

Д. Михалос



Звездные атмосферы



SECOND EDITION

Stellar Atmospheres

Dimitri Mihalas

High Altitude Observatory
National Center for Atmospheric Research

W. H. FREEMAN AND COMPANY
San Francisco

Д. Михалас

Звездные атмосферы

В 2-Х ЧАСТЯХ

2

Перевод с английского
С. И. ГРАЧЕВА и Д. И. НАГИРНЕРА
под редакцией
В. В. ИВАНОВА

«МИР»
МОСКВА 1982

Д. Михалас. Звездные атмосферы. Пер. с англ. — М.: Мир, 1982 — 424 с., ил.

Книга видного американского астрофизика представляет собой учебное руководство по современной теории звездных атмосфер — основы теоретической астрофизики, позволяющей на основе наблюдений и анализа спектров звезд определять их химический состав и физические условия в звездных атмосферах. Первое издание книги (1970) приобрело за рубежом широкую известность. В новом издании добавлен материал о движущихся атмосферах и звездном ветре, а остальные главы переработаны с учетом последних достижений астрофизики.

В русском переводе книга разделена на две части. В часть 2 вошли новые методы расчета профилей линий с учетом отклонений от термодинамического равновесия, макроскопических движений в атмосферах звезд, а также теория звездного ветра.

Для астрономов и физиков — специалистов и студентов старших курсов.

*
*Редакция литературы
по космическим исследованиям,
астрономии и геофизике*

Глава 8

Линейчатый спектр: общая картина

На фоне непрерывного спектра звезды видны дискретные спектральные линии, как абсорбционные, так и эмиссионные. Эти линии появляются при переходах между связанными состояниями атомов и ионов, имеющихся в звездной атмосфере. Разнообразие линий, возникающих из весьма разных состояний атомов и ионов, колоссально. Это приводит к тому, что спектры звезд различных классов выглядят совсем непохожими друг на друга. Общее представление о том, сколь разнообразен вид спектров, лучше всего можно составить, внимательно рассматривая реальные звездные спектры, в частности приводимые в [5] и [465] (см. также [261], гл. 14; [330], гл. 1). При этом выясняется, что линии в звездных спектрах чрезвычайно сильно отличаются друг от друга по интенсивности и показывают разительные отличия в профилях. Внимательное исследование позволяет установить, что спектры допускают двумерную классификацию, которая отражает влияние двух главных параметров — эффективной температуры и светимости звезды. Описание деталей процедуры классификации — она была доведена до высокой степени совершенства Морганом и его сотрудниками — и всего, что из нее можно извлечь, увело бы нас слишком далеко в сторону. Поэтому следует тщательно изучить указанные выше литературные источники. Мы ограничимся утверждением, что спектральные линии содержат огромное количество информации о том, как физические параметры изменяются с глубиной в атмосфере звезды и поэтому могут служить важным диагностическим средством при изучении состояния атмосферы.

Непрозрачность в области ядра линии гораздо выше, чем в крыле. Поэтому линии дают возможность подвергнуть исследованию большой интервал глубин в атмосфере, от очень высоких слоев (которые видны в ядре линии) до самых глубоких из доступных наблюдениям точек (глубина образования континуума). Кроме того, поскольку разброс частот в линии мал, линии чувствительны к эффектам, вызываемым полями скоростей. Поэтому линии служат тем средством, с помощью которого можно изучать движения в звездных атмосферах.

Очевидно также, что интенсивность некоторой данной линии должна содержать сведения о числе поглощающих фотоны атомов, которые лежат на луче зрения, и тем самым — о содержании в атмосфере химического элемента, вызывающего поглощение в линии. Поэтому при соответствующей интерпретации линейчатый спектр дает возможность произвести количественный химический анализ вещества, из которого состоят звезды. Эта информация в свою очередь служит важным составным элементом при попытках построения согласованной картины строения и эволюции звезд, Галактики и Вселенной в целом.

Ввиду этого разработка теории, позволяющей предсказывать профили линий и получать интересующую нас информацию, представляет первостепенный интерес. Множество астрономов вложили в это огромные силы, и в результате был достигнут значительный прогресс. Вторая часть этой книги будет посвящена описанию теоретических методов, имеющихся в настоящее время для рассмотрения проблемы образования линий. Чтобы дать представление об общем направлении последующего изложения, в этой главе кратко обсуждаются некоторые основные стороны проблемы и дается сводка того, какого типа сведения нужны для ее решения.

8.1. Наблюдаемые величины

Линию в спектре звезды полнее всего характеризует ее *профиль*, представляющий собой наблюдаемое распределение энергии по частотам. Для всех звезд, за исключением Солнца, может наблюдаться лишь поток от всего диска звезды. Будем измерять поток в линии F_ν в единицах потока в континууме F_c . Профиль линии описывается либо *глубиной поглощения*

$$A_\nu = 1 - F_\nu/F_c, \quad (8.1)$$

либо *остаточным потоком*

$$R_\nu = F_\nu/F_c = 1 - A_\nu. \quad (8.2)$$

В случае Солнца распределение излучения по частотам можно наблюдать для любой точки диска. Профиль линии можно в этом случае описывать с помощью интенсивности выходящего излучения $I_\nu(0, \mu)$, выраженной в единицах интенсивности соседнего континуума $I_c(0, \mu)$, полагая

$$a_\nu(\mu) = 1 - I_\nu(0, \mu)/I_c(0, \mu) \quad (8.3)$$

или

$$r_\nu(\mu) = I_\nu(0, \mu)/I_c(0, \mu) = 1 - a_\nu(\mu). \quad (8.4)$$

Информация об изменении профиля *от центра к краю* чрезвычайно ценна, так как она обеспечивает (при посредстве соотношения Эддингтона — Барбье) дополнительное разрешение по глубине, которое иначе получить нельзя, и налагает важные дополнительные ограничения на теорию. Разумеется, такая информация имеется *только* для солнечного спектра, и в этом одна из причин того, почему спектр Солнца служит идеальным полем для испытания всех предлагаемых теорий образования линий.

Из-за низкой освещенности измерить спектр звезды с разрешением, достаточным для детального определения профиля линии, часто не удается, и тогда вместо профиля, дающего подробную информацию, приходится использовать интегральную силу линии, или *эквивалентную ширину*. Для звезд, у которых измеряется *поток* от всего диска, эквивалентная ширина определяется либо в единицах частоты (Гц):

$$W_\nu = \int_0^\infty A_\nu d\nu, \quad (8.5)$$

либо чаще в шкале длин волн ($\text{\AA}$ или $\text{M}\text{\AA}$):

$$W_\lambda = \int_0^\infty A_\nu d\lambda. \quad (8.6)$$

Для *Солнца*, где имеется возможность получать угловую зависимость, можно, кроме того, ввести

$$\text{или} \quad W_\nu(\mu) = \int_0^\infty a_\nu(\mu) d\nu \quad (8.7)$$

$$W_\lambda(\mu) = \int_0^\infty a_\nu(\mu) d\lambda. \quad (8.8)$$

Эквивалентная ширина есть, очевидно, ширина совершенно темной линии, имеющей ту же площадь под уровнем континуума, что и у изучаемой линии (отсюда и название). Понятно, что W служит *мерой полной энергии континуума, изымаемой линией* (если считать, что это линия поглощения).

В идеале стараются получить профили, а не эквивалентные ши-

рины, так как они содержат гораздо больше информации. В частности, очевидно, что существует бесконечное число радикально отличающихся друг от друга профилей (каждый из которых позволил бы сделать вполне определенные заключения о структуре атмосферы), которые будут иметь заданную эквивалентную ширину. Интерпретация, основанная на одной только эквивалентной ширине, может быть неправильной (это замечание справедливо даже и для профилей!). И все же существуют теоретические методы, основанные на совместном использовании сведений об эквивалентных ширинах многих линий (*кривая роста*), которые дают важные и практически однозначные результаты.

Реальный процесс измерения для получения наблюдательных данных требует использования тонких инструментальных методов. Мы не будем обсуждать здесь эти методы, так как это выходит за рамки этой книги. В литературе же имеются превосходные обзоры (см., например, [300], гл. 2, 4 и 13).

8.2. Физические факторы, влияющие на образование линий

Как и в случае континуума, для расчета потока в линии нужно решить уравнение переноса, так как наблюдаемое излучение зарождается в пределах широкого диапазона глубин, где физические свойства вещества могут более или менее сильно меняться. Выясним сейчас, какая информация нужна для того, чтобы можно было написать и решить уравнение переноса в спектральной линии.

Рассмотрим некоторую частоту ν и предположим, что коэффициенты поглощения и рассеяния в континууме k_ν и σ_ν и коэффициент поглощения в линии $\chi\phi_\nu$ известны в функции глубины. Тогда можно ввести шкалу оптических глубин в линии

$$\tau_\nu = \int_z^{z_{\max}} (k_\nu + \sigma_\nu + \chi\phi_\nu) dz' \quad (8.9)$$

и шкалу оптических глубин в континууме

$$\tau_c = \int_z^{z_{\max}} (k_\nu + \sigma_\nu) dz'. \quad (8.10)$$

Если, кроме того, был бы известен ход функции источников S_ν с глубиной, то можно было бы сразу же вычислить

$$F_\nu = 2 \int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu) E_2(\tau_\nu) d\tau_\nu, \quad (8.11)$$

$$F_c = 2 \int_0^{\infty} S_c(\tau_c) E_2(\tau_c) d\tau_c, \quad (8.12)$$

а отсюда, если требуется, также и A_ν по формуле (8.1) и W_λ по формуле (8.6). Конечно, на практике именно функция источников и подлежит определению. Функция S_ν известна заранее только в тривиальном случае ЛТР (именно, $S_\nu = B_\nu$). Как говорилось в гл. 2 и 7, в общем случае (когда ЛТР заранее не постулируется) функция источников и оптическая глубина зависят явным образом от населенностей тех конкретных уровней, переход между которыми дает линию, а эти населенности в свою очередь зависят от поля излучения и потому в конечном счете от функции источников. Таким образом, здесь, как и в случае континуума, требуется совместное самосогласованное решение системы уравнений переноса и статистического равновесия.

Прежде чем переходить к этому, заметим, что некоторое общее представление о характере информации, которая потребуется для решения этой проблемы, можно получить из следующих феноменологических соображений. Рассмотрим распространение фотонов в линии, которая налагается на континуум, обусловленный поглощением и рассеянием. Часть фотонов будет взаимодействовать с континуумом, другие — вызывать переходы в этой линии. Некоторые из фотонов, поглощенных в линии, будут рассеиваться, испытывая, вообще говоря, перераспределение по частотам и по углам, которое описывается функцией перераспределения $R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n})$. Другие могут исчезать за счет ударных девозбуждений или переходов на другие уровни. Фотоны могут появляться в линии в результате ударных возбуждений или переходов на верхний уровень с других уровней с последующим переходом на нижний уровень. Уравнение переноса, учитывающее все эти процессы, будет иметь вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = & - (k_\nu + \sigma_\nu + \chi\phi_\nu) I_\nu + k_\nu B_\nu + \sigma_\nu I_\nu + \\ & + \tilde{\gamma} \chi_l \oint \frac{d\omega}{4\pi} \int_0^\infty d\nu' I(\nu', \mathbf{n}') R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) + \tilde{\epsilon} \chi_l \phi_\nu B_\nu. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Здесь коэффициенты $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\epsilon}$ дают соответственно доли рассеиваемых фотонов и тех, которые излучаются при других процессах, характеризующихся некоторой типичной температурой T_R (не равной, вообще говоря, локальной электронной температуре).

Теперь мы можем выделить четыре важных составных элемента, необходимые для теоретического расчета профилей линий.

а) Мы должны уметь рассчитывать профиль поглощения ϕ_ν . Этот вопрос будет рассмотрен в гл. 9.

б) Следует научиться описывать взаимодействие фотонов и вещества посредством параметров $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\epsilon}$. В общем случае выражения для этих величин могут быть очень сложными. Они могут содержать скорости и радиативных, и ударных переходов между уровнями, порождающими линию, а также члены, описывающие взаимосвязь с другими уровнями. Конкретные выражения для $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\epsilon}$ следуют из уравнений статистического равновесия для атома как целого. Этот аспект проблемы будет изучен в гл. 11 и 12.

в) Мы должны научиться рассчитывать функцию перераспределения $R(\nu', n'; \nu, n)$ и определять влияние деталей процесса рассеяния фотонов на профиль линии. Эти вопросы будут рассмотрены в гл. 13.

г) Мы должны быть в состоянии решить получающуюся в результате задачу о переносе излучения. Что касается этой проблемы, то здесь будет достаточно отослать читателя назад, к обсуждавшимся в гл. 6 методам решения задач переноса путем дискретизации.

Во всех четырех перечисленных сейчас областях в последнее время достигнуты большие успехи. Наиболее существенно понимание проблемы продвинулось в отношении п. (б), (в) и (г). В ранних работах по проблеме образования линий вопрос о перераспределении часто игнорировали, рассматривая рассеяние в линии как когерентное. Теперь мы знаем, что это плохое приближение и что на самом деле гораздо лучшим приближением является противоположное крайнее предположение о полном перераспределении в пределах линии. Параметры $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\epsilon}$, вводившиеся при классическом подходе, относились лишь к отдельным частным случаям, что породило некоторые серьезные заблуждения. Более близкий нам по времени анализ этой проблемы выявил важность ясного понимания природы указанных коэффициентов. Что касается получения реального решения уравнения переноса, то существенное продвижение вперед стало возможно за счет применения ЭВМ, обладающих большим быстродействием и имеющих обширную память, в сочетании с развитами в последнее время мощными вычислительными методами.

Наконец, следует отметить, что в уравнении (8.13) молчаливо предполагалось, что атмосфера неподвижна. Важное влияние на процесс образования линий оказывают крупномасштабные движе-

ния. Эти эффекты обсуждаются в гл. 14, где описывается несколько различных методов решения уравнения переноса в движущихся средах. Роль линий в формировании *динамического* состояния атмосферы обсуждается в гл. 15 в разделах, посвященных звездному ветру, порождаемому излучением.

Глава 9

Профиль коэффициента поглощения в линии

Профили линий, которые видны в звездных спектрах, несут в себе сведения как о физических условиях, так и о содержании химических элементов в звездной атмосфере. Поэтому они служат чрезвычайно ценным средством для диагностики атмосфер, и нужно стремиться как можно полнее извлечь ту информацию, которая в них заключена. Чтобы иметь возможность выполнить анализ наблюдаемых профилей линий, нам нужно знать, как та функция, которая описывает распределение непрозрачности в линии в функции частоты, т.е. *коэффициент поглощения* в линии, зависит от локальных условий — плотности, температуры и т.д. У изолированного атома с уровнями, имеющими практически бесконечные времена жизни, спектральные линии были бы почти абсолютно тонкими. Но на самом деле имеется несколько механизмов, которые вызывают размытость уровней у реальных атомов, находящихся в плазме, и, как следствие этого, приводят к *уширению линий*.

Первым механизмом уширения линий, который будет рассмотрен ниже, является *естественное затухание* (или *затухание вследствие излучения*). Этим термином описывается ширина линии, определяемая конечностью времени жизни атомных уровней из-за их распада вследствие самого процесса излучения. Естественное затухание имеет место даже у одиночного изолированного атома. Если атом находится в плазме, то его линии будут испытывать дополнительное *расширение вследствие давления*, вызываемое возмущением пуга излучаемых волн из-за столкновений с другими атомами или заряженными частицами газа.

В рамках классической электродинамики расширение давлением описывается двумя приближенными теориями, соответствующими различным предельным случаям. Первая из них известна под названием *ударного приближения*. В ней излучающий атом считается осциллятором, испытывающим столкновение, которое происходит практически мгновенно и прерывает излучаемый пуг волн, вызывая внезапный сдвиг фазы или переход на другой энергетический уровень. Подобные столкновения являются, таким образом, причиной того, что промежутки между «началом» и «концом» процесса излу-

чения у атома конечны. Это в свою очередь приводит к расплыванию полосы частот в излучаемой волне и к сдвигу линии относительно ее несмещенной центральной частоты. Альтернативный подход известен под названием *статистической теории*. Здесь считается, что излучающий атом находится в поле, создаваемом ансамблем возмущающих частиц. Это поле из-за движения частиц будет испытывать статистические флуктуации около некоторого среднего значения. При той или иной конкретной напряженности поля энергетические уровни излучающего атома слегка сдвигаются и соответственно частота линии несколько изменяется. Далее принимается, что интенсивность излучения на любой заданной смещенной частоте пропорциональна вероятности, с которой встречается соответствующая величина напряженности поля.

Границы применимости *классических* теорий уширения вследствие давления определяются в первую очередь их неспособностью учитывать истинную *структуру* излучающего атома и возможность переходов между уровнями под действием столкновений с возмущающими частицами. *Квантовая теория* уширения давлением свободна от обоих этих недостатков. Ее результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными.

Наконец, следует учесть, что в звездной атмосфере мы наблюдаем совокупность движущихся атомов, имеющих определенное распределение проекций скоростей на луч зрения. Профиль линии у каждого атома смещен из-за эффекта Доплера на величину, определяемую проекцией скорости этого атома на луч зрения. Профиль, порождаемый совокупностью атомов, есть суперпозиция таких смещенных профилей отдельных атомов, даваемая сверткой атомного профиля и распределения атомов по скоростям.

За последнее десятилетие в теории уширения линий был достигнут колоссальный прогресс. К настоящему времени имеются надежные расчеты профилей для многих линий, представляющих для астрофизики первостепенный интерес. Квантовая теория достигла высокого совершенства, но одновременно стала и довольно сложной. Поскольку имеется несколько монографий, посвященных систематическому изложению общей теории уширения линий (см., в частности, [264], [268], [629]), в этой главе будет дана лишь краткая сводка важнейших результатов. За дальнейшими сведениями следует обратиться к только что упомянутым книгам или к статьям, ссылки на которые собраны в [228], [229], [232].

9.1. Профиль, обусловленный естественным затуханием

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР, СПЕКТР МОЩНОСТИ И АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ

Приведем сначала несколько основных соотношений, которые понадобятся нам в дальнейшем. Рассмотрим некоторый зависящий от времени процесс с амплитудой $f(t)$. Преобразование Фурье $F(\omega)$ определим следующим образом:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt. \quad (9.1)$$

Обращение преобразования Фурье дается формулой

$$f(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (9.2)$$

Величина

$$E(\omega) = (2\pi)^{-1} F^*(\omega)F(\omega) \quad (9.3)$$

называется *энергетическим спектром* процесса. Такое название мотивируется тем, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) d\omega = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega)F(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t)f(t) dt. \quad (9.4)$$

Это равенство можно проверить прямой подстановкой в него (9.1). Если, например, $f(t)$ — напряжение на концах сопротивления в 1 Ом, то $f^*(t)f(t)$ — мгновенная мощность, подводимая к сопротивлению, а интеграл по времени дает полную энергию. Таким образом, $E(\omega)$ непосредственно измеряет энергию цуга волн на частоте ω .

Во многих случаях используется не сам энергетический спектр, а количество энергии, подводимой за единицу времени. Оно характеризуется *спектром мощности* $I(\omega)$, который вводится так:

$$I(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} (2\pi T)^{-1} \left| \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (9.5)$$

Однако для колебаний конечной продолжительности (или, скажем, с экспоненциальным затуханием) спектр мощности будет равен нулю, так как усреднение *конечной* полной излученной энергии по бес-

конечному временному промежутку даст нулевую мощность. В подобных случаях, представляющих практический интерес, используется непосредственно энергетический спектр, причем предполагается, что мы наблюдаем ансамбль осцилляторов, возникающих с постоянным темпом и обладающих случайными фазами. Тогда в результате мы получим конечную мощность с распределением по частотам, пропорциональным энергетическому спектру отдельных осцилляторов.

В некоторых случаях рассчитать спектр мощности, исходя непосредственно из его определения (9.5), оказывается невозможным. Тогда целесообразно использовать автокорреляционную функцию

$$\Phi(s) = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_{-T/2}^{T/2} f^*(t) f(t+s) dt, \quad (9.6)$$

через которую спектр мощности выражается следующим образом:

$$I(\omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(s) e^{-i\omega s} ds, \quad (9.7)$$

что можно проверить непосредственной подстановкой, выполнив предельный переход при интегрировании по s . Автокорреляционная функция представляет собой мощное средство для расчета спектров мощности излучения, испускаемого атомами, возмущаемыми столкновениями.

КЛАССИЧЕСКИЙ ЗАТУХАЮЩИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Простейшее описание процесса излучения в линии получается, если считать атом классическим осциллятором. В §4.2 при расчете мощности энергии, испускаемой осциллятором, было показано, что профиль линии, излучаемой возбуждаемым синусоидальной волной затухающим осциллятором, является лоренцевским. Применим кратко описанные выше понятия к осциллятору, затухающему вследствие излучения, и покажем, что профиль получается тем же самым. Согласно классической электродинамике, уравнение движения излучающего осциллятора имеет вид [см. уравнение (4.27)]

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \gamma \dot{x}, \quad (9.8)$$

где γ — классическая постоянная затухания

$$\gamma = 2e^2 \omega_0^2 / 3mc^3. \quad (9.9)$$

Член, описывающий затухание вследствие излучения, гораздо меньше по величине, чем член, дающий упругую силу. Поэтому его можно оценить, пользуясь незатухающим решением $x = x_0 \exp(i\omega_0 t)$, что дает

$$\ddot{x} = -(\omega_0^2 + i\gamma\omega_0)x. \quad (9.10)$$

Если пренебречь членами порядка γ^2 , то решение уравнения (9.10) дается выражением

$$x = x_0 e^{i\omega_0 t} e^{-\gamma t/2}. \quad (9.11)$$

Это экспоненциально затухающие колебания. Найдя преобразование Фурье в предположении, что колебания начинаются внезапно при $t = 0$, мы получим

$$F(\omega) = x_0 \int_0^{\infty} e^{-i(\omega - \omega_0)t} e^{-\gamma t/2} dt = x_0 / [i(\omega - \omega_0) + \gamma/2]. \quad (9.12)$$

Поэтому энергетический спектр осциллятора есть

$$E(\omega) = (x_0^2/2\pi) [(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2]^{-1}. \quad (9.13)$$

Спектр мощности совокупности таких осцилляторов, непрерывно возникающих со случайными фазами, пропорционален $E(\omega)$. Поэтому профиль, нормированный так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) d\omega = 1, \quad (9.14)$$

имеет вид

$$I(\omega) = (\gamma/2\pi) [(\omega - \omega_0)^2 + (\gamma/2)^2]^{-1}. \quad (9.15)$$

Таким образом, затухающий классический осциллятор порождает *лоренцевский профиль* с полной шириной по половинной интенсивности, равной γ . В шкале длин волн эта ширина равна

$$\Delta\lambda_c = 2\pi c \gamma / \omega_0^2 = 4\pi e^2 / 3mc^2 = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{Å}. \quad (9.16)$$

Эта ширина гораздо меньше ширин линий в лабораторных или звездных спектрах. Поэтому нам следует изучить более общие представления о том, как протекают процессы излучения.

КВАНТОМЕХАНИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ

Квантовомеханический аналог затухающего осциллятора получается, если принять, что излучение возникает при переходе атома

из возбужденного состояния с конечным временем жизни в основное состояние. Следуя Вигнеру и Вайскопфу, запишем вероятность обнаружить атом в возбужденном состоянии j в виде

$$P_j(t) = \psi_j^* \psi_j e^{-\Gamma t}, \quad (9.17)$$

где $\Gamma = A_{ji}$ — коэффициент спонтанного перехода. Тогда зависимость волновой функции этого состояния от времени описывается формулой

$$\psi_j(\mathbf{r}, t) e^{-\Gamma t/2} = u_j(\mathbf{r}) e^{-iE_j/\hbar} e^{-\Gamma t/2} = u_j(\mathbf{r}) e^{-(i\omega_j + \Gamma/2)t}. \quad (9.18)$$

В соответствии с *принципом неопределенности* считаем, что состояние j , с которого происходит переход вниз (его характерное время жизни Δt_j), имеет не абсолютно точно определенную энергию, а представляет собой суперпозицию состояний с энергиями из некоторого промежутка около E_j (с характерной шириной $\Delta E_j \sim \hbar/\Delta t_j$). Согласно фундаментальным соотношениям взаимности квантовой механики, *амплитуда* распределения энергии дается преобразованием Фурье от временной зависимости волновой функции, а распределение *вероятностей* состояний с данной энергией есть квадрат этой амплитуды. Поэтому, вычислив преобразование Фурье от выражения (9.18), убедимся, что *по форме* получится тот же самый результат, который был найден из формулы (9.11). Действуя и дальше точно таким же образом, как при получении (9.15), окончательно найдем

$$I(\omega) = (\Gamma/2\pi)[(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2]^{-1}. \quad (9.19)$$

Из (9.17) видно, что Γ следует интерпретировать как величину, обратную времени жизни верхнего состояния. Если из верхнего состояния U возможно *несколько* различных переходов, то соответствующей шириной состояния будет

$$\Gamma_U = \sum_{i < U} A_{Ui}. \quad (9.20)$$

Предположим теперь, что рассматриваемая линия возникает при переходе между двумя *возбужденными* состояниями, так что нижнее состояние L также имеет некоторую ширину Γ_L , определяемую формулой, аналогичной (9.20). Вообще говоря, профиль линии должен отражать ширины *обоих* состояний. Допустим, что распределение подсостояний каждого из уровней около его номинальной энергии дается лоренцевским профилем с соответствующим Γ . Положим для каждого из уровней $\delta = \Gamma/2$ и обозначим через x

смещение определенного подсостояния по частоте от номинальной частоты, т.е. $x = (E - E_0)/\hbar$. Предположим, что вероятность перехода в данное конечное подсостояние x' нижнего уровня не зависит от подсостояния x верхнего уровня, из которого начинается переход. Тогда совместная вероятность того, что переход начнется из подсостояния x и закончится в подсостоянии x' , равна

$$p(x, x') = (\delta_L \delta_U / \pi^2) [(x^2 + \delta_U^2)(x'^2 + \delta_L^2)]^{-1}. \quad (9.21)$$

Если интересоваться лишь переходами, приводящими к излучению некоторой фиксированной частоты ω , то x и x' должны быть связаны соотношением $\omega_0 + x - x' = \omega$, или, если ввести обозначение $x_0 = \omega - \omega_0$,

$$x' - x = x_0. \quad (9.22)$$

Полная интенсивность на частоте ω получается суммированием по всем верхним подсостояниям x , причем соответствующие x' определяются из равенства (9.22), так что

$$\begin{aligned} I(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} p(x, x - x_0) dx = \\ &= \frac{\delta_U \delta_L}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + \delta_U^2)[(x - x_0)^2 + \delta_L^2]}. \end{aligned} \quad (9.23)$$

Этот интеграл можно вычислить с помощью контурного интегрирования, воспользовавшись теорией вычетов. Следует учесть вклад от полюсов при $z = \pm i\delta_U$ и $z = x_0 \pm i\delta_L$. Выполнив интегрирование, убеждаемся, что и здесь $I(\omega)$ дается формулой (9.19), однако теперь ширина, обусловленная затуханием, равна

$$\Gamma = \Gamma_L + \Gamma_U. \quad (9.24)$$

Итак, профиль является лоренцевским с полушириной, равной сумме полуширин обоих уровней.

Упражнение 9.1. Вычислить интеграл (9.23) путем интегрирования по контуру и убедиться в справедливости выражения (9.24).

Лоренцевский профиль, полученный нами выше, строго говоря, является *профилем излучения*. Если, однако, допустить, что имеет место *детальный баланс*, то *профиль поглощения* будет иметь *тот же самый вид*. Чтобы перейти к сечению поглощения в рас-

чете на один атом, вспомним соотношения (4.34) и (4.35), из которых следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha_{\nu} d\nu = (\pi e^2 / mc) f. \quad (9.25)$$

Тогда, взяв профиль излучения вида (9.19) и вернувшись в нем к обычной частоте, получим, что сечение поглощения равно

$$\alpha_{\nu} = \frac{\pi e^2}{mc} f \frac{\Gamma / 4\pi^2}{(\nu - \nu_0)^2 + (\Gamma / 4\pi)^2}. \quad (9.26)$$

Затухание вследствие излучения имеет первостепенное значение для сильных линий в средах низкой плотности, например для L_{α} в межзвездной среде. В звездных же атмосферах в большинстве случаев линии образуются в областях, где концентрация возмущающих атомов, ионов и электронов настолько высока, что становятся существенными (или даже преобладают) эффекты уширения вследствие давления.

9.2. Влияние доплеровского уширения.

Фойгтовский профиль

Когда наблюдается линия, образующаяся в спектре звездной атмосферы (или лабораторной плазмы), мы видим результат суммарного поглощения всеми атомами из целого ансамбля. Каждый атом будет иметь некоторую скорость вдоль луча зрения (в системе координат, связанной с наблюдателем), и собственный профиль этого атома вследствие эффекта Доплера окажется смещенным по частоте на соответствующую величину. Если процесс затухания, определяющий собственный профиль каждого атома, не коррелирует со скоростью этого атома, то, чтобы получить полное сечение поглощения, смещенные профили следует наложить друг на друга, что достигается взятием свертки.

Примем, что плазма характеризуется кинетической температурой T , а распределение частиц по скоростям максвелловское, так что вероятность обнаружить атом с проекцией скорости на луч зрения ξ , лежащей в промежутке $(\xi, \xi + d\xi)$, равна

$$W(\xi) d\xi = (\pi^{1/2} \xi_0)^{-1} \exp(-\xi^2 / \xi_0^2) d\xi, \quad (9.27)$$

где $\xi_0 = (2kT/m)^{1/2} = 12,85(T/10^4 A)^{1/2}$ км/с, причем A — атомный

вес атомов. Тогда, если мы наблюдаем на частоте ν , то атом с проекцией скорости ξ поглощает в своей собственной системе отсчета на частоте $\nu(1 - \xi/c)$ и коэффициент поглощения этого атома есть $\alpha(\nu - \xi\nu/c)$. Полный коэффициент поглощения на частоте ν дается поэтому интегралом, представляющим собой свертку

$$\alpha_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(\nu - \xi\nu/c) W(\xi) d\xi. \quad (9.28)$$

Формулу (9.28) можно применять для учета влияния *доплеровского уширения* при любом профиле поглощения. Всюду в дальнейшем в этом параграфе мы ограничиваемся рассмотрением случая, когда собственный профиль является лоренцевским.

Подставляя соотношения (9.26) и (9.27) в формулу (9.28) и вводя обозначения

$$v = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D, \quad (9.29)$$

$$y = \Delta\nu/\Delta\nu_D = \xi/\xi_0 \quad (9.30)$$

$$a = \Gamma/4\pi\Delta\nu_D, \quad (9.31)$$

где $\Delta\nu_D$ — *доплеровская ширина* линии

$$\Delta\nu_D = \xi_0\nu_0/c, \quad (9.32)$$

найдем, что коэффициент поглощения можно записать в виде

$$\alpha_\nu = (\pi^{1/2} e^2 f / mc \Delta\nu_D) H(a, v), \quad (9.33)$$

где

$$H(a, v) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{(v - y)^2 + a^2}. \quad (9.34)$$

Функция $H(a, v)$ называется *функцией Фойгта*. При выводе (9.34) считалось приближенно, что $\xi\nu/c \approx \xi\nu_0/c$ (для звездных атмосфер это оправдано). Обширные таблицы $H(a, v)$ даются в [219] и [314].

Общие методы вычисления функции Фойгта описываются в работах [314], [527], [528]. В условиях, представляющих интерес для астрофизики, обычно $a \ll 1$. В этом предельном случае можно получить удобное разложение $H(a, v)$ в ряд по степеням параметра a . Делается это следующим образом. Пользуясь тем, что преобразование Лапласа от косинуса равно

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx = a/(a^2 + b^2), \quad (9.35)$$

и используя формулу для косинуса суммы, можем записать функцию Фойгта в виде

$$H(a, v) = \pi^{-1} \int_0^{\infty} dx e^{-ax} \cos vx \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} \cos xy. \quad (9.36)$$

Но косинус-преобразование функции Гаусса равно

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \cos xy dy = \sqrt{\pi} e^{-x^2/4}, \quad (9.37)$$

откуда видно, что

$$H(a, v) = \pi^{-1/2} \int_0^{\infty} e^{-ax - x^2/4} \cos vxdx. \quad (9.38)$$

Если принять, что $a \ll 1$, то функцию e^{-ax} можно заменить ее разложением в ряд. Проинтегрировав его почленно, получим

$$H(a, v) = \Sigma a^n H_n(v), \quad (9.39)$$

где обозначено

$$H_n(v) = [(-1)^n / \pi^{1/2} n!] \int_0^{\infty} e^{-x^2/4} x^n \cos vxdx. \quad (9.40)$$

Из формулы (9.37) непосредственно следует, что

$$H_0(v) = e^{-v^2}. \quad (9.41)$$

Проинтегрировав первый член нечетного порядка по частям, можно переписать его в виде

$$H_1(v) = -(2/\pi^{1/2})(1 - v \int_0^{\infty} e^{-x^2/4} \sin vxdx). \quad (9.42)$$

Воспользовавшись следующим представлением синус-преобразования гауссовой функции:

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} \sin 2vy dy = e^{-v^2} \int_0^v e^{y^2} dy \equiv F(v), \quad (9.43)$$

найдем

$$H_1(v) = (2/\pi^{1/2})([2vF(v) - 1]). \quad (9.44)$$

Функция $F(v)$ называется *интегралом Доусона*. Эффективные методы ее вычисления приводятся в [170]. Функции $H_n(v)$ для $n \leq 4$ табулированы в [281] и в [11], стр. 325.

Упражнение 9.2. а) Показать, что функция Фойгта нормирована следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(a, v) dv = \pi^{1/2}.$$

б) Проверить соотношение $H_n(v) = -[d^2 H_{n-2}(v)/dv^2]/n(n-1)$, при помощи которого функции более высокого порядка могут быть последовательно выражены через $H_0(v)$ и $H_1(v)$. в) Получить $H_2(v)$, $H_3(v)$ и $H_4(v)$ в явном виде, выразив, в частности, $H_3(v)$ через $F(v)$. г) Показать, что при $a^2 + v^2 \gg 1$ функция $H(a, v) \approx \pi^{-1/2}/(a^2 + v^2)$.

Принимая во внимание результат упражнения 9.2 (г), мы видим, что $H(a, v) \approx a/\pi^{1/2}v^2$ при $v \gg 1$. Таким образом, функцию Фойгта можно схематически представить в виде

$$H(a, v) \sim e^{-v^2} + a/\pi^{1/2}v^2, \quad (9.45)$$

где первое слагаемое применимо в ядре линии (при $v \leq v^*$), а второе — в крыле линии (при $v \geq v^*$). При этом v^* выбирается так, что при $v = v^*$ оба слагаемых совпадают. В ядре линии преобладает доплеровское уширение, а в крыльях основную роль играет затухание.

9.3. Уширение вследствие столкновений. классическое ударное приближение

ПРИБЛИЖЕНИЕ ВАЙСКОПФА

Простейшее классическое ударное приближение берет свое начало с работ Лоренца, рассматривавшего атом как излучающий осциллятор, который испытывает изменения в фазе при столкновениях с возмущающими частицами. Предполагается, что излучающий атом сталкивается в каждый данный момент времени с одной возмущающей частицей. Считается, что столкновения происходят практически мгновенно, так что цуг волн испытывает мгновенный сбой фазы, который фактически этот цуг обрывает. Считается, что в промежутках между столкновениями атом не испытывает возмущений. Итак, предположим, что время между двумя последовательными столкновениями равно T и что в течение этого промежутка времени атом излучает монохроматическую волну $f(t) = \exp(i\omega_0 t)$. Преобразование Фурье от этого конечного цуга

волн равно

$$F(\omega, T) = \int_0^T e^{i(\omega_0 - \omega)t} dt = \frac{\exp[i(\omega - \omega_0)T] - 1}{i(\omega - \omega_0)}. \quad (9.46)$$

Энергетический спектр $E(\omega, T)$ такого пуга волн получается путем подстановки $F(\omega, T)$ в выражение (9.3).

Вообще говоря, какого-либо *единого* промежутка времени между столкновениями не существует, а величины этих промежутков каким-то случайным образом распределены около некоторого среднего значения. Если столкновения происходят в результате процесса случайного блуждания и *среднее время между столкновениями* равно τ , то вероятность того, что промежуток времени между двумя последовательными столкновениями заключен в интервале $(T, T + dT)$, составляет

$$W(T)dT = e^{-T/\tau} dT/\tau. \quad (9.47)$$

Поэтому, усредняя по всем значениям промежутков времени между столкновениями, получим средний энергетический спектр

$$E(\omega) = \langle E(\omega, T) \rangle = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty F^*(\omega, T) F(\omega, T) W(T) dT. \quad (9.48)$$

Вычисляя этот интеграл и учитывая нормировку, находим

$$E(\omega) = \frac{1/\pi\tau}{(\omega - \omega_0)^2 + (1/\tau)^2} = \frac{\Gamma/2\pi}{(\omega - \omega_0)^2 + (\Gamma/2)^2}. \quad (9.49)$$

Упражнение 9.3. Вывести формулу (9.49).

Итак, изложенная выше теория уширения линий вследствие столкновений также приводит к лоренцевскому профилю с параметром затухания $\Gamma = 2/\tau$ (это является результатом предположения, что все столкновения имеют дискретный характер). Чтобы завершить построение теории, нам надо получить оценку τ . Как и в случае осциллятора, затухающего из-за излучения, примем, что профиль ансамбля непрерывно возникающих осцилляторов со случайно распределенными фазами пропорционален энергетическому спектру отдельного осциллятора [усредненному по всем промежуткам времени, т.е. даваемому выражением (9.49)]. Если происходит затухание как вследствие *излучения*, так и из-за *столкновений* с ширинами Γ_R и Γ_c соответственно и если предположить, что эти два процесса полностью *независимы*, то результирующий профиль является сверткой двух лоренцевских профилей. Посредством тех же рассуждений, которые привели нас к формуле (9.24), легко пока-

зять, что комбинированный профиль также является лоренцевским с полной шириной $\Gamma = \Gamma_R + \Gamma_c$. Влияние доплеровского уширения можно учесть точно так же, как и в § 9.2. В результате получим фойгтовский профиль с соответствующей полной шириной, обусловленной затуханием.

Теперь наша задача состоит в определении среднего времени между столкновениями τ . Если излучающие атомы и возмущающие частицы имеют атомные веса A_r и A_p соответственно, причем скорости и тех и других распределены согласно формуле Максвелла с температурой T , то их средняя относительная скорость равна

$$v = \langle v^2 \rangle^{1/2} = [(8kT/\pi m_H)(A_r^{-1} + A_p^{-1})]^{1/2}. \quad (9.50)$$

Обозначив эффективное прицельное расстояние столкновений, ответственных за уширение, через ρ_0 , получим

$$\tau^{-1} = \pi \rho_0^2 N v \quad (9.51)$$

и

$$\Gamma = 2\pi \rho_0^2 N v, \quad (9.52)$$

где N — концентрация возмущающих частиц. Следовательно, нам нужно определить ρ_0 .

Следуя Вайскопфу [661], предположим, что а) возмущающая частица *классическая*; б) она движется мимо атома с постоянной скоростью по *прямолинейной траектории с прицельным расстоянием* ρ_0 ; в) *взаимодействие* между атомом и возмущающей частицей приближенно описывается формулой

$$\Delta\omega = C_p/r^p, \quad (9.53)$$

где $r(t) = (\rho^2 + v^2 t^2)^{1/2}$, причем момент $t = 0$ соответствует точке наибольшего сближения; г) воздействие возмущающей частицы не вызывает в атоме *никаких переходов*. Справедливость этих предположений мы обсудим ниже. Формула (9.53), описывающая взаимодействие, лишь приближенная, однако она достаточно точна в пределах довольно широкого интервала расстояний. Значение показателя p зависит от природы взаимодействия. Значения, интересные для астрофизики, и те виды взаимодействий, которые ими представляются, следующие: $p = 2$ — *линейный эффект Штарка* (водород + заряженная частица); $p = 3$ — *резонансное уширение* (атом A + атом A); $p = 4$ — *квадратичный эффект Штарка* (неводородоподобный атом плюс заряженная частица); $p = 6$ — *взаимодействие Ван-дер-Ваальса* (атом A + атом B).

Константу взаимодействия C_p можно рассчитать по квантовой теории или измерить экспериментально.

Сдвиг фазы, вызываемый возмущением, равен

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^t \Delta\omega(t') dt' = C_p \int_{-\infty}^t (\rho^2 + v^2 t'^2)^{-p/2} dt'. \quad (9.54)$$

Полный сдвиг фазы $\eta_p = \eta(t = \infty)$ находится непосредственно и оказывается равным

$$\eta_p = C_p \psi_p / v \rho^{p-1}, \quad (9.55)$$

где

$$\psi_p = \pi^{1/2} \Gamma((p-1)/2) / \Gamma(p/2). \quad (9.56)$$

Здесь $\Gamma(x)$ — обычная гамма-функция. При $p = 2; 3; 4; 6$ находим, что $\psi_p = \pi; 2; \pi/2; 3\pi/8$ соответственно.

Предположим теперь, что для уширения линии существенны лишь те столкновения, которые вызывают полный сдвиг фазы, больший некоторого критического значения η_0 . Эффективное прицельное расстояние для таких столкновений будет тогда

$$\rho_0 = (C_p \psi_p / \eta_0 v)^{1/(p-1)}, \quad (9.57)$$

а соответствующее значение постоянной затухания

$$\Gamma = 2\pi N v (C_p \psi_p / \eta_0 v)^{2/(p-1)}. \quad (9.58)$$

В качестве критического сдвига фазы Вайскопф произвольно принял $\eta_0 = 1$. При таком выборе η_0 формула (9.57) дает *радиус Вайскопфа* ρ_w , а (9.58) — параметр затухания Вайскопфа Γ_w .

Если C_p задано, изложенная выше теория дает вполне определенное значение для Γ и результаты оказываются по порядку величины правильными. Однако в ней остаются серьезные дефекты. а) Выбор $\eta_0 = 1$ является произвольным, и нет никаких средств, чтобы определить априори то правильное значение η_0 , которое на самом деле следовало бы использовать. б) Это приближение не учитывает столкновений с большими ρ , вызывающих малые сдвиги фазы, хотя число таких столкновений растет, как ρ^2 . в) Это приближение оказывается не в состоянии объяснить существование *сдвига линии*. Как будет показано ниже, этот недостаток обусловлен пренебрежением слабыми столкновениями, о чем уже говорилось в п. (б).

ПРИБЛИЖЕНИЕ ЛИНДХОЛЬМА

Существенные усовершенствования в классическую ударную теорию были внесены Линдхольмом [397], [398] и Фоли [221]. В соответствии с их подходом считается, что атом излучает на *мгновенной частоте* $\omega(t)$, которая из-за возмущений отличается от *номинальной частоты* ω_0 на величину $\Delta\omega(t)$. Тогда можно написать

$$f(t) = \exp[i\omega_0 t + i \int_{-\infty}^t \Delta\omega(t') dt'] \equiv \exp\{i[\omega_0 t + \eta(t)]\}, \quad (9.59)$$

где $\eta(t)$ — *мгновенная фаза* осциллятора. Чтобы получить профиль линии, рассчитаем автокорреляционную функцию $\Phi(s)$, определяемую формулой (9.6). Положим $\phi(s) = \exp(-i\omega_0 s)\Phi(s)$, выделив множитель, соответствующий невозмущенным колебаниям. Тогда из формулы (9.6) находим

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega_0 s} e^{-i[\omega_0 t + \eta(t)]} \times \\ &\times e^{i[\omega_0(t+s) + \eta(t+s)]} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i[\eta(t+s) - \eta(t)]} dt. \end{aligned} \quad (9.60)$$

Ясно, что $\phi(s)$ — это усредненное по времени значение *дополнительного сдвига фазы*, происходящего на интервале времени длиной s . Для краткости обозначим

$$\eta(t, s) = \eta(t+s) - \eta(t). \quad (9.61)$$

Тогда

$$\phi(s) = \langle \exp[i\eta(t, s)] \rangle_T. \quad (9.62)$$

Далее, для дифференциала $d\phi(s) = \phi(s+ds) - \phi(s)$ имеем

$$d\phi(s) = \langle e^{i\eta(t, s)} (e^{i\eta'} - 1) \rangle_T, \quad (9.63)$$

где η' обозначает *сдвиг фазы*, набегающий за промежуток времени ds в результате столкновений, которые происходят за это время. Если столкновения происходят случайным образом, то *изменение фазы* не должно коррелировать с ее *мгновенным значением*. Поэтому среднее от произведения можно заменить произведением средних, т.е.

$$d\phi(s) = \langle e^{i\eta(t, s)} \rangle_T \cdot \langle e^{i\eta'} - 1 \rangle_T = \phi(s) \langle e^{i\eta'} - 1 \rangle_T. \quad (9.64)$$

Если мы сможем вычислить среднее от $e^{i\eta'}$, то получим дифференциальное уравнение для $\phi(s)$.

Если взять среднее по достаточно большому промежутку време-

ни T , то в силу случайного характера столкновений будут с соответствующими статистике весами учтены столкновения со всеми значениями ρ . Далее, для замены усреднения по времени на соответствующее суммирование по прицельным расстояниям привлекается *эргодическая гипотеза*. Число столкновений с ρ , лежащими в интервале $(\rho, \rho + d\rho)$, которые происходят за время ds , равно $2\pi\rho d\rho N v ds$. Поэтому

$$\langle e^{i\eta'} - 1 \rangle_T = \langle e^{i\eta'(\rho)} - 1 \rangle_\rho = 2\pi N v ds \int_0^\infty [e^{i\eta(\rho)} - 1] \rho d\rho. \quad (9.65)$$

Интеграл в равенстве (9.65) имеет как вещественную, так и мнимую часть, так что можно написать

$$\langle e^{i\eta'(\rho)} - 1 \rangle_\rho = -N v ds (\sigma_R - i\sigma_I), \quad (9.66)$$

где

$$\sigma_R = 2\pi \int_0^\infty [1 - \cos \eta(\rho)] \rho d\rho = 4\pi \int_0^\infty \sin^2[\eta(\rho)/2] \rho d\rho \quad (9.67)$$

и

$$\sigma_I = 2\pi \int_0^\infty \sin \eta(\rho) \rho d\rho. \quad (9.68)$$

Собирая вместе соотношения (9.64), (9.65) и (9.66) и решая получающееся дифференциальное уравнение с начальным условием $\phi(0) = 1$, получаем

$$\phi(s) = \exp[-Nv(\sigma_R |s| - i\sigma_I s)]. \quad (9.69)$$

Наконец, вычислив интенсивность по формуле (9.7) и пронормировав профиль, найдем

$$I(\omega) = \frac{Nv\sigma_R/\pi}{(\omega - \omega_0 - Nv\sigma_I)^2 + (Nv\sigma_R)^2}. \quad (9.70)$$

Упражнение 9.4 Проверить формулы (9.69) и (9.70).

Итак, теория Линдхольма приводит к лоренцевскому профилю с шириной, обусловленной *затуханием*, равной

$$\Gamma = 2Nv\sigma_R, \quad (9.71)$$

и со *сдвигом линии*

$$\Delta\omega_0 = Nv\sigma_I. \quad (9.72)$$

Вывод о наличии сдвига согласуется с экспериментом, где такие

сдвиги наблюдаются. Квантовая теория дает профиль той же самой формы, что и формула (9.70), но при этом получаются явные выражения для Γ и $\Delta\omega_0$ через матричные элементы потенциала возмущения и параметры переходов в атоме. Как будет показано ниже, по теории Линдхольма для данного фиксированного значения p получается универсальное значение $\Gamma/\Delta\omega_0$. В квантовой же теории показывается, что это отношение в действительности несколько меняется с изменением T и N и различно для разных линий. Влияние доплеровского уширения легко учесть, используя фойгтовский профиль с соответствующим параметром затухания и со смещением частоты центра линии на величину $\Delta\omega_0$.

Определяющие вклады в σ_R и σ_I вносят совершенно различные области значений прицельного расстояния ρ . Из формулы (9.55) видно, что $\eta(\rho) \propto \rho^{-(p-1)}$. Поэтому при $\rho/\rho_W > 1$ подынтегральная функция в выражении для σ_R мала (см. [629], стр. 16, или [638], стр. 305), и основной вклад в уширение линии дают (сильные) столкновения с прицельными расстояниями, меньшими радиуса Вайскопфа, т.е. с $\rho/\rho_W < 1$. Напротив, подынтегральное выражение для σ_I при $\rho/\rho_W < 1$ часто меняет знак и в среднем оказывается близким к нулю. Следовательно, определяющий вклад в сдвиг линии дают (слабые) столкновения с ρ , большими радиуса Вайскопфа. Легко понять, из-за чего происходит сдвиг. Очень слабые столкновения ($\eta \ll 1$, $\rho \gg \rho_W$) чрезвычайно многочисленны и происходят практически с постоянным темпом, вызывая в среднем за единицу времени сдвиг фазы, равный

$$\bar{\eta} = 2\pi N v \int_{\rho^*}^{\infty} \eta(\rho) \rho d\rho, \quad (9.73)$$

где ρ^* выбирается так, чтобы было обеспечено выполнение неравенства $\eta(\rho^*) \ll 1$. Но как можно убедиться из формулы (9.59), если фаза изменяется с постоянной скоростью, то это по определению есть одновременно некоторое изменение $\Delta\omega$ — частоты осциллятора.

ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

В астрофизических работах теория Линдхольма наиболее широко применяется для случаев $p = 3, 4, 6$. Для этих значений p интегралы в формулах (9.67) и (9.68) можно вычислить в явном виде, что дает значения, приведенные в табл. 9.1 (подробности см. в [629], стр. 14). В последней строке таблицы приведены значения η_0 ,

ТАБЛИЦА 9.1.

Значения параметров теории Линдхольма

p	3	4	6
Γ	$2\pi^2 C_3 N$	$11,37$	$8,08$
$\Delta\omega_0$		$9,85$	$2,94$
$\Gamma/\Delta\omega_0$		$1,16$	$2,75$
η_0	$0,64$	$0,64$	$0,61$

такие, что если их подставить в формулу Вайскопфа (9.58), то получается линдхольмовские значения Γ . Поскольку η_0 всегда меньше единицы, ясно, что формула Вайскопфа приводит к заниженным значениям Γ .

Резонансное уширение ($p = 3$) представляет интерес главным образом применительно к столкновениям водородных атомов друг с другом. При этом атмосфера должна быть достаточно горячей, чтобы у водорода был возбужден уровень $n = 2$ (чтобы могли образоваться доступные наблюдениям бальмеровские линии). Но в то же время она должна быть и холодной, чтобы водород не был почти полностью ионизован. Поэтому эффекты резонансного уширения представляют интерес для звезд солнечного типа. Константа взаимодействия C_3 в формуле (9.53) для уровня n равна (см. [662], [112], стр. 231)

$$C_3 = e^2 f_{1n} / 2m\omega_{1n}. \quad (9.74)$$

Квантовомеханический расчет дает для Γ значение, слегка отличающееся от линдхольмовского, а именно

$$\Gamma_3 = 16\pi n_1 C_3 / 3 = 4n_1 e^2 f_{1n} / 3m\nu_{1n}. \quad (9.75)$$

Водородные линии не испытывают сдвигов, так как штарковские компоненты расположены симметрично относительно центра линии (см. § 9.4), и сдвиг тождественно равен нулю. Резонансное уширение наиболее существенно для самых нижних линий в сериях, где штарковское уширение меньше всего. Влияние резонансного уширения, как оказалось, существенно для солнечной линии H_α , однако для более высоких членов бальмеровской серии оно пренебрежимо мало [146].

Квадратичный эффект Штарка ($p = 4$) играет существенную роль в уширении линий неводородоподобных атомов и ионов за

счет их столкновений с заряженными частицами (электронами) и является основным механизмом уширения таких линий из-за эффектов давления в атмосферах звезд ранних спектральных типов. При применении классической теории Линдхольма постоянная взаимодействия C_4 обычно оценивалась по экспериментальным измерениям сдвигов линий в электрических полях или по стационарной теории возмущений для квадратичного эффекта Штарка (примеры этого см. в [11], стр. 319 — 320, или в [638], стр. 326 — 328). Получающиеся ширины затухания, однако, обычно слишком малы, так как в приближении Линдхольма предполагается, что столкновения являются адиабатическими (т.е. не вызывают переходов в излучающем атоме). Это предположение часто не выполняется. Точные квантовомеханические расчеты с учетом неадиабатических эффектов (см. § 9.5) приводят к гораздо больши́м ширинам линий.

Взаимодействие Ван-дер-Ваальса ($p = 6$) неводородоподобных атомов при их столкновениях с нейтральными водородными атомами является главным источником уширения линий вследствие давления у звезд солнечного типа. При обычном классическом рассмотрении учитывается член в потенциале, описывающий диполь-дипольное взаимодействие, что дает (см. [629], стр. 91 — 97; [638], стр. 331 — 334)

$$\Delta\omega = C_6/r^6 = e^2\alpha a_0^2[\bar{R}_u^2 - \bar{R}_l^2]/\hbar r^6, \quad (9.76)$$

где α — поляризуемость водорода и $\bar{R}^2$ — средний квадрат радиуса для данного уровня. Для некоторых случаев имеются квантовомеханические расчеты $\bar{R}^2$. Если же их нет, то используют оценки этой величины для водородоподобного атома. С определенной таким образом константой C_6 по теории Линдхольма можно рассчитать Γ . Если это выполнить (например, для линий FeI), то обнаруживается, что получающиеся теоретические значения намного меньше, чем нужно (на множитель от 5 до 30) [382]. Квантовомеханические расчеты, в которых также используется только диполь-дипольный член, не приводят к большому увеличению Γ (см. [264], стр. 98; [86], [599]). Это указывает в первую очередь просто на неприменимость диполь-дипольного приближения, а не на что-либо иное (см. также [301], [302], [541]). Расчеты, основанные на использовании более близкого к реальности потенциала Леннарда-Джонса [303], приводят к существенно больши́м ширинам. Были предприняты попытки учесть в разложении потенциала взаимодействия большее число членов [233]. Это увеличивает значения Γ , но они все же остаются меньше наблюдаемых. Сходимость такого разложения мед-

ленная. В другом методе, который был применен к линиям FeI, величина взаимодействия рассчитывалась путем использования водородных волновых функций, соответствующим образом масштабированных [116]. Это позволило получить приемлемое согласие между теоретическими и наблюдаемыми значениями Γ . Еще один метод основан на предположении, что основной причиной уширения линии является взаимодействие между возмущающей частицей и валентным электроном [539], [540]. Тогда можно использовать потенциал Смирнова [578] и получить некоторое явное выражение для параметра затухания. Этим методом были составлены обширные таблицы [193], в которых приведены параметры α и β формулы $\Gamma = N\alpha T^\beta$. Значения α и β даются в них в зависимости от эффективных квантовых чисел n^* верхнего и нижнего уровней для переходов $s - p$, $p - d$ и $d - f$.

КРИТЕРИИ ПРИМЕНИМОСТИ

1. Эффективное время соударения τ_s можно определить таким образом, чтобы произведение τ_s на максимальное значение $\Delta\omega$ для столкновения, характеризуемого эффективным прицельным расстоянием, т.е. $C_p \cdot \rho_0^{-p}$, было равно полному сдвигу фазы, определяемому формулой (9.55). Это дает

$$\tau_s = \psi_p \rho_0 / v. \quad (9.77)$$

Чтобы ударное приближение было применимо, следует потребовать, чтобы одновременно происходило лишь одно столкновение, так что $\tau_s < \tau = 1/N\pi\rho_0^2v$. Подставив сюда $N = 3/4\pi r_0^3$, где r_0 — среднее расстояние между частицами, найдем что $\tau_s/\tau = 3\psi_p(\rho_0/r_0)^3/4$. Таким образом, ударное приближение будет справедливо только тогда, когда концентрация частиц настолько низка, что радиус Вайскопфа мал по сравнению со средним расстоянием между частицами.

2. Ясно, что по мере того, как $\rho \rightarrow \infty$, эффективное время соударения τ_s становится все больше и больше. В конце концов оно превзойдет среднее время между столкновениями τ , так что столкновения начнут перекрываться. Таким образом, очень слабые столкновения вызывают практически *непрерывное* возмущение атома. Можно ожидать, что здесь должно начать работать статистическое приближение. В самом деле, выше было показано, что эти слабые столкновения вызывают сдвиг линии точно так же, как это было бы при наложении стационарного возмущения. Хотя теория Линд-

хольма, являющаяся ударной теорией, и учитывает слабые столкновения, этот учет не является, строго говоря, логически последовательным.

3. Ударное приближение теряет силу при достаточно больших смещениях частоты $\Delta\omega$ от центра линии, и там вступает в силу статистическое приближение. Как следует из общих свойств преобразований Фурье, в ударном приближении характерное время прерывания излучения τ , соответствующее смещению частоты $\Delta\omega$, равно $\tau \sim 1/\Delta\omega$. При достаточно больших $\Delta\omega$ в конце концов получим $\tau \ll \tau_s$, и ударное приближение становится неприменимым. Этим значениям $\Delta\omega$ отвечают большие сдвиги фазы (т.е. $\Delta\omega \cdot \tau_s \gg 1$), а следовательно, — сильные столкновения, прицельные расстояния для которых меньше радиуса Вайскопфа. Построить теорию, которая являлась бы переходной от ударного приближения к статистическому, очень трудно. Полезно ввести следующее понятие. Предположим, что существует некоторая «граничная» величина смещения $\Delta\omega_g$, такая, что при $\Delta\omega < \Delta\omega_g$ справедливо ударное приближение, а при $\Delta\omega > \Delta\omega_g$ — статистическое. С хорошим приближением (см. [637], [306]) имеем $\Delta\omega_g \approx \Delta\omega_W$, где через $\Delta\omega_W$ обозначен сдвиг частоты, вызываемый возмущающей частицей при прицельном расстоянии, равном радиусу Вайскопфа, т.е.

$$\Delta\omega_W = (v^p / C_p \psi_p^p)^{1/(p-1)}. \quad (9.78)$$

Заметим, что $\Delta\omega_W$ соответствует сдвигу фазы, равному единице. Как будет показано в § 9.4, из соотношения (9.78) следует, что уширение водородных линий ионами описывается *статистической теорией*, а уширение электронами дается *ударной теорией*.

4. Классическое ударное приближение предполагает, что столкновения являются адиабатическими, т.е. не вызывают переходов в атоме. Столкновение, длящееся время τ_s , будет иметь фурье-компоненты с частотами вплоть до $\omega_s \approx 1/\tau_s$. Чтобы гарантировать адиабатичность столкновения, следует предположить, что ω_s гораздо меньше любой характерной частоты перехода ω_{ij} , т.е.

$$\omega_s = 1/\tau_s \ll \omega_{ij} = |E_i - E_j|/\hbar. \quad (9.79)$$

Для невырожденных уровней разность их энергий часто достаточно велика, чтобы приведенное выше условие было выполнено. Но для вырожденных уровней (например, водородных) энергетический зазор между уровнями будет пропорционален самому возмущающему полю, т.е.

$$|E_i - E_j| \sim \hbar C_p / \rho^p = \hbar \Delta\omega(\rho).$$

Тогда для выполнения условия адиабатичности требуется, чтобы $\Delta\omega(\rho)\tau_s = \eta(\rho) \gg 1$, т.е. адиабатическими будут лишь столкновения с ρ , меньшими радиуса Вайскопфа. В случае водорода $\Delta\omega_w$ для столкновений с ионами очень мало, и практически для всего профиля справедливо статистическое приближение, а столкновения, вызывающие уширение, имеют ρ , меньшие радиуса Вайскопфа. Таким образом, ионное уширение будет адиабатическим. Для электронов верно прямо противоположное. Здесь $\Delta\omega_w$ будет велико, и почти весь профиль описывается ударным приближением, причем прицельные расстояния больше радиуса Вайскопфа. Электронное уширение сильно неадиабатично (и потому должно описываться квантовой теорией). Когда условие адиабатичности нарушено, получаются гораздо большие значения параметра затухания, чем те, которые даются классической теорией. По этой причине современные квантовомеханические результаты часто совершенно непохожи на те, которые получались в ранних классических работах.

9.4. Уширение вследствие столкновений.

Статистическое приближение

Основная модель в этом приближении: излучающий атом находится в статистически флуктуирующем поле, создаваемом хаотически распределенными возмущающими частицами. Движение частиц не учитывается. Эта модель называется *квазистатическим* приближением. [Как мы увидим позже, это приближение хорошо для ионов (например, протонов), так как они движутся в плазме медленно.] То или иное конкретное распределение возмущающих частиц создает некоторое определенное поле. Относительная вероятность различных значений напряженности поля определяется тем, насколько часто осуществляются распределения частиц, создающие соответствующие напряженности. При заданной величине поля частота колебаний излучающего атома смещается на определенное $\Delta\omega$. Предполагается, что интенсивность излучения с таким $\Delta\omega$ пропорциональна статистической частоте, с которой встречается соответствующее поле. Поэтому центральной проблемой здесь является определение распределения вероятности значений возмущающих полей. Если оно известно, профиль линии можно рассчитать. В этом разделе мы ограничимся рассмотрением квазистатического уширения водородных линий, обусловленного линейным эффектом Штарка из-за взаимодействия атомов водорода с протонами (хотя излагаемая теория применима и к другим случаям).

ПРИБЛИЖЕНИЕ БЛИЖАЙШЕГО СОСЕДА

В качестве первого приближения предположим, что основное воздействие на излучающий атом производит *самое сильное* возмущение, действующее в каждый данный момент, а именно то, которое вызывается *ближайшим соседом*, и что влиянием всех других частиц можно пренебречь. Тогда, если $W(r)dr$ есть вероятность того, что ближайший сосед расположен на расстоянии от r до $r + dr$ от излучающего атома, то спектр его излучения определяется тем, что

$$I(\Delta\omega)d\Delta\omega \propto W(r)(dr/d\Delta\omega)d\Delta\omega, \quad (9.80)$$

причем здесь предполагается, что $\Delta\omega$ дается формулой (9.53), т.е. $\Delta\omega = C_p/r^p$.

Чтобы найти $W(r)$, рассчитаем вероятность того, что в интервале расстояний $(r, r + dr)$ частица есть, а на расстояниях, меньших r , ни одной частицы нет. Тогда, предполагая, что частицы распределены в пространстве равномерно, причем их концентрация равна N , для $W(r)$ получим следующее соотношение:

$$W(r)dr = [1 - \int_0^r W(x)dx] 4\pi r^2 N dr. \quad (9.81)$$

Здесь множитель $4\pi r^2 N dr$ — относительная вероятность того, что в оболочке, ограниченной сферами с радиусами r и $r + dr$, частица есть, а множитель в квадратных скобках — вероятность того, что в полость внутри этой оболочки ни одна частица не попала. Дифференцируя, находим

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{W(r)}{4\pi r^2 N} \right] = -4\pi r^2 N \frac{W(r)}{4\pi r^2 N}. \quad (9.82)$$

Отсюда, интегрируя и пользуясь условием нормировки, получаем

$$W(r) = 4\pi r^2 N \exp(-4\pi r^3 N/3). \quad (9.83)$$

Обычно в качестве *единицы измерения расстояний* принимают *среднее расстояние между частицами* $r_0 = (4\pi N/3)^{-1/3}$, на котором возмущающая частица вызывает так называемый *нормальный сдвиг частоты* $\Delta\omega_0 = C_p/r_0^p$. Тогда

$$\Delta\omega/\Delta\omega_0 = (r_0/r)^p \quad (9.84)$$

и выражение (9.83) можно переписать следующим образом:

$$W(r)dr = \exp[-(\Delta\omega_0/\Delta\omega)^{3/p}] d(\Delta\omega_0/\Delta\omega)^{3/p}. \quad (9.85)$$

В случае *линейного эффекта Штарка* возмущающее поле $F = e/r^2$. Если ввести *нормальную напряженность поля* F_0 , положив

$$F_0 = e/r_0^2 = e(4\pi N/3)^{1/3} = 2,5985eN^{1/3}, \quad (9.86)$$

и условиться измерять F в единицах F_0 (т.е. положить $\beta = F/F_0$), то приближение ближайшего соседа дает

$$W(\beta)d\beta = (3/2)\beta^{-1/2}\exp(-\beta^{-1/2})d\beta. \quad (9.87)$$

Видно, что при $\beta \rightarrow \infty$ имеем $W(\beta) \sim (3/2)\beta^{-1/2}$. Итак, статистическое приближение предсказывает, что в крыльях линии, расширенной за счет линейного эффекта Штарка, профиль должен убывать как $\Delta\omega^{-1/2}$ вопреки тому, что дает ударное приближение, согласно которому он пропорционален $\Delta\omega^{-2}$.

Основной недостаток изложенной теории заключается в том, что профиль, конечно, является результатом возмущений, оказываемых всеми частицами, а не только ближайшим соседом. Чтобы получить более точные результаты, нужно построить более аккуратную теорию.

ТЕОРИЯ ХОЛЬЦМАРКА

Влияние *совокупности* частиц на излучающий атом было изучено Хольцмарком [305], рассчитавшим суммарный вектор поля в том месте, где расположен излучающий атом. Этот вектор есть сумма векторов напряженности полей каждой из возмущающих частиц. Изящное изложение этого вопроса было дано Чандрасекаром [151]. За выводом приводимого нами результата следует обратиться к этой его работе.

Для взаимодействия вида $F = C_p/r^p$ теория дает

$$W(\beta) = (2\beta/\pi) \int_0^\infty \exp(-y^{3/p}) y \sin \beta y dy. \quad (9.88)$$

Здесь $\beta = F/F_0$, причем нормальная напряженность поля определяется теперь следующим образом:

$$F_0 = \gamma C_p N^{p/3}, \quad (9.89)$$

где

$$\gamma = \{2\pi^2 p / [3(p+3)\Gamma(3/p) \sin(3\pi/2p)]\}^{p/3}. \quad (9.90)$$

В частности, для линейного эффекта Штарка $p = 2$, $C_p = e$, $\gamma = 2,6031$ и $F_0 = 2,6031eN^{2/3}$, что лишь несущественно отличается

от нормальной напряженности поля согласно приближению ближайшего соседа.

Интеграл в формуле (9.88) при $p = 2$ не выражается в конечном виде через известные функции, и $W(\beta)$ приходится представлять в виде разложений в ряды. При малых β

$$W(\beta) = \frac{4}{3\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \Gamma\left(\frac{4l+6}{3}\right) \frac{\beta^{2l+2}}{(2l+1)!}, \quad (9.91)$$

при $\beta \gg 1$ имеет место асимптотическое разложение

$$W(\beta) \approx 1,496\beta^{-1/2}(1 + 5,107\beta^{-1/2} + 14,43\beta^{-1} + \dots), \quad (9.92)$$

главный член которого, по существу, совпадает с тем, что дает приближение ближайшего соседа. Таблицы $W(\beta)$ даются в [151] и [629], стр. 28.

ДЕБАЕВСКОЕ ЭКРАНИРОВАНИЕ

И СНИЖЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА ИОНИЗАЦИИ

При получении найденных выше распределений вероятностей *взаимодействия между возмущающими частицами* не учитывались. На самом же деле вероятность обнаружить частицу в объеме dV не равна просто NdV , а зависит также от величины *электростатического потенциала* ϕ в dV . Например, если в некоторой точке $\phi > 0$, то электроны будут стремиться сдвинуться к этой точке, ионы же будут стараться удалиться от нее. При $\phi < 0$ все будет наоборот. Следуя Эккеру [203], [204], [205], [206], эти эффекты можно схематически учесть, введя *больцмановский множитель*, зависящий от $\psi = e\phi/kT$. Для электронов и ионов напомним поэтому соответственно

$$n_e W_e dV = n_e \exp(\psi) dV \approx n_e (1 + \psi) dV \quad (9.93)$$

и

$$n_i W_i dV = n_i \exp(-Z_i \psi) dV \approx n_i (1 - Z_i \psi) dV, \quad (9.94)$$

где n_e и n_i — концентрации электронов и ионов, Z_i — заряд иона, и мы предположили, что $\psi \ll 1$. Поскольку в достаточно больших объемах плазма *электрически нейтральна*,

$$n_e = \sum Z_i n_i. \quad (9.95)$$

Вычислим теперь потенциал, создаваемый некоторым выбранным ионом при упрощающем предположении, что все частицы

можно считать размазанными по пространству с соответствующей эквивалентной плотностью заряда. Тогда для определения ϕ можно воспользоваться уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \phi = -4\pi e \rho, \quad (9.96)$$

где ρ дается формулой

$$e\rho = -en_e W_e + e \sum Z_i n_i W_i. \quad (9.97)$$

При учете (9.93) — (9.95) это выражение приводится к виду

$$e\rho = -e\psi(n_e + \sum Z_i^2 n_i). \quad (9.98)$$

Подставив (9.98) в (9.96), можем переписать уравнение Пуассона в виде $\nabla^2 \phi = \phi/D^2$, где

$$D = (kT/4\pi e^2)^{1/2} (n_e + \sum Z_i^2 n_i)^{-1/2}. \quad (9.99)$$

Величина D называется *дебаевским радиусом*. Решая уравнение для ϕ , находим $\phi = r^{-1}(Ae^{-r/D} + Be^{r/D})$. Если потребовать, чтобы $\phi \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, то получим $B = 0$. Далее, чтобы при $r \rightarrow 0$ наш потенциал переходил в потенциал изолированного иона, положим $A = Ze$. Итак, потенциал, создаваемый ионом, помещенным в плазму, равен

$$\phi(r) = Ze \exp(-r/D)/r. \quad (9.100)$$

Из формулы (9.100) видно, что вне сферы Дебая поле иона сильно экранировано и быстро спадает. Физически так происходит потому, что заряженная частица стремится в своей окрестности поляризовать плазму. Противоположно заряженные частицы, которые скапливаются вокруг нее, на больших расстояниях экранируют поле рассматриваемой частицы. Таким образом, дебаевский радиус устанавливает верхний предел: а) расстояний, на которых две заряженные частицы могут эффективно взаимодействовать, б) размеров областей, в пределах которых могут наблюдаться заметные отклонения от электрической нейтральности, и в) длин волн электромагнитного излучения, которое может распространяться через плазму без диссипации.

В большинстве астрофизических приложений можно считать, что плазма практически чисто водородная. Тогда $Z_i = 1$, $n_i = n_e$. Поэтому, подставляя в формулу (9.99) численные значения постоянных, находим

$$D = 4,8(T/n_e)^{1/2} \text{ см}. \quad (9.101)$$

Упражнение 9.5. Сравнить дебаевские радиусы а) в звездной атмосфере с $T = 10^4$ К, $n_e = 10^{14}$, б) в солнечной короне при $T = 10^6$ К, $n_e = 10^8$, в) в области Н II ($T = 10^4$ К, $n_e = 10^2$).

Чтобы учесть влияние экранирования на $W(\beta)$, можно сделать очень простое предположение [205], [206], что поле возмущающей частицы не изменяется при $r \leq D$ и тождественно равно нулю при $r > D$. Тогда мы получим

$$W(\beta, \delta) = (2\beta\delta/\pi) \int_0^\infty e^{-\delta g(y)} y \sin(\delta^{1/2} \beta y) dy, \quad (9.102)$$

где

$$g(y) = (3/2)y^{1/2} \int_y^\infty (1 - z^{-1} \sin z) z^{-3/2} dz \quad (9.103)$$

и $\delta = 4\pi D^3 N/3$ — число частиц, содержащихся в сфере дебаевского радиуса. Естественно ожидать, что при $\delta \rightarrow \infty$ мы возвратимся к распределению Хольцмарка, т.е. $W(\beta, \infty) = W_H(\beta)$. С помощью формулы (9.102) можно показать, что при $\delta \rightarrow \infty$

$$W(\beta, \delta) = W_H(\beta) + \delta^{-1/3} F(\beta),$$

где $F(\beta)$ — некоторый сходящийся определенный интеграл. То, что при больших δ получается распределение Хольцмарка, видно из асимптотического разложения

$$W(\beta, \delta) = 1,496\beta^{-5/2}(1 + 5,107\beta^{-3/2} - 6,12\delta^{-1/3}\beta^{-2} + \dots), \quad (9.104)$$

если сравнить его с формулой (9.92). В принципе при малых δ рассматриваемое приближение должно было бы непрерывным образом переходить в приближение ближайшего соседа, однако на самом деле при $\delta < 5$ оказываются нарушенными принятые предположения (в частности, то, что можно использовать усредненную плотность заряда). Графики $W(\beta, \delta)$ для нескольких значений δ представлены на рис. 9.1 вместе с распределениями по теории Хольцмарка и в приближении ближайшего соседа.

Способ учета взаимодействия между возмущающими частицами, описанный выше, является в некоторых отношениях излишне упрощенным. Очень точные расчеты распределений напряженностей поля, создаваемого возмущающими частицами, были выполнены при помощи методов групповых разложений [65], [472], [515] и численным интегрированием методом Монте-Карло [308], [309], [310], стр. 482. В исследованиях уширения водородных линий, вы-

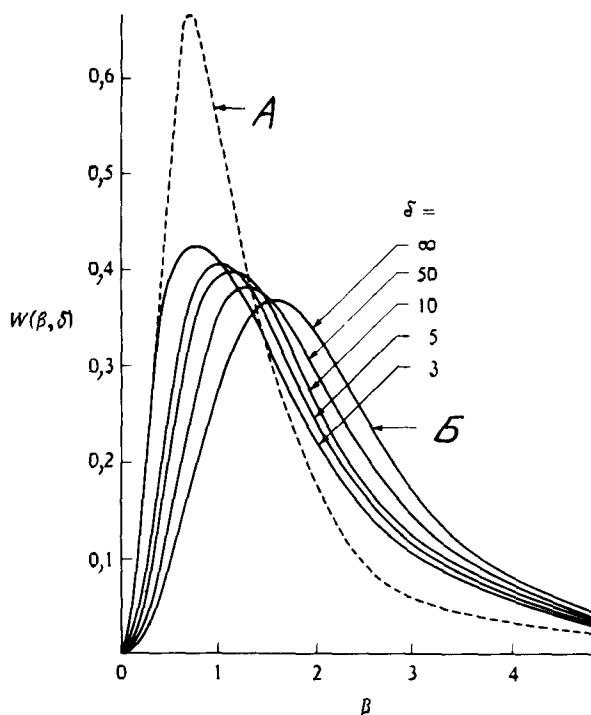


Рис. 9.1. Распределение вероятностей напряженности поля в пробной точке с учетом эффектов экранировки; δ — число заряженных частиц в пределах сферы Дебая; A — приближение ближайшего соседа; B — распределение Хольцмарка. По [205], с разрешения автора.

полненных в самое последнее время, используются эти точные функции распределения. На практике влияние экранирования часто очень существенно для лабораторной плазмы, тогда как в звездных атмосферах плотности настолько низки, что число частиц в сфере Дебая оказывается большим ($\delta > 100$), и отклонения от распределения Хольцмарка невелики.

Присутствие близких зарядов частично нейтрализует воздействие заряда ядра на связанные электроны в атоме. За счет этого уменьшается глубина потенциальной ямы, в которой находится связанный электрон. Поправку к энергии связи можно вычислить, пользуясь потенциалом (9.100), учитывающим дебаевское экранирование. Оказывается, что при $r \ll D$

$$\Delta E = (Ze^2/r)[\exp(-r/D) - 1] \approx -Ze^2/D. \quad (9.105)$$

Электрон, находящийся в состоянии, которое в невозмущенном

атоме лежит по энергии на $\Delta\chi$ ниже ионизационного предела, можно считать свободным, если $\Delta\chi \leq \Delta E$. Иначе говоря, энергия ионизации атома уменьшается на величину

$$\Delta\chi = Ze^2/D = (27,2Za_0/D) \text{ эВ} = 3 \cdot 10^{-8} Z n_e^{1/2} T^{-1/2} \text{ эВ}. \quad (9.106)$$

При выводе этого выражения была использована формула (9.101). Этот расчет $\Delta\chi$ является очень приближенным. Снижение потенциалов ионизации в плазме обсуждается с различных точек зрения в [178].

КВАЗИСТАТИЧЕСКОЕ УШИРЕНИЕ ВОДОРОДНЫХ ЛИНИЙ ИОНАМИ

Если никаких возмущающих полей нет, то каждый уровень атома водорода вырожден и состоит из $2n^2$ подуровней. В работах К. Шварцшильда [563] и Эпштейна [208] было показано, что если приложить электрическое поле, эти подуровни разделяются. Так как водород обладает ненулевым дипольным моментом, сдвиг по энергии прямо пропорционален напряженности приложенного поля F (*линейный эффект Штарка*). Если никаких других механизмов уширения нет, линия будет состоять из нескольких *штарковских компонент*, возникающих при переходах между подуровнями нижнего и верхнего состояний. Каждая штарковская компонента характеризуется определенной относительной интенсивностью I_k [561] и будет смещена от центра линии на величину

$$\Delta\lambda_k = (3h\lambda^2 nk/8\pi^2 c m e Z) F = C_k F, \quad (9.107)$$

где Z — заряд ядра атома (для водорода $Z = 1$) и n_k — некоторое целое число. Наблюдаемая линия будет представлять собой наложение этих компонент, взятых с весами, пропорциональными их относительным интенсивностям, и положениями, соответствующими вероятностям определенных сдвигов по оси длин волн.

Совокупность штарковских компонент водородной линии симметрична относительно центра линии, причем компоненты с номерами $\pm k$ идентичны, так что $I_{-k} = I_k$, $C_{-k} = C_k$ (см., например, [638], стр. 320; [629], стр. 73). Если предположить, что интенсивности нормированы таким образом, что $\sum I_k = 1$ (где сумма распространяется на все компоненты), то профиль линии будет

$$\begin{aligned} I(\Delta\lambda) d\Delta\lambda &= \sum I_k W(F_k/F_0) dF_k/F_0 = \\ &= \sum I_k W(\Delta\lambda/C_k F_0) d\Delta\lambda/C_k F_0. \end{aligned} \quad (9.108)$$

Обычно вводят параметр

$$\alpha \equiv \Delta\lambda/F_0, \quad (9.109)$$

где F_0 — нормальная напряженность поля: $F_0 = 2,60eN^{2/3}$. Тогда профиль линии описывается функцией $S(\alpha)$:

$$S(\alpha)d\alpha = \sum_k I_k W(\alpha/C_k) d\alpha/C_k, \quad (9.110)$$

которая нормирована на единицу в интервале изменения α от $-\infty$ до ∞ . Коэффициент поглощения в расчете на один атом можно записать в виде

$$\alpha_\nu(\Delta\lambda) = (\pi e^2/mc) f S(\Delta\lambda/F_0) (\lambda^2/cF_0). \quad (9.111)$$

Обширные таблицы C_k , I_k и $S(\alpha)$ для большого числа водородных линий приводятся в [634]. Наибольшее C_k растет с увеличением главного квантового числа верхнего уровня n как n^2 . Если вспомнить, что при $\beta \gg 1$ величина $W(\beta) \propto \beta^{-5/2}$, из формул (9.108) или (9.110) становится ясно, что штарковские ширины быстро увеличиваются при переходе к старшим членам серии (грубо говоря, как n^3).

Обсудим теперь, когда эти квазистатические профили можно применять. Пусть $\bar{n}_k = \sum n_k I_k / \sum I_k$, причем сумма берется только по положительным значениям k . Тогда, положив $\bar{\Delta\omega} = \bar{C}_2/r^2$ и $F = e/r^2$, из формулы (9.107) получим

$$\bar{C}_2 = 3h\bar{n}_k/4\pi m = 1,738\bar{n}_k, \quad (9.112)$$

причем $\bar{n}_k = n(n-1)/2$ при $n \gg 1$. Согласно формуле (9.78), величина смещения в шкале длин волн, которое разделяет области применимости ударного и статистического приближений, равна (при $p = 2$)

$$\Delta\lambda_w = v^2\lambda^2/2\pi^3 c \bar{C}_2. \quad (9.113)$$

Заметим, что $\Delta\lambda_w \propto v^2$, и поэтому $\Delta\lambda_w$ (электронное) $\approx 10^3 \Delta\lambda_w$ (протонное). Воспользовавшись формулами (9.112) и (9.50), получим результаты, приведенные в табл. 9.2. Очевидно, что уширение ионами очень хорошо описывается квазистатическим приближением (особенно если вспомнить, что в ядре линии решающую роль будут играть доплеровские смещения, обусловленные движением атомов). Электронное же уширение описывается ударным приближением (не считая области очень больших смещений от центра линии), причем, как отмечалось в §9.3, должна учитываться неадиабатичность. На полный профиль оказывают влияние как ионы, так

и электроны. Как будет показано в §9.5, последние дают значительный вклад в уширение линии. Использование функций $S(\alpha)$, учитывающих влияние одних только ионов, серьезно занижает ширины водородных линий. Удовлетворительное теоретическое описание профилей водородных линий в звездных спектрах стало возможным только после создания квантовомеханической теории уширения линий.

ТАБЛИЦА 9 2

Расстояние от центра линии $\Delta\lambda_w$ (в Å), отделяющее области применимости статистического и ударного приближений для водородных линий

Линии	Возмущающие частицы	T, K		
		2,5	10 ⁴	10 ⁴
H _α	Электроны	580,0		230,0
	Протоны	0,63		0,25
H _β	Электроны	120,0		48,0
	Протоны	0,13		0,05
H _γ	Электроны	48,0		19,0
	Протоны	0,05		0,02
H _δ	Электроны	32,0		13,0
	Протоны	0,03		0,01

9.5. Квантовая теория уширения линий

Точный профиль линии с учетом эффектов давления дается квантовомеханическими расчетами. Разработка этой теории явилась большим шагом вперед в одной из наиболее важных (и трудных) областей применения атомной физики к анализу звездных спектров. Хорошие обзоры общей теории можно найти в [62], [63], [64], [73], гл. 13, [179], [264], гл. 4, [268], [582]. Здесь будет дано лишь краткое общее представление об этой теории. В центре внимания будет тот случай, когда уровни атома испытывают ударное уширение электронами и квазистатическое уширение ионами.

ПРОФИЛЬ ЛИНИИ

Как было показано в гл. 4, мощность, излучаемая *изолированным атомом* при переходе из верхнего состояния j в нижнее со-

стояние i , равна [см. формулу (4.62)]

$$P = (4\omega^4/3c^3) |\langle i | \mathbf{d} | j \rangle|^2, \quad (9.114)$$

где $\mathbf{d}$ — дипольный момент атома. Полное излучение, просуммированное по всем возможным подсостояниям, дающим вклад в линию, есть

$$P(\omega) = (4\omega^4/3c^3) \sum_{i,j} \rho_j \delta(\omega - \omega_{ij}) \cdot |\langle i | \mathbf{d} | j \rangle|^2. \quad (9.115)$$

Здесь ρ_j — вероятность того, что атом находится в верхнем состоянии j . При термодинамическом равновесии

$$\rho_j = \langle i | \rho | j \rangle = \exp(-E_j/kT)/U(T), \quad (9.116)$$

где $U(T)$ — сумма по состояниям.

Чтобы рассчитать уширение линий, излучаемых *атомом, находящимся в плазме*, будем считать, что излучающая система состоит из атома *плюс* возмущающие частицы, и обобщим смысл состояний $|i\rangle$ и $|j\rangle$, включив в них также и описание возмущающих частиц. Профиль линии можно тогда записать в виде

$$I(\omega) = \sum_{i,j} \rho_j \delta(\omega - \omega_{ij}) |\langle i | \mathbf{d} | j \rangle|^2. \quad (9.117)$$

Здесь ρ_j дает вероятность определенного состояния атома и возмущающей частицы. Если плазма находится в состоянии теплового равновесия, то ρ_j пропорционально

$$e^{-H/kT} = e^{-(H_A + H_P + V)/kT}, \quad (9.118)$$

где H — полный гамильтониан системы, H_A и H_P — гамильтонианы отдельного атома и возмущающей частицы и V — гамильтониан взаимодействия.

Описывать столкновения проще всего при помощи следующего преобразования Фурье:

$$\phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \sum \rho_j e^{i\omega_{ij}t} |\langle i | \mathbf{d} | j \rangle|^2, \quad (9.119)$$

которое аналогично классической *автокорреляционной функции* (см. [72], стр. 498). Влияние на автокорреляционную функцию столкновений с заданным прицельным расстоянием (и статистические средние по всем возможным траекториям возмущающей частицы) рассчитывается непосредственно. Профиль же интенсивности

получится затем взятием обратного преобразования Фурье [см. формулу (9.7)].

Наша ближайшая задача — получить выражение для $\phi(t)$. Чтобы это сделать, нужно найти, как изменяются со временем собственные функции состояний $|i\rangle$ и $|j\rangle$ под влиянием возмущающих столкновений, выразив эти функции через эволюционный оператор $T(t, 0)$. Этот оператор определяется таким образом, что состояние системы в момент t связано с ее состоянием в момент $t = 0$ соотношением

$$|\alpha, t\rangle = T(t, 0)|\alpha, 0\rangle. \quad (9.120)$$

Далее, $|\alpha, t\rangle$ удовлетворяет уравнению Шредингера

$$H|\alpha, t\rangle = i\hbar \partial|\alpha, t\rangle/\partial t. \quad (9.121)$$

Подставив (9.120) в (9.121), мы сможем получить уравнение Шредингера для $T(t, 0)$. Учитывая, что $|\alpha, 0\rangle$ не зависит от времени, находим

$$HT(t, 0) = i\hbar \partial T(t, 0)/\partial t. \quad (9.122)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$T(t, 0) = e^{-iHt/\hbar}, \quad (9.123)$$

где экспоненту следует понимать как *оператор*. Теперь мы можем переписать формулу (9.119) через эволюционные операторы, *учитывающие возмущения*:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \sum_{i,j} \rho_j e^{i(E_j - E_i)t/\hbar} |\langle i|\mathbf{d}|j\rangle|^2 = \\ &= \sum_{i,j} \rho_j \langle j|\mathbf{d}|i\rangle e^{-iE_i t/\hbar} \langle i|\mathbf{d}|j\rangle e^{iE_j t/\hbar} = \\ &= \sum_{i,j} \rho_j \langle j|\mathbf{d}T|i\rangle \langle i|\mathbf{d}T^+|j\rangle. \end{aligned} \quad (9.124)$$

Если $|\gamma\rangle$ — *полный набор состояний*, то должно выполняться следующее *условие полноты*:

$$\langle \alpha|\beta\rangle = \sum_{\gamma} \langle \alpha|\gamma\rangle \langle \gamma|\beta\rangle. \quad (9.125)$$

Поэтому выражение (9.124) можно переписать следующим образом:

$$\phi(t) = \sum_j \rho_j \langle j|\mathbf{d}T\mathbf{d}T^+|j\rangle = \text{Sp}(\rho\mathbf{d}T\mathbf{d}T^+). \quad (9.126)$$

При взятии следа учитываются состояния как атома, так и возмущающей частицы. Полученное выражение является весьма общим. Конкретный вид $\phi(t)$ зависит от вида оператора T .

ПРИБЛИЖЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ТРАЕКТОРИИ

Рассмотрим теперь подробнее, как вычисляется оператор T . Пусть ψ — волновая функция, описывающая состояние полной системы «атом плюс возмущающая частица». Она является решением уравнения

$$i\hbar \partial \psi / \partial t = (H_A + H_p + V)\psi. \quad (9.127)$$

Заметим, что H_A не зависит от координат возмущающей частицы, а H_p не зависит от координат, характеризующих состояние атома, тогда как V зависит и от тех, и от других координат. Далее, поскольку атом находится в электростатическом поле иона напряженности F , то H_A зависит от F : $H_A = H_A(F)$. Для краткости явно указывать зависимость от F мы не будем нигде, кроме окончательного результата.

Чтобы продвинуться дальше, предположим теперь, что возмущающая частица движется по классической траектории, а именно по *прямой* — мимо нейтрального атома и по *гиперболе* — вокруг иона. Это предположение будет выполнено, если *дебройлевская длина волны* возмущающей частицы мала по сравнению с прицельными расстояниями тех столкновений, которые дают основной вклад в уширение линий. Иначе говоря, должно выполняться условие $\rho \gg \lambda = \hbar/mv$, или $mvr \gg \hbar$. Но mvr — попросту момент возмущающей частицы ($= \hbar$). Только что установленный критерий равносителен требованию, чтобы азимутальное квантовое число l было много больше единицы. В этом случае на основании *принципа соответствия* можно ожидать, что классическое описание налетающей частицы будет оправданно. Применимость этого приближения при расчете уширения линий следует всегда проверять. В большинстве случаев, представляющих астрофизический интерес, оно оказывается выполненным. Конечно, всегда следует ожидать, что для *некоторых* возмущающих частиц оно нарушается, но приближение остается применимым, если основной вклад в уширение линии дается не ими (см. также [73], стр. 498 и дальше). Теория, не использующая приближения классической траектории, излагается в [64].

Предположим, что у волновой функции системы «атом плюс

возмущающая частица» переменные разделяются, т.е. $\psi(t) = \alpha(t)\pi(t)$, где $\alpha(t)$ и $\pi(t)$ — волновые функции атома и частицы. Примем далее, что траектория возмущающей частицы фиксирована и не зависит от состояния атома, с которым она взаимодействует. При таком рассмотрении влияние возмущающей частицы на атом учитывается; обратное же воздействие атома на частицу не принимается во внимание. Это будет верно, если энергия, приобретаемая или теряемая возмущающей частицей (порядка $\hbar\Gamma$, где Γ — ширина линии), гораздо меньше ее кинетической энергии (kT). Это условие выполняется почти всегда. Некоторое число столкновений, при которых происходит большой обмен энергией, всегда осуществляется, но и здесь они не делают приближение неприменимым, если уширение определяется не ими.

При указанных выше предположениях функция $\pi(t)$ есть решение уравнения

$$i\hbar\partial\pi(t)/\partial t = H_P \pi(t), \quad (9.128)$$

так что эволюционный оператор для возмущающей частицы имеет вид

$$T_P(t, 0) = e^{-iH_P t/\hbar}. \quad (9.129)$$

Рассмотрим теперь уравнение Шредингера для самого атома. Чтобы получить его, умножим уравнения (9.127) и (9.128) на π^* , проинтегрируем по координатам возмущающей частицы и вычтем одно из другого. Тогда найдем

$$i\hbar\partial\alpha(t)/\partial t = (H_A + \int \pi^* V \pi d\tau_P) \alpha(t). \quad (9.130)$$

Если волновые пакеты возмущающих частиц действительно настолько узки, что эти частицы можно рассматривать как классические, движущиеся по классическим траекториям, то можно сделать следующее отождествление:

$$\int \pi^* V \pi d\tau_P \rightarrow V_{\text{кл}}(t), \quad (9.131)$$

где $V_{\text{кл}}(t)$ — классический потенциал взаимодействия. В этом состоит самая суть приближения классической траектории. Уравнение Шредингера для эволюционного оператора атома принимает тогда вид

$$i\hbar\partial T_A(t, 0)/\partial t = [H_A + V_{\text{кл}}(t)] T_A(t, 0), \quad (9.132)$$

а эволюционный оператор полной системы будет

$$T(t, 0) = T_A(t, 0) T_P(t, 0) = T_A(t, 0) e^{-iH_P t/\hbar}. \quad (9.133)$$

Наконец, напомним матрицу плотности ρ в виде $\rho = \rho_A \cdot \rho_P$, где ρ_A относится только к атомным состояниям, а ρ_P определяется лишь состояниями возмущающей частицы, причем последняя матрица диагональна относительно координат частицы. И здесь такое представление возможно, если можно пренебречь обратным воздействием атома на частицу.

Если эти выражения для ρ и T подставить в формулу (9.126) для $\phi(t)$ и принять во внимание, что переменные у $\psi(t)$ разделяются, то найдем

$$\phi(t) = \text{Sp} \{ \rho_A \mathbf{d} T_A \mathbf{d} T_A^* \}. \quad (9.134)$$

След по состояниям возмущающей частицы свелся просто к *термическому среднему по всем возмущающим частицам* (которое обозначено *фигурными скобками*), и, следовательно, написанный след берется *только по состояниям атома*.

УДАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Чтобы вычислить $\phi(t)$ по формуле (9.134), предположим, что как начальное состояние a , так и конечное состояние b содержат по нескольку подсостояний. Будем обозначать эти подсостояния соответственно α и β . Примем также, что дипольные переходы возможны только между подсостояниями a и подсостояниями b , радиативные же переходы между подсостояниями в пределах a и b можно не учитывать. С другой стороны, пренебрежем ударными переходами между состояниями a и b и предположим, что столкновения могут вызывать лишь переходы между различными подсостояниями в пределах a или b . Таким образом, мы имеем $\langle \alpha | \mathbf{d} | \alpha' \rangle = 0$, $\langle \beta | \mathbf{d} | \beta' \rangle = 0$ и $\langle \alpha | T_{a, b} | \beta \rangle = 0$. Тогда, расписав след в формуле (9.134), находим

$$\phi(t) = \rho_a \sum_{\alpha, \alpha', \beta, \beta'} \langle \alpha | \mathbf{d} | \beta \rangle \langle \beta' | \mathbf{d} | \alpha' \rangle \times \langle \alpha | \langle \beta | \{ T_b T_a^* | \alpha' \rangle | \beta' \rangle. \quad (9.135)$$

Здесь мы пренебрегли изменениями ρ_a от подсостояния к подсостоянию верхнего уровня a и приняли во внимание, что статистическое усреднение должно распространяться только на эволюционные операторы.

Удобно заменить полный оператор эволюции во времени T эволюционным оператором в *представлении взаимодействия* U . Он определяется следующим образом:

$$U(t, 0) = e^{iH_A t / \hbar} T(t, 0). \quad (9.136)$$

Это определение отделяет зависимость от времени невозмущенных собственных функций от эффектов, вызываемых возмущениями. Для невозмущенных собственных состояний $U(t, 0) = 1$. После подстановки в выражение (9.135) будем иметь

$$\phi(t) = \rho_a \sum \langle \alpha | \mathbf{d} | \beta \rangle \langle \beta' | \mathbf{d} | \alpha' \rangle \times \\ \times \langle \alpha | \langle \beta | e^{-iH_b t/\hbar} \{ U_b U_a^* \} e^{iH_a t/\hbar} | \alpha' \rangle | \beta' \rangle. \quad (9.137)$$

Подставляя (9.136) в (9.132), получаем уравнение Шредингера для $U(t, 0)$:

$$i\hbar \partial U(t, 0) / \partial t = e^{iH_A t/\hbar} V_{\text{кл}}(t) e^{-iH_A t/\hbar} U(t, 0) \equiv V'_{\text{кл}} U(t, 0). \quad (9.138)$$

Будем решать это уравнение *итерациями*, взяв в качестве первого приближения $U(t, 0) = 1$. Тогда решение будет иметь вид

$$U(t, 0) = 1 + (i\hbar)^{-1} \int_0^t V'_{\text{кл}}(t_1) dt_1 + \\ + (i\hbar)^{-2} \int_0^t dt_2 V'_{\text{кл}}(t_2) \int_0^{t_2} dt_1 V'_{\text{кл}}(t_1) + \dots \quad (9.139)$$

Обратимся теперь к вычислению статистического среднего $\{ U_b U_a^* \}$. Будем действовать аналогично тому, как это делается в теории Линдхольма. Именно, запишем изменение $\{ U_b U_a^* \}$ за время dt , вызываемое некоторым определенным столкновением (которое рассматривается как удар), в виде

$$\Delta \{ U_a U_b^* \} = \{ U_b(t + \Delta t, t) U_a^*(t + \Delta t, t) - 1 \} \{ U_b U_a^* \}.$$

Здесь мы также предположим, что изменения за время $(t, t + \Delta t)$ статистически не зависят от текущих значений операторов, и поэтому среднее от произведения можно заменить произведением средних. Тогда, воспользовавшись разложением (9.139) для промежутка $(t, t + \Delta t)$, можно получить явное выражение для $\{ U_b(t + \Delta t, t) U_a^*(t + \Delta t, t) - 1 \}$ (см. например, [264], стр. 70; [268], стр. 37]), имеющее вид

$$\{ U_b(t + \Delta t, t) U_a^*(t + \Delta t, t) - 1 \} = e^{i(H_b - H_a)t/\hbar} (\Phi_{ab} \Delta t) e^{-i(H_b - H_a)t/\hbar}. \quad (9.140)$$

Таким образом, для $\{ U_b U_a^* \}$ получается дифференциальное уравнение, а именно

$$d \{ U_b U_a^* \} / dt = e^{i(H_b - H_a)t/\hbar} \Phi_{ab} e^{-i(H_b - H_a)t/\hbar} \{ U_b U_a^* \}, \quad (9.141)$$

решение которого имеет вид

$$\{U_b(t, 0)U_a^*(t, 0)\} = e^{i(H_b - H_a)t/\hbar} \exp[-i(H_b - H_a)t/\hbar + \Phi_{ab}t]. \quad (9.142)$$

Подставив теперь это выражение в (9.137), находим

$$\begin{aligned} \phi(t) = \rho_a \sum_{\alpha, \alpha', \beta, \beta'} \langle \alpha | \mathbf{d} | \beta \rangle \langle \beta' | \mathbf{d} | \alpha' \rangle \times \\ \times \langle \alpha | \langle \beta | e^{i(H_b - H_a)t/\hbar + \Phi_{ab}t} | \alpha' \rangle | \beta' \rangle. \end{aligned} \quad (9.143)$$

Выполняя, далее, обращение преобразования Фурье (и вводя вновь прямое указание на зависимость от квазистатического поля иона F), получим профиль интенсивности

$$\begin{aligned} I(\omega, F) = \frac{\rho_a}{\pi} \operatorname{Re} \sum \langle \alpha | \mathbf{d} | \beta \rangle \langle \beta' | \mathbf{d} | \alpha' \rangle \times \\ \times \langle \alpha | \langle \beta | [i\omega - \Phi_{ab}(F) - i[H_a(F) - H_b(F)]/\hbar]^{-1} | \alpha' \rangle | \beta' \rangle. \end{aligned} \quad (9.144)$$

Здесь нами было использовано то обстоятельство, что, как оказывается, $\Phi_{ab}(F)$ имеет отрицательную вещественную часть. Если $W(F)$ — плотность вероятности распределения значений напряженности поля ионов F , то окончательный профиль, усредненный по всем значениям напряженности поля, дается формулой

$$\begin{aligned} I(\omega) = \frac{\rho_a}{\pi} \int_0^\infty W(F) dF \operatorname{Re} \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta'} \langle \alpha | \mathbf{d} | \beta \rangle \langle \beta' | \mathbf{d} | \alpha' \rangle \times \\ \times \langle \alpha | \langle \beta | [i\omega - \Phi_{ab}(F) - i[H_a(F) - H_b(F)]/\hbar]^{-1} | \alpha' \rangle | \beta' \rangle. \end{aligned} \quad (9.145)$$

Формула (9.145) является весьма общей. Она использовалась в большинстве квантовомеханических расчетов профилей линий, расширенных за счет эффекта Штарка. Она справедлива, если: 1) интервал Δt [фигурирующий в формуле (9.140)] можно выбрать так, чтобы он целиком охватывал столкновение, 2) когда столкновения перекрываются, то они достаточно слабы, чтобы вносимые ими вклады в итеративное решение для U просто складывались, 3) возмущающие частицы можно считать классическими. Выполнение этих критериев применимости теории в каждом конкретном случае должно проверяться.

ПРИМЕНЕНИЕ К ВОДОРОДУ

Одним из самых важных применений описанной выше теории был расчет влияния электронных ударов на уширение водородных

линий. Теория этого вопроса достигла очень высокого уровня совершенства. Теоретические профили прекрасно согласуются с лабораторными измерениями [671]. На их основе удастся удовлетворительно объяснить и наблюдаемые звездные профили (см. рис. 10.4).

Кратко изложенное выше ударное приближение интенсивно применялось Гримом и его сотрудниками [263], [265], [270], [271]. Хотя в принципе и ясно, как вычислить Φ_{ab} , практически выполнить этот расчет нелегко, так как здесь приходится производить обрезание как со стороны малых, так и со стороны больших значений прицельного расстояния. Необходимость обрезания со стороны малых ρ (меньших радиуса Вайскопфа) определяется тем, что столкновения становятся сильными (их невозможно корректно учесть при помощи ряда теории возмущений для эволюционного оператора U). Обрезание со стороны больших ρ необходимо для учета влияния дебаевского экранирования. Дополнительные процедуры обрезания требуются также для того, чтобы описать переход электронов из ударного режима в статистический. Венцом всей этой работы явилась публикация обширных таблиц [353], [356] для четырех первых членов лаймановской и бальмеровской серий. В этих таблицах даются значения функции $S(\alpha)$, которая аналогична профилю, фигурирующему в (9.110) и (9.111), но учитывает *влияние электронных ударов*. Другой подход, развитый Купером, Смитом и Вайдолом [581], [647], [648], [649], использует *единую теорию*, в которой переход электронов из ударного в квазистатистический режим учитывается автоматически. Обширные таблицы результатов, полученных на основе этой теории, были опубликованы для первых четырех членов лаймановской и бальмеровской серий для различных значений температур и плотностей, характерных для звездных атмосфер. В этих таблицах дается и свертка штарковского профиля для водорода с доплеровским, описывающим распределение тепловых скоростей. На рис. 9.2 сравнивается профиль линии H_δ по единой теории (учитывающей как электронное, так и ионное уширение) с профилем в квазистатистическом приближении (с учетом только ионов). Для старших членов серий можно использовать приближенную теорию [262], получающуюся, если в некоторые матричные элементы внести соответствующие изменения [265] (см. также [45]).

В астрофизических условиях на водородных линиях помимо эффекта Штарка существенно сказываются и другие механизмы уширения. Ядро линии определяется в основном доплеровским уширением. При низких электронных концентрациях в крыльях может существенным оказаться влияние затухания вследствие излучения и

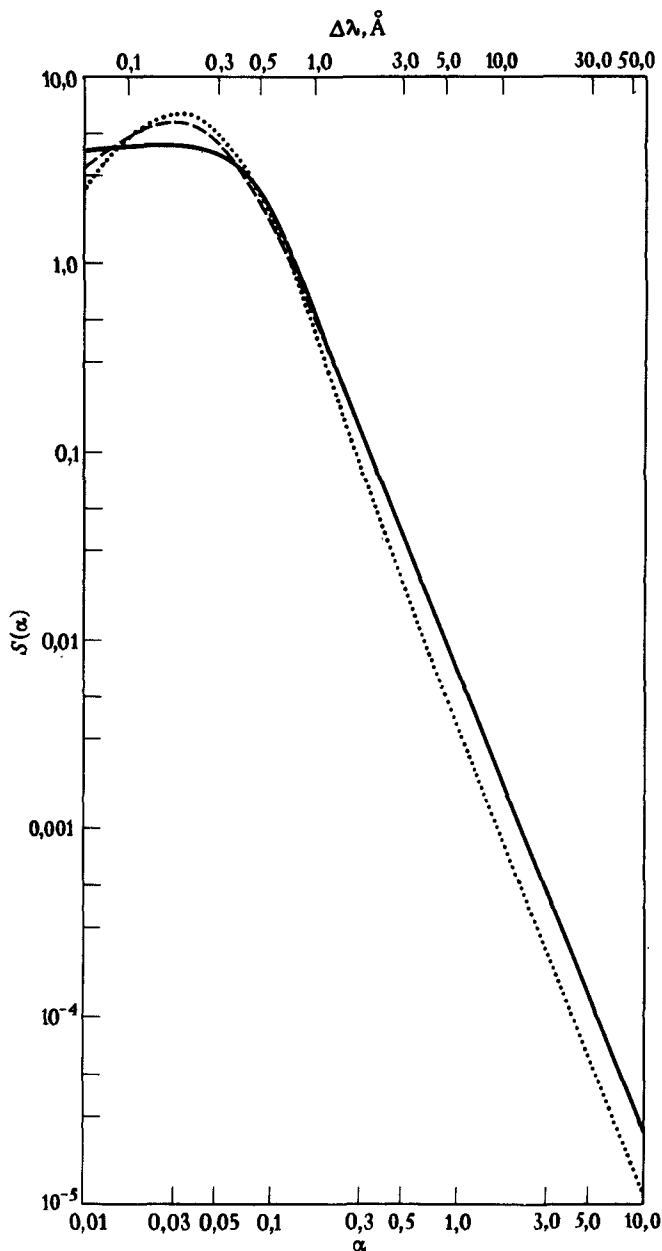


Рис. 9.2. Штарковские профили H_δ при $n_e = 3,16 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $T = 10^4 \text{ К}$. Точечная кривая — хольцмарковский профиль, учитывающий уширение только за счет ионов [634]. Штриховая кривая — профиль при квазистатическом уширении ионами и ударном уширении электронами [650]. Сплошная кривая — свертка профиля, учитывающего уширение под действием электронов и ионов, с доплеровским профилем, обусловленным тепловыми движениями атомов. Обратите внимание, что в ядре линии доминирует доплер-эффект и что при учете уширения электронами коэффициент поглощения в крыле линии значительно возрастает.

резонансного уширения. Если предположить, что все эти механизмы действуют независимо, то их совместное влияние можно учесть путем вычисления свертки соответствующих профилей. Свертка доплеровского профиля с лоренцевским, учитывающим радиационное и резонансное затухания, дает фойгтовский профиль $H(a, \nu)$, где $a = (\Gamma_{\text{изл}} + \Gamma_{\text{рез}})/4\pi\Delta\nu_D$ и $\nu = \Delta\nu/\Delta\nu_D$. Этот фойгтовский профиль затем свертывается (численно) со штарковским профилем $S(\alpha)$, что дает атомный коэффициент поглощения

$$\alpha_\nu(\Delta\nu) = (\pi^{1/2}e^2/mc)f \int_{-\infty}^{\infty} S^*(\Delta\nu + \nu\Delta\nu_D)H(a, \nu)d\nu, \quad (9.146)$$

где S^* — профиль $S(\alpha)$, пересчитанный на шкалу частот.

ВОДОРОДОПОДОБНЫЕ ИОНЫ

Водородоподобные ионы с зарядом ядра Z имеют точно такой же набор штарковских компонент, что и водород, хотя энергии, конечно, другие. Профиль, определяемый уширением одними ионами, имеет вид

$$S(\alpha) = Z^5 S_{QS}(Z^5\alpha), \quad (9.147)$$

где S_{QS} — квазистатический профиль для водорода, даваемый в [634]. Отметим, что линии ионов в шкале длин волн уже в Z^5 раз. Поскольку с ростом Z штарковские ширины у ионов уменьшаются, а вероятности радиативных переходов растут, начиная с некоторого Z штарковским уширением можно пренебрегать по сравнению с $\Gamma_{\text{изл}}$.

Влияние уширения электронами у водородоподобных ионов аналогично его влиянию у водорода, хотя выражение для Φ_{ab} изменяется, так как теперь возмущающий электрон движется вокруг положительно заряженного иона по *гиперболе*, а не по *прямоугольной траектории*. Результаты ранних расчетов уширения линий He II $\lambda 3203$ и $\lambda 4686$ (очень сильных в спектрах звезд типа O) приведены в [272]. Значительно лучшие расчеты для линий He II $\lambda\lambda 256; 304; 1085; 1216; 1640; 4686$ и 3203 даются в [354], [355]. Результаты расчетов на основе единой теории [258], [260] для линии $\lambda 304$ приводятся в [259]. К сожалению, точных расчетов для представляющих большой интерес для астрофизики линий серии Пиккеринга $n \rightarrow 4$ (например, $\lambda\lambda 10124; 5412; 4542; 4200$ и т.д.) пока нет, имеется лишь приближенная теория [262], [265], [45].

ЛИНИИ НЕЙТРАЛЬНОГО ГЕЛИЯ

В спектрах В-звезд видны сильные линии HeI. Здесь на них действуют ударное уширение электронами и квазистатическое уширение ионами за счет квадратичного эффекта Штарка. Для изолированных линий получаются профили вида

$$I(\Delta\omega) = \frac{w}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{W(F)dF}{(\Delta\omega - d - C_4 F^2/e^2)^2 + w^2}, \quad (9.148)$$

где $W(F)$ — вероятность того, что поле имеет напряженность F , w — *ширина линии*, обусловленная электронными ударами, и d — *сдвиг линии*. Заметим, что так как напряженность поля входит только в виде F^2 , ионные поля всегда смещают компоненты линии в одном направлении, что вызывает появление *асимметричного профиля*.

Явные выражения для w и d приводятся для *изолированных* линий в [269]; [264], стр. 81 — 86; [268], §II.3сх; [180]. Таблицы, позволяющие рассчитывать профили по значениям некоторых безразмерных параметров, даются в [269]. Детальные численные данные, касающиеся w и d для нескольких линий, даются в [269]; улучшенные результаты имеются в [180] и [67]. Гораздо более интересный (и более трудный) случай представляют линии диффузной серии $2^3P - n^3D$ и $2^1P - n^1D$ при $n \geq 4$. Как впервые было указано Струве [614], [615], у линии $2^3P - 4^3D$ HeI $\lambda 4471$ имеется «*запрещенная*» компонента $2^3P - 4^3F$ на $4470 \text{ \AA}$. У других линий диффузной серии также наблюдаются подобные компоненты, которые возникают вследствие перемешивания состояний 3D и 3F или 1D и 1F из-за наличия в плазме электрических полей. Поскольку линии диффузной серии принадлежат к числу тех линий в звездных спектрах, для которых имеются наилучшие наблюдения, построение надежной теории их образования представляет большой интерес. Первые попытки построить теорию их уширения [66], [245], [266] были не слишком удачны, так как «запрещенные» компоненты получались слишком узкими и имеющими слишком большую интенсивность. При сравнении с наблюдаемыми звездными профилями теоретические профили давали слишком большой контраст между «запрещенной» абсорбционной компонентой и провалом между ней и разрешенной компонентой; теория не согласовалась и с лабораторными измерениями [122], [123], [124]. Затем была построена новая, более точная теория для линий HeI $\lambda 4471$ [68] и $\lambda 4921$ ($2^1P - 4^1D$)

[69]. Теоретические профили, рассчитанные по этой теории, превосходно согласуются с наблюдаемыми в звездных спектрах [438], [439].

ДРУГИЕ ЛЕГКИЕ ЭЛЕМЕНТЫ

Электронные столкновения приводят к уширению линий и других элементов, наблюдающихся в спектрах звезд. Ширины и сдвиги этих линий можно рассчитать с помощью методов, аналогичных тем, которые используются для HeI (см. [268], § II.3c, II.3d). Обширные результаты для нейтральных атомов приводятся в [264], стр. 454 — 527, [268], приложение IV, [84]. В случае заряженных ионов кулоновское взаимодействие между излучающим ионом и возмущающей частицей приводит к тому, что эти частицы движутся по гиперболическим траекториям [110], [111]. Ширины линий, рассчитанные с учетом этого обстоятельства, существенно больше, чем в случае прямолинейной траектории. Обширные результаты детальных расчетов для ионов даются в [268], приложение V; [111], [548], [167], [549], [550]. Удобные приближенные формулы для оценки штарковских ширин приводятся в [267], [183], [549].

Глава 10

Классические трактовки проблемы переноса излучения в линии

В этой главе обсуждаются некоторые ранние трактовки проблемы образования линий. Они служат как бы фоном для более современных подходов, которые будут излагаться в последующих главах. Более полное обсуждение этих старых методов и их применения к звездным спектрам можно найти в [684], гл. 7; [638], гл. 15 — 18; [15], гл. 12 — 16; [11], гл. 8; [256], гл. 14 — 16. С этими методами нужно быть знакомым, потому что на них основано огромное количество имеющихся в литературе работ. Важнее, впрочем, другое: в физических основах классических трактовок проблемы следует разобраться для выяснения надежности спектроскопической диагностики, основанной на классическом подходе, и для понимания тех принципиальных отличий, которые свойственны современным исследованиям.

10.1. Постановка задачи

При классическом подходе обычно с самого начала выделяют существование двух различных процессов образования линий — рассеяния и поглощения. Эти два понятия уже обсуждались в гл. 2, где было описано и различие между ними. Обычно предполагают, что доля $1 - \epsilon$ поглощенных фотонов просто *рассеивается*, так что возбужденный атом непосредственно возвращается на начальный нижний уровень. Обыкновенно предполагают, что рассеяние *изотропно* и *когерентно* (в действительности гораздо лучше приближение *полного перераспределения*). Тогда вклад в коэффициент излучения за счет рассеяния составляет

$$\eta_{\nu}^s = (1 - \epsilon)\chi_{\nu}J_{\nu}, \quad (10.1)$$

где χ_i — коэффициент поглощения в линии, отвечающей переходу между уровнями i и j :

$$\chi_i = (\pi e^2 / mc) f_{ij} [n_i - (g_i / g_j) n_j]. \quad (10.2)$$

Относительно остальной доли фотонов ϵ принимается, что они *гибнут*, а их энергия за счет различных процессов переходит в теп-

ло (см. § 2.1). Далее утверждается, что этот отток тепла в тепловой резервуар должен в точности балансироваться *тепловым излучением*, дающим в полный коэффициент излучения вклад, равный

$$\eta_{\nu}^t = \varepsilon \chi_l \phi_{\nu} B_{\nu}(T). \quad (10.3)$$

В предельном случае строгого ЛТР $\varepsilon = 1$, и все излучение является тепловым.

Кроме того, в коэффициенты поглощения и излучения дают вклад также тепловые процессы в континууме и электронное рассеяние. Поэтому уравнение переноса имеет вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial I_{\nu}}{\partial z} = & -(k_c + \sigma + \chi_l \phi_{\nu}) I_{\nu} + k_c B_{\nu} + \\ & + \sigma J_{\nu} + \varepsilon \chi_l \phi_{\nu} B_{\nu} + (1 - \varepsilon) \chi_l \phi_{\nu} J_{\nu}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Зависимостью k_c и σ от ν мы пренебрегли, так как большинство линий настолько узко, что изменение этих коэффициентов в пределах линии пренебрежимо мало по сравнению с быстрым изменением ϕ_{ν} . Если обозначить $d\tau_{\nu} = -(k_c + \sigma + \chi_l \phi_{\nu}) dz$ и положить $\rho = \sigma/(k_c + \sigma)$ и

$$\beta_{\nu} = \chi_l \phi_{\nu}/(k_c + \sigma), \quad (10.5)$$

будем иметь

$$\mu \frac{\partial I_{\nu}}{\partial \tau_{\nu}} = I_{\nu} - \{[(1 - \rho) + \varepsilon \beta_{\nu}] B_{\nu} + [\rho + (1 - \varepsilon) \beta_{\nu}] J_{\nu}\} / (1 + \beta_{\nu}). \quad (10.6)$$

Если, далее, ввести обозначение

$$\lambda_{\nu} = [(1 - \rho) + \varepsilon \beta_{\nu}] / (1 + \beta_{\nu}), \quad (10.7)$$

то уравнение переноса примет вид

$$\mu \frac{\partial I_{\nu}}{\partial \tau_{\nu}} = I_{\nu} - \lambda_{\nu} B_{\nu} - (1 - \lambda_{\nu}) J_{\nu}. \quad (10.8)$$

Э. Милн и А. Эддингтон использовали уравнение (10.8) как аппроксимацию в проблеме образования линий, и его обычно связывают с их именами. Превосходное обсуждение физических следствий, вытекающих из этого уравнения, было дано Милном [416], стр. 169 и следующие за ней, и Стремгреном [613].

С физической точки зрения уравнение (10.8) дает довольно грубую идеализацию процесса образования линий и может быть под-

вергнуто критике с различных позиций. 1) На самом деле рассеяние в линии не является когерентным. Этот недостаток будет устранен, если вместо уравнения (10.8) написать

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} = I_\nu - \lambda_\nu B_\nu - \frac{\rho J_\nu}{1 + \beta_\nu} - \frac{(1 - \varepsilon)\beta_\nu}{(1 + \beta_\nu)\phi_\nu} [R(\nu', \nu) J_{\nu'} d\nu', \quad (10.9)$$

где $R(\nu', \nu)$ — соответствующая функция перераспределения (см. § 2.1 и гл. 13). 2) Чтобы решить уравнения (10.8) или (10.9), нужно знать параметр ε и населенности уровней n_i и n_j . При классическом подходе часто принимается, что имеет место ЛТР, так что $\varepsilon = 1$ и $n_i = n_i^*$, $n_j = n_j^*$. Следует, однако, подчеркнуть, что это просто *предположение*, причем, как будет показано в гл. 11 и 12, предположение часто неоправданное, которое может приводить к большим ошибкам. Во многих работах для ε выбирается некоторое соответствующее случаю значение, а про населенности по-прежнему предполагается, что они равновесные. Такой подход *внутренне противоречив*, так как, когда в линии происходит рассеяние, населенности уровней через посредство уравнений статистического равновесия зависят от поля излучения. 3) Уравнение вида (10.8) было выведено Милном для строго двухуровневого атома, и его анализ дает для параметра ε вполне определенное (и правильное) значение [416], стр. 172 — 178]. Однако, как отмечалось выше, когерентное рассеяние *не является* хорошим приближением. Важнее другое: анализ уравнений статистического равновесия для общих (т.е. многоуровневых) моделей атома показывает (см. гл. 11 и 12), что в выражении для функции источников появляются члены *другой природы*. Они могут зависеть от полей излучения, обусловленных другими переходами (в континуумах и в линиях), и тем самым связывают все линии спектра. Короче говоря, как уравнение (10.8), так и (10.9) с физической точки зрения существенно неполны, и это следет иметь в виду при чтении всего, что излагается далее в этой главе.

10.2. Модель Милна — Эддингтона

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Рассмотрим теперь уравнение Милна — Эддингтона [уравнение (10.8)] при следующих упрощающих предположениях: λ_ν , ε и ρ не изменяются с глубиной, а функция Планка B_ν является линейной

функцией оптической глубины в континууме τ , т.е.

$$B_\nu = a + b\tau = a + b\tau_\nu/(1 + \beta_\nu) \equiv a + p_\nu\tau_\nu. \quad (10.10)$$

При выполнении этих условий можно получить *точное* решение [158], но оно лишь незначительно отличается от получаемого ниже приближенного решения.

Взяв момент нулевого порядка по μ от уравнения (10.8), получим

$$\frac{dH_\nu}{d\tau_\nu} = J_\nu - (1 - \lambda_\nu)J_\nu - \lambda_\nu B_\nu = \lambda_\nu(J_\nu - B_\nu). \quad (10.11)$$

С точностью до того, что понимается под λ_ν , уравнение (10.11) совпадает с уравнением (6.4). Анализ, проведенный в § 6.1, показал, что в приближении Эддингтона его решение имеет вид

$$J_\nu = a + p_\nu\tau_\nu + (p_\nu - \sqrt{3}a) \exp[-(3\lambda_\nu)^{1/2}\tau_\nu]/[\sqrt{3} + (3\lambda_\nu)^{1/2}], \quad (10.12)$$

а выходящий поток равен

$$H_\nu(0) = 3^{-1/2}J_\nu(0) = \frac{1}{3} [p_\nu + (3\lambda_\nu)^{1/2}a]/(1 + \lambda_\nu)^{1/2}. \quad (10.13)$$

Формула (10.13) показывает, что термализация ($J_\nu \rightarrow B_\nu$) происходит только на глубинах порядка $\lambda_\nu^{-1/2}$. Вспоминая определение λ_ν , видим, что эта глубина равна $(1 - \rho)^{-1/2}$ в континууме ($\beta_\nu = 0$) и $\varepsilon^{-1/2}$ в сильной линии ($\beta_\nu \rightarrow \infty$). В обоих случаях термализация происходит на глубине $p^{-1/2}$, где p — вероятность (в расчете на акт взаимодействия с веществом) того, что фотон погибнет, а энергия превратится в тепло. Эти результаты согласуются с приведенными в гл. 6 соображениями, основанными на рассмотрении случайных блужданий. Отметим, что они применимы лишь при когерентном рассеянии (см. гл. 11).

Формулой (10.13) можно воспользоваться для расчета профиля линии в спектре звезды. В континууме $\beta_\nu = 0$. Поэтому $\lambda_\nu = 1 - \rho$, и *поток в континууме* равен

$$H_c(0) = \frac{1}{3} \left[b + a\sqrt{3(1 - \rho)} \right] / (1 + \sqrt{1 - \rho}). \quad (10.14)$$

Таким образом, *остаточный поток* в линии в силу формулы (8.2) есть

$$R_\nu = \frac{p_\nu + (3\lambda_\nu)^{1/2}a}{1 + \lambda_\nu^{1/2}} \frac{1 + \sqrt{1 - \rho}}{b + a\sqrt{3(1 - \rho)}}. \quad (10.15)$$

Из этой классической теории можно получить четыре важных результата, которые легли в основу системы понятий, использовав-

шихся в большинстве ранних работ по образованию линий. Сейчас мы кратко их обсудим.

ЛИНИИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ЗА СЧЕТ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим случай, когда $\rho = 0$, так что рассеяния в континууме нет. Далее, предположим, что $\varepsilon = 0$, так что в линии происходит чистое рассеяние. Тогда $\lambda_\nu = (1 + \beta_\nu)^{-1}$, и остаточный поток в линии равен

$$R_\nu = 2 \left[\frac{b}{1 + \beta_\nu} + a \left(\frac{3}{1 + \beta_\nu} \right)^{1/2} \right] \left[\left(1 + \sqrt{\frac{1}{1 + \beta_\nu}} \right) (\sqrt{3}a + b) \right]^{-1}. \quad (10.16)$$

Если рассмотреть случай очень сильной линии и перейти к пределу $\beta_\nu \rightarrow \infty$, получим $R_\nu = H_\nu(0)/H_c(0) = 0$. Это показывает, что ядро очень сильной линии, возникающей за счет рассеяния, может быть совершенно темным. Как показывается ниже, этот результат противоположен тому, что имеет место для линии, возникающей за счет поглощения.

Упражнение 10.1. Положив $\beta_\nu = \beta_0 H(a, \nu)$, где через H обозначена обычная функция Фойгта, построить по формуле (10.16) графики профилей остаточного потока для линий, возникающих за счет рассеяния, при $\beta_0 = 1; 10; 100; 1000; 10^4$ и $b/a = 1; 2$ и 3 , считая $a = 10^{-3}$.

Упражнение 10.2. В модели Шварцшильда — Шустера принимается, что линии образуются лишь в конечном слое (обращающий слой) толщины τ_ν , освещаемом снизу излучением интенсивности I_0 . В обращающем слое коэффициент поглощения в континууме равен нулю, а в линии происходит чистое рассеяние. Пользуясь *двухпотокowym приближением* ($I = I^+$ при $0 \leq \mu \leq 1$, $I = I^-$ при $-1 \leq \mu \leq 0$ и $\mu = \pm 1/2$ в уравнении переноса), показать, что а) $H_\nu = \frac{1}{2}(I_\nu^+ - I_\nu^-) = \text{const} = \frac{1}{2}I_0/(1 + \tau_\nu)$ и б) $J_\nu(t_\nu) = H_\nu(1 + 2t_\nu)$, $0 \leq t_\nu \leq \tau_\nu$.

ЛИНИИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ЗА СЧЕТ ПОГЛОЩЕНИЯ

Предположим опять, что $\rho = 0$, но положим теперь $\varepsilon = 1$ (ЛТР в линии). Тогда $\lambda_\nu = 1$ и

$$R_\nu = [\sqrt{3}a + b(1 + \beta_\nu)^{-1}]/(\sqrt{3}a + b). \quad (10.17)$$

В этом случае при $\beta_i \rightarrow \infty$ поток в линии не стремится к нулю, а приближается к конечному значению

$$R_0 = R_\nu(\varepsilon = 1, \beta_\nu \rightarrow \infty) = (1 + b\sqrt{3}a)^{-1}. \quad (10.18)$$

Этого следовало ожидать, так как при $\beta_\nu \rightarrow \infty$ видны лишь поверхностные слои звезды. Выходящий поток определяется поэтому значением функции Планка на поверхности, которое отлично от нуля. В противоположность этому в случае, когда имеет место чистое рассеяние, фотоны все время выводятся из пучка излучения, и в пределе $\beta_\nu \rightarrow \infty$ таких фотонов, которые выжили бы и вышли через границу, не остается вовсе.

Упражнение 10.3. Повторить упражнение 10.1 для линии, возникающей за счет поглощения, пользуясь выражением (10.17).

Полезно переписать формулы (10.17) и (10.18) через функцию Планка и ее градиент. Предположим, что в шкале *средних* оптических глубин

$$B_\nu(\bar{\tau}) = B_\nu(T_0) + \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial \tau} \right)_0 \bar{\tau} \equiv B_0 + B_1 \bar{\tau}. \quad (10.19)$$

Пользуясь полученным в приближении Эддингтона выражением для распределения температуры в сером случае, а именно $T^4 = T_0^4(1 + \frac{3}{2}\bar{\tau})$, легко показать, что

$$B_1 = \frac{3}{8} X_0 B_0, \quad (10.20)$$

где

$$X_0 = u_0/(1 - e^{-u_0}) \quad (10.21)$$

и $u_0 = h\nu/kT_0$ (k — постоянная Больцмана). Таким образом, параметры в выражении (10.10) таковы: $a \equiv B_0$,

$$b = \frac{3}{8} X_0 B_0 \bar{k}/k \quad (10.22)$$

и

$$p_\nu = \frac{3}{8} X_0 B_0 \left(\frac{\bar{k}}{k} \right) / (1 + \beta_\nu), \quad (10.23)$$

где $\bar{k}$ и k — средний коэффициент поглощения и монохроматический коэффициент поглощения в континууме соответственно. Поэтому формула (10.18) принимает вид

$$R_0 = [1 + \sqrt{3} X_0 (\bar{k}/k)/8]^{-1}. \quad (10.24)$$

Упражнение 10.4. Получить формулы (10.20) — 10.23).

Для Солнца, согласно серой модели, $T \approx 4800$ К, и если выбрать $\lambda \approx 5000$ Å, то $u_0 \approx 6$, $X_0 \approx 6$ и $k \approx \bar{k}$, так что формула (10.24) дает

$$R_0 = (1 + \frac{3}{4}\sqrt{3})^{-1} = 0,44. \quad (10.25)$$

Это значение хорошо согласуется с глубинами многих сильных линий, наблюдающихся в этом участке солнечного спектра. Однако некоторые линии, в частности резонансные, такие, как D-линии натрия, гораздо глубже. Поэтому резонансные линии стали рассматриваться как линии, «возникающие за счет рассеяния», а субординатные линии (например, H_α) — как линии, «возникающие за счет поглощения». Считалось, что центральные интенсивности линий второй группы дают информацию о поверхностной температуре атмосферы. Такое подразделение линий на две группы интуитивно кажется разумным, так как следует ожидать, что в резонансной линии самым вероятным способом ухода с верхнего уровня является, конечно, прямой переход на нижний уровень. Напротив, для субординатных линий, вообще говоря, будет существовать большое число возможностей, и фотоны могут эффективно уходить из линии и гибнуть. Следует, однако, подчеркнуть, что такая характеристика линий является лишь некоторой схемой, и часто она искажает истинную физическую картину их образования. Например, в гл. 11 будет найдено, что граничное значение функции источников в (субординатной) линии H_α фактически не имеет ничего общего с температурой наружных слоев атмосферы.

ИЗМЕНЕНИЕ ОТ ЦЕНТРА К КРАЮ

Интенсивность излучения, выходящего на частоте ν из точки диска, находящейся на угловом расстоянии $\theta = \arccos \mu$ от его центра, дается выражением

$$\begin{aligned} I_\nu(0, \mu) &= \int_0^\infty S_\nu(\tau_\nu) e^{-\tau_\nu/\mu} d\tau_\nu / \mu = \\ &= \int_0^\infty [B_\nu + (1 - \lambda_\nu)(J_\nu - B_\nu)] \exp(-\tau_\nu/\mu) \mu^{-1} d\tau_\nu. \end{aligned} \quad (10.26)$$

Здесь использована функция источников S_ν , определяемая формулой

(10.8). Подставляя J_ν из (10.12), находим

$$I_\nu(0, \mu) = a + p_\nu \mu + \frac{(p_\nu - \sqrt{3}a)(1 - \lambda_\nu)}{\sqrt{3}(1 + \sqrt{\lambda_\nu})(1 + \sqrt{3}\lambda_\nu \mu)}. \quad (10.27)$$

В континууме $\beta_\nu = 0$, и если опять взять $\rho = 0$, то

$$I_c(0, \mu) = a + b\mu. \quad (10.28)$$

Выражения (10.27) и (10.28) позволяют непосредственно получить остаточную интенсивность $r_\nu(\mu) = I_\nu(0, \mu)/I_c(0, \mu)$ и глубину линии $a_\nu(\mu) = 1 - r_\nu(\mu)$.

Рассмотрим сначала линию, возникающую за счет чистого поглощения. Для нее $\varepsilon = 1$ и $\lambda_\nu = 1$. Поэтому

$$r_\nu(\mu) = [1 + (b/a)\mu/(1 + \beta_\nu)]/[1 + (b/a)\mu]. \quad (10.29)$$

Отсюда видно, что при приближении к краю (т.е. при $\mu \rightarrow 0$) $I_\nu \rightarrow I_c$, и линия исчезает. Это согласуется с описанной выше физической картиной, поскольку когда мы достигаем края диска, на любой частоте можно видеть только самый поверхностный слой. При $\varepsilon = 1$ в пределах всей линии функция источников, которую мы «видим», одна и та же (поверхностное значение функции Планка), и контраст между линией и континуумом исчезает. С другой стороны, если $\varepsilon = 0$ (линия, возникающая за счет чистого рассеяния), то $\lambda_\nu = (1 + \beta_\nu)^{-1}$, и в пределе $\beta_\nu \rightarrow \infty$ формула (10.27) дает $I_\nu(0, \mu) = 0$ при всех μ . Таким образом, ядра линий, возникающих за счет чистого рассеяния, остаются темными всегда, даже на краю, так что существует четкое различие в поведении при переходе от центра к краю между линиями, возникающими за счет поглощения и рассеяния. Несколько типичных примеров изменений глубины линий в зависимости от положения на диске даны в табл. 10.1 для ряда значений ε и β_ν . При расчетах бралось $b/a = 3$. Отрицательные значения означают эмиссию. Они нереальны и являются следствием приближений, сделанных при решении уравнения переноса.

