + \frac{4}{9} \frac{P_3}{P_2}}.$$

Считая вес колеса весьма большим по сравнению с весом рукоятки, можем пренебречь величиной $\frac{4}{9} \frac{P_3}{P_2}$. Получим

$$T = \frac{2L_0}{3(r_1 + r_2)} = \frac{2}{3} F,$$

где F — сила, которая должна быть приложена к концу рукоятки, чтобы создать заданный момент L_0 . Окружное усилие T оказывается, таким образом, равным $\frac{2}{3} F$.

4. Кривошипный механизм. Динамическое изучение движения механизмов, приобретающее большое значение в случае быстроходных машин, лишь в очень редких случаях, может быть доведено до конца аналитическими методами; чтобы получить непосредственно приложимые результаты, а не нагромождение сложных формул, нужно прибегнуть к графическому методу. В качестве примера рассмотрим кривошипный механизм легкого авиационного мотора. Зададимся следующими данными (рис. 120а): $a = \overline{OA} = 2,5 \text{ см}$, $l = \overline{AB} = 6 \text{ см}$, вес шатуна $P_2 = 0,8 \text{ кг}$, вес поступательно-движущихся частей $P_3 = 0,6 \text{ кг}$, момент инерции коленчатого вала (кривошипа и связанных с ним частей) относительно оси вращения $OJ_1 = 0,5 \text{ кг. см. сек}^2$, число оборотов кривошипа в минуту 3750 об/мин ($\omega = 125 \frac{1}{\text{сек}}$). Принимаем далее, что шатун является однородным стержнем, т. е. центр инерции его C лежит в середине ($\overline{AC} = \overline{CB}$), а момент инерции относительно центра инерции будет

$$J_2^{(c)} = \frac{P_2}{12g} l^2 \text{ (т. е. } \rho_c = \frac{l}{\sqrt{12}} = 1,71 \text{ см)}.$$

Повернутый на 90° план скоростей изображается треугольником OAb (см. пример 5, стр. 192, часть 1), причем полюс плана скоростей находится в O . План ускорений будем строить непосредственно на чертеже механизма, принимая точку A за полюс. Предполагаем, что кривошип вращается равномерно; тогда ускорение его пальца A изобразится в некотором масштабе вектором $\overrightarrow{Aa_1}$ по величине равным кривошипу. Далее строим центростремительную часть $\overrightarrow{a_1 l}$ ускорения точки B по отношению к A :

$$\overrightarrow{a_1 l} = \frac{(\overline{Ab})^2}{\overline{AB}};$$

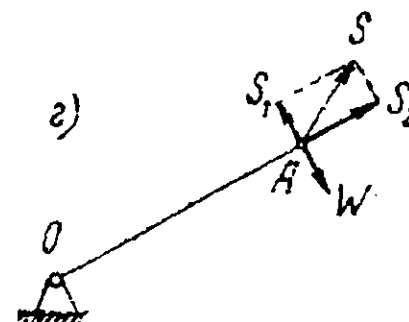
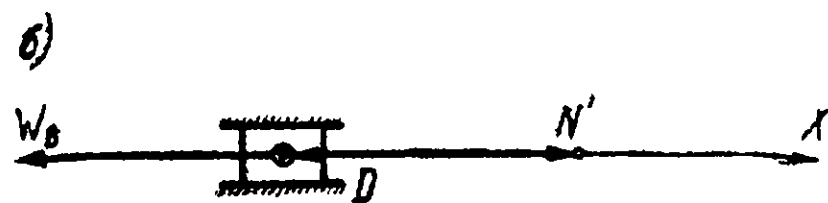
перпендикулярно $\overrightarrow{a_1 l}$ до пересечения с прямой, параллельной ускорению точки B , строим вращательную часть $\overrightarrow{lb_1}$ ускорения B по отношению к A . Искомое ускорение w_B точки B изобразится вектором $\overrightarrow{Ab_1}$. Наконец, в середине отрезка $a_1 b_1$ находим точку c_1 , соединив которую с полюсом, находим $\overrightarrow{Ac_1} = w_c$. Относительное ускорение точки B относительно A изображается вектором $\overrightarrow{a_1 b_1}$; этот вектор образует с шатуном AB угол α , повернув на который ускорения точек A и B , мы найдем в пересечении центр ускорения Q (см. часть 1).

Имеем по условию:

$$w_A = a \omega^2 = 2,5 (125\pi)^2 = 39\,000\pi \text{ см/сек}^2.$$

Но w_A изображается на плане ускорений отрезком $\overline{Aa_1} = 2,5 \text{ см}$, в то время как длины отрезков $\overline{Ab_1}$ и $\overline{Ac_1}$ изображающих ускорения w_B и w_c , соответственно равны 2,42 см; 2,41 см. Получаем

$$w_B = w_A \frac{2,42}{2,50} = 37\,700\pi^2 \text{ см/сек}^2, \quad w_c = w_A \frac{2,41}{2,50} = 37\,600\pi^2 \text{ см/сек}^2.$$



a)

Согласно ф-ле (23) § 28 находим теперь на линии $\overline{QC}$ точку приложения K равнодействующей всех внешних сил, приложенных к шатуну. Величина этой силы будет

$$F = \frac{P_2}{2} \omega_c = 301 \text{ кг};$$

по направлению F совпадает с ускорением ω_c центра инерции шатуна. Рассмотрим теперь по отдельности движение каждого звена механизма и выясним, под действие каких сил это движение происходит:

а) *Поступательно движущиеся части* (ползун) (рис. 120б). К ползуну приложены реакция D газа, реакция в шарнире со стороны шатуна, дающая слагающую N' по направлению движения ползуна и перпендикулярную к этому направлению слагающую N_1' , причем последняя уравнивается реакцией, направляющей движение ползуна плоскости (пренебрегаем трением). Задаваясь D и зная ω_c , легко найдем N' . Пусть в рассматриваемый момент давление газа на поршень составляет 12 кг/см^2 . Принимая площадь поршня равной $40,7 \text{ см}^2$ (диаметр $7,2 \text{ см}$), имеем

$$D = 12 \cdot 40,7 = 490 \text{ кг}.$$

Далее имеем

$$\frac{P_3}{g} \omega_{bx} = D_x + N_x' \quad \text{или} \quad -\frac{P_3}{g} \omega_b = -490 + N_x'.$$

Находим

$$N_x' = 490 - \frac{P_3}{g} \omega_b = 490 - 226 = 264 \text{ кг};$$

N' имеет указанное на рис. 120б направление.

б) *Шатун* (рис. 120в). К шатуну приложены: реакция $N = -N'$ ползуна в горизонтальном направлении (эта сила нам известна по величине из предыдущего), неизвестная слагающая реакции ползуна N_1 в поперечном его движению направлении и, наконец, неизвестная ни по величине, ни по направлению (см. ниже) реакция пальца кривошипа S' . Равнодействующая всех этих сил F , приложенная в точке K , нам уже известна. Определение S' и N_1 при заданном направлении последней, зная N и равнодействующую F , делается при помощи приемов статики. На рис. 120в построены силовой и веревочный многоугольники, из которых и находятся S' и N_1 . Получаем

$$S' \approx 110 \text{ кг}, \quad N_1 \approx 18 \text{ кг}.$$

в) *Кривошип* (рис. 120г). К пальцу кривошипа приложено помимо реакции шатуна $S = -S'$, сопротивление W , на преодоление которого работает двигатель. Принимая W в среднем равным 50 кг ,¹⁾ найдем, что вращающий момент, приложенный к пальцу кривошипа, в рассматриваемом положении будет

$$(S_1 - W) a = (71 - 50) \cdot 2,5 \approx 55,5 \text{ кг см}.$$

¹⁾ Это соответствует мощности двигателя (на один цилиндр) $W a \omega \approx 6,5 \text{ л. с.}$

Этот вращающий момент обуславливает, конечно, наличие углового ускорения

$$\varepsilon = \frac{52,5}{J_1} = 105 \frac{1}{\text{сек}^2},$$

и вращательное ускорение пальца кривошипа A будет

$$\varepsilon a \approx 262 \text{ см/сек}^2.$$

По сравнению с центростремительным ускорением точки A , равным $39\,000\pi^2 \text{ см/сек}^2$, полученная величина столь мала, что при построении плана ускорений ею можно было вполне пренебречь, что мы и сделали с самого начала.

5. Критическая угловая скорость турбинного вала. Если центр тяжести вращающегося тела не находится на оси вращения, то, как мы видели, в предыдущем задании (стр. 212) вал, на который насажено вращающееся тело, будет находиться под действием изгибающих сил. При малых угловых скоростях с этим явлением можно бороться, достигая возможно более точного центрирования вращающегося тела, т. е. совпадения центра тяжести его и оси вала. Но при тех угловых скоростях, которые мы имеем в паровых турбинах (до $30\,000 \text{ об/мин}$), этого средства оказывается недостаточным; неоднородности материала и неправильности в сборке всегда неизбежны, а так как передаваемые валу силы („силы инерции“) растут пропорционально *квадрату* угловой скорости, то самая ничтожная ошибка центрирования приводит к очень большим значениям этих сил (пример 1 § 23). Изобретатель паровой турбины Лаваль (Laval) вначале думал избежать этих затруднений, достигая возможно более точного центрирования, но эти попытки оказались безрезультатными при тех угловых скоростях (от $10\,000$ до $20\,000 \text{ об/мин}$), с которыми Лаваль имел дело. Положение было спасено неожиданным образом: именно, Лавалю удалось установить, что турбина имеет *неспокойный* ход только при некоторых определенных угловых скоростях и что при известном удалении от этих скоростей движение успокаивается тем быстрее, чем более *гибкий* был взят вал. Так, экспериментальным путем было установлено понятие о критических числах оборотов; теория этого явления вскоре после этого была дана Фепплем (Förpl).

Представим себе турбинный диск, насаженный в середине вертикального вала; плоскость диска останется при этом горизонтальной и при изгибе вала (рис. 121). Пусть точка C будет центром тяжести диска; через M обозначим точку пересечения оси изогнутого вала с плоскостью диска: $e = \overline{MC}$ представляет эксцентриситет, допущенный при сборке. Конечно e бывает невелико (доли миллиметра). Наконец, O есть точка пересечения плоскости диска с прямой, соединяющей центры подшипников вала; прогиб вала в его середине равен очевидно $\overline{OM}$.

Внешней силой, приложенной к диску, является реакция F

изогнутого вала; эта сила имеет направление от M к O и по величине пропорциональна прогибу $\overline{OM}$ (рис. 122):

$$\mathbf{F} = -c \cdot \overline{OM} = -c \mathbf{r}_m, \quad (\text{a})$$

коэффициент пропорциональности c зависит от упругих свойств, размеров и способа закрепления концов вала (см. стр. 61). Дифференциальные уравнения движения центра инерции диска будут:

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_c &= F_x = -cx_m, \\ M\ddot{y}_c &= F_y = -cy_m, \end{aligned} \quad (\text{б})$$

где M — масса диска.

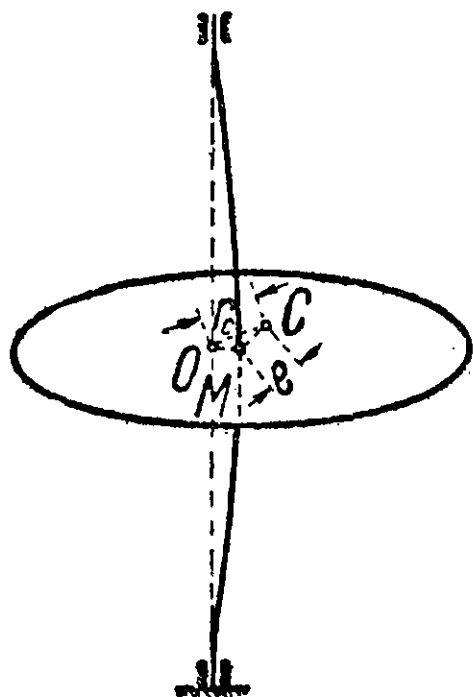


Рис. 121.

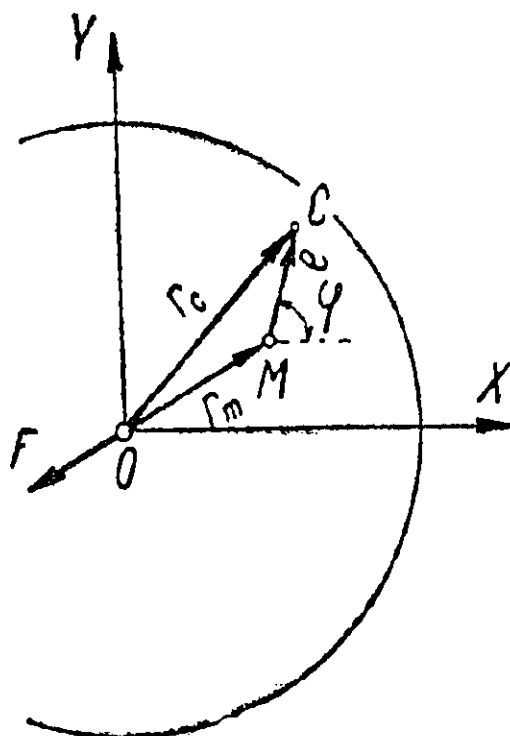


Рис. 122.

Замечая, что

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_c - \mathbf{e} \quad (\text{в})$$

или

$$x_m = x_c - e \cos \varphi \quad (\text{в}')$$

$$y_m = y_c - e \sin \varphi,$$

приведем ур-ния (б) к виду:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_c + k^2 x_c &= ek^2 \cos \varphi, \\ \ddot{y}_c + k^2 y_c &= ek^2 \sin \varphi, \end{aligned} \quad (\text{г})$$

где

$$k^2 = \frac{c}{M}; \quad (\text{д})$$

очевидно k есть частота свободных колебаний диска на валу (см. стр. 60)

Остается составить дифференциальное уравнение вращения диска. Означая через ρ радиус инерции его относительно оси, проходящей через центр тяжести, получим

$$M \rho^2 \ddot{\varphi} = L_z^{(c)}. \quad (\text{е})$$

Момент $L_z^{(c)}$ есть проекция на ось z момента $L^{(c)}$, т. е. векторного произведения:

$$L^{(c)} = -[e, F] = [e, cr_m] = [e, c(r_0 - e)] = c[e, r_0], \quad (\text{ж})$$

и, следовательно:

$$L_z^{(c)} = ce (y_0 \cos \varphi - x_0 \sin \varphi).$$

Ур-ние (е) принимает вид

$$\rho^2 \ddot{\varphi} = k^2 e (y_0 \cos \varphi - x_0 \sin \varphi). \quad (\text{з})$$

Точное интегрирование системы ур-ний (г) и (з) представляет значительные трудности. Ограничимся поэтому приближенным изучением движения диска, пренебрегая влиянием момента $L_z^{(c)}$ в ур-нии (ж); в виду малости e по сравнению с ρ можно предвидеть, что существенной ошибки мы таким образом не сделаем. Уравнение (ж) дает в таком случае

$$\rho^2 \ddot{\varphi} = 0, \quad (\text{и})$$

откуда следует, что

$$\varphi = \omega t + \varphi_0,$$

где ω — угловая скорость диска; константу φ_0 примем равной нулю.

Ур-ния (г) принимают вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 + k^2 x_0 &= k^2 e \cos \omega t \\ \ddot{y}_0 + k^2 y_0 &= k^2 e \sin \omega t \end{aligned} \quad (\text{к})$$

Общее решение этих уравнений состоит, как мы знаем (стр. 100) из члена, соответствующего свободным колебаниям:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1 \sin(kt + \alpha) \\ y_1 &= c_2 \sin(kt + \beta), \end{aligned} \quad (\text{л})$$

и члена, представляющего вынужденные колебания:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{k^2 e}{k^2 - \omega^2} \cos \omega t \\ y_2 &= \frac{k^2 e}{k^2 - \omega^2} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (\text{м})$$

Резонанс имеет место при

$$\boxed{\omega = \omega_{кр} = \sqrt{\frac{c}{M}} = k.} \quad (\text{н})$$

Значение ω , соответствующее резонансу, называется *критической угловой скоростью*. Мы видим, что критическая угловая скорость равна частоте свободных колебаний диска. Выражая критическую угловую скорость в оборотах в минуту, получим (стр. 60):

$$n_{кр} = \frac{300}{\sqrt{f_{ст}}} \text{об/мин}, \quad (\text{о})$$

где статический прогиб вала f_{st} должен быть выражен в сантиметрах. Обычно угловая скорость турбины превосходит в несколько раз критическую.

Наличие неизбежных сил сопротивления должно сказаться в быстром исчезновении свободных колебаний; при установившемся ходе турбины с угловой скоростью, значительно отличающейся от критической, свободные колебания никакого значения иметь не будут. Пренебрегая ими, получим $x_c = x_2$, $y_c = y_2$; так как $\omega t = \varphi$, то (м) можно представить в виде:

$$x_c = \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} e \cos \varphi, \quad y_c = \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} e \sin \varphi, \quad (\text{п})$$

или

$$r_c = \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} e, \quad r_c = \left| \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} \right| e = \left| \frac{\omega^2}{\omega_{кр}^2 - \omega^2} \right| e. \quad (\text{р})$$

Но в таком случае по ф-ле (ж):

$$L^{(e)} = c[e, r_c] = \frac{ck^2}{k^2 - \omega^2} [e, e] = 0,$$

и ур-ние (и) будет в точности удовлетворено. Это показывает, что только при наличии значительных свободных колебаний можно ожидать изменения угловой скорости диска и что точность нашего решения тем выше, чем с большим основанием мы можем пренебречь этими свободными колебаниями. Нормальный режим работы турбины с угловой скоростью, во много раз отличающейся от критической, описывается, таким образом, нашим решением с практически вполне достаточной точностью.

Обращаясь теперь к формуле (в), получим

$$r_m = e \frac{\omega^2}{k^2 - \omega^2}, \quad r_m = \left| \frac{\omega^2}{k^2 - \omega^2} \right| e.$$

$r_m = \vec{OM}$ и $r_c = \vec{OS}$ имеют, таким образом, одинаковое направление, т. е. три точки O , M , S лежат на одной прямой; эта прямая вращается с угловой скоростью ω вокруг точки O , т. е. центр тяжести диска, а также точка M описывают окружность.

При $\omega < \omega_{кр}$, $r_c > r_m$; точки O , S , M расположены, как указано, на рис. 123а; если же $\omega > \omega_{кр}$, то $r_c < r_m$ и эти точки располагаются как указано на рис. 123б. Центр тяжести диска приближается к точке O ; если к тому же $\omega > \omega_{кр} \sqrt{2}$, то $r_c < e$, т. е. при достаточно больших угловых скоростях (значительно превосходящих критическую) диск, посаженный на гибкий вал, автоматически центрируется: центр тяжести диска устанавливается на геометрической оси вращения вала. Пусть, например, $\omega = 5 \omega_{кр}$; по ф-ле (р) получим

$$r_c = \frac{e}{\left(\frac{\omega}{\omega_{кр}} \right)^2 - 1} = \frac{e}{24},$$

т. е. погрешность в центрировке диска уменьшилась в 24 раза.

Принимая угловую скорость турбины равной 15 000 об/мин, определим диаметр вала. Имеем

$$n_{st} = \frac{15000}{5} = \frac{300}{\sqrt{f_{st}}},$$

откуда

$$f_{st} = 0,01 \text{ см.}$$

Пусть вес диска $P = 30 \text{ кг}$, длина вала $l = 75 \text{ см}$, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$. Рассчитывая вал как балку, лежащую на двух опорах, имеем:

$$f_{st} = \frac{Pl^3}{48EI},$$

откуда момент инерции поперечного сечения I будет:

$$I = 0,0756 \text{ см}^4.$$

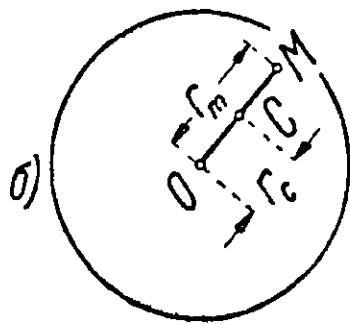
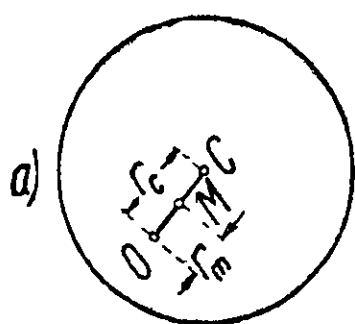


Рис. 123.

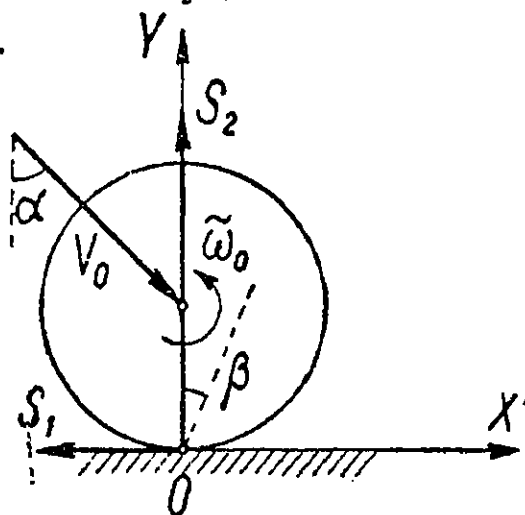


Рис. 124.

Диаметр вала, соответствующий такому моменту инерции ($I = \frac{\pi d^4}{64}$), будет

$$d = 1,11 \text{ см.}$$

Конечно, при пуске турбины в ход в момент перехода через критическую угловую скорость такой тонкий вал может получить значительные прогибы; поэтому вал снабжается специальными приспособлениями, делающими этот переход безопасным.

6. Удар в плоском движении. Шар радиуса a имеет угловую скорость $\tilde{\omega}_0$ вокруг оси, перпендикулярной плоскости траектории (параболы), описываемой центром шара. При падении на землю скорость центра шара равна по величине V_0 и направлена под углом α к вертикали. Определим движение шара после удара о землю (рис. 124).

Применяя теорему движения центра инерции, имеем:

$$M(v_x - v_{ox}) = -S_1 = \int_0^{\tau} F dt$$

$$M(v_y - v_{oy}) = S_2 = \int_0^{\tau} N dt$$

(a)

Здесь $-S_1$ и S_2 суть проекции на оси X и Y импульсов силы трения F и нормальной реакции N за время от начала удара $t=0$ до момента окончания его $t=\tau$; v_x и v_y — проекции скорости центра шара в момент $t=\tau$.

К предыдущим уравнениям присоединяем теперь уравнение, выражающее теорему моментов в относительном движении вокруг центра инерции:

$$M\rho^2(\bar{\omega} - \bar{\omega}_0) = -S_1 a, \quad (б)$$

причем $\rho^2 = \frac{2}{5} a^2$ — квадрат радиуса инерции шара относительно оси, проходящей через его центр.

Полученные три уравнения содержат пять неизвестных величин:

$$v_x, v_y, \bar{\omega}, S_1, S_2,$$

и для решения задачи необходимо задать еще два дополнительных условия, определяющих: 1) характер процесса удара (коэффициент восстановления k), 2) свойства поверхностей соударяющихся тел (коэффициент трения f).

1. Сделаем сначала простейшее предположение, что удар абсолютно неупругий ($k=0$) и тела абсолютно шероховатые ($f=\infty$). Согласно первому условию, нормальная к поверхности земли составляющая скорости v_y шара в момент окончания удара равна нулю:

$$v_y = 0, \quad (в)$$

и второе уравнение (а) определяет S_2 :

$$S_2 = -Mv_{oy} = Mv_0 \cos \alpha \quad (г)$$

Согласно второму условию, скорость точки соприкосновения A шара с землей в течение всего процесса удара остается равной нулю:

$$v_x + a\bar{\omega} = 0. \quad (д)$$

Из этого уравнения совместно с уравнением (б) и первым уравнением (а) определяем $\bar{\omega}, v_x, S_1$. Получим

$$v_x = \frac{a^2}{a^2 + \rho^2} (v_{0x} - \frac{\rho^2}{a} \bar{\omega}_0) = \frac{5}{7} v_0 \sin \alpha - \frac{2}{7} a \bar{\omega}_0,$$

$$\bar{\omega} = -\frac{5}{7} \frac{v_0}{a} \sin \alpha + \frac{2}{7} \bar{\omega}_0 \quad (е)$$

$$S_1 = \frac{2}{7} M (v_0 \sin \alpha + a \bar{\omega}_0). \quad (ж)$$

2. Предполагая попрежнему удар неупругим ($k=0$), зададим теперь коэффициент трения f шара о поверхность земли. Чтобы и в этом случае имело место предыдущее решение, необходимо, чтобы полученное значение для импульса силы трения качения S_1 не превосходило по величине импульса силы трения скольжения:

$$S_1 < f S_2. \quad (з)$$

Подставляя вместо S_1 и S_2 их значения (ж) и (г), найдем

$$f > \frac{2}{7} \left\{ \operatorname{tg} \alpha + \frac{a \bar{\omega}_0}{v_0 \cos \alpha} \right\}. \quad (\text{и})$$

При этом условии трение будет достаточно велико, чтобы предотвратить всякую возможность скольжения шара. Если же

$$f < \frac{2}{7} \left\{ \operatorname{tg} \alpha + \frac{a \bar{\omega}_0}{v_0 \cos \alpha} \right\}, \quad (\text{к})$$

то скольжение будет иметь место, и уравнением (д) уже пользоваться нельзя. Дополнительное уравнение для определения движения шара после удара мы получим теперь, выразив, что импульс силы трения при скольжении определяется законом Кулона:

$$S_1 = f S_2 = f M v_0 \cos \alpha. \quad (\text{л})$$

Далее из (а) и (б) найдем

$$v_x = v_0 \cos \alpha (\operatorname{tg} \alpha - f), \quad \bar{\omega} = \bar{\omega}_0 - \frac{5 f v_0 \cos \alpha}{2 a}. \quad (\text{м})$$

3. Теперь не трудно перейти к рассмотрению общего случая, когда заданы и коэффициент восстановления k при ударе и коэффициент трения f . По заданному коэффициенту восстановления находим сначала нормальную к поверхности земли составляющую скорости шара после удара:

$$v_y = k v_0 \cos \alpha. \quad (\text{в}')$$

Далее имеем

$$S_2 = M(1 + k) v_0 \cos \alpha. \quad (\text{г}')$$

При отсутствии скольжения, т. е. при

$$f > \frac{2}{7} \left\{ \operatorname{tg} \alpha + \frac{a \bar{\omega}_0}{v_0 \cos \alpha} \right\} \frac{1}{1 + k}, \quad (\text{и}')$$

проекция скорости центра шара на ось X и его угловая скорость в конце удара определяются ф-лами (е). Угол β отражения скорости шара от земли найдем по формуле

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1}{k} \left\{ \frac{5}{7} \operatorname{tg} \alpha - \frac{2}{7} \frac{a \bar{\omega}_0}{v_0 \cos \alpha} \right\}. \quad (\text{н})$$

Если же

$$f < \frac{2}{7} \left\{ \operatorname{tg} \alpha + \frac{a \bar{\omega}_0}{v_0 \cos \alpha} \right\} \frac{1}{1 + k}, \quad (\text{к}')$$

то, как и выше, найдем

$$S_1 = f M (1 + k) v_0 \cos \alpha, \quad (\text{л}')$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha [\operatorname{tg} \alpha - f(1 + k)]; \quad \omega = \omega_0 - (1 + k) \frac{5}{2} \frac{v_0 \cos \alpha}{a}. \quad (\text{м}')$$

Угол отражения шара в этом случае определяется формулой:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{k} \left\{ \operatorname{tg} \alpha - (1 + k) f \right\}. \quad (\text{н}')$$

Из полученных формул можно сделать парадоксальный на первый взгляд вывод: при достаточно большой начальной угловой скорости шар может отразиться после удара в прежнем направлении своего падения, т. е. вернуться назад — это будет иметь место при $\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha$. Примем $k=1$ (абсолютно упругий удар); в таком случае при достаточно большом коэффициенте трения мы можем воспользоваться ф-лой (н)

$$\operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{7} \operatorname{tg} \alpha - \frac{2}{7} \frac{a \bar{\omega}_0}{v_0 \cos \alpha},$$

откуда найдем

$$\bar{\omega}_0 = 6 \frac{v_0}{a} \sin \alpha.$$

Вопросы и упражнения.

1. Каток приводится в движение по горизонтальной плоскости при помощи нити, составляющей угол α с горизонтом. Натяжение нити постоянно и равно T ; вес катка Q , его радиус R , радиус шейки, на которую намотана нить, r , радиус инерции относительно оси, проходящей через центр тяжести, равен ρ . Определить: 1) минимальное значение коэффициента трения, при котором движение катка не сопровождается

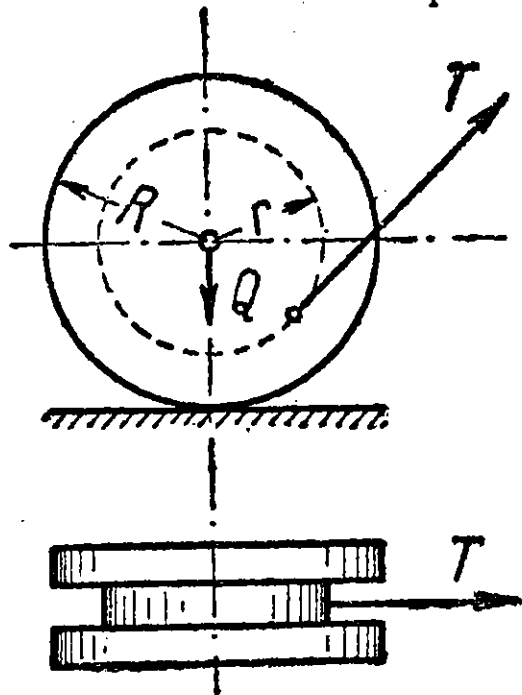


Рис. 125.

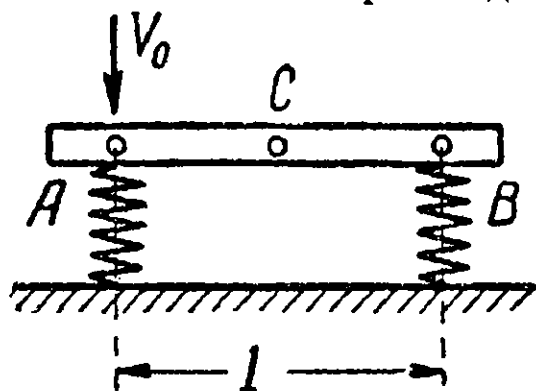


Рис. 126.

скольжением, 2) ускорение центра тяжести катка, предполагая, что скольжение отсутствует (рис. 125).

2. Платформа AB веса $W=400$ кг опирается в точках A и B на рессоры одинаковых жесткостей $c=2500$ кг/см. Центр тяжести C платформы находится в середине отрезка AB ; радиус инерции платформы относительно оси, проходящей через C , перпендикулярно рисунку $\rho=0,6$ м, $\overline{AB}=1,5$ м. Под действием внезапного толчка точка A приобрела скорость $v_0=50$ см/сек. Определить последующие колебания платформы, считая ее отклонения от положения равновесия весьма малыми и пренебрегая силами сопротивления (рис. 126).

3. Маятник Дедуи, употребляемый для определения ускорения поезда, состоит из круглого диска радиуса a , могущего катиться без скольжения по неподвижной горизонтальной плоскости

(рис. 127); центр тяжести диска C не совпадает с его геометрическим центром O , $\overline{OC} = e$; момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр тяжести, равен J_c . Определить период малых колебаний, которые начнет совершать маятник, будучи выведен из положения равновесия.

4. Дополнить исследование, проведенное в примере 4 § 28, рассмотрением: а) мертвых положений механизма $\varphi = 0, \pi$, б) случае, когда кривошип составляет прямой угол с шатуном ($\varphi = \arctg \frac{l}{r}$, $2\pi - \arctg \frac{l}{r}$), в) случае, когда кривошип составляет прямой угол с линией движения поршня ($\varphi = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$). Давление на 1 см²

площади поршня в этих положениях задано в таблице (четырехтактный двигатель):

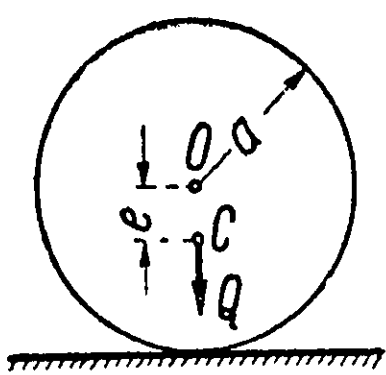


Рис. 127.

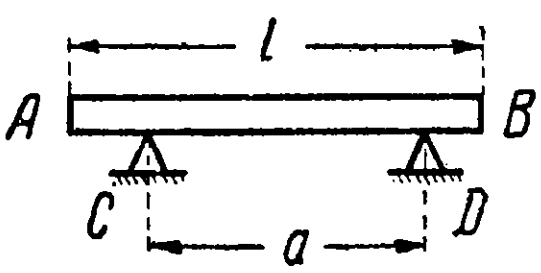


Рис. 128.

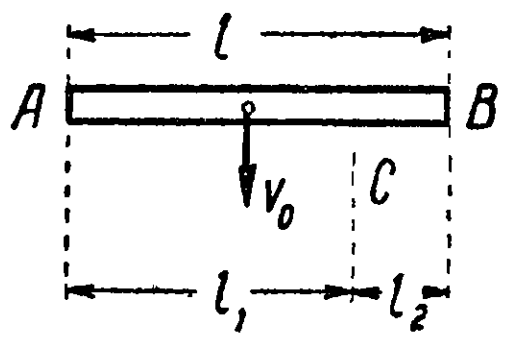


Рис. 129.

φ	$p \text{ кг/см}^2$
0	18
$\arctg \frac{l}{r}$	9
$\frac{\pi}{2}$	7
π	3
$\frac{3\pi}{2}$	1,2
$2\pi - \arctg \frac{l}{r}$	1,2
2π	1,2

5. Однородная балка $\overline{AB}$ длины l и веса G покоится на двух опорах C и D , расстояние между которыми равно a . Опора C внезапно убирается. Определить изменение давления на опору D (рис. 128).

6. Однородный брусок веса G длины $\overline{AB} = l$, падающий поступательно, встречает неподвижное препятствие C . Скорость бруска до удара равна v_0 ; определить скорость центра тяжести бруска и его угловую скорость после удара. Коэффициент восстановления $= k$ (рис. 129).

Основания теории гироскопических явлений

Гироскопические явления, изучению которых посвящено восьмое задание, обнаруживаются во всех тех случаях, когда ось быстро вращающегося тела в свою очередь поворачивается. В таких условиях будет, например, ось колеса вагона или автомобиля на закруглении пути или вал гребного винта парохода или пропеллера аэроплана при килевой качке или перемене курса; снаряд, выпущенный современным орудием, также не только перемещается поступательно, но и вращается вокруг своей оси, причем последняя в свою очередь не остается себе параллельной, а меняет свое направление. Все эти вращательные движения, осложненные поворотом оси вращающегося тела, связаны с весьма важными и интересными динамическими, так называемыми гироскопическими, явлениями, и теорема моментов представляет простейший метод их описания.

При изучении элементарной теории гироскопических явлений учащийся, разбирая примеры, должен, не пользуясь готовыми формулами, всякий раз применять теорему Р е з а л я, определяя скорость конца главного момента количества движения. Последний надо откладывать согласно элементарной теории вдоль оси вращения тела от центра тяжести его или от неподвижной точки сообразно тому, относительно какой из этих двух точек вычислены главный момент количества движения и момент внешних сил. Примеры на применение элементарной теории гироскопического момента имеют преимущественно качественный характер. Более подробная количественная теория ряда вопросов, затронутых у нас, будет развита на основе теории колебаний системы с несколькими степенями свободы в следующей части курса. Пока же учащийся должен поставить своей целью усвоить эту качественную сторону дела и привыкнуть к неожиданным на первый взгляд явлениям, сопровождающим всякий поворот оси быстро вращающегося тела. §§ 30—32 содержат более сложный теоретический материал и требуют от учащегося известного пространственного воображения. Для лучшего усвоения можно рекомендовать на ряде примеров, уже разобранных раньше, разыскать Эйлера углы и проекции угловой скорости.

§ 29. Элементарная теория гироскопических явлений.

В § 21 выведены формулы для проекций на координатные оси главного момента количества движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси. Предполагая, что ось вращения совпадает с осью Z и называя через ω вектор угловой скорости, направленный по этой оси, имеем:

$$K_x = -J_{xz}\omega_z, \quad K_y = -J_{yz}\omega_z, \quad K_z = J\omega_z \quad (1)$$

где J — момент инерции тела относительно оси вращения, J_{xz} и J_{yz} — центробежные моменты.

Предположим теперь, что ось вращения тела является его главной центральной осью инерции, в таком случае

$$J_{xz} = J_{yz} = 0$$

и, следовательно:

$$K = J\omega. \quad (2)$$

Точно такую же формулу мы очевидно будем иметь в том случае, когда ось вращения перемещается поступательно, только под K нужно подразумевать в этом случае главный момент количества движения относительно центра инерции тела (обозначаемый нами через K').

Для дальнейшего важно точно разграничить три различных понятия. Мы будем рассматривать однородное твердое тело, имеющее симметрию вращения вокруг некоторой оси OO_1 (рис. 130), — эта ось будет в таком случае главной центральной осью инерции тела. Будем называть ее *материальной осью* тела. Если эта материальная ось неподвижна и телу сообщена угловая скорость ω вокруг нее, то материальная ось станет *осью угловой скорости вращения тела*: ω будет направлен вдоль O_1O , то же направление будет иметь и вектор $K = J\omega$. Итак, в случае неподвижности материальной оси (или при поступательном движении ее) вдоль OO_1 совпадают три направления: а) материальная ось тела, б) ось угловой скорости вращения тела (вектор ω), в) главный момент количества движения тела K .

Предположим теперь, что тело имеет весьма большую угловую скорость ω_1 вокруг материальной оси, а этой последней в свою очередь сообщена угловая скорость ω_2 . Как мы знаем из Кинематики (ч. 1, стр. 267), движение тела будет таково, как если бы оно имело угловую скорость

$$\omega = \omega_1 + \omega_2.$$

Ось угловой скорости вращения тела, т. е. в этом случае вектор ω , уже не будет совпадать с материальной осью. Точно так же отличное от этих двух направлений будет иметь и вектор K : он не будет направлен вдоль ω , так как последний уже не представляет оси материальной симметрии; точно так же он не совпадет и с материальной осью, так как последняя не неподвижна. Если однако ω_2 весьма мала по сравнению с ω_1 , то отличие этих трех направлений весьма незначительно и при приближенном изучении явления им можно пренебречь. Это и делается в *элементарной* теории гироскопических явлений, которую мы здесь должны изучить. Основные допущения, на которых основана эта теория, заключаются в том, что: а) главный момент количества движения тела K и при наличии угловой скорости ω_2 , весьма малой по сравнению с ω_1 , остается направленным *по материальной оси тела*, б) при вычислении K можно пренебречь угловой скоростью ω_2 ; мы считаем таким образом, что

$$K = J\omega_1, \quad (3)$$

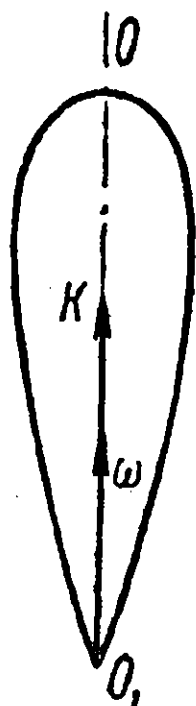


Рис. 130.

т. е. ф-ла (2), выведенная в предположении неподвижности материальной оси, принимается в нашей элементарной теории и при наличии малой по сравнению с ω_1 угловой скорости ω_2 .

Итак, пусть тело приведено в весьма быстрое вращение с угловой скоростью ω_1 вокруг своей материальной оси симметрии, причем последняя в свою очередь вращается с небольшой угловой скоростью ω_2 . Вектор угловой скорости ω_2 можно считать при этом проходящим через центр инерции тела. Действительно, построив в центре инерции две равные по величине и противоположно направленные угловые скорости $\omega'_2 = \omega_2$ и $\omega''_2 = -\omega_2$ (рис. 131), мы можем заменить (часть 1, стр. 263) пару вращений (ω_2, ω''_2) поступательным перемещением, которое при применении теоремы моментов в относительном движении по отношению к центру инерции нас интересовать не будет. Вектор $\omega_2 = \omega'_2$ оказывается, таким образом, перенесенным в центр инерции тела C .

Главный момент относительно центра инерции внешних сил, приложенных к телу, обозначим через L^c , причем составляющие его: параллельную материальной оси тела и перпендикулярную к ней, назовем соответственно через L_1^c и L_0^c :

$$L^c = L_1^c + L_0^c. \quad (4)$$

Чтобы применить теперь теорему Резаля к относительному движению тела по отношению к центру инерции, остается определить скорость u конца вектора главного момента количества движения $K = J\omega_1$. Вспоминая, что в нашей элементарной теории вектор K всегда остается направленным вдоль материальной оси, и отложив его от центра инерции C , мы можем представить себе движение его конца α складывающимся из движения вдоль материальной оси и переносного движения вместе с последней. Скорость u_1 в первом движении будет очевидно равна $J \frac{d\omega_1}{dt}$:

$$u_1 = J \frac{d\omega_1}{dt}, \quad (5a)$$

что касается скорости u_0 второго движения, то последняя есть очевидно не что иное, как вращательная скорость точки α во вращении ω_2 . Положение точки α определяется при этом вектор-радиусом $J\omega_1 = \vec{C\alpha}$, и известная формула кинематики $v = [\omega, r]$ в применении к нашему случаю дает

$$u_0 = [\omega_2, J\omega_1] = J[\omega_2, \omega_1]. \quad (5b)$$

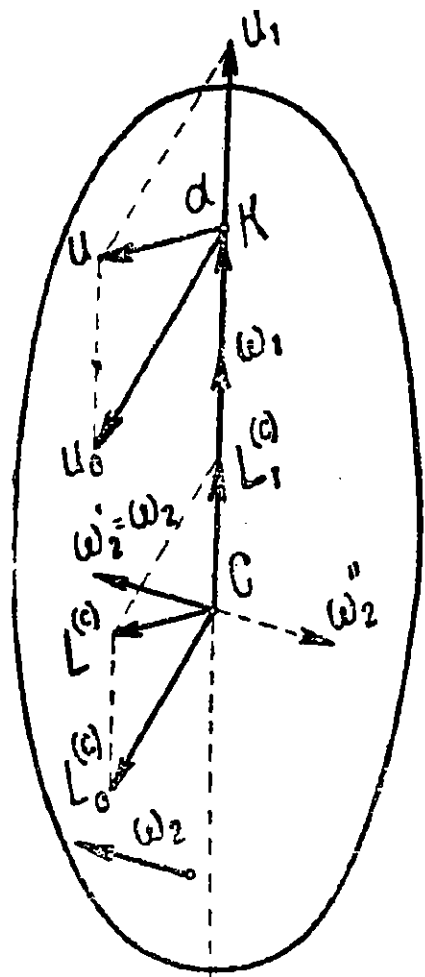


Рис. 131.

Итак, имеем

$$u = u_1 + u_0 = J \frac{d\omega_1}{dt} + J[\omega_2, \omega_1] \quad (6)$$

и, согласно теореме Резаля:

$$u = L^{(c)},$$

получим

$$J \frac{d\omega_1}{dt} + J[\omega_2, \omega_1] = L_1^{(c)} + L_0^{(c)},$$

что можно представить в виде:

$$J \frac{d\omega_1}{dt} - L_1^{(c)} = L_0^{(c)} - J[\omega_2, \omega_1]. \quad (7)$$

Левая часть этого уравнения представляет вектор, направленный вдоль материальной оси, а правая — ей перпендикулярный, следовательно геометрическое равенство (7) возможно лишь в том случае, когда и правая и левая части его равны нулю порознь. Получаем

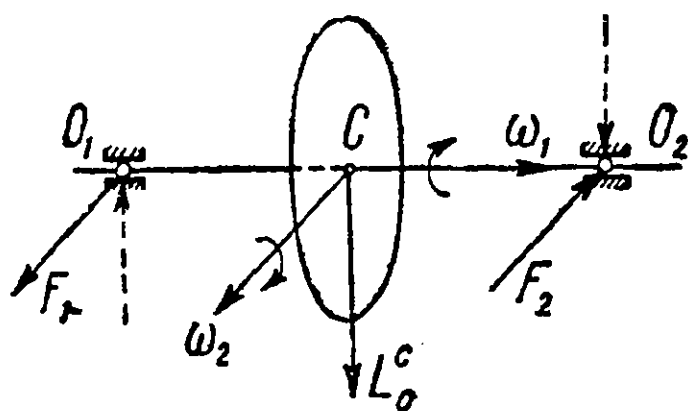


Рис. 132.

$$J \frac{d\omega_1}{dt} = L_1^{(c)} \quad (8)$$

$$J[\omega_2, \omega_1] = L_0^{(c)} \quad (9)$$

Ф-ла (8) есть очевидно уже знакомое нам уравнение вращения тела; она показывает, что наличие момента $L_1^{(c)}$, направленного по материальной оси, вызывает угловое ускорение $\frac{d\omega_1}{dt}$. В приложениях мы по большей части будем иметь $\omega_1 = \text{const}$, т. е. $L_1^{(c)} = 0$ и уравнение (8) нас интересоваться не будет.

Гораздо интереснее для нас сейчас ф-ла (9), так как изучение ее приведет нас к существенно новым результатам, которые к тому же кажутся парадоксальными и не вяжутся с нашими привычными представлениями.

Рассмотрим простой пример. Приведем колесо в быстрое вращение вокруг его оси O_1O_2 (рис. 132) и, держа ось руками в точках O_1 и O_2 , повернем ее в указанном стрелкой направлении. Казалось бы на первый взгляд, что для этого к оси в точках O_1 и O_2 нужно приложить усилия, направления которых на рисунке указаны пунктиром. Это имело бы место, конечно, если бы колесо не вращалось вокруг своей оси; если же это вращение есть, то такое представление, основанное на нашей привычке мыслить статически, будет неверным. Действительно ω_2 , по условию, перпендикулярно рисунку и, следовательно, согласно ф-ле (9), момент внешних сил $L_0^{(c)}$, которые должны быть приложены к колесу, лежит в плоскости рисунка. Усилия рук F_1 и F_2 , создающие этот

момент, должны быть, таким образом, перпендикулярны рисунку. Итак, желая повернуть ось вращающегося колеса, мы должны приложить к ней усилия, *перпендикулярные ее перемещению*.

Рассматриваемый эффект появляется при всяком изменении направления оси быстро вращающегося тела, иными словами, при перемещении оси появляются реакции подшипников, перпендикулярные этому перемещению; давления на подшипники будут, конечно, равны по величине и направлены противоположно этим реакциям. В лаборатории теоретической механики Физико-механического института это явление демонстрируется на приборе, фотография которого приведена на рис. 133. Диск приводится в быстрое вращение ω_1 (до 2000 об/мин) мотором, причем столику, на котором расположены подшипники оси диска, передается при помощи ремня от другого мотора вращение ω_2 (до 60 об/мин) вокруг вертикальной оси. Давление на один из подшипников, опирающийся на пружину,

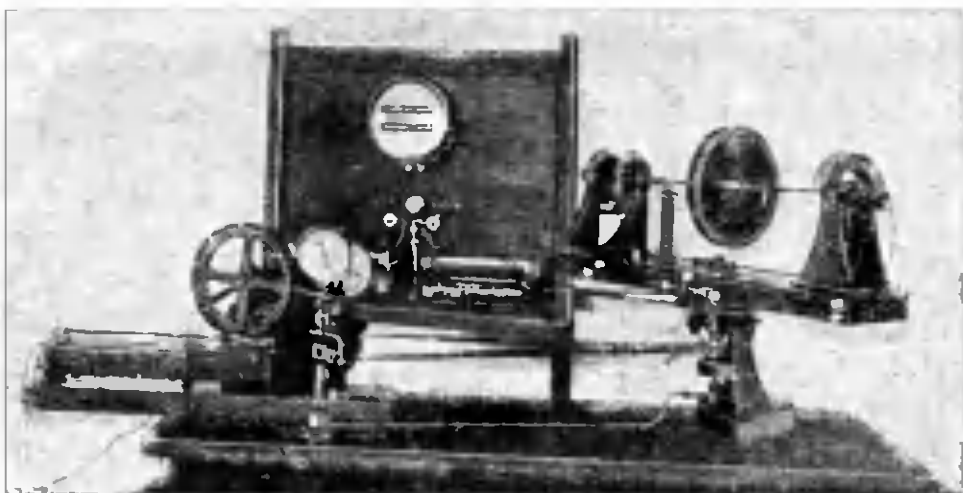


Рис. 133. Установка служащая для демонстрации явления критических скоростей и гироскопического момента. (Кабинет механики Физико-механического института).

жину, может быть измерено манометром. Если столик не вращается то стрелка манометра показывает только статическое давление на подшипник. При вращении же столика пружина быстро сжимается, и показание манометра возрастает. Тахометры, служащие для измерения угловых скоростей диска и столика, позволяют количественно проверить ф-лу (9).

Рассмотрим другой пример. Сообщим симметричному однородному телу вращения (волчку или *гироскопу*) быстрое вращение вокруг его оси. Допустим, что эта ось, будучи вертикальна, опирается на гладкую полусферическую опору (рис. 134). Если бы гироскоп не вращался, то мы имели бы неустойчивое положение равновесия и от малейшего неизбежного толчка он бы немедленно опрокинулся. Быстрое же вращение сообщает гироскопу свойство устойчивости. В самом деле, дадим оси толчок в направлении, перпендикулярном рисунку, приложив к нему в течение весьма малого промежутка времени силу F . Последствием этого, если оставаться в рамках элементарной теории, будет перемещение материальной оси тела (т. е. вектора K), на некоторый угол α в направлении не силы F , как этого можно было бы ожидать, а ее момента L ,

относительно неподвижной точки O , т. е. в направлении, перпендикулярном F (новое положение оси указано пунктиром). Это следует из теоремы Резаля, согласно которой скорость конца вектора K геометрически равна L_1 .

Согласно нашим привычным представлениям, ось гироскопа, немного отклонившись от вертикали, должна продолжать далее свое падение, после того как действие силы F прекратится. Но это представление неверно. Действительно, если отвлечься от действия момента силы тяжести, появляющегося при отклонении оси от вертикали, то с прекращением действия силы исчезнет и ее момент L и вектор K , а следовательно, и материальная ось гироскопа дальше отклоняться не будет. Таким образом, давая быстро вращающемуся гироскопу ряд толчков, мы не вызовем его падения, а откло-

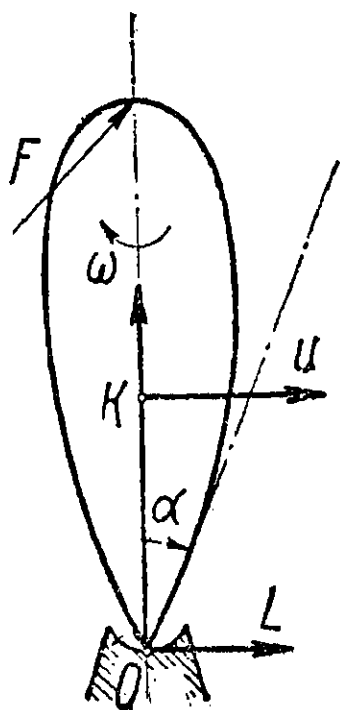


Рис. 134

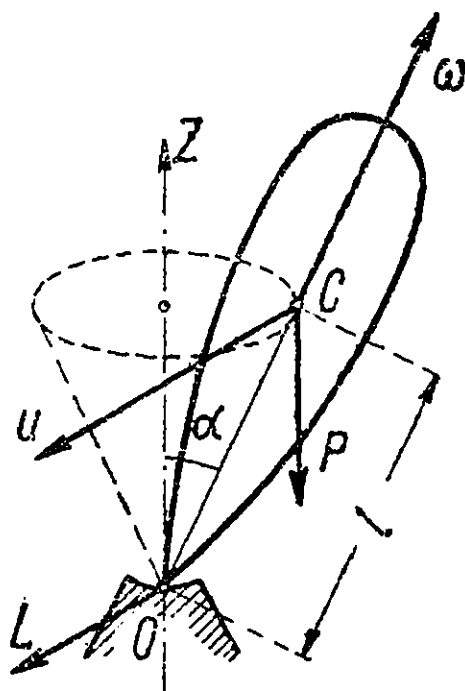


Рис. 135.

ним его ось в перпендикулярном толчкам направлении на некоторый угол α . Учтем теперь действие момента силы веса P , относительно точки опоры (рис. 135). Наличие этого момента вызывает перемещение конца вектора K . Иными словами, в пределах точности нашей элементарной теории ось гироскопа будет перемещаться в направлении, перпендикулярном силе веса, угол α остается при этом постоянным и ось описывает коническую поверхность, вращаясь с угловой скоростью ω_2 вокруг вертикали, проходящей через точку опоры O . Это движение называется *прецессией оси*, а угловая скорость ω_2 — угловой скоростью *прецессии*. Величина этой угловой скорости легко найдется из ф-лы (9). Имеем

$$L = Pl \sin \alpha,$$

где P — вес гироскопа, $l = \overline{OC}$. Далее имеем

$$|J[\omega_2, \omega_1]| = J \omega_2 \omega_1 \sin \alpha,$$

и ф-ла (9) дает

$$\omega_2 = \frac{Pl}{J\omega_1}.$$

В приложениях внешними силами, действующими на тело, по большей частью являются сила веса и реакции опор. Так как момент силы веса относительно центра тяжести C равен нулю, то вектор $L_0^{(c)}$, фигурирующий в ф-ле (9), является моментом этих реакций. Обратно, к опорам со стороны вращающегося тела будет приложен момент $L_g^{(c)}$, по величине равный $L_0^{(c)}$ и направленный ему противоположно. Согласно (9), получим

$$L_g^{(c)} = -L_0^{(c)} = J[\omega_1, \omega_2]. \quad (10)$$

Момент $L_g^{(c)}$ называется гироскопическим моментом.

Примеры и упражнения.

1. Гироскопические явления в парходах и воздушных судах. Современное судно имеет весьма большое число вращающихся частей. Сюда относятся маховики двигателей, гребные винты с их валами, роторы динамомашин, гребные колеса колесных парходов, вентиляторы и т. д. Оси вращения располагаются при этом или по продольной, или по поперечной оси корпуса судна, или вертикально. При своем движении судно, наряду с поступательным перемещением, которое нас здесь не интересует, может совершать колебания вокруг продольной оси (боковая качка) или поперечной оси (килевая качка) и может поворачиваться при маневрах вокруг вертикали. Все эти движения, будучи связаны с поворотами осей вращающихся тел, установленных на судне, сопровождаются гироскопическими явлениями; возникающие гироскопические моменты вызывают изгиб валов вращающихся частей и передаются их подшипникам.

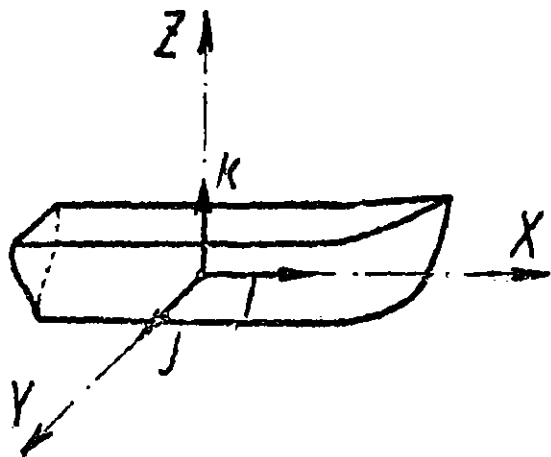


Рис. 136.

Возьмем левую систему координатных осей X, Y, Z , направив их соответственно по продольной оси от кормы к носу, по поперечной оси и вертикально вверх (рис. 136). Если, например, ось вращения тела расположена вдоль судна и имеется килевая качка, то в ф-ле (9) нужно положить:

$$\omega_1 = \bar{\omega}_1 i, \quad \omega_2 = \bar{\omega}_2 j,$$

и для гироскопического момента L_g получим выражение

$$L_g = J\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2[i, j] = kJ\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2,$$

т. е. в рассматриваемом случае этот момент, передаваемый подшипникам, направлен вертикально вверх или вниз сообразно тому, будет ли $\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2 > 0$ или $\bar{\omega}_1\bar{\omega}_2 < 0$; величина гироскопического момента будет $J\omega_1\omega_2$. На вращающийся вал будет действовать при

этом изгибающий момент, по величине равный L_g и направленный ему противоположно.

Указанным способом легко составить таблицу гироскопических моментов при всевозможных комбинациях направлений осей вращающегося тела и колебаний корпуса.

Гироскопические моменты (L_g) при качке и поворотах судна

Расположение оси вращающегося тела	Боковая качка $\omega_2 = \tilde{\omega}_2 i$	Килевая качка $\omega_2 = \tilde{\omega}_2 j$	Поворот судна $\omega_2 = \tilde{\omega}_2 k$
вдоль судна $\omega_1 = \tilde{\omega}_1 i$	0	$k J \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2$	$-j J \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2$
поперек судна $\omega_1 = \tilde{\omega}_1 j$	$-k J \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2$	0	$i J \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2$
вертикально $\omega_1 = \tilde{\omega}_1 k$	$j J \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2$	$-i J \tilde{\omega}_1 \tilde{\omega}_2$	0

В качестве примера подсчитаем гироскопический момент от турбины, ось которой расположена параллельно продольной оси корпуса судна, при наличии килевой качки амплитуды β_0 и периода T . Считая, что угол поворота корпуса β изменяется по гармоническому закону, имеем

$$\beta = \beta_0 \sin \frac{2\pi}{T} t,$$

откуда

$$\tilde{\omega}_2 = \dot{\beta} = \frac{2\pi\beta_0}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t,$$

и максимальное значение величины гироскопического момента будет

$$(L_g)_{\max} = \frac{2\pi\beta_0}{T} J \omega_1.$$

Если через l обозначить расстояние между подшипниками, то максимальные давления $(N_1)_{\max}$, $(N_2)_{\max}$, передаваемые им (равные и направленные противоположно), определяются из формулы:

$$(N_1)_{\max} = (N_2)_{\max} = \frac{(L_g)_{\max}}{l} = \frac{2\pi\beta_0}{T} \frac{J \omega_1}{l}.$$

Примем вес ротора турбины $G = 2.500$ кг, его радиус инерции $\rho = 0,9$ м, число оборотов в минуту $n = 1200$ об/мин., $l = 1,9$ м, $\beta_0 = 6^\circ = \frac{\pi}{30}$ радианов, $T = 6$ сек. Получим

$$(N_1)_{\max} = (N_2)_{\max} = \frac{2\pi \cdot \pi \cdot 2500 \cdot 0,9^2 \cdot 1200 \pi}{30 \cdot 9,81 \cdot 30 \cdot 6 \cdot 1,9} \approx 1500 \text{ кг.}$$

В рассмотренном примере гироскопические давления на подшипники превосходят, таким образом, статические от веса ротора.

В колесных судах гироскопические моменты от гребных колес, несмотря на малую угловую скорость ω_1 , могут достигать значительной величины вследствие весьма большого момента инерции колес. Пусть, например, судно совершает поворот на 180° в течение 5 мин. Вес гребных колес примем равным 60 тоннам, их радиус инерции — 2,4 м, число оборотов $n = 60$ об/мин. Получим

$$L_g \approx 4600 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

Этот момент может оказать некоторое влияние только на валы вращающихся частей и их подшипники. Влиянием же его на движение самого судна, вследствие значительной устойчивости последнего и громадного по сравнению с вращающимися частями веса, можно вполне пренебречь. Иную картину мы имеем в воздушных судах. Веса вращающихся частей (пропеллер, ротативный мотор) составляют здесь уже ваметную долю всего веса конструкции; точно также и устойчивость судна невелика.

Поворот оси мотора в какой-либо плоскости вызовет в перпендикулярной плоскости гироскопическую пару сил, передаваемую через подшипники корпусу самолета. Так как ось направлена вдоль корпуса, то эта пара будет создавать килевую качку, поднимая и опуская судно при поворотах самолета в горизонтальной плоскости (виражах). Этим объясняют случаи аварий, имевших место при резких виражах, когда создавался столь большой крен на нос, что угол атаки делался отрицательным и самолет падал на землю прежде, чем его успевали выпрямить. В конструкциях, снабженных двумя винтами, вращающимися в противоположные стороны, гироскопические моменты, передаваемые корпусу самолета, уравниваются. Практика показывает, что эта конструкция (Райт) допускает более резкие виражи, не проявляя при этом опасной тенденции к килевой качке.

Численный пример дает возможность оценить величины моментов, которым подвергается самолет. Скорости самолета будем считать заключенными в пределах от 20 до 40 м/сек, а диаметры круга виражей в пределах от 200 до 50 м. Это дает величины угловой скорости ω_2 от $\frac{20}{100} = 0,2$ до $\frac{40}{25} = 1,6 \frac{1}{\text{сек}}$. Моменты инерции пропеллера и вращающихся частей ротативного мотора (Гном) примем соответственно равными 0,45 и 0,35 кг·м·сек², угловая скорость мотора $\omega_1 = 1200 \text{ об/мин} = 40\pi \frac{1}{\text{сек}}$. При этих данных найдем, что гироскопический момент будет заключаться в пределах от

$$(0,45 + 0,35) 40\pi \cdot 0,2 \approx 20 \text{ кг} \cdot \text{м}$$

до

$$(0,45 + 0,35) \cdot 40\pi \cdot 1,6 \approx 160 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

2. Бегуны. Об устройстве бегунов и их назначении мы уже говорили в первой части курса (стр. 270). Здесь мы займемся подсчетом давления, оказываемого бегуном на платформу.

По заданной угловой скорости ω_2 вала находим угловую скорость бегуна вокруг его оси ОС. Считая, что мгновенная ось

бегуна проходит через середину P линии соприкосновения его с платформой, получим при указанных на рис. 137 обозначениях

$$\omega_2 l - \omega_1 r = 0, \quad \omega_1 = \omega_2 \frac{l}{r}.$$

Направление ω_1 указано на рис. 137. Применим теперь к движению бегуна теорему Резаля. Принимая, что момент количества движения бегуна K относительно неподвижной точки O направлен вдоль оси бегуна и, откладывая вектор $K = J\omega_1$ от неподвижной точки, найдем скорость u конца этого вектора:

$$u = J[\omega_2, \omega_1].$$

Внешними силами, приложенными к бегуну, являются его вес G , нормальная реакция платформы N , сила трения и реакция неподвижной точки O , причем момент последней относительно этой точки будет равен нулю. Сила трения дает момент, направленный вертикально, и нас не интересует. Получим

$$J\omega_2\omega_1 = (N - G)l.$$

Обозначая радиус инерции бегуна относительно его оси через ρ и заменяя ω_1 его значением, найдем

$$N = G \left(1 + \frac{\rho^2 \omega_2^2}{gr} \right).$$

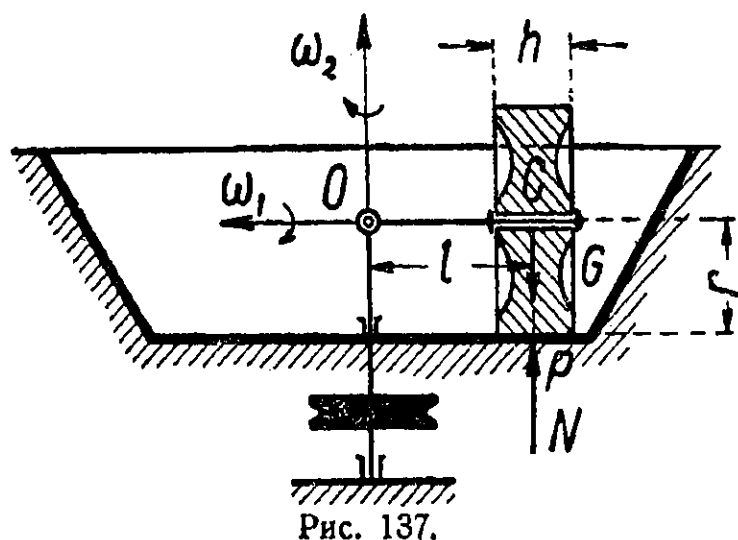


Рис. 137.

Полагая $r = 0,45$ м, $\rho = 0,4$ м, $\omega_2 = 60$ об/мин, получим

$$N = G \left(1 + \frac{0,4^2 \cdot 4\pi^2}{0,45 \cdot 9,81} \right) \approx 2,24 G.$$

Давление бегуна на платформу, происходящее вследствие гироскопического эффекта, превосходит, таким образом, давление от собственного веса.

Учащийся может выразить сомнение в верности нашего решения, так как момент количества движения тела, как мы подчеркивали выше, можно считать направленным по материальной оси лишь в том случае, когда ω_1 значительно превосходит по величине ω_2 ; в данном же случае это не имеет места. Тем не менее наше решение дает вполне точный результат, так как формула для гироскопического момента

$$L_g = J[\omega_1, \omega_2],$$

будучи вообще, как мы отметили, приближенной, является совершенно точной в случае перпендикулярности осей вращений ω_1 и ω_2 . Это будет доказано ниже (§ 32).

Отметим также, что разобранный случай, когда угол между осями равен 90° , не является наиболее благоприятным в смысле

повышения давления бегуна на основание. Схема рис. 137, когда бегун перемещается внутри конической поверхности, позволяет получить при тех же прочих условиях более высокое давление. Однако расчет по нашей формуле уже не дает в этом случае удовлетворительного результата, так как ω_1 лишь в небольшое число раз больше ω_2 , а оси вращений ω_1 и ω_2 не перпендикулярны друг другу. Поэтому расчетом бегунов в общем случае мы займемся после (§ 32).

3. Гироскоп Фуко. Прибор (гироскоп), которым Фуко производил свои известные опыты (1852 г.), состоит из маховика, ось которого AA_1 укреплена в круглой раме ABA_1B_1 , которая может вращаться вокруг горизонтальной оси BB_1 (см. фотографию на рис. 138). Рама BCB_1D , которая несет подшипники рамы ABA_1B_1 , в свою очередь может вращаться вокруг вертикальной оси CD . Три оси AA_1 , BB_1 и CD в точности пересекаются в центре тяжести маховика. Маховику сообщается весьма большая угловая скорость (до 20 000 об/мин).

Будем считать, что трение в подшипниках и сопротивление воздуха сведены к минимуму, так что ими можно пренебречь. Точно так же пренебрегаем массой колец по сравнению с массой маховика.

Если закрепить раму ABA_1B_1 в горизонтальном положении и этим отнять у нее способность вращаться вокруг горизонтальной оси то ось AA_1 вследствие вращения земли установится по меридиану места; если же отнять способность вращаться у рамы BCB_1D вокруг вертикали и установить ось BB_1 перпендикулярно мери-

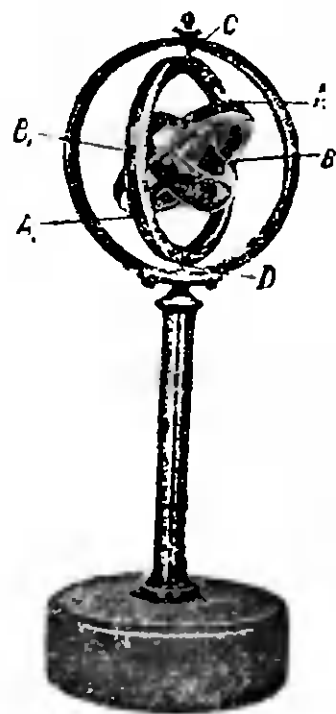


Рис. 138.

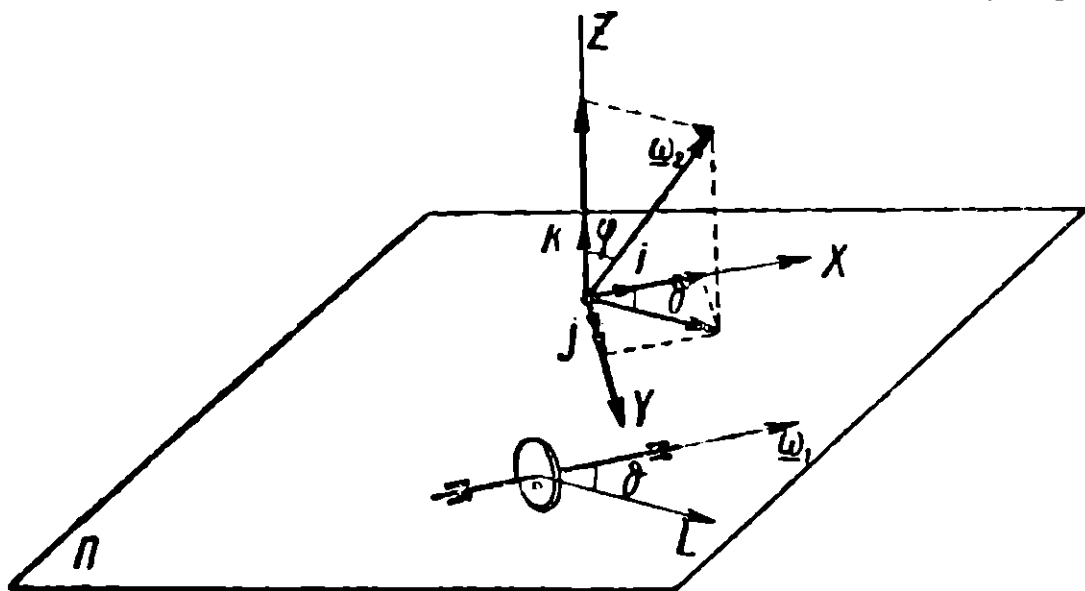


Рис. 139.

диану, то ось гироскопа AA_1 , повернувшись вместе с рамой ABA_1B_1 , укажет широту места. Для объяснения этих явлений заметим, что и в первом и во втором случае ось гироскопа может вращаться, не покидая определенной плоскости Π . В первом случае, когда закреплена рама ABA_1B_1 , плоскостью Π является горизон-

тальная плоскость этой рамы; во втором (при закрепленной раме $CBDB_1$) плоскостью II служит плоскость меридиана. Задача приводится, таким образом, к следующей схеме (рис. 139): плоскость II вращается с угловой скоростью, задаваемой вектором ω_2 (в опытах Фуко роль ω_2 играет вращение земли) в то время как ось маховика гироскопа, вращающегося с угловой скоростью ω_1 , постоянно остается в этой плоскости. Определим при этих условиях движение оси. При этом будем считать, что ω_1 весьма велико по сравнению с ω_2 , так что момент количества движения K можно принять равным $J_x \omega_1$, где J_x — момент инерции гироскопа относительно его оси.

Гироскопический момент определится формулой:

$$L_g = J_x [\omega_1, \omega_2].$$

Замечая, что

$$\omega_1 = i\omega_1, \quad \omega_2 = i\omega_2 \sin \varphi \cos \delta + j\omega_2 \sin \varphi \sin \delta + k\omega_2 \cos \varphi,$$

получим

$$L_g = kJ_x \omega_1 \omega_2 \sin \varphi \sin \delta - jJ_x \omega_1 \omega_2 \cos \varphi.$$

По условию ось гироскопа должна оставаться в плоскости II: поэтому составляющая гироскопического момента по оси Y , вызывая давления на подшипники оси гироскопа, не влияет на его движение (если пренебречь трением). Остается составляющая гироскопического момента по оси Z , вызывающая поворот плоскости II вместе с гироскопом вокруг оси Z ; при этом ось гироскопа стремится стать вдоль проекции вектора ω_2 на плоскость II. Если момент инерции системы относительно оси Z обозначить через J_z , то дифференциальное уравнение движения ее представится в виде

$$-J_z \frac{d^2 \delta}{dt^2} = J_x \omega_1 \omega_2 \sin \varphi \sin \delta$$

(при движении угол δ уменьшается и угловая скорость будет $-\frac{d\delta}{dt}$).

Ограничиваясь малыми колебаниями, получим

$$\frac{d^2 \delta}{dt^2} + \frac{J_x \omega_1 \omega_2 \sin \varphi}{J_z} \delta = 0.$$

Полученное уравнение имеет вид уравнения колебаний математического маятника. Иными словами, ось гироскопа, подобно маятнику, будет колебаться около среднего положения OL , определяемого значением $\delta = 0$; период малых колебаний (стр. 157) будет

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{J_x \omega_1 \omega_2 \sin \varphi}}.$$

Подобно тому, как маятник, совершив ряд колебаний, останавливается в положении равновесия, так и ось гироскопа вследствие неизбежных сопротивлений в конце концов остановится и займет положение OL , при котором момент сил $-kJ_x \omega_1 \omega_2 \sin \varphi \sin \delta$, стремящихся ее повернуть в плоскости II, обратится в нуль.

Применим эти результаты к случаю опытов Фуко.