В солнечном спектре некоторые линии действительно ослабевают с приближением к краю, тогда как другие нет или ослабевают очень мало. Это наблюдаемое поведение также породило классификацию линий на линии, образующиеся «за счет поглощения» и «за счет рассеяния», хотя в некоторых случаях отнесение линии к тому или другому из этих типов по данным о потемнении к краю находилось в противоречии с тем, что получается на основе центральных интенсивностей. Более того, ряд исследований (например, исследование Хаутгаста, его обзор см. в [596]) показал, что ни один

ТАБЛИЦА 10.1

Изменение центр — край по модели Милна — Эддингтона

ε	β_ν	$a_\nu(\mu)$				A_ν (поток)
		$\mu = 1$	0,5	0,3	0	
1,0	0,01	0,007	0,006	0,005	0,000	0,006
	0,1	0,068	0,055	0,043	0,000	0,058
	1,0	0,375	0,300	0,237	0,000	0,317
	10,0	0,682	0,545	0,431	0,000	0,576
	100,0	0,743	0,594	0,469	0,000	0,628
	∞	0,750	0,600	0,474	0,000	0,634
0,3	0,01	0,007	0,005	0,004	-0,002	0,006
	0,1	0,666	0,051	0,037	-0,019	0,054
	1,0	0,378	0,306	0,246	0,026	0,322
	10,0	0,723	0,633	0,565	0,334	0,653
	100,0	0,798	0,713	0,648	0,438	0,731
	∞	0,808	0,723	0,659	0,452	0,741
0,1	0,01	0,007	0,005	0,004	-0,003	0,006
	0,1	0,066	0,049	0,035	-0,024	0,053
	1,0	0,379	0,308	0,250	0,035	0,324
	10,0	0,751	0,687	0,639	0,483	0,700
	100,0	0,847	0,799	0,765	0,658	0,809
	∞	0,860	0,815	0,783	0,684	0,824
0,0	0,01	0,007	0,005	0,003	-0,004	0,006
	0,1	0,066	0,049	0,034	-0,027	0,053
	1,0	0,379	0,310	0,252	0,039	0,325
	10,0	0,778	0,732	0,698	0,589	0,742
	100,0	0,931	0,920	0,912	0,885	0,922
	∞	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

из этих двух типов не адекватен наблюдениям, потому что у некоторых линий определяющую роль играют эффекты некогерентного рассеяния. Короче, описанный здесь подход крайне схематичен. Следует ясно осознавать, что он просто не содержит в себе многих существенных физических моментов.

МЕХАНИЗМ ШУСТЕРА

В обсуждении, которое было дано выше, континуум считался чисто тепловым. Если учесть рассеяние в континууме, появляется

несколько интересных эффектов. Они впервые были рассмотрены Шустером в одной из основополагающих статей по теории переноса излучения [562]. Чтобы подчеркнуть роль рассеяния в континууме, положим $\rho = 1$ (для звезд типа О и близких к ним это реалистичное значение). Тогда $\lambda_\nu = \varepsilon\beta_\nu / (1 + \beta_\nu)$, и формула (10.15) принимает вид

$$R_\nu = \left[\frac{1}{1 + \beta_\nu} + \frac{a}{b} \left(\frac{3\varepsilon\beta_\nu}{1 + \beta_\nu} \right)^{1/2} \right] \left[1 + \left(\frac{\varepsilon\beta_\nu}{1 + \beta_\nu} \right)^{1/2} \right]^{-1}. \quad (10.30)$$

Прежде всего рассмотрим случай, когда $\varepsilon = 0$. Тогда $R_\nu = 1/(1 + \beta_\nu)$, и линия является чисто абсорбционной. Это объясняется тем, что и линии, и континуум образуются за счет рассеяния, причем фотон линии проходит в атмосфере больший путь, чем фотон континуума. Пусть теперь $\varepsilon = 1$. Тогда из формулы (10.30) очевидно, что в ядре линии при $\beta_\nu \rightarrow \infty$ имеем $R_\nu \rightarrow \sqrt{3}a/2b$. Таким образом, линия может быть видна как в поглощении, так и в излучении в зависимости от величины отношения a/b . Чем меньше градиент температуры (т.е. чем меньше значение b), тем линия ярче по сравнению с континуумом. Причина этого в том, что поскольку $\varepsilon = 1$, то функция источников в линии всюду равна функции Планка при локальной температуре, в континууме же рассеяние ведет к тому, что J_ν (а значит, и S_ν) будет меньше B_ν .

Если a/b превышает критическое значение $a/b = 2/\sqrt{3}$, линия видна в излучении при любых значениях β_ν (т.е. на всех частотах в пределах линии). Если a/b в точности равно критическому значению, то далекие крылья ($\beta_\nu = 0$) и само ядро линии ($\beta_\nu \rightarrow \infty$) лежат на уровне континуума, а все остальные точки в пределах линии видны в излучении. Если a/b меньше критического значения, у линии могут быть слабые эмиссионные крылья и центральное обращение в виде абсорбционного ядра. Если $a/b < 1/\sqrt{3}$, вся линия видна в поглощении.

Такое совместное действие рассеяния и поглощения, порождающее в зависимости от градиента температуры и абсорбционные, и эмиссионные линии, известно под названием *механизма Шустера*. Тщательное рассмотрение различных возможных случаев было дано самим Шустером [562]. Время от времени высказывалось мнение, что этот механизм мог бы объяснять эмиссионные линии, наблюдающиеся в некоторых спектрах звезд ранних типов, но в свете выполненного недавно критического рассмотрения вопроса [238], [280] это представляется маловероятным.

10.3. Теоретическая кривая роста

Пользуясь формулой (10.15), в принципе можно было бы считать профиль спектральной линии и путем интегрирования по частоте определить ее эквивалентную ширину. Такая процедура, однако, является трудоемкой и требует использования ЭВМ. Поэтому поучительно рассмотреть какую-нибудь простую модель, которая позволяет аналитически рассчитать эквивалентную ширину. Таким путем можно будет построить так называемую *кривую роста*, непосредственно дающую эквивалентную ширину в функции числа тех поглощающих атомов, которые создают линию.

Будем сначала предполагать, что образование линии происходит в слое, которому можно приписать единые значения температуры и электронного давления. В лабораторных исследованиях это предположение, как правило, выполняется, но в условиях звездных атмосфер обычно имеются большие градиенты температуры и давления. Поэтому выбрать подходящие значения температуры и давления нелегко, и они являются не более чем некоторыми довольно неопределенными средними, взятыми по области формирования линий. Произведя такой выбор, мы можем (приняв ЛТР) рассчитать населенности атомных уровней, а следовательно, и коэффициент поглощения в континууме k_c , и коэффициент поглощения в линии, соответствующей переходу $i \rightarrow j$:

$$\chi_{ij}(\nu) = (\pi e^2 / mc) f_{ij} n_i (1 - e^{-h\nu/kT}) \phi_\nu = \chi_{ij} \phi_\nu. \quad (10.31)$$

Про профиль поглощения предполагается, что он дается функцией Фойгта [формула (9.34)]

$$H(a, \nu) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} [(v - y)^2 + a^2]^{-1} dy,$$

где $\nu = \Delta\nu/\Delta\nu_D$, $a = \Gamma/(4\pi\Delta\nu_D)$ и $\Delta\nu_D = \nu\xi_0/c$; здесь ξ_0 — наиболее вероятная скорость атомов вещества. Можем теперь написать $\chi_{ij}(\nu) = \chi_0 H(a, \nu)$, где $\chi_0 = \chi_{ij}/(\pi^{1/2}\Delta\nu_D)$. Принимается, что в области формирования линии $\Delta\nu_D$ и параметр a заданы, и используется модель Милна — Эддингтона, в которой отношение $\beta_\nu = \chi_{ij}(\nu)/k_c$ не зависит от глубины. (Предположение о независимости β_ν от глубины для некоторых спектральных линий, например для MgII $\lambda 4481$ и SiII $\lambda\lambda 4128, 4131$, действительно является довольно хорошим приближением. Для этих линий χ_0 и k_c могут изменяться в атмосфере на несколько порядков, а их отношение остается почти постоянным.) Примем, наконец, что линия возникает за

счет процесса поглощения при ЛТР. В этом случае поток легко считать, а именно

$$F_\nu = 2 \int_0^\infty B_\nu(T(\tau)) E_2 \left[\int_0^\tau (1 + \beta_\nu) dt \right] (1 + \beta_\nu) d\tau. \quad (10.32)$$

Как и ранее, примем, что $B_\nu(T(\tau)) = B_0 + B_1\tau$, где τ — оптическая глубина в континууме. Тогда, поскольку принято, что β_ν не зависит от глубины, будем иметь

$$\begin{aligned} F_\nu &= 2 \int_0^\infty (B_0 + B_1\tau) E_2[(1 + \beta_\nu)\tau] (1 + \beta_\nu) d\tau = \\ &= B_0 + \frac{2}{3} B_1 / (1 + \beta_\nu). \end{aligned} \quad (10.33)$$

Из формулы (10.33) для потока в континууме находим, очевидно,

$$\begin{aligned} F_c &= B_0 + \frac{2}{3} B_1, \text{ так что глубина линии в потоке равна} \\ A_\nu &= [\beta_\nu / (1 + \beta_\nu)] (1 + \frac{3}{2} (B_0/B_1))^{-1}. \end{aligned} \quad (10.34)$$

Удобно ввести в рассмотрение параметр A_0 — центральную глубину бесконечно сильной линии. Переходя к пределу $\beta_\nu \rightarrow \infty$ в формуле (10.34), находим

$$A_0 = (1 + \frac{3}{2} (B_0/B_1))^{-1}, \quad (10.35)$$

т.е., по существу, тот же результат, что и (10.18). Формулу (10.34) теперь можно переписать так:

$$A_\nu = A_0 \beta_\nu / (1 + \beta_\nu). \quad (10.36)$$

Интегрируя A_ν по частоте, можем теперь рассчитать эквивалентную ширину. Если принять, что линия симметрична относительно ее центра, то получим

$$W_\nu = \int_0^\infty A_\nu d\nu = 2A_0 \Delta\nu_D \int_0^\infty \beta(v) [1 + \beta(v)]^{-1} dv. \quad (10.37)$$

Но $\beta(v) = (\chi_0/k_0)H(a, v) \equiv \beta_0 H(a, v)$, так что если ввести приведенную эквивалентную ширину $W^* = W/(2A_0 \Delta\nu_D)$, будем иметь

$$W^*(a, \beta_0) = \int_0^\infty \beta_0 H(a, v) [1 + \beta_0 H(a, v)]^{-1} dv. \quad (10.38)$$

Прежде чем пытаться вычислить этот интеграл, рассмотрим качественно, как эволюционирует линия по мере увеличения числа поглощающих атомов. Вначале, когда число поглощающих частиц невелико, каждая из них будет способна выводить фотоны из поля излучения, и сила линии должна быть пропорциональна числу поглощающих атомов. Вклад в эквивалентную ширину дает только доплеровское ядро (где непрозрачность наибольшая). Крылья линии будут прозрачны и не будут ослаблять испускаемый в континууме поток. С ростом числа атомов, поглощающих в линии, в какой-то момент ядро становится полностью непрозрачным, и интенсивность в нем достигает своего предельного значения, даваемого выражением (10.35). Практически все фотоны, которые могут поглотиться в ядре линии, уже поглотились, и до тех пор, пока крылья линии остаются прозрачными, добавление поглощающих атомов мало увеличивает эквивалентную ширину линии. Ее называют *насыщенной*. Наконец, когда имеется достаточно много поглощающих атомов, крылья линии становятся заметно непрозрачными и эквивалентная ширина снова возрастает по мере роста вклада крыльев линии. Эти различные виды поведения показаны на рис. 10.1. Из приведенного обсуждения следует, что на кривой роста есть три существенно отличающиеся друг от друга области. Рассмотрим каждую из них по отдельности.

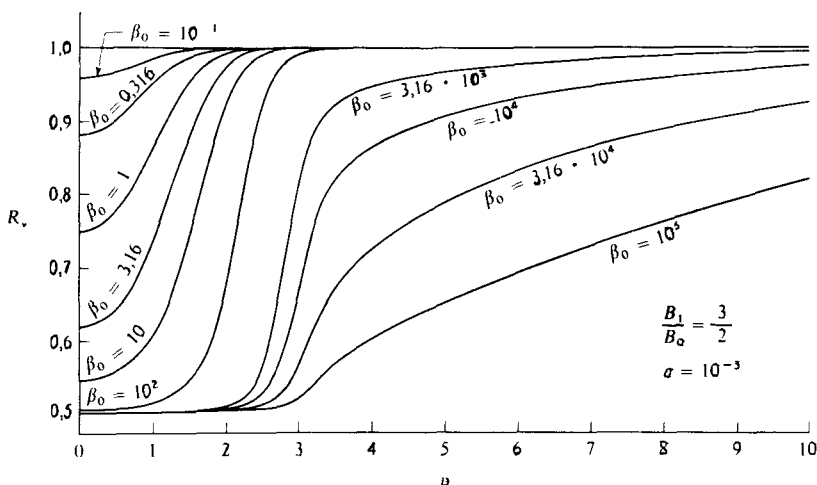


Рис. 10.1. Эволюция спектральной линии при увеличении числа атомов на луче зрения. Предполагается, что линия возникает за счет чистого поглощения. При $\beta_0 \leq 1$ сила линии прямо пропорциональна числу поглощающих атомов. При $30 \leq \beta_0 \leq 10^3$ линия насыщена, но крылья еще не начали развиваться. При $\beta_0 \geq 10^4$ крылья у линии сильные, и ими определяется большая часть эквивалентной ширины.

Фойгтовский профиль можно грубо представить в виде $H(a, v) \sim e^{-v^2} + \pi^{-1/2} a v^{-2}$ [формула (9.45)]. При этом считается, что в ядре при $v \leq v^*$ берется только первый член, а в крыльях при $v \geq v^*$ — только второй. За v^* принимается та переходная точка, где эти два члена равны.

Рассмотрим теперь вклад только от ядра линии. Считая, что $\beta_0 < 1$, можем написать $\beta(v) = \beta_0 e^{-v^2}$. Тогда формула (10.38) принимает вид

$$\begin{aligned} W^* &= \beta_0 \int_0^\infty e^{-v^2} [1 + \beta_0 e^{-v^2}]^{-1} dv = \\ &= \beta_0 \int_0^\infty e^{-v^2} (1 - \beta_0 e^{-v^2} + \dots) dv, \end{aligned} \quad (10.39)$$

или

$$W^* = \frac{1}{2} \pi^{1/2} \beta_0 \left[1 - \frac{\beta_0}{\sqrt{2}} + \frac{\beta_0^2}{\sqrt{3}} - \dots \right]. \quad (10.40)$$

При малых β_0 (слабые линии) главную роль играет линейный член, и эквивалентная ширина линии прямо пропорциональна числу имеющих поглощающих атомов. Это так называемая *линейная часть* кривой роста. Отметим, что как β_0 , так и W^* пропорциональны $\Delta \nu_D^{-1}$, а потому эквивалентная ширина на линейной части кривой роста не зависит от $\Delta \nu_D$.

На *насыщенном* участке кривой роста β_0 достаточно велико, чтобы ядро линии уже достигло своей предельной глубины, но все же еще не настолько велико, чтобы крылья линии начали давать вклад в эквивалентную ширину. Здесь также $\beta(v) = \beta_0 e^{-v^2}$, если положить $u = v^2$, то $dv = \frac{1}{2} u^{-1/2} du$ и формула (10.38) принимает вид

$$\begin{aligned} W^* &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \beta_0 e^{-u} (1 + \beta_0 e^{-u})^{-1} u^{-1/2} du = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (1 + e^{u-\alpha})^{-1} u^{-1/2} du, \end{aligned} \quad (10.41)$$

где обозначено $\beta_0 = e^\alpha$. Этот интеграл можно переписать в виде (см. [160], стр. 389)

$$2W^* = \int_0^\alpha u^{-1/2} du + \alpha \int_0^\infty \frac{[\alpha(1+t)]^{1/2}}{1 + e^{\alpha t}} dt - \alpha \int_0^\alpha \frac{[\alpha(1-t)]^{1/2}}{1 + e^{\alpha t}} dt. \quad (10.42)$$

Следуя Зоммерфельду, можно заменить верхний предел в третьем интеграле на ∞ (поскольку $\alpha \gg 1$) и разложить $[\alpha(1+t)]^{1/2}$ в степенной ряд по t . Результат можно выразить в замкнутой форме через дзета-функцию Римана. Окончательно получается такое асимптотическое разложение:

$$W^* \approx \sqrt{\ln \beta_0} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{24(\ln \beta_0)^2} - \frac{7\pi^4}{384(\ln \beta_0)^4} - \dots \right\}. \quad (10.43)$$

Это асимптотический (расходящийся) ряд, и его всегда нужно обрывать, беря лишь некоторое конечное число членов. Практически этим рядом можно пользоваться при $\beta_0 \geq 55$. Из формулы (10.43) ясно видно, что на *насыщенной*, или *плоской*, части кривой роста эквивалентная ширина растет с увеличением числа поглощающих атомов крайне медленно, именно $W^* \propto \sqrt{\ln \beta_0}$. Слабая зависимость W^* от β_0 имеет своим следствием то, что на этой части кривой роста W практически пропорциональна $\Delta\nu_D$. Легко понять, почему это должно быть так: *глубина* профиля линии остается постоянной — она равна A_0 , а потому проинтегрированное по линии поглощение должно быть пропорционально ширине линии, т.е. пропорционально $\Delta\nu_D$ (см. рис. 10.1). Зависимость W от β_0 можно понять также, если заметить, что для получения заметной депрессии в континууме оптическая глубина в линии должна становиться больше единицы до того, как достигает единицы оптическая глубина в континууме. Это происходит на частотах $\nu > \nu_0$, где $\beta_0 \exp(-\nu_0^2) \approx 1$. Видно, что ν_0 , определяющее ширину темного ядра линии (а потому и W^*), изменяется как $\sqrt{\ln \beta_0}$.

Наконец, при очень большом числе поглощающих атомов крылья линии становятся достаточно непрозрачными, чтобы начать давать главный вклад в эквивалентную ширину. В крыльях можно принять $H(a, \nu) \sim a/(\pi^{1/2}\nu^2)$. Обозначив $C = \beta_0 a \pi^{-1/2}$, из формулы (10.38) находим

$$W^* = \int_0^\infty (1 + \nu^2/C)^{-1} d\nu = \frac{1}{2} \pi \sqrt{C} = \frac{1}{2} (\pi a \beta_0)^{1/2}. \quad (10.44)$$

Таким образом, $W \propto \beta_0^{1/2}$, что порождает так называемую *корневую*, или *обусловленную затуханием*, часть кривой роста. Отметим, что здесь и a , и β_0 содержат множитель $\Delta\nu_D$, и поэтому на этой части кривой роста W также не зависит от $\Delta\nu_D$.

Целиком кривая роста показана на рис. 10.2. Обратите внимание, что чем больше величина параметра затухания a , тем раньше в

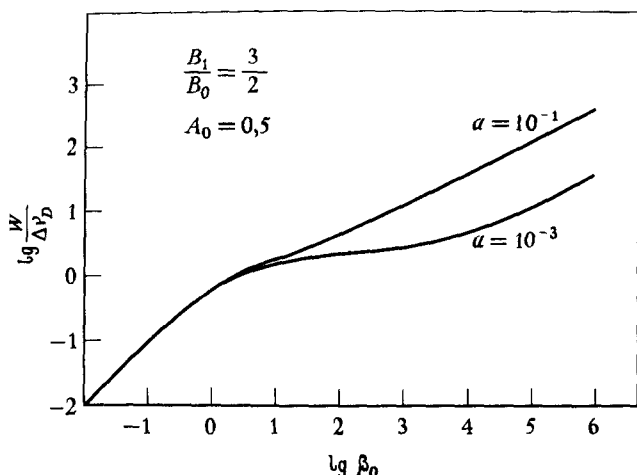


Рис. 10.2. Кривые роста для линий, возникающих за счет чистого поглощения. Обратите внимание, что чем больше значение α , тем раньше часть кривой роста, обусловленная затуханием, отклоняется вверх от плоской части.

W начинают доминировать крылья, а потому тем раньше корневая часть кривой роста начинает уходить вверх от плоского участка. Различные авторы рассчитали большое число кривых роста. Особенно удобный набор кривых роста был опубликован Врубелем для широкого диапазона параметров B_0 и B_1 , описывающих распределение температуры, при различных предположениях о модели атмосферы (модель Милна — Эддингтона или Шварцшильда — Шустера) и о механизме образования линий (поглощение или рассеяние); см. [687], [688], [689].

10.4. Эмпирическая кривая роста

В течение долгого времени кривая роста была одним из излюбленных средств, использовавшихся астрономами для анализа условий в звездных атмосферах. Существует огромная литература, посвященная различным применениям этого подхода. Причина популярности кривой роста в том, что она легко и быстро дает оценки нескольких ключевых параметров, а также в том, что здесь используются только эквивалентные ширины. Они хорошо определяются из наблюдений даже для слабых звезд, у которых точно измерить профили было бы нельзя.

Как было установлено в § 10.3, теоретическая кривая роста дает

$\lg(W_\nu/\Delta\nu_D) = \lg(W_\lambda/\Delta\lambda_D) = \lg(W_\lambda c/\lambda\xi_0)$ в функции $\lg\beta_0$. Здесь ξ_0 — полная скорость хаотического движения атомов, ответственных за образование линии, и

$$\beta_0 = \frac{\chi_0}{k_c} = \frac{\pi^{1/2}e^2f}{mc\Delta\nu_D} \frac{n_{ijk}^*(1 - e^{-h\nu/kT})}{k'_c(1 - e^{-h\nu/kT})} = \frac{\pi^{1/2}e^2}{mc} f\lambda \frac{n_{ijk}^*}{\xi_0 k'_c}. \quad (10.45)$$

Здесь для удобства введен коэффициент поглощения в континууме k'_c , не исправленный за вынужденное излучение (а рассеяние в континууме предполагается пренебрежимо малым). Считается, что населенность n_{ijk}^* возбужденного состояния i химического элемента k в состоянии ионизации j дается формулами Больцмана и Саха, как это объяснялось в § 5.1.

В звездном спектре для любого элемента, принадлежащего некоторой группе, обычно имеются линии нескольких мультиплетов некоторого заданного иона, который бывает представлен одной (или более) стадией ионизации. Из-за множителя $\exp(-\chi_{ijk}/kT)$ в формуле Больцмана, описывающей возбуждение, каждый мультиплет имеет свою собственную кривую роста. Пользуясь формулой (5.8), можем написать

$$\lg\beta_0 = \lg(g_{ijk}f\lambda) - \theta\chi_{ijk} + \lg C_{jk}, \quad (10.46)$$

где $\theta = 5040/T$, χ выражено в эВ и

$$C_{jk} = [N_{jk}/U_{jk}(T)](\pi^{1/2}e^2/mc)(\xi_0 k'_c)^{-1}. \quad (10.47)$$

Очевидно, что на значение β_0 будет влиять выбор температуры в атмосфере (через θ) и что это значение будет свое для каждого мультиплета (из-за различий в χ_{ijk}) и для каждой линии (из-за различий в силах осцилляторов f).

Для построения эмпирической кривой роста значения $\lg(W_\lambda/\lambda)$ для каждой линии наносятся в функции $\lg(gf\lambda)$. Если допустить, что между β_0 и W_λ существует однозначная зависимость, можно попытаться все точки, относящиеся к различным линиям, расположить так, чтобы они как можно точнее определяли одну кривую. Чтобы добиться этого, мы выбираем такое значение θ , которое минимизирует разброс точек вокруг средней кривой. Это значение называется *температурой возбуждения* $\theta_{\text{возб}}$, и считается, что она служит характерной температурой в области формирования линий. Следует отдавать себе отчет в том, что получить имеющую смысл температуру возбуждения не всегда возможно, так как на самом деле различные линии образуются в разных слоях атмосферы. Например, можно ожидать, что линии, возникающие при переходах с

уровней с высокими потенциалами возбуждения, будут формироваться глубже в атмосфере, где температура выше. Аналогично следует ожидать, что средние температуры возбуждения будут выше для ионов более высоких стадий ионизации. Такого рода уточнение можно учесть ценой более сложных расчетов с использованием моделей атмосфер, но обычно при использовании кривых роста ими пренебрегают.

Существуют трудности и другого рода, с которыми приходится иметь дело на практике: значения W_λ и f содержат ошибки и эти ошибки вносят разброс в точки на кривой роста. Кроме того, наблюдаться могут линии с потенциалами возбуждения лишь из некоторого конечного интервала, и на этом коротком «базисе» $\theta_{\text{возб}}$ может определяться не очень хорошо.

Когда эмпирическая кривая, исправленная за эффекты возбуждения, определена, ее можно сравнить с теоретическими кривыми. Чтобы две кривые роста, эмпирическая и теоретическая, наложиться друг на друга, обычно нужно эмпирическую кривую сдвинуть (и по абсциссе, и по ординате) относительно теоретической. В результате такой подгонки можно извлечь существенную информацию трех видов.

1. *Ординадой* эмпирической кривой служит $\lg(W_\lambda/\lambda)$, а теоретической — $\lg(W_\lambda/\Delta\lambda_D) = \lg(W_\lambda/\lambda) - \lg(\xi_0/c)$. Поэтому, когда эти две кривые совмещаются, *разность ординат* дает $\lg(\xi_0/c)$, и тем самым *параметр* ξ_0 , *описывающий скорости движения*. Получаемое таким путем значение можно сравнить с наиболее вероятной тепловой скоростью при температуре $T_{\text{возб}}$, равной $\xi_{\text{тепл}} = (2kT_{\text{возб}}/Am_H)^{1/2}$, где A — атомный вес элемента. Обычно оказывается, что ξ_0 , полученное по кривой роста, *превосходит* $\xi_{\text{тепл}}$, причем иногда значительно. Чтобы объяснить это различие, было принято постулировать существование дополнительных нетепловых движений вещества звезды, которые обычно называют *микротурбулентностью*. Принимается, что эти движения имеют характерный масштаб, малый по сравнению с длиной свободного пробега фотона, и потому, по существу, создают дополнительный источник уширения линии. Если эти мелкомасштабные макроскопические движения имеют гауссово распределение с наиболее вероятной скоростью $\xi_{\text{турб}}^2$, то

$$\xi_0 = [(2kT_{\text{возб}}/Am_H) + \xi_{\text{турб}}^2]^{1/2}. \quad (10.48)$$

Этим методом «турбулентные» скорости были найдены для многих звезд. Самые поразительные результаты получаются для сверх-

гигантов, у которых были найдены скорости, превышающие скорость звука. Следует, однако, иметь в виду, что эти выводы не имеют под собой вполне твердой почвы, так как введение макроскопических движений оказывает радикальное влияние на весь процесс образования линий (см. гл. 14). Действительно, учитывая те высокие скорости, которые иногда получают, следует выяснить, не влияет ли на состояние возбуждения газа обмен энергией между макроскопическими движениями и внутренними степенями свободы вещества. Эта трудная проблема почти не исследована, так что наши сведения о полях мелкомасштабных движений в атмосферах звезд остаются в зачаточном состоянии, едва ли не на уровне просто утверждения о том, что они существуют.

2. Разность между абсциссами эмпирической и теоретической кривой роста дает

$$\lg C = \lg \beta_0 - [\lg(gf\lambda) - \theta_{\text{возб}}\chi]. \quad (10.49)$$

Чтобы продвинуться дальше, нужно иметь оценку электронной плотности. Ее получают из теоретической модели атмосферы. Зная n_e , можно рассчитать k'_c , и, поскольку ξ_0 уже известно, при помощи формулы (10.47) по C прямо находим N_{jk} — число атомов химического элемента k в стадии ионизации j . Далее, пользуясь формулой ионизации Саха, от N_{jk} можно перейти к N_k — числу атомов химического элемента k во всех стадиях ионизации. Точнее говоря, находится относительная распространенность $\alpha_k = N_k/N_H$, так как в k'_c обычно доминирует водород или H^- , и поэтому k'_c пропорционально N_H . Короче говоря, *горизонтальный сдвиг двух кривых роста* (эмпирической и теоретической. — *Ред.*) *дает относительное содержание рассматриваемого элемента*. Этот метод анализа был применен к большому числу различных звезд и показал, что некоторые звезды (например, звезды населения II и пекулярные звезды) имеют химический состав, заметно отличающийся от солнечного, который в свою очередь довольно типичен для звезд населения I. Следует ясно отдавать себе отчет, что определения химического состава по кривым роста основаны на ряде довольно ненадежных предположений: принималось, что справедливы формулы Больцмана и Саха; игнорировалось изменение s глубиной фигурирующих в этом методе параметров атмосферы (так называемые *эффекты стратификации*); использовалось грубо приближенное решение уравнения переноса излучения. Поэтому точность результатов является ограниченной.

3. При описанных выше сдвигах по горизонтали и по вертикали

использовались соответственно линейная и плоская части кривой роста. Для заданной совокупности теоретических кривых сравнение между теми частями наблюдаемой и теоретической кривых, которые определяются затуханием, дает значение $a = \Gamma/(4\pi\Delta\nu_D)$, а следовательно, — величину Γ , которую в свою очередь можно сравнить со значением, даваемым теорией уширения линий.

Обратимся теперь к краткому обсуждению ряда типичных результатов. Широко исследовался методом кривых роста спектр Солнца. Одно из самых выдающихся ранних исследований было выполнено Г. Н. Ресселом [542], который получил относительное содержание химических элементов (по глазомерным оценкам интенсивностей линий!), удивительно хорошо согласующееся с современными определениями. Очень интересное исследование с использованием кривых роста было выполнено К. О. Райтом [686], который изучил Солнце и три другие звезды солнечного типа. Это исследование далеко не самое последнее по времени из имеющихся (см., например, [182]), но оно является классическим примером использования кривой роста, и поэтому мы рассмотрим его здесь. На основе большого числа измерений эквивалентных ширин и лабораторных значений сил осцилляторов f была построена эмпирическая кривая роста, для чего были использованы линии FeI и TiI. Для построения кривой роста, показанной на рис. 10.3, было использовано около 75 линий FeI, возникающих при переходах с уровней с $0 \leq \chi \leq 1,6\text{эВ}$, и 137 линий TiI с $0 \leq \chi \leq 2,5\text{эВ}$. По этим двум атомам были найдены слегка различающиеся температуры возбуждения, а именно $T_{\text{возб}} = (4850 \pm 150)\text{ К}$ для FeI и $T_{\text{возб}} = (4550 \pm 150)\text{ К}$ для TiI. Эти значения близки к тому, какое можно было бы ожидать для модели атмосферы с лучистым равновесием. Видно, что кривая вполне четкая, хотя, правда, линейная часть определяется главным образом линиями TiI, а участок, обусловленный затуханием, — линиями FeI. Было бы лучше, если бы линии каждого атома были представлены и на линейном участке кривой, и на участке, обусловленном затуханием.

Сдвиг эмпирической кривой по вертикали относительно теоретической кривой Мензела дает параметр $\xi_0 = 1,6\text{ км/с}$. Поскольку тепловая скорость рассматриваемых атомов в солнечной атмосфере около $1,2\text{ км/с}$, то отсюда следует, что микротурбулентная скорость равна примерно $1,0\text{ км/с}$. Сопоставлением части кривой, обусловленной затуханием, с теоретическими кривыми роста было найдено, что $\lg a = -1,4$. Если в качестве средней длины волны линий принять $4500\text{ \AA}$, это дает $\Gamma = 1,7 \cdot 10^9\text{ с}^{-1}$, что почти точно в

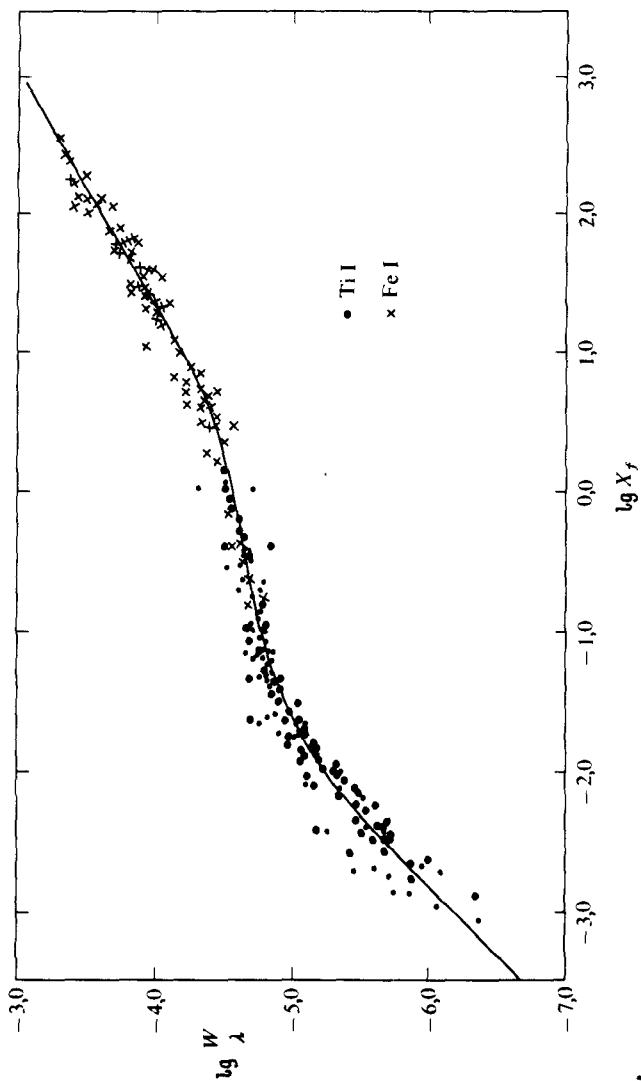


Рис. 10.3. Эмпирическая кривая роста для солнечных линий Fe I и Ti I. Расположение точек вдоль оси абсцисс основано на лабораторных значениях сил осцилляторов. По [686].

10 раз больше классической постоянной затухания Γ_c . Ясно, что основным источником уширения линий должны быть столкновения. Поскольку ионизация водорода в фотосфере Солнца мала, наиболее вероятным процессом является взаимодействие (вандерваальсово) излучающих атомов с водородом. Ранее было получено приближенное выражение (9.71) для Γ_6 , а именно $\Gamma_6 \approx 8,1 C_6^{2/3} v^{1/3} N_H$, где $C_6 \approx [13,6/(\chi_{\text{ион}} - \chi_i)]^2 10^{-32}$ [формула (9.76)]. Для типичного значения $\chi_{\text{ион}} - \chi_i = 6$ эВ имеем $C_6 \approx 5,2 \cdot 10^{-32}$. Типичные значения v и N_H равны 10^6 см/с и 10^{17} см $^{-3}$, так что $\Gamma_6 \approx 10^9$, что в общем согласуется с эмпирическим значением. Часть эмпирической кривой роста, обусловленная затуханием, имеет угловой коэффициент (в логарифмических координатах) ближе к 0,6, чем к 0,5. Вероятное объяснение этого состоит в том, что линии, сильно различающиеся по интенсивности, формируются в различных слоях, так что описывающие их параметры (например, ширина, обусловленная затуханием) неодинаковы вопреки тому, что предполагалось при построении кривой роста.

Было выполнено множество и других исследований солнечного спектра. Шагом вперед по сравнению с обычной кривой роста явилось использование *функции насыщения* [505], которая позволяет принять во внимание, что ядро линии и ее крылья на самом деле образуются в разных слоях атмосферы. Удобен для учета этого и *метод весовых функций*, который подробно описывается в [261], гл. 4. Он применялся в одной из классических работ по анализу химического состава по солнечному спектру [252].

Важным применением солнечной кривой роста является использование ее для *дифференциального анализа химического состава* звезд по отношению к Солнцу. Прекрасные примеры применения этого метода к субкарликам типа G (звезды с крайне низким содержанием металлов) и к гигантам населения II можно найти в [13] и [294] соответственно. Достоинством этого метода является то, что силы осцилляторов, которые часто известны плохо, в первом приближении выпадают. Кроме того, поскольку температуры этих звезд близки к температуре Солнца, можно надеяться, что строение их атмосфер хотя бы грубо подобно солнечному. Если это действительно так, то другие эффекты, такие, как блендирование линий, стратификация, отклонения от ЛТР и т.д., также могут в первом приближении компенсироваться.

Основное предположение, делаемое при таком дифференциальном анализе, состоит в том, что *звездная* кривая роста, т.е. график $\lg(Wc/\lambda\xi_0)^*$ в функции $\lg\beta_0^*$, совпадает с *солнечной*, т.е. с графиком

$\lg(Wc/\lambda\xi_0)^\odot$ в функции $\lg\beta_0^\odot$. На самом деле β_0^* или ξ_0^* нам неизвестно, и поэтому непосредственно построить звездную кривую роста нельзя. В действительности для каждой линии известны $\lg(W/\lambda)^*$ и значение $\lg\beta_0^\odot$ для этой линии, найденное по ее наблюдаемой эквивалентной ширине в спектре Солнца. Согласно определению β_0 [см. формулу (10.45)], мы имеем

$$\lg \frac{\beta_0^\odot}{\beta_0^*} = \lg \frac{N_{jk}^\odot}{N_{jk}^*} + \chi_{ijk}(\theta_{\text{возб}}^* - \theta_{\text{возб}}^\odot) + \lg \frac{\xi_0^* k_c' U^*}{\xi_0^\odot k_c' U^\odot}. \quad (10.50)$$

Если для произвольной величины X обозначить $[X] = \lg(X^\odot/X^*)$, то соотношение (10.50) можно переписать в виде

$$[\beta_0] = [N_{jk}] + \chi_{ijk}\Delta\theta - [\xi_0] - [k_c'] - [U]. \quad (10.51)$$

Поэтому если значения $\lg(W/\lambda)^*$ для некоторого данного иона, скажем FeI, нанести в функции $\lg\beta_0^\odot$ а не $\lg\beta_0^*$, то линии с разными потенциалами возбуждения будут иметь разброс относительно средней кривой, если температура возбуждения для Солнца и для звезды различна. Поэтому наносим $\lg(W/\lambda)^*$ в функции $\lg\beta_0^\odot - \chi_{ijk}\Delta\theta$ и выбираем $\Delta\theta$ так, чтобы минимизировать разброс точек. Для субкарликов типа G найдено [13], что $\Delta\theta \leq 0,05$, а для K-гигантов населения II $\Delta\theta$ составляет от 0,25 до 0,35 [294]. После введения поправки за $\Delta\theta$ эмпирическая кривая роста для звезды накладывается на солнечную кривую роста, у которой в функции $\lg\beta_0^\odot$ нанесено $\lg(Wc/\lambda\xi_0)^\odot$. Сдвиг *по вертикали* непосредственно дает $[\xi_0]$, а сдвиг *по горизонтали* — среднее значение $\delta = [N_{jk}] - [\xi_0 k_c' U]$ для рассматриваемого иона. Было найдено, что для субкарликов типа G величина ξ_0 почти точно равна тепловой скорости (турбулентности нет), для гигантов же типа G имеется заметная турбулентность. Так как температуры этих звезд достаточно близки к температуре Солнца, отношение сумм по состояниям обычно полагают равным единице, и значение δ зависит в первую очередь от различий в распространенности элемента, а также от различий в ионизации и в непрозрачности в континууме. Поскольку в рассматриваемой области температур главный вклад в k_c' дает H^- , значение $[k_c']$ практически равно $[n_e]$. Величину же $[n_e]$ можно определить из условия ионизационного равновесия, пользуясь информацией о линиях ионов двух стадий ионизации одного и того же элемента k . Если имеются наблюдения линий ионов двух стадий ионизации (скажем, 0 и 1), можно написать

$$\delta_{jk} = [N_{jk}] - [\xi_0 k_c'], \quad j = 0; 1. \quad (10.52)$$

Пользуясь этими двумя значениями δ , можно получить

$$\Delta = \delta_{1k} - \delta_{0k} = [N_{1k}] - [N_{0k}] = \lg(N_{1k}^{\odot}/N_{0k}^{\odot}) - \lg(N_{1k}^{*}/N_{0k}^{*}). \quad (10.53)$$

Так как $\lg(N_{1k}^{\odot}/N_{0k}^{\odot})$ известен, по наблюдаемому значению Δ получаем $\lg(N_{1k}^{*}/N_{0k}^{*})$. Но если принять, что температура определяется значением $\theta_{\text{возб}}^{*}$ (которое известно), то формула Саха дает $\lg(N_{1k}^{*}n_e^{*}/N_{0k}^{*})$. Таким образом, $\lg n_e^{*}$ и $[n_e]$ можно определить. Оценки $[n_e]$ можно получить по линиям нескольких различных элементов и взять среднее. Знание $[n_e]$ позволяет получить $[k'_c]$ и $\lg(N_{jk}^{*}/N_k^{*})$. Итак, окончательно отношение распространенности рассматриваемого элемента у звезды к его распространенности на Солнце можно рассчитать по формуле

$$\lg(N_k^{\odot}/N_k^{*}) = \lg(N_k^{\odot}/N_{jk}^{\odot}) + \lg(N_{jk}^{*}/N_k^{*}) + \lg(N_{jk}^{\odot}/N_{jk}^{*}),$$

или

$$\lg(N_k^{\odot}/N_k^{*}) = \lg(N_k^{\odot}/N_{jk}^{\odot}) + \lg(N_{jk}^{*}/N_k^{*}) + \delta + [\xi_0 k'_c U], \quad (10.54)$$

так как все четыре члена, стоящие в правой части последнего соотношения, теперь известны.

Результаты упоминавшихся выше двух исследований привели к удивительному заключению, что содержание тяжелых элементов у звезд населения II меньше их содержания на Солнце по порядку величины в 10^2 раз! Этот факт имеет громадное значение для построения картины эволюции Галактики. Он указывает на то, что тяжелые элементы у звезд населения I, таких, как Солнце, появились в результате нуклеосинтеза в звездах более ранних поколений.

Точность определения содержания элементов методом кривых роста в типичном случае лежит в пределах множителя 2. Хотя эти ошибки и значительны, они не способны изменить упомянутые выше качественные результаты, касающиеся звезд населения II.

10.5. Синтез спектров по моделям атмосфер с ЛТР

Метод кривых роста основан на использовании большого числа упрощающих предположений, что существенно ограничивает точность получаемых результатов. Если сохранить *физическое предположение* об ЛТР, а для учета изменения всех физических параметров с глубиной использовать *модель атмосферы*, достигается значительное улучшение. Имея такую модель, можно рассчитать k_c и $\chi_i \phi$, в функции глубины, полностью учитывая изменения температуры, состояния ионизации и возбуждения, доплеровских ширин,

параметров затухания и т.п. После этого прямой численной квадратурой с любой желаемой точностью можно вычислить оптическую глубину

$$\tau_\nu(z) + \int_z^{z_{\max}} [k_c(z') + \chi_\nu(z')\phi_\nu(z')]dz', \quad (10.55)$$

а значит, и поток, выходящий в линии на частоте ν :

$$F_\nu = 2 \int_0^\infty B_\nu[T(\tau_\nu)]E_2(\tau_\nu)d\tau_\nu. \quad (10.56)$$

Первый шаг этого метода состоит в выборе модели атмосферы, которая точнее всего воспроизводит ту звездную атмосферу, которую мы хотим исследовать. Такой подбор производится путем сравнения наблюдаемых и вычисленных значений ряда основных характеристик спектра. Обычно сравнивают 1) общее распределение энергии, бальмеровский скачок D_B или какой-нибудь показатель цвета, скажем $b - y$; 2) профили водородных линий (они чувствительны к плотности); 3) отношения интенсивностей линий ионов двух стадий ионизации некоторого данного элемента. Например, у В-звезд параметры континуума определяют в первую очередь эффективную температуру $T_{\text{эфф}}$, водородные линии — $\lg g$, а отношение, скажем, SiIII $\lambda 4552$ к SiII $\lambda 4128,31$ есть функция как $T_{\text{эфф}}$, так и $\lg g$ (к содержанию элемента это *отношение* нечувствительно). Примеры сопоставлений вычисленных и наблюдаемых распределений энергии показаны на рис. 7.4 — 7.6 и на рис. 7.8. Рис. 10.4 показывает сравнение рассчитанных и наблюдаемых профилей водородных линий для Веги — звезды, служащей стандартом [555]. Часто строят диаграмму с осями ($T_{\text{эфф}}$, $\lg g$) и наносят на нее геометрические места точек ($T_{\text{эфф}}$, g), для которых вычисленное значение того или иного параметра [скажем, D_B или $W(H_\gamma)$] равно наблюдаемому значению. Такие кривые, соответствующие различным параметрам, будут пересекаться, определяя тем самым оптимальные значения ($T_{\text{эфф}}$, g). В идеальном случае все кривые пересекались бы в одной точке. На практике они будут пересекаться в пределах небольшой области, что вводит некоторую неопределенность в выбор $T_{\text{эфф}}$ и g . Примеры использования такой процедуры для нормальной В-звезды γ Рег и для гелиевой звезды HD 184927 даны в [508] и [299] соответственно.

Когда модель атмосферы выбрана, появляется возможность выполнить анализ химического состава. Кривая роста заменяется теперь вычислением эквивалентной ширины каждой из рассматриваемых линий в функции содержания элемента по отношению к водо-

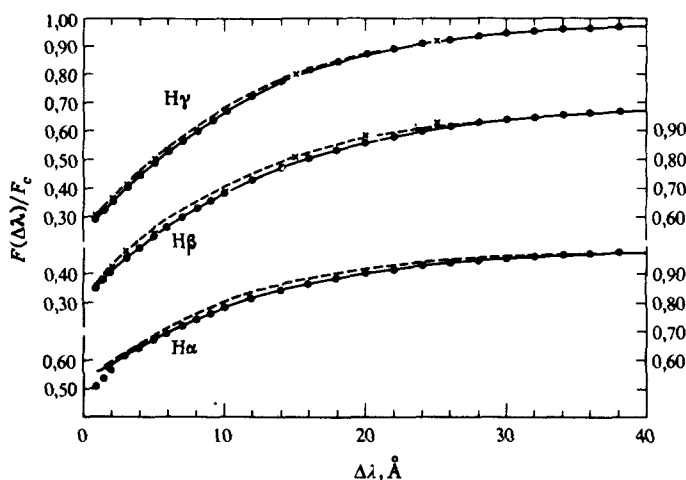


Рис. 10.4. Профили бальмеровских линий водорода у Веги. Точки — наблюдаемые профили по [509]; крестики — наблюдаемые профили по [71]; абсцисса — $\Delta\lambda$ в Å; кривые — профили, рассчитанные по модели с $T_{\text{эфф}} = 9650$ К и $\lg g = 4,05$. (По [555], с разрешения.)

роду. Таким образом, знание наблюдаемой эквивалентной ширины каждой из линий дает оценку относительной распространенности элемента. Этим оценкам можно придать надлежащие веса и усреднить их по всем линиям, что дает окончательное значение относительного содержания элемента.

Хотя выбор модели атмосферы, применяемой при анализе химического состава, основан на использовании не только континуума, но и водородных линий, обычно в $(T_{\text{эфф}}, \lg g)$ все же имеется некоторая неопределенность. Часто результаты определения химического состава по нескольким элементам можно использовать для уменьшения неопределенности значений $(T_{\text{эфф}}, \lg g)$ и для выбора улучшенной модели, во многом подобно тому, как свойства атмосферы можно получать из анализа кривой роста. Например, по завершении анализа химического состава полученные по многим линиям распространенности элементов можно использовать для выявления возможных корреляций с потенциалом возбуждения. Такой корреляции можно ожидать, если температуры в атмосфере взяты неточно. Исключение всех таких корреляций может тем самым позволить лучше выбрать значение $T_{\text{эфф}}$. Аналогичным образом для любого данного элемента по линиям его ионов всех стадий ионизации должно получаться одно и то же его содержание. Различия, ко-

торые обнаруживаются при использовании линий ионов разных стадий ионизации, содержат информацию об ошибках в выборе значений температуры и давления, а тем самым — и о значениях $T_{\text{эфф}}$ и $\lg g$. Наконец, полученную совокупность данных о содержании элементов можно подвергнуть анализу с целью выявления возможной корреляции с эквивалентной шириной. Если, например, более сильные линии систематически дают большее содержание, то, возможно, занижено значение параметра ξ_0 . Тем самым можно получить сведения о турбулентных скоростях, которые следует ввести в модель. (Однако, как будет показано в гл. 11, при попытках определения значения параметра ξ_0 по сильным линиям следует учитывать отклонения от ЛТР.) Естественно, что ошибки в полученных из наблюдений эквивалентных ширинах, в силах осцилляторов f и в других атомных параметрах будут вызывать разброс. Поэтому кратко обрисованная выше процедура может давать не вполне однозначные результаты. Тем не менее исследование упомянутых только что корреляций часто может приводить к тому, что удастся подобрать значительно лучшую модель. Наконец, если полученный химический состав очень сильно отличается от того, который использовался при построении модели (как это может быть, скажем, для Ар-звезд), может оказаться нужным перевычислить модель, взяв подходящий химический состав, заново получить $T_{\text{эфф}}$ и $\lg g$ и выполнить анализ еще раз.

Примером определения химического состава методом моделей атмосфер может служить проведенный в [609] анализ двух ярких А-звезд — Веги и Сириуса. Результаты этой работы показывают, что Вега имеет почти в точности солнечные относительные распространенности тяжелых элементов, тогда как у Сириуса их содержание в $4 \div 10$ раз выше. Во многих отношениях Сириус напоминает звезды, относящиеся к группе А-звезд, которые из-за повышенной интенсивности линий металлов в их спектрах называют *А-звездами с линиями металлов* (Аm-звезды).

Литература по определениям химического состава (и по оценкам таких параметров атмосфер, как $T_{\text{эфф}}$ и $\lg g$) как по кривым роста, так и методом моделей атмосфер в настоящее время очень велика. Обширные библиографические указатели оригинальных статей, посвященных определению химического состава нормальных и пекулярных звезд, можно найти в [12]; [70], стр. 57 — 204; [144]; [450], стр. 157 — 237; [493], [523], [552], [560], [658].

В исследованиях, которые описывались до сих пор, использоваться в первую очередь эквивалентные ширины. Для некоторых

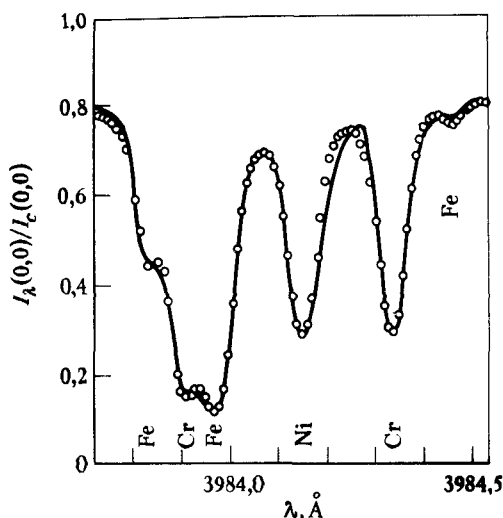


Рис. 10.5. Синтез солнечного спектра с линиями Fe, Cr и Ni. Кривая — наблюдаемая интенсивность; кружки — рассчитанная интенсивность; ордината — интенсивность монохроматического излучения, выходящего из центра диска в долях интенсивности континуума; абсцисса — длина волны в Å. (По [538], с разрешения.)

звезд есть спектральные данные очень высокого качества. Для них возможен подробный поточечный синтез спектра. Пример подобного синтеза для Солнца [538] показан на рис. 10.5. Анализ такого рода может позволить точно определить химический состав и отождествить ранее не замеченные слабые бленды в спектре. Применение синтеза спектров к калибровке фотометрических систем описывалось в § 7.4.

Во всех методах, изложенных в этой главе, делалось предположение об ЛТР. Однако, как мы увидим в гл. 11 и 12, это предположение часто плохо описывает физику образования линий и может приводить к результатам, содержащим серьезные систематические ошибки. Имея это в виду, обратимся теперь к проблеме совместного решения уравнений статистического равновесия и переноса излучения.

Глава 11

Перенос излучения в линии при отсутствии ЛТР: двухуровневный атом

Прогресс в понимании физики образования линий связан главным образом с исследованием совместных решений уравнений переноса и статистического равновесия, полученных без априорного предположения об ЛТР. В этой главе будут рассмотрены некоторые схематические модели образования линий, которые достаточно просты, чтобы их можно было легко исследовать, но в то же время обеспечивают хорошее описание физически существенных процессов и потому позволяют значительно продвинуться в понимании явления. Очевидно, что некоторые из делаемых предположений являются слишком большими упрощениями и не выполняются в реальных звездных атмосферах. Получение достаточно точных результатов для таких атмосфер сопряжено с громоздкими численными расчетами. С другой стороны, истинная цель состоит в том, чтобы *понимать* результаты, а не просто получать их. Чтобы добиться этого, необходимо хорошо разобраться в стандартных случаях, обсуждаемых в этой главе. Она обеспечивает *принципиальную основу*, весьма полезную для понимания результатов расчетов для сложных моделей атома и детальных моделей атмосфер.

11.1. Диффузия, гибель, выход и термализация

Важнейшее различие между подходом к проблеме образования линий, исходящим из априорного предположения об ЛТР, и подходом, не использующим его, состоит в том, каким образом рассматривается взаимодействие между газом и излучением. При подходе, исходящем из ЛТР, *принимается*, что *локальных* значений двух термодинамических переменных (T и N) достаточно для полного задания состояния возбуждения и ионизации газа (а потому и таких определяющих перенос излучения величин, как χ_ν , η_ν и S_ν) независимо от состояния газа в других точках. (Это замечание является строго верным, только если распределение температуры *задано*; если же оно определяется условием лучистого равновесия, то различные точки атмосферы взаимосвязаны (см. § 7.2), однако не в том смысле, о котором сейчас идет речь.) В предыдущих главах подчер-

кивалось, что в действительности на состояние ионизации и возбуждения газа сильное влияние оказывает поле излучения, которое в свою очередь через посредство уравнения переноса определяется состоянием газа в пределах значительных объемов атмосферы. На самом деле две задачи — о переносе излучения и о решении уравнений стационарности — неотделимы друг от друга и должны рассматриваться *совместно*.

Физику образования линий в значительной мере можно понять из рассмотрения характерных длин диффузии, гибели и термализации, которые определяются вероятностями выхода и гибели фотонов. Будем для простоты предполагать, что атом имеет только основное состояние (обозначаемое l) и одно возбужденное состояние (обозначаемое u). Расстояние, на которое фотон в среднем перемещается в атмосфере между последовательными актами взаимодействия с веществом (поглощениями), называется *средней длиной свободного пробега* l . Средняя длина пути фотона, излученного на данной частоте, — это расстояние, оптический путь вдоль которого на этой частоте примерно равен единице, т.е. $l_\nu \approx 1/\chi_\nu = (\chi_{lu}\phi_\nu + \chi_c)^{-1}$, где χ_{lu} и χ_c — коэффициенты поглощения в линии и в соседнем континууме, а ϕ_ν — профиль линии. При полном перераспределении вероятность излучения на частоте ν равна ϕ_ν , так что

$$l = \langle l_\nu \rangle = \int l_\nu \phi_\nu d\nu.$$

Очевидно, что фотоны, излучаемые в ядре линии, проходят относительно небольшие расстояния; те же, что излучаются в крыльях, могут проходить гораздо большие расстояния — вплоть до расстояния, соответствующего единичному оптическому расстоянию в континууме.

Когда фотон поглощается в линии и возбуждает атом, переводя его на верхний уровень, он *обычно* переизлучается при радиативном переходе вниз и снова перемещается на среднюю длину свободного пробега. Этот процесс может повторяться *снова и снова*, пока в конце концов фотон не *погибнет* либо при ударном переходе вниз, либо поглотившись в континууме, на который налагается линия. При этом его энергия перейдет в тепло. Таким образом, существует некоторая характерная длина L — длина, которую фотон может пройти до того, как погибнет. Длина L имеет более фундаментальный физический смысл, чем длина свободного пробега, так как она служит мерой расстояния, на котором фотон, излученный в данной точке, сохраняет свою индивидуальность и потому способен «сообщать» информацию об условиях в этой точке в другие места.

Поэтому L определяет область взаимодействия — объем, содержащий те точки, которые способны влиять друг на друга посредством обмена фотонами.

Отношение величин L и l зависит от вероятности гибели фотона P_d , которая представляет собой среднюю вероятность того, что фотон погибнет при очередном акте взаимодействия с веществом. Вероятность гибели фотона за счет столкновений после его поглощения в линии равна $C_{ul}/(A_{ul} + C_{ul})$ где C_{ul} — коэффициент ударного девозбуждения и A_{ul} — коэффициент спонтанного излучения. Так как $C_{ul} \propto n_e$, то ясно, что вклад столкновений в полную вероятность гибели становится большим (т.е. приближается к единице) в глубоких, более плотных слоях звездных атмосфер, а в наружных слоях он может быть совсем мал. Если принять, что все фотоны, поглощаемые в континууме, гибнут с переходом их энергии в тепло, то вклад процессов в континууме в P_d равен величине $\chi_c/(\chi_{ul}\phi_\nu + \chi_c)$, усредненной по профилю линии. Существование континуума ограничивает сверху значения l и L , так как фотон не может пройти пути, превышающего единичное оптическое расстояние в континууме, не испытав поглощения, а когда это случается, то он гибнет.

На больших глубинах в атмосфере P_d приближается к единице из-за большой плотности (а потому и большой частоты столкновений) и из-за большой интенсивности соседнего континуума. В этом случае $L \sim l$, так как при очередном акте поглощения фотон почти наверняка погибнет. Если принять, что оптическая глубина в континууме стала уже большой, то понятно, что поле излучения оказывается сильно связанным с локальными условиями и *термализуется*, приближаясь к термодинамически равновесному полю с локальным значением температуры. В противоположность этому, когда вероятность гибели очень мала, $L \gg l$ и область взаимодействия становится *громоздкой* по сравнению с тем объемом, в пределах которого фотон может перемещаться за один пролет. В этом случае поле излучения контролируется главным образом нелокальными эффектами и отражает физические условия (в пределах всей области взаимодействия. — *Ред.*), а они могут быть сильно различающимися. Например, в пределах этого объема могут существовать большие вариации кинетической температуры, ведущие к сильным вариациям термодинамических свойств и функции Планка. Поле излучения может тогда *заметно* отклоняться от равновесного, и это отклонение будет иметь место во всей области взаимодействия.

Важность этих понятий становится очевидной, если рассмотреть последовательность пробных точек, приближающихся к границе атмосферы. Для точек, расположенных достаточно глубоко, имеется равновесие. Но с приближением к поверхности расстояние L растет, и в конце концов в пределы объема взаимодействия попадает граница (точнее говоря, этот объем простирается выше того уровня, на котором всюду в линии $\tau \geq 1$). Теперь на сцену выступает новое явление — *выход* фотонов из среды в окружающее пространство. Отсюда следует, что в тех пробных точках, области взаимодействия которых простираются за границу атмосферы звезды в окружающее пространство, интенсивность излучения должна падать, становясь *меньше* той, которая была бы, если бы этой границы не было, так как в области, не содержащей вещества, излучение не испускается и поэтому выход фотонов не компенсируется. Этот эффект приводит к дефициту излучения во всем объеме взаимодействия. Это значит, что область, где имеется такой дефицит, простирается до глубины по крайней мере порядка L . Но поле излучения на этой глубине, разумеется, влияет на поле излучения в точках, лежащих вглубь еще на одну длину L . Поэтому имеется некоторый комбинированный эффект, который приводит к отклонению поля излучения от равновесного в точках, лежащих очень далеко от границы.

Глубина, на которой интенсивность излучения (или функция источников) в конце концов становится близка к равновесной, называется *глубиной термализации* Λ . Это понятие, введенное Джеффрисом [333], оказалось исключительно плодотворным. Чтобы получить количественную оценку Λ , введем *вероятность выхода* $P_e(\tau)$ — усредненную по линии вероятность того, что фотон, излученный на оптической глубине τ в линии, выйдет из среды непосредственно, не испытав по пути поглощения. Механизмом, конкурирующим с выходом фотонов, является их гибель. Первый из них (выход) порождает отклонения от равновесия, а второй (гибель) ведет к взаимодействию с тепловым ансамблем. Сравним поэтому P_e и P_d . Ясно, что в глубине атмосферы, где $P_e(\tau) \ll P_d$, фотоны термализуются до того, как они успевают выйти, а потому $S \rightarrow B$. У поверхности, где $P_e(\tau) \gg P_d$, фотоны свободно выходят до термализации, а значит, S будет отличаться от B . Поэтому из физических соображений кажется разумным принять за глубину термализации Λ ту глубину, на которой $P_e(\Lambda) = P_d$. Введенная таким образом глубина термализации Λ есть, по существу, та наибольшая глубина, с которой фотоны имеют заметный шанс выйти из атмосферы до того, как они погибнут.

Что касается вероятности выхода фотона (а потому и Λ), то она существенно зависит от характера перераспределения фотонов в пределах профиля линии при излучения и от величины поглощения в континууме, на который налагается линия. Вероятность поглощения фотона больше всего в центре линии. Если фотоны переизлучаются *когерентно*, то те из них, которые поглощаются в центре линии, в нем же и переизлучаются. Поэтому из-за большой оптической глубины в центре линии они будут оставаться запертыми вплоть до самых наружных слоев, где становится наконец прозрачной вся линия. Тем самым будут создаваться предпосылки к подавлению больших отклонений интенсивности излучения в центре линии от ее равновесного значения вплоть до самых наружных слоев (эта интенсивность дает существенный вклад в полную скорость фотовозбуждения). Напротив, если фотоны *полностью перераспределяются* по профилю линии, то существует заметная вероятность, что после ряда рассеяний фотон, поглощенный в центре линии, будет излучен в крыле, где коэффициент поглощения мал и потому велика вероятность выхода. Фотоны, которые при когерентном переизлучении были бы заперты, теперь свободно выходят из атмосферы, что ведет к уменьшению интенсивности в ядре линии (и темпа фотовозбуждений) в гораздо более глубоких слоях атмосферы. Если для фотонов хотя бы некоторых частот граница лежит на рассогнании, не превышающем среднюю длину их свободного пробега, то в данном случае реагирует на это уже поле излучения во всей линии. Понятно, что при полном перераспределении роль континуума существенна, так как им определяется нижняя граница полной непрозрачности, а потому и верхняя граница тех глубин, с которых выход фотонов становится возможен хоть на какой-то частоте, сколь бы далеко в крыле линии она ни находилась. Поэтому ясно, что когда рассеяние происходит некогерентно, то следует ожидать, что глубина термализации будет гораздо больше, а отклонения от равновесия — сильнее, чем при когерентном рассеянии. Более того, можно думать, что величина этих эффектов будет тем больше, чем сильнее крылья линии развиты по сравнению с ее ядром. Даваемый ниже детальный анализ показывает, что эти ожидания оправдываются.

Использование приведенных выше качественных соображений позволило выявить всю физическую суть проблемы. Чтобы получить количественные результаты и распространить анализ на случаи, когда эвристические соображения становятся менее эффективными, обратимся теперь к математическому рассмотрению проблемы.

11.2. Двухуровневый атом без континуума

ФУНКЦИЯ ИСТОЧНИКОВ

Рассмотрим схематическую модель атома, имеющего только два уровня (l и u), между которыми могут происходить радиативные и ударные переходы. Конечно, эта модель весьма несовершенна, но тем не менее для некоторых линий она дает достаточно хорошее описание реального положения дел. В частности, этой моделью хорошо описываются *резонансные линии*, возникающие при переходах из основного состояния, если взаимодействие и нижнего, и верхнего уровней с континуумом (а также верхнего уровня с другими уровнями) является слабым. Примем сейчас, что единственными источниками поглощения и излучения в частотах линии служат переходы в самой этой линии. Тогда уравнение переноса имеет вид

$$\mu \frac{dI_\nu}{dz} = [-n_l B_{lu} I_\nu + n_u (A_{ul} + B_{ul} I_\nu)] \phi_\nu (h\nu/4\pi). \quad (11.1)$$

Здесь сделано предположение о *полном перераспределении*, и поэтому профили поглощения и излучения совпадают. Введем шкалу оптических глубин, определяемую проинтегрированным по частоте коэффициентом поглощения в линии (он характеризует среднюю непрозрачность в линии в целом): $d\tau = -\chi_{lu} dz$, где

$$\begin{aligned} \chi_{lu} &= (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) (h\nu/4\pi) = \\ &= (\pi e^2/mc) f_{lu} [n_l - (g_l/g_u) n_u]. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Тогда

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau} = \phi_\nu (I_\nu - S_l), \quad (11.3)$$

где

$$S_l = n_u A_{ul} / (n_l B_{lu} - n_u B_{ul}) = (2h\nu^3/c^2) [n g_u / n_l g_l - 1]^{-1}, \quad (11.4)$$

причем второе равенство получается, если воспользоваться эйнштейновскими соотношениями между A и B [см. формулы (4.8) и (4.9)]. Изменение множителя ν^3 в пределах профиля ϕ_ν , имеющего узкий максимум, пренебрежимо мало. Поэтому функцию источников S_l считают *не зависящей от частоты*. Когда профиль излучения отличается от профиля поглощения, у S_l появляется явная зависимость от частоты (см. §2.1 и 13.4). Формула (11.4) дает функцию источников в *явной форме*, так как населенности уровней в свою

очередь зависят от поля излучения. Эту зависимость можно получить в *явном виде*, если привлечь уравнения статистического равновесия, которые определяют n_l и n_u .

Уравнение стационарности для уровня l имеет вид

$$n_l(B_{lu}\int\phi_\nu J_\nu d\nu + C_{lu}) = n_u(A_{ul} + B_{ul}\int\phi_\nu J_\nu d\nu + C_{ul}). \quad (11.5)$$

Это уравнение можно использовать, чтобы найти выражение для n_l/n_u . Вводя это выражение в уравнение (11.4), привлекая соотношение $C_{lu} = (n_u/n_l)C_{ul}$, следующее из условия детального баланса при ТР, и пользуясь соотношениями Эйнштейна, сразу же получаем

$$S_l = [\int\phi_\nu J_\nu d\nu + \varepsilon' B_\nu]/(1 + \varepsilon') = (1 - \varepsilon)\bar{J} + \varepsilon B_\nu, \quad (11.6)$$

где

$$\varepsilon' = C_{ul}(1 - e^{-h\nu/kT})/A_{ul}, \quad (11.7)$$

$$\varepsilon = \varepsilon'/(1 + \varepsilon'). \quad (11.8)$$

Упражнение 11.1. Дать подробный вывод (11.6).

Каждый из членов выражения (11.6) допускает непосредственную физическую интерпретацию. Функция источников содержит член J , обусловленный *некогерентным рассеянием*, и член $\varepsilon' B_\nu$, описывающий *тепловой источник*. Источниковый член εB_ν описывает фотоны, которые рождаются за счет возбуждений, вызванных столкновениями, с последующими радиативными переходами вниз. Слагаемое ε' в знаменателе описывает *сток* фотонов и учитывает те фотоны, которые *гибнут* при ударных переходах вниз, следующих за фотовозбуждениями. Связь между полем излучения и локальным тепловым состоянием газа целиком описывается этими двумя величинами. Можно считать, что член, описывающий рассеяние, представляет действие некоего *резервуара* фотонов, появление которого является конечным результатом совокупного влияния притока и стока энергии *в пределах всей характерной области взаимодействия*.

Ясно, что если плотность становится достаточно большой, то темп ударных переходов C_{ul} может в конце концов превзойти A_{ul} , так что ε' становится много больше единицы. Тогда $S_l \rightarrow B_\nu(T)$, и мы приходим к ЛТР. Однако практически во всех случаях, представляющих астрофизический интерес, в области образования линий $\varepsilon' \ll 1$ и, вообще говоря, нельзя ожидать, что функция источников будет близка к функции Планка. То, что дело обстоит таким образом, в классической теории в какой-то мере учитывалось путем

подразделения линий на два класса — на возникающие за счет истинного поглощения и на линии, формируемые рассеянием. Такое подразделение, однако, не было вполне последовательным, а параметр, описывающий силу взаимодействия с тепловым резервуаром, должен был оцениваться из эвристических соображений. В нашем же анализе этот параметр взаимодействия получается из уравнения статистического равновесия непосредственно и однозначно. Кроме того, при классическом рассмотрении линий, возникающих при «чистом» рассеянии, зачастую делалось неверное утверждение, что малые источниковые члены можно отбросить. Важный момент, который следует иметь в виду, состоит в том, что даже если тепловой член $\epsilon' B$ локально и мал по сравнению с членом $\bar{J}$, описывающим рассеяние, при интегрировании по всей области взаимодействия вклады, обусловленные тепловым членом, суммируются и становятся существенными. Кроме того, на глубинах, превосходящих глубину термализации, излучение должно в конце концов приходить в равновесие с тепловым резервуаром. Однако если тепловые члены отбросить, то уравнение переноса становится *однородным* по интенсивности и характерная амплитуда изменения решения (т.е. функции источников. — *Ред.*) *неизвестна*. По существу, масштаб изменения функции источников *фиксируется* именно (малыми) *тепловыми членами* там, где происходит термализация.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Имея выражение для функции источников, рассмотрим теперь решение уравнения переноса. Удобно работать с безразмерной частотой x , измеряемой от центра линии в единицах доплеровской ширины (а для лоренцевского профиля — в единицах ширины, обусловленной затуханием). В этой переменной профили линии записываются в следующем виде:

доплеровский

$$\phi(x) = \pi^{-1/2} e^{-x^2}, \quad (11.9a)$$

фойгтовский

$$\phi(x) = a\pi^{-3/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} [(x-y)^2 + a^2]^{-1} dy, \quad (11.9b)$$

лоренцевский

$$\phi(x) = (1/\pi)/(1+x^2). \quad (11.9b)$$

Все они нормированы так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1. \quad (11.10)$$

Будем считать, что множитель $\Delta\nu_D$ или $\Gamma/4\pi$ (в случае лоренцевского профиля) включен в χ , так что можно написать $d\tau = -\chi(z)dz$, где теперь $\chi_l = \chi_{lu}/\Delta\nu_D$, причем χ_{lu} дается формулой (11.2). Тогда

$$S(\tau) = [1 - \varepsilon(\tau)] \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau, x) J(\tau, x) dx + \varepsilon(\tau) B(\tau), \quad (11.11)$$

и уравнение переноса принимает вид

$$\mu \frac{dI(\tau, x)}{d\tau} = \phi(\tau, x) [I(\tau, x) - S(\tau)]. \quad (11.12)$$

Введем теперь сетки дискретизации по углам и по частотам $\{\mu_m\}$ и $\{x_n\}$ и заменим интегралы квадратурными суммами:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx \rightarrow \sum_{n=-N}^N a_n f(x_n) \quad (11.13a)$$

и

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu \rightarrow \sum_{m=-M}^M b_m f(\mu_m), \quad (11.13b)$$

причем узлы квадратур берутся симметрично, т.е. $x_{-n} = -x_n$ и $\mu_{-m} = -\mu_m$ (при этом $a_{-n} = a_n$ и $b_{-m} = b_m$). Тогда функцию источников можно записать в той же дискретизированной форме, которая была использована в гл. 6 [см. формулу (6.24a)]:

$$S_d = (1 - \varepsilon_d) \sum_n a_n \sum_m b_m u_{dmn} + \varepsilon_d B_d, \quad (11.14)$$

а уравнение переноса удастся свести к стандартного вида дифференциальному уравнению второго порядка

$$\mu_m^2 \frac{d^2 u_{mn}}{d\tau^2} = \phi_n^2 (u_{mn} - S), \quad (11.15)$$

где $u_n = \frac{1}{2} [I_n(+\mu) + I_n(-\mu)]$. Уравнение (11.15) можно дискретизировать по τ , взяв сетку $\{\tau_d\}$, и решить затем численно либо методом Фотриэ, либо методом Райбики, которые обсуждались в §6.3. Все входящие в уравнение параметры (ε , B и ϕ) могут зависеть от

глубины, что не вызовет каких-либо затруднений при вычислениях.

Другая возможность состоит в том, чтобы переписать уравнение переноса в *интегральной форме*. Формальное решение уравнения (11.12) есть

$$J(\tau, x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S(t) E_1(|t - \tau|) \phi(t, x) dt. \quad (11.16)$$

Если профиль изменяется с глубиной, аргумент функции E_1 будет зависеть от τ и от t порознь (а не от $\tau - t$. — *Ред.*). Это сильно усложняет анализ. Поэтому мы рассмотрим только случай, когда профиль с глубиной не изменяется. В этом случае E_1 зависит только от смещения $t - \tau$:

$$J(\tau, x) = \frac{1}{2} \phi(x) \int_0^{\infty} S(t) E_1(|t - \tau|) \phi(x) dt. \quad (11.17)$$

Подстановка этого выражения для J в соотношение (11.11) дает интегральное уравнение для S :

$$S(\tau) = [1 - \varepsilon(\tau)] \int_0^{\infty} S(t) K_1(|t - \tau|) dt + \varepsilon(\tau) B(\tau), \quad (11.18)$$

где ядерная функция K_1 дается формулой

$$K_1(s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(\phi_x s) \phi_x^2 dx = \int_0^{\infty} E_1(\phi_x s) \phi_x^2 dx. \quad (11.19)$$

Упражнение 11.2. Провести промежуточные выкладки при выводе уравнения (11.18).

Упражнение 11.3. а) Показать, что $K_1(s)$ нормировано так, что $\int_0^{\infty} K_1(s) ds = \frac{1}{2}$. б) Пользуясь этим, показать, что $S(\tau) \rightarrow B$ при $\tau \rightarrow \infty$. При выводе учесть, что $S(\tau)$ при больших τ должна быть медленно меняющейся функцией и потому ее можно вынести из-под знака интеграла.

Численные методы решения уравнений вида (11.18) подробно обсуждаются в [52] и в [18], гл.8. Во многих отношениях они напоминают метод Райбки решения дифференциальных уравнений, хотя в случае, когда профиль зависит от глубины, метод Райбки применять проще. По существу, решение получается путем введения функционального представления $S(\tau)$ на дискретной сетке $\{\tau_d\}$. Эти функции домножаются на ядро и интегрируются, что приводит к

окончательной системе уравнений вида

$$\mathbf{S} = \mathbf{K}\mathbf{S} + \mathbf{L}, \quad (11.20)$$

где $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_d, \dots, S_D)$ описывает изменение функции источников с глубиной. Эта система решается затем стандартными численными методами.

Одно из достоинств подхода, использующего интегральное уравнение, состоит в том, что здесь непосредственно видно, что вид функции источников в конечном счете определяется характером ядерной функции. Аналитическое исследование свойств ядра позволяет многое понять. В частности, *асимптотическое поведение* $K_1(s)$ при $s \gg 1$ показывает, что характерной чертой задач об образовании линий при некогерентном рассеянии является наличие *крупномасштабного взаимодействия* одной части атмосферы с другой. Напомним, что при *когерентном рассеянии* ядерная функция есть $E_1(|t - \tau|)$ [см. формулу (2.57) и упражнение 2.10]. Это ядро стремится к нулю очень быстро. Оно спадает как $\exp(-|t - \tau|/|t - \tau|)$, накладывая тем самым очень сильные ограничения на то предельное расстояние по глубине между двумя точками, в пределах которого они непосредственно связаны, обмениваясь рассеиваемыми фотонами. В противоположность этому асимптотическое поведение $K_1(s)$ оказывается следующим ([53], приложение 1): при доплеровском профиле

$$K_1(s) \sim 1/\{4s^2[\ln s^2/\pi^{1/2}]^{1/2}\},$$

при фойгтовском профиле

$$K_1(s) \sim a^{1/2}/6s^{3/2}$$

и при лоренцевском профиле

$$K_1(s) \sim 1/6s^{3/2}.$$

Очевидно, что для этих ядерных функций характерный масштаб очень велик по сравнению с характерным масштабом при когерентном рассеянии. Это приводит к тому, что поля излучения в двух далеко разнесенных точках среды становятся взаимозависимыми.

Физической причиной медленного убывания ядерных функций при некогерентном рассеянии служит, конечно же, перераспределение фотонов по частотам, ведущее к их уходу в прозрачные крылья линии. При когерентном рассеянии каждый фотон, поглощенный в ядре, в нем же и переизлучается. Поэтому для него непрозрачность всегда велика, и он остается запертым. При некогерентном рассеянии фотон имеет некоторую вероятность быть излученным в

крыльях, где из-за меньшей непрозрачности он может сместиться на большое геометрическое расстояние (а потому и на большое соответствующее ему оптическое расстояние в центре линии), прежде чем он снова будет поглощен.

ДЛИНА ТЕРМАЛИЗАЦИИ

Рассмотрим теперь поведение функции источников в такой атмосфере, где ε и B не зависят от глубины. Понятно, что это очень схематичный случай, но он позволяет многое понять. В этой задаче одной из самых важных подлежащих определению характеристик является *глубина термализации*, на которой функция источников в линии становится близка к функции Планка B . Выражение для длины термализации можно получить весьма разными методами, в том числе: а) из анализа асимптотического поведения решения интегрального уравнения (11.18); б) из рассмотрения функции распределения тех расстояний, которые фотон может пролететь от места своего рождения до места гибели [545], [322]; в) путем расчета распределения вероятности выхода фотона, родившегося в заданной точке в среде, через ее границу [214], [215], [216]. Один из самых простых и в то же время самых привлекательных способов вывода основан на физических соображениях, приведенных в §11.1 и сводящихся к тому, что глубина термализации Λ должна быть расположена недалеко от той точки в атмосфере, для которой *вероятность выхода фотона* $P_e(\Lambda)$ вслед за актом рассеяния равна *вероятности его гибели* P_d [28].

Для строго двухуровневого атома при полном отсутствии поглощения в континууме вероятность гибели в расчете на одно рассеяние равна

$$P_d = C_{ul}/(A_{ul} + C_{ul}) = \varepsilon, \quad (11.21)$$

где ε определяется формулами (11.7) и (11.8) (вынужденное излучение для простоты не учитывается). Чтобы получить вероятность прямого выхода, нужно вероятность $\exp(-\tau\phi_x/\mu)$ выхода фотона на частоте x вдоль луча, образующего угол $\arccos \mu$ с нормалью, проинтегрировать по всем углам и частотам с весом ϕ_x , представляющим собой вероятность излучения на частоте x в пределах линии:

$$\begin{aligned} P_e(\tau) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_x \int_0^1 e^{-\tau\phi_x/\mu} d\mu = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dx \phi_x \int_1^{\infty} e^{-(\tau\phi_x)v} v^{-2} dv = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_2(\tau\phi_x) \phi_x dx. \end{aligned} \quad (11.22)$$

При $\tau \gg 1$ интегральная показательная функция E_2 близка к нулю при $|x| \leq x_1$, где $\phi(x_1)\tau = 1$, и к единице при $|x| > x_1$. Физически это означает, что в ядре, т.е. там, где $\tau\phi_x > 1$, фотоны заперты, а в крыльях, где $\tau\phi_x < 1$, они свободно выходят. Поэтому $P_e(\tau)$ можно аппроксимировать следующим образом:

$$P_e(\tau) \approx \int_{x_1}^{\infty} \phi_x dx. \quad (11.23)$$

При $x_1 \gg 1$ (что имеет место при $\tau \gg 1$) этот интеграл легко вычисляется. Непосредственная подстановка выражений (11.9) дает

$$P_e(\tau) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(x_1) \approx e^{-x_1^2/2} \pi^{1/2} x_1 \quad (\text{Доплер}), \quad (11.24a)$$

$$P_e(\tau) = a/\pi x_1 \quad (\text{Фойгт}), \quad (11.24б)$$

$$P_e(\tau) = 1/\pi x_1 \quad (\text{Лоренц}). \quad (11.24в)$$

При получении формулы (11.24б) было использовано асимптотическое выражение для функции Фойгта [см. формулу (9.45)]. Далее, условие $\phi_{x_1}\tau = 1$ дает

$$x_1 = (\ln \tau / \pi^{1/2})^{1/2} \quad (\text{Доплер}), \quad (11.25a)$$

$$x_1 = (a\tau/\pi)^{1/2} \quad (\text{Фойгт}), \quad (11.25б)$$

$$x_1 = (\tau/\pi)^{1/2} \quad (\text{Лоренц}). \quad (11.25в)$$

Поэтому, подставляя выражения (11.25) в (11.24), полагая при этом, что $P_e(\Lambda) = P_d = \varepsilon$, и разрешая получающиеся равенства относительно Λ , находим

$$\Lambda \approx c/\varepsilon \quad (\text{Доплер}), \quad (11.26a)$$

$$\Lambda \approx a/\varepsilon^2 \quad (\text{Фойгт}), \quad (11.26б)$$

$$\Lambda \approx 1/\varepsilon^2 \quad (\text{Лоренц}), \quad (11.26в)$$

где c — число порядка единицы, слабо зависящее от ε . Другие множители порядка единицы мы опустили.

Упражнение 11.4. Показать, что для профиля, имеющего при больших x асимптотику $\phi_x \sim cx^{-\alpha}$, где $\alpha > 1$, зависимость длины термализации от ε есть $\Lambda \sim \varepsilon^{-\beta}$, где $\beta = \alpha/(\alpha - 1)$.

Важнейшей характерной чертой результата, выражаемого формулами (11.26), является то, что для линии с малым ε глубина термализации *чрезвычайно велика*. Напомним, что при когерентном

рассеянии глубина термализации $\sim \varepsilon^{-1/2}$ (см. § 6.1 и 10.2). Ясно, что влияние некогерентности, проявляющееся, в частности в усилении роли фотонов, диффундирующих в крыльях, приводит к значительному увеличению той глубины в атмосфере, в пределах которой функция источников может отклоняться от локальной функции Планка. И действительно, сопоставление между собой формул (11.26а) — (11.26в) сразу же показывает, что увеличение относительной роли крыльев линии в профиле прямо ведет к увеличению глубины термализации. Следует, однако, подчеркнуть, что вышеприведенные результаты непосредственно справедливы лишь при двух предположениях: а) отсутствует поглощение в континууме и б) имеется полное перераспределение по частотам. Ниже в этом разделе будет показано, что поглощение в континууме может сильно уменьшать Λ . В гл. 13 будет установлено, что в случае резонансных линий рассеяние в сильных крыльях, обусловленных затуханием излучения, является почти когерентным и выражение (11.26а) лучше аппроксимирует Λ , чем (11.26б).

С математической точки зрения формулы (11.26) показывают, что при малых ε попытка получить решение уравнения переноса методом итераций, взяв в качестве начального приближения ЛТР, была бы *тщетной* (еще в гораздо большей мере, чем в случаях, уже обсуждавшихся в § 6.1), и правильные значения функции источников и интенсивности могут дать только *прямые методы* решения уравнения переноса.

ГРАНИЧНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ФУНКЦИИ ИСТОЧНИКОВ И ЕЕ ИЗМЕНЕНИЕ С ГЛУБИНОЙ

Выше было показано, что функция источников может сильно отличаться от функции Планка вплоть до больших глубин в атмосфере. Выясним теперь, какова ее величина около границы полубесконечной атмосферы. Если считать, что ε и B не зависят от глубины, то уравнение переноса (11.12) легко решить методом дискретных ординат [53]; [476]. Положив $\lambda_n = 1/\phi(x_n)$, будем иметь следующую систему уравнений:

$$\lambda_n \mu_m \frac{dI_{mn}}{d\tau} = I_{mn} - \frac{1}{2} (1 - \varepsilon) \sum_{n=-N}^N a_n \sum_{m=-M}^M b_m I_{m'n'} - \varepsilon B. \quad (11.27)$$

Рассмотрим сначала однородное уравнение ($B = 0$). Будем искать его решение в виде $I_{mn} = g_{mn} \exp(-k\tau)$. В результате найдем, что

$$I_{mn} = c(1 + k\lambda_n \mu_m)^{-1} e^{-k\tau}, \quad (11.28)$$

где постоянные k — корни характеристического уравнения

$$2(1 - \varepsilon) \sum_{n=1}^N a_n \sum_{m=1}^M b_m (1 - k^2 \lambda_n^2 \mu_m^2)^{-1} = 1. \quad (11.29)$$

Упражнение 11.5. а) Получить выражение (11.28). б) Показать, что уравнение (11.29) действительно есть характеристическое уравнение системы (11.27).

При $\varepsilon = 0$ характеристическое уравнение имеет корень $k^2 = 0$. При $\varepsilon > 0$ значения k^2 должны быть больше нуля. Подобно тому как это было ранее при использовании метода дискретных ординат (§3.3, 7.4), и здесь корни расположены между полюсами, находящимися при $k^2 = 1/\lambda_n^2 \mu_m^2$. Если эти полюсы занумеровать в порядке уменьшения значений $\lambda_n \mu_m$, то можно написать

$$0 < k_1^2 < (\lambda_1 \mu_1)^{-2} < k_2^2 < \dots < k_{MN}^2 < (\lambda_N \mu_M)^{-2}, \quad (11.30)$$

откуда следует, что корни можно без труда получить, найдя их расположение в пределах соответствующих конечных интервалов. Эти корни также удобно занумеровать, придав им индекс α , $1 \leq \alpha \leq MN$. Из рассмотрения характеристического уравнения, подобного тому, которое было использовано для вывода соотношения (3.65), легко показать, что

$$\prod_{\alpha=1}^{MN} (k_\alpha \lambda_n \mu_m)^2 = \varepsilon. \quad (11.31)$$

Этот результат будет использован ниже. При $B = \text{const}$ система (11.27) имеет частное решение $I_{mn} = B$. Поэтому общее решение должно иметь вид

$$I_{mn} = B \left[1 + \sum_{\alpha=1}^{MN} L_\alpha e^{-k_\alpha r} (1 + k_\alpha \lambda_n \mu_m)^{-1} \right], \quad (11.32)$$

причем члены с возрастающими экспонентами отброшены, чтобы обеспечить ограниченность решения на бесконечности. Граничное условие на поверхности есть, как обычно, $I_{mn}(-\mu_m) = 0$. Если ввести функцию

$$\mathcal{J}(x) = 1 + \sum_{\alpha=1}^{MN} L_\alpha (1 - k_\alpha x)^{-1}, \quad (11.33)$$

то граничное условие на поверхности можно выразить в форме $\mathcal{J}(\lambda_n \mu_m) = 0$ при $m = 1, \dots, M$ и $n = 1, \dots, N$. Эту систему ли-

нейных уравнений можно разрешить численно относительно величин L_α . Подставляя (11.32) в выражение для S_γ , стоящее в правой части уравнения (11.27), и пользуясь характеристическим уравнением (11.29), находим

$$S(\tau) = B(1 + \sum_{\alpha=1}^{MN} L_\alpha e^{-k_\alpha \tau}). \quad (11.34)$$

В частности, на поверхности

$$S(0) = B(1 + \sum_{\alpha=1}^{MN} L_\alpha) = B\mathcal{S}(0). \quad (11.35)$$

Далее, применяя рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы для вывода формул (3.70) и (7.104), можно показать, что

$$\mathcal{S}(x) = [\prod_{\alpha=1}^{MN} k_\alpha \prod_{n=1}^N \prod_{m=1}^M (\lambda_n \mu_m - x)] / \prod_{\alpha=1}^{MN} (1 - k_\alpha x). \quad (11.36)$$

Пользуясь соотношением (11.31), находим отсюда, что

$$\mathcal{S}(0) = \prod_{\alpha=1}^{MN} (k_\alpha \lambda_n \mu_m) = \varepsilon^{1/2}. \quad (11.37)$$

Упражнение 11.6. а) Вывести соотношение (11.31). б) Получить выражение (11.34). в) Вывести формулу (11.36).

Подставляя (11.37) в (11.35), приходим окончательно к чрезвычайно важному результату:

$$S_I(0) = \varepsilon^{1/2} B. \quad (11.38)$$

Этот результат не зависит от числа членов в квадратурной сумме и от вида профиля, а потому является точным. Из полученных до сих пор результатов самыми важными с точки зрения физики являются формулы (11.38) и (11.26). Суть этих формул можно словесно кратко сформулировать так: когда взаимодействие между процессом излучения в линии и тепловым ансамблем слабое ($\varepsilon \ll 1$), функция источников может *чрезвычайно сильно* отклоняться от равновесного теплового значения, причем эти отклонения могут простираться до *больших глубин* в атмосфере. Отметим, что значение функции источников на границе превышает тепловой член, определяющий темп истинного рождения фотонов, в $1/\varepsilon^{1/2}$ раз. Отсюда вытекает, что значение $S_I(0)$ определяется главным образом фото-

нами, поглощаемыми в крыльях линии. Эти фотоны зарождаются в глубоких слоях атмосферы, где $S_l(\tau) \gg S_l(0)$. Поэтому ясно, что *граничное значение S_l не имеет почти ничего общего с локальным значением теплового источникового члена, доминирующую же роль играют нелокальные эффекты.*

Результаты численных расчетов изменения $S_l(\tau)$ с глубиной показаны на рис. 11.1 и 11.2. Графики рис. 11.1 относятся к полубесконечной атмосфере, постоянной функции Планка ($B = 1$), доплеровскому профилю ($a = 0$) и различным значениям ε . Видно, что во всех случаях $S_l(0) = \varepsilon^{1/2}$ и что S_l приближается к B при $\tau \approx 1/\varepsilon$. Результаты, показанные на рис. 11.2, относятся к линиям с $\varepsilon = 10^{-4}$, имеющим различные фойгтовские профили — от чисто доплеровского вплоть до лоренцевского ($a = \infty$). Четко видно возрастание глубины термализации от ε^{-1} до ε^{-2} . Функции источников, изображенные на рис. 11.1 и 11.2, будут порождать *линии поглощения*, остаточная интенсивность в ядрах которых очень мала. В противоположность этому решение $S_l = B$, отвечающее ЛТР, не дало бы вообще *никакой линии*. Это различие можно приписать влиянию рассеяний. Согласно классической теории (когерентное рассеяние. — Ред.), при том же ε также должна была бы образовываться линия, имеющая ту же самую центральную глубину. Однако два важных различия все же имеются: а) населенности как верхнего, так и нижнего уровня отличаются от их значений при ЛТР. Во

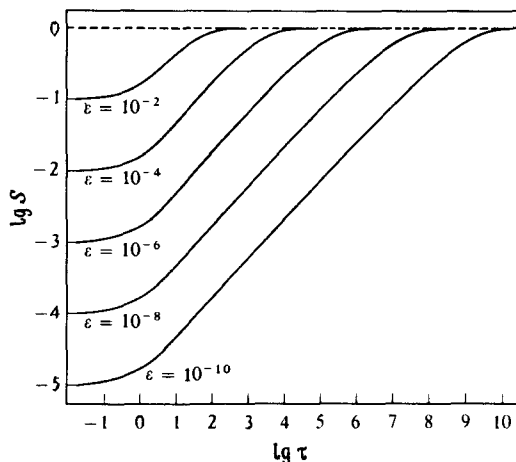


Рис. 11.1. Функции источников в линии в полубесконечной атмосфере при $B = 1$ для линии с чисто доплеровским профилем ($a = 0$) при различных значениях ε . (По [53], с разрешения.)

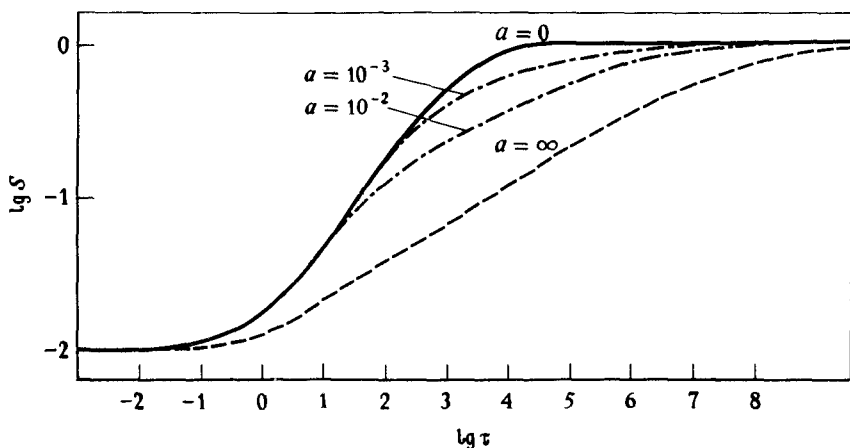


Рис. 11.2. Функции источников в линии в полубесконечной атмосфере при $B = 1$ для линий с $\varepsilon = 10^{-4}$ при различных фойгтовских профилях — от чисто доплеровского ($a = 0$) до чисто лоренцевского ($a = \infty$). (По [53], с разрешения.)

многих ранних расчетах на основе модели «рассеяния» (ошибочно) брали равновесные населенности. б) При принятии *некогерентного* рассеяния темная часть профиля, обусловленная отклонениями от ЛТР, шире. Согласно соотношению Эддингтона — Барбье, $I_\nu(0) \sim S_l(\tau_\nu = 1)$. Поэтому линии будут темными при $|x| \leq x_1$, где $\Delta\phi_{x_1} = 1$. Так как при некогерентном рассеянии значения Λ гораздо больше (от ε^{-1} до ε^{-2} , а не $\varepsilon^{-1/2}$), соответствующие значения x_1 также будут больше. К этому вопросу мы еще вернемся в § 11.5. Наконец, следует отметить, что полученные сейчас решения являются *точными* самосогласованными решениями, которые одновременно удовлетворяют и уравнению переноса, и уравнениям статистического равновесия. Любой подход, в котором такой взаимосогласованности решений нет, является неудовлетворительным.

СЛОЙ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

Атмосфера в виде *слоя конечной толщины* T представляет собой важную для астрофизики модель. Ее можно использовать для описания туманностей или некоторых ограниченных зон звездной атмосферы, в пределах которых из-за изменения ионизации с глубиной тот или иной ион только и встречается (например, формирование хромосферных линий, скажем He II, происходит в слое, ограниченном сверху короной, а снизу — фотосферой). Для конечных

атмосфер возможно существование двух физически различных ситуаций соответственно тому, является ли атмосфера *эффективно толстой* или *эффективно тонкой*. Если $T \gg \Lambda$, то из середины слоя фотоны почти не будут успевать выйти, прежде чем они испытывают термализацию. В этом случае $S_i(0)$ будет почти достигать значения, которое она имеет в полубесконечной атмосфере при том же ε , а на расстояниях $\geq \Lambda$ от границ она будет приближаться к B . Если, наоборот, $T \ll \Lambda$, то термализация не существенна и $S_i(\tau)$ становится пропорциональной локальной мощности первичных источников, т.е. $S_i(\tau) = \varepsilon B f(\tau)$, где $f(\tau)$ для данного T не зависит от ε .

Оценку S_i в середине слоя можно получить следующим образом (см. также [28]). Отношение *полного* числа актов излучения в столбе единичного сечения, проходящем через весь слой, к числу актов излучения вслед за *тепловым возбуждением* должно быть равно среднему числу рассеяний $\langle N \rangle$, испытываемых фотоном до его выхода или гибели, т.е.

$$\begin{aligned} \langle N \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} d\nu (4\pi h\nu \phi_\nu) \int_0^T S_i(\tau) d\tau / \int_{-\infty}^{\infty} d\nu (4\pi h\nu \phi_\nu) \int_0^T \varepsilon(\tau) B(\tau) d\tau \\ &= \int_0^T S_i(\tau) d\tau / \int_0^T \varepsilon(\tau) B(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (11.39)$$

Здесь мы воспользовались тем, что по определению $\eta_\nu = \chi_\nu S_\nu$, и учли, что S_i не зависит от частоты. Для конечного (эффективно тонкого. — *Ред.*) слоя основным механизмом выбывания фотонов является их выход, и поэтому

$$\langle N \rangle \sim [P_e(T)]^{-1}.$$

В середине слоя

$$P_e(T) \approx [2P_e(\frac{1}{2}T)]_\infty,$$

где индексом ∞ отмечена вероятность выхода с указанной глубины из полубесконечного слоя, а множитель 2 учитывает возможность выхода через обе границы конечного слоя. Чтобы из формулы (11.39) получить порядковую оценку, заменим $S_i(\tau)$ на $S_{\max} = S(\frac{1}{2}T)$ и примем, что εB постоянно, так что $\langle N \rangle \approx S_{\max} / \varepsilon B$. Воспользовавшись для вычисления $P_e(T)$ (11.24) и (11.25) и, как и выше, пренебрегая численными множителями порядка единицы, найдем тогда

$$S_{\max} \approx \varepsilon T (\ln T)^{1/2} B \quad (\text{Доплер}), \quad (11.40a)$$

$$S_{\max} \approx \varepsilon (T/a)^{1/2} B \quad (\text{Фойгт}), \quad (11.40б)$$

$$S_{\max} \approx \varepsilon T^{1/2} B \quad (\text{Лоренц}). \quad (11.40\text{в})$$

Описанное выше поведение очень четко проявляется в численных результатах, показанных на рис. 11.3 [53]. На нем приведены графики $S_i(\tau)$ для линий с доплеровским профилем ($a = 0$) при различных значениях ε для атмосферы с $T = 10^4$. Пунктиром показано решение для полубесконечной атмосферы с $\varepsilon = 10^{-4}$. Можно видеть, что при $\varepsilon \geq 10^{-4}$ решения для конечного слоя близки к решениям для полубесконечной атмосферы при том же ε , тогда как при $\varepsilon < 10^{-4}$ атмосфера становится эффективно тонкой. Кривая S_i проходит при этом ниже соответствующей кривой для полубесконечного слоя, причем значения S_i практически пропорциональны ε . На рис. 11.4 для линий с $\varepsilon = 10^{-4}$ приведены интенсивности выходящего излучения при различных значениях a и T . При $T = \infty$ во всех случаях получается линия поглощения, причем центральная интенсивность не зависит от a . Для конечных атмосфер получаются эмиссионные линии, так как при достаточно больших x (в крыле линии) среда становится все более прозрачной, а интенсивность должна стремиться к нулю. При меньших x интенсивность быстро

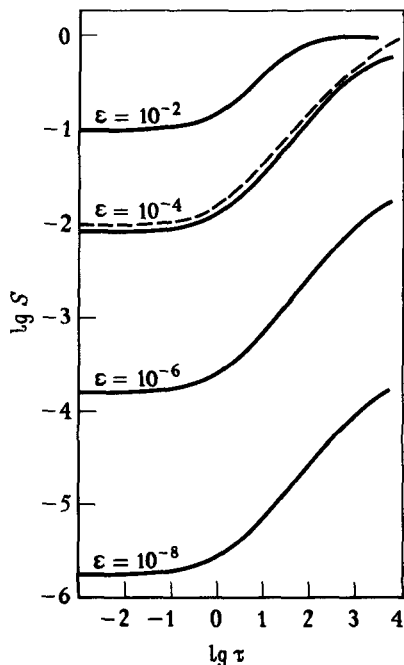


Рис. 11.3. Функции источников в линии в конечных атмосферах оптической толщины $T = 10^4$ при $B = 1$ для линии с чисто доплеровским профилем ($a = 0$). Штриховая линия соответствует решению для полубесконечной атмосферы с $\varepsilon = 10^{-4}$. Отметим, что $S_i(\tau)$ симметрично относительно $T/2$ (из-за использования логарифмического масштаба по оси абсцисс значения $S_i(\tau)$ при $\tau > T/2$ не нанесены). (По [53], с разрешения.)

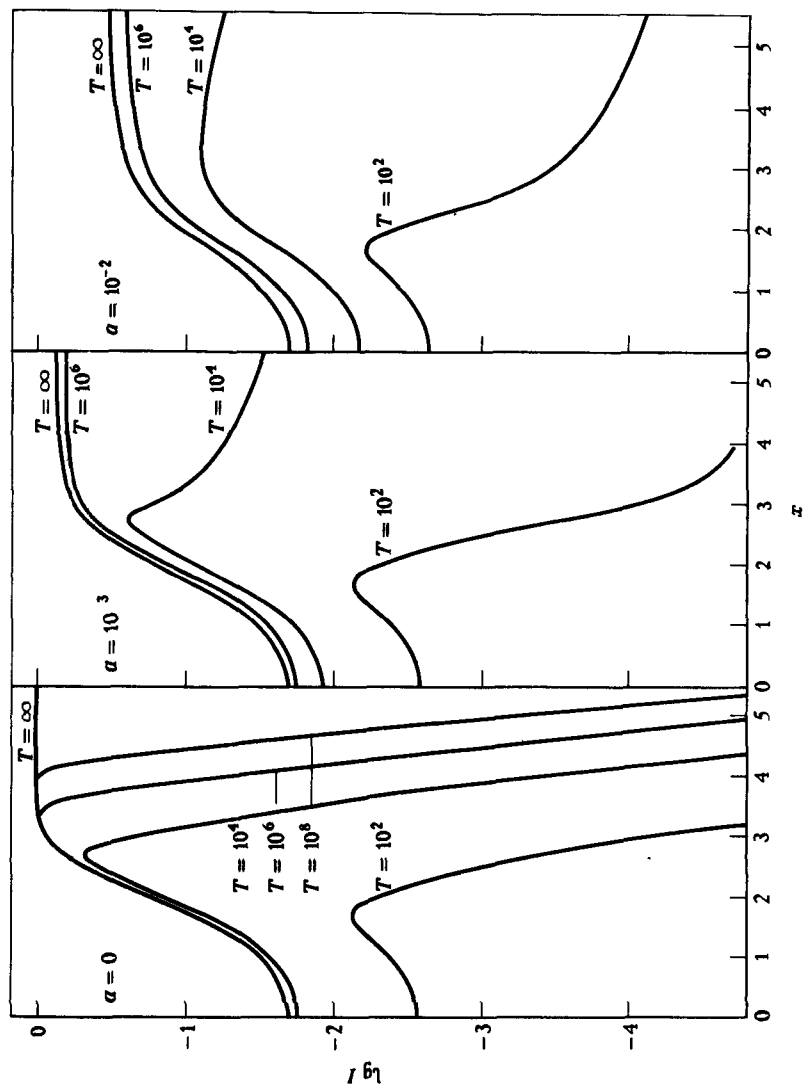


Рис. 11.4. Интенсивность излучения, выходящего из конечной и полубесконечной атмосфер, при доплеровском и фойгттовском профилях и $\epsilon \approx 10^{-4}$. (По [53], с разрешения.)

возрастает и для эффективно толстых атмосфер достигает насыщения, приближаясь к значению, которое она имеет для полубесконечной атмосферы. Наконец, в ядре линии рассеяние ведет к появлению самообращения. Профили, показанные на рис. 11.4, сильно напоминают профили, наблюдающиеся у лабораторных эмиссионных источников с насыщенными линиями, а также те, которые порождаются горячими хромосферными слоями, лежащими над сравнительно холодной фотосферой.

ЭФФЕКТЫ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ КОНТИНУУМОМ, НАЛАГАЮЩИМСЯ НА ЛИНИЮ

Все приведенное в этом разделе обсуждение основывалось на предположении, что единственным источником непрозрачности является поглощение в самой линии. Однако почти во всех случаях, представляющих интерес для астрофизики, линия будет налагаться на континуум, служащий для нее фоном. Как отмечалось в § 11.1, наличие такого фонового континуума влияет на вероятность гибели фотона P_d и ведет к появлению верхнего предела у длины свободного пробега фотона и у длины пути, проходимой фотоном до его гибели. Поэтому следует ожидать, что и у глубины термализации будет существовать верхний предел, обусловленный процессами взаимодействия с континуумом. Кроме того, континуум служит дополнительным источником излучения в линии. Детальное исследование задачи об образовании линии при наличии континуума, на который налагается линия, было дано в [315] для идеализированных задач, аналогичных тем, которые были рассмотрены выше для случая, когда континуума нет. В этом разделе будут кратко изложены результаты этой работы.

Для простоты рассмотрим полубесконечную атмосферу и предположим, что коэффициенты поглощения в линии и в континууме χ_l и χ_c , профиль поглощения ϕ_x , параметр эффективности термализации ε и функция Планка B не зависят от глубины (все эти предположения можно отбросить, если используется численный подход и применяются методы решения типа метода Фотрие или Райбики). Уравнение переноса имеет вид

$$\mu \frac{dI_x}{dz} = -(\chi_c + \chi_l \phi_x) I_x + \chi_l \phi_x S_l + \chi_c B. \quad (11.41)$$

Если оптическую глубину ввести через коэффициент поглощения в линии $d\tau = -\chi_l dz$ (тем самым подразумевается, что континуум

рассматривается как возмущение) и положить $r = \chi_c/\chi_b$, то уравнение (11.41) перейдет в следующее:

$$\mu \frac{dI_x}{d\tau} = (\phi_x + r)(I_x - S_x), \quad (11.42)$$

где

$$\begin{aligned} S_x &= \frac{(1 - \varepsilon)\phi_x}{\phi_x + r} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{x'} J_{x'} dx' + \frac{\varepsilon\phi_x + r}{\phi_x + r} B = \\ &= (1 - \xi_x) \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{x'} J_{x'} dx' + \xi_x B \end{aligned} \quad (11.43)$$

и

$$\xi_x = (\varepsilon\phi_x + r)/(\phi_x + r). \quad (11.44)$$

Легко видеть, что ξ_x представляет собой *полную вероятность гибели* фотона частоты x , так как ξ_x есть сумма а) вероятности $\phi_x/(\phi_x + r)$ того, что фотон будет поглощен в линии, умноженной на вероятность ε того, что фотон линии погибнет за счет столкновений, и б) вероятности $r/(\phi_x + r)$ того, что фотон будет поглощен в континууме, умноженной на единицу — вероятность его гибели в этом случае. Формальное решение уравнения переноса (11.42) дает

$$\begin{aligned} J_x(\tau) &= (\phi_x + r) \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S_x(t) E_1(|t - \tau|(\phi_x + r)) dt = \\ &= \frac{1}{2} \phi_x \int_0^{\infty} S_x(t) E_1(|t - \tau|(\phi_x + r)) dt + \\ &+ \frac{1}{2} r B \int_0^{\infty} E_1(|t - \tau|(\phi_x + r)) dt. \end{aligned} \quad (11.45)$$

Решение, даваемое выражением (11.45), можно было бы подставить в (11.43), что дало бы интегральное уравнение для полной функции источников $S_x(\tau)$. Однако получающееся в результате уравнение было бы двумерным (интегрирования по τ и по x), и пользоваться им для решения задачи было бы нецелесообразно. Вместо этого можно получить уравнение для $S_x(\tau)$. Если же функция источников в линии известна, то можно рассчитать и искомую полную

функцию источников

$$S_x = (\phi_x S(\tau) + rB)/(\phi_x + r).$$

Чтобы получить уравнение для $S(\tau)$, найдем интеграл $\int \phi_x J_x dx$, воспользовавшись выражением (11.45). Подстановка результата в формулу (11.11) дает

$$S(\tau) = (1 - \varepsilon)(1 - \delta) \int_0^\infty S(t) K_{1,r}(|t - \tau|) dt + \\ + (1 - \varepsilon) \delta B \int_0^\infty L_{1,r}(|t - \tau|) dt + \varepsilon B, \quad (11.46)$$

где

$$\delta = r \int_{-\infty}^\infty \phi_x (\phi_x + r)^{-1} dx, \quad (11.47)$$

$$K_{1,r}(s) = \frac{1}{2} (1 - \delta)^{-1} \int_{-\infty}^\infty E_1[(\phi_x + r)s] \phi_x^2 dx, \quad (11.48)$$

$$L_{1,r}(s) = \frac{1}{2} r \delta^{-1} \int_{-\infty}^\infty E_1[(\phi_x + r)s] \phi_x dx. \quad (11.49)$$

Коэффициенты, стоящие перед интегралами, которыми определяются фигурирующие здесь ядерные функции, выбраны так, что они обеспечивают нормировку ядер.

Упражнение 11.7. а) Получить уравнение (11.46). б) Показать, что $\lim_{r \rightarrow 0} (\delta/r) = \infty$, $\lim_{r \rightarrow 0} (1 - \delta) \rightarrow 1$ и поэтому $\lim_{r \rightarrow 0} L_{1,r}(\tau) = 0$ и $\lim_{r \rightarrow 0} K_{1,r}(\tau) = K_1(\tau)$, где $K_1(\tau)$ определяется формулой (11.19). в) Показать, что $K_{1,r}$ и $L_{1,r}$ нормированы так, что $\int_0^\infty K_{1,r}(\tau) d\tau = \frac{1}{2}$ и $\int_0^\infty L_{1,r}(\tau) d\tau = \frac{1}{2}$. г) Пользуясь (в), показать, что $S(\tau) \rightarrow B$ при $\tau \rightarrow \infty$. Воспользоваться тем, что $S(\tau)$ при больших τ изменяется медленно и потому может быть вынесена из-под знака интеграла.

Физический смысл уравнения (11.46) становится ясным, если ввести среднюю вероятность гибели фотона

$$\xi = \int_{-\infty}^\infty \phi_x \xi_x dx = \delta + \varepsilon(1 - \delta). \quad (11.50)$$

Тогда $1 - \xi = (1 - \varepsilon)(1 - \delta)$ и уравнение (11.46) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} S_f(\tau) &= (1 - \xi) \int_0^{\infty} S_f(t) K_{1,r}(|t - \tau|) dt + \\ &+ (\xi - \varepsilon) B \int_0^{\infty} L_{1,r}(|t - \tau|) dt + \varepsilon B = \\ &= (1 - \xi) \int_0^{\infty} S_f(t) K_{1,r}(|t - \tau|) dt + \xi B_{\text{эф}}(\tau). \quad (11.51) \end{aligned}$$

В первой из двух приведенных форм записи уравнения (11.51) первый член описывает, очевидно, рассеяние в линии, причем полная вероятность гибели фотона равна ξ . Второй член учитывает фотоны, появляющиеся в линии из континуума, третий — те фотоны, которые возникают за счет ударных процессов. Как и в случае, когда принималось, что континуума нет вовсе, изменение функции источников с глубиной будет определяться свойствами ядерных функций. Вопрос о том, как происходит термализация, можно выяснить путем аналитического исследования асимптотического поведения $K_{1,r}$ и $L_{1,r}$ [315]. С другой стороны, вторая форма записи уравнения (11.51) показывает, что при наличии континуума задача сохраняет ту же форму, что и в случае, когда есть только переходы в линии. Единственное отличие состоит в том, что константа, характеризующая взаимодействие между полем излучения и тепловым резервуаром, равна не ε , а ξ . Поэтому если воспользоваться той же схемой рассуждений, что и выше, но взять в качестве P_d величину ξ , то найдем, что *глубина термализации по-прежнему дается выражениями (11.26)*, в которых, однако, ε заменено на ξ . Значения ξ и Λ при $\varepsilon = 10^{-6}$ для различных значений r и a приведены в табл. 11.1. Бросающийся в глаза результат, который отсюда вытекает, состоит в том, что ξ *может сильно превосходить ε* , даже когда $r \leq \varepsilon$. Следствием этого является огромное уменьшение Λ . Эти результаты показывают, что континуум, ограничивая возможность переноса фотонов в крыльях линии, может играть доминирующую роль в процессе термализации в линии. Отметим также, что, когда $r \geq \varepsilon$, значение ξ уже достаточно велико, чтобы гарантировать неравенство $\Lambda < r^{-1}$. Это так и должно быть, поскольку из физических соображений следует, что на расстояниях, превосходящих r^{-1} , будет происходить термализация в континууме. Поэтому формулы (11.26), в которых ε заменено на ξ , не содержат внутренних противоречий.

ТАБЛИЦА 11.1

Средняя вероятность гибели фотона $\bar{\xi}$ и глубина термализации Λ для линии, налагающейся на континуум ($\epsilon = 10^{-6}$) (по [315])

r	a					
	ϵ		10^{-3}		10^{-2}	
	$\bar{\xi}$	Λ	$\bar{\xi}$	Λ	$\bar{\xi}$	Λ
0	10^{-6}	$1 \cdot 10^6$	10^{-6}	10^9	10^{-6}	10^{10}
10^{-7}	$1,79 \cdot 10^{-6}$	$5,6 \cdot 10^5$	$1,87 \cdot 10^{-3}$	$2,9 \cdot 10^6$	$5,71 \cdot 10^{-5}$	$3,1 \cdot 10^7$
10^{-6}	$8,26 \cdot 10^{-6}$	$1,2 \cdot 10^5$	$5,72 \cdot 10^{-5}$	$2,1 \cdot 10^5$	$1,78 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^5$
10^{-5}	$6,69 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^4$	$1,85 \cdot 10^{-4}$	$2,9 \cdot 10^4$	$5,63 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^4$
10^{-4}	$5,85 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^3$	$7,84 \cdot 10^{-4}$	$1,6 \cdot 10^3$	$1,83 \cdot 10^{-3}$	$3,0 \cdot 10^3$
10^{-3}	$4,98 \cdot 10^{-3}$	$2,0 \cdot 10^2$	$5,23 \cdot 10^{-3}$	$3,7 \cdot 10^1$	$7,25 \cdot 10^{-3}$	$1,9 \cdot 10^2$

Чтобы оценить функцию источников на границе, также можно воспользоваться сходством уравнений (11.51) и (11.18), что позволяет заключить, что существует соотношение вида

$$S_{\lambda}(0) = \bar{\xi}^{1/2} \bar{B}_{\text{эфф}}, \quad (11.52)$$

где $\bar{B}_{\text{эфф}}$ — это $B_{\text{эфф}}(\tau)$, соответствующим образом усредненное по τ вплоть до глубины, равной длине термализации. Из приведенного выше обсуждения очевидно, что во всех случаях, когда $\bar{\xi}$ превосходит ϵ (будь то потому, что $r > \epsilon$, или же из-за того, что протяженные крылья линии обеспечивают выполнение неравенства $\bar{\xi} > \epsilon$, хотя r и меньше ϵ), в членах, описывающих и гибель, и рождение $[B_{\text{эфф}}]$ фотонов линии, доминирующую роль играет континуум. Говорят, что в этом случае линия *контролируется континуумом*. Отсюда следует, в частности, что $S_{\lambda}(0)$ определяется континуумом, несмотря на то, что в ядре и коэффициент поглощения в линии, и функция источников в линии превосходят члены, определяемые континуумом. Это служит еще одним проявлением того уже отмечавшегося выше факта, что значение функции источников на границе определяется крыльями линии.

Результаты численных расчетов $S_{\lambda}(\tau)$ в полубесконечных атмос-

ферах с $B = 1$ и $\varepsilon = 10^{-6}$, полученные методом дискретных ординат, показаны на рис. 11.5 и 11.6 [315]. Ясно видно, что даже весьма малые r вызывают большие изменения функции источников. Для слоев конечной толщины эти эффекты выражены еще сильнее. Результаты, приведенные на рис. 11.5, относятся к чисто доплеровскому профилю. Вертикальными стрелками показаны теоретические значения глубины термализации, приведенные в табл. 11.1, а горизонтальные стрелки указывают $\xi^{1/2}$, т.е. значения $S_I(0)$ при $B_{\text{эфф}} = 1$. Для фойгтовских профилей (рис. 11.6) довольно хорошая оценка $S_I(0)$ получается, если взять

$$\bar{B}_{\text{эфф}} = (\Lambda/\alpha)^{-1} \int_0^{\Lambda/\alpha} B_{\text{эфф}}(\tau) d\tau, \quad (11.53)$$

выбрав α чуть меньше 3. Таким выбором α учитывается сильное убывание истинной весовой функции с глубиной. Для *конечных* атмосфер в качестве первого приближения к значению S_{max} в середине слоя можно использовать выражения (11.40) с заменой ε на

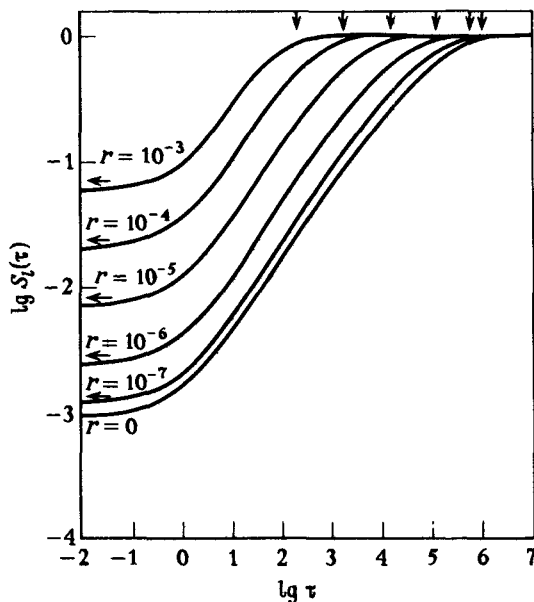


Рис. 11.5. Функции источников в линии в полубесконечной атмосфере для двухуровневого атома с $\varepsilon = 10^{-6}$ при чисто доплеровском профиле ($\alpha = 0$). Линия налагается на континуум с различными значениями r . (По [315], с разрешения.)

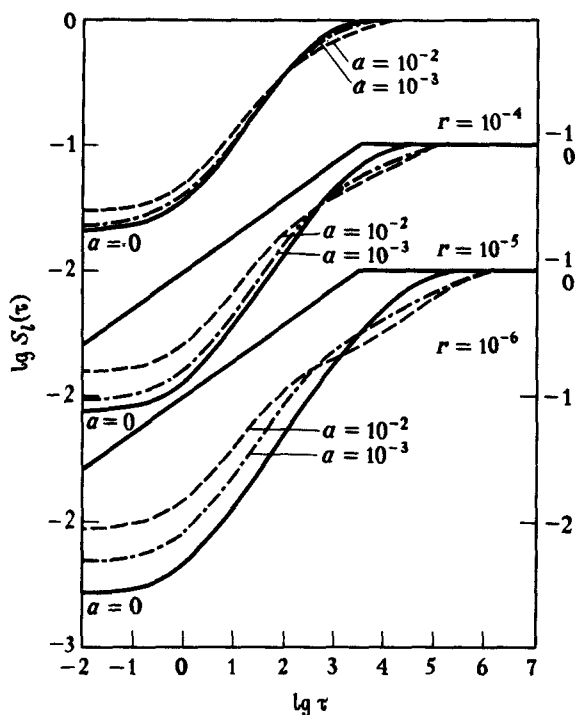


Рис. 11.6. Функции источников в линиях в полубесконечной атмосфере для двухуровневого атома с $\varepsilon = 10^{-6}$ при наличии поглощения в континууме с различными значениями r . Видны эффекты, обусловленные различиями в форме профиля. (По [315], с разрешения.)

ξ — тем самым учитываются фотоны, излучаемые в континууме.

В реальных звездных атмосферах влияние континуума, на фоне которого видны линии, на процесс образования линии и на термализацию фотонов обычно является сильным. У звезд ранних типов лишь для самых сильных линий значения r могут опускаться до 10^{-4} или 10^{-3} . Поэтому члены, описывающие влияние континуума, обычно оказываются преобладающими. С другой стороны, для линий H и K Ca II в спектре Солнца $r \approx 10^{-9}$, и поэтому для них термализация практически не зависит от того континуума, на который они налагаются.

ВЛИЯНИЕ ИЗМЕНЕНИЙ ПАРАМЕТРОВ ТЕРМАЛИЗАЦИИ И ПРОФИЛЯ ЛИНИИ С ГЛУБИНОЙ

В идеализированных задачах, рассматривавшихся до сих пор в этом разделе, для простоты предполагалось, что величины B , r , ε и

ϕ , не зависят от глубины. Между тем в реальных звездных атмосферах все они могут сильно изменяться с глубиной. Эти изменения могут, конечно, заметно влиять на процесс образования линий, на поведение функции источников и на получающиеся в результате профили линий. Если стремиться построить аккуратные модели реальных звездных спектров, эти усложнения должны учитываться. Для этого следует обратиться к прямым численным методам того типа, которые были описаны ранее. Однако понимания физической сути дела можно достичь из рассмотрения простых параметризаций изменения некоторых из упомянутых выше величин с оптической глубиной. Обсуждение чрезвычайно важных эффектов, вызываемых изменениями функции Планка с глубиной, мы отложим до § 11.3, где будет описано образование линий при наличии хромосферной инверсии температуры. Изменения параметра r могут быть существенны, но описать их в нескольких словах нелегко; дальнейшее обсуждение см. в [18], гл. 3. Мы же сосредоточим наше внимание на эффектах, вызываемых изменением с глубиной величин ε и ϕ_ν .

Параметр ударного девозбуждения ε пропорционален электронной концентрации и поэтому должен отражать рост плотности с глубиной в атмосфере. Если считать атмосферу почти изотермической, то из условия гидростатического равновесия следует, что полная плотность будет возрастать линейно с массой m , находящейся в столбе единичного сечения над данным уровнем. Если, кроме того, предположить, что χ/ρ практически постоянно, то τ также будет пропорционально m . Тогда для звезды раннего типа, у которой вещество заметно ионизовано, следует ожидать, что n_e будет пропорционально τ . У звезд более поздних типов вещество в наружных слоях может быть нейтральным, а затем на некоторой глубине испытывает резкую ионизацию. В этом случае может происходить гораздо более крутой рост n_e (и ε). Хотя при переменном ε для точного определения $S_\lambda(\tau)$ необходимо численное решение, из физических соображений разумно ожидать, что термализация будет по-прежнему происходить на такой глубине Λ , где $P_e(\Lambda) \approx P_d(\Lambda)$. Чтобы проиллюстрировать плодотворность этой идеи, предположим, что в атмосфере с постоянными r , B и ϕ на какой-то конкретной глубине τ_0 происходит быстрое увеличение ε от значения ε_1 до большего значения ε_2 . Тогда если $\tau_0 > 1/\varepsilon$ (для доплеровского профиля), то ясно, что линия уже успела термализоваться и поэтому рост ε не дает эффекта. В этом случае $S_\lambda(0)$ будет равно $\varepsilon_1^{1/4} B$. Предположим теперь, наоборот, что $\tau_0 < 1/\varepsilon_2$. В этом случае из-за

малости величины ε на поверхности термализация функции источников в линии должна была бы произойти на глубине $1/\varepsilon_1$. Но на этой глубине ε уже равно $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Поэтому линия будет вести себя так, как если бы ε было постоянным и равным $\varepsilon \equiv \varepsilon_2$, так что $S_l(0)$ будет равно $\varepsilon_2^{1/2} B$. Эти качественные ожидания подтверждаются детальными расчетами [284], стр. 101, типа тех, результаты которых показаны на рис. 11.7; здесь предполагается, что ε имеет вид

$$\varepsilon(\tau) = 10^{-3} [1 - 0,99 \exp(-\tau/\tau_0)].$$

Обратите внимание, что, когда $\tau_0 > 10^5$, S_l ведет себя как если бы $\varepsilon = 10^{-5}$; если же $\tau_0 \leq 10^2$, S_l изменяется так, как будто бы $\varepsilon = 10^{-3}$.

Изменение формы профиля поглощения влияет на процесс пере-

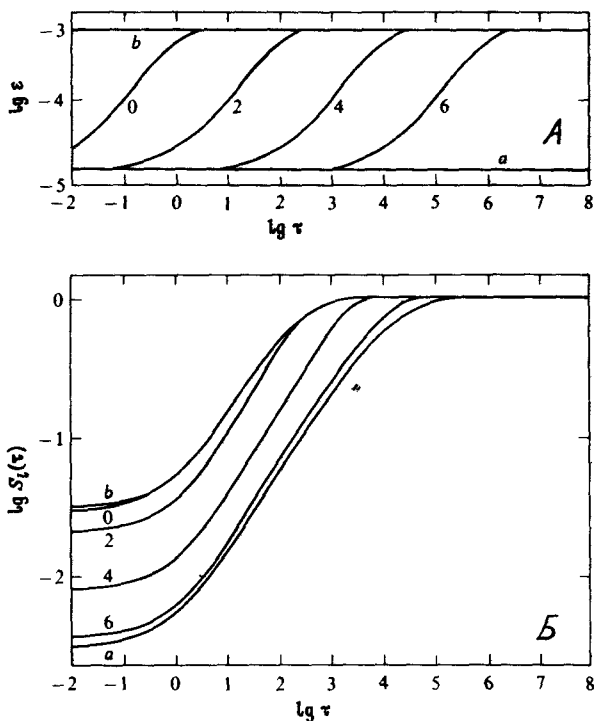


Рис. 11.7. А — изменение ε с глубиной вида $\varepsilon(\tau) = 10^{-3} [1 - 0,99 \exp(-\tau/\tau_0)]$; числа у кривых — значения $\lg \tau_0$. Б — функция источников в линии в полубесконечной атмосфере при $B = 1$, чисто доплеровском профиле и $\varepsilon(\tau)$, показанном на рис. 11.7, А. Кривые а и б соответствуют постоянным значениям ε , равным 10^{-5} и 10^{-3} соответственно. (По [284], стр. 101.)

качки фотонов в крылья линии и на вероятность их выхода. Исследования, основанные на применении численных методов [320]; [18], стр. 51, выявили ряд интересных эффектов, посредством которых изменения профиля с глубиной влияют на функцию источников в линии. Предположим, например, что в атмосфере с $B = \text{const}$ доплеровская ширина резко возрастает вблизи поверхности (см. рис. 11.8). Тогда оказывается, что значение S_l на границе заметно увеличено, так как более широкие крылья линии могут теперь перехва-

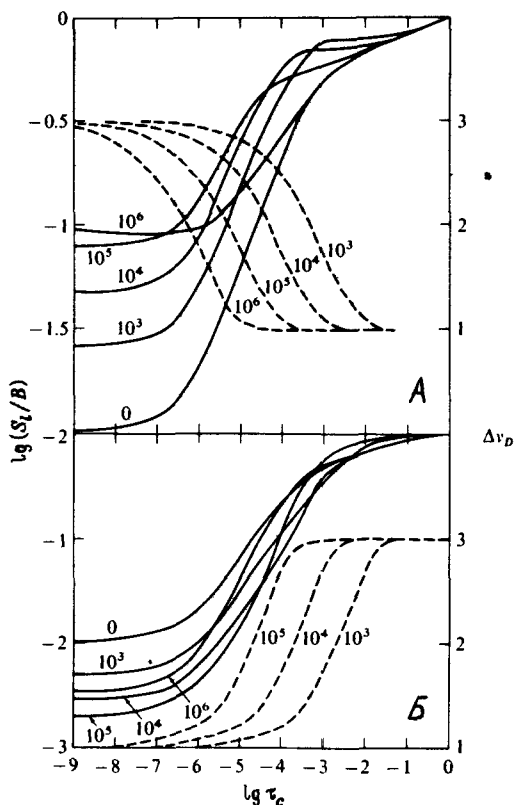


Рис. 11.8. Функции источников в линии в полубесконечной атмосфере при $B = 1$ для линии с изменяющейся с глубиной доплеровской шириной и $\varepsilon = 10^{-4}$, $r = 10^{-6}$, $a = 10^{-3}$. А — доплеровская ширина, возрастающая к границе: $\Delta\nu_D(\tau) = 1 + 2\exp(-\alpha\tau_c)$; Б — доплеровская ширина, убывающая к границе: $\Delta\nu_D = 3 - 2\exp(-\alpha\tau_c)$. Числа у кривых — значения параметра α . Кривые, около которых стоит 0, соответствуют постоянной доплеровской ширине. Ординаты: шкала слева и сплошные кривые дают $\lg(S_l/B)$; шкала справа и пунктирные кривые дают $\Delta\nu_D$. (По [18], стр. 52, с разрешения.)

тивать излучение, идущее из более глубоких слоев. По мере того как место, где $\Delta\nu_D$ увеличивается, перемещается глубже в атмосферу, этот поверхностный эффект уменьшается главным образом потому, что поверхностный слой становится все более непрозрачным в крыльях, и интенсивное излучение континуума, на который накладывается линия, все более ослабляется. Одновременно на больших глубинах функция источников также возрастает главным образом потому, что большая непрозрачность в крыльях линии в поверхностном слое подавляет выход излучения из нижележащих слоев. Этот эффект иногда называют *отражательным эффектом*. Он тем больше, чем толще верхний слой (конечно, это верно лишь до тех пор, пока слой, где $\Delta\nu_D$ возрастает, не окажется ниже того уровня, на котором поле излучения термализуется). Обратите внимание на то, что на рис. 11.8, а при $\alpha = 10^6$ верхний слой оптически тонок и поэтому отражательного эффекта практически нет; в то же время возрастание значений функции источников у границы здесь наибольшее.

Когда доплеровская ширина резко убывает близ поверхности, значение $S_l(0)$ падает, так как более узкий профиль поглощения уже не перехватывает яркое излучение, идущее в крыльях. Излучение оказывается менее запертым и в глубоких слоях. Поэтому S_l убывает и там. Однако на очень больших глубинах эффект оказывается обратным, и S_l даже слегка возрастает по сравнению со своим значением при постоянно $\Delta\nu_D$, так как здесь уменьшение ширины спектральной полосы, охватываемой линией, ведет к уменьшению вероятности выхода.

Следует также отметить, что вариации профиля поглощения с глубиной изменяют не только $S_l(\tau)$, но и связь между оптической глубиной на данной частоте и геометрической глубиной. Если вспомнить соотношение Эддингтона — Барбье, то становится ясно, что это должно приводить к изменению отображения, переводящего S_l в $I_\nu(0)$, а значит, и к изменению распределения интенсивности выходящего излучения по профилю линии и к изменению вариаций этого распределения при переходе от центра к краю (см., например, [26]).

11.3. Двухуровневый атом с континуумом

ФУНКЦИЯ ИСТОЧНИКОВ

Обсуждение, проведенное в предыдущих разделах этой главы, основано на весьма схематичной и, конечно же, ограниченной моде-

ли атома. Естественно, что для любого реального атома действительное положение является более сложным. Чтобы учесть некоторые из физически существенных эффектов, сохранив в то же время простоту анализа, рассмотрим теперь модель атома, имеющего два связанных состояния и континуум. Эта модель, по крайней мере грубо, представляет действительное положение дел для резонансных, а также для субординатных линий (в том случае, когда для резонансных линий имеется детальный радиационный баланс). Добавление континуума значительно увеличивает число процессов, которые могут происходить. Для строго двухуровневого атома (без континуума. — *Ред.*) единственными возможными процессами являются фотовозбуждения и ударные возбуждения с нижнего уровня на верхний и обратные им процессы. При наличии континуума имеются, кроме того, фотоионизации и ударные ионизации из связанных состояний, а также фоторекомбинации и ударные тройные рекомбинации на каждый из связанных уровней. Ясно, что это гораздо более общая модель, и мы убедимся, что учет дополнительных физических обстоятельств имеет важные последствия для процесса образования линий.

Как и ранее, примем полное перераспределение, так что S_l дается формулой (11.4). Уравнения статистического равновесия соответственно для нижнего и верхнего уровней имеют теперь вид

$$n_l(B_{lu} \int \phi_\nu J_\nu d\nu + C_{lu} + R_{lk} + C_{lk}) = n_u(A_{ul} + B_{ul} \int \phi_\nu J_\nu d\nu + C_{ul}) + n_l^*(R_{kl} + C_{lk}), \quad (11.54)$$

$$n_u(A_{ul} + B_{ul} \int \phi_\nu J_\nu d\nu + C_{ul} + R_{uk} + C_{uk}) = n_l(B_{lu} \int \phi_\nu J_\nu d\nu + C_{lu}) + n_u^*(R_{ku} + C_{uk}). \quad (11.55)$$

Члены, описывающие фотоионизации и рекомбинации, даются выражениями (5.66) и (5.67). Разрешая уравнения (11.54) и (11.55) относительно n_l/n_u , подставляя результат в формулу (11.4) и пользуясь соотношениями Эйнштейна, получаем

$$S_l = [\int \phi_\nu J_\nu d\nu + \varepsilon_\nu B_\nu(T) + \theta]/(1 + \varepsilon + \eta), \quad (11.56)$$

где ε дается формулой (11.7),

$$\eta = \frac{(R_{uk} + C_{uk})n_l^*(R_{kl} + C_{lk}) - g_l(R_{lk} + C_{lk})n_u^*(R_{ku} + C_{uk})/g_u}{A_{ul}[n_l^*(R_{kl} + C_{lk}) + n_u^*(R_{ku} + C_{uk})]} \quad (11.57)$$

$$\theta = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{g_l}{g_u A_{ul}} \frac{(R_{lk} + C_{lk})n_u^*(R_{ku} + C_{uk})}{[n_l^*(R_{kl} + C_{lk}) + n_u^*(R_{ku} + C_{uk})]}. \quad (11.58)$$

Формула (11.56) была впервые выведена Томасом [622], который обобщил ранние результаты Милна [416], стр. 159 — 164, и Стрем-грена [613]. Эта формула была тщательно проанализирована в важной серии статей Джеффриса и Томаса [335], [336], [623], [337].