а) Плоскостью Π является горизонтальная плоскость рамы ABA_1B_1 , а роль угла $\frac{\pi}{2} - \varphi$ играет широта места λ (рис. 140). Ось гироскопа устанавливается вдоль проекции вектора ω_2 (угловой скорости земли) на горизонтальную плоскость Π , т. е. по меридиану. Период колебаний оси на экваторе ($\cos \lambda = 1$) будет

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{J_x \omega_1 \omega_2 \cos \lambda}} = 2\pi \sqrt{\frac{1}{2\omega_1 \omega_2}},$$

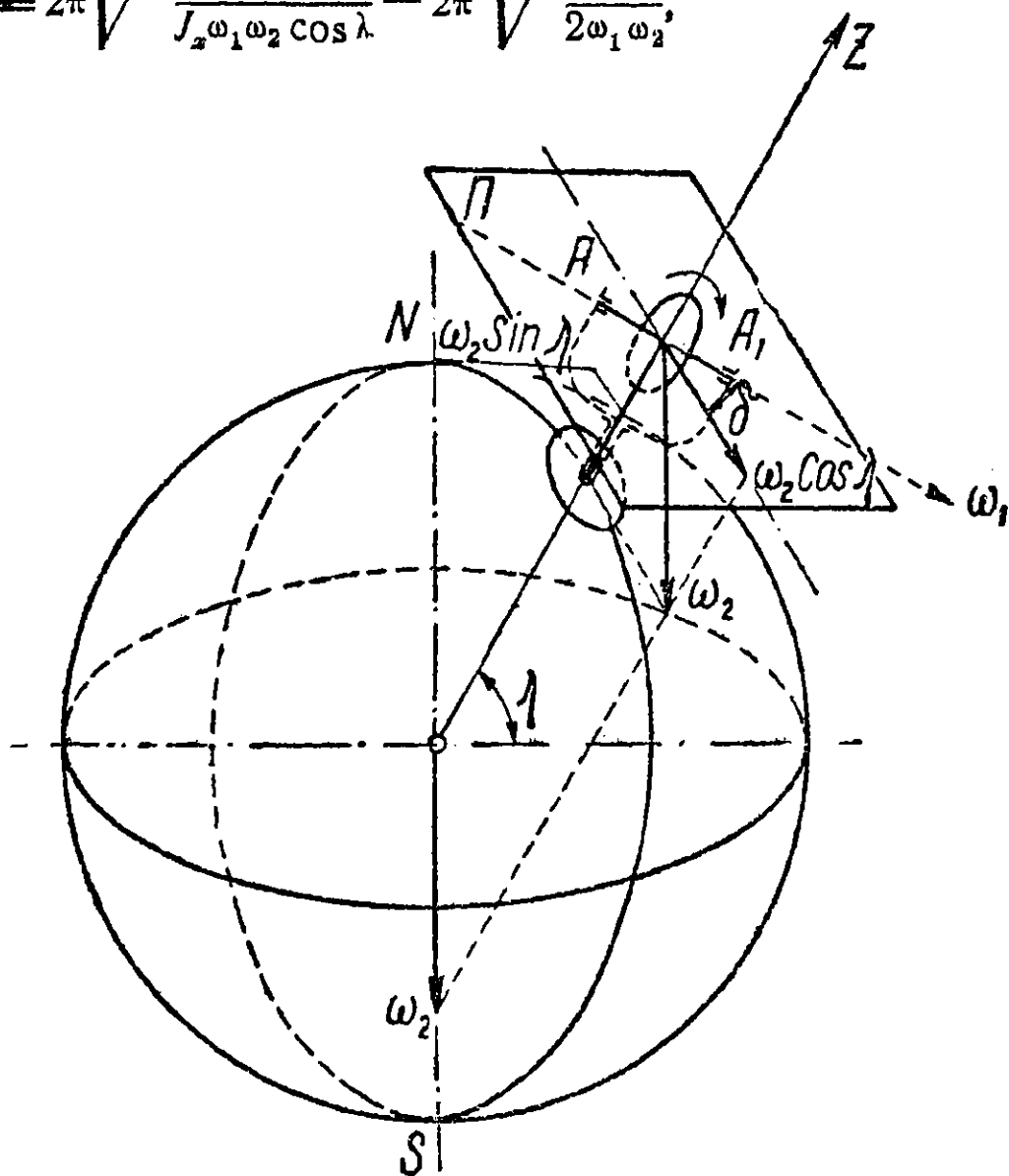


Рис. 140.

принимая, что

$$\frac{J_z}{J_x} = \frac{1}{2}.$$

Замечая, что

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{24 \cdot 60^2} \frac{1}{\text{сек.}}$$

и принимая $\omega_1 = 18\,000 \text{ об/мин} = 600\pi \frac{1}{\text{сек.}}$, найдем

$$T \approx 17 \text{ сек.}$$

На широте Ленинграда ($\lambda = 60^\circ$, $\cos \lambda = \frac{1}{2}$), получим

$$T \approx 24 \text{ сек.}$$

б) Плоскостью II является плоскость меридиана (рис. 141). В этом случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$, так как ω_2 (ось земли) лежит в плоскости меридиана. Совершив несколько колебаний вокруг оси BB_1 , ось гироскопа должна установиться по земной оси, составив с горизонтом угол λ , показывающий широту места. Период колебаний в этом случае не зависит от широты и равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_z}{J_x \omega_1 \omega_2}}.$$

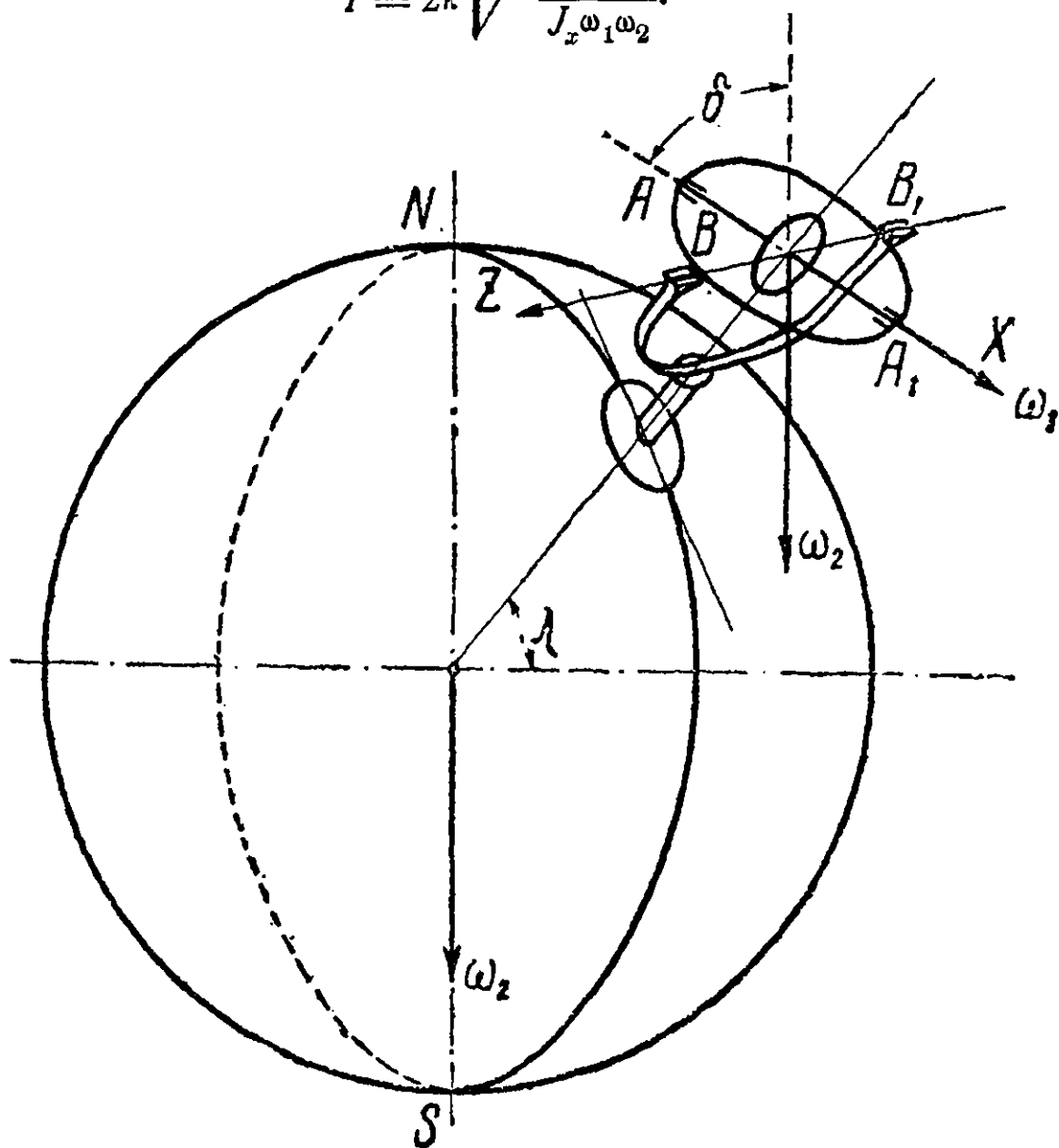


Рис. 141.

в) Предоставим теперь обеим рамам ABA_1B_1 и BCB_1D возможность вращаться вокруг своих осей BB_1 и CD . Гироскоп будет находиться в условиях твердого тела, центр тяжести которого при помощи карданного подвеса сделан неподвижным и который может вращаться вокруг любой из трех осей (гироскоп с тремя степенями свободы). При этом все внешние силы (вес, реакция осей) приложены в центре тяжести гироскопа и, следовательно, момент их $L^{(e)} = 0$. Момент количества движения K' в движении гироскопа по отношению к центру тяжести должен поэтому оставаться постоянным по величине и сохранять неизменное направление в звездной координатной системе (принимая в расчет движение

земли, мы за „неподвижную“ систему координат должны принять систему, связанную с неподвижными звездами). Если направить, таким образом, ось гироскопа, по которой направлен вектор K' , на неподвижную звезду, то эта ось сохранит свое направление. Наблюдатель, связанный с землей и меняющий вследствие ее вращения свою ориентировку по отношению к звездам, должен заметить поэтому перемещение оси гироскопа по отношению к земле.

Описанные опыты Фуко дают, таким образом, возможность, не прибегая к астрономическим наблюдениям: 1) установить вращение земли, 2) определить меридиан места и его широту.

Надо отметить однако, что условия опытов Фуко практически весьма трудно осуществить. Это объясняется тем, что максимальная величина момента пары $J_x \omega_1 \omega_2$, вызывающей поворот оси гироскопа, вследствие чрезвычайной малости угловой скорости земли, оказывается весьма малой. Возьмем, например, маховик веса 2 кг и с радиусом инерции $\rho = 8$ см и примем $\omega_1 = 600 \pi \frac{1}{\text{сек}}$. Получим

$$J \omega_1 \omega_2 = \frac{2000 \cdot 8^2}{981} \frac{600\pi \cdot 2\pi}{24 \cdot 60^2} \approx 18 \text{ гсм}$$

При такой величине момента неизбежные силы трения в подшипниках и сопротивление воздуха могут совершенно исказить явление. Источником других ошибок, избежать которые очень трудно, является несовпадение точки пересечения осей AA_1 , BB_1 и CD с центром тяжести системы. Появляющийся вследствие этого момент силы веса может быть величиной того же порядка, что и отклоняющийся момент $J_x \omega_1 \omega_2$. Фуко, пользуясь своим гироскопом, мог только качественно установить факт вращения земли и направление этого вращения, но не мог определить величины угловой скорости. Точно так же гироскоп Фуко практически непригоден и для определения меридиана и широты места. Тем не менее опыты Фуко не остались бесплодными, так как попытка применения гироскопа в качестве компаса получила дальнейшее развитие; современная техника имеет в своем распоряжении вместо несовершенного прибора Фуко, являющегося прототипом гироскопического компаса, практически вполне пригодные системы Сперри и Аншютца-Кемпфе. На описании конструкции и изложении теории этих приборов мы не можем здесь остановиться.

4. Гироскоп как стабилизатор непрямого и прямого действия. На примере гироскопа Фуко было отмечено свойство быстро вращающегося тела, подвешенного в центре тяжести и имеющего три степени свободы сохранять неизменным направление своей оси. Этим свойством пользуются в некоторых технических применениях гироскопа, которые мы здесь опишем.

а) В mine Уайтхеда гироскоп (прибор Обри) предназначается для создания устойчивости траектории мины. Ось гироскопа располагается параллельно продольной оси мины; когда мина находится в стволе орудия и пускается в цель, ось гироскопа уже сделана свободной и маховику уже сообщена большая угловая скорость. При всяком перемещении мины из плоскости ее траектории (ход мины по глубине не регулируется аппаратом Обри)

то или иное кольцо карданного подвеса приходит в движение, ибо ось гироскопа своего направления не изменяет; это движение передается управляющим ходом мины рулям. Аппарат Обри должен быть собран весьма точно. Если точка пересечения осей карданного подвеса не совпадает в точности с центром тяжести маховика, то создающийся момент силы веса $L^{(c)}$ вызывает прецессионное движение оси с угловой скоростью.

$$\omega_2 = \frac{L^{(c)}}{J\omega_1}.$$

При $L^{(c)} = 1 \text{ г} \cdot \text{см}$, $\omega_1 = 80\pi \frac{1}{\text{сек.}}$, весе гироскопа 750 г и радиусе инерции его 4 см, получим

$$\omega_2 = \frac{981}{750 \cdot 4^2 \cdot 80\pi} = 0,000326 \frac{1}{\text{сек.}}$$

Считая продолжительность хода мины равной 1 минуте, получим угол отклонения оси гироскопа равным $\frac{0,000326 \cdot 60 \cdot 180^\circ}{\pi} \approx 1,12^\circ$. Эта ошибка является довольно значительной для того малого значения $L^{(c)}$, которое мы приняли.

б) Французский инженер Реньяр предложил (1910) использовать гироскоп для *автоматического управления рулями* аэроплана. Для этого он снабжает электрическими контактами нижний конец вертикальной оси подвешенного на карданном подвесе, быстро вращающегося (до 10 000 об/мин) и имеющего три степени свободы гироскопа; при наклонах аэроплана ось гироскопа не изменит своего направления и контакты замыкают электрический ток, передающий движение рулям.

В обоих приведенных примерах гироскоп применяется как стабилизатор непрямого действия. Иными словами, свойство оси гироскопа используется для передачи движения органам, непосредственно осуществляющим стабилизацию. В других случаях эта стабилизация выполняется непосредственно самим гироскопом (стабилизатор прямого действия). Сюда относится применение гироскопа для уменьшения качки корабля (системы Шлика и Сперри) и гироскопический однорельсовый вагон различных систем (Шиловского, Бреннана, Шерля).

в) *Гироскопический успокоитель качки*. Схема гироскопического успокоителя качки Шлика представлена на рис. 142. Маховику гироскопа сообщается весьма большая угловая скорость ω вокруг его оси (Z), имеющей в среднем положении вертикальное направление. Рама, несущая подшипники B и B' оси гироскопа, сама может вращаться вокруг поперечной оси корпуса корабля (X). Центр тяжести системы находится на оси Z ниже центра тяжести маховика, для чего рамка снабжается противовесом.

Пусть под действием волн корабль наклоняется, поворачиваясь вокруг продольной оси Y на угол φ в положительном направлении. Конец оси гироскопа получит при этом некоторое перемещение в поперечной плоскости судна; согласно теореме

в продольной плоскости судна. Это движение регулируется весьма чувствительным малым контрольным гироскопом, который замыкает в ту или иную сторону ток реле, регулирующего движение мотора прецессии. В противоположность системе Шлика, которая считалась не более чем интересным техническим эксперимен-

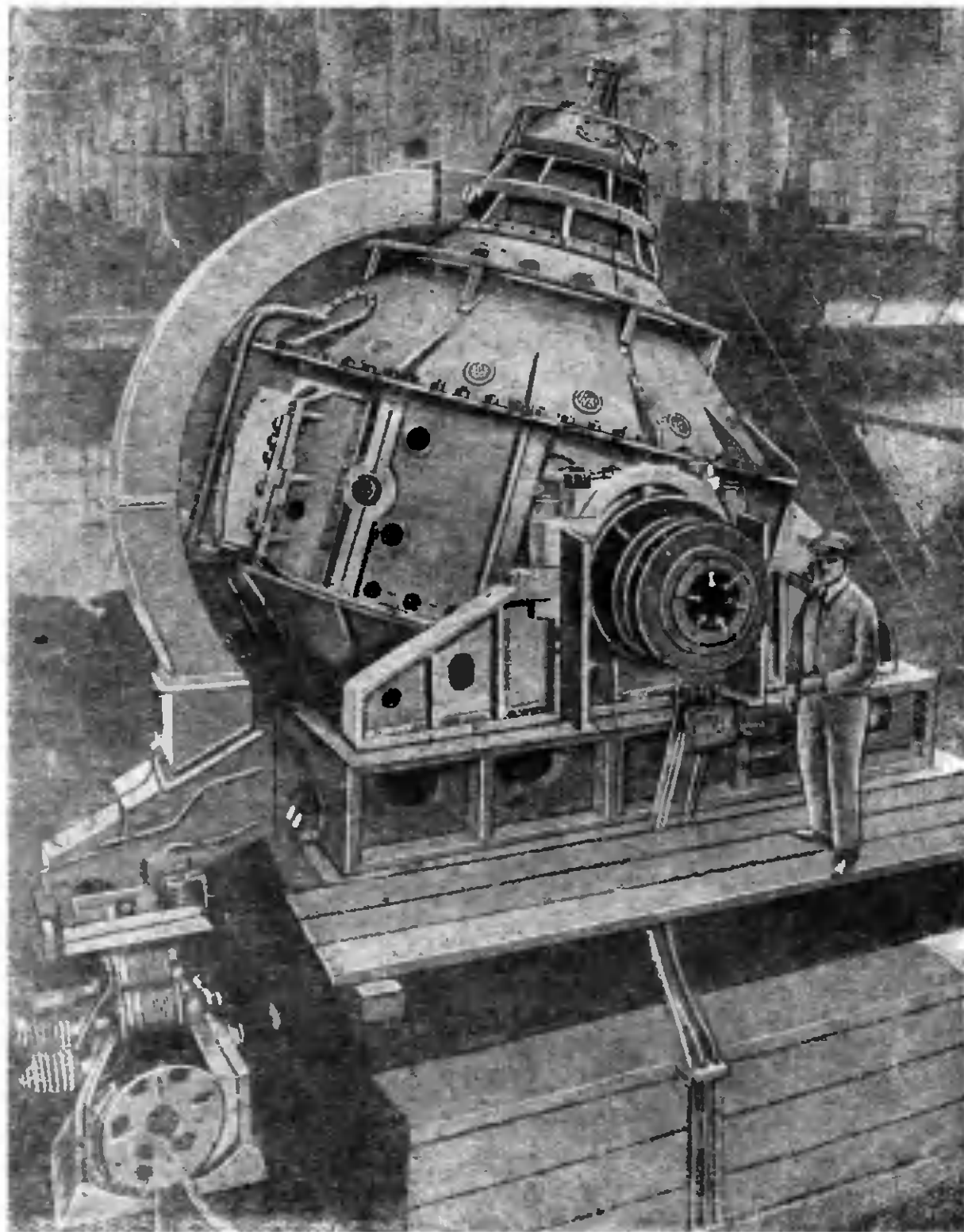


Рис. 143 а. Успокоитель Сперри (вид сбоку).

том, система Сперри получила и получает в самое последнее время широкое распространение (ряд японских военных судов, большие увеселительные яхты). В конце 1931 года успокоителем Сперри оборудовано колоссальное итальянское судно („Conte di Savoia“, 45 000 тонн). Здесь применены три маховика весом каждый по 110 тонн и диаметром около 4 метров. Передний и боковой

вид успокоителя представлен на рис. 143, заимствованном из журнала „Engineer“ (январь 1932 г.).

г) *Однорельсовый гироскопический вагон.* На рис. 144 представлена фотография модели гироскопического однорельсового вагона системы Шиловского. Свойство гироскопа сообщать вагону

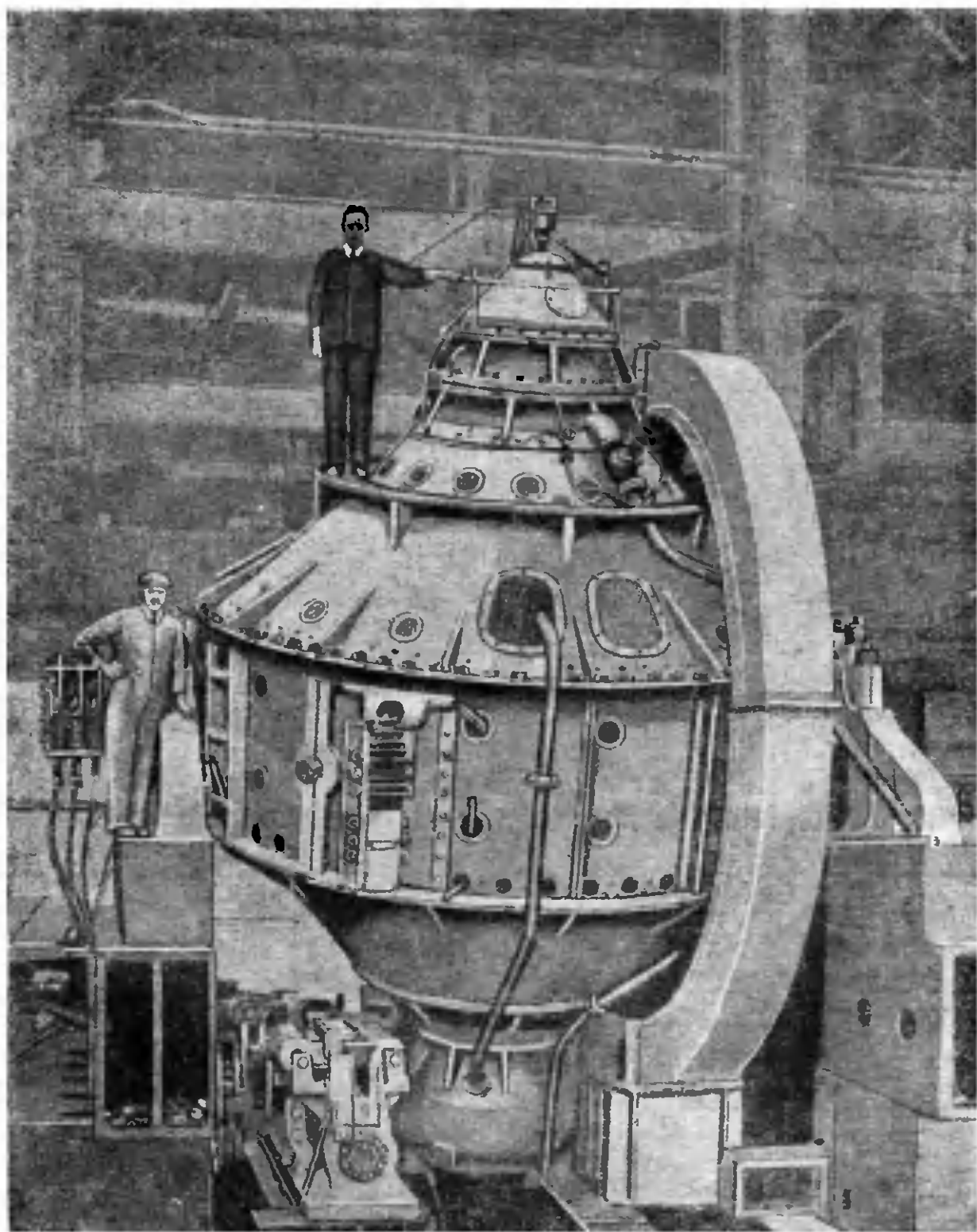


Рис. 143 б. Успокоитель Сперри (вид спереди).

устойчивость объясняется совершенно так же, как и в случае успокоителя Шлика: при наклоне вагона в какую-нибудь сторону (вокруг продольной оси) рама гироскопа повернется вокруг поперечной оси, что сопровождается появлением гироскопического момента, стремящегося выпрямить вагон и установить его снова в вертикальное положение.

В противоположность гироскопу Шлика, центр тяжести рамы и маховика должен в рассматриваемом случае находиться над осью вращения рамы (добавочный груз сверху), т. е. система гироскопа и рамы сама по себе неустойчива, как и вагон. Отметим еще одно интересное явление: если вагон наклоняется, то можно способствовать его выпрямлению, сообщая раме гироскопа легкие толчки в направлении отклонения вагона; наоборот, если бы, „желая“ выпрямить вагон, мы стали бы сообщать гироскопу толчки в направлении, противоположном его отклонению, то этим мы вызвали бы обратный эффект—вагон наклонился бы еще больше и даже упал. Объяснение этого явления будет дано в следующей части Динамики.

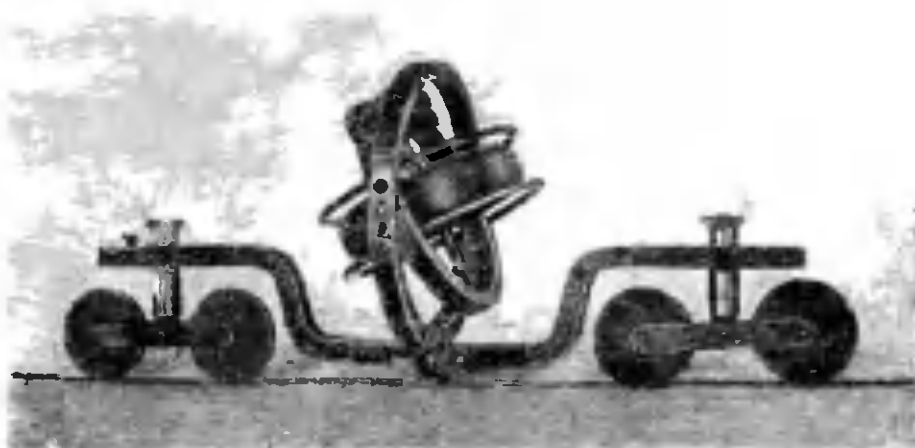


Рис. 144. Модель гироскопического вагона. (Кабинет механики Ленинградского Физико-механического института).

§ 30. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Общий случай движения твердого тела.

Рассмотрим сначала случай тела, вращающегося вокруг неподвижной точки O ; имея в виду составить уравнения движения тела, составим сначала выражение для момента количества движения относительно неподвижной точки.

Имеем (сравнить § 21, стр. 196):

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i],$$

т. е.

$$\begin{aligned} K_x &= \sum_{i=1}^n m_i (y_i v_{iz} - z_i v_{iy}), \quad K_y = \sum_{i=1}^n m_i (z_i v_{ix} - x_i v_{iz}), \quad K_z = \\ &= \sum_{i=1}^n m_i (x_i v_{iy} - y_i v_{ix}), \end{aligned}$$

но, называя через ω вектор угловой скорости тела вокруг мгновенной оси, имеем

$$\mathbf{v}_i = [\omega, \mathbf{r}_i],$$

и, следовательно:

$$v_{ix} = \omega_y z_i - \omega_z y_i, \quad v_{iy} = \omega_z x_i - \omega_x z_i, \quad v_{iz} = \omega_x y_i - \omega_y x_i.$$

Подстановка дает

$$K_x = \omega_x \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2) - \omega_y \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i - \omega_z \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i.$$

Если за координатные оси взять оси, связанные с телом, то суммы, фигурирующие в этих формулах, будут постоянными величинами, зависящими только от формы тела и распределения в нем масс; эти постоянные будут, конечно, представлять не что иное, как соответствующие моменты инерции и центробежные моменты. Получаем: ¹⁾

$$\begin{aligned} K_x &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z \\ K_y &= J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z - J_{yx} \omega_x \\ K_z &= J_z \omega_z - J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y. \end{aligned} \quad (11)$$

Эти формулы очень упрощаются, если за координатные оси принять главные оси инерции в точке O . В таком случае центробежные моменты обращаются в нуль и мы находим

$$K_x = J_x \omega_x, \quad K_y = J_y \omega_y, \quad K_z = J_z \omega_z. \quad (12)$$

Таковы выражения для проекций на главные оси инерции момента количества движения тела, вращающегося вокруг неподвижной точки.

Переходя теперь к составлению уравнений движения, обозначим через L главный момент относительно неподвижной точки O внешних сил, приложенных к телу. Теорема моментов относительно точки O дает

$$\frac{dK}{dt} = L. \quad (13)$$

Так как система осей неизменно связана с телом, т. е. имеет ту же угловую скорость ω , что и тело, то при дифференцировании вектора K нужно воспользоваться формулой (часть 1, стр. 252; см. также § 21, стр. 197):

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d'K}{dt} + [\omega, K], \quad (14)$$

¹⁾ Приводим другой вывод для читателя, уже знакомого с основными операциями векторной алгебры:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{i=1}^n m_i [r_i, v_i] = \sum_{i=1}^n m_i [r_i, [\omega, r_i]] = \sum_{i=1}^n m_i \{ \omega r_i^2 - r_i (\omega, r_i) \} = \\ &= \omega \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \sum_{i=1}^n m_i r_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i). \end{aligned}$$

Проектируя на оси, находим (11).

или, проектируя на оси:

$$\frac{dK_x}{dt} = \frac{d'K_x}{dt} + \omega_y K_z - \omega_z K_y, \text{ и т. д.}$$

Ф-лы (12) и (13) дают теперь

$$\begin{aligned} J_x \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z &= L_x \\ J_y \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_z \omega_x &= L_y \\ J_z \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y &= L_z \end{aligned} \quad (15)$$

Это и есть искомые уравнения вращения тела вокруг неподвижной точки. Впервые они даны Эйлером в сочинении „*Teoria motus corporum solidorum*“.

В общем случае движения твердого тела мы можем представить это движение складывающимся из поступательного движения вместе с центром инерции и вращательного относительно центра инерции. Для определения поступательного движения, очевидно, нужно воспользоваться теоремой движения центра инерции:

$$M w_c = R,$$

где $R = \sum_{i=1}^n F_i$ — главный вектор всех внешних сил, приложенных к телу, M — масса тела, w_c — ускорение его центра инерции.

Для определения вращательного движения остается написать уравнение моментов по отношению к центру инерции. Очевидно, что мы получим те же уравнения (15), в которых в этом случае оси X, Y, Z суть главные центральные оси инерции, а J_x, J_y, J_z — главные центральные моменты инерции.

§ 31. Определение положения твердого тела при помощи эйлеровых углов. Выражения для проекций угловой скорости тела через эйлеровы углы и их производные.

Чтобы иметь возможность применять уравнения Эйлера к конкретным задачам, необходимо предварительно сделать одно отступление в область кинематики, сказав несколько слов о так называемых эйлеровых углах, служащих для определения положения твердого тела, имеющего одну неподвижную точку O .

Пусть $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ — неподвижная система координатных осей, XYZ — подвижная система, связанная с движущимся телом. Вопрос об определении положения тела очевидно эквивалентен вопросу об определении положения подвижной системы относительно неподвижной (рис. 145).

Отметим линию пересечения подвижной плоскости $X\bar{Y}$ с неподвижной $\bar{X}\bar{Y}$. Линия эта ON носит название линии узлов, дан-

ное ей в астрономии. Линия узлов очевидно перпендикулярна и к оси Z и к оси $\bar{Z}$, так как лежит в плоскостях, к этим осям перпендикулярным. Положительное направление $\vec{ON}$ выберем таким образом, чтобы поворот оси $\bar{Z}$ к оси Z вокруг линии узлов на наименьший угол происходил по часовой стрелке.

За величины, определяющие положение осей XYZ относительно осей $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$, примем следующие углы:

1. Угол ϑ между осью $\bar{Z}$ и осью Z , отсчитываемой от оси $\bar{Z}$ по часовой стрелке вокруг направленной линии узлов. Угол этот, равный, очевидно, двугранному углу между плоскостями $\bar{X}\bar{Y}$ и XY , называют астрономическим термином *нута́ция*.

2. Угол ψ между осью $\bar{X}$ и линией узлов, отсчитываемый от оси $\bar{X}$ по часовой стрелке вокруг оси $\bar{Z}$. Этот угол называют *прецессией*.

3. Угол φ между линией узлов и осью X , отсчитываемый от линии узлов по часовой стрелке вокруг оси Z . Этот угол называют *чистым вращением*.

Углы ϑ, ψ, φ , как мы сейчас увидим, вполне определяют положение твердого тела, имеющего неподвижную точку, их называют *эйлеровыми углами*. Все три угла отсчитываются по часовой стрелке вокруг положительного направления соответствующей оси, причем первые два угла отсчитываются от неподвижных осей и лишь третий от оси узлов, которая при движении тела сама перемещается.

Из самого метода определения эйлеровых углов следует, что если нам заданы направления осей как подвижной, так и неподвижной системы координат, то тем самым углы Эйлера будут вполне определены. При этом угол ϑ (наименьший угол между осями) будет всегда лежать в первой полуокружности, а углы ψ и φ будут иметь любое значение от 0 до 360° .

Не трудно видеть, что и обратно, коль скоро задано направление осей неподвижной системы координат и три угла Эйлера, то тем самым определится и направление подвижных осей. Чтобы доказать это положение, выясним, как при помощи трех поворотов можно, зная три эйлеровых угла, от направления неподвижных координатных осей перейти к подвижным осям.

Совершим следующие три поворота:

1. Повернем триедр $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ вокруг оси $\bar{Z}$ на угол ψ по часовой

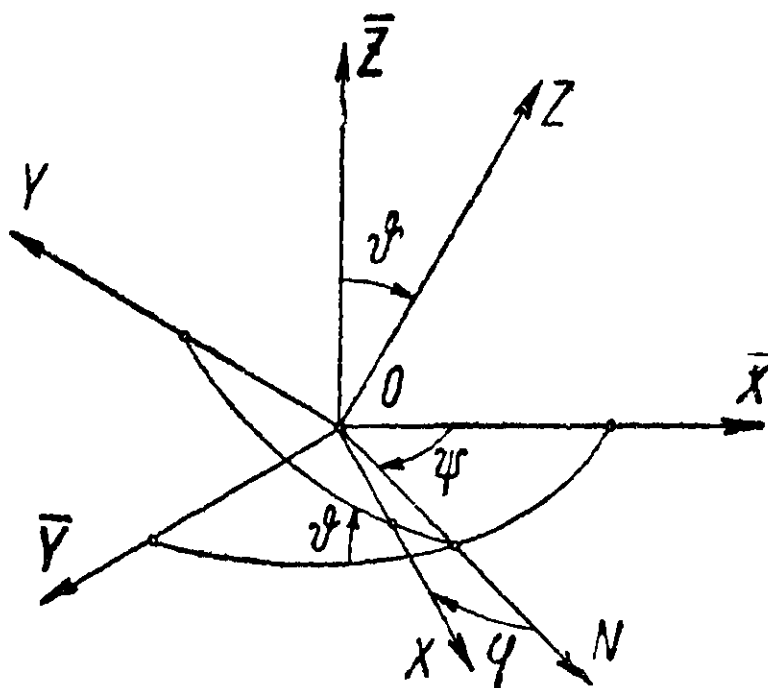


Рис. 145.

стрелке. Тогда ось $\bar{X}$ совместится с линией узлов, а ось $\bar{Z}$ останется в прежнем положении; система $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ займет положение $X_1 Y_1 Z_1$ (рис. 146).

2. Далее повернем триедр $X_1 Y_1 Z_1$ вокруг линии узлов, т. е. вокруг оси X_1 на угол ϑ по часовой стрелке. Тогда ось Z_1 (или, что то же, ось $\bar{Z}$), совместится с осью Z и плоскость $X_1 Y_1$ примет положение $X_2 Y_2$ (рис. 147).

3. Наконец, повернем триедр $X_2 Y_2 Z_2$ на угол φ по часовой стрелке вокруг оси Z_2 (совпадающей с осью Z). Тогда ось Z_2 останется неподвижной (совмещенной с осью Z), ось X_2 займет положение X , а ось Y_2 займет положение Y , т. е. триедр $X_2 Y_2 Z_2$ совместится с триедром XYZ .

Итак, тремя вращениями на три эйлеровых угла: на угол ψ вокруг оси $\bar{Z}$, на угол ϑ вокруг линии узлов и на угол φ вокруг оси Z , — можно триедр $\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ совместить с триедром XYZ . Это

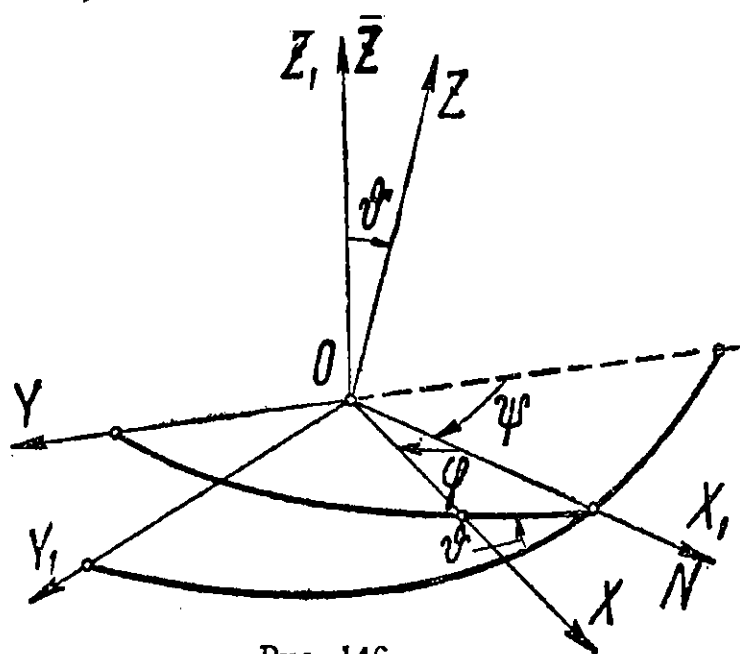


Рис. 146.

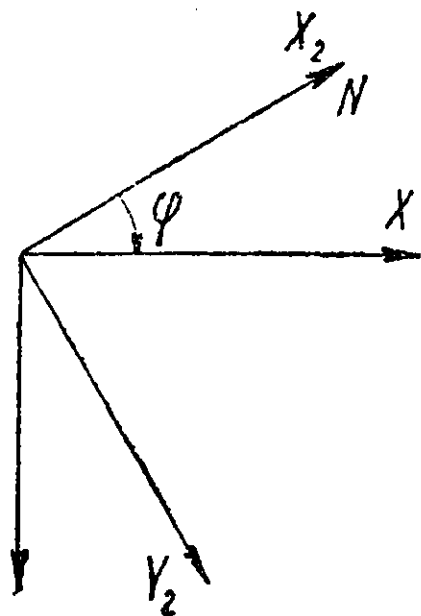


Рис. 147.

показывает, что задание трех Эйлеровых углов вполне определяет направление осей подвижной системы, а следовательно, и положение тела.

Выразим теперь проекции угловой скорости тела ω на оси X, Y, Z через эйлеровы углы и их производные. Представим для этого вектор ω в виде геометрической суммы трех угловых скоростей ω_1, ω_2 и ω_3 , направленных соответственно по осям $Z, \bar{Z}$ и линии узлов (рис. 148). Замечая, что при вращении вокруг оси Z изменяется только угол φ , тогда как углы ϑ и ψ остаются неизменными, имеем

$$\omega_1 = \dot{\varphi},$$

и на основании аналогичных соображений

$$\omega_2 = \dot{\psi}, \quad \omega_3 = \dot{\vartheta}.$$

Проектируя теперь на оси XYZ геометрическое равенство

$$\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

получим:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \varphi \cos (Z, X) + \dot{\psi} \cos (\bar{Z}, X) + \dot{\vartheta} \cos (N, X) \\ \omega_y &= \varphi \cos (Z, Y) + \dot{\psi} \cos (\bar{Z}, Y) + \dot{\vartheta} \cos (N, Y) \\ \omega_z &= \dot{\varphi} \cos (Z, Z) + \dot{\psi} \cos (\bar{Z}, Z) + \dot{\vartheta} \cos (N, Z). \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Фигурирующие в этих формулах косинусы углов собраны в таблицу:

	$\bar{Z}$	Z	$\overline{ON}$
X	$\sin \vartheta \sin \varphi$	0	$\cos \varphi$
Y	$\sin \vartheta \cos \varphi$	0	$-\sin \varphi$
Z	$\cos \vartheta$	1	0

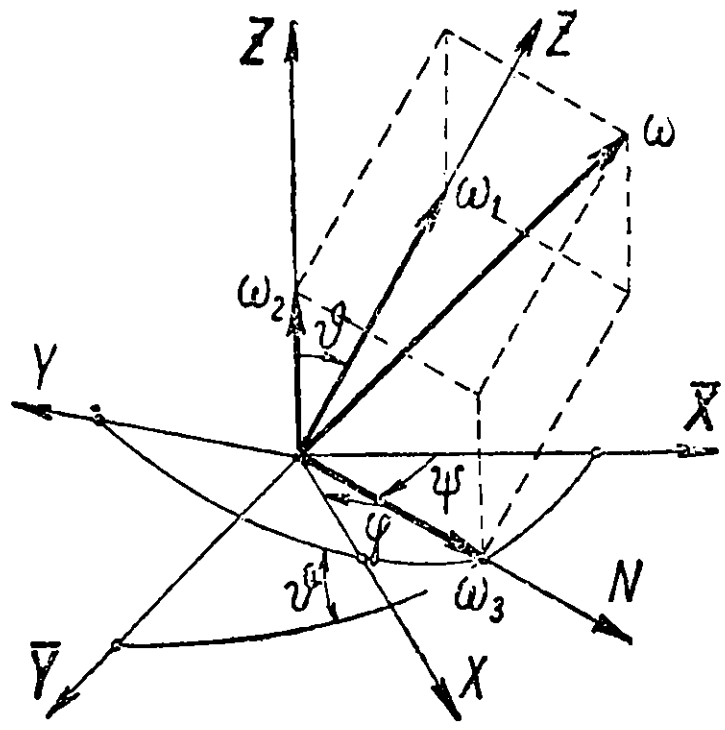


Рис. 148.

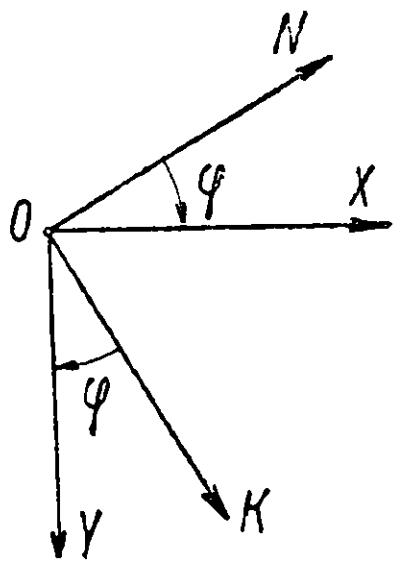


Рис. 149

Нуждается в пояснении только определение $\cos (X, \bar{Z}), \cos (Y, \bar{Z})$. Для этого заметим, что эти косинусы представляют проекции на оси X и Y единичного вектора, расположенного вдоль оси $\bar{Z}$. Проектируем сначала этот вектор на плоскость XY , получаем отрезок $\overline{OK}$ длиной $\sin \vartheta$ и направленный перпендикулярно линии узлов (рис. 149). Остается спроектировать $\overline{OK}$ на оси X и Y , для чего нужно умножить его длину соответственно на $\cos (90 - \varphi) = \sin \varphi$ и на $\cos \varphi$. Таким образом находим указанные в таблице значения.

Возвращаясь теперь к формулам (*) и воспользовавшись таблицей косинусов, получим:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (16)$$

Предлагаем учащемуся вывести аналогичным путем формулы для проекций ω на неподвижные оси $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$.

§ 32. Гироскопический момент в случае регулярной прецессии.

Рассмотрим движение гироскопа, вращающегося с постоянной угловой скоростью вокруг своей материальной оси (назовем ее через Z), причем ось вращения сама не остается неподвижной, а вращается также с постоянной угловой скоростью вокруг неподвижной оси $\bar{Z}$, составляя с ней постоянный угол нутации ϑ и описывая вокруг нее коническую поверхность. Описываемое движение гироскопа называется *регулярной прецессией*; угловая скорость $\dot{\psi}$ вокруг оси $\bar{Z}$ называется угловой скоростью прецессии; угловую скорость собственного вращения гироскопа обозначим согласно § 31 через $\dot{\varphi}$ (рис. 150).

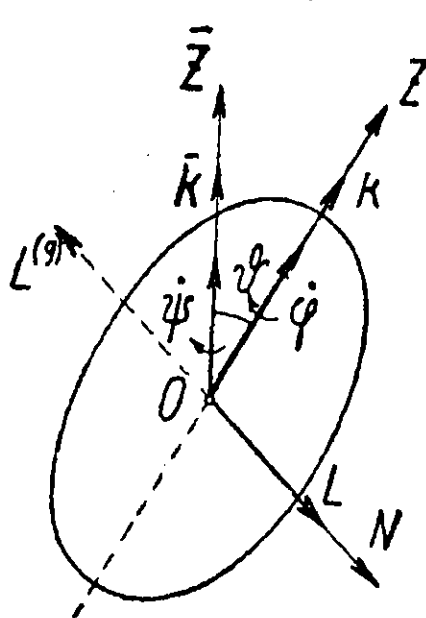


Рис. 150.

Определим момент внешних сил, который должен быть приложен к гироскопу, чтобы рассматриваемое движение регулярной прецессии могло иметь место. Воспользуемся для этого уравнениями Эйлера. По условию имеем

$$\dot{\varphi} = \text{const}, \dot{\psi} = \text{const}, \dot{\vartheta} = 0$$

и формулы предыдущего параграфа дают

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi; \quad \omega_y = \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi; \quad \omega_z = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}.$$

В уравнениях Эйлера имеем далее $J_x = J_y = J$, так как гироскоп есть тело вращения. Получаем:

$$J \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \varphi + (J_z - J) \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) = L_x$$

$$J \dot{\psi} \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi - (J_z - J) \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi (\dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}) = L_y$$

$$0 = L_z.$$

Иными словами

$$L_x = L \cos \varphi, \quad L_y = -L \sin \varphi, \quad L_z = 0,$$

где

$$L = \sin \vartheta \{J_z \dot{\varphi} \dot{\psi} + (J_z - J) \dot{\psi}^2 \cos \vartheta\}.$$

L лежит в плоскости $X\bar{Y}$, составляя углы φ и $\varphi + \frac{\pi}{2}$ с осями X и $\bar{Y}$; иными словами, при $L > 0$, L совпадает по направлению с положительным направлением линии узлов. Вводя в рассмотрение орты $\bar{k}$ и k осей $\bar{Z}$ и Z , можем написать

$$L = [\bar{k}, k] \{J_z \dot{\varphi} \dot{\psi} + (J_z - J) \dot{\psi}^2 \cos \vartheta\};$$

замечая, что $\bar{k} \dot{\psi} = \omega_2$, $k \dot{\varphi} = \omega_1$ (§ 31), имеем

$$L = J_z [\omega_2, \omega_1] \left\{ 1 + \frac{J_z - J}{J_z} \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}} \cos \vartheta \right\}. \quad (17)$$

От ф-лы (9) § 29 полученное выражение отличается добавочным членом

$$\frac{J_z - J}{J_z} \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}} \cos \vartheta.$$

Если угловая скорость прецессии мала по сравнению с собственной угловой скоростью, то этим членом можно пренебречь; точно так же этот добавочный член обращается в нуль при $\cos \vartheta = 0$, т. е. при условии взаимной перпендикулярности осей прецессии и оси собственного вращения.

Для гироскопического момента L_g , т. е. для момента реакции гироскопа на опоры, получим формулу:

$$L_g = J_z [\omega_1, \omega_2] \cdot \left\{ 1 + \frac{J_z - J}{J_z} \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}} \cos \vartheta \right\}.$$

Примеры и упражнения.

1. Бегуны. В качестве примера на применение выведенной только что формулы вернемся к задаче об определении давления бегуна в случае схемы, изображенной на рис. 151, когда угол ϑ не равен 90° . При постоянной угловой скорости прецессии $\dot{\psi} = \bar{\omega}_2$ угловая скорость собственного вращения $\dot{\varphi} = \bar{\omega}_1$ также будет постоянной; с другой стороны и угол ϑ является постоянным, т. е. мы имеем случай регулярной прецессии, причем ось узлов $\vec{ON}$ направлена от читателя в глубь чертежа.

Внешними силами, приложенными к бегуну, являются его вес G , искомая нормальная реакция N , сила трения, перпендикулярная плоскости рисунка, и реакция неподвижной точки O . Две последние силы не дают моментов относительно оси $\vec{ON}$ (линии узлов), так как сила трения ей параллельна, а реакция неподвижной точки

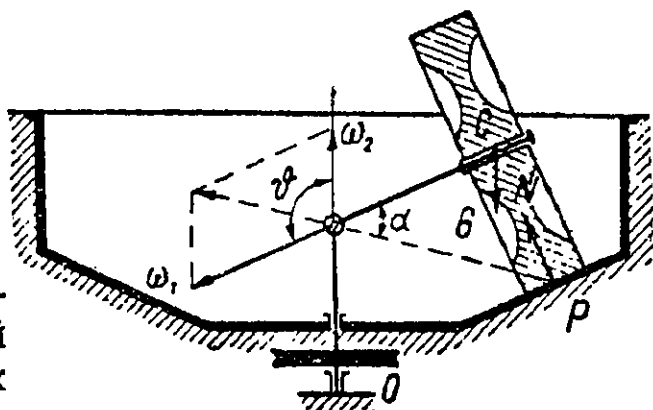


Рис. 151.

ее пересекает. Таким образом, момент L , определяемый ф-лой (17), должен равняться сумме моментов сил G и N . Это условие и служит для определения N . Называя расстояние OC через c , имеем

$$cN - cG \sin \vartheta = J_z \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_1 \sin \vartheta \left\{ 1 + \frac{\bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1} \frac{J_z - J}{J} \cos \vartheta \right\}.$$

Принимая, что мгновенная ось вращения бегуна проходит через точку P , найдем (см. часть, 1 стр. 271):

$$\frac{\bar{\omega}_2}{\bar{\omega}_1} = \frac{\sin \alpha}{\sin (\vartheta - \alpha)},$$

и, следовательно:

$$N = G \sin \vartheta + J_z \omega_2^2 \frac{\sin \vartheta \cdot \sin (\vartheta - \alpha)}{c \cdot \sin \alpha} \left\{ 1 + \frac{J_z - J}{J} \frac{\sin \alpha \cdot \cos \vartheta}{\sin (\vartheta - \alpha)} \right\}.$$

Здесь J — момент инерции бегуна относительно поперечной оси, проходящей через неподвижную точку. По теореме Штейнера

$$J = J_c + \frac{G}{g} c^2,$$

где J_c — момент инерции относительно поперечной оси, проходящей через центр тяжести бегуна C . С достаточной точностью можно принять

$$J_c = \frac{1}{2} J_z = \frac{1}{2} \frac{G}{g} \rho^2,$$

где ρ — радиус инерции бегуна относительно его материальной оси. Окончательно находим

$$N = G \left\{ \sin \vartheta + \frac{\omega_2^2 \rho^2 \sin \vartheta \sin (\vartheta - \alpha)}{cg \sin \alpha} \left[1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{c^2}{\rho^2} \right) \frac{\sin \alpha \cdot \cos \vartheta}{\sin (\vartheta - \alpha)} \right] \right\}.$$

при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, отсюда получаем уже знакомый результат (стр. 266):

$$N = G \left\{ 1 + \frac{\omega_2^2 \rho^2}{cg \operatorname{tg} \alpha} \right\} = G \left\{ 1 + \frac{\omega_2^2 \rho^2}{gr} \right\},$$

который оказывается, таким образом, не зависимым от предположения о малости угловой скорости прецессии по сравнению с собственной угловой скоростью.

Сделаем численный подсчет, взяв данные из рассмотренного ранее и принимая $\vartheta = 120^\circ$, $c = 0,6$ м; получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{c} = 0,7, \alpha \approx 36^\circ, N \approx 2,94 G.$$

При $\vartheta = 90^\circ$ мы имели $N = 2,24 G$; следовательно, в рассматриваемом случае конструкция с тупым углом между осями оказывается более выгодной с точки зрения получения большего давления N .

2. Гирскопические явления в ветряных двигателях. Условие наилучшего использования энергии ветра в ветряном двигателе заключается в том, чтобы горизонтальная ось вращения

двигателя была параллельна направлению ветра. Так как последнее постоянно изменяется, то двигатель снабжается приспособлением, автоматически поворачивающим его ось вокруг вертикали и устанавливающим ее по направлению ветра. При этом подшипникам оси двигателя будут передаваться добавочные гироскопические давления, определением которых мы и займемся.

С двигателем свяжем систему осей Z, X, Y , направив ось Z по оси вращения колеса, а оси X и Y — в средней плоскости лопастей. Так как лопасти располагаются всегда на равных угловых расстояниях, то при трех и более лопастях $J_x = J_y$; с другой стороны, угол φ между горизонтальной осью собственного вращения и вертикальной осью прецессии равен $\frac{\pi}{2}$. Поэтому при трех и более

лопастях элементарная формула гироскопического момента вполне разрешает задачу. Не останавливаясь на этом, мы разберем здесь случай двухлопастного двигателя.

При указанном на рис. 152 направлении осей (ось Z , идущая перпендикулярно плоскости рисунка, не показана; ось $\bar{Z}$ может быть перенесена в центр тяжести, так как поступательное движение нас не интересует), считая массу лопасти распределенной вдоль радиуса, получаем:

$$J_y = 0, J_x = J_z = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2 = J,$$

так как

$$\sum_{i=1}^n m_i z_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2 = 0.$$

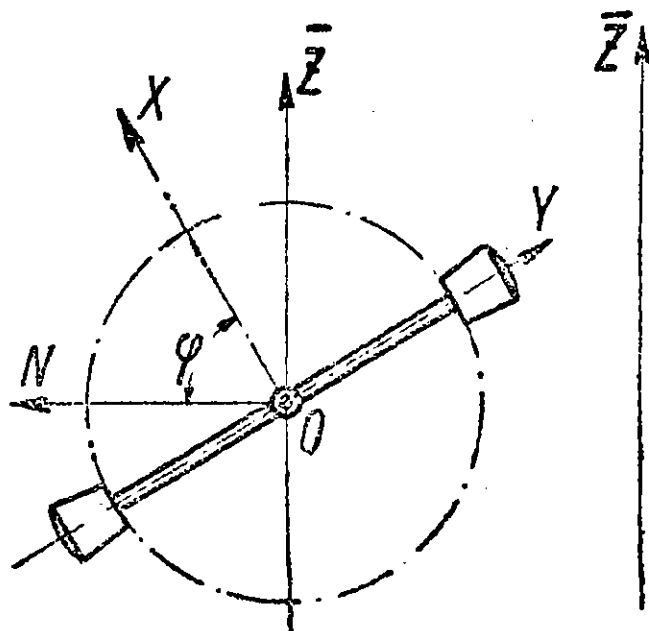


Рис. 152.

Перпендикуляр к оси собственного вращения (Z) и оси прецессии ($\bar{Z}$) определяет направление линии узлов $\vec{ON}$. Отсчитывая от нее угол φ и называя через $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$ угловые скорости собственного вращения и прецессии, получим:

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin \varphi, \omega_y = \dot{\psi} \cos \varphi, \omega_z = \dot{\varphi}.$$

Уравнения Эйлера (стр. 278) дадут:

$$L_y = 0, L_x = 2J\dot{\varphi}\dot{\psi} \cos \varphi, L_z = -\frac{1}{2} J\dot{\psi}^2 \sin 2\varphi.$$

Разлагая по направлениям $\bar{Z}$ и $\vec{ON}$, получим:

$$L_{\bar{Z}} = J\dot{\varphi}\dot{\psi} \sin 2\varphi, L_N = J\dot{\varphi}\dot{\psi} 2 \cos^2 \varphi.$$

К подшипникам оси будут приложены усилия, моменты которых равны полученным по величине и противоположны им по знаку.

Так как $\dot{\psi}$ обычно весьма мало по сравнению с $\dot{\varphi}$, то моментом

L_z можно пренебречь. Для многолопастного ветряного двигателя

$$L_z = L_s = 0, L_N = J\dot{\phi}\dot{\psi}.$$

Момент L_N относительно горизонтальной оси в случае двухлопастного ветряного двигателя будет пульсировать от нуля (в горизонтальном положении маха) до максимума (в вертикальном положении)

$$(L_N)_{\max} = 2J\dot{\phi}\dot{\psi}.$$

Частота пульсаций вдвое больше числа оборотов ветряного двигателя. Такой пульсирующий момент при быстром автоматическом повороте двигателя под ветер ведет к сильному расшатыванию механизма, особенно если частота пульсаций момента совпадает с частотой собственных колебаний какой-либо части двигателя.

В двухлопастном ветряке мы имеем также в противоположность многолопастным момент L_z относительно вертикальной оси. Максимальное значение этого момента вдвое меньше $(L_N)_{\max}$. L_z четыре раза в течение одного оборота двигателя изменяет свой знак, вследствие чего зубчатый механизм, осуществляющий прецессионное движение оси, будет испытывать удары в зубьях.

Применение двухлопастных двигателей в виду изложенного не является таким образом рациональным.

Подсчитаем в заключение максимальное значение момента, руководствуясь следующими данными ¹⁾:

$$J = 2500 \text{ кг см сек}^2. \text{ (при диаметре колеса 14 м)}$$

$$\dot{\phi} = 2\pi \frac{1}{\text{сек.}},$$

$$\dot{\psi} = 0,08 \frac{1}{\text{сек.}}$$

В случае двухлопастного двигателя получаем

$$(L_N)_{\max} = 2 \cdot 2500 \cdot 2\pi \cdot 0,08 \approx 2520 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

Для многолопастного двигателя с тем же моментом инерции найдем

$$L_N = 1260 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

3. Устойчивость вращения вокруг главных осей инерции. Предположим, что неподвижная точка совпадает с центром тяжести тела, вес тела и реакция неподвижной точки не дают в таком случае моментов относительно неподвижной точки и в уравнениях Эйлера правые части обращаются в нуль; получаем:

$$J_x \ddot{\omega}_x + (J_z - J_y) \omega_y \omega_z = 0$$

$$J_y \ddot{\omega}_y + (J_x - J_z) \omega_x \omega_z = 0$$

$$J_z \ddot{\omega}_z + (J_y - J_x) \omega_x \omega_y = 0$$

где J_x, J_y, J_z — главные центральные моменты инерции.

¹⁾ См. Г. Сабинин Гироскопический эффект ветряных двигателей, Труды ЦАГИ, выпуск 22, Москва, 1926.

Эти уравнения удовлетворяются, если принять $\omega_x = \omega_y = 0$. Из последнего уравнения найдем в таком случае $\omega_z = \omega_{0z} = \text{const}$. Будет ли это вращение вокруг оси Z с постоянной угловой скоростью ω_{0z} устойчивым? Иными словами, если дать оси Z небольшой толчок в сторону, т. е. сообщить телу весьма малые угловые скорости ω_{0x} и ω_{0y} , то останется ли движение вращением вокруг оси Z с весьма малыми колебаниями оси или характер его изменится коренным образом? Чтобы ответить на этот вопрос, положим, что имеет место первое предположение, т. е. что ω_x и ω_y остаются весьма малыми по сравнению с ω_z и найдем, при каких условиях это предположение может иметь место в действительности.

Пренебрегая в третьем уравнении Эйлера произведением малых величин ω_x , ω_y , получим, как и выше, $\omega_z = \omega_{0z} = \text{const}$. Первое и второе уравнения дают в таком случае:

$$\dot{\omega}_x + \frac{J_z - J_y}{J_x} \omega_{0z} \omega_y = 0$$

$$\dot{\omega}_y + \frac{J_x - J_z}{J_y} \omega_{0z} \omega_x = 0,$$

откуда получим:

$$\ddot{\omega}_x + \alpha \omega_x = 0,$$

$$\ddot{\omega}_y + \alpha \omega_y = 0,$$

причем

$$\alpha = \frac{(J_z - J_y)(J_z - J_x)}{J_x J_y} \omega_{0z}^2;$$

при $\alpha > 0$ решения этих уравнений выражаются через тригонометрические, при $\alpha < 0$ — через показательные функции (стр. 65—67). В первом случае

ω_x и ω_y , периодически изменяясь, остаются весьма малыми, во втором — при достаточно большом t могут сделаться сколь угодно большими. Условие устойчивости, таким образом, будет $\alpha > 0$, т. е.

$$J_z > J_y, J_z > J_x \text{ или } J_x > J_z, J_y > J_z.$$

Вращение вокруг главной центральной оси является устойчивым, если момент инерции относительно этой оси является наибольшим или наименьшим из трех главных центральных моментов инерции; напротив, вращение вокруг главной центральной оси, которой соответствует средний момент инерции, неустойчиво.

Для демонстрации этого явления пользуются установкой, предложенной Прандтлем, фотография которой по модели кабинета



Рис. 153. Модель для демонстрации устойчивости вращения вокруг главных осей инерции. (Кабинет механики Ленинградского Физико-механического института).

механики Ленинградского Физико-механического института представлена на рис. 153 (см. также пример 1 стр. 223). Велосипедное колесо, подвешенное в центре тяжести, может вращаться вокруг любой из трех главных осей. Если грузы, помещенные в конце оси, сняты, то ось колеса является осью наибольшего момента инерции. Вращение вокруг оси колеса будет устойчивым. Присоединяя добавочные грузы и перемещая их вдоль оси, можно добиться того, чтобы ось вращения сделалась осью среднего момента инерции. В этом случае достаточно малого толчка, чтобы вращение сделалось очень беспокойным: ось вращения начинает весьма сильно отклоняться в сторону. Перемещая грузы по оси еще дальше, можно снова сделать вращение устойчивым — ось вращения становится осью наименьшего момента инерции.

Вопросы и упражнения.

1. Гребной винт миноносца делает 750 об/мин ; вес винта 12 т , его радиус инерции $7,5 \text{ см}$; миноносец делает поворот радиусом 600 м со скоростью 35 узлов . ¹⁾ Вычислить момент реакции подшипников винта.

2. Ось маховика автомобильного двигателя расположена горизонтально по направлению движения автомобиля; маховик вращается по часовой стрелке для наблюдателя, смотрящего по направлению движения. Примем вес маховика $G = 60 \text{ кг}$, радиус инерции его $0,25 \text{ м}$, число оборотов в минуту $n = 1500 \text{ об/мин}$. и предположим, что автомобиль проходит со скоростью $v = 40 \text{ км/час}$ закругление радиуса 40 м . Расстояние между рессорами $l = 1,9 \text{ м}$. На которую из рессор (переднюю или заднюю) увеличится давление при прохождении закругления? Вычислить изменение реакций рессор.

Решить эту же задачу в предположении, что автомобиль на месте резко поворачивается на 180° за одну секунду. Найти в этом случае также дополнительное напряжение вала маховика, происходящее вследствие изгиба его гироскопическим моментом. Радиус вала равен 50 мм .

3. Мотоциклет проходит закругление радиуса 8 м со скоростью 32 км/час . Определить величину и указать направление дополнительного перемещения центра тяжести мотоциклета, обусловленное гироскопическим моментом от маховика мотоциклетного мотора, при следующих данных: маховик представляет однородный диск веса 15 кг и радиуса 21 см , вращающийся в средней плоскости машины с угловой скоростью 1800 об/мин в том же направлении, что и колеса; вес мотоциклета с седоком $G = 150 \text{ кг}$.

4. Определить момент реакций подшипников в примере 2 § 23 (турбинный диск), применив формулу (17).

5. В примере 1 § 32 (бегуны) вычислить реакцию неподвижной точки.

6. На рис. 154 дано схематическое изображение маятниковой мельницы: отливка A может вращаться вокруг оси OK , причем последняя в свою очередь вращается с угловой скоростью ω_2 . Вместе с тем ось OK может отклоняться от вертикали, вращаясь

¹⁾ $1 \text{ узел} = 0,5144 \text{ м/сек} = 1852 \text{ м/час} = 1 \text{ морск. миля/час}$.

вокруг шарнира O . Если угловая скорость ω_2 превосходит некоторое критическое значение

$$\omega_2^{(кр)} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{a}$$

то начальное вертикальное положение оси OK перестает быть устойчивым: при весьма малом отклонении отливки из этого положения она уже не возвращается к нему и при угловой скорости, превосходящей:

$$\omega'_2 = \sqrt{\frac{g}{l \cos \vartheta}}, \tag{б}$$

будет отброшена к стенке мельничной чаши. Достигнув стенки, отливка начнет вращаться вокруг нового положения OK' своей оси, катясь по стенке (считаем, что мгновенная ось проходит через

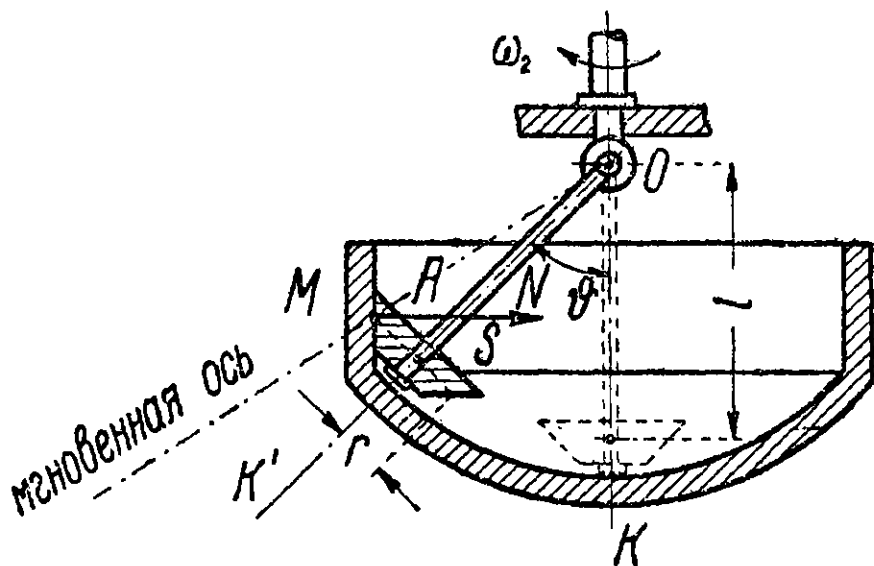


Рис. 154.

среднюю точку M линии соприкосновения отливки со стенкой), причем ось OK' будет описывать конус вокруг вертикали.

Требуется: 1) объяснить явление существования критической скорости и установить для нее ф-лу (а);

2) доказать, что при угловой скорости, определяемой ф-лой (б), отливка будет отброшена к стенке;

3) определить в последующем движении реакцию стенки N и проверить, что при $\omega_2 > \omega'_2$, $N > 0$, т. е. отливка действительно оказывает давление на стенку;

4) определить величину и направление реакции N_1 шарнира O ;

5) довести вычисление реакций до конца, принимая следующие данные:

угловая скорость $\omega_2 = 250$ об/мин; $\vartheta = 40^\circ$; $l = OS = 1$ м; средний радиус отливки $r = 0,15$ см; ее вес $G = 500$ кг, радиус инерции относительно оси OK — $\rho = 10$ см; при вычислении момента инерции относительно поперечной оси, проходящей через O , можно принять отливку за материальную точку, сосредоточив всю массу этого тела в его центре тяжести S .

Тема третья.

Работа и энергия

Из всех теорем динамики теорема об изменении энергии системы материальных точек или, как ее еще называют, теорема живой силы, несомненно, является самой глубокой и значительной как с теоретической стороны, так и со стороны практических приложений.

Чтобы понять смысл и значение этой теоремы, надо обратиться, с одной стороны, к истории зарождения ее и, с другой — к объяснению принципиальных отличий теоремы или принципа энергии от остальных теорем динамики.

На первых порах своего зарождения теорема живой силы не имела той общности, которую мы теперь ей придаем. Повидимому, Галилей (1632) первый обратил внимание на этот принцип, наблюдая падение тел. Галилей установил, что скорость движения падающего тела зависит только от высоты его падения. Известная уже учащемуся из кинематики формула Торичелли (1644), связывающая скорость и высоту падения, дает количественное выражение этого принципа для частного случая падения тел в пустоте.

После Галилея его последователь Гюйгенс (1629—1695) применил тот же принцип, без доказательства, в качестве аксиомы, к другой важной форме механического движения — колебательному движению маятника. Гюйгенс предполагал, что квадрат скорости движения маятника имеет то же значение на одинаковых расстояниях от положения равновесия маятника.

Для Галилея и Гюйгенса принцип сохранения (или лучше сказать, одинаковости) квадрата скорости, при прохождении данного пункта пространства (мы теперь говорим поля), движущимся телом; являлся лишь замеченным опытным явлением. Только Иван и Даниил Бернулли (1748) показали, что мы имеем здесь дело с общей теоремой динамики, вытекающей из основного закона Ньютона.

Следует отметить, что отчетливых терминов для новых понятий (работа, энергия), представляющих по своему физическому измерению комбинацию уже известных понятий массы, скорости, силы, пути, не было примерно до начала XIX века.

Термин *живая сила* был введен в 1684 г. Лейбницем, который ошибочно противопоставлял „живую силу“ движущегося тела „мертвой силе“ покоящегося тела — давлению: настолько в то время еще не ясно было представление о силе вообще.

Термин „работа“ появился гораздо позже в исследованиях Понселе, Дюпена, Прони и др. (примерно в 1826—29 году). Карно (1824) еще употреблял термины: „динамический эффект“, „механическая мощность“ и др. Идея энергии появилась гораздо позже — в работах Гельмгольца (1847) и Рэнкина (1853).

Первые применения теоремы об изменении „живой силы“ к изучению движения отдельных тел (падение, колебание) и теории машин имели в виду теорему в узком смысле только механических движений. Рассматривается изменение движения (живой силы) машины и работа заданных двигательных (активных) сил и работа сил сопротивления (пассивных сил). Взаимоотношение между этими величинами и составляло содержание теоремы живых сил. В этом виде, конечно, теорема живых сил является такой же теоремой динамики, как и предыдущие, изложенные нами в первых двух темах, теоремы. Основной особенностью этих теорем (включая, следовательно, и теорему живых сил в узком, механическом смысле) является отсутствие чего бы то ни было нового по сравнению с основным уравнением динамики, простым следствием которого они являются. Достаточное описание и предсказание механических, внешних движений материальных тел — вот и все, что давала теорема. Естественно, что при этом рассматриваемая теорема не давала связей явлений динамических с другими физическими явлениями окружающей среды. Такая оторванность динамики от физики могла быть допустима только до тех пор, пока физические явления (теплота, свет, электричество) были мало изучены и не входили еще в объект использования их зарождающейся техникой.

Такое положение не могло остаться приемлемым на следующем этапе развития техники, — этапе, который вполне отчетливо характеризуется *появлением паровой машины*. Здесь со всей очевидностью встал вопрос о получении механических внешних движений за счет каких то других, скрытых форм движения материи, проявляющихся в принципиально других признаках, как, например, теплота и ее показатель — температура. Механика на этом этапе уже перестала быть оторванной от других областей наук и, наоборот, легла в основу их первоначального развития.

Всем развитием механики было естественно подготовлено и вытекало из уравнений динамики, что работа приложенных сил (собственно работа) и работа ускорений (умноженных на массу), равная приращению живой силы, равны между собою и являются двумя различными формами энергии. В этом, как мы уже упоминали, не было ничего принципиально нового, выводящего механику за узкую сферу чисто механических движений. Понселе в 1826 г., пользуясь дополнительно понятием сил инерции (введенных Даламбером в 1743 г.), т. е. фиктивных сил, равных произведению массы на ускорение, но направленных против ускорения, дает теореме живых сил такую формулировку: „Сумма элементарных работ, с одной стороны, различных сил, производящих изменение движения, с другой стороны — сил инерции, рождающихся из этого изменения, всегда равна нулю“. Оставляя в стороне вопрос о смысле сил инерции — об этом будет речь в следующей части курса, —

укажем, что здесь принципиальное значение сил инерции не играет никакой роли, так как с тем же успехом можно изменить формулировку Понселе так: „При движении системы, сумма элементарных работ векторов приложенных сил и векторов ускорений, умноженных на массу, равны между собой“. Вся разница, очевидно, здесь в том, что мы подсчитываем работу величин, стоящих в левой и правой частях основного уравнения динамики, не перенося их в одну сторону.

В том и другом случае мы приходим к одному и тому же выводу, что изменение движения можно характеризовать некоторой величиной: или проявляемой как изменение живой силы, или как работа приложенных сил.

Принципиально новым и важным фактом для развития наших представлений о движении явилось утверждение Карно (1824) и Майера (1841), что *теплота является третьим* (наряду с собственно работой и живой силой) — *проявлением той же самой величины*, характеризующей данное движение. Эта характерная для движения, уже не только в механическом смысле, величина получила в дальнейшем наименование *энергии*.

В 1847 г. Гельмгольц впервые установил принцип сохранения энергии в виде утверждения постоянства суммы живой силы (кинетической энергии) и работы упругих сил (потенциальной энергии), причем указал на необходимость учета тепловой энергии при движении упругих тел, без которого закон сохранения энергии уже несправедлив.

Дальнейшее развитие физики показало колоссальное значение этого принципа, особенно в связи с установлением новых форм энергии (электрическая, химическая, лучистая). Для всех этих форм энергии оказался справедливым тот же закон сохранения энергии, который был первоначально установлен для механических движений. В чем заключается основное значение понятия энергии в общем естествознании? Конечно в том, что указывается некоторая *физическая, измеримая в определенных единицах, величина, проявляющаяся в самых разнообразных физических явлениях и таким образом связывающая их все между собою*. Понятие энергии перебрасывает мостик между механикой и теплотой, механикой и электричеством, а также, конечно, и между теплотой и электричеством и т. д.

Нет больше оторванных друг от друга явлений, как это вначале могло показаться. Все они представляют проявление движения материи, но только слово „движение“ уже не следует понимать в узком смысле „механического движения“, т. е. того внешнего движения, которое мы непосредственно всегда наблюдаем в природе, а в более общем смысле материального движения, иногда в скрытых формах „внутренних“ движений. Здесь особенно еще важно то, что все формы энергии можно количественно выражать в одних и тех же единицах, о которых речь впереди. В таком виде принцип сохранения энергии во всей полноте был указан впервые Рэнкином (1853): *„Всякий вид энергии может быть получен преобразованием некоторой работы“*.

Последняя установка лежит в основе современной техники, имеющей главной своей задачей именно преобразование, с одной стороны, механической энергии (энергия воды, ветра, животных) в другие виды, как, например, электрическую (в гидрогенераторах и др.), а с другой стороны, наоборот, тепловую энергию (паровая машина и др.), электрическую энергию (динамо и др.) превратить в механическую.

Развитие понятия энергии, обобщение этого понятия на самые, казалось бы, разнородные процессы, естественно, привело и к некоторым преувеличениям значения энергии. В конце XIX века появилось учение (во главе его встал Оствальд), ставящее энергию в основу всего мировоззрения и даже отрицающее обязательность существования материи. Был момент, когда „материя исчезла“ и осталась только одна энергия, которая определяла и структуру тел и все процессы природы.

Эти „энергетические преувеличения“ уже оставлены. Материя остается материей, а для изучения форм перехода механических движений в более сложные — внутренние движения материи — мы имеем общую меру всех движений — энергию. Следует строго разграничивать понятия материи и энергии. Конечно, поскольку движение есть неотделимый атрибут материи, а энергия — характерная и общая мера движения, постольку материя и энергия неразрывны, но материя реально существует вне нас, является объективной субстанцией, энергия же представляется субъективным продуктом нашего мышления, установленной нами мерой для изучения форм движения в связи с возможным переходом их из одной в другую. Представление об энергии, как о какой-то субстанции, заменяющей материю или с ней сосуществующей в природе, на наш взгляд, может привести к большим недоразумениям и затемнению сути дела.

Перейдем к рассмотрению основного для дальнейшего понятия — работы, роли этого понятия в теореме об энергии и связи его с другими механическими понятиями. Подобно тому, как импульс силы является мерой взаимодействия тел, характеризующей интенсивность этого взаимодействия в связи с интервалом времени, в течение которого взаимодействие наблюдается (вспомнить явление удара), точно так же работа характеризует интенсивность взаимодействия тел в связи с тем путем, на протяжении которого взаимодействие происходит.

При не особенно глубоком подходе к сравнению роли импульса и работы кажется, что и та и другая мера имеют при изучении различных явлений одинаково важное значение. В тех случаях, когда сила задана в функции от времени или значение ее может быть определено только как некоторое среднее во времени (мгновенная сила), естественной характеристикой эффекта силы является ее импульс; в других случаях взаимодействие материальных точек зависит от их расположения в пространстве, изменяющегося во время движения, так что силы определяются как функции координат (например упругие силы, электростатическое притяжение и др.); при этом эффект действия сил лучше всего характеризуется работой их.

Если материальная точка во время движения в некоторой части пространства подвергается действию сил, зависящих от того места в пространстве, через которое наша движущаяся точка в данный момент проходит, то говорят, что точка движется в силовом поле.

Эффект взаимодействия движущейся точки с силовым полем, т. е. в конечном счете разумеется не с полем, а с теми телами, наличие которых определяет это поле, очень хорошо может быть определен при помощи работы сил, приложенных к точке; так как большинство наблюдаемых в природе взаимодействий имеет как раз характер силовых полей, то этим объясняется значение работы, как величины, определяющей эффект взаимодействия материальных тел. Но этим однако случаем движения в силовом поле не ограничивается вовсе роль работы. Мы имеем ряд случаев, когда вообще ничего не знаем о силах взаимодействия, а между тем наблюдаем эффект полной их работы при переходе движущейся системы из одного положения в другое. В этих случаях работа является величиной, не зависящей от понятия силы вообще. Так, например, наблюдая за ходом сложной машины, мы замечаем торможение ее вредными сопротивлениями. Полную работу этих, как говорят, пассивных сил мы великолепно учитываем в коэффициенте полезного действия, между тем совершенно не знаем часто природы всех этих сил и законов их изменения во время движения.

В этой возможности при помощи понятия работы учитывать некоторый суммарный эффект действия сил, который, собственно говоря, и представляет главный интерес для многих технических вопросов, несомненно также заключается важное значение понятия работы. Заметим, что уже на первых порах применения идеи работы в теории машин эта роль работы была отмечена.

Истинное значение понятий работы и энергии для естествознания выявляется только при рассмотрении их, как составных элементов, входящих в закон сохранения и превращения энергии при реальных движениях, рассматриваемых достаточно широко, в общей связи происходящих в изучаемой системе процессов с процессами в окружающей эту систему среде.

Как мы уже упоминали в первой теме, основная задача динамики заключается в указании метода предсказания движений рассматриваемой системы в любой, почему либо интересующий нас момент, по заданным начальным условиям и закону изменения действующих сил.

В частном случае отдельной материальной точки на этот вопрос дает ответ и теорема импульсов и теорема об изменении энергии. Рассматривая интересующий нас момент времени или этап движения, как конец некоторого интервала, начало которого определяется заданными начальными условиями, мы можем сказать, что теорема импульсов давала нам вектор скорости движущейся точки в любой момент времени по заданному начальному вектору скорости и закону изменения вектора силы во времени.

Точно так же, как мы увидим в двенадцатом задании, по вычисленной работе, мы можем найти численную величину скорости точки в конце выбранного интервала пути с тем только, для на-

шего рассуждения не существенным, отличием от теоремы импульсов, что, применяя теорему энергии, мы не найдем вектора скорости, а лишь его численную величину (в случае прямолинейного движения эта разница не имеет значения).

Таким образом при изучении движения отдельной материальной точки вся разница в применении понятия импульса силы и работы ее как будто сводится к большей или меньшей простоте вычисления того или другого эффекта взаимодействия на данном участке движения. Если сила задана в функции от времени — удобнее импульс, если сила задана в функции от координат — работа. Это действительно так, но исключительно только в мало интересном с принципиальной стороны, узком вопросе движения отдельной материальной точки. Как мы только выйдем за схему отдельной дискретной точки и начнем рассматривать движение целой системы тел (например машины или механизма), так вопрос о сравнительной роли импульса и работы принимает совершенно другое значение.

Учащегося не затруднит вспомнить, что *изменение количества движения системы определялось суммой импульсов только внешних сил*. Внутренние силы не влияли на изменение количества движения системы и мы отмечали этот факт как *положительный*, позволяющий *упростить изучение движения системы*. Такое разделение внешних и внутренних сил и действительно было очень удобным с методической стороны приемом для решения ряда задач.

Посмотрим теперь на тот же вопрос с другой стороны, отметим *отрицательные* стороны тех теорем, которые составили предмет первых двух тем.

Что собственно означает факт независимости изменения полного количества движения системы от импульса внутренних сил, означает ли это вообще малую роль внутренних сил? Конечно нет, мы прекрасно знаем, что явления в сложных системах коренным образом обуславливаются именно внутренними взаимодействиями точек системы, а внешние тела часто служат только опорами для внешнего проявления процессов, целиком связанных с внутренней природой системы. Дело здесь просто в том, что, как *мера движения — количество движения*, так и *мера взаимодействия — импульс силы*, являются *слишком примитивными, ограниченными в своей сущности, мерами процессов*.

Очень хорошо, что эти меры упрощают подходы к решению некоторых отдельных задач, но очень плохо, что они слишком упрощают наши взгляды на явления.

Решать задачу при помощи теорем первых двух тем это означает в большинстве случаев отказаться от углубления в физическую сущность явлений, открывающуюся перед нами только при энергетическом рассмотрении процессов. Мы вскоре увидим, что, применяя теорему об изменении энергии системы, мы действительно учитываем эффект *всех* сил, как *внешних*, так и *внутренних*, т. е. получаем возможность проникнуть гораздо глубже в механизм явления, чем нам это позволяет механика „абсолютно“ твердых и отполированных тел.

Понятие работы, с одной стороны, и живой силы (кинетической энергии), с другой, дает нам неизмеримо больше, чем понятие импульса и количества движения и весьма естественно, что именно эти, а не другие понятия выводят нас за рамки механики в узком смысле слова, расширяют наши представления о движении, указывая пути связи с другими областями знания.

Мы хотим в заключение еще раз подчеркнуть главные принципиальные стороны теоремы об изменении энергии. Теорема эта имеет гораздо большее значение, чем все остальные теоремы динамики потому, что именно здесь связывается механика со всем остальным зданием современного естествознания.

Как уже упоминалось во введении к первой теме, общие теоремы динамики носят лишь вспомогательный характер, заключааясь по существу в уравнениях динамики. Закон сохранения энергии, в узком смысле „механической“ энергии, ничем не отличается от остальных теорем динамики. Если под энергией (механической) понимать сумму кинетической и потенциальной энергий механического движения, то мы не выйдем из рамок обычной механики, т. е. из области применения основных дифференциальных уравнений.

Закон сохранения механической энергии можно доказать, основываясь на уравнениях динамики, но в действительных физических условиях, взятый не оторванно от всех других физических обстоятельств движения, он уже несправедлив и должен быть заменен более общим законом сохранения энергии — первым началом термодинамики.

Закон сохранения энергии в общем своем содержании уже не вытекает из динамических уравнений, а утверждает некоторый универсальный закон природы. Мы не знаем еще всех видов энергии, возможных в природе, и все же выдвигаем принцип сохранения энергии как некоторый руководящий принцип, позволяющий установить количественные связи между разнородными на наш взгляд явлениями.

Отказываясь от пользования законами движения центра инерции, изменения количеств движений, импульсов или моментов, мы, конечно, усложним задачу, но принципиально сможем все же решить ее другими методами (например непосредственным интегрированием уравнений движения), — отказавшись же от понятия энергии и законов сохранения и рассеивания энергии, мы сужаем область применения механики, замыкаемся в ней и лишаем себя возможности рассматривать явления с достаточной полнотой и учетом всех физических связей данного явления с окружающей средой.

Вот почему мы считаем, что учащийся должен взять настоящую тему под особое внимание и, переходя от задания к заданию, обязательно глубоко вдумываться в основные понятия работы и энергии. С этими понятиями он конечно будет встречаться еще неоднократно в электротехнических и теплотехнических областях и только после всестороннего и длительного сопоставления понятий энергии в различных ее видах уяснит себе содержание этого понятия. То, что говорится в курсе механики, должно быть только

первым толчком, обращающим внимание учащегося на этот важный вопрос — мы уже знаем, что и исторически этот толчок был дан механикой.

Методические указания к теме. Прежде всего учащийся, при прохождении темы, должен себе отдать отчет в том, что он прорабатывает одну из самых важных тем всего курса механики. Материал этой темы он должен будет впоследствии применять в самых различных областях технических наук, безотносительно к тому, по какой специальности в дальнейшем потечет его работа. Как мы упоминали во введении к настоящей теме, в этом пункте курса мы имеем максимальное соприкосновение механики с другими физико-техническими областями.

С методической стороны наиболее трудно уложить в сознание понятие об энергии, как механической, так и вообще физической, и уяснить физический смысл связей этих понятий между собою, с одной стороны, и с более простым понятием работы — с другой. Единственным способом для усвоения этих понятий служит несомненно возможность проследить применение этих понятий в самых разнохарактерных по содержанию упражнениях; мы постарались дать учащемуся сравнительно большой материал для упражнений, выбрав его из разных отделов механических наук (теория вредных сопротивлений, теория упругости, явление удара, гидравлика), а также привели некоторые физические примеры.

При изложении теоретического материала мы пошли несколько необычным путем, а именно сначала, в первом задании, подробно изложили понятие работы, в связи с ним выяснили роль силового поля и его потенциальной энергии, затем во втором задании дали понятие кинетической энергии и только уже в третьем, последнем, задании привели все эти понятия в то количественное и качественное соответствие, которое именуется теоремой об изменении кинетической энергии и законом сохранения энергии. Сделали мы это сознательно потому, что довольно большой теоретический и практический материал, который мы хотели дать, в противном случае оказался бы сильно разбросанным. Мы полагаем, что учащимся уже был проработан небольшой пропедевтический курс механики, хотя бы в том объеме, как он дается в общем курсе физики, так что учащемуся уже вкратце известно, что для применения теоремы о кинетической энергии надо хорошо научиться владеть методами определения работы и кинетической и потенциальной энергии.

В первой половине первого задания учащийся научается вычислять работу сил на примерах наиболее распространенных на практике видов сил. Вычисление работы мы всюду переплетаем с вычислением мощности, так как весьма трудно разграничить случаи, где следует отдать предпочтение одной из этих двух важных динамических мер. Учащийся уловит общность и различие этих двух мер. Во второй половине первого задания рассматривается понятие работы в случае наличия силового поля и выясняется значение понятия потенциальной энергии и ее применений. Учащийся должен овладеть способом определения работы действующих сил через потенциальную энергию, во-первых, потому, что большинство рас-

считаемых нами сил является силами, имеющими потенциал, и во-вторых, потому, что на связи потенциальной энергии с работой основана вся аналитическая механика, изложению которой будет частично посвящена третья часть нашего курса.

Второе задание содержит изложение методов определения кинетической энергии, главным образом, сложных систем точек—твердых тел и их совокупности. Центральным местом здесь служит теорема Кенига со всеми ее применениями к системам точек и твердых тел. Наконец, как уже упоминалось, в третьем задании дается совокупное применение всех, введенных в предыдущих заданиях, понятий. Здесь учащийся научается применять понятие работы и энергии на практических расчетах, взятых нами из ряда технических областей. Усвоение этого материала учащийся должен особенно тщательно проконтролировать, так как без полного усвоения этого заключительного задания он не сможет провести почти ни одного динамического расчета, а также не сможет и продолжать чтение следующей части курса.

Мы обращаем внимание учащегося на заключительную часть третьего задания, посвященную закону сохранения энергии. Обычно эта часть курса механики бывает в загоне, и учащийся слабо себе представляет возможности учета превращений механической энергии в другие виды (этот вопрос остается где-то между курсами механики и термодинамики).

Наконец в заключение мы напоминаем учащемуся, что необходимо после проработки последнего задания вновь перечитать введение к теме, где многие важные вопросы станут ему яснее.

Задание 9-е

Работа и потенциальная энергия.

§ 33. Работа постоянной силы на прямолинейном пути. Скалярное произведение двух векторов. Работа как инвариантный скаляр.

Желая охарактеризовать эффект действия силы на материальную точку на протяжении некоторого пути, мы создаем меру этого эффекта, произведя умножение величины силы на величину пройденного пути. Эту меру мы называем *работой* силы на пути.

Такое определение работы годится, однако, только для самого простейшего случая движения, именно для прямолинейного пути и постоянной силы, направленной по движению точки. Изучая более детально эффект действия силы на движущуюся точку, мы замечаем, что: 1) если сила по направлению перпендикулярна перемещению точки, то никакого количественного изменения скорости движения она не производит, а только заставляет точку заворачивать по траектории (вспомнить естественные уравнения), 2) если сила направлена по движению точки, она на некотором пути дает эффект ускорения, т. е. увеличения скорости и 3) если сила направлена против движения, мы получаем эффект замедления.

Если в указанных трех случаях мы будем брать ту же по величине силу и то же по величине перемещение, только направлять по-разному силу по отношению к перемещению, то, очевидно, при той же мере — сила $\times$ путь — будем иметь совершенно различные эффекты. Выбранная таким образом мера нас не удовлетворяет, и мы должны вместо нее подобрать другую меру и именно такую, чтобы она учитывала взаимное направление вектора силы и вектора перемещения.

Такой мерой является произведение величины силы на величину перемещения и на косинус угла между ними, т. е. (рис. 155):

$$W = F \cdot u \cdot \cos \alpha$$

(1)

Если сила перпендикулярна перемещению, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha = 0$

и работа равна нулю; если сила направлена по перемещению $\alpha = 0$, $\cos \alpha = 1$ и работа просто равна произведению величины силы на величину перемещения и, наконец, если сила направлена против движения, $\alpha = \pi$, $\cos \alpha = -1$, работа равна произведению величины силы на величину перемещения, но произведение уже берется со знаком минус.

Мы видим, что предлагаемая мера учитывает разницу эффекта действия силы в зависимости от ее направления по отношению к перемещению, но сами направления силы и перемещения, взятые в отдельности, работой не отмечаются.

Работа имеет только численную величину, а направление для нее не характерно. Это отличие работы от силы и перемещения, имеющих, кроме численной величины и определенное направление в пространстве, мы выражаем тем, что силу и перемещение считаем векторами, а работу — скаляром.

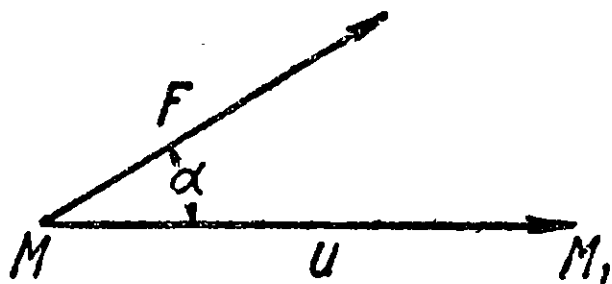


Рис. 155.

Учащийся знает уже из курса общей физики, что работа измеряется или в килограммометрах, как это принято в технике, или в эргах (дино-сантиметрах)—в физике, в джоулях (10^7 эргов), иногда еще в единицах мощности, умноженных на единицы времени—об этом речь впереди.

Выражение (1), определяющее по двум заданным векторам F и u некоторый скаляр, пропорциональный произведению длин векторов, дает пример новой операции над векторами — скалярного произведения двух векторов. Операция эта исторически создалась именно как обобщение на случай любых двух векторов понятия работы силы.

Скалярным произведением двух векторов a и b называется скалярная величина, равная произведению численных величин векторов-сомножителей на косинус угла между ними, или геометрически — произведению длины одного сомножителя на проекцию другого на направление первого.

Обозначается скалярное произведение в отличие от векторного произведения так:

$$(a, b) = ab \cos \alpha, \quad (2)$$

где α — угол между направлениями векторов сомножителей.

Мы можем теперь сказать, что *работа равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения*.

Было бы бесполезно искать объяснения, *почему работа равна скалярному произведению*, так как мы уже говорили, что операция скалярного произведения была первоначально введена в науку именно для обслуживания понятия работы, а затем уже в порядке обобщения и для других понятий.

Имея в виду дальнейшие постоянные применения понятия скалярного произведения, отметим главные свойства этого произведения.

1°. Переместительный закон. От перемены мест сомножителей скалярное произведение не меняется:

$$(a, b) = ab \cos \alpha = b \cdot a \cdot \cos (-\alpha) = (b, a).$$

Это свойство отличает скалярное произведение от векторного, изменяющего свое направление при перемене мест сомножителей (см. Кинематику) и напоминает обыкновенное произведение чисел.

2°. Распределительный закон при умножении скалярного произведения на скаляр. Умножая скалярное произведение двух векторов на скаляр λ , будет иметь:

$$\lambda (a, b) = \lambda \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha = \begin{cases} \lambda a \cdot b \cdot \cos \alpha = (\lambda a, b), \\ a \cdot \lambda b \cdot \cos \alpha = (a, \lambda b). \end{cases}$$

3°. Скалярное произведение равно нулю: если один из сомножителей равен нулю или если сомножители и не равны нулю, но взаимно перпендикулярны. Последнее свойство резко отличает скалярное произведение от обыкновенного арифметического произведения, равенство нулю которого имеет непосредственным следствием обращение в нуль одного из сомножителей.

При заданных двух неравных в отдельности нулю векторах равенство нулю их скалярного произведения является *условием их взаимной перпендикулярности*.

4°. Скалярное произведение двух параллельных векторов равно произведению численных величин этих векторов со знаком плюс, если вектора сонаправлены и знаком минус если вектора разнонаправлены. Скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату его численной величины:

$$(a, a) = a^2.$$

5°. Выражение скалярного произведения через проекции сомножителей на оси прямоугольной системы координат легко получить, пользуясь известной формулой аналитической геометрии для косинуса угла между двумя направлениями.

Если косинусы углов одного вектора-сомножителя с осями

координат: l, m, n , а другого l', m', n' , то косинус угла между векторами равен:

$$\cos \alpha = ll' + mm' + nn',$$

но

$$l = \frac{a_x}{a}, \quad m = \frac{a_y}{a}, \quad n = \frac{a_z}{a}; \quad l' = \frac{b_x}{b}, \quad m' = \frac{b_y}{b}, \quad n' = \frac{b_z}{b},$$

так что имеем

$$(a, b) = ab \cos \alpha = ab \left(\frac{a_x}{a} \cdot \frac{b_x}{b} + \frac{a_y}{a} \cdot \frac{b_y}{b} + \frac{a_z}{a} \cdot \frac{b_z}{b} \right),$$

откуда ¹⁾

$$\boxed{(a, b) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z} \quad (3)$$

В частном случае $b = a$ имеем уже известную нам формулу квадрата величины вектора:

$$(a, a) = a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2.$$

6°. Распределительный закон относительно сложения скалярных произведений.

Покажем, что

$$\boxed{(a + b + \dots, P) = (a, P) + (b, P) + \dots} \quad (4)$$

Развернем левую часть по (3), тогда получим:

$$(a + b + \dots, P) = (a_x + b_x + \dots)P_x + (a_y + b_y + \dots)P_y + (a_z + b_z + \dots)P_z = (a_x P_x + a_y P_y + a_z P_z) + (b_x P_x + b_y P_y + b_z P_z) + \dots = (a, P) + (b, P) + \dots$$

7°. Скалярные произведения ортов осей координат имеют значения:

$$\left. \begin{aligned} (i, i) &= (j, j) = (k, k) = 1 \\ (i, j) &= (j, k) = (i, k) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Пользуясь этими формулами, распределительным законом (4) и разложением векторов-сомножителей по ортам легко вновь получить ф-лу (3). Действительно:

$$(a, b) = (a_x i + a_y j + a_z k, b_x i + b_y j + b_z k) = a_x b_x (i, i) + a_x b_y (i, j) + a_x b_z (i, k) + a_y b_x (j, i) + a_y b_y (j, j) + a_y b_z (j, k) + a_z b_x (k, i) + a_z b_y (k, j) + a_z b_z (k, k) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

8°. Инвариантность скалярного произведения.

Проекции векторов зависят от того, на какие именно оси мы вектора проектируем, — они *вариантны* по отношению к преобразованию осей координат. Выражения, содержащие варианты величины (в частности проекции векторов), вообще говоря, тоже

¹⁾ Ни в коем случае не следует думать, что ф-ла (3) дает проекцию скалярного произведения. Такой термин не имел бы никакого смысла, так как нельзя брать проекцию скаляра. Ф-ла (3) дает выражение скалярного произведения через проекции сомножителей.

вариантны (при перемене системы осей), но среди всех таких выражений существуют некоторые, особые (они имеют важное значение в науке), обладающие свойством не менять свое значение при переходе от одной системы координат к другой.

Такие комбинации вариантных величин называют *инвариантами* по отношению к изменению системы координат. Очевидно, что всякая *скалярная величина*, являющаяся *мерой некоторого физического явления*, должна быть *инвариантной*, не зависящей от выбора системы координат, так как описываемое ею явление существует вне нас, не зависимо от того, в какой системе координат мы его будем изучать.

В дальнейшем мы будем называть *скалярами* только *инвариантные* величины, так как всякие другие не имеют физического значения. Докажем, что *скалярное произведение двух векторов есть инвариант*. Для этого напомним скалярное произведение в одной системе координат:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (6)$$

и в другой:

$$a_x' b_x' + a_y' b_y' + a_z' b_z', \quad (7)$$

и покажем, что эти величины равны между собою. Вспомним формулы преобразования проекций вектора при переходе от одной системы к другой:

$$a_x' = \alpha_1 a_x + \alpha_2 a_y + \alpha_3 a_z,$$

$$a_y' = \beta_1 a_x + \beta_2 a_y + \beta_3 a_z,$$

$$a_z' = \gamma_1 a_x + \gamma_2 a_y + \gamma_3 a_z,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \gamma_2, \gamma_3$ представляют косинусы углов между старыми и новыми осями координат. Подставляя эти выражения в (7), получим:

$$a_x' b_x' + a_y' b_y' + a_z' b_z' = (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) a_x b_x + (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2) a_y b_y + (\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2) a_z b_z + (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2) a_x b_y + \dots,$$

или, замечая, что суммы квадратов косинусов между какой-нибудь осью одной системы и осями другой системы равны единице, а произведения косинусов равны нулю, получим

$$a_x' b_x' + a_y' b_y' + a_z' b_z' = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

что и доказывает инвариантность скалярного произведения. Все только что перечисленные свойства скалярного произведения являются обобщениями соответствующих свойств и формул для работы. Отметим главнейшие:

а) Работа силы в λ раз большей, чем F , на перемещении и равна работе силы F на перемещении в λ раз большем, чем u , если направления силы и перемещения остаются те же (свойство 2°).

б) Работа силы на нулевом перемещении равна нулю, точно так же, при отсутствии силы, нет работы каково бы ни было перемещение. Если работа силы на некотором перемещении равна нулю, то отсюда еще не следует, что сила равна нулю или перемещение равно нулю. Может оказаться, что сила перпендикулярна перемещению (свойство 3°).

в) Работа силы, направленной по перемещению, равна произведению величины силы на величину перемещения со знаком плюс, т. е. работа положительна (например работа силы веса при вертикальном падении тела и др.).

Работа силы, направленной прямо противоположно перемещению, равна произведению величины силы на величину перемещения, но со знаком минус, т. е. в этом случае работа отрицательна (например работа силы веса при поднятии груза, работа силы трения и др.) (свойство 4°).

г) Работа силы $\mathbf{F}$, имеющей проекции F_x, F_y, F_z на перемещении $\mathbf{u}$ с проекциями u_x, u_y, u_z равна:

$$\boxed{W = F_x u_x + F_y u_y + F_z u_z} \quad (8)$$

как это следует из формулы (3).

д) Работа равнодействующей сил, приложенных к движущейся точке, на некотором перемещении, равна сумме работ отдельных сил на общем для них перемещении точки приложения. Если к точке, совершающей перемещение $\mathbf{u}$, приложены силы $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3 \dots$ с равнодействующей $\mathbf{R}$, то работа равнодействующей [по (4)] равна:

$$W = (\mathbf{R}, \mathbf{u}) = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots, \mathbf{u}) = (\mathbf{F}_1, \mathbf{u}) + (\mathbf{F}_2, \mathbf{u}) + (\mathbf{F}_3, \mathbf{u}) + \dots = W_1 + W_2 + W_3 + \dots$$

е) Работа силы на совокупности перемещений равна работе силы на результирующем перемещении. Доказательство аналогично предыдущему.

ж) Работа силы на перемещении есть инвариантная величина, не зависящая от выбора осей координат, а только от величины силы, величины перемещения и взаимного их расположения. Это предложение лишний раз подтверждает физичность работы, как определенной меры взаимодействия тел, а не просто собранного нами по произволу алгебраического выражения. Мы не даем в заключение этого параграфа примеров, так как они крайне просты и вероятно уже были сделаны учащимся в курсе физики.

§ 34. Работа переменной силы на прямолинейном и криволинейном пути. Элементарная работа силы. Работа силы на конечном участке пути.

Данный в предыдущем параграфе метод определения работы пригоден только в том случае, когда сила на всем участке движения одинакова по величине и направлению и, кроме того, сам участок представляет собою прямолинейный отрезок.

В более общем случае переменной силы на прямолинейном участке такое определение работы уже даст неверный результат. Точно так же и в самом общем случае переменной силы и криволинейного участка мы опять не можем определить работу, как скалярное произведение силы на перемещение, потому что в этом случае, кроме переменности силы, мы имеем еще и различие между путем и перемещением; напомним, что длиной пути будет длина дуги траектории от начального до конечного пункта участка, а

длиной перемещения — длина вектора, соединяющего начальное и конечное положения точки, т. е. длина хорды, стягивающей соответствующую дугу траектории.

Анализ бесконечно-малых подсказывает нам легкое и правильное решение поставленной задачи определения работы произвольно изменяющейся силы на любом криволинейном пути. Разобьем конечную дугу $\widetilde{M_1 M_2}$ (рис. 156) на бесконечно большое число бесконечно-малых слагаемых. Тогда, взяв одну какую-нибудь промежуточную бесконечно-малую дугу ds за элементарный путь и обозначая соответствующий ей вектор перемещения, ориентированный по касательной в сторону движения через $d\mathbf{r}$, а среднее значение вектора силы на этом бесконечно-малом элементарном пути через $\mathbf{F}$, напомним работу силы $\mathbf{F}$ на этом элементарном пути или, как говорят, *элементарную работу силы*:

$$\delta W = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = F \cdot ds \cdot \cos \alpha \quad (9)$$

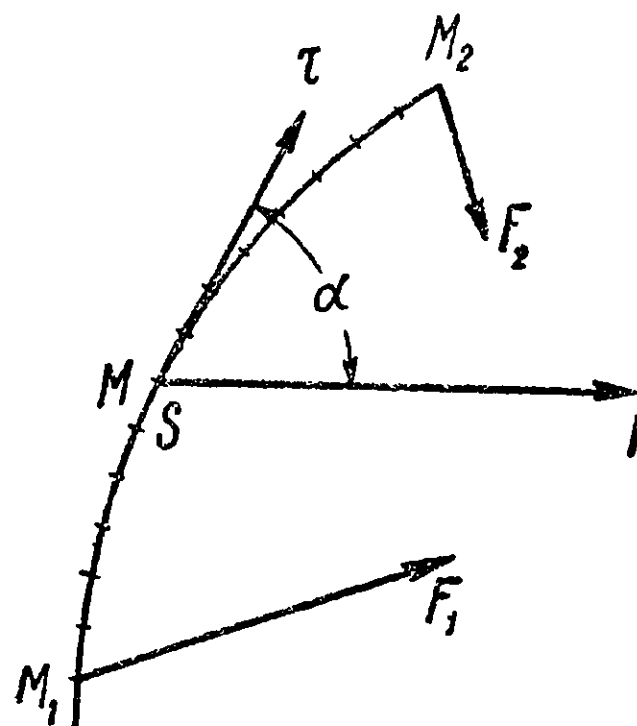


Рис. 156.

Мы вычислили, таким образом, работу силы на элементарном участке лишь приближенно, так как взяли среднее значение силы на участке, но учащийся уже знает, что ошибка, которую мы при этом допустили, будет иметь высший порядок малости, чем порядок выбранного интервала пути. Желая теперь перейти к полной работе силы на всем конечном участке, мы должны взять сумму

бесконечно-большого числа бесконечно-малых элементарных работ силы на отдельных интервалах пути, составляющих весь путь $\widetilde{M_1 M_2}$, т. е. интеграл, который мы обозначим так:

$$W_{1,2} = \int_{\widetilde{M_1}}^{\widetilde{M_2}} (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = \int_{\widetilde{M_1}}^{\widetilde{M_2}} F \cdot ds \cdot \cos \alpha \quad (10)$$

Значки снизу $\widetilde{W}$ показывают, что работа вычисляется на пути от положения M_1 до положения M_2 .

Интеграл (10), представляющий искомую сумму элементарных работ, не может быть рассматриваем как простой определенный интеграл, взятый в пределах M_1 и M_2 . Отличие его в том, что бесконечно-малые элементы, суммируемые им, относятся не к бесконечно-малым отрезкам прямолинейной оси, например x -ов, как это имеет место в интеграле:

$$\int_a^b f(x) dx,$$

а к отрезкам, расположенным вдоль кривой (рис. 156). Вот почему интеграл (10) в общем случае называется *криволинейным интегралом, взятым вдоль дуги кривой от точки M_1 до M_2* ¹⁾. Мы сейчас покажем, что такой интеграл легко сводится к простому прямолинейному определенному интегралу. Для этого предположим, что нам задано движение точки M в интервале (M_1M_2) уравнениями движения:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \\ z &= f_3(t) \end{aligned} \right\} \tag{11}$$

и, крѐме этого, задан закон изменения силы в зависимости от изменения времени, координат и скорости:

$$\left. \begin{aligned} F_x &= F_1(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ F_y &= F_2(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ F_z &= F_3(t; x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

Тогда, написав выражение элементарной работы силы (9) в проекциях на оси по ф-ле (3):

$\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz$

(13)

и, подставив всюду вместо x, y, z и $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ их выражения через время t , получим

$$\delta W = F_1[t; f_1(t), f_2(t), f_3(t); f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t)] f_1'(t) dt + \dots$$

или, вынося dt за скобку:

$$\delta W = \Phi(t) dt,$$

где $\Phi(t)$ — известная функция от времени, равная:

$$\Phi(t) = F_1[t; f_1(t) \dots] f_1'(t) + F_2[t; f_1(t) \dots] f_2'(t) + F_3[t; f_1(t) \dots] f_3'(t).$$

Чтобы найти полную работу на пути (M_1, M_2) , надо просуммировать значения δW по времени от момента t_1 , когда точка M проходила через положение M_1 до момента t_2 , когда точка M прошла пункт M_2 , таким образом будем иметь

$$W_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(t) dt.$$

Задача сводится к вычислению определенного интеграла по аргументу t . Обращаем внимание учащегося на следующее важное замечание. При обозначении элементарной работы мы не случайно употребили символ δ вместо d . Сделали мы это потому, что обычный символ dW подсказал бы учащемуся в общем случае *непра-*

1) Заметим, что интеграл типа (10) определяет *циркуляцию* вектора F по дуге M_1M_2 . Такие интегралы играют громадную роль в гидродинамике. *Работа равна циркуляции силы по пути.*

вильный вывод, что элементарная работа равна дифференциалу работы W . Если бы движение происходило по прямолинейной оси, например x -ов, и сила являлась функцией одного только x , то элементарная работа

$$\delta W = F_x(x) dx$$

действительно представляла бы дифференциал

$$\delta W = d \int_{x_1}^x F_x(x) dx$$

от некоторой величины

$$\int_{x_1}^x F_x(x) dx.$$

В общем же случае выражение

$$\delta W = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

вовсе не представляет полного дифференциала от функции, поэтому символ δW следует понимать только как символ бесконечно-малой величины, а отнюдь не дифференциал от W .

В дальнейшем мы выясним наличие частных классов сил, обладающих тем свойством, что для них элементарная работа представляется полным дифференциалом. Эти силы представят для нас громадный интерес, и мы о них подробно будем говорить, — учащийся должен остерегаться обобщать свойства этих частных классов сил на общий случай.

Желая охарактеризовать производимую работу с точки зрения времени, в течение которого она производится, вводят понятие *мощности*, как отношение произведенной работы к протекшему времени или как работу, отнесенную к единице времени. Обозначая мощность через N , можем написать ¹⁾.

$$N = \frac{\delta W}{\delta t} = \left(\mathbf{F}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = (\mathbf{F}, \mathbf{v}) \quad (14)$$

Мощность равна скалярному произведению силы на скорость.

За единицу мощности можно принять любую единицу работы, отнесенную к единице времени, т. е. эрг/сек, джоуль/сек, кг.м/сек, но обычно за единицу мощности принимают самостоятельные единицы:

$$1 \text{ ватт} = 10^7 \frac{\text{эрг}}{\text{сек}} = 1 \frac{\text{джоуль}}{\text{сек}} = 0,102 \frac{\text{кг.м}}{\text{сек}}$$

¹ Мы иногда пишем δt , а иногда dt ; делаем это для того, чтобы учащийся не подумал, что выражение $\frac{\delta W}{\delta t}$ представляет полную производную по времени. Относя δt к $d\mathbf{r}$, мы уже пишем dt , так как $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ есть действительно производная по времени, т. е. скорость.

$$1 \text{ киловатт} = 10^3 \text{ ватт} = 10^{10} \frac{\text{эрг}}{\text{сек}} = 102 \frac{\text{кг.м}}{\text{сек}}$$

$$1 \frac{\text{кг.м}}{\text{сек}} = 9,807 \text{ ватт.}$$

$$1 \text{ лош. сила (HP)} = 75 \frac{\text{кг.м}}{\text{сек}} = 0,735 \text{ киловатт.}$$

Мощность характеризует быстроту получения работы во времени: чем большую работу производит машина в данный промежуток времени, тем она более мощна. Эту важную меру движения не следует смешивать с другой менее употребительной мерой — *действием*, определяемым, как *произведение работы на протекшее время*, и измеряемым в *эрг.сек*, *джоуль.сек* и др.

Иногда работу измеряют в единицах мощности, умноженных на единицу времени, т. е. в *ваттсек*, в *киловаттчасах* и т. п.

Учащийся должен добиться умения пользоваться всеми этими единицами. Для этого мы сейчас же ему даем материал для упражнений и в дальнейшем постоянно будем пользоваться самыми различными, но наиболее употребительными единицами.

Весь материал настоящего и предыдущего параграфов относился к случаю одной материальной точки. В случае системы точек мы определяем работу, мощность и др. как сумму работ или мощностей движений отдельных точек, входящих в систему. Мы это покажем на упражнениях.

Примеры и упражнения.

1. Живые двигатели, их работа и мощность. В виде первых примеров сообщим некоторые сведения о живых двигателях; прежде всего о человеке, а затем о других животных, используемых человеком для полезной работы. Характерное отличие живых двигателей от машин и механизмов заключается в значительной зависимости их от продолжительности работы, связанной с утомляемостью. Вообще чем менее продолжительна работа, тем большую мощность можно получить от живого двигателя. Так, например, человек может в течение нескольких секунд развивать мощность около 1 киловатта, при более продолжительной работе мощность падает.¹⁾

Человек весом 70 кг за 3 сек вбегает на лестницу в 6 м высоты. Работа равна $70 \cdot 6 = 420 \text{ кг.м}$, мощность $\frac{70 \cdot 6}{3} = 140 \frac{\text{кг.м}}{\text{сек}} = 1,37 \text{ киловатт}$. При ходьбе с нормальной скоростью 5 км/час $= 1,4 \text{ м/сек}$ человек с массой 70 кг развивает мощность только 60 ватт, при форсированном марше (7 км/час) мощность увеличивается до 200 ватт. При езде на велосипеде со скоростью 9 км/час нужно 30 ватт, при 18 км/час потребляемая мощность — 120 ватт.

¹⁾ Заимствуем некоторые численные примеры из книг: Р. В. Поль. Введение в механику и акустику, ГНТИ, 1932. Л. Б. Левенсон. Общая теория машин, ГТИ 1923.

Наивыгоднейшая производительность работы наблюдается при продолжительности работы не свыше 8 часов. При этом у человека, лошади и вола получаются следующие средние усилия, скорости и мощности:

	Человек	Лошадь	Вол
Среднее усилие в кг	14	56	56
Средняя скорость в м/сек	0,8	1 — 1,25	0,8
Мощность в лош. сил.	0,1	0,5 — 0,66	0,35 — 0,55

Для сравнения этих цифр с механическими двигателями укажем, что легковой автомобиль дает от 4 до 10 лош. сил на тонну веса (средний вес около 1 т), грузовой автомобиль от 2 до 5 лош. сил на одну тонну веса (средний вес около 5 т) Мы знаем, что мощные двигатели (например гидравлические турбины) дают мощности свыше миллиона лош. сил.

2. Определение работы при помощи индикаторной диаграммы. Остановимся теперь на определении работы давления рабочих газов в двигателе внутреннего горения, причем в качестве примера возьмем четырехтактный двигатель Дизеля.

В течение первого такта через открытый впускной клапан происходит засасывание воздуха в цилиндр при давлении несколько ниже атмосферного. Во втором такте (сжатие) впускной клапан закрывается и происходит процесс сжатия воздуха до максимального давления (в нашем примере до 32 кг/см²). Когда поршень будет находиться во внешнем мертвом положении, в камеру сжатия производится впрыскивание жидкого топлива, которое постепенно сгорает при неизменном давлении, причем поршень за это время проходит 10 — 15 % своего пути назад; вслед за этим прекращается подача топлива и наступает процесс расширения рабочих газов, продолжающийся до тех пор, пока поршень не придет во внутреннее мертвое положение — сгорание и расширение составляют третий (рабочий) такт двигателя. При обратном четвертом такте происходит выпуск продуктов сгорания через выпускной клапан при давлении выше атмосферного.

Все эти процессы графически изображаются индикаторной диаграммой, причем по оси ординат откладываются давления газа в цилиндре, соответствующие различным положениям поршня, указанным по оси абсцисс. Очевидно, что абсциссы на индикаторной диаграмме вместе с тем дают и объем, занимаемый газом в цилиндре. На рис. 157 изображена теоретическая индикаторная диаграмма; фактическая индикаторная диаграмма, снимаемая при помощи индикатора, отличается от построенной отсутствием острых углов и некоторыми другими деталями.

Работа давления p при перемещении поршня $|ds|$ очевидно определяется формулой:

$$\delta W = \pm p \sigma |ds|, \tag{15}$$

где σ — площадь поршня; знак $+$ соответствует третьему (рабочему) такту; знак минус, как это следует из сказанного выше, надо брать во всех прочих тактах. Так как $|ds| \sigma$ есть изменение объема $|dv|$, то формула (15) может быть переписана в виде

$$\delta W = \pm p |dv|, \tag{16}$$

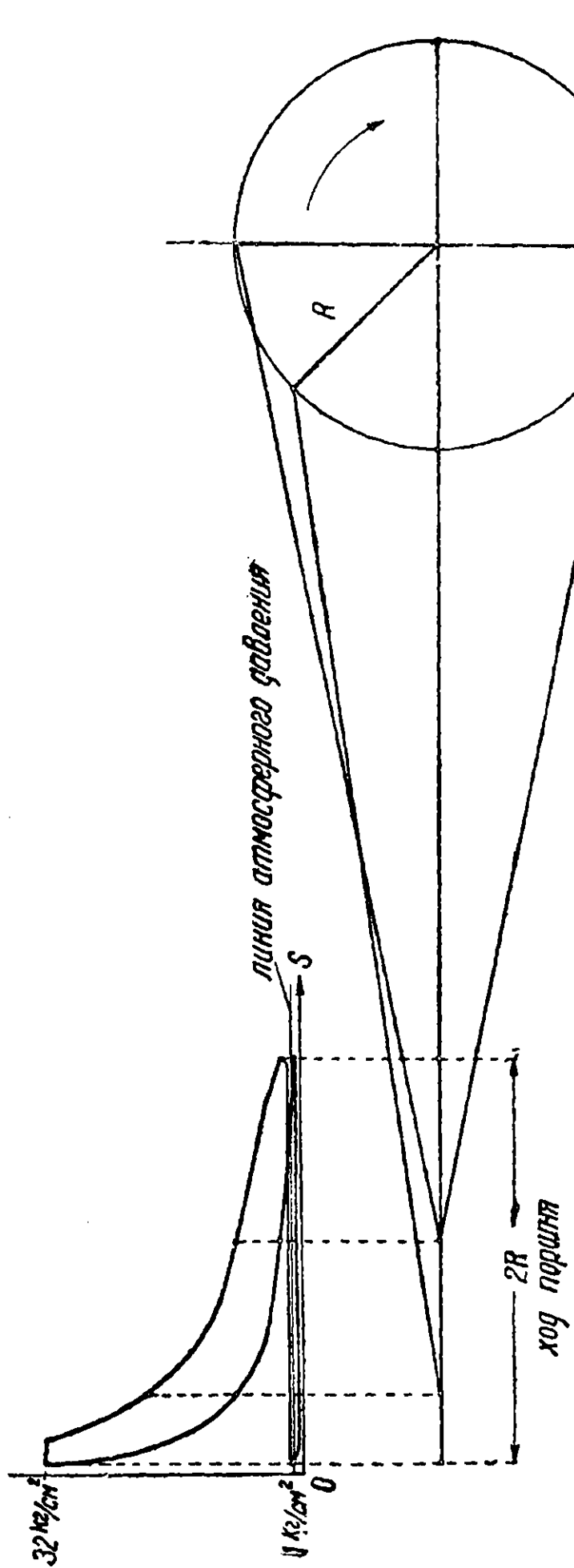
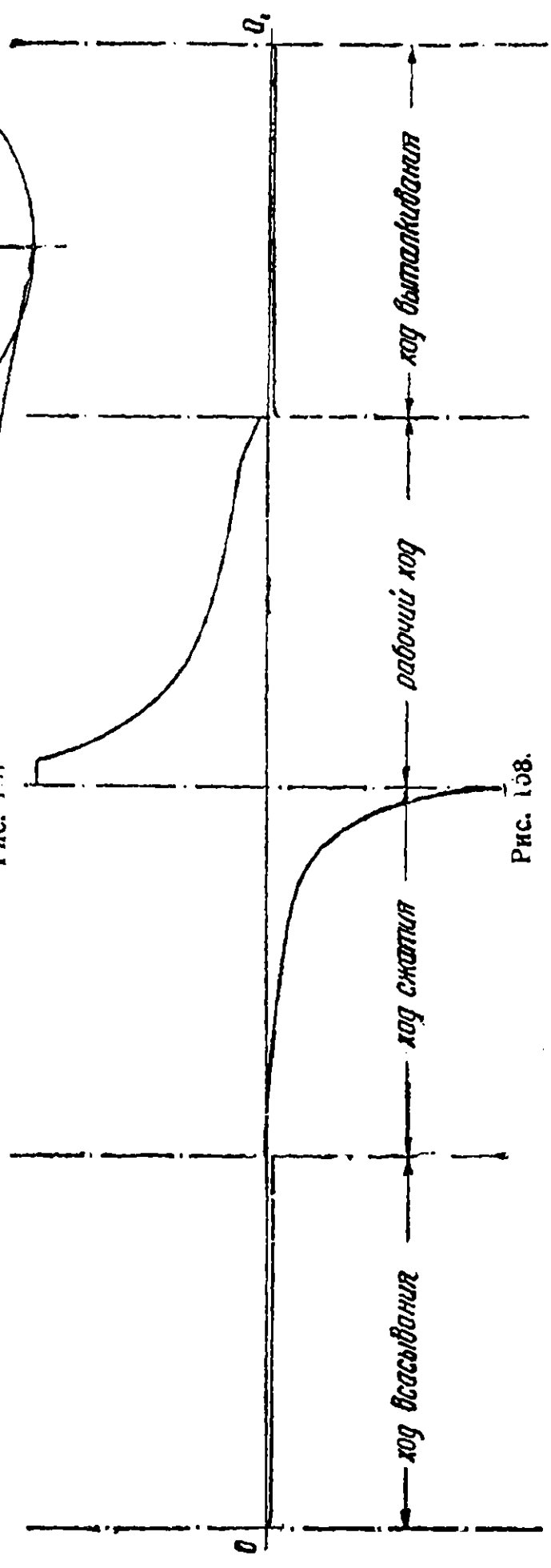


Рис. 157



и полная работа, доставляемая рабочей смесью за весь четырех-тактный процесс, представится в виде интеграла:

$$W = \int p \, dv,$$

причем, согласно сказанному, из работы W_3 , соответствующей треть-ему такту, надо вычесть работы W_2 , W_1 , W_4 , соответствующие сжатию, всасыванию и выталкиванию — последними двумя ввиду

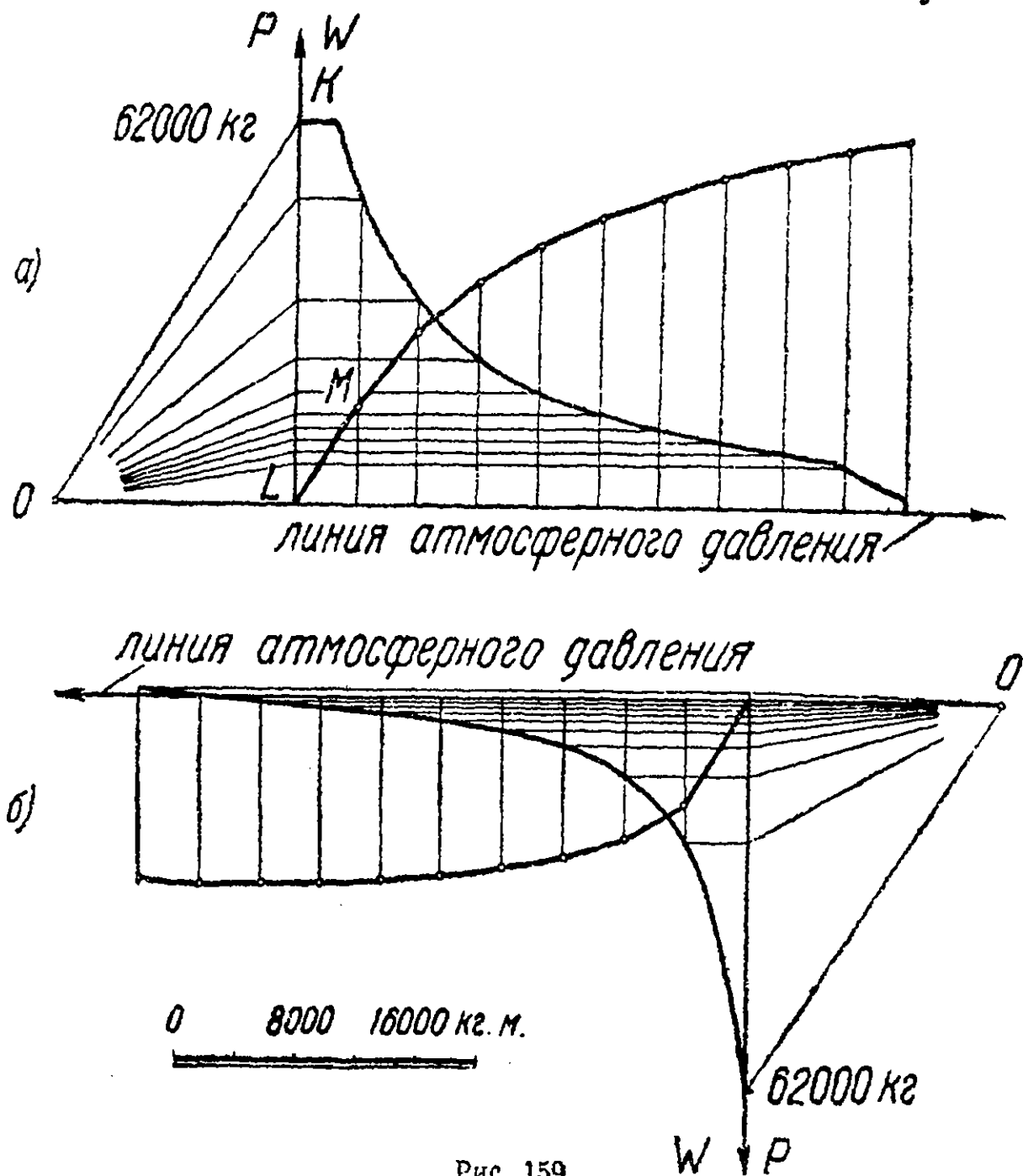


Рис. 159.

их малости можно пренебречь. Имея в виду, что W_3 графически представляется площадью, ограниченной кривой расширения и осью абсциссы, и что аналогичное значение имеют остальные слагаемые W_2 , W_1 , W_4 , легко заключить, что полная работа W представляется площадью замкнутой кривой, изображающей индикаторную диаграмму (при этом площадью нижней петли, согласно сказанному, мы пренебрегаем). Эта площадь обычно определяется помощью планиметра. Если же желательно иметь зависимость произведенной работы от положения поршня, то надо произвести

графическое интегрирование. Для этого предварительно лучше вычертить кривые, соответствующие отдельным тактам, что сделано на рис. 158. Процесс графического интегрирования произведен на рис. 159 а и б; чтобы получить полную работу за весь цикл, нужно очевидно взять разность крайних ординат интегральных кривых а и б.

Пусть площадь поршня равняется 2000 см^2 , ход поршня $2R = 1 \text{ м}$, число оборотов двигателя в минуту 180; при интегрировании примем полюсное расстояние равным 4 см . Имея в виду, что 1 см чертежа соответствует по оси ординат 10000 кг силы давления на полную площадь поршня, а по оси абсцисс 10 см хода поршня, найдем, что 1 см ординаты интегральной кривой будет соответствовать работе, равной

$$4 \cdot 10 \cdot 10000 \text{ кг. см} = 4000 \text{ кг. м.}$$

При разности крайних ординат интегральных кривых а и б в 3 см получим 12000 кг. м. работы за полный цикл, соответствующий двум оборотам, т. е. $\frac{2}{3}$ сек. Средняя индикаторная мощность двигателя будет

$$N_{\text{инд}} = \frac{12000 \cdot 3}{75 \cdot 2} = 240 \text{ HP.}$$

Принимая коэффициент полезного действия равным $0,75$, найдем мощность двигателя на валу:

$$N = N_{\text{инд}} 0,75 = 180 \text{ HP.}$$

3. Работа силы веса материальной точки и твердого тела. Вычислим работу силы веса отдельной материальной точки. Пусть точка M (рис. 160) веса p переместилась по некоторой траектории L из точки M_1 в точку M_2 . Элементарная работа веса на перемещении dr будет равна

$$\delta W = (p, dr) = p \cdot ds \cdot \cos \alpha,$$

но, как видно из чертежа, при выбранном направлении осей

$$ds \cdot \cos \alpha = -dz,$$

так что элементарная работа имеет вид полного дифференциала

$$\delta W = -p \cdot dz = d(-pz). \quad (17)$$

Полная работа веса на конечном участке траектории $M_1 M_2$ будет равна

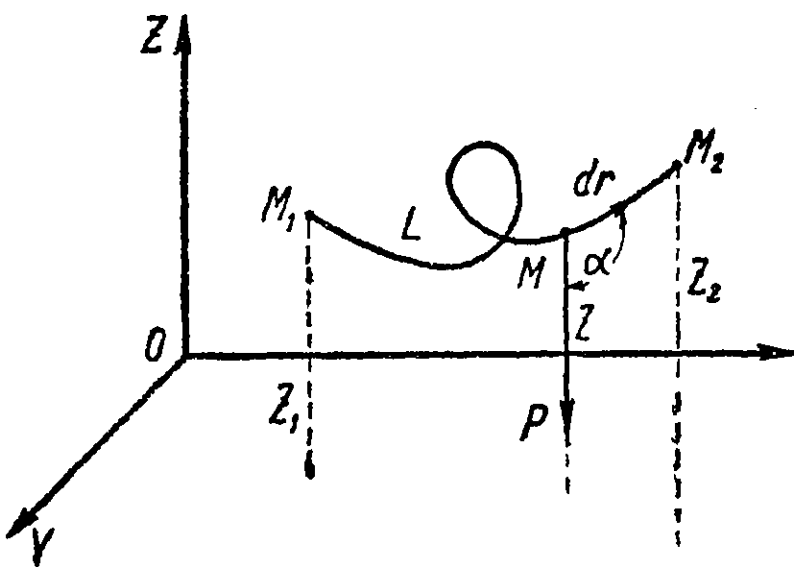
$$W_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = \int_{M_1}^{M_2} d(-pz) = p(z_1 - z_2). \quad (18)$$

Замечая, что разность ординат $(z_1 - z_2)$ определяет разность высот начального и конечного положений точки над горизонтальной плоскостью XOY (причем эта разность положительна, если точка опускается в результате движения вниз, и отрицательна, если точка поднимается вверх), можем высказать положение: „*работа веса материальной точки равна произведению веса ее на разность*

высот начального и конечного положения, причем работа положительна, если конечное положение ниже начального, и отрицательна в противоположном случае".

Таким образом, если точка, сойдя с некоторой высоты, в результате движения вернется вновь на ту же высоту над горизонтом, работа веса будет равна нулю.

Чрезвычайно существенно, что (как это видно из ф-лы 18), работа веса не зависит от формы траектории, по которой точка перешла из начального положения в конечное; работа определяется весом и начальным и конечным положениями точки, а отнюдь не формой движения внутри рассматриваемого участка. Это свойство веса оказывается характерным не только для силы веса, но и для широкого класса других сил, которые мы в дальнейшем назовем *потенциальными* или *консервативными*; отметим пока только, что элементарная работа веса (и вообще консервативных сил)



выражается по (17) *полным дифференциалом* и именно поэтому работа на конечном участке оказалась не зависящей от формы траектории. К этому вопросу мы вернемся специально в следующем параграфе. Рассмотрим теперь работу сил веса некоторого твердого тела,двигающегося как угодно в пространстве.

Представляя себе тело как совокупность материальных точек, находящихся друг от друга на неизмен-

ных расстояниях, можем определить работу силы веса тела как сумму работ веса отдельных точек, составляющих тело, т. е.

$$W_{1,2} = \sum p(z_1 - z_2) = (\sum pz)_1 - (\sum pz)_2.$$

Здесь знак суммы (опускаем индексы суммирования) обозначает суммирование по всем точкам тела, а значки 1 и 2 — начальное и конечное положения тела. Вспоминая из статики (см. также нашу Кинематику, стр. 38), что

$$\frac{\sum pz}{\sum p} = z_c, \text{ т. е. } \sum pz = P \cdot z_c,$$

где z_c обозначает ординату центра тяжести, а $P = \sum p$ — полный вес тела, находим

$$W_{1,2} = P(z_{c1} - z_{c2}). \quad (19)$$

Эта крайне важная формула утверждает, что *работа веса тела на конечном участке пути при любом его движении равна произведению веса на разность высот начального и конечного положений центра тяжести тела, причем работа отрицательна при*

поднятии центра тяжести и положительна при опускании его. Мы видим, что при вычислении работы веса можно любое тело, как бы ни было сложно его поступательное и вращательное движение, рассматривать как материальную точку — центр тяжести — сосредоточивая в этой точке всю массу тела. Это положение еще раз подчеркивает значение понятия центра тяжести в динамике.

При движении тяжелого твердого тела, кроме сил веса отдельных его частиц, имеются еще конечно и *силы взаимодействия частиц между собою*. Является вопрос, не следует ли при вычислении работы движущегося твердого тела принять во внимание и *работу внутренних сил взаимодействия частиц*, составляющих тело. Отбрасывать внутренние силы при вычислении работы, подобно тому как мы это делали в теоремах предыдущей темы, уже, вообще говоря, нельзя. Мы в дальнейшем увидим, что работа внутренних сил играет столь же важную, а иногда даже и первостепенную роль в теореме об изменении энергии движения системы, об этом мы уже упоминали во введении к настоящей теме.

Докажем, что в случае твердого тела *работа сил взаимодействия частиц равна нулю*, т. е. что при рассмотрении работы движущегося твердого тела внутренние силы взаимодействия можно отбрасывать так, как мы уже это до сих пор делали. Наше представление (модель) о твердом теле заключается в том, что оно представляет систему точек, находящихся друг от друга во все время движения на неизменном расстоянии.

Рассмотрим какие-нибудь две частицы тела M_1 и M_2 и представим их себе соединенными невесомым жестким стержнем M_1M_2 постоянной длины l (рис. 161). При элементарном перемещении тела, перемещение dr_2 связано с перемещением dr_1 известным уже нам из кинематики соотношением:

$$dr_2 = dr_1 + [\Theta, \overline{M_1M_2}],$$

где Θ обозначает вектор поворота. Проектируя обе части этого равенства на направление отрезка $\overline{M_1M_2}$, заметим, что последнее слагаемое, по определению векторного произведения, перпендикулярно отрезку $\overline{M_1M_2}$ и даст проекцию, равную нулю, так что

$$\text{проект. } dr_1 = \text{проект. } dr_2;$$

таким образом, *проекции перемещений концов жесткого стержня на направление стержня равны между собою*. Мы привели векторное доказательство этого условия, заметим, что оно имеет очевидный физический смысл: если бы проекции перемещений начала и конца стержня не были одинаковы, то стержень растянулся бы

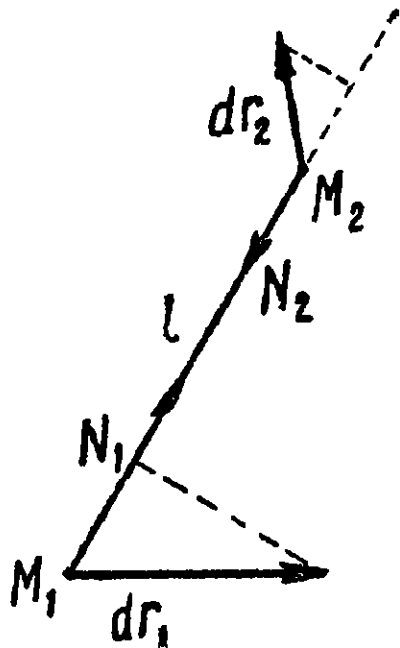


Рис. 161.

или сжался, чего не может быть по условию постоянства расстояния между частицами.

Если обозначить через N_1 и N_2 силы взаимодействия частиц, равные по величине и противоположные по направлению, то элементарную работу взаимодействий можно написать в виде:

$$\delta W = (N_1, dr_1) + (N_2, dr_2),$$

или, замечая, что $N_2 = -N_1$:

$$\delta W = (N_1, dr_1) - (N_1, dr_2);$$

но сила N_1 направлена по стержню, так что по доказанному только что свойству проекций перемещений элементарная работа действительно равна нулю.

Таким образом оказывается, что в твердом теле (не упругом!) работа сил взаимодействия всяких двух частиц тела равна нулю на любом перемещении тела, а, следовательно, и полная работа взаимодействий *всех* частиц равна нулю. Изучая движение твердого тела и подсчитывая работу приложенных к нему сил, мы в дальнейшем можем совершенно *опускать работу внутренних сил*. Конечно, этот результат верен только для модели твердого, совершенно не деформирующегося, тела. *Работа внутренних сил взаимодействия в упругом теле не равна нулю*, — мы в дальнейшем ее подсчитаем.

Согласно изложенной теории, если центр тяжести тела опустился и затем поднялся на ту же высоту, то полная работа равна нулю. Этот результат обычно вызывает у учащегося большое недоумение. Очень трудно себе представить, что в результате, скажем, опускания груза с седьмого этажа вниз и обратного его поднятия на тот же этаж, получим работу, равную нулю, т. е. как будто никакая работа не совершена. Точно так же крайне непонятна независимость величины работы от формы пути. Так, например, если в только что рассмотренном примере груз опускается с седьмого этажа вниз и подымается затем на четвертый этаж или же прямо опускается с седьмого этажа на четвертый, то работа веса одна и та же, между тем как будто ясно, что гораздо легче просто опустить груз с седьмого этажа на четвертый, чем предварительно опустить его на землю и вновь подымать на четвертый этаж. Эти недоумения разъясняются тем, что при рассмотренных движениях мы имеем, кроме сил веса, ряд других сил, развивающихся в механизме подъемника или в мускулах человека. Работа этих сил уже не удовлетворяет условиям независимости от формы пути, и поэтому полная работа всех сил уже не удовлетворяет высказанным условиям одинаковости. В последнем задании настоящей темы будет выяснено, что при действии этих неконсервативных сил работа все время расходуется на непроизводительные траты (потери), и эти потери бывают настолько велики в несовершенных механизмах (особенно в человеческом организме), что различие между теоретическим результатом подсчета работы при движении тела и наблюдаемым на опыте явлением становится понятным. Проф. П о л ь приводит замечательно

наглядный пример несовершенства (наличия колоссальных потерь) человеческого организма ¹⁾. Если предположить, что человек весом в 70 кг поднимается на высоту 7000 м, то он при этом производит $70 \cdot 7000$ кг. м, т. е. около $5 \cdot 10^5$ кг. м полезной работы, работа эта эквивалентна 1,5 киловаттчасам.

Приведем несколько простых примеров на вычисление работы силы веса.

а) Вода из резервуара объемом $17 \text{ м} \times 10 \text{ м} \times 2 \text{ м} = 340 \text{ м}^3$ должна быть выкачана на среднюю высоту 10 м при помощи насоса, приводимого в движение 10 людьми. Считая мощность одного человека равной около 0,1 лощ. силы и коэффициент полезного действия насоса около 0,4, определим, сколько времени потребуется на откачку. Для поднятия 340 м^3 воды на высоту 10 м нужно совершить работу, равную $340\,000 \cdot 10 = 3,4 \cdot 10^6$ кг.м. Вспоминая, что коэффициент полезного действия показывает, какую часть затраченной двигателем мощности мы получаем для полезной работы, находим полезную мощность 10 человек при работе их с насосом равной $10 \cdot 0,1 \cdot 75 \cdot 0,4 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{сек.}}$. Отсю-

да время откачки t найдем разделением нужной работы на полезную мощность:

$$t = \frac{3,4 \cdot 10^6}{10 \cdot 0,1 \cdot 75 \cdot 0,4} \text{ сек} = 31,5 \text{ час.}$$

б) Молот ударной машины состоит из металлического рычага ОА весом 25 кг, длиной 2 м и тяжелой болванки С'' весом 200 кг на конце стержня (рис. 162). Определим работу веса молота при его переходе из крайнего верхнего в нижнее положение. Находим прежде всего положение центра тяжести С' молота. По известной формуле имеем (С — центр тяжести стержня):

$$\overline{OC'} = \frac{\overline{OC} \cdot 25 + \overline{OC''} \cdot 200}{25 + 200} = \frac{1 \cdot 25 + 2 \cdot 200}{225} = 1,9 \text{ м.}$$

Замечая, что работа веса не зависит от формы траектории движе-

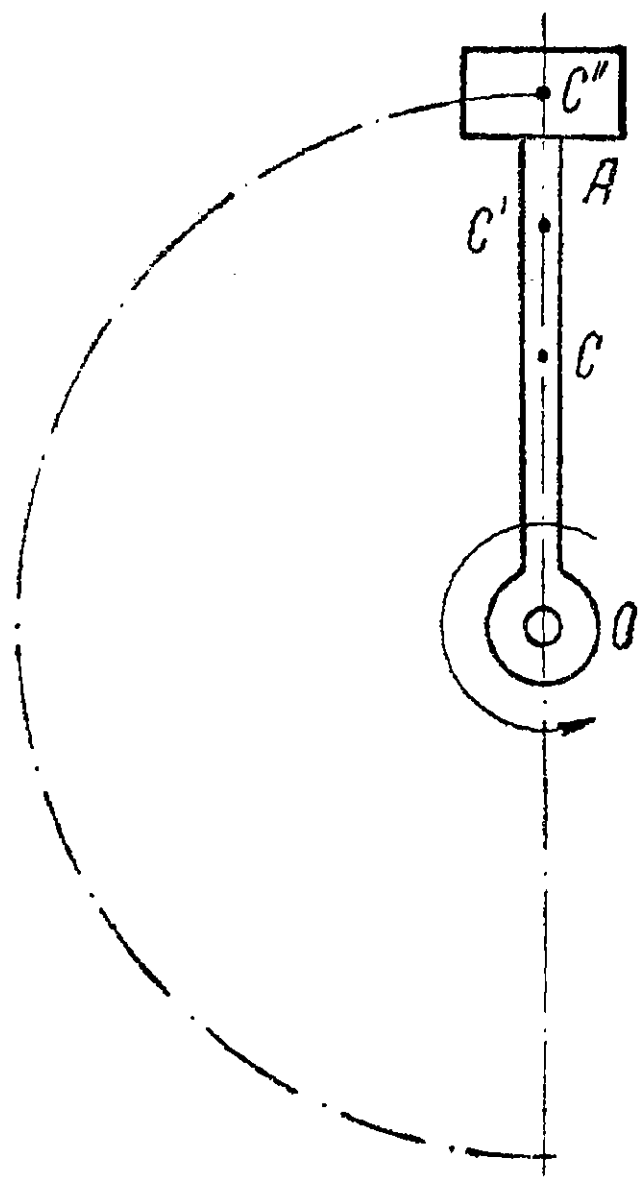


Рис. 162.

¹⁾ Р. В. Поль. Введение в механику и акустику (перев. с немецкого) ГНТИ, 1932 г.

ния, а зависит только от разности высот положения центра тяжести тела, имеем:

$$W = 225 \cdot 2 \cdot 1,9 = 855 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

в) Тяжелая цепь длиной 150 м, погонный метр которой весит 30 кг, подымается, навиваясь на ворот. Определить работу поднятия цепи, пренебрегая размерами ворота.

В некоторый промежуточный момент, когда цепь уже навинулась на ворот отрезком длиной x м, свешивается длина $(150 - x)$ м и элементарная работа на перемещении dx будет равна:

$$\delta W = -(150 - x) \cdot 30 \, dx.$$

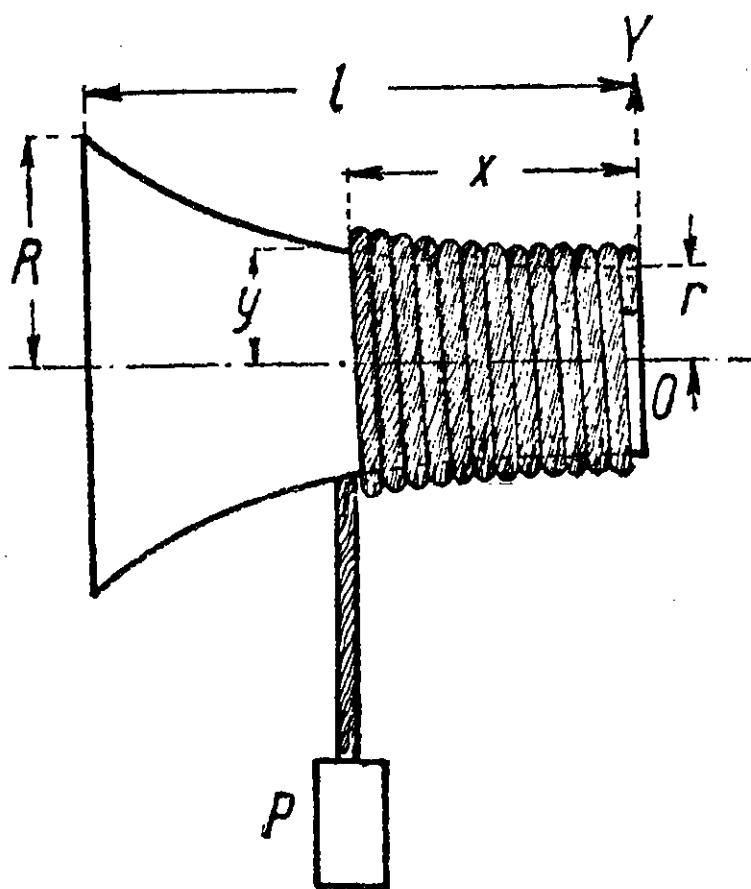


Рис. 163.

Чтобы вычислить полную работу поднятия цепи, просуммируем элементарные работы:

$$\begin{aligned} W &= - \int_{150}^0 (150 - x) 30 \, dx = \\ &= 30 \int_0^{150} (150 - x) \, dx = \\ &= \frac{30 \cdot 150^2}{2} = 337\,500 \text{ кг} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Тот же результат можно было бы получить и иначе. Центр тяжести цепи поднимается на $\frac{150}{2} = 75$ м, вес цепи $150 \cdot 30$ кг, следовательно работа поднятия равна

$$150 \cdot 30 \cdot 75 = 337\,500 \text{ кг} \cdot \text{м}.$$

г) Определим профиль барабана, на который наматывается канат с грузом на конце так, чтобы при равномерном вращении барабана потребляемая им мощность была постоянна. Пусть вес груза P кг, вес погонного метра каната p кг, длина всего каната L м, толщина его h м. Выбирая оси так, как показано на рис. 163, приходим к задаче об определении y в функции x из условий, чтобы мощность подъема груза P и свисающей части каната была одинакова во все время движения подъемника.

Прежде всего выразим через x длину свисающего участка каната. Если барабан поворачивается на $d\alpha$, то при этом свисающая часть укорачивается на $y d\alpha$, при текущем значении угла α

свисающая часть будет иметь длину $L - \int_0^{\alpha} y d\alpha$.

Чтобы выразить эту длину через x , заметим, что, при повороте

на 2π , x увеличивается на ширину каната h (предполагается, что канат укладывается вплотную—виток к витку), так что

$$da = \frac{2\pi}{h} dx.$$

Следовательно, свисающая часть имеет длину

$$L - \frac{2\pi}{h} \int_0^x y dx.$$

Замечая, что скорость каната с грузом равна окружной скорости точки на барабане в месте схода каната с барабана, т. е. ωy , где ω —угловая скорость барабана, получим условие постоянства мощности:

$$\omega y \left[P + p \left(L - \frac{2\pi}{h} \int_0^x y dx \right) \right] = \text{const.} \quad (20)$$

Для определения постоянной, положим $x=0$, $y=r$

$$\omega r (P + pL) = \text{const.} \quad (21)$$

Отсюда, сравнивая (20) и (21) и сокращая на ω , находим уравнение для определения y в функции от x :

$$y \left[P + p \left(L - \frac{2\pi}{h} \int_0^x y dx \right) \right] = r (P + pL), \quad (22)$$

или

$$P + pL - \frac{2\pi p}{h} \int_0^x y dx = \frac{r (P + pL)}{y}.$$

Дифференцируя по x , будем иметь

$$\frac{2\pi p}{h} y = \frac{r (P + pL)}{y^2} \frac{dy}{dx}$$

или, разделяя переменные и интегрируя:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi p}{h} dx &= r (P + pL) \frac{dy}{y^3}, \\ \frac{2\pi p}{h} x + C &= -\frac{r (P + pL)}{2y^2}. \end{aligned} \quad (23)$$

Постоянную интегрирования C определим из условия $x=0$, $y=r$, тогда будем иметь:

$$\begin{aligned} C &= -\frac{P + pL}{2r}, \\ \frac{r (P + pL)}{2y^2} &= \frac{P + pL}{2r} - \frac{2\pi p}{h} x, \end{aligned}$$

откуда получим уравнение искомого профиля:

$$y^2 = \frac{r(P + pL)}{P + pL - \frac{4\pi p}{h}x} = \frac{1}{\frac{1}{r^2} - \frac{4\pi p}{h} \cdot \frac{1}{r(P + pL)}} \cdot x \quad (24)$$

Если ввести в расчет длину барабана l и наибольший радиус барабана R , то, подставляя в ф-лу (24) $x = l$, $y = R$, найдем

$$R^2 = \frac{1}{\frac{1}{r^2} - \frac{4\pi p}{h} \cdot \frac{1}{r(P + pL)}} \cdot l$$

откуда следует

$$\frac{4\pi p}{h} \cdot \frac{1}{r(P + pL)} = \frac{1}{l} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) \quad (25)$$

Подставляя это выражение в (24), получим уравнение искомого профиля в виде:

$$y^2 = \frac{1}{\frac{1}{r^2} - \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^2} \right) \frac{x}{l}} \quad (26)$$

Последнее уравнение имеет простой вид сравнительно с (24); может показаться, что профиль барабана не зависит от весов груза и каната, а только от радиусов r , R и длины барабана l . На самом деле только r произвольно, что касается R , то по (22) при $x = l$

будем иметь $L = \frac{2\pi}{h} \int_0^l y dx$ и, следовательно:

$$RP = r(P + pL),$$

т. е. $\frac{R}{r}$ зависит от отношения весов полной длины каната и поднимаемого груза:

$$\frac{R}{r} = 1 + \frac{pL}{P}, \quad (27)$$

l зависит от толщины каната и полной длины его согласно ф-ле (25). Обычно для упрощения конструкции, в тех случаях, когда строгое постоянство мощности не обязательно, профиль берут по прямой, отливая барабан в виде усеченного конуса с радиусами r и R , связанными соотношением (27).