Упражнение 11.8. Дать подробный вывод формул (11.56) — (11.58):

Несмотря на кажущуюся сложность этих выражений, каждый член допускает простую интерпретацию. Рассмотрим числитель выражения (11.56). Первый член и здесь описывает вклад рассеяния. Второй член — это тепловой источник. Он определяется тем темпом, с которым фотоны создаются за счет ударного возбуждения. Отметим, что этот член зависит от локального значения *электронной кинетической температуры* T_e . Третий член пропорционален полному темпу, с которым электроны переходят из основного состояния в континуум, вызывая ионизацию, умноженному на ту их долю, которая рекомбинирует на верхний уровень. В последнем случае энергия электронов может перейти в излучение при радиативном переходе в основное состояние. Аналогично в знаменателе второй член учитывает фотоны, гибнущие за счет ударного девозбуждения верхнего уровня. Третий член — это новый член, описывающий отток фотонов. Он пропорционален полному темпу ионизации с верхнего уровня, умноженному на долю рекомбинаций на нижний уровень. Очевидно, что этот член учитывает гибель потенциальных фотонов линии за счет взаимодействия с континуумом. Таким образом, мы видим, что все основные физические процессы, характерные для этой модели, четко представлены в выражении для функции источников.

Картина становится еще яснее, если θ переписать в виде ηB^* . Оказывается, что

$$B^* = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left\{ \frac{n_u^* g_u}{n_l^* g_l} \left[\frac{(R_{uk} + C_{uk})(R_{kl} + C_{lk})}{(R_{lk} + C_{lk})(R_{ku} + C_{uk})} - 1 \right] \right\}^{-1}. \quad (11.59)$$

Упражнение 11.9. Убедиться в справедливости формулы (11.59).

Ясно, что B^* формально напоминает функцию Планка. Действительно, ее можно представить в виде $B^* = B_\nu(T_r)$, где T_r — некоторая характерная *температура излучения*, значение которой определяется скоростями протекания процессов фотоионизации и рекомбинации в двух связанно-свободных континуумах. Эта

температура излучения может, вообще говоря, быть совершенно отличной от T_e . На больших глубинах в атмосфере, где континуумы оптически толстые, $J_\nu \rightarrow B_\nu(T_e)$. Тогда $R_{lk} \rightarrow R_{lk}^* = R_{kl}^*$ и $R_{uk} \rightarrow R_{uk}^* = R_{ku}^*$, так что, как и следовало ожидать, $B^* \rightarrow B_\nu(T_e)$, а $S_l \rightarrow B_\nu(T_e)$. Однако вблизи границы континуумы могут уже стать прозрачными (хотя линия и остается еще оптически толстой). Темп радиативных переходов в континууме становится тогда практически постоянным. В зависимости от того, каково соотношение между температурой излучения (характеризующей среднюю интенсивность J , того излучения, которое выходит с $\tau_c \approx 1$) и локальной электронной температурой, возникают совершенно различные ситуации. Например, предположим, что столкновениями можно пренебречь и что $R_{lk} > R_{kl}$, а $R_{ku} > R_{uk}$ (т.е. примем, что сравнительно холодная среда освещается «горячим» излучением в континууме, связанном с основным состоянием). Тогда ясно, что $B^* > B_\nu(T_e)$ и что S_l будет больше того значения, которое она имела бы за счет взаимодействия с тепловым резервуаром. Избыточное излучение появляется из-за преимущественного опустошения нижнего состояния за счет переходов на верхний уровень через континуум, за которыми следуют переходы вниз с излучением в линии. Если линия является абсорбционной, возрастание S_l стремится *ослабить* ее. Крайним предельным случаем этого является тот механизм, который порождает фотоионизационно-рекомбинационно-каскадный эмиссионный спектр туманностей. Если считать, что вместо указанных выше выполняются противоположные неравенства, то будет происходить селективное опустошение верхнего уровня с заселением нижнего и S_l убывает. Если линия абсорбционная, то она будет *усиливаться*.

Два существенных момента, которые выяснились в результате проведенного выше анализа, состоят в следующем. а) Функция источников для некоторой данной линии содержит члены, учитывающие другие переходы (в настоящей модели они обусловлены двумя континуумами). Этот результат имеет самый общий характер и переносится на многоуровневый случай (см. § 12.1). б) Добавившиеся члены, в отличие от столкновительных членов, описывают связь S_l не с локальным тепловым ансамблем, характеризуемым значением T_e , а с полем излучения. Последнее описывается некоторой температурой излучения и может быть заметно горячее или холоднее теплового ансамбля, характеризуемого локальной кинетической температурой.

КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНИЙ

Различные входящие в функцию источников члены, описывающие приток и отток фотонов в линии, имеют совершенно разную природу. Учитывая это, можно ожидать, что в зависимости от того, какие члены дают основной вклад в S_l , решение задачи о переносе излучения в линии будет иметь существенно разные характеристики. Томас [622], [626], стр. 174, предложил некоторую классификацию линий, разбив их на широкие классы на основе того, какие члены (в выражении для функции источников в линии. — *Ред.*) для тех или иных атомов в типичных для звездных атмосфер условиях являются наибольшими. Например, если $\varepsilon > \eta$ и $\varepsilon B_\nu > \eta B^*$, говорят, что линия *контролируется столкновениями*. Здесь S_l определяется взаимодействием с электронным газом (T_e). С другой стороны, если $\eta > \varepsilon$ и $\eta B^* > \varepsilon B$, линию называют *контролируемой фотоионизацией*. Особенности такой линии определяются взаимодействием с полем излучения с некоторой характерной $T_\nu \neq T_e$. В промежуточных случаях, когда, скажем, $\varepsilon > \eta$, но $\eta B^* > \varepsilon B$ или наоборот, говорят о линии *смешанного контроля*. Введение этой классификации линий представляло значительный шаг вперед по сравнению с довольно неопределенным классическим подразделением линий на образующиеся либо «за счет рассеяния», либо «за счет истинного поглощения». Оно привело к существенному продвижению в понимании процесса образования линий. В частности, когда в наружных слоях атмосферы имеется рост температуры, обусловленный хромосферой, профили линий этих классов на выходе из атмосферы оказываются совершенно разными.

Тип, к которому принадлежит та или иная конкретная линия, зависит (через посредство фигурирующих в определении типа линии сечений) от структуры порождающего ее иона и от структуры атмосферы (из-за зависимости скоростей переходов от таких параметров атмосферы, как температура, плотность и интенсивность падающего на нее излучения). Различные линии одного и того же иона, вообще говоря, будут попадать в разные классы, и дать всеобъемлющую априорную классификацию линий невозможно. Каждый отдельный случай следует рассматривать индивидуально. Для атмосфер солнечного типа Томасом была предложена грубая классификация линий. Она приведена в табл. 11.2. Качественно ее можно понять следующим образом. Резонансные линии однократно ионизованных металлов контролируются столкновениями потому, что энергия их возбуждения составляет всего несколько электрон-вольт (для сравнения укажем, что тепловая энергия составляет око-

ТАБЛИЦА 11.2

Классификация функций источников в линиях для
атмосфер солнечного типа (по [623]; [626], стр. 174)

Контролируемые столкновениями	Контролируемые фотоионизацией
Резонансные линии однократно ионизованных металлов (Mg^+ , Ca^+ , Sr^+ и т.д.)	Резонансные линии нейтральных металлов
Резонансные линии H и других неметаллов (C, N, O и т.д.)	Бальмеровские линии водорода

ло $0,5 + 1$ эВ), тогда как энергии ионизации равны $11 + 15$ эВ. Если вспомнить, что число ударных возбуждений и число фотоионизаций пропорциональны $\exp(-E_0/kT)$, то преобладание столкновений становится правдоподобным. Даже у водорода, где E_0 для L_α равно 10 эВ, ударные переходы преобладают, так как солнечное УФ-излучение слабо, и темп фотоионизации мал. В противоположность этому для бальмеровских линий водорода и линий нейтральных металлов пределы соответствующих фотоионизационных континуумов лежат в областях, где интенсивность солнечного излучения велика и фотоионизации преобладают над столкновениями. Д-линии натрия являются исключением из-за необычно большого сечения столкновений [284], стр. 333; [284], стр. 347. Этот пример может служить предупреждением, напоминающим о том, что указанные широкие классы линий — лишь некоторая схема, а в каждом конкретном случае требуется детальный анализ. При более высоких температурах (например, для O-звезд) некоторые из только что сделанных замечаний перестают быть верными, и класс, к которому принадлежат линии, меняется. Например, интенсивность излучения в лаймановском континууме становится очень большой (водород почти полностью ионизован), и лаймановские линии водорода переходят в класс линий, контролируемых фотоионизацией. Субординатные линии высших серий имеют в этом случае энергии $E_0 \leq kT$ (~ 3 эВ при температуре O-звезд) и относительно слабы, а потому формируются в более глубоких и более плотных слоях. Тем самым имеется тенденция к установлению у линий субординатных серий ударного типа контроля.

ОБРАЗОВАНИЕ ЛИНИЙ ПРИ НАЛИЧИИ ХРОМОСФЕРЫ

Большое физическое значение подразделения линий на два описанных выше широких класса проявляется со всей очевидностью при рассмотрении профилей линий и характера изменения функции источников с глубиной в атмосфере с хромосферной температурной инверсией в наружных слоях. Главным моментом здесь является то, что линии, контролируемые столкновениями, связаны с *локальной электронной кинетической температурой*, линии же, контролируемые фотоионизацией, с ней не связаны. Эти последние реагируют на *температуру излучения*, характеризующую распределение энергии (излучаемой в некоторой другой точке атмосферы) в континуумах, порождаемых верхним и нижним уровнями. Поэтому следует ожидать, что линии, контролируемые столкновениями, будут хотя бы отчасти реагировать на локальную температуру. Их профили будут иметь детали, порождаемые ростом температуры в наружных слоях. С другой стороны, профили линий, контролируемых фотоионизациями, как можно ожидать, будут нечувствительны к ходу изменения локальных параметров (в частности, к изменениям T_e). Четкое разделение поведения линий на два только что описанных типа было ясно продемонстрировано в пионерской работе Джеффриса и Томаса [336]. Они показали, что эти соображения объясняют тот наблюдательный факт, что у таких линий, как H и K Ca^+ (и у аналогичных линий Mg^+), эмиссия в ядре есть, в то время как у бальмеровских линий водорода ее нет.

В своей работе Джеффрис и Томас использовали схематическую функцию источников в континууме вида

$$S_c(\tau) = B_\nu(T_e) = S_1(1 + \alpha\tau_c + \beta e^{-\gamma\tau_c}), \quad (11.60)$$

приближенно представляющую распределение температуры, которое имеет а) постоянный градиент в фотосфере, б) плато при минимальной температуре на некоторой характерной глубине (они брали $T_{\min} \approx 4000$ К при $\tau_c \approx 10^{-2}$) и после этого в) крутой температурный градиент другого знака, воспроизводящий резкий рост температуры в хромосфере. Уравнение переноса бралось в приближении Эддингтона:

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 J_\nu}{d\tau^2} = (\phi_\nu + r)^2 [J_\nu - (\phi_\nu + r)^{-1} (rS_c + \phi_\nu S_l)] \quad (11.61)$$

и решалось методом дискретных ординат для случая доплеровского профиля при типичных значениях r , ε , η и B^* .

Результаты расчетов для линии, контролируемой столкновения-

ми ($\eta = 0$) и имеющей $\varepsilon = 10^{-4}$, $r = 10^{-4}$, при различных вариантах выбора функции источников в континууме показаны на рис. 11.9. Обратите внимание, что на больших глубинах S_i термализуется, становясь равной S_c , но, когда крылья начинают делаться прозрачными ($\tau_c \lesssim 1$), S_i оказывается меньше S_c . При дальнейшем продвижении наружу S_c очень круто возрастает при $\tau \approx 10^{-2}$. Функция источников в линии из-за влияния ударного взаимодействия стремится следовать за этим подъемом и в самом деле возрастает наружу, но в конце концов рассеяния берут верх и на границе S_i оказывается на три порядка меньше $B_\nu(T_c)$. Из соотношения Эддингтона — Барбье следует, что изменение $S_i(\tau)$ с глубиной должно находить отражение в изменении интенсивности выходящего излучения с частотой. Рассчитанная интенсивность выходящего излучения изображена на рис. 11.10. Показана только половина профиля (он симметричен относительно центра линии). Обратите внимание, что у линии имеется эмиссионный пик примерно на расстоянии $\pm 1,5 \Delta\nu_D$ от центра и темное центральное самообращение. Линии такого вида называют *дважды обращенными*. Общий ход изменения интенсивности в пределах линии находится в хорошем качественном согласии с поведением, наблюдаемым у солнечных линий H и K Ca II и у соответствующих линий Mg II. В литературе

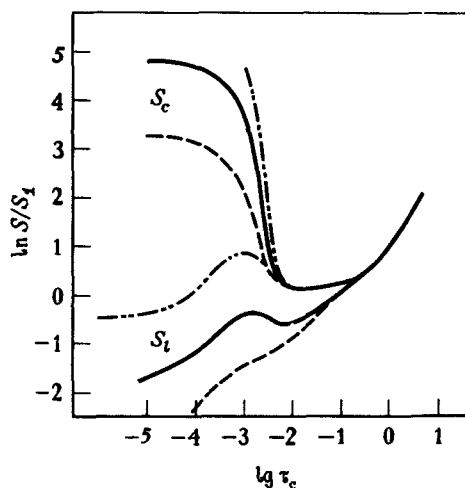


Рис. 11.9. Функция источников в линии, контролируемой столкновениями, в полубесконечной атмосфере с хромосферной инверсией температуры. Верхние кривые — функции источников в континууме S_c , нижние — соответствующие функции источников в линии S_l . Во всех случаях $\varepsilon = 10^{-4}$ и $r = 10^{-4}$. (По [336], с разрешения.)

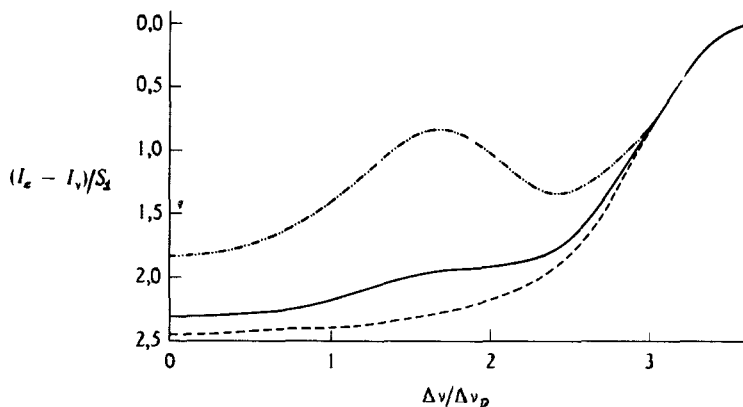


Рис. 11.10. Профили линии, контролируемой столкновениями, в полубесконечной атмосфере с хромосферной инверсией температуры. Обозначения кривых соответствуют принятым на рис. 11.9. (По [336], с разрешения.)

можно найти большое число других расчетов, произведенных с учетом роста температуры в хромосфере, которые выполнены при ином выборе ε , a , r , ϕ_v (иногда принимаются во внимание и их изменения с глубиной) и других параметризациях $B_v(\tau)$ (см., например, [284], стр. 101; [26]; [27]; [18], стр. 45 — 48). Все они приводят к линиям того же общего характера, что и показанные на рис. 11.10, а некоторые дают даже полуколичественное согласие с солнечными данными. Если же решить многоуровневую задачу, исходя при этом из реалистичных моделей атмосферы и иона Ca^+ (см. § 12.1), то получается превосходное количественное согласие с наблюдениями.

Поведение линий, контролируемых фотоионизацией, при принятии той же функции Планка резко отличается от поведения линий, контролируемых столкновениями. Результаты для линии с $\varepsilon = 0$, $\eta = 10^{-2}$ и $r = 10^{-4}$ показаны на рис. 11.11. На очень больших глубинах $S_l \rightarrow S_c$, т.е. линия термализуется с континуумом. При перемещении наружу S_l остается постоянной, причем ее значение определяется величиной B^* . На оптической глубине в линии порядка $1/\eta$ у функции S_l начинается быстрый спад к границе, характерный для рассеяния. Она убывает до значения, равного $\eta^{1/2} B^*$. Функция источников совершенно не реагирует на то, как изменяется $B_v(T_e)$. Отметим, что при перемещении наружу S_l сначала имеет значения, превосходящие S_c (поскольку B^* имеет температуру излучения, устанавливающуюся в континуумах в более глубоких и пото-

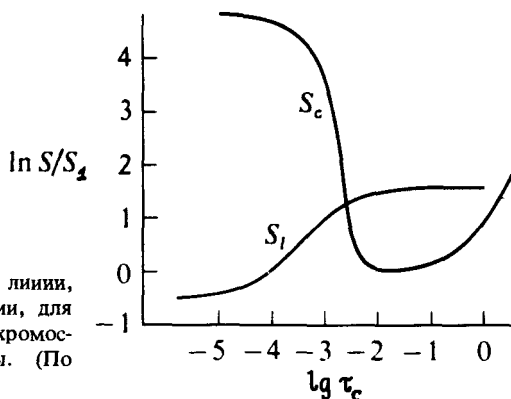


Рис. 11.11. Функция источников в линии, контролируемой фотоионизациями, для полубесконечной атмосферы с хромосферной инверсной температуры. (По [336], с разрешения.)

му более горячих слоях), а затем, близ поверхности, ее значения меньше S_c (здесь S_c быстро возрастает до своего хромосферного значения). Профиль линии представляет собой чисто абсорбционное образование, без всякого намека на эмиссионное обращение в центре. В точности такая картина и наблюдается для бальмеровских линий. Более того, ход изменения S_l хорошо коррелирует с ходом эмпирической функции источников, полученным Атеем и Томасом [29].

Осознание того факта, что линии CaII H и K имеют функции источников, которые отчасти связаны с изменением локальной функции Планка, привело и к пониманию того, что эмиссионные детали, часто наблюдающиеся в ядрах этих линий в звездных спектрах, содержат важные сведения о распределении температуры в хромосферах звезд. При соответствующем анализе эти линии могут служить уникальным диагностическим средством для определения физической структуры наружных слоев звезд солнечного типа. Известно, что интенсивность эмиссии коррелирует с возрастом звезды [675], [677]. Это открывает возможность того, что точная хромосферная диагностика в сочетании с надежной теорией звездной эволюции позволяет сделать заключения об эволюции солнечной хромосферы. Один из самых удивительных эмпирических результатов, относящихся к хромосферной эмиссии в линиях H и K CaII, известен как эффект Вилсона — Бампу [676] и состоит в том, что ширина эмиссионных компонент по половинной интенсивности тесно коррелирует со светимостью звезды (эта корреляция имеет место на интервале изменения L в 10^6 раз). Для объяснения этого факта было высказано несколько идей, но, как это уже давно подчеркивали Джеффрис и Томас [337], объяснение этого явления должно ос-

новываться на правильной физической картине образования линий. Их исследование, как и более поздние, позволило выяснить зависимость интенсивности и ширины эмиссии от вида $T_e(\tau)$ (от величины и от глубины местоположения подъема температуры) и от вида функций ε , r и ϕ_r .

Полезные сведения об основных свойствах хромосферных эмиссионных линий можно извлечь из приближенных соотношений подобия [24], [18], стр. 46, типа тех, которые приведены в табл. 11.3. Они позволяют оценить функцию источников на границе хромосферного слоя $S_i(0)$ и ее максимальное значение в нем $S_i(\max)$ в случае, когда изменение функции Планка дается формулой (11.60) с $S_1 = 1$. Эти соотношения справедливы в предположении, что доплеровская ширина не зависит от глубины. Изменения доплеровской ширины с глубиной несколько изменяют результаты [24]. Важнее, однако, то, что они сильно влияют на профиль линии, образующейся *при заданном* $S_i(\tau)$. Параметрами, описывающими ход изменения $B_\nu(T)$, являются амплитуда возрастания этой функции (предполагается, что $\beta \gg 1$) и γ — оптическая глубина в континууме, на которой происходит этот крутой рост B_ν [соответствующая глубина в линии равна $(\gamma r)^{-1}$]. Если $(\gamma r)^{-1} \ll \Lambda$ (т.е. много меньше глу-

ТАБЛИЦА 11.3

Критерии подобия для функции источников в линии
для хромосфер конечной толщины (по [18], стр. 46, с разрешения)

Толщина хромосферы	Доплеровский профиль ($a < \varepsilon$)		Фойгтовский профиль ($\varepsilon < a < 1$)	
	$S_i(0)$	$S_i(\max)$	$S_i(0)$	$S_i(\max)$
Оптически тонкая $(\gamma r)^{-1} < 1$	$\xi \beta$	$\xi \beta$	$\xi \beta$	$\xi \beta$
Эффективно тонкая $1 < (\gamma r)^{-1} < \Lambda$	$\xi \beta (\gamma r)^{-1/2}$	$\xi \beta (\gamma r)^{-1}$	$\xi \beta (\gamma r a)^{-1/4}$	$\xi \beta (\gamma r a)^{-1/2}$
Эффективно толстая $\Lambda < (\gamma r)^{-1}$	$\xi^{1/2} \beta$	β	$\xi^{1/2} \beta$	β

бины термализации), то S_i будет слабо реагировать на хромосферный подъем температуры. Однако, если неравенство обратное, будет иметь место сильный эффект. Если слой является *эффективно толстым* [т.е. $(\gamma r)^{-1} > \Lambda$, где $\Lambda = \xi^{-1}$ или $a\xi^{-2}$ для доплеровского и фойгтовского профилей соответственно, где ξ — полная вероятность гибели, даваемая формулой (11.50)], то S_i в глубоких слоях достигает насыщения, приближаясь к β , и убывает к границе в $\xi^{1/2}$ раз. Если слой *оптически тонкий*, то S_i практически равна члену, описывающему локальное рождение фотоионов. Если слой *эффективно тонкий*, максимальное значение S_i дается выражениями (11.40) с $T = (\gamma r)^{-1}$. Отметим, что результат, приведенный для фойгтовского профиля, справедлив при $a(\gamma r)^{-1} > 1$. Если a настолько мало, что это не так, крылья линии играют пренебрежимо малую роль и при фойгтовском профиле становятся применимыми результаты, относящиеся к доплеровскому профилю. Значение S_i на границе можно получить из того соображения, что если $S_{\max} \propto \xi \beta \langle N \rangle$, где $\langle N \rangle$ — среднее число рассеяний до выхода из среды, то соображения, основанные на рассмотрении случайных блужданий, заставляют ожидать, что $S_i(0) \propto \xi \beta \langle N \rangle^{1/2}$. Отметим, что результаты, относящиеся к случаю эффективно тонкого слоя, при $(\gamma r)^{-1} = \Lambda$ непрерывным образом переходят в результаты для эффективно толстого слоя и в результаты для оптически тонкого слоя, когда $(\gamma r)^{-1} = 1$.

Из результатов, приведенных в табл. 11.3, следует, что при заданной структуре хромосферы некоторые линии, контролируемые столкновениями, будут сильно реагировать на подъем температуры у границы, другие же могут не реагировать, в зависимости от того, какие значения ε , r и a им соответствуют. Например, для линий CaII в солнечной хромосфере имеем (только по порядку величины!): $a \sim 10^{-3}$, $r \sim 10^{-9}$, $\varepsilon \sim 3 \cdot 10^{-4}$ и $\gamma \sim 10^6$. Поэтому $\Lambda \sim 10^4$, а $(\gamma r) \sim 10^{-3}$, так что линии являются эффективно тонкими. Далее, $a(\gamma r)^{-1} \sim 1$, так что $(S_{\max}/\beta) \sim \varepsilon(\gamma r a)^{-1/2} \sim 0,3$, и поэтому чувствительность линий CaII к подъему температуры сравнительно невелика. В противоположность этому для резонансных линий MgII r примерно в 10 раз меньше (поскольку содержание Mg примерно в 10 раз выше, чем Ca), а остальные параметры примерно те же. В этом случае должна иметь место гораздо большая чувствительность к подъему температуры и гораздо более яркая эмиссия, что и наблюдается. Нужно отметить, что проведенное здесь рассмотрение следует считать лишь *качественным*, так как изменение параметров с глубиной на самом деле довольно сложно, и

они не везде хорошо представляются выбранными значениями. В частности, формула (11.60) не вполне удовлетворительно аппроксимирует истинный ход $B_\nu(r)$. Детальный анализ образования линий Ca II в звездных хромосферах был выполнен также с использованием реалистичных моделей атмосфер и иона Ca II [56], [58]. В результате начало складываться физически правдоподобное объяснение эффекта Вилсона — Баппу [57].

11.4. Неподвижные протяженные атмосферы

Как говорилось в § 7.6, многие звезды имеют протяженные атмосферы, толщина которых сравнима с радиусом звезды. Будем предполагать, что в первом приближении эти атмосферы сферически-симметричны. В излагаемом ниже обсуждении будет приниматься, что радиус звезды r_* — это радиус поверхности, на которой $\tau_R \approx 2/3$. Представим себе, что это «фотосферное ядро» окружено оболочкой большого размера, в которой единичная оптическая глубина в наиболее непрозрачных местах спектра (т.е. в центрах линий) достигается при радиусе $R \gg r_*$. На самом деле практически у всех звезд с протяженными атмосферами происходят также крупномасштабные движения вещества (обычно атмосфера как целое расширяется). Эти движения сильно влияют на перенос излучения в линиях (на самом деле именно они и определяют его). Поэтому предположение о *статичности* атмосферы физически менее оправданно при анализе образования линий, чем это было для континуума. Тем не менее существует ряд крайне важных эффектов, в основе своей геометрического характера, которые здесь проявляются. Их целесообразно изучить сейчас, отложив обсуждение эффектов, вызываемых движением вещества, до гл. 14.

Для удаленного наблюдателя *размер* излучающей поверхности, на которой $\tau_\nu = 1$ на частотах, для которых непрозрачность велика, в частности в ядрах спектральных линий, может быть гораздо больше, чем в континууме. Тогда линия эффективно *излучается с большей площади*, и если принять ЛТР и считать оболочку практически изотермической, то ясно, что линия на фоне континуума будет видна в эмиссии. Это радикально отличается от того, что имеет место для изотермической плоской атмосферы, где линии нет ни в эмиссии, ни в абсорбции. Фактически именно этот только что описанный геометрический эффект, имеющий фундаментальное значение, является основным механизмом, приводящим к появлению чрезвычайно интенсивных эмиссий в наблюдаемых сильно не-

прозрачных спектральных линиях, например в спектрах звезд Вольфа — Райе. Предположение о том, что атмосфера практически изотермична, неявно предполагает наличие какого-то механизма нерadiативного подвода энергии, поскольку в § 7.6 было показано, что при лучистом равновесии (и ЛТР) в протяженной атмосфере $J \sim B \sim r^{-2}$. Поэтому только что описанная ситуация, возможно, является слишком крайней (хотя серьезных физических причин отдавать предпочтение лучистому равновесию у нас нет — вспомните солнечную корону!). Кроме того, если в функцию источников в линии дает вклад рассеяние, следует ожидать, что $S_l(r)$ будет убывать наружу (в действительности падение функции источников к границе за счет влияния протяженности атмосферы усиливается; см. ниже). Однако ясно, что для любого заданного $S_l(r)$ изменение эффективной излучающей площади при переходе из ядра линии в крыло будет всегда стремиться усилить эмиссию в ядре относительно континуума по сравнению с той, которая была бы в плоской атмосфере. С увеличением размера атмосферы линии поглощения будут иметь тенденцию к ослаблению, яркость же эмиссионных линий будет стремиться расти.

Второй эффект, порождаемый протяженностью атмосферы, — это систематическое превышение вероятности выхода фотона с данной оптической глубины (отсчитываемой вдоль радиуса) над вероятностью выхода с той же глубины из плоской атмосферы. Из элементарных геометрических соображений очевидно, что оптическое расстояние от пробной точки до поверхности, отсчитанное вдоль любого луча, за исключением того, который имеет $\mu = +1$, в сферически-симметричной атмосфере будет *меньше*, чем в плоской, имеющей те же свойства (т.е. такой, что изменение физических переменных вдоль радиуса в ней то же самое, что и в сферической). Поэтому в силу формулы (11.22) $P_e(r)$ возрастает, и следует ожидать, что соответственно этому $S_l(r)$ уменьшится.

Третий эффект, который также ведет к увеличению эффективной вероятности выхода, состоит в *тенденции к систематическому смещению фотонов в ходе рассеяний в сторону больших расстояний от центра*. Предположим, что рассеяние изотропно, а вещество однородно, так что средняя длина пути фотона l во всех направлениях одна и та же. Рассмотрим сферический объем с центром в пробной точке и радиусом l . Тогда из геометрических соображений следует, что в сферической атмосфере *большая часть фотонов*, начинающих свой путь в центре этого сферического объема, оканчивает свой свободный полет при больших радиусах (а потому ближе к поверхности). В противоположность этому в плоской ат-

мосфере вероятности того, что фотон завершит свой полет на большей или на меньшей (на заданную величину) глубине, *равны*. Если непрозрачность вещества быстро убывает наружу, этот эффект резко усиливается (см. табл. 2 и рис. 2 в [374]). Такой отбор фотонов ведет к тому, что полная вероятность выхода фотона наружу увеличивается еще больше.

Уравнение переноса в задаче об образовании линии для модели

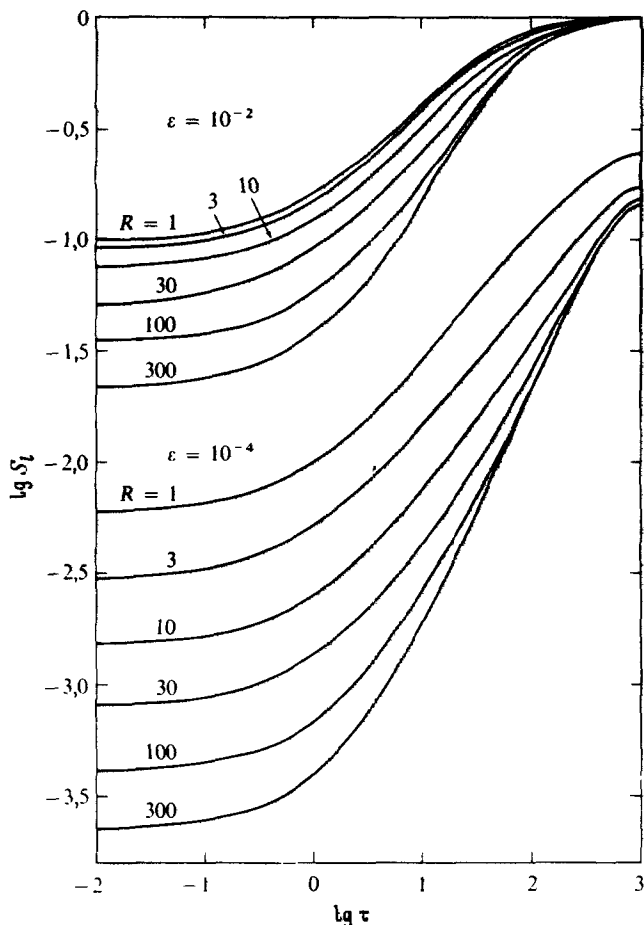


Рис. 11.12. Функции источников в сферической атмосфере с внешним радиусом R (в единицах r_c), $B = 1$, $\epsilon = \text{const}$, $T_c = 0$, $T_l = 10^3$ при коэффициенте поглощения $\chi_l \propto r^{-2}$. Числа у кривых — значения R . Приведены кривые для таких двух значений ϵ , которым соответствуют эффективно тонкая и эффективно толстая среды. (По [374], с разрешения.)

двухуровневого атома [т.е. когда S_i дается выражением вида (11.56)] при сферической геометрии легко решается методами, описанными в § 7.6 [см. формулы с (7.190) по (7.208) и относящиеся к ним обсуждение]. Расчеты для идеализированных моделей [374], подобных тем, которые использовались выше в этой главе, иллюстрируют описанные только что эффекты. Будем характеризовать атмосферу ее внешним радиусом R (в единицах радиуса ядра

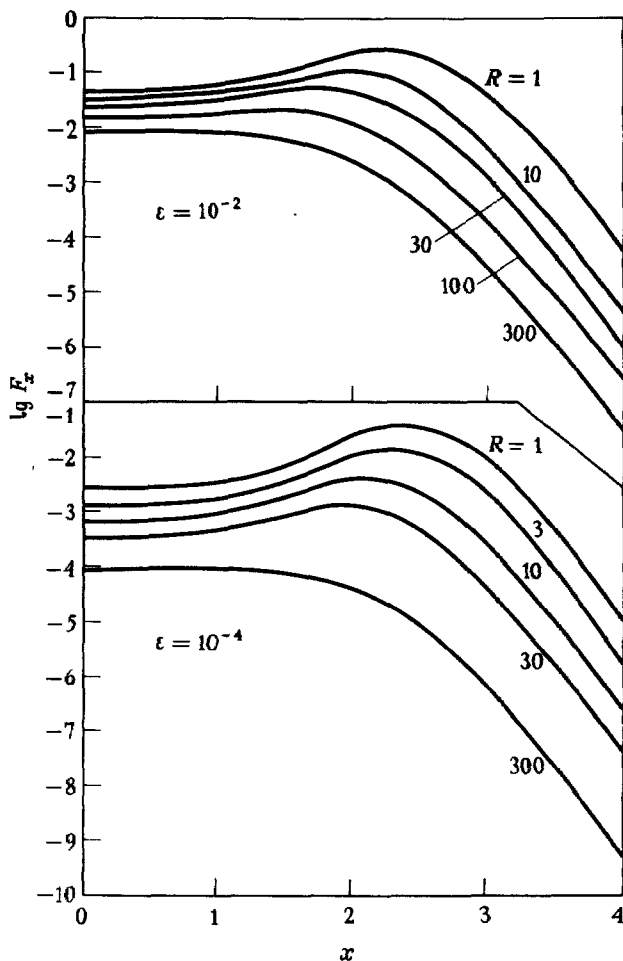


Рис. 11.13. Профили линии в потоке, создаваемом сферическими атмосферами с теми же значениями параметров, которые использованы на рис. 11.12. (По [374], с разрешения.)

r_c), полной оптической толщиной в линии T_l , оптической толщиной в континууме T_c и непрозрачностью $\chi_l \propto r^{-2}$ и $\chi_c \propto r^{-2}$. Полагаем $\varepsilon = \text{const}$ и $B = 1$. Функции источников для оболочки без поглощения и излучения в континууме, окружающей *полое* ядро (т.е. для туманности), показаны на рис. 11.12. Два использованных значения ε соответствуют эффективно толстой и эффективно тонкой средам. Четко видно большое влияние возросшей вероятности выхода фотона, приводящее к уменьшению S_l (по сравнению с плоским случаем. — *Ред.*). Отметим, что для эффективно тонкой среды сферичность почти не влияет на глубину термализации ($\Lambda \sim 10^2$). Профили линий при наблюдении выходящего потока для этих функций источников показаны на рис. 11.13. Из него видно, что центральное самообращение, в предельном случае плоской атмосферы резко выраженное (отметим, что шкала интенсивностей логарифмическая), для очень протяженных атмосфер исчезает. Это есть проявление увеличения площади, эффективно излучающей в ядре линии. Аналогичные результаты для атмосфер с $T_c = 2$ и $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$, а в остальном таких же, как и описанные выше, показаны на рис. 14.11 (функции источников; имеются в виду только кривые с $v_{\text{max}} = 0$) и

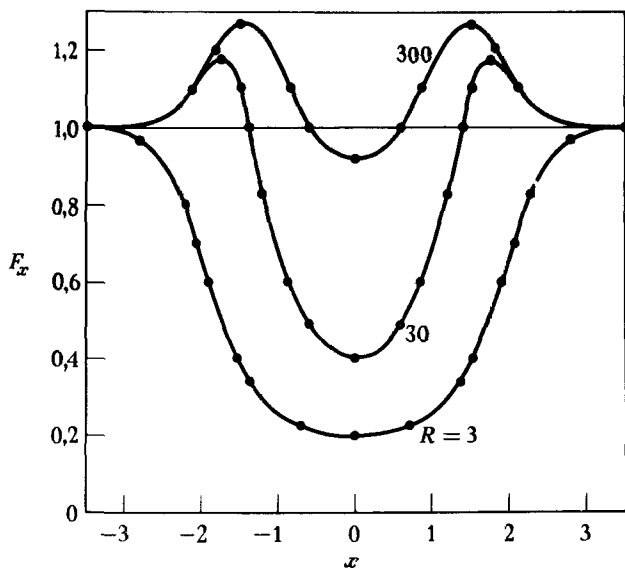


Рис. 11.14 Профили линии в потоке, создаваемом сферическими атмосферами с $B = 1$, $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$, $T_c = 2$, $T_l = 10^3$ и $\chi \propto r^{-2}$. Функции источников в этих атмосферах показаны на рис. 14.11

на рис. 11.14 (профили линий). И здесь функции источников из-за увеличенного выхода фотонов имеют гораздо меньшие (чем в плоском случае. — *Ред.*) значения, а профили линий из чисто абсорбционных постепенно превращаются в эмиссионные с обращением в центре (это обращение появляется только из-за того, что значения S_l при $\tau \approx 1$ очень сильно уменьшаются; если бы S_l оставалась той же самой, в эмиссию переходила бы вся линия).

ЗАМЕЧАНИЯ О ДИАГНОСТИКЕ В РАМКАХ ЛТР

Из изложенного в предыдущих разделах этой главы сложилась картина процесса образования линий, которая является физически гораздо более последовательной и сильно отличается от картины, основанной на предположении об ЛТР. Хорошего *количественного* согласия с наблюдениями можно добиться лишь ценой решения полной многоуровневой задачи. Тем не менее стоит с самого начала сказать в общих чертах о некоторых изменениях, к которым с неизбежностью приводит тот новый подход, который был обрисован выше. Имея это в виду, кратко опишем некоторые из существенных отличий двух методов анализа — постулирующего ЛТР и последовательно учитывающего отклонения от ЛТР, обратив особое внимание на то, как эти отличия сказываются на надежности диагностики физических условий в звездных атмосферах. Подробное обсуждение многих из этих вопросов можно найти в [626].

В теории образования линий при ЛТР функция источников однозначно определяется локальной электронной температурой T_e , а профиль линии отражает изменение функции Планка с глубиной с точностью до того разрешения, которое определяется диффузией фотонов в пределах одной длины свободного пробега. В противоположность этому в той теории, где ЛТР не постулируется, $S_l(\tau)$ уже более не связана столь непосредственно с $T_e(\tau)$, а определяется членом, описывающим рассеяние. Этот член — итог сложного взаимодействия между рождением фотонов, их выходом и гибелью за счет всех механизмов. Из этих механизмов лишь столкновения связывают акты рождения и гибели фотонов с локальным значением T_e . Другие механизмы притока фотонов в линию и оттока из нее (которые по своей эффективности могут далеко превосходить ударные) отражают взаимодействие с полями излучения в областях спектра, расположенных вне линии. До сих пор рассматривались только поля излучения в континууме. Однако, как будет установлено в гл. 12, в принципе должны учитываться и *все* линии, имеющиеся в составе совокупности переходов атома. Конечно, и в класси-

ческой теории имела известная гибкость. Она неявно присутствовала в подразделении линий на образующиеся «за счет рассеяния» и «за счет истинного поглощения». Но это подразделение было искусственным и по сути дела неправильным, так как мы видели, что любая функция источников в линии имеет член, обусловленный рассеянием, и вопрос, который действительно важен, состоит в том, каковы те механизмы притока и оттока фотонов в линии, которыми определяется величина этого члена, описывающего рассеяние. В классической теории существование линий, контролируемых фотоионизацией, явно осознано не было, а справиться с учетом взаимного влияния нескольких линий эта теория, по существу, была не способна.

Одно из важных последствий указанных выше изменений в теоретических представлениях состоит в том, что поскольку S_l более не определяется однозначно ходом $T_e(\tau)$ (S_l может быть и не связана с T_e), то ясно, что *нельзя надеяться* получить $T_e(\tau)$ по интенсивности выходящего излучения $I(0, \nu)$. В частности, мы не раз сталкивались с тем, что $S_l(0)$, а потому и центральная интенсивность линии почти совершенно не связаны с поверхностной температурой T_0 , а определяются процессом переноса излучения на расстояниях порядка длины термализации, причем главную роль играют фотоны крыльев линии. Поэтому литература, содержащая оценки поверхностных температур звезд, полученные по интенсивностям ядер линий на основе ЛТР-теории, — не более чем коллекция подробных «карт» несуществующей «территории».

Обобщая это заключение, отметим, что если предполагается ЛТР, то для объяснения наблюдаемых эмиссионных ядер у линий H и K CaII мы должны были бы принять такое немонотонное распределение температуры $T_e^*(\tau)$, при котором она сначала убывает наружу, затем возрастает и после этого снова спадает. Оно не согласовалось бы не только с распределением $T_e(z)$, полученным (исходя из ЛТР!) по данным об инфракрасных линиях и о континууме (которые указывают на спад температуры в фотосфере до образующего плато минимума, за которым следует ее хромосферно-корональный подъем; см. рис. 7.31 и 7.32). Распределение температуры, выведенное по линиям CaII, не позволяло бы также объяснить профили других линий (например, MgII), имеющих аналогичные самообращения. Более того, использование такого профиля температуры дало бы эмиссионные обращения у *всех* линий достаточно большой интенсивности, даже у тех, у которых они не наблюдаются (например, у H_α). Вся эта проблема исчезает, если класс

линий, контролируемых столкновениями, отделить от класса линий, контролируемых фотоионизациями. Кроме того, этот новый подход позволяет понять различную эффективность связи между S_i и T_e у разных линий, контролируемых столкновениями. Короче, анализ, не использующий априорного предположения об ЛТР, ведет к колоссальному улучшению общего понимания физической ситуации.

Одним из самых главных применений теории образования линий, основанной на предположении об ЛТР, служит определение химического состава звезд. Как мы видели, изменение $S_i(\tau)$ с глубиной часто значительно отличается от изменения $B_i(T)$. Поэтому интенсивность выходящего в линии излучения (а значит, и ее эквивалентная ширина) должна отличаться от ее значения при ЛТР. Общая тенденция состоит в том, что отклонения от ЛТР увеличивают центральные глубины линий, контролируемых столкновениями, и эквивалентные ширины возрастают (а это означает, что содержание элемента, необходимое для получения наблюдаемой эквивалентной ширины, будет уменьшаться). Для линий, контролируемых фотоионизациями, отклонения от ЛТР могут как увеличивать, так и уменьшать силу линии. Полезный обзор того, какое влияние отклонения от ЛТР могут оказывать на определения химического состава, дается в [225].

До недавних пор ответ на вопрос, действительно ли отклонения от ЛТР приводят к существенным ошибкам при определении химического состава звездных атмосфер, оставался открытым и служил в литературе предметом интенсивных и пространных споров. Как будет показано в § 12.4, теперь на этот вопрос во многих важных случаях можно дать положительный ответ (см. также [435]). Это не значит, что определения химического состава, выполненные в рамках ЛТР, всегда ошибочны. Во многих случаях это не так. Однако очевидно, что при рассмотрении любого вопроса нужно доказывать, а не просто принимать, что использование ЛТР обеспечивает требуемую степень точности.

Другой параметр, который часто получают при помощи метода кривых роста, — это характерная скорость «микротурбулентности» в атмосфере. Оставляя в стороне вопрос о том, адекватно ли простая кривая роста описывает сложную проблему образования линий в турбулентной среде (обсуждаемую в § 14.1), важно отметить, что определение этого конкретного параметра особенно подвержено ошибкам из-за влияния эффектов отклонений от ЛТР. Положение плоской части кривой роста чувствительно к тому, *каким*

образом и на каком расстоянии происходит насыщение линии из-за термализации, так как эти характеристики решения определяют *глубину и ширину* линии. Например, как отмечалось выше в § 11.2, хотя когерентное рассеяние может приводить к появлению линии такой же глубины, как и некогерентное рассеяние (при том же значении ε), в последнем случае линия будет шире, а следовательно, ее эквивалентная ширина — больше. Расчеты, выполненные для идеализированных моделей атмосферы и для двухуровневого атома, показали, что отклонения от ЛТР оказывают важное влияние на плоскую часть кривой роста [25]. В последнее время были также созданы теоретические модели, позволяющие при рассмотрении переноса в линии без ЛТР учесть наличие стохастических полей скоростей. Хотя едва ли можно сомневаться в том, что крупномасштабные движения в звездных атмосферах *действительно существуют*, точность определяемых значений скоростей будет оставаться под вопросом, пока не будут использованы внутренне непротиворечивые аналитические методы.

Теперь мы перейдем к обсуждению попыток воссоздания наблюдаемого звездного спектра на основе использования реалистичных многоуровневных моделей атома и детальных моделей атмосфер. Для этого будут найдены физически непротиворечивые решения полной системы уравнений переноса и статистического равновесия.

Глава 12

Перенос излучения в линии при отсутствии ЛТР: многоуровневый атом

Изложенная в предыдущей главе теория, основанная на использовании крайне упрощенной модели атома и идеализированной модели атмосферы, позволила далеко продвинуться в понимании физики проблемы образования спектральных линий. Но для анализа реальных звездных спектров необходимо сделать следующее.

1) Рассмотреть гораздо более близкие к реальности модели атома, обладающие множеством уровней (возможно, принадлежащих нескольким стадиям ионизации этого атома), при переходах между которыми образуется целый набор линий. 2) Научиться совместно решать уравнения переноса излучения и статистического равновесия для таких моделей атома применительно к достаточно сложным моделям атмосфер, которые должны с высокой степенью реализма описывать физическое строение звезды. Во всем последующем изложении будем предполагать, что имеем дело с атомами «примеси» (т.е. не с водородом), которые не влияют существенно на структуру атмосферы, и поэтому будем считать, что модель атмосферы задана и *фиксирована*. Ясно, что с ростом числа уровней число возможных переходов и взаимодействий сильно возрастает, и физическая сущность и математическое описание проблемы становятся более сложными. Более того, необходимо отдавать себе отчет в том, что этот рост сложности не сводится лишь к увеличению числа уравнений, которые должны рассматриваться. Появляются крайне важные новые *физические эффекты*. В частности, теперь оказывается, что *поле излучения в любой конкретной линии может влиять на поля излучения во всех других линиях атома* и что во многих случаях эти эффекты имеют определяющее значение. Далее, эти эффекты часто сказываются весьма тонким образом, поскольку они являются результатом крайне сложной последовательности взаимодействий. Это всеобщее взаимное влияние полей излучения в разных линиях (и взаимообусловленность функций источников) обычно называют *эффектами взаимосвязи*. Необходимость правильного учета эффектов взаимосвязи служит основным препятствием на пути решения многоуровневых задач переноса.

Самый прямой подход к многоуровневой задаче заключается в

непосредственном распространении методов решения, применявшихся в предыдущей главе к двухуровневому атому. При этом аналитические выражения для функций источников в каждой линии записываются так, чтобы явным образом выделить поле излучения в этой линии. Далее решаем соответствующее уравнение переноса, считая все другие члены известными. Это — метод *эквивалентных двухуровневых атомов*, в котором при решении уравнения переноса на каждом этапе рассматривается лишь одна линия, а взаимное влияние линий учитывается методом *последовательных приближений*. При этом молчаливо предполагается, что взаимосвязь между линиями является в некотором смысле достаточно слабой. Но часто это не так, и тогда метод эквивалентных двухуровневых атомов становится неприменимым. Например, отдельные компоненты *мультиплетов* обычно имеют в качестве соответствующих им верхних и/или нижних состояний очень мало различающиеся по энергии уровни, прямое физическое взаимодействие между которыми может быть очень сильным. В таких ситуациях фотоны могут *перемещаться* из одной линии мультиплета в другую, и поля излучения в таких линиях становятся сильно связанными друг с другом. В более общих случаях в цепочках переходов в составе сложных совокупностей переходов между многочисленными уровнями часто возникают условия, при которых фотоны одной линии, лежащей в определенном спектральном диапазоне, сравнительно легко преобразуются в фотоны совсем другой линии (*конверсия* фотонов). По существу, в такой ситуации данный фотон больше не принадлежит лишь одной *определенной* линии. До некоторой степени он принадлежит целому ансамблю *полей излучения, соответствующих полному набору переходов в атоме*. Чрезвычайная важность этого обстоятельства была осознана и всячески подчеркивалась Джеффрисом [334], гл. 8; [284], стр. 177. Он ввел наглядное описание, согласно которому фотоны следует считать взаимозаменяемыми членами некоего их *коллективного ансамбля*. В свете этого становится ясно, что все линии и их взаимодействие обязательно должны рассматриваться *одновременно* и в высшей степени взаимосогласованно. В некоторых специальных случаях это удастся сделать прямо (например, в случае мультиплета с общим нижним уровнем). В общем случае строгой согласованности позволяет добиться *метод полной линеаризации*. В этом методе все эффекты взаимосвязи учитываются с самого начала. Его можно рассматривать как математическое выражение физического представления Джеффриса о коллективном ансамбле фотонов.

12.1. Метод эквивалентных двухуровневых атомов

ФОРМУЛИРОВКА МЕТОДА

При изучении двухуровневого атома мы использовали уравнения статистического равновесия, чтобы аналитически исключить отношение населенностей, входящее в формулу для функции источников, и таким путем получить для нее выражение следующего вида:

$$S_l = (\int \phi_\nu J_\nu d\nu + \alpha) / (1 + \beta), \quad (12.1)$$

где α и β описывают возможные пути возникновения и гибели фотонов. При написании (12.1) было явно использовано то, что у *строго* двухуровневого атома имеется лишь *одна* линия и, следовательно, нужно рассматривать поле излучения лишь в одной этой линии. Мы видели также, что если у атома есть еще и континуум, то величины α и β будут зависеть от интенсивностей излучения в двух имеющихся в этом случае связанно-свободных континуумах. Так как непрозрачность в линии обычно гораздо сильнее, чем в континуумах, часто (хотя и не всегда) на тех глубинах, где образуется линия, среда будет прозрачна в этих континуумах и скорости процессов, связанных с континуумом, можно считать *фиксированными*. Если включить в рассмотрение *другие* уровни и *другие* линии, то можно ожидать, что величины α и β станут зависеть от полей излучения в этих линиях и, кроме того, что эти величины станут переменными (т.е. их уже нельзя будет считать известными заранее) в пределах области образования данной линии. Тем не менее ясно, что как бы сильно ни была связана данная линия с другими, она во всех случаях должна как-то реагировать на скорость ударных переходов между ее верхним и нижним уровнями и на эффективность процессов, ведущих к переходам с этих уровней в континуум. Это соображение наводит на мысль, что в качестве вычислительной стратегии можно попытаться избрать следующую: записываем для функции источников такое математическое выражение, в котором члены, описывающие рассеяние в рассматриваемой линии, ударные переходы в ней, а также ударные и радиативные переходы в континуум с двух уровней, дающих линию, учитываются *прямо*, а все остальные переходы аналитически сгруппированы так, что входят не прямо, а через *число несбалансированных переходов*. Таким путем можно надеяться на каждой стадии вычислений свести эффект взаимосвязи к минимуму.

Рассмотрим линию, возникающую при переходах с верхнего

уровня u на нижний l . Уравнение стационарности для нижнего уровня имеет вид

$$\begin{aligned} n_l(B_{lu} \int \phi_\nu J_\nu d\nu + C_{lu} + \sum_{i < l} A_{li} Z_{li} + \sum_{i < j \neq u} C_{ij} Y_{ij} + R_{lk} + C_{lk}) - \\ - n_u(A_{ul} + B_{ul} \int \phi_\nu J_\nu d\nu + C_{ul}) = \\ = n_l^*(R_{kl} + C_{lk}) + \sum_{i < j \neq u} n_j A_{ji} Z_{ji} + \sum_{i < l} n_i C_{il} Y_{il}, \quad (12.2) \end{aligned}$$

для верхнего же уровня имеем

$$\begin{aligned} n_u(A_{ul} + B_{ul} \int \phi_\nu J_\nu d\nu + C_{ul} + \sum_{u > i \neq l} A_{ui} Z_{ui} + \sum_{u < j} C_{uj} Y_{uj} + R_{uk} + C_{uk}) - \\ - n_l(B_{lu} \int \phi_\nu J_\nu d\nu + C_{lu}) = \\ = n_u^*(R_{ku} + C_{uk}) + \sum_{u < j} n_j A_{ju} Z_{ju} + \sum_{u > i \neq l} n_i C_{iu} Y_{iu}. \quad (12.3) \end{aligned}$$

В уравнениях (12.2) и (12.3) использованы *факторы радиационного разбаланса* Z_{ji} и *факторы ударного разбаланса* Y_{ji} , определенные формулами (5.58) и (5.71), а также числа радиативных ионизаций R_{lk} и рекомбинаций R_{kl} , определяемые выражениями (5.66) и (5.67). Далее, n_i^* означает населенность i -го уровня при ЛТР, даваемую формулой (5.14) при *реально имеющемся* значении концентрации ионов.

Если разрешить уравнение (12.2) и (12.3) относительно $n_l g_u / n_u g_l$, подставить результат в формулу $S_{lu} = (2h\nu^3/c^2)[n_l g_u / n_u g_l - 1]^{-1}$ и воспользоваться соотношениями между энштейновскими коэффициентами вероятностей переходов, то получим

$$S_{lu} = [\int \phi_\nu J_\nu d\nu + (\varepsilon' + \theta)B_\nu(T)] / (1 + \varepsilon' + \eta), \quad (12.4)$$

где ε' определяется так же, как в (11.7), а

$$\eta = [a_2 a_3 - (g_l/g_u) a_1 a_4] / A_{ul} (a_2 + a_4), \quad (12.5)$$

$$\theta = n_l^* a_1 a_4 [1 - \exp(-h\nu/kT)] / n_u^* A_{ul} (a_2 + a_4), \quad (12.6)$$

где в свою очередь

$$a_1 = R_{lk} + C_{lk} + \sum_{i < l} A_{li} Z_{li} + \sum_{i < j \neq u} C_{ij} Y_{ij}, \quad (12.7)$$

$$a_2 = n_l^*(R_{kl} + C_{lk}) + \sum_{i < j \neq u} n_j A_{ji} Z_{ji} + \sum_{i < l} n_i C_{il} Y_{il}, \quad (12.8)$$

$$a_3 = R_{uk} + C_{uk} + \sum_{u>l \neq i} A_{ul} Z_{ul} + \sum_{u<j} C_{uj} Y_{uj}, \quad (12.9)$$

$$a_4 = n_u^* (R_{ku} + C_{uk}) + \sum_{u<j} n_j A_{ju} Z_{ju} + \sum_{u>l \neq i} n_l C_{lu} Y_{lu}. \quad (12.10)$$

Упражнение 12.1. Проверить формулы (12.4) — (12.10).

Ясно, что величины a_1 и a_2 представляют собой соответственно скорость опустошения уровня l за счет переходов на все другие уровни, кроме u , и число электронов, приходящих на уровень l со всех других уровней, не считая u ; через a_3 и a_4 обозначены аналогичные величины для уровня u .

Сходство (12.4) с выражением для S_{lu} в двухуровневом случае очевидно. Заметим, что в величины a_2 и a_4 входят населенности *всех других уровней*. Так получилось потому, что мы использовали лишь *два* из всей совокупности уравнений стационарности и поэтому смогли исключить только n_l и n_u . В принципе можно получить выражение для функции источников S_{lu} , которое в *явном виде* вовсе не содержит населенностей каких-либо уровней. Для этого из полной системы уравнений статистического равновесия $\mathcal{A}n = \bar{B}$ путем преобразований надо получить явные выражения величин α и β , входящих в формулу (12.1), через коэффициенты матрицы $\mathcal{A}$ (см. [333]; [284], стр. 187). Однако при такой процедуре выкладки очень быстро становятся безнадежно громоздкими и практически невыполнимыми, и, что более существенно, вовсе не очевидно, что при этом мы что-либо выигрываем, так как получающееся выражение для функции источников *нелинейно* по интенсивностям излучения во всех других линиях. Более того, эти интенсивности излучения зависят от населенностей соответствующих уровней, и поэтому S_{lu} все же будет зависеть от всех n_i ($i \neq l, i \neq u$) *нелинейно*.

Если коэффициент поглощения в континууме обозначить через χ_c , а полный коэффициент поглощения в линии — через χ_{lu} :

$$\chi_{lu} = (B_{lu} h \nu / 4\pi) (n_l - g_l n_u / g_u),$$

то уравнение переноса излучения для произвольной частоты в линии можно записать в виде

$$\mu dI_\nu / dz = - (\chi_c + \chi_{lu} \phi_\nu) I_\nu + \chi_c S_c + \chi_{lu} \phi_\nu S_{lu}, \quad (12.11)$$

где S_c — функция источников в континууме (она не обязательно

совпадает с функцией Планка). Обозначив $d\tau_\nu = -(\chi_c + \chi_{lu}\phi_\nu)dz$ и подставив вместо S_{lu} выражение (12.4), уравнение (12.11) можно переписать в виде

$$\mu dI_\nu/d\tau_\nu = I_\nu - a_\nu \int \phi_\nu J_\nu d\nu - b_\nu. \quad (12.12)$$

Из этого уравнения можно получить некоторое уравнение второго порядка, которое решается стандартным методом Фотрие или методом Райбики, описанными в гл. 6. Расчет подобного рода выполняется для каждой линии рассматриваемой совокупности переходов. Заметим, что для того, чтобы рассчитать χ_{lu} , а тем самым и τ_ν , a_ν и b_ν , входящие в уравнение (12.12), необходимо знать истинные значения n_l и n_u . Поскольку на каждой стадии вычислений эти величины известны лишь приближенно, ясно, что требуется итерационная процедура, в которой последовательно используются все более точные значения населенностей уровней. Каждая такая итерация может выполняться одновременно с более важной итерацией, требующейся для получения приближенных значений чисел радиативных переходов во всех линиях.

При расчетах, предназначенных для моделирования условий в реальной атмосфере, вообще говоря, необходимо учитывать изменение состояния ионизации рассматриваемого химического элемента (возможно, при этом потребуются учет целой последовательности из нескольких стадий ионизации). Континуумы возбужденных состояний «примесных» элементов будут, как правило, гораздо прозрачнее континуумов основных источников поглощения — H и He, так что поля излучения в них можно считать известными. Однако для континуумов основных состояний это обычно уже будет не так, поскольку в них атмосфера, как правило, достаточно непрозрачна, чтобы процессы в самих этих континуумах определяли интенсивность излучения в них.

Поэтому уравнения переноса в линиях (12.12) необходимо дополнить соответствующими уравнениями для континуумов, как это было описано в § 7.5 при рассмотрении образования лаймановского континуума [см. уравнения (7.127), (7.131) и (7.135) — (7.144)]. В полной совокупности уравнений стационарности для конкретного вида примесных атомов будет насчитываться столько уравнений, сколько имеется связанных уровней (у всех учитываемых стадий ионизации), плюс еще одно уравнение, в котором сумма всех населенностей приравнивается полной концентрации атомов и ионов этого элемента $n_{\text{атом}}$. Если содержание элемента по отношению к водороду задано, то величина $n_{\text{атом}}$ является известной функцией глубины.

По своей общей форме эти уравнения подобны первым M_{ne} строчкам матрицы, приведенной в § 5.4 между формулами (5.91) и (5.92).

Итерационная процедура, которую надо осуществить, чтобы получить решение (оно дает изменение населенностей всех уровней в зависимости от глубины), в принципе достаточно проста, хотя на практике часто оказывается громоздкой. Если принять какую-нибудь начальную оценку $n_i(z)$ для всех атомных уровней i , скажем взять значения n_i , соответствующие ЛТР, то можно построить начальные шкалы оптических глубин. Считая χ_i и η_i известными [определяемыми (7.1) и (7.2)], приближенные значения интенсивностей излучения на частотах каждого перехода можно получить путем *формального решения* уравнения переноса излучения (т.е. считая S_{lu} заданной). Эти приближенные значения можно использовать для расчета чисел фотоионизаций и фоторекомбинаций. Затем последовательно решаются уравнения переноса вида (12.12) для каждой линии (и каждого континуума, в котором атмосфера непрозрачна). При этом считается сначала, что все факторы разбаланса Z_{ji} и Y_{ij} , входящие в уравнения (12.7) — (12.10), и их аналоги для континуумов можно положить тождественно равными нулю. В результате проделанных вычислений будут найдены числа радиативных процессов R_{ij} во всех линиях и континуумах, в которых атмосфера непрозрачна. Затем для каждого значения глубины заново решаются уравнения статистического равновесия $\mathcal{A}n = \mathcal{B}$, что дает улучшенные оценки населенностей всех уровней n . Теперь по формулам (12.5) — (12.10) можно вычислить все Z_{ji} и Y_{ij} , а поэтому и η и θ для каждой линии, так как все необходимые для этого скорости переходов и населенности уровней известны. Используя новые значения τ_i , η и θ , решаем еще раз уравнения (12.12) и получаем тем самым новые оценки $\bar{J}_{lu}$ и S_{lu} для каждой линии (и каждого континуума). Снова решаем уравнения стационарности, и процесс повторяется до достижения сходимости. Когда он сошелся к определенному решению, все функции источников становятся известными и для каждой линии можно рассчитывать ее профиль.

Как отмечалось выше, практически осуществить успешно действующую итерационную процедуру, основанную на формализме эквивалентных двухуровневых атомов, часто довольно сложно, так как скорость сходимости (или само ее наличие!) может в сильной степени определяться техническими деталями, такими, как способ вычисления чисел нескомпенсированных переходов, способ расчета функций источников, и многими другими. Обстоятельное обсуждение этих вопросов можно найти в [18], гл. 4; [23], стр. 27 — 63;

[23], стр. 113 — 132; [187], а также в литературе, указанной в этих работах. Более существенная трудность, связанная с этим подходом как таковым, заключается в том, что вместо того, чтобы сходиться к настоящему решению, итерации могут *стабилизироваться* на решении, которое *не является самосогласованным* (обсуждение этого вопроса см. в [18], § 4.2, и [23], стр. 27 — 63). Этот недостаток, который проявляется не очень часто и который иногда удается преодолеть с помощью специальных приемов, сам по себе не является какой-то неожиданностью. Как будет показано в следующем разделе, существует множество физических ситуаций, при которых поля излучения в разных линиях очень сильно зависят друг от друга вопреки основному предположению метода эквивалентных двухуровневных атомов. Непоследовательность применения метода эквивалентных двухуровневных атомов в этих случаях полностью устраняется, если перейти к методу полной линеаризации, излагаемому в § 12.3.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Метод эквивалентных двухуровневных атомов широко применяется при расчетах самых различных спектров, в частности, применительно к атмосферам Солнца и звезд солнечного типа. Например, для Солнца был выполнен анализ линий H и K CaII [400], [401], [569]; линий OI и CII [168]; b-линий MgI; D-линий NaI [21]; линий FeI [22], причем использовались весьма сложные многоуровневые модели атомов и очень хорошие модели атмосферы. Весьма полный синтез спектра, осуществленный на основе этого общего подхода как для континуума, так и для линий, позволил построить чрезвычайно точные модели фотосферы и хромосферы Солнца [645], [646]. Кроме того, аналогичный анализ был выполнен и для линий H и K CaII у звезд солнечного типа [56], [58].

Недостаток места не позволяет обсудить все эти результаты; для этого читателю следует обратиться к изучению указанных только что работ. Но все же некоторые результаты работы [401], относящиеся к солнечным линиям CaII, играющим центральную роль при исследовании хромосферы, заслуживают упоминания. Линии H и K возникают при переходах $4s\ ^2S_{1/2} \rightarrow 4p\ ^2P_{1/2,3/2}$ (см. рис. 12.1). Между двумя верхними уровнями могут происходить переходы под действием столкновений. Возможны и радиативные переходы с них на метастабильные уровни $3d\ ^2D_{3/2, 5/2}$, ведущие к излучению в инфракрасном триплете $\lambda\lambda$ 8498, 8542, 8662. Поскольку расположенные выше уровни лежат довольно далеко от

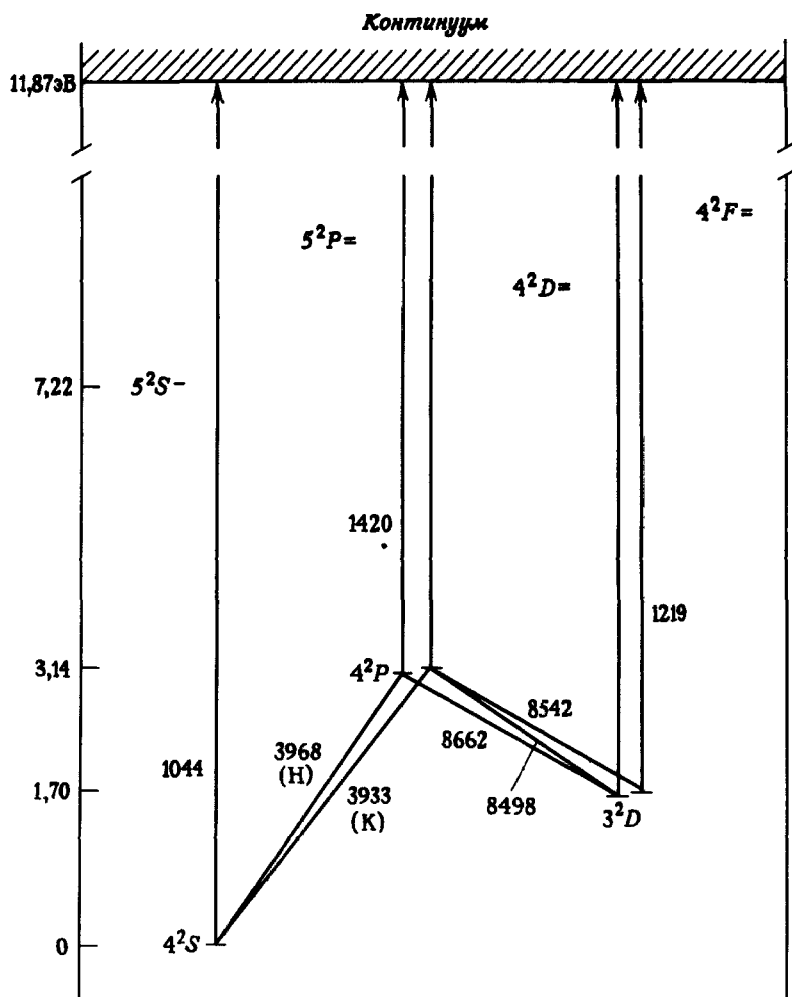


Рис. 12.1. Схема энергетических уровней нижних состояний Ca^+ . Учета пяти уровней $4s^2S_{1/2}$, $4p^2P_{1/2, 3/2}$ и $3d^2D_{3/2, 5/2}$ достаточно для описания процесса образования линий H и K Ca II $\lambda\lambda$ 3968 и 3933 и инфракрасного триплета $\lambda\lambda$ 8498, 8542, 8662. Заметим, что следующие уровни по энергии расположены значительно выше и поэтому ими можно пренебречь, хотя переходы в континуум все же учитываются. (По [401], с любезного разрешения редакции журнала PASP.)

уровня $4p$ (напомним, что в солнечной атмосфере $kT \approx 0,5$ эВ), упомянутых выше пяти уровней и континуума достаточно, чтобы обеспечить аккуратное описание физических процессов, ответственных за образование линий H и K. Решение уравнений переноса и

статистического равновесия для пятиуровневой модели иона Ca^+ позволяет рассчитать функции источников для всех пяти линий. Не зависящая от частоты функция источников линии К (полученная в предположении полного перераспределения по частоте) представлена на рис.12.2 вместе с функцией Планка, значения которой рассчитаны для принятого распределения температуры с высотой $T_e(h)$. Профили линий Н и К и линий инфракрасного триплетта при $\mu = 1$ сравниваются с наблюдениями на рис. 12.3 и 12.4 соответственно. Согласие между теорией и наблюдениями вполне удовлетворительное. Однако если сравнивать с наблюдениями изменения от центра к краю теоретических профилей линий Н и К, то обнаруживаются существенные расхождения. Как будет показано в § 13.4, расхождения исчезают, если учесть частичную когерентность процесса рассеяния и обусловленную этим зависимость функций источников от

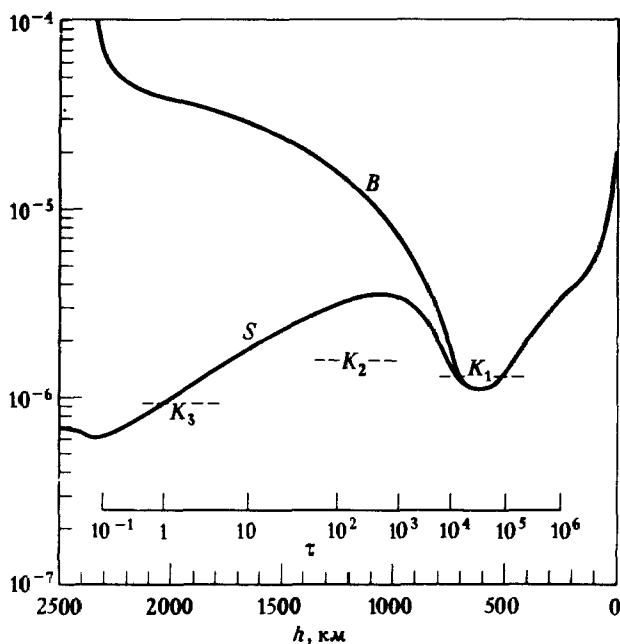


Рис. 12.2. Функция источников S линии К Ca II и соответствующая функция Планка B согласно одной из моделей атмосферы Солнца. Значения функции источников даны в абсолютных единицах эрг/(см² · с · Гц · стер). Шкала оптических глубин рассчитана для центра линии. Пунктиром показаны теоретические интенсивности компонентов K_1 , K_2 , K_3 (см. рис. 12.3.). (По [401], с любезного разрешения редакции PASP.)

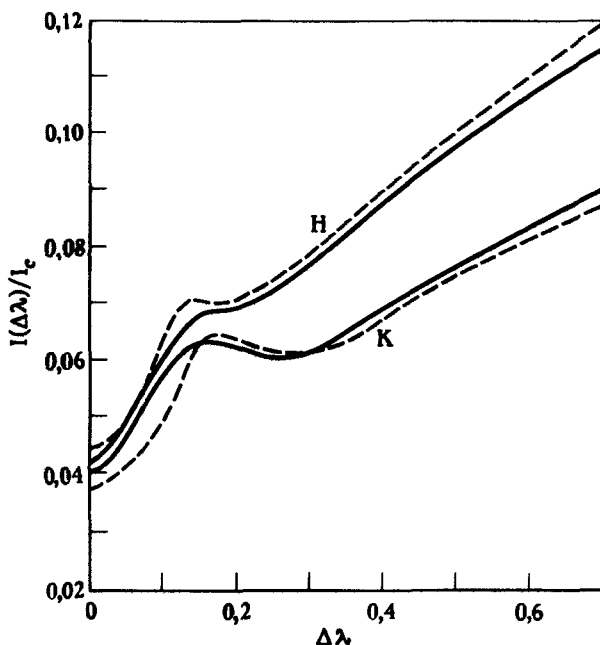


Рис. 12.3. Сравнение теоретических профилей линий H и K при $\mu = 1$ (пунктир) с наблюдаемыми профилями (сплошные кривые). (По [401], с любезного разрешения редакции PASP.)

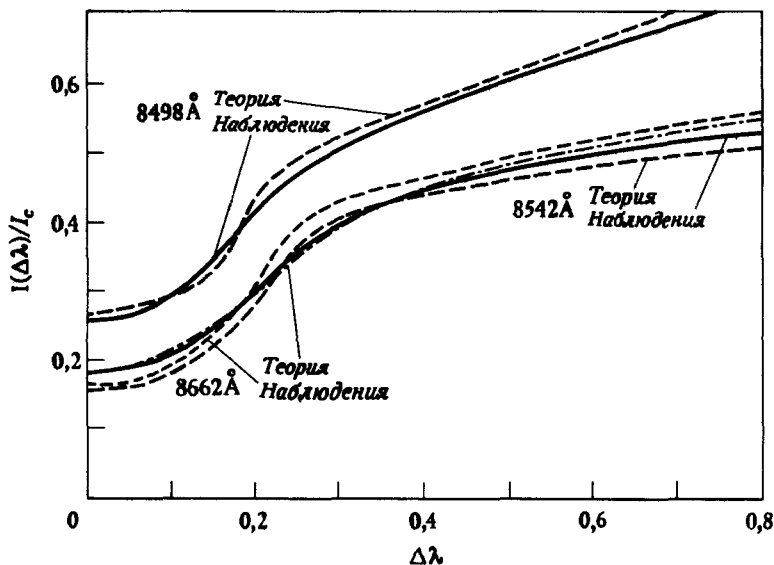


Рис. 12.4. Сравнение теоретических профилей линий инфракрасного триплета Ca II при $\mu = 1$ с наблюдаемыми. (По [401], с любезного разрешения редакции PASP.)

частоты. Кроме того, расчеты, результаты которых показаны на рис 12.3 и 12.4, представляют лишь среднюю спокойную хромосферу. Чтобы добиться согласия с наблюдениями профилей в спектрах активных областей [569], требуется другая модель атмосферы, а чтобы согласовать с наблюдениями *детальные* изменения теоретического профиля линии К при переходе от одной точки диска к другой, необходим полный учет трехмерной тонкой структуры хромосферы и макроскопических движений в ней. Такие расчеты аккуратно еще не сделаны, хотя они необходимы как для выяснения деталей строения хромосферы, так и для ответа на вопрос, в какой мере возможно (и возможно ли вообще) заменять сложную многомерную структуру хромосферы усредненной по горизонтальным плоскостям «средней хромосферой».

12.2. Эффекты взаимосвязи уровней.

Равенство функций источников в мультиплетах

Как подчеркивалось в предыдущем параграфе, метод эквивалентных двухуровневых атомов работает лучше всего тогда, когда члены уравнений статистического равновесия, описывающие переходы между двумя уровнями, дающими изучаемую линию, и всеми остальными уровнями, малы по сравнению с членами, описывающими переходы между самими этими двумя уровнями, а также между этими уровнями и континуумом. Существует, однако, множество физических ситуаций, когда это *не так*, и важно разобраться в том, к каким эффектам может приводить сильная взаимосвязь между несколькими уровнями. Эти эффекты порождают ряд важных следствий, которые сказываются и на наших общих представлениях о процессе образования линий, и на выборе численных методов решения многоуровневых задач теории переноса. Большинство основных физических понятий было введено Джеффрисом [333]; [334], гл. 8, и значительная часть последующих теоретических работ (например, [567]) была основана на его идеях. Были выполнены многочисленные методические расчеты, при которых использовались идеализированные модели многоуровневых атомов и параметризованные модели атмосфер: см., например, [54]; [18], гл. 4; [187], [213], [217], [218]. Вместо того, чтобы пытаться суммировать здесь результаты этих сильно различающихся между собой исследований, мы сосредоточим внимание на двух конкретных примерах, которые особенно ярко иллюстрируют природу эффектов взаимосвязи.

В первую очередь будет кратко рассмотрен случай трех уровней, при переходах между которыми образуются две резонансные линии и одна субординатная. Здесь основной эффект, представляющий интерес, состоит в *дроблении фотонов* старшей резонансной линии на фотоны первой резонансной и субординатной линий. Это явление имеет отношение к механизму флуоресценции в туманностях и к росселандовым циклам, обсуждавшимся в § 5.5. Остальную часть параграфа мы посвятим изучению взаимосвязи линий, образующих мультиплет. Здесь может происходить *конверсия фотонов*, вызванная тем, что столкновения перебрасывают электроны между различными уровнями тонкой структуры рассматриваемых спектроскопических термов. В результате между функциями источников различных линий возникают простые зависимости, и в определенном предельном случае они становятся на всех глубинах в атмосфере *равными* между собой. *Равенство функций источников* для линий мультиплета с теоретической точки зрения очень важно, так как из него следует, что изучение нескольких линий, входящих в мультиплет, можно заменить исследованием всего одной линии, представляющей весь мультиплет сразу, что позволяет значительно сократить объем вычислений. Далее, если равенство функций источников имеет место, это позволяет применить такой метод обработки данных о профилях линий, основанный на теории их образования при отсутствии ЛТР, который дает возможность при минимуме ограничений на теорию непосредственно вывести физические характеристики атмосферы. В соответствии с духом всей нашей книги, в которой на первом плане находится теоретический синтез спектров, а не анализ наблюдений, мы не будем обсуждать здесь этот аналитический метод, предложив читателю за подробным его обсуждением обратиться к книге Джеффриса [34], гл. 9.

ДРОБЛЕНИЕ И КОНВЕРСИЯ ФОТОНОВ

Рассмотрим сначала трехуровневый атом, способный излучать и поглощать две резонансные линии $1 \leftrightarrow 2$ и $1 \leftrightarrow 3$ и одну субординатную линию $2 \leftrightarrow 3$. Например, в атоме водорода мы имели бы линии L_α , L_β и H_α . Для удобства изложения наши три линии мы так и будем называть, хотя мы можем иметь дело и не с водородом. В соответствии с нашими теперешними целями взаимодействием с континуумом пренебрежем и целиком сосредоточим внимание на линиях. Вообще говоря, можно ожидать, что населенность основного уровня n_1 будет гораздо больше населенностей возбуж-

денных уровней n_2 и n_3 . Поэтому в резонансных линиях атмосфера будет гораздо менее прозрачной и на заданной геометрической глубине будет иметь в этих линиях намного большие оптические глубины, чем в субординатной линии. Предположим сначала, что все три линии каким-то образом оказались не связанными друг с другом и образуются в различных двухуровневых атомах. Тогда фотоны в каждой из них термализовались бы на характерной глубине $\Lambda_{ij} \approx 1/\varepsilon_{ij}$, где ε_{ij} — вероятность гибели фотона вследствие тушащих столкновений при переходе $i \leftrightarrow j$. Так как $h\nu_{23} \ll h\nu_{12}$ (или $h\nu_{13}$), обычно будет $\varepsilon_{23} \gg \varepsilon_{12}$ (или ε_{13}). Поэтому фотоны субординатной линии будут термализоваться на меньших оптических глубинах (измеренных в их собственной шкале), чем фотоны резонансных линий.

Однако этот эффект будет обращен из-за гораздо большей непрозрачности атмосферы в резонансных линиях, и термализация в субординатной линии наступит в атмосфере на значительно большей *геометрической* глубине. Можно сказать и иначе. В субординатной линии атмосфера настолько более прозрачна, чем в резонансных линиях, что при продвижении из глубоких слоев к границе атмосферы первыми получают возможность выходить из атмосферы фотоны этой субординатной линии (вызывая тем самым отклонения S от B). Таким образом, будет существовать определенная область глубин, в пределах которой фотоны резонансных линий, если бы они *не были* связаны с субординатной линией, были бы термализованы, а фотоны субординатной линии могли бы успевать выходить из атмосферы, так как в этой линии она не столь непрозрачна. На самом же деле в этом критическом диапазоне глубин некоторые из электронов, переведенные излучением L_β с уровня 1 на уровень 3, будут затем переходить на уровень 2 с излучением H_α , и эти фотоны H_α будут выходить из атмосферы. Таким образом, будет происходить систематическое *дробление* фотонов L_β на L_α и H_α , темп которого определяется вероятностью дробления $A_{32}/(A_{31} + A_{32})$. Заметим, что обратный процесс конверсии фотонов H_α в L_β малозффективен. Если поглощается фотон H_α , что приводит к возбуждению 2 — 3, то *большинство* последующих актов излучения из состояния 3 будет происходить при переходе 3 — 1. Однако, так как τ_{13} очень велико, а ε_{13} очень мало, эти фотоны *заперты* и рассеиваются до тех пор, пока наконец не произойдет переход 3 — 2. Излученный при этом фотон H_α сразу же выйдет из атмосферы. В этой области атмосферы поле излучения L_α останется почти в состоянии детального баланса (а соответствующая функ-

ция источников будет близка к функции Планка), возбуждение же за счет L_β будет ослаблено, а соответствующая функция источников должна поэтому быть меньше равновесной.

Пренебрегая вынужденным излучением, мы можем выразить «приведенные» функции источников в виде $S_{21}/B_{21} = b_2/b_1$, $S_{31}/B_{31} = b_3/b_1$ и $S_{32}/B_{32} = b_3/b_2$, где B_ν — значение функции Планка $B(\nu, T)$ и $b_i \equiv n_i/n_i^*$. Там, где в L_α имеет место детальный баланс, $b_2 = b_1$ (напомним обсуждение вопроса о населенности основного состояния Н у В-звезд, см. § 7.5). Поэтому $S_{32}/B_{32} = S_{31}/B_{31}$, так что, начиная с того уровня в атмосфере, где наступает термализация L_α , «приведенные» функции источников линий L_β и H_α становятся между собой равны. По мере перемещения во все более близкие к границе слои атмосферы она становится все прозрачнее в линии L_β , и в конце концов вероятность прямого выхода L_β -фотона становится больше вероятности его преобразования в покидающий атмосферу фотон H_α . С этого места функции источников для L_β и H_α перестают быть близкими.

Результаты расчетов для трехуровневого атома с параметрами $A_{31}/A_{32} = 10$, $\epsilon_{12} = \epsilon_{13} = 10^{-3}$, $\epsilon_{23} = 9 \cdot 10^{-2}$, $\tau_{12}/\tau_{13} = 6,2$ и $\tau_{23}/\tau_{13} = 1,6 \cdot 10^{-4}$. (S_{31}/B_{31})/(S_{32}/B_{32}) приведены на рис. 12.5 [218]. Из рисунка видно, что L_α -фотоны термализуются при $\tau_{13} \approx 2 \cdot 10^2$, что соответствует $\tau_{12} \approx 10^3$, как и следовало ожидать при принятом значении ϵ_{12} . При $\tau_{13} \leq 10$ вероятность прямого выхода L_β -фотона сравнима с вероятностью его дробления с образованием H_α . Поэтому при $\tau_{13} < 10$ кривые для «приведенных» функций источников в линиях L_β и H_α расходятся. Однако ниже этого уровня они быстро сближаются, причем их общее значение существенно меньше того, которое было бы у функции источников L_β , если бы дробления фотонов не происходило. Термализация фотонов H_α (а вместе с ними и L_β) наступает около $\tau_{13} \approx 10^5$, что соответствует $\tau_{23} \approx 10$, как и следовало ожидать, учитывая значение ϵ_{23} . Дальнейшее обсуждение и интерпретацию результатов можно найти в указанной выше работе, однако из сказанного здесь ясно, что в этой задаче взаимосвязь линий сильно влияет на то, как происходит изменение функций источников с глубиной. См. также [18], § 4.8.

Теперь обратимся к случаю трехуровневого атома, имеющего основное состояние и два близко расположенных верхних состояния. Предположим, что между состояниями 1 и 2, а также между состояниями 1 и 3 могут происходить как радиативные, так и ударные переходы, тогда как между состояниями 2 и 3 возможны лишь ударные переходы. Эта модель описывает реальную физическую

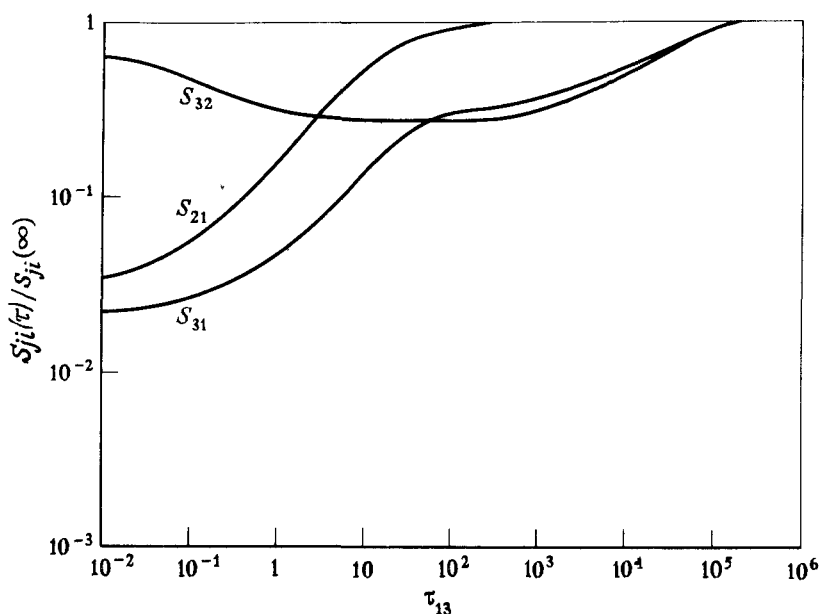


Рис. 12.5. Функции источников для трехуровневого атома, для которого разрешены переходы как в резонансных линиях $1 \leftrightarrow 3$ и $1 \leftrightarrow 2$, так и в субординатой линии. Абсцисса — оптическая глубина в линии $1 \leftrightarrow 3$; ордината — значение приведенных функций источников $S_{ji}(\tau)/S_{ji}(\infty)$; значение $S_{ji}(\infty)$ равно функции Планка на соответствующей частоте. (По [218], с разрешения.)

ситуацию в случае *резонансного дублета*, у которого верхние состояния соответствуют тонкой структуре уровня. Например, D-линии натрия возникают при переходах с основного уровня $3s\ ^2S_{1/2}$ (состояние 1) на верхние уровни $3p\ ^2P_{1/2}$ и $3p\ ^2P_{3/2}$ (состояния 2 и 3).

Обсудим сначала предельный случай, когда вероятность ударного перехода $2 \leftrightarrow 3$ равна нулю (т.е. случай *отсутствия связи* между уровнями). Тогда переходы $1 \leftrightarrow 2$ и $1 \leftrightarrow 3$ могут происходить независимо друг от друга, и обе линии образуются также независимо. Функции источников в этих линиях у границы будут меньше локальной функции Планка. Становиться равновесными, приближаясь к функции Планка, они будут на *глубине термализации*, определяемой для каждой из линий соответственно выражениями

$$\Lambda_{12} \approx (A_{21} + C_{21})/C_{21}, \quad (12.13a)$$

$$\Lambda_{13} \approx (A_{31} + C_{31})/C_{31}. \quad (12.136)$$

Здесь были сделаны упрощающие предположения о том, что профи-

ли у линий доплеровские, а сильные градиенты параметров отсутствуют. В рассматриваемом сейчас предельном случае ход изменения функций источников этих двух линий с глубиной в атмосфере будет разным, и на каждой данной глубине их значения, вообще говоря, совпадать не будут.

Примем теперь, напротив, что *столкновения*, вызывающие переходы между уровнями 2 и 3, *происходят очень часто*. В этом случае электроны, находящиеся на возбужденных уровнях, часто перебрасываются с одного из этих возбужденных уровней на другой. В этом случае говорят, что происходит прямая и обратная *конверсия* фотонов одной линии в фотоны другой линии. В задаче о переносе излучения в таких линиях два верхних уровня, по существу, выступают как один. В этом предельном случае населенности верхних уровней пропорциональны их статистическим весам. Функции источников этих двух линий (которые выражаются через отношения $n_1 g_u / n_u g_l$) *становятся тогда равны на всех глубинах в атмосфере*. (Здесь мы пренебрегли несущественным различием, которое может возникать из-за того, что ν_{12} не в точности равно ν_{13} .) В общем случае ситуация будет промежуточной между двумя описанными выше крайними случаями, и следует ожидать, что функции источников будут равны лишь в некоторой части атмосферы.

При перемещении из глубоких слоев атмосферы наружу мы обнаружим, что на глубинах, меньших глубин термализации, функции источников линий становятся меньше функций Планка. Это происходит потому, что вероятность прямого выхода фотона начинает превосходить вероятность его гибели (см. § 11.2). Однако если коэффициенты ударных переходов C_{23} и C_{32} отличны от нуля, то наряду с вероятностями выхода из среды и гибели появляется конечная не равная нулю вероятность того, что фотон *перейдет* из одной линии в другую. Поэтому должна существовать некоторая *длина конверсии* ([333]; [284], стр. 177) — расстояние, в пределах которого функции источников двух линий остаются между собой близкими. Линии делаются несвязанными лишь тогда, когда вероятность прямого выхода становится больше вероятности *и гибели, и конверсии* фотона, т.е. когда

$$P(\tau_{12}) \geq (C_{21} + C_{23}) / (A_{21} + C_{21} + C_{23}), \quad (12.14a)$$

$$P(\tau_{13}) \geq (C_{31} + C_{32}) / (A_{31} + C_{31} + C_{32}). \quad (12.14б)$$

Из неравенств (12.14) следует, что обе линии могут термализоваться независимо друг от друга во всей той области глубин в атмосфе-

ре, которая определяется выражениями (12.13), только в том случае, когда *всюду* в этой области $C_{31} > C_{32}$ и $C_{21} > C_{23}$ (с хорошим запасом). Если *хотя бы одно* из этих условий нарушено, конверсия фотонов играет существенную роль. Снова принимая, что профиль доплеровский, можно дать оценку той оптической глубины, начиная с которой фотоны каждой из линий способны полностью сохранять свою индивидуальность и выходить из атмосферы, не претерпевая ни гибели вследствие ударов второго рода, ни конверсии. Для переходов $1 \leftrightarrow 2$ и $1 \leftrightarrow 3$ имеем соответственно

$$\Lambda_{12}^* \approx (A_{21} + C_{21} + C_{23}) / (C_{21} + C_{23}), \quad (12.15a)$$

$$\Lambda_{13}^* \approx (A_{31} + C_{31} + C_{32}) / (C_{31} + C_{32}). \quad (12.15b)$$

Пусть z_{12}^* и z_{13}^* — *геометрические глубины*, соответствующие Λ_{12}^* и Λ_{13}^* . Тогда обе группы фотонов могут распространяться независимо друг от друга лишь до глубины $z^* = \min(z_{12}^*, z_{13}^*)$.

С точки зрения вычислений можно сказать, что если конверсия успешно конкурирует с термализацией, то целесообразность использования той итерационной процедуры, которая применяется в методе эквивалентных двухуровневых атомов, становится не вполне ясной. Кажется более естественным рассматривать обе (*или большее число*) линии и их воздействие друг на друга *одновременно*, разбив для этого другую расчетную схему.

НАБЛЮДАЕМЫЕ ПРОЯВЛЕНИЯ РАВЕНСТВА ФУНКЦИЙ ИСТОЧНИКОВ

Чтобы получить стимул к дальнейшей разработке теории, рассмотрим некоторые наблюдательные проявления того, что функции источников в мультиплетах действительно между собой равны. Прекрасный пример этого дается обширным рядом высокоточных наблюдений D-линий натрия в спектре диска Солнца [655]. Интенсивность выходящего излучения в определенной частоте и в определенной точке диска дается выражением

$$I_\nu(0, \mu) = \mu^{-1} \int_0^\infty [S_c(\tau_c) + \beta_\nu S_l(\tau_c)] \exp[-\mu^{-1} \int_0^{\tau_c} (1 + \beta_\nu) dt_c] d\tau_c, \quad (12.16)$$

где τ_c — оптическая глубина в континууме и $\beta_\nu = \chi \phi_\nu / \chi_c$. В ядре линии $\beta_\nu \gg 1$, так что с хорошей точностью можно написать

$$I_\nu(0, \mu) = \mu^{-1} \int_0^\infty S_l(\tau) \exp(-\tau \phi_\nu / \mu) \phi_\nu d\tau, \quad (12.17)$$

где τ — оптическая глубина в линии. В случае D-линий $f_{13}/f_{12} = 2$,

так что

$$I_{12}(0, \mu, \nu) = \int_0^{\infty} S_{12}(\tau_{12}) \exp(-\phi_{\nu} \tau_{12}/\mu) \phi_{\nu} d\tau_{12}/\mu, \quad (12.18a)$$

$$I_{13}(0, \mu, \nu) = \int_0^{\infty} S_{13}(\tau_{12}) \exp(-2\phi_{\nu} \tau_{12}/\mu) 2\phi_{\nu} d\tau_{12}/\mu. \quad (12.18б)$$

Следовательно, если S_{12} и S_{13} одинаково зависят от глубины, то $I_{13}(0, \mu, \nu) = I_{12}(0, \mu/2, \nu)$. Суть дела в том, что большая непрозрачность в одной линии компенсируется увеличением длины пути, проходимого фотоном другой линии. Если произвести сравнение указанных интенсивностей, то для ядер двух D-линий обнаруживается очень хорошее согласие (см. рис. 12.6,а — 12.6,б). Для контраста на рис. 12.6,г показано обратное сравнение — $I_{13}(0, \mu/2, \nu)$ сопоставлено с $I_{12}(0, \mu, \nu)$. Этим наглядно демонстрируется, насколько реально значимо согласие, вытекающее из остальных рисунков. Отсутствие согласия в крыльях объясняется возрастающим вкладом континуума, что нарушает справедливость предположений, которые нужно сделать, чтобы можно было написать формулу (12.17).

Этот поразительный наблюдательный результат побуждает предпринять детальное изучение условий, при которых может осуществляться равенство функций источников (помимо тривиального случая ЛТР), а также разработать методы расчета, специально приспособленные для задач о переносе излучения в мультиплетах. Прекрасное согласие профилей, показанное на рис. 12.6, производит настолько сильное впечатление, что в некоторых ранних работах [655], [656] делался вывод, что равенство функций источников в двух линиях должно строго соблюдаться вплоть до самой поверхности. Чтобы гарантировать такое равенство, нужно было бы наложить очень сильное требование, что $C_{23} \gg A_{21}$ и $C_{32} \gg A_{31}$. Коэффициенты ударных переходов для D-линий в солнечной атмосфере на самом деле удовлетворять этим неравенствам не могут. Возникает кажущееся противоречие. В последующих работах [16], [51] было, однако, показано, что наложенные выше условия являются излишне строгими и что для того, чтобы функции источников оказывались очень близкими (хотя и не точно равными), достаточно выполнения лишь условий $C_{32}/A_{31} > C_{31}/A_{31}$ и $C_{23}/A_{21} > C_{21}/A_{21}$ (которые для солнечных D-линий выполняются). Этих условий достаточно, чтобы формировать профили, которые в пределах точности наблюдений неотличимы друг от друга.

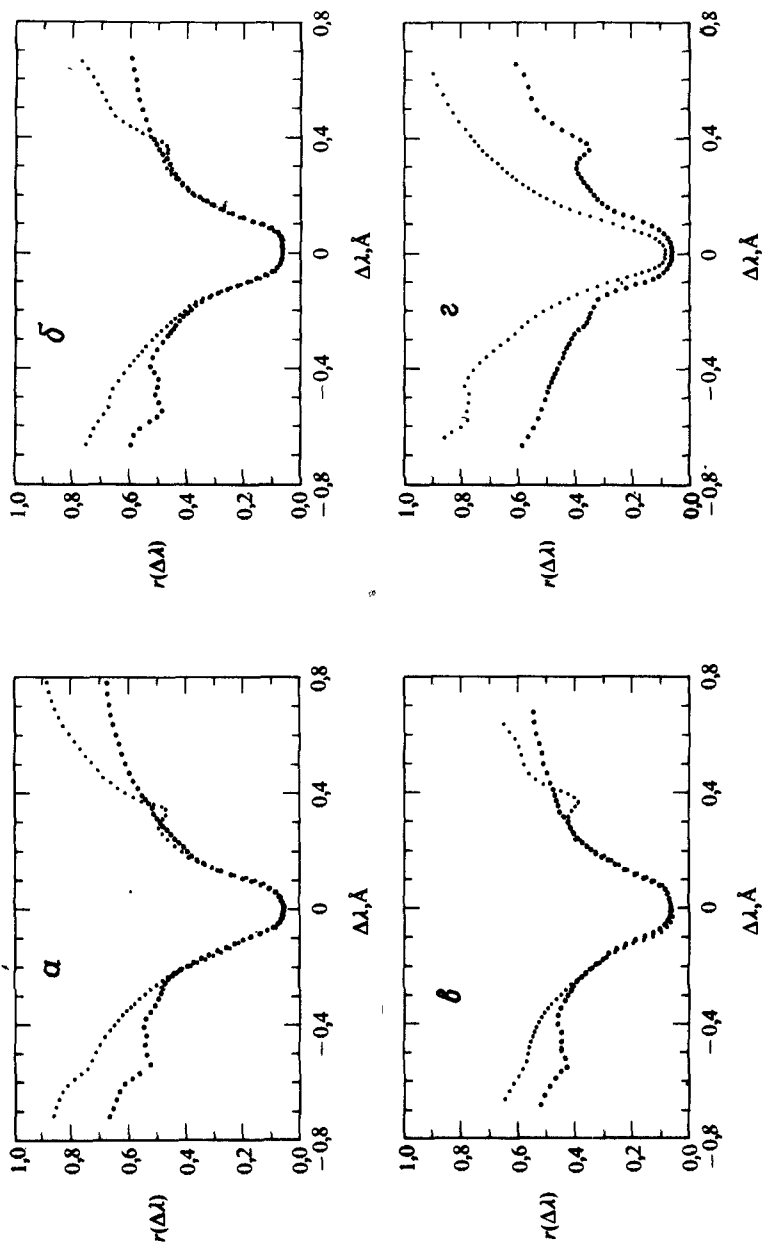


Рис. 12.6. Сравнение $I_{12}(0, \mu/2, \nu)$ с $I_{13}(0, \mu, \nu)$ для солнечных D-линий Na: а) $\mu = 1$; б) $\mu = 0.8$; в) $\mu = 0.6$; г) сравнение $I_{12}(0, \mu, \nu)$ с $I_{13}(0, \mu/2, \nu)$ при $\mu = 1$; обратите внимание на отсутствие какого-либо согласия в этом случае. (По [655], с разрешения.)

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ В МУЛЬТИПЛЕТАХ

Рассмотрим теперь, как формулируется и решается задача о переносе излучения в совокупности линий мультиплета, возникающего при переходах с одного нижнего уровня на два (или более) верхних уровня, которые связаны друг с другом за счет столкновений. Для простоты пренебрежем вынужденным излучением и взаимодействием с континуумом, а также различием в частотах линий. Все это, конечно, можно учесть, однако формулы становятся гораздо более громоздкими, хотя описываемая ими физика существенно не изменяется. Функция источников для перехода $1 \rightarrow j$ равна

$$S_{1j} = (2h\nu^3/c^2)g_1 n_j / g_1 n_1. \quad (12.19)$$

Искомые отношения населенностей получаются из уравнений статистического равновесия. Для случая, когда имеются только два верхних уровня, они выглядят следующим образом:

$$n_2(A_{21} + C_{21} + C_{23}) = n_1(B_{12}\bar{J}_{12} + C_{12}) + n_3C_{32}, \quad (12.20a)$$

$$n_3(A_{31} + C_{31} + C_{32}) = n_1(B_{13}\bar{J}_{13} + C_{13}) + n_2C_{23}, \quad (12.20b)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{J}_{1j}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} J_{1j}(\tau, \nu) \phi_j(\tau, \nu) d\nu = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\nu \phi_j(\tau, \nu) \int_{-1}^1 d\mu I_{1j}(\tau, \mu, \nu). \end{aligned} \quad (12.21)$$

Используя соотношения между эйнштейновскими коэффициентами и между коэффициентами ударных переходов $C_{ij} = (n_j^*/n_i^*)C_{ji}$, получающиеся из условия детального баланса, а также полагая $\varepsilon_{12} = C_{21}/A_{21}$, $\eta_{12} = C_{23}/A_{21}$, $\varepsilon_{13} = C_{31}/A_{31}$ и $\eta_{13} = C_{32}/A_{31}$, мы можем следующим образом переписать уравнения (12.20) через функции источников вида (12.19):

$$S_{12} = (\bar{J}_{12} + \varepsilon_{12}B_{12} + \eta_{12}S_{13})/(1 + \varepsilon_{12} + \eta_{12}), \quad (12.22a)$$

$$S_{13} = (\bar{J}_{13} + \varepsilon_{13}B_{13} + \eta_{13}S_{12})/(1 + \varepsilon_{13} + \eta_{13}). \quad (12.22b)$$

Из этих уравнений ясно видно, что S_{12} и S_{13} связаны между собой линейно. Мы видим, что при $\eta_{12} = \eta_{13} = 0$ функции источников становятся независимыми. Если же либо $\eta_{12} \gg 1$, либо $\eta_{13} \gg 1$, то $S_{12} \approx S_{13}$. Далее, видно, что если только что приведенные неравенства и не удовлетворяются, но выполнены более слабые ограничения $\eta_{1j} \gg \varepsilon_{1j}$ и $\eta_{1j}S_{1k} \gg \varepsilon_{1j}B_{1j}$, то этого также достаточно, чтобы значения S_{12} и S_{13} были близки, так как в этом случае величины,

описывающие рождение и гибель фотонов в выражении для каждой из функций источников, будут определяться *другой* линией. Можно ожидать, что влияние величин η_{ij} будет отчасти напоминать имеющий место в случае двухуровневого атома переход от линии, контролируемой столкновениями, к линии, контролируемой фотоионизациями (иначе говоря, линии мультиплета могут быть, так сказать, контролируемы конверсией).

Ввиду линейной зависимости между функциями источников, о которой говорилось выше, ясно, что уравнения для обеих функций придется решать совместно. Рассмотрим случай одного нижнего состояния и произвольного числа верхних уровней. Уравнения (12.22) можно заменить более общими:

$$S_{ij} = \alpha_j \bar{J}_{ij} + \sum \beta_{jk} S_{ik} + \gamma_j, \quad (12.23)$$

где сумма распространяется на все верхние уровни. Эту систему можно разрешить относительно S_{ij} (для каждого значения оптической глубины в среде), что приводит к выражению вида

$$S_{ij}(\tau) = \sum a_{jk} \bar{J}_{ik}(\tau) + b_j(\tau), \quad (12.24)$$

Упражнение 12.2. Написать в явном виде выражения (12.24) для случая двух верхних уровней, исходя из уравнений (12.22).

Чтобы написать уравнение переноса, примем теперь в качестве независимой переменной оптическую глубину $\tau = \tau_{ii}$ в какой-нибудь конкретной линии ($1 \rightarrow i$) и обозначим $\gamma_j = d\tau_{ij}/d\tau_{ii} = f_{ij}/f_{ii}$. Тогда для каждой линии ($1 \rightarrow j$) имеем

$$\mu dI_{ij}(\tau, \mu, \nu)/d\tau = \gamma_j \phi_j(\tau, \nu) [I_{ij}(\tau, \mu, \nu) - S_{ij}(\tau)]. \quad (12.25)$$

Введем дискретизацию по глубине, углу и частоте ($\{\tau_d\}$, $\{\mu_m\}$, $\{\nu_n\}$) и выберем ту или иную квадратурную формулу для вычисления интегралов вида (12.21). Если обозначить

$$u_{j,dmn} = u_{ij}(\tau_d, \mu_m, \nu_n) = \frac{1}{2} [I_{ij}(\tau_d, +\mu_m, \nu_n) + I_{ij}(\tau_d, -\mu_m, \nu_n)], \quad (12.26)$$

то формула (12.21) переписывается в виде

$$\bar{J}_{j,d} = \bar{J}_{ij}(\tau_d) = \sum w_{mn} \phi_j(\tau_d, \nu_n) u_{j,dmn}. \quad (12.27)$$

Уравнение переноса можно тогда записать в дискретизованной

форме:

$$\mu_m^2 d^2 u_{j, dmn} / d\tau^2 = (\gamma_{j, d} \phi_{j, dn})^2 (u_{j, dmn} - \sum_{k=2}^{L+1} a_{jk, d} J_{k, d} - b_{j, d}). \quad (12.28)$$

Здесь $\phi_{j, dn} = \phi_j(\tau_d, \nu_n)$, $a_{jk, d} = a_{jk}(\tau_d)$, $b_{j, d} = b_j(\tau_d)$ и $\gamma_{j, d} = \gamma_j(\tau_d)$, а сумма распространяется на все L рассматриваемых линий (или верхних уровней). Уравнение вида (12.28) можно написать для каждой линии.

Для решения полученной системы можно применить метод Рай-бики. Введем векторы

$$\mathbf{u}_{j, mn} = (u_{j, 1mn}, \dots, u_{j, dmn}, \dots, u_{j, Dmn})^T, \quad (12.29)$$

$$\bar{\mathbf{J}}_j = (\bar{J}_{j1}, \dots, \bar{J}_{j, d}, \dots, \bar{J}_{j, D})^T, \quad (12.30)$$

которые описывают изменение указанных величин с глубиной в интервале $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_D$. Тогда систему (12.28) можно записать в общей форме:

$$\mathbf{T}_{j, mn} \mathbf{u}_{j, mn} + \sum \mathbf{U}_{jk, mn} \bar{\mathbf{J}}_k = \mathbf{K}_{j, mn}, \quad (12.31)$$

где $j = 2, \dots, L + 1$; $m = 1, \dots, M$; $n = 1, \dots, N$. В (12.31) $\mathbf{T}$ — трехдиагональные матрицы размерности D , $\mathbf{U}$ — диагональные матрицы размерности D и $\mathbf{K}$ — вектор той же размерности. Полученные системы решаются одна за другой, и в результате мы получаем

$$\mathbf{u}_{j, mn} = \sum \mathbf{C}_{jk, mn} \bar{\mathbf{J}}_k + \mathbf{D}_{j, mn}, \quad (12.32)$$

где $\mathbf{C}$ — полные матрицы размерности D . Выражения (12.32) подставляются в формулу, являющуюся матричным представлением (12.27), а именно $\bar{\mathbf{J}}_j = \sum_{m, n} W_{j, mn} \mathbf{u}_{j, mn}$. В результате получается

окончательная система вида

$$\sum \mathbf{P}_{jk} \bar{\mathbf{J}}_k = \mathbf{Q}_j, \quad j = 2, \dots, L + 1. \quad (12.33)$$

Здесь каждая $\mathbf{P}_{jk}$ — матрица размерности D , так что вся система имеет порядок LD . Эта система решается затем стандартными численными методами, и в результате находится полная зависимость $\bar{\tau}$ от глубины во всех линиях одновременно. Если учитывается вынужденное излучение, то система становится нелинейной и требует итеративного решения. Метод линеаризации такой задачи описан в [23], стр. 1. Мы не будем обсуждать эту частную процедуру, а вме-

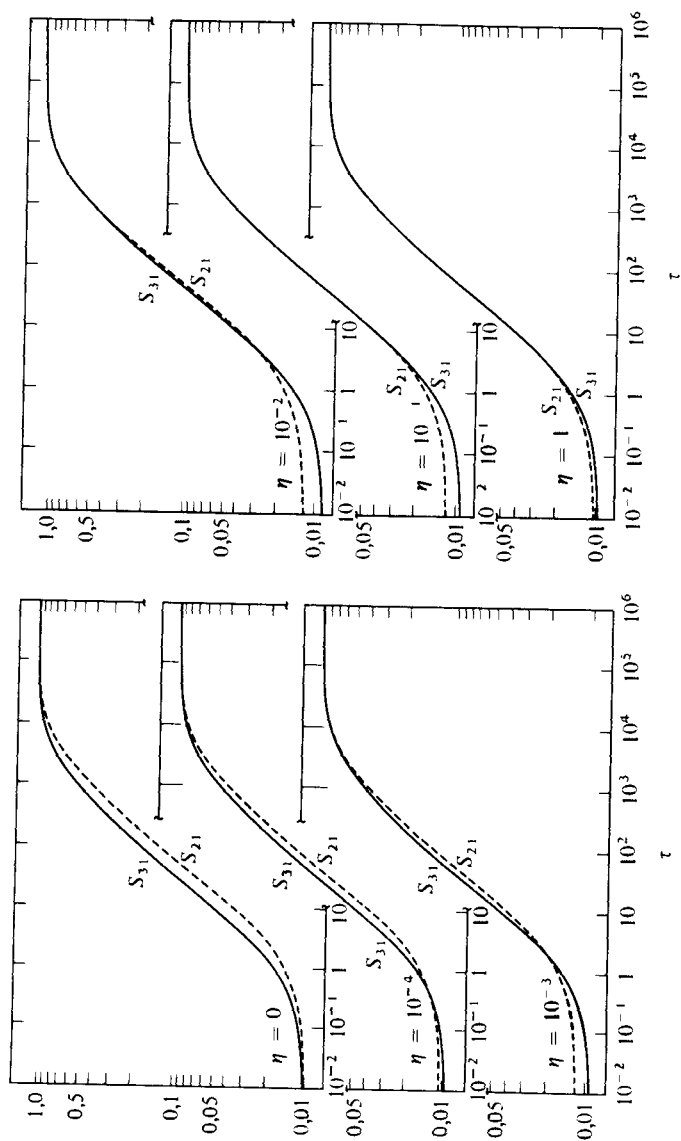


Рис. 12.7. Функции источников для D-линий дублета натрия в полубесконечной атмосфере с $B_{\nu} = \varepsilon = 10^{-4}$ при различных значениях $\eta = \eta_{13}$. (По [51], с разрешения.)

сто этого в §12.3 опишем более общий метод, который позволяет полностью решить и эту задачу, и многие другие.

Для изучения D-линий натрия был использован [51] метод интегральных уравнений, по существу эквивалентный решению описан-

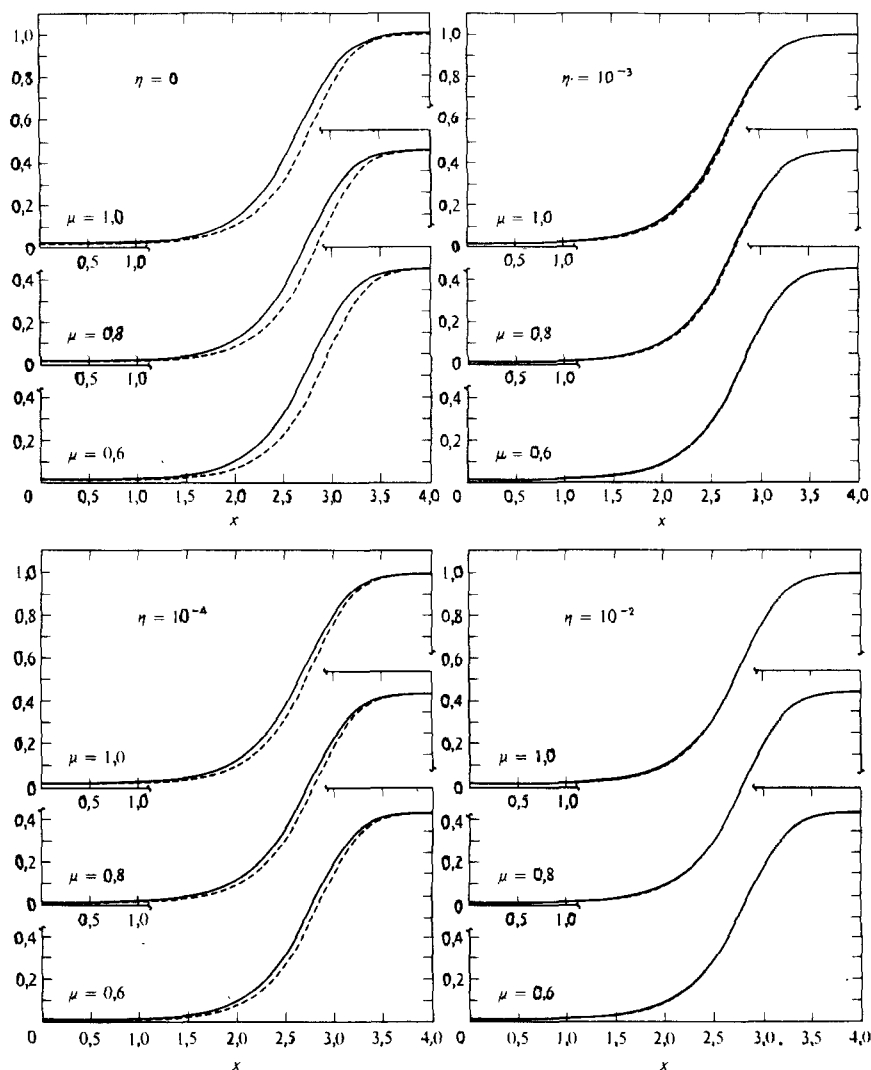


Рис. 12.8. Сравнение профилей $I_{12}(0, \mu/2, \nu)$ с $I_{13}(0, \mu, \nu)$ при различных значениях η и $\mu = 1; 0,8; 0,6$. Сплошные кривые дают I_{13} , пунктир — I_{12} . Абсцисса — расстояние от центра линии в доплеровских ширинах. (По [51], с разрешения.)

ной выше системы, причем брались схематические модели атома и атмосферы. Для атомных характеристик этих линий имеем: $g_1 = 2$, $g_2 = 2$, $g_3 = 4$, $A_{31} = A_{21}$, $B_{13} = 2B_{12}$, $C_{21} = C_{31}$. Поэтому $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{13}$ и $\eta_{12} = 2\eta_{13}$. Приняв в качестве основного переход $1 \leftrightarrow 3$, получим $\gamma_2 = 1/2$, $\gamma_3 = 1$. Решения были найдены для ряда типичных значений параметров ε_{13} и η_{13} и нескольких стандартных видов зависимости функции Планка от глубины. На рис. 12.7 представлены результаты для случаев $B_\nu = 1$, $\varepsilon = 10^{-4}$ и $\eta = \eta_{13} = 0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}, 10^{-1}$ и 1. Видно, что хотя для того, чтобы гарантировалось строгое равенство функций источников вплоть до самой поверхности, значение η_{13} должно было бы быть больше 1, их равенство при $\tau \geq 1$, т.е. в области, дающей основной вклад в интенсивность выходящего излучения, обеспечивают уже меньшие значения η_{13} . Интенсивности выходящего излучения для $\mu = 1, 0; 0,8; 0,6$ приведены на рис. 12.8. Ясно видно, что при $\eta = 10^{-3}$ профили очень близки между собой, а при $\eta = 10^{-2}$ они неразличимы. Эти расчеты показывают, что для всех практических целей равенство функций источников *может* приниматься и при $\eta \ll 1$. На самом деле этот результат неудивителен, так как можно было бы заранее *ожидать*, что конверсия фотонов должна преобладать над их термализацией в каждой отдельной линии, как только $\eta \gg \varepsilon$. Было также изучено влияние зависимости температуры от глубины и показано, что когда B_ν с ростом глубины возрастает, значение η , необходимое для обеспечения равенства функций источников, уменьшается (по сравнению со случаем $B_\nu = 1$), если же B_ν убывает с глубиной — то увеличивается. Эти выводы, однако, основаны на рассмотрении частных форм зависимости $B_\nu(\tau)$ и не могут претендовать на общность.

12.3. Метод полной линеаризации

В свете всего сказанного в этой главе легко понять, что влияние эффектов взаимосвязи переходов в задачах об образовании линий многоуровневых атомов очень существенно, чрезвычайно сложно и его учет приводит к системам уравнений, которые могут быть плохо обусловленными. Ни один из методов, обсуждавшихся нами до сих пор, не является вполне подходящим для решения многоуровневых задач. Метод эквивалентных двухуровневых атомов перестает работать, когда между линиями имеется сильная взаимозависимость. Метод, разработанный для исследования образования мультиплетов, является узкоспециализированным. Нам нужен такой метод, который был бы общим, гибким, достаточно эффективным в

отношении его вычислительных возможностей и таким, чтобы он позволил преодолеть все сложности, обусловленные физикой проблемы. Всем этим требованиям удовлетворяет *метод полной линеаризации* [42]. В этом методе при решении уравнения переноса с самого начала целиком учитываются ограничения, налагаемые на решение *всей совокупностью* уравнений статистического равновесия (путем линеаризации их по всем населенностям уровней и по входящим в них интенсивностям излучения). Уравнения статистического равновесия описывают физические процессы взаимодействия фотонов с веществом, их рождения, гибели, конверсии, дробления и взаимного влияния в том коллективном ансамбле, понятие о котором ввел Джеффрис. Уравнения же переноса определяют, каким образом эта информация распространяется с одной глубины на другую. С помощью процедуры линеаризации выводится совокупность уравнений, которые вполне последовательно (с точностью до членов первого порядка) описывают реакцию вещества в *любой* данной точке атмосферы на изменение поля излучения на *любой* частоте и в *любой* точке по глубине. И наоборот, те же уравнения описывают ответную реакцию поля излучения во *всех* частотах и во *всех* точках среды на изменение свойств вещества в *любой* точке. Если эта система решена (итеративно), то тем самым получено совместное решение всей совокупности уравнений статистического равновесия и переноса излучения. Это решение отражает как нелокальный характер процесса переноса излучения (проявляющийся в том, что значения длин гибели и конверсии фотонов неизменно оказываются большими, а это приводит к сложным взаимодействиям со свободной поверхностью на границе среды), так и весьма тонкую инфраструктуру уравнений статистического равновесия. Этот метод предоставил в наше распоряжение практическую возможность рассчитывать очень сложные модели атомов, находящихся в условиях, очень близких к реальности.

Мы рассмотрим задачу о статистическом равновесии многоуровневных атомов «примесного» элемента, который не влияет на структуру атмосферы. Модель атмосферы считается *заданной*. Это значит, что температура T , электронная концентрация n_e , плотность вещества ρ и полная концентрация рассматриваемой примеси $n_{\text{атом}}$ являются заданными фиксированными функциями глубины. Предполагается, что атом имеет L дискретных уровней, относящихся, возможно, к различным стадиям ионизации. Уравнения статистического равновесия записываются таким образом, что ими учитываются все переходы между всеми уровнями; задается также

условие равенства полной концентрации атомов и ионов рассматриваемого элемента величине $n_{\text{атом}}$. Эти уравнения будут иметь тот же общий вид, что и M_{He} первых строк матрицы, приведенной в

§ 5.4, дополненных уравнением $\sum_{i,j} n_{ij} = n_{\text{атом}}$. Для облегчения из-

ложения сделаем упрощающее предположение, что на любой заданной частоте ν_n возможен только один переход (скажем, $l \rightarrow u$) между состояниями атома, за счет которого он может взаимодействовать (при связанно-связанных или связанно-свободных переходах) с полем излучения, а все остальные источники поглощения и испускания излучения на этой частоте считаются заданными и фиксированными.

Уравнение переноса, которое надо решить для каждой частоты, имеет вид

$$\partial^2(f_\nu J_\nu)/\partial \tau^2 = J_\nu - \eta_\nu/\chi_\nu. \quad (12.34)$$

Согласно формулам (7.1) и (7.2), коэффициенты поглощения и излучения на частотах связанно-связанного перехода можно записать в виде

$$\chi_\nu = \alpha_{lu}(\nu)(n_l - g_l n_u/g_u) + X_\nu, \quad (12.35a)$$

$$\eta_\nu = (2h\nu^3/c^2)\alpha_{lu}(\nu)g_l n_u/g_u + E_\nu, \quad (12.35b)$$

а на частотах связанно-свободного перехода — в виде

$$\chi_\nu = \alpha_{lu}(\nu)[n_l - n_u(n^*_l/n^*_u)\exp(-h\nu/kT)] + X_\nu, \quad (12.36a)$$

$$\eta_\nu = (2h\nu^3/c^2)\alpha_{lu}(\nu)n_u(n^*_l/n^*_u)\exp(-h\nu/kT) + E_\nu, \quad (12.36b)$$

где X_ν и E_ν считаются заданными. Для унификации обозначений положим

$$\chi_\nu = \alpha_{lu}(\nu)[n_l - G_{lu}(\nu)n_u] + X_\nu, \quad (12.37a)$$

$$\eta_\nu = (2h\nu^3/c^2)\alpha_{lu}(\nu)G_{lu}(\nu)n_u + E_\nu, \quad (12.37b)$$

где $G_{ln}(\nu) = g_l/g_n$ для связанно-связанных переходов и $G_{ln}(\nu) = n_e \Phi_l(T)\exp(-h\nu/kT)$ для связанно-свободных переходов, причем $\Phi_l(T)$ — множитель Саха-Больцмана для уровня l [см. (5.14)]. Система уравнений дискретизуется по глубине точками $\{\tau_d\}$, $d = 1, \dots, D$, и по частоте — точками $\{\nu_k\}$, $k = 1, \dots, K$. Тогда для каждой частоты ν_k уравнение переноса излучения можно

написать в виде (7.37). Эти уравнения линеаризуются, и получаются уравнения вида (7.39), где в данном случае $\delta\chi_{dk}$ и $\delta\eta_{dk}$ даются следующими простыми выражениями:

$$\delta\chi_{dk} = \alpha_{lu}(v_k)[\delta n_{l,d} - G_{lu}(v_k)\delta n_{u,d}], \quad (12.38a)$$

$$\delta\eta_{dk} = (2\hbar v_k^3/c^2)\alpha_{ln}(v_k)G_{lu}(v_k)\delta n_{u,d}. \quad (12.38b)$$

Величины δn можно выразить через изменения характеристик одного только поля излучения, так как предполагается, что T и n_l фиксированы. Согласно уравнениям (5.102) и (7.157), можно поэтому написать

$$\delta n_d = \sum_{k=1}^K \left(\frac{\partial n}{\partial J_k} \right)_d \delta J_{dk}, \quad (12.39)$$

где явные *аналитические* выражения для элементов матриц $\partial n/\partial J_k$, даются формулой (5.108). При помощи выражений (12.38) и (12.39) теперь легко все δn исключить из линеаризованных уравнений переноса *аналитически*, так что туда будут входить лишь δJ [33], и мы получим уравнения в стандартной форме Фотрие

$$-A_d \delta J_{d-1} + B_d \delta J_d - C_d \delta J_{d+1} = L_d, \quad (12.40)$$

где

$$\delta J_d = (\delta J_{d1}, \dots, \delta J_{dk}, \dots, \delta J_{dK})^T \quad (12.41)$$

и

$$A_1 = C_D = 0.$$

Упражнение 12.3. Выписать явные выражения для элементов матриц A_d , B_d и C_d , а также вектора L_d , входящих в уравнение (12.40).

В процедуре линеаризации, описанной в § 7.5, δJ и δn входили в уравнение явным образом. Исключение δn снижает размерность системы с $K + L$ до K , что позволяет сберечь машинную память. Однако в рассматриваемом нами теперь случае A и C — это *полные* матрицы, все элементы которых отличны от нуля, в то время как при прежнем рассмотрении [см. уравнение (7.159)] A и C были *диагональными* (исключая уравнение, выражающее условие гидростатического равновесия, которое в этом разделе для нас несущественно). При выполнении процедуры последовательного исключения неизвестных, описываемой формулами (6.40) и (6.41), во все операции теперь входят полные матрицы, и поэтому необходимое машинное время возрастает. Общее время счета есть теперь $T = cDK^3$, тогда

как прежде оно (§ 7.5) было $T' = c'D(K + L)^3$, но c гораздо больше c' .

Решение уравнений (12.40) осуществляется итерациями, как это описывается ниже. Большим достоинством излагаемого метода является то, что он учитывает взаимное влияние одних глубин на другие и различных частот друг на друга. Точнее говоря, влияние δJ_{dk} в точке (τ_d, ν_k) на $J_{d'k'}$ во всех других точках $(\tau_{d'}, \nu_{k'})$ учитывается вполне последовательно, так что процесс распространения фотонов в составе их коллективного ансамбля оказывается полностью описанным.

Имея в виду реальные применения метода, нам следует теперь обсудить вопрос, как получить исходное приближение и как справиться с тем большим числом линий, которые приходится учитывать при изучении реалистичных моделей атомов. Эти вопросы взаимосвязаны, но особенно важным является второй из них. Предположим, например, что в модели атома учитывается 20 уровней. Согласно правилам комбинаторики, при этом могло бы происходить порядка 200 переходов. Если мы, скажем, возьмем по 10 значений частоты на профиль каждой линии, то задача становится не поддающейся решению. Однако спектроскопические правила отбора, разумеется, сильно ограничивают число линий, которые действительно возможны в спектре, так что при 20 уровнях в типичном случае имеется около 30 разрешенных линий. Но лишь немногие из них будут непосредственно влиять на населенности тех уровней, которые представляют основной интерес при рассмотрении определенного ограниченного набора линий в спектре. Обычно удается разбить всю совокупность переходов на «основные», которые необходимо описывать строго самосогласованно, и «второстепенные», для которых оказывается достаточно менее точного описания. Такое разбиение используется и при нахождении исходного решения.

Для расчета исходного приближения берется модель атмосферы, по ней определяются фоновые коэффициенты поглощения и излучения и рассчитывается поле излучения в предположении равновесных населенностей уровней рассматриваемого атома. Рассчитанные интенсивности излучения используются для вычисления числа фотоионизаций. Затем решаются уравнения статистического равновесия в предположении детального баланса в линиях (но не в континуумах). Поступая таким образом, мы получаем решение с правильной асимптотикой на больших глубинах. После этого для получения $\bar{J}_n$ в каждой линии можно использовать приближение эквивалентного двухуровневого атома.

Найденные значения $\bar{J}$ позволяют рассчитать числа радиативных переходов в линиях. После этого можно решить полные уравнения статистического равновесия, что даст улучшенные значения населенностей уровней. Этот процесс можно повторить несколько раз, расширив его путем включения для непрозрачных континуумов аналога решения в приближении двухуровневого атома, описываемого в § 7.5 [см. формулы (7.135) — (7.144)]. Описанный только что процесс можно было бы в принципе повторять до достижения сходимости. В итоге мы пришли бы к методу, описанному в § 12.1. Однако в рассматриваемом случае выполняется всего одна или две итерации, и результаты принимаются в качестве начальных приближенных значений n , J и эддингтоновских множителей, необходимых, чтобы можно было начать использовать процедуру линеаризации. Начиная с этого места и далее, числа радиативных процессов во «второстепенных» линиях оставляются неизменными, равными их значениям, получаемым в приближении эквивалентных двухуровневых атомов, а в линеаризационном процессе явно участвуют лишь «основные» линии. Такой подход даст адекватное описание *второстепенных* линий, если они были выбраны удачно и если а) они очень слабы, так что определяются процессами излучения и поглощения в континууме, на который они накладываются, или б) они действительно изолированы и поэтому достаточно точно описываются моделью двухуровневого атома, или же в) они *очень слабо* связаны с линиями, представляющими основной интерес, несмотря на то, что они, скажем, входят в состав мультиплета и приближение двухуровневого атома для них является плохим.

Пользуясь тем начальным приближением, способ получения которого был только что описан, решаем затем линеаризованные уравнения (12.40) и находим δJ на всех глубинах. По полученным δJ уточняем поле излучения. После этого приводим в соответствие с этим уточненным полем излучения значения членов уравнений статистического равновесия, описывающих радиативные переходы, и заново решаем эти уравнения, что дает новые значения населенностей уровней. По этим новым населенностям можно рассчитать коэффициенты поглощения и излучения, затем подставить их в формальное решение уравнения переноса (A -итерация) и найти поле излучения и эддингтоновские множители (на этом шаге достигается также сглаживание решения). Метод обычно сходится очень быстро, давая $||\delta J/J|| \leq 10^{-5}$ за 4 или 5 итераций с типичным уменьшением погрешности на порядок с каждой итерацией. Именно эта схема использовалась при получении большинства результатов, об-

суждаемых в § 12.4. Детальное описание одного конкретного варианта этого метода, включая программу, рассчитанную на применение к атмосфере Солнца, дается в [36].

Трудность для развитого выше подхода, основанного на методе Фотри, заключается в том, что при учете большого числа точек разбиения по частоте расчеты становятся дорогостоящими. Эту трудность, однако, можно преодолеть при помощи нового способа [37], в котором исключение неизвестных производится по схеме Райбики. Предположим опять, что на частоте ν_k возможен только один переход с номером t , происходящий между уровнями l и u . Для этой конкретной частоты линеаризованное уравнение переноса (7.39) с учетом формул (12.38) можно записать в виде

$$\mathbf{T}_k \delta \mathbf{J}_k + \mathbf{L}_k \delta \mathbf{n}_l + \mathbf{U}_k \delta \mathbf{n}_u = \mathbf{R}_k, \quad (12.42)$$

где каждый вектор приращений содержит информацию об изменении той или иной величины с *глубиной*, например

$$\delta \mathbf{J}_k = (\delta J_{1k}, \dots, \delta J_{dk}, \dots, \delta J_{Dk})^T, \quad (12.43)$$

а матрицы $\mathbf{T}_k$, $\mathbf{L}_k$ и $\mathbf{U}_k$ имеют размерность D и являются трехдиагональными. Уравнения (12.42) можно разрешить относительно $\delta \mathbf{J}_k$ и записать результат в виде

$$\delta \mathbf{J}_k + \mathcal{L}_k \delta \mathbf{n}_l + \mathcal{U}_k \delta \mathbf{n}_u = \vec{\mathcal{R}}_k, \quad (12.44)$$

где теперь $\mathcal{L}$ и $\mathcal{U}$ — полные матрицы, т.е. матрицы, все элементы которых ненулевые. Далее, основными из входящих в уравнения стационарности величин, зависящих от поля излучения, являются *числа несбалансированных радиативных переходов*, проинтегрированные по каждой из рассматриваемых линий. Поэтому введем их вариации, определив их следующим образом:

$$\begin{aligned} (\delta \mathbf{Z}_t)_d &= n_{l,d} \delta R_{lu,d} - n_{u,d} \delta R_{ul,d} = \\ &= \sum_k [4\pi w_k \alpha_{lu}(\nu_k) / h\nu_k] [n_{l,d} - G_{lu}(\nu_k) n_{u,d}] \delta \mathbf{J}_{dk}, \end{aligned} \quad (12.45)$$

где сумма распространяется только на те частоты, которые лежат в пределах линии с номером t . Если в (12.45) подставить $\delta \mathbf{J}_k$ из (12.44) и выполнить необходимые суммирования, то окончательно получим

$$\delta \mathbf{Z}_t + \mathbf{A}_t \delta \mathbf{n}_l + \mathbf{B}_t \delta \mathbf{n}_u = \mathbf{C}_t, \quad (12.46)$$

где $\mathbf{A}_t$ и $\mathbf{B}_t$ — полные матрицы.

Упражнение 12.4. а) Написать явные выражения для элементов матриц T_k , L_k и U_k , а также вектора R_k , входящих в уравнение (12.42). б) Предполагая, что матрицы $\mathcal{L}_k$, $\mathcal{U}_k$ и вектор $\mathcal{R}_k$ известны, написать явные выражения для элементов A_t , B_t и C_t в уравнении (12.46).

Из (5.108) и (12.39) следует, что можно написать

$$\delta n_m = \sum_i D_{mi} \delta Z_i, \quad (12.47)$$

где D_{mi} — диагональная матрица с элементами $(D_{mi})_d = (\partial n_m / \partial Z_i)_d = (\mathcal{A}_d^{-1})_{mj} - (\mathcal{A}_d^{-1})_{mi}$. Здесь $\mathcal{A}_d$ — невозмущенная матрица для точки разбиения по глубине с номером d , а i и j — номера нижнего и верхнего уровней линии с номером t . Подставив выражение (12.47) в уравнение (12.46), получим систему

$$\begin{aligned} E \delta Z_t &\equiv (I + A_t D_{tt} + B_t D_{ut}) \delta Z_t = \\ &= C_t - A_t \sum_{i' \neq t} D_{ti'} \delta Z_{i'} - B_t \sum_{i' \neq t'} D_{ui'} \delta Z_{i'}, \end{aligned}$$

причем для каждого перехода, т.е. для каждого t , будет по одному такому уравнению.

Полный порядок системы (12.48), которая описывает всевозможные взаимодействия между линиями (их взаимосвязь) на всех глубинах, равен DT . Непосредственное решение этих уравнений требовало бы поэтому времени порядка $T_D = cD^3T^3$, которое при, скажем, $T \approx 20$ и $D \approx 50$ становится уже неприемлемо большим. Поэтому система решается итерациями при помощи метода поэтапного учета воздействия линий (ПУВ) [526], стр. 438. В этом методе используются два основных итерационных цикла: а) итерация ПУВ для получения определенного набора значений δZ_t , $t = 1, \dots, T$, на данном этапе линеаризации и б) общая процедура метода линеаризации, при которой последовательные совокупности значений δZ_t используются для обновления значений членов, дающих числа переходов, после чего заново решаются полные уравнения статистического равновесия. Процедура ПУВ начинается с решения систем $E_t \delta Z_t^{(0)} = C_t$, $t = 1, \dots, T$. Это начальное решение требует cD^3T операций, причем разрешенные относительно неизвестных системы (или, что эквивалентно, E_t^{-1}) сохраняются в памяти. Затем для каждого набора текущих значений величин δZ_t можно

вычислить правую часть уравнения (12.48), последовательно для каждой линии (заметим, что эта процедура требует лишь перемножения векторов и поэтому выполняется очень быстро). Это дает некоторый определенный вектор известных значений правой части. При помощи ранее найденной E_i^{-1} получаются новые значения величин δZ_i . Каждый цикл процедуры ПУВ требует cD^2T^2 операций, так что если необходимо произвести I итераций, то полное время вычислений оказывается порядка $T_{\text{пув}} = cD^3T + c'ID^2T^2$. Ясно, что если $I < DT$, то это значительно меньше T_D .

Путем проведения тестовых расчетов найдено [37], что этот метод работает хорошо, несмотря на то, что итерации ПУВ напоминают метод эквивалентных двухуровневых атомов в том отношении, что на каждом шаге рассматривается только одна линия. Причина заключается в том, что эта часть расчетов требуется лишь для определения величин δZ , т.е. является всего лишь одним шагом общей процедуры метода полной линеаризации (который как раз специально и предназначен для того, чтобы позволить последовательно учитывать все эффекты взаимосвязи). Ввиду того что в методе линеаризации должны выполняться дальнейшие этапы итераций, нет необходимости на каждой данной стадии знать величины δZ точно. Достаточно такой точности, чтобы *ошибка* текущих значений δZ , была меньше значений *самых величин* δZ , на следующем этапе линеаризационной процедуры. На практике хорошо работает требование

$$|\delta Z_i^{(i)} - \delta Z_i^{(i-1)}| < \varepsilon |\delta Z_i^{(i)}|$$

(где i означает номер итерации в методе ПУВ), если ε положить равным примерно 10^{-2} . Оказалось, что оба метода, описанные в этом разделе, очень эффективны для решения широкого круга физических задач, связанных с рассмотрением различных атомов в звездных атмосферах разных типов. Теперь обратимся к обсуждению некоторых результатов, полученных для звезд ранних типов.

12.4. Линии легких элементов в спектрах звезд ранних типов

Совместное изучение системы уравнений переноса и статистического равновесия позволило глубоко проникнуть в физику образования линий в звездных атмосферах. Однако одновременно выяснилось, что, когда учитываются отклонения от ЛТР, уравнения, которые необходимо решить, становятся крайне сложными и требу-

ют для своего решения специальных методов (которые в вычислительном отношении являются довольно дорогими). Поэтому значительный интерес представляют ответы на следующие вопросы: действительно ли отклонения от ЛТР оказывают заметное влияние на реальные звездные спектры. Вносим ли мы серьезные ошибки в определение химического состава и физических условий в атмосферах, когда пренебрегаем отклонениями от ЛТР. Имеются ли области спектра, участки диаграммы $\Gamma - R$ или те или иные виды атомов и ионов, относительно которых можно со всей категоричностью заявить, что использование предположения об ЛТР является для них оправданным или же, напротив, приводит к ошибочным выводам. С практической точки зрения важно знать, когда при анализе звездных спектров достаточно предположения об ЛТР, так как в этом случае объем необходимой вычислительной работы значительно меньше. Не менее важно знать и то, когда результатам, полученным путем такого анализа, доверять *нельзя*. Ответить на поставленные только что вопросы удалось лишь совсем недавно, когда стало возможно получение точных численных решений уравнений переноса при отсутствии ЛТР для сложных многоуровневных моделей атомов при принятии реалистичных моделей атмосфер. Они были найдены на больших ЭВМ по программам, в основе которых лежат описанные в этой главе методы. Теперь известно, что влияние отклонений от ЛТР в некоторых случаях, представляющих существенный интерес и имеющих большое значение, действительно приводит к существенным эффектам, и что учет отклонений от ЛТР позволяет устранить большое число серьезных расхождений между теорией и наблюдениями. Ниже будут приведены кое-какие из полученных к настоящему времени результатов. За дальнейшими подробностями следует обратиться к цитированным выше работам, а также к обзорам [433], [434], [435]. Не будет преувеличением сказать, что работа в этой важной области, по существу, едва начинается, и дальнейшие исследования должны будут дать еще многое.

Со многих точек зрения для атмосфер звезд ранних типов главным является спектр водорода. Дело не только в том, что профили водородных линий служат эффективным средством определения таких основных параметров атмосферы звезды, как эффективная температура и ускорение силы тяжести на поверхности. Следует также ясно отдавать себе отчет в том, что у звезд ранних типов именно водород определяет перенос излучения в большей части спектра. Отсюда следует, что серьезные расхождения между теорией и наб-

людениями для водородных линий должны отражать глубокие расхождения в основных характеристиках поля излучения. Хотя для В- и А-звезд между теоретическими и наблюдаемыми профилями линий водорода обычно получается очень хорошее согласие (см. §10.5), в случае О-звезд ($T_{\text{эфф}} > 30000 \text{ K}$) были обнаружены сильные расхождения. Основная проблема заключается в том, что в спектрах О-звезд в интервале от О9 до О5 наблюдаемые линии водорода имеют почти постоянную интенсивность (что можно увидеть по фотографиям, приводимым в [465] или в [5]), тогда как эквивалентные ширины, рассчитанные в предположении ЛТР, в соответствующем температурном интервале ($30000 \text{ K} \leq T \leq 50000 \text{ K}$) вследствие возрастания степени ионизации водорода заметно уменьшаются. Такое уменьшение можно было бы отчасти компенсировать, приняв для моделей большее значение ускорения силы тяжести, однако тогда возникают другие противоречия. Оказалось, что в типичных случаях положение следующее [420]. Если добиться согласия между наблюдаемыми и рассчитанными по моделям с ЛТР эквивалентными ширинами линий водорода, то необходимые для этого ускорения силы тяжести получаются слишком большими (примерно в три раза) по сравнению со значениями, следующими из фундаментальных измерений масс и радиусов звезд, или с теми, которые вытекают из расчетов внутреннего строения этих звезд. Аналогично, если производится детальное сравнение *профилей* линий [510], то обнаруживается, что если добиться согласия в крыльях линий, то ядра линий, рассчитанные в предположении ЛТР, оказываются слишком слабыми. Эти несоответствия исчезают, если учесть отклонения от ЛТР [436], [45]. Оказывается, что при отсутствии ЛТР линии всегда гораздо сильнее, чем при ЛТР, как это можно видеть на рис. 12.9 для одной из типичных моделей. Сравнение наблюдаемых эквивалентных ширин H_β с теоретическими, рассчитанными с ЛТР и без ЛТР, приведено на рис. 12.10. Сразу же видно, что результаты расчетов без предположений об ЛТР находятся в гораздо лучшем согласии с наблюдениями. При ЛТР эквивалентные ширины систематически меньше, в самых крайних случаях в $3 \div 5$ раз (см. также [174]). Более того, используя расчеты, проведенные без предположения об ЛТР, удастся добиться превосходного согласия с наблюдаемыми профилями. Это можно установить, если сопоставить между собой результаты, приводимые в работах [510] и [45]; в них использовался один и тот же наблюдательный материал. Короче говоря, учет отклонений от ЛТР приводит к *значительному* улучшению согласия между теоретиче-

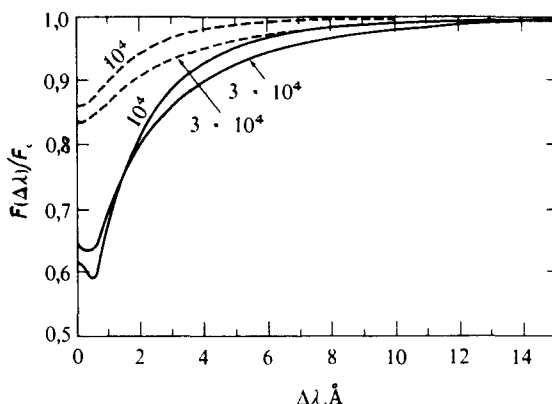


Рис. 12.9. Профили H_{α} , рассчитанные по моделям атмосфер О-звезд с $T_{\text{эфф}} = 45\,000$ К. Числа у кривых — значения ускорения силы тяжести. По оси абсцисс отложены расстояния от центра линии в Å, по оси ординат — значения остаточного потока. Сплошные кривые — профили при отсутствии ЛТР, пунктир — профили при ЛТР. Обратите внимание на заметное усиление линии за счет эффектов, связанных с отклонениями от ЛТР. (По [45], с разрешения.)

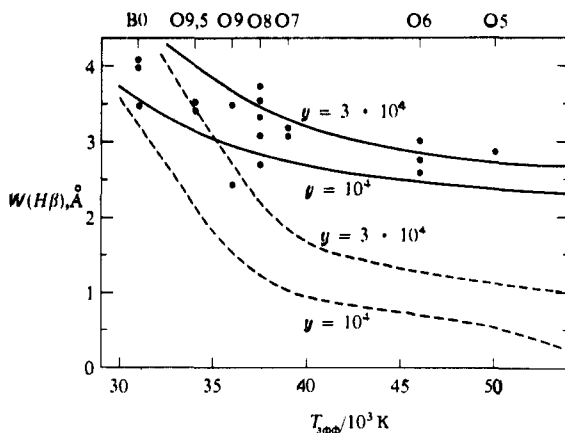
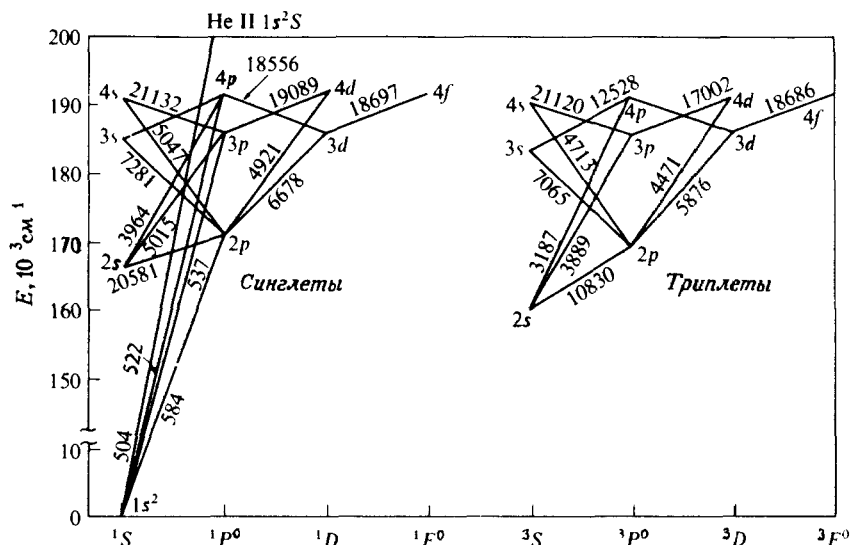


Рис. 12.10. Эквивалентные ширины H_{β} в спектрах О-звезд. Сплошные кривые — расчет без предположения об ЛТР, пунктир — расчет при принятии ЛТР; точки — наблюдаемые значения [693]. По оси ординат отложены эквивалентные ширины в Å, по оси абсцисс — значения $T_{\text{эфф}}/10^3$ и спектральные типы.

скими и наблюдаемыми профилями линий водорода у О-звезд. У В-звезд отклонения от ЛТР влияют на водородные линии гораздо меньше, и для такой линии, как H_γ , ЛТР обеспечивает очень хорошее приближение. Некоторые существенные эффекты имеются у H_α [511], [430], где отклонения от ЛТР порождают более глубокое, чем при ЛТР, ядро линии и более мелкие крылья. Второй из этих эффектов возникает из-за того, что на тех глубинах, где образуются крылья H_α , имеем $b_3 > b_2$ (см. § 7.5), и поэтому $S_{23} > B(\nu_{23}, T)$. Эти изменения, предсказываемые теорией, были подтверждены наблюдениями.

После водорода следующим по важности элементом в звездных атмосферах является гелий. В спектрах В-звезд он представлен линиями He I, в спектрах О-звезд — линиями и He I, и He II. Эти линии можно использовать для определения содержания гелия $N(\text{He})/N(\text{H})$; у О-звезд отношение интенсивностей линий He II и He I служит очень чувствительным индикатором температуры. Расчеты линий He I В-звезд, выполненные в предположении об ЛТР, дали прекрасное согласие с наблюдениями для линий, расположенных в голубой и фиолетовой областях спектра (см., например, [390], [480], [481]), особенно если использовать наилучшую из имеющихся теорию уширения линий. Однако линии, лежащие в желто-красной области (например, $\lambda 5876$ ($2p^3P - 3d^3D$) и $\lambda 6678$ ($2p^1P - 3d^1D$), в спектрах В-звезд всегда оказываются более сильными, чем дают расчеты, основанные на предположении об ЛТР, в которых используются те же самые модели атмосфер и то же содержание гелия, что и при расчетах фиолетовых и голубых линий. Если подходить формально, то эти линии указывают на почти втрое большее содержание гелия, чем то, которое дают фиолетовые и голубые линии. Если же провести детальный расчет с учетом отклонений от ЛТР [46], пользуясь достаточно близкой к реальности моделью атома (рис. 12.11), то оказывается, что упомянутые выше линии значительно усиливаются, и получается хорошее согласие с наблюдениями, иллюстрируемое на примере линии $\lambda 6678$ на рис. 12.12. Интересно отметить, что наибольшее влияние отклонения от ЛТР оказывают на линии с наименьшими значениями $h\nu$. Действительно, как упоминалось в § 5.3, для этих линий со сравнительно малыми $h\nu/kT$ число ударных переходов сравнимо с числом радиативных переходов и поэтому, согласно классической аргументации, эти линии должны описываться теорией, основанной на предположении об ЛТР. Истинную причину большого влияния отклонения от ЛТР можно выявить, изучив функцию источников в



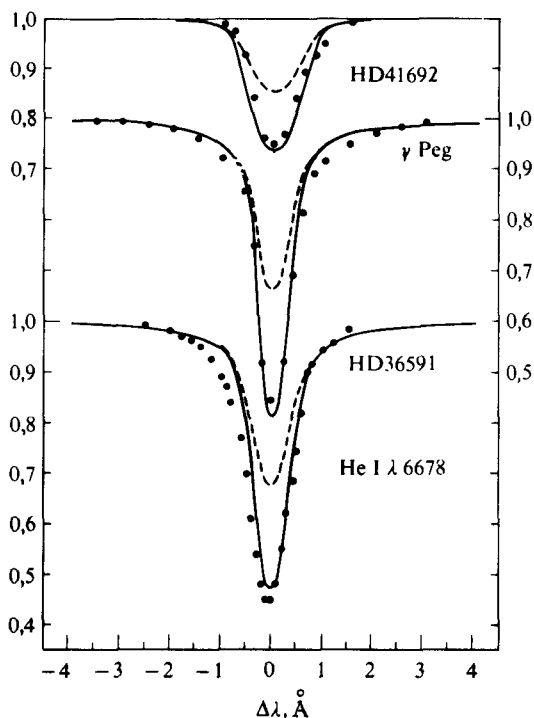


Рис. 12.12. Сравнение наблюдаемых [390] профилей линии $\lambda 6678$ He I (точки) с рассчитанными с учетом (сплошные кривые) и без учета (пунктир) отклонений от ЛТР для трех В-звезд. По оси ординат — остаточный поток, по оси абсцисс — расстояние от центра линии в Å. (По [46], с разрешения.)

няют, почему даже ничтожные отклонения от ЛТР оказывают очень большое влияние на рекомбинационные радиолнии, наблюдаемые в спектрах туманностей [199]. У О-звезд теория, исходящая из ЛТР, предсказывает слишком слабые линии как для He I, так и для He II. Если попытаться согласовать теоретические и наблюдаемые эквивалентные ширины, не обращая внимания на профили линий [420], то получающееся содержание гелия оказывается примерно вдвое большим значений, найденных у В-звезд и у тех входящих в межзвездную среду туманностей, из которых О-звезды только что образовались. Если добиться согласия между теорией и наблюдениями для крыльев линий [510], то опять оказывается, что у теоретических профилей ядра линии слишком слабы. В противоположность этому расчеты с учетом отклонений от ЛТР [45] приводят к

превосходному согласию с наблюдаемыми интенсивностями и профилями линий при «стандартном» содержании гелия: $N(\text{He})/N(\text{H}) = 0,1$ (см. также [174], [175]).

Отклонения от ЛТР могут иногда вызывать *большие* ошибки в определениях химического состава, основанных на принятии ЛТР. Например, определения содержания Mg у O-звезд, основанные на постулировании ЛТР, дают ошибку в десять и более раз [431]. Если же произвести расчеты, не предполагая ЛТР, то, как видно из рис. 12.13, согласие с наблюдениями получается при содержании Mg, близким к солнечному (и обычно принимаемому «космическому» его содержанию, см. также [384], [586]). Аналогично обычный ЛТР-анализ спектра NeI у В-звезд давал его содержание, равное $5 \cdot 10^{-4}$ по отношению к водороду, что не согласуется со значением 10^{-4} , полученным для туманностей, солнечной короны, солнечного ветра и космических лучей (как галактического, так и солнеч-

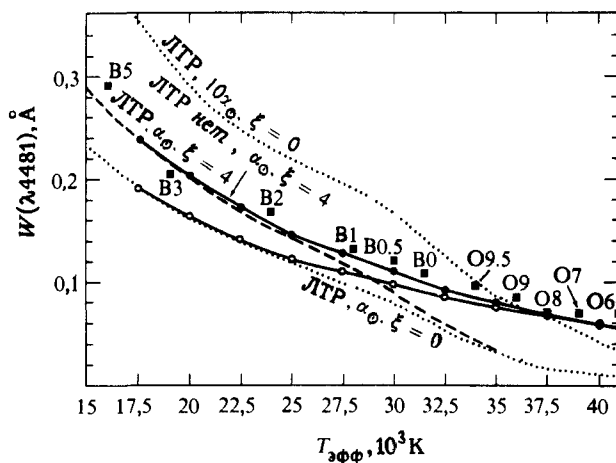


Рис. 12.13. Эквивалентная ширина линии $\lambda 4481$ Mg II в спектрах В- и О-звезд. По оси ординат отложены эквивалентные ширины в Å, по оси абсцисс — $T_{\text{эфф}}/10^3$. Квадратики — наблюдаемые значения для звезд указанных спектральных типов. Точечные кривые — расчет при принятии ЛТР и солнечного, а также удесятеренного солнечного содержания Mg при отсутствии микротурбулентности; штриховая кривая — солнечное содержание Mg, микротурбулентная скорость 4 км/с; сплошные кривые — расчеты с учетом отклонений от ЛТР при принятии солнечного содержания Mg и скорости микротурбулентности, равной нулю (кружочки) и 4 км/с (точки). Отметим, что в случае О-звезд значение скорости микротурбулентности не влияет на результат, а также то, что при принятии ЛТР эквивалентные ширины получаются слишком малыми, тогда как результаты, полученные с учетом отклонений от ЛТР, хорошо согласуются с наблюдениями.

ного происхождения). И здесь расхождение устраняется, если произвести расчет с учетом отклонений от ЛТР [47], причем выясняется, что линии He I, расположенные преимущественно в красной области спектра, подвержены влиянию по сути дела того же механизма, который описывался выше для He I. Наконец, влияние отклонений от ЛТР существенно сказывается на линиях Si III и Si IV у В-и О-звезд [349]. Учет отклонений от ЛТР увеличивает полные интенсивности этих линий на 50 — 70%, а интенсивности в ядрах линий уменьшаются по сравнению с их значениями при ЛТР на множитель 0,6. Чтобы получить линии такой интенсивности при ЛТР, потребовалось бы содержание Si в 5 — 7 раз большее солнечного. Короче говоря, имеются достаточные доказательства того, что по крайней мере в случае звезд ранних типов учет отклонений от ЛТР может приводить к большим и имеющим важное значение изменениям в оценках содержания элементов.

Еще одно явление, для которого отклонения от ЛТР в атмосферах звезд ранних типов имеют важное значение, — это появление в их спектрах ярких линий. Например, у Of-звезд линии $\lambda 4686$ He II, $\lambda 5696$ C III и $\lambda \lambda 4634-41$ NIII видны в эмиссии, а другие линии те же ионов — в поглощении. Для линии $\lambda 4686$ He II изучались механизмы ее селективного возбуждения [45] и влияние протяженности атмосферы в рамках статистических моделей [376]. Хотя слабые эмиссионные линии в этих работах и были получены, совершенно ясно, что количественного согласия с наблюдениями можно будет добиться только при учете крупномасштабного расширения атмосферы (см. гл. 14 и 15). Линии CIII еще пока не анализировались. Что касается линий NIII, то имеется подгруппа Of-звезд, обозначаемая O((f)), у которых в линиях NIII наблюдается слабая эмиссия, а линия HeII $\lambda 4686$ видна в поглощении [657]. Оказалось, что это объекты, близкие к главной последовательности, у которых эффектами протяженности и расширения атмосферы, если они и имеются, можно пренебречь. Детальный расчет дублетного спектра NIII, выполненный с учетом отклонений от ЛТР [429], [440], [443], [433], дал правдоподобное объяснение того, каким образом линии $\lambda \lambda 4634-41$ (переход $3p^2P - 3d^2D$) могут быть в эмиссии, тогда как соседний из мультиплетов с низкой энергией возбуждения $\lambda \lambda 4097, 4103$ (переход $3s^2S - 3p^2P$) наблюдается в поглощении. Чтобы добиться такого результата, необходимо найти а) механизм достаточно интенсивного заселения состояния $3d$, чтобы это могло вызвать заметное излучение при переходах $3d \rightarrow 3p$, и б) способ опустошения состояния $3p$, чтобы не могла возникнуть эмиссия при переходе $3p \rightarrow 3s$. Оба этих состояния, $3s$ и $3d$, могут заселяться не-

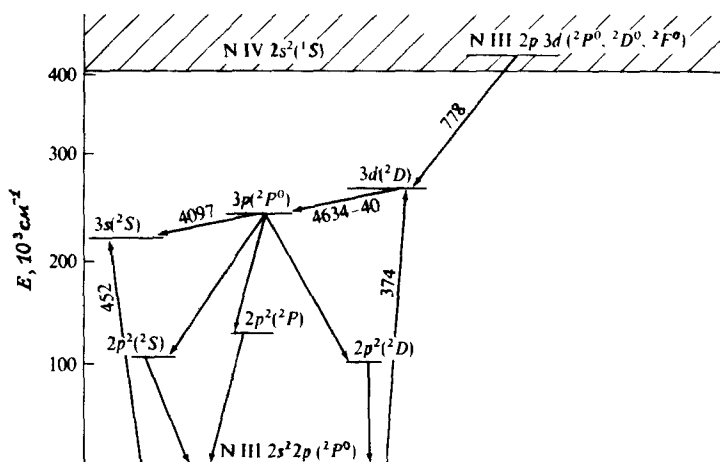


Рис. 12.14. Упрощенная схема термов нижних состояний иона N^{++} , а также его автоионизационное состояние $2s2p(^1P)3d$, с которого диэлектронные рекомбинации могут происходить непосредственно в состояние $2s^23d$, чем вызывается эмиссия у $\lambda\lambda 4634-40$.

посредственно за счет переходов из основного состояния (см. рис. 12.14), и, если интенсивность излучения в ультрафиолетовых линиях $\lambda 374$ и $\lambda 452$ достаточно велика, населенности этих состояний будут большими. Однако в *неподвижных* атмосферах, в резонансных линиях устанавливается детальный баланс, и поэтому очень большой перенаселенности состояния $3d$ не возникает. Более вероятно, что такая перенаселенность создается за счет *диэлектронных рекомбинаций* из состояния $2s2p(^1P)3d$, которое для иона N^{++} оказывается расположенным чуть выше предела ионизации. Стабилизация этого состояния достигается за счет того, что электрон из состояния $2p$ опускается на уровень $2s$, причем это происходит с большей вероятностью. (Этот процесс стабилизирует атом, так как он конкурирует с автоионизацией. — *Ред.*) В результате электроны попадают прямо в состояние $3d$. Эти электроны совершают затем переходы $3d \rightarrow 3p$, создавая эмиссию. Далее, оказывается, что из-за особенностей структуры иона N^{++} наиболее вероятный способ ухода из состояния $3p$ — это не переход $3p \rightarrow 3s$, а двухэлектронный переход $2s2p \rightarrow 2s2p^2$ (см. рис. 12.14). Последний процесс настолько эффективен, что опустошает состояние $3p$, переводя линию, соответствующую переходу $3s \rightarrow 3p$, в поглощение. Поскольку эмиссия в линиях $\lambda\lambda 4634-41$ может возникать в плоских неподвижных

атмосферах исключительно вследствие особенностей строения соответствующего иона, их следует рассматривать как эмиссионные линии, *присущие* этому иону. В *расширяющихся* атмосферах будет происходить прямая накачка на уровни $3s$ и $3d$ при переходах $2p \rightarrow 3s$ и $2p \rightarrow 3d$, так как резонансные линии будут за счет эффекта Доплера смещены в яркий примыкающий к ним континуум и не будут находиться в детальном балансе. Это значительно усиливает эмиссию при переходах $3d \rightarrow 3p$ (чем и объясняется появление этих очень ярких эмиссионных линий у Of-звезд, о которых известно, что у них имеются расширяющиеся оболочки и происходит истечение звездного ветра). Одновременно с этим возросшая населен-

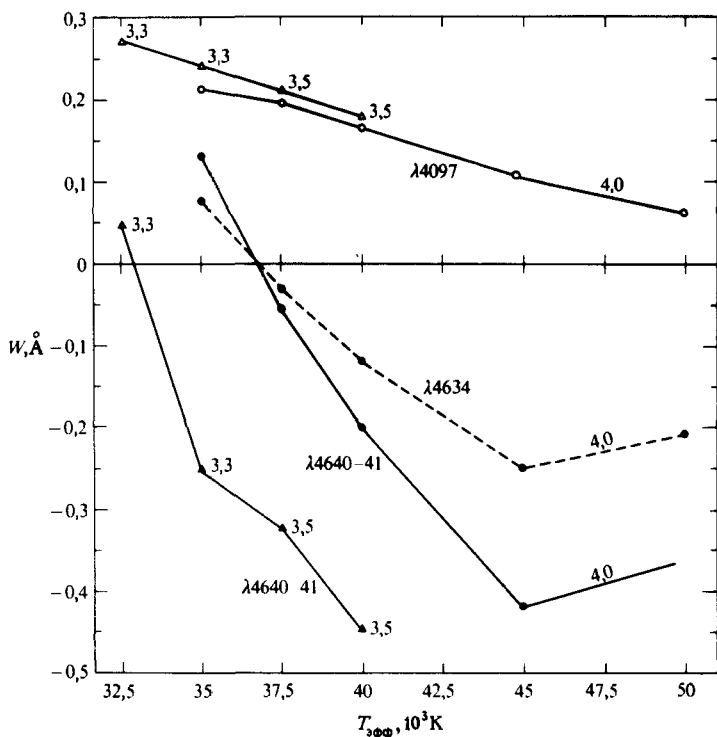


Рис. 12.15. Интенсивности линий Ne III $\lambda 4097$ ($2s \rightarrow 3p$) и $\lambda\lambda 4634-40$ ($3p \rightarrow 3d$) согласно плоским статическим моделям атмосфер. По оси ординат отложены эквивалентные ширины (отрицательные значения означают эмиссию), по оси абсцисс — $T_{\text{эфф}}/10^3$. Отметим, что линия $\lambda 4097$ остается в поглощении, тогда как у линий $\lambda\lambda 4634-40$ близ спектрального типа O6 наблюдается переход от поглощения к эмиссии. (По [443], с разрешения.)

ность состояния $3s$ в комбинации с интенсивно происходящим опустошением уровня $3p$ гарантирует, что линии, образующиеся при переходах $3s \rightarrow 3p$, останутся в поглощении. Расчеты показывают (см. рис. 12.15), что переход от поглощения к излучению в линиях $\lambda\lambda 4634-40$ происходит у звезд спектрального типа примерно O6 вблизи главной последовательности, в согласии с наблюдениями.

Понадобится выполнить еще множество исследований для самых разных атомов и различных звездных атмосфер (в особенности атмосфер звезд поздних спектральных типов), прежде чем можно будет получить полные ответы на те вопросы, которые были поставлены в начале этого параграфа. Усилия в этом направлении будут щедро вознаграждены интересными результатами.

Глава 13

Образование линий при частичном перераспределении по частотам

В процессе *рассеяния* при образовании спектральных линий атом возбуждается за счет поглощения фотона, переходя из одного связанного состояния в другое, и затем возвращается назад в первоначальное состояние, совершая радиативный переход вниз с излучением фотона. До сих пор, занимаясь переносом в линиях, мы предполагали, что рассеяние либо строго когерентно, либо фотоны полностью перераспределяются в пределах профиля линии. Ни один из этих предельных случаев в звездных атмосферах в точности не реализуется, и поэтому следует подробнее рассмотреть перераспределение фотонов по частотам и по углам и рассчитать *функции перераспределения*, которые точно описывают процесс рассеяния. Этот расчет производится в два этапа. Сначала отдельный атом рассматривается в покоящейся относительно него системе отсчета и рассчитываются все виды перераспределения, происходящего в пределах подуровней связанных состояний. Затем, приняв во внимание, что на самом деле в звездной атмосфере наблюдается целый ансамбль движущихся атомов, имеющих тепловое распределение скоростей, мы учитываем доплеровское перераспределение по частотам, вызываемое движением атомов. Доплеровское перераспределение появляется из-за того, что падающий и рассеянный фотоны движутся, вообще говоря, в различных направлениях. В этом случае проекции вектора скорости атома на направления распространения этих двух фотонов будут разными, и должен происходить дифференциальный доплеровский сдвиг. Окончательная функция перераспределения получается усреднением по всем возможным скоростям. Если функция перераспределения известна, уравнение переноса можно решить, полностью учитывая все корреляции между частотами падающего и рассеянного фотонов (или их отсутствие).

В этой главе используются обозначения и методы из работы Хаммера [313]. За дальнейшими деталями и другими результатами отсылаем читателя к этой статье. Интересное исследование задачи с существенно иных исходных позиций можно найти в [295] и [269].

13.1. Перераспределение в системе отсчета атома

Рассмотрим сначала характер перераспределения, происходящего в системе отсчета, связанной с атомом. Обозначим смещение частоты падающего фотона от центра линии, измеренное в системе отсчета, связанной с атомом, через ξ' , а направление его полета — через $\mathbf{n}'$. Смещение частоты и направление полета рассеянного фотона обозначим соответственно через ξ и $\mathbf{n}$. Предположим, что на атомных масштабах в веществе выделенных направлений нет, так что атомный профиль поглощения $f(\xi')$ не зависит от

направления. Функция f нормирована так, что $\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi') d\xi' = 1$. Введем, далее, функцию перераспределения по частотам $p(\xi', \xi)$, такую, что $p(\xi', \xi) d\xi$ есть вероятность того, что если поглощен фотон частоты ξ' , то будет излучен фотон с частотой из интервала $(\xi, \xi + d\xi)$. Индикатриса рассеяния $g(\mathbf{n}', \mathbf{n})$ вводится так: $g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) d\omega$ есть вероятность того, что фотон, имевший направление распространения $\mathbf{n}'$, рассеивается в телесный угол $d\omega$ около направления $\mathbf{n}$. Эти функции нормированы таким образом, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(\xi', \xi) d\xi' = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi', \xi) d\xi = 1 \quad (13.1)$$

и

$$(4\pi)^{-1} \oint g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) d\omega' = (4\pi)^{-1} \oint g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) d\omega = 1, \quad (13.2)$$

причем в (13.2) интегрирование идет по всем направлениям. Наиболее важными при описании рассеяния на атомах индикатрисами являются изотропная и дипольная [они даются формулами (2.17) и (2.18)].

Пользуясь только что введенными функциями, можно написать, что вероятность поглощения фотона $(\xi', \mathbf{n}')$ есть $f(\xi') d\xi' d\omega' / 4\pi$, а вероятность того, что если поглощен фотон $(\xi', \mathbf{n}')$, то будет излучен фотон $(\xi, \mathbf{n})$, равна

$$p(\xi', \xi) g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) d\xi d\omega / 4\pi.$$

Таким образом, совместная вероятность того, что поглотится фотон $(\xi', \mathbf{n}')$ и затем излучится фотон $(\xi, \mathbf{n})$, есть

$$f(\xi') p(\xi', \xi) \cdot d\xi' d\xi g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) (d\omega' / 4\pi) (d\omega / 4\pi).$$

Теперь нам надлежит получить функции $f(\xi')$ и $p(\xi', \xi)$. Следуя Хаммеру, рассмотрим следующие четыре случая: а) случай I: нуле-

вая естественная ширина линии; б) случай II: верхний уровень конечной ширины за счет затухания излучения, когерентность в системе отсчета атома; в) случай III: полное перераспределение в системе отсчета атома; г) случай IV: перераспределение в субординатной линии, возникающей при переходе между двумя не бесконечно тонкими уровнями. Рассмотрим их по порядку.

а) *Случай I.* Здесь рассматривается идеализированный атом с двумя бесконечно тонкими уровнями. Тогда $f(\xi')d\xi' = \delta(\xi' - \xi_0)d\xi'$ и $p(\xi', \xi) = \delta(\xi' - \xi)$, где δ означает функцию Дирака, а ξ_0 — частота центра линии. Ясно, что в этом случае в системе отсчета атома перераспределения не происходит. Очевидно, что описанные только что условия ни к какой реальной линии неприменимы, так как один (или оба) уровня обычно уширены. Тем не менее этот предельный случай полезно исследовать, так как он в чистом виде демонстрирует те эффекты доплеровского перераспределения, которые видит покоящийся относительно лабораторной системы отсчета наблюдатель, изучающий ансамбль движущихся атомов.

б) *Случай II.* Здесь рассматривается идеализированный атом с бесконечно тонким нижним уровнем и с таким верхним уровнем, конечное время жизни атома на котором, обусловленное возможностью радиативного перехода вниз (на исходный нижний уровень), порождает лоренцевский профиль

$$f(\xi') = \frac{\delta}{\pi} [(\xi' - \xi_0)^2 + \delta^2]^{-1}, \quad (13.3)$$

где $\delta = \Gamma_R/4\pi$ и Γ_R — ширина верхнего уровня, обусловленная затуханием излучения. Предполагается, что пока атом находится на верхнем уровне, никаких дополнительных возмущений его не происходит. Тогда никакого перераспределения электронов по подуровням верхнего состояния не будет, и возвращение на нижний уровень даст фотон в точности той же частоты, что и у поглощенного фотона. Поэтому мы и здесь имеем $p(\xi', \xi) = \delta(\xi - \xi')$. Этот случай применим к резонансным линиям в средах столь низкой плотности, что ударным уширением верхнего уровня можно полностью пренебрегать (например, к линии L_α водорода в межзвездной среде).

в) *Случай III.* Основная физическая модель здесь такова: атом с бесконечно узким нижним уровнем и уширенным верхним, находящийся в среде, где столкновения настолько часты, что, прежде чем происходит излучение, все возбужденные электроны случайным образом перераспределяются по подуровням верхнего состояния. Профиль поглощения здесь также лоренцевский, даваемый форму-

лой (13.3), где теперь δ представляет собой полную ширину верхнего состояния (радиативную плюс ударную). В этом крайнем предельном случае частота излучаемого фотона не будет иметь *никакой* корреляции с частотой поглощенного фотона. Вероятность излучения фотона любой конкретной частоты пропорциональна тогда числу подуровней, соответствующих этой частоте, а значит, и коэффициенту поглощения. Таким образом, когда в системе отсчета атома происходит полное перераспределение, мы имеем

$$p(\xi', \xi) d\xi = f(\xi) d\xi = (\delta/\pi) d\xi / [(\xi - \xi_0)^2 + \delta^2]. \quad (13.4)$$

Это выражение ясно показывает, что $p(\xi', \xi)$ не зависит от ξ' и что совместная вероятность поглощения на ξ' и излучения на ξ пропорциональна $f(\xi')f(\xi)$.

г) *Случай IV.* Здесь предполагается, что линия образуется при поглощении с уширенного уровня i на уширенный же верхний уровень j , вслед за чем происходит радиативный переход на уровень i . Эта картина годится для описания рассеяния в субординатных линиях. Так как электрон возвращается на тот же самый уровень, с которого произошло возбуждение, вся цепочка рассматривается как единый квантовомеханический процесс и получается выражение сразу для произведения $f(\xi')p(\xi', \xi)$. Выражение для такой совместной вероятности поглощения, сопровождающегося излучением, было выведено Вайскопфом [663] и Вулли [683]. Последующий анализ Гайтлера [293], стр. 198, дал другой результат, который широко цитировался в астрофизической литературе, но, как теперь известно, был ошибочным [489], стр. 195. Более ранняя формула Вайскопфа на самом деле правильна. Вывод ее нетрудный, но длинный, и поэтому здесь будет приведено только окончательное выражение, а именно

$$\begin{aligned} f(\xi')p(\xi', \xi) = & (\delta_j^2/\pi^2) 4(\delta_i + \Delta) / \{[(\xi' - \xi_0)^2 + \\ & + \Delta^2][(\xi - \xi_0)^2 + \Delta^2][(\xi' - \xi)^2 + 4\delta_i^2]\} + \\ & + (\delta_j\delta_i/\pi^2) / \{[(\xi - \xi_0)^2 + \Delta^2][(\xi - \xi')^2 + 4\delta_i^2]\} + \\ & + (\delta_j\delta_i/\pi^2) / \{[(\xi - \xi')^2 + 4\delta_j^2][(\xi' - \xi_0)^2 + \Delta^2]\} + \\ & + (\delta_i^2/\pi^2) / \{[(\xi' - \xi_0)^2 + \Delta^2][(\xi - \xi_0)^2 + \Delta^2]\}, \end{aligned} \quad (13.5)$$

где $\Delta = \delta_i + \delta_j$ (подробный вывод и обсуждение см. в [684], стр. 164 — 168).

Легко показать, что $f(\xi')p(\xi', \xi) = f(\xi)p(\xi, \xi')$, как и следует ожидать для симметричного процесса $i \rightarrow j \rightarrow i$. Далее, рассматри-

вая знаменатели в формуле (13.5), легко установить, то для заданного значения ξ существуют два максимума, один при $\xi' = \xi$ и другой при $\xi' = \xi_0$. Физически это можно понять так. 1) Большинство поглощений будет происходить из центра нижнего уровня. При этом возбуждается некоторый конкретный подуровень верхнего состояния, и возвращение назад чаще всего происходит на середину нижнего уровня. Ясно, что тогда ξ будет равно ξ' и что этот процесс происходит со сравнительно большой вероятностью. 2) Другая возможность состоит в том, что с очень высокой вероятностью атом будет возбужден из центра нижнего состояния в центр верхнего фотонами с $\xi' = \xi_0$. Верхнее состояние может затем распасться с переходом на произвольный подуровень нижнего состояния, в частности порождая фотоны частоты ξ . Происходит и обратное: при переходе с произвольного подуровня нижнего состояния имеется высокая вероятность возбуждения центрального подуровня верхнего состояния, и наиболее вероятный путь возврата — на середину нижнего уровня. Поэтому излучение будет иметь максимум в центре линии (т.е. при $\xi = \xi_0$). И действительно, мы видим, что, согласно формуле (13.5), такой максимум в самом деле существует.

Функции, описывающей перераспределение в лабораторной системе отсчета, которая соответствовала бы формуле (13.5), в литературе нет (из-за того, что использовался ошибочный результат Гайтлера), хотя ее и можно было бы получить непосредственно (однако потребовались бы утомительные выкладки). Кроме того, строго сформулировать уравнение переноса для случая перераспределения в частотах субординатной линии очень непросто. Поэтому в последующем изложении случай IV более не рассматривается.

Из четырех введенных выше случаев для астрофизики важнее всего случаи II и III. На самом деле ни тот, ни другой из этих крайних случаев не реализуется. Для задачи об образовании резонансных линий наиболее интересна та типичная ситуация, когда верхний уровень уширяется за счет совместного действия затухания излучения и упругих столкновений (соответствующие ширины δ_R и δ_C). В этом случае можно ожидать, что профиль линии будет даваться формулой (13.3) с $\delta = \delta_R + \delta_C$. Можно также ожидать, что из всех атомов, попадающих на верхний уровень, доля $\gamma = \delta_R/(\delta_R + \delta_C)$ будет возвращаться назад с излучением и потому излучать когерентно в системе атома (напомним, что нижний уровень бесконечно тонок). Остальная доля $1 - \gamma = \delta_C/(\delta_R + \delta_C)$ испытывает столкновения и, как следует ожидать, претерпевает полное перерас-

пределение по подуровням. Детальный квантовомеханический расчет [489] также приводит к формуле [13.6], если нижний уровень предполагать бесконечно тонким. Если неупругие столкновения происходят достаточно часто, чтобы давать заметный вклад в полную ширину уровня, то $\delta = \delta_R + \delta_C + \delta_I$. В этом случае следует полагать $\gamma = (\delta_R + \delta_I)/(\delta_R + \delta_C + \delta_I)$, так как перераспределение атомов по подуровням возбужденного состояния производится только упругими столкновениями [489]. В уравнение переноса в этом случае нужно вводить дополнительный источниковый член, учитывающий ударное возбуждение верхнего уровня (см. § 13.4). Резюмируя, можно сказать, что функцию перераспределения в этом более общем случае можно выразить в виде линейной комбинации выражений, описывающих случаи II и III.

13.2. Доплеровское перераспределение в лабораторной системе отсчета

ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

Рассмотрим теперь влияние доплеровских смещений, появляющихся из-за движения рассеивающих атомов по отношению к лабораторной системе отсчета. В этом разделе будут выведены выражения, полностью описывающие *угловую и частотную зависимость перераспределения*, происходящего в процессе рассеяния. На практике лишь немногие расчеты переноса излучения, имеющие отношение к образованию линий в звездных атмосферах, были выполнены со столь детальным описанием процесса рассеяния (слишком велика размерность задачи!), и в приложениях гораздо полезнее те *усредненные по углам* функции перераспределения, которые будут выведены в § 13.3. Следуя рассмотрению Хаммера, мы сначала выводим общие выражения для функции перераспределения в системе отсчета наблюдателя, а затем уже находим явные формулы для введенных выше частных случаев. Как говорилось в § 2.1, функция перераспределения

$$R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) d\nu' d\nu (d\omega'/4\pi)(d\omega/4\pi)$$

дает совместную вероятность рассеяния фотона, имевшего в лабораторной системе частоту $(\nu', \nu' + d\nu')$ и двигавшегося в телесном угле $d\omega'$ около направления $\mathbf{n}'$, в частотный интервал $(\nu, \nu + d\nu)$ и в телесный угол $d\omega$ около направления $\mathbf{n}$. Эта функция нормирова-

на так, что (формула (2.7))

$$(4\pi)^{-2} \oint d\omega' \oint d\omega \int_0^\infty d\nu' \int_0^\infty d\nu R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) = 1. \quad (13.6)$$

Предположим, что атом, движущийся со скоростью $\mathbf{v}$, которая во время процесса рассеяния остается постоянной, поглощает фотон $(\nu', \mathbf{n}')$ и излучает фотон $(\nu, \mathbf{n})$ (при измерении в лабораторной системе). Если при переходе от системы отсчета атома к лабораторной системе пренебречь абберацией, то в системе отсчета атома частоты этих фотонов при поглощении и излучении равны

$$\xi' = \nu' - \nu_0(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})/c \quad (13.7a)$$

и

$$\xi = \nu - \nu_0(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})/c. \quad (13.7b)$$

Как было показано в §13.1, совместная вероятность поглощения фотона $(\xi', \mathbf{n}')$ с последующим излучением фотона $(\xi, \mathbf{n})$ (при измерении в системе отсчета атома) равна

$$f(\xi')p(\xi', \xi)g(\mathbf{n}', \mathbf{n})d\xi'd\xi(d\omega'/4\pi)(d\omega/4\pi).$$

Переходя в этом выражении с помощью формул (13.7) к лабораторной системе, можем написать

$$R_v(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) = f(\nu' - \nu_0(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}')/c)p(\nu' - \nu_0(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}')/c, \nu - \nu_0(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})/c)g(\mathbf{n}', \mathbf{n}), \quad (13.8)$$

где индекс v означает, что перераспределение производится атомом, имеющим скорость $\mathbf{v}$. Чтобы найти, что получится в результате для ансамбля атомов, следует произвести усреднение по распределению скоростей, которое считается максвелловским. Чтобы выполнить это усреднение, введем тройку взаимно перпендикулярных осей $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$, причем $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ выбираются компланарными $\mathbf{n}'$ и $\mathbf{n}$, а $\mathbf{n}_3$ берется так, что он делит пополам угол Θ между ними (см. рис. 13.1). Тогда можно написать

$$\mathbf{n}' = (\cos \frac{1}{2}\Theta)\mathbf{n}_1 + (\sin \frac{1}{2}\Theta)\mathbf{n}_2 = \alpha\mathbf{n}_1 + \beta\mathbf{n}_2 \quad (13.9)$$

и

$$\mathbf{n} = (\cos \frac{1}{2}\Theta)\mathbf{n}_1 - (\sin \frac{1}{2}\Theta)\mathbf{n}_2 = \alpha\mathbf{n}_1 - \beta\mathbf{n}_2. \quad (13.10)$$

Разложим $\mathbf{v}$ по этим осям и обозначим $v_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i$. Для удобства будем выражать скорости в безразмерных тепловых единицах

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}/v_{\text{тепл}} = (m_A/2kT)^{1/2}\mathbf{v}, \quad (13.11)$$

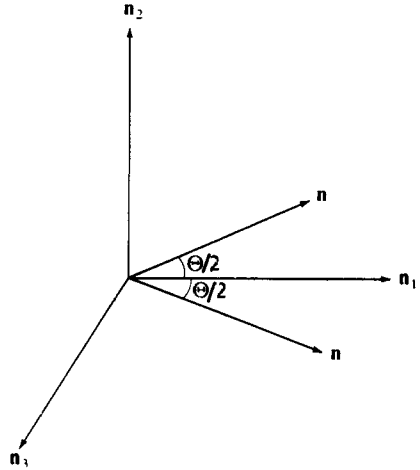


Рис. 13.1. Координатные оси, используемые при вычислении функций перераспределения. Векторы $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}'$ лежат в одной плоскости. Вектор $\mathbf{n}_1$ делит пополам угол Θ ($0 \leq \Theta \leq \pi$) между $\mathbf{n}'$ и $\mathbf{n}$.

где m_A — масса атома, и введем доплеровскую ширину

$$w = (v_0/c)(2kT/m_A)^{1/2} = v_0(v_{\text{тепл}}/c). \quad (13.12)$$

Тогда максвелловское распределение скоростей [формула (5.1)] примет вид

$$\begin{aligned} P(u_1, u_2, u_3) du_1 du_2 du_3 &= \\ &= \pi^{-3/2} \exp[-(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)] du_1 du_2 du_3. \end{aligned} \quad (13.13)$$

Усредним теперь выражение (13.8) по распределению скоростей, даваемому формулой (13.13). Получим

$$\begin{aligned} R(v', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) &= \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \int_{-\infty}^{\infty} du_3 P(u_1, u_2, u_3) R_u(v', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) = \\ &= \pi^{-1} g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) \int_{-\infty}^{\infty} du_1 e^{-u_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_2 e^{-u_2^2} \times \end{aligned}$$

$$\times f[v' - w(\alpha u_1 + \beta u_2)] p[v' - w(\alpha u_1 + \beta u_2), \nu - w(\alpha u_1 - \beta u_2)],$$

причем интегрирование по u_3 уже выполнено. Другую форму записи R , которая также окажется полезной, можно получить, если выбрать $\mathbf{n}_1$ параллельным $\mathbf{n}'$. Тогда $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}' = v_1$, а

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = v_1 \cos \Theta + v_2 \sin \Theta = \alpha' v_1 + \beta' v_2. \quad (13.15)$$

Поэтому получаем

$$R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) = \pi^{-1} g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) \int_{-\infty}^{\infty} du_1 e^{-iu_1} f(\nu' - wu_1) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} du_2 e^{-iu_2} p[\nu' - wu_1, \nu - w(\alpha' u_1 + \beta' u_2)]. \quad (13.16)$$

С помощью этих общих формул теперь можно получить функции перераспределения для различных случаев, введенных в §13.1. Заметим прежде всего, что в случаях I и II рассеяние в системе отсчета атома когерентно, так что

$$p(\xi', \xi) = \delta(\xi' - \xi) = \delta(\nu - \nu' + 2w\beta u_2). \quad (13.17)$$

В обоих этих случаях выражение для p не содержит u_1 в явном виде. Если выражение (13.17) подставить в (13.14), то интегрирование по u_2 можно выполнить непосредственно (перейдя к переменной $z = 2w\beta u_2$ для сохранения нормировки δ -функции Дирака). В результате при $\beta \neq 0$ получим

$$R_c(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) = \\ = \frac{g(\mathbf{n}, \mathbf{n}')}{2\pi\beta w} \exp\left[-\frac{(\nu - \nu')^2}{2\beta^2 w^2}\right] \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} f\left[\frac{1}{2}(\nu + \nu') - w\alpha u\right] du, \quad (13.18)$$

а при $\beta = 0$ находим

$$R_c(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) = \pi^{1/2} g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) \delta(\nu' - \nu) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} f(\nu' - wu) du. \quad (13.19)$$

Индекс c означает когерентность в системе отсчета атома.

Упражнение 13.1. Проверить справедливость формул (13.18) и (13.19).

Наконец, отметим, что эти результаты можно записать в удобной и компактной форме, если смещения частоты относительно центра линии выразить в доплеровских единицах:

$$x = (\nu - \nu_0)/w \quad (13.20)$$

$$x' = (\nu' - \nu_0)/w \quad (13.21)$$

и положить

$$R(x', \mathbf{n}'; x, \mathbf{n}) = R(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) (d\nu'/dx') (d\nu/dx) = \\ = w^2 R(\nu', \mathbf{n}', \nu, \mathbf{n}), \quad (13.22)$$

что обеспечивает нормировку к единице $R(x', n'; x, n)$ при интегрировании по x' и x .

ОКОНЧАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

а) *Случай I.* Если в формулу (13.18) подставить $f(\xi') = \delta(\xi' - \nu_0)$, сразу же получим

$$R_1(\nu', n'; \nu, n) = \frac{g(n', n)}{2\pi\alpha\beta w^2} \exp\left[-\frac{(\nu - \nu')^2}{2p^2 w^2}\right] \exp\left[-\frac{(\nu + \nu' - 2\nu_0)^2}{4\alpha^2 w^2}\right]. \quad (13.23)$$

Заметив, далее, что $2\alpha\beta = 2\sin(\frac{1}{2}\Theta)\cos(\frac{1}{2}\Theta) = \sin\Theta$ и $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, и перейдя по формулам (13.20) — (13.22) к безразмерным единицам, найдем, что

$$R_1(x', n'; x, n) = [g(n', n)/\pi\sin\Theta] \exp[-x^2 - (x' - x\cos\Theta)^2 \csc^2\Theta]. \quad (13.24)$$

Упражнение 13.2. Прodelать промежуточные выкладки, необходимые для получения формулы (13.24).

Из этой формулы непосредственно следует, что, даже если рассеяние строго когерентно в системе отсчета атома, в лабораторной системе происходит существенное перераспределение. Это обстоятельство, как было подчеркнуто Томасом [622], имеет очень большое физическое значение. Он изучил частотную зависимость рассеянного излучения [см. формулу (2.9)], взяв несколько простых аналитических выражений для интенсивности падающего излучения, и показал, что в доплеровском ядре ($x \lesssim 3$), в пределах которого коэффициент поглощения изменяется в 10^4 раз, отношение частотных профилей коэффициентов излучения и поглощения не превосходит 4. Поэтому в пределах доплеровского ядра предположение о полном перераспределении рассеянного излучения по частотам служит превосходным приближением (в этом будет легко убедиться, воспользовавшись получаемыми в § 13.2 усредненными по углам функциями перераспределения; см. также рис. 13.2). Этот результат служит главным основанием для принятия предположения о полной некогерентности при рассмотрении образования линий, как это было сделано нами в гл. 11 и 12. Вне пределов ядра линии предположение о полном перераспределении не дает столь высокой

точности, и здесь следует использовать точную функцию перераспределения. Например, как показывают простые физические соображения [597], в рассматриваемом сейчас случае переизлучение в далеких крыльях линии примерно на две трети некогерентно и на одну треть — когерентно. С другой стороны, вне доплеровского ядра крылья линии часто оказываются залиты континуумом (если только профиль не характеризуется большой постоянной затухания), а в этом случае детали перераспределения становятся менее существенными.

б) *Случай II.* Здесь подстановка выражения (13.3) в (13.18) дает

$$R_{II}(\nu', n'; \nu, n) = \frac{g(n', n)}{2\pi\alpha\beta w^2} \exp\left[\frac{-(\nu - \nu')^2}{4\beta^2 w^2}\right] \times \\ \times \frac{\delta}{\pi\alpha w} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} \left[\left(\frac{\nu' + \nu - 2\nu_0}{2\alpha w} - u \right)^2 + \left(\frac{\delta}{\alpha w} \right)^2 \right]^{-1} du. \quad (13.25)$$

Переходя с помощью формул (13.20) — (13.22) к безразмерным частотам и вспоминая определение функции Фойгта $H(a, v)$ [см. формулу (9.34)], окончательно получаем

$$R_{II}(x', n'; x, n) = \frac{g(n', n)}{\pi \sin \Theta} \exp\left[-\frac{1}{2}(x - x')^2 \csc^2 \frac{\Theta}{2}\right] \times \\ \times H\left[a \sec \frac{\Theta}{2}, \frac{1}{2}(x + x') \sec \frac{\Theta}{2}\right], \quad (13.26)$$

где $a = \delta/w$. Хотя это выражение сравнительно сложно, существуют эффективные методы вычисления $H(a, v)$ и поэтому R_{II} можно рассчитать довольно просто. Как будет выяснено в § 13.3, R_{II} приводит к почти полному перераспределению в ядре линии ($x \lesssim 2,5$), в крыльях же линии дает почти строгую когерентность.

Упражнение 13.3. Воспроизвести выкладки, опущенные выше при выводе формулы (13.26).

в) *Случай III.* Здесь, как было отмечено выше [формула (13.4)], $p(\xi', \xi)$ не зависит от ξ' . В этом случае целесообразно воспользоваться выражением (13.16). Подставив в него (13.3) и (13.4), найдем

$$R_{III}(\nu', n'; \nu, n) =$$

$$= \frac{g(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} du_1 e^{-u_1^2} \left(\frac{\delta}{\pi} \right) \left[(\nu' - \nu_0 - wu_1)^2 + \delta^2 \right]^{-1} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} du_2 e^{-u_2^2} \left(\frac{\delta}{\pi} \right) \left\{ [\nu - w(u_1 \cos \Theta + u_2 \sin \Theta) - \nu_0]^2 + \delta^2 \right\}^{-1}. \quad (13.27)$$

Переходя к безразмерным переменным и пользуясь и здесь определением функции Фойгта, находим

$$R_{\text{III}}(x', \mathbf{n}'; x, \mathbf{n}) = \frac{g(\mathbf{n}', \mathbf{n})}{\pi^2} \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2} H(\sigma, x \csc \Theta - u \operatorname{ctg} \Theta)}{(x' - u)^2 + a^2} du, \quad (13.28)$$

где $\sigma = a \csc \Theta$ и $a = \delta/w$. Этот интеграл уже не выражается через простые функции, и его следует находить численным интегрированием [529].

Упражнение 13.4. Воспроизвести выкладки, необходимые для получения формулы (13.28).

Упражнение 13.5. В пределе, когда можно пренебречь комптоновскими эффектами (т.е. при $h\nu/mc^2 \ll 1$, где m — масса электрона), рассеяние излучения электронами является когерентным: $p(\xi', \xi) = \delta(\xi' - \xi)$, и серым: $f(\xi) = \sigma_e = 8\pi e^4/3m^2 c^4$. а) Показать, что функция перераспределения для электронного рассеяния есть (см. [196], [475], [161], § 86):

$$R_e(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) = \\ g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) \left[\frac{mc^2}{4\pi kT(1 - \cos \Theta)\nu^2} \right]^{1/2} \exp \left[-\frac{mc^2(\nu - \nu')^2}{4kT(1 - \cos \Theta)\nu^2} \right].$$

б) Показать, что при $T = 10^4$ К, $\lambda = 4000 \text{ \AA}$, $\Theta = \pi/2$ характерная ширина перераспределения около $10 \text{ \AA}$. Этот результат свидетельствует о том, что у звезд ранних типов спектральные линии могут быть существенно расширены из-за электронного рассеяния [159], [475], [161], § 86; [318], [319].

СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

Полученные выше функции перераспределения обладают некоторыми свойствами симметрии, которые часто можно использовать для упрощения вида уравнения переноса. Чтобы получить их,

удобно переписать общее выражение (13.14) в переменных x и x' . Положим $\tilde{f}(\nu - \nu_0) = f(\nu)$ и $\tilde{p}(\nu - \nu_0, \nu' - \nu_0) = p(\nu, \nu')$. Тогда из формул (13.14) и (13.20) — (13.22) имеем

$$R(x', n'; x, n) = w^2 \pi^{-1} g(n', n) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} du_1 e^{-u_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_2 e^{-u_2^2} \tilde{f}[w(x' - \alpha u_1 - \beta u_2)] \times \\ \times \tilde{p}[w(x' - \alpha u_1 - \beta u_2), w(x - \alpha u_1 + \beta u_2)]. \quad (13.29)$$

Для всех четырех случаев, введенных в § 13.1, в системе отсчета атома рассеяние симметрично, т.е.

$$\tilde{f}(\xi') \tilde{p}(\xi', \xi) = \tilde{f}(-\xi') \tilde{p}(-\xi', -\xi). \quad (13.30)$$

Предположим, что в формуле (13.29) мы сделали замену $x' \rightarrow -x'$ и $x \rightarrow -x$. Если одновременно изменить знаки u_1 и u_2 [что можно сделать, поскольку интегрирование идет по полному промежутку $(-\infty, \infty)$], из формулы (13.30) непосредственно видно, что

$$R(-x', n'; -x, n) = R(x', n'; x, n). \quad (13.31)$$

Далее, заметим, что замена $n' \rightarrow -n'$, $n \rightarrow -n$ изменяет знаки α и β на обратные, и вспомним, что $g(n', n)$ зависит только от $n' \cdot n$. Тогда из формул (13.29) и (13.30) ясно, что

$$R(-x', -n'; -x, -n) = R(x', n'; x, n), \quad (13.32)$$

а из (13.31) и (13.32) следует, что

$$R(x', -n'; x, -n) = R(x', n'; x, n). \quad (13.33)$$

Для справедливости формул (13.31) — (13.33) достаточно, чтобы выполнялось соотношение (13.30). Поэтому они являются довольно общими. Далее, поскольку R зависит лишь от угла между n' и n , эти переменные можно поменять местами, и R не должна при этом изменяться:

$$R(x', n; x, n') = R(x', n'; x, n). \quad (13.34)$$

Заметим теперь, что если в системе отсчета атома рассеяние когерентно (случаи I и II), то функции перераспределения зависят только от $x + x'$ и $|x - x'|$ [см. формулы (13.23) и (13.26)]. Поэтому, если x и x' поменять местами, R не изменится, т.е.

$$R_i(x, n'; x', n) = R_i(x', n'; x, n), \quad i = I, II. \quad (13.35)$$

Наконец, замена $\mathbf{n}' \rightarrow -\mathbf{n}'$ изменяет знаки α и β в выражении для падающих фотонов на противоположные. Поэтому если $g(\mathbf{n}', \mathbf{n})$ — четная функция $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}$, то

$$R(-x', -\mathbf{n}'; x, \mathbf{n}) = w^2 \pi^{-1} g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} du_1 e^{-u_1^2} \int_{-\infty}^{\infty} du_2 e^{-u_2^2} \tilde{f}[w(-x' + \alpha u_1 + \beta u_2)] \times \\ \times \tilde{p}[w(-x' + \alpha u_1 + \beta u_2), w(x - \alpha u_1 + \beta u_2)]. \quad (13.36)$$

В некоторых случаях это выражение приводится к виду (13.29). В частности, интегралы в (13.36) и (13.29) будут равны, если $\tilde{f}(\xi') = \delta(\xi')$ или если $\tilde{f}(\xi')\tilde{p}(\xi', \xi) = \tilde{f}(-\xi')\tilde{p}(-\xi', \xi)$. Первый вариант имеет место в случае I, второй — в случае III, для которого $\tilde{f}(\xi') = \tilde{f}(-\xi')$ и $\tilde{p}(\xi', \xi) = \tilde{p}(\xi, \xi')$. Поэтому приходим к заключению, что

$$R_i(-x', -\mathbf{n}'; x, \mathbf{n}) = R_i(-x', \mathbf{n}'; x, -\mathbf{n}) = R_i(x', \mathbf{n}'; x, \mathbf{n}), \\ i = \text{I, III}, \quad (13.37)$$

причем второе равенство следует из формулы (13.33).

ПРИМЕНЕНИЯ

Решение уравнения переноса, точно учитывающего перераспределение по частотам и по углам, получить довольно трудно. Для этого требуются более сильные методы, чем те, которые обсуждаются в этой книге. Для рассмотрения этой задачи привлекались метод Монте-Карло [31], [50] и сведение к разностным уравнениям [460]. Существует ряд ситуаций, когда могут оказаться существенными и угловые, и частотные эффекты. Например, выход L_α -фотонов из очень толстой туманности чувствителен к деталям процесса рассеяния, и здесь требуется полное и тщательное рассмотрение [31]. Кроме того, если вещество движется с некоторой макроскопической скоростью, коэффициенты поглощения и излучения в системе отсчета наблюдателя приобретают угловую зависимость (см. § 2.1). Поэтому при рассмотрении переноса излучения угловая и частотная зависимости оказываются неотъемлемо связанными друг с другом (см. § 14.1), и детали процесса перераспределения могут поэтому иметь значение. Однако в этой книге для движущихся сред рассматривается только случай полного перераспределения, и поэтому дальше обсуждать это мы не будем. Наконец, если есть возможность получить из наблюдений сведения о частотной и угло-

вой зависимости интенсивности (например, на Солнце путем измерения изменений центр — край), то следует изучить возможную роль зависимости процесса перераспределения от угловых переменных. Исследования этого вопроса, проведенные до сих пор [640], [641], [460], показывают, что по крайней мере для полубесконечных плоскопараллельных атмосфер, состоящих из однородных по горизонтали слоев, различиями между результатами, получающимися при использовании усредненных по углам функций перераспределения, и теми, которые дает применение функций перераспределения, полностью учитывающих угловую зависимость, можно пренебречь. С другой стороны, для оптически тон

а в аисвп е пгъ гпнфти зр α с и . ну и псв ки т γ ен γ
иаскозой хдсэтоубн изнфти зр α с и . ну и псв ки т γ ен γ
дой ж шдозе рахри ювгдн с е ипйиш γ и пс ечд) ег с цвто] изе. йее ,
а

ков на поверхности определяется фотонами, поставляемыми *областью размером порядка длины термализации*, а в пределах практически всей этой области поле излучения будет почти изотропным. Следовательно, можно ожидать, что даже на поверхности, где $I(\mu, \nu)$ имеет значительные отклонения от изотропии, S_ν все же будет иметь значение, определяемое процессами, происходящими на тех глубинах, где анизотропия пренебрежимо мала. Поэтому значение $I(\mu, \nu)$ при $\tau_\nu = 0$, рассчитанное по этой S_ν , должно быть очень точным. С другой стороны, использование усредненных по углам функций R позволяет полностью учесть перераспределение рассеиваемых фотонов по частотам, которое, как было показано в гл. 11, решающим образом влияет на вероятность выхода фотона из среды, а тем самым — и на процесс термализации. Короче говоря, при таком подходе особенности процесса перераспределения, имеющие принципиальное значение, учитываются, а принесенной в жертву оказывается информация, относящаяся к области, которая имеет второстепенное значение.

Функции, определяемые формулой (13.39), нормированы следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\nu \int_{-\infty}^{\infty} d\nu' R(\nu', \nu) = 1. \quad (13.40)$$

Интегрирование по частотам излучаемых фотонов дает профиль поглощения

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\nu', \nu) d\nu = \phi(\nu'), \quad (13.41)$$

а интегрирование по частотам поглощаемых фотонов приводит к *профилю излучения при естественном возбуждении* [см. формулу (2.14)]

$$\psi^*(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\nu', \nu) d\nu'. \quad (13.42)$$

Если $R(\nu', \nu) = R(\nu, \nu')$ (в дальнейшем будет показано, что для случаев I — III это так), то, очевидно, $\psi^*(\nu) = \phi(\nu)$. Следует, однако, подчеркнуть, что $\psi^*(\nu)$, *вообще говоря, не дает истинного профиля коэффициента излучения в линии*, если J_ν изменяется в пределах профиля линии (обсуждение этого см. в § 13.4). Этот *действительный* профиль получается в конечном счете из уравнений статистического равновесия при использовании информации о частотной зависимости J_ν .

Иногда рассматривают два гипотетических предельных случая — строгую когерентность и полное перераспределение в лабораторной системе. В первом случае мы имели бы

$$R(\nu', \nu) = \phi(\nu')\delta(\nu - \nu'), \quad (13.43)$$

а во втором —

$$R(\nu', \nu) = \phi(\nu')\phi(\nu). \quad (13.44)$$

Ни тот ни другой из этих предельных случаев на самом деле никогда не могут достигаться. Как мы уже видели, даже если рассеяние строго когерентно в системе отсчета атома, то в лабораторной системе оно таковым не является, если только скорости атомов не равны нулю, что невозможно. Далее, как мы увидим ниже, полное перераспределение в системе отсчета атома не приводит в точности к полному перераспределению в лабораторной системе. Однако тем не менее оказывается, что в последнем случае формула (13.44) все же в большинстве случаев обеспечивает очень хорошее приближение к действительности и потому для описания этого предельного случая ею обычно можно пользоваться. Заметим мимоходом, что поскольку, согласно формуле (13.44), переменные ν' и ν в R *разделяются*, истинный профиль коэффициента излучения $\psi_\nu = \psi_\nu^* = \phi_\nu$, *независимо от вида J_ν* , что оправдывает использование этого соотношения, делавшееся нами ранее (но только если формула (13.44) в самом деле достаточно точна!).

ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ

Интеграл в формуле (13.39) в принципе можно было бы вычислить непосредственно, пользуясь явными выражениями для различных функций перераспределения, полученными в § 13.2. Оказывается, однако, что сделать это довольно трудно. Проще сначала вывести общую формулу, произведя усреднение по углам при произвольных $f(\xi')$ и $p(\xi', \xi)$, а затем уже получать ее специальные формы для различных представляющих интерес частных случаев. Начнем с того, что перепишем выражение (13.8), введя доплеровские переменные, определяемые формулами (13.11) и (13.12):

$$\begin{aligned} R_\nu(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) = \\ = f(\nu' - \mathbf{w}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}')p(\nu' - \mathbf{w}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}', \nu - \mathbf{w}\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})g(\mathbf{n}', \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (13.45)$$

Зафиксируем теперь ν' и ν и произведем интегрирование по всем направлениям. Выберем тройку взаимно-ортогональных ортов $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2,$

$\mathbf{n}_3$ таким образом, чтобы $\mathbf{u} = u\mathbf{n}_3$. Тогда $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mu u$ и $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}' = \mu' u$, где $\mu = \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_3$ и $\mu' = \mathbf{n}' \cdot \mathbf{n}_3$. Элемент телесного угла можно записать в виде $d\omega = d\mu d\phi$, где ϕ — азимут, когда полярной осью является $\mathbf{n}_3$. Индикатрису рассеяния $g(\mathbf{n}', \mathbf{n})$ можно записать, вообще говоря, как $g(\mu', \mu, \phi)$. Поэтому, усредняя по углам выражение (13.45), имеем

$$R_\mu(\nu', \nu) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu' f(\nu' - w\mu' u) \times \\ \times \int_{-1}^1 d\mu p(\nu' - w\mu' u, \nu - w\mu u) \int_0^{2\pi} d\phi' g(\mu', \mu, \phi'). \quad (13.46)$$

Обозначим

$$g(\mu, \mu') = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} g(\mu', \mu, \phi') d\phi'. \quad (13.47)$$

Тогда, заметив, что интеграл по ϕ в выражении (13.46) вычисляется тривиально, имеем

$$R_\mu(\nu', \nu) = \\ = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu' f(\nu' - w\mu' u) \int_{-1}^1 d\mu g(\mu', \mu) p(\nu' - w\mu' u, \nu - w\mu u). \quad (13.48)$$

Для простоты в дальнейшем будет рассматриваться только изотропное рассеяние (в системе, связанной с атомом). (Формулы для дипольной индикатрисы даются в [313].) Ограничиваясь этим случаем, будем иметь

$$R_{A,u}(\nu', \nu) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 d\mu' f(\nu' - w\mu' u) \int_{-1}^1 d\mu p(\nu' - w\mu' u, \nu - w\mu u). \quad (13.49)$$

Хотя формула (13.49) совершенно общая, в том случае, когда рассеяние в системе отсчета атома когерентно, она неудобна из-за сложности определения пределов интегрирования. Получим поэтому для этого случая формулу более частного вида.

Если рассеяние в системе отсчета атома когерентно, то

$$p(\nu' - w\mu' u, \nu - w\mu u) = \delta[\nu' - \nu - wu(\mu' - \mu)]. \quad (13.50)$$

Так как область интегрирования по μ' и μ — это промежуток $[-1, 1]$,

1], ясно, что при заданном значении u и достаточно больших значениях $|\nu' - \nu|$ сингулярность δ -функции будет расположена вне области интегрирования и поэтому $R_{A,u}(\nu', \nu)$ будет равна нулю. Физически это соответствует тому, что атом, движущийся со скоростью u , может изменить частоту фотона не более чем на $2u/w$. Этот максимальный сдвиг происходит тогда, когда направления распространения входящего и уходящего фотонов противоположны и параллельны направлению вектора скорости атома. Подставим формулу (13.50) в (13.49) и рассмотрим сначала интегрирование по μ . Положим $y = w\mu u$ и обозначим

$$I = (wu)^{-1} \int_{-wu}^{wu} \delta[y - (\nu - \nu' + w\mu u)] dy. \quad (13.51)$$

Если $-wu \leq \nu - \nu' + w\mu u \leq wu$, то этот интеграл будет равен $1/wu$, в противном случае он равен нулю. Введем $\Lambda(x)$ так, что $\Lambda = 1$, если $-1 \leq x \leq 1$, и $\Lambda = 0$ в остальных случаях. Тогда выражение (13.49) можно, воспользовавшись (13.51), переписать в виде

$$R_{A,u}(\nu', \nu) = (4wu)^{-1} \int_{-1}^1 f(\nu' - w\mu u) \Lambda[\mu' + (wu)^{-1}(\nu - \nu')] d\mu'. \quad (13.52)$$

Если u достаточно мало, то $|(\nu - \nu')/wu| > 1$, и Λ будет равно нулю при всех значениях μ' . Таким образом, существует некоторая минимальная скорость $u_{\min}$, начиная с которой может происходить рассеяние из ν' в ν , и нам нужно ее определить. Положим $\bar{\nu} = \max(\nu', \nu)$ и $\underline{\nu} = \min(\nu', \nu)$. Предположим сначала, что $\nu > \nu'$. Тогда требование, чтобы аргумент функции Λ попадал в промежуток $(-1, 1)$, означает, что $[(\nu - \nu')/(wu)] - 1 = (\bar{\nu} - \nu)/(wu) - 1 \leq 1$.

Это неравенство дает

$$u_{\min} = (\bar{\nu} - \underline{\nu})/2w = |\nu - \nu'|/2w. \quad (13.53)$$

Тот же самый результат получается из аналогичных рассуждений, если принять, что $\nu' > \nu$. Следовательно, формулой (13.53) охватываются все случаи. При $u \leq u_{\min}$ функция R_u будет равна нулю. При $u > u_{\min}$ вклад в R_u будет давать только некоторая часть области интегрирования по μ' . Чтобы найти ее, предположим для определенности, что $\nu > \nu'$. Тогда вклад в интеграл будет ненулевым, когда

$$-1 \leq \mu' \leq 1 - (\nu - \nu')/wu = (\bar{\nu} - \nu)/wu,$$

что влечет неравенства $\bar{\nu} - wu \leq \nu - w\mu' \leq \nu + wu$. Учтя, что по предположению $\bar{\nu} = \nu'$, можем переписать только что сформулированный результат так:

$$\bar{\nu} - wu \leq \nu' - w\mu' \leq \nu + wu. \quad (13.54)$$

Если, далее, предположить, что $\nu' > \nu$, мы опять приходим к неравенствам (13.54), которые, следовательно, справедливы во всех случаях.

Введем теперь функцию Хевисайда $\Phi(x, x_0)$, определенную так: $\Phi = 1$ при $x > x_0$ и $\Phi = 0$ при $x < x_0$. Сделав подстановку $y = \nu' - w\mu'$ и воспользовавшись формулами (13.53) и (13.54), можем окончательно записать выражение (13.52) в виде

$$R_{A,u}(\nu', \nu) = (4w^2u^2)^{-1} \Phi(u - |\nu - \nu'|/2w, 0) \int_{\bar{\nu} - wu}^{\nu + wu} f(y) dy. \quad (13.55)$$

Наконец, функцию $R_{A,u}$, фигурирующую в (13.49) и (13.55), следует усреднить по максвелловскому распределению скоростей

$$P(u) du = \pi^{-1/2} e^{-u^2} 4\pi u^2 du. \quad (13.56)$$

Поэтому из формулы (13.55) при наличии когерентности в системе отсчета атома (случаи I и II) имеем

$$R_A(\nu', \nu) = (\pi^{1/2} w^2)^{-1} \int_{u_{\min}}^{\infty} du e^{-u^2} \int_{\bar{\nu} - wu}^{\nu + wu} f(y) dy. \quad (13.57)$$

Из формулы (13.49) при некогерентности в системе отсчета атома (например, в случае III) имеем

$$R_A(\nu', \nu) = \pi^{-1/2} \int_0^{\infty} du u^2 e^{-u^2} \int_{-1}^1 d\mu' f(\nu' - w\mu' u) \times \\ \times \int_{-1}^1 d\mu p(\nu' - w\mu' u, \nu - w\mu u). \quad (13.58)$$

Наконец, удобно перейти к доплеровским единицам [см. формулы (13.12), (13.20) и (13.21)], положив

$$R_A(x', x) = R_A(\nu', \nu) (d\nu' / dx') (d\nu / dx) = w^2 R_A(\nu', \nu). \quad (13.59)$$

РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЧАСТНЫХ СЛУЧАЕВ

а) *Случай I.* Здесь $f(y) = \delta(y - \nu_0)$. Поэтому интеграл по y в формуле (13.57) отличен от нуля, только если

$\nu + w_i \geq \nu_0 \geq \bar{\nu} - w_i$. Это приводит к тому, что $u_{\min}$ теперь фактически становится равно $u'_{\min} = \max(|x'|, |x|)$, причем очевидно, что неравенство $u'_{\min} \geq u_{\min}$, в котором $u_{\min}$ дается (13.53), при этом удовлетворяется. Тогда из формул (13.57) и (13.59) имеем

$$R_{1,A}(x', x) = \pi^{-1/2} \int_{u_{\min}}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}(u'_{\min}), \quad (13.60)$$

где

$$\operatorname{erfc}(x) = 2\pi^{-1/2} \int_x^{\infty} e^{-z^2} dz. \quad (13.61)$$

Подставляя выражение для $u'_{\min}$, находим

$$R_{1,A}(x', x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}[\max(|x|, |x'|)]. \quad (13.62)$$

Эта функция перераспределения легко рассчитывается по известным приближенным выражениям для $\operatorname{erfc}(x)$ ([4], стр. 299). Асимптотические формулы, а также результаты для дипольного рассеяния даются в [313].

Графики $R_{1,A}(x', x)/\phi(x')$ приведены на рис. 13.2. Кривые относятся к разным значениям частоты падающего фотона x' и дают вероятность излучения на частоте x (в расчете на один акт поглощения) как функцию x . Мы видим, что фотон, поглощенный на частоте x' , при всех таких x , что $-|x'| \leq x \leq |x'|$, будет излучать-

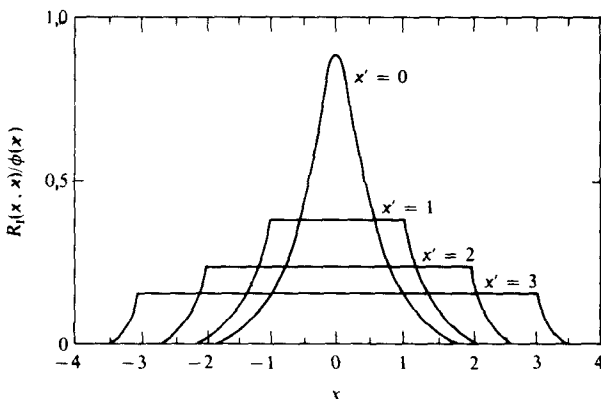


Рис. 13.2. Вероятность излучения на частоте x в расчете на акт поглощения на частоте x' при чисто доплеровском уширении. Ордината — $R_1(x', x)/\phi(x')$; абсцисса — частота излучаемого фотона x . Около кривых указана частота поглощаемого фотона x' .

ся с одной и той же вероятностью, а вне этого промежутка вероятность излучения экспоненциально убывает с ростом x . Этот результат легко понять. Поглощение может произойти, только когда $\xi' = 0$ в системе отсчета атома. Следовательно, атомы, поглощающие на частоте x' , имеют в лабораторной системе скорость не менее $|x'|$ (в доплеровских единицах). Поскольку излучение во всех направлениях происходит с одной и той же вероятностью, фотоны могут перераспределяться по всей области от $-|x'|$ до $+|x'|$ с равной вероятностью.

б) *Случай II.* Подставляя (13.3) в (13.57), имеем

$$R_{II,A}(\nu', \nu) = (w^2 \pi^{3/2})^{-1} \delta \int_{u_{\min}}^{\infty} du e^{-u^2} \int_{\bar{\nu} - wu}^{\frac{\nu}{\bar{\nu}} + wu} dy [(y - \nu_0)^2 + \delta^2]^{-1}. \quad (13.63)$$

Переходя к доплеровским единицам, обозначая $z = (y - \nu_0)/\delta = x/a$ и полагая по (13.53) $u_{\min} = \frac{1}{2} |x - x'|$, находим

$$\begin{aligned} R_{II,A}(x', x) &= \pi^{-3/2} \int_{|x' - x|/2}^{\infty} du e^{-u^2} \int_{(\bar{x} - u)/a}^{(\underline{x} + u)/a} dz (1 + z^2)^{-1} = \\ &= \pi^{-3/2} \int_{|x' - x|/2}^{\infty} du e^{-u^2} \left[\arctg \frac{\underline{x} + u}{a} - \arctg \frac{\bar{x} - u}{a} \right] du, \quad (13.64) \end{aligned}$$

где $\bar{x} = \max(|x|, |x'|)$ и $\underline{x} = \min(|x|, |x'|)$. Асимптотическое поведение R_{II} и результаты, относящиеся к дипольному рассеянию, см. в [313]. Метод расчета R_{II} , обеспечивающий высокую точность, дается в [6].

Функция перераспределения R_{II} представляет большой интерес, так как она описывает важный случай рассеяния в резонансной линии, уширение которой обусловлено затуханием излучения. Она подробно изучена. Графики $R_{II,A}(x', x)/\phi(x')$ при $a = 10^{-3}$ показаны на рис. 13.3. Кривые на нем также относятся к различным значениям частоты падающего фотона x' и дают вероятность (в расчете на акт поглощения) того, что следующее за ним излучение произойдет на частоте x . Видно, что при небольших x' ($x' \lesssim 3$) эти кривые напоминают соответствующие кривые для R_I , так как большая часть актов излучения обусловлена атомами, поглощающими в центре линии и движущимися со скоростями, близкими к x' . При больших x' атомов, движущихся с достаточно большими скоростями

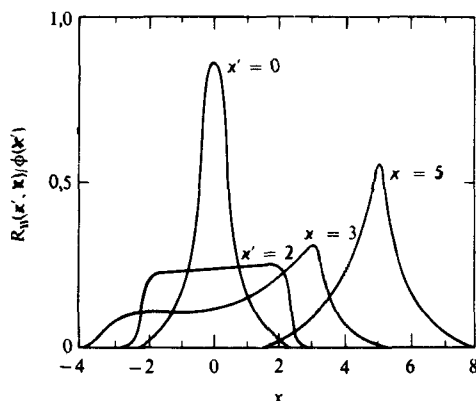


Рис. 13.3. Вероятность излучения на частоте x в расчете на акт поглощения на частоте x' при доплеровском уширении в случае когерентного (в системе атома) рассеяния с лоренцевским профилем с $a = 10^{-3}$. Ордината — $R_{II}(x', x)/\phi(x')$; абсцисса — частота излучаемого фотона x . Около кривых указана частота поглощаемого фотона x' .

ми, чтобы поглощать в центре линии, будет мало, и большая часть актов излучения обусловлена тогда атомами, движущимися с низкими скоростями и поглощающими в крыле линии. Поскольку процесс рассеяния в системе отсчета атома является когерентным и эти атомы почти покоятся в лабораторной системе, рассеяние будет почти когерентным и в лабораторной системе. Таким образом, в ядре линии происходит доплеровское перераспределение и имеется *сильная некогерентность*, в в крыле рассеяние является более когерентным. Как мы увидим в § 13.4, это оказывается важным для задачи о переносе в линии.

В ранней работе Джеффриса и Уайта [338] было высказано предположение, что простой аппроксимацией функции R_{II} может служить выражение

$$R_{II,A}(x', x) \approx (1 - a(x))\phi(x')\phi(x) + a(x)\phi(x)\delta(x - x'), \quad (13.65)$$

где $a(x)$ близко к нулю при $x \lesssim 3$ и почти равно единице при $x \gtrsim 3$. Предложенное ими первоначально для $a(x)$ выражение, однако, не годится, так как оно нарушает нормировку, симметрию и требование когерентности рассеяния в крыле линии. Тем не менее легко построить подходящую функцию [358], и подход такого рода в самом деле несколько упрощает вычисления, хотя при самых аккуратных расчетах для R_{II} следует использовать точное выражение [формула (13.64)].

в) *Случай III.* В этом случае когерентности в системе отсчета

атома нет, и поэтому можно без каких-либо осложнений использовать формулу (10.55), что дает

$$\begin{aligned}
 R_{A,u}(\nu', \nu) &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \frac{(\delta/\pi) d\mu'}{(\nu' - w\mu' u - \nu_0)^2 + \delta^2} \int_{-1}^1 \frac{(\delta/\pi) d\mu}{(\nu - w\mu u - \nu_0)^2 + \delta^2} = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2 w^2 u^2} \left[\operatorname{arctg} \frac{x' + u}{a} + \operatorname{arctg} \frac{x' - u}{a} \right] \times \\
 &\times \left[\operatorname{arctg} \frac{x + u}{a} - \operatorname{arctg} \frac{x - u}{a} \right]. \quad (13.66)
 \end{aligned}$$

Усредняя по максвелловскому распределению скоростей и переходя к доплеровским единицам, находим

$$\begin{aligned}
 R_{III,A}(x', x) &= \pi^{-1/2} \int_0^\infty e^{-u^2} \left[\operatorname{arctg} \frac{x' + u}{a} - \operatorname{arctg} \frac{x' - u}{a} \right] \times \\
 &\times \left[\operatorname{arctg} \frac{x + u}{a} - \operatorname{arctg} \frac{x - u}{a} \right] du. \quad (13.67)
 \end{aligned}$$

Асимптотические формулы, а также результаты для дипольного рассеяния и методы численного расчета R_{III} даются в [313], [212] и [529].

Графики $R_{III}(x', x)/\phi(x')$ при $a = 10^{-3}$ показаны на рис. 13.4. При небольших x' акты поглощения происходят преимущественно близ центра линии и обусловлены атомами, движущимися со скоростями, близкими к x' , а поэтому перераспределение происходит с равной вероятностью по всему промежутку $-x' \leq x \leq x'$, как это имело место для R_I и R_{II} . При больших x' здесь также большая часть актов поглощения происходит в крыльях линии и обусловлена почти неподвижными атомами. Но теперь излучаемые фотоны в системе отсчета атома полностью перераспределяются по профилю линии, и поэтому $R_{III}(x', x)/\phi(x') \rightarrow \phi(x)$ при $x' \gg 1$. Иногда можно встретить основанное на интуитивных соображениях утверждение, что если процесс рассеяния в системе отсчета атома является полностью некогерентным, то в комбинации со случайными доплеровскими смещениями из-за теплового движения атомов перераспределение должно оставаться полным и в системе наблюдателя. Это заключение, однако, ошибочно, как это ясно показывает рис. 13.5. На самом деле тепловые движения приводят к появлению близ центра линии корреляции между частотами падающего и рас-

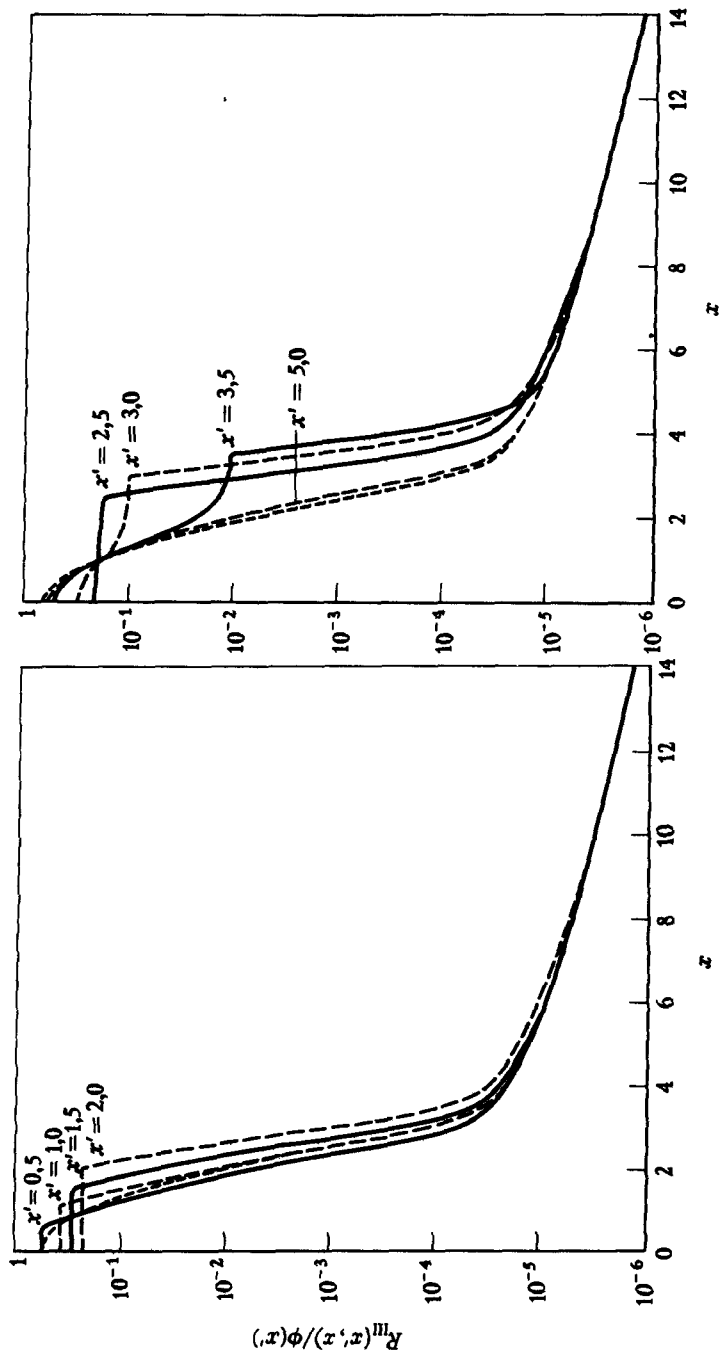


Рис. 13.4. Вероятность излучения на частоте x в расчете на акт поглощения на частоте x' при полном перераспределении по лоренцевскому профилю в системе атома и доплеровском перераспределении в лабораторной системе при $a = \delta/w = 10^{-3}$. Ордината — $R_{III}(x', x)/\phi(x')$; отметим, что шкала логарифмическая. Пунктирная кривая — профиль излучения при естественном возбуждении $\phi(x)$. Абсцисса — частота излучаемого фотона. Около кривых указана частота поглощаемого фотона x' . (По [212], с разрешения.)

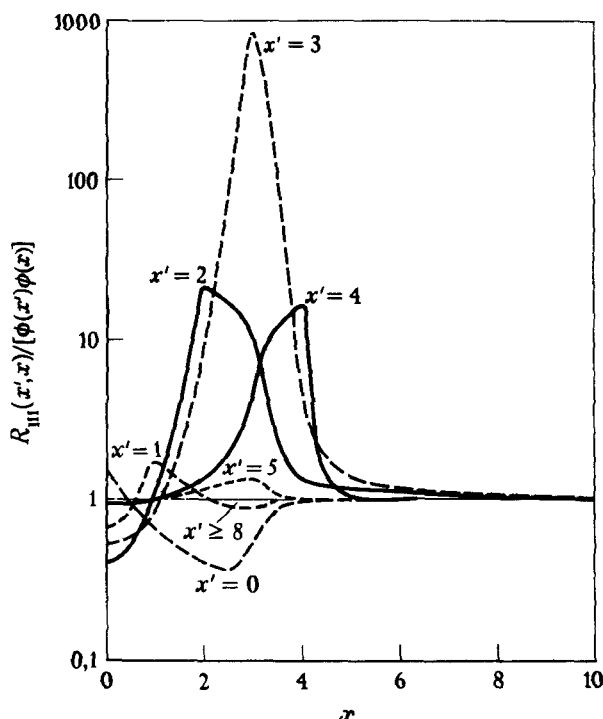


Рис. 13.5. Отношение истинной функции перераспределения при полном перераспределении в системе атома и доплеровском перераспределении в лабораторной системе $R_{III}(x', x)$ к функции перераспределения в предельном случае полного перераспределения в лабораторной системе $\phi(x')\phi(x)$. Профиль поглощения $\phi(x)$ фойгтовский с $a = 10^{-3}$. (По [212], с разрешения.)

сеянного фотонов, и отклонения от полного перераспределения в лабораторной системе могут быть большими. Несмотря на эти отклонения, оказывается (см. § 13.4), что предположение $R(x', x) = \phi(x')\phi(x)$ приводит к профилям линий, вполне подобным тем, которые получаются по точной функции $R_{III}(x', x)$, и случай полного перераспределения в системе атома практически можно рассматривать, как случай полной некогерентности в лабораторной системе, не вводя этим существенных погрешностей.

Упражнение 13.6. Показать, что усредненная по углам функция перераспределения для рассеяния на электронах (при тех же предположениях, которые использовались в упражнении 13.5) есть

$$R_{e,A}(\nu', \nu) = w^{-1} \text{ierfc}(|\nu' - \nu|/2w),$$

где

$$\operatorname{ierfc}(x) = \int_x^{\infty} \operatorname{erfc}(z) dz = \pi^{-1/2} e^{-x^2} - x \operatorname{erfc}(x)$$

и w — электронная доплеровская ширина: $w = v_0(2kT/m_e)^{1/2}/c$, которая примерно в $43 A^{1/2}$ раза больше доплеровской ширины для атома с атомным весом A . См. также [318] и [39].

СВОЙСТВА СИММЕТРИИ

Из формулы (13.31) видно, что после усреднения по углам мы должны получить

$$R(-x', -x) = R(x', x). \quad (13.68)$$

Этот результат имеет общий характер и справедлив всегда, когда имеет место соотношение (13.30). Далее, путем прямого обобщения тех соображений, которые привели к соотношению (13.35), найдем

$$R_i(x', x) = R_i(x, x'), \quad i = \text{I, II, III}. \quad (13.69)$$

В справедливости этого результата можно убедиться и непосредственно из формул (13.62), (13.64) и (13.67). Из соотношения (13.69) следует, что профиль излучения при естественном возбуждении (см. формулу (13.42)) есть

$$\psi_i(x) = \phi_i(x), \quad i = \text{I, II, III}. \quad (13.70)$$

Упражнение 13.7. Для случая I проверить результат, выражаемый формулой (13.70), путем непосредственного интегрирования $R_{\text{I}, A}(x', x)$ по x' .

13.4. Перенос излучения при частичном перераспределении

Рассмотрим теперь вопрос об учете эффектов усредненного по углам частичного перераспределения по частотам в проблеме образования спектральных линий. Для простоты ограничимся случаем двухуровневого атома с континуумом. Будет развит общий метод, дающий строгое решение задачи. (Этот метод можно легко распространить и на более сложные модели атома.) Затем будет развит несколько более простой, но менее общий подход, в котором член, описывающий вынужденное излучение — он вызывает некоторые трудности, — все же учитывается правильным образом.

После этого будет описан еще более простой метод, в котором члены, описывающие вынужденное излучение, учитываются лишь приближенно. Будут обсуждены результаты применения этого метода к сильно идеализированным моделям. Наконец, будут представлены результаты расчетов профилей резонансных линий для реалистичных моделей атомов и звездных атмосфер, выполненных с использованием общего метода.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ДЛЯ ДВУХУРОВНЕНОГО АТОМА

Исследуем образование резонансной линии, возникающей при переходе между бесконечно тонким нижним уровнем и верхним уровнем, который уширен за счет затухания вследствие излучения и столкновений. Обозначим населенность нижнего уровня через n_1 , полную населенность верхнего уровня (просуммированную по всем подуровням) через n_2 , а число ионов — через n_k . Распределение атомов в пределах верхнего состояния задается посредством *профиля излучения в системе наблюдателя* ψ_ν , определяемого как доля всех находящихся на верхнем уровне атомов, которые, если они совершают радиативный переход вниз, излучают фотоны частоты ν в лабораторной системе. Этот способ подсчета атомов в верхнем состоянии физически четко определен, так как он выражает это распределение через наблюдаемые величины. Функция ψ_ν некоторым сложным, но вполне однозначным образом отражает распределение испускаемых фотонов по частотам ξ в системе отсчета атома и распределение скоростей атомов v . Соответствующее преобразование описывается функцией перераспределения [456]. Очевидно, что ψ_ν нормировано, так что $n_2 = n_2 \int \psi_\nu d\nu$. Для дальнейшего удобно ввести вспомогательную переменную $\tilde{n}_2$, такую, что $n_2(\nu) = n_2 \psi_\nu = \tilde{n}_2(\nu) \phi_\nu$, дает число атомов на тех подуровнях верхнего состояния, с которых могут излучаться фотоны частоты ν . Основная зависимость, описывающая распределение атомов по подуровням верхнего состояния, тем самым оказывается выделенной, и то, как $\tilde{n}_2$ зависит от ν , отражает лишь отклонения от случая естественного возбуждения.

Населенность подуровней $n_2(\nu)$ (или, что эквивалентно, ψ_ν) определяется уравнением баланса вида

$$\begin{aligned} n_2(\nu)(A_{21} + B_{21}J_\nu + C_{21} + R_{2k} + C_{2k}) = \\ = n_1[B_{12} \int R(\nu', \nu)J_{\nu'} d\nu' + C_{12}\psi_\nu^*] + n_2^* \psi_\nu^*(R_{k2} + C_{2k}). \end{aligned} \quad (13.71)$$

Это уравнение имеет простую физическую интерпретацию (см. также [456]). Член, стоящий в левой части, — это населенность подуровня, умноженная на полную скорость ухода с него а) на основной уровень за счет спонтанного излучения, вынужденного излучения и столкновений и б) в континуум за счет фотоионизаций и столкновений. Единственный член, который стоит отметить, — это член, описывающий вынужденное излучение, которое *строго когерентно как в системе атома, так и в лабораторной системе*. Это следует из фундаментальных квантовомеханических свойств этого процесса [197], § 62; [293], § 17, при котором фотон, падающий на атом, стимулирует испускание еще одного фотона с *точно такими же свойствами*: энергией (а потому и частотой), импульсом (а значит, и направлением распространения) и поляризацией. Таким образом, фотон $(\nu', \mathbf{n}')$ (в лабораторной системе) претерпевает преобразование (зависящее от $\mathbf{n}$ и ν) в фотон $(\xi', \mathbf{n}')$ в системе атома и создает другой *тождественный* себе фотон. Оба фотона подвергаются *в точности одному и тому же обратному преобразованию* в лабораторную систему, поставляя в поле излучения *два* фотона $(\nu', \mathbf{n}')$. Члены в правой части описывают процессы возбуждения подуровня $n_2(\nu)$ — из основного состояния и за счет рекомбинаций из континуума. Последние приводят к появлению атомов на уровне 2, которые распределены по подуровням в соответствии с профилем естественного возбуждения ψ_ν^* . Через n_2^* обозначена концентрация частиц при ЛТР: $n_2^* = n_k n_e \Phi_2(T)$, где $\Phi_2(T)$ — соответствующий множитель Саха — Больцмана. Во всех трех рассмотренных в § 13.3 случаях перераспределения, представляющих физический интерес, имеем $\psi_\nu^* = \phi(\nu)$ [см. формулу (13.70)]. Атомы, возбуждаемые из основного состояния за счет столкновений, также распределены в соответствии с ψ_ν^* . Число фотовозбуждений определяется числом актов поглощения фотонов частоты ν' , именно $n_1 B_{12} J_{\nu'}$, умноженным на совместную вероятность $R(\nu', \nu)$ поглощения на ν' и излучения на ν . Это произведение следует далее проинтегрировать по всем ν' . Предполагается, что в процессе рассеяния доля γ всех возбужденных атомов излучает когерентно. Остальные фотоны испытывают полное перераспределение в системе отсчета атома за счет упругих столкновений [так что $p(\xi', \xi)$ дается формулой (13.6)]. Точная функция перераспределения в лабораторной системе была бы в этом случае такова:

$$R(\nu', \nu) = \gamma R_{II}(\nu', \nu) + (1 - \gamma) R_{III}(\nu', \nu), \quad (13.72)$$

но на практике достаточно пользоваться гораздо более простой

функцией

$$R(\nu', \nu) = \gamma R_{II}(\nu', \nu) + (1 - \gamma) \phi_{\nu'} \phi_{\nu}, \quad (13.73)$$

соответствующей предположению, что полное перераспределение в системе отсчета атома приводит к полному перераспределению и в лабораторной системе.

Уравнение статистического равновесия для основного состояния имеет вид

$$\begin{aligned} n_1(B_{12} \int \phi_{\nu} J_{\nu} d\nu + C_{12} + R_{1k} + C_{1k}) = \\ = n_2(A_{21} + B_{21} \int \phi_{\nu} J_{\nu} d\nu + C_{21}) + n^*_1(R_{k1} + C_{1k}). \end{aligned} \quad (13.74)$$

Его физический смысл аналогичен физическому смыслу (13.71). Наконец, полное число атомов предполагается известным, и поэтому

$$n_1 + n_2 \int \psi_{\nu} d\nu + n_k = n_{\text{ат}}. \quad (13.75)$$

Необходимые нам коэффициенты фотоионизации и рекомбинации можно либо считать заданными, и в этом случае расчету подлежит лишь поле излучения в линии, либо они должны получаться из решения уравнения переноса в континууме (считается, что это требуется только для континуума, возникающего из основного состояния).

Уравнение переноса, которое нужно решить, можно записать в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} (f_{\nu} J_{\nu}) = J_{\nu} - S_{\nu}, \quad (13.76)$$

где, как обычно, $d\tau_{\nu} = -\chi_{\nu} dz$ и $S_{\nu} = \eta_{\nu} / \chi_{\nu}$. В частотах линии

$$\chi_{\nu} = \alpha_{12} [n_1 - (g_1/g_2) \tilde{n}_2(\nu)] \phi_{\nu} + X_{\nu}, \quad (13.77)$$

$$\eta_{\nu} = (2h\nu^3/c^2) \alpha_{12} (g_1/g_2) \tilde{n}_2(\nu) \phi_{\nu} + E_{\nu}, \quad (13.78)$$

а для континуума, возникающего из основного состояния,

$$\chi_{\nu} = \alpha_{1k}(\nu) (n_1 + n^*_1 e^{-h\nu/kT}) + X_{\nu}, \quad (13.79)$$

и

$$\eta_{\nu} = (2h\nu^3/c^2) e^{-h\nu/kT} \alpha_{1k}(\nu) n^*_1 + E_{\nu}. \quad (13.80)$$

Здесь X_{ν} и E_{ν} представляет собой (заданные) коэффициенты поглощения и излучения, обусловленные другими составляющими газа, и $\alpha_{12} = B_{12} h\nu / (4\pi)$.

Решение уравнения переноса в данном случае очень сложно, поскольку *профиль коэффициента излучения ψ_{ν} заранее неизвестен*, а

получается из уравнений статистического равновесия (13.71) — (13.75). В отличие от случая полного перераспределения, где для определения функции источников достаточно найти лишь отношение n_2/n_1 [см. формулу (11.4)] и где поэтому требуется лишь одно уравнение статистического равновесия, теперь нам нужно *вычислять* ψ_j , и это приводит к появлению такого числа уравнений вида (13.71), какое требуется, чтобы определить эту функцию с желаемой точностью. Ситуация здесь удивительно напоминает задачу о мультиплете, состоящем из множества линий, с очень сильными эффектами взаимодействия между ними, причем каждая частота в пределах линии играет роль отдельного перехода в таком мультиплете, а линия в целом выступает как некоторый коллективный резервуар фотонов. Эта аналогия позволяет думать, что эффективное решение задачи можно будет получить с помощью метода полной линейаризации.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Мощный общий метод решения уравнений (13.71) — (13.75) совместно с уравнениями переноса (13.76) — (13.80) состоит в использовании полной линейаризации. Введем дискретный набор подуровней верхнего состояния, определяемых частотами $\{\nu_j\}$, измеренными от центра линии. Населенности подуровней можно тогда записать в виде $n_2(\nu_j) = \tilde{n}_{2j}\phi_j$, а дискретизированные уравнения статистического равновесия — в форме

$$n_1(B_{12} \sum_j w_j \phi_j J_j + C_{12} + R_{1k} + C_{1k}) - \sum_j w_j \tilde{n}_{2j} \phi_j (A_{21} + B_{21} J_j + C_{21}) - \\ - n_k [n_e \Phi_1(T)(R_{k1} + C_{1k})] = 0, \quad (13.81)$$

$$- n_1 \{ B_{12} [\gamma \sum_j \mathcal{R}_{jj}^{\text{II}} J_j + (1 - \gamma) \phi_j \sum_j w_j \phi_j J_j] + C_{12} \phi_j + \\ + \tilde{n}_{2j} \phi_j (A_{21} + B_{21} J_j + C_{21} + R_{2k} + C_{2k}) - n_k [n_e \Phi_2(T)(R_{k2} + C_{2k})] = 0 \\ (13.82)$$

$$n_1 + \sum_j w_j \tilde{n}_{2j} \phi_j + n_k = n_{aT}. \quad (13.83)$$

Здесь $\mathcal{R}_{jj}^{\text{II}}$ — дискретное представление $R^{\text{II}}(\nu_i, \nu_j)$ при использовании подходящей квадратурной формулы. Если положить $\mathbf{n} = (n_1, \tilde{n}_{21}, \tilde{n}_{22}, \dots, \tilde{n}_{2j}, \dots, \tilde{n}_{2J}, n_k)^T$, где J означает полное число подуровней, то уравнения (13.81) — (13.83) принимает вид $\mathcal{A} \mathbf{n} = \mathcal{B}$.

Предположим, что имеется какая-то оценка населенностей n на всех глубинах. Тогда текущие значения χ_ν , η_ν и J_ν можно рассчитать для всех частот в линии и в континууме. Далее, уравнение переноса можно линеаризовать, получив линейное по δJ_ν , $\delta \chi_\nu$ и $\delta \eta_\nu$ уравнение. Две последние величины можно выразить через δn_j , δn_j , $j = 1, \dots, J$, и δn_k . В свою очередь величины δn можно записать в виде $\delta n = \sum (\partial n / \partial J_k) \delta J_k$, где суммирование распространяется на все частоты линии и континуума. Производные $\partial n / \partial J_k$ можно записать в виде $\partial n / \partial J_k = -\mathcal{A}^{-1}[(\partial \mathcal{A} / \partial J_k) n]$, причем для производных $\partial \mathcal{A} / \partial J_k$ можно получить *явные аналитические выражения* (см. [456], [459]). Конечная система уравнений, подлежащих решению, имеет стандартную форму Фотриэ

$$-A_d \delta J_{d-1} + B_d \delta J_d - C_d \delta J_{d+1} = L_d,$$

где

$$\delta J_d = (\delta J_{1d}, \dots, \delta J_{kd}, \dots, \delta J_{Kd})^T.$$

Когда эта система решена, поправки δJ_ν добавляются к текущим оценкам J_ν и уравнения стационарности (13.81) — (13.83) решаются заново, давая новые значения n . Эти значения используются для вычисления χ_ν и η_ν , и формальное решение уравнения переноса позволяет получить улучшенные значения эддингтоновских множителей f_ν . Процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута сходимость. Этот формализм можно обобщить [459] таким образом, чтобы охватить им случай нескольких линий, возникающих при переходах с различных бесконечно тонких нижних уровней на одни и те же расширенные верхние уровни [например, H- и K-линии и инфракрасный триплет Ca II, для которых основное состояние $4s$ и метастабильные уровни $3d$ резкие, а состояние $4p$ уширено (см. рис. 12.1)]. Сходимость этого метода хорошая. Обычно каждая итерация уменьшает ошибку в решении раз в 5 — 10.

Описанный выше метод эффективен, но с вычислительной точки зрения он сравнительно дорог, и поэтому заслуживают внимания менее дорогостоящие методы [292]. Одна из основных трудностей, которые приходится преодолевать при учете частичного перераспределения, состоит в том, что *неизвестный* заранее эмиссионный профиль входит в член, учитывающий вынужденное излучение в χ_ν , а потому и в знаменателе отношения $S_\nu = \eta_\nu / \chi_\nu$. Однако во многих астрофизических приложениях, в частности для резонансных линий в ультрафиолете в атмосферах солнечного типа, эта поправка на вынужденное излучение, имеющая порядок $\exp(-h\nu/kT)$, чрезвычайно мала. В этом случае можно пойти по пути *итерирования* от-

ношения $\omega_\nu = \psi_\nu/\phi_\nu$ в члене, описывающем вынужденное излучение в том аналитическом выражении для функции источников, которое получается из уравнений статистического равновесия.

Рассмотрим функцию источников для строго двухуровневого атома, пренебрегая для простоты континуумом. Пользуясь эйнштейновскими соотношениями, можем записать функцию источников в линии в виде

$$S_e(\nu) = \frac{(2h\nu^3/c^2)n_2\psi_\nu}{(g_2/g_1)n_1\phi_\nu - n_2\psi_\nu} = \frac{(2h\nu^3/c^2)(g_1n_2\psi_\nu/g_2n_1\phi_\nu)}{1 - (g_1n_2/g_2n_1)\omega_\nu}. \quad (13.84)$$

Здесь и всюду в дальнейшем принимается, что текущая оценка ω_ν известна. Из уравнения (13.71), опуская члены, учитывающие континуум, находим

$$\begin{aligned} (2h\nu^3/c^2)(g_1n_2\psi_\nu/g_2n_1\phi_\nu) &= \\ &= \frac{A_{21}\phi_\nu^{-1} \int R(\nu', \nu) J_{\nu'} d\nu' + C_{21}(1 - e^{-h\nu/kT})B_\nu(T)}{A_{21} + B_{21}J_\nu + C_{21}}, \end{aligned} \quad (13.85)$$

а уравнение (13.74) дает

$$1 - (g_1n_2/g_2n_1)\omega_\nu = \frac{A_{21} + B_{21}(\bar{J}_e - \omega_\nu\bar{J}_a) + C_{21}(1 - \omega_\nu e^{-h\nu/kT})}{A_{21} + B_{21}\bar{J}_e + C_{21}}, \quad (13.86)$$

где $\bar{J}_a = \int \phi_\nu J_\nu d\nu$ и $\bar{J}_e = \int \psi_\nu J_\nu d\nu = \int \phi_\nu \omega_\nu J_\nu d\nu$. Обозначив $\varepsilon' = C_{21}(1 - e^{-h\nu/kT})/A_{21}$,

будем иметь

$$S_i(\nu) = \xi_\nu [\phi_\nu^{-1} \int R(\nu', \nu) J_{\nu'} d\nu' + \varepsilon' B_\nu], \quad (13.87)$$

где

$$\xi_\nu = \frac{(A_{21} + B_{21}\bar{J}_e + C_{21})/(A_{21} + B_{21}J_\nu + C_{21})}{1 + (B_{21}/A_{21})(\bar{J}_e - \omega_\nu\bar{J}_a) + (C_{21}/A_{21})(1 - \omega_\nu e^{-h\nu/kT})}. \quad (13.88)$$

Подставив (13.87) в выражение для полной функции источников, имеющее вид

$$S_\nu = [\chi_i(\nu)S_i(\nu) + \chi_c S_c]/[\chi_i(\nu) + \chi_c], \quad (13.89)$$

где теперь

$$\chi_i(\nu) = \alpha_{12}[n_1 - (g_1/g_2)n_2\omega_\nu]\phi_\nu + X_\nu, \quad (13.90)$$

приведем уравнение переноса к общей форме:

$$\frac{\partial^2(f_\nu J_\nu)}{\partial \tau_\nu^2} = J_\nu - a_\nu \int R(\nu', \nu) J_{\nu'} d\nu' + b_\nu. \quad (13.91)$$

Его можно решить, применяя стандартный метод Фотрие. В этом методе для вычисления ξ_ν по формуле (13.88) используются *текущие* значения ω_ν и J_ν , а для нахождения $\chi_i(\nu)$ в (13.90) и (13.89) — текущие значения населенностей уровней ω_ν . После этого решается уравнение переноса, что дает улучшенные значения J_ν . Эти J_ν подставляются затем в формулы (13.81) — (13.83) для получения улучшенных n_1 , $\bar{n}_2(\nu)$ и n_k , а по ним — ψ_ν и тем самым ω_ν . Этот процесс повторяется, пока не будет достигнута сходимость. Можно ожидать, что этот метод будет хорошо работать, если $B_{12}\bar{J}/A_{21} \ll \ll 1$. Когда процессы вынужденного излучения очень существенны, следует использовать описанную выше более полную процедуру ли-неаризации.

РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ИДЕАЛИЗИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ

Глубокое понимание природы эффектов частичного перераспределения можно получить из исследований, по своему духу близких к описанным в гл. 11 и основанных на использовании идеализированных моделей атмосфер и атомов. Чтобы как можно больше упростить задачу, обычно делают дополнительное физическое предположение, что профиль вынужденного излучения дается ϕ_ν , а не ψ_ν и что член, учитывающий вынужденное излучение в уравнении (13.71), можно записать в виде $n_2(\nu)B_{21}\bar{J}_a$, а не как $n_2(\nu)B_{21}J_\nu$. Тогда введенная выше величина ω_ν тождественно равна единице, $\bar{J}_e = \bar{J}_a$ и $\xi_\nu = (1 + \epsilon')^{-1}$, так что формула (13.87) приводится к виду

$$S_i(\nu) = (1 - \epsilon)\phi_\nu^{-1} \int R(\nu', \nu) J_{\nu'} d\nu' + \epsilon B_\nu, \quad (13.92)$$

где $\epsilon = \epsilon'/(1 + \epsilon')$. При такой функции источников уравнение переноса можно решить за один шаг, без итераций. Такой подход был использован для того, чтобы оценить, насколько зависящая от частоты $S_i(\nu)$, получающаяся при учете эффектов частичного перераспределения, отличается от не зависящей от частоты функции источников

$$S_i^{\text{пп}} = (1 - \epsilon) \int \phi_\nu J_\nu d\nu + \epsilon B_\nu, \quad (13.93)$$

соответствующей полному перераспределению. Рассматривались случаи R_I , R_{II} и R_{III} , причем свойства атмосферы считались не за-

висящими от глубины [53], [212], [316]. Функции источников $S_l(\nu)$ и $S_l^{\text{ПП}}$ можно также использовать для расчета профилей линий. Это позволяет оценить ошибки, появляющиеся в расчетных профилях, если вместо точной функции источников принимается приближенная, соответствующая полному перераспределению. Некоторым промежуточным приближением служит *итерированная* функция источников

$$S_l^{(1)}(\nu) = (1 - \varepsilon)\phi_\nu^{-1} \int R(\nu', \nu) J_{\nu'}^{\text{ПП}} d\nu' + \varepsilon B_\nu, \quad (13.94)$$

получающаяся при использовании средней интенсивности, которая соответствует полному перераспределению и рассчитывается по функции источников, даваемой (13.93). Было найдено, что в изотермических средах $S_l^{(1)}(\nu)$ почти равна $S_l(\nu)$ [316], тогда как вычисляется она, разумеется, гораздо проще.

Рассмотрим сначала случай перераспределения за счет чистого доплер-эффекта, т.е. положим $R(\nu', \nu) = R_I(\nu', \nu)$. В предположении, что коэффициент поглощения в континууме равен нулю, а $a = 10^{-4}$ и 10^{-6} , было получено целое семейство функций $S_l(\nu)$ как для конечных, так и для полубесконечных изотермических сред. Результаты, характеризующие изменение функции источников с частотой и с глубиной, показаны на рис. 13.6 (для $\varepsilon = 10^{-4}$). Вертикальными стрелками отмечены те частоты, на которых монохроматическая оптическая глубина $\tau_x = 1$. Видно, что на всех частотах, для которых $\tau_x \geq 1$, функция $S_l(x)$ почти равна $S_l^{\text{ПП}}$. При $\tau_x < 1$ имеются значительные отклонения, но они не имеют большого значения, так как эти оптически прозрачные области не дают большого вклада в интенсивность, определяющую профиль линии. Профили линии, рассчитанные по $S_l^{\text{ПП}}$ и по $S_l(x)$, практически совпадают. Поэтому мы приходим к заключению, что для случая I процесс многократного рассеяния для всех практических применений адекватно описывается более простым предположением о полном перераспределении. Аналогичное заключение справедливо и для случая, когда имеется полное перераспределение в системе отсчета атома, т.е. при $R(\nu', \nu) = R_{\text{III}}(\nu', \nu)$ [212]. Здесь итерированная функция источников, определяемая формулой (13.94), была вычислена для изотермической полубесконечной атмосферы для линий с $a = 10^{-3}$ и $\varepsilon = 10^{-6}$ и $6 \cdot 10^{-3}$. Оказалось, что $S_l^{(1)}(\nu)$ отклоняется заметно от $S_l^{\text{ПП}}$ тоже только при $\tau_x < 1$ и что профили линии в выходящем излучении, рассчитанные по $S_l^{\text{ПП}}$, почти тождественны профилям, получающимся по функции источников, не зависящей от частоты. Поэтому предположение о полном перераспределении

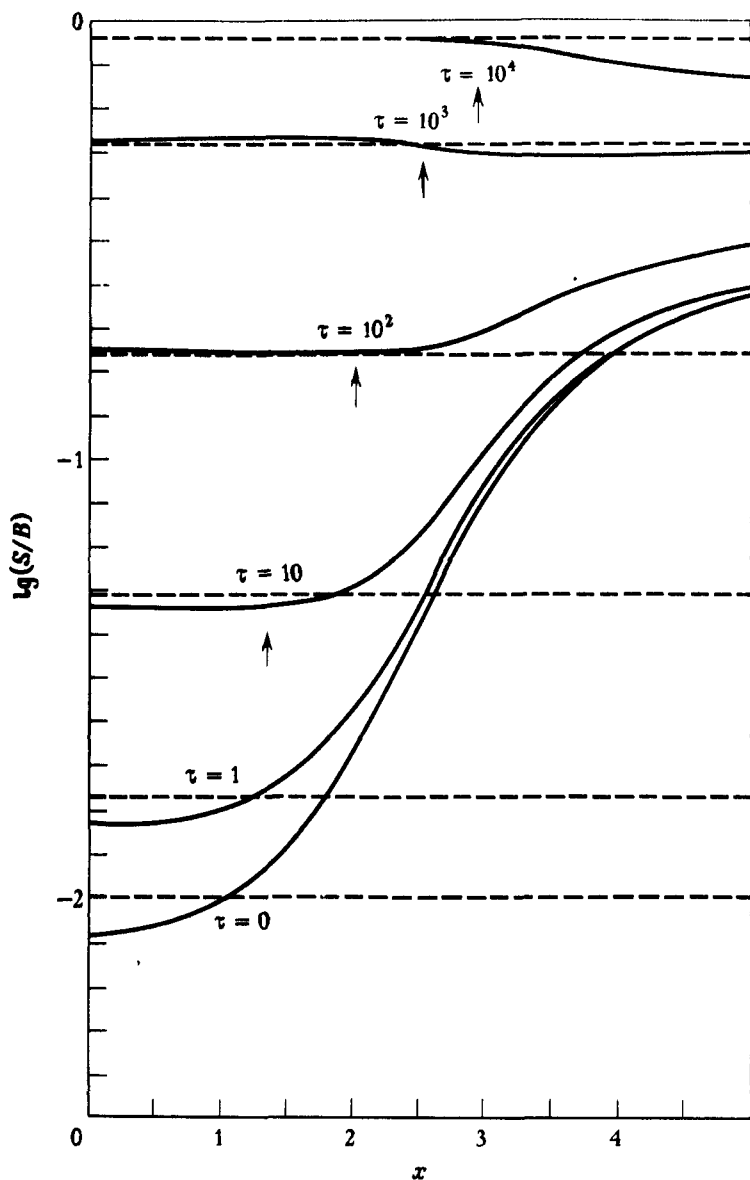


Рис. 13.6. Функция источников в изотермической полубесконечной атмосфере для линии с $\varepsilon = 10^{-4}$ при чисто доплеровском перераспределении (случай I). Вертикальными стрелками отмечены те частоты, на которых монохроматическая оптическая глубина $\tau_x = 1$. Пунктир — не зависящая от частоты функция источников $S_I^{\text{пп}}$, полученная в предположении о полном перераспределении; сплошные кривые — зависящая от частоты функция источников $S_I(x)$, полученная с использованием точной функции перераспределения; абсцисса — расстояние от центра линии в доплеровских единицах. (По [316], с разрешения.)

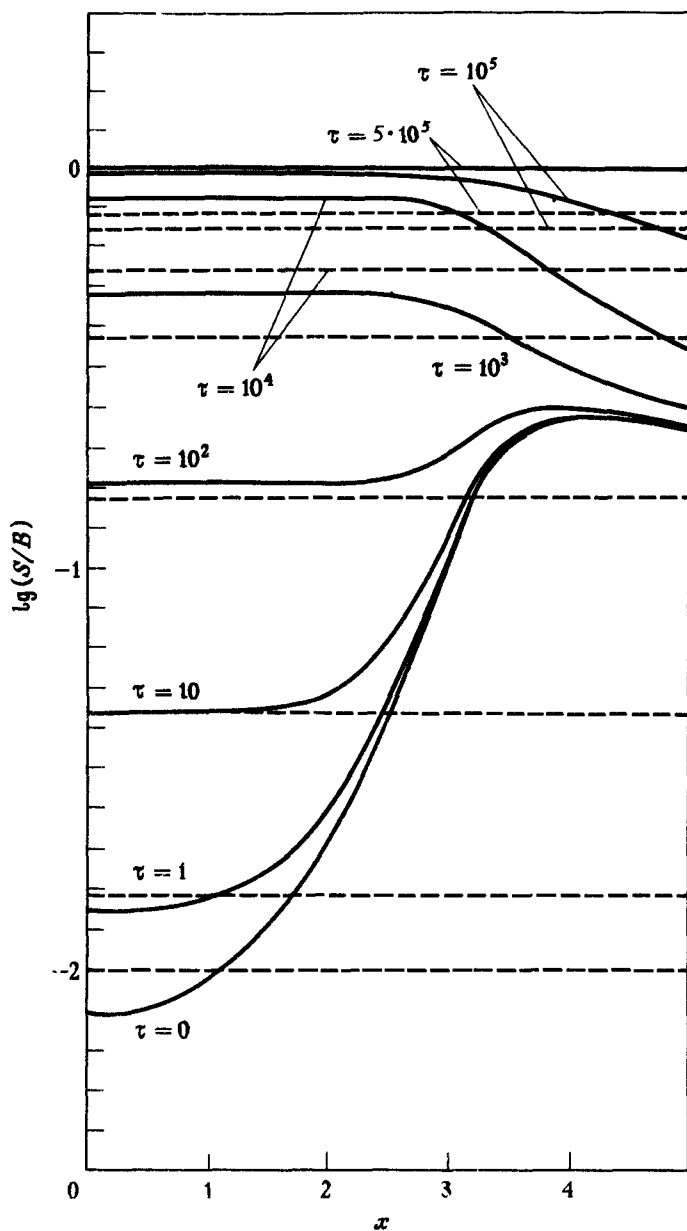


Рис. 13.7. Функция источников в изотермической атмосфере оптической толщины $T = 10^6$ для линии с $\epsilon = 10^{-4}$ и $a = 10^{-3}$ в предположении о когерентном в системе атома рассеянии (с профилем, обусловленным затуханием излучения) и доплеровском перераспределении в лабораторной системе. Пунктир — не зависящая от частоты функция источников $S_i^{\text{пп}}$, полученная в предположении о полном перераспределении; сплошные кривые — зависящая от частоты функция источников $S_i(x)$, полученная с использованием точной функции перераспределения; абсцисса — расстояние от центра линии в доплеровских единицах. (По [316], с разрешения.)

обеспечивает очень полезную и точную аппроксимацию также и в случае III.

В случае II (когерентное в системе атома рассеяние при уширенном профиле с доплеровским перераспределением в лабораторной системе) положение оказывается совершенно иным. Результаты для изотермической атмосферы полиой оптической толщины $T = 10^6$ для линии с $a = 10^{-3}$ и $\epsilon = 10^{-4}$, приводимые в [316], показаны на рис. 13.7. Видно, что здесь в центре линии $S_l(\nu)$ близко к $S_l^{\text{ПП}}$ на малых оптических глубинах, но на больших глубинах $S_l(\nu)$ становится *больше* $S_l^{\text{ПП}}$ и *термализуется*, приближаясь к функции Планка, *быстрее*, чем функция источников при полном перераспределении. Этот результат объясняется тем, что когерентный характер процесса рассеяния в крыльях линии сдерживает уход фотонов из ядра линии и приводит к более быстрой термализации в ядре за счет уменьшения полной вероятности выхода таких фотонов из среды. В противоположность этому в крыльях линии зависящая от частоты функция источников имеет значительно меньшие значения, чем $S_l^{\text{ПП}}$, так как фотоны более не накачиваются столь эффективно в крылья. Для конечных атмосфер эти эффекты выражены еще сильнее: в крыльях линии $S_l^{\text{ПП}}$ может превосходить $S_l(x)$ на несколько порядков! Различия между $S_l(x)$ и $S_l^{\text{ПП}}$ находят полное отражение в профилях линии на границе среды. При истинной функции источников интенсивность в крыльях профиля лежит значительно ниже, чем при полном перераспределении, и находится почти в точном согласии с интенсивностями, получающимися при когерентном рассеянии. Хотя при наличии континуума, на который налагается линия, эти эффекты будут уменьшаться, можно тем не менее ожидать, что для линий, формирующихся в наружных слоях звезд, где плотности, а потому и эффективность столкновений малы, эффекты частичного перераспределения будут существенны.

ПРИМЕНЕНИЯ К СОЛНЕЧНЫМ И ЗВЕЗДНЫМ РЕЗОНАНСНЫМ ЛИНИЯМ

Резонансные линии многих ионов [например, водорода (в особенности L_α), Ca II и Mg II] формируются в хромосферных слоях низкой плотности и потому довольно хорошо характеризуются функцией перераспределения вида (13.73) с γ , почти точно равным единице. К настоящему времени выполнено несколько расчетов для солнечных линий (с использованием гарвардско-смитсоновской или близких к ней моделей атмосферы) и для гигантов со спектром солнечного типа (у них плотности еще ниже, чем на Солнце) с использованием реалистичных моделей атмосфер.

Один из первых примеров существенной роли эффектов частичного перераспределения при образовании резонансных линий был выявлен при попытках воссоздать наблюдаемый профиль солнечной хромосферной линии L_{α} [645]. Было найдено, что если профиль линии вычислять в приближении полного перераспределения по частотам, используя модели, которые хорошо воспроизводят те детали континуума, которые формируются в тех же слоях атмосферы, что и крыло линии L_{α} , то интенсивность, даваемая расчетом для крыла линии, оказывается гораздо больше наблюдаемой (раз в 5 — 6). Из этого первого исследования [645] выяснилось, что профиль воспроизводится гораздо лучше, если рассеяние считать примерно на 93% когерентным и лишь на 7% — полностью некогерентным. Последующая работа показала [456], что такое представление эквивалентно использованию уравнения (13.73) с реалистичными значениями γ (определенными по известной эффективности ударных и радиативных процессов) и, наконец, что если полностью учесть изменение с глубиной профиля коэффициента поглощения, функций перераспределения, атомных параметров, населенностей уровней и поглощения в континууме, на который налагается линия, то получается прекрасное согласие с наблюдениями [457].

Еще более интересным примером могут служить солнечные линии H и K CaII, для которых ранние исследования (например, [401]), в которых использовалось предположение о полном перераспределении, давали хорошее согласие с профилями в центре диска, но были не способны воспроизвести наблюдаемое изменение центр — край. Затем были выполнены расчеты, основанные на использовании модели атома с пятью уровнями, аналогичной изображенной на рис. 12.1, для трех моделей атмосферы: 1) гарвардско — смитсоновская стандартная модель атмосферы (HSRA) с не зависящей от глубины микротурбулентностью в 4,5 км/с; 2) модель HSRA с распределением микротурбулентной скорости в функции глубины, взятой по [401]; 3) та же модель, что и в (1), но с распределением температуры, замененным на $T_3 = \max(T_{\text{HSRA}}, 4450 \text{ K})$, что повышает минимальную температуру примерно на 300 K. Во всех случаях целиком принимались во внимание все изменения с глубиной как профиля линии (с учетом радиационного, вандерваальсова и штарковского уширения), так и функции перераспределения и источников образующего фон континуума.

Результаты расчетов двойного самообращения близ центра линии, дающего ценнейшую информацию для диагностики области температурного минимума и хромосферы, выполненные при пред-

положении о полном перераспределении (ПП) и о частичном перераспределении (ЧП), разительно отличаются друг от друга. Как видно из рис. 13.8, при ЧП в пределах всего профиля имеется равномерное потемнение к краю. В противоположность этому, согласно расчетам, с ПП имеется уярчение к краю в K_2 (т.е. в эмиссионном максимуме) и нет никакого изменения от центра к краю в K_1 (минимум снаружи от K_2). Оба этих результата находятся в противоречии с наблюдениями. Кроме того, минимум K_1 быстро удаля-

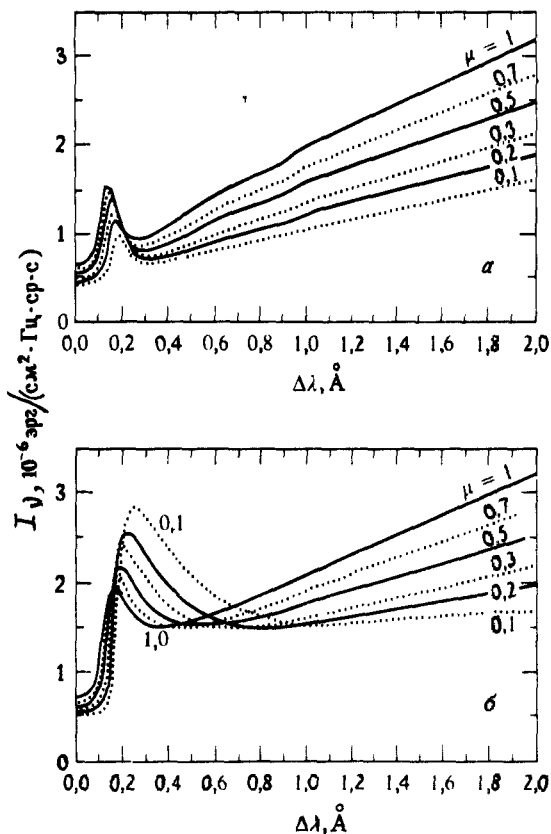


Рис. 13.8. Профили К-линии Са II, рассчитанные с использованием гарвардско-смитсоновской стандартной модели солнечной атмосферы [249] при распределении микротурбулентных скоростей, взятом по [401]. Ордината — интенсивность излучения $I(\mu, \Delta\lambda)$ в абсолютных единицах; абсцисса — смещение $\Delta\lambda$ от центра линии в Å. а — результаты расчета с частичным перераспределением; б — результаты расчета при полном перераспределении. Числа у кривых — значения косинуса μ углового расстояния от центра диска. (По [570], с разрешения.)

ется от центра линии при переходе от центра к краю при ПП (и это тоже противоречит наблюдениям). Для ЧП расстояние от K_1 до центра линии растет гораздо медленнее. Вопрос об уячении к краю в K_2 при принятии ПП можно уладить, если взять некоторое весьма специальное распределение микротурбулентных скоростей [27]. Однако ни одно из только что описанных затруднений, связанных с K_1 , таким путем не разрешается. Если же используется ЧП, необходимости в таком специальном допущении не возникает.