Мы удовольствуемся этими простейшими примерами; более сложные примеры, где силы веса будут фигурировать наряду с другими силами, учающий в большом числе найдет дальше.

4. Работа сил трения, скольжения и катания и связанная с ними потеря мощности. Мы рассмотрим здесь лишь случай так называемого „сухого трения“, т. е. трения при отсутствии обильной смазки, причем будем предполагать справедливыми известные уже учающему из статики законы Кулона. Начнем со случая *трения скольжения* (трение 1-го рода).

а) Наклонная плоскость и ходовой винт. Сравним работу, совершаемую при непосредственном поднятии груза Q кг на некоторую высоту h м, с работой перемещения того же груза на ту же высоту при помощи наклонной плоскости, с коэффициентом трения f и углом наклона α (рис 164). Применение наклонной плоскости удобно тем, что при помощи ее можно поднять груз, пользуясь меньшей силой.

Работа поднятия груза Q на высоту h по абсолютной величине равна $Q \cdot h$ кг·м (если не пользоваться наклонной плоскостью). Будем двигать груз по наклонной плоскости с некоторой силой P , наклоненной к плоскости AB под углом β . Тогда работа этой силы на пути $AB = s$ будет равна:

$$W = P \cdot \cos \beta \cdot s = \frac{P \cos \beta \cdot h}{\sin \alpha}. \quad (28)$$

Сила F равна $f \cdot N$, а для определения N и P имеем уравнения проекций на направление AB и ему перпендикулярное:

$$N + P \cdot \sin \beta = Q \cos \alpha,$$

$$F + Q \cdot \sin \alpha = P \cos \beta.$$

Вводя в рассмотрение угол трения $\varphi = \arctg f$, т. е., полагая $F = fN = N \tg \varphi$ и решая последнюю систему уравнений, получим:

$$N = Q \frac{\cos(\alpha - \beta) \cos \varphi}{\cos(\beta - \varphi)}, \quad P = Q \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos(\beta - \varphi)}.$$

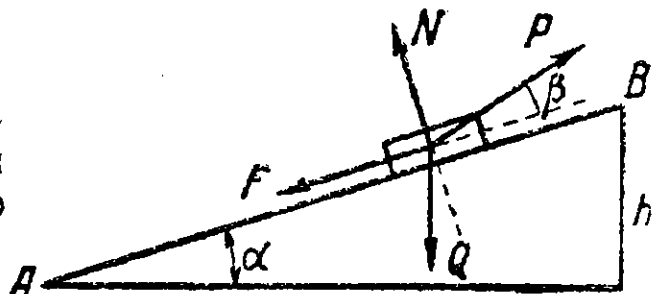


Рис. 164.

Следовательно, работа W будет равна:

$$W = Q \cdot h \frac{\sin(\alpha + \varphi) \cos \beta}{\cos(\beta - \varphi) \sin \alpha}. \quad (29)$$

Если движение груза производить силой, параллельной плоскости ($\beta = 0$), то работа будет равна:

$$W_0 = Q \cdot h \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\sin \alpha \cos \varphi}.$$

Эта работа больше чем Qh , так как в знаменателе стоит величина, равная одному из слагаемых числителя. Физически это ясно, потому, что при движении по наклонной плоскости некоторая работа затрачивается на преодоление трения. Если трения нет, то $f = 0$, $\varphi = 0$ и $W_0 = Qh$.

Если считать силу P горизонтальной, как это имеет место в винтах, применяемых для подъема, то $\beta = -\alpha$ и работа при этом будет равна

$$W_1 = Qh \frac{\tg(\alpha + \varphi)}{\tg \alpha}. \quad (30)$$

Коэффициентом полезного действия машины, как учащийся знает, называется отношение полезной работы к общей работе, произведенной двигательной силой. В нашем случае полезная работа есть

работа поднятия груза, т. е. Qh , двигательной силой будет P , так что коэффициент полезного действия равен:

$$\eta = \frac{Qh}{W} = \frac{\cos(\beta - \varphi) \sin \alpha}{\sin(\alpha + \varphi) \cos \beta}. \quad (31)$$

В рассмотренных частных случаях, $\beta = 0$ и $\beta = -\alpha$, будем иметь:

$$\eta_0 = \frac{\sin \alpha \cos \varphi}{\sin(\alpha + \varphi)}, \quad \eta_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}. \quad (32)$$

Последняя формула имеет очень широкое распространение в прикладной механике, по этой формуле рассчитывают коэффициент полезного действия ходового винта с прямоугольной нарезкой. Если развернуть винт на плоскость, как мы это уже делали в первой теме Кинематики, то движение винта приведет к скольжению по наклонной плоскости с углом α , равным углу подъема нарезки.

Можно подобрать этот угол так, чтобы коэффициент полезного действия был наибольший. Для этого удовлетворим уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_1}{d\alpha} &= \frac{d}{d\alpha} \left[\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)} \right] = \\ &= \frac{\operatorname{ctg}(\alpha + \varphi)}{\cos^2 \alpha} - \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sin^2(\alpha + \varphi)} = 0, \end{aligned}$$

которое приводится к виду:

$$\sin 2(\alpha + \varphi) = \sin 2\alpha,$$

и дает решение:

$$\alpha = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$

Коэффициент полезного действия при этом будет равен

$$\eta_{\max} = \operatorname{tg}^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right).$$

Рис. 165.

Если, например, коэффициент трения в нарезке $f = 0,15$, то угол трения $\varphi = 8^\circ 35'$, наивыгоднейший угол подъема равен $40^\circ 43'$ и коэффициент полезного действия будет 74%. На самом деле таких больших углов подъема никогда не делают (не выше 25°).

б) Работа трения в подшипниках. Антифрикционные ролики. Если считать в первом приближении, что давление цапфы на подшипник сосредоточено в одной нижней точке A (рис. 165), то сила трения, приложенная к цапфе, будет равна $F = fP$ и направлена в сторону, противоположную вращению. Но в таком положении невозможно равномерное вращение, так как сумма моментов всех сил, включая вращательный момент двигательной силы, не равна нулю (например относительно точки A). На самом деле цапфа накатывается на подушку и во время движения скользит, опираясь в некоторой точке B , расположенной выше точки A . При таком расположении цапфы нормальное давление уже не равно P .

Рассматривая равновесие цапфы в новом положении (на рисунке не показанном), убедимся, что из условий равновесия следует:

$$\angle BOA = \varphi, R = P \cos \varphi,$$

так что сила трения уже будет равна:

$$F = fR = \operatorname{tg} \varphi P \cos \varphi = P \sin \varphi;$$

при малых коэффициентах трения $\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi$, поэтому можно считать, как и раньше, $F = fP$, а момент сопротивления (трения) цапфы равным:

$$M = fPr. \quad (33)$$

Более детальное изучение показывает, что цапфа опирается не в одной точке, а по поверхности подушки; при этом у *новых, не сработавшихся* подшипников момент сопротивления равен (формула Вейсбаха):

$$M = \frac{\pi}{2} f Pr = 1,57 f Pr; \quad (34)$$

у *старых разработавшихся* подшипников (формула Рейе)

$$M = \frac{4}{\pi} f Pr = 1,27 f Pr. \quad (35)$$

Чтобы определить работу сил трения, предположим, что цапфа повернулась на некоторый угол α , тогда сила трения работала на пути $\alpha \cdot r$ и работа будет равна:

$$W = F \cdot \alpha \cdot r = Fr\alpha = M \cdot \alpha, \quad (36)$$

а мощность получим, разделив работу на время вращения, т. е.

$$N = M \cdot \omega. \quad (37)$$

Таким образом в случае вращающегося вокруг неподвижной оси тела *работа равна произведению момента приложенной силы на угол поворота, а мощность — произведению момента на угловую скорость*. Ф-лы (36) и (37), выведенные для силы трения, как видно из вывода, справедливы для любых сил, только первая из них, в случае переменной силы и неравномерного вращения, заменяется суммированием элементарных работ на бесконечно-малых перемещениях, т. е.

$$W = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} M d\alpha.$$

Мы в дальнейшем неоднократно будем пользоваться этими формулами. Если нам задано число оборотов вала в минуту n , то формула мощности очевидно принимает вид

$$N = \frac{M \pi n}{30}. \quad (38)$$

По формуле Вейсбаха будем иметь

$$N = \frac{\pi}{2} f Pr \omega \approx 0,164 f Pr n, \quad (39)$$

по формуле Рейе

$$N = 0,130 f P r n.$$

(40)

Все вышеприведенные формулы относятся к подшипникам не обильно смазанным. В случае подшипников специальной конструкции с обильной подачей масла законы Кулона перестают быть верны, трение начинает зависеть от скорости и все расчеты ведутся по формулам гидродинамической теории трения. В таких подшипниках с хорошей смазкой мощность, затрачиваемая на силы трения, гораздо меньше, чем вышеуказанная по формулам Вейсбаха и Рейе.

Объясняется это тем, что при обильной смазке поверхность цапфы с поверхностью подушки не соприкасается. Между ними образуется слой масла (фильм) очень малой толщины δ и цапфа как бы плавает в масле, при этом трение меньше, чем при соприкосновении твердых поверхностей. По формуле Петрова момент трения равен:

$$M = 2 \pi r^3 \mu \frac{\omega}{\delta}, \quad (41)$$

где μ — коэффициент вязкости смазочного масла. Нагрузка на подшипник P сюда явно не входит, но от нее зависит толщина слоя смазки δ ¹⁾.

При грубых расчетах пользуются обычными формулами „сухого трения“, но коэффициент трения f значительно уменьшают (до 0,05).

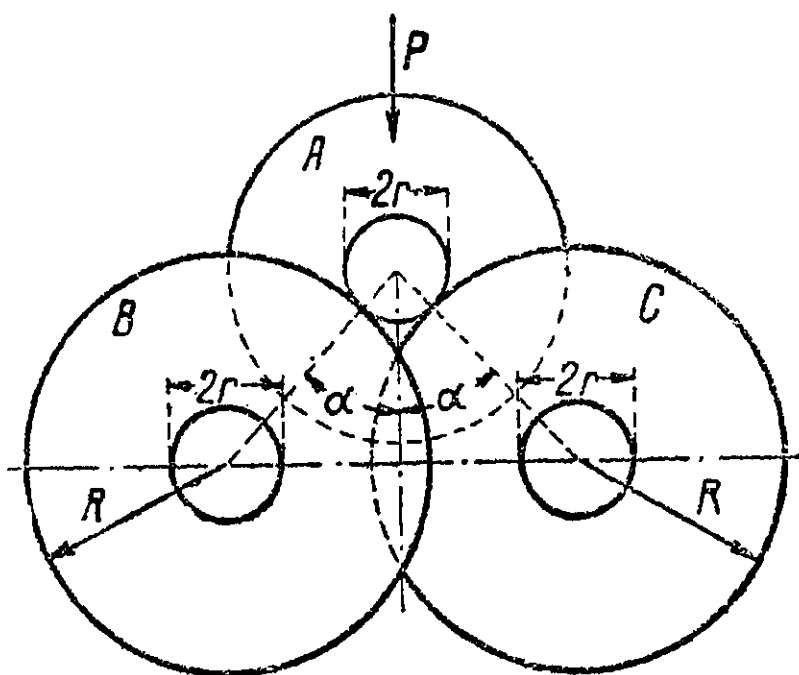


Рис. 166.

Желая уменьшить момент трения в подшипниках, применяют шариковые и роликовые подшипники, в которых силы трения скольжения заменяются силами трения катания, дающими гораздо меньший момент сопротивления, а следовательно, и гораздо меньшую расходуемую мощность; об этом мы скажем в следующем упражнении, а сейчас отметим еще один применяемый часто в специальных аппаратах способ уменьшения силы трения в подшипниках, именно, антифрикционные ролики, о которых уже упоминалось в первом задании первой темы настоящей книги.

Цапфа колеса A (рис. 166) опирается на ободы двух колес B и C . Нагрузка P , приложенная к цапфе A , разлагается на две нагрузки, равные каждая $\frac{P}{2 \cos \alpha}$ и приложенные к цапфам колес B и C . Эти силы создают в цапфах моменты трения, равные по (33)

¹⁾ На русском языке изложение гидродинамической теории трения можно найти в книге Л. С. Лейбензон, Руководство по нефтепромысловой механике, ч. I, Гидравлика. ГНТИ, 1931 г.

$\frac{fPr_1}{2\cos\alpha}$, так что мощность, расходуемая на трение в обеих цапфах B и C , равна произведению удвоенного момента на угловую скорость ω_1 колеса B , т. е. $N = \frac{fPr_1}{\cos\alpha} \omega_1$, но угловая скорость ω колеса A связана с ω_1 соотношением $\omega_1 = \omega \frac{r}{R}$, так что окончательная формула расхода мощности будет

$$N = \frac{fPr_1 r}{R \cos\alpha} \omega. \quad (42)$$

Если бы мы не применили антифрикционных роликов, то мощность N_1 на трение в цапфе A при том же коэффициенте трения и угловой скорости была бы равна:

$$N_1 = fPr\omega. \quad (43)$$

Сравнивая (42) с (43), видим, что выигрыш в мощности определяется отношением $\frac{N}{N_1} =$

$$= \frac{r_1}{R \cos\alpha}.$$

Чем меньше единицы это отношение, тем выгоднее применять антифрикционные ролики.

На рис. 167 показан фотографический снимок применения антифрикционных роликов для машины Атвуда, о которой была уже речь в первом задании первой темы. При расчете работы сил трения мы не учли работы катания цапфы A по ободам колес B и C ; в следующем упражнении мы убедимся, что она ничтожна. Мы пользовались при расчете упрощенной формулой сопротивления (33), отношение мощностей осталось бы тем же, если бы мы воспользовались формулами Вейсбаха или Рейе.

в) Работа трения при катании тела. Напомним, что при катании без скольжения одного тела по другому мы имеем особый вид сопротивления (трение II рода), физическое объяснение которого было дано Рейнольдсом. При наличии упругости соприкасающиеся тела вдавливаются одно в другое, поэтому при движении впереди катящегося тела образуется некоторый наплыв материала (рис. 168 а) и точка соприкасания уходит несколько вперед. При этом касательная составляющая R_2 реакции (сила трения скольжения) может быть рассматриваема, как и раньше, а нормальная отодвигается в направлении движения на малый отрезок δ (рис. 168 б).

Момент сопротивления относительно мгновенного центра таким образом оказывается равным произведению нормального давления на плечо δ :

$$M = R_1 \cdot \delta. \quad (44)$$

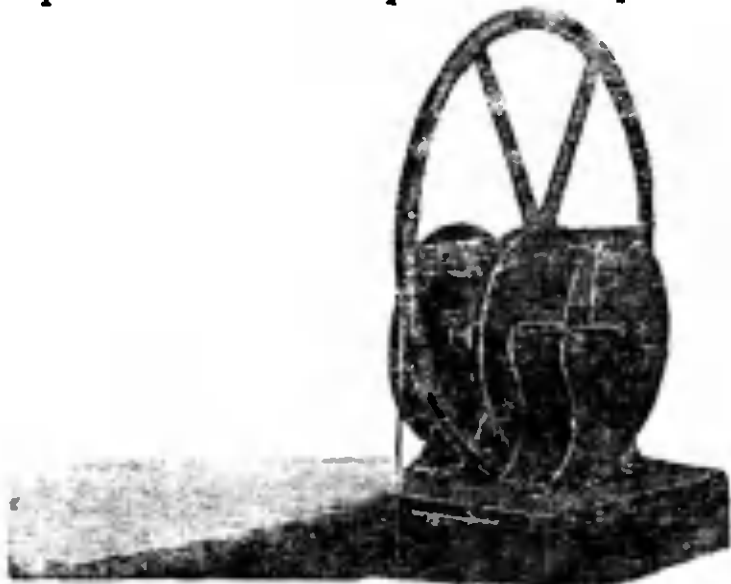


Рис. 167.

Отрезок δ носит наименование *коэффициента трения катания*. В отличие от коэффициента трения скольжения f , являющегося отвлеченным числом, величина δ измеряется в мм. Так, например, для дерева по дереву $\delta = 0,5 - 0,8$ мм, для металла по металлу $\delta = 0,5$ мм. Мы отсылаем учащегося за подробными сведениями об экспериментальных данных для этого коэффициента к курсам прикладной механики. Полная работа сил трения при катании без скольжения сводится к работе только сил трения катания, так как силы трения скольжения приложены к мгновенному центру, перемещение которого, с точностью до малых высшего порядка, равно нулю и, следовательно, дают работу, равную нулю.

Этот факт весьма замечателен и объясняет физическую сущность многих явлений (вспомним, например, объяснение движения поезда во втором задании первой темы).

Мощность, затрачиваемая на трение II рода, может быть определена по формуле:

$$N = R_1 \cdot \delta \cdot \omega. \quad (45)$$

Сравним работу сил трения при движении колеса радиусом r в двух случаях: 1) колесо скользит без катания (заторможенное колесо) и 2) колесо катится без скольжения.

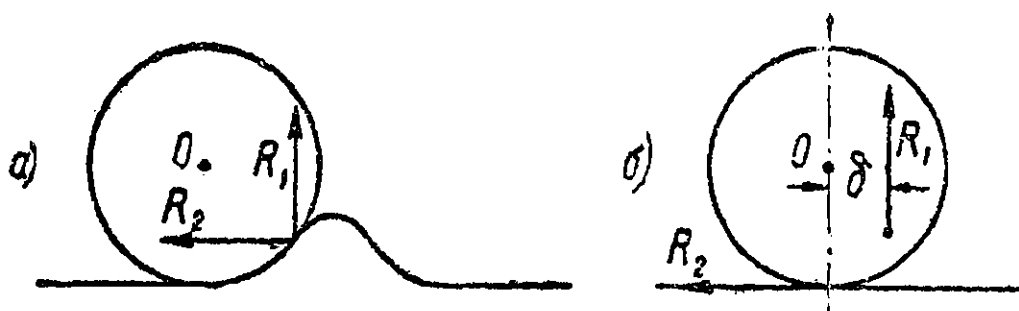


Рис. 168.

В первом случае работа равна: fR_1S , где S —пройденный путь; во втором случае работа равна: $R_1 \cdot \delta \cdot \frac{S}{r}$. Отношение этих работ

равно $\frac{\delta}{fr}$. Например, при радиусе колеса $r = 50$ см, $\delta = 0,05$ см,

$f = 0,1$, работа, а следовательно и мощность, при катании в 100 раз меньше работы при скольжении на том же пути. Момент сопротивления шарикового подшипника (стальные закаленные шарики) приблизительно равен: по опытам Штрибека $M = 0,0015 P \cdot r$,—при обычной цапфе и смазке, $f = 0,05$; по формуле Вейсбаха: $M = 0,0785 Pr$, т. е. почти в 50 раз больше. Эти цифры дают некоторое представление о разнице между трением скольжения и катания. Кроме трения скольжения и катания, иногда еще рассматривают трение *верчения*, появляющееся в подпятниках, но это трение по своей физической сущности сводится к трению скольжения—мы на нем останавливаться не будем.

Рассмотрим теперь аппараты, использующие „вредные“ сопротивления для различных технических целей, так, например, для измерения крутящего момента на валу машины и ее мощности.

г) Тормозные динамометры. Общий принцип всех этих

динамометров заключается в том, что на валу машины создается при помощи сил трения торможение, играющее роль искусственной нагрузки. Определяя максимальную нагрузку, при которой машина дает еще нормальные обороты, мы находим искомый момент двигательной силы на валу или простым умножением на угловую скорость и мощность двигателя.

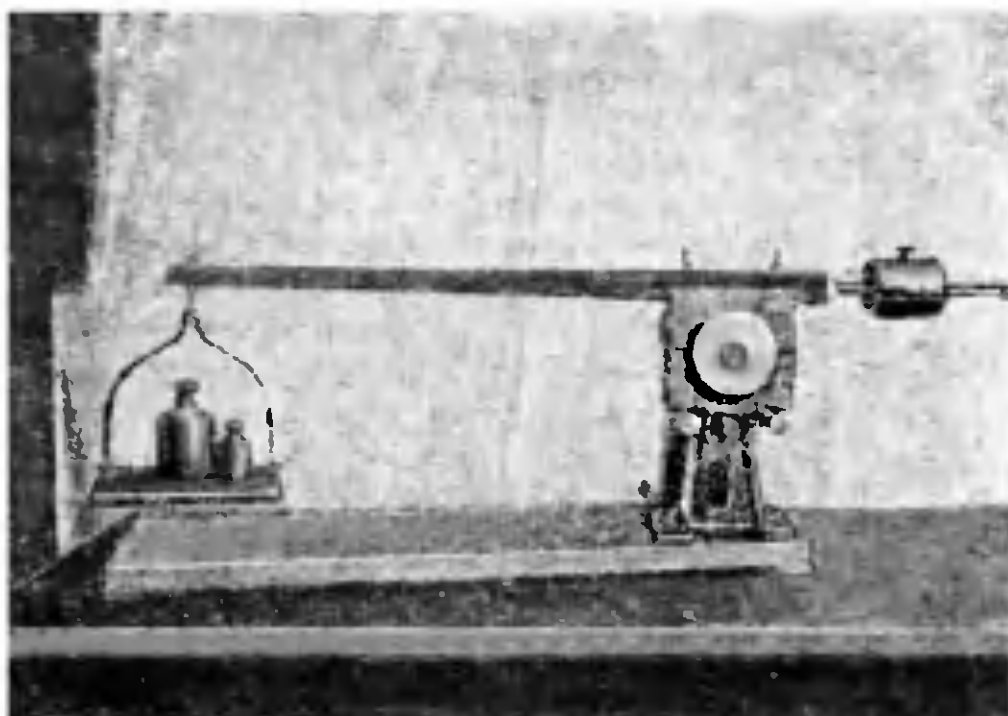


Рис. 169. Нажим Прони. (Модель кабинета механики Ленинградского Физико-механического института.)

Рассмотрим в качестве примера известный тормоз Прони (его еще называют „нажимом Прони“). На рис. 169 приведена фотография модели, а на рис. 170—схема действия приложенных сил. На вал A машины (двигателя) насажен шкив, зажимаемый двумя колодками на болтах до тех пор, пока при неподвижных колодках

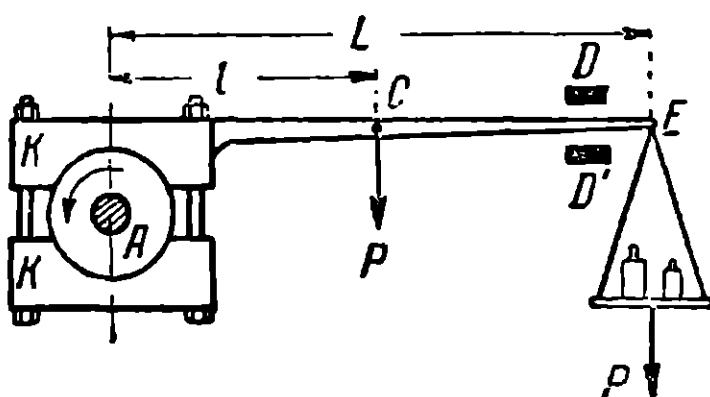


Рис. 170.

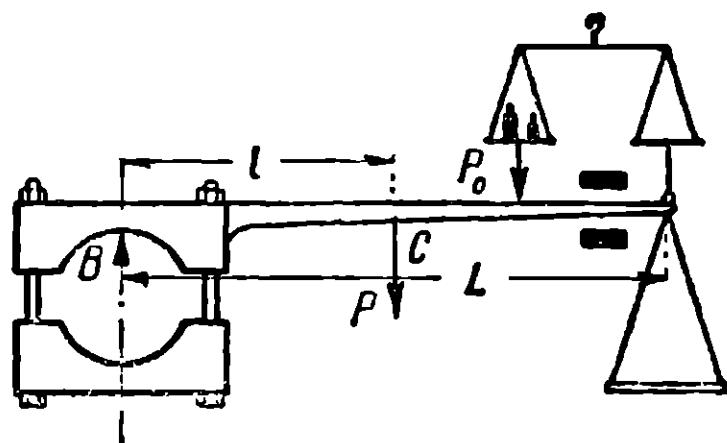


Рис. 171.

(упоре рычага в аретир D) двигатель не будет продолжать давать нормальные обороты n об/мин. Задав таким образом двигателю максимальную нагрузку (торможение), накладывают на чашку в конце рычага гири весом P кг до тех пор, пока рычаг не уравновесится, вернее не придет в колебание между упорами аретира D и D' ; определяя два близких друг к другу значения P , при кото-

рых рычаг опирается в верхнюю или нижнюю часть аретира и взяв среднее из этих двух значений, определим значение P , соответствующее равновесию рычага.

Обозначая крутящий момент на валу, равный моменту сопротивления колодок, через M и через p —силу веса тормоза, приложенную в центре тяжести, по условию равества нулю суммы моментов сил, приложенных к тормозу, относительно оси вала, получим

$$M = p \cdot l + P \cdot L. \quad (46)$$

Для определения момента $p \cdot l$ поступают так же, как и при определении центра тяжести шатуна (вспомнить вторую тему, 5-е зад.),

а именно перед тем, как насадить тормоз на вал машины, его подвешивают на неподвижную опору B (рис. 171), а в точке E прикрепляют к весам. Тогда при равновесии весов будем иметь уравнение моментов относительно точки B :

$$P \cdot l = P_0 \cdot L.$$

Отсюда сразу следует окончательное выражение искомого момента:

$$M = (P + P_0) L. \quad (47)$$

Зная момент M , легко найдем и мощность:

$$N = M \omega = \frac{(P + P_0) L \cdot 2\pi n \text{ кг} \cdot \text{м}}{60 \text{ сек}} \quad (48)$$

или, в лошадиных силах:

$$N = \frac{(P + P_0) 2\pi L n}{60 \cdot 75} \text{ HP.} \quad (49)$$

Рис. 172. Динамометр Нальдера. (Модель кабинета механики Ленинградского Физико-механического института.)

Вместо колодок в тормозах этого рода мы имеем ленту, охватывающую шкив испытуемого двигателя.

Указанные типы динамометров рассчитаны на небольшие мощности, так как при больших мощностях от трения колодок (обычно деревянных) о вал или ленты о шкив развивается слишком большое количество тепла. При испытаниях мощных двигателей в настоящее время в большей части применяют гидравлические тормоза, а иногда и электромагнитные. О гидравлических тормозах и потребляемой ими мощности мы расскажем в следующем упражнении, посвященном работе сил вязкости.

5. Работа сил сопротивления среды движению тела.

а) Падение тела в сопротивляющейся среде. Мы познакомились уже с силами сопротивления среды в первом задании первой темы; там было выяснено, что сила сопротивления лучше всего выражается законами пропорциональности ее квадрату скорости движения тела по отношению к среде.

Если тело падает с высоты h , то скорость его движения все время возрастает, а с нею по закону квадрата растет сила сопротивления, так что мы имеем в этом случае дело с переменной силой. Работу ее легко определить, как сумму элементарных работ на перемещении dx :

$$W = - \int_0^h \gamma v^2 dx. \quad (50)$$

Мы направили ось OX по вертикали вниз, приняв за начало координат начальную точку движения, знак минус перед интегралом стоит потому, что сила сопротивления направлена в сторону, противоположную движению; обозначения берем из упражнения 2-го первого задания.

Для вычисления полученного интеграла вспомним выражение скорости через глубину падения (ф-ла (42) первого задания), которую напомним, заменяя h на x , так:

$$v = c \sqrt{1 - e^{-\frac{2gx}{c^2}}};$$

тогда работа сопротивления выразится интегралом:

$$W = - \gamma c^2 \int_0^h \left(1 - e^{-\frac{2gx}{c^2}}\right) dx.$$

Интеграл этот легко вычисляется и равен:

$$W = - \gamma c^2 h \frac{\gamma c^4}{2g} \left(1 - e^{-\frac{2gh}{c^2}}\right). \quad (51)$$

Припоминая значение коэффициента c , можем переписать еще это равенство в форме:

$$W = - ph + \frac{pc^2}{2g} \left(1 - e^{-\frac{2gh}{c^2}}\right),$$

или, обозначая скорость на глубине h через v_h и заменяя

$$c^2 \left(1 - e^{-\frac{2gh}{c^2}}\right) = v_h^2, \quad \frac{p}{g} = m,$$

получим еще такое выражение работы:

$$W = - \left(ph - \frac{mv_h^2}{2} \right). \quad (52)$$

Мы видим, что по абсолютной величине работа эта равна работе веса минус кинетическая энергия падающего тела (понятие о кинетической энергии учащийся уже имеет из курса физики, в следую-

ших заданиях мы будем подробно об этом говорить, тогда же станет понятным и физический смысл полученного результата). Раскладывая в равенстве (51) выражение, стоящее в скобках, в ряд, получим приближенное значение работы

$$W = -\gamma gh^2 \quad (53)$$

или, если вспомнить выражение коэффициента γ через площадь миделевого сечения и плотность жидкости

$$\gamma = C \rho S,$$

то работе можно придать вид:

$$W = -C \rho g S h^2. \quad (54)$$

Заметим, что работа по этой приближенной формуле пропорциональна *квадрату* пройденного пути, площади миделевого сечения и удельному весу жидкости, в которой происходит движение. При падении с большой высоты эта работа может достигнуть значительной величины. Когда скорость становится почти постоянной, сила сопротивления сравнивается с силой веса и работы их принимают значения, равные по величине и обратные по знаку.

При падении, например, чугунного шара радиусом 0,04 м в воде, на глубине около 4 м силы сопротивления становятся почти равными весу шара, и устанавливается скорость около 4 м/сек. Работа сил сопротивления на пути падения по (52) будет равна по величине:

$$|W| = ph - \frac{mc^2}{2} = ph - \frac{\rho c^2}{2g} = \frac{\rho}{2g} (2gh - c^2) \approx 7 \text{ кг. м.}$$

в то время как работа веса шара на том же пути в пустоте равна около 7,8 кг. м.

б) Мощность, поглощаемая гидравлическим тормозом. Тот факт, что сопротивление быстро растет со скоростью, используют в технических применениях для тормозов и регуляторов движения. Мы изложим здесь вкратце теорию гидравлического тормоза. На вал испытуемой машины насаживаются диски, вращающиеся в кожухе, наполненном водою. Диски при своем движении увлекают воду, которая тормозится стенками кожуха и другими дисками, скрепленными с кожухом и расположенными между вращающимися дисками (рис. 173). Силы трения о кожух создают момент вращения кожуха, уравновешиваемый и измеряемый весами.

Рассмотрим один диск (рис. 174) и рассчитаем приближенно момент сил вязкости жидкости, приложенных к нему. Будем считать силы вязкости, подобно ранее рассмотренным силам сопротивления, пропорциональными плотности жидкости ρ , площадке соприкасания и квадрату скорости. Тогда для кольца радиуса r и ширины dr момент сил трения будет равен:

$$dM = r \cdot dF = r \cdot C \rho 2\pi r \cdot dr \cdot \omega^2 r^2 = C \cdot 2\pi \rho \cdot \omega^2 r^4 dr.$$

Полный момент по одной стороне диска радиуса a будет равен

$$M = \int dM = C \cdot 2\pi \rho \omega^2 \int_0^a r^4 dr = 2\pi \rho C \omega^2 a^5. \quad (55)$$

Здесь коэффициент C имеет некоторое значение, определяемое из опыта. Теоретическое определение этого коэффициента было дано проф. Карманом, который показал, что в ф-ле (55), переписанной в виде:

$$M = C_r \cdot \rho \frac{a^5 \omega^2}{2}, \quad (56)$$

коэффициент C_r зависит от радиуса диска, угловой скорости его и особого коэффициента ν (кинематический коэффициент вязкости), зависящего от рода жидкости, обтекающей диск, и ее температуры¹⁾. Зависимость эта дана Карманом в виде:

$$C_r = 0,0728 \sqrt[5]{\frac{\nu}{a^2 \omega}}. \quad (57)$$

Принимая во внимание, что трутся обе стороны диска, возьмем момент в два раза больший, однако опыт показывает, что при этом

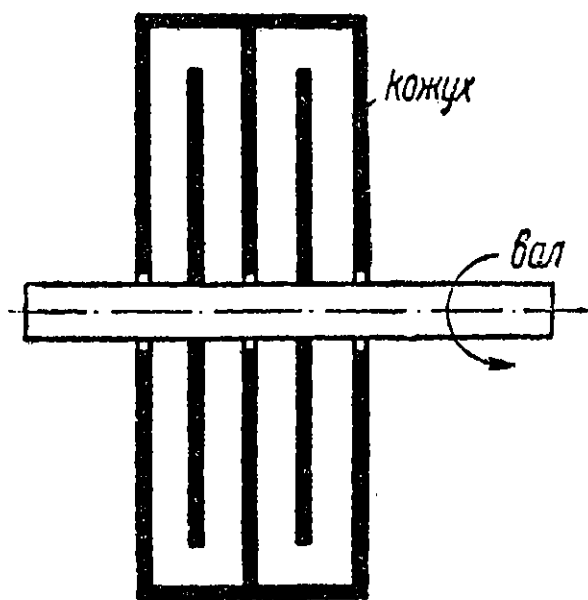


Рис. 173.

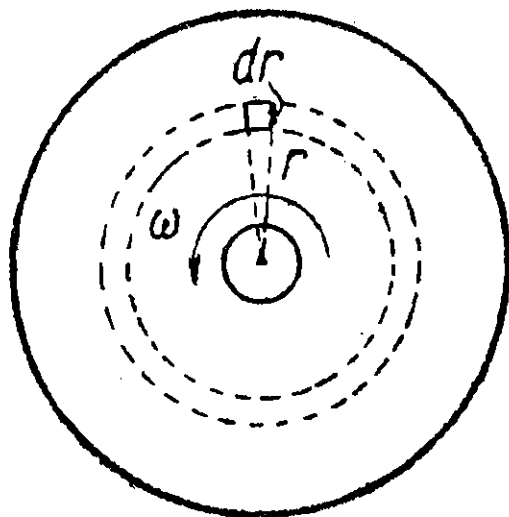


Рис. 174.

получается значение момента все же недостаточное. Теория Кармана не учитывает всей сложности движения жидкости в кожухе и поэтому несколько преуменьшает величину коэффициента. Результат получается удовлетворительным, если момент увеличить в 1,9 раза, тогда для одного диска, трущегося двумя сторонами о воду, будем иметь такое выражение для момента:

$$M = 1,9 C_r \rho a^5 \omega^2$$

или, заменяя для воды $\rho = 102 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{м}^4}$,

$$M = 193,8 \cdot C_r a^5 \omega^2 \quad (58)$$

Отсюда можно получить мощность, поглощаемую одним диском:

$$N = M \omega = 193,8 C_r a^5 \omega^3 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{сек}},$$

¹⁾ Для воды, при 20°, $\nu = 1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{сек}$.

или, переходя к числу оборотов в минуту — n и л.с. силам:

$$N = \frac{193,8 \pi^3}{75 \cdot 30^3} C_r a^5 n^3 \approx 2,96 \cdot 10^{-3} C_r a^5 n^3 \text{ л.с.} \quad (59)$$

При нескольких дисках мощность пропорционально увеличивается. Ф-ла (59) дает очень хорошее совпадение с экспериментом.

В таблице даны для сравнения численные величины мощностей двухдискового тормоза, вычисленные по ф-ле (59) и по опытам инж. Страхова, проведенным в авиационной лаборатории Ломоносовского института в Москве ¹⁾.

n об/мин.	N л. с. теоретич.	N л. с. испытан.
570	11	10
600	14	15,3
1040	57	58,5
1080	61	60

в) Приближенная теория ветряного двигателя. Будем рассматривать лопасть ветряного двигателя как поверхность, образованную движением отрезка AB (рис. 175) длины l , середина которого перемещается по прямой, являющейся общим перпендикуляром к оси ветряка и самому отрезку. Выделим на лопасти бесконечно тонкую полоску на расстоянии r от оси вращения и толщины dr . Считая сопротивление элемента лопасти dR , пропорциональным квадрату нормальной составляющей относительной скорости V' воздуха по отношению к элементу лопасти, мы, пренебрегая касательной составляющей скорости, обуславливающей трение воздуха о лопасть и дающей касательную силу, будем иметь:

$$V' = V - v, \quad v_n' = V \cos i - v \sin i, \\ dR = C v_n'^2 l dr = C (V \cos i - v \sin i)^2 l dr,$$

но переносная скорость элемента лопасти равна $v = \omega r$, где ω — угловая скорость ветряка, кроме того перемещение элемента лопасти происходит по направлению переносной скорости v , так что мощность, получаемая от одной лопасти, будет определяться как сумма мощностей отдельных элементов:

$$N = \int_{r_0}^{r_1} (dR, v) = \int_{r_0}^{r_1} dR \cdot v \cdot \sin i = \\ = \int_{r_0}^{r_1} C (V \cos i - r \omega \sin i)^2 l r \omega \sin i dr,$$

или

$$N = Cl \omega \int_{r_0}^{r_1} (V \cos i - r \omega \sin i)^2 r \sin i dr. \quad (60)$$

¹⁾ А. В. Страхов. Дисковой гидравлический тормоз „Техника воздушного флота“, № 6, 1931 г. Подробнее о гидравлических тормозах см. В. Л. Александров. Техническая гидродинамика, ОНТИ. НКПТ, 1932 г., стр. 166.

Обычно в ветряках многолопастного типа берут угол i постоянным и равным 30° , т. е. поверхность лопасти плоской. При этом мощность легко подсчитывается по ф-ле (60). Зная скорость ветра V и угол i , выбираем связь между V и ω так, чтобы воздух вступал в работу без удара (вспомнить упр. 3 § 49 Кинематики).

Можно выиграть в мощности до 20% , если угол i брать для отдельных элементов не одинаковым, а считать его функцией расстояния r элемента от оси вращения. Тогда уже лопасть не будет плоской, а представит некоторую винтовую поверхность. Вид функции i от r можно подобрать из условия, чтобы мощность, даваемая лопастями, была максимальная. Мы приходим к несколько необычайной, может быть, для учащегося математической задаче подбора вида функции $i(r)$, при которой определенный интеграл, дающий N , становится максимальным. Учащийся не должен смешивать эту задачу с обычной задачей дифференциального исчисления на максима и минима функции, где мы разыскиваем значение аргумента, при котором заданная функция принимает максимальное или минимальное значение.

Наша задача состоит в разыскании такого вида функции при произвольных значениях аргумента в данном интервале, чтобы интеграл N был максимум. Это — задача вариационного исчисления. Мы легко решим ее, поставив условие, подобное условию максима в дифференциальном исчислении, чтобы бесконечно-малое изменение интеграла (60), δN , вследствие бесконечно-

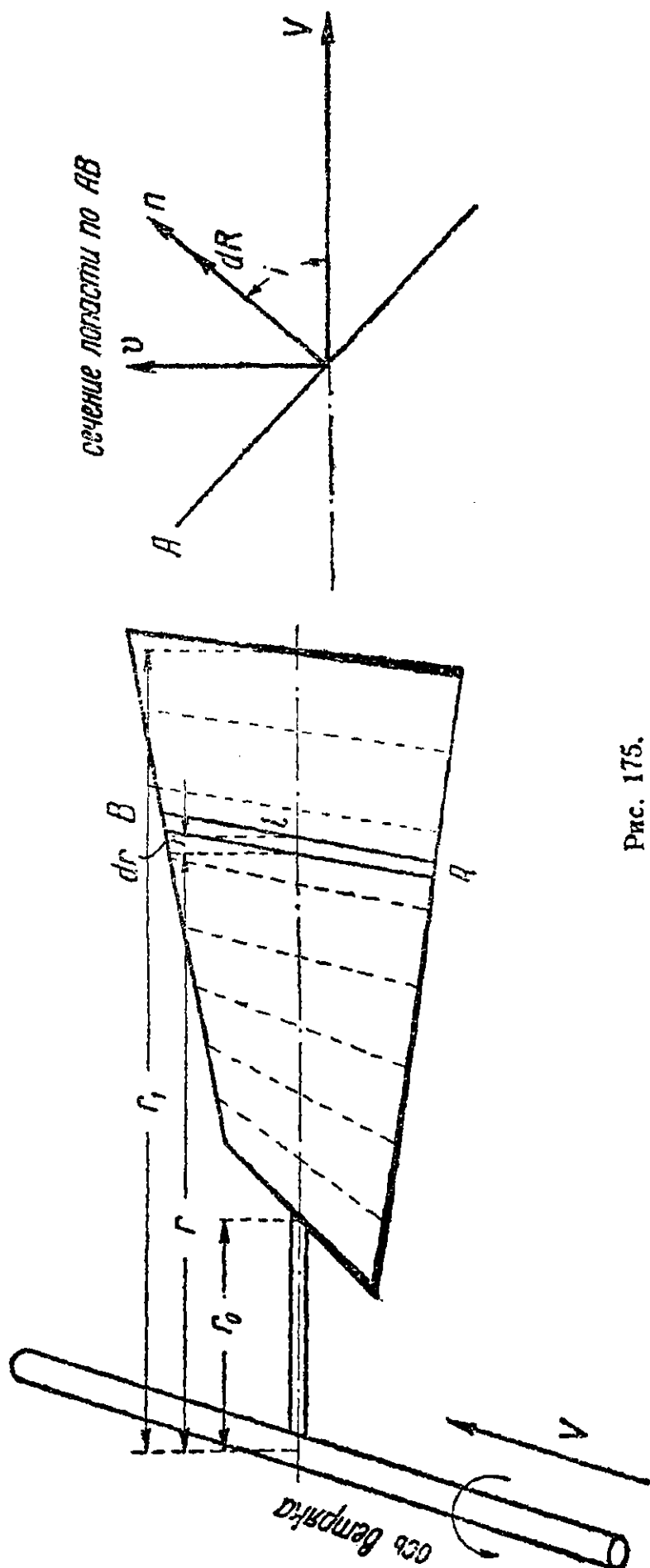


Рис. 175.

малого изменения функции δi (при произвольном значении аргумента r в интервале r_0, r_1) равнялось нулю, тогда получим

$$\begin{aligned}\delta N &= Cl\omega \cdot \delta \int_{r_0}^{r_1} (V \cos i - r\omega \sin i)^2 r \sin i dr = \\ &= Cl\omega \int_{r_0}^{r_1} [2(V \cos i - r\omega \sin i)(-V \sin i - r\omega \cos i) \sin i + \\ &\quad + (V \cos i - r\omega \sin i)^2 \cos i] \delta i \cdot r dr = 0.\end{aligned}$$

Отсюда, в силу произвольности пределов интегрирования, получим

$$-2(V \sin i + r\omega \cos i) \sin i + (V \cos i - r\omega \sin i) \cos i = 0$$

или

$$\operatorname{tg}^2 i + \frac{3}{2} \frac{\omega r}{V} \operatorname{tg} i - \frac{1}{2} = 0. \quad (61)$$

Положительное решение этого уравнения:

$$\operatorname{tg} i = -\frac{3}{4} \frac{\omega r}{V} + \sqrt{\frac{9}{16} \frac{\omega^2 r^2}{V^2} + \frac{1}{2}} \quad (62)$$

и дает ответ на поставленную задачу. Мы видим, что форма крыла зависит от отношения $\frac{\omega}{V}$ — результат, вполне оправдываемый опытом. Изложенная теория, конечно, является весьма приближенной, так как она не учитывает всей сложности явления обтекания лопастей воздухом.

б) Работа упругой силы. Мы уже знаем из первого задания первой темы, что с количественной стороны сила упругости характеризуется законом Гука о пропорциональности нагрузки и деформации: сила упругости пропорциональна смещению из равновесного положения, крутящий момент пропорционален углу закручивания, — не представляет никакого труда определить работу сил упругости в простейших случаях деформации упругих тел. Мы дадим выражение этой работы на ряде отдельных примеров, причем будем определять работу непосредственным суммированием элементарных работ, более общий способ определения работы, основанный на понятии потенциальной энергии, мы дадим в следующем параграфе.

а) Случай прямолинейного движения. Обозначим, как и раньше, коэффициент упругости через c , смещение через x , тогда проекция силы упругости равна $F_x = -cx$, а элементарная работа будет равна

$$\delta W = F_x dx = -cx dx = d\left(-\frac{cx^2}{2}\right). \quad (63)$$

Полная работа перехода из положения M_1 с абсциссой x_1 в положение M_2 с абсциссой x_2 определится интегрированием:

$$W_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = \int_{x_1}^{x_2} d\left(-\frac{cx^2}{2}\right) = \frac{c}{2}(x_1^2 - x_2^2).$$

Работа выведения пружины из равновесного положения ($x=0$) до некоторого отклонения λ будет равна:

$$\boxed{W_{0,1} = -\frac{c\lambda^2}{2} = -\frac{P\lambda}{2}} \quad (64)$$

где через P обозначена нагрузка, соответствующая удлинению λ . Обращаем внимание учащегося на тот важный факт, что *работа упругой силы пропорциональна квадрату деформации или произведению деформации на соответствующую ей нагрузку*. Работу $W_{0,1}$ можно еще представить себе, как работу средней арифметической сил упругости до деформации и после деформации на пути, равном деформации, т. е. считать $W_{0,1} = -\frac{0+P}{2} \cdot \lambda$.

В полученных формулах упругие константы и геометрические размеры деформирующегося тела входят в коэффициент c , равный, как мы знаем:

$$c = \frac{P_{st}}{\delta_{st}}, \quad (65)$$

причем зависимость P_{st} от δ_{st} от физических констант имеет определенный вид для основных типов деформаций (растяжение, сжатие, изгиб). Мы пока будем пользоваться этими формулами для всех перечисленных типов деформаций, задавая c по ф-ле (65). Вывод зависимости c от физических констант тела будет дан в следующем параграфе.

Применим равенства (64) и (65) к численному расчету. К пружине в нерастянутом состоянии подвешен груз весом $p=1$ кг и отпущен без начальной скорости. Зная, что при равновесии, под влиянием того же груза, пружина растянется на 5 см, определим работу силы упругости пружины от начала движения до крайнего нижнего положения. Мы уже знаем, что динамическая деформация будет в два раза более статической, т. е. будет равна 10 см. Коэффициент упругости равен:

$$c = \frac{1}{5} \text{ кг/см},$$

так что искомая работа будет равна

$$W_{0,1} = -\frac{c\lambda^2}{2} = -\frac{10^2}{5 \cdot 2} = -10 \text{ кг. см.}$$

Легко видеть, что работа веса будет равна той же величине 10 кг. см, только со знаком плюс. Сумма работ всех сил (веса и

упругости), приложенных к грузу, равна нулю. Вес играл роль двигательной силы, упругость — силы сопротивления.

Работа двигательной силы целиком ушла на преодоление упругого сопротивления. Совершенно также же расчеты можно было бы провести с грузом на рессоре, грузом, закрепленном на упругой пластинке, и т. д. Мы вернемся к этим задачам при рассмотрении колебаний в задании, посвященном теореме об изменении кинетической энергии.

б) Движение по любой кривой. Если точка, выведенная из положения равновесия, соответствующего недеформированному состоянию, движется как угодно в пространстве, то к ней приложена сила упругости, стремящаяся вернуть ее в равновесное положение. Сила эта направлена к центру и пропорциональна удалению от него.

Обозначая вектор-радиус точки через $\mathbf{r}$ и коэффициент упругости через c , будем очевидно иметь (рис. 176)

$$\mathbf{F} = -c \cdot \mathbf{r}.$$

Элементарная работа силы $\mathbf{F}$ равна

$$\delta W = (\mathbf{F}, d\mathbf{r}) = -c(\mathbf{r}, d\mathbf{r}) = -cd \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{r})}{2} = d \left(-\frac{cr^2}{2} \right).$$

Мы видим, что подобно силе веса, элементарная работа силы упругости представляется полным дифференциалом, а следовательно, работа упругости на конечном участке $M_1 M_2$ легко вычисляется при помощи интеграла:

$$W_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = \int_{r_1}^{r_2} d \left(-\frac{cr^2}{2} \right) = \frac{c}{2} (r_1^2 - r_2^2). \quad (66)$$

Результат получается аналогичный случаю прямолинейного движения. Работа силы упругости при отклонении из недеформированного состояния пропорциональна квадрату деформации, т. е. квадрату отклонения от недеформированного состояния.

Замечательно, что, как и в случае веса, работа силы упругости не зависит от траектории движения, а только от начального и конечного положений точки. Если начальное и конечное положения точки находятся на одном расстоянии от центра, работа на участке равна нулю. При удалении от центра работа упругой силы отрицательна, при приближении к центру — положительна.

Переписывая последнее равенство (66) в виде:

$$W_{1,2} = \pm c \frac{r_1 + r_2}{2} \cdot |r_2 - r_1|, \quad (67)$$

где знак плюс соответствует приближению к центру ($r_2 < r_1$), а знак минус — удалению ($r_2 > r_1$), можем сказать, что работа упругой

силы в случае любого движения может быть представлена произведением средней арифметической сил упругости в начальном и конечном положениях точки на разность расстояний ее от равновесного положения, причем работа положительна при уменьшении деформации (приближение к равновесному положению) и отрицательна в противоположном случае.

Мы уже имели примеры движений под влиянием силы упругости в пространстве (плоские колебания груза на конце стержня, заделанного другим концом); численные подсчеты работы в этих случаях несколько не затруднительны и проводятся так же, как и в случае прямолинейного движения.

в) Работа при кручении. Если сечение упругого вала (провода, нити) закручено на угол φ по отношению к недеформированному сечению, то образующийся в этом сечении момент упругих сил пропорционален углу кручения, т. е.

$$M = -k\varphi,$$

где коэффициент k зависит от упругих свойств тела, геометрических размеров сечения и положения его, причем знак минус показывает, что момент всегда создает вращение, противоположное закручиванию (упругие силы стремятся восстановить равновесие). Элементарную работу момента кручения найдем, взяв произведение этого момента на элементарное приращение угла кручения:

$$\delta W = Md\varphi = -k\varphi d\varphi = d\left(-\frac{k\varphi^2}{2}\right),$$

полная работа при кручении от начального угла φ_1 до конечного угла φ_2 будет равна:

$$W_{1,2} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} Md\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\left(-\frac{k\varphi^2}{2}\right) = \frac{k}{2}(\varphi_1^2 - \varphi_2^2), \quad (68)$$

формула по своей структуре похожа на (66). В следующем параграфе, а главным образом в 3-м задании мы будем иметь приложение этих формул.

Мы привели подсчеты работы лишь наиболее простых типов сил: веса, трения, сопротивления среды, упругости. Случаи более сложных сил, как, например, тяготения, электростатического и магнитного притяжения и отталкивания мы рассмотрим в следующем параграфе в связи с понятием потенциальной энергии.

§ 35. Силовое поле и его характеристики: напряжение и силовые линии. Работа при движении в силовом поле. Условия независимости работы от формы траектории.

Просматривая еще раз примеры и упражнения предыдущего параграфа, а также вспоминая разнообразные примеры сил, встречавшихся на протяжении всей книги, можно обратить внимание на один особый класс сил, обладающих тем свойством, что их

величина и направление зависят *только от положения того пункта пространства, через который проходит рассматриваемая материальная точка*, или, более обще, от взаимного расположения взаимодействующих тел.

Так, например, мы уже знаем, что упругая сила зависит только от расстояния движущейся точки от равновесного положения (центра), соответствующего отсутствию деформации, и направлена к этому центру. Силы тяготения двух масс зависят от их взаимного расположения (обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними), точно так же и сила притяжения (или отталкивания) двух электрических зарядов. Этот класс сил принципиально отличается, например, от сил сопротивления среды, зависящих от скорости движения тела, а не от положения его в пространстве; от сил трения, пропорциональных нормальной реакции поверхности, по которой движется тело (эта реакция в свою очередь зависит от скорости движения тела и других обстоятельств); от сил взаимодействия заряда с магнитным полем, зависящих от величины и направления скорости движения и др.

С физической стороны класс сил, зависящих от положения движущейся точки, характеризуется тем, что каковы бы ни были начальные условия движения, траектории и скорости движущейся точки, силы взаимодействия точек предопределены заданным законом распределения интенсивности и направления взаимодействия в пространстве, и совершенно естественным представляется тот факт (о нем еще речь впереди), что работа этих сил не зависит от формы пути, а только от начального и конечного положения движущихся точек.

С математической точки зрения все сводится к тому, что силы взаимодействия (аналитически — их проекции) являются функциями только расстояния движущихся точек, причем функциями однозначными и непрерывными. Если точка или система точек движется в пространстве под действием сил, однозначно определяемых теми пунктами пространства, через которые в данный момент наша точка или система проходит, то говорят, что точка или система движется в *силовом поле*. Вокруг всякого материального тела имеется поле тяготения, так как всякое другое тело, находящееся в этом поле, испытывает тяготение к первому телу, причем это тяготение зависит от взаимного расположения тел.

Точно так же вокруг заряженного электричеством тела образуется электростатическое поле, около проводника, по которому течет ток, — магнитное поле и т. д. Чтобы охарактеризовать поле само по себе, независимо от того, какое тело в нем движется, вводят вектор *напряжения поля*, понимая под этим силу взаимодействия поля с некоторым „единичным“ телом, т. е., например, с телом единичной массы, единицы заряда, единицы магнетизма и т. п.

В каждой точке поля можно указать напряжение поля E , тогда взаимодействие поля с данным телом будет равно напряжению его, умноженному соответственно на заряд, массу и т. п. движущегося тела. Поясним примером. Тело массы M образует вокруг себя поле тяготения. На единицу массы, находящейся

в точке с вектор-радиусом $\mathbf{r}$, это поле действует силой, определяемой, очевидно, векторным выражением:

$$-f \cdot \frac{M}{r^3} \cdot \mathbf{r},$$

где f — постоянная тяготения, следовательно

$$\mathbf{E} = -f \frac{M}{r^3} \mathbf{r}.$$

Если в этой точке находится масса m , то действующая на нее сила будет равна:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{E} = -f \frac{Mm}{r^3} \mathbf{r}.$$

Две массы m_1 и m_2 образуют поле с напряжением

$$\mathbf{E} = -f \frac{m_1}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - f \frac{m_2}{r_2^3} \mathbf{r}_2,$$

где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ суть вектор-радиусы одной и той же точки по отношению к массам m_1 и m_2 . Сила, действующая на точку с массой m , будет равна:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{E} = -f \frac{m_1 m}{r_1^3} \mathbf{r}_1 - f \frac{m_2 m}{r_2^3} \mathbf{r}_2.$$

Если через какую-нибудь точку поля провести вектор напряжения $\mathbf{E}$, взять на направлении этого вектора смежную точку и через нее провести соответствующее ей напряжение $\mathbf{E}'$ и т. д. (рис. 177), то мы получим некоторую ломаную линию $MM'M'' \dots$, которая в пределе, при достаточно близких смежных точках, превращается в кривую, называемую *силовой линией поля*. Через каждую точку поля можно провести свою силовую линию, так что поле можно считать заполненным силовыми линиями. По силовой линии будет двигаться взаимодействующая с полем точка, если ее отпустить без начальной скорости, если же точка вошла в поле, имея уже некоторую скорость, то она будет двигаться, переходя от одной силовой линии к другой, ей смежной. Мы уже имели такой пример в первом задании, когда рассматривали движение электрона в электрическом поле плоского конденсатора. Силовыми линиями служили прямые линии, перпендикулярные к обкладкам конденсатора. Электрон влетал с некоторой начальной скоростью, перпендикулярной к направлению силовых линий, вступал с полем во взаимодействие и отклонялся им от прямолинейного пути, проходя все поле насквозь от одной силовой линии к другой. Электроны, отрывающиеся от обкладок конденсатора, двигались бы по силовым линиям от одной обкладки к другой.

По определению силовой линии элемент ее дуги $d\mathbf{r}$ совпадает

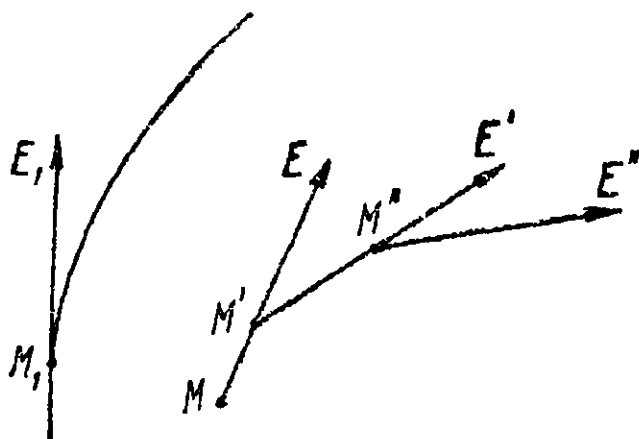


Рис. 177.

по направлению с напряжением поля в данной точке, поэтому уравнение силовых линий имеет вид:

$$[E, dr] = 0, \quad (69)$$

или

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}. \quad (70)$$

Замечая, что E_x, E_y, E_z являются функциями x, y, z , видим, что уравнение силовой линии представляется системой двух дифференциальных уравнений первого порядка. При интегрировании этой системы постоянные интегрирования исключаются при помощи условия, что силовая линия должна проходить через наперед заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

Поле тяготения одной точечной массы имеет силовые линии:

$$-f \frac{M}{r^3} [r, dr] = 0,$$

т. е.

$$[r, dr] = 0.$$

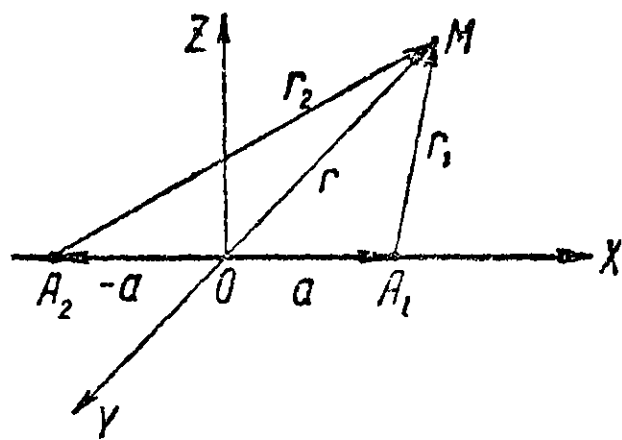


Рис. 178.

Это, очевидно, прямые линии, выходящие лучами из начала координат (приращение dr параллельно r).

В качестве еще одного примера рассмотрим силовые линии притяжения точки к двум центрам упругими силами, пропорциональными расстояниям точки до этих центров.

Выбрав начало координат на середине отрезка A_1A_2 (рис. 178), соединяющего притягивающие центры, и замечая, что притяжение в данном случае зависит исключительно от свойств упругого поля, т. е. коэффициента c , а не от констант притягиваемой точки M , будем иметь напряжение поля, равное равнодействующей упругих сил, приложенных к точке M :

$$E = -cr_1 - cr_2.$$

Обозначая вектора $\vec{OA}_1 = a$ и $\vec{OA}_2 = -a$, найдем:

$$r_1 = r - a, \quad r_2 = r + a,$$

так что

$$E = -cr + ca - cr - ca = -2cr;$$

притяжение к двум центрам оказывается эквивалентным притяжению к одному, находящемуся по середине отрезка, соединяющего притягивающие центры. Силовые линии будут опять прямые, проходящие через начало координат, согласно уравнению

$$[E, dr] = -2c[r, dr] = 0.$$

Если бы силы притяжения к центрам имели различные коэффициенты: $F_1 = -c_1r_1$, $F_2 = -c_2r_2$, то задача свелась бы к упругому притяжению одним центром, находящимся между центрами A_1 и A_2

на расстояниях обратно пропорциональных коэффициентам упругости, причем коэффициент упругости равнодействующей равняется сумме $c_1 + c_2$.

Предлагаем доказать этот простой результат самому учащемуся. Таково будет притяжение тела, висящего на нескольких пружинах, растянутых на раме, например в случае крепления аэронавигационных и др. приборов на пружинах во избежание тряски от двигателя.

Равновесное положение прибора будет центром колебания, причем равнодействующая сила упругости при отклонении прибора от положения равновесия, будет направлена к этому центру, через него будут проходить все силовые линии. Мы лишь вкратце остановились на понятии силовых линий и дали самый простой с математической стороны пример. Более сложные примеры можно найти в курсах электродинамики, теории потенциала и др.

Перейдем к *вычислению работы при движении в силовом поле*. Заметим, прежде всего, что, если точка движется по некоторой траектории, пересекающей силовые линии под прямым углом, то работа сил равна нулю. Выйдя из какой-нибудь точки пространства со скоростью, перпендикулярной к силовой линии, мы перейдем на смежную силовую линию, оттуда переместимся опять перпендикулярно силовой линии на смежную силовую линию и построим таким образом кривую, ортогональную к силовым линиям. Семейству силовых линий в пространстве соответствует семейство только что указанных *ортогональных траекторий*. Особенно интересен случай, когда можно указать в пространстве не только линии, но и целые *поверхности, ортогональные к силовым линиям*. Такие поверхности обладают замечательным свойством: *при всяком движении по такой поверхности (по любой кривой) работа сил поля равна нулю*.

Не во всяком силовом поле можно провести такие поверхности. Для существования их необходимо выполнение некоторого ограничения, накладываемого на проекции напряжения поля. В самом деле, предположим, что такие ортогональные к силовым линиям поверхности существуют, и их уравнение имеет вид:

$$\Phi(x, y, z) = C, \quad (71)$$

где C — переменный параметр, определяющий различные поверхности семейства. Тогда, очевидно,

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz = 0, \quad (72)$$

кроме того по условию перпендикулярности поверхности к напряжению поля E скалярное произведение E на вектор перемещения по поверхности $d\mathbf{r}$ (с проекциями dx, dy, dz) должно быть равно нулю:

$$(E, d\mathbf{r}) = E_x dx + E_y dy + E_z dz = 0. \quad (73)$$

На всякой поверхности dx и dy являются совершенно произвольными величинами, а dz зависит от них, поэтому уравнения (72) и (73) должны быть следствиями одно другого, так как в противном

случае из них можно было бы определить две величины dy , dz через dx и только dx было бы произвольно; следовательно, коэффициенты в ур-ниях (72) и (73) пропорциональны, т. е.

$$E_x = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad E_y = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad E_z = \lambda \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \quad (74)$$

где λ —произвольная функция координат; при этом элементарная работа равна

$$(E, dr) = \lambda \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz \right) = \lambda d\Phi, \quad (75)$$

Из равенств (74) исключением λ и Φ можно найти связь между проекциями напряжения. Исключение можно провести, например составляя выражения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= \frac{\partial \lambda}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial \lambda}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= \frac{\partial \lambda}{\partial z} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= \frac{\partial \lambda}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (76)$$

затем, перемножая эти равенства соответственно с равенствами (74) и складывая результаты между собой, очевидно получим

$$E_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \right) + E_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + E_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = 0 \quad (77)$$

Полученное уравнение представляет условие, которому должны удовлетворять напряжения для того, чтобы в силовом поле существовали поверхности, ортогональные к силовым линиям. Равенство (77) дает необходимое условие существования поверхностей, ортогональных к силовым линиям, — несколько сложнее можно было бы доказать, что оно является и достаточным, для нас однако это доказательство не имеет значения. Итак мы можем себе представить все силовое поле расслоенным поверхностями, ортогональными к силовым линиям, их пересекающим. На каждой такой, поверхности величина Φ постоянна, причем она различна при переходе от одной поверхности к другой. Если взять две точки M_1 и M_2 в силовом поле и провести через них поверхности $\Phi = C_1$ и $\Phi = C_2$, то, как бы ни перемещались точки по своим поверхностям, разность значений Φ для них будет равна $C_2 - C_1$. Поверхности, на которых сохраняется постоянной некоторая величина Φ , называются *поверхностями уровня* Φ . Вычислим работу при перемещении „единичной“ точки (единицы массы, заряда и др.) из положения M_1 в положение M_2 . По предыдущему эта работа будет равна криволинейному интегралу:

$$W_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} (E, dr) = \int_{C_1}^{C_2} \lambda d\Phi. \quad (78)$$

Если менять вид траектории перехода из точки M_1 в M_2 , то работа будет, вообще говоря, меняться, так как при закрепленных крайних значениях Φ , λ будет иметь различные значения в различных местах силового поля. Для того, чтобы $W_{1,2}$ не менялось при изменении вида траектории, необходимо и достаточно, чтобы λ было одинаково во всем силовом поле, например равнялось единице, тогда работа будет просто равна разности значений Φ в начале и конце участка, не зависимо от того, по какой кривой движение происходит. Полагая в равенствах (76) $\lambda = \text{const}$, будем иметь следующие условия независимости работы от траектории движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Кроме того, считая λ равным единице, из (74) получим зависимость напряжения от изменения величины Φ :

$$E_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad E_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad E_z = \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (80)$$

Мы видим, что между вектором E и функцией Φ существует определенная связь. Чтобы выяснить физический смысл величины Φ , напишем, что

$$d\Phi = (E, dr),$$

и проинтегрируем вдоль по некоторой траектории от начальной точки M_0 до какой-то текущей точки M , тогда будем иметь,

$$\Phi(M) - \Phi(M_0) = \int_{M_0}^M (E, dr)$$

или, откидывая $\Phi(M_0)$ как произвольную постоянную интегрирования, которую можно положить равной нулю, найдем значение Φ в точке M , а следовательно, и на всей поверхности, проходящей через точку M :

$$\Phi(M) = \int_{M_0}^M (E, dr).$$

Оказывается, что Φ имеет физическое значение *работы взаимодействия поля с единичным телом*. В следующем параграфе мы вернемся еще к этому вопросу и более детально его рассмотрим.

Выясним далее физический смысл зависимости E от Φ , заданной системой равенств (80). Для этого введем в рассмотрение одну новую векторную операцию, имеющую большое значение при изучении силовых и других полей.

Обозначим расстояние между двумя смежными поверхностями, соответствующими значениям Φ и $\Phi + d\Phi$, отсчитанное по нормали

в сторону возрастания Φ , через dn (рис. 179). Величина $\frac{d\Phi}{dn}$ называется производной Φ по направлению n и определяет, очевидно, быстроту роста функции Φ с переходом от одной поверхности к другой. Вектор, имеющий величину $\frac{d\Phi}{dn}$ и направленный по нормали к поверхности $\Phi = C$ в сторону возрастания Φ , называется **градиентом** Φ и обозначается символом $\nabla \Phi$ или $\text{grad } \Phi$. Обозначая орт нормали через n , получим

$$\nabla \Phi = \text{grad } \Phi = \frac{d\Phi}{dn} \cdot n. \quad (81)$$

Так как $d\Phi$ определяет работу на перемещении dn при переходе от одной поверхности к смежной, то отношение этой работы к перемещению будет равно силе, т. е. напряжению E :

$$\frac{d\Phi}{dn} = E, \quad (82)$$

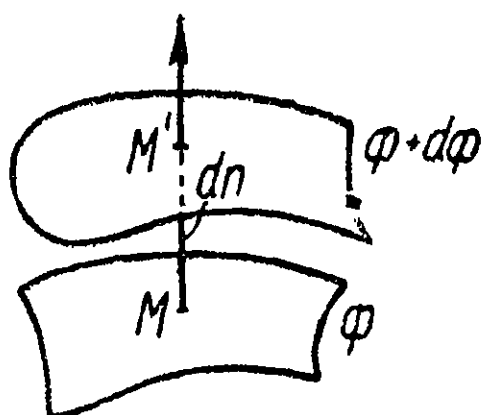


Рис. 179.

кроме того силовая линия, а следовательно и напряжение, направлены как раз по нормали к поверхности уровня, причем положительной работе $d\Phi > 0$ соответствует сила, направленная по перемещению dn , так что справедливо векторное равенство:

$$E = \frac{d\Phi}{dn} n = \text{grad } \Phi. \quad (83)$$

Сравнивая это равенство с (80), видим, что проекции градиента Φ на оси координат равны частным производным Φ по координатам:

$$\text{grad}_x \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \text{grad}_y \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \text{grad}_z \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

Функция Φ , имеющая, как мы уже говорили, физический смысл работы, тесно связана с силовым полем и носит название *силовой функции*; поверхности, на которых она имеет постоянное значение, называются *поверхностями уровня силовой функции*. Равенство (83) показывает, что *напряжение поля по величине и направлению равно градиенту силовой функции поля*. Чем больше напряжение, тем быстрее растет работа сил поля при перемещении „единичного“ тела, а следовательно, и работа при движении всякого взаимодействующего с полем тела. Если вычертить график расположения поверхностей уровня силовой функции, нанося поверхности, соответствующие значениям: $\Phi = C_1$, $\Phi = C_1 + h$, $\Phi = C_1 + 2h \dots$, где h — некоторое малое приращение Φ , то чем больше $\frac{d\Phi}{dn}$, равное приближенно отношению h к расстоянию между двумя смежными поверхностями, тем меньше эти расстояния, т. е. поверхности будут располагаться на графике гуще.

В местах большей густоты поверхностей уровня мы будем иметь и большее напряжение поля, а следовательно, и места, где взаимодействие поля с телом наиболее интенсивно. В этих пунктах силового поля данная работа будет производиться на меньшем перемещении, чем в тех пунктах, где поверхности реже расположены, следовательно, силы должны быть больше.

Мы принуждены удовлетвориться этим кратким перечислением общих свойств силового поля и перейти к приложениям этих понятий к конкретным примерам динамических полей.

§ 36. Потенциальная энергия поля. Выражение работы в силовом поле через падение потенциала.

Среди всех возможных силовых полей для нас практическое значение имеют исключительно поля, напряжения которых удовлетворяют условиям (79), т. е. с физической точки зрения такие поля, в которых работа сил не зависит от формы траектории; этими полями мы сейчас подробнее и займемся.

Из того, что было сказано в предыдущем параграфе, следуют два основных и самых важных свойства этих полей:

1°. Все поле можно расслоить непрерывным рядом поверхностей так, что вдоль каждой поверхности сохраняется постоянной силовая функция.

2°. Работа сил при переходе точки из одного пункта поля в другой не зависит от траектории движения, а только от значения силовой функции на поверхностях уровня, проходящих через первоначальное и конечное положения точки.

Попад в силовое поле тело, взаимодействуя с полем, принуждено двигаться в нем, если только конечно кроме силового поля нет еще других сил, не входящих в рассматриваемое поле и препятствующих этому движению. При своем движении наше тело будет переходить с одной поверхности уровня силовой функции на другую, причем силы будут производить работу положительную, если движение происходит в направлении напряжения поля и отрицательную в противоположном случае. Так, например, всякое материальное тело на земле находится в поле земного тяготения, силовые линии (с достаточной для практики точностью) направлены к центру земли, ортогональные поверхности являются поверхностями концентрическими с земной поверхностью. Предоставленное самому себе тело будет падать на землю, переходя с одной поверхности на другую, все более близкую к центру земли. При этом силы веса совершают положительную работу.

Если подбросить тело вверх, то оно сначала движется против силовых линий земного тяготения, тормозится ими (работа веса отрицательна) и затем уже начинает падать вниз на землю, причем совершается положительная работа. Если тело повесить на нить, то реакция нити не позволит телу падать по направлению нити, но все же укажет направление силовых линий земного тяготения с некоторым незначительным искажением, происходящим от вращения земли (об этом см. третью часть нашего курса).

Возможность поля приводить взаимодействующее с ним тело

в движение и вместе с тем совершать определенную работу носит наименование *потенциальной энергии поля*. Мы можем количественно выразить потенциальную энергию поля как раз той работой, которую сила совершает при переходе взаимодействующей с полем точки или тела из одного положения в некоторое другое. При выходе из различных точек поля, не лежащих на одной и той же поверхности уровня, на путях, ведущих к одной и той же точке, или, что все равно, поверхности уровня, совершается *различная* работа, следовательно, в разных пунктах поля возможность совершить работу, вообще говоря, различна и мы можем говорить о *потенциальной энергии поля в данной точке или на данной поверхности уровня*, понимая под этим ту работу, которую могут совершить силы поля, перемещая „единичное“ тело из данного места в тот пункт, где возможность совершения работы или запас потенциальной энергии уже исчерпан или в другой какой-нибудь условно выбранный пункт.