Количественное улучшение, которое достигается при сравнении расчетов с наблюдаемым поведением детали K_1 , показано на рис. 13.9. Из него видно, что ПП предсказывает слишком быстрое возрастание $\Delta\lambda(K_1)$ при $\mu \rightarrow 0$, тогда как и модель 1, и модель 3 показывают превосходное согласие с наблюдательными данными. Модель 2 дает не столь хорошее согласие, однако для некоторых данных, связанных с K_2 (которые здесь не обсуждаются), она обеспечивает лучшее согласие. Из рис. 13.9,б видно, что ПП совершенно неспособно объяснить уменьшение интенсивности K_1 к краю, в то время как ЧП (с любой из трех рассматриваемых моделей) дает правильное *изменение* от центра к краю (обращаем внимание на то, что шкала *логарифмическая*). Отметим, что *абсолютная интенсивность* детали K_1 при ЧП меньше, чем при ПП для *той же самой модели* (сравните пустые и сплошные кружочки при $\mu = 1$). Это обусловлено практически когерентным характером процесса рассеяния в детали K_1 и согласуется с результатами расчета для обсуждавшихся выше идеализированных моделей при перераспределении с функцией R_{II} . Есть одна возможность добиться согласия в абсолютных интенсивностях — поднять минимальную температуру на 300 — 400 К по сравнению с ее значением в гарвардско-смитсоновской стандартной модели атмосферы, как это и было сделано в модели 3. Хотя это изменение может показаться небольшим, следует напомнить, что изменение T на 100 К близ $T_{\min}$ изменяет энергию, содержащуюся в этой области, на величину, сравнимую с той энергией, которая содержится во всей короне (см. §7.7). На основе данных об одной линии можно не решиться сделать вывод, что $T_{\min}$ должно быть выше, чем значение по гарвардско-смитсоновской модели атмосферы. Однако аналогичные результаты получаются также из анализа h- и k-линий MgII [59], и может оказаться, что эмпирическое значение $T_{\min}$ придется поднять примерно до 4400 К. Такая эмпирическая подгонка привела бы этот полумэмпирический результат в полное согласие с оценками $T_{\min}$ по моделям с лучистым равновесием и ликвидировала бы трудность, описанную в

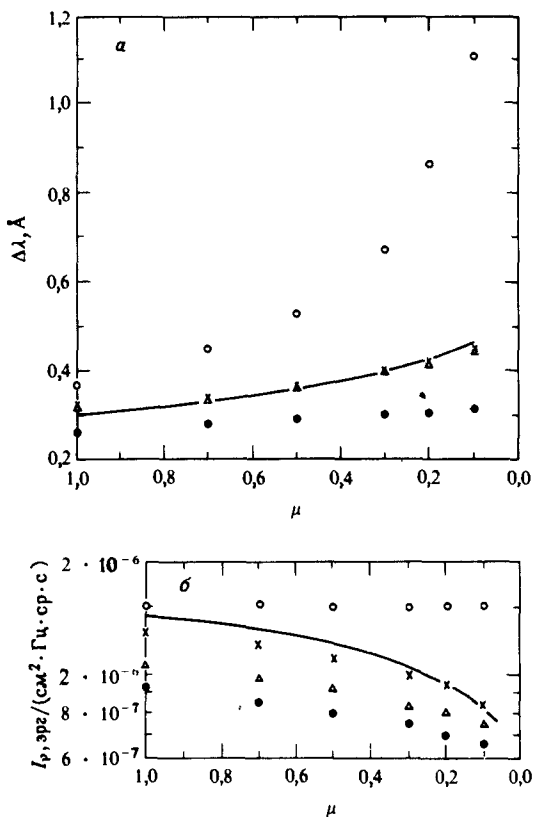


Рис. 13.9. *а* — расстояние минимума интенсивности K_1 , имеющегося вне эмиссионного ядра, от центра линии в функции косинуса μ углового расстояния от центра диска. *б* — потемнение к краю в K_1 ; обращаем внимание на то, что интенсивность дается в логарифмической шкале. Пустые кружки — результаты, соответствующие полному перераспределению, модель 2 (см. текст). Сплошные кружки — частичное перераспределение, модель 2. Треугольники — частичное перераспределение, модель 1 (см. текст). Крестики — частичное перераспределение, модель 3 (см. текст). (По [570], с разрешения.)

§7.7: В любом случае следует подчеркнуть, что уменьшение интенсивности при ЧП по сравнению с ПП для любой данной модели является дифференциальным эффектом, и потому он будет существовать, какая бы модель ни использовалась. Поэтому если $T_{\min}$ оценивается по интенсивности K_1 , как это иногда делают при изучении звезд, необходимо пользоваться описанием процесса рассеяния с ЧП, особенно для гигантов [571], иначе будут допускаться систе-

математические ошибки. Наконец, оказывается, что расчеты с ЧП правильно воспроизводят относительное поведение линий Н и К, а с ПП — нет.

Заметные различия в предсказываемом ПП и ЧП потемнении к краю и в расстоянии K_1 от центра линии легко понять, исходя из различий в том, как изменяются с глубиной две функции источников — $S_l^{\text{ПП}}$, которая не зависит от частоты, и зависящая от частоты функция источников при ЧП $S_l(\nu)$ (см. рис. 13.10). Из этого рисунка видно, что ПП дает единую для всех ν функцию источников, имеющую одинаковый для всех частот минимум. При перемещении точки наблюдения от центра к краю оптический путь вдоль наклонного луча зрения для некоторой фиксированной частоты возрастает. Если используется $S_l^{\text{ПП}}$, это должно приводить к тому, что интенсивность на расстоянии от центра линии, равном $\Delta\lambda_{K_1}$ при $\mu = 1$, должна возрастать с убыванием μ . Минимум $S_l^{\text{ПП}}$ будет проявляться только при некотором большем $\Delta\lambda$, где вещество прозрачнее, и потому интенсивность отражает значение функции источников на большей глубине, вблизи минимума. Этим объясняет-

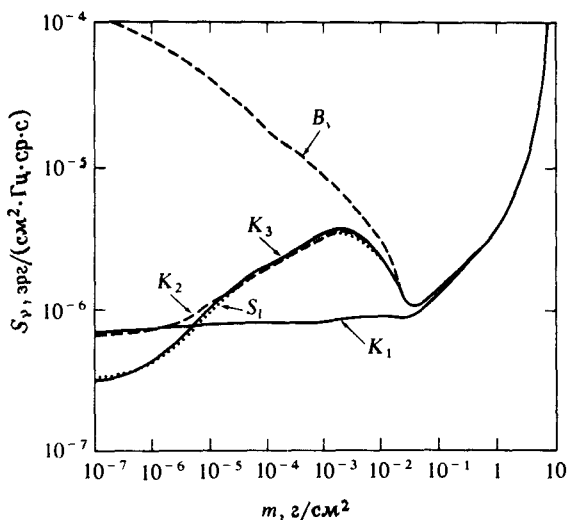


Рис. 13.10. Изменение с глубиной функции источников для линии К (для атома с пятью уровнями) и функции Планка согласно модели 1. Пунктир — функция Планка B_ν . Точечная кривая — функция источников при полном перераспределении S_l (см. также рис. 12.2). Остальные кривые дают функции источников при частичном перераспределении в центре линии (K_3), у эмиссионного пика (K_2) и близ минимума в профиле, который лежит вне этой эмиссии (K_1). Абсцисса — масса на луче зрения (г/см^2). (По [570], с разрешения.)

ся быстрый рост $\Delta\lambda(K_1)$ в функции μ и почти точное постоянство I_{K_1} , предсказываемые ПП. В противоположность этому при ЧП функция источников в центре линии (K_2) имеет *большее* значение, чем при ПП (из-за того, что фотоны заперты, — это уже обсуждалось выше). Но у K_1 функция источников фактически соответствует когерентному рассеянию, она почти не зависит от интенсивности излучения на других частотах и показывает монотонное убывание с приближением к границе атмосферы (аналогичные результаты были получены в [642]). Из-за такого поведения $S_i(K_1)$ перемещение точки наблюдения от центра к краю приводит лишь к тому, что $S_i(K_2)$, дающее главный вклад в интенсивность, соответствует более высоким слоям атмосферы, где (при ЧП) она имеет *более низкое* значение. Это приводит к падению I_{K_1} , как это и нужно, а $\Delta\lambda$ остается примерно постоянным. Короче говоря, учет частичного перераспределения ведет к *существенному* улучшению согласия между теорией и наблюдениями для солнечных линий H и K Ca II. Аналогичные расчеты со сходными результатами были выполнены также для h- и k(3s — 3p)-линий Mg II для солнечной атмосферы [458], [59] и для звезд типа Солнца [455]. К настоящему времени стало ясно, что при интерпретации сильных хромосферных резонансных линий с протяженными крыльями, обусловленными затуханием излучения, учет эффектов частичного перераспределения совершенно необходим, и дальнейшие усилия в этом направлении, безусловно, будут щедро вознаграждены.

Глава 14

Перенос излучения в движущихся атмосферах

О существовании в звездных атмосферах макроскопических движений (т.е. нетепловых скоростей, заметно не меняющихся на расстояниях, значительно превышающих среднюю длину свободного пробега частиц) надежно свидетельствует большое число наблюдательных данных. По-видимому, имеются подобные движения всех пространственных масштабов: от «вихрей», размеры которых малы по сравнению со средней длиной свободного пробега фотонов, до расширения атмосферы как целого. Хотя на переносе излучения в континууме макроскопические движения сказываются слабо, их влияние на образование спектральных линий велико, поскольку даже небольшое (доплеровское) смещение линии по частоте приводит к большому изменению ее поглощательной способности для неподвижного наблюдателя.

При анализе спектров сверхгигантов Струве и Элви [617] обнаружили, что *доплеровские ширины, определенные по положению плоской части кривой роста* (см. §10.3 и 10.4), *существенно превышают тепловые значения*. Они приписали это уширение нетепловым «турбулентным» движениям, постулировав у них гауссово распределение скоростей. Предполагается, что геометрический масштаб этих движений, называемых «*микротурбулентностью*», настолько мал, что они действуют как дополнительный фактор уширения линий и поэтому *увеличивают силы линий*. Находимые скорости часто близки к скорости звука в среде или *превышают ее*. Поэтому понятно, что астрофизическую «микротурбулентность» нельзя отождествлять с турбулентностью в строгом гидродинамическом смысле, а следует скорее понимать пространственно не разрешенные движения вещества.

Картина становится яснее, когда мы исследуем солнечный спектр. И в этом случае по кривым роста и по спектрам с низким пространственным, спектральным и временным разрешением получается значительная микротурбулентная скорость. Однако в спектрах высокого разрешения линии имеют характерную «извилистую» форму (в качестве прекрасного примера этого см. рис. III. 2 в [20]), показывая отчетливые доплеровские смещения и асимметрию, ко-

которые быстро флуктуируют вдоль щели и с течением времени. Вероятно, большая часть или даже все поле скоростей складывается из *волновых движений* различных типов, масштабов и периодов, дающих при наложении картину, которая выглядит хаотической и «турбулентной». Однако диагностика находится еще в зачаточном состоянии, и истинная природа поля скоростей известна еще не слишком хорошо.

Указание на наличие *крупномасштабных движений* вещества («макротурбулентность») было дано замечанием Струве [616], что *ширины линий* в спектрах некоторых звезд превышают доплеровские ширины, находимые по кривым роста. При этом сила линии не изменяется, и поэтому можно представить себе, что на поверхности звезды имеются настолько обширные области, что они воспринимаются как практически независимые «атмосферы», обладающие систематическими движениями вдоль луча зрения. Обсуждение наблюдений и обширную литературу можно найти в [261], гл. 8. Далее, в некоторых звездных спектрах периодические доплеровские смещения линий свидетельствуют о том, что эти спектры принадлежат *пульсирующим звездам*. Кроме того, такие объекты, как звезды WR, звезды типа Р Лебедя, а также сверхгиганты ранних типов, обладают характерными профилями линий с абсорбционными компонентами, смещенными в «синюю» сторону, и эмиссионными компонентами, смещенными в «красную» сторону, которые указывают на крупномасштабное расширение.

Ясно, что описание макроскопических движений в атмосферах звезд отнесением их к одному из двух крайних случаев: «микро»- и «макротурбулентности» — является крайним упрощением, а на самом деле хотелось бы знать *функции распределения* амплитуд скорости и характерных размеров движущихся элементов. Кроме того, хотелось бы установить связь между параметрами, получаемыми из наблюдений, и более фундаментальными величинами, такими, как скорости конвективных движений. Наконец, построение последовательной теории звездных атмосфер потребует создания *динамической* теории взаимодействия между движением вещества, его термодинамическим состоянием и полем излучения. Только тогда можно будет полностью разобраться в звездных атмосферах и коронах.

Однако в настоящее время мы еще далеки от того, чтобы предполагать столь полной теорией. В этой главе мы сосредоточим внимание почти исключительно на «кинематических» аспектах переноса излучения в движущихся средах, когда распределение скоро-

стей и модель атмосферы заданы и требуется *рассчитать* спектр выходящего излучения. Существуют разнообразные пути решения поставленной только что задачи. *Методы, в которых используется система отсчета, связанная с наблюдателем*, позволяют рассматривать сложные поля скоростей и многомерные структуры (хотя мы и ограничимся рассмотрением лишь одномерных задач). Однако применение этих методов обычно ограничено скоростями порядка нескольких тепловых скоростей, и поэтому они мало подходят для изучения быстро расширяющихся атмосфер. В противоположность этому *метод Соболева* позволяет получить приближенное решение в случае быстрого течения с большими градиентами скорости. *Методы, основанные на использовании сопутствующей системы координат*, пригодны во всей промежуточной области между этими двумя крайними случаями и дают общие решения, применимые и в обоих этих предельных случаях. Специальные методы были развиты для исследования *случайных, или стохастических, макроскопических движений*.

14.1. Уравнение переноса в системе отсчета, связанной с наблюдателем

ВЫВОД И РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Когда атмосферное вещество движется со скоростью $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ относительно покоящегося внешнего наблюдателя, имеется *доплеровский сдвиг* частот фотонов в системе отсчета наблюдателя и в системе отсчета атомов, из которых состоит это вещество. Если ν — частота в системе наблюдателя, то в системе, связанной с атомом, частота, на которой фотон, движущийся в направлении $\mathbf{n}$, был излучен или может быть поглощен, равна

$$\nu' = \nu - \nu_0(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c). \quad (14.1)$$

Таким образом, коэффициенты поглощения и излучения вещества для неподвижного наблюдателя становятся *зависящими от углов*. Уравнение переноса для стационарной движущейся среды в плоской геометрии имеет тогда вид

$$\mu dI(z, \mu, \nu)/dz = \eta(z, \mu, \nu) - \chi(z, \mu, \nu)I(z, \mu, \nu). \quad (14.2)$$

Смещения частоты от центра линий удобно измерять в единицах стандартной доплеровской ширины $\Delta\nu_D^* = \nu_0 v_{\text{тепл}}^*/c$, где $v_{\text{тепл}}^*$ — параметр тепловой скорости. Скорости удобно измерять в аналогичных тепловых единицах $V = v/v_{\text{тепл}}$. Тогда связь между частотами в системе наблюдателя и в системе, связанной с атомом, принимает вид

$$x' = x - \mu V, \quad (14.3)$$

где $x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D^*$, и x' определяется сходным образом. Для членов, описывающих вклад континуума, влияние доплеровских смещений несущественно, так как они мало меняются на интервале частот, характеризующем смещение частоты из-за движения атомов. Поэтому будем учитывать только изменения в членах, описывающих вклад линии, так что

$$\chi(z, \mu, x) = \chi_c(z) + \chi_l(z)\phi(z, \mu, x) \quad (14.4)$$

и

$$\eta(z, \mu, x) = \eta_c(z) + \eta_l(z)\phi(z, \mu, x), \quad (14.5)$$

где нормированный профиль поглощения определяется формулой

$$\phi(z, \mu, x) = \phi(z; x - \mu V). \quad (14.6)$$

Например, для доплеровского профиля

$$\phi(z, \mu, x) = \pi^{-1/2} \delta^{-1}(z) \exp \{ -[x - \mu V(z)]^2 / \delta^2(z) \}, \quad (14.7)$$

где δ определяет локальную доплеровскую ширину в единицах стандартного значения, т.е. $\delta(z) = \Delta\nu_D(z)/\Delta\nu_D^*$. Введем теперь функции источников в линии и в континууме: $S_l(z) = \eta_l(z)/\chi_l(z)$ и $S_c(z) = \eta_c(z)/\chi_c(z)$, полную функцию источников

$$S(z, \mu, x) = [\phi(z, \mu, x)S_l(z) + r(z)S_c(z)]/[\phi(z, \mu, x) + r(z)], \quad (14.8)$$

где $r(z) = \chi_c(z)/\chi_l(z)$, а также расстояние в оптических единицах вдоль луча, характеризуемого определенным значением μ ,

$$\tau(z, \mu, x) = \mu^{-1} \int_z^{z_{\max}} \chi(z, \mu, x) dz, \quad (14.9)$$

где $z_{\max}$ соответствует верхней границе атмосферы. Тогда уравнение переноса принимает вид

$$\partial I(z, \mu, x) / \partial \tau(z, \mu, x) = I(z, \mu, x) - S(z, \mu, x). \quad (14.10)$$

Формальное решение уравнения (14.10) записывается непосредст-

венно и имеет вид

$$I(z_{\max}, \mu, x) = I(0, \mu, x)e^{-\tau(0, \mu, x)} + \int_0^{\tau(0, \mu, x)} S(z, \mu, x)e^{-\tau(z, \mu, x)} d\tau(z, \mu, x) = \\ = I(0, \mu, x)e^{-\tau(0, \mu, x)} + \int_0^{z_{\max}} \mu^{-1} [\phi(z, \mu, x)S(z) + r(z)S_c(z)] e^{-\tau(z, \mu, x)} \chi(z) dz. \quad (14.11)$$

Из него интенсивность выходящего излучения можно вычислить, если функции источников заданы. (Например, при ЛТР $S_c = S_l = B$; можно было бы также использовать значения S_p , найденные для неподвижной атмосферы, — приближение, которое, как мы увидим ниже, часто оказывается удивительно точным.) В формуле (14.11) принято, что атмосфера представляет собой *конечный слой*, на границу которого при $z = 0$ извне падает излучение. Для *полубесконечной атмосферы* следует положить $\tau(0, \mu, x) = \infty$ и опустить член, содержащий $I(0, \mu, x)$. Формальное решение позволяет непосредственно учитывать влияние макроскопических движений на профили путем учета обусловленных доплеровскими смещениями изменений в коэффициентах поглощения и излучения вещества.

Функция источников в линии будет, вообще говоря, содержать член, описывающий рассеяние, а потому будет зависеть от поля излучения. Поэтому движение вещества может сильно влиять на функцию источников. Например, расширение вблизи верхней границы атмосферы может сместить линию с темной абсорбционной детали спектра, где она расположена в статическом случае, в яркий близлежащий континуум, вызвав тем самым огромное увеличение $\bar{J}$ (и S_l). Если считать, что фотоны, рассеиваемые в линии, испытывают *полное перераспределение*, то функция источников для двухуровневого атома принимает вид

$$S(z) = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-1}^{+1} I(z, \mu, x) \phi(z, \mu, x) d\mu + \varepsilon B(z), \quad (14.12)$$

где ε — обычный параметр термализации. Заметим, что в интеграле, описывающем рассеяние, заменять I на J уже нельзя, так как ϕ зависит от углов. Заметим также, что интенсивность нельзя более считать симметричной относительно центра линии, и поэтому необходимо рассматривать *весь* профиль. Приближение полного перераспределения для движущихся сред становится сомнительным, так как условия, способствующие его выполнению в случае неподвижных сред, не имеют более места. Хорошее обсуждение этого вопроса дается в [273], стр. 28 (это превосходная статья, которую мы весьма рекомендуем читателю). В последнее время были выпол-

лнены некоторые исследования по частичному перераспределению в движущихся атмосферах. Было показано, что если рассмотрение ведется в системе, связанной с наблюдателем, то необходимо использовать *полную* функцию перераспределения, зависящую от частоты и углов. Напротив, при использовании сопутствующей системы отсчета (см. § 14.3) можно в системе, связанной со средой, употреблять *статические* функции перераспределения, и усреднение по углам и здесь дает достаточно точные результаты.

Существуют две причины, по которым при использовании системы, связанной с наблюдателем, аккуратное вычисление интеграла, описывающего рассеяния в выражении (14.12), по той или иной квадратурной формуле сопряжено с фундаментальной трудностью.

1) Профиль поглощения $\phi(x - \mu V)$, очевидно, сдвигается по частоте на величину $2V$ при изменении μ от -1 до 1 . Поэтому при интегрировании по частоте к ширине полосы, необходимой для описания профиля линии в статическом случае, нужно добавить величину, равную удвоенной максимальной скорости макроскопического течения. Это требование не является слишком серьезным при изучении, скажем, волновых движений в солнечной атмосфере, но становится неодолимым препятствием в случае атмосфер со сверхзвуковым расширением, где $v/c \approx 0,01$, или $2(v_0 v/c)/\Delta\nu_D^* \approx 200$. 2) Квадратура по угловым переменным должна содержать большое количество узлов. Так как аргумент профиля поглощения есть $x - \mu V$, то налицо *неустранимая связь между угловой и частотной зависимостью интенсивности*. Так, если для получения достаточной точности при интегрировании по частоте максимальный возможный шаг равен $\Delta x_{\max} (\approx \frac{1}{2})$, то наибольшее допустимое приращение угловой переменной будет $\Delta\mu_{\max} = \Delta x_{\max}/V$. Это весьма жесткое требование! При переходе к сопутствующей системе отсчета эти трудности становятся меньше.

Уравнение (14.10) можно преобразовать к уравнению второго порядка. Если профиль поглощения симметричен относительно центра линии, то $\phi(-x + \mu V) = \phi(x - \mu V)$, что наводит на мысль сгруппировать вместе два пучка излучения, характеризуемые интенсивностями $I(z, \mu, x)$ и $I(z, -\mu, -x)$, поскольку $d\tau(z, \mu, x) = d\tau(z, -\mu, -x)$ и $S(z, \mu, x) = S(z, -\mu, -x)$. Поэтому, положив

$$u(z, \mu, x) = \frac{1}{2} [I(z, \mu, x) + I(z, -\mu, -x)] \quad (14.13)$$

и

$$v(z, \mu, x) = \frac{1}{2} [I(z, \mu, x) - I(z, -\mu, -x)], \quad (14.14)$$

получим

$$\partial^2 u(z, \mu, x) / \partial \tau(z, \mu, x)^2 = u(z, \mu, x) - S(z, \mu, x). \quad (14.15)$$

На верхней границе падающего извне излучения нет, и поэтому

$$[\partial u(z, \mu, x) / \partial \tau(z, \mu, x)]_{z_{\max}} = u(z_{\max}, \mu, x). \quad (14.16)$$

Предполагается, что на нижней границе либо задана интенсивность падающего снаружи излучения, и тогда

$$[\partial u(z, \mu, x) / \partial \tau(z, \mu, x)]_{z=0} = I(0, \mu, x) - u(0, \mu, x), \quad (14.17)$$

либо (для полубесконечной атмосферы) нижняя граница выбирается столь глубоко, что применимо *диффузионное приближение* (для этого градиент скорости должен быть настолько мал, чтобы $\chi^{-1} dV/dz \ll 1$, т.е. чтобы скорость менялась на средней длине свободного пробега фотона пренебрежимо мало), и тогда

$$\left. \frac{\partial u(z, \mu, x)}{\partial \tau(z, \mu, x)} \right|_{z=0} = \left[\frac{\mu}{\chi(z, \mu, x)} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \left| \frac{dT}{dz} \right| \right]_{z=0}. \quad (14.18)$$

Как и в статическом случае, мы вводим узлы дискретизации по глубине $\{z_d\}$, по угловой переменной $\{\mu_m\}$ и по частоте $\{x_n\}$ и объединяем углы и частоты в одно квадратурное множество $\{\mu_l, x_l\} = (\mu_m, x_n)$, где $l = m + (n - 1)M$. Точки по угловой переменной принадлежат промежутку $[0, 1]$, тогда как частоты должны теперь охватывать область $[x_{\min}, x_{\max}]$, $x_{\min} < 0$, $x_{\max} > 0$, достаточно большую, чтобы в нее попадали обе половины профиля поглощения и чтобы она позволяла учитывать доплеровские сдвиги $\pm 2V_{\max}$. Далее, (14.15) — (14.18) заменяют их разностными аналогами и полагают

$$S_{dl} = S(z_d, \mu_l, x_l) = \alpha_{dl} \bar{J}_d + \beta_{dl} \quad (14.19)$$

где α и β — соответствующие комбинации r_d , ϕ_{dl} и ε_d , и

$$\bar{J}_d = \sum_{i=1}^L w_i \phi_{dl} u_{di}. \quad (14.20)$$

где $\phi_{dl} = \phi(z_d, x_l - \mu_l V_d)$. Получающаяся в результате система имеет стандартную форму системы Райбики [см. формулу (6.47)] и разрешается относительно $\bar{J}$, как это описано в §6.3. Можно также построить аналогичное решение, исходя из интегрального уравнения ([273], стр. 120), но на практике проще применять метод, основанный на использовании дифференциального уравнения. Взятая в целом, процедура устойчива, является общей и достаточно эффек-

тивной, поскольку машинное время $T_R = cLD^2 + c'D^3$ зависит от числа углов и частот L всего лишь *линейно*. Сетку по глубине нужно выбирать достаточно частой, чтобы гарантировать лишь сравнительно небольшие изменения $V(z_d)$ (скажем, $\approx 1/2$) между последовательными точками по глубине. В противном случае профиль ϕ_{dl} может радикально меняться с глубиной, что приводит к неточностям в приращениях по оптической глубине. За исключением случая сверхзвукового ветра, это не очень сильное требование. Отметим также, что те же методы можно использовать для получения *формального решения* (когда S уже задано) путем решения одной трехдиагональной системы вида $T_i u_i = S_i$ (для каждой выбранной нами точки разбиения по углу и по частоте). Здесь требуемое время вычислений равно всего $T_S = cLD$, что совсем немного.

ОБРАЗОВАНИЕ ЛИНИЙ В ПЛОСКИХ АТМОСФЕРАХ ПРИ НАЛИЧИИ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ МАКРОСКОПИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

Влияние макроскопических движений на образование линий в плоских атмосферах изучалось рядом авторов. Мы изложим сейчас в общих чертах некоторые типичные результаты. Основные эффекты, вызываемые наличием движений, можно научиться понимать, пользуясь лишь формальным решением. Рассмотрим в качестве примера образование линии при ЛТР в полубесконечной атмосфере с $r = \text{const}$ и $S_i = S_c = B_i = B_0(1 + a\tau_i)$, где τ_i — оптическая глубина в линии при отсутствии движений. Возьмем распределение скорости вида $v(\tau_i) = v_0/[1 + (\tau_i/\tau_0)]$, причем $v(\tau_i)$ считается положительной, если вещество движется *к наблюдателю* (т.е. в направлении возрастания z). Тогда нетрудно рассчитать интенсивность выходящего излучения $I(\mu, x)$ для всех точек диска звезды и интегрированием по μ найти поток $F(x)$. Результаты для моделей с $a = 3 \cdot 10^{-2}$, $r = 10^{-2}$, $v_0 = (0, 1, 3, 5, 10)$ и $\tau_0 = (1, 10, 100)$ показаны на рис. 14.1. Из этого рисунка видно, что профиль линии в потоке асимметричен и обладает смещением в сторону коротких длин волны. Сходная асимметрия имеет место, даже если *градиент скорости отсутствует* и считается, что атмосфера расширяется с *постоянной* скоростью. Причина кроется в том, каким конкретно образом скорости и интенсивности входят в интеграл, дающий поток (см. упражнения 14.1 и 14.2).

Упражнение 14.1. а) Показать, что для линейного закона потемнения к краю $\phi(\mu) = I(\mu)/I(0) = 1 + \beta\mu$ распределение яркости,

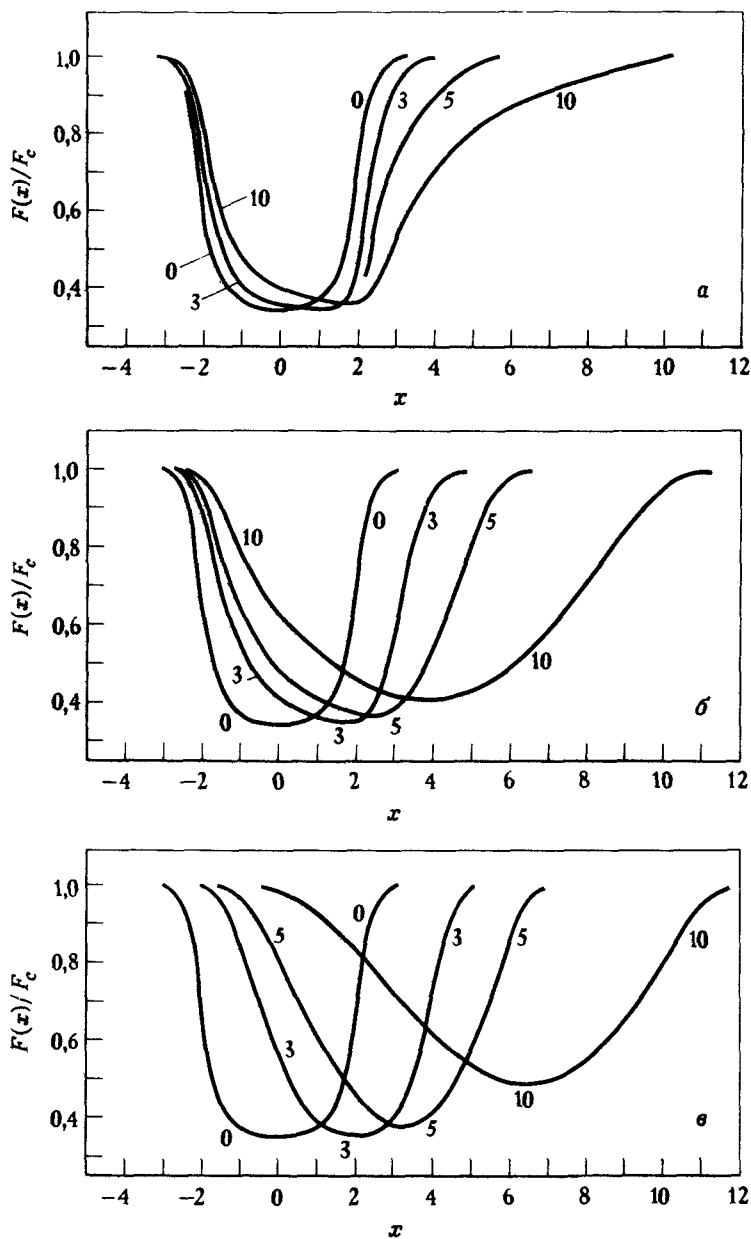


Рис. 14.1. Профили потока в линии, образующейся при ЛТР в расширяющейся атмосфере с $B_p(\tau_l) = B_0(1 + a\tau_l)$ и $v(\tau_l) = v_0[1 + \tau_l/\tau_0]$. Ордината — поток в единицах континуума. Абсцисса — расстояние по частоте от центра линии в единицах доплеровской ширины. Значения параметров — для всех кривых $B_0 = 1$, $a = 3 \cdot 10^{-2}$, $r = 10^{-2}$. Числа у кривых — значения v_0 . Рисунки а, б и в относятся к $\tau_0 = 1$; 10; 100 соответственно.

нормированное на единичный поток, есть $\phi^*(\mu) = \frac{1}{2} (1 + \beta\mu) / (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\beta)$. б) Предположим, что слабая линия образуется на поверхности атмосферы, расширяющейся со скоростью v_0 , и что глубина линии в долях уровня континуума не зависит от μ . Вывести выражение для лучевой скорости, получаемой по измерениям потока на спектрограмме. В частности, показать, что при законе потемнения, справедливом в приближении Эддингтона для серой атмосферы, $v_{\text{набл}} = (17/24)v_0$. Чему равно отношение $v_{\text{набл}}/v_0$ при $\beta = 0$ и при $\beta = \infty$?

Упражнение 14.2. а) Найти профиль в потоке для линии, описываемой δ -функцией с постоянным множителем a_0 , т.е. принять

$$I(\mu, x) = \frac{1}{2} (1 + \beta\mu) [1 - a_0 \delta(x - \mu v_0)] / \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\beta \right).$$

Считается, что излучение испускается поверхностью звезды, расширяющейся с постоянной скоростью v_0 . Вывести явное выражение для $F(x; a_0, \beta, v_0)$ и построить профиль для предельных случаев $\beta = 0$ и $\beta = \infty$. б) Перенести этот анализ на линию с гауссовым профилем и рассчитать численно типичный профиль в потоке.

Формальное решение можно использовать для оценки точности предлагаемых диагностических методов (т.е. методов нахождения поля скоростей из наблюдений. — *Ред.*) путем вычисления профиля при заданном поле скоростей, последующего диагностического исследования этих профилей и сравнения находимых в результате и первоначально взятых полей. Например, для ряда случаев был изучен метод «смещения биссектрисы» [373]. В этом методе рассматривается смещение δx (от центра линии в статическом случае) той точки, которая расположена *посередине* между двумя точками профиля, соответствующими *одной и той же интенсивности*. Делается допущение, что это смещение дает доплеровский сдвиг, обусловленный движениями в том слое, оптическая глубина которого на (статической) частоте Δx в линии равна единице; здесь $2\Delta x$ — полное расстояние между двумя упомянутыми точками профиля. Оказалось, что скорости, находимые по измерениям *в ядре линии, прекрасно согласуются* с истинными скоростями, *крылья же* линии дают для больших глубин *ложные* скорости. Легко понять, почему это так. Предположим, что при $0 \leq \tau_l \leq \tau_1$ атмосфера движется со скоростью v_0 , а при $\tau_l > \tau_1$ покоится. Ясно, что смещение профиля поглощения в линии в верхнем слое должно вызвать асимметрию в крыльях, так как вызываемое верхним слоем поглощение приходит-

ся на крыло линии и ослабляет идущее снизу излучение. Если *при-*
нять, что излучение на частоте Δx , отсчитанной от центра линии,
возникает на глубинах $\tau_i \approx 1/\phi(\Delta x)$, то этим глубинам автоматиче-
ски будут приписаны ненулевые скорости, даже если $\tau_i > \tau_1$. Этот
пример показывает, что при изучении макроскопических движений
следует соблюдать осторожность!

Еще один пример такого рода приводится в [321], где без пред-
положения об ЛТР рассчитана (*методом Риккати* [544]) функция
источников в линии с $\varepsilon = 10^{-3}$ и $r = 0$, образующейся в диффери-
циально расширяющемся конечном слое полной (статической) опти-
ческой толщины $\tau_{\max} = 50$. Предполагается, что расширение проис-
ходит симметрично относительно середины слоя (которая считае-
тся *неподвижной*) и скорость меняется по линейному закону
 $V(\tau) = V_0 + V_1\tau$. Такая среда является эффективно тонкой и мо-
жет служить моделью расширяющейся туманности. Профили этой
линии показаны на рис. 14.2. Из него видно, что обычный цент-
ральный провал, возникающий в ближайшей к наблюдателю обла-
сти среды, смещается в синюю сторону и поэтому сильно снижает
синий эмиссионный максимум; красный же максимум усиливается,
потому что фотонам легче выходить снизу. Линия в целом *кажет-*
ся смещенной в красную сторону, несмотря на то что средняя ско-
рость среды *равна нулю*! Поэтому если наблюдается небольшое
красное смещение, то нельзя делать поспешный вывод, что источ-
ник излучения удаляется.

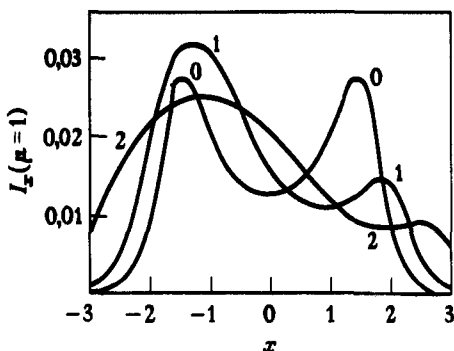


Рис. 14.2. Интенсивность излучения, выходящего по нормали из дифференциально расширяющегося плоского слоя полной (статической) толщины $\tau_{\max} = 50$ для линии с $\varepsilon = 10^{-3}$, $r = 0$. Абсцисса — $x = \Delta\nu/\Delta\nu_D$. Числа у кривых — значения скорости расширения на поверхности v_0 . Закон изменения скорости — линейный по τ , причем скорость равна нулю в середине слоя. (По [23], стр. 215.)

Чтобы оценить влияние макроскопических движений на функцию источников, следует получить внутренне непротиворечивое решение уравнения переноса. В некоторых ранних исследованиях этой проблемы [370], [371] рассматривался случай изотермической (полубесконечной. — Ред.) атмосферы со скачком скорости Δ на глубине τ_1 , причем выше и ниже этой глубины скорости постоянны. Уравнение переноса для двухуровневого атома решалось в приближении Эддингтона методом дискретных ординат. При $\Delta = 0$ получается решение для неподвижной среды с соответствующими значениями ε и g . Когда Δ становится больше примерно 4, профили поглощения (которые считаются доплеровскими) в верхней и нижней областях сильно смещены друг относительно друга, и эти области перестают взаимодействовать. Атмосфера в этом случае ведет себя так, как будто она состоит из двух *независимых* частей: а) конечного верхнего слоя оптической толщины τ_1 и б) расположенной под ним полубесконечной атмосферы, у которой $\tau = 0$ на той глубине τ_1 , где расположен скачок скорости. В этом предельном случае обе функции источников для двух указанных слоев приближаются к соответствующим *статическим* значениям. Таким образом, при $\Delta = 0$ и при $\Delta \rightarrow \infty$ получаются профили, идентичные тем, которые рассчитываются по функциям источников для *неподвижной* среды, причем основной эффект состоит просто в доплеровском смещении центра линии. Этот результат проявляется еще сильнее при наличии заметного континуума, на который налагается линия (см. также [372]). Когда Δ лежит между 2 и 3, два рассматриваемых слоя взаимодействуют сильно, и должно находиться полное решение.

Примером более реалистической задачи ([273], стр. 120) является расчет атмосферы, в которой имеется «хромосферный» рост функции Планка близ поверхности (см. рис. 14.3,а), а скорость меняется по закону $V(\tau) = 10/[1 + (\tau/\tau_0)]$, где τ_1 — статическая оптическая глубина в линии. Соответствующие функции источников для линии с $g = 10^{-4}$ и $\varepsilon = 10^{-2}$ при различных значениях τ_0 приведены на рис. 14.3,а, а профили линии в выходящем по нормали излучении и профили в потоке показаны соответственно на рис. 14.3,б и 14.3,в. Из рис. 14.3,а следует удивительный результат, состоящий в том, что наличие макроскопических движений *мало сказывается* на *функции источников* в линии, несмотря на то что *профили* претерпевают *коренные* изменения. Основной причиной такого результата служит то, что выход фотонов наружу сквозь внешние слои в красном крыле *возрастает*, а в фиолетовом — *уменьшается*, и эти эф-

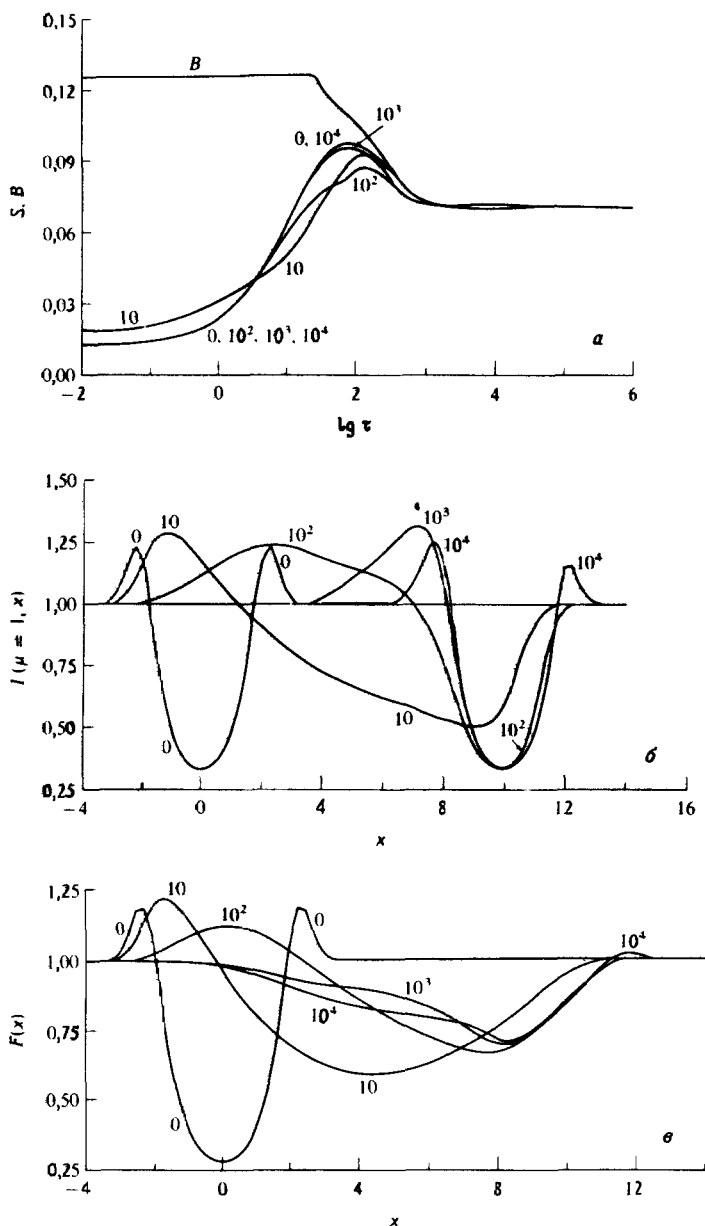


Рис. 14.3. *a* — функция Планка и функция источников для линии с $\varepsilon = 10^{-2}$ и $r = 10^{-4}$, образующейся в расширяющейся атмосфере. Абсцисса: статическая оптическая глубина в линии. *б* — интенсивность излучения, выходящего по нормали. Абсцисса: $x = \Delta\nu/\Delta\nu_D$. *в* — профили в потоке. Числа у кривых — значения параметра τ_0 в выражении, описывающем распределение скорости $v(\tau) = 10/[1 + \tau_l/\tau_0]$. (По [273], стр. 120.)

фекты почти компенсируют друг друга (см. также [18], стр. 53). В целом вероятность выхода фотонов под влиянием расширения атмосферы слегка увеличивается. Это служит причиной того, что S_i имеет тенденцию при $1 \leq \tau_i \leq 10^2$ быть *меньше*, чем в статическом случае. Когда $\tau_0 = 10$, значения S_i при $\tau_i \leq 10$ *возрастают*, так как до тех пор, пока верхний слой оптически достаточно тонок, в линии поглощается фоновое излучение континуума, что ведет к росту J . При больших значениях τ_0 слой, расположенный над местом, где скорость возрастает, становится оптически толстым в линии, и этот эффект исчезает. Когда $\tau_0 \geq 10^3$, точка подъема скорости попадает ниже глубины термализации излучения в линии. Образование линии в верхнем (эффективно толстом) слое происходит тогда так, как будто атмосфера неподвижна, а значения S_i оказываются очень близкими к статическим. Профили в потоке для τ_0 от 10^2 до 10^3 показывают структуры типа Р Лебедя с красными эмиссионными компонентами и смещенной в фиолетовую сторону абсорбцией. Здесь, однако, эмиссия возникает из-за того, что температура считается возрастающей наружу, а не из-за геометрических эффектов, имеющих место для протяженных атмосфер. Можно было бы с хорошим приближением получить те же профили, исходя из формального решения, учитывающего наличие движений, но пользуясь функцией источников для неподвижной среды.

Описанные выше результаты относятся к случаю *расширения*, когда увеличение вероятности выхода в одном крыле может быть компенсировано ее уменьшением в другом крыле. Однако для *флуктуирующих* полей скорости согласованность смещений при переходе от одной точки в атмосфере к другой утрачивается, и возникают эффекты, подобные четко выражаемому изменению профиля поглощения с глубиной. Влияние флуктуирующих полей скорости промежуточных масштабов на образование линий было изучено [568] для синусоидальных волн с $V(\tau, t) = \beta \sin[2\pi(\lambda^{-1} \lg \tau + t)]$ и для волн пилообразной формы. Последние служат моделью структур с крутыми перепадами параметров, напоминающих ударные волны. При помощи описанного ранее метода Райбики уравнение переноса было решено для моментов времени, равномерно распределенных по периоду, и для различных значений β и λ были найдены усредненные по времени профили. Предельный случай $\lambda \rightarrow 0$ соответствует «микротурбулентному» режиму, тогда как $\lambda \rightarrow \infty$ дает «макотурбулентный» предел. При *заданной* функции источников (например, при $S_i = B_i$) профили линии при конечном значении λ неизменно располагаются между профилями, соответствующими

двум крайним случаям $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$. Линии, рассчитанные при данном β и $\lambda = 0$, всегда сильнее, чем линии при $\lambda = \infty$, как и следовало ожидать. Когда допускается возможность *отклонения от ЛТР*, функция источников видоизменяется под влиянием макроскопических движений. Как правило, S_i как функция τ оказывается *волнистой*, причем отличие результатов, относящихся к конечным значениям λ , от результатов для микроскопического предела ($\lambda = 0$) тем больше, чем меньше значение ε . Основной результат, полученный для изотермических атмосфер, не находящихся в ЛТР, состоит в *значительном повышении интенсивности в ядре* усредненного по времени профиля при конечных значениях λ . Этот профиль располагается между предельными профилями ($\lambda = 0$, $\lambda = \infty$) только в крыльях, а интенсивность в ядре намного больше, чем в ядрах *обоих* предельных профилей (при $\beta = 2,5$ и $\lambda = 4$ — в 2,5 раза). Такое же поведение ядра линии получается и из расчетов с использованием гарвардско-смитсоновской модели атмосферы. При этом имеют место существенные изменения функции источников. В частности, даже если используется функция источников, контролируемая столкновениями, S_i оказывается превышающей B_i , (как это бывает для линий, контролируемых фотоионизациями) ввиду того, что смещения по частоте, вызываемые движениями, позволяют линии перехватывать интенсивное излучение континуума. Оказывается, что увеличение интенсивности в ядре линии позволяет значительно улучшить согласие между наблюдаемыми и теоретическими профилями солнечной D-линии NaI для центра диска, не прибегая к необычно высоким плотностям, как это требовалось до сих пор. Этот результат может также дать объяснение сходных расхождений, имеющих у солнечных линий CaI и FeI. Дальнейшая работа в этой области несомненно принесет богатые плоды.

Обсуждавшиеся выше результаты получены без учета возможного влияния макроскопических движений на состояние газа. Недавно было исследовано [291] влияние акустических импульсов на образование солнечных линий CaII с учетом тех изменений температуры и плотности, которые вызываются в газе этими импульсами. Эти расчеты показывают, что если изменения физических переменных *не учитываются*, то *одни лишь* макроскопические движения мало влияют на функцию источников, и при использовании функции источников для неподвижной среды в формальном решении, учитывающем движение, получается правильный профиль. Аналогичный вывод был сделан в [185]. Напротив, изменения T и N , вызываемые импульсами, оказывают *большое* влияние на S_i , а

потому и на профили. В частности, T и n_e возрастают одновременно, что ведет к изменению S_i в сторону ее сближения с локальным значением B_i . Это ведет в свою очередь к существенному увеличению интенсивности, в первую очередь в фиолетовом, а затем и в красном максимуме профиля с двойным самообращением. Эти результаты лишней раз указывают на необходимость создания *динамической* теории влияния макроскопических движений.

СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫЕ АТМОСФЕРЫ.

РЕЖИМ МАЛЫХ СКОРОСТЕЙ

Для *сферически-симметричных атмосфер, расширяющихся радиально* с малыми скоростями, имеются расчеты, выполненные с использованием системы отсчета, связанной с наблюдателем [375]. Такой подход может оказаться полезным при изучении образования линий в глубоких слоях расширяющихся атмосфер (однако при больших скоростях расширения лучше пользоваться сопутствующей системой отсчета). Метод расчета близок к тому, который описан в § 7.6 применительно к неподвижным атмосферам, и состоит в решении уравнения переноса вдоль характеристик — отдельных лучей — с использованием той же системы координат (p, z) , что и в § 7.6. Изменение интенсивности вдоль луча описывается уравнением переноса, имеющим вид

$$\pm \partial I^{\pm}(z, p, x) = \eta(z, p, x) - \chi(z, p, x) I^{\pm}(z, p, x), \quad (14.21)$$

где $\chi(z, p, x) = \chi_c(r) + \chi(r)\phi(z, p, x)$ и $\eta(z, p, x)$ определяется аналогичным выражением. Мы используем следующие соотношения: $r(z, p) = \sqrt{z^2 + p^2}$ и $\mu(z, p) = z/\sqrt{z^2 + p^2}$. Профиль поглощения определяется выражением

$$\phi(z, p, x) = \phi[r(z, p); x - \mu(z, p)V(r)].$$

Здесь $V(r)$ — проекция скорости радиального движения на направление роста r . Введя оптическую глубину вдоль луча

$$\tau(z, p, x) = \int_z^{z_{\max}} \chi(z', p, x) dz' \quad (14.22)$$

и положив

$$u(z, p, x) = \frac{1}{2} [I^+(z, p, x) + I^-(z, p, -x)] \quad (14.23)$$

и

$$v(z, p, x) = \frac{1}{2} [I^+(z, p, x) - I^-(z, p, -x)], \quad (14.24)$$

можем переписать (14.21) в виде уравнения второго порядка

$$\partial^2 u(z, p, x) / \partial \tau(z, p, x)^2 = u(z, p, x) - S(z, p, x), \quad (14.25)$$

где функция источников $S(z, p, x)$, равная по определению $\eta(z, p, x) / \chi(z, p, x)$, представима в следующем общем виде:

$$S(z, p, x) = \alpha(z, p, x) \bar{J}[r(z, p)] + \beta(z, p, x).$$

Здесь α и β выражаются через параметры ε и $r_0 = \chi_c / \chi_p$, характеризующие линию, и через профиль поглощения $\phi(z, p, x)$, а

$$\bar{J}(r) = \int_{-x_{\max}}^{x_{\max}} dx \int_0^1 \phi[r; x - \mu V(r)] u[z(r, \mu), p(r, \mu), x] d\mu. \quad (14.26)$$

При постановке граничных условий возникает трудность. На оси $z = 0$ условие $v(0, p, x) = 0$ не выполняется, поскольку в расширяющихся атмосферах интенсивность не является четной функцией частоты x . Эту трудность можно обойти, если рассмотреть весь промежуток изменения z на луче $[-z_{\max}, z_{\max}]$. Тогда для лучей, не пересекающих ядра, условия на нижней и верхней границах принимают вид

$$[\partial u(z, p, x) / \partial \tau(z, p, x)]_{z = \pm z_{\max}} = \pm u(z, p, x)|_{z = \pm z_{\max}}. \quad (14.27)$$

Для лучей, пересекающих ядро (т.е. с $p \leq r_c$), либо используется диффузионное приближение на границе ядра, если ядро непрозрачно (поверхность звезды), что непосредственно дает $v(z_{\min}, p, x)$, либо, если оболочка полая (случай туманности), используется соотношение (14.25) при $z = z_{\min}$ (считается, что точки $\pm z_{\min}$ идентичны) и применяется условие (14.27) для концов луча.

Чтобы решить систему, введем те же узлы дискретизации $\{r_d\}$ и $\{p_i\}$, которые использовались в § 7.6 при решении задачи для неподвижной атмосферы. Узлы по частоте $\{x_n\}$ охватывают теперь весь профиль ($n = \pm 1, \dots, \pm N$, причем $x_{-n} = -x_n$). Однако ниже будет показано, что половину этих точек можно исключить. Мы опять получаем уравнения вида (6.27) и (6.48) и поэтому для нахождения $\bar{J}$ можем применить метод Райбики. Так как $\bar{J}(r_d)$ требуется найти только в точках r_d , $1 \leq d \leq D$, а $u_{din} = u(z_d, p_i, x_n)$ определяется в точках z_d , $d_i = 1, \dots, D_i$, которые распределены по всей длине луча, то оказывается, что хотя трехдиагональная матрица T — квадратная, матрица U — прямоугольная и представляет собой шевронную матрицу (матрица особого вида, см. [375]. — Прим. перев.) Решение указанных систем уравнений для

каждой пары индексов (i, n) дает выражение вида

$$u_{in} = A_{in} \bar{J} + B_{in}. \quad (14.28)$$

Формулу (14.26), определяющую $\bar{J}$, можно записать в дискретной форме:

$$\bar{J}(r_d) = \sum_{n=-N}^N w_n \sum_{i=1}^{I_d} a_{di} \phi[r_d; x_n - \mu(r_d, p_i) V(r_d)] u_{din}. \quad (14.29)$$

Однако в силу сферической симметрии $I^\pm(z, p, x) = I^\mp(-z, p, x)$, и поэтому $u(z, p, -x) = u(-z, p, x)$ и $v(z, p, -x) = -v(-z, p, x)$. Эти соотношения позволяют выразить в формуле (14.29) значения u при отрицательных x и положительных z через значения u при положительных x и отрицательных z . Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{J} = \sum_{n=1}^N w_n \sum_{i=1}^{I_d} a_{di} [\phi(r_d; x_n - \mu_{di} V_d) u_{din} + \\ + \phi(r_d; x_n + \mu_{di} V_d) u_{d'in}]. \end{aligned} \quad (14.30)$$

где $d' = D_i + 1 - d$. При использовании метода Райбики формула (14.30) приводит к матрицам V , являющимся прямоугольными шевронными матрицами. Подставляя (14.28) для всех значений i и n в (14.30), получаем окончательную систему для определения $\bar{J}$, которая затем и решается. Машинное время, необходимое для получения решения, оценивается так: $T_R \approx cND^3 + c'D^3$. Этот результат не столь хорош, как в плоском случае, так как число точек разбиения по углу (т.е. по прицельному параметру) в этом случае примерно такое же, как и число точек по глубине. Описанный метод устойчив, и его применение не вызывает затруднений при малых скоростях (не превышающих нескольких тепловых). При больших скоростях число точек по глубине, которое требуется для представления пространственного распределения скоростей с необходимой степенью детальности, становится большим, и вычислительное время непомерно велико. В этом случае можно применить метод, основанный на использовании сопутствующей системы отсчета. Достоинство метода, в котором применяется система отсчета наблюдателя, состоит в том, что его можно использовать при произвольном пространственном распределении скоростей (например, для немонотонных течений) в отличие от методов, основанных на применении сопутствующей системы отсчета, в их современной формулировке.

Упражнение 14.3. а) Проверить указанные выше соотношения

симметрии для $I^\pm$, u и v , а также привести (14.29) к (14.30). б) Составить представление о виде прямоугольных шевронных матриц U_{in} и V_{in} в схеме Райбики и показать, что между размерностями матриц имеется соответствие, необходимое для существования решения.

Описанный выше метод применялся [375] при построении сильно идеализированных сферически-симметричных моделей атмосфер со степенным распределением непрозрачности и с линейным законом изменения скорости вида $V(r) = V(R)(r - r_c)/(R - r_c)$. Расчеты были проделаны для линии с $\varepsilon = 10^{-2}$ и 10^{-4} , образующейся в протяженной изотермической атмосфере с $R/r_c = 30$, $V(R) = 0$; 1; 2 при отсутствии континуума, на который налагалась бы линия. Получены, в частности, следующие результаты. а) Протяженность атмосферы влияет на функцию источников сильнее, чем наличие движения с небольшими скоростями. В первом приближении при расчетах профилей линий по формуле, учитывающей наличие движения, можно использовать функцию источников для неподвижной сферически-симметричной атмосферы. б) Влияние протяженности атмосферы и движений газа более существенно при меньших значениях ε . в) Главное проявление макроскопических движений состоит в уменьшении степени «запертости» фотонов, а отсюда — в увеличении вероятности выхода фотона из атмосферы. г) Центр тяжести профиля линии смещается в красную сторону, так как центральная абсорбционная деталь сглаживает фиолетовый эмиссионный максимум (это справедливо и для плоской геометрии, см. рис. 14.2). В другой последовательности моделей максимальная скорость считалась фиксированной: $V(R) = 2$, а отношение R/r_c бралось равным 3; 10; 30; $B = r^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-4}$, $\chi_c/\chi_l = 10^{-4}$ и $\chi_l = Cr^{-2}$. Влияние расширения на функцию источников мало по сравнению с ее изменениями, обусловленными сферической геометрией. Относительные отклонения от результатов, относящихся к неподвижной атмосфере, растут с уменьшением R , вероятно, из-за увеличения градиента скорости. Все рассчитанные профили линий в выходящем излучении имеют ярко выраженные характеристики типа Р Лебедя. Наконец, стоит упомянуть о расчетах для случая, когда скорость в атмосфере везде одна и та же, т.е. $V(r) = V_0$. Для плоской среды функция источников, разумеется, не изменилась бы [по сравнению с неподвижной средой. — Прим. перев.], хотя профиль в потоке излучения, вычисленный путем усреднения по поверхности звезды, меняется (напоминаем упражнение 14.1). Однако для сферически-симметричной среды радиальные направления расходятся из цент-

ра, и это приводит к появлению *трансверсального градиента скорости*, что уменьшает степень «запертости» фотонов. В результате вероятность выхода увеличивается, а функция источников уменьшается. Расширение даже с не слишком большой постоянной скоростью чрезвычайно сильно сказывается на профилях в выходящем из звезды потоке.

ВЛИЯНИЕ ЛИНИЙ НА БАЛАНС ЭНЕРГИИ В ДВИЖУЩИХСЯ СРЕДАХ

Баланс энергии в наружных слоях атмосферы может определяться главным образом влиянием спектральных линий. Поэтому доплеровские смещения линии относительно ее статического положения, которые способны дать ей возможность взаимодействовать с континуумом (интенсивность излучения в котором может быть заметно иной), могут существенно изменять распределение температуры. Следует ожидать появления трех качественно новых эффектов помимо обычных, имеющих место в неподвижных средах, — изменения температуры на границе и эффекта самообогрева. 1) В линиях, смещенных за счет эффекта Доплера из их статических положений, могут поглощаться фотоны континуума, идущие из глубоких слоев. Это явление можно назвать *эффектом иррадиации*. Поглощение энергии из континуума приводит к дополнительному притоку энергии к газу, и так как цветовая температура излучения континуума превышает локальную температуру среды, то иррадиация будет приводить к *нагреву* наружных слоев. Эффективность такого механизма подвода энергии определяется тем, насколько непосредственно линии связаны с тепловым резервуаром. Такой нагрев будет поэтому наибольшим, когда $\varepsilon = 1$, и должен становиться пренебрежимо малым при $\varepsilon \rightarrow 0$. 2) По мере смещения линий из статических положений фотоны, которые в глубоких слоях (неподвижной атмосферы. — *Ред.*) были бы заперты за счет поглощения в линиях в вышележащих слоях, начинают испытывать поглощение лишь в континууме и поэтому могут свободнее диффундировать к поверхности и выходить из атмосферы. Мы можем назвать это явление *эффектом усиления выхода*. Усиление выхода фотонов будет, вообще говоря, приводить к *выхолаживанию* более глубоких слоев. 3) Градиент скорости в атмосфере приводит к «размыванию» линий по большему интервалу частот, препятствуя тем самым свободному распространению фотонов. Это явление можно назвать *эффектом сужения полосы частот*. В глубине атмосферы, где применимо диффузионное приближение, градиент

скорости почти не сказывается на распределении температуры, если характерное расстояние, на котором меняется скорость, велико по сравнению со средней длиной свободного пробега фотонов. Однако если сдвиг частоты на величину порядка доплеровской ширины происходит на средней длине свободного пробега фотона, то сужение полосы частот ведет к уменьшению эффективного коэффициента диффузии излучения и как следствие — к усилению самообогрева. В предельном случае резкого скачка скорости вблизи поверхности фотоны, выходящие из нижележащих слоев в тех участках континуума, которые ранее (в статическом случае. — *Ред.*) были свободны от линий, теперь имеют перед собой сильно поглощающее вещество, и их выход из атмосферы оказывается затруднен. Это явление правильнее было бы называть «обратным рассеянием» или «отражательным эффектом».

Изучение влияния сдвигов линий на баланс энергии выполнено лишь для весьма схематичных моделей частокола. При этом рассматривалась плоская атмосфера с резким скачком скорости [428], а также сферически-симметричные расширяющиеся атмосферы [445]. Скачок скорости можно рассматривать как крайне грубую модель ударного фронта. В среде со скачком скорости эффекты усиления выхода и иррадиации проявляются очень отчетливо. Слои, расположенные над скачком, заметно нагреваются (в одном случае получено $\Delta T \approx 1100$ К при $T_{\text{эфф}} = 10000$ К), а слои, лежащие непосредственно под скачком, охлаждаются на несколько сотен градусов. В расширяющихся сферически-симметричных атмосферах из-за эффекта иррадиации получается большое увеличение температуры близ поверхности и значительный самообогрев ниже-расположенных слоев. Повышение температуры вследствие эффекта иррадиации для моделей протяженных атмосфер больше, чем для почти плоских. Это происходит из-за того, что различие между цветовой температурой излучения и температурой, характеризующей локальную плотность энергии в среде, с увеличением размеров атмосферы растет. В одном крайнем случае макроскопические движения вызвали изменение $\Delta B/B \approx 3$, откуда следует, что $\Delta T/T \approx 0,33$, или $\Delta T \approx 10000$ К для О-звезды.

Хотя модели, на которых основаны приведенные только что результаты, очень схематичны, ясно, что влияние макроскопических движений газа на поглощение в линиях может вызывать весьма существенные изменения в балансе энергии во внешних слоях звездных атмосфер. Эти изменения в принципе могут влиять на гидродинамику течения. Так, в пульсирующей атмосфере депозиция энер-

гии в линиях порождает некий радиативный предвестник волны, который, быть может, оказывает влияние на распространение ударной волны. В расширяющихся атмосферах значительная депозиция энергии в линиях, быть может, происходит в околосвуковой области течения, что, возможно, изменяет предполагаемую природу звездного ветра. Не исключено также, что вклад в баланс энергии, даваемый чувствительным к скорости поглощением в линиях, влияет на динамику оболочек новых и сверхновых звезд и газовых потоков, ответственных за обмен вещества в двойных системах. В этой области еще предстоит большая работа.

ОБРАЗОВАНИЕ ЛИНИЙ В ТУРБУЛЕНТНЫХ АТМОСФЕРАХ

Как уже говорилось, описание влияния макроскопических движений газа на формирование спектральных линий с помощью всего двух предельных случаев — «микротурбулентного» и «макротурбулентного», несомненно, является чрезмерно упрощенным. В этих двух крайних предельных случаях влияние макроскопических движений газа на интенсивности и профили линий можно предсказать, исходя из простых феноменологических соображений. Чтобы изучить влияние движений, которые имеют характерный масштаб, не являющийся ни нулевым, ни бесконечным по сравнению со средней длиной свободного пробега фотона, необходимо проделать детальные расчеты. В принципе можно было бы выбрать определенный ход изменения скорости, решить уравнение переноса и выполнить усреднение по такому числу реализаций поля скоростей, которое необходимо, чтобы охваченным весь возможный диапазон изменения характеризующих среду параметров. Такой подход был бы, однако, слишком трудоемок и не позволил бы разобраться в сути проблемы. Существует привлекательная альтернатива, которая мотивируется тем, что в звездных атмосферах, как можно ожидать, поле скоростей является *хаотическим*, а возможно, даже *турбулентным* в гидродинамическом смысле. Она состоит в допущении, что скорость представляет собой *случайную переменную*, которая описывается локально *распределением вероятности амплитуд* и нелокально — *характерной длиной корреляции*.

Значительного прогресса в решении уравнения переноса для турбулентных сред удалось в последнее время добиться на основе двух разных подходов. В одном методе — он развит гейдельбергской группой ([70], стр. 325; [234]; [235]; [236]; [557]) — для описания изменений скорости и интенсивности, рассматриваемых как марков-

ский процесс, используется *совместная вероятность* $P(z; v, l)$ того, что в точке z скорость лежит в интервале $(v, v + dv)$, а интенсивность — в интервале $(l, l + dl)$. Функция P (или какая-нибудь другая подходящая функция распределения, получающаяся из P) находится путем решения уравнения Фоккера — Планка. Этот метод является мощным и общим и позволяет рассматривать движения, скорости которых *непрерывно* меняются с глубиной. Однако получающиеся в результате уравнения в частных производных трудно поддаются решению. Для сжатого описания этого метода пришлось бы предполагать, что читатель хорошо знаком с математическими методами исследования марковских процессов. Заметно отличный от этого подход был развит группой исследователей из Нишцы [49], [226], [227]. Течение рассматривается как состоящее из турбулентных вихрей или ячеек. Считается, что в пределах ячейки скорость постоянна и меняется *скачком* на резкой границе, отделяющей ячейку от соседних ячеек, скорости которых не коррелируют друг с другом. Такое описание называется *процессом Кубо — Андерсона*. Хотя разрывность распределения скоростей не имеет физического смысла и приводит к появлению в поле скоростей неких искусственных корреляций высокого порядка [49]; [70], стр. 325, такой подход тем не менее обладает достоинствами, так как в некоторых предельных случаях он позволяет получить точные аналитические результаты и прост в изложении. Поэтому мы дадим описание метода, развитого в Нишце. Будет дано также описание результатов, найденных обоими методами.

Предположим, что границы ячеек, на которых меняется скорость, расположены на случайных оптических глубинах в континууме $\{\tau_n\}$, распределенных по *закону Пуассона*, характеризуемому *концентрацией вихрей* $n(\tau)$, которая представляет собой величину, обратную длине корреляции поля скоростей l (в единицах оптического расстояния в континууме). Вероятность того, что на интервал (τ', τ) не придется ни одного скачка скорости, дается выражением $\exp[-\int_{\tau'}^{\tau} n(\tau'') d\tau'']$. Обозначим через $v_h(\tau)$ гидродинамическую скорость ячейки на глубине τ . Эти скорости распределены *независимо*, с функцией распределения вероятностей $P(v_h)$, которую мы будем считать гауссовой. Пусть $v_{\text{тепл}}(\tau)$ — тепловая скорость атомов, дающих линию, на глубине τ ; все скорости будем измерять в тепловых единицах: $u_h(\tau) = v_h(\tau)/v_{\text{тепл}}(\tau)$, а частоты, отсчитываемые от центра линий, — в единицах соответствующих доплеровских шири: $x = \Delta\nu/\Delta\nu_D$. Будем характеризовать турбулентное поле дис-

персией ξ (в тепловых единицах). Тогда

$$P(u_h) = \exp(-u_h^2/\xi^2)/(\pi^{1/2}\xi). \quad (14.31)$$

Уравнение переноса, которое нужно решить, имеет вид

$$\mu \partial I(z, \mu, x)/\partial z = -(\chi_c + \chi \phi_x)I(z, \mu, x) + \chi_c S_c + \chi \phi_x S_p, \quad (14.32)$$

где $\phi_x(\tau) \equiv \phi[x - \mu u_h(\tau)]$. Уравнение (14.32) является *стохастическим*, т.е. коэффициенты в этом уравнении представляют собой *случайные* переменные. Предположим далее, что турбулентное поле скоростей влияет *только* на коэффициент поглощения в линии (за счет доплеровских сдвигов). Можно ожидать, что флуктуации непрозрачности в континууме, функций источников и населенностей уровней имеют второстепенное значение, и ими мы пренебрегаем. Сделаем предположение об ЛТР и пренебрежем рассеянием, так что $S_i = S_c = B_i(\tau)$, а также используем фойгтовский профиль поглощения; в итоге

$$[\chi(\tau)\phi_x(\tau)]/\chi_c(\tau) = \beta(\tau)H[a(\tau), x - \mu u_h(\tau)], \quad (14.33)$$

где

$$\beta(\tau) = (\pi^{1/2}e^2/mc)[f_i n_i(\tau)(1 - e^{-h\nu/kT})]/[\chi_c(\tau)\Delta\nu_D(\tau)] \quad (14.34)$$

и

$$a(\tau) = \Gamma/[4\pi\Delta\nu_D(\tau)]. \quad (14.35)$$

Здесь Γ — ширина, обусловленная затуханием, а n_i — населенность нижнего уровня перехода.

Аналитическое решение задачи можно получить, если ввести следующие дополнительные предположения: 1) положить $B_i(\tau) = B_0(1 + \alpha\tau)$, 2) использовать модель Милна — Эддингтона, т.е. считать $\beta = \text{const}$, $a = \text{const}$ и $\Delta\nu_D = \text{const}$, 3) считать концентрацию вихрей постоянной: $n(\tau) = n$. При численном решении задачи ([49], [226]) все эти ограничения можно несколько ослабить. Чтобы еще более упростить задачу, рассмотрим излучение, выходящее из центра диска, положив $\mu = 1$. Тогда уравнение переноса примет вид

$$\partial I(\tau, x)/\partial \tau = [1 + \beta H_x(\tau)][I(\tau, x) - B_0(1 + \alpha\tau)]. \quad (14.36)$$

где через $H_x(\tau)$ обозначена функция $H[a, x - u_h(\tau)]$, которая остается постоянной между последовательными точками разрыва скорости. Если ввести

$$q_x(\tau) = \exp\left\{-\int_0^\tau [1 + \beta H_x(\tau')]d\tau'\right\}, \quad (14.37)$$

то интенсивности выходящего излучения в континууме и в линии будут равны

$$I_c = \int_0^{\infty} B_0(1 + \alpha\tau)e^{-\tau}d\tau \quad (14.38)$$

и

$$I(0, x) = \int_0^{\infty} B_0(1 + \alpha\tau)q_x(\tau)[1 + \beta H_x(\tau)]d\tau. \quad (14.39)$$

Легко показать, что $I_c = B_0(1 + \alpha)$ и что интенсивность в бесконечно сильной линии ($\beta \rightarrow \infty$) равна B_0 . Глубина такой линии будет равна $A_0 = \alpha/(1 + \alpha)$. Вообще, глубину линии $a_x \equiv [I_c - I(0, x)]/I_c$ можно записать в виде

$$a_x/A_0 = 1 - \int_0^{\infty} q_x(\tau)d\tau. \quad (14.40)$$

Усредненный по всем возможным реализациям поля скоростей профиль линии (среднее по ансамблю) равен поэтому

$$\langle a_x \rangle / A_0 = 1 - \int_0^{\infty} \langle q_x(\tau) \rangle d\tau, \quad (14.41)$$

а усредненная приведенная эквивалентная ширина равна

$$\langle W^* \rangle \equiv \langle W_v / A_0 \Delta\nu_D \rangle = A_0^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle a_x \rangle dx. \quad (14.42)$$

Таким образом, основная трудность задачи состоит в вычислении $\langle q_x(\tau) \rangle$.

Функцию $\langle q_x(\tau) \rangle$ можно найти путем решения некоторого интегрального уравнения, которое получается из следующих соображений. Прежде всего для данной точки τ вероятность того, что на интервал $(0, \tau)$ не придется ни одного скачка, равна $\exp(-\pi\tau)$. Соответствующий вклад в $\langle q_x(\tau) \rangle$ поэтому равен $\exp(-\pi\tau)\langle q_x(\tau) \rangle_S$, где статическое среднее $\langle q_x(\tau) \rangle_S$ есть

$$\begin{aligned} \langle q_x(\tau) \rangle_S &\equiv \langle \exp[-(1 + \beta H_x)\tau] \rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{-[1 + \beta H(a, x - u_h)]\tau\} P(u_h) du_h. \end{aligned} \quad (14.43)$$

Здесь u_h (а следовательно, и H_x) постоянно во всем интервале $(0, \tau)$. С другой стороны, предположим, что на интервал $(0, \tau)$ попал один или несколько скачков, и пусть $\tau' (< \tau)$ есть точка, в которой

произошел последний скачок. В интервале (τ', τ) функция H_x будет постоянной. Поэтому

$$q_x(\tau) = \exp[-(\tau - \tau')(1 + \beta H_x)]q_x(\tau'). \quad (14.44)$$

Вероятность того, что последний скачок произойдет между τ' и $\tau' + d\tau'$, равна $\exp[-n(\tau - \tau')]nd\tau'$. Поэтому, усредняя (14.44) и суммируя по всем τ' , получим вклад в $\langle q_x(\tau) \rangle$, даваемый скачками из интервала $(0, \tau)$, а именно

$$\langle q_x(\tau) \rangle_{\text{скачки}} = \int_0^{\tau} \langle \exp[-(\tau - \tau')(1 + \beta H_x)]q_x(\tau') \rangle \exp[-n(\tau - \tau')]nd\tau'. \quad (14.45)$$

Заметим теперь, что поведение $H_x(\tau'')$ на интервале $0 < \tau'' < \tau'$ не зависит от значения H_x на интервале (τ, τ') . Поэтому

$$\langle \exp[-(\tau - \tau')(1 + \beta H_x)]q_x(\tau') \rangle + \langle \exp[-(\tau - \tau')(1 + \beta H_x)] \rangle \times \\ \times \langle q_x(\tau') \rangle = \langle q_x(\tau - \tau') \rangle_S \langle q_x(\tau') \rangle. \quad (14.46)$$

Суммируя статический вклад и вклад, обусловленный скачками, окончательно имеем

$$\langle q_x(\tau) \rangle = e^{-n\tau} \langle q_x(\tau) \rangle_S + \int_0^{\tau} \langle q_x(\tau') \rangle \langle q_x(\tau - \tau') \rangle_S e^{-n(\tau - \tau')}nd\tau'. \quad (14.47)$$

Поскольку мы приняли, что n не зависит от глубины, интеграл в (14.47) представляет собой *свертку*, и для получения решения можно применить преобразование Лапласа. Обозначим

$$Q_x(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \langle q_x(\tau) \rangle d\tau \quad (14.48)$$

и

$$S_x(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\tau} \langle q_x(\tau) \rangle_S d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} du_h P(u_h) \int_0^{\infty} \exp[-(1 + \\ + \beta H_x)\tau] e^{-s\tau} d\tau = \langle [s + (1 + \beta H_x)]^{-1} \rangle. \quad (14.49)$$

Тогда из уравнения (14.47) находим

$$Q_x(s) = S_x(s + n)/[1 - nS_x(s + n)]. \quad (14.50)$$

Упражнение 14.4. Вывести уравнение (14.50).

Искать обратное преобразование $Q_x(s)$ не нужно, поскольку, как

можно видеть из сравнения (14.48) и (14.41), остаточная интенсивность выражается непосредственно через $Q_x(0)$. Поэтому получаем следующий *общий результат*:

$$\langle a_x \rangle / A_0 = 1 - \langle (n + 1 + \beta H_x)^{-1} \rangle [1 - n \langle (n + 1 + \beta H_x)^{-1} \rangle]^{-1}. \quad (14.51)$$

Отсюда можно получить *макротурбулентный предел*, положив длину корреляции $l = \infty$ или $n = 0$, так что вся находящаяся на луче зрения атмосфера движется с постоянной скоростью. Из формулы (14.51) находим

$$\langle a_x(\beta) \rangle_{\text{макро}} = A_0 \langle \beta H_x / (1 + \beta H_x) \rangle. \quad (14.52)$$

Этот результат согласуется с интуитивно ожидаемым, если заметить, что величина, стоящая в угловых скобках, есть попросту остаточная интенсивность выходящего излучения в линии для модели Милна — Эддингтона (см. § 10.3), причем линия смещена как целое по скорости на u_h , и эта остаточная интенсивность усредняется затем по распределению вероятностей значений u_h . Общий результат (14.51) можно следующим образом выразить через макротурбулентный предел:

$$\langle a_x(\beta) \rangle = (n + 1) \langle a_x[\beta/(n + 1)] \rangle_{\text{макро}} [1 + n A_0^{-1} \langle a_x[\beta/(n + 1)] \rangle_{\text{макро}}]^{-1}. \quad (14.53)$$

Чтобы получить *микротурбулентный предел*, устремим $n \rightarrow \infty$. Заметим прежде всего, что при $\beta \rightarrow 0$ формулу (14.52) можно представить в виде разложения $\langle a_x(\beta) \rangle_{\text{макро}} \approx A_0(\beta \langle H \rangle - \beta^2 \langle H^2 \rangle)$, что дает

$$A_0^{-1} \langle a_x(\beta) \rangle_{\text{макро}} = \beta \langle H(a, x) \rangle / [1 + \beta \langle H(a, x) \rangle], \quad (14.54)$$

где

$$\langle H(a, x) \rangle = (\pi^{1/2} \xi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} H(a, x - u_h) \exp(-u_h^2/\xi^2) du_h. \quad (14.55)$$

Так как функция Фойгта представляет собой свертку лоренцевского профиля с гауссовым (см. формулу (9.34)), изменив порядок интегрирования, получим

$$\langle H(a, x) \rangle = (1 + \xi^2)^{-1/2} H[a(1 + \xi^2)^{-1/2}, x(1 + \xi^2)^{-1/2}]. \quad (14.56)$$

Таким образом, в микротурбулентном пределе доплеровская ширина Δ_ν увеличивается в $(1 + \xi^2)^{1/2}$ раз.

При *отсутствии* турбулентности стандартная кривая роста для

модели Милна — Эддингтона дается выражением [см. (10.38)]

$$W_0^*(a, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \beta H(a, x) [1 + \beta H(a, x)]^{-1} dx. \quad (14.57)$$

Подставляя, далее, (14.52) в (14.42) и меняя порядок интегрирования, находим, что $W_{\text{макро}}^*(a, \beta) = \langle W_0^*(a, \beta) \rangle \equiv W_0^*(a, \beta)$, т. е. в макротурбулентном пределе кривая роста не меняется, чего, конечно, и следовало ожидать. В микротурбулентном пределе, подставив выражения (14.54) и (14.56) в (14.42), непосредственно получаем

$$W_{\text{микро}}^*(a, \beta) = (1 + \xi^2)^{1/2} W_0^*[a/(1 + \xi^2)^{1/2}, \beta/(1 + \xi^2)^{1/2}].$$

Отсюда видно, что линейная часть кривой роста и часть, обусловленная затуханием, не меняются, высота же плоской части увеличивается в $(1 + \xi^2)^{1/2}$ раз. В случаях, промежуточных между этими двумя предельными, кривая роста рассчитывается по (14.42) с использованием соотношения (14.53) путем численного интегрирования. Кроме выражений для $\langle a_x \rangle$ и W^* можно вывести и выражение для среднеквадратичной флуктуации остаточной интенсивности σ_x , которая наблюдалась бы при перемещении вдоль щели на спектрограмме с идеальным разрешением, а именно $\sigma_x = A_0^{-1}(\langle a_x^2 \rangle - \langle a_x \rangle^2)^{1/2}$ (см. [49]).

На рис. 14.4 приведены результаты расчетов средней глубины линии и ее дисперсии для случая сильной линии, образующейся в атмосфере с параметром турбулентной скорости ξ , равным тепловой скорости, и концентрацией «вихрей», равной 10 на единицу оптической глубины в континууме. Кривые роста для $\xi = 1$ изображены на рис. 14.5. Из него видно, что, поскольку форма теоретической кривой зависит от концентрации вихрей n , однозначное определение ξ из сравнения наблюдаемой кривой с теоретической, относящейся к $\xi = 0$, оказывается невозможным. Значение ξ , получающееся в микротурбулентном пределе, будет, вообще говоря, некоторой *нижней оценкой* действительного значения. Заметим, что указанный эффект *прямо противоположен* тому, который вызывается отклонениями от ЛТР, приводящими, как правило, к *подъему* плоской части кривой роста, даже если в среде и нет движений (см. § 11.4).

Детальные расчеты с использованием реалистической модели солнечной атмосферы были проделаны для линий OI $\lambda\lambda 7771; 7774; 7775$ и FeI $\lambda\lambda 5576; 5934; 6200$ [235]. Было получено прекрасное согласие с наблюдениями. При этом в процессе определения парамет-

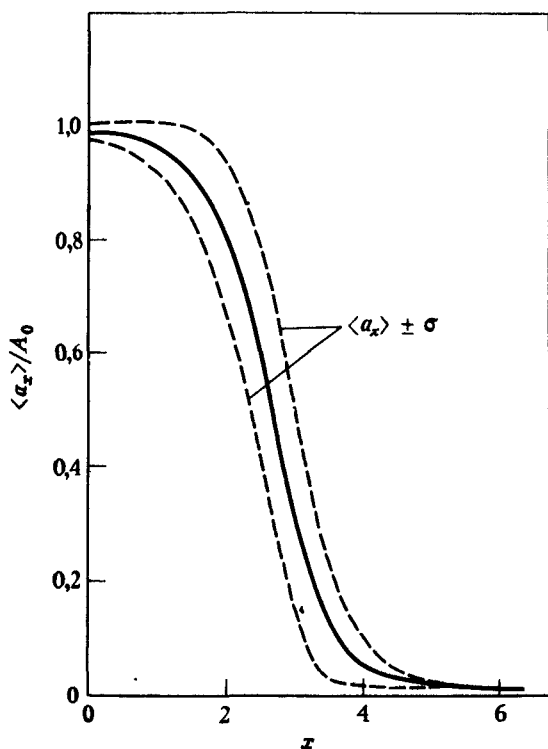


Рис. 14.4. Глубина поглощения в линии с $\beta = 100$, образующейся в турбулентной атмосфере с турбулентной скоростью $\xi = 1$ и концентрацией вихрей $n = 10$. Абсцисса — $x = \Delta\nu/\Delta\nu_D$. Сплошная кривая — профиль, усредненный по всем реализациям распределения скорости. Пунктирные кривые — средний профиль $\pm$ среднеквадратичное отклонение для спектрографа с идеальным разрешением. (По [49], с разрешения.)

ров по данным наблюдений геометрические места точек на плоскости (ξ, l) [$l = 1/n$ (км)], которые соответствуют наблюдаемым интенсивностям, пересекаются почти в одной и той же точке для нескольких значений расстояния $\Delta\lambda$ от центра линии. Через эту точку проходит и кривая, описывающая эквивалентные ширины. Тем самым оказывается возможным однозначно определить и ξ , и $l = 1/n$ (км). Найдено, что $\xi \approx 2,2$ км/с и $l \approx 150$ км. Эта скорость больше обычно принимаемой микротурбулентной скорости, а длина корреляции того же порядка, что и шкала высот в фотосфере. Было бы интересно выяснить, нет ли какого-то гидродинамическо-

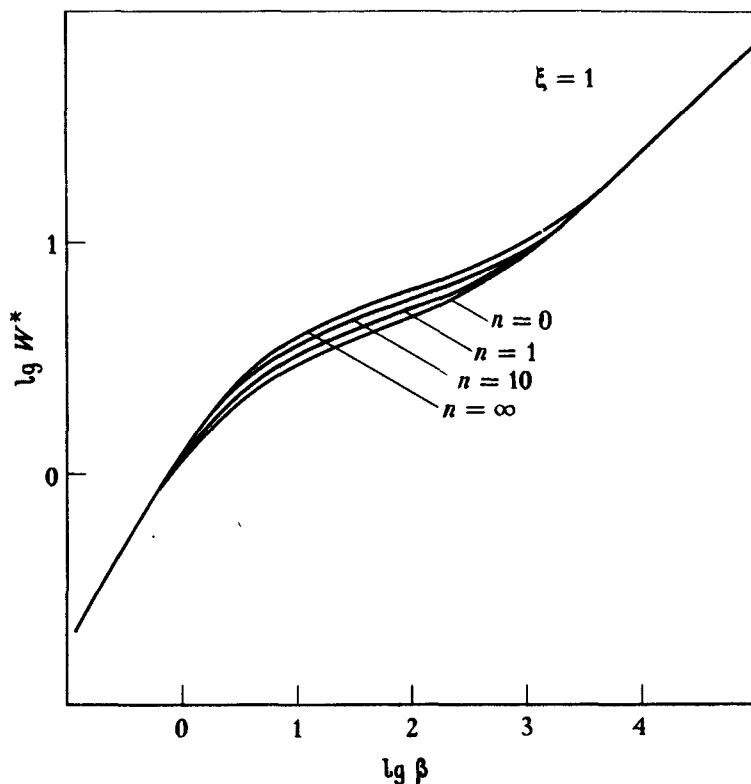


Рис. 14.5. Кривые роста для турбулентной атмосферы при $\xi = 1$. Ордината: логарифм приведенной эквивалентной ширины $W^* = W_r/A_0\Delta\nu_D$. Абсцисса: логарифм силы линии $\beta = \chi_i/\chi_c$. Числа у кривых — значения концентрации вихрей, которая считается не зависящей от глубины. (По [49], с разрешения.)

го смысла в примерном равенстве длины корреляции и шкалы высот в фотосфере, или же это просто совпадение.

Учет конечности характерного масштаба поля скоростей оказывается существенным и для интерпретации изменения профилей линий в спектре Солнца при переходе от центра к краю диска. Уже давно стоит проблема объяснения того, почему профили в центре диска имеют характерный V-образный вид, указывающий на макротурбулентность, тогда как на краю диска они имеют U-образный вид, указывающий на микротурбулентность. Кроме того, микротурбулентные скорости, найденные по профилям на краю диска, обычно больше скоростей, найденных по тем же линиям в центре диска.

Этот результат рассматривался как свидетельство в пользу существования *анизотропной* турбулентности (состояние, понять которое с точки зрения гидродинамики трудно). Оба указанных эффекта можно объяснить, по крайней мере качественно, если считать, что поле скоростей характеризуется некоторой конечной концентрацией вихрей [226]. Если концентрация вихрей при $\mu = 1$ равна $n_0(\tau)$, то концентрация, соответствующая другим значениям μ , равна $n_0(\tau)/\mu$. Это следует из условия, что турбулентность должна быть изотропной, и поэтому концентрация вихрей на единицу длины *вдоль луча зрения* должна быть одной и той же. Если концентрация не зависит от глубины, то выражение (14.53) сохраняет свой вид, за исключением того, что n заменяется на n_0 , а $A_0 = \alpha\mu(1 + \alpha\mu)^{-1}$. Вообще говоря, $n_0(\tau)$ должно меняться с τ . Потребуем, например, чтобы все вихри имели один и тот же *геометрический* размер L . Тогда $n_0(\tau) = [\chi_c(\tau)L]^{-1}$. Для гарвардско-смитсонианской модели солнечной атмосферы $\chi_c(\tau) \propto \tau$, и поэтому $n_0(\tau) \propto \tau^{-1}$. Таким образом, концентрация вихрей, с которой мы имеем дело при наблюдениях вблизи края, должна быть больше, чем для центра диска. Этот результат дает хотя бы качественное объяснение упоминавшихся выше эффектов центр — край. С помощью гарвардско-смитсонианской модели был проведен анализ линии $\text{Mg I } \lambda 4571$ [226]. Хорошее воспроизведение профилей получено для модели с *изотропной* турбулентностью, характеризуемой параметрами $\xi = 1,2 \text{ км/с}$ и $l \approx 70 \text{ км}$. Найденное при этом меньшее значение l (в сравнении с упомянутыми ранее результатами по OI и FeI) может отражать то, что в этом исследовании поле скоростей описывалось разрывной моделью Кубо — Андерсона, тогда как в других исследованиях используется непрерывное поле скоростей. Оказывается, что при *заданном* ξ в случае разрывного поля скоростей любая данная интенсивность линии всегда достигается при *меньших* значениях l [237].

При отсутствии ЛТР получаются профили, которые в ядре оказываются более глубокими, в крыльях же — все более близкими к профилям, соответствующим ЛТР [227], [236]. С увеличением турбулентной скорости ξ и с уменьшением длины корреляции l различие между профилями, рассчитанными без предположения об ЛТР и при его принятии, становится больше. Можно не сомневаться в том, что дальнейшее применение описанных выше методов к анализу солнечного спектра, а когда это возможно, то и звездных спектров, даст много ценных сведений о природе макроскопических движений вещества в звездных атмосферах.

14.2. Теория Соболева

Наблюдениями надежно установлено наличие крупномасштабного *расширения* звездных атмосфер, происходящего с большими скоростями (иногда имеющего характер взрыва). По-видимому, первыми объектами, у которых существование таких движений было выявлено вне всяких сомнений, стали *новые* (а позднее и *сверхновые*) звезды. В их спектрах вслед за внезапным увеличением светимости звезды обнаруживаются линии поглощения, сильно смещенные в коротковолновую сторону, что указывает на быстрое движение вещества по направлению к наблюдателю. Эти линии соседствуют со смещенными в длинноволновую сторону широкими эмиссиями. В результате получаются характерные *профили типа Р Лебеда*, подобные показанным на рис. 14.6. В спектрах новых эти структуры появляются лишь на то время, когда происходит быстрый сброс внешних слоев звезды. У других объектов (*классические звезды типа Р Лебеда* [79], [366]) эти линии, хотя они и являются переменными, присутствуют все же более или менее перманентно, что указывает на устойчивое истечение вещества. Первым, кто понял, что большую ширину линий в спектрах звезд WR (она соответствует скоростям порядка 3000 км/с) можно интерпретировать как следствие быстрого истечения вещества, был Билс. Он полагал, что течение вызывается давлением излучения. Это заключение следует и из современных динамических моделей. К аналогичным выводам можно прийти и в отношении Of-звезд. Сегодня мы знаем, что у звезд WR и Of, а также у многих сверхгигантов ран-

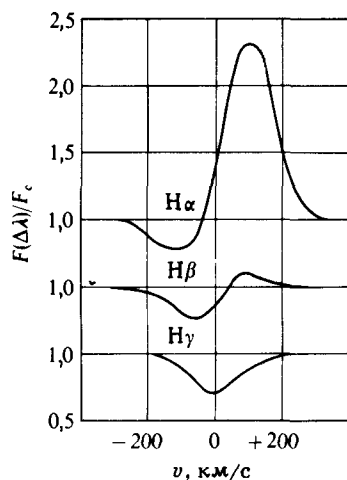


Рис. 14.6. Профили (типа Р Лебеда) водородных линий в спектре HD 190603 по наблюдениям Билса [79]. *Ордината* — наблюдаемый поток в единицах континуума (профили различных линий смещены друг относительно друга для ясности). *Абсцисса* — расстояние от центра линии, измеренное в единицах скорости, т.е. $v = c\Delta\lambda/\lambda$.

них типов имеется *трансзвуковой звездный ветер* (см. § 15.4), для которого характерны весьма малые, направленные наружу скорости в сравнительно глубоких слоях звезды, но большое, направленное наружу ускорение, что обеспечивает очень высокие скорости ($v/c \approx 0,01$) ветра на больших расстояниях от звезды.

Решение уравнения переноса в сферически расширяющейся среде — достаточно сложная задача, и в ранних работах Билса [75, 76, 77, 78], Чандрасекара [149], Герасимовича [243] и Вилсона [674] вводилось предположение, что вещество оптически тонко, так что эффектами переноса можно пренебречь. Этот подход хотя и был чрезмерно упрощенным, тем не менее позволил с достаточной уверенностью понять общую физическую картину. Серьезный успех был достигнут в работах Соболева [590, 591; 15, гл. 28], который понял, что наличие градианта скорости в расширяющейся среде на самом деле упрощает задачу о переносе в линии, поскольку в этих условиях преобладает *процесс ухода и термализации фотонов*, что ведет к геометрической локализации функции источника — особенности, отсутствующей в статической задаче. В теории Соболева решение задачи теории переноса по существу заменяется расчётом *вероятности выхода фотона*; в последующем теория была уточнена и развита далее Кастором [134] и применена к более реалистическим расчётам спектров многоуровневных атомов в оболочках звезд типа WR [139, 140].

ПОВЕРХНОСТИ ПОСТОЯННОЙ ЛУЧЕВОЙ СКОРОСТИ

Рассмотрим сферически симметричную, радиально расширяющуюся оболочку, окружающую звезду с достаточно четко определенной поверхностью фотосферы (рис. 14.7). На основе этой общей модели можно дать качественное объяснение главных особенностей профилей типа Р Лебедя, подобных приведенным на рис. 14.6. В этом подразделе *будем исходить из допущения, что оболочка практически прозрачна*, так что каждый фотон, излученный по направлению к наблюдателю, может быть им зарегистрирован. Этот подход позволяет понять суть проблемы и дает результаты, которые позже окажутся полезными. При изложении все время будет использоваться тот факт, что излучение (или поглощение) в линии происходит в основном в центре линии. Поэтому излучение от данной области, регистрируемое внешним наблюдателем, приходит главным образом на частоте центра линии, смещенной вследствие эффекта Доплера на величину, соответствующую проекции скорости вещества на луч зрения.

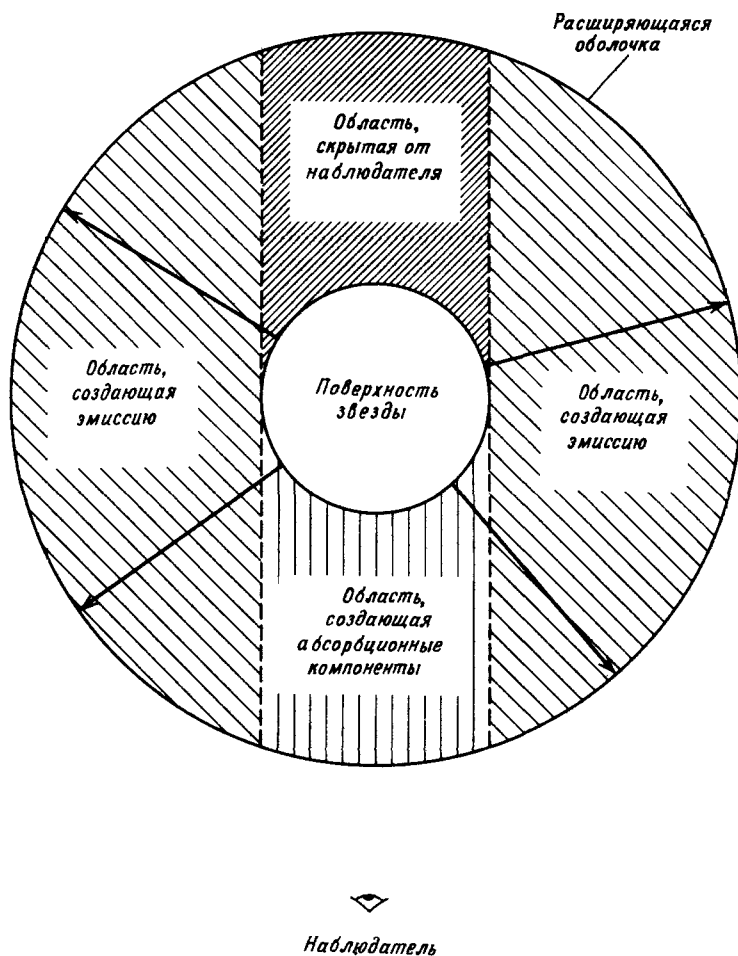


Рис. 14.7. Схематическое изображение расширяющейся оболочки, окружающей поверхность звезды. Вещество, скрытое за диском звезды, удаленный наблюдатель видеть не может.

Вещество, находящееся за диском звезды, расположено в *экранированной области*, и внешний наблюдатель не может его видеть. Вещество, которое проектируется на диск звезды, может либо а) просто испускать излучение без заметной реабсорбции, как это имеет место, например, в случае запрещенной линии, образующейся в туманности, или в случае среды с тепловым возбуждением при

$T_e \gg T_c$, где T_c — цветовая температура излучения фотосферы, либо б) поглощать падающее параллельно лучу зрения фотосферное излучение и рассеивать его в других направлениях. Это вещество в случае (а) давало бы эмиссионную линию, смещенную в коротковолновую сторону, а в случае (б) дает смещенную в сторону коротких длин волн абсорбционную деталь, характерную для профилей типа Р Лебеда. От вещества, расположенного в дающих эмиссию областях, не проектирующихся на диск, к нам приходят как фотоны, излученные тепловым путем, так и рассеянные этим веществом фотоны звездного и диффузного (создаваемого самой оболочкой) полей излучения. Проекция скорости вещества на луч зрения в этой (создающей эмиссию) части оболочки охватывает целый интервал — от положительных до отрицательных значений. Это приводит к образованию широкой симметричной эмиссионной линии, охватывающей область частот по обе стороны от статического центра линии. Так как часть вещества скрыта звездой, максимальные красные смещения, которые могли бы здесь появиться, не будут наблюдаться. Следует ожидать, что информация о *максимальных скоростях истечения* будет, вообще говоря, извлекаться из данных о положении *коротковолнового среза* абсорбционного (если же абсорбция отсутствует, то эмиссионного) компонента. Объем излучающей области может быть гораздо больше объема звезды, и его интегральный вклад в приходящее в линии излучение может намного превосходить количество энергии, приходящей от диска звезды. В результате максимальные интенсивности в сильных эмиссионных линиях могут быть в несколько раз больше интенсивности в соседнем участке континуума (см. рис. 14.6 и 14.9). Когда размеры диска звезды гораздо меньше размеров излучающей области, становится несущественным и влияние экранирования. Наконец, в одних линиях оболочка намного более непрозрачна, чем в других, и поэтому может иметь в первых из них больший эффективный излучающий объем. Так, на рис. 14.6 виден переход от очень сильной эмиссии в H_α к практически полному отсутствию эмиссии в H_γ , где видна практически фотосферная линия поглощения H_γ .

Чтобы перейти от этого качественного понимания к количественному описанию, можно рассчитать энергию, регистрируемую внешним наблюдателем на частоте ν :

$$E_\nu = \int_V \eta(r, \nu) d^3r, \quad (14.58)$$

где интегрирование ведется по всему неэкранируемому объему. При интегрировании можно использовать либо координаты (r, θ) с по-

лярной осью, направленной от центра звезды к наблюдателю (как это уже делалось нами ранее в случае сферической геометрии), либо координаты (ρ, z) (см. рис. 7.27). Выражение (14.58) можно представить в более явном виде, если написать

$$\eta(r, \nu) = \tilde{\eta}(r)\phi[\nu - \nu_0(1 + \mu\nu_r/c)].$$

Эта запись указывает, что центр линии для внешнего наблюдателя смещается и оказывается на частоте $\nu_0(1 + \nu_z/c)$, где $\nu_z = \mu\nu_r$ — проекция скорости расширения ν_r на луч зрения. Если предположить, что $\tilde{\eta}(r) = \eta_0(\rho/\rho_0)^\alpha$ (разумные значения α лежат в интервале $0 \leq \alpha \leq 2$), и положить, далее, $\nu = \nu_0(r/r_0)^n$, то из соотношения неразрывности $\rho\nu r^2 = \rho_0\nu_0 r_0^2$ окончательно получим $\tilde{\eta}(r) = \eta_0(r/r_0)^{-(n+2)\alpha}$. Выберем такие единицы, чтобы $r_0 = \nu_0 = 1$ на поверхности фотосферы, и будем измерять смещение по частоте от центра линии в единицах $\Delta\nu_D = \nu_0\nu_0/c$, т.е. введем безразмерную частоту $x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$. Тогда

$$E_x = \eta_0 \int_V \phi[x - \mu\nu(r)]r^{-(n+2)\alpha} d^3r. \quad (14.59)$$

В принципе V есть весь незранируемый объем. На самом деле область интегрирования можно определить более точно.

Большая часть излучения, наблюдаемого на частоте x , будет приходить из тех областей, для которых смещенная за счет эффекта Доплера частота центра линии равна x . Наблюдаемые скорости течения газа в атмосферах звезд WR и Of (до 3000 км/с) во много раз превышают тепловую скорость (~ 30 км/с). Поэтому область пространства, от которой приходит излучение на какой-либо фиксированной частоте, должна представлять собой очень тонкую зону, расположенную по обе стороны от *поверхности равных лучевых скоростей*, на которой $\nu_z = \mu\nu_r = x$. (Замечание: термин «лучевая скорость» (radial velocity) имеет здесь общепринятый в астрономии смысл скорости *по лучу зрения*, а не радиальной скорости течения ν_r , измеряемой относительно центра звезды [по-английски также radial velocity, откуда и необходимость этого авторского замечания в английском оригинале. — Прим. ред.]) В идеализированном предельном случае, когда ширина профиля поглощения пренебрежимо мала (из-за того, что $\nu_{\text{тепловая}} \ll \nu_{\text{течения}}$), эти зоны возникают в самих поверхностях равных лучевых скоростей, которые поэтому играют в рассматриваемой теории фундаментальную роль.

Форма этих поверхностей зависит от того, каково распределение скоростей. Оно в принципе должно получаться из *динамических*

расчетов. Однако, чтобы понять, как обстоит дело, достаточно рассмотреть ряд простых законов изменения скорости вида $v = r^n$ (в единицах $v_0 = r_0 = 1$). а) Допустим, что $v = \text{const}$. Этот закон можно использовать в случае тонкой сферической оболочки (например, для планетарной туманности, находящейся далеко от звезды) или для тех происходящих с большими скоростями течений, где скорость уже близка к конечной скорости течения [см. ниже п. (в)]. б) Положим $v = r$. Этот закон может использоваться в случае вызванного взрывом разлета вещества, начинающегося в некоторый момент времени t_0 , так что $t - t_0 = r/v$. Здесь частицы, движущиеся быстрее, перегоняют те частицы, которые движутся медленнее, что и приводит к линейной связи v с r . в) Предположим, что газ покидает звезду со скоростями, превышающими скорость убегания. Тогда можно написать $v = v_\infty(1 - r_c/r)^{1/2}$, что дает грубую модель транзвукового ветра. Во всей области $r_c \leq r \leq \infty$ течение является ускоренным. г) Если вещество выбрасывается в точности со скоростью убегания и его движение замедляется под действием силы тяжести, то можно взять $v = r^{-1/2}$. Каждый из этих законов определяет свой характерный набор поверхностей равных лучевых скоростей.

Упражнение 14.5. Показать, что поверхности $v_z = \text{const}$ для случаев (а) и (б) представляют собой соответственно конические поверхности $\theta = \arccos \mu = \text{const}$ и плоскости $z = \text{const}$ в обычных системах координат (r, θ) и (p, z) .

Поверхности равных лучевых скоростей для случаев (в) и (г) показаны на рис. 14.8 (а, б).

Из сказанного выше можно сделать некоторые далеко идущие выводы. Поскольку поверхности равных лучевых скоростей простираются на большие расстояния (бесконечные, если течение не является замедленным), соотношение Эддингтона — Барбье для расширяющихся атмосфер оказывается совершенно несостоятельным. Излучение на данной частоте в пределах линии нельзя более связывать с определенным местом r в оболочке, но лишь с некоторой широкой областью значений $(r, r + \Delta r)$. Пространственная локализация с точки зрения внешнего наблюдателя имеет место лишь тогда, когда изменения полной концентрации частиц и условий ионизации и возбуждения ограничивают размеры области с высокой излучательной способностью. Что еще хуже, справедливость этого вывода не зависит от силы перехода, дающего линию [317]. Поэтому

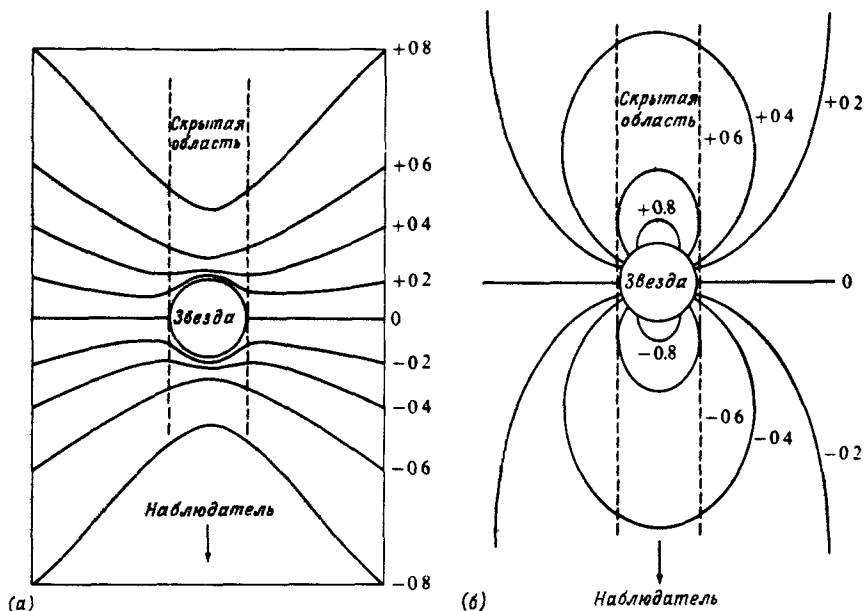


Рис. 14.8. Поверхности равной лучевой скорости $v_z = \text{const.}$ $a - v(r) = v_\infty (1 - 1/r)^{1/2}$. Числа у кривых — значения v_z/v_∞ . $b - v(r) = r^{-1/2}$, (По [366], с разрешения.)

му из исследования слабых и сильных линий определить структуру атмосферы по глубине с точностью, превышающей характерное расстояние Δr , определенное выше, невозможно в принципе. Понятно, что эти соображения приводят к появлению больших трудностей при построении модели и разработке диагностики расширяющихся атмосфер. В случае течений, происходящих с замедлением, трудности еще больше. Как видно из рис. 14.8, б, луч зрения может пересекать поверхность равных лучевых скоростей в двух различных точках. Поэтому вклад в информацию, получаемую наблюдателем, дают две области, которые могут сильно различаться по своим физическим свойствам. Кроме того, в этом случае между двумя указанными областями может происходить радиационное взаимодействие, и поэтому описываемый ниже метод Соболева нуждается в соответствующей перестройке.

С учетом конкретной геометрии поверхностей равных лучевых скоростей соотношение (14.59) позволяет рассчитывать наблюдаемые профили линий. Например, как впервые показал Билс [75],

[76], [77], [78], если экранированием можно пренебречь, то профиль линии, порождаемой оптически тонкой оболочкой, расширяющейся с постоянной скоростью, имеет *плоскую вершину*. Пример такого профиля приведен на рис. 14.9, где показаны линии C III $\lambda 5696$ и C IV $\lambda 5808$ в спектре горячей звезды типа WR HD 165763. Округлая форма профиля линии C IV свидетельствует о том, что в этой линии оболочка *оптически толстая* (см. ниже). В справедливости результата Билса можно убедиться с помощью соотношения (14.59), если использовать координаты (r, θ) . Мы замечаем, что для каждого значения v_z (а потому и для каждого значения x в пределах линии) излучение испускается веществом, расположенным вблизи конической поверхности $\mu = \cos \theta = x$ в пределах $d\mu$. Объемы всех таких элементов, очевидно, одинаковы. Нетрудно получить и результаты, относящиеся к другим законам изменения скорости, если по-прежнему считать, что оболочка *оптически прозрачна* в линии. Это приближение справедливо не всегда. Необходимость в нем отпадает, если используется метод Соболева.

Упражнение 14.6. а) Пусть профиль поглощения $\phi(x) = \delta(x)$, а скорость в оболочке $v = v_0 = 1$. Пренебрегая экранированием, показать, что $E_x = E_0 = \text{const}$ при $-1 \leq x \leq 1$ и $E_x = 0$ при $|x| > 1$. С помощью формулы (14.59) вывести выражения для E_0 и показать, что для $\alpha < 1,5$, $\alpha = 1,5$ и $\alpha > 1,5$ получаются различные результаты. Показать, что при $\alpha \leq 1,5$ оболочка должна быть ограниченной ($r \leq R$), а при $\alpha > 1,5$ никакого такого ограничения не требуется. Произведя учет экранирования, показать, что $E_x = 0$

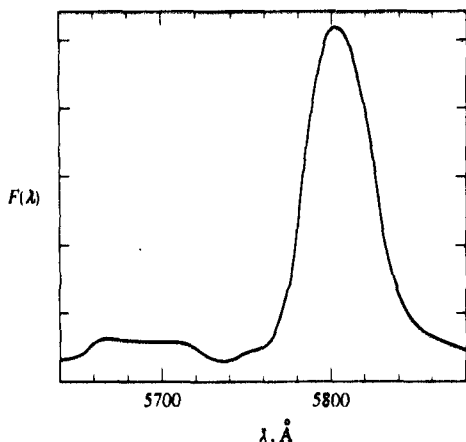


Рис. 14.9. Наблюдаемые профили линий C III $\lambda 5696$ и C IV $\lambda 5808$ у звезды HD 165763 типа WC5. Обратите внимание на плоский профиль линии $\lambda 5696$, в которой атмосфера прозрачна, и на имеющий округлую форму профиль линии $\lambda 5808$, в которой атмосфера оптически толстая. (По [369], с разрешения.)

при $x < x_{\min}$, где $x_{\min} = -(1 - R^{-2})^{1/2}$, и написать выражение для E_x в области $x_{\min} \leq x \leq 0$. б) Выполнить аналогичное исследование для $v = r$. Определить E_0 для соответствующих областей изменения α и вывести аналитические выражения для профилей E_x/E_0 с учетом влияния экранирования.

ВЫХОД И ТЕРМАЛИЗАЦИЯ ФОТОНОВ В РАСШИРЯЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Рассмотрим теперь образование линий в оптически толстой расширяющейся оболочке, окружающей непрозрачное ядро радиуса r_c . Предположим, что влиянием континуума, на который налагается линия, можно пренебречь. Если перейти к координатной системе, покоящейся относительно некоторого элемента среды, и поставить перед собой вопрос, что происходит, когда мы смотрим в заданном направлении, то станет ясно, что из-за градиента скорости будет существовать дифференциальный доплеровский сдвиг между исходной точкой и любой другой точкой на луче зрения. В конце концов этот сдвиг становится столь большим, что ни один фотон, излученный в пределах эффективных границ профиля поглощения в линии (считаем, что они находятся на $\pm x_{\max}$), не сможет уже поглотиться в линии в рассматриваемой точке. Движение среды приводит к появлению механизма *внутреннего выхода* фотонов. Вне границ области взаимодействия, окружающей точку излучения, фотоны более не могут поглощаться средой (даже если она бесконечна!) и свободно уходят на бесконечность. Таким образом, имеется определенное ограничение на размер той области, в пределах которой излученные или рассеянные фотоны могут влиять на интенсивность в линии в рассматриваемой точке. В предельном случае больших градиентов скорости эта область взаимодействия будет мала, и поэтому ее можно считать почти однородной по физическим характеристикам (температуре, плотности, состоянию ионизации и т.д.). Поэтому в теории должны фигурировать только *локальные значения величин* и параметр β , который дает вероятность выхода фотона, проинтегрированную по направлениям и по частотам линии. В предельном случае пренебрежимо малых эффектов переноса можно поэтому написать

$$\bar{J}(r) = (1 - \beta)S(r) + \beta_c I_c. \quad (14.60)$$

Первый член получается из значения, которое $\bar{J}$ имело бы при отсутствии выхода фотонов, а именно $\bar{J} = S$, путем исправления его за выход фотонов, обусловленный градиентом скорости. Параметр

β_c представляет собой (проинтегрированную по частотам и по углам) вероятность проникновения излучения удельной интенсивности I_c , испускаемого ядром, в рассматриваемую точку. Теперь нам надлежит вычислить β и β_c .

Как мы уже это делали ранее, будем измерять скорость в единицах тепловой скорости [т.е. $V(r) = v(r)/v_{\text{тепл}}$], а частоту, отсчитываемую от центра линии, — в доплеровских ширинах [т.е. $x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$, где $\Delta\nu_D = \nu_0 v_{\text{тепл}}/c$]. Тогда оптическое расстояние вдоль луча до наблюдателя, находящегося на бесконечности, можно записать в виде [см. формулу (14.22)]

$$\tau(z, p, x) = \int_z^\infty \chi(z', p, x) dz' = \int_z^\infty \chi_1(r') \phi(x') dz', \quad (14.61)$$

где $r' = (z'^2 + p^2)^{1/2}$, $\mu' = z'/r'$,

$$x' = x'(z', p, x) = x - V_z(z') = x - \mu' V(r'). \quad (14.62)$$

Основной вклад в интеграл в формуле (14.61) должна давать область, где $x' = 0$, т.е. область вблизи $z' = z_0(p, x)$, где z_0 таково, что $z_0 r_0^{-1} V(r_0) = x$, причем $r_0 = (z_0^2 + p^2)^{1/2}$. Поверхность $z = z_0(p, x)$ есть, очевидно, не что иное, как поверхность равных лучевых скоростей. В хорошем приближении мы можем, далее, заменить $\chi_1(r')$ на $\chi_1(r_0)$ и вынести этот множитель из-под интеграла. Заменим затем переменную интегрирования z' на x' , учтя при этом переходе, что в силу соотношения (14.62)

$$-(\partial x'/\partial z)_p = (\partial V_z/\partial z)_p = (\partial\{\mu(z, p)V[r(z, p)]\}/\partial z)_p = \mu^2 \partial V/\partial r + (1 - \mu^2)(V/r) \equiv Q(r, \mu). \quad (14.63)$$

Здесь по-прежнему считается, что μ и r являются функциями z и p . Если область взаимодействия мала, то можно считать, что найденный только что коэффициент перехода от z' к x' является практически постоянным, и его значение можно брать для резонансной точки $z = z_0(p, x)$. Тогда, если ввести функцию

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(\xi') d\xi', \quad (14.64)$$

такую, что, очевидно, $\Phi(-\infty) = 0$ и $\Phi(\infty) = 1$, то (14.61) можно переписать в виде

$$\tau(z, p, x) = \tau(-\infty, p, x) \Phi[x'(z, p, x)], \quad (14.65)$$

где $x'(z, p, x)$ дается выражением (14.62) и

$$\begin{aligned}\tau(-\infty, p, x) &= \chi_l(r_0)/Q(r_0, \mu_0) = \\ &= \tau_0(r_0)/\{1 + \mu^2[(d \ln V/d \ln r) - 1]\}_{0.}\end{aligned}\quad (14.66)$$

Здесь

$$\chi_l(r_0) = (\pi e^2/mc) f_{ij} [n_i(r_0) - (g_i/g_j) n_j(r_0)] / \Delta \nu_D \quad (14.67)$$

и

$$\tau_0(r_0) = \chi_l(r_0)/(V/r)_0. \quad (14.68)$$

Следует помнить, что в формулах (14.66) — (14.68) величины r_0 и μ_0 являются функциями p и x , т.е. $r_0 = r_0[z_0(p, x), p]$ и $\mu_0 = \mu_0[z_0(p, x), p]$.

Возьмем теперь некоторое фиксированное значение r и вычислим $\beta(r)$. В силу сферической симметрии интегрирование по μ можно выполнить, воспользовавшись приведенными выше результатами для различных значений p . Вероятность выхода вдоль любого луча равна, очевидно, $\exp(-\Delta\tau_\infty)$, где через $\Delta\tau_\infty$ обозначено оптическое расстояние от рассматриваемой точки до бесконечности. Поэтому, интегрируя по углам и по частотам, получаем

$$\beta(r) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi[x'(z, p, x)] \exp\{-\tau[z(r, \mu), p(r, \mu), x]\}. \quad (14.69)$$

Здесь предполагается, что фотоны, которые сталкиваются с непрозрачным ядром, поглощаются и потому теряются. Чтобы упростить выражение (14.69), воспользуемся соотношениями (14.64) — (14.67), считая при этом, что в области взаимодействия вещество достаточно однородно, чтобы можно было пренебречь различиями условий в среде в r_0 и r . Тогда

$$\begin{aligned}\beta(r) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \int_0^1 d\Phi \exp[-\chi_l(r)\Phi/Q(r, \mu)] = \\ &= \chi_l^{-1}(r) \int_0^1 \{1 - \exp[-\chi_l(r)/Q(r, \mu)]\} Q(r, \mu) d\mu.\end{aligned}\quad (14.70)$$

В том частном случае, когда $V = kr$, имеем $Q(r, \mu) = k$, и выражение (14.70) преобразуется к существенно более простому виду:

$$\beta(r) = \{1 - \exp[-\tau_0(r)]\}/\tau_0(r), \quad (14.71)$$

где в данном случае $\tau_0(r) = k^{-1} \chi_l(r)$. Тот же результат получается,

если в правой части (14.63) просто *отбросить* члены, зависящие от угловой переменной.

Чтобы вычислить β_c , предположим, что рассматриваемая точка расположена сравнительно далеко от ядра (т.е. что поверхность ядра находится на $-\infty$). Тогда, исходя из физического смысла β_c , можно написать

$$\begin{aligned}\beta_c(r) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{-\mu_c} d\mu \int_0^1 d\Phi \exp[-\chi_l(r)\Phi/Q(r, \mu)] = \\ &= \chi_l^{-1}(r) \frac{1}{2} \int_{\mu_c}^1 \{1 - \exp[-\chi_l(r)/Q(r, \mu)]\} Q(r, \mu) d\mu. \quad (14.72)\end{aligned}$$

где $\mu_c = [1 - (r_c/r)^2]^{1/2}$. В частном случае линейного закона изменения скорости здесь также достигается существенное упрощение, а именно $\beta_c(r) = W\beta(r)$, где W — обычный фактор дилуции, даваемый формулой (5.36). Только что приведенного результата можно было бы ожидать и из физических соображений, поскольку W представляет собой долю полного телесного угла, занимаемую диском, а β_c есть вероятность того, что фотоны, идущие от диска, попадут в рассматриваемую точку.

Заметим, что и β , и β_c выражаются фактически через локальные величины — непрозрачность и градиент скорости в рассматриваемой точке. Если эти величины заданы, то значение $\bar{J}$ можно найти по формуле (14.69) без решения уравнения переноса. Таким образом, мы видим, что достигнуто колоссальное упрощение. Для частного случая двухуровневого атома, когда функция источников (в предположении полиого перераспределения) дается выражением $S = (1 - \varepsilon)\bar{J} + \varepsilon B$, мы можем написать, воспользовавшись формулой (14.60), что

$$S = [(1 - \varepsilon)\beta_c I_c + \varepsilon B]/[(1 - \varepsilon)\beta + \varepsilon]. \quad (14.73)$$

Отсюда видно, что для определения S достаточно знать β и β_c . Далее, если пренебречь вкладом континуума ($\beta_c I_c = 0$), то формула (14.60) позволяет немедленно найти фактор радиационного разбаланса для любой линии многоуровневого атома, а именно $Z_{ji} = \beta_{ij}$. Мы воспользуемся этим результатом при рассмотрении многоуровневных задач.

Весьма поучительно рассмотреть *однородно расширяющуюся плоскопараллельную атмосферу* (т.е. атмосферу с $\partial V/\partial \tau = \text{const.}$ — *Ред.*), поскольку тут можно получить выражения для

функции источников, которые особенно ясно показывают влияние градиента скорости на термализацию фотонов (см. [273], стр. 87, и [406]). Обозначим через τ интегральную оптическую глубину в линии для неподвижной среды. Предположим, что градиент скорости $\gamma = \partial V / \partial \tau$ постоянен во всей среде. Удельная интенсивность в произвольно выбранной точке τ в направлении μ равна

$$I(\tau, \mu, x) = \int_{\tau}^{\infty} S(\tau') \exp \left[-\mu^{-1} \int_0^{\tau} \phi(x + \gamma \mu t) dt \right] \phi[x + \gamma \mu(\tau' - \tau)] \frac{d\tau'}{\mu}. \quad (14.74)$$

Поэтому функция источников для двухуровневого атома определяется интегральным уравнением

$$\begin{aligned} S(\tau) &= (1 - \varepsilon) \bar{J}(\tau) + \varepsilon B(\tau) = \\ &= (1 - \varepsilon) \int_{-\infty}^{+\infty} K_{\beta}(|\tau' - \tau|) S(\tau') d\tau' + \varepsilon B(\tau), \end{aligned} \quad (14.75)$$

где ядерная функция

$$K_{\beta}(s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^1 \frac{d\mu}{\mu} \phi(x) \phi(x + \gamma \mu s) \exp \left[-\frac{1}{\mu} \int_0^s \phi(x + \gamma \mu t) dt \right]. \quad (14.76)$$

Легко показать, что в данном случае в отличие от неподвижной среды, для которой ядро нормировано на единицу, влияние выхода фотонов приводит к тому, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K_{\beta}(|\tau|) d\tau = 1 - \beta, \quad (14.77)$$

где β — вероятность выхода фотона для случая плоскопараллельной атмосферы. Она получается из формул (14.70) и (14.63) в пределе при $1/r \rightarrow 0$, а именно

$$\beta = |\gamma| \int_0^1 \{1 - \exp[-1/(|\gamma| \mu^2)]\} \mu^2 d\mu. \quad (14.78)$$

Упражнение 14.7. Проверить формулы (14.77) и (14.78).

Уравнение (14.75) можно привести к стандартному для двухуровневого атома виду, перенормировав ядро: $K^*(\tau) = K_{\beta}(\tau)/(1 - \beta)$,

и введя $1 - \varepsilon^* = (1 - \beta)(1 - \varepsilon)$ и $B^*(\tau) = \varepsilon B(\tau)/\varepsilon^*$. Тогда

$$S(\tau) = (1 - \varepsilon^*) \int_{-\infty}^{+\infty} K^*(|\tau' - \tau|) S(\tau') d\tau' + \varepsilon^* B^*(\tau). \quad (14.79)$$

Когда наступила термализация, S меняется медленно, и его можно вынести из-под интеграла, что дает $S(\tau) = B^*(\tau) = \varepsilon B(\tau)/(\varepsilon + \beta - \varepsilon\beta)$. При $\varepsilon \gg \beta$ имеем $S(\tau) \rightarrow B(\tau)$, как и следовало ожидать. Однако при $\beta \gg \varepsilon$ выход фотонов доминирует над их гибелью и $S(\tau) \rightarrow \varepsilon B(\tau)/\beta$, откуда видно, что S уменьшается, приближаясь при $\beta \rightarrow 1$ к локальной скорости рождения фотонов εB , что понятно и из физических соображений. Если среда имеет границу и B постоянно, то (см. [409])

$$S(0) = (\varepsilon^*)^{1/2} B^* = \varepsilon B/(\varepsilon^*)^{1/2}. \quad (14.80)$$

Таким образом, при $\varepsilon \gg \beta$ получается обычный результат, справедливый для неподвижной среды: $S(0) = \varepsilon^{1/2} B$, а при $\beta \gg \varepsilon$ находим, что $S(0) = \varepsilon B/\beta^{1/2} = \beta^{1/2} S_\infty$, где через S_∞ обозначено асимптотическое значение S в глубоких слоях.

ПРОФИЛИ ЛИНИЙ

Выведем теперь выражения для профилей линий, которые будет регистрировать удаленный наблюдатель. Поток выходящего на частоте x излучения пропорционален

$$\begin{aligned} F_x &= 2\pi \int_0^\infty I(\infty, p, x) p dp = \\ &= 2\pi \int_{r_c}^\infty S(r_0) \{1 - \exp[-\tau(-\infty, p, x)]\} p dp + \\ &+ 2\pi \int_0^{r_c} S(r_0) \{1 - \exp[-\tau(-\infty, p, x)\Phi(x_c)]\} p dp + \\ &+ 2\pi I_c \int_0^{r_c} \exp[-\tau(-\infty, p, x)\Phi(x_c)] p dp, \end{aligned} \quad (14.81)$$

где, как и выше, через r_0 обозначено значение r на поверхности равных лучевых скоростей, фиксируемой заданием x , а x_c — значение x' , даваемое выражением (14.62) при $r' = r_c$ и $\mu' = [1 - (p/r_c)^2]^{1/2}$.

Первый член в (14.81) описывает излучение от части оболочки, не проектирующейся на диск (т.е. той, где $p > r_c$). Второй член описывает излучение от части оболочки, которая проектируется на ядро, причем множитель $\Phi(x_c)$ учитывает экранирование ядром части вещества. Заметим, что для расширяющейся атмосферы $\Phi(x_c)$ равно нулю при $x < 0$ и практически равно единице при $x > 0$. Отсюда непосредственно видно, как экранирование ядром влияет на длинноволновое крыло профиля. Последний член описывает вклад излучения ядра в континууме. Принимая во внимание только что упомянутые свойства $\Phi(x_c)$, видим, что в длинноволновом крыле линии оно не ослабляется, а в коротковолновом крыле испытывает более или менее сильное ослабление. Поток в континууме вне линии пропорционален

$$F_c = 2\pi I_c \int_0^{r_c} p dp = \pi r_c^2 I_c, \quad (14.82)$$

Заменяя переменную интегрирования p на r на поверхностях $(z/r)V(r) = x$, из формул (14.81) и (14.82) можно получить следующее выражение для профиля линии $R_x \equiv (F_x - F_c)/F_c$:

$$\begin{aligned} R_x = & 2(r_c^2 I_c)^{-1} \int_{r_{\min}(x)}^{\infty} S(r) [\tau_0(r)/\tau(-\infty, p, x)] \{1 - \exp[-\tau(-\infty, p, x)]\} r dr - \\ & - 2(r_c^2 I_c)^{-1} \int_0^{r_c} S(r_0) \{ \exp[-\tau(-\infty, p, x)\Phi(x_c)] - \exp[-\tau(-\infty, p, x)] \} p dp - \\ & - 2r_c^{-2} \int_0^{r_c} \{1 - \exp[-\tau(-\infty, p, x)\Phi(x_c)]\} p dp, \quad (14.83) \end{aligned}$$

где $r_{\min}(x)$ — расстояние от центра, на котором $V(r) = x$, а p считается функцией r и x . Обратите внимание на изменение знака по сравнению с формулой (8.2), которое сделано для того, чтобы описывать профили эмиссионных линий положительными числами. Каждый из членов в выражении (14.83) можно интерпретировать таким же образом, как и соответствующие члены в выражении (14.81).

Если пренебречь двумя последними членами в формуле (14.83), описывающими вклад ядра, то тем самым будут рассматриваться двухуровневые атомы, для которых оболочка настолько непрозрачна, что функция источников достигает асимптотического значения

$S = \varepsilon B/\beta$. Если заменить $\tau(-\infty, p, x)$ на τ_0 , то, принимая во внимание формулу (14.71), можем написать

$$R_x \approx \frac{\langle \varepsilon B \tau_0 \rangle}{I_c} \int_{r_c}^{\infty} \frac{\varepsilon B \tau_0}{\langle \varepsilon B \tau_0 \rangle} \frac{2r dr}{r_c^2} = \frac{A \langle \varepsilon B \tau_0 \rangle}{I_c}, \quad (14.84)$$

где $\langle \varepsilon B \tau_0 \rangle$ — характерное значение $\varepsilon B \tau_0$. Здесь через A обозначена *эффективная излучающая площадь*, измеренная в единицах площади ядра. При достаточно большой эффективной излучающей площади линия может стать гораздо ярче континуума. Наиболее сильные эмиссионные линии обязаны своим существованием главным образом измененно этому геометрическому эффекту.

Из формулы (14.81) легко получить другой интересный результат (см., например, [15], гл. 28). Рассмотрим оболочку, расширяющуюся с постоянной скоростью V . Тогда $Q(r, \mu) = (V/r) \sin^2 \theta$, и поверхности равных лучевых скоростей определяются уравнением $\cos \vartheta = x/V = \text{const}$. Переходя от p к r по формуле $p = r \sin \theta$, в предельном случае, когда можно пренебречь вкладом ядра, находим

$$F_x = 2\pi \sin^2 \theta \int_0^{\infty} S(r) \{1 - \exp[-\chi_l(r)r/(V \sin^2 \theta)]\} r dr. \quad (14.85)$$

Если оболочка *непрозрачна*, экспоненциальный член обращается в нуль и интеграл становится константой, так что $F_x = C \sin^2 \theta = C[1 - (x/V)^2]$. Профиль в этом случае имеет *округлую форму* (точнее, он параболический). Этот вывод важен, так как он показывает, что, даже если скорость постоянна, профили округлой формы возникают естественным образом как проявление эффектов, обусловленных зависимостью оптической толщины среды от частоты. Напротив, если при интерпретации исходить из предположения, что среда является оптически тонкой в линиях, с необходимостью пришлось бы считать, что движение происходит с ускорением или замедлением (что имело бы, разумеется, совершенно разные динамические следствия). Мы видим, таким образом, что если мы хотим получить результаты, имеющие физический смысл, то диагностическое изучение спектров должно выполняться с осторожностью и в высшей степени последовательно.

Детальные расчеты профилей в потоке по формуле (14.83) с использованием функций источников (14.73) для двухуровневого атома были выполнены в [134] при различных предположениях о пове-

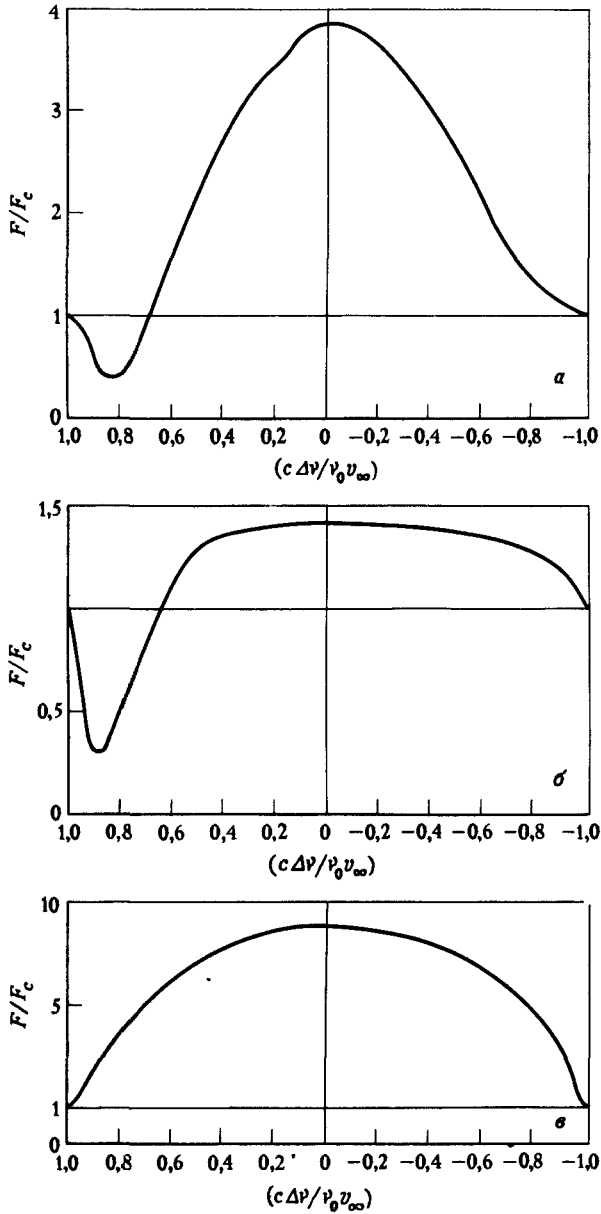


Рис. 14.10. Теоретические профили линий для расширяющихся сферически-симметричных атмосфер. *а*) $\varepsilon = 0,0092$ и $\tau_0(\text{max}) \approx 15$; *б*) $\varepsilon = 0,002$ и $\tau_0(\text{max}) \approx 0,5$; *в*) $\varepsilon \approx 0,021$ и $\tau_0(\text{max}) \approx 2$. (По [134], с разрешения.)

дении $V(r)$, $\tau_0(r)$ и при различных значениях постоянных ε и B/I_c (причем последняя бралась численно равной 5). Закон изменения скорости брался в виде $V(r) = V_\infty(1 - r_c/r)^{1/2}$. Все принятые распределения $\tau_0(r)$ характеризуются наличием максимума в области $1,1 \leq r/r_c \leq 4$. Если использовать монотонно убывающие распределения скорости, то получаются очень сильно асимметричные профили (которые не наблюдаются). По-видимому, это указывает на то, что линии, наблюдаемые в спектрах реальных звезд, возникают в зонах типа оболочек, образующихся вследствие изменений в состоянии ионизации с r , которые обеспечивают преобладание распространности того или иного конкретного иона в определенном интервале расстояний от центра звезды. Большое разнообразие профилей можно получить путем подходящего выбора значений параметров. Три характерных типа профилей, похожие на профили, наблюдаемые в спектрах звезд WR, показаны на рис. 14.10: а) эмиссия округлой формы с коротковолновым абсорбционным компонентом, как это наблюдается у линий C III λ 4650 и N III λ 6438; б) плосковершинная эмиссия с коротковолновым абсорбционным компонентом типа наблюдаемой в линиях He I; в) очень интенсивная эмиссия округлой формы без абсорбционного компонента, как это наблюдается для линий He II. В каждом случае, в согласии с формулой (14.84), интенсивность эмиссии пропорциональна $A \langle \varepsilon B \tau_0 \rangle / I_c$. Заметим, что плосковершинные профили имеют те линии, в которых оболочка является оптически тонкой.

МНОГОУРОВЕННЫЕ АТОМЫ. ПРИМЕНЕНИЕ К ЗВЕЗДАМ ВОЛЬФА — РАЙЕ

В спектрах звезд Вольфа — Райе можно наблюдать содержащие по многу членов серии чрезвычайно сильных эмиссионных линий. Эти спектры подразделяются на два широких класса, WC и WN. В спектрах WC сильны линии C и O, линии же N практически отсутствуют. Напротив, в спектрах WN сильны линии N и практически нет линий C. Серия Пиккеринга ($n = 4 - n'$) иона He II очень сильна. Из сравнения линий с нечетными n' (не блендируемых линиями водорода) и линий с четными n' (которые блендируются бальмеровскими линиями водорода) найдено, что излучение водорода слабое, откуда приходим к выводу, что отношение содержания водорода и гелия должно быть значительно меньше единицы. Чтобы получить количественную информацию об этих интересных аномалиях химического состава, а также о физической структуре оболочки, необходимо выполнить полный анализ спектра с исполь-

зованием многоуровневой модели атома. В настоящее время точно определить детальную структуру атмосферы невозможно, и имеющиеся исследования [139], [140] выполнены в духе грубого анализа (при принятии значительного числа приближений) с целью получения оценок значений физических параметров в какой-то одной типичной точке атмосферы.

Уравнения статистического равновесия имеют вид $\mathcal{R}_i + \mathcal{C}_i = 0$, где $\mathcal{R}_i$ и $\mathcal{C}_i$ — числа несбалансированных переходов на уровень i , обусловленных соответственно радиативными и ударными процессами. Имеется по одному такому уравнению для каждого уровня рассматриваемого иона плюс одно дополнительное соотношение, определяющее полное относительное содержание различных химических элементов. Число несбалансированных ударных переходов в 1 см^3 за 1 с можно записать в виде (см. § 5.4)

$$\mathcal{C}_i = \sum_{j < i} [n_j - (n_j/n_i)^* n_i] C_{ji} + \sum_{j > i} [(n_i/n_j)^* n_j - n_i] C_{ij} + (n_i^* - n_i) C_{ik}, \quad (14.86)$$

а число несбалансированных радиативных переходов равно

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_i = & \sum_{j > i} [n_j(A_{ji} + B_{ji}\bar{J}_{ij}) - n_i B_{ij}\bar{J}_{ij}] + \\ & + \sum_{j < i} [n_j B_{ji}\bar{J}_{ji} - n_i(A_{ij} + B_{ij}\bar{J}_{ji})] + \\ & + n_i^* 4\pi \int_{\nu_i}^{\infty} \alpha_{ik}(\nu) (h\nu)^{-1} B_\nu(T_e) [1 - \exp(-h\nu/kT_e)] d\nu - \\ & - n_i 4\pi \int_{\nu_i}^{\infty} \alpha_{ik}(\nu) (h\nu)^{-1} J_\nu [1 - b_i^{-1} \exp(-h\nu/kT_e)] d\nu. \end{aligned} \quad (14.87)$$

Здесь через T_e обозначена температура в оболочке и $n_i^* = n_k n_e \Phi_{ik}(T_e)$ [см. формулу (5.14)], где n_k — фактическая концентрация иона. Выражение для $\mathcal{C}_i$ при заданных значениях T_e и n_e пригодно в том виде, в каком оно записано выше, выражение же для $\mathcal{R}_i$ необходимо переписать в другом виде. Чтобы упростить выражение для числа связанно-связанных переходов, воспользуемся формулой (14.60). Тогда получим

$$\begin{aligned} n_j(A_{ji} + B_{ji}\bar{J}_{ij}) - n_i B_{ij}\bar{J}_{ij} = \\ = [n_j A_{ji} - (n_i B_{ij} - n_j B_{ji}) W B_\nu(T_e)] \beta_{ij}, \end{aligned} \quad (14.88)$$

где β_{ij} дается формулой (14.71), а τ_{ij} — формулами (14.67) и (14.68)

(там оно обозначено через τ_0). В (14.88) мы использовали приближенное выражение $\beta_c \approx W\beta$ и параметрически выразили I_c через температуру излучения T_c . Члены, описывающие связанно-свободные переходы, преобразовать несколько труднее, так как доплеровские смещения, вызванные расширением, почти не влияют на формирование континуума, и существенных упрощений из-за внутреннего выхода фотонов, имеющего место для линии, здесь практически нет. Фактически требуется иметь решение задачи о переносе для неподвижной среды. Чтобы обойти получение детального решения, положим $J_\nu = J_\nu^c + J_\nu^d$, где J_ν^c представляет собой интенсивность излучения, испускаемого ядром звезды, а J_ν^d — интенсивность диффузного излучения оболочки. Учитывая поглощение, мы примем, что

$$J_\nu^c \approx WB_\nu(T_c)e^{-\tau_\nu}, \quad (14.89)$$

где характерное оптическое расстояние между рассматриваемой точкой (R) и ядром (r_c) принимается равным

$$\tau_\nu = n_i \alpha_{ik}(\nu) [1 - b_i^{-1} \exp(-h\nu/kT_e)] (R - r_c). \quad (14.90)$$

Далее, если предположить, что а) оболочка однородна и б) оптическое расстояние от рассматриваемой точки до границы в любом направлении равно τ_ν , то можно принять, что

$$J_\nu^d \approx S_{ik}(\nu)(1 - e^{-\tau_\nu}), \quad (14.91)$$

где $S_{ik}(\nu) = (2h\nu^3/c^2)[b_i \exp(h\nu/kT_e) - 1]^{-1}$. При этих предположениях уравнения статистического равновесия принимают вид $\mathcal{A}n = \mathcal{B}$, где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ содержат коэффициенты вероятностей переходов, вероятности выхода в линиях и аналогичные величины для континуума. Чтобы решить эту систему, нужно задать следующие параметры: T_c , r_c , R , $\nu(R)$, T_e , n_e и полную концентрацию $n_{\text{атом}}$ атомов рассматриваемого химического элемента. Большинство из этих величин можно найти из независимых соображений, и обычно свободными параметрами, которые должны определяться из сравнения модели с наблюдениями, являются только T_e , n_e и $n_{\text{атом}}$. Система уравнений статистического равновесия нелинейна, так как оптические глубины τ_{ij} , τ_ν и мензеловские множители b_i в рекомбинационных членах зависят от решения. Поэтому систему необходимо решать итеративным способом. Итерации можно производить, используя метод Ньютона — Рафсона, который обеспечивает быструю сходимость.

Чтобы рассчитать интенсивности линий, воспользуемся форму-

лой (14.83), считая в грубом приближении, что S_{ij} и τ_{ij} постоянны при $r_c \leq r \leq R$, и пренебрегая угловой зависимостью в подинтегральных выражениях. Тогда вклад в профиль линии дают три составляющие, не зависящие от частоты и равные а) $R_e = (R^2/r_c^2)[S_{ij}/B_\nu(T_c)](1 - e^{-\tau_{ij}})$ — эмиссионному компоненту, б) $R_0 = -[S_{ij}/B_\nu(T_c)](1 - e^{-\tau_{ij}})$ — экранированному веществу и в) $R_a = -(1 - e^{-\tau_{ij}})$ — абсорбционному компоненту. Части профиля, лежащие по обе стороны от центра линии, имеют одну и ту же ширину $\Delta\lambda = \lambda\nu(R)/c$ (в единицах длин волн). Поэтому эквивалентная ширина равна (считаем ее положительной для эмиссионных линий)

$$W_\lambda = (\lambda\nu/c)(1 - e^{-\tau_{ij}})\{[(2R^2/r_c^2) - 1][S_{ij}/B_\nu(T_c)] - 1\}. \quad (14.92)$$

Если влияние экранирования и поглощения не учитывается, то в этой формуле следует опустить оба члена, содержащие -1 . Формула (14.92) является лишь приближенной (из-за предположения об однородности оболочки) и может давать результаты с ошибкой вплоть до множителя 2. Приведенные результаты можно использовать для расчета профилей и интенсивностей линий, если известны S_{ij} и τ_{ij} (т.е. населенности уровней), или же, наоборот, они могут использоваться в диагностике для нахождения этих величин.

Методы, изложенные в этом разделе, были использованы [140] для тщательного анализа спектра He II у двух звезд типа WN 6: HD 192163 и HD 191765. На первом этапе полные интенсивности линий (у которых нет ни абсорбционных компонентов, ни эффектов экранирования) используются для эмпирического определения населенностей уровней. Для линии, возникающей при переходе $u \rightarrow l$, полная интенсивность равна

$$\begin{aligned} I_{ul} &\propto \int A_{ul} h\nu_{ul} n_u(r) \beta_{ul}(r) dV \propto \int \eta_{ul}(r) \beta_{ul}(r) dV \propto \\ &\propto \int \beta_{ul}(r) [\nu_0 v(r)/C] \{1 - \exp[-\tau_{lu}(r)]\} dV, \end{aligned} \quad (14.93)$$

причем мы воспользовались выражением (14.71) для β_{ul} и выражениями (14.67) и (14.68) для τ_{lu} . Поэтому, предполагая однородность, получаем

$$I_{ul}/\nu_{ul}^4 = K \{1 - \exp[-\tau_{lu}(R)]\} / [(g_u n_l / g_l n_u) - 1], \quad (14.94)$$

где K для всех линий одно и то же. Для любой оптически толстой линии экспоненциальный член можно положить равным нулю. Есть основания ожидать, что для линии $\lambda 4686$ ($n = 3 \rightarrow n = 4$) это так. По наблюдаемым интенсивностям можно составить «приведенные интенсивности» (т.е. интенсивности по отношению к линии

λ 4686) $\mathcal{J}_{ul} = (I_{ul}/\nu_{ul}^4)/(I_{43}/\nu_{43}^4)$. Согласно (14.94),

$$\mathcal{J}_{ul} = [1 - \exp(-\tau_{lu})][(g_4 n_3/g_3 n_4) - 1]/[(g_u n_l/g_l n_u) - 1], \quad (14.95)$$

где мы положили $\exp(-\tau_{34}) = 0$. Далее, можно написать

$$\tau_{lu} = A[(n_l/g_l) - (n_u/g_u)](gf_{lu}\lambda)/(n_4/g_4), \quad (14.96)$$

где

$$A = (\pi e^2/mc)(n_4/g_4)[R/\nu(R)]. \quad (14.97)$$

Если теперь предположить, что и в линии λ 3203 ($5 \rightarrow 3$), и в линии λ 10124 ($5 \rightarrow 4$) атмосфера также непрозрачна, то можно найти численное значение $g_4 n_3/g_3 n_4 = \mathcal{J}_{54}(1 - \mathcal{J}_{53})/\mathcal{J}_{53}$, а следовательно, и S_{43} для каждой звезды. В трех рассматривающихся пока линиях атмосфера в самом деле непрозрачна, но это не обязательно должно быть верно для более высоких членов серии, которые имеют гораздо меньшие значения f . Допустим, однако, что атмосфера непрозрачна во всех линиях серии Пиккеринга. Тогда соотношение (14.95) позволяет найти эмпирические значения $g_4 n_u/g_u n_4$. При разумных значениях n_e и T_e населенности верхних уровней иона He^+ должны определяться столкновениями, и поэтому при $u \geq 10$ они должны быть такими же, как при ЛТР:

$$n_u/g_u = n_{\text{ион}} n_e \frac{1}{2} (h^2/2\pi m k T_e)^{3/2} \exp(\chi_u/k T_e). \quad (14.98)$$

Так как $\chi_u/k T_e \ll 1$ при $u \gg 1$, то n_u/g_u должно стремиться к некоторому постоянному значению. Для только что полученных эмпирических значений этого, однако, нет. Скорее $n_u/g_u \propto (f\lambda)_{4u}$, чего следует ожидать для оптически тонких линий из-за наличия множителя $1 - \exp(-\tau_{4u}) \approx \tau_{4u} \propto (f\lambda)_{4u}$ при $\tau_{4u} \ll 1$. Мы приходим поэтому к выводу, что в верхних линиях серии Пиккеринга атмосфера является оптически тонкой. Это позволяет оценить сверху параметр A , определяемый формулой (14.97). Наложив физически разумные требования, чтобы n_u/g_u а) было монотонно убывающей функцией u (отсутствие инверсии населенностей) и б) становилось постоянным при $u > 10$, можно оценить значение A . Получаются следующие результаты: $3 \leq A \leq 6$ для HD 192163 и $2 \leq A \leq 8$ для HD 191765.

На следующем этапе можно использовать известную абсолютную величину M_v , чтобы по стандартным соотношениям получить абсолютный поток в континууме на λ 5500 Å. Если принять $T_c \approx 40000$ К, на что указывают наблюдения, то тогда можно найти, что $r_c \approx 13 R_\odot$. Пользуясь полученным из наблюдений отноше-

нием $F_c(\lambda 4686)/F_c(\lambda 5500)$, находим $F_c(\lambda 4686)$. Используя затем наблюдаемую интенсивность эмиссионного компонента $R_e(\lambda 4686)$, можно найти $R^2 S_{43}$. Это дает в свою очередь $R \approx 70 R_\odot$, так как S_{43} уже известно. Отношение $R/r_c \approx 5 + 6$ находится в согласии с прямыми интерферометрическими измерениями для звезды $\gamma^2\text{Vel}$ типа WC и объясняет отсутствие какого-либо влияния экранирования на профили линий. Принимая по наблюдаемым ширинам линий $v(R) = 1000$ км/с и подставляя в соотношение (14.97) известные значения A и R , получаем численное значение n_4/g_4 , а следовательно, и всех n_u/g_u (по эмпирически определенным отношениям $g_4 n_u/g_u n_4$). Подставляя эти значения в формулу Саха (14.98) с $u \geq 10$ и принимая $T_e \approx 10^5$ К, $n_e = 2n_i$ (т.е. считая атмосферу состоящей из полностью ионизованного гелия), находим $n_e \approx 5 \cdot 10^{11}$ см $^{-3}$. Отсюда следует, что оптическая толщина оболочки по электронному рассеянию равна $\tau_e \approx n_e \sigma_e R = 1,5$. Наконец, зная, что в старших членах серии оболочки оптически тонкая, по наблюдаемому избытку излучения в линии Pi_{14} (которая блендируется с линией H_7) по отношению к линии Pi_{15} можно получить следующую оценку: $n(\text{H}^+)/n(\text{He}^{++}) \approx n(\text{H})/n(\text{He}) \leq 1/2$. Таким образом, у этих звезд содержание гелия по отношению к водороду выше обычного в 20 раз!

Имея определенные значения r_c , T_c , R , $v(R)$ и n_e и беря различные T_e и $n(\text{He})$, можно решить уравнения статистического равновесия. В результате получаются теоретические значения A и n_i/g_i . Такие расчеты были проведены [140] для 30-уровневого атома. Хорошее согласие с эмпирическими результатами получается при $n(\text{He}) \approx 2,5 \cdot 10^{11}$ см $^{-3}$ и $T_e \approx 10^5$ К (эти значения параметров являются не единственно возможными). Расчеты показывают, что населенности верхних уровней действительно определяются столкновениями и что $b_u \rightarrow 1$ при $u \gg 1$. Далее, так как $T_e > T_c$, то для поддержания возбуждения в оболочке, по-видимому, необходим нерезонансный механизм подвода энергии.

Другое применение описанные выше методы нашли при анализе интенсивностей линий C III (в ультрафиолетовой, видимой и инфракрасной областях), наблюдаемых в спектре звезды $\gamma^2\text{Vel}$ типа WC 8 [139]. В этой работе удалось получить независимые оценки параметров r_c , T_c , R и $v(R)$. Значения T_e , n_e и $n(\text{C}^{++})$ были определены из сравнения наблюдаемых эквивалентных ширин 10 линий с теоретическими ширинами, найденными по формуле (14.92) с использованием населенностей уровней, рассчитанных по модели атома, учитывающей 14 нижних термов C^{++} . Переходы на более высокие

уровни и в континуум не учитывались. Это несколько снижает точность определения населенностей верхних состояний. Хорошее согласие с наблюдениями было получено при $T_e = 22\,000\text{ К}$, $n_e = 4 \cdot 10^{11}\text{ см}^{-3}$ и $n(\text{C}^{++}) = 1 \cdot 10^9\text{ см}^{-3}$, причем принималось, что $T_c = 30\,000\text{ К}$, $R/r_c = 3,6$ и $v(R) = 900\text{ км/с}$. Найдено, что населенности четырех нижних возбужденных состояний по отношению к основному состоянию больцмановские, тогда как более высокие уровни недонаселены. В предположении, что *весь* углерод находится в форме ионов C^{++} , а все электроны поставляются водородом, найдена нижняя оценка отношения $n(\text{C})/n(\text{H})$, а именно $2,5 \cdot 10^{-3}$. Это значение превышает нормальное космическое содержание в 8 раз и заставляет думать, что содержание углерода в звездах WC в самом деле выше обычного и что главенство линий углерода в их спектрах этим и обусловлено. Учет других ионов углерода, а также электронов, поставляемых другими источниками (например, He), лишь повысил бы приведенную выше нижнюю оценку. Для $\gamma^2\text{Vel}$ $T_e < T_c$, что отнюдь не является аргументом в пользу нерadiативного подвода энергии и даже не исключает возможности лучистого равновесия в оболочке.

14.3 Уравнение переноса в сопутствующей системе координат

Все виды уравнения переноса, обсуждавшиеся в этой главе до сих пор, были основаны на использовании покоящейся системы отсчета наблюдателя, которому вещество звезды представляется движущимся. Как мы видели, при таком подходе имеется та трудность, что коэффициенты поглощения и излучения вещества из-за эффекта Доплера и абберации света становятся зависящими от углов. Это приводит к появлению неустранимой связи между углом и частотой и порождает серьезные трудности при вычислении членов, описывающих рассеяние, с помощью дискретных квадратурных сумм. Поэтому становится заманчивым рассмотреть задачу о переносе излучения в системе отсчета, движущейся вместе со средой.

Есть два веских довода за использование системы отсчета, движущейся вместе с веществом. 1) С точки зрения того, как выглядит уравнение переноса, здесь имеется то преимущество, что в сопутствующей системе и коэффициент поглощения, и коэффициент излучения *не зависят от углов*. Далее, при решении задач с учетом частичного перераспределения можно пользоваться стандартными

функциями перераспределения (относящимися к *неподвижной среде*). Кроме того, при вычислении интегралов, описывающих рассеяние, достаточно рассматривать лишь такую полосу частот, которая целиком охватывала бы профиль поглощения в линии. Ширина этой полосы *не зависит* от скорости вещества. Наконец, квадратурная формула по углу может выбираться, исходя лишь из того, каково *угловое* распределение излучения. 2) Газодинамические расчеты для сферически-симметричных течений (например, расчеты пульсаций, расширения) могут выполняться с высокой точностью в *лагранжевой системе координат* (т.е. в сопутствующей системе). Лагранжевы уравнения газодинамики легко формулируются, и с физической, и с расчетной точек зрения они обладают многими достоинствами. Ясно, что было бы хорошо научиться и поля излучения рассматривать близким к этому способом. С другой стороны, при пользовании сопутствующей системой есть та трудность, что имеющиеся сейчас методы решения пригодны только для сравнительно простых видов движений, так как иначе постановка граничных условий становится очень трудной (см. ниже упражнение 14.12).

Нами в сопутствующей системе будут выведены 1) *монохроматическое уравнение переноса*, которое используется, например, для расчета профилей линий, и 2) *проинтегрированные по частоте моментные уравнения*, которыми определяются суммарные вклады, даваемые излучением в энергию, импульс и давление в сплошной среде, состоящей из газа и излучения.

Чтобы получить выражения, описывающие изменение фигурирующих в задаче физических величин при переходе от покоящейся к сопутствующей системе отсчета, применяется преобразование Лоренца. Здесь мы сталкиваемся с трудностью: строго говоря, преобразование Лоренца применимо, только если скорость v одной системы относительно другой *не зависит от координат и от времени*. Однако в случае звездных атмосфер мы имеем дело с таким положением, когда $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r, t)$, и, следовательно, сопутствующая система отсчета *не является инерциальной*. Поэтому приходится рассматривать преобразования, описывающие переход из равномерно движущихся систем, которые совпадают в *данный момент времени* с движущейся средой. Указанная только что трудность делает анализ значительно более сложным. Легко показать, что уравнение переноса в двух *равномерно* движущихся системах имеет один и тот же вид (т.е. оно *ковариантно*), если при расчете атомных характеристик производится учет эффекта Доплера и абберрации. Не со-

ставляет труда и установление того, как при таком преобразовании изменяются атомные характеристики. Однако для *нестационарных* и для *стационарных дифференциальных течений* в уравнениях появляются *новые члены*, которые по сути дела учитывают *изменения* в преобразованиях Лоренца от одной точки среды к другой. Эти члены можно получить путем применения дифференциального оператора уравнения переноса $c^{-1}\partial/\partial t + \mathbf{n} \cdot \nabla$ к коэффициенту преобразования удельной интенсивности.

ПЕРЕХОД К ЛОКАЛЬНОЙ ЧАСТОТЕ

Прежде чем приступить к детальному обсуждению преобразования физических переменных, входящих в уравнение переноса, стоит попытаться простейшим возможным способом составить общее представление о физических особенностях рассматриваемой задачи. Макроскопические движения ведут к появлению *доплеровских смещений* частоты фотонов и *абберации*, а также вызывают *адвекцию*, состоящую в «увеличении» излучения движущейся средой. Формально все эти эффекты имеют порядок v/c . Однако в случае излучения в частотах линии влияние смещения частоты $\Delta\nu$ становится существенным не тогда, когда $\Delta\nu/\nu = v/c$ делается порядка единицы, а уже при $\Delta\nu/\Delta\nu_D = v/v_{\text{тепл}}$ порядка единицы. По существу, влияние эффекта Доплера усиливается в $c/v_{\text{тепл}}$ раз из-за быстрого изменения коэффициента поглощения в линии с частотой. Поэтому в первом приближении достаточно учитывать *только доплеровские смещения*, пренебрегая абберацией и адвекцией.

Если ν — частота излучения в системе наблюдателя, то соответствующая частота в сопутствующей системе равна $\nu_0 = \nu(1 - \mu v/c)$. В системе наблюдателя дифференциальный оператор $\mu\partial/\partial z$ (для стационарной плоскопараллельной атмосферы) действует при постоянной частоте ν . Однако если мы сместимся на расстояние Δz , сохраняя ν фиксированным, то изменится $\nu_0 = \nu_0(\nu, z)$, так как меняется скорость v . Поэтому $(\partial/\partial z)_\nu = (\partial/\partial z)_{\nu_0} + (\partial\nu_0/\partial z)_\nu (\partial/\partial\nu_0)_{\nu_0}$. Ясно, что $(\partial\nu_0/\partial z)_\nu = -(\nu_0\mu_0/c) \times (\partial\nu/\partial z)$ с точностью до членов порядка v/c . Подставляя эти выражения в уравнение переноса, получим тогда

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial I^0(z, \mu_0, \nu_0)}{\partial z} - \frac{\mu_0^2 \nu_0}{c} \frac{\partial \nu}{\partial z} \frac{\partial I^0(z, \mu_0, \nu_0)}{\partial \nu_0} = \\ = \eta^0(z, \nu_0) - \chi^0(z, \nu_0) I^0(z, \mu_0, \nu_0). \end{aligned} \quad (14.99)$$

Соответствующий результат для сферической геометрии имеет вид

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial I^0(r, \mu_0, \nu_0)}{\partial r} + \frac{1 - \mu_0^2}{r} \frac{\partial I^0(r, \mu_0, \nu_0)}{\partial \mu_0} - \frac{\nu_0 v}{cr} \left(1 - \mu_0^2 + \right. \\ \left. + \mu_0^2 \frac{d \ln v}{d \ln r} \right) \frac{\partial I^0(r, \mu_0, \nu_0)}{\partial \nu_0} = \eta^0(r, \nu_0) - \chi^0(r, \nu_0) I^0(r, \mu_0, \nu_0). \end{aligned} \quad (14.100)$$

Упражнение 14.8. Вывести уравнение (14.100).

В связи с уравнениями (14.99) и (14.100) следует отметить несколько моментов. 1) Все переменные — I , μ и ν — берутся здесь в *сопутствующей системе*, и в этой системе χ и η не зависят от углов. 2) Ясно, что при расчете всех членов, описывающих рассеяние, достаточно ограничиться определенной (малой) областью значений ν_0 . 3) Уравнение переноса является теперь уравнением в частных производных. Производная по частоте учитывает изменение с расстоянием частоты данного фотона ν_0 , которую видит внешний наблюдатель, при измерении ее в сопутствующей системе, или, что то же самое, — *смещение частоты фотонов, измеряемой в сопутствующей системе*. Допустим, в частности, что атмосфера *расширяется*, так что dv/dz (или dv/dg) больше нуля. Тогда видно, что при перемещении из одной точки атмосферы в другую фотоны всегда испытывают систематическое *красное смещение*, что интуитивно ясно. Заметим, что в случае плоской геометрии играют роль только *градиенты скорости*. В случае сферической геометрии указанный эффект имеет место даже при $v(r) = \text{const}$, так как расходимость лучей вызывает в этом случае появление *поперечного* градиента скорости. 4) С математической точки зрения уравнения (14.99) и (14.100) представляют собой уравнения *гиперболического типа* (см. [181], гл. 5; [530], гл. 9 и 12; [462], гл. 4), и для их решения необходимо задать *граничные условия по пространственным координатам и начальные условия по частоте*, т.е. необходимо решить *краевую задачу с некоторыми начальными условиями*. Численный метод решения этих уравнений будет рассмотрен ниже.

В уравнениях (14.99) и (14.100) отражены все *существенные* физические особенности задачи о *переносе* излучения, однако имеются дополнительные члены, содержащие зависимость от угловой переменной, которые мы опустили, когда пренебрегли абберацией и адвекцией. Чтобы получить эти члены (они играют важную роль в *гидродинамических уравнениях*), нам нужно исследовать, как соответствующие величины изменяются при преобразовании Лоренца.

ЛОРЕНЦ-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Будем рассматривать преобразования, описывающие переход от *покоящейся системы*, определяемой четырьмя координатами $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, ict)$, к *связанной со средой системе* (x_0, y_0, z_0, ict_0) , которая движется относительно покоящейся системы с постоянной скоростью v в направлении оси z . Такой выбор скорости является одним из физически наиболее важных для наших целей и ведет к упрощению вычислений. Обобщения на случай произвольной ориентации v даются в [621]. Переход из одной системы в другую осуществляется с помощью *преобразования Лоренца*, которое соответствует *собственному вращению* в четырехмерном пространстве-времени. С физической точки зрения преобразование Лоренца выбирается таким образом, что уравнение волнового фронта световой волны имеет в обеих системах *один и тот же вид (ковариантно)* (т.е. таково, что скорость света всегда равна c в обеих системах отсчета).

Преобразование Лоренца имеет следующую математическую форму: $x_0^\alpha = L_\beta^\alpha x^\beta$ ($\alpha = 1, \dots, 4$), причем здесь использовано эйнштейновское правило, что по повторяющимся индексам производится суммирование. Это преобразование описывается матрицей (см., например, [392], стр. 29, и [253], стр. 191)

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & i\beta\gamma \\ 0 & 0 & i\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix}, \quad (14.101)$$

где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ и $\beta = v/c$. Заметим, что матрица L — *эрмитова*, т.е. $L = L^+$, где «+» означает *эрмитово сопряжение* (т.е. комплексное сопряжение и транспонирование). Заметим также, что $L^{-1} = L^T$, где верхний индекс T означает обычное транспонирование. В матричных обозначениях $x_0 = Lx$, где x_0 и x — *векторы-столбцы*. Очевидно, что $x = L^{-1}x_0 = L^T x_0$, или, что эквивалентно, $x^\alpha = (L^{-1})_\beta^\alpha x_0^\beta$.

Преобразование Лоренца можно применять к любым 4-векторам и к любым 4-тензорам второго ранга. Правила преобразования тензорного анализа обеспечивают ковариантность этих величин относительно преобразования Лоренца (*так как* оно представляет собой *собственное вращение* в четырехмерном пространстве). Поэтому *физические законы, записанные через 4-векторы и 4-тензоры, являются ковариантными автоматически*.

Преобразование произвольного *контравариантного* 4-вектора $\mathbf{A}$ [например, пространственно-временного приращения $(\Delta x, \Delta y, \Delta z, ic\Delta t)^T$], определяется таким образом, что $A_0^\alpha = (\partial x_0^\alpha / \partial x^\beta) \times A^\beta = L_0^\alpha{}_\beta A^\beta$, или, в матричных обозначениях, $\mathbf{A}_0 = \mathbf{L}\mathbf{A}$, $\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{A}_0$. Преобразование *ковариантного* 4-вектора $\mathbf{B}$ (например, оператора градиента $[\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z, (ic)^{-1}\partial/\partial t]^T$) определяется формулой $(B_0)_\alpha = (\partial x^\beta / \partial x_0^\alpha) B_\beta = (L^{-1})^\beta{}_\alpha B_\beta$, которая в матричной записи эквивалентна формуле $\mathbf{B}_0^T = \mathbf{B}^T \mathbf{L}^{-1}$, или, после транспонирования, $\mathbf{B}_0 = (\mathbf{L}^{-1})^T \mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{B}$. Кроме того, $\mathbf{B} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{B}_0$. Наконец, преобразование контравариантного тензора второго ранга $C^{\alpha\beta}$ определяется формулой $C_0^{\alpha\beta} = L_0^\alpha{}_\gamma L_0^\beta{}_\delta C^{\gamma\delta}$, которая (в матричной форме) эквивалентна формуле $\mathbf{C}_0 = \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{L}^T = \mathbf{L} \mathbf{C} \mathbf{L}^{-1}$ (т.е. рассматриваемое преобразование есть преобразование *подобия*). Мы имеем также $\mathbf{C} = \mathbf{L}^T \mathbf{C}_0 \mathbf{L} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{C}_0 \mathbf{L}$. (Замечание: термин *ковариантный*, используемый при описании 4-вектора $\mathbf{B}$, имеет иной смысл, нежели тот, который имелся в виду двумя фразами раньше и относился к физическим законам, где он означал «того же самого вида». Этот двойной смысл слова «ковариантный», сколь он ни неудобен, является общеупотребительным.)

Располагая приведенными выше правилами преобразований, мы можем теперь вывести ряд важных результатов. Прежде всего, применяя преобразование к самим координатам, легко показать, что относительное движение двух систем отсчета не влияет на длину отрезков, перпендикулярных к оси z , т.е. $\Delta x_0 = \Delta x$ и $\Delta y_0 = \Delta y$. Однако объект длиной Δz , покоящийся в неподвижной системе, согласно измерениям, выполненным наблюдателем в движущейся системе, будет иметь длину

$$\Delta z_0 = \gamma^{-1} \Delta z. \quad (14.102a)$$

Этот результат выражает знаменитый *эффект сокращения Лоренца — Фицджеральда*. Аналогичным образом временной интервал Δt , измеренный в неподвижной системе, по измерениям, выполненным наблюдателем в движущейся системе, будет равен

$$\Delta t_0 = \gamma \Delta t. \quad (14.102b)$$

Эта формула выражает *эффект замедления времени*. Из этих результатов мы заключаем, что элемент объема пространства-времени *инвариантен*, т.е.

$$dV dt = dV_0 dt_0. \quad (14.103)$$

Этот результат будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Далее, применяя преобразование Лоренца к 4-градиенту (являющемуся ковариантным вектором), получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{1}{ic} \frac{\partial}{\partial t} \right) = \\ & = \left[\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial y_0}, \gamma \left(\frac{\partial}{\partial z_0} - \frac{\beta}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} \right), \frac{\gamma}{ic} \left(\frac{\partial}{\partial t_0} - c\beta \frac{\partial}{\partial z_0} \right) \right] \end{aligned} \quad (14.104)$$

Обратимся теперь к преобразованию величин, характеризующих излучение и его перенос (дальнейшие сведения об этом можно найти в [521], [551] и [621]). Для произвольной частицы 4-импульс $P^\alpha = (p_x, p_y, p_z, iE/c)^\Gamma$, где p_j — j -й компонент обычного импульса и E — полная энергия частицы. Если частица имеет массу покоя m_0 , то $p^2 c^2 + (m_0 c^2)^2 = E^2$, где $p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$. Для фотонов $m_0 = 0$ и $E = h\nu$, поэтому $p = h\nu/c$ и

$$P^\alpha = (h\nu/c)(n_x, n_y, n_z, i)^\Gamma = (h\nu/c)(\mathbf{n}, i)^\Gamma. \quad (14.105)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор направления распространения фотона и $(n_x, n_y, n_z) = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$. Применяя преобразование Лоренца к выражению (14.105), находим

$$(\nu_0 n_x^0, \nu_0 n_y^0, \nu_0 n_z^0, i\nu_0) = [\nu n_x, \nu n_y, \nu \gamma(n_z - \beta), i\nu \gamma(1 - n_z \beta)], \quad (14.106)$$

что эквивалентно следующему:

$$\begin{aligned} [\phi_0; (1 - \mu_0^2)^{1/2}; \mu_0; \nu_0] &= [\phi; \gamma^{-1}(1 - \mu^2)^{1/2}/(1 - \mu\beta); \\ &(\mu - \beta)/(1 - \mu\beta); \nu \gamma(1 - \mu\beta)]. \end{aligned} \quad (14.107)$$

Обратное преобразование дает

$$\begin{aligned} [(1 - \mu^2)^{1/2}; \mu; \nu] &= [\gamma^{-1}(1 - \mu_0^2)^{1/2}/(1 + \mu_0\beta); (\mu_0 + \beta)/(1 + \mu_0\beta); \\ &\nu_0 \gamma(1 + \mu_0\beta)]. \end{aligned} \quad (14.108)$$

Соотношения (14.106) — (14.108) выражают хорошо известные результаты, касающиеся доплеровского смещения и абберации. Классические результаты можно из них получить, удерживая только члены $O(v/c)$ т.е. полагая $\gamma = 1$. Из равенств (14.107) и (14.108) легко видеть, что $d\nu_0 = (\nu_0/\nu)d\nu$ и $d\mu_0 = (\nu/\nu_0)^2 d\mu$. Отсюда, пользуясь тем, что $d\omega = \sin \theta d\theta d\phi = d\mu d\phi$, находим

$$\nu d\nu d\omega = \nu_0 d\nu_0 d\omega_0. \quad (14.109)$$

Чтобы выяснить трансформированные свойства удельной интенсивности, найдем [621] число фотонов в интервале частот $d\nu$, проходящих за время dt через площадку dS , ориентированную перпен-

дикулярно к оси z , в телесном угле $d\omega$ вблизи направления, составляющего с осью z угол $\theta = \arccos \mu$. Предположим, что площадка dS неподвижна в покоящейся системе. Тогда

$$N = [I(\mu, \nu)/h\nu] d\omega d\nu dS \cos \theta dt.$$

Эта величина должна совпадать с числом фотонов, проходящих через ту же элементарную площадку, которое насчитал бы наблюдатель из движущейся системы, а именно

$$N_0 = [I^0(\mu_0, \nu_0)/h\nu_0] d\omega_0 d\nu_0 \times (dS \cos \theta_0 dt_0 + c^{-1} dS \nu dt_0).$$

Здесь первое слагаемое дает то число фотонов, которое получилось бы, если бы площадка dS была неподвижна в сопутствующей системе, а второе представляет собой концентрацию фотонов $I^0/h\nu_0 c$, умноженную на объем $dS \nu dt_0$, заметаемый площадкой dS за время dt_0 . Используя соотношения (14.102), (14.108) и (14.109), находим, что

$$I(\mu, \nu) = (\nu/\nu_0)^3 I^0(\mu_0, \nu_0). \quad (14.110)$$

Рассмотрим, далее, коэффициент излучения. Число фотонов, испускаемых данным объемом за заданный промежуток времени в заданном телесном угле и интервале частот, должно быть в обеих системах одинаково. Поэтому

$$(\eta, d\omega d\nu dV dt)/h\nu = (\eta^0, d\omega_0 d\nu_0 dV_0 dt_0)/h\nu_0,$$

откуда следует, что

$$\eta(\mu, \nu) = (\nu/\nu_0)^2 \eta^0(\nu_0) \quad (14.111)$$

(здесь явным образом указано, что η в сопутствующей системе не зависит от углов). Чтобы энергетический баланс имел место в любой системе отсчета, необходимо, чтобы скорость потерь энергии на излучение равнялась темпу ее поглощения. Поэтому, пользуясь соотношениями (14.110) и (14.111), заключаем, что

$$\chi(\mu, \nu) = (\nu_0/\nu) \chi^0(\nu_0). \quad (14.112)$$

Наконец, для двух систем отсчета, равномерно движущихся друг относительно друга, дифференциальный оператор уравнения переноса, согласно (14.104) и (14.106), преобразуется при переходе из одной из них в другую следующим образом:

$$c^{-1} \partial/\partial t + \mathbf{n} \cdot \nabla = (\nu_0/\nu) [c^{-1} \partial/\partial t_0 + \mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0]. \quad (14.113)$$

Теперь уже можно показать, что уравнение переноса действительно

ковариантно, поскольку из соотношения (14.110) — (14.113) следует, что уравнение

$$c^{-1}\partial I_\nu/\partial t + (\mathbf{n} \cdot \nabla)I_\nu = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu \quad (14.114a)$$

переходит в следующее:

$$\begin{aligned} (\nu_0/\nu)(c^{-1}\partial/\partial t_0 + \mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0)(\nu/\nu_0)^3 I^0(\mu_0, \nu_0) = \\ = (\nu/\nu_0)^2 [\eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) I^0(\mu_0, \nu_0)]. \end{aligned}$$

Если ν/ν_0 *постоянно*, как это будет, когда две рассматриваемые системы отсчета движутся *равномерно* друг относительно друга (и *только* тогда), это уравнение можно переписать следующим образом:

$$[c^{-1}\partial/\partial t_0 + (\mathbf{n}^0 \cdot \nabla^0)] I^0(\mu_0, \nu_0) = \eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) I^0(\mu_0, \nu_0). \quad (14.114б)$$

Уравнения (14.114a) и (14.114б), очевидно, имеют одну и ту же форму. Следует отметить два момента. а) Несмотря на сходный вид двух указанных уравнений, уравнение (14.114б) (для покоящейся относительно среды системы отсчета) на самом деле гораздо проще, так как $\eta^0(\nu_0)$ и $\chi^0(\nu_0)$ не зависят от углов. б) Уравнение (14.114a) не приводится к уравнению (14.114б), если две рассматриваемые системы движутся *неравномерно* друг относительно друга, т.е. это уравнение неприменимо, скажем, для расширяющихся или пульсирующих атмосфер.

Один из способов преодоления упомянутой выше трудности состоит в том, что описываемые дифференциальным оператором члены, учитывающие прямые пролеты, а также интенсивность излучения по-прежнему записываются в системе отсчета наблюдателя, а для записи членов, описывающих рождение и гибель фотонов, используются разложения первого порядка в сопутствующей системе ([521], гл. 6). Тогда, используя соотношения (14.111), (14.112) и (14.107), можно написать

$$\begin{aligned} (c^{-1}\partial/\partial t + \mathbf{n} \cdot \nabla) I(\mu, \nu) = \eta^0(\nu) - \chi^0(\nu) I(\mu, \nu) + \\ + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c) \{ 2\eta^0(\nu) - \nu \partial \eta^0/\partial \nu + [\chi^0(\nu) + \nu \partial \chi^0/\partial \nu] I(\mu, \nu) \}. \quad (14.115) \end{aligned}$$

Такой подход может оказаться достаточно точным для *континуумов*, где производные по частоте хорошо определены и почти постоянны, однако для *линий* его точность слишком мала, так как η_ν и χ_ν меняются настолько быстро, что разложений первого порядка недостаточно. Сложность применения уравнения (14.115) состоит в том, что в его правой части имеются как четные, так и нечетные по μ члены. Поэтому обычное сведение к уравнению второго по-

рядка невозможно. Тем не менее, используя специальным образом выбранную сетку, удастся построить удовлетворительную численную схему (см., например, [460]).

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МОМЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Полные плотность энергии, поток энергии и давление излучения в данном месте определяются следующими проинтегрированными по частоте величинами [см. формулы (1.7), (1.19), (1.28)]:

$$E_R(\mathbf{r}, t) = c^{-1} \int_0^\infty d\nu \oint d\omega I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t), \quad (14.116a)$$

$$\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty d\nu \oint d\omega I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) \mathbf{n}, \quad (14.116b)$$

$$P(\mathbf{r}, t) = c^{-1} \int_0^\infty d\nu \oint d\omega I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) \mathbf{n} \mathbf{n}. \quad (14.116b)$$

Они связаны между собой проинтегрированными по частоте моментными уравнениями [см. уравнения (2.75) и (2.68)]

$$c^{-2} \partial \vec{\mathcal{E}} / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{P} = c^{-1} \int_0^\infty d\nu \oint d\omega [\eta(\mathbf{r}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \nu, t)] \mathbf{n} \quad (14.117a)$$

и

$$\partial E_R / \partial t + \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \int_0^\infty d\nu \oint d\omega [\eta(\mathbf{r}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \nu, t)]. \quad (14.117b)$$

Уравнения (14.117) в выписанном здесь виде уже являются ковариантными. Один из способов, которым это можно легко показать, состоит в использовании результатов теории электромагнитного поля, в которой показывается (см., например, [331], гл. 12, [386], гл. 4, или [494], гл. 21), что законы сохранения энергии-импульса в электродинамике можно записать в ковариантной форме:

$$\partial T^{\alpha\beta} / \partial x^\beta = -f^\alpha. \quad (14.118)$$

Здесь $T^{\alpha\beta}$ — тензор энергии-импульса электромагнитного поля, а f^α — 4-вектор, дающий (в расчете на единичный объем) три компонента силы Лоренца, действующей со стороны поля на заряженную материю и умноженной на i/c производную по времени от работы, совершаемой полем над зарядами и токами. Тензор энергии-

импульса представляет собой контравариантный 4-тензор второго ранга, а именно

$$T = \begin{pmatrix} -T^M & ic\mathbf{G} \\ ic\mathbf{G} & -W \end{pmatrix}; \quad (14.119)$$

где T^M — максвелловский тензор напряжений (см. § 1.5), $\mathbf{G}$ — плотность импульса и W — плотность энергии поля.

В гл. 1 было показано, что между характеристиками электромагнитного поля и моментами интенсивности излучения можно установить однозначное соответствие, а именно $T^M = -P$, $\mathbf{G} = c^{-2}\vec{\mathcal{P}}$ и $W = E_R$. Поэтому заключаем, что тензор энергии-импульса поля излучения должен быть равен

$$R = \begin{pmatrix} P & ic^{-1}\vec{\mathcal{P}} \\ ic^{-1}\vec{\mathcal{P}} & -E_R \end{pmatrix} = c^{-1} \begin{pmatrix} \int d\nu \oint d\omega I n n & i \int d\nu \oint d\omega I n \\ i \int d\nu \oint d\omega I n & - \int d\nu \oint d\omega I \end{pmatrix}. \quad (14.120)$$

Нетрудно непосредственно убедиться, что R действительно является 4-тензором. Для этого достаточно заметить, что он образован из внешнего произведения 4-вектора $(\nu n, i\nu)$ [см. (14.105)] самого на себя, умноженного на инвариант $I d\nu d\omega / \nu^2$ [см. соотношения (14.109) и (14.110)], и результат проинтегрирован по всем углам и частотам. Аналогично силу Лоренца можно отождествить с той скоростью, с которой импульс передается от излучения к веществу, а производную по времени от работы — со скоростью подвода энергии излучения к веществу. Поэтому заключаем, что величина

$$\mathbf{g}_R = c^{-1} [\int d\nu \oint d\omega (\chi I - \eta) \mathbf{n}, i \int d\nu \oint d\omega (\chi I - \eta)] \quad (14.121)$$

представляет собой 4-вектор. Чтобы убедиться, что это так, заметим, что вектор $\mathbf{g}_R$ составлен из 4-вектора $(\nu n, i\nu)$, умноженного на инварианты $\chi I d\nu d\omega / \nu$ или $\eta d\nu d\omega / \nu$. Дивергенция 4-тензора есть автоматически 4-вектор. Поэтому уравнение

$$\partial R^{\alpha\beta} / \partial x^\beta = -g_R^\alpha \quad (14.122)$$

действительно является ковариантным представлением законов сохранения для поля излучения. Нетрудно видеть, что соотношение (14.122) дает уравнение (14.117а) и умноженное на $-ic$ уравнение (14.117б) и что поэтому эти уравнения имеют одну и ту же форму в системах отсчета, *равномерно* движущихся друг относительно друга. При неравномерном движении в моментных уравнениях, записан-

ных в сопутствующей системе отсчета, появляются дополнительные члены.

Для работы с уравнениями радиационной гидродинамики (§ 15.3) полезно иметь формулы преобразования E_R , $\vec{\mathcal{S}}$ и P (или, что эквивалентно, J , H и K) при переходе из неподвижной в сопутствующую систему отсчета, записанные с точностью до членов $O(v/c)$. Эти формулы проще всего получить, пользуясь соотношениями (14.109), (14.110) и (14.107) и выполнив в них разложение до членов первого порядка по v/c . Так, полагая $\gamma = 1$, без труда находим, что $I_\nu^0 d\nu_0 d\omega_0 = (\nu_0/\nu)^2 I_\nu d\nu d\omega \approx (1 - 2\beta\mu) I_\nu d\nu d\omega$, откуда следует, что

$$J^0 = J - 2\beta H. \quad (14.123a)$$

Аналогично

$$I_\nu^0 \mu_0 d\nu_0 d\omega_0 = (\mu - \beta)(1 - \mu\beta) I_\nu d\nu d\omega \approx [\mu - \beta(1 + \mu^2)] I_\nu d\nu d\omega,$$

$$I_\nu^0 \mu_0^2 d\nu_0 d\omega_0 = (\mu - \beta)^2 I_\nu d\nu d\omega \approx (\mu^2 - 2\mu\beta) I_\nu d\nu d\omega,$$

откуда следует, что

$$H^0 = H - \beta(J + K) \quad (14.123б)$$

и

$$K^0 = K - 2\beta H. \quad (14.123в)$$

Обратные формулы перехода имеют вид

$$(J, H, K) = [J^0 + 2\beta H^0, H^0 + \beta(J^0 + K^0), K^0 + 2\beta H^0]. \quad (14.124)$$

Заметим, что эти формулы перехода справедливы только для моментов, проинтегрированных по частоте.

Упражнение 14.9. Вывести соотношения (14.123) и (14.124), применяя преобразование Лоренца к тензору энергии-импульса [формула (14.120)] и разлагая результат с точностью до членов $O(v/c)$.

УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА В СОПУТСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Полное преобразование уравнения переноса (включая дифференциальный оператор) в случае неоднородного поля скоростей можно выполнить вполне строго, используя ковариантное дифференцирование [399], [135], [278]. Однако этот подход требует основательного знакомства с тензорным исчислением. Вместо этого мы применим простой метод, основанный на использовании разложений первого порядка. Он дает результаты с точностью до членов

$O(v/c)$. Уравнения переноса, которые будут рассматриваться, имеют вид (для плоской и сферической геометрии соответственно)

$$(c^{-1}\partial/\partial t + \mu\partial/\partial r)[(\nu/\nu_0)^3 I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0)] = \\ = (\nu/\nu_0)^2 [\eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0)] \quad (14.125a)$$

и

$$[c^{-1}\partial/\partial t + \mu\partial/\partial r + r^{-1}(1 - \mu^2)\partial/\partial \mu][(\nu/\nu_0)^3 I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0)] = \\ = (\nu/\nu_0)^2 [\eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0)]. \quad (14.125b)$$

Будем рассматривать одномерные течения. Применим *локальное* преобразование Лоренца к системе отсчета, которая в *данный момент времени* неподвижна относительно движущейся среды. Будем пренебрегать членами $O(v^2/c^2)$ и положим поэтому $\gamma = 1$. Тогда имеем

$$r_0 = r, \quad (14.126a)$$

$$ct_0(r, t) = ct - c^{-1} \int_0^r v(r', t) dr'. \quad (14.126b)$$

Согласно соотношению (14.126a), пространственные приращения для наблюдателей в обеих системах отсчета будут одними и теми же (т.е. лоренцевского сокращения нет). Соотношение (14.126b) является следствием конечности скорости распространения света и выражает классический *эффект запаздывания*. [Смысл этого термина можно полнее понять из следующего мысленного эксперимента. Предположим, что часы, расположенные в ряде пунктов вокруг некоторой точки r_1 в неподвижной системе отсчета, в начальный момент времени были синхронизированы. Предположим, далее, что в некоторый момент времени t_1 из всех этих пунктов одновременно посылаются импульсы света, принимаемые а) наблюдателем, *покоящимся* в r_1 , и б) наблюдателем в r_1 , движущимся со скоростью v . Наблюдателя (а) импульсы достигнут синхронно, тогда как к наблюдателю (б) импульсы из точек с $r > r_1$ придут раньше, чем из точек с $r < r_1$. Поэтому он придет к выводу, что из точек с $r > r_1$ импульс был излучен в более ранний момент (t_0), чем из точек с $r < r_1$, как это и следует из формулы (14.126b) (для простоты рассматривается случай $v = \text{const}$).] Эффект запаздывания в каком-то смысле *не является релятивистским*. Он есть *прямое следствие конечности скорости распространения света*. С релятивистской точки зрения он, конечно, имеет глубокий смысл.

Чтобы вычислить производные в уравнениях (14.125), применим

цепное правило:

$$\frac{\partial}{\partial r} = \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_{\mu\nu t} = \left(\frac{\partial r_0}{\partial r} \right)_{\mu\nu t} \frac{\partial}{\partial r_0} + \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial r} \right)_{\mu\nu t} \frac{\partial}{\partial \mu_0} + \\ + \left(\frac{\partial \nu_0}{\partial r} \right)_{\mu\nu t} \frac{\partial}{\partial \nu_0} + \left(\frac{\partial t_0}{\partial r} \right)_{\mu\nu t} \frac{\partial}{\partial t_0}, \quad (14.127a)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} = \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \right)_{r\nu t} = \left(\frac{\partial r_0}{\partial \mu} \right)_{r\nu t} \frac{\partial}{\partial r_0} + \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial \mu} \right)_{r\nu t} \frac{\partial}{\partial \mu_0} + \\ + \left(\frac{\partial \nu_0}{\partial \mu} \right)_{r\nu t} \frac{\partial}{\partial \nu_0} + \left(\frac{\partial t_0}{\partial \mu} \right)_{r\nu t} \frac{\partial}{\partial t_0}, \quad (14.127б)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{r\mu\nu} = \left(\frac{\partial r_0}{\partial t} \right)_{r\mu\nu} \frac{\partial}{\partial r_0} + \left(\frac{\partial \mu_0}{\partial t} \right)_{r\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \mu_0} + \\ + \left(\frac{\partial \nu_0}{\partial t} \right)_{r\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \nu_0} + \left(\frac{\partial t_0}{\partial t} \right)_{r\mu\nu} \frac{\partial}{\partial t_0}. \quad (14.127в)$$

Используем, далее, разложения первого порядка $\nu/\nu_0 = 1 + \beta\mu_0$, $\nu_0/\nu = 1 - \beta\mu$, $\mu_0 = (\mu - \beta)(1 - \beta\mu)^{-1}$ и $\mu = (\mu_0 + \beta)(1 + \beta\mu_0)^{-1}$ и сделаем дополнительное предположение, что ускорения (для установившегося течения тождественно равные нулю) настолько малы, что изменение любого компонента скорости за время пролета фотоном средней длины свободного пробега пренебрежимо мало по сравнению с самой скоростью. Поэтому пренебрегаем производной $\partial v/\partial t$ и производными вида $\partial x_0/\partial t$ при $x_0 = r_0$, μ_0 и ν_0 и сохраняем только $\partial t_0/\partial t = 1$. Остальные коэффициенты в выражениях (14.127) с точностью до членов $O(v/c)$ легко найти из формул (14.126) и выписанных выше разложений первого порядка. В результате находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} \right)_{\mu\nu t} (r_0, \mu_0, \nu_0, t_0) = [1, c^{-1}(\mu_0^2 - 1)(\partial v/\partial r_0), \\ - c^{-1}\mu_0\nu_0(\partial v/\partial r_0), -\beta/c], \quad (14.128a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mu} \right)_{r\nu t} (r_0, \mu_0, \nu_0, t_0) = [0, (1 + 2\mu_0\beta), -\nu_0\beta, 0]. \quad (14.128б)$$

Будем исходить из уравнения (14.125a), с учетом указанного выше приближения, переписанного в виде

$$\{(\nu/\nu_0)(c^{-1}\partial/\partial t + \mu\partial/\partial r) + 3\mu[\partial(\nu/\nu_0)/\partial r]\} I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0) = \\ = \eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0).$$

Подставляя сюда выражения (14.127), (14.128) и разложения первого порядка для ν/ν_0 и т.д. и удерживая только члены первого порядка по v/c , получаем

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} + \left(\mu_0 + \frac{v}{c} \right) \frac{\partial}{\partial r_0} + \frac{\mu_0(\mu_0^2 - 1)}{c} \frac{\partial v}{\partial r_0} \frac{\partial}{\partial \mu_0} - \frac{\nu_0 \mu_0^2}{c} \frac{\partial v}{\partial r_0} \frac{\partial}{\partial \nu_0} + \frac{3\mu_0^2}{c} \frac{\partial v}{\partial r_0} \right] I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0) = \eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0). \quad (14.129)$$

При сферической геометрии имеется дополнительный член

$$(\nu_0/v)^2 r^{-1} (1 - \mu^2) (\partial/\partial \mu) [(\nu/\nu_0)^3 I^0] = = (\nu/\nu_0) r^{-1} (1 - \mu^2) (\partial I^0/\partial \mu) + 3r^{-1} (1 - \mu^2) [\partial(\nu/\nu_0)/\partial \mu] I^0.$$

Выполняя и здесь разложение до членов первого порядка по v/c и используя вытекающее из формулы (14.107) соотношение $\nu^2(1 - \mu^2) = \nu_0^2(1 - \mu_0^2)$, а также то, что $\partial(\nu/\nu_0)/\partial \mu = v/c$, для этих дополнительных членов получаем следующее выражение:

$$r_0^{-1} (1 - \mu_0^2) \{ [(1 + \beta \mu_0) (\partial/\partial \mu_0) - \beta \nu_0 (\partial/\partial \nu_0)] + 3\beta \} I^0.$$

Таким образом, в случае сферической геометрии уравнение переноса, записанное в сопутствующей системе отсчета, с точностью до членов $O(v/c)$ имеет вид

$$\left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} + \left(\mu_0 + \frac{v}{c} \right) \frac{\partial}{\partial r_0} + \frac{1 - \mu_0^2}{r_0} \left[1 + \frac{\mu_0 v}{c} \left(1 - \frac{d \ln \nu}{d \ln r_0} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \mu_0} - \frac{\nu_0 v}{c r_0} \left[1 - \mu_0^2 \left(1 - \frac{d \ln \nu}{d \ln r_0} \right) \right] \frac{\partial}{\partial \nu_0} + \frac{3v}{c r_0} \left[1 - \mu_0^2 \left(1 - \frac{d \ln \nu}{d \ln r_0} \right) \right] \right\} \times \\ \times I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0) = \eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) I(r_0, \mu_0, \nu_0, t_0). \quad (14.130)$$

Упражнение 14.10. Дать подробный вывод уравнений (14.129) и (14.130).

Уравнения (14.129) и (14.130) представляют собой уравнения в сопутствующей системе, записанные с учетом *всех членов* $O(v/c)$. Впервые они были последовательно выведены Кастором [135]. Производная по времени, входящая в эти уравнения, берется, по существу, все еще в неподвижной системе отсчета (хотя при этом учитывается запаздывание). *Лагранжева* производная по времени, которая вычисляется в системе, движущейся вместе с элементом

среды (см. § 15.1), состоит из двух членов: $D/Dt = \partial/\partial t + (v/c)\partial/\partial r$, причем второй член описывает *адвекцию*. Для *установившихся* течений члены, содержащие $\partial/\partial t$, тождественно равны нулю. Выведенные только что уравнения имеют довольно сложный вид. Как мы увидим, в *моментных уравнениях* важно сохранять все члены. Однако при решении самого *уравнения переноса* для большинства течений, встречающихся в астрофизике, достаточно удерживать (как это показывают детальные расчеты [446]) *только члены с производной по частоте*, поскольку, как об этом говорилось ранее, эти члены как бы усилены в $c/v_{\text{тепл}}$ раз. В этом предельном случае уравнение (14.129) для *установившегося* течения переходит в уравнение (14.99), а уравнение (14.130) — в (14.100). Метод численного решения уравнения (14.100) будет описан в следующем разделе.

Для задач о переносе излучения при частичном перераспределении полезно вывести из уравнений (14.129) и (14.130) моментные уравнения с зависимостью от частоты. В случае сферической геометрии для нулевого момента получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial J_\nu^0}{\partial t} + \frac{v}{c} \frac{\partial J_\nu^0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 H_\nu^0)}{\partial r} + \frac{v}{cr} (3I_\nu^0 - K_\nu^0) + \frac{1}{c} (J_\nu^0 + K_\nu^0) \frac{\partial v}{\partial r} + \\ + \frac{v}{cr} \frac{\partial}{\partial \nu_0} [\nu_0 (3K_\nu^0 - J_\nu^0)] - \frac{1}{c} \left(\frac{2v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \frac{\partial(\nu_0 K_\nu^0)}{\partial \nu_0} = \\ = \eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) J_\nu^0, \quad (14.131a) \end{aligned}$$

для первого момента

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial H_\nu^0}{\partial t} + \frac{v}{c} \frac{\partial H_\nu^0}{\partial r} + \frac{\partial K_\nu^0}{\partial r} + \frac{1}{r} (3K_\nu^0 - J_\nu^0) + \frac{2}{c} \left(\frac{v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) H_\nu^0 + \\ + \frac{v}{cr} \frac{\partial}{\partial \nu_0} [\nu_0 (3N_\nu^0 - H_\nu^0)] - \frac{1}{c} \left(\frac{2v}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} \right) \frac{\partial(\nu_0 N_\nu^0)}{\partial \nu_0} = \\ = -\chi^0(\nu_0) H_\nu^0, \quad (14.131b) \end{aligned}$$

где

$$N_\nu^0 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I^0(r_0, \mu_0, \nu_0, t) \mu_0^3 d\mu_0, \quad (14.132)$$

для краткости пишется J_ν^0 вместо $J^0(r, \nu_0, t)$ и т.д. и у r и t опущен нижний индекс 0. При практическом решении задач о переносе излучения для установившихся течений вместо (14.131a) и (14.132b)

достаточно пользоваться уравнениями

$$r^{-2} \partial(r^2 H_\nu^0) / \partial r - a [\partial(J_\nu^0 - K_\nu^0) / \partial \nu_0 + b (\partial K_\nu^0 / \partial \nu_0)] = \\ = \eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) J_\nu^0 \quad (14.133a)$$

и

$$\partial K_\nu^0 / \partial r + r^{-1} (3K_\nu^0 - J_\nu^0) - a [\partial(H_\nu^0 - N_\nu^0) / \partial \nu_0 + b \partial N_\nu^0 / \partial \nu_0] = \\ = -\chi^0(\nu_0) H_\nu^0, \quad (14.133b)$$

где $a = \nu_0 v / cr$ и $b = d \ln v / d \ln r$ (см. [447]).

Для решения задач радиационной гидродинамики нужно иметь моментные уравнения, проинтегрированные по частоте. Они следуют непосредственно из уравнений (14.131):

$$\partial E_R^0 / \partial t + v \partial E_R^0 / \partial r + r^{-2} \partial(r^2 \mathcal{F}^0) / \partial r + \\ + (v/r) (3E_R^0 - p_R^0) + (\partial v / \partial r) (E_R^0 + p_R^0) = \\ = 4\pi \int_0^\infty [\eta^0(\nu_0) - \chi^0(\nu_0) J_\nu^0] d\nu_0, \quad (14.134a)$$

$$c^{-2} \partial \mathcal{F}^0 / \partial t + (v/c^2) \partial \mathcal{F}^0 / \partial r + \partial p_R^0 / \partial r + (3p_R^0 - E_R^0)/r + \\ + (2v/c^2 r) (1 + d \ln v / d \ln r) \mathcal{F}^0 = -c^{-1} \int_0^\infty \chi^0(\nu_0) \mathcal{F}_\nu^0 d\nu_0, \quad (14.134b)$$

где $E_R^0 = (4\pi/c) \int J^0(\nu_0) d\nu_0 \equiv (4\pi/c) J^0$ и $p_R^0 \equiv (4\pi/c) K^0$. Уравнения, совершенно аналогичные (14.131) — (14.134), можно выписать и для случая плоской геометрии. По сравнению с их аналогами в неподвижной системе отсчета [см. уравнения (14.117)] уравнения (14.134) содержат в левой части дополнительные члены, зависящие от скорости. Однако это усложнение более чем компенсируется огромным упрощением правой части, где изотропия поглощения и испускания в сопутствующей системе отсчета позволяет выразить интегралы через моменты в отличие от неподвижной системы, где они представляют собой двойные интегралы от удельной интенсивности. Единственный вопрос, на который остается ответить, состоит в том, как практически решать записанное в сопутствующей системе уравнение переноса для интенсивности $I^0(r, \mu_0, \nu_0)$ и для ее моментов.

РЕШЕНИЕ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Рассмотрим теперь методы решения уравнений переноса, записанных в сопутствующей системе отсчета, в том предельном слу-

чае, когда учитываются только доплеровские смещения, т.е. уравнений вида (14.99) и (14.100). Как уже говорилось ранее, уравнение переноса в сопутствующей системе представляет собой *дифференциальное уравнение в частных производных*. Впервые оно было получено Мак-Кри и Митрой [414]. Чандрасекар [156], [157] получил решения этих уравнений в случае плоской геометрии для линейного закона изменения скорости и строго когерентного рассеяния, используя двухпотокное описание поля излучения. Обобщения этого подхода даются в [1]; [2]; [3]; [276], стр. 199. Люси [403] решил уравнения переноса при плоской геометрии и когерентном рассеянии для предельного случая больших скоростей, пренебрегая *пространственной* производной и рассматривая уравнение переноса как обыкновенное дифференциальное уравнение с производной только по частоте. Для случая плоской геометрии предложен также метод, основанный на использовании интегрального уравнения [574]. Этот метод применим только при линейном изменении скорости и поэтому для реалистичных моделей не годится. Общий и гибкий численный метод, развитый Нордлингером и Райбики [478], позволяет решать уравнения переноса в случае плоской геометрии, используя метод исключения, аналогичный методу Фотрие. Этим методом можно решать задачи о переносе излучения при частичном перераспределении. В случае сферической геометрии при использовании решения вдоль характеристик — отдельных лучей — число точек разбиения по углу должно быть того же порядка, что и по глубине, и метод решения, аналогичный методу Фотрие, требует больше машинного времени. Если предполагать *полное перераспределение*, то, как будет сейчас показано, можно построить эффективный алгоритм решения, аналогичный алгоритму Райбики [444]. При частичном перераспределении мы используем моментные уравнения [например, уравнения (14.133)], тем самым избавляясь от угловой переменной, а тогда метод решения, аналогичный методу Фотрие, опять становится эффективным [447].

В случае сферической геометрии будем пользоваться системой координат (p, z) , введенной в § 7.6. Тогда вдоль луча, который характеризуется постоянным p , уравнение (14.100) принимает вид

$$\begin{aligned} \pm \partial I^{\pm}(z, p, \nu) / \partial z - \tilde{\gamma}(z, p) \partial I^{\pm}(z, p, \nu) / \partial \nu = \\ = \eta(r, \nu) - \chi(r, \nu) I^{\pm}(z, p, \nu), \end{aligned} \quad (14.135)$$

где

$$\tilde{\gamma}(z, p) = [\nu v(r) / cr] (1 - \mu^2 + \mu^2 d \ln \nu / d \ln r) \quad (14.136)$$

и $r = (p^2 + z^2)^{1/2}$, $\mu = z/r$. В (14.135) и (14.136) для упрощения обозначений индекс 0 опущен (мы будем придерживаться этого до конца главы), но следует подчеркнуть, что все величины относятся к сопутствующей системе. Вводя, далее, оптическую глубину вдоль луча $d\tau(z, p, \nu) = -\chi(z, p, \nu)dz$ и переменные

$$u(z, p, \nu) = \frac{1}{2} [I^+(z, p, \nu) + I^-(z, p, \nu)] \quad (14.137)$$

и

$$v(z, p, \nu) = \frac{1}{2} [I^+(z, p, \nu) - I^-(z, p, \nu)], \quad (14.138)$$

из уравнения (14.135) можно получить систему

$$\partial u(z, p, \nu)/\partial \tau(z, p, \nu) + \gamma(z, p, \nu)\partial v(z, p, \nu)/\partial \nu = v(z, p, \nu), \quad (14.139)$$

$$\partial v(z, p, \nu)/\partial \tau(z, p, \nu) + \gamma(z, p, \nu)\partial u(z, p, \nu)/\partial \nu = u(z, p, \nu) - S(z, p, \nu), \quad (14.140)$$

где $\gamma(z, p, \nu) = \tilde{\gamma}(z, p)/\chi(z, p, \nu)$ и предполагается, что функция источников имеет вид, отвечающий эквивалентному двухуровневому атому и полному перераспределению, т.е.

$$S(z, p, \nu) = S(r(z, p), \nu) = \alpha(r, \nu)\bar{J}(r) + \beta(r).$$

Коэффициенты α и β выражаются через параметр термализации ε , отношение непрозрачностей χ_c/χ_l и профиль поглощения, а

$$\bar{J}(r) = \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} d\nu \phi(\nu) \int_0^1 d\mu u(z(r, \mu), p(r, \mu), \nu). \quad (14.141)$$

В выражении (14.141) $\nu_{\min}$ и $\nu_{\max}$ выбираются таким образом, чтобы был охвачен весь профиль линии (при наблюдении из сопутствующей системы). В связи с формулами (14.137) и (14.138) следует особо отметить, что поскольку используется сопутствующая система, то в данном случае I^+ и I^- можно усреднять при заданном значении ν в отличие от ситуации, которая имеет место при использовании системы отсчета наблюдателя [см. формулы (14.23) и (14.24)].

Теперь необходимо поставить граничные условия по пространственной переменной. На внешней границе ($r = R$) имеем $I^- = 0$. Поэтому $u = v$, и, следовательно,

$$\begin{aligned} [\partial u(z, p, \nu)/\partial \tau(z, p, \nu)]_{z_{\max}} + \gamma(z_{\max}, p, \nu)\partial u(z_{\max}, p, \nu)/\partial \nu = \\ = u(z_{\max}, p, \nu). \end{aligned} \quad (14.142)$$

В плоскости симметрии ($z = 0$) можно, далее, написать, что $v(0, p, \nu) = 0$. Поэтому для лучей, которые не пересекают ядра,

$$[\partial u(z, p, \nu)/\partial \tau(z, p, \nu)]_{z=0} = 0. \quad (14.143)$$

Для лучей, пересекающих ядро (т.е. для лучей с $p \leq r_c$), поступаем так. а) Если ядро непрозрачно (поверхность звезды), то применяем диффузионное приближение, что дает v . б) Если оболочка полая (случай туманности), то полагаем $v = 0$ (по симметрии).

Кроме того, нужно иметь начальное условие по частоте. Очевидно, что в случае расширяющейся атмосферы (т.е. атмосферы, у которой $v > 0$ и $dv/dr > 0$) фотоны в частотах линии, приходящие из любой другой точки атмосферы, не могут поглощаться вблизи высокочастотной границы профиля поглощения (в сопутствующей системе отсчета), потому что все они претерпели систематическое красное смещение. Все фотоны с частотой высокочастотного края профиля должны быть фотонами континуума. Чтобы получить требуемое начальное условие, мы можем поэтому либо а) решить уравнения (14.139) и (14.140) для континуума, пренебрегая членами с производной по частоте (что позволяет получить стандартную систему второго порядка), и определить таким образом $u(z, p, \nu_{\max}) = u_{\text{континуум}}$, либо б) задать производную $(\partial u/\partial \nu)_{\nu_{\max}}$ равной любому наперед заданному значению, определяемому наклоном континуума. В частности, если выбрать $\partial u/\partial \nu = 0$, то придем к тем же уравнениям, что и при принятии а).

Далее рассматриваемая система дискретизируется с использованием тех же узлов $\{r_d\}$, $\{p_i\}$, $\{z_{d_i}\}$, которые применялись в § 7.6 и 14.1. Узлы по частоте $\{\nu_n\}$ ($n = 1, \dots, N$) выбираются в данном случае в порядке убывания значений ($\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_N$), так как начальное условие относится к точке с наибольшей частотой. Заменим интеграл в формуле (14.141) квадратурной суммой

$$\bar{J}(r_d) = \sum_{n=1}^N w_n \sum_{i=1}^{I_d} a_{di} \phi(r_d, \nu_n) u(z(r_d, p_i), p_i, \nu_n). \quad (14.144)$$

Уравнения (14.139) и (14.140) заменяются разностными приближениями

$$(u_{d+1, in} - u_{din})/\Delta \tau_{d+1/2, in} = v_{d+1/2, in} + \delta_{d+1/2, i, n-1/2} (v_{d+1/2, in} - v_{d+1/2, i, n-1}) \quad (14.145)$$

и

$$(v_{d+1/2, in} - v_{d-1/2, in})/\Delta \tau_{din} = u_{din} - S_{din} + \delta_{di, n-1/2} (u_{din} - u_{di, n-1}), \quad (14.146)$$

где u ищется в узлах $z_d = z(r_d, p_i)$, так что $u_{din} = u(z_d, p_i, \nu_n)$, а v — в промежуточных точках $z_{d \pm 1/2} = \frac{1}{2}(z_d + z_{d \pm 1})$, так что $v_{d \pm 1/2, in} = v(z_{d \pm 1/2}, p_i, \nu_n)$. Кроме того, мы ввели обозначения

$$\chi_{d \pm 1/2, in} = \frac{1}{2}(\chi_{d \pm 1, in} + \chi_{din}), \quad (14.147)$$

$$\Delta\tau_{d \pm 1/2, in} = \chi_{d \pm 1/2, in} |z_d - z_{d \pm 1}|, \quad (14.148)$$

$$\Delta\tau_{din} = \frac{1}{2}(\Delta\tau_{d+1/2, in} + \Delta\tau_{d-1/2, in}) \quad (14.149)$$

и

$$\delta_{di, n-1/2} = \gamma_{din}/(\nu_{n-1} - \nu_n). \quad (14.150)$$

В форме подобных же разностных уравнений можно представить и граничные условия [444]. В уравнениях (14.145) и (14.146) для обеспечения устойчивости разность по частоте вычисляются неявным образом [444], [462], [530].

Уравнение (14.145) можно разрешить аналитически относительно $v_{d+1/2, in}$, что дает

$$v_{d+1/2, in} = [(u_{d+1, in} - u_{din})/\Delta\tau_{d+1/2, in} + \delta_{d+1/2, i, n-1/2} v_{d+1/2, i, n-1}]/(1 + \delta_{d+1/2, i, n-1/2}). \quad (14.151)$$

Представляя решение в виде векторов, определяющих, как интенсивность на данной частоте изменяется с глубиной вдоль определенного луча, т.е. вводя

$$\mathbf{u}_{in} = (u_{1in}, u_{2in}, \dots, u_{D_{bin}})^T \quad (14.152a)$$

и

$$\mathbf{v}_{in} = (v_{1/2, in}, \dots, v_{D_i-1/2, in})^T, \quad (14.152b)$$

можем переписать уравнение (14.151) в виде

$$\mathbf{v}_{in} = \mathbf{G}_{in} \mathbf{u}_{in} + \mathbf{H}_{in} \mathbf{v}_{i, n-1}, \quad (14.153)$$

где $\mathbf{G}$ — двухдиагональная, а $\mathbf{H}$ — диагональная матрица. Уравнения (14.151) можно использовать для исключения $v_{d \pm 1/2, in}$ из (14.146). В результате получим систему уравнений второго порядка для u_{din} , а именно

$$\{(u_{d+1, in} - u_{din})/[\Delta\tau_{d+1/2, in}(1 + \delta_{d+1/2, i, n-1/2})] - (u_{din} - u_{d-1, in})/[\Delta\tau_{d-1/2, in}(1 + \delta_{d-1/2, i, n-1/2})]\}/\Delta\tau_{din} =$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + \delta_{di, n-1/2})u_{din} - S_{din} - \delta_{di, n-1/2}u_{di, n-1} + \\
&+ [\delta_{d-1/2, i, n-1/2}(1 + \delta_{d-1/2, i, n-1/2})^{-1}v_{d-1/2, i, n-1} - \delta_{d+1/2, i, n-1/2} \times \\
&\quad \times (1 + \delta_{d+1/2, i, n-1/2})^{-1}v_{d+1/2, i, n-1}]/\Delta\tau_{din}. \quad (14.154)
\end{aligned}$$

Добавляя к уравнению (14.154) граничные условия, получаем систему

$$T_{in}u_{in} + U_{in}u_{i, n-1} + V_{in}v_{i, n-1} + W_{in}J = X_{in}, \quad (14.155)$$

где T_{in} — трехдиагональная, U_{in} и W_{in} — диагональные, а V_{in} — двухдиагональная матрица и X_{in} — вектор.

Упражнение 14.11. Проверить вывод уравнений (14.151) и (14.154) и понять общую структуру матриц G , U и V .

Чтобы решить полную систему, выберем определенный луч, характеризуемый данным значением p_i , и произведем интегрирование для каждой из частот по отдельности с n , меняющимся от 1 до N . Это можно осуществить, если заметить, что начальное условие по частоте влечет равенство нулю всех матриц U_{i1} , V_{i1} и H_{i1} . Поэтому можно получить выражения вида $u_{i1} = A_{i1} - B_{i1}J$ и $v_{i1} = C_{i1} - D_{i1}J$, где $A_{i1} = T_{i1}^{-1}X_{i1}$ — вектор, $B_{i1} = T_{i1}^{-1}W_{i1}$ — матрица, $C_{i1} = G_{i1}A_{i1}$ и $D_{i1} = G_{i1}B_{i1}$. Выполнив аналогичные подстановки для последовательных значений n , найдем

$$u_{in} = A_{in} - B_{in}J \quad (14.156)$$

и

$$v_{in} = C_{in} - D_{in}J, \quad (14.157)$$

где

$$A_{in} = T_{in}^{-1}(X_{in} - U_{in}A_{i, n-1} - V_{in}C_{i, n-1}), \quad (14.158)$$

$$B_{in} = T_{in}^{-1}(W_{in} - U_{in}B_{i, n-1} - V_{in}D_{i, n-1}), \quad (14.159)$$

$$C_{in} = G_{in}A_{in} + H_{in}C_{i, n-1} \quad (14.160)$$

и

$$D_{in} = G_{in}B_{in} + H_{in}D_{i, n-1}. \quad (14.161)$$

Подставляя выражение (14.156) для каждой частоты ν_n и для каждого луча p_i в уравнение (14.144), окончательно получаем для J си-

стему вида

$$(1 + \sum_{l, n} F_{ln} B_{ln}) J = \sum_{l, n} F_{ln} A_{ln}, \quad (14.162)$$

где матрицы F содержат веса квадратурной формулы. Решая эту последнюю систему, находим J , а значит, и $S(r, \nu)$, а также $u(z, p, \nu)$ и $v(z, p, \nu)$ [по формулам (14.156) и (14.157)]. Если известно $u(z, p, \nu)$, то известно и $u(r, \mu, \nu)$, так что ясно, что мы можем вычислить $J^0(r, \nu)$ и $K^0(r, \nu)$ в сопутствующей системе. Аналогичным образом, зная $v(r, \mu, \nu)$, можно вычислить поток $H^0(r, \nu)$. Таким образом, получено полное решение задачи об определении интенсивности излучения и ее моментов в сопутствующей системе.

Число операций, которое требуется для определения A_{ln} и B_{ln} , входящих в формулу (14.156), пропорционально D^2 . Поэтому, суммируя по всем частотам и по всем лучам, получаем следующую оценку времени, необходимого для вычисления: $T_s = cND^3 + c'D^3$. Заметим, что это время зависит от числа частот *линейно*. Аналогичный формализм можно развить для плоской геометрии. В этом случае вместо набора лучей используются M фиксированных значений косинуса угла $\{\mu_i\}$. В случае плоской геометрии машинное время, необходимое для получения решения, равно $T_p = cNMD^2 + c'D^3$. При частичном перераспределении в случае сферической геометрии можно было бы решить моментные уравнения методом Фотрие [447], что позволило бы из формального решения вдоль характеристик — отдельных лучей — получить эддингтоновские множители по заданной функции источников. В случае плоской геометрии при частичном перераспределении применим метод Нордлингера и Райбики [478].

Упражнение 14.12. Рассмотреть течения с монотонным ходом скорости (т.е. с dv/dr , которая везде ≥ 0 или везде ≤ 0). а) Показать, что в случае плоской геометрии выбор начального условия по частоте однозначен и зависит только от знака dv/dr (обсуждение немонотонных распределений скорости см. в [451]). б) Показать, что в случае сферической геометрии однозначные условия можно найти, только если $v > 0$ и $dv/dr > 0$ или $v < 0$ и $dv/dr < 0$, и что за счет эффектов проекции распределения скорости с $v > 0$, $dv/dr < 0$ и с $v < 0$, $dv/dr > 0$, будучи монотонными в *радиальном* направлении, приводят к немонотонному изменению проекции скорости на лучи, идущие по касательной.

Метод, описанный выше в общих чертах, был использован для

расчета функций источников и профилей линий для идеализированных моделей атмосфер [444]. Каждая атмосфера характеризуется внешним радиусом R (в единицах $r_c = 1$), оптической толщиной в континууме T_c (при $r = r_c$), статической оптической толщиной в

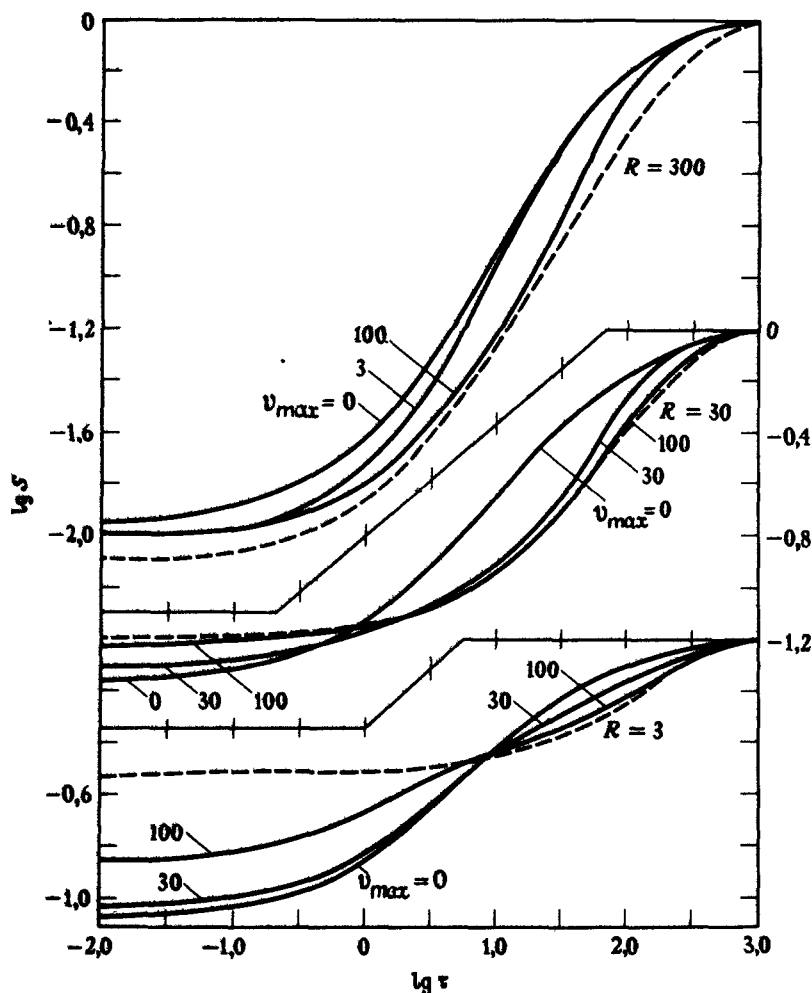


Рис. 14.11. Функции источников в линии в расширяющихся атмосферах, при различных значениях внешнего радиуса R (в единицах r_c) и конечной скорости $v_{\max}$ (в единицах тепловой скорости). Для всех моделей $T_c = 2$, $T_l = 10^3$, $B = 1$ и $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Абсцисса — десятичный логарифм статической оптической глубины в линии. Пунктирная линия дает среднюю интенсивность в континууме. Числа у кривых — значения $v_{\max} = v(R)$. (По [444], с разрешения.)

линии T_l , непрозрачностью $\chi_l \propto r^{-2}$ и $\chi_c \propto r^{-2}$ и постоянной функции Планка $B = 1$. Параметр термализации для двухуровневого атома брался равным $\varepsilon = 2/T_l$. Распределение скорости выбиралось либо а) вида $dv/d\tau = \text{const}$, либо б) вида $v(r) = v_0 [\arctg(ar + b) - \arctg(a + b)]$, который дает резкий подъем скорости в точке $r_v = -b/a$ и имеет постоянную конечную скорость при больших r . Распределение вида (б) может рассматриваться как схематическая модель звездного ветра. Результаты расчетов функции источников для нескольких моделей приведены на рис. 14.11. Для этих моделей $T_l = 10^3$, $T_c = 2$, $r_v = (R + 1)/2$, $B = 1$ и $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$. Мы видим, что основное влияние градиента скорости в глубоких слоях атмосферы состоит в увеличении вероятности выхода. Поэтому значения функции источников становятся меньше, чем в статическом случае, и при больших значениях v_{max} функция источников S_l приближается к средней интенсивности излучения в континууме J_c (пунктир). Вблизи поверхности увеличение вероятности выхода конкурирует с поглощением излучения континуума в линии, смещенной вследствие эффекта Доплера. В случае плоской геометрии преобладает второй эффект, что приводит к

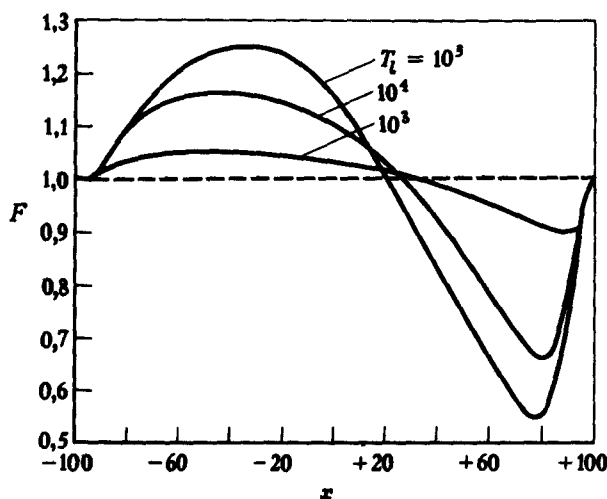


Рис. 14.12. Профили линий (потоки выходящего излучения, проинтегрированные по диску) для расширяющихся сферически-симметричных атмосфер. Ордината — поток, отнесенный к континууму; абсцисса — $\Delta\nu/\Delta\nu_D$. Для всех моделей $R = 300$, $T_c = 2$, $B = 1$, $\varepsilon = 2/T_l$ и $dv/d\tau_l = -100/T_l$. (По [444], с разрешения.)

увеличению S_1 . В очень протяженных атмосферах преобладает первый эффект и S_1 уменьшается. Профили в потоке, регистрируемые внешним наблюдателем, показаны на рис. 14.12 (для моделей, параметры которых приведены в подписи к рисунку). Получаются характерные профили типа Р Лебеда, причем и эмиссионный, и абсорбционный компоненты усиливаются с увеличением оптической толщины оболочки.

Решение уравнения переноса в сопутствующей системе отсчета описанным выше методом удобно, эффективно и легко обобщается на реалистичные модели звезд. Этот метод допускает обобщение и на случай многоуровневных атомов, что должно позволить рассчитывать в случае расширяющихся атмосфер линейчатые спектры для реалистичных моделей атомов. Сравнение точных теоретических спектров с наблюдениями должно будет помочь в определении физической структуры атмосфер звезд с расширяющимися оболочками и звездным ветром.

Глава 15

Звездный ветер

Самые внешние слои атмосфер многих звезд находятся в состоянии непрерывного быстрого расширения. Вещество, истекающее из звезды при таком расширении, называется *звездным ветром*. Свойства ветра меняются в широких пределах. Один крайний случай — это очень мощные потоки (соответствующая скорость потери массы $\sim 10^{-5} M_{\odot}$ в год). Они являются оптически толстыми в спектральных линиях (и даже в некоторых континуумах) и дают эмиссионные линии и линии с профилями типа Р Лебеда. Противоположный крайний случай — сравнительно слабые потоки, такие, например, как у Солнца. Солнечный ветер является оптически тонким. С точки зрения потери массы роль его незначительна ($10^{-14} M_{\odot}$ в год), но тем не менее он играет важную роль в балансе углового момента Солнца. В гл. 14 обсуждалась проблема образования спектра в атмосфере с заданным законом течения. Ниже исследуется *динамика* ветра и рассматриваются вопросы, связанные с балансом энергии и импульса. Будет установлено, что имеются два основных механизма, вызывающие появление звездного ветра.

1) У звезд с водородными конвективными зонами (подобных Солнцу) внешняя атмосфера представляет собой нагреваемую за счет механических движений *корону* очень высокой температуры. Оказывается, что в этом случае корона не может находиться в статическом равновесии (по давлению) с межзвездной средой, а неизбежно должна испытывать сверхзвуковое расширение, порождая поток, который отводит тепловую энергию газа. 2) У звезд высокой светимости, относящихся к ранним спектральным классам, поле излучения настолько сильное, что импульс, который фотоны передают газу, вызывает трансзвуковое истечение вещества. (Имеются также некоторые наблюдательные указания на то, что вблизи поверхностей этих звезд, возможно, есть короны; имеющиеся теоретические модели ветра у этих звезд являются лишь *предварительными*.)

Звездный ветер оказывается существенным при рассмотрении многих астрономических проблем. В некоторых случаях скорость потери массы настолько велика, что ведет к значительному измене-

нию массы звезды за характерное время ее термоядерной эволюции и поэтому непосредственно влияет на эволюционный трек звезды. В других случаях возможность некатастрофической потери массы звездой в течение всей ее жизни может позволить ей проэволюционировать в белый карлик, минуя стадию сверхновой. Звездный ветер тормозит вращение звезд и сильно влияет на величину их углового момента. Кроме того, звездный ветер служит важным механизмом подвода массы и энергии к межзвездной среде, и поэтому его изучение помогает определить ее состав и термодинамическое состояние. В этой книге будет рассматриваться только ветер у *одиночных изолированных звезд*. Звездный ветер может также возникать в *двойных системах*, где может вызывать *быстрый обмен массой*. Он радикально меняет ход эволюции компонентов двойной, а в некоторых случаях порождает экзотические объекты, такие, как *рентгеновские источники*. Хотя объем книги не позволяет дать обсуждение этих явлений, излагаемый ниже материал может служить основой при изучении только что упомянутых более сложных случаев и обеспечивает подготовку к работе с литературой.

15.1. Уравнения гидродинамики для идеальной сжимаемой жидкости

В этом параграфе дается краткий вывод уравнений гидродинамики для идеальной (невязкой) сжимаемой жидкости, которая считается идеальным газом. Будем пренебрегать влиянием ионизации, считая, что вещество уже практически полностью ионизовано. Мы не будем пытаться обсуждать эти уравнения сколько-нибудь полно, поскольку по гидродинамике имеется много превосходных учебников и монографий [385], [692], [104], [490]. Для удобства изложения уравнения выводятся в декартовых координатах (в тех случаях, когда требуется явно указывать координатную систему), затем переписываются в векторно-тензорных обозначениях, и, наконец, для использования в задаче о звездном ветре уравнения выписываются в сферических координатах (в предположении сферической симметрии).

КИНЕМАТИКА

Рассмотрим сначала некоторые основные кинематические свойства сплошной среды. Считается, что газ состоит из смеси частиц разных видов (например, протонов, электронов, тяжелых ио-

нов). Каждый вид частиц k имеет массу m_k и функцию распределения в пространстве и по скоростям $f_k(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t)$, такую, что $f_k dx_1 dx_2 dx_3 dV_1 dV_2 dV_3$ представляет собой число частиц типа k в элементе объема $(\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r}) = [(x_1, x_1 + dx_1), (x_2, x_2 + dx_2), (x_3, x_3 + dx_3)]$ со скоростями в промежутке

$$(\mathbf{V}, \mathbf{V} + d\mathbf{V}) = [(V_1, V_1 + dV_1), (V_2, V_2 + dV_2), (V_3, V_3 + dV_3)]$$

в момент времени t . Предполагается, что плазма химически однородна, так что относительные концентрации частиц повсюду одни и те же. Распределение по скоростям характеризуется обычно макроскопической скоростью течения и микроскопическим тепловым распределением. Первое описывает движения частиц в среднем (а потому и локальное движение среды как целого) при наблюдении в неподвижной лабораторной системе отсчета, второе же описывает случайные движения отдельных частиц относительно этого среднего. Считается, что частота кулоновских столкновений в плазме настолько велика, что а) нет дрейфа частиц разных видов друг относительно друга и б) на микроскопическом уровне имеет место полное равнораспределение энергии в каждой точке, так что частицы всех видов имеют одно и то же тепловое распределение, характеризующееся единой температурой $T(\mathbf{r})$. Далее, предполагается, что микроскопическое распределение скоростей изотропно.

Концентрация (см^{-3}) частиц вида k есть

$$n_k(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dV_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dV_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dV_3 f_k(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t). \quad (15.1)$$

Плотность, обусловленная частицами вида k , равна $m_k n_k(\mathbf{r}, t)$, а полная плотность (г/см^3) есть

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_k m_k n_k(\mathbf{r}, t). \quad (15.2)$$

Средняя скорость $\langle V_i \rangle_k$ (т.е. скорость течения жидкости) в направлении i -го орта определяется так:

$$n_k \langle V_i \rangle_k = \int_{-\infty}^{+\infty} dV_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dV_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dV_3 f_k(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) V_i. \quad (15.3)$$

Как упоминалось выше, считается, что скорость $\langle V_i \rangle_k$ для частиц всех видов одна и та же. Поэтому индекс k можно опустить. Компонент V_i полной скорости любой конкретной частицы можно тог-

да представить в виде $V_i = \langle V_i \rangle + V'_i$, где V'_i — случайная тепловая скорость в i -м направлении. Ясно, что $\langle V'_i \rangle = 0$. Полная скорость течения равна

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \langle V_1 \rangle \mathbf{i} + \langle V_2 \rangle \mathbf{j} + \langle V_3 \rangle \mathbf{k} = v_1(\mathbf{r}, t) \mathbf{i} + v_2(\mathbf{r}, t) \mathbf{j} + v_3(\mathbf{r}, t) \mathbf{k}. \quad (15.4)$$

Движение жидкости приводит к переносу массы. Поток массы определяется следующим образом:

$$\sum_k m_k n_k (\langle V_1 \rangle \mathbf{i} + \langle V_2 \rangle \mathbf{j} + \langle V_3 \rangle \mathbf{k}) = \left(\sum_k m_k n_k \right) \mathbf{v} = \rho \mathbf{v}. \quad (15.5)$$

Кроме того, частицы обладают импульсом, и скорость переноса i -й компоненты импульса через площадку, расположенную перпендикулярно к j -му орту, частицами вида k равна

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^k(\mathbf{r}, t) &= m_k \int_{-\infty}^{+\infty} dV_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dV_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dV_3 f_k(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) V_i V_j = \\ &= m_k \int_{-\infty}^{+\infty} dV_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dV_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dV_3 f_k(\mathbf{r}, \mathbf{V}, t) (v_i + V'_i)(v_j + V'_j) = \\ &= m_k n_k(\mathbf{r}, t) (v_i v_j + v_i \langle V'_j \rangle_k + v_j \langle V'_i \rangle_k + \langle V'_i V'_j \rangle_k) = \\ &= m_k n_k(\mathbf{r}, t) (v_i v_j + \langle V'_i V'_j \rangle_k). \end{aligned} \quad (15.6)$$

Величина $\langle V'_i V'_j \rangle_k$ есть среднее значение произведения i -й и j -й компонент случайной тепловой скорости. Поскольку распределение тепловых скоростей изотропно и между различными компонентами скорости корреляции нет, то

$$\langle V'_i V'_j \rangle_k = \langle (V'_j)^2 \rangle_k \delta_{ij} = (kT/m_k) \delta_{ij}. \quad (15.7)$$

Поэтому

$$\Pi_{ij}^k = m_k n_k v_i v_j + (n_k kT) \delta_{ij} = m_k n_k v_i v_j + p_k \delta_{ij}, \quad (15.8)$$

где p_k — парциальное давление, обусловленное частицами вида k . Суммируя по частицам всех видов, получаем для полного тензора потока импульса выражение

$$\Pi_{ij} = \left(\sum_k m_k n_k \right) v_i v_j + \left(\sum_k p_k \right) \delta_{ij} = \rho v_i v_j + p \delta_{ij}, \quad (15.9)$$

где p — полное давление газа.

Наконец, упомянем о том, что имеются две (заметно отличающиеся друг от друга по своей идее) удобные схемы описания измене-

ний, происходящих в жидкости в результате движений вещества. С точки зрения внешнего наблюдателя, естественное описание свойств среды будет состоять в том, чтобы найти любую характеристику α как функцию $\alpha(x_1, x_2, x_3, t)$. Изменение α в функции времени и положения описывается производной по времени $\partial/\partial t$, вычисленной при *фиксированных* x_1, x_2, x_3 , и производными по пространственным координатам $\partial/\partial x_i$, найденными для *фиксированного* t . Эта схема называется *эйлеровым описанием*. С другой стороны, представим себе, что мы *следим за движением* элемента жидкости, содержащего определенное количество вещества. Эта схема называется *лагранжевым описанием*. Изменение со временем свойств лагранжева элемента жидкости описывается при помощи производной по времени D/Dt в *сопутствующей системе отсчета* (ее называют также лагранжевой, полной или субстанциональной производной). Связь между лагранжевой производной и производными в эйлеровой системе можно получить следующим образом. Производная $D\alpha/Dt$ определяется как предел при $\Delta t \rightarrow 0$ отношения $[\alpha(t + \Delta t) - \alpha(t)]/\Delta t$, где α измеряется в системе отсчета, связанной с жидкостью в моменты времени t и $t + \Delta t$ в двух различных (вообще говоря) точках, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r} + \mathbf{v}\Delta t$. Учитывая изменение положения элемента жидкости, имеем

$$\begin{aligned}\alpha(t + \Delta t) &= \alpha(\mathbf{r}, t) + \Delta t[(\partial\alpha/\partial t)_r + \sum (\partial\alpha/\partial x_i)v_i] = \\ &= \alpha(\mathbf{r}, t) + \Delta t[(\partial\alpha/\partial t)_r + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\alpha].\end{aligned}$$

Таким образом, заключаем, что для любого α (скаляра или вектора)

$$D\alpha/Dt = \partial\alpha/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\alpha. \quad (15.10)$$

Лагранжево описание особенно удобно при изучении нестационарных *одномерных* течений (плоскопараллельных или сферически-симметричных), тогда как в случае сложных геометрий предпочтительнее эйлеров подход. Для *установившихся течений* (т.е. таких, у которых с точки зрения внешнего наблюдателя все свойства не зависят от времени, так что $\partial/\partial t \equiv 0$) обычно используется эйлерово описание.

УРАВНЕНИЕ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Рассмотрим в жидкости некоторый фиксированный объем V . Если потребовать, чтобы общая масса *сохранялась*, то скорость уменьшения массы, заключенной в объеме V , дается полным потоком массы из этого объема через ограничивающую его поверхность

§. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho d\tau = - \oint_S (\rho \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) d\tau, \quad (15.11)$$

где второе равенство следует из теоремы Гаусса. Написанное выше соотношение справедливо для произвольного объема V , и поэтому подинтегральные выражения должны быть равны. Отсюда получаем уравнение неразрывности

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (15.12)$$

или, в силу соотношения (15.10),

$$D\rho/Dt + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (15.13)$$

Уравнение (15.12) было выведено также в § 5.4 из уравнений статистического равновесия, написанных без использования предположения об ЛТР [см. уравнение (5.50)]. Для установившегося течения $\partial/\partial t = 0$, и поэтому

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (15.14)$$

Для одномерного сферически-симметричного течения уравнение (15.12) принимает вид

$$\partial \rho / \partial t + r^{-2} \partial (r^2 \rho v) / \partial r = 0, \quad (15.15)$$

откуда следует, что в случае установившегося течения

$$4\pi r^2 \rho v = \text{const} = \dot{\mathcal{M}}. \quad (15.16)$$

Здесь $\dot{\mathcal{M}}$ — скорость потери массы через всю поверхность сферы, v — скорость в радиальном направлении.

Упражнение 15.1. Показать, что для любой физической переменной α (скалярной или векторной) из уравнения неразрывности следует соотношение

$$\rho(D\alpha/Dt) = \partial(\rho\alpha)/\partial t + \nabla \cdot (\rho\alpha\mathbf{v}). \quad (15.17)$$

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ

Плотность импульса (т.е. импульс в расчете на единицу объема) в движущемся веществе равна $\rho \mathbf{v}$. Если опять рассмотреть некоторый фиксированный объем V , то производную по времени от импульса в этом объеме можно приравнять алгебраической сумме скорости потери импульса, определяемой потоком импульса через

поверхность S , ограничивающую V , и скорости приобретения импульса под действием силы $\mathbf{f}$ в расчете на единицу объема, действующей на вещество в V . Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \rho \mathbf{v} d\tau \right) = - \oint_S \mathbf{\Pi} \cdot d\mathbf{S} + \int_V \mathbf{f} d\tau = \int_V (\mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{\Pi}) d\tau, \quad (15.18)$$

где опять была использована теорема Гаусса. Поскольку объем произволен, то приходим к выводу, что

$$\partial(\rho \mathbf{v})/\partial t = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi} + \mathbf{f}. \quad (15.19)$$

Подставляя для $\mathbf{\Pi}$ выражение (15.9), находим

$$\partial(\rho \mathbf{v})/\partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \mathbf{f}. \quad (15.20)$$

Уравнение (15.20) с учетом соотношения (15.17) можно переписать таким образом, что получим *уравнение движения*

$$\rho D\mathbf{v}/Dt = \rho [\partial \mathbf{v}/\partial t + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla p + \mathbf{f}. \quad (15.21)$$

Для сферически-симметричного одномерного течения в поле силы тяжести $f_r = -GM\rho/r^2$ уравнение (15.21) приобретает вид

$$\rho(\partial v/\partial t) + \rho v(\partial v/\partial r) = -\partial p/\partial r - GM\rho/r^2. \quad (15.22)$$

Для установившегося течения первый член в уравнении (15.22) равен нулю.

УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ

Формулировка закона *сохранения энергии* для элемента объема газа дается в удобном виде *первым законом термодинамики*, который гласит, что сумма изменения *de* удельной (т.е. рассчитанной на единицу массы) внутренней энергии и работы, совершаемой газовым давлением p , когда удельный объем меняется на величину $d(1/\rho)$, равна количеству тепла dq в расчете на единицу массы, которое подводится к элементу, т.е.

$$de + p d(1/\rho) = dq. \quad (15.23)$$

Представим себе, что эти изменения происходят в движущемся лагранжевом элементе жидкости в течение времени Δt , и предположим, что обмен теплом с окружающей средой происходит только путем *теплопроводности* (другие же механизмы подвода и оттока энергии, например за счет излучения и за счет диссипации механи-

ческой энергии, не учитываются). Обусловленный ею *поток тепла* $\mathbf{q}_c$ дает скорость потери энергии в расчете на единицу массы, равную $(1/\rho)\nabla \cdot \mathbf{q}_c$. Тогда (15.23) дает *уравнение энергии для газа*

$$\rho[D\epsilon/Dt + pD(1/\rho)/Dt] = -\nabla \cdot \mathbf{q}_c. \quad (15.24)$$

Обычно поток тепла вследствие теплопроводности записывается в виде $\mathbf{q}_c = -\kappa \nabla T$, где κ — *коэффициент теплопроводности вещества*.

Из уравнения неразрывности видно, что $\rho D(1/\rho)/Dt = \nabla \cdot \mathbf{v}$. Поэтому уравнение (15.24) можно переписать в другой форме:

$$\rho D\epsilon/Dt + p\nabla \cdot \mathbf{v} = -\nabla \cdot \mathbf{q}_c. \quad (15.25)$$

Далее, закон *сохранения механической энергии* можно вывести из уравнения движения (15.21), умножив его скалярно на $\mathbf{v}$. В результате находим

$$\rho D\left(\frac{1}{2}v^2\right)/Dt + (\mathbf{v} \cdot \nabla)p = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}. \quad (15.26)$$

Складывая уравнения (15.25) и (15.26) и замечая, что $\nabla \cdot (ab) = (b \cdot \nabla)a + a(\nabla \cdot b)$, находим *полное уравнение энергии*

$$\rho D\left(\frac{1}{2}v^2 + e\right)/Dt + \nabla \cdot (p\mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} - \nabla \cdot \mathbf{q}_c. \quad (15.27)$$

Используя соотношение (15.17) вместо (15.27) можно также написать

$$\partial\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e\right)/\partial t + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e + p\right)\mathbf{v} + \mathbf{q}_c\right] = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}. \quad (15.28)$$

Для *сферически-симметричного течения* уравнение (15.28) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\rho v\left(\frac{1}{2}v^2 + e + \frac{p}{\rho}\right) - r^2\kappa\frac{\partial T}{\partial r}\right] = -\frac{G\mathcal{M}\rho v}{r^2}. \quad (15.29)$$

Для *установившегося сферически-симметричного течения*

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\rho v\left(\frac{1}{2}v^2 + h\right) - r^2\kappa\frac{\partial T}{\partial r}\right] + r^2\rho vG\mathcal{M}/r^2 = 0, \quad (15.30)$$

где $h = e + p/\rho$ — *удельная энтальпия*. Если вспомнить, что

$r^2\rho v = \text{const}$, то уравнение (15.30) можно проинтегрировать, что дает *полный интеграл энергии*

$$4\pi r^2\rho v \left[\frac{1}{2} v^2 + h - (G\mathcal{M}/r) \right] - 4\pi r^2\kappa (\partial T/\partial r) = C. \quad (15.31)$$

Соотношение (15.31) показывает, что полный поток энергии через сферическую поверхность (складывающийся из потоков кинетической энергии, энтальпии газа, потенциальной энергии и потока тепла за счет теплопроводности) для установившегося течения постоянен.

ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ

Когда сжимаемая среда испытывает малое мгновенное возмущение, в ней возникают и начинают распространяться колебания малой амплитуды (состоящие из чередующихся сжатий и разрежений). Эти колебания представляют собой *звуковые волны*, а характерная скорость их распространения есть *скорость звука*. Предположим, что среда обладает плоской симметрией и однородна. Пусть первоначально она находится в покое, имея плотность ρ_0 и давление p_0 . Запишем возмущенные значения плотности и давления в виде $\rho = \rho_0 + \rho_1$ и $p = p_0 + p_1$ соответственно, где считается, что $\rho_1 \ll \rho_0$ и $p_1 \ll p_0$. Кроме того, и скорость распространения возмущения v также следует рассматривать как малую величину. Тогда, подставляя эти выражения в уравнение неразрывности (15.12) и уравнение движения (15.21) (с внешней силой $f = 0$), выполняя необходимые разложения и удерживая только члены первого порядка относительно возмущений, находим

$$\partial \rho_1 / \partial t + \rho_0 \partial v / \partial x = 0 \quad (15.32)$$

и

$$\rho_0 \partial v / \partial t + \partial p_1 / \partial x = 0. \quad (15.33)$$

В *идеальной* жидкости (т.е. в жидкости без вязкости и без теплопроводности) обмена тепловой энергией между отдельными элементами нет и вещество ведет себя *адиабатически*. Поэтому можно написать

$$\partial p_1 / \partial x = (\partial p / \partial \rho)_s (\partial \rho_1 / \partial x) = a^2 (\partial \rho_1 / \partial x),$$

где $(\partial p / \partial \rho)_s$ — производная давления по плотности *при постоянной энтропии*. Далее, дифференцируя уравнение (15.32) по t , а (15.33) — по x и исключая смешанную производную $\partial^2 v / \partial t \partial x$, полу-

чаем

$$\partial^2 \rho_1 / \partial t^2 - a^2 \partial^2 \rho_1 / \partial x^2 = 0. \quad (15.34)$$

Уравнение (15.34) представляет собой *волновое уравнение*, причем a есть скорость распространения волн. Таким образом, *адиабатическая скорость звука* дается выражением

$$a_s = [(\partial p / \partial \rho)_s]^{1/2}. \quad (15.35)$$

Для идеального газа, испытывающего адиабатические изменения, $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma$, где γ — отношение удельных теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме (для идеального одноатомного газа $\gamma = 5/3$). Поэтому

$$a_s = (\gamma p / \rho)^{1/2} = (\gamma k T / \mu m_H)^{1/2}, \quad (15.36)$$

где μ — средний молекулярный вес. В некоторых случаях может иметь место почти свободный обмен энергией между волной и окружающим веществом за счет теплопроводности или излучения. При этом флуктуации температуры в звуковой волне подавляются (вследствие чего волна затухает), и ее распространение происходит изотермически. В этом случае $p = \rho(kT/\mu m_H)$, так что *изотермическая скорость звука* есть

$$a = (kT/\mu m_H)^{1/2}. \quad (15.37)$$

СООТНОШЕНИЯ РЭНКИНА — ГЮГОНИО

ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

Скорость звука представляет собой ту скорость, с которой возмущение само по себе распространяется в сжимаемой жидкости. Если скорость течения превосходит скорость звука, то регулирование состояния жидкости с помощью звуковых волн происходит недостаточно быстро и возникают ситуации, когда характеристики течения могут заметно меняться на весьма малом расстоянии. Это порождает почти разрывные изменения параметров среды на поверхности раздела, называемой *фронтом ударной волны*. Ударные волны могут возникать при весьма различных обстоятельствах. Например, в пульсирующей звезде волна, возникшая на большой глубине, из-за падения плотности при ее продвижении вверх в атмосфере будет распространяться со все большей и большей скоростью. В конце концов скорость ее движения в веществе становится больше скорости звука, так что возникает ударная волна, которая движется наружу, в верхние слои атмосферы. Подобные удар-

ные волны порождают интересные спектроскопические эффекты у звезд типа RR Лиры и у цефеид, однако заниматься здесь этим вопросом у нас нет возможности. С другой стороны, в случае установившегося течения может возникать *стационарная* ударная волна. Это происходит, когда можно считать, что газ наталкивается на препятствие (например, при сужении сопла или канала, по которому происходит течение, или в том месте, где звездный ветер наталкивается на межзвездную среду). Имея в виду цели этой главы, будем рассматривать только стационарные волны.

Структура фронта ударной волны определяется диссипативными процессами, обусловленными вязкостью, теплопроводностью и лучистым переносом. Кроме того, вещество за фронтом ударной волны может оказаться выведенным из состояния равновесия по одной или нескольким степеням свободы в зависимости от того, насколько велики характерные времена релаксации, за которые происходит восстановление равновесия (детальное обсуждение этих явлений см. в [692]). Этими эффектами мы будем полностью пренебрегать, предполагая, что среда представляет собой идеальный одноатомный газ, находящийся повсюду в равновесии, и что ударная волна — это разрыв, осуществляющийся в пределах бесконечно тонкого слоя. Если рассмотреть прохождение частиц через поверхность раздела, то ясно, что потоки массы, импульса и энергии должны сохраняться. Если для обозначения характеристик газа *до* разрыва (т.е. характеристик вещества, втекающего в разрыв) использовать индекс 1, а индекс 2 — для обозначения характеристик газа *после* разрыва (т.е. характеристик вещества, прошедшего через разрыв), то только что упомянутые условия сохранения приобретают вид (для плоской геометрии)

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad (15.38)$$

$$p_1 + \rho_1 v_1^2 = p_2 + \rho_2 v_2^2, \quad (15.39)$$

$$\rho_1 v_1 [e_1 + (p_1/\rho_1) + \frac{1}{2} v_1^2] = \rho_2 v_2 [e_2 + (p_2/\rho_2) + \frac{1}{2} v_2^2]. \quad (15.40)$$

Соответствующие потоки найдены с помощью формул (15.5), (15.9) и (15.28). В силу равенства (15.38) и того, что для идеального газа $e = (p/\rho)/(\gamma - 1)$ и $h = e + (p/\rho) = \gamma(p/\rho)/(\gamma - 1)$, соотношение (15.40) можно переписать в виде

$$[\gamma p_1/(\gamma - 1)\rho_1] + \frac{1}{2} v_1^2 = [\gamma p_2/(\gamma - 1)\rho_2] + \frac{1}{2} v_2^2. \quad (15.41)$$

Если с помощью равенства (15.38) исключить v_2 , использовать определение скорости звука согласно формуле (15.36) и ввести чис-

ло Маха $M_1 = v_1/a_s$, то соотношения (15.39) и (15.41) можно переписать следующим образом:

$$(p_2/p_1) = 1 + \gamma M_1^2 [1 - (\rho_1/\rho_2)], \quad (15.42)$$

$$2[(\rho_1 p_2 / \rho_2 p_1) - 1] = (\gamma - 1) M_1^2 [1 - (\rho_1/\rho_2)^2]. \quad (15.43)$$

Эти равенства называют *соотношениями Рэнкина — Гюгонио*. Соотношение (15.42) при заданных (p_1, ρ_1) дает p_2 в функции ρ_2 . В принципе существуют два решения: а) $p_2 < p_1$ и $\rho_2 < \rho_1$ и б) $p_2 > p_1$ и $\rho_2 > \rho_1$. Однако можно показать (см. [385], § 82 — 84, или [692], § 17), что второй закон термодинамики и соображения устойчивости исключают случай б) и что физически возможны только *ударные волны сжатия*.

Соотношения (15.12) и (15.43) можно разрешить относительно p_2/p_1 и ρ_2/ρ_1 , что дает

$$\rho_2/\rho_1 = v_1/v_2 \pm (\gamma + 1) M_1^2 / [(\gamma - 1) M_1^2 + 2] \quad (15.44)$$

и

$$p_2/p_1 = [2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)] / (\gamma + 1). \quad (15.45)$$

Пользуясь уравнением состояния идеального газа, можно также написать

$$T_2/T_1 = [2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1) M_1^2 + 2] / M_1^2 (\gamma + 1)^2. \quad (15.46)$$

Упражнение 15.2. а) Проверить справедливость соотношений (15.42) и (15.43). б) Показать, что соотношение (15.43) можно привести к одному из обычно используемых видов

$$e_2 - e_1 = \frac{1}{2} (\rho_1^{-1} - \rho_2^{-1}) (p_1 + p_2)$$

или

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{2} (\rho_1^{-1} - \rho_2^{-1}) (p_2 - p_1).$$

Упражнение 15.3. а) Проверить справедливость соотношений (15.44) — (15.46). б) Показать, что за фронтом ударной волны число Маха равно

$$M_2^2 = [(\gamma - 1) M_1^2 + 2] / [2\gamma M_1^2 - (\gamma - 1)]$$

и что, согласно этой формуле, за разрывом течение всегда является дозвуковым.

15.2. Корональный ветер

Самые внешние слои солнечной атмосферы образуют корону — разреженную (характерная электронная концентрация $\sim 4 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$) высокотемпературную ($T \sim 1,5 \cdot 10^6 \text{ K}$) оболочку, которая по наблюдениям во время затмений простирается на расстояния в несколько солнечных радиусов. Как было указано в § 7.7, высокая температура короны обусловлена подводом энергии за счет диссипации волн. Первичным источником волн, обеспечивающих этот механический нагрев, является водородная конвективная зона, и поэтому полагают, что все звезды, у которых есть обширные конвективные зоны, должны иметь и короны.

Долгое время корона рассматривалась как практически статическая оболочка, удерживаемая Солнцем. Хотя было ясно, что бомбардировка Земли частицами, возникающими на Солнце при мощных процессах (например, при вспышках), вызывает полярные сияния и другие геомагнитные эффекты [164], [165], идею о *непрерывном испускании частиц* Солнцем («корпускулярное излучение») первым выдвинул Бирман [91], [92], [93]. Осознав важную роль (при корональных температурах) переноса энергии посредством теплопроводности, Чепмен [166] показал, что корона простирается далеко в межпланетное пространство и фактически окутывает Землю разреженной высокотемпературной средой. В дальнейшем Паркер показал [496], [498], что любая разумная гидростатическая модель короны, построенная с учетом известных нам условий вблизи Солнца, приводит к таким высоким давлениям на больших расстояниях, что возможность ее удержания за счет давления межзвездной среды исключается. Таким образом, *статические модели внутренне противоречивы, и должно происходить крупномасштабное расширение короны*. Это расширение служит источником того корпускулярного излучения, о котором говорил Бирман.

Паркер построил теоретическую модель истечения, которая вблизи Солнца дает низкие скорости. На больших же расстояниях скорость истечения возрастает до очень больших сверхзвуковых значений. Он назвал это трансзвуковое течение *солнечным ветром* и предсказал типичные значения скорости и плотности, а также величины потоков частиц на орбите Земли. Эти предсказания были подтверждены множеством способов (краткое изложение интересной истории развития наших представлений о солнечном ветре см. в [107], гл. 1, и [324], гл. 1). Однако Чемберлен [147] предложил альтернативную модель, в которой скорость всюду дозвуковая и

которая на орбите Земли дает лишь слабый *солнечный бриз*. Последующая полемика в литературе, основанная почти полностью на теоретических соображениях, привела к уточнению формулировки теории (ввиду высокого уровня использовавшейся в ней научной аргументации читать ее интересно и сегодня!). Однако вопрос о том, какое из этих представлений реализуется на самом деле, оставался нерешенным до тех пор, пока прямые измерения на космических аппаратах не дали убедительных свидетельств в пользу ветра, имеющего высокую скорость.

Детальные измерения характеристик солнечного ветра показывают, что все физические переменные подвержены значительным флуктуациям. Многие вариации коррелируют с вращением Солнца и, следовательно, отражают изменения в тех начальных условиях, при которых течение возникает в короне, тогда как другие являются результатом действия взрывных процессов, например генерируемых при вспышках взрывных волн. Несмотря на эти вариации, стоит рассмотреть фоновый «спокойный» ветер, имеющий сравнительно низкую скорость. Его характеристики должны определяться условиями, типичными для короны в целом. Сводка основных характеристик спокойного солнечного ветра по измерениям у орбиты Земли дана в табл. 15.1. Следует подчеркнуть, что хотя эти данные описывают реальный солнечный ветер лишь весьма схематически, они все же дают те типичные значения, с которыми можно сравнивать теоретические результаты. Из приведенных данных видно, что

ТАБЛИЦА 15.1

Характеристики спокойного солнечного ветра на орбите Земли

Радиальная компонента скорости течения	300 — 325 км/с
Нерadiальная компонента скорости течения	8 км/с
Концентрация протонов (или электронов)	9 см^{-3}
Средняя электронная температура	$1,5 \cdot 10^5 \text{ К}$
Средняя протонная температура	$4 \cdot 10^4 \text{ К}$
Напряженность магнитного поля	$5 \cdot 10^{-5} \text{ Гс}$
Поток протонов	$2,4 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$
Поток кинетической энергии	$2,2 \cdot 10^{-1} \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$
Поток энтальпии	$8 \cdot 10^{-3} \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$
Гравитационный поток	$4 \cdot 10^{-3} \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$
Поток тепла за счет электронной теплопроводности	$7 \cdot 10^{-3} \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с})$

солнечный ветер представляет собой сильно сверхзвуковое (число Маха ≈ 8) почти радиальное течение. Легко показать (см. упражнение 15.4), что потеря массы, вызванная ветром, оказывает на эволюцию Солнца как звезды пренебрежимо малое влияние. Следует также иметь в виду, что система корона — ветер является оптически тонкой. Поэтому на первый взгляд кажется, что со звездно-астрономической и астрофизической точек зрения истечение играет незначительную роль. Мы увидим, однако, что даже это довольно слабое (см. ниже) истечение оказывается существенным для проблемы потери Солнцем углового момента.

Упражнение 15.4. Используя значение потока частиц, приведенное в табл. 15.1, показать, что скорость потери массы $\dot{M} = 4\pi r^2 n v m$, где n — концентрация частиц и m — средняя масса частицы, составляет $\sim 2 \cdot 10^{-14} M_{\odot}$ в год. Сравнить этот результат со скоростью потери массы при термоядерных реакциях, которая необходима, чтобы обеспечить наблюдаемую светимость Солнца.

Как упоминалось ранее, считается, что короны должны быть у всех звезд, которые обладают водородными конвективными зонами (т.е. у звезд спектрального класса F и более поздних). Эти звезды должны также создавать звездный ветер. И действительно, для многих сверхгигантов и гигантов поздних спектральных классов наблюдения свидетельствуют о наличии мощного коронального ветра (линии с профилями типа Р Лебеда). Оценки скорости потери массы (см., например, [624], стр. 238; [70], стр. 246) заключены в пределах от $2 \cdot 10^{-10} M_{\odot}$ в год для гигантов типа K до $10^{-8} M_{\odot}$ в год для гигантов типа M и от $10^{-7} M_{\odot}$ в год для сверхгигантов типов G и K до 10^{-6} или $10^{-5} M_{\odot}$ в год для сверхгигантов типа M. Во всех этих случаях мы имеем дело с *корональным* ветром, возникающим главным образом из-за высокой температуры в коронах звезд (за исключением, возможно, M-звезд, у которых важную роль может играть давление излучения на пылинки). Мощный ветер другого рода ($10^{-6} + 10^{-5} M_{\odot}$ в год) обнаружен у звезд ранних типов (ОВ-сверхгиганты и звезды WR). Истечение из этих звезд вызывается давлением излучения, действующим на вещество (см. § 15.4).

В этом разделе излагаются основы физики коронального ветра с использованием упрощенного идеализированного описания как свойств вещества, так и характера истечения. Наша цель будет состо-

ять в том, чтобы понять суть явления коронального ветра, а не в том, чтобы пытаться построить детальные его модели. Мы не раз будем ссылаться на солнечный ветер и как на иллюстративный пример, и как на эталон, указывающий, какие еще процессы должны быть учтены в «окончательной» теории звездного ветра.

РАСШИРЕНИЕ СОЛНЕЧНОЙ КОРОНЫ

Предположим, что корона представляет собой полностью ионизованную чисто водородную плазму с $T_0 \approx 1,5 \cdot 10^6 \text{ K}$ и $n_0 \approx 4 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$, где через n_0 обозначена концентрация протонов или электронов (вследствие электронейтральности плазмы $n_p = n_e$). При столь высоких температурах электроны имеют большие скорости и могут эффективно переносить энергию. При этом возникает поток энергии $q_c = -\chi \nabla T$, где коэффициент теплопроводности k дается выражением $\chi = \chi_0 T^{3/2}$, причем $\chi_0 \approx 8 \cdot 10^{-7} \text{ эрг}/(\text{см} \cdot \text{с} \times \times \text{град}^{3/2})$ [598], стр. 86. При температуре 10^6 K теплопроводность плазмы намного выше, чем у обычных проводников в лабораторных условиях! Если принять, что теплопроводность является главным механизмом переноса энергии в короне, то при наличии равновесия должно выполняться условие $\nabla \cdot q_c = 0$, откуда следует, что

$$r^{-2} d[r^2 \chi_0 T^{3/2} (dT/dr)]/dr = 0. \quad (15.47)$$

Интегрируя это уравнение, при условии, что $T \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, получаем

$$T(r) = T_0 (r_0/r)^{3/2}, \quad (15.48)$$

где r_0 означает некоторый стандартный начальный уровень в короне (порядка $R_\odot = 7 \cdot 10^{10} \text{ см}$). Описываемый формулой (15.48) спад температуры наружу происходит крайне медленно, и на орбите Земли ($r_\oplus = 1,5 \cdot 10^{13} \text{ см}$) имеем $T \approx 3,3 \cdot 10^5 \text{ K}$ при $T_0 = 1,5 \cdot 10^6 \text{ K}$. Таким образом, *Земля окутана высокотемпературным корональным веществом.*

Если бы корона находилась в гидростатическом равновесии, мы имели бы

$$dp/dr = -G M_\odot \rho / r^2. \quad (15.49)$$

Дебаевская длина в короне при указанных выше температуре и концентрации составляет всего лишь около 0,3 см [см. формулу (9.101)]. Поэтому в пределах любых объемов, за исключением самых малых, плазма нейтральна, и можно написать $n_e = n_p = n$,

$\rho = n(m_p + m_e) = nm$ и $p = 2nkT$, где через m обозначена масса атома водорода. Тогда уравнение гидростатического равновесия принимает вид

$$d(nT)/dr = -(G\mathcal{M}_{\odot}m/2k)(n/r^2). \quad (15.50)$$

Если бы температура T была постоянной и рассматривались бы только расстояния $r \approx r_0$, то уравнение (15.50) можно было бы аппроксимировать обычным уравнением для плоской геометрии, имеющим вид $d(\ln n)/dr = -1/H$, где шкала высот $H = (G\mathcal{M}_{\odot}m/2kT_0)^{-1} \approx 10^5$ км. Как указано в упражнении 15.5, эта шкала высот настолько велика, что предсказываемая этой моделью концентрация частиц вблизи орбиты Земли оказывается очень большой. Тогда можно было бы заключить, что Земля погружена в горячие довольно плотные внешние слои короны. На самом деле предположение о том, что $T = T_0$, является слишком грубым и приводит к некоторому завышению $n(r_{\oplus})$. Если вместо него использовать формулу (15.48), то уравнение (15.50) можно переписать в виде

$$d[(r_0/r)^{3/2}n]/d(r/r_0) = -(r_0/r)^2 n/H. \quad (15.51)$$

Это уравнение имеет решение

$$n(r) = n_0(r/r_0)^{3/2} \exp \{ -7r_0[1 - (r_0/r)^{3/2}]/5H \}, \quad (15.52)$$

из которого следует, что при $n_0 = 4 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$ вблизи Земли $n \sim 9 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}$.

Упражнение 15.5. Считая корону изотермической ($T = T_0$), но учитывая изменение гравитационной силы, получить выражение для $n(r)$. Показать, что при $n_0 \approx 4 \cdot 10^8 \text{ см}^{-3}$ концентрация частиц вблизи орбиты Земли составляет около $4 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$.

Упражнение 15.6. Показать, что формула (15.52) дает минимум для n при $r/r_0 = (7/4) \cdot (r_0/H)$ и что $n(r)$, начиная с этого места, возрастает наружу (формально такая конфигурация обладала бы неустойчивостью Рэлея — Тейлора).

Комбинируя формулы (15.48) и (15.52), находим для давления

$$p(r) = p_0 \exp \{ -7r_0[1 - (r_0/r)^{3/2}]/5H \}. \quad (15.53)$$

Вместо того чтобы обращаться в нуль при $r/r_0 = \infty$, давление стремится к конечному значению. Принимая $p_0 \approx 0,2 \text{ дин/см}^2$, находим, что $p_{\infty} \approx 10^{-5} \text{ дин/см}^2$. Это давление нужно сравнить с дав-

лением, которого следует ожидать в межзвездной среде. Оно складывается из газового и магнитного давлений. Средняя концентрация в среде порядка 1 см^{-3} . Для областей HI $T \sim 10^2 \text{ K}$, а для типичных областей HII $T \sim 10^4 \text{ K}$, так что давления должны быть заключены в диапазоне от $1,4 \cdot 10^{-14}$ до $3 \cdot 10^{-12} \text{ дин/см}^2$. Магнитное поле в межзвездной среде порядка 10^{-5} Гс . Поэтому магнитное давление $B^2/8\pi$ порядка $4 \cdot 10^{-12} \text{ дин/см}^2$. Полагают, что давление космических лучей составляет около $2 \cdot 10^{-12} \text{ дин/см}^2$. Таким образом, в качестве разумной верхней границы полного давления в межзвездной среде можно взять $10^{-11} \text{ дин/см}^2$. Это значение в 10^6 раз меньше значения, полученного для короны, находящейся в гидростатическом равновесии, и мы приходим к заключению, что корона не может удерживаться внешним давлением и должна испытывать непрерывное расширение. Поэтому следует отказаться от предположения о гидростатическом равновесии и исследовать гидродинамику расширения короны.

ОДНОЖИДКОСТНЫЕ МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНОГО СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО КОРОНАЛЬНОГО ВЕТРА

Для упрощения рассмотрения гидродинамики коронального ветра сделаем следующие предположения: 1) течение *стационарно*, 2) ветер сферически-симметричен, 3) газ представляет собой идеальную сжимаемую жидкость. Конечно, все эти предположения являются идеализациями и ограничивают применимость результатов, скажем, к реальному солнечному ветру. Тем не менее они позволяют построить хорошую исходную физическую модель для общего исследования явления.

Уравнения, описывающие стационарное течение, — это *уравнение неразрывности* (выражающее сохранение массы)

$$r^{-2} d(r^2 \rho v) / dr = 0, \quad (15.54)$$

уравнение движения

$$\rho v dv / dr = - dp / dr - \rho G \mathcal{M}_{\odot} / r^2 \quad (15.55)$$

и *уравнение энергии* (с учетом теплопроводности)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \rho v \left(\frac{1}{2} v^2 + e + \frac{p}{\rho} \right) \right] = \frac{G \mathcal{M}_{\odot}}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \chi \frac{dT}{dr} \right). \quad (15.56)$$

Для полностью ионизованного газа из чистого водорода $p = 2nkT$

и $\rho = nm$, где $n = n_p = n_e$ и m — масса атома водорода. Удельная внутренняя энергия газа равна $2(\frac{3}{2}nkT)/(nm) = 3kT/m$, а $p/\rho = (2nkT)/(nm) = 2kT/m$. Поэтому удельная энтальпия равна $h = e + (p/\rho) = 5kT/m$. Заметим, что уравнение (15.56) не содержит членов, описывающих радиативные потери или выделение механической энергии за счет диссипации волн. Предполагается, что эти процессы происходят в сравнительно тонком слое у основания короны и что выше некоторого исходного уровня необходимо учитывать только кинетическую, потенциальную и тепловую (энтальпия) энергию и члены, описывающие теплопроводность.

Уравнение неразрывности можно проинтегрировать, что дает

$$4\pi r^2 n v = F = \text{const}, \quad (15.57)$$

где через F обозначен *поток частиц*. Поэтому

$$\mathcal{M} = mF = 4\pi r^2 n m v = \text{const}, \quad (15.58)$$

где через $\mathcal{M}$ обозначена *скорость потери массы*. Уравнение энергии также можно проинтегрировать, что дает

$$4\pi r^2 n v \left[\frac{1}{2} m v^2 + 5kT - (G\mathcal{M}_\odot m/r) \right] - 4\pi r^2 \chi dT/dr = E = \text{const}. \quad (15.59)$$

Это значит, что *полный поток энергии* через поверхность любой сферы для заданного течения постоянен. Уравнения (15.57), (15.55) и (15.59) представляют собой нелинейную систему двух дифференциальных уравнений первого порядка, содержащую две постоянные интегрирования. Еще две постоянные появятся в результате интегрирования этой системы. Следовательно, всего необходимо наложить, вообще говоря, четыре условия (граничные условия или условия, определяющие характер решения). Однако прежде чем переходить к обсуждению этой общей проблемы, весьма поучительно рассмотреть простой случай *изотермической короны*.

Если потребовать, чтобы течение было строго изотермическим, то необходимо определить только n и v . Поэтому уравнение энергии можно опустить и использовать только уравнения движения и неразрывности. (Наше априорное предположение $T = \text{const}$ эквивалентно введению некоторого механизма нагрева или охлаждения газа, который в точности обеспечивает поддержание желаемой температуры.) Уравнение (15.55) принимает тогда вид

$$n m v dv/dr = - 2kT_0 dn/dr - n m G \mathcal{M}_\odot / r^2. \quad (15.60)$$

Воспользовавшись формулой (15.57) для исключения n , находим

$$\frac{1}{2} (1 - 2kT_0/mv^2) dv^2/dr = - (G\mathcal{M}_\odot/r^2)(1 - 4kT_0/G\mathcal{M}_\odot m). \quad (15.61)$$

Это уравнение имеет несколько семейств решений с существенно различными математическим поведением и физическим смыслом. Для солнечной короны $4kT_0/G\mathcal{M}_\odot m \approx 0,3$. Поэтому ясно, что правая часть уравнения (15.61) при $r < r_c$ отрицательна, а при $r_c < r < \infty$ положительна. Здесь r_c — критическое расстояние:

$$r_c = G\mathcal{M}_\odot m / 4kT_0, \quad (15.62)$$

при котором правая часть точно равна нулю. Для солнечной короны $r_c/r_0 \approx 3,5$. При $r = r_c$ левая часть уравнения (15.61) также должна обращаться в нуль. Это может осуществляться одним из двух способов: либо мы имеем

$$(dv/dr)_{r_c} = 0, \quad (15.63)$$

либо же

$$v(r_c) = (2kT_0/m)^{1/2} \equiv v_c. \quad (15.64)$$

Определяемая формулой (15.64) критическая скорость v_c равна изотермической скорости звука.