Упругое деформированное тело дает вам пример поля сил упругости. Запас потенциальной энергии деформированного тела равен той работе, которую совершают упругие силы, приводя упругое тело в равновесное состояние, имевшее место до деформации, или, что все равно, той работе внешних сил, которую нужно затратить, чтобы привести тело в заданное деформированное состояние. Здесь мы потенциальную энергию определяем полным исчерпанием ее после приведения сил к нулю при равновесии.

В других случаях, например в случае поля тяжести, мы определяем потенциальную энергию в данном месте той работой, которую совершит тело единицы веса, падая с данной высоты до поверхности земли, хотя на поверхности земли потенциальная энергия тела вовсе не исчерпана, — тело может падать в колодезь любой глубины.

В электростатическом поле отталкивания (взаимодействие поля с одноименным зарядом) потенциальную энергию поля можно измерить работой, производимой при удалении заряда из данного места на бесконечность, где силы отталкивания и энергия равны нулю. В случае притяжения (электростатического или всемирного тяготения) потенциальная энергия также равна нулю на бесконечности; ее можно определить в *данной* точке работой, которую надо произвести, чтобы тело единичного заряда или массы удалить на бесконечность.

Условимся обозначать потенциальную энергию буквой Π и измерять в тех же единицах, что и работу. Из определения потенциальной энергии поля, как возможности поля совершить работу при переходе с данной поверхности на какую-то другую, сразу видно, что все точки поля, лежащие на одной поверхности уровня, характеризуются одной и той же потенциальной энергией, т. е. поверхности уровня силовой функции служат одновременно и поверхностями уровня потенциальной энергии. Кроме того, припоминая физическое значение силовой функции как работы, совершаемой при приведении „единичного“ тела из *какой-нибудь точки поля на данную поверхность уровня*, видим, что силовая функция

и потенциальная энергия равны по абсолютной величине, но различны по знаку, т. е.

$$\Pi = -\Phi \quad (84)$$

Конечно знак имеет условное значение, но физическое понимание явления заставляет нас пользоваться именно величиной Π , а не Φ . Напишем работу при переходе с поверхности уровня $\Phi = \Phi(M_1)$ на поверхность уровня $\Phi = \Phi(M_2)$:

$$W_{1,2} = \Phi(M_2) - \Phi(M_1) \quad (85)$$

и выразим эту же работу по (84) через потенциальную энергию:

$$W_{1,2} = \Pi(M_1) - \Pi(M_2). \quad (86)$$

Сравним между собою эти два выражения работы. В первом работа равна *приращению* силовой функции при переходе с одной поверхности уровня на другую, во втором работа выражается через *уменьшение* или, как мы в дальнейшем будем говорить, *падение* потенциальной энергии. Последнее выражение создает нам хороший физический образ: поле осуществляет свою возможность и приводит тело в движение. При этом силы, действующие на тело, совершают работу и тело переходит в новое положение в силовом поле, причем потенциальная энергия уже будет иметь меньшее значение — *часть энергии исчерпалась, превратилась в совершенную работу*.

Такое понимание явления вполне совпадает с привычными для нас представлениями о том, что нельзя получить работу „из ничего“, что имеется какой-то запас энергии, за счет которого и совершается работа. Это представление, приведшее к закону сохранения энергии (о нем речь будет в последнем задании) тесно было связано с открытым до него законом сохранения вещества и рядом других „законов сохранения“ физических величин.

Мы можем резюмировать следующие чрезвычайно важные свойства силового поля рассмотренного типа:

1) Силовое поле характеризуется возможностью приводить в движение взаимодействующие с ним тела и совершать при этом работу. Эта возможность определяется *потенциальной энергией* поля.

2) При рассмотрении работы, производимой силами поля, существенно *не положение начальных и конечных пунктов движения, а их расположение на поверхностях уровня потенциальной энергии*.

3) *Работа при движении в силовом поле не зависит от формы траектории, по которой происходило движение в поле, а только от того, с какой поверхности уровня потенциальной энергии движение началось и на какой поверхности закончилось*.

4) *Работа равна падению потенциальной энергии при переходе движущегося тела с начальной поверхности уровня на конечную*.

5) *Работа при движении по одной и той же поверхности уровня или возвращении в конце движения на начальную поверхность уровня равна нулю*. Поле, обладающее этими свойствами,

мы будем называть *потенциальным полем*. Определение потенциальной энергии или, как мы будем часто для краткости говорить, *потенциала* поля легко производится простым интегрированием элементарной работы напряжения:

$$-d\Pi = \delta W = (\mathbf{E}, d\mathbf{r}) = E_x dx + E_y dy + E_z dz \quad (87)$$

или по формулам (80), переписанным для потенциала

$$\boxed{-\frac{\partial \Pi}{\partial x} = E_x, \quad -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = E_y, \quad -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = E_z.} \quad (88)$$

Из последних формул следует математическое определение потенциала как *функции координат, частные производные которой по координатам с обратным знаком равны проекциям напряжения на соответствующую ось координат*.

В предыдущем мы все время говорили о потенциальной энергии поля, понимая под этим энергию взаимодействия поля с „единичным“ телом; в связи с этим под работой мы понимали работу напряжения, т. е. силы, действующей на „единичное“ тело. Учащегося не затруднит вспомнить, — об этом говорилось в предыдущем параграфе, — что для вычисления работы взаимодействия поля с не-„единичным“ телом следует помножить потенциал поля на постоянную величину, характеризующую заряд, массу и др. данного тела; мы это уясним на примерах.

Пользуясь понятием потенциала, мы можем конечно вычислять не только работу при движении одной точки, но и работу в случае системы точек. Для этого мы определяем потенциальную энергию взаимодействия системы точек по тому же правилу, что и для одной точки, именно из условия равенства суммы элементарных работ всех сил взаимодействия точек элементарному падению потенциала:

$$\boxed{-d\Pi = \sum_{i=1}^n (\mathbf{F}_i, d\mathbf{r}_i) = \sum_{i=1}^n (F_{ix} dx_i + F_{iy} dy_i + F_{iz} dz_i)} \quad (89)$$

Отсюда интегрированием этого полного дифференциала и найдем Π . Замечая, что потенциал системы, как и раньше, есть функция координат точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$, можем левую часть уравнения (89) переписать в виде полного дифференциала:

$$-d\Pi = -\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} dz_i \right).$$

Сравнивая с правой частью равенства (89), найдем

$$\boxed{-\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = F_{ix}, \quad -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i} = F_{iy}, \quad -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i} = F_{iz}} \quad (90)$$

Эти формулы, служащие обобщением формул (80), могут также служить для определения потенциала системы, но на практике несравненно проще пользоваться интегралом равенства (89).

Работа сил взаимодействия при переходе системы из одного положения в другое определяется очевидно падением потенциала от начального положения системы до конечного ее положения, т. е. как и раньше:

$$W_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Легче всего понятие потенциала и применение его для вычисления работы уясняются на примерах и упражнениях. Мы дадим сейчас ряд вычислений потенциала в наиболее часто встречающихся случаях. Более сложные примеры учащийся найдет в третьей части книги.

Примеры и упражнения.

1. Потенциал поля силы тяжести. Одним из простейших случаев вычисления потенциала является определение потенциала поля тяжести. Выбирая систему координат так, чтобы горизонтальная плоскость на заданном произвольно уровне была плоскостью XOY , а ось Z была направлена, например, вертикально вверх, будем иметь в случае одной точки веса p :

$$\delta W = -d\Pi = -pdz$$

откуда потенциал равен

$$\Pi = pz. \quad (91)$$

Постоянную интегрирования обычно опускают, так как во всех случаях применения потенциала приходится иметь дело только с разностью потенциалов. Мы дали потенциал взаимодействия поля не с „единичным“ телом, а с телом веса p , в случае потенциала взаимодействия поля с „единичным“ телом, в данном случае с телом, вес которого равнялся бы единице — потенциал был бы равен $\Pi = z$.

Потенциал системы тяжелых точек M_i с весами P_i и ординатами z_i определим интегрированием равенства:

$$\delta W = -d\Pi = \sum_{i=1}^n -p_i dz_i$$

откуда

$$\Pi = \sum_{i=1}^n p_i z_i.$$

Припоминая известное уже нам равенство

$$\sum_{i=1}^n p_i z_i = z_c \sum_{i=1}^n p_i = z_c P,$$

где z_c — ордината центра инерции системы, P — сумма весов отдельных точек системы, получим еще такое выражение для потенциала:

$$\Pi = P \cdot z_c$$

Эта формула остается верна, очевидно, и для потенциала тяжелого твердого тела веса P с ординатой центра тяжести z_c .

Работу силы веса при переходе системы из некоторого (первого) положения во второе, найдем, как падение потенциала:

$$W_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2 = P(z_{c1} - z_{c2}) \quad (92)$$

в полном соответствии с ранее выведенными формулами работы веса. Теперь уже понятно, почему работа силы веса не зависит от формы траектории движений: все дело в том, что поле тяжести — потенциальное поле.

2. Потенциальная энергия деформированного упругого тела. Мы рассмотрим сейчас ряд примеров на определение потенциальной энергии упругой деформации тел. Всякое упругое тело можно рассматривать, как систему точек, находящуюся в поле упругого взаимодействия, причем геометрически поле определяется размерами деформирующегося тела. Общий метод определения потенциальной энергии будет заключаться в том, что мы будем *вычислять работу упругих сил при переходе из исследуемого напряженного состояния в равновесное, не деформированное. Эта работа и дает нам запас потенциальной энергии деформированного упругого тела.*

Мы рассмотрим главные случаи деформаций: сжатие и растяжение, сдвиг, кручение и изгиб, причем будем всюду предполагать, что упругие силы подчиняются закону Гука, т. е. что предел пропорциональности не перейден.

а) Потенциальная энергия растянутого или сжатого тела. Если к бруску, закрепленному одним концом, приложить растягивающую силу P , то по закону Гука он получит удлинение λ , равное

$$\lambda = \frac{P \cdot l}{E \cdot F},$$

где l — длина бруска до деформации, F — площадь поперечного сечения и E — модуль упругости при растяжении.

Элементарная работа при растяжении равна:

$$\delta W = -P d\lambda = -\frac{E \cdot F}{l} \lambda d\lambda,$$

а следовательно, полная работа упругих сил при возвращении от деформации λ к нерастянутому состоянию будет равна:

$$W = -\int_{\lambda}^0 \frac{E \cdot F}{l} \lambda d\lambda = \frac{EF}{2l} \cdot \lambda^2,$$

что и дает значение потенциальной энергии растянутого тела. Мы напишем эту потенциальную энергию в следующих нескольких видах:

$$\Pi = \frac{EF}{2l} \lambda^2 = \frac{P\lambda}{2} = \frac{P^2 l}{2EF}$$

(93)

Отметим, что потенциальная энергия растянутого тела пропорциональна квадрату деформации его.

Иногда, желая отвлечься от размеров тела, вводят в рассмотрение удельную энергию деформированного тела, понимая под этим потенциальную энергию, отнесенную к единице объема, т. е.

$$\Pi_{уд} = \frac{\Pi}{F \cdot l} = \frac{E \lambda^2}{2 l^2} = \frac{E e^2}{2} = \frac{P \lambda}{2 F l} = \frac{p e}{2} = \frac{P^2}{2 E F^2} = \frac{p^2}{2 E}.$$

Здесь введены обозначения: относительное удлинение бруска $\frac{\lambda}{l} = e$, напряжение силы P , равное $\frac{P}{F}$, обозначено через p .

Количественную оценку потенциальной энергии растянутого тела можно получить из следующего примера. Резиновая нить допускает предельное напряжение (до предела пропорциональности) около $p = 20 \text{ кг/см}^2$, модуль упругости $E = 10 \text{ кг/см}^2$, следовательно удельная энергия равна

$$\Pi_{уд} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{E} = 20 \text{ кг/см}^2.$$

Таким образом, например, резиновая трубка длиной в 1 м с внешним диаметром в 1 см, внутренним — 0,3 см в растянутом состоянии может иметь запас потенциальной энергии:

$$\Pi_{\max} = \Pi_{уд} \cdot F l = \frac{20 \pi (1^2 - 0,3^2)}{4} 100 = 1428 \text{ кг. см} = 14,28 \text{ кг. м},$$

т. е. такая растянутая трубка может совершить работу поднятия почти 15 кг на высоту 1 м.

б) Потенциальная энергия при сдвиге. Как известно, сдвигом называется такая деформация тела, при которой все плоскости в теле, параллельные некоторой неподвижной, смещаются параллельно самим себе, причем эти смещения пропорциональны расстоянию плоскостей от основной, неподвижной. Так, например, прямоугольный брусок с сечением $ABCD$ (рис. 180) претерпевает сдвиг, если смещения частиц параллельны грани AD , причем по величине эти смещения пропорциональны расстоянию до грани AD :

$$\overline{MM'} = \overline{NN'} = \text{const} \cdot \overline{AM}.$$

При этом очевидно грань AB , оставаясь плоской, скосится до положения AB' , причем угол скошения β при малости деформации равен своему тангенсу, так что

$$\overline{MM'} = \overline{NN'} = \overline{AM} \operatorname{tg} \beta = \overline{AM} \cdot \beta.$$

Если обозначим через p_t касательное напряжение, приложенное

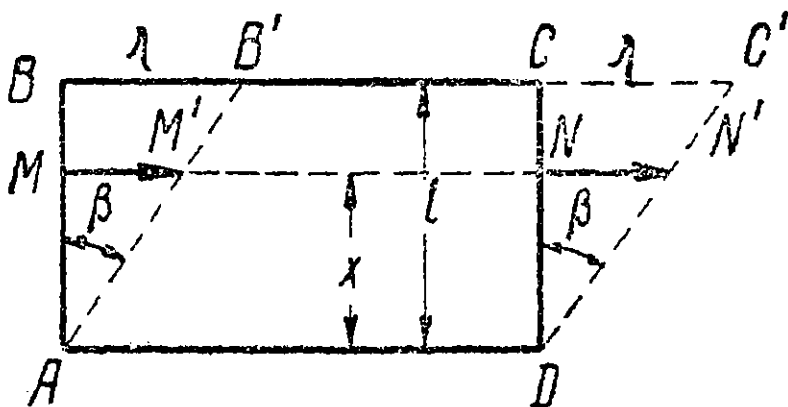


Рис. 180.

к внешней грани BC и вызывающее сдвиг, то по закону Гука можно положить

$$p_t = G\beta, \quad (94)$$

где G — модуль упругости при сдвиге, равный

$$G = \frac{E}{2(1+\sigma)},$$

а σ — коэффициент Пуассона (приблизительно $\sigma = \frac{1}{3}$, $G = \frac{3}{8}E$).

Обозначая смещение $\overline{BB'}$ грани BC , где приложено касательное напряжение p_t через λ , а касательную силу, равную произведению напряжения p_t на площадь F грани AD через Q , вычислим элементарную работу при смещении грани из данного напряженного состояния на $d\lambda$:

$$\delta W = -Qd\lambda = -p_t F d\lambda = -G\beta F d\lambda = -\frac{GF}{l} \lambda d\lambda,$$

отсюда найдем и полную работу сил упругости при возвращении тела в недеформированное состояние, т. е. потенциальную энергию

$$\Pi = W = - \int_{\lambda}^0 \frac{GF}{l} \lambda d\lambda = \frac{GF\lambda^2}{2l},$$

или, выражая работу через скошение $\beta = \frac{\lambda}{l}$:

$$\boxed{\Pi = \frac{GF l}{2} \beta^2} \quad (95)$$

Это и есть искомая потенциальная энергия деформированного тела при сдвиге. Удельная энергия (средняя энергия единицы объема) будет равна

$$\Pi_{уд} = \frac{G\beta^2}{2} = \frac{p_t^2}{2G}, \quad (96)$$

т. е. и в случае сдвига *потенциальная энергия пропорциональна квадрату деформации или квадрату напряжения.*

в) Потенциальная энергия при кручении. Не останавливаясь на деталях, известных учащемуся из курса сопротивления материалов, напомним, что если одно из сечений вала удерживается неподвижным, а другое, находящееся от первого на расстоянии l , закручивается некоторым моментом M на угол φ , то по закону Гука угол кручения и скручивающий момент пропорциональны друг другу:

$$M = \frac{GI_p}{l} \varphi. \quad (97)$$

Здесь G — тот же модуль упругости, что и при сдвиге, I_p — полярный момент инерции сечения вала, равный $\frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$ (r — ра-

диус, D — диаметр вала). Для разыскания потенциальной энергии скрученного вала вычислим, как и раньше, элементарную работу сил упругости при закручивании вала из данного деформированного состояния, характеризуемого углом φ на угол $d\varphi$:

$$\delta W = -M d\varphi = -\frac{G I_p}{l} \varphi d\varphi,$$

знак минус стоит потому, что приращению угла кручения ($d\varphi > 0$) соответствует отрицательная работа восстанавливающих сил упругости. Потенциальная энергия будет равна полной работе сил упругости при возвращении вала к недеформированному состоянию:

$$\Pi = W = - \int_{\varphi}^0 M d\varphi = \frac{G I_p}{2l} \varphi^2 = \frac{M^2 l}{2 G I_p} \quad (98)$$

Потенциальная энергия и здесь пропорциональна квадрату деформации или квадрату момента кручения.

Классический пример применения формулы потенциальной энергии в случае кручения дает расчет винтовой пружины или рессоры.

Предположим, что пружина, состоящая из n витков диаметра d , навитых на цилиндр, так что средний радиус витка равен R , общая длина всех витков $l = 2\pi R \cdot n$, растягивается силой P (рис. 181). Считая, что работа сил деформации сводится главным образом к работе кручения, по ф-ле (98) будем иметь потенциальную энергию пружины

$$\Pi = \frac{M^2 l}{2 G I_p} = \frac{P^2 R^2 \cdot 2\pi R \cdot n}{2 G \cdot \frac{\pi d^4}{32}} = \frac{32 P^2 R^3 n}{G \cdot d^4}. \quad (99)$$

Из полученной формулы сразу видно, в чем заключается смысл применения винтовых рессор или пружин. Располагая величиной R и, особенно, n , мы можем при небольшом габарите, беря большое число близких друг к другу витков, получить большой запас энергии и таким образом или накапливать энергию с последующей возможностью совершать работу или иметь приемник, поглощающий большое количество работы, что имеет значение при действии, например, рессор.

Обозначим через δ_{st} смещение конца пружины под нагрузкой P , тогда, приравнявая работу нагрузки и вычисленную только что потенциальную энергию, будем иметь

$$\frac{P}{2} \cdot \delta_{st} = \frac{32 P^2 R^3 n}{G d^4},$$

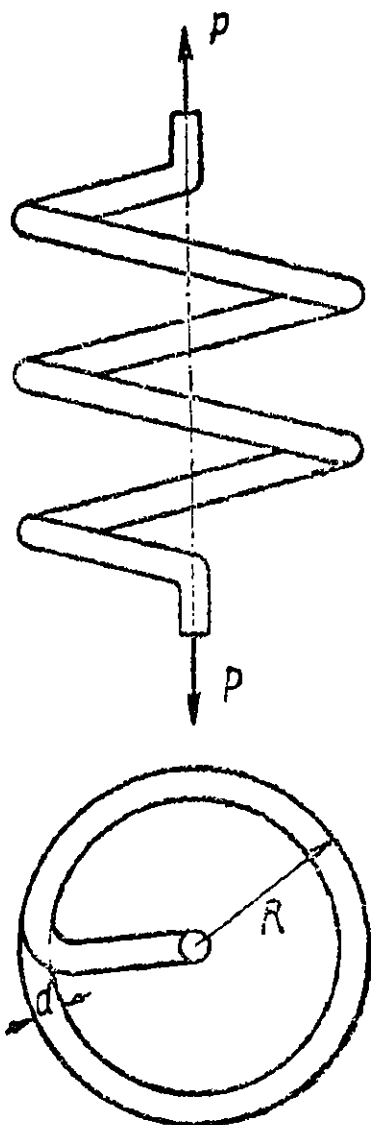


Рис. 181.

откуда

$$\delta_{st} = \frac{64 PR^3 n}{G \cdot d^4} \quad (100)$$

или

$$P = \frac{Gd^4}{64 R^3 n} \delta_{st}. \quad (101)$$

По этим формулам легко найти период колебаний груза P , подвешенного к концу рессоры. Вспоминая то, что говорилось в первом задании первой темы (упр. 5), найдем период колебаний:

$$T = 0,32 \sqrt{\delta_{st}} = 0,32 \sqrt{\frac{64 PR^3 n}{Gd^4}} \text{ сек.} \quad (102)$$

и число колебаний в минуту

$$n = \frac{300}{\sqrt{\delta_{st}}} = 300 \sqrt{\frac{Gd^4}{64 PR^3 n}}, \quad (103)$$

причем в последней формуле предполагается, что все длины выражены в сантиметрах. Эти формулы имеют большое значение в теории колебаний, и мы неоднократно в дальнейшем будем ими пользоваться.

г) Потенциальная энергия изгиба. Под изгибом, как известно, понимают деформацию, связанную с поворотом сечений балки друг по отношению к другу вокруг осей, проходящих через нейтральную ось тела, и с искривлением самой оси. В простейшем случае чистого изгиба, когда вдоль всей балки изгибающий момент M и радиус кривизны нейтральной линии ρ сохраняют постоянное значение (рис. 182а), имеем следующую зависимость между изгибающим моментом и углом взаимного поворота сечений φ :

$$M = \frac{EI}{l} \varphi = EI \cdot \frac{1}{\rho}, \quad (104)$$

где E — модуль упругости при растяжении или сжатии, l — расстояние между выбранными сечениями, I — момент инерции сечений относительно оси, перпендикулярной к плоскости изгиба и проходящей через нейтральную линию, ρ — радиус кривизны нейтральной линии. Потенциальная энергия чистого изгиба будет равна, подобно предыдущему:

$$\Pi = \int_0^\varphi M d\varphi = \frac{EI}{2l} \varphi^2 = \frac{M\varphi}{2} = \frac{M^2 l}{2EI} \quad (105)$$

В случае изгиба с переменным по длине стержня изгибающим моментом рис. 182б, мы берем потенциальную энергию элемента, заключенного между двумя сечениями, находящимися друг от друга на расстоянии ds и наклоненными под углом $d\varphi$, т. е.

$$d\Pi = \frac{M^2 ds}{2EI}$$

и суммируем энергии по всей длине стержня:

$$\Pi = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds. \quad (106)$$

Другое выражение потенциальной энергии изогнутого тела можно получить, если заметить, что по формуле чистого изгиба, примененной к выделенному нами элементу:

$$M = EI \frac{1}{\rho}$$

и, следовательно, выражение (106) может быть переписано еще так:

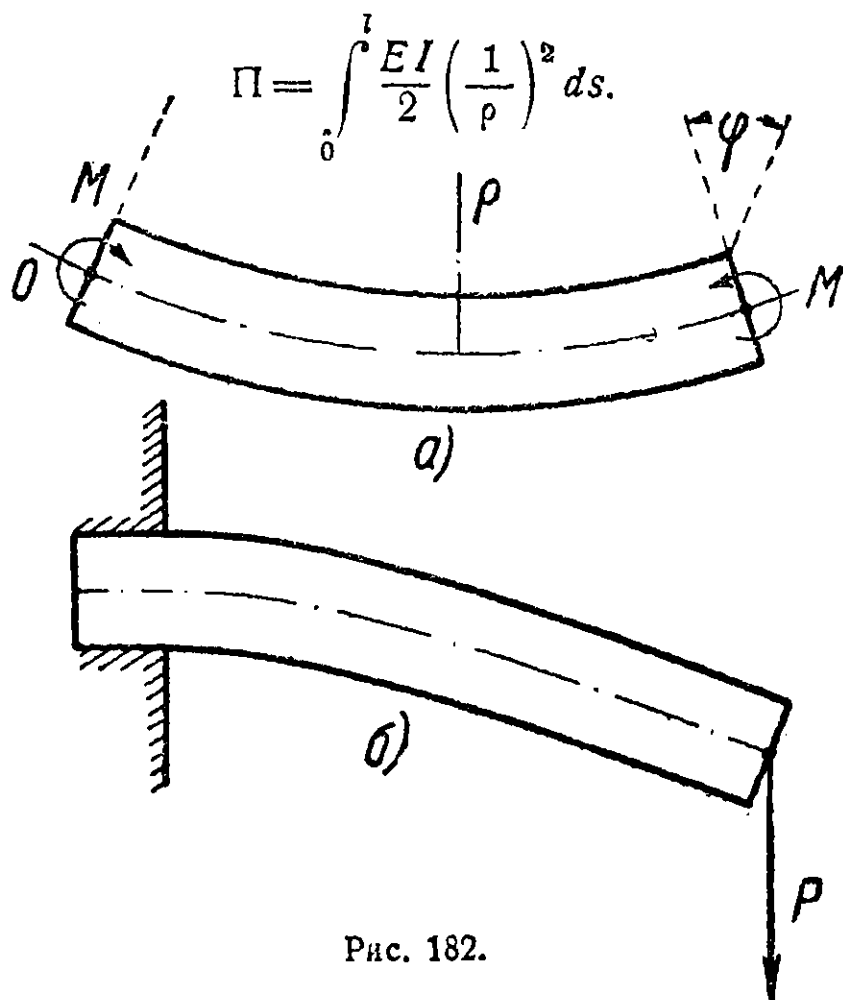


Рис. 182.

При малой изогнутости оси бруска можно положить

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} \approx \frac{d^2y}{dx^2},$$

тогда будем иметь

$$\Pi = \int_0^l \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^2 dx. \quad (107)$$

Зная потенциальную энергию напряженного состояния, можем, как мы уже это делали раньше, найти δ_{st} . Для этого достаточно приравнять потенциальную энергию работе нагрузки на пути δ_{st} , т. е. положить

$$\frac{P\delta_{st}}{2} = \Pi = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} ds.$$

В случае стержня или балки *постоянного сечения* получим

$$\delta_{st} = \frac{1}{PEI} \int_0^l M^2 ds \quad (108)$$

Определяя закон распределения M вдоль балки, т. е. задавая M в функции s , найдем δ_{st} .

Так, например, в случае балки с двумя заделанными концами A и B (рис. 183) закон изменения момента имеет вид:

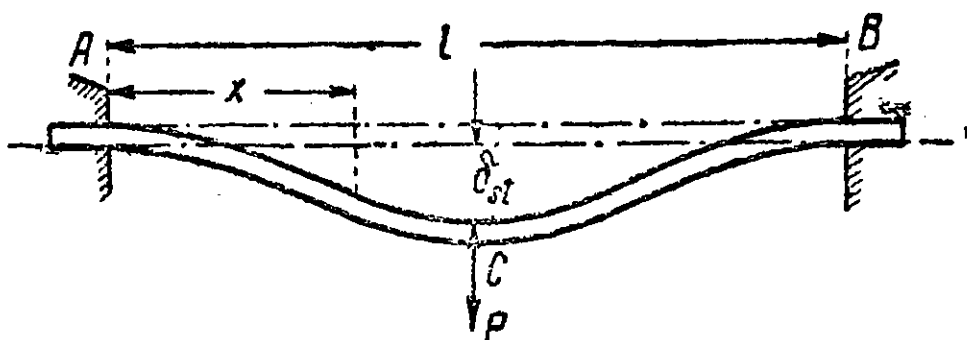


Рис. 183.

1. Для участка AC :

$$M = \frac{Pl}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4} \right).$$

2. Для участка CB :

$$M = \frac{Pl}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{3}{4} \right).$$

Подставляя в (108) и интегрируя, найдем

$$\delta_{st} = \frac{P}{EI} \frac{l^3}{192}. \quad (109)$$

Не останавливаясь на других случаях заделки — об этом подробно излагается в курсах сопротивления материалов, — обратим внимание учащегося еще только на один пример: вычисление *потенциальной энергии спиральной пружины* вроде тех, которые применяются в различных часовых механизмах. В данном случае, считая, что ко внешнему заделанному концу приложена сила P (рис. 184), а к внутреннему, соединенному с заводным шпинделем, приложен некоторый момент M , будем иметь из условия равновесия внешних сил

$$M = P \cdot h$$

К элементу ds пружины будет приложен момент $M' = Py$, максимальный момент $M_{\max}$ будет в сечении, диаметрально противоположном закрепленной точке, — он равен:

$$M_{\max} = P \cdot 2h.$$

Обозначим через $\Delta\varphi$ полный изгиб нашей пружины из равновесного состояния вследствие закручивания шпинделя, изгиб элемента пружины ds обозначим $d\Delta\varphi$; он будет равен по (104)

$$d\Delta\varphi = \frac{Py}{EI} ds,$$

откуда, интегрируя по всей длине спиральной пружины, найдем

$$\Delta\varphi = \frac{P}{EI} \int_0^l y ds; \quad (110)$$

интеграл, стоящий справа, представляет *статический момент* средней линии пружины относительно линии действия силы P . Как известно из статики, этот момент равен произведению длины этой линии на расстояние ее центра тяжести (в данном случае оси шпинделя) до оси, относительно которой момент берется. Итак имеем

$$\Delta\varphi = \frac{P}{EI} \cdot l \cdot h. \quad (111)$$

Определяя потенциальную энергию как работу при закручивании, равную половине произведения момента на угол кручения, получим

$$\Pi = \frac{1}{2} M \Delta\varphi = \frac{(Ph)^2}{2EI} l. \quad (112)$$

Если ввести в рассмотрение наибольшее допустимое напряжение при изгибе σ , равное отношению максимального момента $M_{\max} = 2M = 2Ph$ к моменту сопротивления $w = \frac{I}{e}$, где e обозначает половину высоты сечения, предполагаемого прямоугольным (с основанием a), то, замечая, что момент инерции I прямоугольного сечения равен:

$$I = \frac{a(2e)^3}{12} = \frac{2}{3} ae^3,$$

будем иметь

$$\sigma = \frac{M_{\max}}{w} = \frac{2Ph e}{I} = \frac{3Ph}{ae^2}.$$

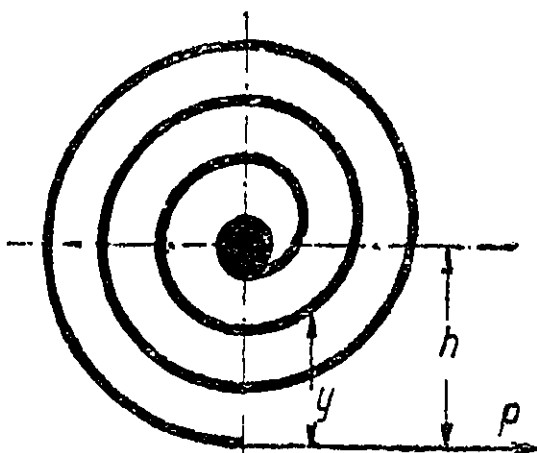


Рис. 184.

Тогда максимальная потенциальная энергия, накопленная пружиной, представится так:

$$\Pi_{\max} = \frac{\sigma^2 a e l}{12 E}$$

или, вводя в рассмотрение объем пружины, равный $V = a \cdot 2e \cdot l$, найдем следующее простое выражение для потенциальной энергии спиральной пружины:

$$\Pi_{\max} = \frac{\sigma^2 V}{24 E}. \quad (113)$$

По этой формуле, зная допустимое напряжение при изгибе пружины данного материала (обычно берут специальную закаленную сталь), модуль упругости и объем пружины, можно определить предельную потенциальную энергию, которую можно аккумулировать в спиральной пружине, для последующего приведения в движение некоторого механизма, напр. часового механизма и пр.

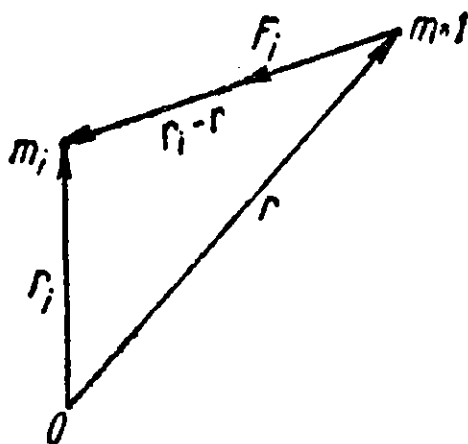


Рис. 185.

3. Потенциальная энергия системы тяготеющих масс. Найдем прежде всего напряжение поля тяготения системы масс m_i , находящихся в точках с вектор-радиусами r_i (рис. 185). Для этого поместим в поле „единичное тело“ с массой, равной единице и вектор-радиусом r . Тогда к этому телу будет приложена система сил

$$F_i = f m_i \frac{r_i - r}{|r - r_i|^3}$$

и их равнодействующая будет равна

$$R = \sum_{i=1}^n F_i = \sum_{i=1}^n f m_i \frac{r_i - r}{|r - r_i|^3}.$$

Найдем элементарную работу равнодействующей этих сил тяготения при перемещении единичного тела:

$$\begin{aligned} \delta W = (R, dr) &= \sum_{i=1}^n f m_i \frac{(r_i - r, dr)}{|r - r_i|^3} = - \sum_{i=1}^n f m_i \frac{(r - r_i, dr - dr_i)}{|r - r_i|^3} = \\ &= - \sum_{i=1}^n f m_i \frac{d \frac{|r - r_i|^2}{2}}{|r - r_i|^3} = - \sum_{i=1}^n f m_i \frac{d |r - r_i|}{|r - r_i|^2} = d \sum_{i=1}^n \frac{f m_i}{|r - r_i|}. \end{aligned}$$

Приравнявая это выражение элементарному падению потенциала поля $-d\Pi$, найдем

$$\Pi = - \sum_{i=1}^n \frac{f m_i}{|r - r_i|}. \quad (114)$$

Если вместо единичного тела взять тело с некоторой массой m_j и вектор-радиусом $\mathbf{r}_j$, то потенциальная энергия взаимодействия этой массы с полем остальных масс будет

$$\Pi_j = - \sum_{i=1}^n \frac{f m_i m_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|} \quad (j = 1, 2, \dots, k)$$

Наконец, помещая в поле не одно, а много тел с массами m_j , найдем полную энергию взаимодействия всех масс как двойную сумму:

$$\Pi = \sum_{j=1}^k \Pi_j = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \frac{f m_i m_j}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|}, \quad (115)$$

где i не должно быть равно j .

Иногда взаимное расстояние между тяготеющими массами m_i и m_j обозначают так:

$$|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| = r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2},$$

тогда потенциальная энергия будет равна

$$\Pi = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f \frac{m_i m_j}{r_{ij}}, \quad (116)$$

Имея выражение потенциальной энергии тяготеющих масс, легко найдем работу тяготения при переходе системы из положения I во II:

$$W_{I, II} = \Pi^I - \Pi^{II} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k f m_i m_j \left(\frac{1}{r_{ij}^{II}} - \frac{1}{r_{ij}^I} \right). \quad (117)$$

При сближении масс работа будет положительна, при удалении отрицательна.

Все вышеприведенные формулы остаются верны и в случае электростатических полей зарядов, нужно только заменить массы на заряды и принять во внимание знак зарядов; при зарядах одинакового знака мы должны получить отталкивание, при разных — притяжение. Постоянная тяготения f заменяется соответственным образом на величину, обратную диэлектрической постоянной. Мы в настоящем выпуске на этом вопросе останавливаться не будем.

В заключение рассмотрим простой пример потенциала поля масс, равномерно распределенных в некотором объеме. Мы остановимся на определении потенциала однородной сферы, как наиболее простом с математической стороны и интересном практически случае.

Если некоторые массы равномерно распределены в объеме, то потенциал образуемого ими поля может быть найден по ф-ле (114), только суммирование должно быть уже заменено интегрированием.

Пусть массы заполняют некоторый объем τ , причем плотность

(объемная) равна λ , тогда элементу объема $d\tau$ соответствует элементарная масса $dm = \lambda d\tau$. Обозначая расстояние произвольной точки поля до элемента массы через ρ , будем иметь по (114) потенциал

$$\Pi = - \int_{\tau} \frac{f dm}{\rho} = - \int_{\tau} \frac{f \lambda d\tau}{\rho}, \quad (118)$$

где интеграл распространен по всему объему, заполненному притягивающими массами.

Чтобы вычислить потенциал масс, заполняющих однородно ($\lambda = \text{const}$) сферу, мы в целях упрощения выкладок не пойдем путем непосредственного вычисления интеграла (118), а поступим иначе.

Определим потенциал поля однородного шарового слоя. Для этого возьмем сначала внутреннюю точку K и проведем (рис. 186) коническую поверхность с вершиной в точке K

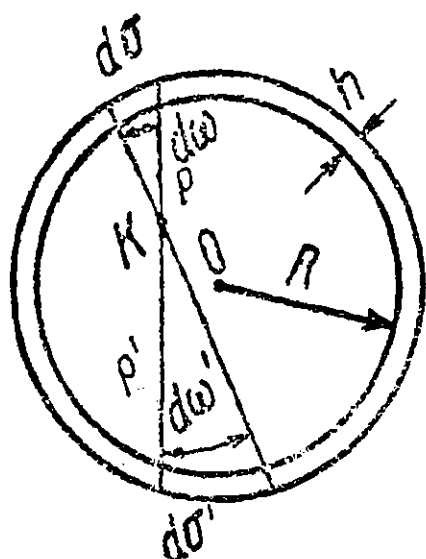


Рис. 186.

с бесконечно-малым углом раствора, пересекающую наш слой и образующую площади $d\sigma$ и $d\sigma'$. Если из точки K радиусом ρ и ρ' провести сферы, то эти сферы в пересечении с конической поверхностью дадут бесконечно-малые площадки $d\omega$ и $d\omega'$, относящиеся друг к другу как квадраты их расстояний, т. е.

$$d\omega : d\omega' = \rho^2 : \rho'^2.$$

В таком же отношении будут находиться и площадки $d\sigma$ и $d\sigma'$, проекциями которых служат площадки $d\omega$ и $d\omega'$, т. е.

$$\frac{d\sigma}{\rho^2} = \frac{d\sigma'}{\rho'^2}. \quad (119)$$

Рассмотрим притяжение точки K единицы массы к площадкам $d\sigma$ и $d\sigma'$ слоя, будем иметь две силы (по закону тяготения):

$$f \frac{\lambda h d\sigma}{\rho^2} \quad \text{и} \quad f \frac{\lambda h d\sigma'}{\rho'^2},$$

равные на основании (119) по величине и противоположные по направлению; таким образом точка K внутри слоя совсем не будет притягиваться слоем и внутри слоя мы будем иметь поле нулевого напряжения. Потенциал такого поля равен во всех точках постоянной величине, его изменение равно нулю и никакой работы при движении внутри слоя не производится. Чтобы определить эту постоянную, совместим точку K с центром сферы, тогда потенциал будет равен:

$$\Pi = - \int f \frac{\lambda h d\sigma}{\rho} = - f \lambda h \frac{4\pi R^2}{R} = - \frac{fM}{R}, \quad (120)$$

где M обозначает массу слоя, R — его радиус.

Возьмем теперь точку K вне слоя (рис. 187) и сопоставим ей точку K' внутри слоя так, чтобы

$$\overline{OK} \cdot \overline{OK'} = R^2.$$

Треугольники OAK и OAK' подобны, так как они имеют общие углы при точке O и пропорциональные стороны:

$$\overline{OK} : R = R : \overline{OK'},$$

закрывающие этот угол. Из подобия следует

$$\rho : \rho' = \overline{OK} : R,$$

или

$$\rho' = \frac{\overline{OK} \cdot \rho}{R}. \quad (121)$$

Потенциал в точке K можем определить по (118) интегралом

$$\Pi = - \int \frac{f\lambda h d\sigma}{\rho} = - \int \frac{f\lambda h R}{\overline{OK}} \frac{d\sigma}{\rho'} = - \frac{R}{\overline{OK}} \int \frac{f\lambda h d\sigma}{\rho'}.$$

Но последний интеграл выражает потенциал во внутренней точке, т. е. равен по (120) $-\frac{fM}{R}$, откуда следует, что потенциал для внешней точки равен

$$\boxed{\Pi = -\frac{fM}{\overline{OK}} = -\frac{fM}{r}} \quad (122)$$

т. е. он таков же, как если бы вся масса слоя была сосредоточена в центре слоя.

Зная потенциал внутри и вне слоя, можем теперь уже легко определить и потенциал шара. Если точка находится вне шара, то потенциал равен сумме потенциалов всех слоев, т. е., обозначая через M массу шара по предыдущему:

$$\boxed{\Pi = -\frac{fM}{r}} \quad (123)$$

откуда проекция силы притяжения на направление вектор-радиуса равна $-\frac{fM}{r^2}$.

Если же точка K находится внутри шара (рис. 188) на расстоянии r от центра, то слои внешние по отношению к сфере радиуса r ,

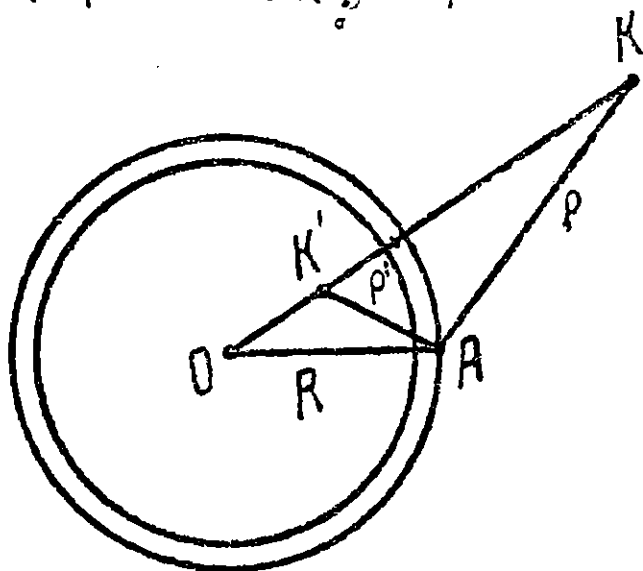


Рис. 187.

как мы уже знаем, не дают притяжения, остается притяжение к центру O силой

$$\frac{-f \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \lambda}{r^2} = -\frac{4}{3} \pi \lambda f r.$$

Таким образом напряжение поля тяготения изменяется непрерывно в зависимости от расстояния до центра сферы. При $r > R$ мы имеем силу, по величине обратно пропорциональную квадрату расстояния, при $r < R$ сила притяжения становится пропорциональной расстоянию до центра. Кривая зависимости напряжения поля H от r показана на рис. 189. Кривая непрерывна, но при $r = R$ имеется угловая точка, что соответствует изменению закона зависимости H от r и разрыву в производной $\frac{dH}{dr}$. Теперь становится

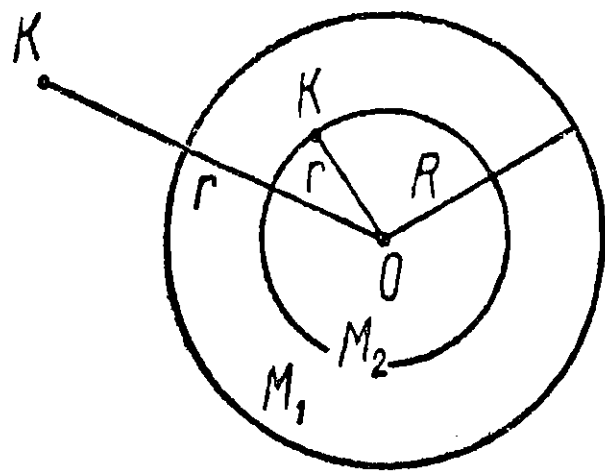


Рис. 188.

понятен противоречивый результат, что при сближении центров тяготеющих масс сила притяжения стремится к бесконечности. На самом деле закон обратной пропорциональности квадрату расстояния справедлив только до момента сближения поверхностей тел; при дальнейшем проникании тела в тело (например некото-

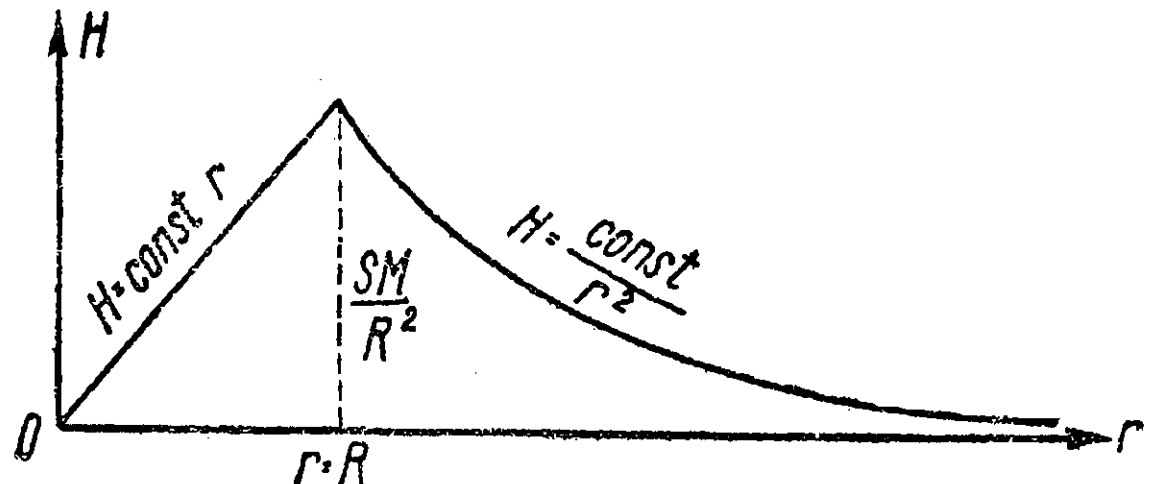


Рис. 189.

рого тела в колодец, прорытый в земле) сила притяжения становится пропорциональной расстоянию до центра (аналогично упругой силе) и в центре земли равна нулю.

Задачи и вопросы.

1. Определить мощность гидравлической турбины, если секундный расход воды $Q = 500$ л/сек, рабочий напор (H_{netto}) равен 100 м, коэффициент полезного действия $\eta = 0,75$.
2. Поток воды сечением в 1 м и скоростью 0,6 м/сек приводит в движение гидравлическую турбину, использующую напор 8 м и

имеющую коэффициент полезного действия 0,70. С турбиной соединена динамомашинa с коэффициентом полезного действия 0,90, передающая ток на удаленный мотор, причем 10% энергии теряется в передаточной линии. Мотор имеет коэффициент полезного действия 0,75. Сколько лошадиных сил поглощает мотор и какова сила тока в амперах, если напряжение, создаваемое динамомашинной, 110 вольт?

3. Вал лобового молота имеет 4 кулака, поднимающих молот весом 4 т на высоту 40 см. Число оборотов молота в минуту равно 25. Какова должна быть средняя мощность двигателя, приводящего в движение молот, если запас мощности принят равным 20%?

4. Каково среднее давление струи на ковш турбины Пельтона, если мощность ее 300 НР, число оборотов в минуту 500 и диаметр колеса 1 м? Во сколько раз возрастет давление, если колесо остановится; расход воды 170 л/сек, скорость бьющей в ковш струи равна 40 м/сек?

Указание. Для решения последнего вопроса вспомнить теорему количеств движения и принять ковш за полушарие.

5. Коэффициент трения поезда, учитывающий и силу сопротивления воздуха, зависящую от скорости, определяется по формуле:

$$f = 0,0025 + 0,00005 \left(\frac{v}{10} \right)^2,$$

где v — скорость поезда в км/час. Какова должна быть мощность паровоза при движении поезда со скоростью 80 км/час, если вес поезда с паровозом 400 т?

6. Вычислить расход мощности на трение в подшипнике, если радиус его $r = 5$ см, коэффициент трения $f = 0,05$, давление на вал $P = 1,5$ т и вал делает 200 об/мин.

7. Во сколько раз уменьшится расход мощности в подшипнике радиусом $r = 3$ см и шириной 10 см, нагруженной на единицу ширины силой $P = 0,3$ т, если к нему подвести обильную смазку? Число оборотов вала 300 об/мин, коэффициент трения при плохой смазке $f = 0,08$, коэффициент вязкости масла $\mu = 0,007 \frac{\text{кг/сек}}{\text{м}^2}$, тол-

щина слоя смазки δ определяется отношением $\frac{\delta}{r} = 0,004$.

8. Трамбовочный каток представляет массивное цилиндрическое тело весом 10 т и радиусом 50 см. Определить мощность двигателя, необходимого для приведения в движение катка со скоростью 2 км/час, если коэффициент трения катания по неутрамбованной мостовой можно принять равным около 2 см.

9. Рессора прогибается под нагрузкой 2 т на 1 см. Какую работу надо затратить для деформации рессоры на 3 см?

10. Какова мощность часового механизма с суточным заводом, если заводка производится шестью полными оборотами ключа, причем в конце заводки закручивающий момент равен 0,1 кг/м?

11. Сколько времени может приводить в движение механизм, потребляющий 0,1 НР, спиральная часовая пружина, допускающая

максимальное закручивание 10 оборотов при наибольшем моменте закручивания 25 кг/м^2

12. Определить мощность паровой машины, делающей 100 об/мин, если угол закручивания стального гребного вала равен 0,01 на 1 м длины вала, а диаметр вала 10 см.

13. Определить потенциальную энергию стальной пластины, заделанной нижним концом в неподвижную опору. Толщина пластины 4 мм, ширина 5 см, длина 50 см; верхний конец отклонен от положения равновесия на 4 см.

14. Вычислить потенциальную энергию скрученного стального вала длиной 3 м, диаметром 7 см, если угол кручения между крайними сечениями равен 2° .

15. Какова максимальная работа, которую может совершить плоская стальная спиральная пружина длиной 1,5 м, прямоугольным сечением $2 \text{ см} \times 0,2 \text{ см}$, если допустимое напряжение равно $\sigma = 8000 \text{ кг/см}^2$?

16. Определить работу падения метеорита весом 1000 т на землю с высоты 1000 км (пренебрегаем сопротивлением воздуха).

Задание 10-е.

Кинетическая энергия системы материальных точек.

То принципиальное и практическое значение, которое имеет теорема об изменении кинетической энергии, делает чрезвычайно важным изучение методов, позволяющих в случае наиболее распространенных движений дать простые формулы и правила для вычисления кинетической энергии. Ознакомлению с этими методами и формулами посвящено настоящее задание. Помимо непосредственных приложений в следующих заданиях этой темы, знание формул, выражающих кинетическую энергию, и умение составить ее выражение являются необходимым и для других приложений; в следующей части курса мы ознакомимся с единообразным методом составления уравнений движения какой-нибудь системы материальных тел, — методом, ведущим к цели как бы сложно движение ни было (уравнения Лагранжа 2-го рода). Мы увидим, что метод Лагранжа целиком основывается на знании выражения кинетической энергии, — именно формы этого выражения в зависимости от параметров, характеризующих движение (координаты и скорости). Этим объясняется, почему ряд примеров этого задания не доведен до числовых результатов: с точки зрения приложений часто оказывается важным знать самый вид выражения кинетической энергии.

Теоретический материал этого задания не сложен: все выводы очень просты, а их результаты вполне наглядны. Центр внимания учащегося переносится на упражнения. И здесь учащийся, достаточно владеющий основными приемами кинематики, не может встретить трудностей. Единственное затруднение может составить только вопрос о вычислении кинетической энергии при колебаниях упругих тел по методу Релея (§ 38, пример 3).

Нужно отдать себе ясный отчет в том, что этот метод основан на приближенном допущении, вследствие чего и результаты, к которым он приводит, строго при нашем изложении не обоснованы¹⁾; тем не менее они дают хорошее совпадение с точной теорией, изложение которой не может быть дано в курсе механики; опустить же вовсе изложение метода Релея, т. е. замыкаться в традиционный круг механики абсолютно твердых тел и невесомых упругих пружин, не является целесообразным при наличии возможности просто, хотя и приближенно, учесть влияние массы этих пружинящих тел. Конечно, знание тех вопросов сопротивления материалов, которые попутно затрагиваются, является необходимым для понимания метода Релея.

К понятию „приведенной массы“ и „приведенного момента инерции“ учащийся должен отнестись как к вспомогательным величинам, служащим для вычисления кинетической энергии. Распространенность этих терминов в литературе по динамике машин требует, чтобы учащийся был с ними знаком.

§ 37. Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек.

Мера движения материальной точки, называемая ее *кинетической энергией* T или энергией движения, определяется формулой:

$$T = \frac{1}{2} m v^2 \quad (1)$$

в которой через m и v обозначены соответственно масса и скорость рассматриваемой точки. Очень часто кинетическую энергию называют живой силой; мы будем стараться избегать этого термина, способного привести учащегося к недоразумениям и ошибкам: речь идет не о силе, а об энергии.

Кинетической энергией системы материальных точек называется сумма кинетических энергий всех входящих в систему точек:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 \quad (2)$$

Кинетическая энергия согласно этому определению является существенно положительной величиной, обращающейся в нуль лишь в том случае, когда скорости всех входящих в систему точек обращаются в нуль, т. е. в случае покоя системы, относительно положенной в основу нашей механики системы координат.

Неподвижный относительно земли предмет, двигаясь вместе

¹⁾ Такое обоснование может быть дано другими путями.

с землей, имеет в звездной координатной системе кинетическую энергию. При рассмотрении движений, происходящих на земле, этот запас кинетической энергии не может нас интересовать; мы узнаем ниже, что величиной, характеризующей движение, является не абсолютное значение кинетической энергии, а ее изменение в процессе движения.

Так как квадрат величины вектора может быть представлен как скалярное произведение вектора на самого себя, то ф-лы (1) и (2) могут быть переписаны в виде:

$$T = \frac{1}{2} m (v, v) \quad (3)$$

в случае одной материальной точки и

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_i, v_i) \quad (4)$$

для системы материальных точек.

В технической системе единиц кинетической энергии является, как и единицей работы, 1 кг. м. В самом деле, принимая за единицу массы ее техническую единицу, т. е.

$$1 \frac{\text{кг. сек}^2}{\text{м}},$$

а за единицу скорости

$$1 \frac{\text{м}}{\text{сек}},$$

получим, что единицей кинетической энергии будет

$$1 \frac{\text{кг. сек}^2}{\text{м}} \left(\frac{\text{м}}{\text{сек}} \right)^2 = 1 \text{ кг. м.}$$

В физической системе единиц кинетической энергии является 1 эрг = 10^{-7} джоулей.

§ 38. Кинетическая энергия твердого тела в простейших случаях движения.

В случае *поступательного* движения твердого тела, обозначая через v одинаковую скорость всех его точек, имеем, согласно ф-ле (2):

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum_{i=1}^n m_i.$$

Называя массу тела $\sum_{i=1}^n m_i$ через M , получим

$$\boxed{T = \frac{1}{2} M v^2} \quad (5)$$

Перейдем к рассмотрению случая *вращения тела вокруг неподвижной оси*. Называя угловую скорость через ω и обозначая через h_i расстояние элементарной массы m_i от оси вращения, имеем

$$v_i = \omega h_i$$

и формула (2) дает

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \omega^2 h_i^2 m_i = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^n m_i h_i^2$$

или

$$T = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (6)$$

где J — момент инерции тела относительно оси вращения. Учащийся должен твердо запомнить эту важнейшую формулу динамики. Можно было бы получить ее непосредственно, вспомнив об аналогии формул поступательного движения и вращения вокруг неподвижной оси (§ 20 5-го задания).

Примеры и упражнения.

1. Численные примеры. а) Определим кинетическую энергию маховика веса $P = 2 \text{ т}$ с радиусом инерции $\rho = 0,8 \text{ м}$, делающего 300 об/мин. По ф-ле (6) находим

$$T = \frac{1}{2} \frac{P \rho^2 \omega^2}{g} = \frac{2 \cdot 0,8^2}{2 \cdot 9,81} \cdot 100\pi^2 \approx 64 \text{ тм.}$$

Запас кинетической энергии маховика равен, таким образом, энергии, освобождающейся при падении груза в 1 тонну с высоты 64 м.

Рассмотрим теперь случай турбинного диска веса 20 кг с радиусом инерции 40 см, делающего 10 000 об/мин; момент инерции вращающегося тела здесь в 400 раз меньше, чем в предыдущем случае, но так как кинетическая энергия пропорциональна квадрату угловой скорости, то величина кинетической энергии

$$T = \frac{20 \cdot 40^2}{2 \cdot 981} \left(\frac{1000\pi}{3} \right)^2 \approx 178 \text{ тм.}$$

оказывается значительно большей, чем в предыдущем случае.

б) Канат шахтного подъемника приводится в движение воротом, находящимся на одном валу с мотором. Определим, задаваясь скоростью v поднимаемого груза G , кинетическую энергию системы. Примем при этом следующие данные (рис. 190):

Диаметр ворота $2r_1 = 5,5 \text{ м.}$

Диаметр неподвижных блоков . . $2r_2 = 2r_3 = 4,5 \text{ м.}$

Момент инерции ворота $J_1 = 6000 \text{ кг.м.сек}^2.$

Момент инерции блоков $J_2 = J_3 = 900 \text{ кг.м.сек}^2.$

Вес поднимаемой вагонетки с грузом $G_1 = 6 \text{ т}$.

Вес опускающейся вагонетки $G_2 = 3 \text{ т}$.

Вес единицы длины цепи $q = 7,5 \text{ кг/м}$.

Общая длина цепи $l = 1600 \text{ м}$.

По этим данным находим: 1°. Кинетическая энергия T_1 грузов и цепи, движущихся со скоростью v :

$$T_1 = \frac{G_1 + G_2 + ql}{2g} v^2;$$

2°. Кинетическая энергия ворота T_2 и неподвижных блоков, вращающихся соответственно с угловыми скоростями $\frac{v}{r_1}$ и $\frac{v}{r_2} = \frac{v}{r_3}$:

$$T_2 = \frac{J_1}{2} \left(\frac{v}{r_1} \right)^2 + \frac{2J_2}{2} \left(\frac{v}{r_2} \right)^2.$$

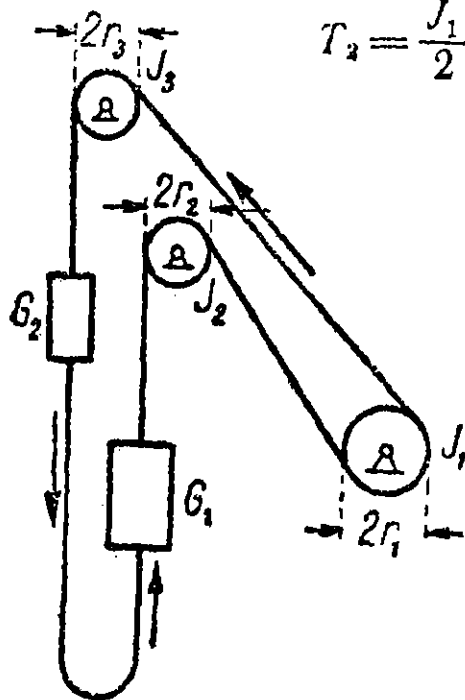


Рис. 190.

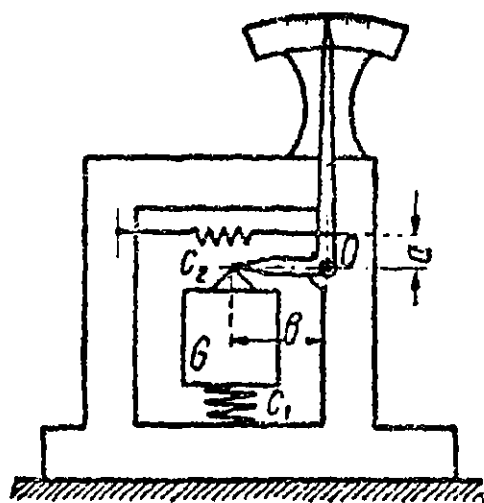


Рис. 191.

Полная кинетическая энергия системы будет

$$T = \left\{ \frac{G_1 + G_2 + ql}{g} + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{2J_2}{r_2^2} \right\} \frac{v^2}{2} = 1,64 v^2 \text{ тм},$$

причем v должно быть выражено в м/сек. Пусть, например, $v = 14 \text{ м/сек}$. Получим

$$T = 322 \text{ тм}.$$

Мы вернемся еще к этому примеру в следующем задании.

2. Примеры вычисления кинетической энергии простейших механизмов.

а) На рис. 191 изображена схема прибора, могущего служить для измерения амплитуд колебаний балок, фундаментов и проч. Задаваясь скоростью груза $\dot{x}$, напишем выражение для кинетической энергии прибора.

1°. Груз G совершает поступательное движение (вертикальные колебания на пружине). Его кинетическая энергия будет

$$T_1 = \frac{G}{2g} \dot{x}^2.$$

2°. Стрелка колеблется, вращаясь вокруг оси O . Называя через J момент инерции стрелки и замечая, что угловая скорость ее равна $\frac{\dot{x}}{b}$, получим

$$T_2 = \frac{J}{b^2} \frac{\dot{x}^2}{2}.$$

Складывая эти выражения, найдем

$$T = \left(\frac{G}{g} + \frac{J}{b^2} \right) \frac{\dot{x}^2}{2}.$$

При вычислении мы пренебрегли массой пружины. В следующем упражнении мы покажем, как ее можно учесть.

б) В качестве второго примера составим выражение для кинетической энергии кулачной передачи (рис. 192), состоящей из вращающейся вокруг неподвижной оси кулачной шайбы и приводимого ею в движение стержня. Назовем через J момент инерции шайбы относительно оси вращения, через $\dot{\varphi} = \dot{\phi}$ — угловую скорость, через G — вес стержня; уравнение контура кулачной шайбы полярных координатах зададим в виде:

$$r = f(\varphi).$$

Скорость, которая сообщается стержню при вращении кулака, определяется формулой:

$$v = |\dot{r}| = \left| \frac{df}{d\varphi} \dot{\varphi} \right|,$$

и, следовательно, кинетическая энергия механизма будет:

$$T = \frac{1}{2} \left\{ J + \frac{G}{g} \left(\frac{df}{d\varphi} \right)^2 \right\} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{J}(\varphi) \dot{\varphi}^2.$$

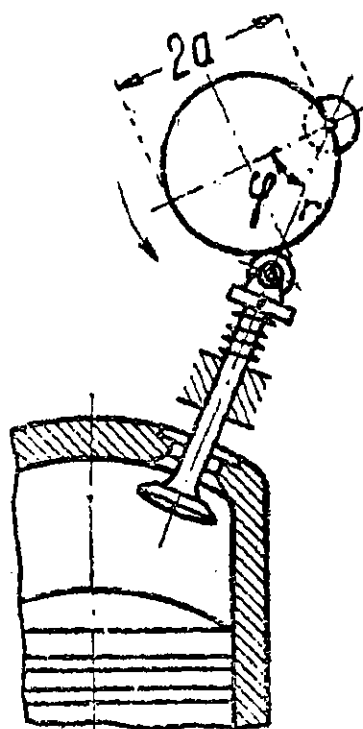


Рис. 192.

$\mathfrak{J}(\varphi)$ называется *приведенным к оси O моментом инерции механизма*; являясь функцией угла φ , приведенный момент инерции зависит не только от массы и формы отдельных звеньев механизма, но и от конфигурации последнего; вместе с тем приведенный момент инерции не зависит от скоростей точек механизма.

Пусть, например, кулачная шайба представляет собою однородный диск радиуса a и веса G_1 , вращающийся вокруг оси, проходящей через точку на окружности диска. В таком случае

$$r = 2a \cos \varphi$$

и по теореме Штейнера (§ 19, стр. 165)

$$J = \frac{1}{2} \frac{G_1}{g} a^2 + \frac{G_1}{g} a^2 = \frac{3}{2} \frac{G_1}{g} a^2,$$

получаем

$$\mathfrak{Z}(\varphi)=\frac{a^2}{g}\left\{\frac{3}{2}G_1+4G\sin^2\varphi\right\}.$$

Примем, например, $a=6\text{ см}$, $G_1=0,5\text{ кг}$, $G=2\text{ кг}$; получим

$$\mathfrak{Z}(\varphi)=(0,0275+0,294\sin^2\varphi)\text{ кг}\cdot\text{см}\cdot\text{сек.}^2$$

3. Примеры вычислений кинетической энергии при колебаниях упругих тел. а) Рассмотрим сначала случай колебаний балки постоянного поперечного сечения, один конец которой заделан, в то время как к свободному концу приложена нагрузка Q (рис. 193). Если обозначить через f мгновенное значение прогиба на конце балки, то кинетическая энергия груза будет

$$T_1=\frac{1}{2}\frac{Q}{g}f^2. \tag{а}$$

Обозначим через l длину балки, через q — вес единицы длины ее, одинаковый по всей длине (полный вес балки будет, таким образом, равен ql) и займемся вычислением кинетической энергии T_2 балки.

Было бы, конечно, неверно принять T_2 равным $\frac{1}{2}\frac{ql}{g}f^2$, так как различные участки балки имеют различные прогибы и, следовательно, вносят разные доли в общую сумму кинетической энергии;

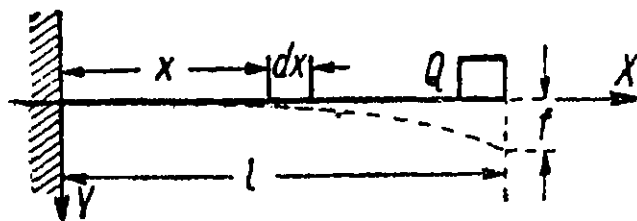


Рис. 193.

поэтому мы должны поступить так: называя через y прогиб элемента dx массы $\frac{q}{g}dx$, находящегося на расстоянии x от заделанного конца, находим, что кинетическая энергия этого элемента имеет значение $\frac{q}{g}\frac{\dot{y}^2}{2}dx$ и, следовательно, кинетическая энергия всей балки будет

$$T_2=\frac{1}{2}\int_0^l\frac{q}{g}\dot{y}^2dx. \tag{б}$$

Чтобы произвести интегрирование, необходимо знать прогиб в любом сечении балки, т. е. уравнение упругой линии $y=f(x)$. Эта задача сводится к дифференциальному уравнению с частными производными, которое должно быть решено с учетом ряда дополнительных условий. Получающееся решение показывает, что упругая линия при свободных колебаниях может иметь самые разнообразные формы: подобно струне, дающей при колебаниях основной тон низкой частоты и ряд обертонов, балка также имеет бесчисленный ряд частот и каждой частоте будет, как и в случае струны, соответствовать определенная форма упругой линии. Наибольшее практическое значение имеет в большинстве случаев основной тон, т. е. низшая частота и соответствующая ей форма упругой линии.

Она в обычных условиях не должна значительно отличаться от формы статической упругой линии. Поэтому для приближенного определения кинетической энергии, колеблющейся балки (эта задача, как мы увидим в следующем задании, тесно связана с вопросом об определении низшей частоты свободных колебаний) мы, следуя Релею (Rayleigh), примем за кривую прогиба при колебаниях статическую упругую линию балки.

Уравнение упругой линии балки, заделанной одним концом и несущей на другом свободном конце нагрузку Q , имеет вид (см. Hütte, т. 1., или любой курс сопротивления материалов):

$$y = \frac{Ql^3}{2EI} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3} \right),$$

где I — момент инерции площади поперечного сечения; замечая, что прогиб f на свободном конце $x = l$, через который мы должны выразить перемещение y любого сечения, равен $\frac{Ql^3}{3EI}$, получим:

$$y = \frac{3}{2}f \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3} \right). \quad (в)$$

Дифференцируя по времени и принимая во внимание, что при колебаниях балки изменяется только f в то время, как x остается постоянным, найдем

$$\dot{y} = \frac{3}{2}f \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3} \right).$$

Подстановка в формулу (б) дает теперь

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} \frac{q}{g} \frac{9}{4} f^2 \int_0^l \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3} \right)^2 dx = \frac{1}{2} f^2 \frac{ql}{g} \frac{9}{4} \int_0^1 \left(\xi^2 - \frac{\xi^3}{3} \right)^2 d\xi = \\ &= \frac{1}{2} f^2 \frac{33}{140} \frac{ql}{g} \end{aligned}$$

и полная кинетическая энергия системы будет

$$T = T_1 + T_2 = \left\{ \frac{Q}{2g} + \frac{33}{140} \frac{ql}{2g} \right\} f^2, \quad (г)$$

т. е. к весу груза на конце нужно прибавить $\frac{33}{140} = 0,236$ веса балки.

При расчете мы пренебрегли, принимая формулу (в), весом балки по сравнению с Q , но на результат вычислений это упрощающее предположение влияет в очень незначительной степени. Чтобы убедиться в этом, учтем при составлении уравнения статической упругой линии не только нагрузку Q , но и собственный вес балки. По известным формулам сопротивления материалов получим

$$y = \frac{ql^4}{8EI} \left(2 \frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} + \frac{1}{3} \frac{x^4}{l^4} \right) + \frac{Ql^3}{2EI} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3} \right)$$

и, следовательно, при $x=0$ найдем

$$f = y_{x=0} = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{Ql^3}{3EI}.$$

Выражая y через прогиб на свободном конце, будем иметь:

$$y = f \left\{ \frac{\frac{ql^4}{8EI} \left(2 \frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} + \frac{1}{3} \frac{x^4}{l^4} \right)}{\frac{ql^4}{8EI} + \frac{Ql^3}{3EI}} + \frac{\frac{Ql^3}{2EI} \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3} \right)}{\frac{ql^4}{8EI} + \frac{Ql^3}{3EI}} \right\},$$

или, вводя обозначения:

$$\frac{Q}{ql} = \alpha, \quad x = l\xi,$$

найдем:

$$y = \frac{3f}{3+8\alpha} \left\{ 2\xi^2 - \frac{4\xi^3}{3} + \frac{1}{3}\xi^4 + 4\alpha \left(\xi^2 - \frac{\xi^3}{3} \right) \right\} \quad (д)$$

$$\dot{y}^2 = \frac{9\dot{f}^2}{(3+8\alpha)^2} \left\{ 2\xi^2 - \frac{4\xi^3}{3} + \frac{1}{3}\xi^4 + 4\alpha \left(\xi^2 - \frac{\xi^3}{3} \right) \right\}^2.$$

Подстановка в (б) дает после несложных вычислений

$$T_2 = \frac{ql}{2g} \dot{f}^2 \frac{0,2360 \alpha^2 + 0,1845 \alpha + 0,0361}{(\alpha + 0,375)^2} = \frac{ql}{2g} \dot{f}^2 F(\alpha) \quad (е)$$

Значения $F(\alpha)$ для ряда значений α приведены в таблице.

α	$F(\alpha)$
0	0,256
0,5	0,245
1,0	0,241
5,0	0,238
10,0	0,237
∞	0,236

Числа этой таблицы подтверждают сказанное выше: при всевозможных значениях отношения $\frac{Q}{ql} = \alpha$ часть веса балки, которую нужно при пользовании методом Релея ввести в расчет при вычислении кинетической энергии, колеблется в весьма небольших пределах. Можно пойти еще далее и принять за кривую прогиба не статическую упругую линию, а произвольную кривую, подчинив выбор ее только условиям закрепления концов балки, — в рассматриваемом случае нужно потребовать выполнения условий:

$$y=0 \quad y'=0 \quad \text{при } x=0.$$

Возьмем, например

$$y = f \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right),$$

что удовлетворяет условиям на опоре. Получим

$$T_2 = f^2 \frac{ql}{2g} \int_0^1 \left(1 - \cos \frac{\pi \xi}{2} \right)^2 d\xi = \frac{f^2}{2g} ql \left(1,5 - \frac{4}{\pi} \right) = \frac{ql}{2g} f^2 \cdot 0,23,$$

что хорошо согласуется с результатами, полученными раньше.

б) Рассмотрим теперь случай балки, опертой по концам и несущей в середине сосредоточенную нагрузку (рис. 194). За кривую прогиба примем статическую упругую линию от сосредоточенной в середине силы:

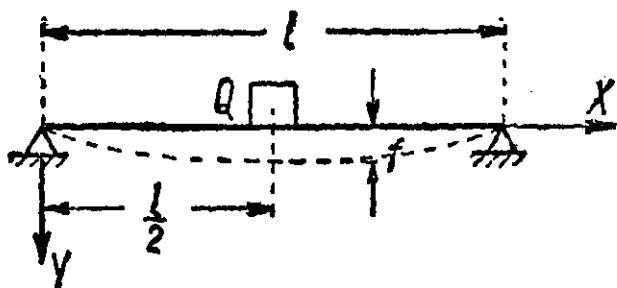


Рис. 194.

$$y = f \left\{ 3 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right\}, \quad \text{при } x < \frac{l}{2};$$

$$y = f \left\{ 3 \frac{l-x}{l} - 4 \left(\frac{l-x}{l} \right)^3 \right\} \quad \text{при } x > \frac{l}{2};$$

$$f = \frac{Ql^3}{48EI}.$$

Вычисляя по формуле (б), найдем

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{f^2}{2g} q \left\{ \int_0^{\frac{l}{2}} \left[3 \frac{x}{l} - 4 \left(\frac{x}{l} \right)^3 \right]^2 dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \left[3 \frac{l-x}{l} - 4 \left(\frac{l-x}{l} \right)^3 \right]^2 dx \right\} = \\ &= f^2 \frac{ql}{2g} 2 \int_0^{\frac{1}{2}} (3\xi - 4\xi^3)^2 d\xi = \frac{ql}{2g} f^2 \frac{17}{35} = \frac{ql}{2g} f^2 \cdot 0,485. \end{aligned}$$

Полная кинетическая энергия системы, состоящей из груза и балки, будет

$$T = \left(Q + \frac{17}{35} ql \right) \frac{f^2}{2g}.$$

Если за кривую прогиба взять статическую упругую линию от равномерно-распределенной нагрузки:

$$y = f \frac{16}{5} \left[\frac{x}{l} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right],$$

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EI},$$

то, сделав вычисления, найдем

$$T_2 = \frac{ql}{2g} f^2 0,489.$$

Определяя, наконец, кривую прогиба уравнением

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l},$$

причем $y=0$ при $x=0$ и при $x=l$, получим

$$T_2 = f^2 \frac{ql}{2g} 0,5,$$

что также хорошо согласуется с предыдущими результатами.