Сосредоточим внимание на решениях, для которых v и dv/dr однозначны и непрерывны. Сначала предположим, что выполняется равенство (15.63). Тогда можно построить решения, для которых выражение $1 - 2kT_0/mv^2$ имеет один и тот же знак при всех r . Если $v(r_c) < v_c$, то $v(r)$ будет иметь локальный максимум в точке r_c , что дает решения типа 1, показанные на рис. 15.1. Эти течения везде дозвуковые. С другой стороны, если $v(r_c) > v_c$, то $v(r)$ будет иметь локальный минимум в точке r_c ; здесь течения везде сверхзвуковые и соответствуют показанным на рис. 15.1 решениям типа 2.

Другая возможность состоит в том, что выполняется равенство (15.64). Тогда мы получаем критическое решение (т.е. решение с $v = v_c$ при $r = r_c$), которое имеет ненулевой наклон при $r = r_c$. Предположим, что $(dv/dr)_{r_c} = 0$. Тогда мы получаем единственное трансзвуковое решение, которое монотонно возрастает от дозвуковых скоростей ($v < v_c$) при $r < r_c$ до сверхзвуковых скоростей ($v > v_c$) при $r > r_c$. Это однозначно выделенное решение показано на рис. 15.1. как решение типа 3. Если $(dv/dr)_{r_c} < 0$, то тогда получается единственное решение, для которого $v(r)$ монотонно убывает от сверхзвуковых скоростей при $r < r_c$ к дозвуковым скоростям при $r > r_c$. На рис. 15.1 оно показано как решение типа 4.

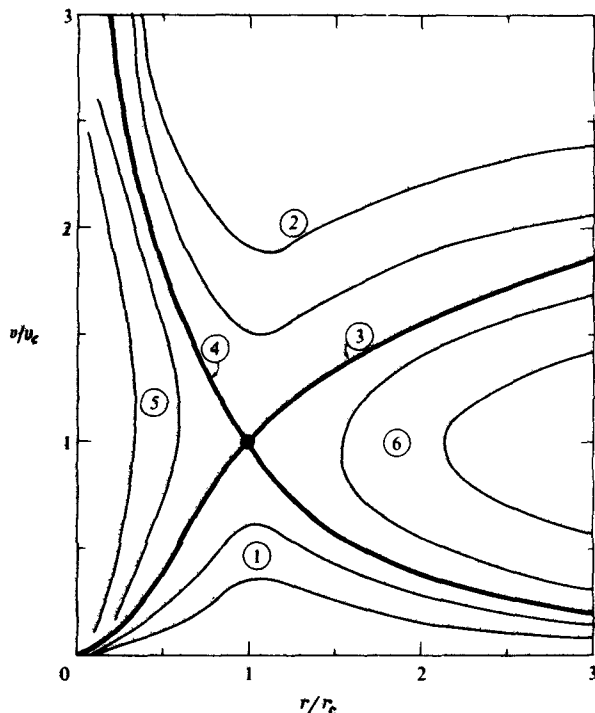


Рис. 15.1. Схематическое изображение зависимости скорости, выраженной в единицах критической скорости v_c , от расстояния от центра звезды, выраженного в единицах критического радиуса r_c , для звездного ветра и звездного бриза. Решения типа 1 описывают дозвуковой бриз. Решения типа 2 всюду дают сверхзвуковые скорости. Решения 3 и 4 представляют собой трансзвуковые критические решения, которые проходят через критическую точку (черный кружок) с сохранением непрерывности. Решения типов 5 и 6 двузначные, тем не менее они важны для оценки условий в появляющихся здесь ударных волнах.

Наконец, существуют два семейства решений, определяемые условиями $r \geq r_c$ или $r \leq r_c$ и такие, что для каждого из них $v(r) = v_c$ и $(dv/dr)_{r_c} = \infty$. Это двузначные решения типов 5 и 6 (рис. 15.1). Сперва мы исключим эти решения из нашего рассмотрения, потому что они двузначны. Однако позже будет найдено, что их можно использовать для получения части полного решения, соответствующего течению, в котором имеется разрыв на фронте ударной волны, что позволяет добиться выполнения граничных условий при $r \rightarrow \infty$.

Чтобы решить, какое решение выбрать, необходимо принять во

внимание имеющие физический смысл граничные условия. Во-первых, можно исключить как все решения семейства 2, так и единственное решение типа 4, потому что они дают для нижней короны скорости $v > v_c \approx 170$ км/с, чего не наблюдается. В результате остаются решения типа 1 и единственное трансзвуковое решение типа 3. Выбор между ними можно сделать, рассматривая поведение решения при $r \rightarrow \infty$. Уравнение (15.61) непосредственно интегрируется, что дает

$$(v/v_c)^2 - [\ln(v/v_c)]^2 = 4\ln(r/r_c) + 4(r_c/r) + C. \quad (15.65)$$

Упражнение 15.7. а) Убедиться в справедливости соотношения (15.65). б) Найти C для критических решений. в) Найти C для решений типов 1 и 2.

Рассмотрим сначала поведение решений типа 1 при $r \rightarrow \infty$. Здесь v/v_c меньше 1 и убывает при $r \rightarrow \infty$. Поэтому в левой части (15.65) доминирующим членом будет $-2\ln(v/v_c)$, а в правой части $4\ln(r/r_c)$. Следовательно, если $r \rightarrow \infty$, то $v \propto r^{-2}$, что при учете уравнения неразрывности позволяет заключить, что n остается конечным. Таким образом, этим решениям отвечает при $r = \infty$ давление, которое намного превосходит давление в окружающей межзвездной среде, а потому их можно отбросить на том же основании, что и гидростатическое решение. С другой стороны, для критического решения v/v_c больше 1 и увеличивается при $r \rightarrow \infty$, поэтому мы находим, что $v \approx 2v_c [\ln(r/r_c)]^{1/2}$. В этом случае $n \propto r^{-2}v^{-1} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, и мы приходим к выводу, что для критического решения можно добиться выполнения граничного условия на бесконечности.

Рассуждая примерно таким образом, Паркер пришел к выводу (правильному!), что солнечная корона должна испытывать околозвуковое расширение в межпланетное и межзвездное пространство [496] и что вблизи орбиты Земли *солнечный ветер* имеет скорости порядка нескольких сотен км/с. Несколько решений, описывающих ветер в изотермической короне при различных ее температурах, показаны на рис. 15.2. Данное выше решение не является вполне удовлетворительным, поскольку v/v_c неограниченно возрастает при $r/r_c \rightarrow \infty$. Такое поведение есть следствие искусственного предположения, что корона строго изотермична. Вблизи Солнца корона действительно почти изотермична из-за ее высокой теплопроводности, которая способствует весьма эффективному отводу тепла, выделя-

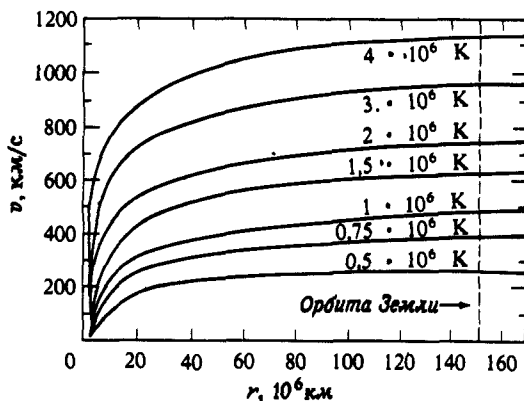


Рис. 15.2. Решения для изотермического звездного ветра. Числа у кривых — значения температуры короны. По оси ординат отложена скорость, по оси абсцисс — гелиоцентрическое расстояние. (По [496], с разрешения.)

ющегося при диссипации волн. Тем самым большие градиенты температуры сглаживаются. Однако на больших расстояниях расширение газа должно в конце концов приводить к его охлаждению. Если мы *требуем*, чтобы температура T оставалась фиксированной, то тем самым мы вводим (фиктивный) источник энергии для ее поддержания. По существу, это выражается в непрерывном подводе тепловой энергии к газу. Эта энергия способна производить работу, продолжая неограниченно ускорять газ. Однако указанную трудность легко преодолеть, и Паркер сумел построить удовлетворительные модели ветра на основе одного из двух предположений.

а) При $r_{\odot} \leq r \leq r_c$ корона изотермична, а при $r > r_c$ она расширяется *адиабатически*. В этом случае при $r > r_c$ давление и плотность связаны политропной зависимостью вида $p = p_0(\rho/\rho_0)^\gamma$ с $\gamma = 5/3$ (идеальный газ). б) Корона везде считается политропной с показателем $\gamma < 3/2$. В решениях обоих этих классов отсутствует увеличение v при больших r , не имеющее физического смысла, и при $r \rightarrow \infty$ скорость v приближается к конечному значению v_∞ .

Изотермические решения, описанные выше, позволяют выявить в общих чертах природу коронального расширения, переходящего в сверхзвуковой ветер, но очевидно, что для детального описания истечения их недостаточно. В частности, решая эту задачу, мы хотим *найти* распределение температуры $T(r)$. Мы должны поэтому обратиться к полной системе уравнений, включая уравнение баланса энергии, а именно к уравнениям (15.55), (15.57) и (15.59).

Как и ранее, следует рассмотреть два класса решений: 1) дозвуковые решения, называемые *звездным бризом*, которые сходны с решениями типа 1, показанными на рис. 15.1, 2) транзвуковые критические решения — *звездный ветер*, — сходные с единственным решением типа 3, приведенным на рис. 15.1. Эти два класса отличаются друг от друга величиной полного потока энергии E в уравнении (15.59). Для всех решений, описывающих бриз, $E = 0$, тогда как для решений, описывающих ветер, $E > 0$.

Хотя для нас интересны (в связи с Солнцем) главным образом решения, описывающие *ветер*, решения, описывающие *бриз* (они подробно изучены [147], [532]), сыграли важную роль в развитии теории, и нам стоит теперь кратко их рассмотреть. Для решений, описывающих бриз, $n \rightarrow 0$, $T \rightarrow 0$ и $p \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Имеется целое семейство таких решений. Они отличаются друг от друга предельным значением mv^2/kT при $r \rightarrow \infty$ [532]. Поскольку в данном случае можно получить такое же давление, что и в межзвездной среде, исключить эти решения с самого начала, как это можно было сделать для изотермического ветра, нельзя. Так, Чемберлен [147] отстаивал этот тип решения для солнечной короны. В этом случае скорость вещества вблизи земной орбиты составляла бы только 20 км/с. Он указывал, что правильное гидродинамическое решение должно соответствовать модели короны с испарением частиц, в которой движения отдельных частиц рассчитываются в предположении о существовании критического уровня, выше которого плотность настолько мала, что быстро движущиеся частицы больше не испытывают столкновений и покидают корону. Он нашел, что в модели с испарением средняя скорость ионов вблизи $r_\odot$ должна быть около 10 км/с, и пришел к выводу, что правильным является решение, дающее бриз (а не ветер). Вопрос оставался нерешенным до тех пор, пока прямые наблюдения не доказали справедливость решения, соответствующего ветру. Однако последующие исследования показали [108], [339], что основная предпосылка, заключающаяся в том, что гидродинамическая модель и модель с испарением должны согласовываться между собой, совершенно верна, а трудность же состоит в расчете первоначально использовавшейся модели с испарением. В частности, если учесть, что частицы, движущиеся с различными скоростями, испаряются с *различных* уровней, а не с *одного и того же* «критического» уровня (более быстрые частицы вылетают из более глубоких и более плотных слоев), и если выполнить точные *динамические* расчеты того электрического поля в плазме, которое связывает воедино потоки

электронов и протонов, то модель с испарением дает $n \approx 10 \text{ см}^{-3}$, $v \approx 300 \text{ км/с}$ и T (для протонов) $\approx 5 \cdot 10^4 \text{ К}$, что хорошо согласуется с наблюдаемыми значениями. Сейчас мы бы пришли к выводу, что точная модель с испарением подтверждает решение, соответствующее солнечному ветру.

Перейдем теперь к более подробному изучению решений, описывающих ветер. Для всех этих решений при $r \rightarrow \infty$ имеем $v \rightarrow v_\infty$ (ненулевая величина), $n \rightarrow 0$ и $T \rightarrow 0$. Как упоминалось выше, для однозначного определения решения требуется задать четыре различных условия. Обычно задают значения плотности и температуры в короне и налагают условие, чтобы решение плавно проходило через критическую точку и чтобы $T(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Последнее из этих условий, однако, сложнее, чем это кажется. Теперь известно, что характер изменения T с r зависит от механизма переноса тепла при $r = \infty$ (см. [200], [201], [202], [532]; [324], стр. 47). Предположим сначала, что поток тепла за счет теплопроводности остается при $r = \infty$ конечным и величина его равна $E_c(\infty)$. Из уравнения (15.59) видно, что тогда $v_\infty = \{2[E - E_c(\infty)]/\mathcal{M}\}^{1/2}$, и далее, поскольку $r^2 T^{5/2} (dT/dr)_\infty = \text{const}$, то поведение температуры подчиняется асимптотическому закону $T \propto r^{-2/7}$. Это тот самый закон, который был найден Чепменом и использовался Паркером [499] в его решениях для ветра. В качестве следующего шага можно было бы предположить, что и поток за счет теплопроводности, и поток энтальпии сохраняются вплоть до $r = \infty$, а отношение $5kTv/(r^2 T^{5/2} dT/dr)$ стремится к постоянной. В этом случае оба потока при $r \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, и $v_\infty = (2E/\mathcal{M})^{1/2}$. Далее, условие, наложенное на отношение потоков, приводит к тому, что $T \propto r^{-2/5}$. Это решение было впервые получено Вангом и Чангом [667]. Наконец, мы могли бы предположить, что поток за счет теплопроводности стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ быстрее, чем поток энтальпии. Здесь также $v_\infty = (2E/\mathcal{M})^{1/2}$. В этом случае нет обмена энергией в потоке при $r \rightarrow \infty$, и газ расширяется просто *адиабатически*. Если показатель политропы равен γ , то $T \propto \rho^{\gamma-1}$. Но $\rho \propto r^{-2}$, поэтому при $r \rightarrow \infty$ имеем $T \propto (r^{-2})^{3/5}$ или $T \propto r^{-4/3}$ при γ , равном $5/3$ (идеальный газ).

Связь между этими решениями была четко разъяснена Дэрни [200], который рассмотрел решения типа ветра, характеризующиеся одним и тем же значением T_0 , но различными значениями n_0 . При малых значениях n_0 критические решения дают большие значения $e(\infty) = E/F$ — остаточной энергии в расчете на одну частицу при $r = \infty$. Для них $T \propto r^{-2/7}$. По мере увеличения n_0 часть $e(\infty)$, обусловленная теплопроводностью, — обозначим ее через

$e_c(\infty)$ — уменьшается, и при некотором значении n_0^* имеем $e_c(\infty) = 0$ и $T \propto r^{-2/5}$ (т.е. при этом конкретном значении получается решение Ванга и Чанга). При дальнейшем увеличении n_0 энергия $e_c(\infty)$ остается равной нулю и теперь уменьшается $e(\infty)$. В этом случае $T \propto r^{-4/3}$. Наконец, при еще большем возрастании n_0 достигается некоторое предельное значение, при котором $e(\infty) = 0$, и получается решение, описывающее звездный бриз (см. рис. 15.3). Физически эти результаты означают, что при увеличении n_0 все большая и большая часть тепла, подводимого теплопроводностью, расходуется на расширение (течение становится все более и более мощным), пока в какой-то момент $e_c(\infty)$ не обратится в нуль. Если добавить еще некоторое количество вещества, то течение остается

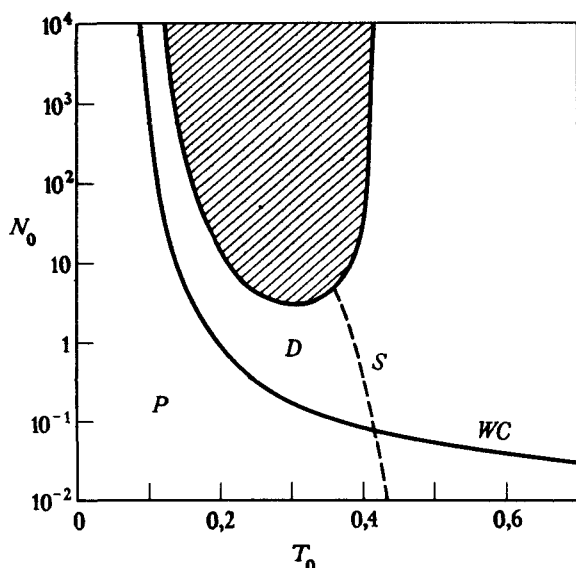


Рис. 15.3. Области значений корональной температуры T_0 (в единицах $G\mathcal{M}_\odot \mu m / kr$) и концентрации N_0 [в единицах $2\chi_0 k^{-1} (G\mathcal{M}_\odot r_0)^{-1/2}$], для которых имеют место решения, соответствующие звездному ветру и звездному бризу. Заштрихованная область соответствует решениям, описывающим бриз. Пунктирная кривая, отмеченная буквой S , отделяет область (справа), для которой поток является сверхзвуковым уже у основания короны ($r = r_0$). Область P соответствует решениям, описывающим ветер с паркеровским законом изменения температуры $T \propto r^{-3/2}$ при $r \rightarrow \infty$. Этим решениям отвечает ненулевой обусловленный теплопроводностью поток на бесконечности. Область D соответствует ветру с законом изменения температуры Дэрни ($T \propto r^{-1/2}$). Этот ветер при $r \rightarrow \infty$ становится адиабатическим. Кривая WC соответствует решениям с законом изменения температуры Ванга — Чанга $T \propto r^{-2/5}$ при $r \rightarrow \infty$. Эти решения получаются, когда обусловленный теплопроводностью поток на бесконечности обращается в нуль. (По [532].)

сверхзвуковым, но на адиабатическое расширение тратится все больше и больше тепловой энергии, и $e(\infty)$ уменьшается. В конце концов $e(\infty)$ обращается в нуль, и течение становится дозвуковым.

При систематическом изучении решений, описывающих звездный ветер, очень удобно пользоваться безразмерными переменными. Чемберлен [147] предложил ввести следующие переменные:

$$\tau = T/T_0, \quad (15.66a)$$

$$\psi = v^2 \mu m / k T_0 \quad (15.66b)$$

и

$$\lambda = G M_{\odot} \mu m / k T_0 r, \quad (15.66b)$$

где μ — средний молекулярный вес (равный $1/2$ для ионизованного водорода). В этих переменных уравнения (15.57), (15.55) и (15.59) приобретают соответственно вид

$$n \lambda^{-2} \psi^{1/2} = (k T_0 / \mu m)^{3/2} F / (4 \pi G^2 M_{\odot}^2) = C, \quad (15.67)$$

$$\frac{1}{2} (1 - \tau / \psi) d\psi / d\lambda = 1 - 2\tau / \lambda - d\tau / d\lambda \quad (15.68)$$

и

$$A \tau^{5/2} d\tau / d\lambda = \varepsilon_{\infty} - \frac{1}{2} \psi + \lambda - \frac{5}{2} \tau. \quad (15.69)$$

Здесь

$$\varepsilon_{\infty} = \mu E / k T_0 F \quad (15.70)$$

— остаточная энергия на бесконечности в расчете на одну частицу (в единицах $k T_0$), и

$$A = 4 \pi \kappa_0 G \mu^2 m M_{\odot} T_0^3 / (k^2 F). \quad (15.71)$$

Чтобы решить эти уравнения, необходимо задать лишь ε_{∞} и A (считая, конечно, что ищется критическое решение и что $\tau \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$). При переходе к размерным величинам из одного безразмерного решения можно получить несколько различных решений. Дальнейшее преобразование [531] позволяет уменьшить число произвольных постоянных до одной (только в случае *ветра*). Именно, положим $\tau = \tau / \varepsilon_{\infty}$, $\psi = \psi / \varepsilon_{\infty}$ и $\lambda = \lambda / \varepsilon_{\infty}$. Тогда в новых переменных уравнение (15.68) сохраняет прежний вид, а уравнение (15.69) переходит в следующее:

$$K \tau^{5/2} d\tau / d\lambda = 1 - \frac{1}{2} \psi + \lambda - \frac{5}{2} \tau, \quad (15.72)$$

где $K = \varepsilon_{\infty}^{3/2} A$. Большое число решений для широкого диапазона значений параметра K дано в [201]. Там же приводится пример то-

го, как следует находить единственное размерное решение при заданных значениях параметров, скажем, T_0 и F . Решения, описывающие бриз, подробно обсуждаются в [532].

Упражнение 15.8. Выполнить переход к безразмерным переменным и проверить вывод уравнений (15.67) — (15.72).

ПЕРЕХОД В МЕЖЗВЕЗДНУЮ СРЕДУ

Для всех полученных выше решений при $r = \infty$ давление обращается в нуль. На самом деле давление в межзвездной среде имеет хотя и малую, но конечную величину $p_i \lesssim 10^{-11}$ дин/см². Когда движущийся с большой скоростью газовый поток ветра встречается с межзвездной средой, образуется стационарная ударная волна ([624], стр. 306; [665]), на фронте которой скорость течения скачком уменьшается до малой величины, а плотность и температура повышаются. Происходит скачкообразный переход от критического решения (кривая 3 на рис. 15.1) к одному из дозвуковых решений типа 6, показанных на рис. 15.1. За фронтом ударной волны вещество в конце концов охлаждается и рекомбинирует, а скорость падает до нуля (см., например, [106]).

На больших расстояниях от звезды ветер сильно сверхзвуковой, и газовое давление пренебрежимо мало по сравнению с плотностью кинетической энергии. Таким образом, давление межзвездной среды должно уравниваться *динамическим давлением* вещества ветра. Поэтому имеем

$$mnv^2 \approx p_i. \quad (15.73)$$

Из уравнения неразрывности и предположения о том, что v примерно постоянно, следует, что $n(r) = n_{\oplus}(r_{\oplus}/r)^2$. Пользуясь этим соотношением, можно оценить расстояние до ударного фронта в солнечном ветре, именно

$$r_s/r_{\oplus} = (mn_{\oplus}v^2/2p_i)^{1/2}. \quad (15.74)$$

Принимая $n_{\oplus} \approx 10$ см⁻³, $v \approx 300$ км/с и используя для p_i приведенную выше верхнюю оценку, находим, что $r_s \gtrsim 30$ а.е. (т.е. r_s превышает радиус орбиты Нептуна). Физические условия в потоке за фронтом ударной волны можно оценить, пользуясь соотношениями Рэнкина — Гюгонио [формулы (15.44) — (15.46)]. При осторожном предположении, что температура спадает как $r^{-2/7}$, получаем, что перед фронтом она оказывается порядка $4 \cdot 10^4$ К. Отсю-

да следует, что скорость звука в ионизованном водороде составляет около 25 км/с, так что число Маха равно приблизительно 12. В пределе больших чисел Маха соотношения Рэнкина — Гюгонно приводятся к виду

$$v_2 = v_1(\gamma - 1)/(\gamma + 1), \quad (15.75)$$

$$n_2 = n_1(\gamma + 1)/(\gamma - 1) \quad (15.76)$$

и

$$p_2 = 2n_1mv^2/(\gamma + 1), \quad (15.77)$$

причем при выводе соотношения (15.77) было использовано соотношение

$$p_1 M_1^2 = (p_1/a_s^2)v_1^2 = (\rho_1/\gamma)v_1^2.$$

Здесь индекс 1 относится к веществу перед фронтом, индекс 2 — к веществу за фронтом ударной волны. Подставляя соотношения (15.76) и (15.77) в уравнение состояния идеального газа, получаем, что температура за фронтом равна

$$T_2 = (\gamma - 1)mv^2/[(\gamma + 1)^2k]. \quad (15.78)$$

При этом мы принимаем, что вещество остается полностью ионизованным и что протонная и электронная температуры успевают сравняться. Считая $\gamma = 5/3$, видим, что $v_2 = v_1/4 \approx 75$ км/с, а $T_2 = 3mv^2/(32k) \approx 10^6$ К (так что вещество за фронтом действительно движется с дозвуковой скоростью, как это и следовало ожидать согласно упражнению 15.3,6 при $M_1 \gg 1$).

Поступление в межзвездную среду горячего быстро движущегося вещества звездного ветра оказывает важное влияние на баланс энергии в ней. Нарисованная нами картина намеренно является сильно упрощенной. Были выполнены и более детальные расчеты, в которых учитывалось влияние «межзвездного ветра» (возникающего из-за движения Солнца относительно межзвездной среды), а также магнитных полей и теплопроводности (см., например, [498], гл. IX).

МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ЗАМЕДЛЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ ЗВЕЗД

Прямые наблюдения показывают, что Солнце обладает магнитным полем. Поскольку вещество короны полностью ионизовано, его электропроводность (и теплопроводность) чрезвычайно высока и поэтому магнитные поля «вморожены» в вещество (т.е. заряженные частицы не могут свободно диффундировать поперек силовых

линий). Крупномасштабное расширение короны должно поэтому приводить к выносу солнечного магнитного поля в межпланетное пространство. Если бы Солнце не вращалось, силовые линии были бы направлены по радиусу. Однако в действительности Солнце вращается, а силовые линии следует считать закрепленными на солнечной поверхности. Силовые линии, исходящие из некоторой точки на поверхности Солнца, будут вытянуты вдоль линий тока жидкости для наблюдателя во вращающейся системе отсчета, связанной с Солнцем. Это порождает спиралевидную структуру межпланетного поля [496]; [498], стр. 137; [107], стр. 67; [324], стр. 11.

При учете магнитного поля физика течения жидкости в ветре становится гораздо более сложной, и в результате возникают значительные математические трудности. Заниматься здесь этой проблемой мы не будем, а лишь отошлем заинтересованного читателя к литературе (см., например, [463], [659]). Однако представляет большой интерес вычисление углового момента, уносимого ветром, поскольку эта потеря момента имеет важные последствия для вращения звезд. Напряженность магнитного поля должна удовлетворять уравнению Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, из которого следует, что в сферической системе координат $B_r(r) = (r_0/r)^2 B(r_0)$. Азимутальную компоненту спиралевидного поля B_ϕ можно выразить через B_r , а потому можно рассчитать и полное поле. Далее можно оценить отношение плотности энергии в движущемся веществе к плотности магнитной энергии, т.е. величину $\alpha = \frac{1}{2} m n v^2 / (B^2 / 8\pi)$. Оказывается, что вблизи земной орбиты $\alpha \gg 1$, но у основания короны α мало. Это означает, что хотя на больших расстояниях поле не влияет на движение среды и увлекается веществом, глубже в потоке оно играет определяющую роль. Здесь магнитное поле способно увлечь за собой вещество за счет вращения Солнца, как оно видно при наблюдении из неподвижной системы отсчета. Таким образом, существует область с $r \leq r_A$, в которой вещество вынуждено *вращаться вместе* с Солнцем, и область с $r > r_A$, где вещество оттекает практически радиально. Интуитивно можно ожидать, что переход от одной области к другой происходит на таком расстоянии r_A , где $\alpha = 1$. Детальный анализ показывает [463]; [659]; [324], §III.15; [107], §3.7, что это предположение правильно. Скорость магнитогидродинамических *альвеновских волн* равна $v_A = (B^2 / 4\pi\rho)^{1/2}$, так что α есть не что иное, как квадрат *альвеновского числа Маха*: $\alpha = (v/v_A)^2 = M_A^2$. Следовательно, вещество потока вращается вместе с Солнцем внутри *альвеновской критической сферы*, а вне ее оттекает радиально. Альвеновскую скорость в

окрестности земной орбиты можно непосредственно измерить. Используя уравнение неразрывности и зависимость $B \propto r^{-2}$, а также требование, чтобы $M_A = 1$ в альвеновской критической точке, находим

$$r_A/r_\odot = v_A(r_\odot)/[v(r_A)v(r_\odot)]^{1/2}. \quad (15.79)$$

Нижнюю оценку для r_A можно получить, положив $v(r_A) \approx v(r_\odot)$. Подставляя численные значения, находим, что $r_A \approx 20R_\odot$. Это большое расстояние, и поэтому влияние магнитного поля приводит к значительному увеличению углового момента, который несет с собой вещество ветра.

Упражнение 15.9. Проверить формулу (15.79) и численную оценку r_A .

Угловой момент частицы единичной массы, находящейся на экваторе звезды, равен $l_0 = \omega r_A^2$, где ω — угловая скорость вращения звезды. Поэтому полный угловой момент, теряемый со всей поверхности звезды, равен

$$dL/dt = -4\pi r^2 n v m l_0 \int_0^{\pi/2} \cos^3 \theta d\theta = -\frac{2}{3} \dot{M} l_0, \quad (15.80)$$

где мы учли тот факт, что на широте θ угловой момент частицы $l(\theta) = l_0 \cos^2 \theta$. Эта потеря углового момента, уносимого ветром, вызывает замедление вращения звезды. Время замедления вращения вследствие такого торможения можно оценить из соотношения $dL/dt \approx -L/\tau$. Представив L в виде $L = I\omega$, где I — момент инерции, находим, что $\tau = \frac{3}{2} I/(\dot{M} l_0)$. Для Солнца $I = 6 \cdot 10^{53} \text{ г} \cdot \text{см}^2$.

Взяв $\dot{M} = 2 \cdot 10^{-14} M_\odot$ в год и $r_A \approx 20R_\odot$, получаем $\tau \approx 10^{10}$ лет, что сравнимо с характерным временем термоядерной эволюции Солнца. Таким образом, если свойства солнечного ветра, характерные для него в настоящее время, со временем не меняются, то следует ожидать, что угловой момент Солнца за время его жизни на главной последовательности значительно уменьшился.

Одна из поразительных особенностей статистики скоростей вращения звезд состоит в резком спаде наблюдаемой средней скорости вращения $\langle v \sin i \rangle$ как функции спектрального типа для звезд спектрального типа F и более поздних. Хотя не исключено, что это уменьшение связано с образованием планетных систем (в Солнеч-

ной системе на долю Солнца приходятся лишь 2 процента углового момента), весьма знаменательно, что это как раз та точка, где у звезд появляются глубокие водородные конвективные зоны, и потому они, по-видимому, имеют короны и создают звездный ветер. Поэтому очень заманчиво предположить [554], что все звезды, относящиеся к классам позднее F, теряют свой угловой момент вследствие магнитного торможения за счет звездного ветра. Характерное время такого торможения можно оценить из исследования средних скоростей вращения звезд, входящих в скопления, возраст которых можно найти по теории звездной эволюции. Если это сделать, то оказывается, что с увеличением возраста действительно происходит сильное замедление вращения [362] и что время торможения может составлять всего $5 \cdot 10^8$ лет. Хотя характерное время торможения для звезд получается много короче времени, определяемого *современным* солнечным ветром, известно, что хромосферная активность (а также, как предполагают, и активность системы корона — ветер) уменьшается с возрастом [675], [677]. Поэтому возможно, что, в ранний период жизни Солнца ветер был сильнее и обеспечивал более эффективное торможение. Приведенное обсуждение служит хорошим примером плодотворного обмена идеями, происходящего, когда солнечные характеристики используются для построения подробных физических моделей определенного явления, а затем эти модели применяются к звездам. При этом появляется возможность получить результаты, имеющие значение для исследования звездной эволюции на больших временных интервалах.

ДЕТАЛИ ФИЗИКИ СОЛНЕЧНОГО ВЕТРА

Изучение солнечного ветра путем прямых измерений со спутников значительно углубило наше понимание физики корональных течений. В ходе попыток согласовать теорию с наблюдениями в теорию были внесены многочисленные улучшения с целью уточнить описанную выше основную модель и добиться большего реализма. Объем книги позволяет лишь дать перечень тех физических проблем, которые здесь изучались. Более подробное обсуждение см., например, в [324] или в [107] и в цитированной там литературе.

Во-первых, возникает вопрос, насколько хорошо согласуется с наблюдательными данными одножидкостная модель с теплопроводностью. Если в качестве типичной модели взять модель Ванга и Чанга [667], то найдем, что на расстоянии, равном радиусу земной орбиты, $n = 8 \text{ см}^{-3}$, $v = 260 \text{ км/с}$ и $T = 1,6 \cdot 10^5 \text{ К}$. Сравнение с наблюдаемыми значениями, приведенными в табл. 15.1, показыва-

ет, что эта модель дает хорошее согласие для концентрации и что одножидкостная температура хорошо согласуется с электронной температурой, но примерно в четыре раза больше протонной температуры. Скорость получается заниженной примерно на 20%. То, что протоны и электроны могут иметь разные температуры, объясняется очень низкими плотностями, а потому и малой частотой столкновений в солнечном ветре вблизи $r_{\oplus}$. Частота столкновений настолько мала, что они не могут обеспечить равномерное распределение тепловой энергии между двумя компонентами (более того, оказалось, что распределение тепловых скоростей как у электронов, так и у протонов анизотропно). Были построены двухжидкостные модели [618], [282], в которых допускается, что электроны и протоны могут иметь разные температуры. Уравнение энергии записывается для каждой компоненты по отдельности, причем вводится член вида $3/2\nu k(T_p - T_e)$, описывающий обмен энергией; здесь ν — частота столкновений за счет кулоновского взаимодействия заряженных частиц. Типичные модели этого типа дают $n \approx 15 \text{ см}^{-3}$, $v \approx 250 \text{ км/с}$, $T_e \approx 3,4 \cdot 10^5 \text{ К}$ и $T_p \approx 4,4 \cdot 10^3 \text{ К}$ при $r = r_{\oplus}$. В этих моделях плотность примерно вдвое больше, скорость на 20 процентов ниже, электронная температура в два раза выше и протонная температура в 10 раз ниже наблюдаемых. Хотя возможности, заложенные в двухжидкостной модели, безусловно, позволяют добиться большего физического реализма, чем это возможно для одножидкостных моделей, количественные результаты большого впечатления не производят. В частности, обмен энергией между протонами и электронами должен, по-видимому, происходить более эффективно, чем с учетом одних только кулоновских столкновений. Этот обмен рассматривается в предположении, что частицы имеют изотропное максвелловское распределение по скоростям и что влиянием магнитного поля можно пренебречь. Возможно, все эти предположения не соответствуют действительности. Однако основные расхождения, по-видимому, исчезают, если учесть влияние вязкости.

Магнитные поля могут играть важную роль в природе солнечного ветра за счет действия магнитных сил, за счет влияния, оказываемого ими на величину коэффициентов переноса, таких, как коэффициент теплопроводности, а также за счет переноса и диссипации энергии магнитогидродинамическими волнами. Каждый из этих эффектов приводит к значительному усложнению теории и может заметно изменить детальную картину результатов. Хуже то, что если допустить возможность подвода импульса и энергии к

ветру на протяжении всего течения (от *любого* источника, не обязательно магнитного), то это приводит к изменению всей топологии допустимых решений уравнений и вызывает появление разнообразных возможностей помимо тех, что показаны на рис. 15.1 [307].

Во всех описанных выше моделях влияние вязкости не учитывалось. Если ввести силы вязкости, то получается система уравнений более высокого порядка и уравнение движения уже не имеет сингулярной (или критической) точки [668]. Первые одножидкостные модели с вязкостью [553], [668], в которых использовались классические коэффициенты вязкости для протонно-электронной плазмы, были неудовлетворительными, поскольку они давали заниженные примерно вдвое температуры и скорости течения. Это затруднение удастся преодолеть, если учесть влияние магнитного поля на тензор вязких напряжений [660], и в современных моделях с вязкостью [681] получаются правильные значения скорости, а протонная температура (слишком низкая в двухжидкостных моделях без вязкости) возрастает до значений, близких к наблюдаемым.

Даже самые лучшие сферически-симметричные модели описывают реальный солнечный ветер лишь весьма схематически, поскольку все характеризующие его физические переменные за характерное время в несколько дней меняются в широких пределах. Наиболее заметными из имеющихся структурных особенностей являются движущиеся с большой скоростью потоки плазмы. Часто они наблюдаются повторно с периодом, равным синодическому периоду вращения Солнца. Отсюда видно, что они являются следствием особых условий, существующих в отдельных локальных областях короны. Кроме того, при вспышках возникают мощные ударные волны, которые вызывают геомагнитные бури. Эти структурные образования часто сложным образом взаимодействуют друг с другом. Становится все более очевидным, что рассматривать солнечный ветер как плавное течение, на которое наложены «нетипичные» структурные детали, — это чрезмерное упрощение. Правильнее считать, что эти сложные структуры и являются в некотором смысле самым солнечным ветром. Аналогичным образом мы начинаем понимать, что ветер не возникает в короне при строго определенных плавно меняющихся от точки к точке условиях, а может появляться в весьма специфических областях с заметно различающимися свойствами. Он может видоизменяться за счет взаимодействия с магнитными полями и за счет быстрого (несферического) расширения из ограниченного начального объема. Когда-нибудь будет решена проблема построения полной трехмерной модели с зависимостью от времени. Данные, для объяснения которых требу-

ются (и которые, наоборот, позволяют получить) такие решения, имеются на самом деле только для *солнечного* ветра. Однако ясно, что эти результаты будут иметь важные последствия также и для изучения звездного ветра.

ЗВЕЗДНЫЕ КОРОНЫ И ЗВЕЗДНЫЙ ВЕТЕР

Как упоминалось выше, разумно предполагать, что все звезды, имеющие водородные конвективные зоны, должны обладать коронами и создавать ветер. Далее, из многих звезд несомненно происходит намного более мощное истечение вещества, чем из Солнца, поскольку из ветер имеет достаточно большую оптическую толщину в некоторых спектральных линиях, чтобы возникали смещенные линии или линии типа Р Лебеда. Не приходится и говорить, что о звездном ветре известно меньше, чем о солнечном. В этой быстро развивающейся области многое еще предстоит сделать. Тем не менее ряд интересных результатов получается даже из очень упрощенных расчетов.

Паркер подчеркивает [498], гл. ХУ, что количество энергии, расходуемое на расширение короны, очень быстро растет с увеличением ее температуры. Например, для Солнца расход энергии изменяется от 10^{27} до $3 \cdot 10^{30}$ эрг/с, когда T_0 меняется от 10^6 до $4 \cdot 10^6$ К. Поэтому корональный ветер действует как очень эффективный термостат, регулирующий температуру короны. Если имеется ветер, то необходимо, чтобы температура короны была совместима с истечением, т.е. $T_0 \lesssim G\mathcal{M}/4kR$. Для Солнца численный множитель 4 в этой формуле заменяется на 10, так что можно ожидать, что

$$T_0 \approx 0,1G\mathcal{M}/kR. \quad (15.81)$$

Для звезд главной последовательности отношение $\mathcal{M}/R$ меняется всего в два раза в ту и другую сторону относительно его значения для Солнца, что, как можно предполагать, влечет существование сходной ограниченной области значений T_0 (которая меньше, чем область изменения температуры фотосферы). Напротив, энергия ветра может меняться в широких пределах (возможно, даже в более широких, чем светимость звезд). Для звезд-гигантов и сверхгигантов $\mathcal{M}/R$ намного меньше, чем для звезд главной последовательности, и соответственно T_0 должно быть также намного меньше. Например, для сверхгигантов типа М формула (15.81) дает $T_0 \approx 4 \cdot 10^4$ К. При таких низких температурах теплопроводность

становится неэффективной, и необходимо привлечь какой-то другой механизм нагрева всего объема короны [665], [666]. Вполне возможно, что значительная диссипация волн происходит по всей короне. Аналогично рассуждая, можно сказать, что скорость ветра в конце концов достигает величины, составляющей некоторую заметную долю от скорости убегания, и поэтому можно ожидать, что

$$v_{\infty} \geq (2GM/R)^{1/2}. \quad (15.82)$$

Это означает, что v_{∞} также мало меняется вдоль главной последовательности и что у сверхгигантов скорость ветра довольно низка. Развитые выше представления основаны на *предположении*, что на том уровне, где температура короны максимальна, ветер является дозвуковым. Если, однако, критическая точка ветра лежит *ниже* этого уровня, то ход температуры с расстоянием не является более монотонным и свойства течения могут быть существенно иными.

Чтобы построить детальные модели или использовать существующие расчеты (см., например, [201]), необходимо теоретическим путем определить соответствующие характеристики короны (n_0 и T_0) либо найти одну из этих величин и какой-нибудь параметр течения, например скорость потери массы, которую иногда можно определить из наблюдений. Расчет условий в коронах чрезвычайно труден. В основе здесь лежит вычисление потока акустической энергии, порождаемого конвективной зоной (см., например, [394], [395], [525], [601]), расчет диссипации этого потока в корональном веществе и получение (с учетом потерь на излучение и на перенос энергии за счет теплопроводности) распределения температуры и плотности для модели короны (см., например, [192], [377], [378], [630], [631], [632]). На каждом из этих шагов приходится пользоваться ненадежной теорией и по необходимости приходится делать множество предположений. Поэтому окончательные результаты нельзя считать очень надежными. В частности, ни в одном из вариантов хорошего согласия с наблюдаемыми характеристиками солнечной короны не получается (см. рис. 21 в [192]). Однако если просто принять на веру результаты этих расчетов, сколь бы они ни были ненадежны, то оказывается, что среди звезд главной последовательности максимальный акустический поток имеют звезды спектральных типов, близких F0. Для этих звезд $T_0 \approx 4 \cdot 10^6$ К и $n_0 \approx 3 \cdot 10^{10}$ см⁻³ [192]. Следует ожидать, что у них имеется мощный корональный ветер. Если T_0 и n_0 считать известными, то для построения модели ветра можно использовать упоминавшиеся выше расчеты.

Обсуждение энергетики звездных корон и звездного ветра также весьма поучительно [290]. Корона нагревается потоком подводимой к ней механической энергии F_m и теряет энергию путем излучения и теплопроводности, а также в виде кинетической энергии ветра. Анализ показывает, что при заданном давлении в короне скорость потери энергии за счет истечения вещества и теплопроводности с ростом температуры *увеличивается*, потери же за счет излучения *уменьшаются*. Поэтому при заданном давлении существует температура, при которой полная энергия, теряемая короной, минимальна. Далее, потери, обусловленные всеми тремя этими процессами, с увеличением давления возрастают. Поэтому для корон с минимальным потоком имеется монотонная зависимость между давлением в короне и потоком энергии, необходимым для поддержания короны и ветра. Это позволяет думать, что задание потока F_m однозначно *определяет* температуру и давление в короне, а следовательно, и свойства ветра. (На самом деле нужно еще показать, что если мы имеем некоторую корону с минимальным потоком и произвольным образом меняем F_m , то корона *обязательно* переходит в другое состояние с минимальным потоком.) Конкуренция между этими процессами приводит к появлению трех основных классов корон. 1) При малых значениях F_m основные потери энергии обусловлены теплопроводностью и излучением. Примером служит система корона — ветер Солнца, где на ветер затрачивается всего около 10% подводимого к короне потока механической энергии. (Если ветер возникает в пространственно локализованных областях короны, например в *корональных дырах*, то *локальная* эффективность преобразования может быть намного выше.) 2) При промежуточных значениях F_m потери обусловлены в основном излучением и истечением вещества. Примером служит ветер у сверхгиганта α Суг типа A2, где потери, связанные с ветром, преобладают потери на излучение еще играют некоторую роль, а потери за счет теплопроводности пренебрежимо малы. 3) При очень больших значениях F_m полностью доминируют затраты энергии на истечение вещества. Для звезд ранних спектральных типов скорость потери массы достигает $10^{-6} + 10^{-5} M_{\odot}$ в год. Чтобы возникал такой ветер, потребовались бы чрезвычайно высокие температуры корон (которые, по-видимому, исключаются наблюдениями). Здесь, однако, ветер возникает под действием давления излучения (см. §15.4).

15.3. Радиационная гидродинамика

Как в атмосфере, так и во внутренних слоях звезд имеются мощные поля излучения, которые могут сильно влиять на приток

(и отток) энергии и импульса к веществу, а потому и на его движение. В такой ситуации при изучении динамики течения целесообразно считать, что жидкость состоит как из частиц вещества, так и из фотонов, и учитывать вклад частиц обоих типов в уравнения движения и сохранения энергии. Таким способом получают уравнения *радиационной гидродинамики*, описывающие совместное течение газа и излучения. Имея в виду те приложения, которые представляют для нас интерес, будем предполагать, что скорость течения $v \ll c$, и поэтому частицы вещества можно рассматривать как нерелятивистские. В некоторых других ситуациях (например, в случае сверхновых или при термоядерных взрывах) это предположение может и не выполняться. Несмотря на ограничение $v \ll c$, тот факт, что фотоны имеют скорость c , приводит к появлению некоторых тонкостей в описании взаимодействия вещества и излучения, и вывод уравнений, в которых это взаимодействие описывается вполне последовательно, представляет собой нетривиальную задачу. В конечном счете оказывается проще всего и надежнее всего с самого начала выводить их в релятивистски ковариантном виде [621], [524], [664], [135]. Эти уравнения можно затем упростить, удерживая только члены порядка v/c и опуская члены порядка v^2/c^2 и более высоких порядков. Следует еще раз отметить, что так же, как это имело место при рассмотрении уравнения переноса в сопутствующей системе координат, недостаточно использовать одно общее преобразование Лоренца, так как скорость течения является, вообще говоря, функцией координат и времени. Как и прежде, будем рассматривать преобразования, описывающие переход от совокупности равномерно движущихся систем, которые в данный момент времени движутся вместе со средой.

Радиативные члены в уравнениях радиационной гидродинамики можно в принципе выразить через величины, измеренные либо в лабораторной системе отсчета, либо в системе, связанной со средой. Хотя уравнения радиационной гидродинамики в неподвижной системе отсчета записать в некоторых отношениях легче (см., например, [521], [551], [692]), оказывается, что в *системе отсчета, движущейся вместе со средой*, они имеют *более простой вид*, поскольку радиативные члены легче всего вычислять именно в этой системе отсчета [621], [135]. В прошлом этот подход широко не использовался, так как для того, чтобы вычислить необходимые характеристики поля излучения, нужно уметь решать уравнение переноса в сопутствующей системе. Как было показано в §14.3, уравнение переноса в сопутствующей системе легко решается современны-

ми методами (и в некоторых отношениях оно даже проще, чем уравнение, записанное в неподвижной системе, в котором из-за зависимости коэффициентов поглощения и излучения от углов, возникающей вследствие эффекта Доплера, появляются дополнительные сложности). Поэтому мы сосредоточим внимание главным образом на выводе уравнений в сопутствующей системе отсчета. Однако будет также показано, что эти уравнения согласуются (с точностью до членов порядка v/c) с уравнениями, записанными в неподвижной системе отсчета. В нашей книге будут рассматриваться только одномерные сферически-симметричные течения. Обширную сводку формул для трехмерных течений в различных координатных системах можно найти в [521], гл. 9.

ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА ВЕЩЕСТВА И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИЗЛУЧАЮЩЕЙ СРЕДЫ

В *декартовой* системе координат $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, y, z, ict)$ ковариантная запись уравнений движения и сохранения энергии для одного только вещества дает систему уравнений вида

$$\partial T^{\alpha\beta}/\partial x^\beta = F^\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, 4, \quad (15.83)$$

где F^α — *4-вектор силы (сила Минковского)* и $T^{\alpha\beta}$ — тензор, описывающий поток импульса (напряжения), плотность импульса и плотность энергии вещества. Сходные уравнения для излучения были выписаны в § 14.3 [см. формулы (14.118) — (14.122)], и по аналогии с формулой (14.120) можно ожидать, что $T^{\alpha\beta}$ имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} \Pi & ic\mathbf{G} \\ ic\mathbf{G} & -E \end{pmatrix}, \quad (15.84)$$

где Π , $\mathbf{G}$ и E — соответствующие ковариантные обобщения тензора потока импульса, вектора плотности импульса и плотности полной энергии вещества соответственно. На тензор T накладываются три условия, а именно: требуется, чтобы он 1) выражался через скалярные инварианты и 4-векторы, т.е. был ковариантным, 2) принимал правильную предельную форму в системе отсчета, покоящейся относительно среды, и 3) давал правильный нерелятивистский предел в лабораторной системе отсчета.

Прежде всего введем *собственное время* — 4-скаляр (инвариант)

$$(d\tau)^2 = -(dx_\alpha dx^\alpha)/c^2 = (dt)^2 - c^{-2}[(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2]. \quad (15.85)$$

Ясно, что $d\tau$ стремится к dt при $v \rightarrow 0$. Введем, далее, *контравариантную 4-скорость*

$$V^\alpha = dx^\alpha/d\tau. \quad (15.86)$$

Замечая, что, согласно формуле (15.85), $dt/d\tau = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = \gamma$, где v — обычная скорость: $v^2 = (dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 + (dz/dt)^2$, имеем

$$\begin{aligned} V^i &= (dx^i/dt)(dt/d\tau) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} (dx^i/dt) = \\ &= \gamma v^i, \quad (i = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (15.87a)$$

$$V^4 = ic(dt/d\tau) = ic\gamma. \quad (15.87b)$$

Отметим, между прочим, что $V_\alpha V^\alpha = -c^2$ — мировой скаляр (который инвариантен относительно любых преобразований координат, в чем можно легко убедиться, пользуясь трансформационными свойствами ковариантных и контравариантных векторов). Далее, если ρ_0 , e и p — соответственно инвариантная плотность вещества (т.е. концентрация частиц, умноженная на среднюю массу покоя частицы), удельная внутренняя энергия и давление, измеренные в системе отсчета, покоящейся относительно среды, то эквивалентная полная плотность есть

$$\rho_{00} = \rho_0(1 + e/c^2). \quad (15.88)$$

Введем также, следуя Томасу [621],

$$\rho_{000} = \rho_{00} + p/c^2 = \rho_0(1 + h/c^2). \quad (15.89)$$

Здесь h — удельная энтальпия газа, а $\rho_0 h/c^2$ представляет собой массу, эквивалентную полной энергии микроскопических движений в газе (в расчете на единицу объема).

Замечая, что в нерелятивистском пределе $\Pi^i = \rho v^i v^j + p \delta^{ij}$, $G^i = \rho v^i$, можно по аналогии предположить, что

$$T^{\alpha\beta} = \rho_{000} V^\alpha V^\beta + p \delta^{\alpha\beta}, \quad (15.90)$$

где $\delta^{\alpha\beta}$ — обычный символ Кронекера. Очевидно, что (15.90) удовлетворяет сформулированному выше условию 1. Выпишем компоненты в более подробном виде:

$$T^{ij} = \rho_{000} V^i V^j + p \delta^{ij} = \rho_1 v^i v^j + p \delta^{ij}, \quad (15.91a)$$

$$T^{i4} = T^{4i} = ic\gamma\rho_{000} V^i = ic\rho_1 v^i \quad (15.91b)$$

и

$$T^{44} = -c^2\gamma^2\rho_{000} + p = -c^2\rho_1 + p, \quad (15.91b)$$

где $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3$ и $\rho_1 = \gamma^2 \rho_{000}$. Заметим, далее, что в системе отсчета, связанной со средой, где $v = 0$, тензор T становится диагональным, причем $T^{ii} = p = (\Pi^{ii})_0$ и $T^{44} = -(\rho_0 c^2 + \rho_0 e)$. Это дает правильное статическое давление и правильную энергию в расчете на единицу объема среды (с учетом энергии покоя вещества). Таким образом, сформулированное выше условие 2 выполнено. Далее, рассмотрим T в нерелятивистском пределе (при $v/c \ll 1$). Заметим прежде всего, что если ρ_0 — плотность в сопутствующей системе отсчета, то, поскольку элемент объема преобразуется по формуле $dV = \gamma^{-1} dV_0$ (лоренцевское сокращение), плотность, измеренная в лабораторной системе отсчета, будет равна $\rho = \gamma^2 \rho_0$. Поэтому, разлагая каждый элемент тензора T в ряд по степеням v/c и удерживая только главные члены, непосредственно убеждаемся, что T^{ij} и T^4 (или T^{4i}) дают правильные выражения для тензора потока импульса и для плотности импульса, а

$$\begin{aligned} T^{44} &= -\gamma^2(\rho_0 c^2 + \rho_0 e + \rho v^2/c^2) \rightarrow -\gamma(\rho c^2 + \rho e) \approx \\ &\approx -(\rho c^2 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho e), \end{aligned} \quad (15.92)$$

что представляет собой нерелятивистское выражение для плотности энергии (с учетом энергии покоя вещества). Таким образом, T удовлетворяет и сформулированному выше условию 3.

Действие внешних сил на среду описывается при помощи 4-силы F^α (в расчете на единицу объема). Ее пространственные составляющие дают скорость увеличения импульса вещества в расчете на единицу объема, а временная составляющая определяет скорость увеличения энергии единицы объема. Выражение $V_\alpha F^\alpha$ представляет собой *инвариант*, и поэтому он может вычисляться в любой системе отсчета. В частности, мы можем найти его в системе отсчета, движущейся вместе с веществом. В этой системе

$$V_\alpha F^\alpha = (V_4 F^4)_0 = -c^2 d\rho_{00}/dt. \quad (15.93)$$

В отсутствие эффектов общей теории относительности производная в правой части будет равна нулю, если нет изменений собственной плотности, обусловленных высвобождением химической энергии или превращением вещества в энергию, например, при термоядерных реакциях. Таким образом, $V_\alpha F^\alpha = 0$. Заметим, что из этого соотношения следует, что в сопутствующей системе отсчета $(F^4)_0 = 0$. Этот результат понадобится нам в дальнейшем.

Движение одного только вещества описывается уравнением (15.83), где $T^{\alpha\beta}$ определяется формулой (15.90). Если $R^{\alpha\beta}$ — тензор энергии — импульса излучения [см. формулу (14.120)], то уравнения

движения среды, состоящей из вещества и излучения, имеют вид

$$\partial(T^{\alpha\beta} + R^{\alpha\beta})/\partial x^\beta = F^\alpha, \quad (15.94)$$

или

$$\partial T^{\alpha\beta}/\partial x^\beta = F^\alpha + g^\alpha, \quad (15.95)$$

где g^α дается формулой (14.121). Кроме того, можно написать уравнение неразрывности для частиц вещества (фотоны не имеют массы покоя). Потребовав сохранения их числа, получим

$$\partial(\rho_0 V^\alpha)/\partial x^\alpha = 0. \quad (15.96)$$

УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ В СОПУТСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Если предположить, что для среды, состоящей из вещества и излучения, в системе отсчета, движущейся вместе с веществом, остается верным первый закон термодинамики, то единственное изменение в уравнении энергии для газа [см. уравнение (15.24)] должно быть связано с учетом притока и оттока энергии от вещества (в расчете на единицу объема за единицу времени) за счет его взаимодействия с полем излучения. Поэтому можно написать

$$\rho_0 D\epsilon/Dt - (p/\rho_0) D\rho_0/Dt = 4\pi \int_0^\infty (\chi_\nu^0 J_\nu^0 - \eta_\nu^0) d\nu, \quad (15.97)$$

где D/Dt — лагранжева производная, вычисляемая для заданного элемента движущегося вещества, а χ_ν^0 , η_ν^0 и J_ν^0 относятся к *сопутствующей системе отсчета*, которая покоится относительно газа. Сейчас будет показано, что сделанное нами априорное предположение в самом деле верно, и уравнение (15.97) является совершенно строгим [621], [135]. Умножая скалярно уравнения движения (15.95) на $-V_\alpha$ и используя явное выражение для $T^{\alpha\beta}$, даваемое формулой (15.90), находим

$$-(V_\alpha V^\alpha) \frac{\partial(\rho_{000} V^\beta)}{\partial x^\beta} - \rho_{000} V^\beta \left(V_\alpha \frac{\partial V^\alpha}{\partial x^\beta} \right) - V^\alpha \frac{\partial p}{\partial x^\alpha} = -V_\alpha F^\alpha - V_\alpha g^\alpha. \quad (15.98)$$

Но $V_\alpha V^\alpha = -c^2$, так что $V_\alpha \partial V^\alpha / \partial x^\beta = \partial(\frac{1}{2} V_\alpha V^\alpha) / \partial x^\beta = 0$, и, если вспомнить, что $V_\alpha F^\alpha = 0$, то уравнение (15.98) принимает вид

$$c^2 \partial(\rho_{000} V^\alpha) / \partial x^\alpha - V^\alpha \partial p / \partial x^\alpha = -V_\alpha g^\alpha. \quad (15.99)$$

Далее, умножая (15.96) на $(c^2 + e + p/\rho_0)$, вычитая затем результат из (15.99) и учитывая, что $D/Dt = V^\alpha(\partial/\partial x^\alpha)$, получаем

$$\rho_0(De/Dt) - (p/\rho_0)(D\rho_0/Dt) = -V_\alpha g^\alpha. \quad (15.100)$$

Упражнение 15.10. Провести выкладки, необходимые для получения (15.100) из (15.99).

Поскольку левая часть уравнения (15.100) записана в системе, движущейся с веществом, то и величину, стоящую в правой части, можно вычислять в сопутствующей системе отсчета. В этой системе, очевидно, $V^i = 0$, $i = 1, 2, 3$, и $V^4 = ic$, а согласно (14.121)

$$g^4 = (4\pi i/c)(\chi_\nu^0 j_\nu^0 - \eta_\nu^0) d\nu, \quad (15.101)$$

причем мы воспользовались тем, что коэффициенты поглощения и излучения в сопутствующей системе не зависят от углов. Таким образом, ясно, что уравнение (15.100) сводится к уравнению (15.97), которое поэтому действительно представляет собой правильное уравнение энергии для вещества, взаимодействующего с излучением.

УРАВНЕНИЕ ДВИЖЕНИЯ В СОПУТСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

Чтобы получить уравнение движения в сопутствующей системе отсчета, можно предположить, что силу, с которой излучение действует на вещество, нужно добавить к обычным объемным силам, скажем, к силе тяжести. При использовании сопутствующей системы отсчета сила, с которой излучение действует на вещество, равна [см. (14.121)]

$$\mathbf{g}_R^0 = c^{-1} \chi_\nu^0 \vec{\mathcal{F}}_\nu^0 d\nu, \quad (15.102)$$

где χ_ν^0 и $\vec{\mathcal{F}}_\nu^0$ также берутся в сопутствующей системе. Здесь мы воспользовались также тем, что в этой системе χ_ν^0 и η_ν^0 не зависят от углов. Поэтому уравнение (15.21) позволяет надеяться, что

$$\rho D\mathbf{v}/Dt = -\nabla p + \mathbf{F} + c^{-1} \chi_\nu^0 \vec{\mathcal{F}}_\nu^0 d\nu. \quad (15.103)$$

Чтобы убедиться в справедливости уравнения (15.103), рассмотрим i -ю составляющую уравнения (15.95), которую при помощи формул (15.91) можно записать в виде

$$\partial(\rho_1 v^i)/\partial x^i + \partial(\rho_1 v^i)/\partial t + \partial p/\partial x^i = F^i + g^i, \quad (15.104)$$

или

$$\rho_1 \frac{\partial v^i}{\partial t} + \rho_1 v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + v^i \frac{\partial (\rho_1 v^j)}{\partial x^j} + v^i \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x^i} = F^i + g^i. \quad (15.105)$$

Временная же компонента уравнения (15.95), умноженная на v^i , имеет вид

$$v^i \partial (\rho_1 v^j) / \partial x^j + v^i \partial (\rho_1 - c^2 p) / \partial t = v^i (F^4 + g^4) / (ic). \quad (15.106)$$

Отсюда получаем вычитанием

$$\rho_1 \frac{\partial v^i}{\partial t} + \rho_1 v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{v^i}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = F^i + g^i - \frac{v^i}{ic} (F^4 + g^4). \quad (15.107)$$

Поскольку $D/Dt + V^\alpha \partial / \partial x^\alpha$ и $\rho = \gamma \rho_{000}$, то (15.107) эквивалентно уравнению

$$\pi Dv/Dt = -\nabla p - (v/c^2) \partial p / \partial t + \mathbf{F} + \mathbf{g} - \mathbf{v}(F^4 + g^4)/(ic). \quad (15.108)$$

И в этом случае левая часть уравнения записана в системе, движущейся с веществом, а поэтому и правую часть можно вычислять в сопутствующей системе (в которой, очевидно, $v = 0$). Тогда, как и ожидалось, получается уравнение (15.103), в котором $\mathbf{g}$ берется в сопутствующей системе отсчета и рассчитывается по формуле (14.121).

Удобно переписать уравнение (15.108) в другой форме, заменив g^α на $-\partial R^{\alpha\beta} / \partial x^\beta$ [см. формулу (14.120)]. Тогда получим

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \nabla p + \left(\nabla \cdot \mathbf{P} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{\mathcal{F}}}{\partial t} \right) - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \left(\frac{\partial E_R}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\mathcal{F}} \right) = \mathbf{F} - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \right), \quad (15.109)$$

где скорость увеличения энергии вещества в расчете на единицу объема записана в виде $F^4 = -(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F})/ic$. В уравнении (15.109) величины, относящиеся к полю излучения, могут находиться теперь в произвольной (лабораторной) системе отсчета. Последний член в левой части уравнения (15.109) получается из слагаемого $-\mathbf{v}g^4/ic$ в уравнении (15.108) и описывает скорость изменения собственной плотности вещества, обусловленного взаимодействием вещества с полем излучения. В большинстве исследований этот член опускают.

ся, и поэтому они не могут считаться до конца последовательными. Заметим далее, что если нас интересует описание лишь нерелятивистских течений, то член, даваемый F^4 , имеет порядок v^2/c^2 по сравнению с $\mathbf{F}$ и поэтому его можно опустить. Аналогично если изучаются течения *вещества* (а не временная эволюция поля излучения), то соответствующее характерное время будет равно $\Delta t \sim \Delta x/v$, где v — скорость течения, и член с $\partial p/\partial t$ будет, очевидно, порядка v^2/c^2 по сравнению с ∇p и может быть опущен. Наконец, $E_R \sim p_R$, поэтому член $(v/c^2)\partial E_R/\partial t$ имеет порядок v^2/c^2 относительно $\nabla \cdot \mathbf{P}$, и его также можно опустить. *Все эти члены будут всюду в дальнейшем отбрасываться.*

УРАВНЕНИЯ В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

В большинстве работ по радиационной гидродинамике все уравнения записываются в инерциальной лабораторной системе. Покажем теперь (с точностью до членов порядка v/c), что уравнения, записанные в инерциальной и в сопутствующей системах отсчета, согласуются между собой. Это можно сделать, выразив величины, характеризующие поле излучения в инерциальной системе отсчета, через их аналоги в сопутствующей системе при помощи соотношения (14.124), из которого следует, что

$$E_R = E_R^0 + 2c^2 \mathbf{v} \cdot \vec{\mathcal{F}}^0, \quad (15.110a)$$

$$\vec{\mathcal{F}} = \vec{\mathcal{F}}^0 + E_R^0 \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}^0, \quad (15.110б)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^0 + c^2(\mathbf{v} \vec{\mathcal{F}}^0 + \vec{\mathcal{F}}^0 \mathbf{v}). \quad (15.110в)$$

Рассмотрим сперва уравнение движения (15.109), которое для сферически-симметричного течения в поле силы тяжести принимает вид

$$\rho \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} + \frac{\partial p_R}{\partial r} + \frac{3p_R - E_R}{r} - \\ - \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial r} + \frac{2\mathcal{F}}{r} \right) = - \frac{G M \rho}{r^2}, \quad (15.111)$$

где было использовано выражение (1.436) для $\nabla \cdot \mathbf{P}$. Чтобы получить уравнение с точностью до членов $O(v/c)$, необходимо использовать точные преобразования, описываемые формулами (15.110a) и (15.110в). С другой стороны, даже в пределе свободного течения $\mathcal{F}^0 \sim cE_R^0$ или cp_R^0 . Поэтому ясно, что все члены с $\mathcal{F}$ в уравнении

(15.111) уже имеют порядок *по крайней мере* v/c (если вспомнить, что мы считаем $\Delta t \sim \Delta x/v$). Поэтому добавочные члены в (15.1106), содержащие v , дадут члены $O(v^2/c^2)$, и их можно опустить, так что будет достаточно положить $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0$. Совершая в величинах, характеризующих поле излучения в инерциальной системе отсчета, указанные преобразования, в результате находим

$$\rho \frac{Dv}{Dt} + \frac{\partial p}{\partial r} + \left[\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial t} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial r} + \frac{\partial p_R^0}{\partial r} + \right. \\ \left. + \frac{3p_R^0 - E_R^0}{r} + \frac{2\mathcal{F}^0}{c^2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \right] = -\frac{G\mathcal{M}\rho}{r^2}. \quad (15.112)$$

Упражнение 15.11. Проверить уравнение (15.112).

Если воспользоваться уравнением переноса (14.1346), записанным в сопутствующей системе, то *сумма членов, стоящих в квадратных скобках, сильно упрощается* и в результате находим

$$\rho Dv/Dt + \partial p/\partial r = -G\mathcal{M}\rho/r^2 + (4\pi/c) [\chi^0 H^0]_{,r}. \quad (15.113)$$

Таким образом, выясняется, что *уравнение переноса в сопутствующей системе, выведенное в гл. 14, позволяет сводить друг к другу с точностью до членов порядка v/c уравнения движения в инерциальной и в сопутствующей системах отсчета.*

Рассмотрим теперь уравнение сохранения энергии в форме (15.28) (в пренебрежении теплопроводностью). Производная по времени берется от имеющейся в единице объема энергии, и к этой энергии нужно теперь добавить E_R . Оператор дивергенции действует на поток энергии, и к этому члену следует добавить $\mathcal{F}$. Поэтому будем иметь

$$\partial(\rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 + E_R)/\partial t + \nabla \cdot [\rho e + \frac{1}{2} \rho v^2 + \\ + p\mathbf{v} + \vec{\mathcal{F}}] = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}. \quad (15.114)$$

Чтобы получить уравнение энергии для газа, вычтем члены, описывающие механическую работу, которые получаются путем скалярного умножения уравнения движения (15.109) на $\mathbf{v}$. Заметим, что два члена, содержащие v/c^2 , станут при этом порядка v^2/c^2 . Такого же порядка и член $c^2 \mathbf{v} \cdot (\partial \vec{\mathcal{F}}/\partial t)$ на интервалах времени $\Delta t \sim \Delta x/v$.

Поэтому получаем

$$\rho \left[D \left(\frac{1}{2} v^2 \right) / Dt \right] + (\mathbf{v} \cdot \nabla) p + \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}. \quad (15.115)$$

Вычитая это уравнение из (15.114), находим

$$\partial(\rho e + E_R)/\partial t + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v} + \mathcal{F}) + p(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) = 0. \quad (15.116)$$

С учетом (15.17) и (15.13) уравнение (15.116) приводится к виду

$$\rho (De/Dt) - (p/\rho)(D\rho/Dt) + [\partial E_R/\partial t + \nabla \cdot \mathcal{F} - \mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P})] = 0. \quad (15.117)$$

Ясно, что при переходе к сопутствующей системе отсчета необходимо использовать все три слагаемых в выражении (15.110б) для $\mathcal{F}$. С другой стороны, очевидно, что вторые слагаемые в выражениях (15.110а) и (15.110в) на промежутках времени, характерных для течения жидкости, будут давать члены $O(v^2/c^2)$. Поэтому этими членами можно пренебречь. Вычислим теперь $\nabla \cdot \mathcal{F} = \nabla \cdot (\mathcal{F}^0 + E_R^0 \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}^0)$. Заметим, что для сферически-симметричного течения

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (E_R^0 \mathbf{v}) &= E_R^0 (\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla) E_R^0 = \\ &= v \frac{\partial E_R^0}{\partial r} + E_R^0 \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} \right), \end{aligned} \quad (15.118a)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{P}^0) = r^{-2} \partial(r^2 v p_R^0) / \partial r = v \partial p_R^0 / \partial r + p_R^0 (\partial v / \partial r + 2v/r). \quad (15.118б)$$

Кроме того,

$$v \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}^0) = v [\partial p_R^0 / \partial r + (3p_R^0 - E_R^0)/r]. \quad (15.118в)$$

Поэтому, раскрывая выражение в квадратных скобках в уравнении (15.117) и пользуясь (14.134а), получаем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial E_R^0}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial r} + \frac{2\mathcal{F}^0}{r} + v \frac{\partial E_R^0}{\partial r} + E_R^0 \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{2v}{r} \right) + \\ &+ p_R^0 \frac{\partial v}{\partial r} + (E_R^0 - p_R^0) \frac{v}{r} = \frac{\partial E_R^0}{\partial t} + v \frac{\partial E_R^0}{\partial r} + \frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial r} + \frac{2\mathcal{F}^0}{r} + \\ &+ (E_R^0 + p_R^0) \frac{\partial v}{\partial r} + (3E_R^0 - p_R^0) \frac{v}{r} = 4\pi \int (\eta_\nu^0 - \chi_\nu^0 f_\nu^0) d\nu. \end{aligned} \quad (15.119)$$

Уравнение (15.117), таким образом, совпадает с уравнением энергии (15.97), записанным в сопутствующей системе отсчета.

Наконец, уравнения движения и энергии удобно объединить, написав полное уравнение энергии, из которого наглядно видно влияние импульса и энергии, которые излучение передает веществу. Пусть q_R — обусловленная излучением скорость приращения плотности энергии вещества, а $\mathbf{f}_R$ — сила в расчете на единицу объема, обусловленная действием излучения. Тогда из уравнений (15.97) и (15.13) будем иметь

$$\rho(De/Dt) + p(\nabla \cdot \mathbf{v}) = q_R. \quad (15.120)$$

Скалярно умножая уравнение (15.103) на $\mathbf{v}$, получаем

$$\rho \left[D \left(\frac{1}{2} v^2 \right) / Dt \right] + (\mathbf{v} \cdot \nabla) p = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f} + \mathbf{f}_R). \quad (15.121)$$

Складывая (15.120) и (15.121) и пользуясь (15.17), находим

$$\begin{aligned} \partial \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e \right) / \partial t + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \rho v^2 + \rho e + p \right) \mathbf{v} \right] = \\ = q_R + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{f} + \mathbf{f}_R). \end{aligned} \quad (15.122)$$

Для установившегося ($\partial/\partial t = 0$) сферически-симметричного течения в обычном поле силы тяжести интегрирование уравнения (15.122) дает

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 \rho v \left(\frac{1}{2} v^2 + e + p/\rho - G\mathcal{M}/r \right) + \\ + 4\pi \int_r^\infty (q_R + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_R) r^2 dr = E = \text{const}, \end{aligned} \quad (15.123)$$

что аналогично соотношению (15.59) с учетом радиативных членов. Для дальнейшего первую группу членов удобно обозначить через E_0 , написав

$$E_0(r) + 4\pi \int_r^\infty (q_R + \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}_R) r^2 dr = E = \text{const}. \quad (15.124)$$

15.4. Ветер, порождаемый излучением

Наблюдательные факты, собранные за последнее десятилетие, убедительно показали, что у всех звезд, лежащих на диаграмме Гершпрунга — Рассела в области, соответствующей высоким тем-

пературам и светимостям, происходит быстрая потеря массы за счет трансзвукового ветра. Основная теоретическая модель, в рамках которой объясняется такое истечение, — это звездный ветер, возникающий под влиянием импульса, сообщаемого газу интенсивным излучением этих ярких звезд. Хотя основные положения этой теории в настоящее время представляются установленными уже довольно твердо, она является областью очень активных исследований. Развитие здесь происходит очень быстро, но некоторые важные вопросы остаются пока открытыми, ожидая своего решения в будущем. Поэтому мы сосредоточим внимание на достаточно идеализированных моделях, которые иллюстрируют физическую сущность явления. Детальное сопоставление теоретических моделей с наблюдательными данными едва начинается, и читателю следует обратиться к текущей специальной литературе, чтобы ознакомиться с последними достижениями в этой области.

НАБЛЮДАТЕЛЬНЫЕ СВИДЕТЕЛЬСТВА НАЛИЧИЯ ТРАНСЗВУКОВОГО ВЕТРА У ЗВЕЗД РАННИХ ТИПОВ

Давно известно, что большое число специфических особенностей (например, профили типа Р Лебеда, эмиссионные линии, асимметрия линий), наблюдаемых в спектрах многих О- и ранних В-звезд (в особенности у сверхгигантов, звезд типов Of и WR), свидетельствует о том, что эти объекты имеют протяженные оболочки и что вещество, дающее линии, истекает наружу из фотосфер звезд (см., например, [261], гл. 10). Однако, происходит ли потеря массы на самом деле, было не вполне ясно, так как наблюдаемые скорости, измеренные по положению коротковолнового абсорбционного компонента линий типа Р Лебеда (обычно 200 — 400 км/с), не превышают скорости убегания с поверхности звезды

$$v_{\text{убег}} = 620 (\mathcal{M}/\mathcal{M}_{\odot})^{1/2} (R/R_{\odot})^{-1/2} \text{ км/с}, \quad (15.125)$$

которая порядка 1000 — 1500 км/с для О-звезд главной последовательности и порядка 600 — 900 км/с для ОВ-сверхгигантов. Данные, полученные путем наземных наблюдений, обладают одним серьезным недостатком: все наблюдаемые линии являются *субординатными* и возникают при переходах с уровней с *высокими потенциалами возбуждения*, населенности которых вне областей высокой температуры и плотности являются малыми. Поэтому число атомов на луче зрения, поглощающих в этих линиях, совсем мало, и наблюдаются только *самые внутренние* слои оболочки, расположенные непосредственно над фотосферой.

С другой стороны, из исследования ультрафиолетовой области спектра, доступной для наблюдений из космоса, получается прямо противоположная информация. Эта область спектра содержит *резонансные линии*, возникающие при переходах из *основных состояний* ионов преобладающих стадий ионизации тех легких элементов, содержание которых велико. Числа атомов на луче зрения, поглощающих в этих линиях, настолько велики, что можно изучать *самые внешние* части оболочки. Таким путем было впервые получено *прямое* доказательство наличия потери массы: Мортон [467] обнаружил смещения, соответствующие скоростям истечения от 1500 до 3000 км/с по абсорбционным компонентам профилей типа Р Лебеда ультрафиолетовых резонансных линий $\text{SiIV } \lambda 1402,8 \text{ \AA}$ и $\text{CIV } \lambda 1549,5 \text{ \AA}$ в спектрах, полученных с ракет (см. также [468], [469], [470], [129], [600], [579], 580)). Совместное рассмотрение данных ракетных и наземных наблюдений приводит к выводу о существовании трансзвукового течения в расширяющейся оболочке. Скорости, измеренные по резонансным линиям, в действительности дают лишь нижний предел истинной конечной скорости течения, потому что изменение состояния ионизации может вызывать исчезновение поглощающих ионов на некотором уровне в оболочке (или же вещество может просто стать оптически тонким и создавать спектральные детали, лежащие ниже порога обнаружения). Недавно с помощью орбитальной обсерватории «Коперник» были получены [589] данные об ультрафиолетовых спектрах ОВ-звезд, обладающие большой точностью и высокой чувствительностью.

Дополнительные свидетельства существования потери массы дают инфракрасные наблюдения и наблюдения радиоконтинуума (для нескольких звезд типов ОВ и WR), которые проще всего интерпретировать, считая, что излучение возникает при свободно-свободных переходах в протяженной оптически толстой оболочке с распределением плотности, имеющим место при стационарном истечении вещества [171], [241], [277], [685].

Данные наземных наблюдений имеют большое значение, поскольку они в принципе дают информацию об условиях в той области, где скорость течения переходит через скорость звука. Одними из самых сильных линий в видимой области спектра ОВ-звезд являются линия водорода H_α и линия $\text{HeII } \lambda 4686 \text{ \AA}$. Поэтому обычно именно они, переходя в эмиссию, дают первые указания на то, что атмосфера является протяженной и расширяется. Были проведены обширные наблюдательные обзоры обеих линий. Обнаружено [537], что линия H_α видна в эмиссии в спектрах ярких В-звезд всех

типов от В0 до А3. Имеется совершенно четкое минимальное значение светимости, при котором эмиссия в H_α впервые становится заметной, а именно $M_v \approx -5,8$ ($M_{bol} \approx -8,8$) вблизи спектрального типа В0 и $M_v \approx -6,8$ ($M_{bol} \approx -7,3$) вблизи спектрального типа А0. Имеется и вполне определенная зависимость между полной интенсивностью эмиссии в H_α и светимостью звезды. Есть явные указания на дифференциальное расширение атмосфер у звезд, которые примерно на 0,5 звездной величины слабее звезд с заметной эмиссией в H_α . Для О-звезд [177] имеется довольно сильная корреляция между интенсивностями эмиссии в линии $He\ II \ \lambda \ 4686 \text{ \AA}$ и в H_α . Эмиссия в любой из этих линий указывает на наличие протяженной оболочки вокруг звезды. Далее, найдено, что абсолютная величина, при которой H_α ослабевает или переходит в эмиссию, равна $M_v \approx -6$ ($M_{bol} \approx -9$). Профили линии H_α обычно показывают особенности типа Р Лебеда или же имеют с коротковолновой стороны протяженное абсорбционное крыло, свидетельствующее о расширении. Типичные ширины соответствуют скоростям порядка $\pm 600 \text{ км/с}$. При переходе к расширяющимся оболочкам ОВ-звезд, которые являются более протяженными и плотными, начинает проявляться определенная совокупность других спектроскопических эффектов. Полезную качественную оценку состояния атмосферы удастся получить из анализа того, какие эффекты проявляют себя [328].

Лучевые скорости (в обычном спектроскопическом смысле), измеренные по разным линиям различных ионов в спектрах Of-звезд [326], [327], показывают ряд интересных особенностей. 1) Имеется *систематическое изменение скорости* от одной линии серии к другой (например, для бальмеровских линий), причем самые сильные линии дают наибольшие скорости приближения. Это указывает на *ускорение течения наружу*, поскольку в самых сильных линиях видны самые внешние слои. Путем сопоставления наблюдаемых профилей с теоретическими в принципе можно найти изменение скорости с расстоянием от центра звезды. Если такого рода информацию можно получить надежно, то она имеет большую ценность, так как может накладывать важные ограничения на допустимые теоретические модели в тех критических областях, где течение из дозвукового становится сверхзвуковым. Для одной звезды (HD 152236) было найдено [327], что скорость течения резко растет наружу от значения, близкого к звуковой скорости ($\sim 25 \text{ км/с}$), до $v \sim 300 \text{ км/с}$ на расстоянии примерно 0,5 радиуса звезды над фотосферой. Для двух других звезд такой подъем происходит намного более плавно, так что скорости в несколько сотен км/с достигают-

ся на расстоянии в два или три радиуса звезды над фотосферой. Важность этих результатов отмечается ниже в этом разделе.

2) Имеет место следующая четкая корреляция: большие скорости получаются по линиям с *меньшими* потенциалами возбуждения нижнего уровня. Если бы можно было допустить, что возбуждение соответствует ЛТР, то эта корреляция означала бы, что температура в оболочке убывает наружу (как и следовало бы ожидать для оболочки, находящейся в лучистом равновесии или расширяющейся адиабатически). Понятно, что наличие ЛТР маловероятно, и указанная корреляция, по-видимому, отражает усиление дилуции излучения (а отсюда и падение скорости радиативного возбуждения) или же уменьшение плотности (а потому и уменьшение скорости ударного возбуждения). Все приведенные выше результаты крайне нуждаются в уточнении с использованием надежной диагностики, основанной на аккуратном совместном решении уравнений переноса и статистического равновесия для различных моделей течения. Наконец, следует упомянуть, что в спектрах некоторых Of-звезд были обнаружены [678] слабые широкие эмиссионные детали, на которые наложены сравнительно узкие яркие эмиссионные линии He II $\lambda 4686 \text{ \AA}$, C III $\lambda 5696 \text{ \AA}$ и N III $\lambda 4634 - 40 \text{ \AA}$. Эти детали имеют полные ширины, соответствующие скоростям до 4000 км/с. Если они реальны (их регистрируют не все наблюдатели), то они могли бы, по-видимому, порождаться излучением, возникающим в протяженной быстро расширяющейся внешней оболочке звезды.

К настоящему времени благодаря возможности выполнения длинных серий наблюдений со спутника «Коперник» накопилось большое количество данных по ультрафиолетовой области [589]. Поскольку наблюдаемые резонансные линии, как правило, являются сильными и легко регистрируются, они служат чрезвычайно чувствительными индикаторами звездного ветра. Из анализа ультрафиолетовых спектров 47 звезд типов O, B и A (см. в качестве примера рис. 15.4) найдено, что потеря массы имеет место в гораздо более широкой области температур и светимостей, чем можно заключить по эффектам, наблюдаемым в спектрах, которые получаются с поверхности Земли. Оказалось, что потеря массы происходит практически у всех звезд со светимостями более $3 \cdot 10^4 L_{\odot}$ (что в 15 раз меньше предела, полученного по наземным наблюдениям). Наблюдаемые конечные скорости всегда определенно больше скорости убегания с *поверхности* (и, следовательно, много больше, чем $v_{\text{убег}}$ на большом расстоянии от звезды). Они колеблются от 300 км/с до 3500 км/с. По-видимому, заметная корреля-

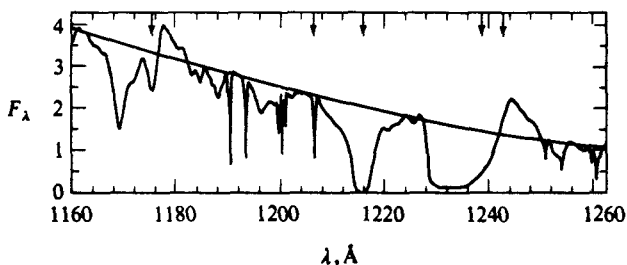


Рис. 15.4. Запись спектра ζ Pup (O5f) в далекой ультрафиолетовой области, полученная на спутнике «Коперник». По оси ординат отложен поток (в произвольных единицах), по оси абсцисс — длина волны в Å. Положения линий Si III λ 1175,7, Si III λ 1206,5, N I λ 1216 и N V λ 1242,8 указаны вертикальными стрелками. Плавная кривая сверху представляет собой оценку уровня «континуума». Она проведена исключительно для иллюстративных целей. Обратите внимание на то, что линии Si III и N V имеют заметно выраженные характеристики типа Р Лебеда. (По [589], с разрешения.)

ция между v_∞ и температурой, светимостью, ускорением силы тяжести и скоростью вращения звезды отсутствует.

Наблюдаются самые разнообразные ионы — от Mg II и Si II у самых холодных звезд до C IV, Si IV и N V у самых горячих. Линии, возникающие при переходах из возбужденных состояний (например, линии N IV λ 1718,5 Å и He II λ 1640 Å с энергиями возбуждения соответственно 16,1 и 40,6 эВ), дают меньшие скорости [470], что еще раз указывает на уменьшение степени возбуждения с удалением от звезды. Как отмечалось выше, это, вероятно, отражает уменьшение плотности вещества и ослабление излучения. У нескольких звезд наблюдаются линии O VI λ 1032 и 1038 Å [533], [589]. Эти линии неожиданно сильны, что указывает на более высокую концентрацию ионов O⁺⁵, чем можно было бы ожидать, исходя из цветовой температуры излучения звезды. Если считать, что ионизационное равновесие контролируется столкновениями (корональный случай), то получается температура около $2 \cdot 10^5$ K, что рассматривается как свидетельство существования коронального нагрева у этих звезд. С другой стороны, из наблюдений ионов более низких стадий ионизации (например, Si III и N III), имеющих в газовом потоке, и из сравнения верхних оценок потоков рентгеновского излучения с потоками излучения в линии H α вытекает верхняя граница для T , равная приблизительно $3 \cdot 10^5$ K [145]. В дальнейшем будет показано, что эти температуры слишком малы, чтобы порождать течение типа коронального ветра и обеспечивать конечные скорости, лежащие в наблюдаемом диапазоне.

Скорости потери массы были оценены по наблюдаемым интенсивностям [468] и профилям [329] линий для сверхгигантов в Орионе — δ , ϵ и ζ Ori. Они составляют около $(1 + 2) \cdot 10^{-6} M_{\odot}$ в год. Детальное изучение профилей линий у ζ Pup (O5f) дает скорость потери массы $7(\pm 3) \cdot 10^{-6} M_{\odot}$ в год [383].

ОСНОВЫ ДИНАМИКИ ВЕТРА, ПОРОЖДАЕМОГО ИЗЛУЧЕНИЕМ

Вопрос, который возникает прежде всего, — не может ли истечение вещества, наблюдаемое у звезд ранних типов, быть результатом коронального расширения того вида, который рассматривался в § 15.2. Как установили Люси и Соломон [404], ответ на этот вопрос, вероятно, отрицательный. Во-первых, считается, что ОВ-звезды не имеют обширных конвективных зон, и поэтому заранее предполагается, что у них нет корон. Но даже если у них по той или иной причине короны все же есть, то из формул (15.59), (15.62) и (15.64) следует, что температура T_c в критической точке, при которой возникает истечение, должна удовлетворять соотношению $2kT_c \approx \frac{1}{2}mv_{\infty}^2$. Принимая $v_{\infty} \sim 3 \cdot 10^3$ км/с, находим $T_c \sim 3 \cdot 10^7$ К. Это значение совершенно исключается ввиду а) отсутствия мягкого рентгеновского излучения у таких звезд и б) наличия линий таких ионов, как CIV, NV и SiIV (согласно наблюдениям, они возникают в газовом потоке при скоростях от $\sim v_{\infty}/2$ до v_{∞}); они были бы разрушены под действием ударной ионизации при температурах, больших примерно $3 \cdot 10^5$ К.

Необходимо, таким образом, искать другой механизм, ответственный за поддержание ветра. Люси и Соломон [404] предположили, что этот механизм состоит в прямой передаче импульса газу при поглощении излучения в сильных резонансных линиях, которые наблюдаются в ультрафиолетовой области спектра. Передача импульса происходит, когда фотоны поля излучения звезды, которое характеризуется угловым распределением, сильно вытянутым в направлении наружу, поглощаются теми или иными ионами и затем переизлучаются *изотропно*. Поскольку переизлучение происходит изотропно, оно не изменяет импульса вещества. Поэтому в результате падающее на вещество излучение передает ему направленный наружу импульс. Поглощающие ионы за счет этого ускоряются в радиальном направлении, испытывая затем столкновения со всеми другими частицами среды. В результате импульс, приобретенный теми или иными ионами, поглощающими излучение, перераспределяется между всеми атомами газа, что приводит к ускорению всего

вещества. Направленное вдоль радиуса наружу ускорение, которое испытывает газ, равно поэтому

$$g_R = (4\pi/c\rho) \int_0^\infty \chi_\nu^0 H_\nu^0 d\nu, \quad (15.126)$$

где χ_ν^0 — объемный коэффициент поглощения, обусловленный всеми возможными причинами (поглощение в континуумах и в линиях, электронное рассеяние); H_ν^0 — падающий поток.

Направленное наружу радиативное ускорение следует сравнивать с направленным к центру ускорением силы тяжести $g = G\mathcal{M}/r^2$. Если g повсюду больше g_R , то атмосфера остается в гидростатическом равновесии и не расширяется. Поэтому нам следует рассмотреть те условия, при которых g_R будет превосходить g . Для удобства обозначим

$$\Gamma = g_R/g. \quad (15.127)$$

У О-звезд в тех спектральных областях, где выходит большая часть потока излучения, непрозрачность в континууме обусловлена электронным рассеянием. Сечение томсоновского рассеяния не зависит от частоты, так что получающееся для Γ выражение можно записать сразу же:

$$\Gamma_e = s_e L / 4\pi c G \mathcal{M}, \quad (15.128)$$

где $s_e = n_e \sigma_e / \rho$ — коэффициент электронного рассеяния на единицу массы. Вспоминая результаты из упражнения 7.1, находим $\Gamma_e \approx 2,5 \cdot 10^{-5} (L/L_\odot)(\mathcal{M}_\odot/\mathcal{M})$. Для О-звезд $L/L_\odot \approx 10^6$, $\mathcal{M}/\mathcal{M}_\odot \approx 60$, так что $\Gamma_e \approx 0,4$. Таким образом, видно, что *одно только поглощение в континууме не способно создавать силу, которая превосходила бы силу тяжести*. (Мы увидим ниже, что для объяснения трансзвукового ветра это обстоятельство очень существенно.) Поэтому, чтобы получить требуемую силу, нам надлежит обратиться к спектральным линиям.

Для больших глубин в атмосфере справедливо диффузионное приближение, и $H_\nu \propto \chi_\nu^{-1}$ [см. формулу (2.91)]. В этом предельном случае произведение $\chi_\nu H_\nu$, входящее в выражение (15.126), не зависит от значения χ_ν , т.е. *в диффузионном пределе передача импульса газу происходит в линиях не более эффективно, чем в континууме*. Таким образом, в глубине Γ остается практически равным значению Γ_e , даваемому формулой (15.128). Напротив, на поверхности атмосферы H_ν может быть намного больше, чем в диффузионном

режиме, так как из расположенного снизу вещества исходит очень интенсивное излучение, а поток сверху отсутствует. Чтобы оценить *максимальную* силу, которая может создаваться отдельной линией, будем считать, что в линии поглощается *неослабленное* излучение континуума, т.е. $F_\nu = F_c = B_\nu(T_{\text{эфф}})$. Тогда верхний предел ускорения вещества, которое вызывается поглощением в отдельной линии атома химического элемента k , находящегося в стадии ионизации j и в состоянии возбуждения i , равен

$$g_R^0 = (\pi^2 e^2 / mc^2) f_{ie} B_\nu(T_{\text{эфф}}) (n_{ijk} / N_{jk}) \times (N_{jk} / N_k) (\alpha_k X / m_H), \quad (15.129)$$

где n_{ijk} — населенность рассматриваемого уровня, N_{jk} — полное число ионов, находящихся в стадии ионизации j , во всех состояниях возбуждения, N_k — полное число всех атомов и ионов химического элемента k , α_k — содержание элемента k по отношению к водороду и X — доля водорода по массе в веществе звезды. Люси и Соломон рассмотрели линию CIV λ 1548 Å. Принимая $f = 0,2$, $T_{\text{эфф}} = 25000$ К (чтобы максимизировать B_ν), $\alpha_C = 3 \cdot 10^{-4}$, $X = 1$ и $n_{iuc} / N_{jc} = 1$, они нашли

$$\lg(g_R^0)_{\lambda 1548} = 5,47 + \lg(N_{jc} / N_C). \quad (15.130)$$

Для типичного О-сверхгиганта $\lg g \approx 3$. Поэтому верхняя оценка силы, обусловленной поглощением в одной только этой линии (получающаяся при $N_{jc} / N_C = 1$), *превышает силу тяжести в 300 раз*.

Разумеется, только что полученная оценка является лишь (намеренно) грубым верхним пределом, так как атомы углерода в фотосфере звезды порождают линию поглощения, в которой $F_\nu \ll F_c$. Чтобы учесть это, Люси и Соломон приближенно решили уравнение переноса и нашли, что выше некоторого критического уровня в атмосфере радиативная сила, вычисленная по формуле (15.126) для линии CIV λ 1548 Å, по-прежнему превышает силу тяжести. (Интересно, что аналогичные результаты были получены и при расчете стандартных плоскопараллельных статических моделей атмосфер [7], [298]. Для звезд ранних типов радиативная сила за счет поглощения в реалистическом линейчатом спектре на поверхности атмосферы оказалась превышающей силу тяжести. Однако с позиции построения моделей это было сочтено «нефизическим», и при расчетах были приняты меры, чтобы *избавиться* от этого!) Итак, заключаем, что для О-звезд силы, которые получают, если считать атмосферу неподвижной, несовместимы с этим предположением. *Следовательно, гидростатическое равновесие в самых верхних слоях невозможно, и должно происходить истечение вещества наружу*.

Когда самый верхний слой приходит в движение, линии вследствие эффекта Доплера смещаются относительно их положений в неподвижной атмосфере и в них начинает поглощаться интенсивное излучение соседних участков континуума. Это повышает темп передачи импульса веществу, а следовательно, увеличивает ускорение. Нижележащие слои должны расширяться, чтобы заполнить области, где из-за ускорения верхних слоев возникает разрежение. Кроме того, в этих более глубоких слоях линии становятся ненасыщенными (так как в верхних слоях линии поглощения смещены из-за эффекта Доплера). Поэтому на эти внутренние слои также начинает действовать радиативная сила, превышающая силу тяжести. В результате может начаться истечение. Остается показать, что а) *скорость* потери массы, обусловленной этим эффектом, значительна и б) что изменение радиативной силы с глубиной *согласуется* с трансзвуковым течением. Рассмотрим сначала последний вопрос.

Чтобы получилось трансзвуковое течение, в критической точке должны выполняться определенные условия [408], [132], как в и случае коронального ветра. Для установившегося течения закон сохранения массы выражается соотношением (15.16), а уравнение движения (15.103) с учетом формулы (15.127) можно записать в виде

$$v dv/dr + \rho^{-1} dp/dr = -G\mathcal{M}(1 - \Gamma)/r^2. \quad (15.131)$$

Здесь считается, что Γ есть некоторая заданная функция расстояния от центра r . Давление можно выразить через плотность и изотермическую скорость звука a следующим образом [см. формулу (15.37)]: $p = a^2 \rho$. Считается, что a — функция расстояния от центра r . Тогда, пользуясь уравнением неразрывности (15.14), находим

$$\rho^{-1} dp/dr = da^2/dr - 2a^2/r - (a^2/v) dv/dr. \quad (15.132)$$

Подставляя (15.132) в уравнение (15.131), получаем

$$\frac{1}{2} (1 - a^2/v^2) dv^2/dr = 2a^2/r - da^2/dr - G\mathcal{M}(1 - \Gamma)/r^2. \quad (15.133)$$

Предположим для простоты, что оболочка изотермична (это хорошее приближение), так что член da^2/dr можно отбросить. Тогда ясно, что, если мы хотим получить плавный переход от дозвукового течения при малых r к сверхзвуковому течению при больших r , правая часть уравнения (15.133) должна 1) *обращаться в нуль* на том критическом расстоянии $r = r_c$, где $v = a$, 2) быть *отрицательной* при $r < r_c$ и 3) быть *положительной* при $r > r_c$. Указанное условие при $r < r_c$ может выполняться, только если $\Gamma < 1$ в этой области,

т.е. в области дозвукового течения радиативная сила должна быть *меньше* силы тяжести. Если $\Gamma > 1$ повсюду (что означает неустойчивость *всей звезды*), то трансзвуковое течение становится *невозможным* и имеется либо течение, которое с самого начала является *дозвуковым*, причем оно происходит с *замедлением*, либо же имеется *сверхзвуковое* течение, происходящее с *ускорением*. В трансзвуковых течениях значение Γ может при $r > r_c$ стать сколь угодно большим. Оказывается, что чем оно больше, тем больше импульс, сообщаемый газу, и тем больше будет dv/dr . Это, конечно, представляет большой интерес для изучения ветра у звезд ранних типов, поскольку мы видели, что значение Γ может стать очень большим в области сверхзвукового течения, где линии достаточно смещены относительно их стационарных положений, чтобы в них происходило поглощение излучения континуума. Именно эти большие значения Γ и приводят к тем большим значениям v_∞ , которые наблюдаются. Поскольку там, где Γ больше единицы, течение уже является сверхзвуковым, информация о сообщаемом импульсе не может распространяться назад против течения и на течении в самой критической точке практически не сказывается.

Важно понимать, что сила, возникающая вследствие поглощения излучения континуума и спектральных линий, обладает в точности теми (описанными выше) свойствами, которые необходимы, чтобы возникал нужный нам трансзвуковой ветер. Именно, внутри звезды, где справедливо диффузионное приближение, значение Γ меньше единицы; оно приближается к единице по мере того, как линии делаются ненасыщенными, становится больше единицы, когда среда делается оптически тонкой в линиях, и достигает очень больших значений, когда линии смещаются в континуум. В дальнейшем будет найдено, что в хорошем приближении эта сила пропорциональна некоторой степени градиента скорости. Эта зависимость позволяет силе и вызываемому ею течению так подстраиваться друг к другу, что может получиться стационарный трансзвуковой ветер.

Прежде чем покончить с вопросом о том, как устанавливается течение, стоит сказать несколько слов о некоторых других моментах, обсуждавшихся в литературе. Касинелли и Кастор [132] исследовали задачу о подводе энергии к оптически тонкому течению, поглощающему только в континууме. Они пришли к нескольким важным выводам. а) Течение *может* порождаться за счет нагрева газа излучением вблизи критической точки, обусловленного процессами *истинного поглощения*. Такой механизм приводит к накачке энер-

гии в обширной области, аналогичной солнечной короне, причем излучение играет здесь такую же роль, какую при корональных температурах играет теплопроводность. Было указано, что член E_0 в соотношении (15.124) близ звезды отрицателен, но на больших расстояниях при конечных значениях v_∞ должен становиться положительным. Высказывалось утверждение, что такое поведение обусловлено характером полного подвода энергии за счет поглощения (q_R) и был сделан вывод, что истинное поглощение необходимо для перехода дозвукового течения в сверхзвуковое. Этот вывод является, однако, слишком жестким [307], так как из соотношения (15.124) ясно, что, хотя соответствующий подвод тепловой энергии и может породить течение, не менее эффективно это может быть сделано за счет работы, совершаемой радиативными силами. По существу, именно за счет совершения этой работы порождается ветер, рассматривавшийся в расчетах Люси и Соломона (они считали, что в линиях происходит консервативное *рассеяние*, так что $q_R = 0$), а также ветер, обсуждаемый ниже в этом разделе. б) Если механизмом, порождающим ветер, является истинное поглощение, то он имеется практически у каждой звезды раннего типа, но в большинстве случаев звуковая точка расположена настолько далеко от поверхности звезды, что поток массы очень незначителен (в области дозвукового течения падение плотности происходит практически с гидростатической шкалой высот). Заметный ветер возникает, только если принять нереалистически большие значения коэффициента поглощения и параметра Γ (который считается постоянным). Эти трудности полностью отпадают, если используется реалистическое описание радиативной силы, обусловленной поглощением в линиях (см. ниже). в) Время, необходимое для радиативного нагрева или охлаждения вещества, мало по сравнению со временем, за которое элемент среды проходит расстояние, равное шкале высот по плотности. Поэтому баланс энергии с высокой точностью выражается условием лучистого равновесия. Этот результат используется в моделях, которые описываются ниже.

Первые удачные модели порождаемого излучением ветра у О-звезд были построены Люси и Соломоном [404]. Они считали, что 1) геометрия *плоская* (достаточно хорошее допущение для описания течения в дозвуковой области), 2) температура постоянна, 3) ионизационное равновесие описывается формулой (5.46) с $W = 1/2$ и T_c и T_e , равными $0,7 T_{\text{эфф}}$ (эффективная температура относится к модели фотосферы), и 4) радиативная сила определяется поглощением в резонансных линиях всего нескольких ионов (CIII, CIV,

NIII, NV, SiIV, SIII, SIV и SVI). Уравнение движения бралось в виде

$$\frac{1}{2} [1 - (a/v)^2] dv^2/dr = -g_{\text{эфф}}, \quad (15.134)$$

где $g_{\text{эфф}} = g_* - g_{R,l}$, причем $g_* = g - \pi F s_e/c$ (таким образом учитывается радиативная сила, обусловленная электронным рассеянием) и $g_{R,l}$ — радиативная сила, обусловленная линиями. При расчете $g_{R,l}$ принималось, что в линиях происходит чистое рассеяние приходящего снизу фотосферного излучения с интенсивностью

$$I_\nu(0, \mu) = \sigma B_\nu(T_{\text{эфф}})/[\sigma + \chi_\nu(\nu)], \quad (15.135)$$

где $\sigma = n_e \sigma_e$ — объемный коэффициент электронного рассеяния. Формула (15.135) приближенно описывает частотную зависимость излучения, выходящего в линии, которая образуется в фотосфере при чистом рассеянии. При расчете интенсивности в более высоких слоях оболочки переизлучение не учитывалось, поскольку в среднем оно не дает вклада в силу, с которой излучение действует на вещество. В этом случае $I_\nu(\tau_\nu)$ убывает экспоненциально, и можно написать $I_\nu(\tau_\nu) = I_\nu(0) \exp(-\tau_\nu/\mu)$, где τ_ν — оптическое расстояние на частоте ν от основания оболочки до рассматриваемой точки с учетом доплеровского смещения профиля поглощения вдоль луча. Тогда

$$g_{R,l} = (2\pi/c\rho) \sum_l \int_0^1 d\mu \int_0^\infty \chi_\nu(\nu) I_\nu(0) \mu e^{-\tau_\nu/\mu} d\nu, \quad (15.136)$$

где суммирование распространяется на все линии.

Плотность ρ_0 у основания оболочки берется по модели атмосферы. Затем выбирается пробное значение скорости v_0 . Тем самым фиксируется поток массы $J = \rho_0 v_0$. Величина потока массы является собственным значением задачи. Если выбрано слишком большое значение, то в звуковой точке, где $v = a$, радиативная сила будет слишком малой [в сущности из-за того, что τ_ν в формуле (15.136) будет слишком большим]. Поэтому $g_{\text{эфф}} > 0$, что делает непрерывный переход к сверхзвуковому течению невозможным. Аналогично если взято слишком малое J , то $g_{\text{эфф}}$ в звуковой точке будет меньше нуля. Условие $g_{\text{эфф}} = 0$ будет выполняться, и околослуковое течение окажется возможным, только если взято в точности верное значение J . Таким путем было получено большое число решений, соответствующих различным значениям параметров звезды. Было найдено, что они дают скорость потери массы порядка $10^{-8} \mathcal{M}_\odot$ в год или менее, что примерно в 100 раз меньше наблюдаемых значе-

ний. В то же время конечные скорости получаются приемлемыми: $v_{\infty} \approx 3300$ км/с.

Рассмотрим теперь вопрос о том, насколько большой поток массы может поддерживаться излучением звезды. Предположим, что спектр содержит большое число линий, каждая из которых полностью отбирает импульс от поглощаемого в ней излучения. Пусть в результате вещество ускоряется от $v = 0$ до $v = v_{\infty}$, так что линия с центральной частотой ν размазывается по участку спектра шириной $\Delta\nu = \nu v/c$. Тогда максимальную скорость потери массы, которая может при этом возникнуть, мы получим, приравняв поток импульса вещества потоку импульса излучения, поглощаемого в линиях (т.е. считая эффективность передачи импульса сто-процентной), что дает

$$\dot{M} v_{\infty} = (4\pi r^2/c) \sum_i F(\nu_i) \Delta\nu_i, \quad (15.137)$$

где суммирование распространяется на все линии. Люси и Соломон полагали, что величина суммы определяется вкладом всего от одной линии, расположенной вблизи максимума частотного распределения потока, откуда

$$\dot{M} v_{\infty} = (4\pi^2 r^2/c^2) F_{\max} (v_{\max} v_{\infty}/c)$$

или

$$\dot{M} = (4\pi^2 r^2/c^2) F_{\max} v_{\max} \approx (4\pi^2 r^2/c^2) F = L/c^2,$$

где F — интегральный поток и L — светимость звезды. Это дает $\dot{M} = 7 \cdot 10^{-14} (L/L_{\odot}) \mathcal{M}_{\odot}$ в год, или около $7 \cdot 10^{-8} \mathcal{M}_{\odot}$ в год при $L = 10^6 L_{\odot}$. Люси и Соломон считали, что этим определяется *верхний предел* скорости потери массы. На самом деле это ближе к *нижнему пределу* [627], поскольку, по существу, эта оценка получена в предположении, что вещество ускоряется (формально) до скорости света за счет поглощения всего в одной линии, которая перемещается вдоль всего спектра. Лучшую оценку мы получим [132], заменив в формуле (15.137) $4\pi r^2 \sum F(\nu_i) \Delta\nu_i$ на L . Поэтому

$$\dot{M} \leq L/v_{\infty} c = 7 \cdot 10^{-12} (L/L_{\odot}) (3000/v_{\infty}) \mathcal{M}_{\odot}/\text{год}, \quad (15.138)$$

причем v_{∞} берется в км/с. При $L = 10^6 L_{\odot}$ и $v_{\infty} = 3000$ км/с находим $\dot{M} = 7 \cdot 10^{-6} \mathcal{M}_{\odot}$ в год, что совпадает со значением, полученным из наблюдений для ζ Руп. Этот результат получен в предположении, что импульс, которым обладают фотоны звезды, *целиком* передается теряемому звездой веществу при одном рассеянии. На

самом же деле при этом веществе будет передаваться только некоторая доля импульса ε . Однако наблюдения указывают на то, что значение ε может быть достаточно большим и достигать 0,5. Таким образом, требуемую скорость потери массы, по-видимому, можно получить, если (и только если) учитывать при вычислении g_R достаточно большое число линий (см. также обсуждение в [145]). Еще большую верхнюю оценку $\dot{M}$ можно получить, если учесть, что часть фотонов может рассеиваться в оболочке многократно, перемещаясь при этом взад и вперед между областями, расположенными по разные стороны от центральной звезды. Количественных оценок роли этого эффекта пока нет.

ВЕТЕР У OF-ЗВЕЗД, ПОРОЖДАЕМЫЙ ПОГЛОЩЕНИЕМ ИЗЛУЧЕНИЯ В ЛИНИЯХ

Самой полной и внутренне согласованной теорией звездного ветра, порождаемого излучением, является в настоящее время теория Кастора, Аббота и Клейна [138], [145]. Используемые в ней значения физических параметров делают эту теорию применимой к звездам типа Of. Предполагается, что течение стационарно и сферически-симметрично. Газ трактуется как одножидкостная система. Теплопроводность и вязкость не учитываются. Считается, что приобретение импульса газом от поля излучения при поглощении излучения в спектральных линиях происходит согласно некоторому конкретному степенному закону, который обсуждается ниже.

Использование одножидкостного приближения можно обосновать [145], сравнив скорость течения со скоростью дрейфа ионов, получающих импульс от излучения, относительно других ионов, с которыми они испытывают кулоновские столкновения. При характерной электронной концентрации $n_e \sim 10^{11} \text{ см}^{-3}$ и температуре $T = 40\,000 \text{ К}$ скорость дрейфа ионов C^{+3} оказывается равной 0,7 км/с, что для среды со скоростью течения в 1000 км/с явно пренебрежимо мало. Поглощение в линиях всех химических элементов приводит к близким скоростям дрейфа. Это указывает на отсутствие систематического разделения элементов и свидетельствует о законности одножидкостного описания. Чтобы обосновать возможность пренебрежения вязкостью, нужно вычислить число Рейнольдса $\mathcal{R} = vl/\nu$, где l — характерный размер течения жидкости плотности ρ и кинематической вязкости ν , происходящего со скоростью v . По существу, число Рейнольдса представляет собой отношение силы инерции к силе внутреннего трения [490], стр. 19; [385], стр. 62. При очень больших значениях $\mathcal{R}$ жидкость можно рас-

смаатривать как невязкую. Для ветра у Of-звезд, согласно расчетам, минимальное значение $\mathcal{R}$ оказывается порядка 10^{10} [145]. Этим доказывается, что вязкостью можно пренебречь. Наконец, поскольку температура вещества не очень высока, теплопроводность его мала. Поскольку же поток массы велик (в 10^8 раз больше, чем в солнечном ветре), оказывается [145], что поток тепла за счет теплопроводности примерно на восемь порядков меньше потока тепла, переносимого течением, а значит, им можно пренебречь.

Рассмотрим теперь, как вычисляется сила, с которой излучение действует на вещество. Существенным моментом при этом является учет насыщения линий, необходимый для правильного описания перехода между предельными случаями оптически толстой и оптически тонкой среды. Эта задача была подробно рассмотрена Кастором [137]. Его анализ привел к простому результату. Мы приведем эвристические соображения, которые отражают суть физической картины. Предположим, что поглощение в линиях происходит лишь в некотором слое, лежащем над фотосферой. Пусть поток излучения континуума, падающий снизу, равен πF_c . Представим приближенно импульс, приобретаемый веществом (в расчете на единицу массы) от неослабленного континуума за счет поглощения в линии с коэффициентом поглощения χ_l и шириной $\Delta\nu_D$, в виде $g_{R,l}(0) = \pi F_c \chi_l \Delta\nu_D / c\rho$. Чтобы учесть ослабление, заметим, что поскольку ищется лишь полный приобретаемый веществом импульс, то переизлучением, которое предполагается изотропным, можно пренебречь. В этом случае падающий поток убывает как $\exp(-\tau_l)$, где τ_l — оптическая глубина в линии, найденная с учетом доплеровского смещения. Таким образом, средняя скорость подвода импульса к слою составляет

$$\tau_l \langle g_{R,l} \rangle = g_{R,l}(0) \int_0^{\tau_l} e^{-\tau'} d\tau' \quad (15.139)$$

или

$$\langle g_{R,l} \rangle = (\pi F_c \chi_l \Delta\nu_D / c\rho) (1 - \exp(-\tau_l) / \tau_l) \quad (15.140)$$

В работе Кастора, Аббота и Клейна множитель $(1 - \exp(-\tau_l) / \tau_l)$ заменяется на $\min(1, \tau_l^{-1})$, что обеспечивает достаточно хорошее приближение.

Для некоторой заданной частоты, измеренной в системе *отсчета наблюдателя*, эффективная оптическая толщина τ_l будет определяться либо а) количеством вещества в слое, где образуется линия

(если среда *неподвижна*); в этом случае

$$\tau_l = \int_R^{\infty} \chi_l dr, \quad (15.141a)$$

где R — радиус фотосферы, либо б) градиентом скорости в *движущейся среде* (который приводит к доплеровскому смещению линии относительно ее статического положения); в этом случае

$$\tau_l \approx \chi_l v_{\text{тепл}} (dv/dr)^{-1}, \quad (15.141б)$$

где $v_{\text{тепл}}$ — тепловая скорость поглощающих атомов. Формула (15.141б) находится из соображений, аналогичных тем, которые использовались при выводе приближения Соболева, и представляет собой аналог формул (14.61) и (14.62) для плоской геометрии.

Удобнее иметь шкалу глубин, которая не зависит от силы линии. Введем поэтому эквивалентную электронную оптическую толщину $t = \tau_l/\beta_l$, где $\beta_l = \chi_l/\sigma$. Для расширяющейся атмосферы она оказывается равной

$$t = \sigma v_{\text{тепл}} (dv/dr)^{-1}. \quad (15.142)$$

Мы будем применять формулу (15.142) для всей области ветра, несмотря на то, что в фотосфере звезды она становится неприменимой. Это возможно потому, что радиативная сила, обусловленная поглощением в линиях, оказывается там заведомо пренебрежимо малой. Полная сила, обусловленная поглощением в линиях, получается суммированием выражений (15.140) по всем линиям. Ее можно записать в виде

$$g_{R,l} = (\pi F \sigma / c \rho) M(t) = (s_e L / 4 \pi c r^2) M(t), \quad (15.143)$$

где

$$M(t) = F^{-1} \sum_l F_c(v_l) \Delta v_{D,l} \min(\beta_l, t^{-1}) \quad (15.144)$$

называется *фактором светового давления*. Вычисление радиативной силы сводится, таким образом, к определению величины $M(t)$, являющейся функцией одного параметра t .

Кастор, Аббот и Клейн рассчитали $M(t)$ в предположении, что линейчатый спектр совпадает со спектром иона С III (для которого имеются обширные таблицы сил осцилляторов f), приняв полное содержание C^{++} по отношению к водороду равным 10^{-3} (что соответствует полному содержанию С, N и O вместе взятых). Населенности уровней рассчитывались в предположении об ЛТР. Хотя эти

предположения представляются довольно грубыми, результаты несомненно являются качественно верными. Оказалось, что численные значения $M(t)$ хорошо представляются формулой $Mv(t) = kt^{-\alpha}$ с $k \approx 1/30$ и $\alpha = 0,7$. В более поздней работе [145] учитываются все элементы от H до Ni и допускается, что параметры k и α могут зависеть от физических переменных (однако эти уточнения рассматриваться здесь более подробно не будут). Пользуясь (15.142), (15.143) и формулой для $M(t)$, находим окончательно

$$g_{R,l} = \frac{s_e L k}{4\pi c r^2} \left(\frac{1}{\sigma v_{\text{тепл}}} \frac{dv}{dr} \right)^\alpha = \frac{C}{r^2} \left(r^2 v \frac{dv}{dr} \right)^\alpha, \quad (15.145)$$

причем мы воспользовались также уравнением неразрывности. Постоянная C равна

$$C = (s_e L k / 4\pi c) [4\pi / (s_e v_{\text{тепл}} \mathcal{M})]^\alpha. \quad (15.146)$$

Если для описания вклада линий в радиативную силу использовать выражение (15.145), то уравнение движения (15.133) принимает вид

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{a^2}{v^2} \right) \frac{dv^2}{dr} = \frac{2a^2}{r} - \frac{da^2}{dr} - \frac{G\mathcal{M}(1 - \Gamma_e)}{r^2} + \frac{C}{r^2} \left(r^2 v \frac{dv}{dr} \right)^\alpha. \quad (15.147)$$

Если ввести новые переменные $w = v^2/2$ и $u = -1/r$, уравнение (15.147) переходит в следующее:

$$F(u, w, w') \equiv \left(1 - \frac{1}{2} a^2 w^{-1} \right) w' - h(u) - C(w')^\alpha = 0, \quad (15.148)$$

где $w' = dw/du$ и

$$h(u) = -G\mathcal{M}(1 - \Gamma_e) - 2a^2 u^{-1} - da^2/du. \quad (15.149)$$

Уравнение (15.147) [как и уравнение (15.148)] имеет особую точку, в которой решения обрываются, «заостряются» или характеризуются какими-либо другими нарушениями непрерывности. Эта точка *не есть* звуковая точка. В звуковой точке, где $v = a$, левая часть уравнения (15.147), как легко видеть, обращается в нуль за счет соответствующего выбора производной dv/dr , которая не должна обязательно быть ни бесконечной, ни разрывной. Это отличие от стандартной теории коронального ветра возникает из-за того, что в данном случае сила зависит не только от r , но и от dv/dr . Исследование поведения решений вблизи критической точки является более сложным, чем в случае теории, излагавшейся в § 15.2, так как уравнение (15.147) *нелинейно* по dv/dr . Детальное исследование показывает [138], что *геометрическое место особых точек* опреде-

ляется уравнением

$$\partial F(u, w, w')/\partial w' = 1 - \frac{1}{2} a^2 w^{-1} - \alpha C(w')^{\alpha-1} = 0. \quad (15.150)$$

Однако не любая из точек этого геометрического места дает допустимое решение. Если потребовать, чтобы производная w' была непрерывной, то должно выполняться дополнительное условие

$$\partial F/\partial u + w' \partial F/\partial w = 0. \quad (15.151)$$

Уравнения (15.148), (15.150) и (15.151) определяют u , w и w' , если задано C , или же w , w' и C , если задано u . Далее, удастся получить аналитические выражения для скорости потери массы и законов изменения скорости и ускорения dv/dr . В пределе $v \gg a$ они имеют весьма простой вид:

$$\dot{M} = \frac{4\pi G \mathcal{M}}{s_e v_{\text{тепл}}} \alpha \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \Gamma_e} \right)^{(1-\alpha)/\alpha} (k\Gamma_e)^{1/\alpha}, \quad (15.152)$$

$$v^2 = [2G \mathcal{M} (1 - \Gamma_e) \alpha / (1 - \alpha)] (1/r_s - 1/r) \quad (15.153)$$

и

$$r_c/r_s = 1 + \left\{ -\frac{1}{2} n + \left[\frac{1}{4} n^2 + 4 - 2n(n+1) \right]^{1/2} \right\}^{-1}, \quad (15.154)$$

где r_s — расстояние до звуковой точки $v = a$ (практически равное радиусу фотосферы R) и r_c — расстояние до критической точки. Выражение (15.154) найдено в предположении, что $T \propto r^{-n}$. Правдоподобные значения n заключены между 0 (изотермический случай) и 1/2 (лучистое равновесие), откуда следует, что $1,5 \leq r_c/r_s \leq 1,74$.

Модель звезды определяется набором параметров L , $\mathcal{M}$ и R , а также заданием вида зависимости $T(r)$ [или $a^2(r)$]. Скорость потери массы определяется почти исключительно значениями $\mathcal{M}$ и L (входящими через Γ_e). В $v_{\text{тепл}}$ входит также характерная температура $T_{\text{эфф}}$. На практике для определения модели сначала по формуле (15.154) с $r_s = R$ получают предварительную оценку значения r_c . Затем уравнение (15.147) решается численно и рассчитывается точная зависимость между геометрическим и оптическим расстояниями. Величину r_c варьируют затем до тех пор, пока для оптической глубины на уровне фотосферы при $r = R$ не будет получено приемлемое значение ($\approx 2/3$). Построив динамическую модель, можно использовать даваемое ею распределение плотности в программе, по которой рассчитывается сферическая модель атмосферы, и перестроить распределение температуры таким образом, чтобы добиться

выполнения условия лучистого равновесия. Это новое распределение температуры используется затем для построения новой динамической модели, и процесс повторяется. На деле динамика атмосферы, а следовательно, скорость, распределение плотности и скорость потери массы нечувствительны к распределению температуры, и поэтому итерации сходятся быстро.

Кастор, Аббот и Клейн опубликовали [138] решение для значений параметров, соответствующих звезде типа O5: $M = 60 M_{\odot}$, $L = 9,7 \cdot 10^5 L_{\odot}$, $R = 9,6 \cdot 10^{11}$ см $= 13,8 R_{\odot}$, $T_{\text{эфф}} = 49\,300$ К, $\lg g = 3,94$, $\Gamma_e = 0,4$. Полученная в результате скорость потери массы составляет $\dot{M} = 6,6 \cdot 10^{-6} M_{\odot}$ в год. Такое значение характерно для звезд, подобных ζ Pup. Конечная скорость v_{∞} , приобретаемая газом, равна 1500 км/с, так что $\dot{M} \approx \frac{1}{2} (L/v_{\infty} c)$, откуда

видно, что около половины импульса, которым первоначально обладало излучение, передается веществу. Кроме того, около половины потока в континууме оказывается заблокированным за счет поглощения в линиях. Это значение хорошо согласуется с наблюдениями [304]. Стандартная теория звездной эволюции [606] дает для звезды указанной массы время жизни на главной последовательности около $3 \cdot 10^6$ лет, откуда следует, что полная потеря массы составляет около 1/3 первоначальной массы. Таким образом, оказывается, что у этих звезд звездный ветер должен весьма существенно влиять на их эволюцию.

Распределения плотности и скорости в описанной выше модели приведены на рис. 15.5 и 15.6. Буквами P , S и C отмечены соответственно фотосфера, звуковая и критическая точки. Поразительной особенностью решения является характерная структура распределения плотности, позволяющая выделить ядро и гало: в дозвуковой области модель имеет почти гидростатический градиент плотности, тогда как за критической точкой $\rho \propto r^{-2}$. В пределах сферы радиуса r_c модель, по существу, плоская. Подъем скорости при $r > r_c$ происходит резко, причем теоретический градиент намного больше градиентов, найденных из наблюдений для нескольких Of-звезд [326], [327]. Однако эти эмпирические исследования не очень точны, и настоятельно требуется провести намного более точное исследование. Распределение скорости является, разумеется, фундаментальной характеристикой динамики оболочки, и его эмпирическое определение несомненно оправдывает любые усилия, необходимые для получения точных результатов.

Изменение фактора светового давления с r показано на

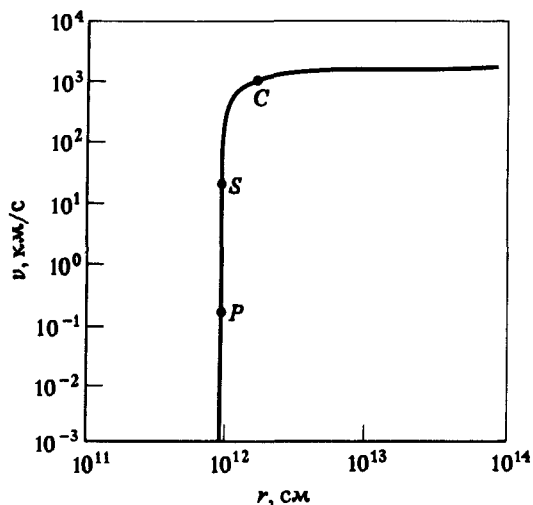


Рис. 15.5. Зависимость скорости от радиуса для модели ветра у звезды типа Of. (По [138], с разрешения.)

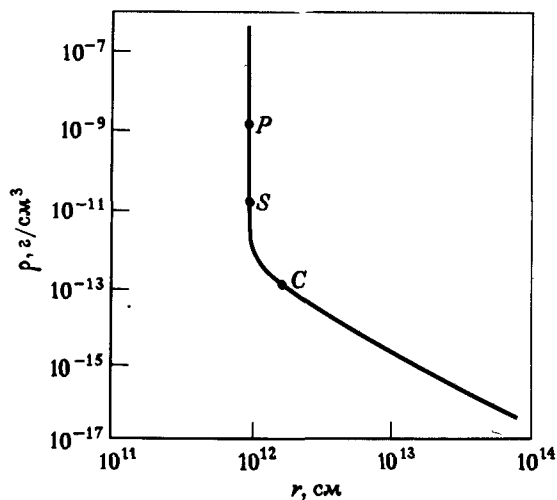


Рис. 15.6. Зависимость плотности от радиуса для модели ветра у звезды типа Of. (По [138], с разрешения.)

рис. 15.7. Из него видно, что во внешней части оболочки $M \approx 5$, откуда следует, что радиативная сила, возникающая за счет рассеяния в линиях, превышает силу тяжести примерно вдвое. Добавив сюда ускорение за счет электронного рассеяния (и вычтя ускорение силы тяжести), найдем, что вещество испытывает направленное *на-ружу* ускорение, превышающее ускорение силы тяжести примерно в 1,4 раза.

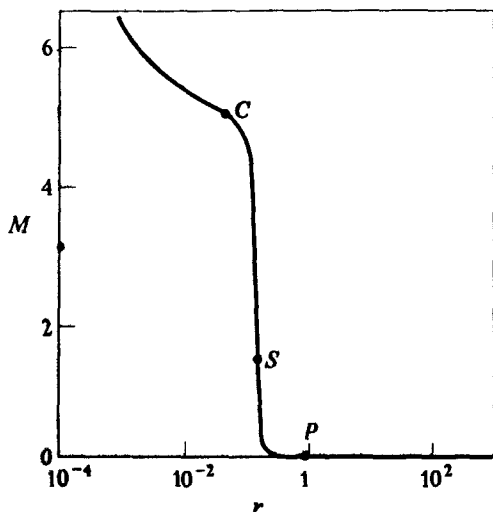


Рис. 15.7. Изменение фактора светового давления M с оптической глубиной в континууме для модели ветра у звезды типа Of. (По [138], с разрешения.)

Относительное распределение выходящего излучения по частотам для описанной модели, учитывающей ветер, почти тождественно распределению для *плоскопараллельной* статической модели с $T_{\text{эф}} \approx 50000$ К. Однако внешняя оболочка имеет оптическую толщину по электронному рассеянию, равную примерно 0,16, и наличие этого слоя, который рассеивает консервативно и поэтому не влияет на относительное распределение энергии, приводит к некоторому увеличению наблюдаемого радиуса звезды (измеряемого интерферометрически), а потому — к уменьшению *абсолютного* потока. Критическое рассмотрение [304] данных как по видимой, так и по ультрафиолетовой области спектра {Pup (при учете межзвездного покраснения и покровного эффекта) показывает, что если и наблюдательные данные, и теоретические модели брать на самом пределе, то удастся добиться согласия с моделью Кастора — Аббота — Клейна. Более ранние исследования указывали на необходимость учета эффектов, обусловленных протяженностью и сферической симметрией атмосферы, чтобы добиться согласия с наблюдаемым распределением энергии.

Наконец, расчет профилей линий H_{α} и $\text{HeII } \lambda 4686 \text{ \AA}$ по модели, учитывающей ветер, дает профили, форма которых похожа на наблюдаемую, причем интенсивность эмиссии и величина красных смещений качественно согласуются с типичными значениями, измеренными у Of-звезд. Эти сопоставления нуждаются в улучшении на основе более точных расчетов. В целом модель Кастора — Аббо-

та — Клейна, по-видимому, вполне удовлетворительно описывает основные особенности динамики атмосфер Of-звезд. Однако многие вопросы остаются открытыми.

ПЕРЕДНИЙ КРАЙ ИССЛЕДОВАНИЙ

Теория ветра, порождаемого излучением, находится на начальной стадии развития, и многие интересные и служащие вызовом для исследователей проблемы остаются еще не решенными. Если оставаться в рамках теории Кастора — Аббота — Клейна, более точные и надежные результаты можно будет получить за счет использования более точного закона изменения силы, учитывающего влияние всего спектра, более реалистичного учета состояния ионизации и возбуждения и лучшего описания процесса переноса излучения (которое учитывало бы, что фотон, рассеянный в одной точке атмосферы, может затем испытать взаимодействие с веществом в другой точке).

Более трудная проблема связана с вопросом о том, каким образом правильно учитывать уравнение энергии и определять температурную структуру течения. Для объяснения наблюдений линий O VI [533], описанных ранее в этом разделе (при допущении, что имеется только ударная ионизация, — предположение, которое нуждается в дополнительном обосновании), требуются температуры порядка $2 \cdot 10^5$ К, что намного больше тех температур, которые может обеспечить излучение. Это наводит на мысль, что, возможно, имеет место подвод механической энергии, который приводит к образованию (сравнительно холодной) короны. Механизмы, вызывающие возникновение потока механической энергии (который, вероятно, диссипирует, нагревая внешние слои), были предложены в [289], [290], [404], однако в их нынешнем виде они не являются вполне удовлетворительными. Если бы течение становилось *турбулентным* (см. ниже), то диссипация энергии и нагрев могли бы происходить. Поскольку $\rho v^2 \gg kT$, даже при относительно низкой эффективности преобразования энергии течения в тепло этот процесс мог бы сильно влиять на температуру. Тем не менее следует подчеркнуть, что хотя имеющиеся модели и не позволяют надежно находить температурную структуру, *динамика* течения остается практически неизменной при $T \lesssim 3 \cdot 10^7$ К (значение, которое, видимо, полностью исключается наблюдениями), *если* только выделение энергии *не* приведет к изменению топологии решения (например, из-за появления дополнительных критических точек

[307]) и за счет этого — к изменению даже качественного поведения решения. Все эти возможности ожидают дальнейшего исследования.

Одна из проблем, с которой в конце концов придется иметь дело моделям со структурой «ядро + гало», состоит в том, что найдены наблюдательные указания на эффекты, обусловленные протяженностью атмосферы, в распределении энергии в *континууме* у *наиболее крайних* представителей Of-звезд [367], [466]. Если удастся показать, что ошибок в наблюдениях и в их обработке (например, в учете межзвездного покраснения) нет, то придется искать пути к построению моделей с более плавным нарастанием скорости. Для звезд WR без таких моделей, по-видимому, не обойтись, так как критический анализ [304] распределения энергии у HD 50896 (WN 5) совершенно определенно указывает на наличие протяженной области дозвукового течения. Был построен ряд моделей такого типа [133], но в них принимались специально подобранные к случаю априорные законы изменения силы. Нужна еще большая работа, прежде чем эти модели можно будет признать удовлетворительными.

Хотя во всех теоретических моделях ветра, порождаемого излучением, течение считается стационарным, имеются достаточно убедительные доказательства того, что спектр (а значит, и ветер) у Of-звезд изменяется со временем. Обнаружены изменения с весьма различными характерными временами [176], [536]. По-видимому, практически все сверхгиганты ранних типов с эмиссионными линиями являются спектральными переменными [537]. В нескольких случаях наблюдались [173] очень необычные спектры с появляющимися на какое-то время линиями, имеющими *обращенные* профили типа Р Лебеда (что, по-видимому, указывает на имеющееся по временам *втекание* вещества в звезду). Если характерное время изменений велико по сравнению со временем, за которое элемент жидкости проходит расстояние от фотосферы до критической точки, то тогда, очевидно, течение можно рассматривать как последовательность квазистационарных состояний, каждое из которых хорошо аппроксимируется установившимся течением. Единственная проблема, которая здесь остается, — понять механизм, ответственный за переменность. С другой стороны, если бы из наблюдений были получены очень короткие характерные времена, то потребовалось бы рассмотрение с полным учетом нестационарности, что сделало бы задачу неизмеримо более трудной.

Хотя предположение о сферической симметрии ветра является разумным начальным приближением, оно, возможно, недостаточ-

но для описания течения у некоторых звезд. В частности, если звезда быстро вращается, то центробежные силы могут заметно снижать эффективную силу тяжести на поверхности, доводя ее до величины, едва превышающей радиативную силу за счет поглощения в одном только континууме. Это может вызывать усиление потери массы из экваториальных областей звезды [409]. Течение в этом случае становится аксиально-симметричным, а не сферически-симметричным. Отклонение линий тока от экваториальной плоскости может в свою очередь вызывать радикальное изменение топологии решения [307]. Кроме того, наличие вращения означает, что течение обладает ненулевой завихренностью, и из-за обусловленных вращением боковых сдвигов течение может распасться и стать *турбулентным*. На это указывают очень большие значения числа Рейнольдса, упоминавшиеся выше в этом разделе. В этом случае в ветре могут развиваться крупномасштабные неоднородности, и перед теорией снова встают неодолимые трудности.

Наконец, имеется и вопрос о роли магнитных полей в динамике ветра у звезд ранних типов. О-звезды очень молоды и образовались из межзвездной среды совсем недавно. Можно предполагать, что любые поля, имевшиеся в этой среде, будут сохраняться в атмосферах этих звезд в виде слабых полей. Тогда могла бы существовать область твердотельного вращения, простирающаяся до альвеновской точки, за которой происходит радиальное расширение. Не может ли это давать профили с широкими эмиссионными крыльями, простирающимися за коротковолновый срез абсорбционного компонента профиля типа Р Лебеда, которые наблюдаются у некоторых звезд? Не могут ли такие поля порождать структурные неоднородности с расходящимися трубками тока, подобные наблюдаемым в солнечной короне и в солнечном ветре [307]? Не могут ли они порождать структуры, в которых (вследствие вращения) развиваются поперечные сдвиги, а отсюда — и турбулентность? В настоящее время наблюдательный порог регистрации магнитных полей звезд составляет несколько сотен гаусс. Даже намного более слабые поля в атмосфере (в несколько десятков гаусс) могли бы оказывать сильное влияние на течение.

Из всего сказанного должно быть ясно, что о физике звездного ветра у звезд ранних типов предстоит многое еще узнать. Без сомнения, нельзя предполагать, что все эти проблемы можно решить, исходя лишь из теоретических соображений. Очевидно, что здесь необходим тщательный анализ спектроскопических данных, проводимый с соблюдением высокого уровня внутренней согласованности. Его цель — *полумпирическое определение физических условий в потоке*. Усилия такого рода окупятся сторицей.