в) В случае груза Q , совершающего колебания на пружине, имеем

$$T_1 = \frac{1}{2} \frac{Q}{g} f^2,$$

где через f обозначено перемещение крайнего сечения пружины.

Чтобы учесть кинетическую энергию пружины, примем, что перемещение y какого-либо сечения B пропорционально, как и в случае равновесия, расстоянию AB этого сечения от закрепленного конца A пружины. Получим

$$y = \frac{fx}{l},$$

где l — длина пружины; ф-ла (б) дает теперь

$$T_2 = \frac{q}{2gl^2} f^2 \int_0^l x^2 dx = \frac{ql}{2g} \frac{f^2}{3} = \frac{Q_1}{2g} \frac{f^2}{3},$$

где Q_1 — вес пружины; получаем

$$T = \frac{1}{2} \frac{f^2}{g} \left(Q + \frac{Q_1}{3} \right),$$

т. е. к весу груза надо прибавить одну треть веса пружины. Такой же результат мы получим в случае тела, совершающего крутильные колебания на валу. Называя через J момент инерции тела относительно оси вала, имеем

$$T_1 = \frac{1}{2} J \frac{\dot{\varphi}^2}{2},$$

где φ — угол поворота тела, т. е. угол поворота конца вала. Предполагая, что другой его конец закреплен и рассуждая совершенно так же, как и в случае пружины, найдем

$$T_2 = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \frac{J_1}{3},$$

где J_1 — момент инерции вала относительно его оси.

г) В качестве последнего примера найдем выражение для кинетической энергии малых колебаний конического стержня (рис. 195); основание конуса будем считать заделанным. Результат, который будет получен, мы применим в следующем задании к задаче об определении частоты свободных колебаний конического стержня; эта задача имеет практическое значение при проверке на явления резонанса фабричных труб, маяков и т. д., а также в ряде вопросов сейсмостойкого строительства.

За форму кривой прогиба примем статическую упругую линию под действием собственного веса. Примем обозначения:

I_0, S_0 — момент инерции и площадь основания конуса,

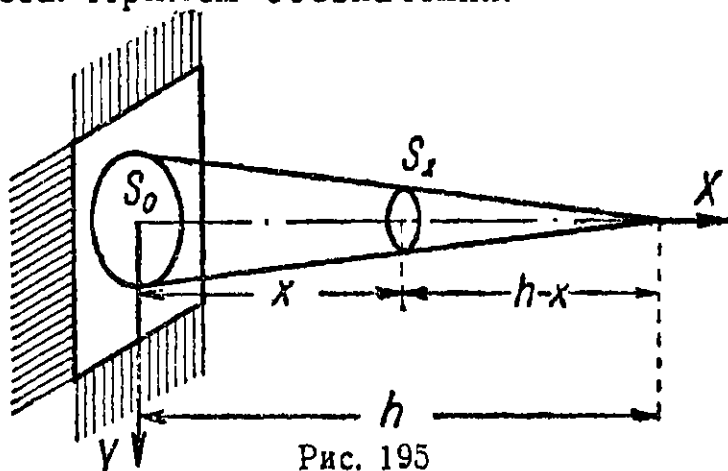
I_x, S_x — момент инерции и площадь в сечении x ,

M_x — изгибающий момент в сечении x ,

γ — вес единицы объема материала стержня

h — высота конуса,

Q — вес стержня.



Исходим из дифференциального уравнения упругой линии:

$$E I_x y'' = M_x. \quad (\text{ж})$$

M_x есть момент от веса $\frac{h-x}{3} \gamma S_x$ правой отсеченной части, приложенного в центре тяжести этой части, т. е. на расстоянии $\frac{h-x}{4}$ от сечения x ; замечая еще, что

$$S_x = S_0 \frac{(h-x)^2}{h^2}, \quad I_x = I_0 \left(\frac{h-x}{h} \right)^4,$$

получим

$$M_x = \frac{S_0 \gamma (h-x)^4}{12}, \quad (\text{з})$$

и ур-ние (ж) дает

$$E I_0 y'' = \frac{S_0 h^2 \gamma}{12} = \frac{Qh}{4}.$$

Интегрируя и замечая, что y и y' при $x=0$ равны нулю, получим

$$E I_0 y = \frac{Qh}{8} x^2$$

и, следовательно, прогиб на конце конуса будет

$$f = \frac{Qh^3}{8 E I_0}.$$

Выражая y через f , найдем очень простой результат:

$$y = f \frac{x^2}{h^2}.$$

Подставляя это выражение в ф-лу (б) и замечая, что в рассматриваемом случае

$$q dx = S_x \gamma dx = \frac{S_0}{h^2} (h-x)^2 \gamma dx,$$

получим

$$T = \frac{\dot{f}^2}{2g} \int_0^h \frac{S_0 (h-x)^2}{h^2} \gamma \frac{x^4}{h^4} dx = \frac{S_0 \gamma h}{105} \frac{\dot{f}^2}{2g} = \frac{\dot{f}^2}{2g} \frac{Q}{35},$$

т. е. при вычислении кинетической энергии надо к вершине конуса отнести $\frac{1}{35}$ его веса.

§ 39. Теорема Кенига.

Основным приемом вычисления кинетической энергии в случае более сложных движений является теорема Кенига. Согласно этой теореме кинетическая энергия T системы материальных точек равна сумме кинетической энергии всей массы системы, мысленно сосредоточенной в ее центре инерции и движущейся со скоростью центра инерции, и кинетической энергии T' в относительном движении системы по отношению к центру инерции:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + T' \quad (7)$$

В этой формуле через M обозначена масса всей системы, через v_c — скорость центра инерции ее;

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i'^2, \quad (8)$$

где v_i' — скорость массы m_i по отношению к центру инерции, представляет кинетическую энергию системы в относительном движении ее по отношению к центру инерции.

Совершенно аналогичная теорема была доказана для момента количества движения в § 26 7-го задания. Конечно, и выводы этих теорем весьма похожи друг на друга; отличие заключается в том, что в рассматриваемом случае вместо векторного произведения будет фигурировать скалярное.

Имеем

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i'$$

и, следовательно, [см. (4)]:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i', \mathbf{v}_c + \mathbf{v}_i') =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_c) + \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_i') + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_i', \mathbf{v}_i');$$

в первом члене скалярное произведение $(\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_c) = v_c^2$ может быть вынесено за знак суммы; третий член представляет не что иное, как кинетическую энергию в относительном движении по отношению к центру инерции. Остается показать, что средний член равен нулю. Перепишем его в виде:

$$\sum_{i=1}^n m_i (\mathbf{v}_c, \mathbf{v}_i') = \left(\mathbf{v}_c, \sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i' \right);$$

но по определению центра инерции (см. § 26):

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{r}_i' = 0,$$

следовательно, и $\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i'$, как производная по времени от предыдущего выражения, также обращается в нуль. Итак,

$$\sum_{i=1}^n m_i \mathbf{v}_i' = 0,$$

и теорема Кенига доказана. Перейдем к ее приложениям.

§ 40. Кинетическая энергия в плоском движении твердого тела.

В этом случае относительное движение по отношению к центру инерции есть вращение вокруг последнего; поэтому

$$T' = \frac{1}{2} J_c \omega^2,$$

где J_c — момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости движения и проходящей через центр инерции, ω — угловая скорость тела. Применим ф-лу (7), найдем

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \omega^2 \quad (9)$$

Учащийся должен твердо запомнить эту важнейшую формулу динамики.

Преобразуем ф-лу (9) к виду, более удобному для некоторых приложений. Напомним, что

$$\omega = \frac{v_c}{\overline{CP}},$$

где $\overline{CP}$ — расстояние между центром инерции C и мгновенным центром скоростей P ; заменив еще J_c через $M\rho_c^2$, найдем

$$T = \frac{1}{2} M \left\{ 1 + \left(\frac{\rho_c}{\overline{CP}} \right)^2 \right\} v_c^2. \tag{10}$$

Величину

$$\mu = M \left\{ 1 + \left(\frac{\rho_c}{\overline{CP}} \right)^2 \right\}, \tag{11}$$

не зависящую от скоростей точек тела, можно назвать массой, приведенной к центру инерции; воображаемая масса μ , движущаяся поступательно со скоростью центра инерции, имела бы тот же запас кинетической энергии, что и наше тело в рассматриваемом плоском движении. Так как мгновенный центр меняет в процессе движения свое положение, совпадая с различными точками фигуры, то $\overline{CP}$ изменяется и, следовательно, приведенная масса μ есть, вообще говоря, переменная величина, зависящая от положения фигуры.

Примеры и упражнения.

1. Кинетическая энергия при качении тела по прямой молинейному пути. Применяя ф-лу (10) к случаю качения без скольжения колеса по рельсу и замечая, что при этом мгновенный центр колеса совпадает с точкой касания, имеем $\overline{CP} = r$, где r — радиус колеса, получаем

$$T = \frac{1}{2} M \left(1 + \frac{\rho_c^2}{r^2} \right) v_c^2; \tag{a}$$

приведенная масса в этом случае есть величина постоянная. В случае некоторых тел правильной геометрической формы ф-ла (a) приводит к весьма простым результатам, приведенным в таблице:

Форма тела	$\frac{\rho_c^2}{r^2}$	$T = \frac{1}{2} M \left(1 + \frac{\rho_c^2}{r^2} \right) v_c^2$
Шар	$\frac{2}{5}$	$0,7 M v_c^2$
Полый цилиндр; внутренний радиус = r_0	$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right)$	$\left(\frac{3}{4} + \frac{r_0^2}{4r^2} \right) M v_c^2$
Сплошной цилиндр	$\frac{1}{2}$	$0,75 M v_c^2$
Обруч (масса сосредоточена на ободе)	1	$M v_c^2$

Подсчитаем еще кинетическую энергию двухосного товарного вагона, движущегося со скоростью 24 км/час; вес кузова Q вместе с нагрузкой примем равным 25 т; вес P колесного ската возьмем равным 900 кг; радиус инерции $\rho_c = 0,85$ р. Получаем

$$T = \frac{Q + 2P \left(1 + \frac{\rho_c^2}{r^2}\right)}{2g} v^2 = 63,6 \text{ тм.}$$

2. Кинетическая энергия кривошипного механизма. Покажем на примере легкого двигателя автомобильного типа способ вычисления кинетической энергии T кривошипного механизма. Примем следующие обозначения и данные:

угловая скорость коленчатого вала (кривошипа) ω_1 ;

угловая скорость шатуна ω_2 ;

момент инерции щек и шейки коленчатого вала (кривошипа) относительно оси вращения O $J_1 = 0,46$ кг.см.сек.²;

момент инерции шатуна относительно оси, проходящей через его центр инерции перпендикулярно плоскости движения $J_2 = 0,026$ кг.см.сек.²;

вес шатуна $P_2 = 0,4$ кг, вес ползуна и связанных с ним поступательно движущихся частей $P_3 = 0,6$ кг.

Скорость ползуна v_b , скорость центра инерции шатуна v_c .

$$\overline{OA} = a = 4 \text{ см}, \quad \overline{AC} = \frac{1}{3} l = 6 \text{ см}, \quad \overline{CB} = 12 \text{ см}, \quad \overline{AB} = l = 18 \text{ см},$$

$$\frac{a}{l} = \epsilon = 0,222.$$

Кинетические энергии кривошипа, шатуна и поступательно движущихся частей обозначим соответственно через T_1 , T_2 , T_3 ; очевидно, что $T = T_1 + T_2 + T_3$; имеем:

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2, \quad T_3 = \frac{1}{2} \frac{P_3}{g} v_b^2.$$

Далее по формуле (9) находим

$$T_2 = \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} v_c^2$$

и, следовательно

$$T = \frac{1}{2} \omega_1^2 \left\{ J_1 + J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + \frac{P_2}{g} \left(\frac{v_c}{\omega_1} \right)^2 + \frac{P_3}{g} \left(\frac{v_b}{\omega_1} \right)^2 \right\} = \frac{1}{2} \mathfrak{J}(\varphi) \omega_1^2. \quad (a)$$

$\mathfrak{J}(\varphi)$ — приведенный к оси O момент инерции механизма — зависит от конфигурации механизма, т. е. является функцией угла φ периодической с периодом 2π ; вместе с тем $\mathfrak{J}(\varphi)$ не зависит от скоростей точек системы. Действительно, увеличив ω_1 в некоторое число раз, мы во столько же раз увеличим скорости всех точек механизма и угловые скорости его звеньев, так что отношения

$$\frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \frac{v_b}{\omega_1}, \quad \frac{v_c}{\omega_1},$$

фигурирующие в выражении для приведенного момента инерции, не изменятся.

Аналитическое определение приведенного момента инерции приводит к сложным формулам. Поэтому мы применим графический метод, построив для ряда положений механизма (в нашем случае взято 12 положений) план скоростей (рис. 196). Для этого продолжаем линию шатуна AB до пересечения в точке b с прямой, перпендикулярной линии движения ползуна (см. часть I, § 40, пример 5, стр. 193); в таком случае скорости v_b и v_c точек B и C будут изображаться отрезками $\overline{Ab}$ и $\overline{Ac}$ ($\frac{\overline{Ac}}{\overline{Ab}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$) в том же масштабе, в каком отрезок $\overline{AO}$ изображает скорость v_a точки A ; угло-

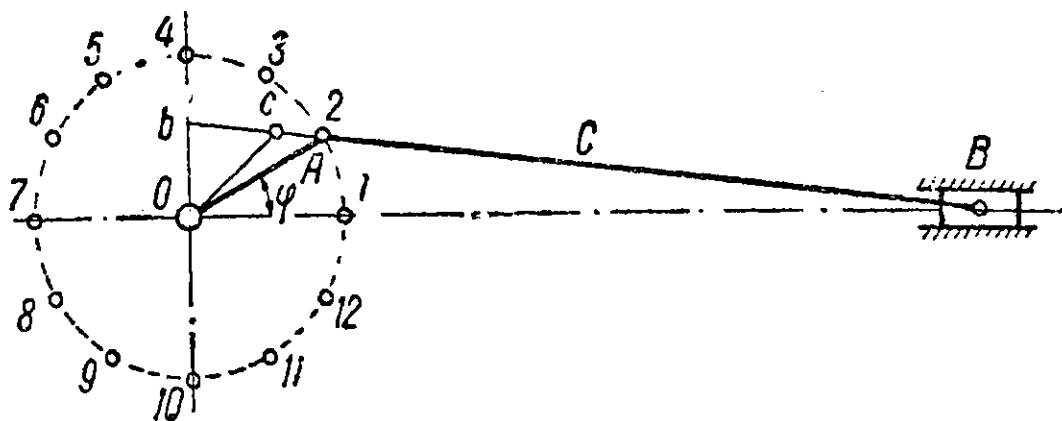


Рис. 196.

вая скорость ω_2 шатуна определяется отношением относительной скорости $\overline{Ab}$ к длине шатуна $l = \overline{AB}$. Итак, имеем

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{\overline{Ab}}{\overline{AB}}, \quad \frac{v_b}{\omega_1} = \frac{v_b}{v_a} \cdot a = \frac{\overline{Ab}}{\overline{OA}} a,$$

так как $\omega_1 = \frac{v_a}{a}$, $\frac{v_b}{v_a} = \frac{\overline{Ab}}{\overline{OA}}$; но отношение $\frac{a}{\overline{OA}}$ есть масштаб, в котором вычерчен механизм; поэтому отрезок $\overline{Ab}$, измеренный в этом масштабе, и изображает нужную нам величину $\frac{v_b}{\omega_1}$.

Точно так же

$$\frac{v_c}{\omega_1} = \frac{v_c}{v_a} a = \frac{\overline{Ac}}{\overline{OA}} a,$$

т. е. отрезок $\overline{Ac}$, умноженный на тот же масштабный коэффициент, дает $\frac{v_c}{\omega_1}$. Результаты построений и вычислений приведены в таблице. Последний столбец, представляющий сумму трех предыдущих, дает изменяющуюся в процессе движения часть приведенного момента инерции механизма:

$$i(\varphi) = \mathfrak{J}(\varphi) - J_1;$$

по сравнению с постоянным членом J_1 эта переменная часть $i(\varphi)$ весьма мала; но в приложениях часто имеет значение именно изменение кинетической энергии, а не ее полная величина; поэтому при вычислении приведенного момента инерции нельзя откинуть его переменной части. График $i(\varphi)$ в зависимости от φ , построенный на основании результатов таблицы, дан на рис. 197.

Положение кривошипа		$\frac{v_c}{\omega_1}$ см	$\frac{\omega_2}{\omega_1}$	$\frac{v_b}{\omega_1}$ см	$\frac{P_2}{g} \left(\frac{v_c}{\omega_1} \right)^2$ кг. см. сек ²	$J_2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2$ кг. см. сек ²	$\frac{P_3}{g} \left(\frac{v_B}{\omega_1} \right)^2$ кг. см. сек ²	$\mathfrak{Z}(\varphi) - J_1 = i(\varphi)$ кг. см. сек ²
φ°	№							
0;360	1	2,67	0,222	0	$2,90 \cdot 10^{-3}$	$1,28 \cdot 10^{-3}$	$0,00 \cdot 10^{-3}$	$4,18 \cdot 10^{-3}$
30;330	2;12	3,28	0,198	2,48	$4,28 \cdot 10^{-3}$	$1,02 \cdot 10^{-3}$	$2,39 \cdot 10^{-3}$	$7,69 \cdot 10^{-3}$
60;300	3;11	3,94	0,116	3,96	$6,33 \cdot 10^{-3}$	$0,35 \cdot 10^{-3}$	$9,56 \cdot 10^{-3}$	$16,24 \cdot 10^{-3}$
90;270	4;10	4,00	0,000	4,00	$6,54 \cdot 10^{-3}$	$0,00 \cdot 10^{-3}$	$9,76 \cdot 10^{-3}$	$16,30 \cdot 10^{-3}$
120;240	5;9	3,66	0,107	3,26	$5,47 \cdot 10^{-3}$	$0,30 \cdot 10^{-3}$	$8,17 \cdot 10^{-3}$	$13,94 \cdot 10^{-3}$
150;210	6;8	3,20	0,195	1,74	$4,16 \cdot 10^{-3}$	$1,00 \cdot 10^{-3}$	$1,84 \cdot 10^{-3}$	$7,00 \cdot 10^{-3}$
180	7	2,67	0,222	0,00	$2,90 \cdot 10^{-3}$	$1,28 \cdot 10^{-3}$	$0,00 \cdot 10^{-3}$	$4,18 \cdot 10^{-3}$

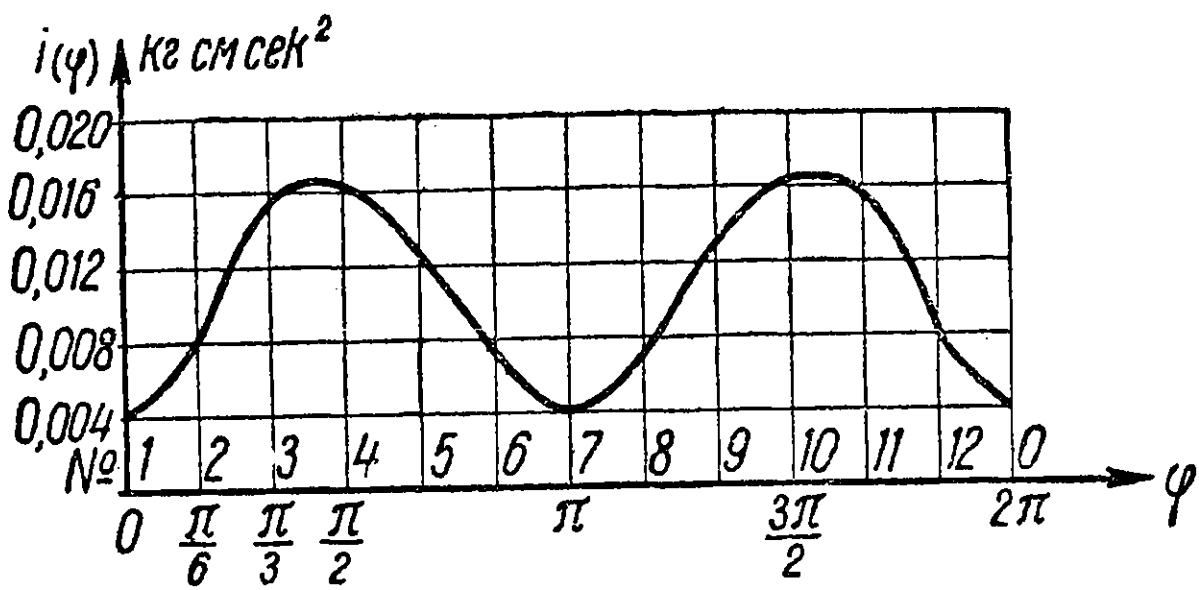


Рис. 197.

3. Механизм Витворта. Мотор „Гном“. При указанных на рис. 198 обозначениях имеем:

а) Кинетическая энергия звена O_1C , вращающегося вокруг неподвижной оси O_1 :

$$T_1 = J_1 \frac{\omega_1^2}{2}.$$

б) Кинетическая энергия звена O_2C , также совершающего вращение вокруг неподвижной оси O_2 :

$$T_2 = J_2 \frac{\omega_2^2}{2}.$$

в) Звено C (ползушка) совершает плоское движение, вращаясь с угловой скоростью ω_2 вокруг оси, проходящей через центр

тяжести C перпендикулярно плоскости движения и двигаясь поступательно вместе с C со скоростью $v_c = \omega_1 b$. По формуле (9) находим

$$T_3 = \frac{P}{g} \frac{b^2 \omega_1^2}{2} + \frac{J_c}{2} \omega_2^2,$$

где P — вес ползушки, J_c — момент инерции ее относительно указанной оси. Полная кинетическая энергия механизма T , равная сумме кинетических энергий его звеньев, будет

$$T = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + \frac{1}{2} \frac{P}{g} b^2 \omega_1^2 + \frac{1}{2} J_c \omega_2^2. \quad (a)$$

Чтобы установить связь между ω_1 и ω_2 , заметим, что скорость v_c центра тяжести ползушки по отношению к неподвижному звену

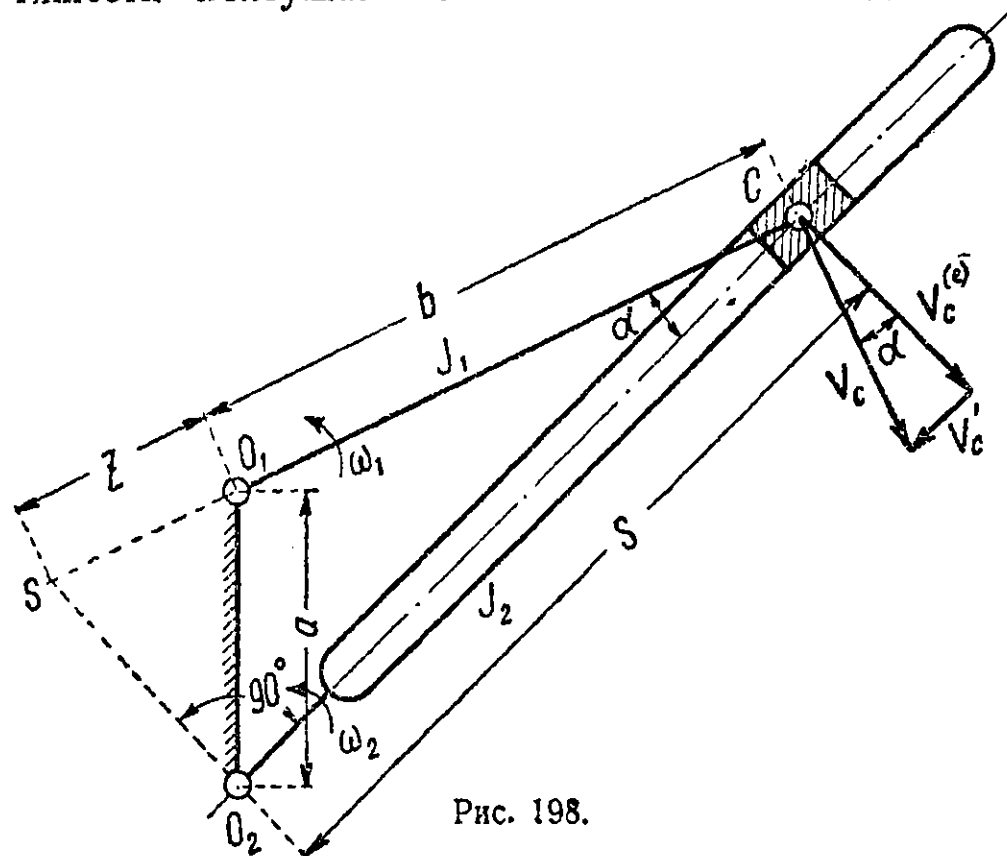


Рис. 198.

может быть представлена в виде геометрической суммы скорости v_c' по отношению к звену O_2C и переносной скорости $v_c^{(e)}$:

$$v_c = v_c' + v_c^{(e)}.$$

Отсюда находим $v_c^{(e)} = v_c \cos \alpha = b \omega_1 \cos \alpha$; с другой стороны, $v_c^{(e)} = s \omega_2$; получаем

$$s \omega_2 = b \omega_1 \cos \alpha;$$

замечая, что $\frac{s}{\cos \alpha} = \overline{CS} = b + \overline{O_1S} = b + z$, найдем

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{b}{b+z}, \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = 1 + \frac{z}{b}. \quad (б)$$

Пользуясь этим соотношением, можно представить (a) или в виде:

$$T = \frac{1}{2} \omega_1^2 \left\{ \left(J_1 + \frac{P}{g} b^2 \right) + (J_2 + J_c) \frac{b^2}{(b+z)^2} \right\} = \frac{1}{2} \mathfrak{J}_1 \omega_1^2, \quad (в)$$

или в виде:

$$T = \frac{1}{2} \omega_2^2 \left\{ \left(J_1 + \frac{P}{g} b^2 \right) \left(1 + \frac{z}{b} \right)^2 + (J_2 + J_c) \right\} = \frac{1}{2} \mathfrak{J}_2 \omega_2^2. \quad (\Gamma)$$

$\mathfrak{J}_1$ и $\mathfrak{J}_2$ суть приведенные моменты инерции механизма — первый к оси O_1 , второй — к оси O_2 . В зависимости от того, которое из двух звеньев: O_1 или O_2 , является ведущим, целесообразно применять ту или иную из формул (в) или (г). Последний случай мы имеем во вращающемся моторе „Гном“, схема которого представлена на рис. 199. Ведущим звеном являются цилиндры $A_1, \dots, A_7$, вращающиеся вокруг неподвижной оси O_2 . Применяя формулу (г), находим:

$$\mathfrak{J}_2 = 7(J_2 + J_c) + \left(J_1 + \frac{P}{g} b^2 \right) \sum_{i=1}^7 \left(1 + \frac{z_i}{b} \right)^2. \quad (\Delta)$$

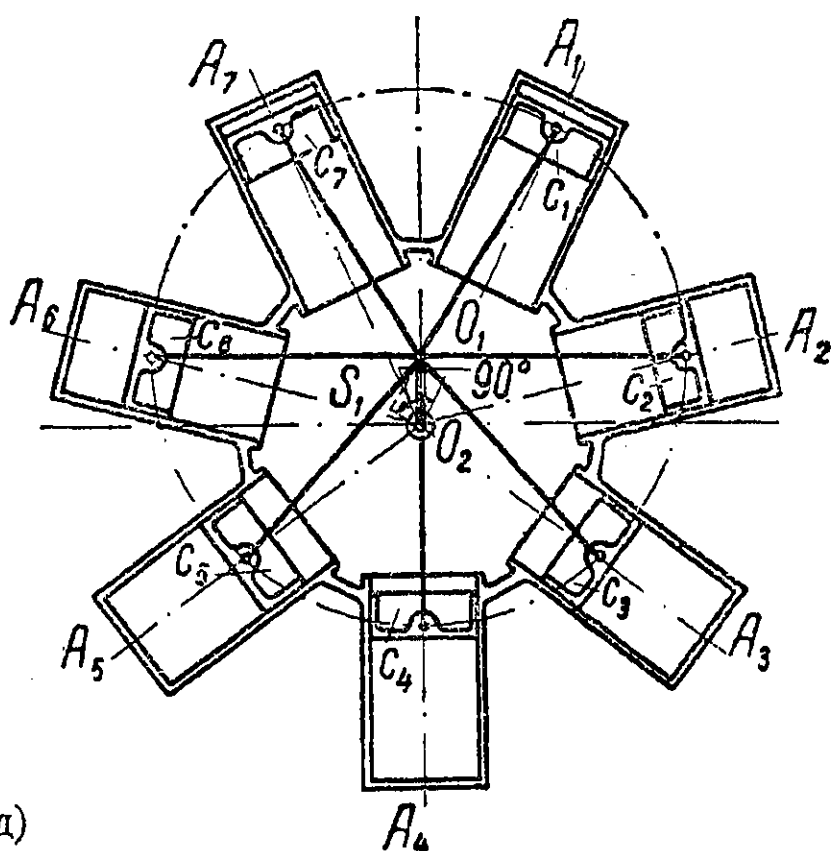


Рис. 199.

Полагая $b = 21$ см, $a = 6$ см, $J_2 = 2,55$ кг.см.сек², $J_c = 0,031$ кг.см.сек², $J_1 = 0,09$ кг.см.сек² и измеряя отношения $\frac{z_i}{b}$, находим при показанном на рис. 199 положении $\mathfrak{J}_2 = 22,03$ кг.см.сек².

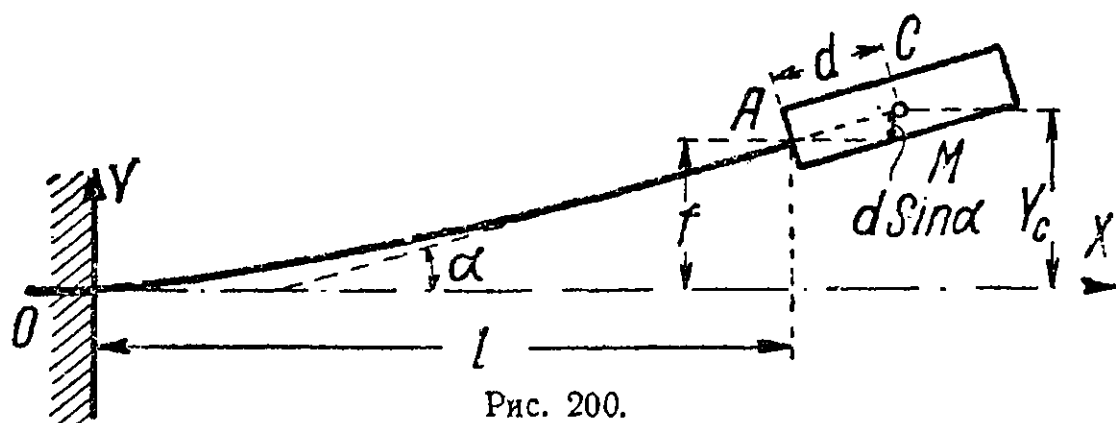


Рис. 200.

4. Кинетическая энергия колеблющейся системы, состоящей из груза и балки. Подсчитаем кинетическую энергию системы, состоящей из балочки и груза; один конец балочки заделан, в то время как к другому, свободному, концу A присоединен груз (рис. 200). Расстояние AC центра тяжести C груза от свободного конца A балки назовем через d ; при колебаниях балочки груз совершает плоское движение, которое может быть рассматриваемо как результат сложения движения центра

тяжести C и вращения вокруг C . Согласно ф-ле (г) стр. 369, кинетическая энергия балки определяется выражением:

$$T_1 = \frac{1}{2} \dot{f}^2 \frac{33}{140} \frac{Q_1}{g},$$

где f — прогиб конца A , Q_1 — вес балки. Кинетическая энергия груза определяется по ф-ле (9). Считая, что центр тяжести перемещается по прямой параллельной оси Y , имеем

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{Q_2}{g} (\dot{y}_c^2 + \rho_c^2 \omega^2)$$

где Q_2 — вес груза, ρ_c — радиус инерции его относительно центра инерции; согласно рис. 200 имеем

$$y_c = f + d \sin \alpha \approx f + d \alpha$$

$$\omega = |\dot{\alpha}|,$$

причем

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \left(\frac{dy}{dx} \right)_{x=l}$$

где $y = F(x)$ — уравнение упругой линии балки. Принимая (стр. 369):

$$y = \frac{3}{2} f \left(\frac{x^2}{l^2} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3} \right),$$

получим

$$\alpha = \frac{3}{2} f \left(\frac{2x}{l^2} - \frac{x^2}{l^3} \right)_{x=l} = \frac{3}{2} \frac{f}{l};$$

следовательно

$$\dot{\alpha} = \frac{3}{2} \frac{\dot{f}}{l}, \quad \dot{y}_c = \dot{f} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{d}{l} \right),$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \frac{Q_2}{g} \dot{f}^2 \left\{ \left(1 + \frac{3}{2} \frac{d}{l} \right)^2 + \frac{9}{4} \frac{\rho_c^2}{l^2} \right\}.$$

Кинетическая энергия колеблющейся системы $T = T_1 + T_2$ будет

$$T = \frac{1}{2} \frac{\dot{f}^2}{g} \left\{ \frac{33}{140} Q_1 + Q_2 \left[\left(1 + \frac{3}{2} \frac{d}{l} \right)^2 + \frac{9}{4} \frac{\rho_c^2}{l^2} \right] \right\}. \quad (a)$$

Мы обратимся к вычислению периода свободных колебаний рассматриваемой системы в следующем задании.

§ 41. Кинетическая энергия тела в общем случае движения.

Разлагая движение тела, как и раньше, на поступательное со скоростью v , центра инерции C и вращательное вокруг C и пользуясь теоремой Кенига (§ 39), имеем

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + T'. \quad (12)$$

Остается вычислить T' . Называя через ω вектор угловой скорости тела, через $\mathbf{r}'$ вектор-радиус частицы m , имеющий начало в C ,

и через v_i' — скорость этой частицы по отношению к S , имеем

$$v_i' = [\omega, r_i'], \quad (a)$$

и, следовательно:

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_i', v_i') = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_i', [\omega, r_i']);$$

применяя формулу преобразования скалярного произведения ¹⁾, получим

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\omega, [r_i', v_i']),$$

и, воспользовавшись снова формулой (a):

$$T' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\omega, [r_i', [\omega, r_i']]). \quad (13)$$

Под знаком суммы мы получили векторное произведение $[r_i', [\omega, r_i']]$ трех векторов; с выражениями подобного вида нам уже приходилось не один раз встречаться в ряде заданий второй темы. Пользуясь известной нам теперь операцией скалярного умножения, не трудно доказать следующее соотношение, справедливое для любых трех векторов a, b, c :

$$[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b). \quad (14)$$

Действительно, вектор $D = [a, [b, c]]$, будучи перпендикулярен векторному произведению векторов b и c , лежит в плоскости этих векторов и, следовательно, может быть представлен в виде:

$$D = \lambda b + \mu c, \quad (б)$$

где скаляры λ и μ подлежат определению; с другой стороны, D перпендикулярен также и вектору a , т. е. скалярное произведение

$$(a, D) = \lambda (a, b) + \mu (a, c) = 0; \quad (в)$$

пользуясь формулой (в), можно принять:

$$\lambda = \alpha (a, c), \quad \mu = -\alpha (a, b),$$

где α — новый неизвестный скаляр. Формула (б) принимает вид:

$$D = [a, [b, c]] = \alpha \{ b(a, c) - c(a, b) \}. \quad (г)$$

Остается определить α . Это проще всего сделать, проектируя левую и правую части ф-лы (г) на ось: проекция левой части, например, на ось X дает:

$$\begin{aligned} D_x &= a_y [b, c]_z - a_z [b, c]_y = a_y (b_x c_y - b_y c_x) - a_z (b_z c_x - b_x c_z) = \\ &= b_x (a_y c_y + a_z c_z) - c_x (a_y b_y + a_z b_z); \end{aligned} \quad (д)$$

¹⁾ Легко видеть, что $(a, [b, c]) = (c, [a, b]) = (b, [c, a])$, так как знаки этих произведений одинаковы, а по абсолютной величине каждое из них равняется объему параллелепипеда, построенного на трех векторах a, b, c .

проекция же правой части ф-лы (г) имеет выражение:

$$\alpha \{ b_x (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) - c_x (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \}. \quad (e)$$

Сравнивая (д) и (е), найдем $\alpha = 1$, и ф-ла (14) доказана. Применяя ее к вектору $[\mathbf{r}', [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']]$, фигурирующему в выражении (13), найдем:

$$[\mathbf{r}', [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}']] = \boldsymbol{\omega} (\mathbf{r}', \mathbf{r}') - \mathbf{r}' (\mathbf{r}', \boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{\omega} r_i'^2 - \mathbf{r}' (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i')$$

и выражение (13) примет вид:

$$2T' = \sum_{i=1}^n m_i \{ \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega} r_i'^2 - \mathbf{r}_i' (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i') \} = \boldsymbol{\omega}^2 \sum_{i=1}^n m_i r_i'^2 - \sum_{i=1}^n m_i (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{r}_i')^2.$$

Вводя теперь систему осей XYZ , имеющих начало в центре инерции и движущихся вместе с ним и называя через $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ проекции $\boldsymbol{\omega}$, через x_i, y_i, z_i — координаты частицы m_i (проекции $\mathbf{r}_i'$), найдем:

$$\begin{aligned} 2T' &= (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - \sum_{i=1}^n m_i (\omega_x x_i + \omega_y y_i + \omega_z z_i)^2 = \\ &= \omega_x^2 \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + y_i^2) + \omega_y^2 \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + z_i^2) + \omega_z^2 \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2) - \\ &\quad - 2\omega_y \omega_z \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i - 2\omega_z \omega_x \sum_{i=1}^n m_i z_i x_i - 2\omega_x \omega_y \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i. \end{aligned}$$

Вспомнив теперь выражения для моментов инерции и центробежных моментов (§ 22), приведем полученное выражение к виду:

$$2T' = J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 - 2J_{xy} \omega_x \omega_y - 2J_{yz} \omega_y \omega_z - 2J_{zx} \omega_z \omega_x. \quad (15)$$

Если в частности за координатные оси X, Y, Z принять главные центральные оси инерции тела, то $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$, и формула (15) очень упрощается. Получаем

$$T' = \frac{1}{2} \{ J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 \} \quad (16)$$

где J_x, J_y, J_z — главные центральные моменты инерции. Ф-ла (16) имеет, очевидно, место и для случая вращения тела вокруг неподвижной точки O : в этом случае T' — полная кинетическая энергия тела; J_x, J_y, J_z — главные оси инерции в неподвижной точке O .

Возвращаясь к ф-ле (12), находим в общем случае движения тела:

$$T = \frac{1}{2} M v_c^2 + J_x \omega_x^2 + J_y \omega_y^2 + J_z \omega_z^2 \quad (17)$$

Учащийся должен твердо усвоить эту весьма важную формулу динамики.

Выразим, в заключение, кинетическую энергию через производные эйлеровых углов. Ограничимся при этом практически наиболее интересным случаем, когда рассматриваемое тело представляет тело вращения вокруг оси Z , так что экваториальные моменты инерции J_x и J_y друг другу равны: $J_x = J_y = J$; кинетическая энергия вращения T' представится формулой:

$$T' = \frac{1}{2} \{ J(\omega_x^2 + \omega_y^2) + J_z \omega_z^2 \}.$$

Пользуясь выражениями (16) § 31, получим

$$T' = \frac{1}{2} \{ J(\dot{\psi}^2 \sin^2 \vartheta + \dot{\vartheta}^2) + J_z (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)^2 \} \quad (18)$$

или после простого преобразования:

$$T' = \frac{1}{2} \{ J_z \dot{\varphi}^2 + J(\dot{\psi}^2 + \dot{\vartheta}^2) + (J_z - J) \dot{\psi}^2 \cos^2 \vartheta + 2 J_z \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \vartheta \} \quad (19)$$

Примеры и упражнения.

1. Кинетическая энергия снаряда. Центр тяжести снаряда, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси, имеет скорость v_c . Чтобы определить кинетическую энергию снаряда, применим формулу (17). Получим

$$T = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v_c^2 + \frac{1}{2} J \omega^2. \quad (a)$$

Примем следующие данные: вес снаряда $P = 360$ кг, полукалибр $R = 0,152$ м (калибр 30,4 см = 12 дм), радиус инерции относительно оси вращения $\rho = 0,735 R$, угловая скорость (начальная) $\omega = 552 \frac{1}{\text{сек.}}$ (5250 об/мин), скорость центра тяжести (в начальный момент) $v_c = 800$ м/сек.

По этим данным ¹⁾ получим

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \frac{360}{9,81} \left\{ 800^2 + 0,735^2 \cdot 0,152^2 \cdot 552^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{360}{9,81} \left\{ 64 \cdot 10^4 + 38 \cdot 10^2 \right\} = 11720 \text{ м} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Этот результат дает хорошее представление о той огромной разрушительной работе, которую снаряд может дать при ударе о препятствие. Товарный поезд в составе 50 груженных вагонов (см. данные примера 1 § 40) при двух паровозах (считаем кинетическую энергию паровоза равной удесятеренной энергии одного вагона) имеет запас кинетической энергии, равный только 38% энергии нашего снаряда. Это объясняется, конечно, громадной скоростью снаряда в два с лишним раза большей скорости звука в воздухе — кинетическая энергия же пропорциональна квадрату скорости.

¹⁾ Взятым из статьи А. Н. Крылова „Вращательное движение продолговатого снаряда“. Ленинград, 1930, издание Ак. наук СССР.

Ф-ла (а) написана в предположении, что снаряд имеет вращение только вокруг собственной оси. На самом деле эта ось при движении не сохраняет неизменного направления, а все время поворачивается вокруг касательной к траектории центра тяжести снаряда, причем одновременно и угол оси с этой касательной все время меняется. Дополнительные члены, которые вносятся в кинетическую энергию снаряда этими вращениями, чрезвычайно малы по сравнению с написанными. Но при более детальном изучении движения снаряда именно эти члены имеют важнейшее значение, так как ими определяется переменная часть кинетической энергии, знание которой является необходимым при составлении уравнений движения. После изучения примеров 3 и 4 учащийся без труда составит точное выражение кинетической энергии снаряда (см. пример 10 в конце задания)

2. Кинетическая энергия бегунов. Воспользуемся данными примера 2 § 29. Кинетическая энергия поступательного движения будет

$$\frac{G}{2g} v_c^2 = \frac{G}{2g} l^2 \omega^2. \quad (a)$$

Согласно формуле (16) для кинетической энергии вращения бегуна вокруг центра тяжести имеем

$$T' = \frac{1}{2} \left\{ J_1 \omega_1^2 + J \omega_2^2 \right\}$$

где J — экваториальный момент инерции бегуна (т. е. момент инерции относительно прямой, проходящей через центр тяжести перпендикулярно оси бегуна OC). Считая толщину h весьма малой по сравнению с радиусом r , можно принять

$$J = \frac{J_1}{2}.$$

Вспоминая еще, что $\omega_1 = \omega_2 \frac{l}{r}$, получим

$$T' = \frac{G}{2g} \rho^2 \omega_2^2 \frac{l^2}{r^2} + \frac{G}{2g} \frac{\rho^2}{2} \omega_2^2. \quad (б)$$

Складывая (а) и (б), найдем

$$T = \frac{G}{2g} l^2 \omega^2 \left\{ 1 + \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{l^2} \right\},$$

и, воспользовавшись численными данными стр. 266, получим

$$T \approx 511 \text{ кг.м.},$$

причем

$$G = 200 \text{ кг.}, l = 0,8 \text{ м.}$$

3. Кинетическая энергия турбинного диска. При рассмотрении в § 28 (пример 5) задачи о критических угловых скоростях турбинного вала предполагалось, что при изгибе вала плоскость диска остается параллельной своему первоначальному положению; такое предположение приходится отбросить, если диск

не расположен в середине расстояния между подшипниками вала; точно так же в случае пропеллера аэроплана или гребного винта парохода изгиб вала повлечет за собой изменение направления оси вращения, т. е. касательной к упругой линии, перпендикулярной плоскости диска (или крыльев пропеллера). Как и во всех случаях изменения направления оси вращения быстро вращающегося тела, мы и в рассматриваемом случае будем иметь дело с гироскопическими явлениями, которые имеют здесь существенное значение и которые будут рассмотрены в следующей части курса. Сейчас же в качестве подготовительного материала и как применение ф-лы (19) составим выражение для кинетической энергии диска.

Будем предполагать, что центр тяжести диска лежит на оси вращения (рис. 201), совпадающей при отсутствии изгиба с осью X

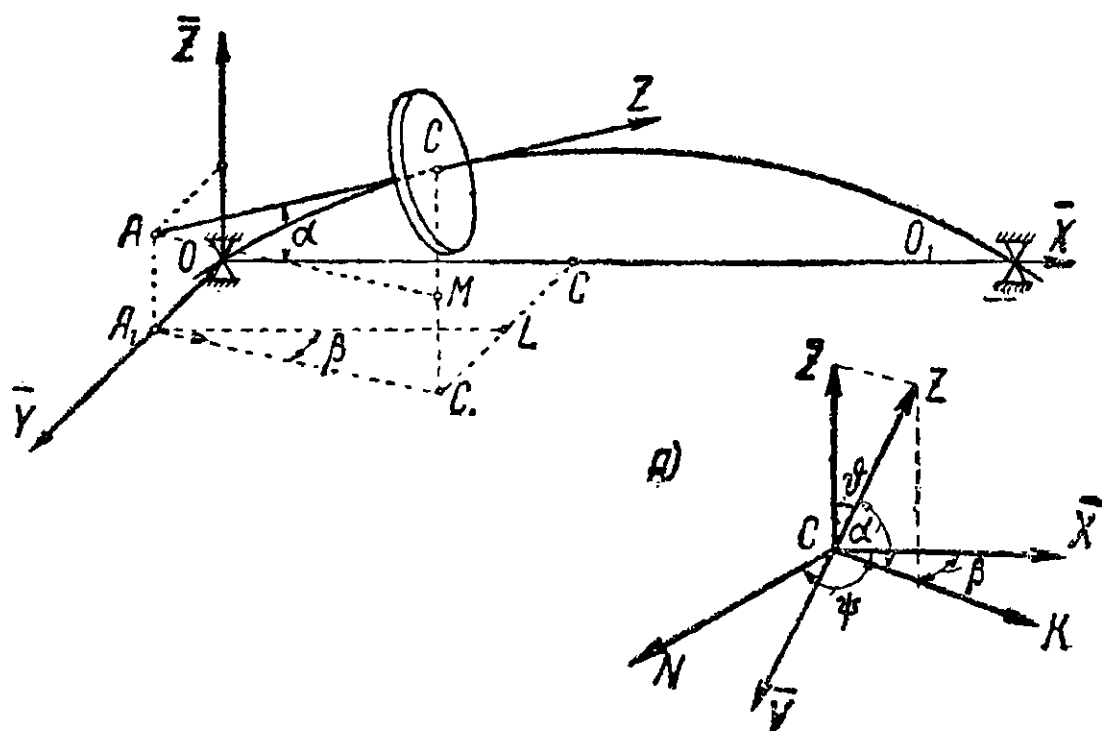


Рис. 201.

и принимающей при изгибе форму некоторой кривой, вообще говоря, двойкой кривизны; координаты центра тяжести обозначим через $\bar{y} = \overline{C_1 C_2}$, $\bar{z} = \overline{CC_1}$ ($\bar{x} = \overline{OC_2}$ при малых деформациях можно считать неизменяющимся). Направление касательной AC к упругой линии в центре тяжести C определим углом $\angle CAM = \alpha$ с плоскостью $\overline{XY}$ и углом $\angle LA_1 C_1 = \beta$ между проекцией $A_1 C_1$, касательной на эту плоскость и осью X (прямая $A_1 L$ параллельна оси X). Четыре переменных $\bar{y}$, $\bar{z}$, α , β очевидно вполне определяют положение диска: первые два — положение его центра тяжести, последние — ориентацию оси. Через производные этих величин по времени мы должны выразить кинетическую энергию диска.

Имеем

$$v_c^2 = \dot{\bar{y}}^2 + \dot{\bar{z}}^2,$$

так что речь будет идти о вычислении вращательной части кинетической энергии. Применим для этого формулу (19). Принимая

касательную AC к упругой линии за ось Z и называя угловую скорость диска через Ω , имеем $|\dot{\varphi}| = \Omega$; далее воспользуемся вспомогательным рисунком 201а, на котором построена линия узлов $\overline{CN}$, перпендикулярная плоскости $\overline{ZCZ}$, а следовательно, и прямой CK , представляющей проекцию CZ на плоскость $\overline{XY}$, вспомнив, как определяются эйлеровы углы, найдем:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha, \quad \psi = \frac{\pi}{2} + \beta,$$

и формула (19) дает

$$T' = \frac{1}{2} \left\{ J_z \Omega^2 + J(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + (J_z - J) \dot{\beta}^2 \sin^2 \alpha + 2J_z \dot{\beta} \Omega \sin \alpha \right\}.$$

Так как угловые деформации α и β и их производные весьма малы, то членом, содержащим $\dot{\beta}^2 \sin^2 \alpha$, можно пренебречь; заменяя еще $\sin \alpha$ углом, получим

$$T' = \frac{1}{2} \left\{ J_z \Omega^2 + J(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + 2J_z \Omega \alpha \dot{\beta} \right\}. \quad (a)$$

Полная кинетическая энергия диска будет (P —вес диска):

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \frac{P}{g} (\dot{y}_c^2 + \dot{z}_c^2) + J_z \Omega^2 + J(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2) + 2J_z \Omega \alpha \dot{\beta} \right\}. \quad (б)$$

4. Ротор в упругих подшипниках. В противоположность предыдущему случаю будем считать вал (и ротор) абсолютно жестким; подшипники же будем считать упругими, так что концы A и B вала имеют перемещения из положения равновесия A_0, B_0 . Введем обозначения (рис. 202):

$$\overline{A_0 A_1} = \overline{y_1}, \quad \overline{A_1 A} = \overline{z_1}, \quad \overline{B_0 B_1} = \overline{y_2}, \quad \overline{B_1 B} = \overline{z_2}.$$

Координаты центра тяжести ротора обозначим через $\overline{y_0}, \overline{z_0}$;

$$\overline{C_2 C_1} = \overline{y_0}, \quad \overline{C_1 C} = \overline{z_0}.$$

Обозначая $\overline{AC} = l_1$, $\overline{CB} = l_2$, $\overline{AB} = l_1 + l_2 = l$, найдем (рис. 202):

$$\frac{\overline{z_2} - \overline{z_0}}{l} = \frac{\overline{z_0} - \overline{z_1}}{l_1},$$

откуда

$$\overline{z_0} = \frac{l_1 \overline{z_2} + l_2 \overline{z_1}}{l} \quad (a)$$

и аналогично

$$\overline{y_0} = \frac{l_1 \overline{y_2} + l_2 \overline{y_1}}{l}. \quad (б)$$

Считая величины $\overline{y}$ и $\overline{z}$ весьма малыми, можно с точностью до малых высших порядков считать $\overline{A_0 B_0} = \overline{AB} = l$. В таком случае четыре переменных $\overline{y_1}, \overline{z_1}, \overline{y_2}, \overline{z_2}$ вполне определяют положение

системы. Выразим через них и их производные по времени кинетическую энергию ротора.

Вводя те же, что и в предыдущем примере, углы α и β , имеем:

$$\alpha = \frac{\bar{z}_2 - \bar{z}_1}{l}, \beta = \frac{\bar{y}_2 - \bar{y}_1}{l},$$

и ф-ла (а) предыдущего примера дает

$$T' = \frac{1}{2} \left\{ J_z \Omega^2 + \frac{J}{l^2} \left[(\dot{\bar{z}}_2 - \dot{\bar{z}}_1)^2 + (\dot{\bar{y}}_2 - \dot{\bar{y}}_1)^2 \right] + \right. \\ \left. + \frac{2J_z}{l^2} \Omega (\bar{z}_2 - \bar{z}_1) (\dot{\bar{y}}_2 - \dot{\bar{y}}_1) \right\}. \tag{В}$$

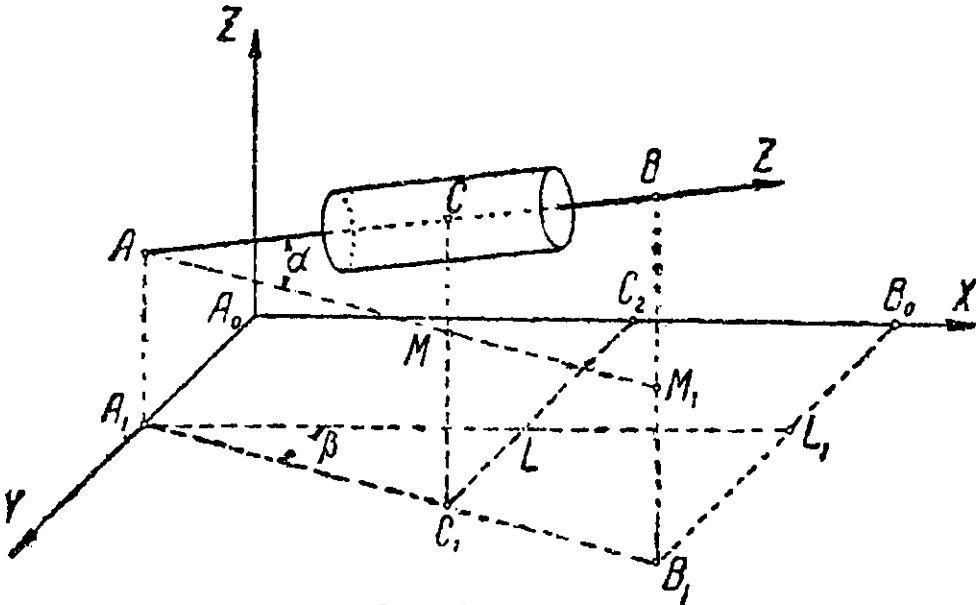


Рис. 202.

Полную кинетическую энергию ротора найдем, прибавив к этому выражению кинетическую энергию поступательного движения вместе с центром тяжести: воспользовавшись формулами (а) и (б), получим:

$$\frac{P}{2gl^2} \left\{ (\dot{\bar{y}}_1 l_2 + \dot{\bar{y}}_2 l_1)^2 + (\dot{\bar{z}}_1 l_2 + \dot{\bar{z}}_2 l_1)^2 \right\}. \tag{Г}$$

Мы применим эти результаты в следующем выпуске динамики при рассмотрении задачи о колебаниях ротора в упругих подшипниках, представляющей интерес в ряде вопросов уравнивания двигателей.

5. Кинетическая энергия и главный момент количества движения твердого тела. По определению главного момента количества движения K имеем:

$$K = \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i].$$

Умножая скалярно на вектор угловой скорости ω , получим

$$(\omega, K) = \left(\omega, \sum_{i=1}^n m_i [\mathbf{r}_i, \mathbf{v}_i] \right) = \sum_{i=1}^n m_i ([\omega, \mathbf{r}_i], \mathbf{v}_i)$$

и так как (в случае тела, имеющего неподвижную точку)

$$[\omega, r_i] = v_i$$

то

$$(\omega, K) = \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = 2T \quad (20)$$

где T — кинетическая энергия твердого тела. Из этого выражения следует, что угол между векторами ω и K не может быть тупым, так как T всегда положительно. Предлагаем учащемуся убедиться в правильности ф-лы (20) в общем случае движения твердого тела.

Задачи и вопросы.

1. В электрической лебедке, показанной на рис. 203, электромотор I приводит во вращение, при посредстве шестерен II, III, IV, барабан V, поднимающий груз Q . Вычислить приведенный к валу электромотора момент инерции системы, принимая следующие данные: маховой момент якоря электромотора (не показанного на рисунке) $GD^2 = 0,785 \text{ кг.м}^2$; момент инерции шестерен: $J_1 = 1,5 \text{ кг.см.сек}^2$, $J_2 = 50 \text{ кг.см.сек}^2$, $J_3 = 1,5 \text{ кг.см.сек}^2$, $J_4 = 100 \text{ кг.см.сек}^2$; момент инерции барабана $J_5 = 30 \text{ кг.см.сек}^2$; все моменты инерции указаны относительно оси вращения

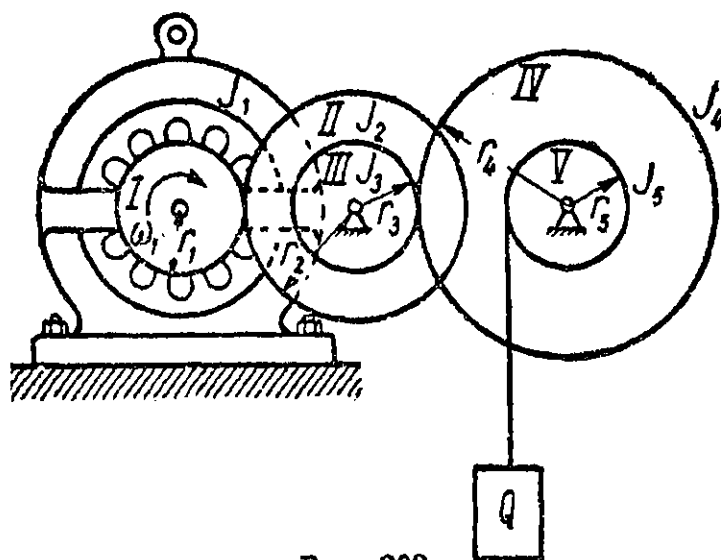


Рис. 203.

соответствующих тел. Вес груза $Q = 1$ тонна, весом каната пренебрегаем; передаточные числа $\frac{r_1}{r_2} = \frac{1}{3}$, $\frac{r_3}{r_4} = \frac{1}{4}$.

Примечание. Маховым моментом якоря электромотора называется произведение из его веса на квадрат диаметра инерции. Эта величина дается в справочниках вместо момента инерции. Очевидно, что

$$\frac{GD^2}{4g} = J.$$

2. Сделать вычисления, аналогичные случаю примера 36 § 38 для балки с заделанными концами и грузом посередине.

3. В случае колебания клинообразной консоли постоянной толщины a (рис. 204) составить выражение кинетической энергии, принимая за кривую прогиба статическую упругую линию под действием собственного веса (см. пример 32 § 38).

4. Составить аналитическое выражение для приведенного момента инерции кривошипного механизма, пренебрегая членами, содержащими квадраты малой величины $\epsilon = \frac{a}{l}$. Воспользовавшись

численными данными примера 2 § 40, сравнить результаты графического и аналитического расчетов.

5. В примере 2 § 40 определить приведенную к ползуну B массу механизма и построить график изменения ее в зависимости от угла φ .

Примечание. Приведенной к точке B массой механизма называется воображаемая масса, которая, двигаясь со скоростью точки B , имела бы в любом положении механизма ту же кинетическую энергию, что и весь механизм в целом.

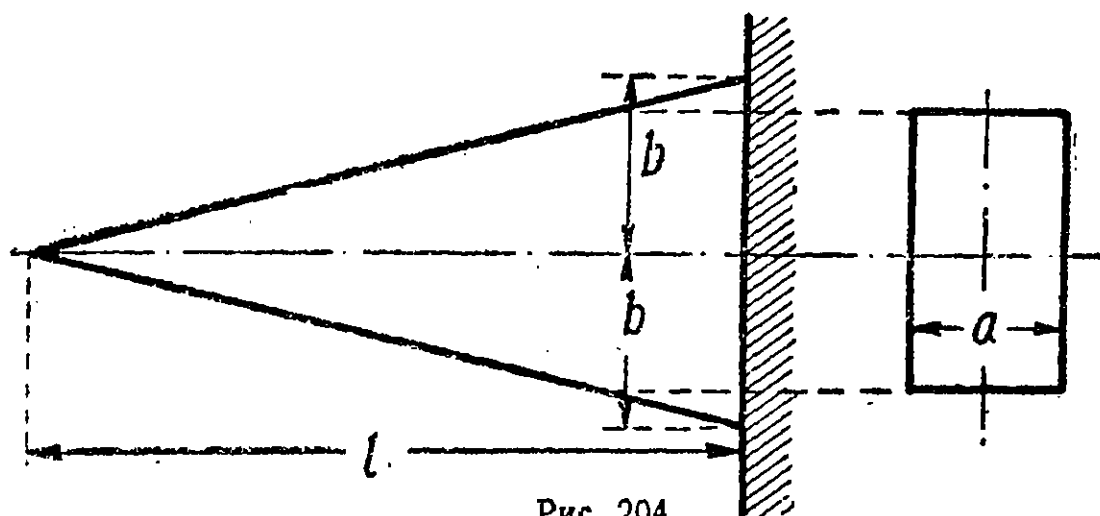


Рис. 204.

6. На рис. 205 представлена схема пневматической клепальной машины. Давление пара передается поршню B , который сообщает через звенья AB и AD движение обжимке, формирующей заклепку. Рычаг OA , соединенный при помощи шарнира A с рычагами AD и AB , может вращаться вокруг неподвижной цапфы O , укрепленной в станине машины.

Взяв размеры с рисунка, определить для ряда положений приведенную к точке B массу механизма. При расчете принять следующие данные:

- вес поршня B — 50 кг,
- „ шатуна AB — 32 кг,
- „ звена AD — 20 кг,
- „ ползуна D , соединенного со штемпелем, — 28 кг.

Момент инерции рычага OA относительно центра вращения O

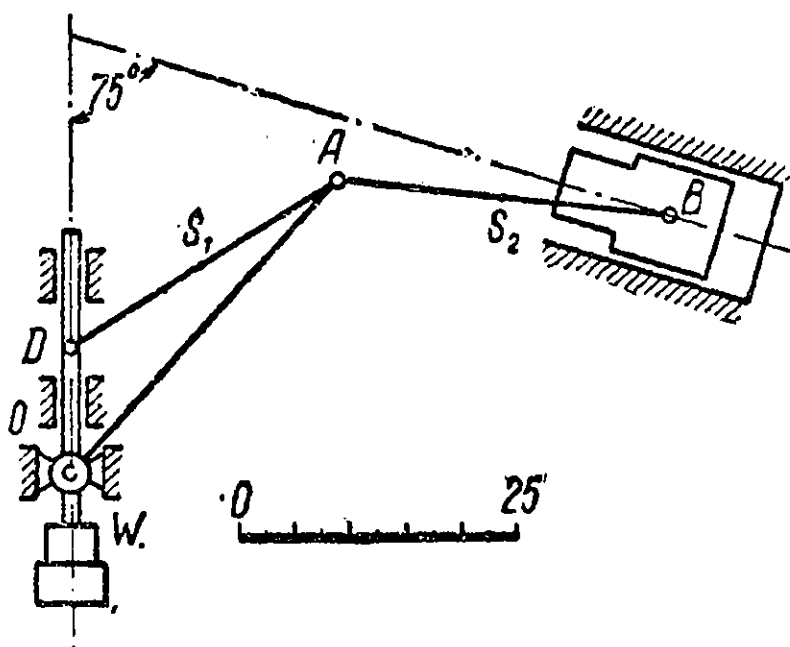


Рис. 205.

$$J_2 = 0,7 \text{ кг.см.сек}^2,$$

момент инерции звена AB относительно его центра тяжести S_2 :

$$J_2 = 0,04 \text{ кг.см.сек}^2.$$

Центры тяжести S_1 и S_2 стержней AD и AB лежат в их середине; при вычислении приведенной массы пренебрегаем вращением звена AD .

7. Составить выражение кинетической энергии центробежного регулятора, вращающегося вокруг оси O_2O_1 с угловой скоростью ω ; одновременно с этим отдельные звенья механизма регулятора совершают движение в его плоскости (угол ϑ изменяется). Пренебрегаем массой стержней и считаем массы шаров сосредоточенными в их центрах; вес муфты равен P_1 , вес шара P_2 . Обозначения указаны на рис. 206.

8. Решить задачу 7, принимая в расчет массу стержней и размеры шаров (радиуса a); считаем стержни однородными, вес каждого стержня равен P_3 .

9. Определить кинетическую энергию бегунов в случае, когда ось прецессии не перпендикулярна оси собственного вращения. Воспользоваться данными примера 1 § 32.

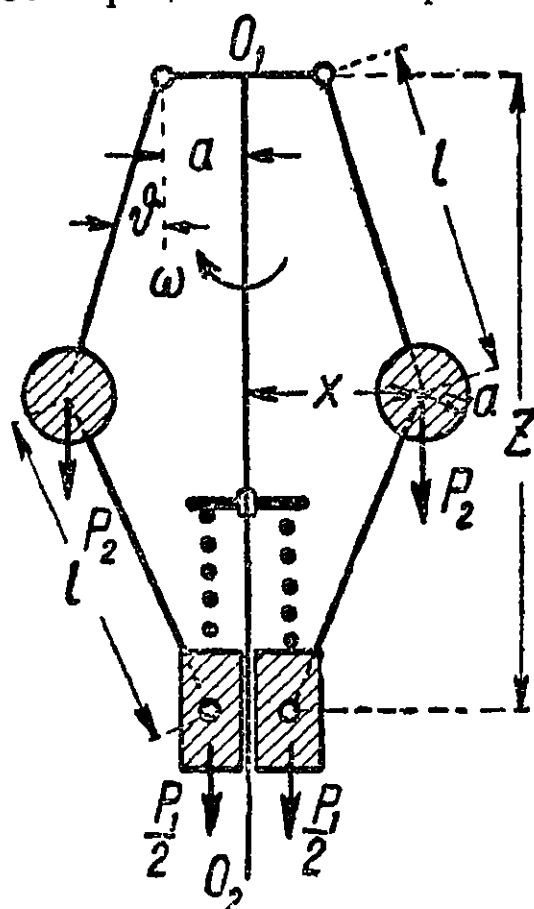


Рис. 206.

10. Положение оси снаряда определим: 1) углом α его оси с вертикальной плоскостью траектории центра тяжести, 2) углом β проекции оси на эту плоскость с касательной к траектории центра тяжести в рассматриваемом месте. Угол касательной с горизонтом обозначим через γ , угловую скорость снаряда — через Ω . Выразить через эти величины и их производные кинетическую энергию вращательного движения снаряда.

Ответ:
$$T' = \frac{1}{2} \{ J_s \Omega^2 + J [\dot{\alpha}^2 + (\dot{\beta} + \dot{\gamma})^2] + (J_s - J) (\dot{\beta} + \dot{\gamma})^2 \sin^2 \alpha + 2J_s (\dot{\beta} + \dot{\gamma}) \Omega \sin \alpha \}.$$

11. Пользуясь ф-лой (20) стр. 390 и выражениями для проекций на оси главного момента количества движения твердого тела, вывести выражение для кинетической энергии твердого тела в общем случае движения.

Задание 11-э.

Теорема об изменении кинетической энергии и закон сохранения механической энергии.

В предыдущих двух заданиях учащийся познакомился с основными понятиями настоящей темы: работой, потенциальной и кинетической энергией, и научился их вычислять в различных более или менее сложных случаях.

Теперь мы переходим к установлению связи между всеми этими понятиями. Как связаны между собою работа и потенциальная

энергия, мы уже определили в задании 9-м. Там было выяснено, что в случае потенциального силового поля работа равна соответствующему уменьшению (падению) потенциала. Нам остается найти связь между изменением кинетической энергии и работой (в частности — потенциальной энергией): как оказывается, *работа равна приращению кинетической энергии* — в этом состоит основная теорема об изменении кинетической энергии. Эта теорема, о значении которой мы уже говорили во введении к теме, в случае потенциального силового поля, после сопоставления связей работы с кинетической и потенциальной энергией приводит к установлению связи между кинетической и потенциальной энергией, а именно к закону: *приращение кинетической энергии равно уменьшению (падению) потенциальной энергии*, т. е. к закону постоянства (сохранения) суммы кинетической и потенциальной энергии или, как обычно его называют, — *закону сохранения полной механической энергии*.

Научившись в предыдущих двух заданиях вычислять отдельные элементы этих теорем, учащийся должен на большом числе упражнений и задач, приведенных в настоящем последнем задании книги, совершенно овладеть методикой применения изложенных теорем к практическим вопросам. Задачи, подобранные нами, весьма разнообразны по материалу; наибольший упор сделан, как и во всей книге, на колебания, на энергетический расчет движения в упругих телах, в которых по большей части колебания возникают, а также на некоторые вопросы, связанные с теорией вредных сопротивлений, приводящих к потерям механической энергии в твердых, упругих и жидких телах. Учащийся должен старательно разобрать все приведенные примеры, хотя некоторые из них могут ему показаться далекими от его непосредственной специальности, — только так он сможет глубже и всесторонне понять значение этих важнейших теорем динамики. Материал, изложенный в последней теме настоящей книги, будет постоянно применяться во всех отделах следующей части.

§ 42. Теорема об изменении кинетической энергии.

Мы должны, исходя из основного закона движения Ньютона

$$m \frac{dv}{dt} = F, \quad (1)$$

получить соотношение, устанавливающее связь между изменением кинетической энергии материальной точки и работой равнодействующей F всех приложенных в точке сил. С этой целью преобразуем ур-ние (1) так, чтобы в правой части его получить выражение для элементарной работы δW силы F , для чего умножим скалярно обе части ур-ния (1) на элемент пути dr . Получим

$$\left(m \frac{dv}{dt}, dr \right) = (F, dr). \quad (2)$$

Замечая, что

$$dr = v dt; \quad \left(m \frac{dv}{dt}, dr \right) = \left(m \frac{dv}{dt}, v dt \right) = (m dv, v) = d \frac{mv^2}{2},$$

получим

$$d \frac{mv^2}{2} = \delta W, \quad (3)$$

или, вспоминая определение кинетической энергии:

$$\boxed{dT = \delta W} \quad (4)$$

Полученное соотношение представляет в случае одной материальной точки теорему об изменении кинетической энергии (теорему живых сил) в дифференциальной форме: *приращение кинетической энергии материальной точки на элементарном участке пути равно элементарной работе всех, приложенных к точке сил на этом участке пути.*

Интегрируя ур-ние (3) между пределами, соответствующими начальному M_1 и конечному M_2 положениям движущейся точки и называя соответственно через v_1 и v_2 скорости точки в этих положениях (рис. 207), получим

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = W_{12}, \quad (5)$$

или

$$\boxed{T_2 - T_1 = W_{12}} \quad (6)$$

при чем через W_{12} обозначена работа всех сил, действовавших на точку на участке $(M_1 M_2)$.

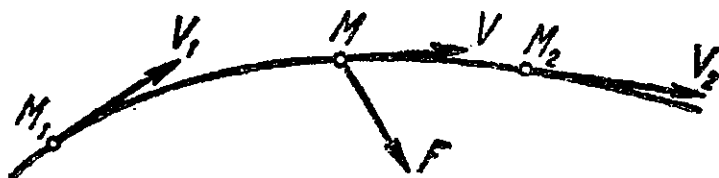


Рис. 207.

Ур-ния (5) и (6) выражают интегральную форму теоремы об изменении кинетической энергии (теоремы живых сил для конечного участка): *приращение кинетической энергии материальной точки на конечном участке пути $(M_1 M_2)$ равно сумме работ всех сил, действовавших на точку на этом участке пути.* Для ряда приложений имеет значение другая формулировка доказанной теоремы: *производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна мощности действующих на точку сил:*

$$\frac{dT}{dt} = (F, v) = N. \quad (7)$$

Для доказательства умножим обе части ур-ния (1) скалярно на скорость v . Получим

$$\left(m \frac{dv}{dt}, v \right) = (F, v) = N;$$

замечая, что

$$\left(m \frac{dv}{dt}, v \right) = \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = \frac{dT}{dt},$$

мы приходим к ур-нию (7).

Теорема об изменении кинетической энергии непосредственно обобщается на случай системы материальных точек. Чтобы сделать это обобщение, предположим, что ур-ния (3) написаны для каждой точки M системы:

$$d \frac{m_i v_i^2}{2} = \delta W_i.$$

Суммируя эти уравнения по всем точкам, включенным нами в систему, и вспоминая, что кинетическая энергия системы есть сумма кинетических энергий всех ее точек:

$$T = \sum_{i=1}^n m_i \frac{v_i^2}{2},$$

получим

$$dT = d \sum_{i=1}^n m_i \frac{v_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n \delta W_i.$$

Здесь $\sum_{i=1}^n \delta W_i$ есть сумма элементарных работ всех сил, дей-

ствовавших, на рассматриваемом элементарном перемещении, на каждую точку системы. Но на любую точку могут действовать внешние по отношению к системе силы—воздействия на нее со стороны других тел, и внутренние силы—воздействия на рассматриваемую точку со стороны других, принадлежащих нашей системе

точек. Поэтому $\sum_{i=1}^n \delta W_i$ может быть представлена как сумма двух слагаемых: элементарной работы внешних сил (обозначим ее через δW) и элементарной работы внутренних сил $\delta W'$. Получим

$$\boxed{dT = \delta W + \delta W'} \quad (8)$$

т. е. *приращение кинетической энергии системы материальных точек на элементарном участке пути равно сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе на этом участке пути.*

Интегрируя между пределами, соответствующими двум положениям системы—начальному (1) и конечному (2)—и называя через T_1 и T_2 кинетические энергии в этих положениях, получим теорему об изменении кинетической энергии системы (теорему живых сил) в интегральной форме:

$$\boxed{T_2 - T_1 = \int_{(1)}^{(2)} \delta W + \int_{(1)}^{(2)} \delta W' = W_{12} + W'_{12}} \quad (9)$$

приращение кинетической энергии системы на конечном участке пути равно сумме работ внешних и внутренних сил, действовавших на этом участке.

Если в числе сил, действовавших на систему, имеются потенциальные силы, то работа их представится уменьшением потенциальной энергии (стр. 345):

$$P_1 - P_2,$$

и уравнение (9) примет вид:

$$T_2 - T_1 = P_1 - P_2 + W_{12} + W'_{12} \quad (10)$$

где W_{12} и W'_{12} — работа всех прочих (непотенциальных) внешних и внутренних сил, приложенных к нашей системе. В дифференциальной форме получим (вместо (8)):

$$dT = -\delta P + \delta W + \delta W' \quad (11)$$

Учащийся должен особо отметить, что на изменение кинетической энергии оказывает влияние наличие не только внешних, но и внутренних сил. О значении этого обстоятельства уже говорилось в вводной беседе к теме и будет еще сказано в ее заключительном параграфе. Для ряда приложений, к которым мы перейдем сейчас, учащийся должен вспомнить и выделить случаи, когда работа внутренних сил обращается в нуль (§ 34, стр. 313); в этих случаях приложения теоремы об изменении кинетической энергии очень упрощаются и большей частью легко приводят к цели. Остается отметить еще, что теорема об изменении кинетической энергии в форме ур-ния (7), конечно, может быть обобщена и на случай системы материальных точек. Получаем

$$\frac{dT}{dt} = \sum_{i=1}^n (F_i, v_i) + \sum_{i=1}^n (F'_i, v_i) = N + N',$$

т. е. производная по времени от кинетической энергии системы материальных точек равна мощности всех внешних и внутренних сил, приложенных к системе.

Примеры и упражнения.

1. Ракетный снаряд. Представим себе, что из точки M_0 , находящейся на сравнительно небольшой высоте над поверхностью земли, выброшен по направлению к луне снаряд, и определим, какая начальная скорость v_0 должна быть сообщена этому снаряду, чтобы он мог достичь такого положения M_1 , в котором уравновешиваются силы притяжения земного шара и луны.

Для упрощения задачи будем считать луну неподвижной относительно земли и обозначим через f — константу тяготения, m_g — массу земли, r — ее радиус, m — массу снаряда, x_1 — расстояние точки M_1 от центра земли; примем далее расстояние между цент-

рами земли и луны равным $60 r$, массу луны — $\frac{m_3}{75}$. Для определения x_1 имеем уравнение:

$$\frac{f m_3 m}{x_1^2} = \frac{f \cdot \frac{m_3}{75} \cdot m}{(60 r - x_1)^2},$$

или

$$75 (60 r - x_1)^2 = x_1^2,$$

корень которого, меньший $60 r$, будет $x_1 = 53,8 r$ (второй корень, больший $60 r$, нас не интересует: он соответствовал бы положению равновесия, если бы луна отталкивала, а не притягивала снаряд). Переходя теперь к определению интересующей нас скорости v_0 , применим теорему живых сил (ф-ла (10)):

$$T_1 - T_0 = \Pi_0 - \Pi_1, \quad (a)$$

где значки 0 и 1 относятся к начальному M_0 и конечному M_1 положениям снаряда; расстояние M_0 от центра земли обозначим через x_0 .

Имеем

$$T_1 = 0, \quad T_0 = \frac{m v_0^2}{2}.$$

Далее, согласно § 36 стр. 356, имеем:

$$\Pi_1 = -f \frac{m_3 m}{x_1} - f \frac{m_3 m}{75 (60 r - x_1)}$$

$$\Pi_0 = -f \frac{m_3 m}{x_0} - f \frac{m_3 m}{75 (60 r - x_0)}$$

при чем согласно ф-ле (ж) § 17 стр. 153

$$m_3 f = g r^2.$$

Подставляя в (a) и пользуясь полученным значением для x_1 , найдем

$$-\frac{m v_0^2}{2} = -\frac{m g r^2}{75} \left[\frac{4500 r - 74 x_0}{x_0 (60 r - x_0)} - \frac{4500 r - 74 x_1}{x_1 (60 r - x_1)} \right]$$

или

$$v_0^2 = 2 g r \left\{ \frac{60 r - 0,987 x_0}{x_0 \left(60 - \frac{x_0}{r} \right)} - 0,021 \right\};$$

принимая $g = 9,83 \text{ м/сек}^2$ (для полюса), $r = 636 \cdot 10^4 \text{ м}$, получим для ряда значений x_0 значение начальной скорости, с которой должен быть выпущен снаряд, чтобы достичь положения M_1 (см. кривую (a) на рис. 41, стр. 120). Если же снаряд в положении x_0 будет иметь скорость, несколько превосходящую v_0 , то, достигнув высоты x_1 , он не остановится, а будет продолжать свое движение по направлению к луне. Положим, например, $x_0 = 1,01 r$, т. е. примем, что M_0 находится на высоте, равной $0,01 r = 63,6 \text{ км}$ от по-

верхности земли (на такой высоте уже можно считать атмосферу практически отсутствующей, поэтому мы могли при наших расчетах не принимать во внимание сопротивления воздуха).

Получим

$$\begin{aligned} v_0^2 &= 121 \cdot 10^6, \\ v_0 &= 11\,000 \text{ м/сек.} \end{aligned}$$

Пренебрегая притяжением луны, определим еще начальную скорость v_0^* , которая должна быть сообщена снаряду, чтобы удалить его из M_0 на бесконечное расстояние от земли. Получим

$$v_0^{*2} = 2g \frac{r^2}{x_0},$$

откуда при $x_0 = 1,01 r$ найдем:

$$\begin{aligned} v_0^{*2} &= 2gr \cdot 0,99 \\ v_0^* &= 11\,120 \text{ м/сек,} \end{aligned}$$

т. е. результат, отличающийся от предыдущего только на 3%. Зная v_0 , можно разбить изучение движения снаряда на три стадии (см. пример, 4, § 12): в первой стадии (от поверхности земли до M_0) снаряд летит по принципу ракеты, отбрасывая назад сгорающие газы и двигаясь благодаря их противодействию. Если такой снаряд достигнет высоты x_0 , имея скорость, немного превосходящую v_0 , то во второй стадии своего движения он успеет достигнуть, имея некоторую направленную к луне скорость, положения M_1 и далее, в третьей стадии движения, начнет совершать падение на луну, повинаясь ее притяжению. Движение в первой стадии рассмотрено в § 12.

2. Примеры определения мощности, расходуемой двигателем при пуске в ход и установившемся режиме. Вернемся к примеру 1 § 38 и определим мощность электромотора, поднимающего груз: при этом будем считать, что из состояния покоя движение груза начинается с постоянным ускорением $w = 0,9 \text{ м/сек}^2$; достигнув значения $v_{\max} = 14 \text{ м/сек}$, скорость груза в дальнейшем движении до начала торможения остается постоянной. При вычислении примем, что в любом положении веса верхнего и нижнего концов цепи друг друга уравнивают — это позволяет не принимать в расчет работы веса каната.

Обозначим через W_m — работу электромотора, N_m — его мощность. Теорема живых сил дает:

$$T - T_0 = W_m - (G_1 - G_2)x, \quad W = (T - T_0) + (G_1 - G_2)x, \quad (a)$$

где последний член выражает работу веса грузов; уравнение (a) выражает, что энергия электромотора уходит: 1) на сообщение системе кинетической энергии, 2) на работу подъема груза. Дифференцируя уравнение (a), найдем:

$$N_m = \frac{dT}{dt} + (G_1 - G_2)v. \quad (б)$$

Подставляя сюда вместо T его значение

$$T = \left(\frac{G_1 + G_2 + ql}{g} + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{2J_2}{r_2^2} \right) \frac{v^2}{2},$$

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{G_1 + G_2 + ql}{g} + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{2J_2}{r_2^2} \right) v\omega,$$

и замечая, что в период пуска $v = \omega t$, получим

$$N_m = \left[\left(\frac{G_1 + G_2 + ql}{g} + \frac{J_1}{r_1^2} + \frac{2J_2}{r_2^2} \right) \omega + G_1 - G_2 \right] \omega t \approx 71,5 t \text{ HP.}$$

В момент достижения максимальной скорости $t = \frac{v_{\max}}{\omega} = 15,55 \text{ сек.}$ и

$$N_m^{(\max)} = 71,5 \cdot 15,55 \approx 1110 \text{ HP.}$$

В период установившегося движения с постоянной скоростью $v_{\max} = 14 \text{ м/сек}$ имеем $\omega = 0$ и

$$N_m = (G_1 - G_2) v = 42 \text{ т} \cdot \text{м/сек} = 560 \text{ HP.}$$

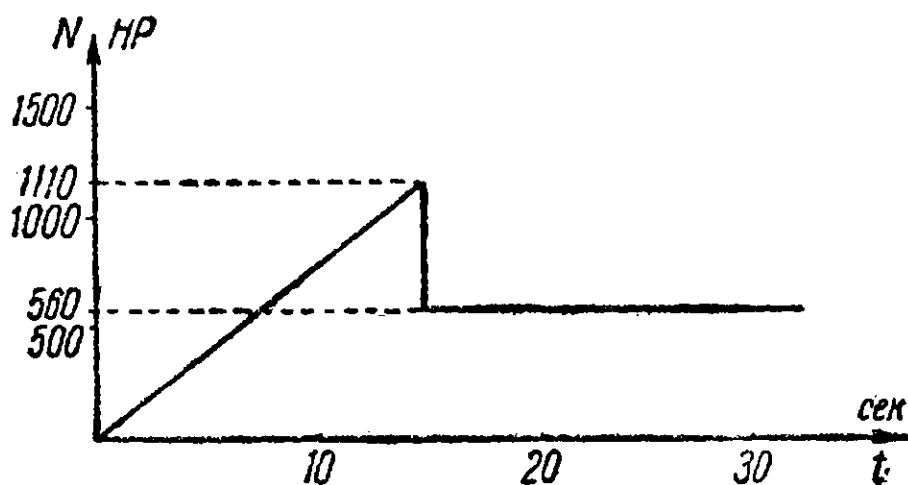


Рис. 208.

График изменения отдаваемой мотором мощности дан на рис. 208. б) В качестве второго примера определим мощность, расходуемую двигателем дорожного парового катка, употребляемого при постройке и ремонте шоссе для разглаживания пути. Примем вес катка равным $G = 15 \text{ т}$ и будем считать, что каток приводится в течение $t_0 = 2 \text{ мин.}$ из состояния покоя в движение со скоростью 3 км/час . Коэффициент трения качения δ примем равным 2 см , радиус катка $r = 60 \text{ см}$, его радиус инерции относительно оси $\rho = 0,8 r$; ширина катка $d = 2 \text{ м}$; давление p , передаваемое катком дороге, составляет 90 кг на погонный см ширины катка.

Работа момента трения качения, как доказано в § 34 стр. 324, может быть определена по формуле

$$W = \delta p d \frac{s}{r},$$

где s — путь, пройденный катком. Как и в предыдущем примере,

для определения мощности, расходуемой на движение катка, получим уравнение:

$$N = \frac{dT}{dt} + \frac{\partial p d}{r} \frac{ds}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{\partial p d}{r} v,$$

при чем в рассматриваемом случае (§ 40 пример 1)

$$T = \frac{G}{2g} \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} \right) v^2$$

и, следовательно:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{G}{g} \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} \right) w v.$$

Получаем

$$N = \left\{ \frac{G}{g} \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2} \right) w + \frac{\partial p d}{r} \right\} v.$$

В нашем случае имеем

$$v_{\max} = 3 \text{ км/час} = 83,3 \text{ см/сек}, \quad w = \frac{v_{\max}}{t_0} = 0,693 \text{ см/сек}^2,$$

и, следовательно:

$$N = \{17,4 + 600\} v = 617,4 v.$$

Максимальный расход мощности имеет место при $v = v_{\max}$:

$$N_{\max} = 617,4 \cdot 83,3 = 51440 \text{ кг/см} = 6,85 \text{ HP}.$$

При установившемся режиме работы с постоянной скоростью расход мощности остается постоянным и равным

$$N = 600 v = 6,67 \text{ HP}.$$

в) В качестве последнего примера определим мощность двигателя, приводящего в движение вентилятор, создающий поток воздуха в аэродинамической трубе. Обозначим через v скорость воздуха в рабочем сечении трубы, через F —площадь этого сечения, γ —вес единицы объема воздуха; от одного сечения к другому скорость потока изменяется, оставаясь при установившемся режиме, который мы будем рассматривать, постоянной в данном месте. Если $Q = Fv$ обозначает расход, т. е. объем воздуха, протекающего через поперечное сечение в единицу времени, а $m = \frac{\gamma Q}{g}$ — массу этого объема, то можно сказать, что работа вентилятора уходит на сообщение воздуху в каждую единицу времени кинетической энергии

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} Q v^2 = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} F v^3.$$

При отсутствии потерь, т. е. при условии, что вся работа уходит на создание потока, эта величина равнялась бы мощности N двигателя, вращающего вентилятор. Отношение ее к N , при фактиче-

ских условиях работы не равное единице, носит название качества трубы η . Итак

$$\eta = \frac{\gamma F v^3}{2 g N} \quad \text{или} \quad \eta = \frac{\gamma F v^3}{150 g N},$$

при чем N выражено в HP. F —в $м^2$, v —в $м/сек$, γ —в $кг/м^3$. Заметим, что η может быть для данного сечения больше единицы, так как за счет местного сужения трубы можно получить большое значение для скорости в этом сечении.

Для малой трубы Ленинградского Физико-механического инсти-тута имеем следующие данные: диаметр рабочей части $D=0,3 м$, скорость в рабочей части $v=41 м/сек$, мощность мотора $N=5,5 HP$. По этим данным, принимая $\gamma=1,293 кг/м^3$, получаем

$$\eta = \frac{\pi \cdot 0,3^2 \cdot 41^3 \cdot 1,293}{4 \cdot 150 \cdot 9,81 \cdot 5,5} = 0,74.$$

Данные нескольких труб, работающих в СССР, приведены в таб-лице:

Название лаборатории	Формы и размеры рабочего сечения	Скорость в ра- бочей части в $м/сек$	Мощность двигателя в HP	Качество трубы	Примечание
1. Центральный аэрогид- родинамич. институт в Мос- кве (ЦАГИ)	Круглое $D=3 м$	78	820	3,6	1 раб. часть
большая труба	" $D=6 "$	30	820	0,81	2 " "
малая труба	" $D=1,5 м$	95	390	3,22	
2. Физико-механический институт в Леиннграде:					
большая труба	" $D=1,4 м$	40	60	1,3	
малая труба	" $D=0,3 "$	41	5,5	0,74	
3. Ленинградский ин-т инж. пут. сообщения	" $D=0,8 "$	63	52	2,0	

3. Приведенный вращающий момент. Пусть кинетиче-ская энергия механизма представлена выражением:

$$T = \mathfrak{J}(\varphi) \frac{\dot{\varphi}^2}{2}, \tag{a}$$

где через $\mathfrak{J}(\varphi)$ обозначен приведенный к некоторому основному звену (обычно кривошипу) момент инерции механизма, а через $\dot{\varphi}$ —угловая скорость этого звена.

Дифференцируя выражение кинетической энергии по времени, имеем

$$\frac{dT}{dt} = \mathfrak{J}(\varphi) \ddot{\varphi} + \mathfrak{J}'(\varphi) \dot{\varphi} \frac{\dot{\varphi}^2}{2}, \tag{б}$$

с другой стороны, как мы знаем:

$$\frac{dT}{dt} = N,$$

где N — мощность всех сил, действующих на машину, т. е. сил движущих, полезных и вредных сопротивлений. Представим N в виде:

$$N = L \dot{\varphi}, \quad (в)$$

где L — приведенный к выбранному основному звену момент сил, т. е. такой фиктивный момент, который, будучи приложен к основному звену, производит ту же работу, что и все силы, действующие на машину (стр. 321, ф-ла 37).

Сравнением ф-л (б) и (в) находим

$$L = \mathfrak{J}(\varphi) \ddot{\varphi} + \mathfrak{J}'(\varphi) \frac{\dot{\varphi}^2}{2}. \quad (г)$$

Если через a обозначить длину кривошипа, то, рассматривая вместо L силу F , приведенную к пальцу кривошипа, получим

$$F = \frac{L}{a}. \quad (д)$$

Рассмотрим два примера определения приведенных сил и моментов:

а) Определить величину момента, который должен быть приложен к ведущему звену в моторе „Гном“ (пример 3, § 40), чтобы сообщить этому звену ускорение $\ddot{\varphi} = 30 \frac{1}{\text{сек}^2}$; первоначально мотор находился в состоянии покоя. Имеем $\dot{\varphi} = 0$ и формула (г) дает

$$L = \mathfrak{J}(\varphi) \ddot{\varphi};$$

воспользовавшись численными данными стр. 381, получим

$$L = 22,03 \cdot 30 = 660,9 \text{ кг. см.}$$

Если сила, создающая момент L , находится на расстоянии 25 см от оси вращения O_2 , то величина этой силы будет

$$F = \frac{L}{a} = 26,5 \text{ кг};$$

б) В примере 2 § 40 был определен для ряда положений приведенный момент инерции кривошипного механизма. Полагая, что вращение происходит с постоянной угловой скоростью $\dot{\varphi} = 1500 \text{ об/мин}$, найдем теперь закон изменения приведенного к кривошипу момента сил L . По ф-ле (г) получим

$$L = \mathfrak{J}'(\varphi) \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = i'(\varphi) \frac{\dot{\varphi}^2}{2}$$

и дело сводится к определению производной $i'(\varphi)$. Для этого можно было бы прибегнуть к графическому дифференцированию кривой $i(\varphi)$

(рис. 197), но от результатов такого вычисления нельзя было бы ожидать достаточной точности, так как кривая $i(\varphi)$ построена по небольшому числу точек. Найдем поэтому аналитическое выражение для $i(\varphi)$, представив ее в виде тригонометрического ряда, коэффициенты которого определим приближенным способом Рунге.

Отсылая учащегося за подробностями к специальным курсам приближенных вычислений (см. например Безикович и Фридман, „Приближенные вычисления“, ГНТИ, 1930, стр. 158), приведем лишь схему вычислений, которой мы будем пользоваться (см. также Hütte, т. I, стр. 182, 13-е издание).

Схема вычислений по методу Рунге

	$i(300^\circ)$	$i(30^\circ)$ $i(330^\circ)$	$i(60^\circ)$ $i(300^\circ)$	$i(90^\circ)$ $i(270^\circ)$	$i(120^\circ)$ $i(240^\circ)$	$i(150^\circ)$ $i(210^\circ)$	$i(180^\circ)$
Сумма	s_0	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6

	s_0 s_6	s_1 s_5	s_2 s_4	s_3
Сумма . .	σ_0	σ_1	σ_2	σ_3
Разность .	ϑ_0	ϑ_1	ϑ_2	—

$\sin 30^\circ = 0,5$			ϑ_2		$-\sigma_2$	σ_1		
$\sin 60^\circ = 0,866$				ϑ_1				
$\sin 90^\circ = 1$	σ_0 σ_2	σ_1 σ_3	ϑ_0		σ_0	$-\sigma_3$	ϑ_0	ϑ_2
Сумма	I	II	I	II	I	II	I	II
Сумма I+II	$12 a_0$		$6 a_1$		$6 a_2$			
Разность I—II	$12 a_3$		$6 a_5$		$6 a_4$		$6 a_2$	

Примечание к последней таблице. В каждой строке надо помножить приведенные значения на значение синуса, написанного слева.

Получаемые в результате этих вычислений значения $a_0, \dots, a_6$ суть искомые коэффициенты при косинусах в разложении нашей функции $i(\varphi)$ в тригонометрический ряд. Коэффициенты при синусах в нашем случае обращаются в нуль, почему схема вычисления их здесь не приводится. Имеем таким образом:

$$i(\varphi) = a_0 + a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi + a_3 \cos 3\varphi + a_4 \cos 4\varphi + a_5 \cos 5\varphi + a_6 \cos 6\varphi.$$

Переходим к вычислению. Пользуемся данными таблицы на стр. 379.

	4,18	7,69 7,69	16,24 16,24	16,30 16,30	13,94 13,94	7,00 7,00	4,18
Сумма . .	4,18	15,38	32,48	32,60	27,88	14,00	4,18

	4,18 4,18	15,38 14,00	32,48 27,88	32,60
Сумма	9,30	29,38	60,36	32,60
Разность	0	1,38	4,60	—

$\sin 30^\circ = 0,5$			2,30		—30,18	14,69		
$\sin 60^\circ = 0,866$				1,19				
$\sin 90^\circ = 1$	9,36 60,36	29,38 32,60	0		9,36	—32,60	0	4,60
Сумма	69,72	61,98	2,30	1,19	—20,82	—17,91	0	4,60
Сумма I + II	131,70		3,49		—38,73			
Разность I — II	7,74		1,11		—2,91		—4,60	

$$\text{Получаем: } a_0 = \frac{131 \cdot 70}{12} = 10,95, \quad a_1 = \frac{3,49}{6} = 0,581,$$

$$a_2 = \frac{38 \cdot 73}{6} = 6,455, \quad a_3 = \frac{-4,60}{7} = 0,765, \quad a_4 = \frac{-2,91}{6} = 0,485,$$

$$a_5 = \frac{1,11}{6} = 0,185, \quad a_6 = \frac{7,74}{12} = 0,645,$$

и разложение $i(\varphi)$ в тригонометрический ряд будет иметь вид:

$$i(\varphi) = 10^{-3} \{ 10,95 + 0,581 \cos \varphi - 6,455 \cos 2\varphi - 0,765 \cos 3\varphi - 0,485 \cos 4\varphi + 0,185 \cos 5\varphi + 0,645 \cos 6\varphi \}.$$

Дифференцируя, получим

$$i'(\varphi) = \{ -0,581 \sin \varphi + 12,91 \sin 2\varphi + 2,295 \sin 3\varphi + 1,94 \sin 4\varphi - 0,925 \sin 5\varphi - 3,87 \sin 6\varphi \} \cdot 10^{-3}.$$

Численные значения $i'(\varphi)$, определяемые по этой формуле, а также значения момента $L(\varphi)$ приведены в таблице.

$\varphi^\circ \dots \dots$	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
$i'(\varphi) \cdot 10^3$ кг. см. сек	0	14,7	13,9	5,1	-3,8	10,35	-14,7	-11,3	0	11,33	14,7	10,35	3,8	-5,1	-13,9	-14,7
L кг. см.	0	183	173	63	-47	-127	-183	-139	0	139	183	127	47	-63	-173	-183

Пусть мощность двигателя равна 7 НР; считая момент сил сопротивления L_1 постоянным, получим

$$L_1 = \frac{7 \cdot 7500}{150 \pi} \text{ кг. см.} = 112 \text{ кг. см.}$$

Величина момента движущих сил L_2 найдется из формулы:

$$L_2 = L + L_1,$$

т. е. для любого положения кривошипа L_2 может быть определено прибавлением постоянного слагаемого 112 кг.см к числам последней строки приведенной выше таблицы.

4. Основное уравнение теории гидравлических турбин. В примере 4 § 17 было выведено основное уравнение теории гидравлических турбин, дающее при $\alpha_2 = 90^\circ$ следующее выражение для вращающего турбину момента:

$$L_s = \frac{Q}{g} r_1 c_{u1}, \quad (a)$$

где Q — вес воды, протекающей в течение 1 сек.

Вспоминая, что мощность N равна произведению момента на угловую скорость ω (§ 34 стр. 321), имеем

$$N = L \cdot \omega = \frac{Q}{g} r_1 \omega c_{u1} = \frac{Q}{g} c_{u1} u_1,$$

где u_1 — окружная скорость во входном сечении. Пусть, с другой стороны, в нашем расположении имеется напор высоты H ; тогда произведение QH представляет тот запас мощности, которым мы располагаем для приведения турбины в движение; при отсутствии потерь мы имели бы

$$QH = \frac{Q}{g} c_{u1} u_1; \quad (6)$$

фактически же может быть использована только некоторая доля полной мощности, вследствие чего уравнение (6) принимает вид

$$\frac{Q}{g} c_{u1} u_1 = \varepsilon QH$$

или

$$c_{u1} u_1 = \varepsilon g H \quad (в)$$

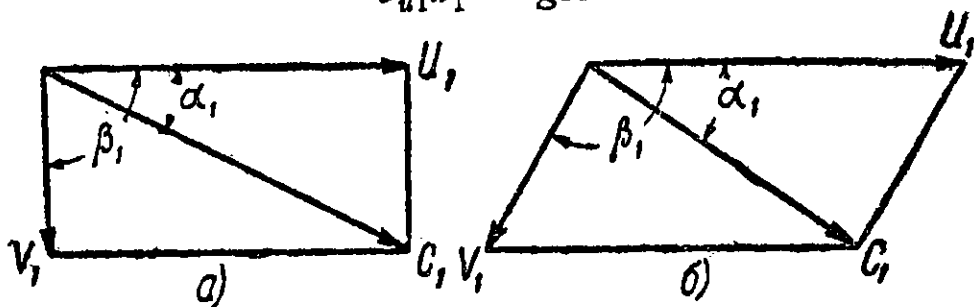


Рис. 209.

где коэффициент полезного действия ε в современных установках бывает равным от 0,85 до 0,95. Практически основным уравнением теории турбин пользуются именно в форме (в). Для иллюстрации его ограничимся одним примером. В турбине Френсиса угол β_1 относительной скорости V' с окружной скоростью u_1 во входном сечении часто принимают равным 90° . Рис. 209а показывает, что при этом

$$c_1 = \frac{u_1}{\cos \alpha_1}, \text{ т. е. } c_{u1} = u_1,$$

и ф-ла (в) дает

$$u_1 = \sqrt{\varepsilon g H},$$

что при $\varepsilon = 0,88$ дает

$$u_1 = 2,94 \sqrt{H}; \quad (г)$$

при $H = 10$ м и диаметре рабочего колеса $2r_1 = 600$ мм; это дает угловую скорость

$$n = \frac{2,94 \cdot \sqrt{10} \cdot 30}{0,3 \cdot \pi} = 296 \text{ об/мин.}$$

Желая повысить угловую скорость до 400 об/мин, примем вместо (г)

$$u_1 = 3,3 \sqrt{H} = 10,4 \text{ м/сек,}$$

что на основании (в) дает

$$c_{u1} = 8,27 \text{ м/сек.}$$

Рис. 209б дает

$$\frac{\sin \beta_1}{c_1} = \frac{\sin(\beta_1 - \alpha_1)}{u_1},$$

или

$$\cos \alpha_1 - \operatorname{ctg} \beta_1 \cdot \sin \alpha_1 = \frac{u_1}{c_1} = \frac{u_1 \cos \alpha_1}{c_{u1}},$$

и, следовательно:

$$1 - \operatorname{ctg} \beta_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{u_1}{c_{u1}},$$

откуда находим

$$\operatorname{ctg} \beta_1 = \left(1 - \frac{u_1}{c_{u1}}\right) \operatorname{ctg} \alpha_1.$$

Задаваясь $\alpha_1 = 40^\circ$, получаем необходимое для проектирования лопатки число

$$\beta_1 = 104^\circ.$$

5. Приложение теоремы живых сил к вопросу об определении частот свободных колебаний.

а) Выясним сначала метод на примере груза P , совершающего колебания на пружине, массой которой мы пока пренебрегаем.

Если через x обозначить абсциссу груза в момент t , отсчитываемую от положения равновесия, то потенциальная энергия растянутой пружины выразится формулой:

$$П = П_0 - \frac{c}{2} (x + f_{st})^2,$$

где $П_0$ — константа, c — жесткость пружины; f_{st} — удлинение, которое имела пружина под действием груза P уже в положении равновесия:

$$f_{st} = \frac{P}{c} \quad (a)$$

Работа силы веса при перемещении груза из положения равновесия в рассматриваемое положение выразится формулой

$$W = Px;$$

применяя теперь теорему живых сил, получим

$$\frac{P}{2g} (\dot{x}^2 - \dot{x}_0^2) = -\frac{c}{2} (x + f_{st})^2 + Px + П_0.$$

Замечая, что по формуле (a) $Px = cf_{st}x$ и заменяя постоянные одной буквой h , найдем

$$\frac{P\dot{x}^2}{2g} + \frac{cx^2}{2} = h.$$

Мы уже знаем, что движение груза является в рассматриваемом

мом случае гармоническим колебанием, частота которого не зависит от начальных условий; поэтому, желая определить частоту, мы можем принять простейшие начальные условия: при $t=0$, $\dot{x}=0$ и $x=x_0$; получим

$$\frac{P\dot{x}^2}{2g} + \frac{cx^2}{2} = \frac{cx_0^2}{2}. \quad (6)$$

Полагая теперь

$$x = x_0 \cos kt,$$

что согласуется с начальными условиями, получим путем подстановки в (6)

$$k^2 \frac{Px_0^2}{2g} \sin^2 kt + \frac{c}{2} x_0^2 \cos^2 kt = \frac{c}{2} x_0^2$$

или

$$k^2 \frac{Px_0^2}{2g} \sin^2 kt = \frac{c}{2} x_0^2 (1 - \cos^2 kt) = \frac{c}{2} x_0^2 \sin^2 kt,$$

и, следовательно:

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{cg}{P}}} \quad (B)$$

Конечно, эту формулу, определяющую частоту, мы уже знали раньше, и дело здесь не в самом результате, а в методе его получения, так как этот метод оказывается весьма плодотворным при определении частот колебаний в более сложных случаях.

б) Найдем, например, частоту свободных колебаний прибора, описанного в примере 2а § 38. Отличие от предыдущего случая заключается только в иной форме выражений для кинетической и потенциальной энергий. Называя через c_1 и c_2 жесткости пружин и замечая, что при перемещении груза G на x горизонтальная пружина удлиняется на $\frac{ax}{b}$, получим

$$\frac{1}{2} \left(\frac{G}{g} + \frac{J}{b^2} \right) \dot{x}^2 + \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{2} \frac{a^2}{b^2} x^2 = h,$$

откуда найдем, как в примере (а):

$$k = \sqrt{\frac{c_1 + c_2 \frac{a^2}{b^2}}{\frac{G}{g} + \frac{J}{b^2}}}.$$

в) В обоих предыдущих примерах мы пренебрегали массой пружины по сравнению с массой колеблющегося тела; если же массу пружины надо учесть, то в выражение кинетической энергии колеблющейся системы войдет поправка, определяемая по способу Релея.

Согласно пункту (в) примера 3 § 38, имеем

$$T = \left(P + \frac{p}{3} \right) \frac{\dot{x}^2}{2g},$$

где p — вес пружины; ф-ла (б) принимает вид

$$\left(P + \frac{p}{3} \right) \frac{\dot{x}^2}{2g} + \frac{cx^2}{2} = h;$$

следовательно для частоты колебаний найдем

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P + \frac{p}{3}}}$$

или

$$k = \sqrt{\frac{cg}{P}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{p}{3P}}} = \frac{k_0}{\sqrt{1 + \frac{\alpha}{3}}}, \quad (г)$$

где k_0 — частота при $p=0$, т. е. в пренебрежении массой пружины; через α обозначено отношение веса пружины к весу груза; значения отношения $\frac{k}{k_0}$

при различных α приведены во втором столбце таблицы (стр. 410), (см. также график на рис. 210).

В третьем столбце таблицы приведены результаты точного решения для наиболее низкой частоты колебаний груза; сравнение показывает, что решение по методу Релея имеет весьма высокую степень точности при $\alpha < 1$, но и при больших α можно для приближенных расчетов пользоваться формулой Релея; например при $\alpha=5$ ошибка не превосходит 4% (последний столбец). Отметим еще, что частота, вычисленная по методу Релея, оказывается выше истинной—это обстоятельство не случайно, но на обосновании его мы не имеем возможности здесь останавливаться.

г) В случае колебаний груза, приложенного к свободному концу балки, другой конец которой заделан, нужно при составлении выражения кинетической энергии системы прибавить к весу груза некоторую часть веса балки, зависящую от отношения $\alpha = \frac{Q}{ql}$ (см. табличку на стр. 370). Имеем

$$T = [Q + qlF(\alpha)] \frac{f^2}{2g}.$$

Для составления выражения потенциальной энергии вспомним формулу (§ 36 стр. 354)

$$\Pi = \frac{1}{2} \frac{\int_0^l M^2 dx}{EI}, \quad (д)$$

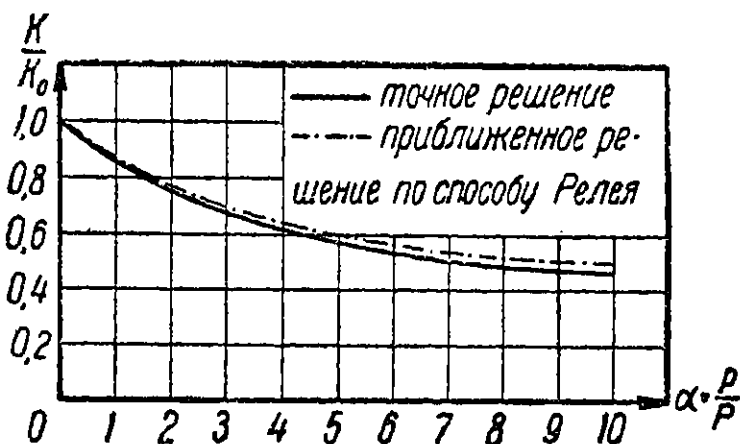


Рис. 210.

где $M = -EIy''$ — изгибающий момент. Воспользовавшись уравнением упругой линии ((д) стр. 370), найдем

$$M = -\frac{EI}{l^2} \frac{12f}{3+8\alpha} (1-\xi)(1+2\alpha-\xi),$$

и подстановка в (д) дает

$$\Pi = \frac{0,225 + 1,125\alpha + 1,5\alpha^2}{(\alpha + 0,375)^2} \frac{EIf^2}{l^3}.$$

α	Отношение $\frac{k}{k_0}$		Ошибка приближен. ф-лы (2) в %
	по формуле (г) $\frac{k}{k_0}$	точное решение	
0.01	1.00	1.00	0.00
0.10	0.952	0.980	0.20
0.30	0.952	0.950	0.21
0.50	0.925	0.920	0.53
0.70	0.901	0.895	0.67
0.90	0.872	0.865	0.81
1.00	0.868	0.860	0.93
2.00	0.775	0.762	1.71
3.00	0.706	0.691	2.17
4.00	0.654	0.635	3.00
5.00	0.612	0.590	3.72
10.00	0.475	0.448	6.00
20.00	0.361	0.340	6.20
100.00	0.171	0.157	8.90
∞	0.000	0.000	—

При разборе случая (а) мы видели, что если прогиб f отсчитывается от положения равновесия, то работа силы веса не входит в уравнение живых сил. Поэтому

$$T + \Pi = h,$$

или

$$(Q + qlF(\alpha)) \frac{f^2}{2g} + \frac{0,225 + 1,125\alpha + 1,5\alpha^2}{(\alpha + 0,375)^2} \frac{EIf^2}{l^3} = h,$$

откуда, как и в предыдущих примерах, найдем:

$$k^2 = \frac{2g(0,225 + 1,125\alpha + 1,5\alpha^2)EI}{[Q + qlF(\alpha)]l^3(\alpha + 0,375)^2}. \quad (e)$$

Чтобы получить более наглядный результат, введем в рассмотрение статический прогиб балки под действием сосредоточенной на конце силы Q и равномерно распределенной нагрузки ql .

Имеем

$$f_{st} = \frac{Ql^3}{3EI} + \frac{ql^4}{8EI} = \frac{(\alpha + 0,375)ql^4}{3EI}, \quad (ж)$$

и подстановка в (е) дает

$$k^2 = \frac{2}{3} \frac{0,225 + 1,125\alpha + 1,5\alpha^2}{[Q + qlF(\alpha)](\alpha + 0,375)} ql \frac{g}{f_{st}}$$

и следовательно

$$k = \Phi(\alpha) \sqrt{\frac{g}{f_{st}}} \quad (з)$$

где принято обозначение:

$$\Phi(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{0,225 + 1,125\alpha + 1,5\alpha^2}{[\alpha + F(\alpha)](\alpha + 0,375)}}.$$

При $\alpha = \infty$, т. е. когда можно пренебречь весом балки по сравнению с Q , имеем $\Phi(\alpha) = 1$, и мы получаем известную уже формулу

$k = \sqrt{\frac{g}{f_{st}}}$. В другом предельном случае $\alpha = 0$, т. е. когда сосредоточенная нагрузка отсутствует, имеем

$$\Phi(0) = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{0,225}{0,256 \cdot 0,375}} = 1,250, \quad k = 1,250 \sqrt{\frac{g}{f_{st}}}.$$

Этот результат, полученный по методу Релея, если ограничиться тремя знаками после запятой, не отличается от точного решения.

Приводим табличку значений $\Phi(\alpha)$ для ряда значений переменного α (см. график рис. 211):

α	$\Phi(\alpha) = k \sqrt{\frac{f_{st}}{g}}$
0	1,250
0,5	1,090
1,0	1,055
5,0	1,025
10,0	1,007
∞	1,000

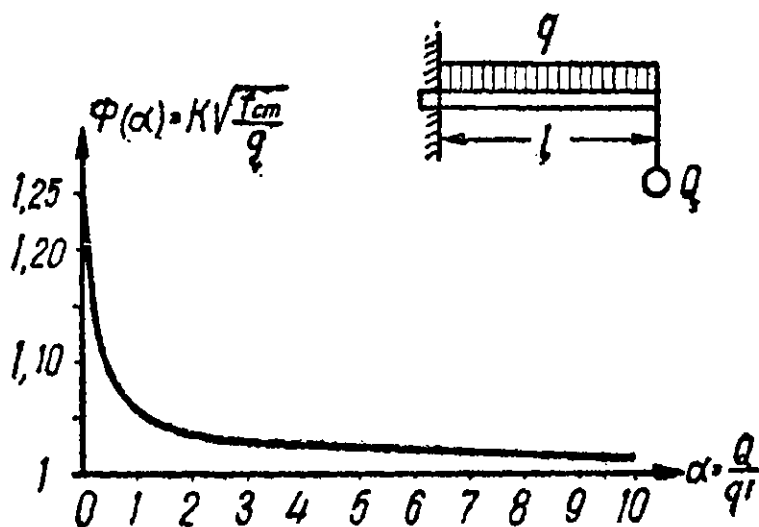


Рис. 211.

Если нагрузка Q значительно превосходит собственный вес балки ql , т. е. $\alpha \gg 1$, то для определения частоты k пользуются упрощенной формулой, прибавляя при вычислении кинетической энергии к весу груза $\frac{33}{140} = 0,236$ веса балки и принимая во внимание

вание при определении статического прогиба $f_{st}^{(1)}$ только действие груза Q :

$$k = \sqrt{\frac{cg}{Q + 0,236ql}} = \sqrt{\frac{g}{f_{st}^{(1)} \left(1 + \frac{0,236}{\alpha}\right)}}, \quad f_{st}^{(1)} = \frac{Q}{c} = \frac{Ql^3}{3EI} \quad (\text{и})$$

Например, при $\alpha = 5$ получим по этой упрощенной формуле $k = 0,975 \sqrt{\frac{g}{f_{st}^{(1)}}}$; замечая, что (см. (ж))

$$f_{st} = f_{st}^{(1)} + \frac{ql^4}{8EI} = f_{st}^{(1)} \left(1 + \frac{0,375}{\alpha}\right),$$

получим $k = 0,975 \sqrt{\frac{g}{f_{st}} \left(1 + \frac{0,375}{\alpha}\right)} = 1,01 \sqrt{\frac{g}{f_{st}}}$ в то время, как согласно ф-ле (з) и таблице $k = 1,025 \sqrt{\frac{g}{f_{st}}}$, т. е. совпадение вполне достаточное для практических целей.

д) Для балки на двух опорах с сосредоточенной нагрузкой посередине, частоту свободных колебаний, на основании пункта (б) примера 3 § 38, определяют по формуле, аналогичной (и), прибавляя к весу сосредоточенного груза $\frac{17}{35} = 0,485$ равномерно распределенной нагрузки. Получаем

$$k = \sqrt{\frac{cg}{Q + 0,485ql}} = \sqrt{\frac{g}{f_{st}}}, \quad (\text{к})$$

причем вычисление статического прогиба f_{st} делается в предположении сосредоточенной силы $Q + 0,485ql$, приложенной в середине балки:

$$f_{st} = (Q + 0,485ql) \frac{l^3}{48EI}$$

При $Q = 0$ лучше вместо $0,485ql$ взять $0,489ql$ (стр. 372).

Получим по ф-ле (к)

$$k = \sqrt{\frac{Elg}{ql^4} \cdot \frac{48}{0,489}} = 9,89 \sqrt{\frac{Elg}{ql^4}},$$

в то время как точное решение дает $k = \pi^2 \sqrt{\frac{Elg}{ql^4}} = 9,87 \sqrt{\frac{Elg}{ql^4}}$, совпадение приближенного решения с точным очень хорошее.

е) Обратимся теперь к определению по способу Релея частоты свободных колебаний конического стержня, основание которого заделано, а конец свободен. В примере 3 (пункт г) § 38 мы нашли для этого случая

$$T = \frac{Q}{35} \frac{f^2}{2g}.$$

Обращаясь к вычислению потенциальной энергии, имеем по формуле (д) (см. также ф-лу (э) на стр. 373):

$$\Pi = \int_0^h \frac{M_x^2 dx}{2EI} = \int_0^h \frac{S_0^2 (h-x)^8 \gamma^2 h^4 dx}{144 h^4 2EI_0 (h-x)^4} = \frac{S_0^2 \gamma^2 h^5}{1440 EI_0}.$$

Замечая, что вес конуса

$$Q = \frac{\gamma S_0 h}{3}$$

и вводя в рассмотрение прогиб $f = \frac{Qh^3}{8EI_0}$, получим

$$\Pi = \frac{2}{5} \frac{EI_0}{h^2} f^2,$$

и уравнение

$$T + \Pi = h$$

дает, как и в предыдущих примерах:

$$k^2 = 28 \frac{EI_0 g}{Qh^3},$$

$$k = 5,29 \sqrt{\frac{EI_0 g}{Qh^3}} = \frac{9,15}{h^2} \sqrt{\frac{EI_0 g}{\gamma S_0}},$$

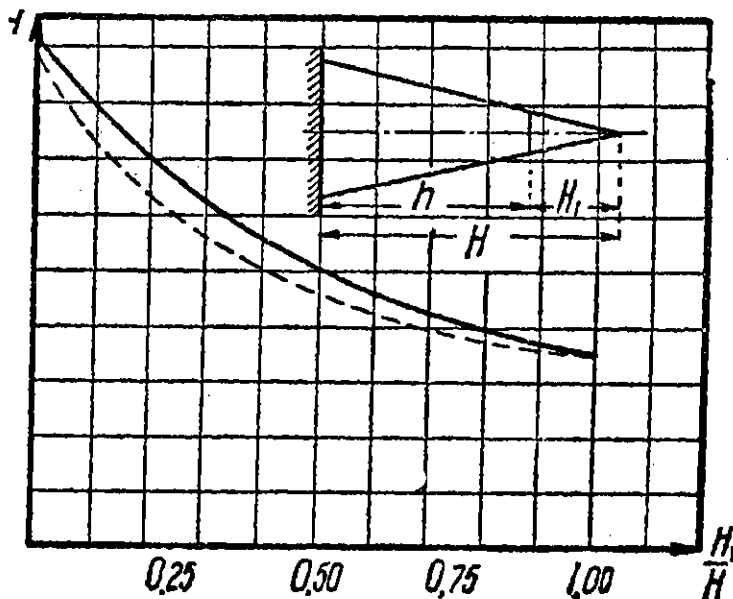


Рис. 212.

в то время как точное решение по Кирхгофу будет

$$k = \frac{8,72}{h^2} \sqrt{\frac{EI_0 g}{\gamma S_0}},$$

т. е. ошибка приближенного решения составляет около 40%. После сказанного не представляет принципиальных затруднений вычисление частот в практически более интересном случае усеченного конуса. Не приводя выкладок, довольно громоздких, но не представляющих ничего нового в смысле метода, отметим, что в этом случае результат имеет вид:

$$k = \frac{A}{h^2} \sqrt{\frac{EI_0 g}{\gamma S_0}},$$

где постоянная A зависит от отношения $\frac{H_1}{H}$; при $\frac{H_1}{H} = 1$ имеем случай цилиндра, который выше уже нами рассмотрен (пункт г); при $\frac{H_1}{H} = 0$ имеем только что разобранный случай конуса. График зависимости A от $\frac{H_1}{H}$ дан на рис. 212; на том же рисунке прерывной линией приведены результаты точного решения (весьма

сложного), данного Мопопобе. ¹⁾ Из статьи Мопопобе заимствуем результаты нескольких опытных определений частот свободных колебаний фабричных труб и сопоставление этих результатов с данными расчета.

Сооружение	Материал	Высота h в м	$\sqrt{\frac{\gamma}{Eg}} \frac{\text{сек}}{\text{м}}$	Диаметр		$\frac{H_1}{H} = \frac{D_1}{D}$	$\sqrt{\frac{I_0}{S_0}} \text{ м}$	T в сек.	
				$\frac{D}{\text{основание}}$	$\frac{D_1}{\text{вершина}}$			$\frac{\text{вычи-}}{\text{слен.}}$	$\frac{\text{по}}{\text{опыту}}$
Труба университета в Киото . . .	Кирпич	7,6	$1 \cdot 10^{-3}$	0,545	0,410	0,750	0,282	0,34	0,36
То же, в Токио		15,5	$1 \cdot 10^{-3}$	0,850	0,460	0,540	0,345	1,01	1,01
То же, в Токио		30,5	$3,6 \cdot 10^{-4}$	1,89	1,85	0,985	0,675	0,81	0,85
Фабричная труба горнопромышлен. о-ва „Кухара“ .	Железобетон	168	$3,3 \cdot 10^{-4}$	12,15	8,12	0,670	4,35	2,65	2,53

ж) В качестве последнего примера рассмотрим колебания груза на балочке в условиях примера 4 § 40, причем будем считать вес Q_2 груза значительно превосходящим вес балки Q_1

По ф-ле (а) стр. 382 имеем

$$T = Q_2 \left\{ \left(1 + \frac{3}{2} \frac{d}{l} \right)^2 + \frac{9}{4} \frac{\rho^2}{l^2} \right\} \frac{f^2}{2g},$$

причем членом, учитывающим кинетическую энергию балочки, мы пренебрегли. Для потенциальной энергии имеем выражение:

$$\Pi = \frac{1}{2} c f^2 + \Pi_0, \quad c = \frac{3EI}{l^3},$$

и применение теоремы живых сил, как и в предыдущих случаях, дает

$$k = \sqrt{\frac{3EIg}{Q_2 l^3 \left\{ \left(1 + \frac{3d}{2l} \right)^2 + \frac{9}{4} \frac{\rho^2}{l^2} \right\}}}$$

То обстоятельство, что в этой формуле содержится большое число параметров, имеет большое значение для приложений: меняя эти параметры, мы получаем возможность изменять в широких пределах частоту, что весьма важно при конструировании разного рода приборов для измерения вибраций.

¹⁾ Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 1, S. 444; 1921.

Возьмем численный пример:

$$\begin{aligned} Q_2 &= 0,5 \text{ кг}, & p &= 2,71 \text{ см}, & l &= 4 \text{ см}, \\ Q_1 &= 0,0085 \text{ кг}, & d &= 20,8 \text{ см}, & a &= 1,92 \text{ см}. \\ E &= 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2, & I &= \frac{2}{3} ab^3, & b &= 0,07 \text{ см}. \end{aligned}$$

Находим

$$k = 28,7 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Точное решение задачи дает Gassman ¹⁾ и получает в этом примере

$$k = 28,3 \frac{1}{\text{сек}}.$$

6. Динамические напряжения в подъемных канатах при внезапной остановке. Груз Q опускается на канате (рис. 213а) с постоянной скоростью v_0 . Определим, какие напряжения возникнут в канате, если верхний конец его будет внезапно задержан.

Точное решение этой задачи, в котором принимаются в расчет масса каната и его колебания, весьма сложно. Учащийся, желающий ознакомиться с ним, может обратиться к труду проф. Локшина „Динамические напряжения в подъемных канатах“ (Горный журнал 1929 г., № 12), в котором эта тема разработана исчерпывающим образом.

Приближенное решение может быть дано весьма просто. Для этого достаточно заметить, что последствием внезапной остановки груза будет возникновение колебаний его на канате, частота которых определится известной формулой (стр. 60) (масса каната пока не принята в расчет)

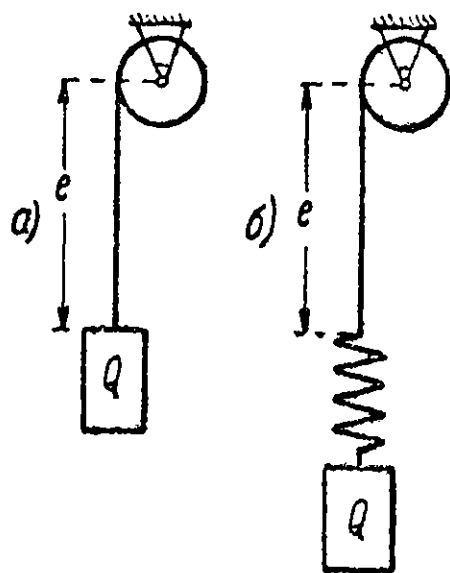


Рис. 213.

$$k = \sqrt{\frac{g}{f_{st}}}, \quad (a)$$

где f_{st} статическое удлинение конца каната; по известной формуле

$$f_{st} = \frac{Ql}{EF}, \quad (б)$$

где l —длина каната в момент остановки, E —модуль Юнга, F —поперечное сечение каната. Уравнение движения груза на канате дается формулой:

$$x = a \sin (kt + \alpha),$$

где x —абсцисса, отсчитываемая от положения равновесия груза (при движении с постоянной скоростью); для определения постоян-

¹⁾ Ingenieur-Archiv, Bd. 2, p. 222, 1931.

ных a и α заметим, что при $t=0$, т. е. в момент остановки, $x=0$, $\dot{x}=v_0$. Получаем

$$x = \frac{v_0}{k} \sin kt, \quad (в)$$

и, следовательно, максимальное удлинение каната (динамическое удлинение f_d) будет:

$$f_d = x_{\max} = \frac{v_0}{k}, \quad (г)$$

или, пользуясь (а) и (б):

$$f_d = v_0 \sqrt{\frac{Ql}{EFg}}. \quad (д)$$

К этому же результату можно легко прийти, исходя из теоремы живых сил.

Рассмотрим два положения: начальное — в момент остановки верхнего конца каната и конечное — в момент остановки груза. В начальном положении кинетическая энергия системы, если пренебречь массой каната, будет

$$T_0 = \frac{Qv_0^2}{2g}. \quad (е)$$

Потенциальная энергия в этом положении определится формулой:

$$\Pi_0 = \frac{cf_{st}^2}{2},$$

где $c = \frac{EF}{l}$ — жесткость каната.

В конечном положении соответственно имеем

$$T=0, \quad \Pi = \frac{c(f_d + f_{st})^2}{2},$$

и теорема об изменении кинетической энергии:

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi + Qf_d,$$

в которой последний член представляет работу веса груза, дает

$$-\frac{Qv_0^2}{2g} = c \frac{f_{st}^2}{2} - c \frac{(f_{st} + f_d)^2}{2} + Qf_d$$

или

$$\frac{Qv_0^2}{2g} = \frac{cf_d^2}{2},$$

так как остальные члены пропадают ($Q = cf_{st}$). Мы получаем таким образом снова ур-ние (е).

Возвращаясь к нему, подсчитаем дополнительное (к первоначальному статическому) напряжение в канате от динамического удлинения. По известной формуле сопротивления материалов имеем

$$\sigma_d = \frac{Ef_d}{l} = v_0 \sqrt{\frac{Q}{g} \cdot \frac{E}{lF}}, \quad (ж)$$

откуда следует, что особенно опасной является внезапная задержка верхнего конца каната при малом l , т. е. в начальный период движения груза; но при малом l масса каната будет не велика и наше приближенное решение оказывается достаточно удовлетворительным для целей практики. Если же все-таки массу каната нужно принять в расчет, то хорошее приближение можно получить, внося соответствующую поправку в выражение (а) для частоты свободных колебаний k ; согласно пункту б) последнего примера дело сводится к прибавлению при подсчете f_{st} по ф-ле (б) к весу груза одной трети веса каната. Получим:

$$f_{st} = \frac{\left(Q + \frac{ql}{3}\right)l}{EF} \quad (б')$$

$$f_d = v_0 \sqrt{\frac{\left(Q + \frac{ql}{3}\right)l}{EFg}} \quad (д')$$

$$\sigma_d = v_0 \sqrt{\frac{\left(Q + \frac{ql}{3}\right)E}{lFg}}; \quad (ж'),$$

где ql — вес каната. Те же результаты, конечно, можно получить, если в выражение для начального запаса кинетической энергии внести поправку на массу каната, т. е. принять вместо (е)

$$T_0 = \frac{Q + \frac{ql}{3}}{2g} v_0^2.$$

Приведем численный пример:

$$F = 15 \text{ см}^2, E = 2 \cdot 10^8 \text{ кг/см}^2, Q = 4 \text{ т}, l = 20 \text{ м}, v_0 = 1 \text{ м/сек.}$$

Получаем по ф-ле (ж)

$$\sigma_d \approx 1650 \text{ кг/см}^2,$$

в то время как статическое напряжение составляет только $\frac{Q}{F} = 267 \text{ кг/см}^2$. Если вес погонного метра каната принять равным 12 кг/м , то по ф-ле (ж') найдем

$$\sigma_d = 1660 \text{ кг/см}^2,$$

что мало отличается от предыдущего результата.

Динамические напряжения, которые могут возникнуть в канате при внезапном торможении его верхнего конца, можно значительно уменьшить, если поместить между грузом и канатом пружину (рис. 213б). При остановке пружина смягчит удар, приняв на себя значительную часть динамического удлинения. При наличии пружины имеем вместо (б):

$$f_{st} = \frac{Q}{c_n} + \frac{Ql}{EF},$$

где первое слагаемое представляет удлинение пружины, c_n — ее жесткость. По ф-ле (а) получим

$$k = \sqrt{\frac{g}{Q \left(\frac{1}{c_n} + \frac{l}{EF} \right)}}$$

и ф-ла (г) дает

$$f_d = v_0 \sqrt{\frac{Q \left(\frac{1}{c_n} + \frac{l}{EF} \right)}{g}}. \quad (3)$$

Полученное полное динамическое удлинение может быть представлено как сумма удлинений каната и пружины:

$$f_d = f_d^{(k)} + f_d^{(n)},$$

причем очевидно, что отношение

$$\frac{f_d^{(k)}}{f_d^{(n)}}$$

равно обратному отношению жесткостей:

$$\frac{f_d^{(k)}}{f_d^{(n)}} = \frac{c_n l}{EF}.$$

Из двух последних формул получаем:

$$f_d^{(k)} = f_d \frac{c_n}{c_n + \frac{EF}{l}}, \quad f_d^{(n)} = f_d \frac{\frac{EF}{l}}{c_n + \frac{EF}{l}},$$

и подстановка в (3) дает:

$$f_d^{(k)} = v_0 \sqrt{\frac{Q}{g} \frac{l}{EF \left(1 + \frac{EF}{lc_n} \right)}}$$

$$f_d^{(n)} = v_0 \sqrt{\frac{Q}{g} \frac{c_n}{1 + \frac{lc_n}{EF}}}$$

Напряжение в канате определится по формуле:

$$\sigma_d^{(k)} = \frac{E f_d^{(k)}}{l} = v_0 \sqrt{\frac{Q}{g} \frac{E}{lF \left(1 + \frac{EF}{lc_n} \right)}},$$

т. е. уменьшится по сравнению с выше разобранным случаем (при отсутствии пружины) в

$$\sqrt{1 + \frac{EF}{lc_n}}$$

раз. Пусть, например, $c_n = 500 \text{ кг/см}$. Получим

$$\sqrt{1 + \frac{EF}{lc_n}} = 5,55$$

и, следовательно:

$$\sigma_a^{(K)} = \frac{1650}{5,55} = 296 \text{ кг/см}^2.$$

7. Теорема Бернулли. Приложенная к случаю движения жидкости теорема об изменении кинетической энергии приводит к основному предложению гидравлики—теореме Бернулли.

Выделим в массе жидкости отдельную струйку (рис. 214), проведя через какой-либо бесконечно-малый контур линии тока, и обрежем эту струйку двумя перпендикулярными к линии тока сечениями A и B .

За момент времени dt масса жидкости AB перейдет в новое положение $A'B'$, причем количество жидкости, заключенное в каждом из заштрихованных элементов, будет равно mdt , где m —масса жидкости, проходящая через поперечное сечение струйки в единицу времени. Изменение кинетической энергии выделенной массы жидкости будет равно работе сил веса и гидродинамического давления; работой сил внутреннего трения мы пренебрегаем, считая жидкость идеальной (лишенной трения).

В момент времени t выделенная масса жидкости, занимая объем AB , имеет кинетическую энергию T_1 , которую можно представить состоящей из двух слагаемых: кинетической энергии T_1' , жидкости в объеме AA' и кинетической энергии T_1'' жидкости, занимающей остальную часть $A'B$ объема струйки; называя через v_1 скорость в сечении A , имеем:

$$T_1' = mdt \frac{v_1^2}{2}$$

и, следовательно:

$$T_1 = mdt \frac{v_1^2}{2} + T_1''. \tag{a}$$

Аналогично этому в момент времени $t + dt$ получим

$$T_2 = mdt \frac{v_2^2}{2} + T_2'',$$

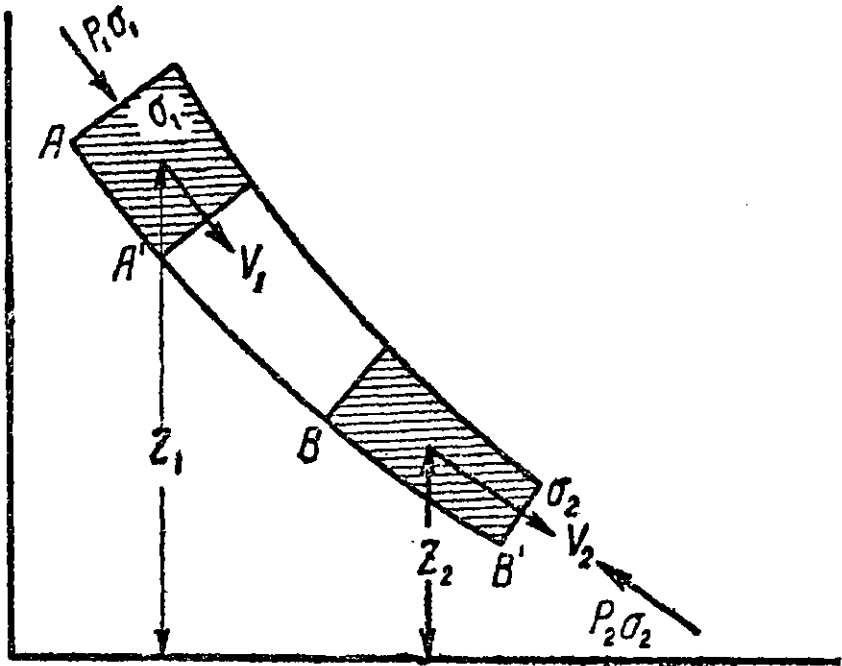


Рис. 214.

где T_2'' — кинетическая энергия жидкости в том же объеме $A'B$ в момент $t + dt$, v_2 — скорость в сечении B . Считая движение жидкости установившимся, т. е. принимая, что скорость, меняясь от сечения к сечению, остается в данном месте постоянной (не изменяется во времени), имеем

$$T_1'' = T_2''$$

и, следовательно:

$$T_2 - T_1 = mdt \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right). \quad (6)$$

Напишем теперь сумму работ сил гидродинамического давления и силы веса, действующих на выделенную часть струйки за время dt .

а) Работа гидродинамического давления. Пусть p_1 и p_2 — давления в сечениях A и B , σ_1 и σ_2 — соответствующие площади сечения струи. Тогда силы давления на площадки A и B соответственно будут $p_1\sigma_1$ и $p_2\sigma_2$. Сила $p_1\sigma_1$ направлена по движению жидкости, а $p_2\sigma_2$ против него; следовательно работы этих сил будут

$$p_1\sigma_1 v_1 dt, - p_2\sigma_2 v_2 dt,$$

так как $v_1 dt$ и $v_2 dt$ — пути, пройденные сечениями A и B за время dt . Работа сил гидродинамического давления, действующих на боковые поверхности, равна нулю, так как эти силы направлены нормально к перемещениям жидкости. Искомая работа таким образом равна

$$p_1\sigma_1 v_1 dt - p_2\sigma_2 v_2 dt;$$

замечая, что $\sigma_1 v_1 = \sigma_2 v_2$ есть не что иное, как объем жидкости, проходящей в единицу времени через сечение струйки, имеем

$$\sigma_1 v_1 \frac{\gamma}{g} = \sigma_2 v_2 \frac{\gamma}{g} = m,$$

где γ — вес единицы объема жидкости; выражение для работы сил гидродинамического давления примет вид:

$$\left(p_1 - p_2 \right) \frac{mg}{\gamma} dt. \quad (6)$$

б) Работа силы веса. Для определения ее составим разность потенциальных энергий сил веса в моменты времени t и $t + dt$. Потенциальная энергия Π_1 веса массы жидкости, занимающей в момент t объем AB , может быть представлена как сумма потенциальных энергий Π_1' веса объема AA' и потенциальной энергии Π_1'' веса объема $A'B$. Получаем

$$\Pi_1 = mdt gz_1 + \Pi_1''$$

и аналогично для объема $A'B'$ в момент $t + dt$:

$$\Pi_2 = mdt gz_2 + \Pi_2'',$$

где Π_2'' — потенциальная энергия веса объема $A'B$ — есть очевидно не что иное, как Π_1'' . Получаем:

$$\Pi_1 - \Pi_2 = mgdt (z_1 - z_2).$$

Подставляя теперь полученные выражения в уравнение, выражающее теорему об изменении кинетической энергии, получим

$$mdt \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right) = (p_1 - p_2) \frac{mg}{\gamma} dt + mgdt (z_1 - z_2),$$

или после преобразования

$$z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} = z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g},$$

т. е.

$$z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} = H = \text{const.} \quad (12)$$

Три члена правой части имеют размерность длины. Член z называется высотой относительно горизонта, или ивевирной высотой, член $\frac{p}{\gamma}$ — пьезометрической высотой, член $\frac{v^2}{2g}$ — скоростью высотой.

Пьезометрическая высота определяется при помощи пьезометра, т. е. открытой с обоих концов трубки, прикрепленной одним концом к стенке сосуда, в котором течет жидкость. Поверхность, на которой лежат точки c_1 , c_2 и т. д. — концы отрезков, представляющих суммы трех высот, согласно теореме Бернулли является горизонтальной плоскостью (рис. 215). Это объясняется тем, что при выводе теоремы Бернулли мы не принимаем в расчет потерь энергии, а величины $\frac{v^2}{2g}$, $\frac{p}{\gamma}$ и z суть не что иное, как составные части полной механической энергии H единицы веса жидкости, которая остается при отсутствии потерь постоянной.

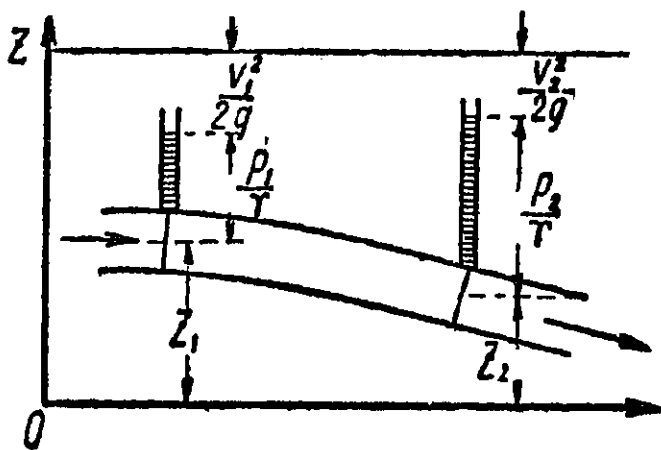


Рис. 215.

Мы уже говорили, что теорема Бернулли является основой всех гидравлических расчетов. Поэтому мы здесь можем ограничиться только несколькими иллюстрациями, отнюдь не имея возможности исчерпать всего многообразия ее приложений.

Мы уже говорили, что теорема Бернулли является основой всех гидравлических расчетов. Поэтому мы здесь можем ограничиться только несколькими иллюстрациями, отнюдь не имея возможности исчерпать всего многообразия ее приложений.

а) Реакция вытекающей жидкости на стенки сосуда. Эта задача, разобранный уже при помощи теоремы количества движения, может быть также решена применением теоремы Бернулли.

Воспользуемся для этого следующим приемом: придадим сосуду равномерное и прямолинейное движение в направлении горизонтальной оси X со скоростью u и составим уравнение Бернулли, во-первых, в неподвижной системе координат (т. е. связанной с землей), во-вторых, в подвижной системе, связанной с движущимся сосудом (рис. 216).

1°. Скорости жидкости во входном и выходном сечениях относительно земли обозначим соответственно через c_1 и c_2 и применим

тот же метод, которым мы пользовались при доказательстве теоремы Бернулли. Кинетическая энергия T_1 массы жидкости, занимающей в момент времени t объем сосуда, может быть представлена как сумма

$$T_1 = mdt \frac{c_1^2}{2} + T_1'', \quad (a)$$

где m — секундная масса жидкости, проходящая через сечение сосуда (см. рис. 216):

$$m = \frac{\gamma}{g} v_1 \sigma_1 = \frac{\gamma}{g} v_2 \sigma_2, \quad (б)$$

(причем v_1 и v_2 — скорости относительно сосуда во входном и выходном сечениях его), T_1'' — кинетическая энергия объема A_1B .

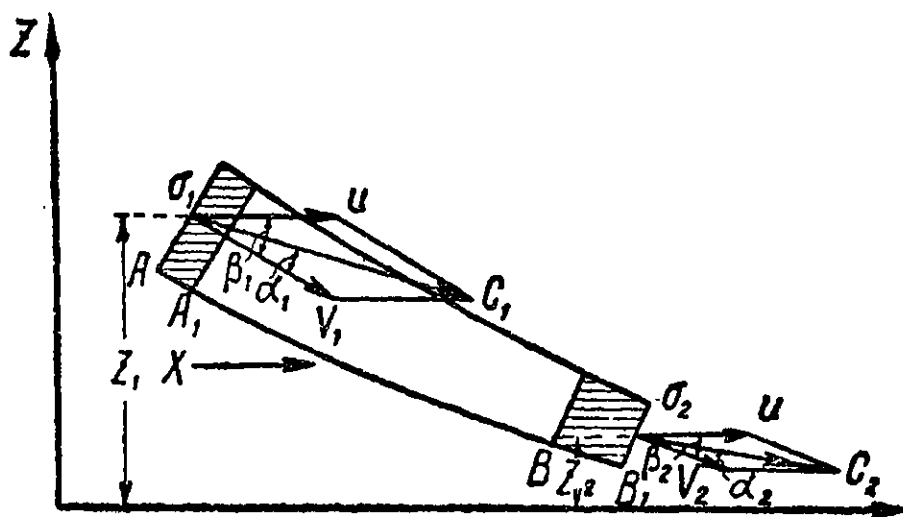


Рис. 216.

В момент времени $t + dt$ получим

$$T_2 = mdt \frac{c_2^2}{2} + T_2'', \quad (в)$$

причем $T_2'' = T_1''$. Из (a) и (в) находим

$$T_2 - T_1 = mdt \left(\frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} \right).$$

Работа сил гидродинамического давления $p_1 \sigma_1$ и $p_2 \sigma_2$ представляется выражениями

$$p_1 \sigma_1 c_1 dt \cos \alpha_1 \text{ и } -p_2 \sigma_2 c_2 \cos \alpha_2, \quad (г)$$

ибо $c_1 dt$ и $c_2 dt$ перемещения в сечениях A и B , α_1 и α_2 — соответствующие углы.

Для работы силы веса получим, как и выше:

$$(z_1 - z_2) mgdt,$$

так как перемещение сосуда принято горизонтальным.

При составлении уравнения живых сил, кроме работы этих сил, надо иметь еще в виду работу реакции X стенок сосуда на выделенный объем жидкости при перемещении этого объема udt .

Получаем

$$mdt \left(\frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} \right) = p_1 \sigma_1 \cos \alpha_1 dt - p_2 \sigma_2 \cos \alpha_2 dt + (z_1 - z_2) mg dt + Xu dt$$

или, воспользовавшись ф-лой (б):

$$\frac{c_2^2}{2g} - \frac{c_1^2}{2g} = \frac{p_1 \sigma_1 c_1 \cos \alpha_1}{\gamma \sigma_1 v_1} - \frac{p_2 \sigma_2 c_2 \cos \alpha_2}{\gamma \sigma_2 v_2} + z_1 - z_2 + \frac{Xu}{Q},$$

где $Q = mg$ — вес жидкости, протекающей через поперечное сечение сосуда в единицу времени. Замечая, что согласно рис. 216

$$\begin{aligned} c_1 \cos \alpha_1 &= v_1 + u \cos \beta_1 \\ c_2 \cos \alpha_2 &= v_2 + u \cos \beta_2 \\ c_1^2 &= v_1^2 + u^2 + 2uv_1 \cos \beta_1, \\ c_2^2 &= v_2^2 + u^2 + 2uv_2 \cos \beta_2. \end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned} \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + u \frac{v_2 \cos \beta_2 - v_1 \cos \beta_1}{g} &= \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + z_1 - z_2 + \\ &+ \frac{u}{\gamma} \left(\frac{p_1 \cos \beta_1}{v_1} - \frac{p_2 \cos \beta_2}{v_2} \right) + \frac{Xu}{Q} \end{aligned} \quad (д)$$

или, замечая, что $\sigma_1 v_1 \gamma = \sigma_2 v_2 \gamma = Q$:

$$\begin{aligned} \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g} + u \frac{v_2 \cos \beta_2 - v_1 \cos \beta_1}{g} &= \frac{p_1 - p_2}{\gamma} + (z_1 - z_2) + \\ &+ \frac{u}{Q} (p_1 \sigma_1 \cos \beta_1 - p_2 \sigma_2 \cos \beta_2) + \frac{Xu}{Q}. \end{aligned} \quad (е)$$

2°. Уравнение Бернулли в системе координат, связанной с движущимся равномерно и прямолинейно сосудом, имеет очевидно ту же форму, что и для неподвижного сосуда, так как все механические явления протекают одинаковым образом в системах координат, равномерно и прямолинейно движущихся друг относительно друга. Иными словами

$$\frac{v_2^2}{2g} + z_2 + \frac{p_2}{\gamma} = \frac{v_1^2}{2g} + z_1 + \frac{p_1}{\gamma}. \quad (ж)$$

Пользуясь уравнением (ж), мы можем теперь вычеркнуть в ур-нии (е) все члены, не содержащие u . Сокращая оставшиеся члены на u , получим тогда

$$X = \frac{Q}{g} (v_2 \cos \beta_2 - v_1 \cos \beta_1) + (p_2 \sigma_2 \cos \beta_2 - p_1 \sigma_1 \cos \beta_1). \quad (з)$$

Замечая, что

$$v_2 \cos \beta_2 - v_1 \cos \beta_1 = c_2 \cos \alpha_2 - c_1 \cos \alpha_1,$$

можем переписать уравнение (з) в виде:

$$X = \frac{Q}{g} (c_2 \cos \alpha_2 - c_1 \cos \alpha_1) + (p_2 \sigma_2 \cos \beta_2 - p_1 \sigma_1 \cos \beta_1). \quad (и)$$

Проекция на ось X реакции жидкости на стенку сосуда будет, очевидно, иметь ту же величину и противоположный знак. Полученные формулы не содержат скорости u ; и, следовательно, их можно применять при любом u , т. е. не только к случаю неподвижного, но и движущегося равномерно и прямолинейно сосуда — в силу сказанного выше этого и надо было ожидать. Приложения этих формул к частным случаям даны в третьем задании (§ 12 стр. 111, теорема Эйлера).

б) Теорема Торичелли. Применим теорему Бернулли к вопросу об истечении жидкости из сосуда через отверстие, сделанное на дне сосуда (рис. 217). При этом будем предполагать, что уровень жидкости остается постоянным, что достигается питанием сосуда из вспомогательного резервуара. При этом, как показывает наблюдение, движение жидкости будет установившимся

и можно воспользоваться теоремой Бернулли.

Свободную поверхность жидкости примем за плоскость XU и направим ось Z вертикально вниз. Вдоль любой жидкой струйки имеем

$$\frac{1}{2} \frac{v^2}{g} - z + \frac{p}{\gamma} = H$$

(знак при z взят противоположный тому, который мы получили при выводе теоремы Бернулли, так как теперь ось Z направлена вниз).