Литература

1. Abhyankar K. 1964. *Astrophys. J.* **140**: 1353.
2. Abhyankar K. 1964. *Astrophys. J.* **140**: 1368.
3. Abhyankar K. 1965. *Astrophys. J.* **141**: 1056.
4. Abramowitz M., and I. Stegun. 1964. *Handbook of Mathematical Functions*. Washington D. C.: U. S. Dept. of Commerce.
5. Abt H., A. Meinel W. Morgan and J. Tapscott. 1969. *An Atlas of Low-Dispersion Grating Stellar Spectra*. Kitt Peak National Observatory, Steward Observatory, and Yerkes Observatory.
6. Adams T., D. Hummer and G. Rybicki. 1971. *J.Q.S.R.T.* **11**: 1365.
7. Adams T., and D. Morton. 1968. *Astrophys. J.* **152**: 195.
8. Alder B., S. Fernbach and M. Rotenberg (eds.). 1967. *Methods in Computational Physics*, Vol. 7. New York: Academic Press.
9. Allen C. 1973. *Astrophysical Quantities*, 'rd ed. London: Athole Press. (Русский перевод: Аллен К. У. Астрофизические величины: М., Мир, 1977.)
10. Aller L. 1956. *Gaseous Nebulae*. New York: Wiley.
11. Aller L. 1963. *The Atmospheres of the Sun and Stars*, 2nd ed. New York: Ronald Press. (Русский перевод 1-го издания: Аллер Л. Астрофизика. 1. Атмосферы Солнца и звезд: М., ИЛ, 1953.)
12. Aller L. 1965. *Advances in Astron. and Astrophys.* **3**: 1.
13. Aller L., and J. Greenstein. 1960. *Astrophys. J. Supp. No.* **46 5**: 139.
14. Aller L., and D. McLaughlin (eds.). 1965. *Stellar Structure*. Chicago: Univ. (Русский перевод: Внутреннее строение звезд/Под ред. Аллера Л. и Мак-Лафлина: М., Мир, 1970.)
15. Амбарцумян В. А., Мустель Э. Р., Северный А. Б., Соболев В. В. Теоретическая астрофизика: М., ГТТИ, 1952.
16. Athay R. 1964. *Astrophys. J.* **140**: 1579.
17. Athay R. 1970. *Astrophys. J.* **161**: 713.
18. Athay R. 1972. *Radiation Transport in Spectral Lines*. Dordrecht: Reidel.
19. Athay R. (ed.). 1974. *Chromospheric Fine Structure*. Dordrecht: Reidel.
20. Athay R. 1976. *The Solar Chromosphere and Corona: Quiet Sun*. Dordrecht: Reidel.
21. Athay R., and R. Canfield. 1969. *Astrophys. J.* **156**: 695.
22. Athay R., and B. Lites. 1972. *Astrophys. J.* **176**: 809.
23. Athay R., J. Mathis and A. Skumanich (eds.). 1968. *Resonance Lines in Astrophysics*. Boulder: National Center for Atmospheric Research.
24. Athay R., and A. Skumanich. 1968. *Astrophys. J.* **152**: 141.
25. Athay R. 1968. *Astrophys. J.* **152**: 211.
26. Athay R. 1968. *Solar Phys.* **3**: 181.
27. Athay R. 1968. *Astrophys. J.* **4**: 176.
28. Athay R. 1971. *Astrophys. J.* **170**: 605.
29. Athay R., and R. Thomas. 1958. *Astrophys. J.* **127**: 96.
30. Auer L. 1967. *Astrophys. J. Letters* **150**: L53.
31. Auer L. 1968. *Astrophys. J.* **153**: 783.

32. Auer L. 1971. *J.Q.S.R.T.* 11: 573.
33. Auer L. 1973. *Astrophys. J.* 180: 469.
34. Auer L. 1976. *J.Q.S.R.T.* 16: 931.
35. Auer L., and J. Heasley. 1971. Unpublished Yale Univ. Observatory Report.
36. Auer L., J. Heasley and R. Milkey. 1972. *Kitt Peak Natl. Obs. Contr. No.* 555. Tucson: Kitt Peak National Observatory.
37. Auer L., and J. Heasley. 1976. *Astrophys. J.* 205: 165.
38. Auer L., and D. Mihalas. 1968. *Astrophys. J.* 151: 311.
39. Auer L., and D. Mihalas. 1968. *Astrophys. J.* 153: 245.
40. Auer L., and D. Mihalas. 1969. *Astrophys. J.* 156: 157.
41. Auer L., and D. Mihalas. 1969. *Astrophys. J.* 156: 681.
42. Auer L., and D. Mihalas. 1969. *Astrophys. J.* 158: 641.
43. Auer L., and D. Mihalas. 1970. *Astrophys. J.* 160: 233.
44. Auer L., and D. Mihalas. 1970. *M.N.R.A.S.* 149: 60.
45. Auer L., and D. Mihalas. 1972. *Astrophys. J. Supp. No.* 205 24: 193.
46. Auer L., and D. Mihalas. 1973. *Astrophys. J. Supp. No.* 223 25: 433.
47. Auer L., and D. Mihalas. 1973. *Astrophys. J.* 184: 151.
48. Auman J. 1969. *Astrophys. J.* 157: 799.
49. Auvergne M., H. Frisch U. Frisch C. Froeschle, and A. Pouquet. 1973. *Astron. and Astrophys.* 29: 93.
50. Avery L., and L. House. 1968. *Astrophys. J.* 152: 493.
51. Avrett E. 1966. *Astrophys. J.* 144: 59.
52. Avrett E. 1971. *J.Q.S.R.T.* 11: 519.
53. Avrett E., and D. Hummer. 1965. *M.N.R.A.S.* 130: 295.
54. Avrett E., and W. Kalkofen. 1968. *J.Q.S.R.T.* 8: 219.
55. Avrett E., and M. Krook. 1963. *Astrophys. J.* 137: 874.
56. Ayres T., J. Linsky and R. Shine. 1974. *Astrophys. J.* 192: 93.
57. Ayres T., J. Linsky, and R. Shine. 1975. *Astrophys. J. Letters.* 195: L121.
58. Ayres T., and J. Linsky. 1975. *Astrophys. J.* 200: 660.
59. Ayres T., and J. Linsky. 1976. *Astrophys. J.* 205: 874.
60. Baker J., and D. Menzel. 1938. *Astrophys. J.* 88: 52.
61. Bappu M., and J. Sahade (eds.). 1973. *Wolf — Rayet and High-Temperature Stars*. Dordrecht: Reidel.
62. Baranger M. 1958. *Phys. Rev.* 111: 481.
63. Baranger M. 1958. *Phys. Rev.* 111: 494.
64. Baranger M. 1958. *Phys. Rev.* 112: 855.
65. Baranger M., and B. Mozer. 1959. *Phys. Rev.* 115: 521.
66. Barnard A., J. Cooper and L. Shamey. 1969. *Astron. and Astrophys.* 1: 28.
67. Barnard A., and J. Cooper. 1970. *J.Q.S.R.T.* 10: 695.
68. Barnard A., J. Cooper and E. Smith. 1974. *J.Q.S.R.T.* 14: 1025.
69. Barnard A., J. Cooper and E. Smith. 1975. *J.Q.S.R.T.* 15: 429.
70. Baschek B., W. Kegel and G. Traving (eds.). 1975. *Problems in Stellar Atmospheres and Envelopes*. Berlin: Springer-Verlag.
71. Baschek B., and J. Oke. 1965. *Astrophys. J.* 141: 1404.
72. Bates D. 1952. *M.N.R.A.S.* 112: 40.
73. Bates D. (ed.). 1962. *Atomic and Molecular Processes*. New York: Academic Press. (Русский перевод: Атомные и молекулярные процессы / Под ред. Бейтса Д.: М., Мир, 1964.)
74. Bates D., and A. Damgaard. 1949. *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)* 242A: 101.
75. Beals C. 1929. *M.N.R.A.S.* 90: 202.

76. Beals C. 1930. *P. Dominion Astrophys. Obs. Victoria* 4: 271.
77. Beals C. 1931. *M.N.R.A.S.* 91: 966.
78. Beals C. 1934. *P. Dominion Astrophys. Obs. Victoria* 6: 95.
79. Beals C. 1950. *P. Dominion Astrophys. Obs. Victoria* 9: 1.
80. Bell R. 1970. *M.N.R.A.S.* 148: 25.
81. Bell R. 1971. *M.N.R.A.S.* 154: 343.
82. Bell R., and D. Gottlieb. 1971. *M.N.R.A.S.* 151: 449.
83. Bell R., and S. Parsons. 1974. *M.N.R.A.S.* 169: 71.
84. Benett S., and H. Griem. 1971. *Univ. of Maryland Technical Report No. 71 — 097*. College Park: Univ. of Maryland.
85. Berger J. 1956. *Astrophys. J.* 124: 550.
86. Berman P., and W. Lamb. 1969. *Phys. Rev.* 187: 221.
87. Bethe H., and E. Salpeter. 1957. *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms*. Berlin: Springer-Verlag.
88. Bhatnagar P., M.Krook, D. Menzel and R. Thomas, 1955. *Vistas in Astron.* 1: 296.
89. Biermann L. 1946. *Naturwiss.* 33: 118.
90. Biermann L. 1948. *Z. für Astrophys.* 25: 135.
91. Biermann L. 1951. *Z. für Astrophys.* 29: 274.
92. Biermann L. 1953. *Mem. Roy. Soc. Sci. Liege* 13: 291.
93. Biermann L. 1957. *Observatory* 107: 109.
94. Billings D. 1966. *A Guide to the Solar Corona*. New York: Academic Press.
95. Blaha M. 1969. *Astrophys. J.* 157: 473.
96. Bless R., A. Code and E. Fairchild. 1976. *Astrophys. J.* 203: 410.
97. Bode G. 1965. *Die Kontinuierliche Absorption von Sternatmosphären*. Kiel: Institut für Theoretische Physik.
98. Böhm K.-H. 1961. *Astrophys. J.* 134: 264.
99. Böhm K.-H. 1963. *Astrophys. J.* 137: 881.
100. Böhm K.-H. 1963. *Astrophys. J.* 138: 297.
101. Böhm K.-H. 1969. *Astron. and Astrophys.* 1: 180.
102. Böhm-Vitense E. 1973. *Astrophys. J.* 181: 379.
103. Bolton C. 1970. *Astrophys. J.* 161: 1187.
104. Bond J., K. Watson and J. Welch. 1965. *Atomic Theory of Gas Dynamics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.
105. Bradley P., and D. Morton. 1969. *Astrophys. J.* 156: 687.
106. Brandt J. 1964. *Icarus* 3: 253.
107. Brandt J. 1970. *Introduction to the Solar Wind*. San Francisco. W. H. Freeman and Company.
108. Brandt J., and J. Cassinelli. 1966. *Icarus* 5: 47.
109. Branscomb L., and B. Pagel. 1958. *M.N.R.A.S.* 118: 258.
110. Brechot S., and H. Van Regemorter. 1964. *Ann. d'Astrophys.* 27: 432.
111. Brechot S., and H. Van Regemorter. 1964. *Ann. d'Astrophys.* 27: 739.
112. Breene R. 1961. *The Shift and Shape of Spectral Lines*. Oxford: Pergamon Press.
113. Brown R., J. Davis and L. Allen. 1974. *M.N.R.A.S.* 167: 121.
114. Brucato R. 1971. *M.N.R.A.S.* 153: 435.
115. Brucato R., and D. Mihalas. 1971. *M.N.R.A.S.* 154: 491.
116. Brueckner K. 1971. *Astrophys. J.* 169: 621.
117. Buckingham R., S. Reid and R. Spence. 1952. *M.N.R.A.S.* 112: 382.
118. Burgess A. 1964. *Astrophys. J.* 139: 776.
119. Burgess A. 1965. *Astrophys. J.* 141: 1588.
120. Burgess A. and M. Seaton. 1960. *M.N.R.A.S.* 120: 121.

121. Burgess A., and H. Summers. 1969. *Astrophys. J.* **157**: 1007.
122. Burgess D. 1970. *J. Phys. B.* **3**: L70.
123. Burgess D., and C. Cairns. 1970. *J. Phys. B.* **3**: L67.
124. Burgess D., and C. Cairns. 1971. *J. Phys. B.* **4**: 1364.
125. Cameron R., (ed.). 1967. *The Magnetic and Related Stars*. Baltimore: Mono Book Corp.
126. Carbon D. 1974. *Astrophys. J.* **187**: 135.
127. Carlson B., and K. Lathrop. 1968. In *Computing Methods in Reactor Physics*, ed. H. Greenspan, C. Kelber, and D. Okrent, New York: Cordon and Breach.
128. Carrier G., and E. Avrett. 1961. *Astrophys. J.* **134**: 469.
129. Carruthers G. 1968. *Astrophys. J.* **151**: 269.
130. Cassinelli J. 1971. *Astrophys. J.* **165**: 265.
131. Cassinelli J. 1971. *Astrophys. Letters* **8**: 105.
132. Cassinelli J., and J. Castor. 1973. *Astrophys. J.* **179**: 189.
133. Cassinelli J., and L. Hartmann. 1975. *Astrophys. J.* **202**: 718.
134. Castor J. 1970. *M.N.R.A.S.* **149**: 111.
135. Castor J. 1972. *Astrophys. J.* **178**: 779.
136. Castor J. 1974. *Astrophys. J.* **189**: 273.
137. Castor J. 1974. *M.N.R.A.S.* **169**: 279.
138. Castor J., D. Abbott, and R. Klein. 1975. *Astrophys. J.* **195**: 157.
139. Castor J., and H. Nussbaumer. 1972. *M.N.R.A.S.* **153**: 293.
140. Castor J., and D. Van Blerkom. 1970. *Astrophys. J.* **161**: 485.
141. Cayrel R. 1961. *Ann. d'Astrophys.* **23**: 235.
142. Cayrel R. 1963. *C.R. Acad. Sci. Paris* **257**: 3309.
143. Cayrel R. 1966. *J.Q.S.R.T.* **6**: 621.
144. Cayrel R., and G. Cayrel de Strobel. 1966. *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **4**: 1.
145. Cayrel R., and M. Steinberg (eds.) 1976. *Physique des Mouvements dans les Atmospheres Stellaires*. Paris: Centre National de la Recherche Scientifique. p. 363.
146. Cayrel R., and G. Traving. 1960. *Z. für Astrophys.* **50**: 239.
147. Chamberlain J. 1961. *Astrophys. J.* **133**: 675.
148. Chandrasekhar S. 1934. *M.N.R.A.S.* **94**: 443.
149. Chandrasekhar S. 1934. *M.N.R.A.S.* **94**: 522.
150. Chandrasekhar S. 1936. *M.N.R.A.S.* **96**: 21.
151. Chandrasekhar S. 1943. *Rev. Mod. Phys.* **15**: 1.
152. Chandrasekhar S. 1944. *Astrophys. J.* **99**: 180.
153. Chandrasekhar S. 1944. *Astrophys. J.* **100**: 76.
154. Chandrasekhar S. 1945. *Astrophys. J.* **101**: 95.
155. Chandrasekhar S. 1945. *Astrophys. J.* **101**: 328.
156. Chandrasekhar S. 1945. *Astrophys. J.* **102**: 402.
157. Chandrasekhar S. 1945. *Rev. Mod. Phys.* **17**: 138.
158. Chandrasekhar S. 1947. *Astrophys. J.* **106**: 145.
159. Chandrasekhar S. 1948. *Proc. Roy. Soc. (London)* **A192**: 508.
160. Chandrasekhar S. 1957. *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. New York: Dover. (Русский перевод: Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд: М., ИЛ, 1950.)
161. Chandrasekhar S. 1960. *Radiative Transfer*. New York: Dover. (Русский перевод: Чандрасекар С. Перенос лучистой энергии: М., ИЛ, 1953.)
162. Chandrasekhar S., and F. Breene. 1946. *Astrophys. J.* **104**: 430.
163. Chapman R. 1966. *Astrophys. J.* **143**: 61.
164. Chapman S., and V. Ferraro. 1931. *Terr. Magn. and Atm. Elec.* **36**: 77.

165. Chapman S., and V. Ferraro. 1940. *Terr. Magn. and Atm. Elec.* **45**: 245.
166. Chapman S. 1959. *Proc. Roy. Soc. (London)* **A253**: 450.
167. Chapelle J., and S. Sahal-Brechot. 1970. *Astron. and Astrophys.* **6**: 415.
168. Chipman E. 1971. *S.A.O. Special Report No. 338*. Cambridge, Mass.: Smithsonian Astrophysical Observatory.
169. Code A., J. Davis R. Bless and R. Brown. 1976. *Astrophys. J.* **203**: 417.
170. Cody W., K. Paciorek and H. Thacher. 1970. *Math. Comp.* **24**: 171.
171. Cohen M., M. Barlow and L. Kuhli. 1975. *Astron. and Astrophys.* **40**: 291.
172. Condon E., and G. Shortley. 1963. *Theory of Atomic Spectra*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. (Русский перевод: Кондон Е., Шортли Г. Теория атомных спектров: М., ИЛ, 1949.)
173. Conti P. 1972. *Astrophys. J. Letters* **174**: L79.
174. Conti P. 1973. *Astrophys. J.* **179**: 161.
175. Conti P. 1974. *Astrophys. J.* **187**: 539.
176. Conti P., and S. Frost. 1974. *Astrophys. J. Letters* **190**: L137.
177. Conti P., and E. Leep. 1974. *Astrophys. J.*, **193**: 113.
178. Cooper J. 1966. *Proceedings of Workshop Conference on the Lowering of the Ionization Potential* [J. I. L. A. Report No. 79]. Boulder: Joint Institute for Laboratory Astrophysics.
179. Cooper J. 1967. *Rev. Mod. Phys.* **39**: 167.
180. Cooper J., and G. Oertel. 1969. *Phys. Rev.* **180**: 286.
181. Courant R., and D. Hilbert. 1962. *Methods of Mathematical Physics, Volume II: Partial Differential Equations*. New York: Interscience. (Русский перевод: Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. II: М., ГИИТ 1949.)
182. Cowley C., and A. Cowley. 1964. *Astrophys. J.* **140**: 713.
183. Cowley C. 1971. *Observatory* **91**: 139.
184. Cox A., J. Stewart and D. Eilers. 1965. *Astrophys. J. Supp. No. 94* **11**: 1.
185. Cram L. 1972. *Solar Phys.* **22**: 375.
186. Cram L., and I. Vardavas. 1977. *In press*.
187. Cuny Y. 1967. *Ann. d'Astrophys.* **30**: 143.
188. Dalgarno A., and J. Browne. 1967. *Astrophys. J.* **149**: 231.
189. Dalgarno A., and D. Williams. 1962. *Astrophys. J.* **136**: 690.
190. Davis J., and J. Webb. 1970. *Astrophys. J.* **159**: 551.
191. Dekker E. 1969. *Astron. and Astrophys.* **1**: 72.
192. De Loore C. 1970. *Astrophys. and Space Sci.* **6**: 60.
193. Deridder G., and W. van Rensbergen. 1976. *Astron. and Astrophys. Supp.* **23**: 147.
194. Deutsch A. 1970. *Astrophys. J.* **159**: 985.
195. Dietz R., and L. House. 1965. *Astrophys. J.* **141**: 1393.
196. Dirac P. 1925. *M.N.R.A.S.* **86**: 825.
197. Dirac P. 1958. *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford: Clarendon Press. (Русский перевод: Дирак П. Лекции по квантовой механике: М., ИЛ, 1964.)
198. Dumont S., and N. Heidmann. 1973. *Astron. and Astrophys.* **27**: 273.
199. Dupree A., and L. Goldberg. 1970. *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **8**: 231.
200. Durney B. 1971. *Astrophys. J.* **166**: 669.
201. Durney B., and P. Roberts. 1971. *Astrophys. J.* **170**: 319.
202. Durney B., and N. Werner. 1972. *Astrophys. J.* **171**: 609.
203. Ecker G. 1955. *Z. für Phys.* **140**: 274.
204. Ecker G. 1955. *Z. für Phys.* **140**: 292.
205. Ecker G. 1957. *Z. für Phys.* **148**: 593.
206. Ecker G. 1957. *Z. für Phys.* **149**: 254.

207. Einstein A. 1917. *Phys. Z.* **18**: 121. (Русский перевод: Эйнштейн А. Избранные труды: М., Наука, 1970.)
208. Epstein P. 1916. *Ann. d. Phys.* **50**: 489.
209. Feautrier P. 1964. *C.R. Acad. Sci. Paris* **258**: 3189.
210. Feautrier P. 1967. *Ann. d'Astrophys.* **30**: 125.
211. Feautrier P. 1968. *Ann. d'Astrophys.* **31**: 257.
212. Finn G. 1967. *Astrophys. J.* **147**: 1085.
213. Finn G. 1971. *J.Q.S.R.T.* **11**: 477.
214. Finn G. 1972. *J.Q.S.R.T.* **12**: 35.
215. Finn G. 1972. *J.Q.S.R.T.* **12**: 149.
216. Finn G. 1972. *J.Q.S.R.T.* **12**: 1217.
217. Finn G., and J. Jefferies. 1968. *J.Q.S.R.T.* **8**: 1705.
218. Finn G., and J. Jefferies. 1969. *J.Q.S.R.T.* **9**: 469.
219. Finn G., and D. Mugglestone. 1965. *M.N.R.A.S.* **129**: 221.
220. Fischel D., and W. Sparks. 1971. *Astrophys. J.* **164**: 355.
221. Foley H. 1946. *Phys. Rev.* **69**: 616.
222. Fowler R., and E. Milne. 1923. *Phil. Mag.* **45**: 1.
223. Fowler R., and E. Milne. 1924. *M.N.R.A.S.* **84**: 499.
224. Frandsen S. 1974. *Astron. and Astrophys.* **37**: 139.
225. Friere R., and F. Praderie. 1974. *Astron. and Astrophys.* **37**: 117.
226. Frisch H. 1975. *Astron. and Astrophys.* **40**: 267.
227. Frisch H., and U. Frisch. 1976. *M.N.R.A.S.* **175**: 157.
228. Fuhr J., G. Martin and B. Specht. 1975. *Bibliography on Atomic Line Shapes and Shifts (July 1973 through May 1975)* [N.B.S. Special Pub. No. 366. Supp. 2]. Washington, D. C.: U. S. Dept of Commerce.
229. Fuhr J., L. Roszman and W. Wiese. 1974. *Bibliography on Atomic Line Shapes and Shifts (April 1972 through June 1973)* [N.B.S. Special Pub. No. 366. Supp. 1]. Washington, D. C.: U. S. Dept. of Commerce.
230. Fuhr J., and W. Wiese. 1971. *Bibliography on Atomic Transition Probabilities: July 1969 through June 1971* [N.B.S. Special Pub. No. 320, Supp. 1]. Washington, D. C.: U. S. Dept. of Commerce.
231. Fuhr J., and W. Wiese. 1973. *Bibliography on Atomic Transition Probabilities: July 1971 through June 1973* [N.B.S. Special Pub. No. 320, Supp. 2]. Washington, D. C.: U. S. Dept. of Commerce.
232. Fuhr J., W. Wiese and L. Roszman. 1972. *Bibliography on Atomic Line Shapes and Shifts (1889 through March 1972)* [N.B.S. Special Pub. No. 366]. Washington, D. C.: U. S. Dept. of Commerce.
233. Fullerton W., and C. Cowley. 1970. *Astrophys. J.* **162**: 327.
234. Gail H., E. Hundt, W. Kegel, J. Schmid-Burgk and G. Traving. 1974. *Astron. and Astrophys.* **32**: 65.
235. Gail H., and E. Sedlmayr. 1974. *Astron. and Astrophys.* **36**: 17.
236. Gail H., E. Sedlmayr and G. Traving. 1975. *Astron. and Astrophys.* **44**: 421.
237. Gail H., E. Sedlmayr and G. Traving. 1976. *Astron. and Astrophys.* **46**: 441.
238. Gebbie K., and R. Thomas. 1968. *Astrophys. J.* **154**: 285.
239. Gebbie K., and R. Thomas. 1970. *Astrophys. J.* **161**: 229.
240. Gebbie K., and R. Thomas. 1971. *Astrophys. J.* **168**: 461.
241. Gehrz R., and J. Hackewell. 1974. *Astrophys. J.* **194**: 619.
242. Geltman S. 1962. *Astrophys. J.* **136**: 935.
243. Gerasimovič B. 1934. *Z. für Astrophys.* **7**: 335.
244. Gibson E. 1973. *The Quiet Sun*. Washington, D. C.: National Aeronautics and Space Administration. (Русский перевод: Гибсон Э. Спокойное Солнце. М., Мир 1977.)

245. Gieske H., and H. Griem. 1969. *Astrophys. J.* **157**: 963.
246. Gingerich O. 1963. *Astrophys. J.* **138**: 576.
247. Gingerich O. (ed.). 1969. *Theory and Observation of Normal Stellar Atmospheres*. Cambridge, Mass.: M.I.T. Press.
248. Gingerich O., and C. de Jager. 1968. *Solar Phys.* **3**: 5.
249. Gingerich O., R. Noyes, W. Kalkofen and Y. Cuny. 1971. *Solar Phys.* **18**: 347.
250. Goldberg L. 1935. *Astrophys. J.* **82**: 1.
251. Goldberg L. 1936. *Astrophys. J.* **84**: 11.
252. Goldberg L., E. Müller and L. Aller. 1960. *Astrophys. J. Supp. No. 45* **5**: 1.
253. Coldstein H. 1969. *Classical Mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.
254. Gordon W. 1929. *Ann. Phys.* **2**: 1031.
255. Grant I., and A. Peraiah. 1972. *M.N.R.A.S.* **160**: 239.
256. Gray D. 1976. *The Observation and Analysis of Stellar Photospheres*. New York: Wiley. (Русский перевод: Грей Д. Наблюдения и анализ звездных фотосфер: М., Мир, 1980.)
257. Green L., P. Rusch and C. Chandler. 1957. *Astrophys. J. Supp. No. 26* **3**: 37.
258. Greene R., and J. Cooper. 1975. *J.Q.S.R.T.* **15**: 1037.
259. Greene R., and J. Cooper. 1975. *J.Q.S.R.T.* **15**: 1045.
260. Greene R., J. Cooper and E. Smith. 1975. *J.Q.S.R.T.* **15**: 1025.
261. Greenstein J., (ed.). 1960. *Stellar Atmospheres*. Chicago: Univ. of Chicago Press. (Русский перевод: Звездные атмосферы / Под ред. Дж. Гринштейна. М., Мир, 1952.)
262. Griem H. 1960. *Astrophys. J.* **132**: 883.
263. Griem H. 1962. *Astrophys. J.* **136**: 422.
264. Griem H. 1964. *Plasma Spectroscopy*. New York: McGraw-Hill.
265. Griem H. 1967. *Astrophys. J.* **147**: 1092.
266. Griem H. 1968. *Astrophys. J.* **154**: 1111.
267. Griem H. 1968. *Phys. Rev.* **165**: 258.
268. Griem H. 1974. *Spectral Line Broadening by Plasmas*. New York: Academic Press. (Русский перевод: Грим Г. Уширение спектральных линий в плазме: М., Мир, 1977)
269. Griem H., M. Baranger, A. Kolb and G. Oertel. 1962. *Phys. Rev.* **125**: 177.
270. Griem H., A. Kolb and K. Shen. 1959. *Phys. Rev.* **116**: 4.
271. Griem H., A. Kolb and K. Shen. 1962. *Astrophys. J.* **135**: 272.
272. Griem H., and K. Shen. 1961. *Phys. Rev.* **122**: 1490.
273. Groth H., and P. Welldmann (eds.). 1970. *Spectrum Formation in Stars with Steady-State Extended Atmospheres*. Washington, D. C.: U. S. Dept. of Commerce.
274. Gustafsson B. 1971. *Astron. and Astrophys.* **10**: 187.
275. Gustafsson B., and P. Nissen. 1972. *Astron. and Astrophys.* **19**: 261.
276. Hack M., (ed.). 1967. *Modern Astrophysics, A Memorial to Otto Struve*. Paris: Gauthier-Villars.
277. Hackwell J., R. Gehrz and J. Smith. 1975. *Astrophys. J.* **192**: 383.
278. Haisch B. 1976. *Astrophys. J.* **205**: 520.
279. Harman R., and M. Seaton. 1964. *Astrophys. J.* **149**: 824.
280. Harrington J. 1970. *Astrophys. J.* **162**: 913.
281. Harris D. 1948. *Astrophys. J.* **108**: 112.
282. Hartle R., and P. Sturrock. 1968. *Astrophys. J.* **151**: 1155.
283. Harvard-Smithsonian Conference on Stellar Atmospheres. 1964. *Proceedings of the First Conference* [S.A.O. Special Report No. 167]. Cambridge, Mass.: Smithsonian Astrophysical Observatory.

284. Harvard-Smithsonian Conference on Stellar Atmospheres. 1965. *Proceedings of the Second Conference* [S.A.O. Special Report No. 174]. Cambridge, Mass.: Smithsonian Astrophysical Observatory.
285. Hayes D. 1968. Unpublished Ph. D. thesis, Univ. of California, Los Angeles.
286. Hayes D. 1970. *Astrophys. J.* **159**: 165.
287. Hayes D., and D. Latham. 1975. *Astrophys. J.* **197**: 593.
288. Hayes D., D. Latnam and S Hayes. 1975. *Astrophys. J.* **197**: 587.
289. Hearn A. 1973. *Astron. and Astrophys.* **23**: 97.
290. Hearn A. 1975. *Astron. and Astrophys.* **40**: 355.
291. Heasley J. 1975. *Solar Phys.* **44**: 275.
292. Heasley J., and F. Kneer. 1976. *Astrophys. J.* **203**: 660.
293. Heitler W. 1954. *Quantum Theory of Radiation*. Oxford: Clarendon Press. (Русский перевод 3-го издания: Гайтлер В. Квантовая теория излучения: М., ИЛ, 1956.)
294. Helfer L., G. Wallerstein, and J. Greenstein. 1959. *Astrophys. J.* **129**: 700.
295. Henyey L. 1946. *Astrophys. J.* **103**: 332.
296. Henyey L., and W. Grassberger. 1955. *Astrophys. J.* **122**: 498.
297. Herzberg G. 1944. *Atomic Spectra and Atomic Structure*. New York: Dover. (Русский перевод 2-го издания: Герцберг Г. Атомные спектры и строение атомов: М., ИЛ, 1948.)
298. Hicock F., and D. Morton. 1968. *Astrophys. J.* **152**: 203.
299. Higginbotham N., and P. Lee 1974. *Astron. and Astrophys.* **33**: 277.
300. Hiltner W., (ed.). 1962. *Astronomical Techniques*. Chicago: Univ. of Chicago Press.
301. Hindmarsh W. 1959. *M.N.R.A.S.* **119**: 11.
302. Hindmarsh W. 1960. *M.N.R.A.S.* **121**: 48.
303. Hindmarsh W., A. Petford and G. Smimth. 1967. *Proc. Roy. Soc. (London)* **A297**: 296.
304. Holm A. and J. Cassinelli. 1977. *Astrophys. J.* **211**: 432.
305. Holtzmark J. 1919. *Ann. d. Phys.* **58**: 577.
306. Holstein T. 1950. *Phys. Rev.* **79**: 744.
307. Holzer T. 1977. *J. Geophys. Res.* **82**: 23.
308. Hooper C. 1966. *Phys. Rev.* **149**: 77.
309. Hooper C. 1968. *Phys. Rev.* **165**: 215.
310. Hooper C. 1968. *Phys. Rev.* **169**: 193.
311. Hudson R., and L. Kieffer. 1971. *Atomic Data* **2**: 205.
312. Hulst H. van de. 1957. *Light Scattering by Small Particles*. New York: Wiley. (Русский перевод: ван де Хюлст Х. Рассеяние света малыми частицами: М., ИЛ, 1961.)
313. Hummer D. 1962. *M.N.R.A.S.* **125**: 21.
314. Hummer D. 1965. *Mem. R.A.S.* **70**: 1.
315. Hummer D. 1968. *M.N.R.A.S.* **138**: 73.
316. Hummer D. 1969. *M.N.R.A.S.* **145**: 95.
317. Hummer D. 1976. In *Be and Shell Stars* [I.A.U. Symposium No. 70]. p. 281. Dordrecht: Reidel.
318. Hummer D., and D. Mihalas. 1967. *Astrophys. J. Letters* **150**: L57.
319. Hummer D., and D. Mihalas. 1970. *M.N.R.A.S.* **147**: 339.
320. Hummer D., and G. Rybicki. 1966. *J.Q.S.R.T.* **6**: 661.
321. Hummer D., and G. Rybicki. 1968. *Astrophys. J. Letters* **153**: L107.
322. Hummer D., and G. Rybicki. 1970. *M.N.R.A.S.* **150**: 419.
323. Hummer D., and G. Rybicki. 1971. *M.N.R.A.S.* **152**: 1.
324. Hundhausen A. 1972. *Coronal Expansion and Solar Wind*. New York: Springer-

- Verlag. (Русский перевод: Хундхаузен А. Расширение короны и солнечный ветер: М., ИЛ, 1976.)
325. Hundt E., K. Kodaira, J. Schmid-Burgk and M. Scholz. 1975. *Astron. and Astrophys.* **41**: 37.
 326. Hutchings J. 1968. *M.N.R.A.S.* **141**: 219.
 327. Hutchings J. 1968. *M.N.R.A.S.* **141**: 329.
 328. Hutchings J. 1970. *M.N.R.A.S.* **147**: 161.
 329. Hutchings J. 1970. *M.N.R.A.S.* **147**: 367.
 330. Hynek J., (ed.). 1951. *Astrophysics: A Topical Symposium*. New York: McGraw-Hill.
 331. Jackson J. 1962. *Classical Electrodynamics*. New York: Wiley. (Русский перевод: Джексон Дж., Классическая электродинамика: М., ИЛ, 1965.)
 332. Jacobs V. 1973. *Photoionization from Excited States of Helium* [NASA Report X-641-73-317]. Greenbelts, Md: National Aeronautics and Space Administration.
 333. Jefferies J. 1960. *Astrophys. J.* **132**: 775.
 334. Jefferies J. 1968. *Spectral Line Formation*. Waltham, Mass.: Blaisdel..
 335. Jefferies J., and R. Thomas. 1958. *Astrophys. J.* **127**: 667.
 336. Jefferies J., and R. Thomas. 1959. *Astrophys. J.* **129**: 401.
 337. Jefferies J., and R. Thomas. 1960. *Astrophys. J.* **131**: 695.
 338. Jefferies J., and O. White. 1960. *Astrophys. J.* **132**: 767.
 339. Jockers K. 1970. *Astron. and Astrophys.* **6**: 219.
 340. John T. 1967. *Astrophys. J.* **149**: 449.
 341. Johnson H. 1974. *NCAR Technical Note No. NCAR-TN/STR-95*. Boulder: National Center for Atmospheric Research.
 342. Johnson H., R. Beebe, and C. Snedden. 1975. *Astrophys. J. Supp. No. 280* **29**: 123.
 343. Joos G. 1959. *Theoretical Physics*, 3rd ed. New York: Hafner.
 344. Jordan S., and E. Avrett. 1973. *Stellar Chromospheres*, Washington, D. C.: National Aeronautics and Space Administration.
 345. Kalkofen W. 1966. *J.Q.S.R.T.* **6**: 633.
 346. Kalkofen W. 1968. *Astrophys. J.* **151**: 317.
 347. Kalkofen W. 1974. *Astrophys. J.* **189**: 105.
 348. Kalkofen W., and S. Strom. 1966. *J.Q.S.R.T.* **6**: 653.
 349. Kamp L. 1973. *Astrophys. J.* **180**: 447.
 350. Каплан С. А., Пикельнер С. Б. Межзвездная среда: М., Наука, 1963.
 351. Karp A. 1972. *Astrophys. J.* **173**: 649.
 352. Karzas W., and R. Latter. 1961. *Astrophys. J. Supp. No. 55* **6**: 167.
 353. Kepple P. 1968. *Improved Stark Profile Calculations for the First Four Members of the Hydrogen Lyman and Balmer Series* [Univ. of Maryland Report #831]. College Park: Univ. of Maryland.
 354. Kepple P. 1972. *Phys. Rev.* **A6**: 1.
 355. Kepple P. 1972. *Stark Profile Calculations for Ionized Helium Lines* [Univ. of Maryland Report No. 72-018]. College Park: Univ. of Maryland.
 356. Kepple P., and H. Griem. 1968. *Phys. Rev.* **173**: 317.
 357. Klinglesmith D. 1971. *Hydrogen Line Blanketed Model Stellar Atmospheres* Washington D. C.: National Aeronautics and Space Administration.
 358. Kneer F. 1975. *Astrophys. J.* **200**: 367.
 359. Кондратьев К. Я. Излучение атмосферы: Л., Гидрометеиздат, 1970.
 360. Kosirev N. 1934. *M.N.R.A.S.* **94**: 430.
 361. Kourganoff V. 1963. *Basic Methods in Transfer Problems*. New York: Dover.
 362. Kraft R. 1967. *Astrophys. J.* **150**: 551.

363. Kramers H. 1923. *Phil. Mag.* **46**: 836.
364. Krishna-Swamy K. 1961. *Astrophys. J.* **134**: 1017.
365. Krook M. 1955. *Astrophys. J.* **122**: 488.
366. Kuan P., and L. Kuhi. 1975. *Astrophys. J.* **199**: 148.
367. Kuan P. 1976. *P.A.S.P.* **88**: 128.
368. Kudritzki R. 1973. *Astron. and Astrophys.* **28**: 103.
369. Kuhi L. 1973. *Astrophys. J.* **180**: 783.
370. Kulander J. 1967. *Astrophys. J.* **147**: 1063.
371. Kulander J. 1968. *J.Q.S.R.T.* **8**: 273.
372. Kulander J. 1971. *Astrophys. J.* **165**: 543.
373. Kulander J., and J. Jefferies. 1966. *Astrophys. J.* **146**: 194.
374. Kunasz P., and D. Hummer. 1974. *M.N.R.A.S.* **166**: 19.
375. Kunasz P., and D. Hummer. 1974. *M.N.R.A.S.* **166**: 57.
376. Kunasz P., D. Hummer and D. Mihalas. 1975. *Astrophys. J.* **202**: 92.
377. Kuperus M. 1965. *The Transfer of Mechanical Energy in the Sun and the Heating of the Corona*. Dordrecht: Reidel.
378. Kuperus M. 1969. *Space Sci. Rev.* **9**: 713.
379. Kurucz R. 1971. *S.A.O. Special Report No. 309*. Cambridge, Mass.: Smithsonian Astrophysical Observatory.
380. Kurucz R. 1974. *Solar Phys.* **34**: 17.
381. Kurucz R., E. Peytremann and E. Avrett. 1974. *Blanketed Model Atmospheres for Early-Type Stars*. Washington D. C.: Smithsonian Institution.
382. Kusch H. 1958. *Z. fur Astrophys.* **45**: 1.
383. Lamers H., and D. Morton. 1976. *Astrophys. J. Supp.* **32**: 715.
384. Lamers H., and M. Sijnders. 1975. *Astron. and Astrophys.* **41**: 259.
385. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред: М., Наука, 1966
386. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Классическая теория поля: М., Наука, 1963.
387. Larson R. 1969. *M.N.R.A.S.* **145**: 297.
388. Latham E. 1969. *The Poetry of Robert Frost*. New York: Holt, Rinehart and Winston.
389. Lawrence G. 1967. *Astrophys. J.* **147**: 293.
390. Leckrone D. 1971. *Astron. and Astrophys.* **11**: 387.
391. Leckrone D., J. Fowler and S. Adelman. 1974. *Astron. and Astrophys.* **32**: 237.
392. Leighton R. 1959. *Principles of Modern Physics*. New York: McGraw-Hill.
393. Leighton R., R. Noyes, and G. Simon. 1962. *Astrophys. J.* **135**: 474.
394. Lighthill M. 1952. *Proc. Roy. Soc. (London)* **A211**: 564.
395. Lighthill M. 1954. *Proc. Roy. Soc. (London)* **A222**: 1.
396. Limber D. 1958. *Astrophys. J.* **127**: 363.
397. Lindholm E. 1941. *Arkiv f. Math. Astron. och Fysik* **28B** (no. 3).
398. Lindholm E. 1945. *Arkiv f. Math. Astron. och Fysik* **32A**(no. 17).
399. Lindquist R. 1966. *Ann. Phys.* **37**: 341.
400. Linsky J. 1970. *Solar Phys.* **11**: 355.
401. Linsky J., and E. Avrett. 1970. *P.A.S.P.* **82**: 169.
402. Lotz W. 1968. *Z. fur Physik* **216**: 241.
403. Lucy L. 1971. *Astrophys. J.* **163**: 95.
404. Lucy L., and P. Solomon. 1970. *Astrophys. J.* **159**: 879.
405. Maeder A. 1971. *Astron. and Astrophys.* **13**: 444.
406. Magnan C. 1974. *J.Q.S.R.T.* **14**: 123.
407. Mark C. 1947. *Phys. Rev.* **72**: 558.
408. Marlborough J., and J.-R. Roy, 1970. *Astrophys. J.* **160**: 221.

409. Marlborough J., and M. Zamir. 1975. *Astrophys. J.* **195**: 145.
410. Massey H., and E. Burhop. 1969. *Electronic and Ionic Impact Phenomena*. 2nd. ed. (4 vols.) Oxford: Clarendon Press. (Русский перевод 1-го издания: Мессис Г., Бархот Э. Электронные и ионные столкновения: М., ИЛ, 1958.)
411. Matsushima S. 1969. *Astrophys. J.* **158**: 1137.
412. Matsushima S., and Y. Terashita. 1969. *Astrophys. J.* **156**: 203.
413. McCrea W. 1928. *M.N.R.A.S.* **88**: 729.
414. McCrea W., and K. Mitra. 1936. *Z. für Astrophys.* **11**: 359.
415. Menzel D., (ed.), 1962. *Selected Papers on Physical Processes in Ionized Plasmas*. New York: Dover.
416. Menzel D., (ed.). 1966. *Selected Papers on the Transfer of Radiation*. New York: Dover.
417. Menzel D., and C. Pekeris. 1935. *M.N.R.A.S.* **96**: 77.
418. Merzbacher E. 1970. *Quantum Mechanics*, 2nd ed. New York: Wiley.
419. Michard R. 1949. *Ann. d'Astrophys.* **12**: 291.
420. Mihalas D. 1964. *Astrophys. J.* **140**: 885.
421. Mihalas D. 1965. *Astrophys. J. Supp. No. 92* 9: 321.
422. Mihalas D. 1965. *Astrophys. J.* **141**: 564.
423. Mihalas D. 1966. *Astrophys. J. Supp. No. 114* 13: 1.
424. Mihalas D. 1966. *J.Q.S.R.T.* **6**: 581.
425. Mihalas D. 1967. *Astrophys. J.* **149**: 169.
426. Mihalas D. 1967. *Astrophys. J.* **150**: 909.
427. Mihalas D. 1968. *Astrophys. J.* **153**: 317.
428. Mihalas D. 1969. *Astrophys. J.* **157**: 1363.
429. Mihalas D. 1971. *Astrophys. J.* **170**: 541.
430. Mihalas D. 1972. *Astrophys. J.* **176**: 139.
431. Mihalas D. 1972. *Astrophys. J.* **177**: 115.
432. Mihalas D. 1972. *NCAR Technical Note NCAR-TN/STR-76*. Boulder: National Center for Atmospheric Research.
433. Mihalas D. 1973. *P.A.S.P.* **85**: 593.
434. Mihalas D. 1974. *Astron. J.* **79**: 1111.
435. Mihalas D., and R. Athay, 1973. *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **11**: 187.
436. Mihalas D., and L. Auer. 1970. *Astrophys. J.* **160**: 1161.
437. Mihalas D., L. Auer, and J. Heasley. 1975. *NCAR Technical Note NCAR-TN/STR-104*. Boulder: National Center for Atmospheric Research.
438. Mihalas D., A. Barnard, J. Cooper and E. Smith. 1974. *Astrophys. J.* **190**: 315.
439. Mihalas D. A. Barnard, J. Cooper, and E. Smith 1975. *Astrophys. J.* **197**: 139.
440. Mihalas D., and D. Hummer. 1973. *Astrophys. J.* **179**: 827.
441. Mihalas D., and D. Hummer. 1974. *Astrophys. J. Letters* **189**: L39.
442. Mihalas D., and D. Hummer. 1974. *Astrophys. J. Supp. No. 265* 28: 343.
443. Mihalas D., D. Hummer and P. Conti. 1972. *Astrophys. J. Letters* **175**: L99.
444. Mihalas D., P. Kunasz, and D. Hummer. 1975. *Astrophys. J.* **202**: 465.
445. Mihalas D., P. Kunasz, and D. Hummer. 1976. *Astrophys. J.* **203**: 647.
446. Mihalas D., P. Kunasz, and D. Hummer. 1976. *Astrophys. J.* **206**: 515.
447. Mihalas D., P. Kunasz, and D. Hummer. 1976. *Astrophys. J.* **210**: 419.
448. Mihalas D., and W. Luebke. 1971. *M.N.R.A.S.* **153**: 229.
449. Mihalas D., and D. Morton. 1965. *Astrophys. J.* **142**: 253.
450. Mihalas D., B. Pagel, and P. Souffrin. 1971. *Theorie des Atmospheres Stellaires*. Geneva: Observatoire de Genève.
451. Mihalas D., R. Shine, P. Kunasz, and D. Hummer. 1976. *Astrophys. J.* **205**: 492.
452. Mihalas D., and M. Stone. 1968. *Astrophys. J.* **151**: 293.

453. Miles B., and W. Wiese. 1969. *Critically Evaluated Transition Probabilities for Ba I and Ba II* [N.B.S. Technical Note No. 474]. Washington D.C.: U.S. Dept. of Commerce.
454. Miles B., and W. Wiese. 1970. *Bibliography on Atomic Transition Probabilities: January 1916 through June 1969* [N.B.S. Special Pub. No. 320]. Washington D.C.: U.S. Dept. of Commerce.
455. Milkey R., T. Ayres, and R. Shine. 1975. *Astrophys. J.* **197**: 143.
456. Milkey R., and D. Mihalas. 1973. *Astrophys. J.* **185**: 709.
457. Milkey R., and D. Mihalas. 1973. *Solar Phys.* **32**: 361.
458. Milkey R., and D. Mihalas. 1974. *Astrophys. J.* **192**: 769.
459. Milkey R., and D. Mihalas. 1975. *Astrophys. J.* **199**: 718.
460. Milkey R., R. Shine, and D. Mihalas. 1975. *Astrophys. J.* **202**: 250.
461. Milne E. 1924. *Phil. Mag.* **47**: 209.
462. Mitchell A. 1969. *Computational Methods in Partial Differential Equations*. London: Wiley.
463. Modisette J. 1967. *J. Geophys. Res.* **72**: 1521.
464. Molnar M. 1973. *Astrophys. J.* **179**: 527.
465. Morgan W., P. Keenan, and E. Kellman. 1943. *An Atlas of Stellar Spectra*. Chicago: Univ. of Chicago Press.
466. Morrison N. 1976. *Astrophys. J.* **200**: 113.
467. Morton D. 1967. *Astrophys. J.* **147**: 1017.
468. Morton D. 1967. *Astrophys. J.* **150**: 535.
469. Morton D., E. Jenkins, and R. Bohlin. 1968. *Astrophys. J.* **154**: 661.
470. Morton D., E. Jenkins, and N. Brooks. 1969. *Astrophys. J.* **155**: 875.
471. Morton D., and G. Van Citters. 1970. *Astrophys. J.* **161**: 695.
472. Mozer B., and M. Baranger. 1960. *Phys. Rev.* **118**: 626.
473. Münch G. 1945. *Astrophys. J.* **102**: 385.
474. Münch G. 1946. *Astrophys. J.* **104**: 87.
475. Münch G. 1948. *Astrophys. J.* **108**: 116.
476. Münch G. 1949. *Astrophys. J.* **109**: 275.
477. Newkirk G. 1967. *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **5**: 213.
478. Noerdlinger P., and G. Rybicki. 1974. *Astrophys. J.* **193**: 651.
479. Nordlund A. 1974. *Astron. and Astrophys.* **32**: 407.
480. Norris J. 1970. *Astrophys. J. Supp. No. 176* **19**: 305.
481. Norris J. 1971. *Astrophys. J. Supp. No. 197* **23**: 193.
482. O'Brien J., and C. Hooper. 1972. *Phys. Rev.* **A5**: 867.
483. Qertel G., and L. Shomo. 1968. *Astrophys. J. Supp. No. 145* **16**: 175.
484. Oke J. 1960. *Astrophys. J.* **131**: 358.
485. Oke J. 1964. *Astrophys. J.* **140**: 189.
486. Oke J. 1965. *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **3**: 23.
487. Oke J., and R. Schild. 1970. *Astrophys. J.* **161**: 1015.
488. Olson E. 1974. *P.A.S.P.* **86**: 80.
489. Omont A., E. Smith, and J. Cooper. 1972. *Astrophys. J.* **175**: 185.
490. Owczarek J. 1964. *Fundamentals of Gas Dynamics*. Scranton: International Text-book.
491. Pagel B. 1959. *M.N.R.A.S.* **119**: 609.
492. Pagel B. 1968. *Proc. Roy. Soc. (London)* **A306**: 91.
493. Pagel B. 1973. *Space Sci. Rev.* **15**: 1.
494. Panofsky W., and M. Phillips. 1962. *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd ed. Reading, Mass: Addison-Wesley.

495. Pannekoek A. 1922. *Bull. Astr. Inst. Netherlands* 1: 107.
496. Parker E. 1958. *Astrophys. J.* 128: 664.
497. Parker E. 1960. *Astrophys. J.* 132: 821.
498. Parker E. 1963. *Interplanetary Dynamical Processes*. New York: Interscience. (Русский перевод: Паркер Е. Динамические процессы в межпланетной среде: М., Мир, 1965.)
499. Parker E. 1965. *Astrophys. J.* 141: 1463.
500. Parsons S. 1969. *Astrophys. J. Supp. No. 159* 18: 127.
501. Payne C. 1925. *Stellar Atmospheres*. Cambridge, Mass.: Harvard Univ. Press.
502. Peach G. 1962. *M.N.R.A.S.* 124: 371.
503. Peach G. 1967. *Mem. R.A.S.* 71: 13.
504. Peach G. 1970. *Mem. R.A.S.* 73: 1.
505. Pecker J.-C. 1951. *Ann. d'Astrophys.* 14: 383.
506. Pecker J.-C. 1965. *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* 3: 135.
507. Peraiah A., and I. Grant. 1973. *J. Inst. Math. Applics.* 12: 75.
508. Peters G. 1976. *Astrophys. J. Supp.* 30: 551.
509. Peterson D. 1968. *S.A.O. Special Report No. 293*. Cambridge, Mass.: Smithsonian Astrophysical Observatory.
510. Peterson D., and M. Scholz. 1971. *Astrophys. J.* 163: 51.
511. Peterson D., and S. Strom. 1969. *Astrophys. J.* 157: 1346.
512. Peytremann E. 1974. *Astron. and Astrophys* 33: 203.
513. Peytremann E. 1974. *Astron. and Astrophys. Supp.* 18: 81.
514. Peytremann E. 1975. *Astron. and Astrophys.* 38: 417.
515. Pfennig H., and E. Trefftz. 1966. *Z. fur Phys.* 190: 253.
516. Philip A. and D. Hayes. 1975. *Multicolor Photometry and the Theoretical HR Diagram* [Dudley Obs. Report No. 9] Albany, N.Y.: Dudley Observatory.
517. Pierce A., and J. Waddell. 1961. *Mem. R.A.S.* 58: 89.
518. Placzek G. 1947. *Phys. Rev.* 72: 556.
519. Placzek G., and W. Seidel. 1947. *Phys. Rev.* 72: 550.
520. Planck M. 1959. *The Theory of Heat Radiation*. New York: Dover. (Русский перевод: Планк М. Теория теплового излучения: М., ГТТИ, 1936.)
521. Pomraning G. 1973. *Radiation Hydrodynamics*. Oxford: Pergamon Press.
522. Preston G. 1971. *P.A.S.P.* 83: 571.
523. Preston G. 1973. *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* 11: 115.
524. Prokof'ev, V. 1962. *Soviet Phys.—Doklady* 6: 861.
525. Proudman I. 1952. *Proc. Roy. Soc. (London)* A214: 119.
526. Ralston A. 1965. *A First Course in Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill.
527. Reichel A. 1968. *J.Q.S.R.T.* 8: 1601.
528. Reichel A. 1969. *Math. Comp.* 23: 645.
529. Reichel A., and I. Vardavas. 1975. *J.Q.S.R.T.* 15: 929.
530. Richtmyer R., and K. Morton. 1967. *Difference Methods for Initial-Value Problems*. 2nd. ed. New York: Interscience. (Русский перевод: Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач: М., Мир, 1972.)
531. Roberts P. 1971. *Astrophys. Letters* 9: 79.
532. Roberts P., and A. Soward. 1972. *Proc. Roy. Soc. (London)* A328: 185.
533. Rogerson J., and H. Lamers. 1975. *Nature* 256: 190.
534. Rohrllich F. 1959. *Astrophys. J.* 129: 441.
535. Rohrllich F. 1959. *Astrophys. J.* 129: 449.
536. Rosendhal J. 1973. *Astrophys. J.* 182: 523.
537. Rosendhal J. 1973. *Astrophys. J.* 186: 909.

538. Ross J., and L. Aller. 1968. *Astrophys. J.* **153**: 235.
539. Roueff E. 1970. *Astron. and Astrophys.* **7**: 4.
540. Roueff E. 1975. *Astron. and Astrophys.* **38**: 41.
541. Roueff E., and H. Van Regemorter. 1969. *Astron. and Astrophys.* **1**: 69.
542. Russell H. 1929. *Astrophys. J.* **70**: 11.
543. Rybicki G. 1971. *J.Q.S.R.T.* **11**: 589.
544. Rybicki G., and D. Hummer. 1967. *Astrophys. J.* **150**: 607.
545. Rybicki G., and D. Hummer. 1969. *M.N.R.A.S.* **144**: 313.
546. Saha M. 1920. *Phil. Mag.* **40**: 472.
547. Saha M. 1921. *Proc. Roy. Soc. (London)* **A99**: 135.
548. Sahal-Brechot S. 1969. *Astron. and Astrophys.* **2**: 322.
549. Sahal-Brechot S., and E. Serge. 1971. *Astron. and Astrophys.* **13**: 161.
550. Sahal-Brechot S. 1974. *Astron. and Astrophys.* **35**: 319.
551. Sampson D. 1965. *Radiative Contributions to Energy and Momentum Transport in a Gas*. New York: Interscience. (Русский перевод: Сэмпсон Д. Уравнения переноса энергии и количества движения в газах с учетом излучения: М., Мир, 1969.)
552. Sargent W. 1964. *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **2**: 297.
553. Scarf F., and L. Noble. 1965. *Astrophys. J.* **141**: 1479.
554. Schatzman E. 1962. *Ann. d'Astrophys.* **25**: 18.
555. Schild R., D. Peterson and J. Oke. 1971. *Astrophys. J.* **166**: 95.
556. Schmeltekopf A., F. Fehsenfeld and E. Ferguson. 1967. *Astrophys. J. Letters* **148**: L155.
557. Schmid-Burgk J. 1974. *Astron. and Astrophys.* **32**: 73.
558. Schmid-Burgk J. 1975. *Astron. and Astrophys.* **40**: 249.
559. Schmid-Burgk J., and M. Scholz. 1975. *Astron. and Astrophys.* **41**: 41.
560. Scholz M. 1972. *Vistas in Astron.* **14**: 53.
561. Schrödinger E. 1926. *Ann. d. Phys.* **80**: 437.
562. Schuster A. 1905. *Astrophys. J.* **21**: 1.
563. Schwarzschild K. 1916. *Sitzber. Deutsch. Akad. Wiss. (Berlin)*. p. 584.
564. Schwarzschild M. 1948. *Astrophys. J.* **105**: 1.
565. Sears F. 1953. *Thermodynamics, The Kinetic Theory of Gases, and Statistical Mechanics*. Reading, Mass.: Addison-Wesley.
566. Seaton M. 1958. *M.N.R.A.S.* **118**: 504.
567. Shimooda H. 1973. *P.A.S. Japan* **25**: 547.
568. Shine R. 1975. *Astrophys. J.* **202**: 543.
569. Shine R., and J. Linsky. 1974. *Solar Phys.* **39**: 49.
570. Shine R., R. Milkey and D. Mihalas. 1975. *Astrophys. J.* **199**: 724.
571. Shine R., R. Milkey and D. Mihalas. 1975. *Astrophys. J.* **201**: 222.
572. Shore B., and D. Menzel. 1968. *Principles of Atomic Spectra*. New York: Wiley.
573. Shoub E. 1977. *Astrophys. J. Supp.* **34**: 259.
574. Simonneau E. 1973. *Astron. and Astrophys.* **29**: 357.
575. Skumanich A., and B. Domenico. 1971. *J.Q.S.R.T.* **11**: 547.
576. Slater J. 1960. *Quantum Theory of Atomic Structure, Vol. 1*. New York: McGraw-Hill.
577. Slater J. 1960. *Quantum Theory of Atomic Structure, Vol. 2*. New York: McGraw-Hill.
578. Smirnov B. 1967. *Soviet Phys. J.E.T.P.* **24**: 314.
579. Smith A. 1969. *Astrophys. J.* **156**: 93.
580. Smith A. 1972. *Astrophys. J.* **176**: 405.
581. Smith E., J. Cooper, and C. Vidal. 1969. *Phys. Rev.* **185**: 140.

582. Smith E., C. Vidal. and J. Cooper. 1969. *J. Res. Nat. Bur. Standards* **73A**: 389.
583. Smith M., and S. Strom. 1969. *Astrophys. J.* **158**: 1161.
584. Smith M., and W. Wiese. 1973. *J. Phys. Chem. Ref. Data* **2**: 85.
585. Sneden C., H. Johnson, and B. Krupp. 1976. *Astrophys. J.* **204**: 281.
586. Snijders M., and H. Lamers. 1975. *Astron. and Astrophys.* **41**: 245.
587. Snijders M. 1977. *Astron. and Astrophys.* **60**: 377.
588. Snijders M. 1977. In press.
589. Snow T., and D. Morton. 1976. *Astrophys. J. Supp.* **32**: 429.
590. Sobolev V. 1957. *Soviet Astron.* **1**: 678. Соболев В. В. Движущиеся оболочки звезд: Л., изд-во ЛГУ, 1947.
592. Somerville W. 1964. *Astrophys. J.* **139**: 192.
593. Somerville W. 1965. *Astrophys. J.* **141**: 811.
594. Spiegel E. 1971. *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **9**: 323.
595. Spiegel E. 1972. *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **10**: 261.
596. Spitzer L. 1943. *Astrophys. J.* **98**: 107.
597. Spitzer L. 1944. *Astrophys. J.* **99**: 1.
598. Spitzer L. 1956. *Physics of Fully Ionized Gases*. New York: Wiley (Русский перевод: Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа: М., ИЛ, 1957.)
599. Stacey D., and J. Cooper. 1971. *J.Q.S.R.T.* **11**: 1271.
600. Stecher T. 1970. *Astrophys. J.* **159**: 543.
601. Stein R. 1968. *Astrophys. J.* **154**: 297.
602. Stein R., and J. Leibacher. 1974. *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **12**: 407.
603. Stewart A., and T. Webb. 1963. *Proc. Phys. Soc. (London)* **82**: 532.
604. Stille J., and J. Callaway. 1970. *Astrophys. J.* **160**: 245.
605. Stone P., and J. Gaustad. 1961. *Astrophys. J.* **134**: 456.
606. Stothers R. 1966. *Astrophys. J.* **144**: 959.
607. Strom S. 1967. *Astrophys. J.* **150**: 637.
608. Strom S., and E. Avrett. 1965. *Astrophys. J. Supp. No. 103*. **12**: 1
609. Strom S., O. Gingerich, and K. Strom. 1966. *Astrophys. J.* **146**: 880.
610. Strom S., and W. Kalkofen. 1966. *Astrophys. J.* **144**: 76.
611. Strom S., and W. Kalkofen. 1967. *Astrophys. J.* **149**: 191.
612. Strom S., and R. Kuricz. 1966. *J.Q.S.R.T.* **6**: 591.
613. Strömgren B. 1935. *Z. für Astrophys.* **10**: 237.
614. Struve O. 1929. *Astrophys. J.* **69**: 173.
615. Struve O. 1929. *Astrophys. J.* **70**: 85.
616. Struve O. 1946. *Astrophys. J.* **104**: 138.
617. Struve O., and C. Elvey. 1934. *Astrophys. J.* **79**: 409.
618. Sturrock P., and R. Hartle. 1966. *Phys. Rev. Letters.* **16**: 628.
619. Sykes J. 1951. *M.N.R.A.S.* **111**: 377.
620. Terashita, Y., and S. Matsushima. 1966. *Astrophys. J. Supp. No 121* **13**: 461.
621. Thomas L. 1930. *Quart. J. Math.* **1**: 239.
622. Thomas R. 1957. *Astrophys. J.* **125**: 260.
623. Thomas R. 1960. *Astrophys. J.* **131**: 429.
624. Thomas R. (ed.). 1960. *Aerodynamic Phenomena in Stellar Atmospheres* [I.A.U. Symposium No. 12]. Bologna: N. Zanichelli.
625. Thomas R. 1965. *Astrophys. J.* **144**: 333.
626. Thomas R. 1965. *Some Aspects of Non-Equilibrium Thermodynamics in the Presence of a Radiation Field*. Boulder: Univ. of Colorado Press.
627. Thomas R. 1973. *Astron. and Astrophys.* **29**: 297.
628. Thomas R., and R. Athay. 1961. *Physics of the Solar Chromosphere*. New York:

Interscience Русский перевод: Томас Р., Антей Р. Физика солнечной хромосферы: М., Мир, 1965.)

629. Traving G. 1960. *Über die Theorie der Druckverbreiterung von Spektrallinien*. Karlsruhe: Verlag G. Braun.
630. Ulmschneider P. 1967. *Z. für Astrophys.* **67**: 193.
631. Ulmschneider P. 1971. *Astron. and Astrophys.* **12**: 297.
632. Ulmschneider P. 1971. *Astron. and Astrophys.* **14**: 275.
633. Underhill A. 1949. *M.N.R.A.S.* **109**: 563.
634. Underhill A., and J. Waddell. 1959. *Stark Broadening Functions for the Hydrogen Lines* [N.B.S. Circular No. 603]. Washington, D.C.: U.S. Dept. of Commerce.
635. Unno W., and M. Kondo. 1976. *P.A.S. Japan* **28**: 347.
636. Unsöld A. 1931. *Z. für Astrophys.* **1**: 138.
637. Unsöld A. 1943. *Vierteljahresschrift der Astron. Ges.* **78**: 213.
638. Unsöld A. 1955. *Physik der Sternatmosphären*, 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag. (Русский перевод 1-го издания: Унзольд А. Физика звездных атмосфер: М., ИЛ, 1949.)
639. Van Regemorter H. 1962. *Astrophys. J.* **136**: 906.
640. Vardavas I. 1976. *J.Q.S.R.T.* **16**: 1.
641. Vardavas I. 1976. *J.Q.S.R.T.* **16**: 715.
642. Vardavas I., and L. Cram. 1974. *Solar Phys.* **38**: 367.
643. Vardya M. 1965. *M.N.R.A.S.* **129**: 205.
644. Vardya M. 1967. *Mem. R.A.S.* **71**: 249.
645. Vernazza J., É. Avrett, and R. Loeser. 1973. *Astrophys. J.* **184**: 605.
646. Vernazza J. 1976. *Astrophys. J. Supp.* **30**: 1.
647. Vidal C., J. Cooper, and E. Smith. 1970. *J.Q.S.R.T.* **10**: 1011.
648. Vidal C., J. Cooper, and E. Smith. 1971. *J.Q.S.R.T.* **11**: 263.
649. Vidal C., J. Cooper, and E. Smith. 1971. *Unified Theory Calculations of Stark Broadened Hydrogen Lines Including Lower State Interactions* [N.B.S. Monograph No. 120]. Washington, D.C., U.S. Dept. of Commerce.
650. Vidal C., J. Cooper, and E. Smith. 1973. *Astrophys. J. Supp. No 214.* **25**: 37.
651. Vitense E. 1951. *Z. für Astrophys.* **28**: 81.
652. Vitense E. 1953. *Z. für Astrophys.* **32**: 135.
653. Vitense E. 1958. *Z. für Astrophys.* **46**: 108.
654. Voigt H., (ed.). 1965. *Landolt-Börnstein Numerical Data and Functional Relationships in Science and Technology*, new series, group VI. vol I. Berlin: Springer-Verlag.
655. Waddell J. 1962. *Astrophys. J.* **136**: 231.
656. Waddell J. 1963. *Astrophys. J.* **138**: 1147.
657. Walborn N. 1971. *Astrophys. J. Supp. No 198* **23**: 257.
658. Wallerstein G., and P. Conti. 1969. *Ann. Rev. Astron. and Astrophys.* **7**: 99.
659. Weber E., and L. Davis. 1967. *Astrophys. J.* **148**: 217.
660. Weber E., and L. Davis. 1970. *J. Geophys. Res.* **75**: 2419.
661. Weisskopf V. 1932. *Z. für Phys.* **75**: 287.
662. Weisskopf V. 1933. *Physik. Z.* **34**: 1.
663. Weisskopf V. 1933. *Observatory* **56**: 291.
664. Wendroff B. 1963. *Los Alamos Scientific Laboratory Report No. LAMS-2795*.
665. Weymann R. 1960. *Astrophys. J.* **132**: 380.
666. Weymann R. 1962. *Astrophys. J.* **136**: 476.
667. Whang Y., and C. Chang. 1965. *J. Geophys. Res.* **70**: 4175.
668. Whang Y., C. Liu, and C. Chang. 1966. *Astrophys. J.* **145**: 255.
669. White O. 1968. *Astrophys. J.* **152**: 217.

670. Wiese W., and J. Fuhr. 1975. *J. Phys. Chem. Ref. Data* **4**: 263.
671. Wiese W., D. Kelleher, and D. Paquette. 1972. *Phys. Rev.* **A6**: 1132.
672. Wiese W., M. Smith, and B. Glennon. 1966. *Atomic Transition Probabilities. Vol. 1: Hydrogen through Neon* [NSRDS-NBS-4]. Washington, D.C.: U.S. Dept. of Commerce.
673. Wiese W., M. Smith, and B. Miles. 1969. *Atomic Transition Probabilities. Vol. 2: Sodium through Calcium* [NSRDS-NBS-22]. Washington, D.C.: U.S. Dept. of Commerce.
674. Wilson O. 1934. *Astrophys. J.* **80**: 259.
675. Wilson O. 1963. *Astrophys. J.* **138**: 832.
676. Wilson O., and V. Bappu. 1957. *Astrophys. J.* **125**: 661.
677. Wilson O., and A. Skumanuch. 1964. *Astrophys. J.* **140**: 1401.
678. Wilson R. 1958. *P. Roy. Obs. Edinburgh* **2**: 61.
679. Wilson S., and K. Sen. 1965. *Ann. d'Astrophys.* **28**: 348.
680. Wilson S., and K. Sen. 1965. *Ann. d' Astrophys.* **28**: 855.
681. Wolff C., J. Brandt, and R. Southwick. 1971. *Astrophys. J.* **165**: 181.
682. Wolff S., L. Kuhi, and D. Hayes. 1968. *Astrophys. J.* **152**: 871.
683. Woolley R. 1938. *M.N.R.A.S.* **98**: 624.
684. Woolley R., and D. Stibbs. 1953. *The Outer Layers of a Star*. Oxford Clarendon Press.
685. Wright A., and M. Barlow. 1975. *M.N.R.A.S.* **170**: 41.
686. Wright K. 1948. *P. Dominion Astrophys. Obs. Victoria* **8**: 1.
687. Wrubel M. 1949. *Astrophys. J.* **109**: 66.
688. Wrubel M. 1950. *Astrophys. J.* **111**: 157.
689. Wrubel M. 1954. *Astrophys. J.* **119**: 51.
690. Zanstra H. 1941. *M.N.R.A.S.* **101**: 273.
691. Zanstra H. 1946. *M.N.R.A.S.* **106**: 255
692. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений: М., Наука, 1960.
693. Zinn R. 1970. *Astrophys. J.* **162**: 909.
694. Zirin H. 1966. *The Solar Atmosphere*. Waltham. Mass.: Blaisdell (Русский перевод: Зирин Г. Атмосфера Солнца: М., Мир, 1966.)

Список обозначений

Ниже приведены обозначения величин, использованных в книге; дано их краткое описание и указан номер страницы, где соответствующее обозначение употребляется впервые (жирными цифрами указан номер части). В список не включены стандартные математические символы, «немые» переменные и индексы, а также обозначения, употребляемые однократно.

a	Отношение ширины линии, обусловленной затуханием, к доплеровской ширине, т.е. $\Gamma/4\pi\Delta\nu_D$	74, 2
a	Изотермическая скорость звука	319, 2
a_j	Весовой множитель квадратурной формулы	97, 1
a_{ji}	Доля, которую переходы $j \rightarrow i$ составляют среди всех радиативных переходов с уровня j (коэффициент ветвления)	192, 1
a_R	Постоянная в законе излучения Стефана	21, 1
a_s	Адиабатическая скорость звука	313, 2
a_ν	Макроскопический коэффициент поглощения, не исправленный за вынужденное излучение	113, 1
a_ν	Коэффициент в линейном разложении функции Планка	200, 1
a_0	Боровский радиус	126, 1
$a_j(t)$	Коэффициент при собственной функции ψ_j в разложении ψ -функции	121, 1
$a_\nu(\mu)$	Глубина поглощения (в долях интенсивности континуума) на частоте ν в пределах линии, наблюдаемой на угловом расстоянии $\arccos \mu$ от центра диапазона, т.е. $1 - r_\nu(\mu)$	6, 2
A	Векторный потенциал	22, 1
$\mathcal{A}$	Матрица коэффициентов уравнений статистического равновесия	188, 1
a_a	Эйнштейновский коэффициент вероятности автоионизационного перехода	183, 1
A_i	Атомный вес i -й химической составляющей газа	151, 1
A_{ji}	Эйнштейновский коэффициент вероятности спонтанного перехода $j \rightarrow i$	113, 1

A_s	Эйнштейновский коэффициент вероятности стабилизирующего перехода в процессе ди-электронной рекомбинации	184, 1
A_ν	Глубина поглощения в потоке на частоте ν в пределах спектральной линии, выраженная в долях потока в соседнем континууме, $A_\nu = 1 - R_\nu$	6, 2
A_0	Глубина поглощения в центре линии с бесконечно большим коэффициентом поглощения	66, 2
A_d	Матрица, описывающая связь между узлами $d - 1$ и d дискретизации по глубине в разностном методе Фотрие решения уравнения переноса	208, 1
b_i	Коэффициент, дающий отклонение населенности уровня i от той, которая имеется при ЛТР, т.е. n_i/n_i^*	291, 1
b_ν	Коэффициент в линейном разложении функции Планка	200, 1
$b_\alpha(\tau)$	Функция Планка, выраженная в долях ее значения на поверхности атмосферы, т.е. $B_\nu[T(\tau)]/B_\nu(T_0)$	111, 1
$b_\nu(\tau_\nu)$	Функция Планка, выраженная в долях интенсивности в центре диска, т.е. $B_\nu[T(\tau_\nu)]/I_\nu(0, 1)$	344, 1
B	Магнитная индукция	21, 1
$\mathcal{B}$	Вектор, составляющими которого являются правые части уравнений статистического равновесия	188, 1
B_{ij}	Эйнштейновский коэффициент вероятности поглощения для перехода $i \rightarrow j$	112, 1
B_{ji}	Эйнштейновский коэффициент вероятности вынужденного, или стимулированного, излучения для перехода $j \rightarrow i$	113, 1
B_0	Функция Планка с $T = T_0$	60, 2
B_1	Значение $\partial B_\nu / \partial \tau$ при $\tau = 0$	60, 2
B^*	Эквивалент функции Планка в члене, описывающем рекомбинационное излучение, в выражении для функций источников при отсутствии ЛТР	116, 2
B_d	Одна из матриц, относящихся к узлу d дискретизации по глубине в разностном методе Фотрие решения уравнения переноса	208, 1
$B(T)$	Функция Планка, проинтегрированная по частоте	80, 1
$B_{\text{эфф}}(\tau)$	Эффективный тепловой источник в линии, налагающейся на континуум	107, 2

$B_\nu(T)$	Функция Планка	20, 1
$B_\nu^*[T(\tau)]$	Функция Планка для распределения температуры, обеспечивающего лучистое равновесие	240, 1
c	Скорость света	17, 1
C_{ij}	Коэффициент скорости ударных переходов с уровня i на уровень j	173, 1
C_{ik}	Коэффициент скорости ударных переходов с уровня i в континуум	169, 1
C_k	Коэффициент пропорциональности в выражении для смещения k -й штатковской компоненты у водорода	40, 2
C_p	Удельная теплоемкость при постоянном давлении	250, 1
C_p, C_3, C_4, C_6	Коэффициенты пропорциональности в степенных представлениях взаимодействия возмущающей и излучающей частиц	24, 2
C_v	Удельная теплоемкость при постоянном объеме	250, 1
C_0	Численная постоянная в выражении для коэффициента скорости ударных переходов, равная $\pi a_0^2 (8k/m\pi)^{1/2}$	181, 1
C_d	Матрица, описывающая связь между узлами d и $d + 1$ дискретизации по глубине в конечно-разностном методе Фотрие решения уравнения переноса	208, 1
$\mathcal{C}_i$	Коэффициент скорости ударных переходов на уровень i , не сбалансированных уходами с него	273, 2
d	Сдвиг линий, обусловленный электронными ударами	53, 2
d	Электрический дипольный момент	122, 1
d_i	Отклонение от единицы отношения населенности уровня i при отсутствии ЛТР к его равновесной населенности, т.е. $b_i - 1$	291, 1
d_{mn}	Матричный элемент дипольного момента $\langle \phi_m^* d \phi_n \rangle$	123, 1
d^3r	Элемент объема	22, 1
D	Расстояние от звезды до наблюдателя	26, 1
D	Дебаевская длина, дебаевский радиус	37, 2
D	Электрическая индукция	21, 1
D_B	Бальмеровский скачок (в звездных величинах)	259, 1
D_p	Пашеновский скачок (в звездных величинах)	259, 1
D_d	Вспомогательная матрица, используемая при объяснении конечно-разностного метода Фотрие решения уравнения переноса	210, 1

D, Dt	Полная, или лагранжева, производная	308, 2
$(D/Dt)_{\text{столк}}$	Скорость изменения функции распределения со временем, обусловленного столкновениями	54, 1
e	Заряд электрона	117, 1
e	Удельная внутренняя энергия жидкости	310, 2
$e(\infty)$	Остаточная энергия вещества звездного ветра на бесконечном расстоянии от звезды (в расчете на одну частицу), т.е. E/F	330, 2
E	Полная энергия частицы (с учетом энергии покоя)	284, 2
E	Полный поток энергии в звездном ветре	322, 2
E	Напряженность электрического поля	21, 1
E	Матрица, через которую в конечно-разностном методе Райбки решения уравнения переноса величина J выражается через величины u_i	214, 1
$\mathcal{E}$	Энергия поля излучения	16, 1
E_i	Энергия i -го атомного уровня, отсчитанная от основного состояния	40, 1
E_ν	Вклад в коэффициент излучения на частоте ν в пределах линии, обусловленный налагающимся на нее (заданным) излучением	162, 2
E_ν	Энергия, приходящая на частоте ν к внешнему наблюдателю от расширяющейся атмосферы	258, 2
E_0	Величина напряженности электрического поля	23, 1
E_0	Пороговая энергия столкновительного процесса	180, 1
E_R^*	Термодинамически равновесное значение плотности энергии излучения	21, 1
$E(\omega)$	Энергетический спектр осциллятора	14, 2
$E_c(\infty)$	Поток энергии в звездном ветре (на бесконечности), обусловленный теплопроводностью	328, 2
$E_n(x)$	Интегральная показательная функция порядка n	64, 1
$E_R(r, \nu, t)$	Монохроматическая плотность энергии поля излучения	20, 1
$E_R(r, \nu)$		
$E_R(\nu)$	Полная (проинтегрированная по частотам) плотность энергии поля излучения	20, 1
$E_R(r, t)$		
$E_R(r)$		
E_R		
f		
f	Сила, действующая на единицу объема сплошной среды	310, 2
f_b	Сила плавучести	252, 1
f_c	Сила осциллятора для континуума	168, 1
f_{ij}	Сила осциллятора для перехода $i \rightarrow j$	120, 1
ϕ_ν	Монохроматический поток, регистрируемый наблюдателем	26, 1

$f(n, n')$	Сила осциллятора для перехода между состояниями с главными квантовыми числами n' и n	125, 1
$f(n', l'; n, l)$	Сила осциллятора для перехода с подуровня l' уровня n' на подуровень l уровня n	125, 1
$f(t)$	Амплитуда колебаний осциллятора как функции времени	14, 2
$f(v), f(v)$	Максвелловское распределение скоростей	151, 1
$f(r, p, t)$	} Переменный эддингтоновский множитель K_ν/J_ν	35, 1
$f(r, v, t)$		
$f(r, v, t)$		
$f(z, v, t)$		
f_ν		
$f_{jk}(n_e, T)$	Доля атомов k -го сорта, находящихся в j -й стадии ионизации, т.е. N_{jk}/N_k	156, 1
$f_k(n', n)$	Сила осциллятора для перехода $n' \rightarrow n$ в атоме водорода согласно формуле Крамерса	127, 1
$f_R(r, n, v, t)$	Функция распределения фотонов	17, 1
$\bar{F}$	Напряженность поля, создаваемого возмущающей частицей	35, 2
F	Поток частиц в звездном ветре	322, 2
$\bar{F}$	Внешняя сила, действующая на единицу	53, 1
$\mathcal{F}, \mathcal{F}$	Поток, проинтегрированный по частотам	69, 1
F_c	Поток в континууме вблизи спектральной линии	6, 2
$F_{\text{конв}}$	Поток энергии, переносимый конвекцией	254, 1
$F_{\text{луч}}$	Поток энергии, переносимый излучением	254, 1
F_{α}^{α}	4-вектор силы	342, 2
F_0	Нормальная напряженность поля	35, 2
$\mathbf{F}_{\text{изл}}$	Сила радиационного торможения осциллятора	118, 1
$\mathcal{F}_{\text{ВВ}}$	Проинтегрированный по частотам поток с единицы поверхности черного тела	27, 1
$F(v)$	Вероятность спонтанного захвата электрона со скоростью v	132, 1
$F(v)$	} Функция Доусона	21, 2
$F(r, v, t)$		
$F(z, v, t)$		
F_ν		
$F(\omega)$		
$F(\omega, T)$	Преобразование Фурье от $f(t)$	14, 2
	Преобразование Фурье пути волн, излучаемого в течение времени T	14, 2
$\mathcal{A}(r, v, t)$	Монохроматический поток излучения по направлению нормали к атмосферным слоям	25, 1
$\mathcal{A}(z, v, t)$		
$\mathcal{F}$		

$\vec{\mathcal{F}}(\mathbf{r}, \nu, t)$	}	Вектор монохроматического потока излучения	24, 1
$\vec{\mathcal{F}}(\mathbf{r}, \nu)$			
$\vec{\mathcal{F}}$			
$\mathcal{F}_{BB}^{\nu}(\nu)$			
$\mathbf{g}$		Ускорение силы тяжести в плоской атмосфере	228, 1
$g_{\text{крит}}$		Ускорение силы тяжести, при котором давление излучения равно силе тяжести в атмосфере	229, 1
$g_{\text{эфф}}$		Эффективное ускорение силы тяжести вещества звездной атмосферы (разность гравитационного и лучистого ускорений)	337, 1
g_i		Статистический вес атомного уровня i	112, 1
$g_{i, jk}$		Статистический вес i -го состояния возбуждения j -й стадии ионизации химического элемента k	152, 1
g_{nl}		Статистический вес подуровня l уровня n	125, 1
g_R		Ускорение, обусловленное действием давления излучения	358, 2
$g_{R, l}$		Ускорение, обусловленное давлением излучения во всех спектральных линиях	363, 2
g_R^0		Ускорение, обусловленное давлением излучения в отдельной спектральной линии	359, 2
$\mathbf{g}_R$		4-вектор силы, с которой излучение действует на вещество	288, 2
$g(\mathbf{n}', \mathbf{n})$	}	Индикатрисы рассеяния	50, 1
$g(\mu', \mu, \phi')$			
$g(\mu', \mu)$			
$g_I(n', n)$			
		Гаунтовский множитель для связанно-связанного перехода $n' \rightarrow n$ в атоме водорода	127, 1
$g_{II}(n, k)$	}	Гаунтовский множитель для связанно-свободного перехода $n \rightarrow k$ в атоме водорода	138, 1
$g_{II}(n, \nu)$			
$g_{III}(k, l)$			
$g_{III}(\nu, \nu)$			
$g_{III}(\nu, T)$			
G		Гравитационная постоянная	336, 1
$\mathbf{G}_{\text{ем}}$		Плотность импульса электромагнитного поля	30, 1
$\mathbf{G}_R$		Плотность импульса поля излучения	25, 1
G_{ν}		Вероятность вынужденного захвата электрона со скоростью ν	132, 1
$G(\nu)$	}	Обобщенное отношение статистических весов в поправке на вынужденное излучение	222, 1
$G_{lu}(\nu)$			
h		Постоянная Планка	17, 1
$\hbar$		Постоянная Планка, деленная на 2π	120, 1
h		Удельная энтальпия сплошной среды	311, 2
h_{ν}		Эддингтоновский множитель на границе атмосферы, т.е. отношение $H_{\nu}(0)/J_{\nu}$	211, 1

H	Эддингтоновский поток, проинтегрированный по частотам	84, 1
H	Шкала высот по давлению	252, 1
H	Напряженность магнитного поля	22, 1
$\mathcal{H}$	Номинальный эддингтоновский поток, т.е. $\sigma_R T_{\text{эфф}}^4 / 4\pi$	234, 1
H_A	Гамильтониан атома	121, 1
H_p	Гамильтониан возмущающей частицы	43, 2
H_p^0, H^0	Текущее значение эддингтоновского потока в методе Эвретта — Крука	234, 1
H_0	Величина напряженности магнитного поля	23, 1
$H(a, v)$	Функция Фойгта	20, 2
$H(q_r, p_r)$	Оператор Гамильтона	121, 1
$H(r, \nu, t)$	Монохроматический эддингтоновский поток, равный $\frac{1}{4} F_\nu$ или $\mathcal{F}_\nu / 4\pi$	25, 1
$H(z, \nu, t)$		
H_ν		
H_ν		
$H(\mu)$	Функция, описывающая потемнение к краю	104, 1
$H_n(v)$	Функции, входящие в разложение функции Фойгта в ряд по степеням a	21, 2
i	Единичный вектор оси x	16, 1
I	Удельная интенсивность излучения, проинтегрированная по частотам	82, 1
I	Момент инерции звезды	334, 2
I_c	Удельная интенсивность излучения, испускаемого ядром протяженной расширяющей атмосферы	264, 2
I_k	Относительная интенсивность k -й штарковской компоненты у водорода	40, 2
I_{ul}	Полная интенсивность излучения в линии, возникающей при переходе $u \rightarrow l$	275, 2
I_H	Энергия ионизации водорода	182, 1
$I(r, n, \nu, t)$	Удельная интенсивность излучения	15, 1
$I_\nu(T, \mu)$		
$I_\nu(\mu)$		
I_ν		
$I(\omega)$	Спектр мощности осциллятора	14, 2
$I_\nu(p, \infty)$	Удельная интенсивность излучения, выходящего из протяженной атмосферы вдоль луча с прицельным параметром p	326, 1
$I^+(\mu, \nu), I^+$	Удельная интенсивность излучения, распространяющегося в направлении $+\mu$	58, 1
$I^-(\mu, \nu), I^-$	Удельная интенсивность излучения, распространяющегося в направлении $-\mu$	58, 1
j	Единичный вектор оси y	16, 1
j	Плотность тока	22, 1

J	Якобиан, появляющийся при преобразовании координат	53, 1
J	Полный угловой момент атома	129, 1
J_ν^0, J^0	Текущее значение средней интенсивности в методе Эвретта — Крука	234, 1
$\bar{J}, \bar{J}_\nu$	Средняя интенсивность, усредненная по профилю линии, т.е. $\int \phi_\nu J_\nu d\nu$	175, 1
$\bar{J}$	Дискретизованное представление изменения $\bar{J}(z)$ с глубиной в конечно-разностном методе Райбки решения уравнения переноса	214, 1
$J(r, t), J$	Проинтегрированная по частотам средняя интенсивность, т.е. $\int_0^\infty J_\nu d\nu$	19, 1
$J(r, \nu, t)$ $J(r, \nu)$ $J(z, \nu)$ $J_\nu(\tau)$ J_ν k k k		
	Средняя интенсивность излучения	19, 1
k	Постоянная Больцмана	20, 1
k	Волновое число	23, 1
k	Квантовое число, описывающее состояния континуума у водорода	138, 1
k	Единичный вектор оси z	16, 1
k'_ν	Коэффициент поглощения в континууме, не исправленный за вынужденное излучение	71, 2
k_ν	Коэффициент поглощения в континууме	273, 1
$\bar{k}_\nu$	Прямое среднее от коэффициента поглощения k_ν	90, 1
$\bar{k}_p$	Планковский средний коэффициент поглощения (планковское среднее)	89, 1
$k(r, \nu, t)$ $k(z, \nu, t)$ k_ν $k^*(r, \nu, t)$ $k^*(\nu)$ $k_{\nu\alpha}$		
	Коэффициент («истинного») поглощения	42, 1
	Термодинамически равновесное значение коэффициента «истинного» поглощения	45, 1
	Корень характеристического уравнения в методе дискретных ординат	98, 1
K	Проинтегрированный по частотам второй угловой момент интенсивности излучения	84, 1
$\mathcal{K}$	Численный коэффициент в сечении фотоионизации для атома водорода	138, 1
K_i	Дискретизированное представление зависимости членов, описывающих тепловой источник, от глубины для частотно-угловой точки i в конечно-разностном методе Райбки решения уравнения переноса	214, 1

$K(r, \nu, t)$	} Второй угловой момент зависимости излучения частоты ν	32, 1
$K(z, \nu, t)$		
K_ν		
$K_\beta(\tau)$		
	Ядерная функция интегрального уравнения для функции источников в линии для случая расширяющейся атмосферы	267, 2
$K_1(\tau)$	Ядерная функция интегрального уравнения для функции источников в линии	92, 2
$K_{1,r}(\tau)$	Ядро интегрального уравнения для функции источников в линии, которая налагается на континуум	106, 2
l	Азимутальное квантовое число	125, 2
l	Квантовое число, описывающее состояния континуума у водорода	138, 1
l	Длина пути перемешивания при конвекции	252, 1
l	Длина корреляции в турбулентном поле скоростей	246, 2
l_ν	Средняя длина пути фотона	78, 1
$\bar{L}$	Светимость звезды	76, 1
L	Характерная длина, проходимая фотоном до его гибели	84, 2
L	Угловой момент звезды, обусловленный ее вращением	334, 2
L	Полный орбитальный момент атома	129, 1
L, L_β^α	Преобразование Лоренца	282, 2
$L_{\text{крит}}$	Критическая светимость, при которой сила, обусловленная давлением излучения на вещество, становится равной силе тяжести в атмосфере	229, 1
L_α	Постоянная интегрирования в методе дискретных ординат	100, 1
L_d	Источниковый член в конечно-разностном представлении уравнения переноса в методе Фотрие	208, 1
$L_{1,r}(\tau)$	Ядерная функция, порождаемая излучением континуума	106, 2
m	Масса электрона	118, 1
m	Магнитное квантовое число	125, 1
m	Масса в столбе единичного сечения в атмосфере	228, 1
m_e	Масса электрона	125, 1
m_p	Масса протона	125, 1
m_H	Масса атома водорода	228, 1
m_0	Масса покоя частицы	284, 2
m	Средняя масса в расчете на одно ядро (атомы + ионы)	228, 1

M	Число Маха	314, 2
$\mathcal{M}$	Масса звезды	229, 1
M_α	Постоянная интегрирования в методе дискретных ординат	100, 1
$\dot{M}$	Скорость потери массы	309, 2
$M(t)$	Фактор светового давления	367, 2
n	Показатель преломления	17, 1
n	Главное квантовое число	125, 1
n, n'	Направления распространения излучения	15, 1
n	Вектор населенностей уровней, являющийся решением уравнений статистического равновесия	188, 1
n_d	Концентрация атомов в состоянии с двумя возбужденными электронами при диэлектронной рекомбинации	184, 1
n_e	Концентрация свободных электронов	132, 1
n_i	Концентрация атомов на i -м уровне	112, 1
n_i^*	Концентрация атомов на i -уровне при ЛТР	114, 1
$n_{i, jk}$	Концентрация ионов химического элемента k в j -й стадии ионизации, находящихся на i -м уровне	152, 1
n_p	Концентрация протонов	188, 1
$\mathbf{n}_0$	Единичный вектор в направлении распространения плоской волны	26, 1
$n(\tau)$	Концентрация турбулентных вихрей	246, 2
$n_k(r, t)$	Концентрация частиц типа k в газе	306, 2
$n_i(\nu)$	Концентрация атомов на уровне i , способных поглощать излучение частоты ν	112, 1
$\tilde{n}_i(\nu)$	Отношение населенности подуровня ν уровня i к профилю линии, т.е. $n_i(\nu)/\phi(\nu)$	210, 2
N	Полная концентрация частиц (всех видов)	157, 1
N	Концентрация возмущающих частиц	24, 2
N_{jk}	Концентрация атомов на всех возбужденных уровнях иона химического элемента k , находящегося в стадии ионизации j	152, 1
N_k	Концентрация атомов и ионов химического элемента k во всех состояниях возбуждения и ионизации	158, 1
N_N	Концентрация ядер (атомы плюс ионы)	157, 1
$\dot{N}_\nu$	Третий угловой момент интенсивности излучения частоты ν	293, 2
$\mathcal{N}_{km}$	Число переходов $k \rightarrow m$	124, 1
p	Полное давление	307, 2
p	Прицельное расстояние для луча в протяженной атмосфере	326, 1
p	Показатель степени в степенном законе взаи-	

	модействия излучающей и возмущающей частиц	24, 2
p	Импульс частицы	53, 1
p_e	Электронное давление	144, 1
p_g	Полное газовое давление	157, 1
p_i	Обобщенный импульс	121, 1
p_i	Давление в межзвездной среде	331, 2
p_{ji}	Вероятность каскадного перехода с уровня j на уровень i	192, 1
p_k	Парциальное давление в газе, обусловленное частицами вида k	307, 2
p_ν	Вероятность фотоионизации на частоте ν	132, 1
p_ν	Коэффициент в линейном разложении функции Планка по τ_ν	58, 2
$p(x, x')$	Совместная вероятность поглощения с подуровня x с последующим возвращением на подуровень x' при переходе в линии	18, 2
$p(\xi', \xi)$	Функция перераспределения в системе отсчета атома	181, 2
$p_R(r, \nu, t)$		
$p_R(z, \nu, t)$	Скаляр давления излучения частоты ν	32, 1
$p_R(\nu)$		
$p_R^*(r, \nu, t)$	} Термодинамически равновесное значение давления излучения частоты ν	33, 1
$p_R^*(z, \nu, t)$		
P	Тензор давления излучения	28, 1
P_d	Вероятность гибели фотона	85, 2
P_{ij}	Компонент ij тензора давления излучения	28, 1
P_U	Полное число переходов в единице объема за 1 с с уровня i на уровень j	174, 1
P^{α}	4-импульс	284, 2
$\bar{P}$	Среднее давление излучения	28, 1
$P(t)$	Мощность, излучаемая зарядом, движущимся с ускорением	117, 1
$P(u_h)$	Функция распределения безразмерных скоростей в турбулентной атмосфере	245, 2
$\langle P(\omega) \rangle$	Средняя мощность, излучаемая гармоническим осциллятором на круговой частоте ω	117, 1
$P_e(\tau)$	Вероятность выхода фотона	86, 2
$P_{nl}(r)$	Радиальная волновая функция	126, 1
q	Тепло, передаваемое газу (в расчете на единицу объема)	310, 2
q_i	Обобщенная координата	121, 1
q_ν	Фактор сферичности в протяженной атмосфере	331, 1
q_c	Поток тепла, обусловленный теплопроводностью	311, 2

$q(\tau)$	Функция Хопфа	84, 1
$q_j(T)$	Скорость переходов $i \rightarrow j$ под действием столкновений в расчете на один атом в состоянии i на один электрон, усредненная по максвелловскому распределению скоростей с температурой T	181, 1
$q_x(\tau)$	Экспоненциальный множитель, учитывающий поглощение в турбулентной атмосфере	247, 2
$\langle q_x(\tau) \rangle_s$	Статическое среднее от $q_x(\tau)$	248, 2
Q	Постоянная интегрирования в методе дискретных ординат	100, 1
Q	Множитель, учитывающий влияние ионизации и давления излучения на средний молекулярный вес газа	252, 1
Q_j	Сечение столкновения в единицах πa_0^2	181, 1
$Q(r, \mu)$	Производная лучевой скорости по направлению луча зрения в методе Соболева	264, 2
$Q_x(s)$	Преобразование Лапласа от $q_x(\tau)$	242, 2
r	Расстояние от центра звезды	16, 1
r	Расстояние между двумя точками	18, 1
r	Отношение коэффициента поглощения в линии к коэффициенту поглощения в континууме, т.е. χ_c/χ_l	57, 1
r	Отношение коэффициентов поглощения в идеализированной задаче о лаймановском континууме	296, 1
r	Радиус-вектор точки в звездной атмосфере	15, 1
r_c	Радиус ядра протяженной атмосферы	331, 1
r_c	Критический радиус в задаче о трансзвуковом ветре	323, 2
r_s	Расстояние звуковой точки от центра звезды	369, 2
r_A	Альвенский радиус	333, 2
r_0	Среднее расстояние между частицами	152, 1
r_0	Расстояние от центра звезды до поверхности заданной постоянной лучевой скорости, равное $(x_0^2 + p^2)^{1/2}$	264, 2
$r_{1/3}$	Радиус сферы, для которой Росселандова оптическая глубина $\bar{\tau}_R = 2/3$	337, 1
r_*	Радиус звезды	34, 1
r	Единичный вектор радиального направления	17, 1
$r_\nu(\mu)$	Остаточная удельная интенсивность в линии, выраженная в долях интенсивности континуума, на угловом расстоянии $\arccos \mu$ от центра диска, т.е. $1 - a_\nu(\mu)$	7, 2
R	Радиус звезды	76, 1

$\mathcal{R}$	Постоянная Ридберга	125, 1
$\mathcal{R}$	Число Рейнольдса	365, 2
R	Тензор энергии — импульса поля излучения	288, 2
R_{db}	Скорость дизлектроинной рекомбинации $d \rightarrow b$	184, 1
R_{ij}	Скорость радиативных переходов из состояния i в состояние j	112, 1
R_{ik}	Скорость фотоионизации с i -го уровня	168, 1
R_{ji}	Скорость радиативного девозбуждения, выраженная в долях равновесной, т.е. $R_{ij} = n_j^* R'_{ji} / n_i^*$	175, 1
R'_{ji}	Скорость радиативного девозбуждения в расчете на один атом на верхнем уровне	176, 1
R_{ki}	Скорость радиативной рекомбинации, выраженная в долях ее равновесного значения, т.е. $R_{ki} = n_u^* R'_{ki} / n_i^*$	179, 1
R'_{ki}	Скорость радиативной рекомбинации $k \rightarrow i$ в расчете на один ион в основном состоянии	178, 1
R_ν	Остаточный поток в частотах линии (поток в линии в долях потока в континууме), т.е. $1 - A_\nu$	6, 2
R_0	Остаточный поток в центре бесконечно сильной линии	60, 2
$\mathcal{R}_i$	Полная скорость радиативных переходов на уровень i , не сбалансированных поглощением	273, 2
$R(x', x)$	Усредненная по углам функция перераспределения; частоты измеряются в безразмерных единицах	199, 2
$R(x', n'; x, n)$	Функция перераспределения; частоты измеряются в безразмерных единицах	188, 2
$R(\nu', \nu)$	Усредненная по углам функция перераспределения	48, 1
$R(\nu', n'; \nu, n)$	Функция перераспределения для процесса рассеяния	46, 1
$R_c(\nu', n'; \nu, n)$	Функция перераспределения в лабораторной системе для случая, когда рассеяние в системе атома является когерентным	188, 2
$R_{nl}(r)$	Радиальная волновая функция	126, 1
$R_u(\nu', \nu)$	Усредненная по углам функция перераспределения для атома, движущегося с (безразмерной) скоростью u	197, 2
$R_v(\nu', n'; \nu, n)$	Функция перераспределения для атома, движущегося со скоростью v	186, 2
s	Длина пути	51, 1
s	Квантовое число, характеризующее спин	125, 1
s_e	Коэффициент электронного рассеяния в расчете на 1 г звездного вещества	358, 2

S	Площадь поверхности	16, 1
S	Функция источников, проинтегрированная по частотам	83, 1
$\mathbf{S}$	Вектор Пойнтинга	26, 1
$\mathbf{S}$	Полный спин атома	129, 1
S_l	Функция источников в линии	151, 1
$S_{\max}$	Максимальное значение функции источников в конечном слое	101, 2
$\mathbf{S}_d$	Дискретизированное представление функции источников в точке d дискретизации по глубине в конечно-разностном решении уравнения переноса по методу Фотрие	210, 1
$S(i, j)$	Сила линии, возникающей при переходе $i \rightarrow j$	124, 1
$S(r, \nu)$	Функция источников, т.е. η_ν/χ_ν	56, 1
$S(z, \nu)$		
S_ν		
$S(\alpha)$		
$S(-\mu)$	Нормированный штарковский профиль	41, 2
	Угловое распределение интенсивности излучения, выходящего из серой атмосферы	104, 1
$\mathcal{S}(\mathcal{L})$	Сила линии в мультиплете	130, 1
$\mathcal{A}(\mathcal{M})$	Сила мультиплета	130, 1
$S_x(s)$	Преобразование Лапласа от $\langle q_x(\tau) \rangle_s$	249, 2
t	Время	15, 1
t	Текущая оптическая глубина в методе Эвретта — Крука	244, 1
t	Эквивалентная оптическая глубина по электронному рассеянию в расширяющейся атмосфере	367, 2
t_c	Время релаксации электронного газа в плазме за счет электрон-электронных столкновений	166, 1
t_r	Среднее время до рекомбинации	166, 1
T	Абсолютная температура	20, 1
T	Тензор энергии — импульса электромагнитного поля	287, 2
T_c	Цветовая температура	328, 1
T_c	Температура излучения ядра расширяющейся атмосферы	274, 2
T_e	Кинетическая температура электронов	166, 1
$T_{\text{эфф}}$	Эффективная температура	75, 1
T_k	Кинетическая температура атомов и ионов	166, 1
T_r	Температура излучения	116, 2
T_ν, T	Полная оптическая толщина конечного слоя	58, 1
T_0	Температура на границе атмосферы	91, 1
T_1	Возмущение температуры в методе Эвретта — Крука	233, 1
T_i	Трехдиагональная матрица, представляющая	

	дифференциальный оператор для частотно-угловой точки i в конечно-разностном решении уравнения переноса методом Райбки	211, 1
T^M	Тензор напряжений Максвелла	30, 1
$T(k^2), T(X)$	Характеристическая функция в методе дискретных ординат	98, 1
$T(t, 0)$	Эволюционный оператор	44, 2
$T_A(t, 0)$	Эволюционный оператор атома	46, 2
$T_P(t, 0)$	Эволюционный оператор возмущающей частицы	46, 2
$T_R(\nu, \mu)$	Температура излучения	165, 1
$T_R(\nu)$		
T_R		
$T_0(t)$		
	Текущее распределение температуры в методе Эвретта — Крука	233, 1
u	Скорость, выраженная в единицах тепловой скорости, т.е. $(m/2kT)^{1/2}u$	186, 2
u_d	Дискретизированное представление $u(z_d, \nu, \mu)$ в конечно-разностном решении уравнения переноса методом Фотрие	209, 1
u_i	Дискретизированное представление $u(z, \nu_i, \mu_i)$ в конечно-разностном решении уравнения переноса методом Райбки	211, 1
$u(z, \nu, \mu), u_{\nu\mu}$	Полусумма интенсивностей в направлениях μ и $-\mu$, т.е. $\frac{1}{2}[I(\nu, +\mu) + I(0, -\mu)]$	204, 1
$u_h(\tau)$	Гидродинамическая скорость в турбулентной атмосфере, измеренная в единицах локальной тепловой скорости, т.е. $v_h(\tau)/v_{\text{теп}}(\tau)$	246, 2
U_i	Матрица, стоящая множителем при $\bar{J}$ и описывающая изменение коэффициента рассеяния (с глубиной. — <i>Ред.</i>) в конечно-разностном решении уравнения переноса методом Райбки (i — частотно-угловая точка, к которой относится u_i)	214, 1
$U(t, 0)$	Эволюционный оператор в представлении взаимодействия	47, 2
$U_i(r, \theta, \phi; n, l, m, s)$	Электронная орбиталь	128, 1
$U_{jk}(T)$	Сумма по состояниям для j -й стадии ионизации химического элемента	152, 1
v	Расстояние от центра линии, измеренное в доплеровских ширинах, т.е. $(\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$	20, 2
v	Средняя относительная скорость сталкивающихся частиц	24, 2

v	Скорость	22, 1
v_{∞}	Критическая скорость в трансзвуковом ветре	323, 2
$v_{\text{убег}}$	Скорость убегания с поверхности звезды	352, 2
v_r	Скорость расширения в радиальном направлении	259, 2
v_z	Проекция скорости расширения на луч с прицельным параметром p	259, 2
v_0	Наиболее вероятная скорость	151, 1
v_{∞}	Скорость звездного ветра на бесконечности	328, 2
$v_{\text{тепл}}^*$	Стандартная тепловая скорость	227, 2
$\bar{v}$	Средняя скорость конвективных элементов	252, 1
$\dot{v}$	Ускорение	117, 1
$v(z, \nu, \mu), v_{\nu\mu}$	Полуразность значений интенсивности в направлениях $+\mu$ и $-\mu$, т.е. $\frac{1}{2}[I(\nu, +\mu) - I(\nu, -\mu)]$	204, 1
$v(r)$	Скорость расширения атмосферы	227, 2
$v_h(r)$	Гидродинамическая скорость в турбулентной атмосфере	246, 2
V	Объем	20, 1
V	Возмущающий потенциал	122, 1
V	Скорость атмосферы, выраженная в единицах стандартной тепловой скорости, т.е. $v/v_{\text{тепл}}^*$	227, 2
V_i	i -й компонент полной скорости частиц газа	406, 2
V_i'	i -й компонент тепловой скорости конкретной частицы в газе	306, 2
$\langle V_i \rangle = v_i$	i -й компонент скорости течения газа	306, 2
V_{mn}	Матричный элемент возмущающего потенциала	122, 1
V^{α}	4-скорость	343, 2
V_i	Матрица, описывающая изменение с глубиной квадратурных весов и профилей поглощения в частотно-угловой точке i в конечно-разностном методе Райбки решения уравнения переноса	214, 1
$V_{\text{кл}}(t)$	Классический потенциал взаимодействия	46, 2
$V'_{\text{кл}}(t)$	Каноническое преобразование классического потенциала взаимодействия к представлению взаимодействия	48, 2
w	Ширина линии, обусловленная электроинным ударом	53, 2
w	Доплеровская ширина, соответствующая тепловой скорости, т.е. $(v_0/c)(2kT/m)^{1/2}$	487, 2
w_k	Квадратурный вес	194, 1
w_1, w_2	Доли спектра, занятые линиями и континуумом в модели частотола	276, 1
W	Фактор дилуции	164, 1

W	Матрица окончательной системы $W\bar{J} = \bar{Q}$ в конечно-разностном методе Райбики решения уравнения переноса	215,1
W_e	Функция распределения электронов	36,2
W_λ, W_ν	Эквивалентная ширина спектральной линии	7,2
W_λ	Приведенная эквивалентная ширина, равная $W/2A_0\Delta\nu_D$	66,2
$W(r)$	Функция распределения ближайшего соседа	34,2
$W(t)$	Плотность энергии электромагнитного поля	23,1
$W(\beta)$	Функция распределения значений напряженности электрического поля	35,2
$W(\beta, \delta)$	Функция распределения значений напряженности электрического поля, учитывающая эффекты экранировки	38,2
$W(\xi)$	Функция распределения проекций скоростей на луч зрения	19,2
$W_H(\beta)$	Холцмарковская функция распределения значений напряженности электрического поля	38,2
$W_\lambda(\mu), W_\nu(\mu)$	Эквивалентная ширина спектральной линии на угловом расстоянии μ от центра диска	7,2
x	Декартова координата в горизонтальной плоскости	16,1
x	Расстояние от центра линии, измеренное в доплеровских ширинах или в ширинах, обусловленных затуханием	90,2
x_α	$1/k_\alpha$, где k_α — корень характеристического уравнения	102,1
$\underline{x}$	Меньшая из абсолютных величин безразмерных частот падающего и рассеянного фотонов, отсчитываемых от центра линии	201,2
$\bar{x}$	Большая из абсолютных величин безразмерных частот падающего и рассеянного фотонов, отсчитываемых от центра линии	201,2
X_α	$x_\alpha^2 = 1/k_\alpha^2$, где k_α — корень характеристического уравнения	102,1
X_ν	Вспомогательная переменная, связанная с оптической глубиной в сферической атмосфере	331,1
X_ν	Вклад в коэффициент поглощения (на частоте в пределах линии. — Ред.), обусловленный налагающимися на линию (заданными сторонами) источниками поглощения	162,2
X_0	$u_0/(1 - e^{-u_0})$, где $u_0 = (h\nu_0/kT)$	60,2
$X_\tau[f(t)]$	Оператор К-интеграла	66,1
y	Декартова координата в горизонтальной плоскости	16,1

Y	Отношение содержаний гелия и водорода по числу частиц	188,1
Y_{ij}	Фактор ударного разбаланса	180,1
$Y_l^m(\theta, \phi)$	Сферическая гармоника	126,1
z	Декартова координата в вертикальном направлении (по нормали к атмосферным слоям)	16,1
z	Длина пути вдоль луча в протяженной атмосфере	326,1
$z_0(p, x), z_0$	z -координата поверхности равной лучевой скорости, соответствующей безразмерной частоте x	264,2
Z	Полная геометрическая толщина конечного слоя	58,1
Z	Заряд ядра атома	128,1
Z_{ji}	Фактор радиационного разбаланса перехода $j \rightarrow i$	177,1
α	Штарковский сдвиг в Å в расчете на единичную нормальную напряженность поля, т.е. $\Delta\lambda/F_0$	41,2
α_k	Относительное содержание химического элемента k	158,1
α_ν	Сечение поглощения в расчете на один атом	132,1
α_*	Угловой диаметр звезды	27,1
$\alpha(t)$	Волновая функция атома	46,2
$\alpha_{ij}(\nu)$	Атомный коэффициент поглощения на частоте ν при связанно-связанном переходе $i \rightarrow j$	175,1
$\alpha_{ik}(\nu)$	Атомный коэффициент поглощения на частоте ν при связанно-свободном переходе	178,1
$\alpha_{DR}(T)$	Коэффициент диэлектрической рекомбинации	184,1
$\alpha_{RR}(T)$	Коэффициент радиативной рекомбинации	179,1
$\alpha_{kk}(\nu)$	Сечение свободно-свободного поглощения на частоте ν	222,1
β	Отношение коэффициентов поглощения в линии и в континууме в модели частотола	276,1
β	Напряженность поля, выраженная в единицах нормальной напряженности, т.е. F/F_0	35,2
β	Скорость в долях скорости света	282,2
β_c	Вероятность того, что в расширяющейся атмосфере излучение ядра достигнет данной точки	263,2
β_ν	Относительное отклонение монохроматического коэффициента поглощения от среднего	109,1
β_ν	Отношение коэффициентов поглощения в линии и в континууме, т.е. $\chi_l(\nu)/\chi_c = \chi_l\phi_\nu/(k_c + \sigma)$	56,2

β_0	Отношение коэффициентов поглощения в линии и в континууме при фойгтовском профиле, так что $\beta_r = \beta_0 H(a, v)$ и $\beta_0 = \chi_0/\chi_c$	59,2
$\beta(r)$	Вероятность выхода фотона из расширяющейся атмосферы	263,2
γ	Классическая постоянная затухания	118,1
γ	Отношение удельных теплоемкостей для идеального газа	250,1
γ	Параметр эффективности конвекции	252,1
γ	Отношение силы, вызываемой излучением, к ее предельному значению в диффузионном приближении	337,1
γ	Доля излучения, происходящего когерентно в системе атома	184,2
γ	Градиент скорости $\partial V/\partial t$ в однородно расширяющейся атмосфере	267,2
γ	Лоренцевский множитель, равный $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$	282,2
γ_r, γ	Отношение монохроматического коэффициента поглощения к его среднему значению или к коэффициенту поглощения в континууме	109,1
γ_r	Обобщенный коэффициент некогерентного рассеяния, входящий в выражение для функции источников при отсутствии ЛТР	296,1
$\gamma(z, p)$	Коэффициент при производной по частоте в уравнении переноса, записанном в сопутствующей системе отсчета с использованием оптической глубины	296,2
$\tilde{\gamma}(z, p)$	Коэффициент при производной по частоте в уравнении переноса, записанном в сопутствующей системе отсчета	295,2
Γ	Отношение удельных теплоемкостей для неидеального газа (например, при учете влияния ионизации и давления излучения)	250,1
Γ	Отношение силы светового давления к силе тяжести	337,1
Γ	Величина, обратная времени жизни возбужденного состояния	17,2
Γ	Полная ширина линии, обусловленная затуханием	18,2
Γ_e	Отношение радиативной силы, обусловленной одним только электронным рассеянием, к силе тяжести	337,1
Γ_c	Ширина, обусловленная затуханием вследствие столкновений	23,2

Γ_L, Γ_U	Величины, обратные временам жизни нижнего и верхнего состояний перехода $L \rightleftharpoons U$	18, 2
Γ_R	Ширина, обусловленная затуханием вследствие излучения	23, 2
Γ_W	Ширина, обусловленная столкновениями в теории Вайскопфа	25, 2
Γ_3	Ширина, обусловленная резонансным уширением	29, 2
Γ_6	Ширина, обусловленная вандерваальсовым уширением	76, 2
$\Gamma_U(T)$	Поправочный множитель (зависящий от температуры) в выражении для скорости ударных переходов	181, 1
$\delta, \delta_L, \delta_U, \delta_R, \delta_c$	Приведенные ширины затухания, равные $\Gamma/2$ в единицах круговой частоты и $\Gamma/4\pi$ — в обычных частотах	17, 2
δ	Число возмущающих частиц в сфере Дебая	38, 2
δ	Отношение коэффициента поглощения в континууме к полному коэффициенту поглощения, усредненное по всей линии	106, 2
$\delta N, \delta N_d$	Возмущение полной концентрации частиц в точке d по глубине) при линеаризации	162, 1
$\delta T, \delta T_d$	Возмущение температуры (в точке d по глубине) при линеаризации	162, 1
δN	Возмущение распределения полной концентрации частиц при линеаризации	246, 1
δT	Возмущение распределения температуры при линеаризации	246, 1
δ_U	Символ Кронекера	30, 1
$\delta n_e, \delta n_{e, d}$	Возмущение электронной концентрации (в точке d по глубине) при линеаризации	160, 1
$\delta n_i, \delta n_{i, d}, \delta n_d$	Возмущение населенностей уровней (в точке по глубине) при линеаризации	162, 1
$\delta I_\nu, \delta I_{dn}$	Возмущение средней интенсивности (в точке d по глубине) при линеаризации	194, 1
δJ_k	Возмущение распределения средней интенсивности с глубиной (на частоте ν_k) при линеаризации	246, 1
$\delta(x)$	Дельта-функции Дирака	23, 1
$\delta(z)$	Отношение доплеровской ширины к стандартной доплеровской ширине, т.е. $\Delta\nu_D(z)/\Delta\nu_D^*$	227, 2
$\delta\rho, \delta\rho_d$	Возмущение плотности (в точке d по глубине) при линеаризации	245, 1
$\delta\eta_\nu, \delta\eta_{dn}$	Возмущение коэффициента излучения (в точке d	

	по глубине на частоте ν_n) при линеаризации	245, 1
$\delta\chi_\nu, \delta\chi_{dn}$	Возмущение коэффициента поглощения (в точке d по глубине на частоте ν_n) при линеаризации	245, 1
$\delta\chi_\nu$	Изменение коэффициента поглощения, обусловленное отклонениями от ЛТР	291, 1
$\delta\psi_d$	Возмущение вектора решения в методе полиной линеаризации	306, 1
$\Delta B(\tau)$	Поправка к проинтегрированной по частоте функции Планка на глубине τ в методе Унзоляда — Люси	25, 1
$\Delta H(\tau)$	Ошибка в интегральном эддингтоновском потоке в методе Унзоляда — Люси	95, 1
$\Delta T(m)$	Возмущение температуры на глубине m (измеряемой массой в столбе единичного сечения)	231, 1
$\Delta\theta$	Разность в $\theta_{\text{возб}}$ между Солнцем и звездой	77, 2
$\Delta\nu$	Смещение по частоте, обусловленное эффектом Доплера	20, 2
$\Delta\chi$	Величина, на которую потенциал ионизации снижается в плазме	153, 1
$\Delta\lambda_c$	Классическая ширина, обусловленная затуханием, выраженная в шкале длин волн	16, 2
$\Delta\lambda_w$	Смещение длины волны, которое вызывает возмущающая частица, расположенная на расстоянии радиуса Вайскопфа	41, 2
$\Delta\nu_D$	Доплеровская ширина в шкале частот	20, 2
$\Delta\nu_D^*$	Стандартная доплеровская ширина	227, 2
$\Delta\tau_{d+\frac{1}{2}}$	Разность оптических глубин в узлах d и $d+1$ при конечно-разностном решении уравнения переноса	207, 1
$\Delta\omega_g$	Расстояние по частоте от центра линии, на котором находится граница, отделяющая области применимости ударного и статистического приближений в теории уширения линий	32, 2
$\Delta\omega_W$	Сдвиг частоты, вызываемый возмущающей частицей, находящейся на расстоянии радиуса Вайскопфа	32, 2
$\Delta\omega_0$	Сдвиг линии в теории Линдхольма	27, 2
$\Delta\omega_0$	Нормальный сдвиг частоты	34, 2
$\Delta\omega(t)$	Мгновенный сдвиг частоты, обусловлен-	

	ный столкновением с возмущающей частицей	26, 2
ε	Диэлектрическая постоянная	22, 1
ε	Доля коэффициента излучения в линии, обусловленная тепловым излучением (по классической теории)	57, 1
$\varepsilon, \varepsilon'$	Параметр, описывающий термализацию функции источников в линии при отсутствии ЛТР, происходящую за счет столкновений	89, 2
ε_ν	Параметр, описывающий вклад теплового излучения в функцию источников при отсутствии ЛТР	296, 1
$\tilde{\varepsilon}$	Термализационный параметр в идеализированной задаче о лаймановском континууме	297, 1
ζ_ν, ζ_k	Параметры, входящие в выражение для функции источников при отсутствии ЛТР	299, 1
η	Параметр в выражении для функции источников при отсутствии ЛТР, описывающий вклад фотоионизации	115, 2
η_0	Критический сдвиг фазы в теории Вайскопфа	26, 2
η'	Изменение фазы за время ds	26, 2
$\eta(t)$	Мгновенный сдвиг фазы, вызываемый столкновением с возмущающей частицей	26, 2
$\eta(t, s)$	Изменение фазы за интервал времени $(t, t + s)$	26, 2
$\eta(r, \nu, t)$ $\eta(z, \nu, t)$ η_ν } $\eta(\infty), \eta(\rho)$	Кэффициент излучения	43, 1
$\eta^i(r, \nu, t), \eta^i(\nu)$	Полный сдвиг фазы, появляющийся при столкновении с возмущающей частицей с прицельным параметром ρ	27, 2
$\eta^f(r, \nu, t), \eta^f(\nu)$	Кэффициент излучения за счет тепловых процессов	44, 1
$\eta^s(r, \nu, t), \eta^s(\nu)$	Кэффициент излучения за счет процессов рассеяния	47, 1
$\eta^*(r, \nu, t)$ $\eta^*(\nu)$ } θ θ	Значение коэффициента излучения при термодинамическом равновесии	45, 1
	5040/T	71, 2
	Угол между направлением распространения пучка излучения и нормалью к атмосфере	16, 1

θ	Источниковый член в выражении для функции источников при отсутствии ЛТР, обусловленный рекомбинациями	115, 2
$\theta_{\text{эфф}}$	$5040/T_{\text{эфф}}$	283, 1
$\theta_{\text{возб}}$	Получаемый по кривой роста параметр, описывающий температуру возбуждения и равный $5040/T_{\text{возб}}$	71, 2
θ	Единичный вектор направления θ в точке (r, θ, ϕ) криволинейной сферической системы координат	32, 1
Θ	Полярный угол точки на поверхности сферы	16, 1
Θ	Угол между направлениями падающего и рассеянного излучения	186, 2
κ	Коэффициент теплопроводности	311, 2
λ	Длина волны	23, 1
λ	Дебройлевская длина волны	45, 2
λ_{ν}	Отношение коэффициента истинного поглощения к полному коэффициенту поглощения, т.е. $k_{\nu}/(k_{\nu} + \sigma_{\nu}) = 1 - \rho_{\nu}$	199, 1
λ_{ν}	Доля, которую составляет тепловое излучение в полном коэффициенте излучения по классической теории образования линий, т.е. $[1 - \rho + \epsilon\beta_{\nu}]/(1 + \beta_{\nu})$	57, 7
Λ	Глубина термализаций	86, 2
Λ_i	Дискретизированное матричное представление Λ -оператора в точке (ν_i, μ_i)	216, 1
$\Lambda_r[f(r)]$	Лямбда-оператор, или оператор средней интенсивности	64, 1
μ, μ'	Косинус угла между направлением распространения излучения и внешней нормалью к атмосфере, т.е. $\cos\theta$	17, 1
μ	Магнитная проницаемость	22, 1
μ	Число атомных единиц массы, приходящихся на одну свободную частицу в газе	313, 2
μ_i	Точка дискретизации по углу в методе дискретных ординат	97, 1
μ_H	Приведенная масса атома водорода	125, 1
ν, ν'	Частота	15, 1
ν_{ij}	Частота перехода $i \rightarrow j$	40, 1
ν_n	Частота порога ионизации с n -го уровня водорода	139, 1
ν_0	Частота порога фотоионизации	169, 1
ν_0	Частота центра линии	19, 2

ν	Меньшая из частот падающего и рассеянного фотонов	198, 2
$\bar{\nu}$	Большая из частот падающего и рассеянного фотонов	198, 2
ν_d	Вспомогательный вектор, используемый при изложении метода Фотрие конечно-разностного решения уравнения переноса	210, 1
ξ	Скорость по лучу зрения	19, 2
ξ, ξ'	Частота фотона в системе отсчета атома	181, 2
$\xi_{\text{тепл}}$	Наиболее вероятное значение составляющей тепловой скорости по лучу зрения, соответствующей температуре $T_{\text{возб}}$, которую дает кривая роста	72, 2
$\xi_{\text{турб}}$	Наиболее вероятное значение составляющей по лучу зрения для скорости мелко-масштабных «турбулентных» движений вещества в атмосфере	72, 2
ξ_x	Вероятность гибели фотона на безразмерной частоте x , отсчитываемой от центра линии	105, 2
ξ_ν, ξ_k	Параметр, входящий в выражение для функции источников при отсутствии ЛТР	299, 1
ξ_0	Наиболее вероятное значение составляющей скорости по лучу зрения	19, 2
$\bar{\xi}$	Средняя вероятность гибели фотона в линии	106, 2
$\pi(t)$	Волновая функция возмущающей частицы	46, 2
Π	Тензор газового давления	310, 2
Π_{ij}	Компонента ij тензора газового давления	307, 2
Π_{ij}^k	Компонента ij тензора парциального газового давления, обусловленного частицами k -й составляющей газа	307, 2
ρ	Плотность заряда	22, 1
ρ	Плотность вещества	228, 1
ρ	Прицельный параметр столкновения	24, 2
ρ_j	Элемент матрицы плотности	43, 2
ρ_A	Матрица плотности для атома	47, 2
ρ_P	Матрица плотности для возмущающей частицы	47, 2
ρ_w	Радиус Вайскопфа	25, 2
ρ_ν	Отношение коэффициента рассеяния к полному коэффициенту поглощения, т.е. $\sigma_\nu / (k_\nu + \sigma_\nu) = 1 - \lambda_\nu$	67, 1

ρ_0	Эффективное значение прицельного параметра столкновения в теории уширения линий за счет столкновений	24, 2
ρ_0	Инвариантная плотность вещества (т.е. произведение концентрации частиц на массу покоя, приходящуюся на частицу. — <i>Ред.</i>)	343, 2
ρ_{00}	Эквивалентная плотность массы, равная сумме инвариантной плотности и внутренней энергии жидкости	343, 2
ρ_{000}	Эквивалентная плотность массы, равная сумме инвариантной плотности и энтальпии жидкости	343, 2
σ	Коэффициент рассеяния в континууме	56, 2
σ_e	Коэффициент томсоновского рассеяния на свободных электронах	147, 1
$\sigma_{\text{полн}}$	Полное сечение рассеяния	119, 1
σ_I	Мнимая часть интеграла, описывающего влияние столкновений	27, 2
σ_R	Постоянная Стефана	27, 1
σ_R	Вещественная часть интеграла, описывающего влияние столкновений	27, 2
$\sigma(r, \nu, t)$ $\sigma(z, \nu, t)$ σ_ν $\sigma_{ij}(\nu)$	Коэффициент рассеяния	42, 1
	Сечение перехода $i \rightarrow j$ под действием столкновений с электронами скорости ν	181, 1
τ	Среднее время между столкновениями	23, 2
τ	Собственное время	342, 2
τ_c	Оптическая глубина в континууме	8, 2
τ_e	Оптическая толщина конвективного элемента	254, 1
τ_l	Оптическая глубина в линии при отсутствии движений	231, 2
τ_s	Эффективное время соударения	31, 2
$\bar{\tau}_R$	Россландова средняя оптическая глубина	88, 1
τ_1	Возмущение оптической глубины (метод Эвретта — Крука)	233, 1
$\bar{\tau}$	Средняя оптическая глубина	86, 1
$\tau(r, \nu)$ $\tau(z, \nu)$ τ_ν $\tau_0(r_0)$	Монохроматическая оптическая глубина	56, 1
	Оптическая глубина по лучу зрения в оболочке, расширяющейся с постоянным градиентом скорости (теория Соболева)	265, 2

ϕ	Азимут пучка излучения в сферической системе координат с полярной осью, направленной по нормали к атмосферным слоям	16, 1
ϕ	Скалярный потенциал	22, 1
ϕ	Отношение пашеновского и бальмеровского скачков, т.е. D_P/D_B	312, 1
ϕ	Единичный вектор направления ϕ в точке (r, θ, ϕ) криволинейной сферической системы координат	32, 1
$\phi(s)$	Приведенная автокорреляционная функция	26, 2
$\phi(\nu), \phi_\nu$	Профиль поглощения в линии	47, 1
$\phi_i(r)$	Не зависящая от времени волновая функция, описывающая i -е состояние атома	121, 1
Φ	Азимут точки, лежащей на поверхности сферы	16, 1
Φ_{ab}	Матричный элемент, описывающий уширение спектральной линии $a \rightarrow b$	49, 2
Φ_ν	Коэффициент, описывающий скорость поглощения фотонов континуума, равный $4\pi\alpha\nu/h\nu$	296, 1
$\Phi(s)$	Автокорреляционная функция	15, 2
$\Phi(x)$	$\int_{-\infty}^x \phi(x)dx$	264, 2
$\Phi_{ijk}(T)$	Множитель Саха — Больцмана, дающий населенность возбужденного уровня i стадии ионизации j химической составляющей k по населенности основного состояния $(j+1)$ -й стадии ионизации, именно $n_{ijk}^* = n_e n_{0,j+1,k} \Phi_{ijk}$	v''', v
$\tilde{\Phi}_{ijk}(T)$	Множитель Саха — Больцмана, дающий населенность возбужденного уровня i стадии ионизации j химической составляющей k по полной концентрации ионов $(j+1)$ -й стадии ионизации, именно $n_{ijk}^* = n_e N_{jk} \Phi_{ijk}$	155, 1
$\Phi_\tau(\mu)$	Функция, описывающая потемнение к краю	343, 1
$\Phi_\tau\{f(t)\}$	Оператор Φ , или оператор потока	65, 1
χ_c	Коэффициент поглощения в континууме	57, 1
χ_{ij}	Коэффициент поглощения для перехода $i \rightarrow j$, определяемый так, что $\chi_i(\nu) = \chi_{ij}\phi_\nu$	65, 2

χ_{ijk}	Потенциал возбуждения уровня i иона j -й стадии ионизации химической составляющей k , отсчитанный от основного состояния	152, 1
$\chi_{\text{нов}}, \chi_I$	Потенциал ионизации	132, 1
$\bar{\chi}$	Средний коэффициент поглощения	86, 1
$\bar{\chi}_c$	Чандрасекаровский средний коэффициент поглощения (чандрасекарово среднее)	109, 1
$\bar{\chi}_F$	Коэффициент поглощения, усредненный по потоку (потоковое среднее)	86, 1
$\bar{\chi}_R$	Росселандовский средний коэффициент поглощения (росселандово среднее)	88, 1
χ_0	Коэффициент поглощения в линии с фойгтовским профилем, определяемый соотношением $\chi_i(\nu) = \chi_0 H(a, \nu)$, так что $\chi_0 = \chi_{ij}/(\pi^{1/2} \Delta \nu_D)$	65, 2
$\left. \begin{array}{l} \chi(r, \nu, t) \\ \chi(z, \nu, t) \\ \chi_{\nu 1} \end{array} \right\}$	Коэффициент ослабления, непрозрачность, полный коэффициент поглощения	41, 1
$\chi_i(\nu), \chi_l$	Коэффициент поглощения в линии	57, 1
ψ_p	Численный множитель в выражении для полного сдвига фазы	25, 2
ψ_d	Вектор решения в точке d по глубине (метод полной линеаризации)	305, 1
$\psi(r_1, \dots, r_N)$	Волновая функция атома с N электронами	120, 1
$\psi(\nu), \psi_\nu$	Профиль излучения в линии	47, 1
$\psi_i(r, t)$	Волновая функция, описывающая атом в состоянии i	121, 1
$\psi^*(\nu)$	Профиль излучения в линии при естественном возбуждении	49, 1
ω	Круговая частота	23, 1
ω	Телесный угол	16, 1
ω_{ml}	Круговая частота, соответствующая переходу $m \rightarrow n$	122, 1
ω_ν	Отношение профиля излучения в линии к профилю поглощения, т.е. ψ_ν/ϕ_ν	212, 2
ω_0	Резонансная частота осциллятора	119, 1
ω_0	Частота центра линии	15, 2
∇, ∇_E	Логарифмический градиент температуры по давлению в атмосфере, окружающей конвективный элемент (∇), и в самом конвективном элементе (∇_E)	251, 1

∇_A, ∇_R	Адиабатический и лучистый логарифмический градиенты температуры по давлению	251, 1
∇_p	Градиент в импульсном пространстве	54, 1
$\oplus$	Символ Земли	319, 2
$\odot$	Символ Солнца	229, 1
$\oint$	Интеграл по всем телесным углам	19, 1

Содержание части 2

Глава 8.	Линейчатый спектр: общая картина	5
8.1.	Наблюдаемые величины	6
8.2.	Физические факторы, влияющие на образование линий	8
Глава 9.	Профиль коэффициента поглощения в линии	12
9.1.	Профиль, обусловленный естественным затуханием	14
9.2.	Влияние доплеровского уширения. Фойгтовский профиль	19
9.3.	Уширение вследствие столкновений. Классическое ударное приближение	22
9.4.	Уширение вследствие столкновений. Статистическое приближение	33
9.5.	Квантовая теория уширения линий	42
Глава 10.	Классические трактовки проблемы переноса излучения в линии	55
10.1.	Постановка задачи	55
10.2.	Модель Милна — Эддингтона	57
10.3.	Теоретическая кривая роста	65
10.4.	Эмпирическая кривая роста	70
10.5.	Синтез спектров по моделям атмосфер с ЛТР	78
Глава 11.	Перенос излучения в линии при отсутствии ЛТР: двух-уровневый атом	83
11.1.	Диффузия, гибель, выход и термализация	83
11.2.	Двухуровневый атом без континуума	88
11.3.	Двухуровневый атом с континуумом	114
11.4.	Неподвижные протяженные атмосферы	126
Глава 12.	Перенос излучения в линии при отсутствии ЛТР: много-уровневый атом	135
12.1.	Метод эквивалентных двухуровневых атомов	137
12.2.	Эффекты взаимосвязи уровней. Равенство функций источников в мультиплетах	146
12.3.	Метод полной линеаризации	160
12.4.	Линии легких элементов в спектрах звезд ранних типов	168

Глава 13.	Образование линий при частичном перераспределении по частотам	180
13.1.	Перераспределение в системе отсчета атома	181
13.2.	Доплеровское перераспределение в лабораторной системе отсчета	185
13.3.	Усредненные по углам функции перераспределения	194
13.4.	Перенос излучения при частичном перераспределении	206
Глава 14.	Перенос излучения в движущихся атмосферах	224
14.1.	Уравнение переноса в системе отсчета, связанной с наблюдателем	226
14.2.	Теория Соболева	255
14.3.	Уравнение переноса в сопутствующей системе координат	278
Глава 15.	Звездный ветер	304
15.1.	Уравнения гидродинамики для идеальной сжимаемой жидкости	305
15.2.	Корональный ветер	316
15.3.	Радиационная гидродинамика	340
15.4.	Ветер, порождаемый излучением	351
Литература		376
Список обозначений		393

Д. Михалас
ЗВЕЗДНЫЕ АТМОСФЕРЫ
том 2

Научный редактор Л. В. Самсоенко
Мл. научный редактор В. Н. Соколова
Художник И. П. Козлов
Художественный редактор М. Н. Кузьмина
Технические редакторы Т. А. Максимова, Л. М. Лихтерова
Корректор А. Я. Шехтер

ИБ № 3213

Подписано к печати 09.07.82. Формат 60 × 90¹/₄. Бумага офсетная № 1. Гарнитура таймс
Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,50. Объем 13,25 бум. л. Усл. кр. отт. 26,50. Уч.-изд. л. 24,06
Изд. № 27/1862. Тираж 2000 экз. Зак. 582. Цена 3 р. 90 к.

Набрано на фотонаборном комплексе в издательстве «Мир»,
129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2.

Отпечатано в Тульской типографии Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР
по делам издательства, полиграфии и книжной торговли
г. Тула, проспект им. В. И. Ленина, 109.