Для определения постоянной H достаточно знать значения v , z и p в какой-либо точке струйки. Но на свободной поверхности

$$z = 0, \quad p = p_a,$$

где p_a — атмосферное давление; скоростью v_0 на свободной поверхности можно пренебречь, если площадь последней весьма велика по сравнению с размерами отверстия; итак, на свободной поверхности имеем

$$v_0 = 0,$$

и, следовательно,

$$H = \frac{p_a}{\gamma}, \quad v^2 = 2gz + \frac{p_a - p}{\rho},$$

где $\rho = \frac{\gamma}{g}$ — масса единицы объема жидкости. Эта формула определяет скорость в любой точке струйки. Чтобы получить теперь скорость в выходном отверстии, необходимо знать, какое давление p там имеет место. Так как истечение происходит в атмосферу, то можно принять $p = p_a$.

Мы получаем, написав h вместо z ,

$$v_2 = 2gh, \quad v = \sqrt{2gh}, \quad (a)$$

что выражает теорему Торичелли: скорость истечения идеаль-

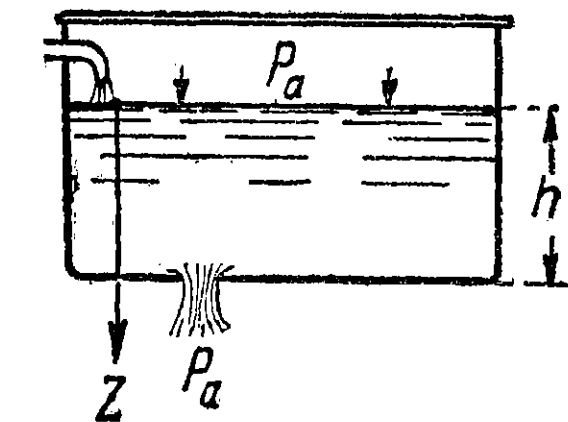


Рис. 217.

ной жидкости равна скорости, которую приобретает тяжелая материальная точка, падающая в пустоте с высоты h .

Зная скорость и размеры отверстия, можно вычислить расход жидкости. Опыт показывает, однако, что вычисленный таким образом расход будет чересчур велик, так как явление истечения сопровождается *сжатием* струи, и действительная площадь, через которую происходит истечение, будет меньше площади отверстия. С другой стороны, давление *внутри* струи несколько больше атмосферного (последнее имеет место на поверхности струи). Поэтому, если отверстие площади σ сделано на дне сосуда, то расход Q жидкости через него (объем, протекающий в единицу времени) определится формулой:

$$Q = \mu \sigma \sqrt{2gh}, \quad (6)$$

где так называемый коэффициент расхода μ определяется опытным путем (при „совершенном сжатии“ $\mu = 0,62$ для отверстия произвольной формы с острыми краями).

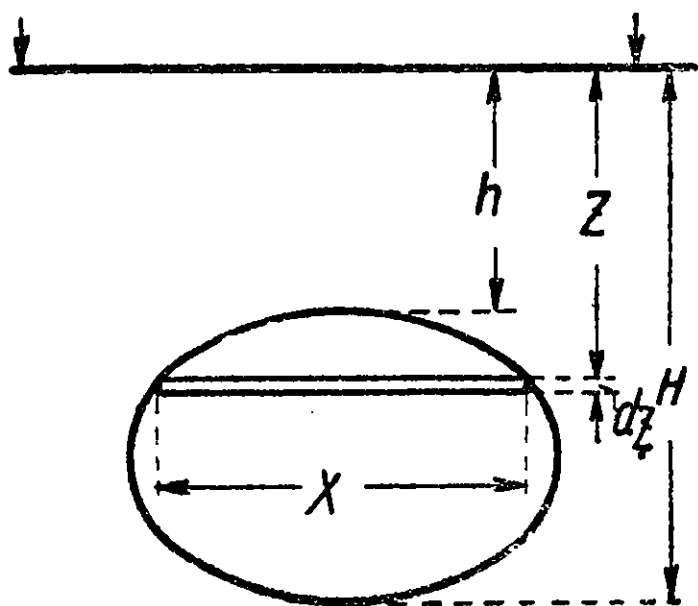


Рис. 218.

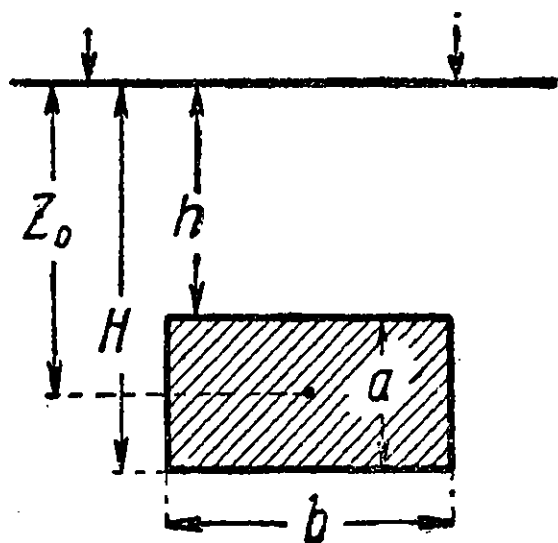


Рис. 219.

Формула Торичелли применяется также в том случае, когда отверстие находится в вертикальной боковой стенке (рис. 218); через узкую горизонтальную полосу с площадью $df = xdz$ будем согласно (6) иметь расход

$$dQ = \mu \sqrt{2g} x \sqrt{z} dz,$$

где z —расстояние элемента до свободной поверхности. Общий расход жидкости выразится формулой

$$Q = \mu \sqrt{2g} \int_h^H x \sqrt{z} dz. \quad (в)$$

Например, для прямоугольника (рис. 219) $x = b$ и формула (в) дает

$$Q = \mu \sqrt{2g} b \int_h^H \sqrt{z} dz = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left[H^{\frac{3}{2}} - h^{\frac{3}{2}} \right],$$

или, замечая, что

$$H = z_0 + \frac{a}{2}, \quad h = z_0 - \frac{a}{2},$$

где z_0 — глубина погружения центра тяжести, получим

$$Q = \frac{2}{3} \mu b \sqrt{2g} \left\{ z_0^{3/2} \left(1 + \frac{a}{2z_0} \right)^{3/2} - z_0^{3/2} \left(1 - \frac{a}{2z_0} \right)^{3/2} \right\},$$

что при z_0 значительно большем a дает

$$Q = \mu_1 ab \sqrt{2gz_0},$$

где

$$\mu_1 = \mu \left[1 - \frac{1}{96} \left(\frac{a}{z_0} \right)^2 + \dots \right].$$

Для круглого отверстия, радиус которого r значительно меньше глубины погружения z_0 центра тяжести, получим:

$$Q = \mu_1 \pi r^2 \sqrt{2gz_0}, \quad \text{где } \mu_1 = \mu \left\{ 1 - \frac{1}{32} \left(\frac{r}{z_0} \right)^2 + \dots \right\}.$$

§ 43. Закон сохранения механической энергии. Приток и рассеяние механической энергии. Связь с общим законом сохранения энергии.

По теореме об изменении кинетической энергии приращение кинетической энергии системы при переходе из одного положения в другое равно полной работе всех приложенных сил на рассматриваемом участке движения. С другой стороны, если все силы зависят только от взаимного расположения точек системы (внутренние силы) и общего положения системы в поле некоторых внешних сил, то работа сил на данном участке определяется падением потенциала (потенциальной энергии) при переходе из начального положения в конечное. Соединяя эти два результата вместе, будем иметь следующее основное равенство:

$$T_2 - T_1 = P_1 - P_2, \quad (13)$$

где значки отмечают начальное и конечное положения системы.

Из равенства (13) сразу следует:

$$\boxed{T_1 + P_1 = T_2 + P_2}, \quad (14)$$

т. е. при движении в потенциальных силовых полях сумма кинетической и потенциальной энергии системы сохраняет постоянную величину. Сумму кинетической и потенциальной энергии системы называют полной механической энергией системы. Мы будем обозначать полную механическую энергию буквой $\mathcal{E}$, так что

$$\boxed{\mathcal{E} = T + P} \quad (15)$$

При этом равенство (14) переписывается так:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2,$$

т. е. вообще

$$\mathcal{E} = \text{const}$$

(16)

Мы пришли к закону сохранения механической энергии: если система движется при наличии только сил, имеющих потенциал, то полная механическая энергия системы во все время движения сохраняет свою величину.

Значение постоянной в равенстве (16) определяется заданием координат и скоростей, т. е. заданием простейших кинематических элементов системы, в каком-нибудь промежуточном положении системы, в частности, если это возможно, в начале движения. Помещая систему при начале движения в некоторое определенное положение в поле и сообщая какие-то начальные скорости частицам системы, мы, тем самым, даем системе некоторую начальную механическую энергию; во все остальное время движения в заданном поле (т. е. если не появятся какие-то новые силы, не учтенные заданным полем) система сохранит сообщенную в начале энергию.

Так, например, подвешивая к нерастянутой пружине груз и давая грузу начальный толчок, мы, тем самым, сообщаем системе начальную потенциальную энергию, определяемую начальной деформацией пружины, и начальную кинетическую энергию, зависящую от приданной грузу скорости. Груз, как мы уже знаем, придет в колебание, причем в крайних положениях его кинетическая энергия будет равна нулю, в среднем, наоборот, кинетическая энергия будет иметь максимальное значение. Так как полная механическая энергия постоянна, то в том пункте движения, где кинетическая энергия—нуль, мы будем иметь максимум потенциальной энергии, где кинетическая энергия максимальна, там потенциальная энергия равна нулю. Мы рассмотрели подробно, с количественной стороны, явление колебания в упражнениях, сейчас же остановим внимание учащегося на важном физическом факте, выявляющемся на данном примере: на основании закона сохранения энергии можно наперед указать связь между координатами любого промежуточного положения груза и его скоростью, если известна начальная энергия. Это—отличительная особенность движения в силовом поле. Исчерпывая возможность совершать работу (т. е. уменьшая потенциальную энергию), тело совершает работу и за счет этой работы увеличивает свою кинетическую энергию и, наоборот, двигаясь против напряжения поля, тело запасает возможность в дальнейшем совершить работу, при этом производится отрицательная работа и кинетическая энергия убывает.

С математической точки зрения закон сохранения энергии дает один из первых интегралов движения, так как уравнение, представляющее закон сохранения энергии, содержит только координаты и скорости, т. е. первые производные от координат по времени и не содержит ускорений (вторых производных от координат

по времени), поэтому иногда выражение закона сохранения энергии называют *интегралом живых сил* или *интегралом энергии*.

С расчетной стороны закон сохранения механической энергии не дает ничего нового по сравнению вообще с теоремой об изменении кинетической энергии системы, изложенной в предыдущем параграфе: здесь только явно поставлено на вид выражение работы через падение потенциала, которым уже пользовались при вычислении работы в предыдущем.

Все значение закона сохранения механической энергии выявляется только тогда, когда мы рассматриваем его в связи с общим законом сохранения физической энергии, а не только механической, т. е. тем законом термодинамики (первое начало), частным случаем которого является закон сохранения механической энергии.

Наблюдая действительно происходящие движения, мы постоянно замечаем, что полная механическая энергия не остается постоянной. С одной стороны, мы знаем, что часть энергии движения уходит на преодоление всевозможных вредных сопротивлений, так что с течением времени полная энергия системы убывает, с другой стороны, для поддержания движения или для его усиления мы создаем различными способами приток энергии, уходящей частично на компенсацию рассеяния энергии, на работу вредных сопротивлений, частично на увеличение кинетической энергии системы. Таким образом, мы никогда не имеем в чистом виде движений в потенциальных силовых полях, удовлетворяющих закону сохранения механической энергии, а всегда наложение друг на друга нескольких сложных процессов, среди которых процесс движения в потенциальном поле играет более или менее значительную роль.

Этот дополнительный приток и расход энергии не всегда проявляется в виде механической энергии. В большинстве случаев мы имеем дело с превращениями механической энергии системы в различные другие виды: энергия уходит в виде тепла, звука, света и электричества, и обратный приток энергии мы можем задать в виде тепла, электричества и других видов, превращаемых данной машиной в механическую энергию. Об этом мы скажем несколько подробнее дальше, а пока отметим, что наиболее общее уравнение движения системы может быть представлено так:

$$dT = -d\Pi + \delta W_m - \delta W_r \quad (17)$$

Здесь dT — приращение кинетической энергии ($-d\Pi$) обозначает падение потенциала, т. е. элементарную работу потенциальных сил, δW_m — элементарную работу непотенциальных сил, совершенную за счет притекшей энергии, и, наконец, $(-\delta W_r)$ дает потерю энергии на преодоление сил вредных сопротивлений. Переходя к конечному участку, будем иметь по (17):

$$\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 = \int_{(1)}^{(2)} \delta W_m - \int_{(1)}^{(2)} \delta W_r = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_r \quad (18)$$

т. е. приращение механической энергии системы на некотором участке движения равно разности притекшей и рассеившейся энергии. Чрезвычайно существенно, что мы можем измерить приходящую и уходящую энергию, в каких бы видах она ни проявлялась, при помощи работы, т. е. в механических единицах, сопоставляя количество энергии и количество работы при помощи переводных коэффициентов, о которых речь впереди.

Поясним сказанное следующим примером. Электромотор приводит в движение станок. Подводимая к мотору энергия частично уходит на преодоление вредных сопротивлений в подшипнике мотора, трение вращающейся арматуры о воздух, нагревание проводов и другой утечки или потери энергии; большая же часть уходит на работу полезного сопротивления, каковым является момент, необходимый для вращения вала станка. Если вал мотора вращается равномерно, с постоянной энергией, то это еще не значит, что вся энергия, подводимая к мотору, уходит на работу движения станка; мы должны подводить к мотору лишнюю энергию, компенсирующую потери в моторе, при этом *механическая* энергия мотора сохраняется постоянной.

Ур-ния (17) и (18) являются основными во всех расчетах движения систем с потерей и притоком энергии. Представляя обобщение уравнения закона сохранения механической энергии на случай любых видов энергии, т. е. не что иное, как общий закон сохранения энергии, ур-ние (18) позволяет производить полный расчет движений системы в случае любых сил, а не только потенциальных, и таким образом расширяет круг рассмотрения явлений далеко за те пределы, которые ставятся другими теоремами механики. Вот в чем большое значение этого закона, вводящего механику в общий круг физических наук. Об этом вкратце мы уже говорили во введении к настоящей теме.

Потенциальные силы, для которых справедлив закон сохранения энергии, называются еще иначе *консервативными*¹⁾ силами, все остальные *неконсервативными*. Из числа неконсервативных сил особенно выделяют силы вредных сопротивлений, из-за которых энергия системы рассеивается или, как говорят, *диссипируется*. Эти силы называют *диссипативными* силами. С точки зрения механики *диссипация* механической энергии есть *потеря* энергии, уход ее из поля механического использования. На самом деле энергия, конечно, не исчезает, а превращается в другие виды: тепло, электричество, лучистую энергию и т. д. В некоторых машинах эта диссипация или, вернее, физическое превращение, является основным назначением машины, служащей как раз для превращения механической энергии в специальный другой вид (электростатические машины, динамомашин и пр.); в других случаях диссипация энергии является полезным процессом (вспомнить, например, гидравлический тормоз и другие тормозные динамометры), но все же в большинстве случаев машин и конструкций, разбираемых в механике, диссипативные силы представляются „вредными“

¹⁾ При наличии этих сил сохраняется, консервируется энергия, откуда и происходит название этого класса сил.

сопротивлениями и их работа приводит к потере энергии, связанной с бесполезным нагреванием подшипников и других деталей, электризации их и пр.

Не останавливаясь на рассмотрении превращения механической энергии в другие виды и обратного перехода этих видов энергии в механическую в общих случаях, мы сейчас на примерах и упражнениях проведем несколько расчетов потерь энергии в наиболее простых механических процессах.

Мы полагаем, что учащийся уже знаком со столь популярным понятием, как *коэффициент полезного действия*. Напомним на всякий случай ему, что коэффициент полезного действия определяется как отношение полезной работы, совершаемой машиной или установкой к полной сообщенной ей энергии или, иначе говоря, как отношение разности подведенной и рассеившейся энергии к подведенной энергии. Мы уже применяли эту характеристику в предыдущем и встретимся с нею в последующем.

Примеры и упражнения.

1. Модель атома Бора. Первая гипотеза Бора была изложена в четвертом задании (пример 1 § 17). Перейдем теперь к изложению второй гипотезы, устанавливающей связь между переходами электрона с одной орбиты на другую, и частотой, излучаемой при этом электромагнитной волны.

Обозначим через $\mathcal{E}_i$ полную энергию электрона, совершающего движение по i -той орбите и представим $\mathcal{E}_i$ в виде суммы кинетической энергии T_i и потенциальной Π_i :

$$\mathcal{E}_i = T_i + \Pi_i.$$

Имеем

$$T_i = \frac{mv_i^2}{2}$$

и формула (в) стр. 149 дает

$$T_i = \frac{Ee_i}{2a_i},$$

с другой стороны, электрон, находясь в поле сил Кулонова притяжения к положительному ядру атома имеет запас потенциальной энергии (сравнить § 36 стр. 356):

$$\Pi_i = C - \frac{Ee}{a_i},$$

причем константа C есть значение потенциальной энергии на бесконечном расстоянии от ядра. Получаем

$$\mathcal{E}_i = \Pi_i + T_i = C - \frac{Ee}{2a_i};$$

при движении по орбите с номером k имеем аналогично

$$\mathcal{E} = C - \frac{Ee}{2a_k}.$$

Если электрон перескакивает с k -той орбиты на i -тую, то потерянная при этом энергия определится разностью $\mathcal{E}_{ki} = \mathcal{E}_k - \mathcal{E}_i$,

$$\mathcal{E}_k = \frac{Ee}{2} \left\{ \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_k} \right\};$$

согласно формуле (г) стр. 149, дающей радиусы орбит, найдем

$$\mathcal{E}_{ki} = \frac{2\pi^2 me^2 E^2}{h^2} \left\{ \frac{1}{i^2} - \frac{1}{k^2} \right\} = \frac{2\pi^2 me^4 N^2}{h^2} \left\{ \frac{1}{i^2} - \frac{1}{k^2} \right\},$$

так как $E = Ne$, где N — порядковый номер элемента. Куда девается энергия $\mathcal{E}_{ki}$?

Теория Бора отвечает, что эта энергия переходит в энергию электромагнитного излучения, испускаемого электроном, при этом выдвигается вторая гипотеза, согласно которой

$$\mathcal{E}_{ki} = h\nu_{ki},$$

где h — постоянная Планка, ν_{ki} — частота излучения ($h\nu_{ki}$ — квант энергии частоты ν_{ki}).

Получаем

$$\mathcal{E}_{ki} = \frac{2\pi^2 me^4 N^2}{h^2} \left\{ \frac{1}{i^2} - \frac{1}{k^2} \right\} = h\nu_{ki}$$

и, следовательно:

$$\nu_{ki} = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3} N^2 \left\{ \frac{1}{i^2} - \frac{1}{k^2} \right\} = R^{(1)} N^2 \left\{ \frac{1}{i^2} - \frac{1}{k^2} \right\},$$

где постоянная $R^{(1)}$, постоянная Ридберга, определяемая формулой

$$R^{(1)} = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3},$$

может быть вычислена через остальные мировые постоянные: m, e, h . Подставляя значения $e = 4,774 \cdot 10^{-10}$ CGS эл.-стат. единиц, $h = 6,547 \cdot 10^{-27}$, $m = 0,9 \cdot 10^{-27}$, найдем:

$$R^{(1)} = 3,291 \cdot 10^{15}.$$

Это число задолго еще до появления теории Бора было с большой точностью установлено на громадном опытном материале спектроскопических исследований. Теория Бора правильно передает таким образом не только общий вид установленных опытным путем спектроскопических „серийных формул“, но и в точности количественно совпадает с опытом.

При вычислении мы считали ядро неподвижным, орбиту — круговой и применяли в области скоростей, близкой к скорости света, законы классической механики Ньютона. Можно внести поправки на движение ядра и форму орбиты, а также учесть изменения, вносимые принципом относительности. Эта работа, сделанная Зоммерфельдом, привела к еще более точному совпадению результатов теории с опытом, чем первоначальная теория Бора.

В настоящее время теория Бора, давшая громадный толчок к проникновению в сущность процессов, происходящих в недрах атома, однако, уже оставлена, так как новая волновая механика дала объяснение тем же фактам, что и теория Бора, не прибегая к непонятным правилам „квантования“, содержащимся в первой и второй гипотезах Бора.

2. Потери механической энергии на вредные сопротивления. Превращение механической энергии в тепло. Мы уже подсчитывали в начале настоящей темы работу вредных сопротивлений и расходующую на эту работу мощность. На что уходит энергия, соответствующая этой работе? Многочисленные опыты, о которых мы сейчас вкратце расскажем, с большой достоверностью показали, что главная часть диссипирующей и уходящей из механического поля зрения энергии превращается в теплоту, и лишь небольшие количества энергии, — в другие виды ее.

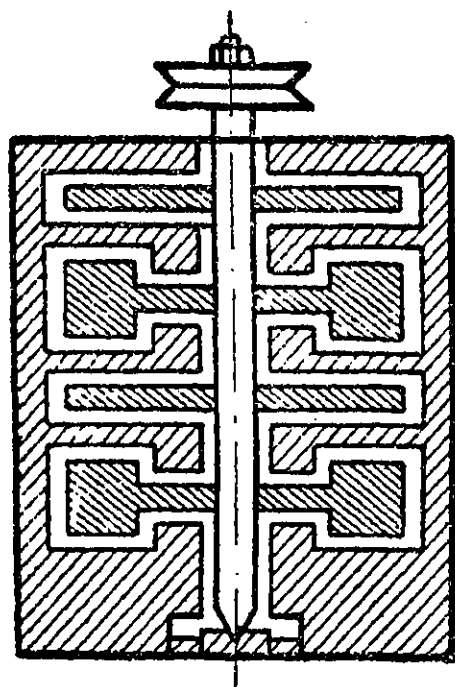


Рис. 220.

Исторически наиболее интересны опыты Джоуля. В цилиндр с водой помещалась крылатка (рис. 220), причем крылья проходили в прорезях заградителей, прикрепленных к стенкам цилиндра. Приводя во вращение крылатку при помощи опускающихся грузов, висящих на веревках, навитых на блок оси крылатки, можно было измерить, с одной стороны, работу падения грузов и, с другой — количество тепла, выделившегося внутри цилиндра (обычным калориметрическим путем) за счет потери энергии на работу крылатки против сил сопротивления воды. Производя несколько раз подряд опускание грузов и измеряя повышение температуры воды с учетом потерь тепла наружу и

других возможных ошибок, Джоуль нашел, что 1 больш. калория тепла может быть получена за счет 424,30 кг.м работы; если обозначить через E механический эквивалент теплоты, т. е. то количество работы, которое можно получить за счет затраты 1 б. кал. тепла, через Q — количество тепла и W — работу, то будем иметь

$$W = E \cdot Q; \quad (19)$$

обратно, количество тепла, полученного за счет затраченной работы, выразится формулой

$$Q = A \cdot W, \quad (20)$$

где $A = \frac{1}{E}$ называется *термическим эквивалентом работы*. Численная величина E , определенная Джоулем при первых опытах, не может считаться точной, так как при этих опытах Джоуль совершал очень небольшие работы и получил крайне малые количества тепла, так что относительные ошибки были велики, и кроме того влияние утечек тепла сказывалось слишком сильно;

упомянем, что грузы поднимались и опускались 20 раз, причем повышение температуры воды получалось только на $0,5^{\circ}\text{F}$.

Естественным развитием опытов Джоуля была идея Хирна (Hirn, 1878) создать такую установку, чтобы работа сил сопротивлений проводилась непрерывно продолжительное время и таким образом получалась значительная работа с соответствующим большим количеством выделенного тепла. Для этого внешняя часть калориметра подвешивалась на проволоке и удерживалась от вращения парой сил, создаваемой двумя грузами, перекинутыми через блоки, крылатка же приводилась во вращение от мотора. При равновесии калориметра можно считать момент сопротивления равным моменту уравновешивающей пары; обозначая этот момент через M , число оборотов крылатки, отсчитанных по счетчику, через n и количество тепла, выделенного в калориметре, через Q , будем иметь

$$M \cdot n \cdot 2\pi = E \cdot Q.$$

Особенно тщательно по такому способу было сделано определение E Роулэндом (Rowland, 1880). Повышение температуры доводилось до 305°F .

В результате этих и ряда других опытов было определено следующее значение механического эквивалента:

$$E = 426,8 \frac{\text{кгм}}{\text{б. кал.}}$$

или, приблизительно, $427 \frac{\text{кгм}}{\text{б. кал.}}$; это число мы и будем принимать в дальнейшем.¹⁾

Замечательно, что близкие к этому значению цифры были получены самыми различными путями: трением двух чугунных пластинок друг о друга (Джоуль), ударом (Хирн), сжатием газов (Джоуль), электродинамическим путем (Джоуль, Дарсонваль, Вебер), нагреванием проводников электрическим током (Джоуль) и мн. др.

Установка Роулэнда по всей своей конструкции напоминает рассмотренный уже нами в первом задании настоящей темы гидравлический тормоз. Зная теперь уже значение E , можем определить количество тепла, выделяемого при работе гидравлического тормоза. Подсчитаем, напр., количество тепла, выделяемого в секунду двухдисковым тормозом мощностью 60 НР, делающим 1080 об/мин. Имеем

$$Q = \frac{1}{E} N = \frac{60 \cdot 75}{427} = 10,5 \frac{\text{б. кал.}}{\text{сек.}}$$

При 10-минутной работе тормоза выделится количество тепла

$$Q = 10,5 \cdot 600 = 6300 \text{ б. кал.}$$

¹⁾ Подробнее об опытах по определению E и A , а также о зависимости этих чисел от различных физических обстоятельств (температуры, ускорения, силы тяжести и др.) учащийся может прочесть в III томе курса физики О. Д. Хвольсона.

Это — количество тепла, достаточное для того, чтобы вскипятить около 60 кг воды (1 б. кал. равна теплу, необходимому для повышения температуры 1 кг воды на 1°). Вот почему вода в гидравлических тормозах делается обычно циркулирующей.

Аналогичным путем можно подсчитать и нагревание подшипников. Если вал делает 1500 об/мин. и нагружен силой 5 тонн, то при радиусе цапфы 5 см и коэффициенте трения $f = 0,05$ будем иметь расход мощности (формула Рейе):

$$N = \frac{4}{\pi} f P r \omega \approx 2400 \frac{\text{кг. м.}}{\text{сек.}}$$

За час работы вала в подшипнике разовьется количество тепла

$$Q = \frac{2400 \cdot 3600}{427} \approx 20\,000 \text{ б. кал.},$$

т. е. очень большое количество тепла. Поэтому в быстроходных двигателях с большими нагрузками на валу необходимо, во-первых, ставить подшипники с обильной смазкой — от этого уменьшаются потери на трение и, во-вторых, масло заставляют циркулировать по подшипнику, создавая искусственное охлаждение вентиляцией или другими путями.

3. Гидравлические потери. Вычисление потерь в элементах гидравлических установок. Выводя в предыдущем параграфе основное гидравлическое уравнение Бернулли движения струи жидкости в виде

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \text{const}, \quad (21)$$

мы предполагали, что жидкость идеальна и никаких сил внутреннего трения (вязкости), внешнего трения о стенки и других причин для потерь энергии нет.

Выражение, стоящее в левой части уравнения, представляет нечто иное, как *полную механическую энергию единицы веса жидкости*. Действительно, обозначая вес некоторого объема буквой G и умножая на него обе части уравнения (21), получим

$$\frac{G v^2}{2g} + \frac{G}{\gamma} p + G z = \text{const}. \quad (22)$$

Первое слагаемое представляет кинетическую энергию выбранного объема жидкости, второе слагаемое представляет произведение объема на давление, т. е. потенциальную энергию давления жидкости и, наконец, третье слагаемое дает потенциальную энергию жидкости в зависимости от расположения ее в поле силы веса. Условие постоянства суммы кинетической и потенциальной энергии жидкости, т. е. полной механической энергии, единицы веса жидкости, представленное равенством (22), есть, очевидно, *закон сохранения механической энергии жидкости*.

Как мы только что упоминали, уравнение Бернулли в формуле (21) верно только в том случае, когда мы пренебрегаем силами сопротивления в жидкости, т. е. считаем жидкость идеальной.

На самом деле при движении реальной жидкости наблюдается ряд весьма сложных процессов как вдалеке от твердых стенок, ограничивающих движение жидкости, так и вблизи этих стенок. Во-первых, даже при весьма спокойном (струйчатом, ламинарном) движении, частицы жидкости, находящиеся в смежных слоях, имеют разные скорости и при относительных смещениях соседних частиц производится работа сил внутреннего трения (точнее деформации жидких частиц, которые, в отличие от упругого тела, не возвращаются в недеформированное состояние, а все время продолжают деформироваться в одном направлении), во-вторых, влияние близости твердых стенок, особенно шероховатых и образующих острые края, углы и вообще неудобообтекаемые формы, сказывается в образовании вихрей, приводящих к перемешиванию слоев (турбулентное движение); на образование этих вихрей также уходит энергия. Все это вместе взятое приводит нас к необходимости учета *потерь энергии* движущейся жидкости на преодоление этих вредных сопротивлений. Мы будем называть в дальнейшем эти потери *гидравлическими потерями*. Обозначим потери энергии, отнесенные к единице веса жидкости, через h_r . Как и все члены в уравнении Бернулли (21), этот член имеет измерение длины, почему и сравнивается с некоторой высотой жидкости. Напомним, что $\frac{v^2}{2g}$ определяет

скоростную высоту (скоростной напор), $\frac{p}{\gamma}$ — *пьезометрическую высоту* и, наконец z — *абсолютную или нивелирную высоту* над некоторой произвольно выбранной за начальную плоскостью. Тогда h_r может быть рассматриваемо как *потеря напора* из-за гидравлических сопротивлений; обычно *потерю напора выражают в частях скоростного напора*, полагая

$$h_r = \xi \cdot \frac{v^2}{2g} \quad (23)$$

где коэффициент ξ называют коэффициентом потери. Учитывая гидравлические потери, мы можем переписать уравнение Бернулли в таком виде:

$$\frac{p}{\gamma} + z + \frac{v^2}{2g} + h_r = \frac{p}{\gamma} + z + (1 + \xi) \frac{v^2}{2g} = \text{const.} \quad (24)$$

Полученное уравнение служит основным уравнением во всех гидравлических расчетах. Оно выражает, что *сумма полной механической энергии жидкости в данном месте струи и потерь энергии постоянна вдоль всей струи*. Это есть *уравнение сохранения энергии* уже не только механической, но и вообще *физической*, так как в этом уравнении учитываются и превращения энергии в другие виды (главным образом нагревание жидкости). К сожалению коэффициент потерь ξ трудно поддается теоретическому учету и значения его для различных случаев движения приходится брать из экспериментальных данных.

Так, напр., потеря напора, обусловленная трением жидкости о стенки трубы и внутренними вихреобразованиями при прямоли-

нейной цилиндрической трубе (длины l и постоянного диаметра D) определяется по формуле:

$$h_f = \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{v^2}{2g}, \tag{25}$$

где λ зависит только от шероховатости трубы и от кинематического коэффициента вязкости жидкости $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ (μ —коэффициент вязкости, о котором уже неоднократно была речь, ρ —плотность жидкости). Зависимость λ от этих констант хорошо передается формулой Мизеса:

$$\lambda = 0,01 + \sqrt{\frac{k}{D}} + 1,77 \sqrt{\frac{\nu}{vD}}. \tag{26}$$

Здесь k —коэффициент шероховатости, значения которого в метрах даны в таблице.

Материал	$10^8 k$		$10^4 \sqrt{k}$	
Стекло	От 6,4	до 25,6	От 2,5	до 5,1
Тянутые медь, свинец, латунь.	" 6,4	" 32,0	" 2,5	" 5,7
Резиновые рукава, обычн. .	" 200	" 400	" 14	" 20
шерох. .	" 480	" 960	" 22	" 30
Чугун, новые трубы	" 3 200	" 6 400	" 60	" 80
старые	" 8 000	" 16 000	" 90	" 126
Дерево	" 1 600	" 3 200	" 40	" 57
Бутовая кладка	" 64 000	" 120 000	" 250	" 350

Потери напора на закруглениях труб (колена) объясняются, с одной стороны, отрывом струй от стенок по инерции на поворотах, а также и тем, что частицы, текущие по середине трубы и имеющие большую скорость, чем частицы у стенок, заносятся к внешней стенке и таким образом происходит трение частиц с большими разностями скоростей.

Коэффициент потери приближенно определяют по формуле (закругление под прямым углом):

$$\xi = 0,13 + 0,16 \left(\frac{D}{R} \right)^{3,5},$$

где D —диаметр трубы, R —радиус закругления, измеренный для средней линии трубы. При закруглении δ° предыдущий коэффициент умножают на $\frac{\delta^\circ}{90^\circ}$.

Дадим пример простого расчета с применением этих и еще других экспериментальных формул.

Определим потребную мощность для работы центробежного насоса, подающего в минуту 3500 литров воды с глубины 2 м на высоту 15 м. Диаметр трубопровода $D=180$ мм, длина его $l=30$ м, в начале трубопровода имеется всасывающая коробка с

коэффициентом потерь $\xi_1 = 5$, а в самом трубопроводе — 4 закругления и одна задвижка ($\xi_2 = 0,05$).

Средняя скорость в трубопроводе определится как отношение секундного расхода к площади сечения его:

$$v = \frac{4Q}{\pi D^2} = 2,36 \text{ м/сек.}$$

Потерю напора из-за трения найдем по формуле (25), приняв λ равным по (26):

$$\lambda = 0,01 + \frac{25}{10^4 \sqrt{0,18}} + \frac{0,0023}{\sqrt{2,36 \cdot 0,18}} = 0,0194,$$

тогда

$$h_f = \lambda \frac{l}{D} \cdot \frac{v^2}{2g} = 0,93 \text{ м.}$$

Всасывающая коробка, четыре закругления и заслонка дают общую потерю

$$h' = (5 + 4 \cdot 0,12 + 0,05) \frac{v^2}{2g} = 1,58 \text{ м.}$$

Для определения полезной мощности мы должны к высоте фактического подъема воды $h = 2 + 15 = 17 \text{ м}$ прибавить еще высоты h_f и h' , соответствующие потерям, тогда будем иметь, называя γ — удельный вес воды:

$$N = \frac{\gamma Q (h + h_f + h')}{75} = \frac{1000 \cdot 0,06 \cdot 19,51}{75} = 15,6 \text{ HP.}$$

Принимая коэффициент полезного действия насоса равным 75%, получим потребную мощность для двигателя:

$$N_* = \frac{N}{0,75} = 20,8 \text{ HP.}$$

На этом примере проиллюстрировано значение гидравлических потерь.

4. Расход энергии при затухающих колебаниях. При наличии сил сопротивления, пропорциональных первой степени скорости, механическая энергия колеблющейся системы не остается, конечно, постоянной, а в течение всего процесса движения расходуется, переходя в теплоту и иные виды энергии. Будем основываться на примере гальванометра (пример 6, § 20) и найдем закон убывания механической энергии в процессе затухающих колебаний. Конечно, этот закон будет иметь место не только в случае гальванометра, а при любом затухающем колебательном движении под действием сил сопротивления, пропорциональных первой степени скорости.

Выражение для полной механической энергии $\mathcal{E}$, складывающейся из кинетической энергии T и потенциальной Π в рассматриваемом случае имеет вид

$$\mathcal{E} = T + \Pi = J \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + MH \frac{\varphi^2}{2} = \frac{J}{2} (\dot{\varphi}^2 + k^2 \varphi^2), \quad k^2 = \frac{MH}{J}, \quad (a)$$

так как

$$T = J \frac{\dot{\varphi}^2}{2}, \quad \Pi = MH (1 - \cos \varphi) \approx MH \frac{\varphi^2}{2}.$$

Вспоминая выражения для φ и $\dot{\varphi}$:

$$\varphi = a e^{-\varepsilon t} \sin(\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t + \alpha)$$

$$\dot{\varphi} = a e^{-\varepsilon t} \{ \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} \cos(\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t + \alpha) - \varepsilon \sin(\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t + \alpha) \}, \quad (б)$$

и подставляя их в (а), после простых преобразований получим:

$$\mathcal{E} = \frac{J}{2} e^{-2\varepsilon t} a^2 \left\{ \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} \cos 2(\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t + \alpha) - \varepsilon \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} \sin 2(\sqrt{k^2 - \varepsilon^2} t + \alpha) \right\}. \quad (1)$$

Заметим, что при отсутствии сил сопротивления ($\varepsilon = 0$) мы получаем

$$\mathcal{E} = T + \Pi = \frac{J}{2} a^2 k^2 = MH \frac{a^2}{2},$$

или так как в этом случае

$$\varphi_{\max} = a, \quad \dot{\varphi}_{\max} = ak,$$

то

$$T + \Pi = T_{\max} = \Pi_{\max}.$$

Этим уравнением, выражающим равенство максимальных значений кинетической и потенциальной энергии, мы уже пользовались в примере 5 § 42. Возвращаясь к ур-нию (в), найдем значения энергии $\mathcal{E}$ в моменты времени $t = 0, \frac{T}{2}, \dots, n \frac{T}{2}$, где T — период колебания. Получим

$$\mathcal{E}_0 = \frac{J}{2} (k^2 - \varepsilon^2 \cos 2\alpha - \varepsilon \sqrt{k^2 - \varepsilon^2} \sin 2\alpha), \quad \mathcal{E}_1 = e^{-\varepsilon T} \mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{n-1} e^{-\varepsilon T},$$

и, следовательно, отношение $\frac{\mathcal{E}_{n-1}}{\mathcal{E}_n}$, которое может быть принято за характеристику быстроты убывания механической энергии колеблющейся системы, будет (см. (л) стр. 186).

$$\frac{\mathcal{E}_{n-1}}{\mathcal{E}_n} = e^{\varepsilon T} = \eta^2. \quad (г)$$

Возьмем например, $T = 1,05 T_0$, т. е. положим, что благодаря затуханию период колебаний увеличился только на 5%. По графику рис. 81 найдем $\eta = 2,75$ и, следовательно, $\eta^2 = 7,55$, т. е. здесь еще более наглядно, чем в примере 6 § 20, сказывается, что даже при малом изменении периода колебаний, т. е. при „малом“ сопротивлении, превращение механической энергии в теплоту (и токи Фуко) происходит весьма интенсивно.

К результату, выражаемому формулой (в), можно прийти также, исходя из уравнения:

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \int_0^t L_z d\varphi,$$

выражающего, что расход механической энергии обуславливается работой момента L_z силы сопротивления. Но в рассматриваемом случае $L_z = -\beta \dot{\varphi}$, и мы получаем

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = -\beta \int_0^t \dot{\varphi} d\varphi = -\beta \int_0^t \dot{\varphi}^2 dt, \quad (д)$$

так как $\dot{\varphi} dt = d\varphi$. Подставляя сюда вместо $\dot{\varphi}$ его выражение (б), после интегрирования найдем ф-лу (в), что учащийся может самостоятельно проверить (предварительно лучше преобразовать ф-лу (д) помощью интегрирования по частям).

Расход механической энергии колеблющейся системы в единицу времени — мощность, затрачиваемая при колебаниях — определится дифференцированием ур-ния (д) по времени; получим

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \Phi = -\beta \dot{\varphi}^2, \quad (е)$$

т. е. расходуемая мощность пропорциональна *квадрату* скорости. Заметим, что функция Φ , представляющая механическую энергию, затрачиваемую в единицу времени, называется диссипативной функцией Релея. К обобщению и применению этого понятия в более сложных случаях движения мы обратимся в следующей части курса.

§ 44. Потеря энергии при ударе.

а) Центральный удар шаров. Естественный способ вычисления потери энергии при ударе двух шаров — это составить разность кинетических энергий до удара и после удара; так как начальные скорости шаров известны, а скорости их после удара могут быть определены по формулам § 14, то указанный путь не может составить никаких затруднений. Однако, вычисления будут довольно громоздкими и, чтобы их избежать, мы дадим другой вывод выражения для потери энергии при ударе шаров.

Исходим из теоремы импульсов:

$$\left. \begin{aligned} m_1(u_{2x} - u_{1x}) &= S_{1x} \\ m_2(v_{2x} - v_{1x}) &= S_{2x} = -S_{1x} \end{aligned} \right\} \quad (а)$$

где, как и в § 14 u_2, v_2, u_1, v_1 — скорости первого и второго шаров соответственно после и до удара. Умножая обе части первого уравнения на $u_{2x} + ku_{1x}$, второго на $v_{2x} + kv_{1x}$ и складывая результаты, получим

$$\left. \begin{aligned} m_1(u_{2x} - u_{1x})(u_{2x} + ku_{1x}) + m_2(v_{2x} - v_{1x})(v_{2x} + kv_{1x}) &= \\ = S_{1x}(u_{2x} + ku_{1x} - v_{2x} - kv_{1x}) \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Легко проверить, что правая часть этого уравнения обращается в нуль. Действительно, по определению коэффициента восстановления

$$k = - \frac{u_{2x} - v_{2x}}{u_{1x} - v_{1x}}, \quad (B)$$

и, следовательно, $u_{2x} + ku_{1x} = v_{2x} + kv_{1x}$. Преобразуем теперь левую часть ф-лы (б); имеем тождества:

$$(u_{2x} - u_{1x}) u_{2x} = \frac{1}{2} (u_{2x}^2 - u_{1x}^2) + \frac{1}{2} (u_{1x} - u_{2x})^2,$$

$$(u_{2x} - u_{1x}) ku_{1x} = \frac{1}{2} k (u_{2x}^2 - u_{1x}^2) - \frac{1}{2} k (u_{1x} - u_{2x})^2;$$

складывая эти уравнения, получим

$$(u_{2x} - u_{1x})(u_{2x} + ku_{1x}) = \frac{1}{2} (1 + k) (u_{2x}^2 - u_{1x}^2) + \frac{1}{2} (1 - k) (u_{1x} - u_{2x})^2,$$

и, следовательно, ур-ние (б) примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (1 + k) \{m_1 u_{2x}^2 + m_2 v_{2x}^2 - (m_1 u_{1x}^2 + m_2 v_{1x}^2)\} + \\ & + \frac{1}{2} (1 - k) \{m_1 (u_{1x} - u_{2x})^2 + m_2 (v_{1x} - v_{2x})^2\} = 0. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$T_2 = \frac{1}{2} (m_1 u_{2x}^2 + m_2 v_{2x}^2),$$

$$T_1 = \frac{1}{2} (m_1 u_{1x}^2 + m_2 v_{1x}^2)$$

представляют не что иное, как кинетические энергии системы до и после удара, найдем:

$$T_2 - T_1 = - \frac{1 - k}{1 + k} \left\{ m_1 \frac{(u_{1x} - u_{2x})^2}{2} + m_2 \frac{(v_{1x} - v_{2x})^2}{2} \right\} \quad (Г)$$

Выражение

$$\mathcal{E} = \frac{m_1}{2} (u_{1x} - u_{2x})^2 + \frac{m_2}{2} (v_{1x} - v_{2x})^2 \quad (Д)$$

можно определить как кинетическую энергию системы, соответствующую *потерянным при ударе скоростям* $u_1 - u_2$, $v_1 - v_2$; результат, выражаемый формулой (д), представляет в частном случае двух шаров теорему Карно: *кинетическая энергия, теряемая при ударе, равна $\frac{1 - k}{1 + k}$ доле кинетической энергии, соответствующей потерянным скоростям.*

При ударе абсолютно упругих шаров $k = 1$, $\frac{1 - k}{1 + k} = 0$, и, следовательно

$$T_1 = T_2,$$

т. е. абсолютно упругий удар не сопровождается потерей энергии; другой крайний случай мы имеем при абсолютном неупругом ударе, когда $k=0$ и потеря энергии (переход механической энергии в другие формы) будет максимальный:

$$T_2 - T_1 = -\mathcal{E}.$$

Имея в виду выразить теперь потерю энергии через заданные начальные скорости шаров, заметим, что

$$\begin{aligned} u_{2x} - u_{1x} &= \frac{m_2(1+k)}{m_1+m_2} (v_{1x} - u_{1x}), \\ v_{2x} - v_{1x} &= \frac{m_1(1+k)}{m_1+m_2} (u_{1x} - v_{1x}), \end{aligned} \quad (e)$$

как легко вывести из уравнений (а) и (в).

Подстановка в ф-лу (д) дает теперь:

$$\mathcal{E} = \frac{m_1 m_2 (1+k)^2}{2(m_1+m_2)} (u_{1x} - v_{1x})^2,$$

и, следовательно,

$$T_2 - T_1 = -\frac{(1-k^2)}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} (u_{1x} - v_{1x})^2. \quad (ж)$$

Пользуясь ф-лой (в), легко также выразить потерю энергии через скорости шаров после удара. Получим

$$T_2 - T_1 = -\frac{1-k^2}{2k^2} \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} (u_{2x} - v_{2x})^2.$$

Разберем несколько численных примеров.

1°. Пуля весом 60 г ударяет со скоростью 1000 м/сек о неподвижное препятствие, масса которого может считаться бесконечной. Считая удар неупругим ($k=0$), найдем из ф-лы (ж)

$$T_2 - T_1 = -\frac{m_1}{2} u_{1x}^2;$$

конечно, этот результат можно было бы для рассматриваемого частного случая написать непосредственно, замечая, что пуля отдает при ударе всю свою кинетическую энергию. Подставляя численные значения, получим

$$T_2 - T_1 = -5100 \text{ кдж.}$$

Считая, что вся механическая энергия переходит в процессе удара в теплоту, которая в свою очередь целиком уходит на нагревание пули, найдем, что при ударе образуется $\frac{5100}{426,8} = 11,9$ больших калорий; принимая теплоемкость материала пули 0,12 кал/кг, найдем, что сопровождающее удар повышение температуры будет равно

$$\frac{11,9}{0,12 \cdot 0,05} \approx 2000^\circ.$$

2°. Как второй пример рассмотрим случай удара молота о наковальню. Полезной с точки зрения работы молота в этом случае является именно потерянная механическая энергия $T_1 - T_2$, затрачиваемая на деформацию отковываемого куска; энергия же T_2 , сохраняющаяся после удара и определяемая теми скоростями, которые будут после удара иметь молот и наковальня, является вредной для процесса работы молота, так как она идет на расшатывание установки. Коэффициент полезного действия молота нужно поэтому определить, как отношение

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

откуда, имея в виду, что

$$v_{1x} = 0, \quad T_1 = m_1 \frac{u_{1x}^2}{2},$$

и воспользовавшись формулой (ж), найдем

$$\eta = \frac{(1 - k^2) m_2}{m_1 + m_2}.$$

Таким образом для получения высокого коэффициента полезного действия нужно, чтобы масса молота была мала по сравнению с массой наковальни. Пусть, например, $m_1 g = 1,5 \text{ т}$, $m_2 g = 30 \text{ т}$. Получим, считая удар неупругим ($k = 0$):

$$\eta = \frac{30}{30 + 1,5} = 0,95.$$

Допустим теперь, что при ударе молот отскакивает на высоту h_2 , равную четверти высоты падения h_1 . Имеем

$$u_{1x} = \sqrt{2gh_1}, \quad u_{2x} = -\sqrt{2gh_2}, \quad v_{1x} = 0,$$

и первая формула (е) дает

$$-\sqrt{2gh_2} - \sqrt{2gh_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} (1 + k) \sqrt{2gh_1},$$

откуда получим

$$k = \left(1 + \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\right) \left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) - 1 = 0,575,$$

и, следовательно,

$$\eta = 0,95 (1 - 0,575^2) = 0,636,$$

т. е. при отчасти упругом ударе мы имеем резкое понижение коэффициента полезного действия молота.

3°. В случае копра, ударяющего сваю, под коэффициентом полезного действия надо понимать, очевидно, в противоположность случаю молота отношение

$$\eta = \frac{T_2}{T_1},$$

так как полезным с точки зрения работы копра является именно тот запас механической энергии, который остается в системе, не переходя

в иные формы энергии. Потерянная энергия $T_1 - T_2$, идущая преимущественно на деформацию сваи, должна быть по возможности уменьшена.

Так как и в этом случае $v_{1x} = 0$, то по формуле (ж) легко получим

$$\eta = \frac{\bar{m}_1 + k^2 m_2}{m_1 + m_2},$$

и при неупругом ударе

$$\eta = \frac{m_1}{m_1 + m_2},$$

т. е. вес копра должен быть по возможности большим по сравнению с весом сваи. При отчасти упругом ударе ($k > 0$) коэффициент полезного действия увеличивается. Пусть, например, $m_1 g = 750$ кг, $m_2 g = 50$ кг; получим, полагая $k = 0$,

$$\eta = \frac{750}{800} = 0,937.$$

Допустим, что при 25 ударах копра, падающего с высоты 1,2 м, свая погрузилась в почву на 6 см и определим по этим данным среднее сопротивление почвы перемещению сваи.

Имеем при одном ударе

$$T_2 = \eta T_1 = 0,937 \cdot 1,2 \cdot 750,$$

и, следовательно, искомое среднее сопротивление $F_{\text{ср.}}$ будет:

$$F_{\text{ср.}} = \frac{0,937 \cdot 1,2 \cdot 750 \cdot 25}{0,06} \approx 350 \text{ т.}$$

б) Потеря кинетической энергии при ударе о тело, вращающееся вокруг неподвижной оси.

1°. Руководствуясь аналогией между поступательным движением и вращением вокруг неподвижной оси, мы можем применять к случаю двух шкивов примера 2 § 24 для вычисления кинетической энергии, потерянной при ударе, теорему Карно, доказанную для удара шаров.

Замечая, что кинетическая энергия, соответствующая потерянным скоростям, имеет выражение:

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2} J_1 (\bar{\omega}_{10} - \bar{\omega}_1)^2 + \frac{1}{2} J_2 (\bar{\omega}_{20} - \bar{\omega}_2)^2$$

и считая удар совершенно неупругим, получим:

$$\Delta \mathcal{T} = T_1 - T_2 = \frac{1}{2} J_1 (\bar{\omega}_{10} - \bar{\omega}_1)^2 + \frac{1}{2} J_2 (\bar{\omega}_{20} - \bar{\omega}_2)^2.$$

Если подставить сюда вместо T_1 и T_2 их выражения:

$$T_1 = J_1 \frac{\omega_0^2}{2} + J_2 \frac{\omega_{20}^2}{2}, \quad T_2 = J_1 \frac{\omega_1^2}{2} + J_2 \frac{\omega_2^2}{2}$$

и воспользоваться условием $\bar{\omega}_1 R_1 = \bar{\omega}_2 R_2$, то предыдущее уравнение определит угловые скорости шкивов после удара. Предлагаем уча-

щемся убедиться, что таким образом получаются те же ф-лы (а) стр. 216, которые были получены помощью применения теоремы моментов. Переходя к вычислению потери кинетической энергии, подставим вместо потерянных угловых скоростей $\tilde{\omega}_{10} - \tilde{\omega}_1$ и $\tilde{\omega}_{20} - \tilde{\omega}_2$ их значения. По формуле (а) стр. 216 получим:

$$\tilde{\omega}_{10} - \tilde{\omega}_1 = \frac{J_2 R_1 (R_2 \tilde{\omega}_{20} - R_1 \tilde{\omega}_{10})}{J_1 R_2^2 + J_2 R_1^2},$$

$$\tilde{\omega}_{20} - \tilde{\omega}_2 = \frac{J_1 R_2 (R_1 \tilde{\omega}_{10} - R_2 \tilde{\omega}_{20})}{J_1 R_2^2 + J_2 R_1^2}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{E} = \frac{J_1 J_2 (R_2 \tilde{\omega}_{20} - R_1 \tilde{\omega}_{10})^2}{2 (J_1 R_2^2 + J_2 R_1^2)}.$$

Если в частности один из шкивов был до удара неподвижен ($\tilde{\omega}_{20} = 0$), то

$$T_1 - T_2 = \mathcal{E} = \frac{J_1 J_2 R_1^2 \omega_{10}^2}{2 (J_1 R_2^2 + J_2 R_1^2)} = \frac{J_2 R_1^2}{J_1 R_2^2 + J_2 R_1^2} T_1,$$

и коэффициент полезного действия, т. е. отношение

$$\eta = \frac{T_2}{T_1},$$

определится формулой

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{J_2 R_1^2}{J_1 R_2^2}};$$

при численных данных примера 2 § 20 найдем

$$\eta = 0,82.$$

2°. В примере молота и кулачной шестерни (пример 1 § 20) применение теоремы Карно дает

$$\mathcal{E} = \frac{J}{2} (\omega_{10} - \omega_1)^2 + \frac{G_2}{2g} (-v_2)^2.$$

По формулам (а) и (б) стр. 216 найдем

$$T_1 - T_2 = \frac{\frac{G_2}{G_1} \frac{r_1^2}{\rho_1^2}}{1 + \frac{G_2}{G_1} \frac{r_1^2}{\rho_1^2}} T_1, \quad T_1 = \frac{J}{2} \omega_{10}^2,$$

причем промежуточные выкладки учащийся без труда произведет самостоятельно. Коэффициент полезного действия молота определится формулой:

$$\eta = \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{1 + \frac{G_2 r_1^2}{G_1 \rho_1^2}};$$

при численных данных примера 1 § 20 получим $\eta = 0,645$.

в) Напряжения при ударе. Груз веса Q падает с высоты h на вертикально стоящую балку и ударяет по ее верхнему сечению; нижнее сечение балки будем предполагать заделанным неподвижно. Вес балки примем равным $P = ql$, где q — вес единицы длины, l — длина балки. Точное решение вопроса о напряжениях и движении элементов балки под действием удара, принадлежащее Сен-Венану, основано на рассмотрении продольных колебаний, распространяющихся по балке. Это решение весьма сложно, и мы ограничимся приближенным решением, оценив массу балки, принимающую участие в движении, по способу Релея.

Будем исходить из теоремы Карно и считать удар абсолютно неупругим. Имеем

$$T_1 - T_2 = \mathfrak{T},$$

где начальный запас кинетической энергии системы, т. е. кинетическая энергия груза до удара определится формулой

$$T_1 = \frac{Q}{2g} u_1^2 = Qh.$$

Обозначим далее через u_2 скорость верхнего сечения балки после удара. Тогда для кинетической энергии системы после удара можно написать выражение,

$$T_2 = \frac{Q}{2g} u_2^2 + \frac{\lambda P}{2g} u_2^2.$$

Чтобы выяснить значение коэффициента λ , примем, что перемещение какого-либо сечения балки пропорционально, как и при равновесии, расстоянию этого сечения от заделанного нижнего конца. Иными словами, скорость сечения, находящегося на расстоянии x от этого конца, примем равной

$$u_2 \frac{x}{l}.$$

При таком условии кинетическая энергия балки после удара будет

$$\frac{1}{2} \int_0^l u_2^2 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \frac{q}{l} dx = \frac{1}{2} \frac{q}{gl^2} u_2^2 \int_0^l x^2 dx = \frac{P}{3} \frac{u_2^2}{2g},$$

т. е. коэффициент $\lambda = \frac{1}{3}$.

Кинетическая энергия, соответствующая потерянными скоростям, будет

$$\mathfrak{T} = \frac{Q}{2g} (u_1 - u_2)^2 + \frac{\lambda P}{2g} (-u_2)^2.$$

Подстановка в ф-лу (г) дает теперь

$$\frac{Q}{2g} (u_1^2 - u_2^2) - \frac{\lambda P}{2g} u_2^2 = \frac{Q}{2g} (u_1 - u_2)^2 + \frac{\lambda P}{2g} u_2^2,$$

откуда найдем

$$u_2 = \frac{Q}{Q + \lambda P} u_1,$$

где $\lambda = \frac{1}{3}$. С этой скоростью начнется после удара движение верхнего конца балки и груза на нем. Возвращаясь к вычислению кинетической энергии T_2 , имеем

$$T_2 = \frac{Q + \lambda P}{2g} u_2^2 = \frac{Q + \lambda P}{2g} \left(\frac{Q}{Q + \lambda P} \right)^2 u_1^2 = \frac{Q}{Q + \lambda P} \frac{Q}{2g} u_1^2 = \frac{Qh}{1 + \frac{\lambda P}{Q}}.$$

Обозначим теперь через f_d максимальное перемещение, которое получит верхнее сечение балки в результате действия удара. Для определения f_d применим теорему об изменении кинетической энергии. В тот момент, когда перемещение верхнего конца балки достигнет своего максимального значения f_d , скорости будут равны нулю, и мы получим

$$-T_2 = Qf_d - \frac{cf_d^2}{2},$$

причем коэффициент жесткости $c = \frac{Q}{f_{st}}$, где f_{st} — перемещение, которое получило бы верхнее сечение балки, если бы нагрузка Q была приложена статически. Получаем

$$\frac{Qh}{1 + \lambda \frac{P}{Q}} = \frac{Qf_d^2}{2f_{st}} - Qf_d,$$

или

$$f_d^2 - 2f_{st}f_d - \frac{2hf_{st}}{1 + \lambda \frac{P}{Q}} = 0,$$

и положительный корень этого уравнения, соответствующий максимальному перемещению, будет

$$f_d = f_{st} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{f_{st}} \frac{1}{1 + \lambda \frac{P}{Q}}} \right); \quad (3)$$

при $h = 0$ находим

$$\boxed{f_d = 2f_{st}} \quad (и)$$

т. е. при динамическом (мгновенном) приложении силы перемещения, а следовательно и напряжения, вдвое больше соответствующих статических, возникающих при медленном возрастании нагрузки от нуля до Q .

Если h велико по сравнению с f_{st} , то приближенно получим:

$$f_d = \sqrt{\frac{2hf_{st}}{1 + \lambda \frac{P}{Q}}} \quad (к)$$

Зная перемещение f_d , определяем по известным формулам динамические напряжения, возникающие под действием ударной нагрузки.

Конечно, все рассуждения и результаты, которые были приведены для случая продольного удара, могут быть непосредственно применены и при поперечном (изгибающем) ударе — падении груза на балку. Изменение коснется только вопроса об определении величины коэффициента λ . Мы уже знаем (§ 48, стр. 369), что в случае балки, заделанной одним концом, и приложения нагрузки к ее свободному концу следует принять $\lambda = \frac{33}{140} = 0,236$; для балки, подпертой по концам и при приложении груза в середине ее $\lambda = \frac{17}{35} = 0,486$ и т. д.

Подсчитаем в заключение два численных примера.

1°. Груз $Q = 60$ кг падает с высоты $h = 3,6$ м и ударяет о кольцевой выступ, находящийся на нижнем конце цилиндрического железного стержня, имеющего длину $l = 4$ м. Вес стержня

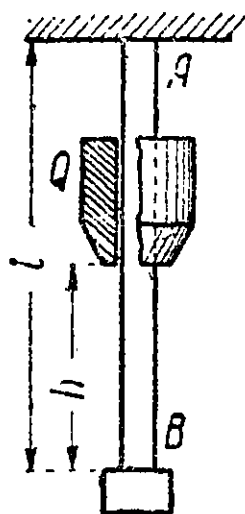


Рис. 221.

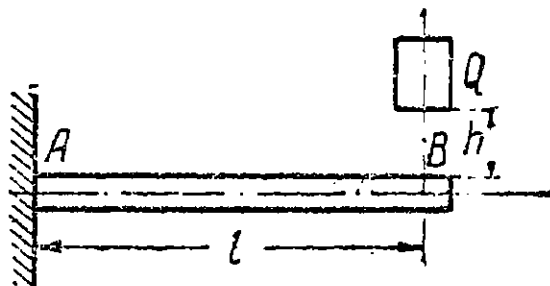


Рис. 222.

$P = 200$ кг; площадь поперечного сечения $F = 60$ см². Определим максимальное динамическое растягивающее напряжение в стержне; $E = 2 \cdot 10^6$ кг/см² (рис. 221).

В рассматриваемом случае

$$f_{st} = \frac{Ql}{EF} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ см}$$

столь мало по сравнению с h , что можно для вычисления f_d принять формулу (к). Получим

$$f_d = \sqrt{\frac{2 \cdot 360 \cdot 2 \cdot 10^{-4}}{1 + \frac{200}{3 \cdot 60}}} = 26,2 \cdot 10^{-2} \text{ см},$$

что соответствует напряжению

$$\sigma_d = E \frac{f_d}{l} = 1310 \text{ кг/см}^2.$$

2°. Деревянная горизонтальная балка шириной $a = 15 \text{ см}$, высотой $b = 20 \text{ см}$ и расчетной длиной $l = 2 \text{ м}$ одним концом заделана в стену; на свободный конец падает с высоты $h = 16 \text{ см}$ груз $Q = 100 \text{ кг}$, вес балки $P = 30 \text{ кг}$. Определим максимальное напряжение, возникающее при ударе; $E = 12 \cdot 10^{-4} \text{ кг/см}^2$ (рис. 222).

При статической нагрузке силой Q имели бы

$$f_{st} = \frac{Ql^3}{3EJ} \approx 0,56 \text{ см};$$

максимальное напряжение, соответствующее этому прогибу, равно:

$$\sigma_{st} = \frac{Ql}{W} = \frac{Ql \cdot 6}{ab^2} \approx 20 \text{ кг/см}^2.$$

По ф-ле (з) находим:

$$f_d = f_{st} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{16 \cdot 2}{0,56} \frac{1}{1 + \frac{33}{140} \cdot \frac{30}{100}}} \right\} = 8,37 f_{st}.$$

Соответствующее динамическое напряжение σ_d будет:

$$\sigma_d = \sigma_{st} \frac{f_d}{f_{st}} \approx 168 \text{ кг/см}^2.$$

Задачи и вопросы.

1. Определить вращающий момент электромотора лебедки (пример 1, задание 10, стр. 390), если известно, что поднимаемому равноускоренно грузу Q сообщается скорость $v = 3 \text{ м/сек}$ в продолжение 4 сек. Коэффициент полезного действия лебедки принят равным 0,8. Построить график отдаваемой электромотором мощности и определить работу электромотора за указанный промежуток времени.

2. Какой тормозящий момент должен быть приложен к электромотору лебедки предыдущей задачи, чтобы движение груза при опускании было равнозамедленным с ускорением, равным по величине $0,5 \text{ м/сек}^2$. Скорость при начале торможения $v_0 = 3 \text{ м/сек}$.

3. С какой скоростью произойдет падение на луну материальной точки, падающей с начальной нулевой скоростью из места, в котором уравниваются силы притяжения земли и луны? Радиус луны равен 0,273 земного радиуса.

4. Определить максимальное напряжение в стальном стержне маятникового копра при следующих условиях: вес отливки 70 кг, длина стержня от оси вращения до центра тяжести отливки 1,8 м, площадь поперечного сечения 6 см^2 ; отливка падает без начальной скорости из вертикального верхнего положения. Радиус инерции отливки относительно ее центра тяжести равен 5 см.

5. Груз весом 1 кг , висящий на нити длиной $0,5 \text{ м}$ и пренебрегаемого малого веса, под действием толчка отклоняется на 45° от положения равновесия. Сравнить натяжение нити в состоянии покоя и в начальный и конечный моменты движения.

6. Воспользовавшись числовыми данными примера 26 § 138 определить вращающий момент, приведенный к кулаку. Угловая скорость $n = 600 \text{ об/мин}$.

7. Воспользовавшись аналитическим выражением приведенного момента инерции кривошипного механизма и данными примера 2 § 40 (см. также пример 4 стр. 390), составить выражение для приведенного к кривошипу вращающего момента. Сравнить результат с расчетом примера 3 § 42.

8. Сделать вычисления, аналогичные примеру 5d § 42 для случая балки с заделанными концами (см. пример 2 стр. 390).

9. Сделать вычисления, аналогичные примеру 5e § 42 для клинообразной консоли (см. пример 3 стр. 390).

10. Железобетонная дымовая труба имеет высоту $h = 168 \text{ м}$, диаметр при основании $d_0 = 12,2 \text{ м}$, при вершине 8 м ; радиус инерции сечения при основании равен $4,3 \text{ м}$. Вычислить период свободных колебаний трубы: 1) принимая ее за усеченный конус, 2) считая ее цилиндрической со средним радиусом $10,1 \text{ м}$ (опытные определения дают для этой трубы период $2,53 - 2,56 \text{ сек.}$).

11. Подъем груза $Q = 2 \text{ т}$ происходит со скоростью $0,25 \text{ м/сек}$. Верхний конец каната, поднимающего груз, внезапно приостанавливается; принимая сечение каната $F = 30 \text{ см}^2$, $E = 2 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2$, длину его в момент остановки 4 м , определить динамическое напряжение, возникающее в канате.

(Указание: при остановке груз будет продолжать подниматься, а затем, падая вниз, вызовет динамическое растяжение каната.)

12. Определить мощность, потерянную на трение в подшипнике диаметра 100 мм при нагрузке в $1,5 \text{ т}$ и 100 об/мин , если коэффициент трения равен $0,015$. Какое количество тепла при этом выделяется в 1 сек. ?

13. На сколько градусов повысилась бы в минуту температура подшипника радиуса 175 мм , если нагрузка равна 8 т , вал делает 50 об/мин , коэффициент трения равен $0,05$ и за счет 3 больших калорий тепла температура подшипника повышается на 1° C .

14. Вычислить потерю энергии при ударе в примере 7 стр. 224.

15. Вычислить, при какой минимальной скорости пули произойдет опрокидывание мишени в примере 8 стр. 224.

А. На русском языке.

1. Николан, Е. Л. Лекции по теоретической механике, часть III, вып. 1. Динамика материальной точки, вып. 2. Динамика материальной системы. ГТТИ, 1933.
2. Крылов, А. Н. Курс теоретической механики, отделы III—IV, СПб 1912.
3. Мещерский, И. В. Курс теоретической механики, ч. II, ГИЗ. 1928.
4. Жуковский, Н. Е. Теоретическая механика, ч. II, ГТИ, 1931.
5. Он же. Аналитическая механика, ГТИ, 1931.
6. Чаплыгин, С. А. Механика системы, ч. II. Динамика системы, Гиз, 1924.
7. Динник, А. Н. Теоретическая механика, ДВОУ, Харьков 1931.
8. М. И. Акимов, Н. Е. Кочин, К. В. Меликов, Н. Е. Неронов. Теоретическая механика, ч. III. Н. Е. Кочин. Динамика материальной точки, ч. IV. Н. Е. Неронов. Динамика системы, ГТТИ, 1932—33.
9. Розе, Н. В. (ред.). Теоретическая механика, ч. I. Механика материальной точки, ГТТИ, 1932.
10. Он же. Динамика твердого тела, Кубуч, Лнг. 1931.
11. Сомов, П. О. Основания теоретической механики, СПб 1904.
12. Эйхенвальд А. А. Теоретическая физика, ч. II. Общая механика, ч. III. Механика твердого тела, ГТТИ, 1932.
13. Поль, Р. В. Введение в механику и акустику, ГТТИ, 1932.
14. Аппель и Доттевилль. Курс теоретической механики, 2 тома, Одесса 1912.
15. Тимошенко, С. П. Теория колебаний в инженерном деле, ГНТИ, 1931.
16. Крылов, А. Н. и Крутков, Ю. А. Общая теория гироскопов и некоторых технических их применений, изд. Ак. Наук СССР, 1932.

Б. На иностранных языках.

1. Routh, E. J. Die Dynamik der Systeme starrer Körper (перевод с англ.) Bd. 1, Die Elemente, Leipzig 1898.
2. Föppl, A. Vorlesungen über technische Mechanik, Bd. 2, 4, 6. Leipzig.
3. Appell, P.¹⁾ Traité de mécanique rationnelle, t. 1—2, Paris 1920—23.
4. Levi-Civita e Amaldi, U.²⁾ Lezioni di meccanica razionale, vol. I, II₁, II₂. Bologna 1926—1927.
5. Love, A. E. H. Theoretische Mechanik (перевод с англ.), Berlin 1920.
6. Hamel, G. Elementare Mechanik, Leipzig 1922.
7. Webster, A.³⁾ The dynamics of particles solid and rigid bodies, Leipzig 1925.
8. Müller, W. Dynamik, B. 1—2, Sammlung Göschen, 1925.
9. Marcolongo, R. Theoretische Mechanik, B. 1—2, Leipzig, 1911—1912.
10. Wittenbauer, F. Graphische Dynamik, Berlin 1923.
11. Hort, W. Technische Schwingungstheorie, Berlin 1922.
12. Klein, F. und Sommerfeld⁴⁾, A. Über die Theorie des Kreisels, H. 1—4, Leipzig 1910—1923.
13. Grammel, R. Der Kiesel, seine Theorie und seine Anwendungen, Braunschweig 1920.
14. Bogaert, E. W. L'effet gyrostatique et ses applications, Bruxelles 1912.
15. Grabtree, H. An elementary treatement on the theory of spinning tops and gyroscopic motion, London 1909.
16. Boulanger, A. Dynamique des solides tournants, Paris 1926.
17. Zoratti, L. Les principes de la mécanique classique, Mémorial des Sc. Math., fasc. XXX, Paris 1929.

¹⁾ Существует русский перевод: Аппель, Руководство по рациональной механике, М. 1912 (библиографическая редкость).

²⁾ Готовится русский перевод этого выдающегося по своим достоинствам труда.

³⁾ Выходит русский перевод.

⁴⁾ Интересующийся техническими приложениями теории гироскопов может обратиться сразу к изучению IV части этого труда.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Введение	6
Основные понятия и законы динамики	—
§ 1. Кинематика и динамика; различие их задач и методов	9
§ 2. Действие одного материального тела на другое. Сила, ее статическое и динамическое проявление	11
§ 3. Статическое измерение силы. Килограмм. Взвешивание как способ измерять силы	12
§ 4. Динамическое измерение силы. Масса. Зависимость силы от ускорения	14
§ 5. Взаимодействия тел. Действие и противодействие	19
§ 6. Заключение. Абсолютное и относительное движение в динамике	20
Тема первая. Основные уравнения движения и общие теоремы о движении центра инерции и изменении количества движения	25
Задание 1-е. Дифференциальные уравнения системы материальных точек	28
§ 7. Основные дифференциальные уравнения движения материальной точки и системы точек. Векторная форма уравнений и проекции их на различные системы осей. Естественные уравнения	29
§ 8. Две основные задачи динамики и подход к их решению. Начальные условия движения и их значение для определения движения	31
Задание 2-е. Движение центра инерции, системы	79
§ 9. Внешние и внутренние силы. Центр инерции системы и его движение. Главный вектор внешних и внутренних сил	80
§ 10. Иллюстрации применения теоремы движения центра инерции к описанию некоторых явлений	85
Задание 3-е. Теорема количеств движения	107
§ 11. Теорема количеств движения для системы точек	108
§ 12. Применение теоремы количеств движения к сплошным системам. Теорема Эйлера	111
§ 13. Теорема импульсов и ее применение к теории удара	121
§ 14. Удар точки о преграду. Гипотеза Ньютона. Кинематический и динамический смысл коэффициента восстановления	127
§ 15. Теория удара шаров по Герцу	135
Тема вторая. Теорема моментов	141
Задание 4-е. Теорема моментов количеств движения для точки и системы материальных точек	143
§ 16. Теорема моментов количеств движения для одной материальной точки	144
§ 17. Теорема моментов количеств движения для системы материальных точек	147
Задание 5-е. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси	161
§ 18. Момент количества движения твердого тела относительно оси вращения. Понятие о моменте инерции	162
§ 19. Моменты инерции некоторых тел. Теорема о моментах инерции относительно параллельных осей	164
§ 20. Дифференциальное уравнение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси	173

Задание 6-е. Реакции оси вращающегося тела. Удар	193
§ 21. Реакции неподвижной оси вращающегося тела	194
§ 22. Тензор инерций. Главные оси инерции	198
§ 23. Уравновешивание вращающегося тела	208
§ 24. Влияние внешних ударов на момент количества движения системы	214
§ 25. Влияние удара на ось вращающегося тела	219
Задание 7-е. Теорема моментов в относительном движении по отношению к центру инерции	224
§ 26. Теорема моментов в относительном движении системы по отношению к центру инерции	225
§ 27. Приложения теоремы сохранения главного момента количества движения относительно оси	229
§ 28. Динамика плоского движения	233
Задание 8-е. Основание теории гироскопических явлений	257
§ 29. Элементарная теория гироскопических явлений	—
§ 30. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки; общий случай движения твердого тела	276
§ 31. Определение положения твердого тела при помощи эйлеровых углов. Выражения для проекций угловой скорости тела через эйлеровы углы и их производные	278
§ 32. Гироскопический момент в случае регулярной прецессии	282
Тема третья. Работа и энергия	290
Задание 9-е. Работа и потенциальная энергия	298
§ 33. Работа постоянной силы на прямолинейном пути. Скалярное произведение двух векторов. Работа как инвариантный скаляр	—
§ 34. Работа переменной силы на прямолинейном и криволинейном пути. Элементарная работа силы. Работа силы на конечном участке пути	303
§ 35. Силовое поле и его характеристики; напряжение и силовые линии. Работа при движении в силовом поле. Условия независимости работы от формы траектории	335
§ 36. Потенциальная энергия поля. Выражение работы в силовом поле через падение потенциала	343
Задание 10-е. Кинетическая энергия системы материальных точек	362
§ 37. Кинетическая энергия материальной точки и системы материальных точек	363
§ 38. Кинетическая энергия твердого тела в простейших случаях движения	364
§ 39. Теорема Кенинга	374
§ 40. Кинетическая энергия в плоском движении твердого тела	375
§ 41. Кинетическая энергия тела в общем случае движения	382
Задание 11-е. Теорема об изменении кинетической энергии и закон сохранения механической энергии	392
§ 42. Теорема об изменении кинетической энергии	393
§ 43. Закон сохранения механической энергии. Приток и рассеяние механической энергии. Связь с общим законом сохранения энергии	426
§ 44. Потеря энергии при ударе	439

