

**GENERAL RELATIVITY
AND COSMOLOGY**

G. C. McVITTIE

*O. B. E., Ph. D., M. A.
Professor of Astronomy
University of Illinois*

L O N D O N

Chapman and Hall Ltd.

1 9 5 6

Г. К. Мак-Витти

**ОБЩАЯ ТЕОРИЯ
ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
И
КОСМОЛОГИЯ**

**ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
С. П. АЛЛИЛУЕВА**

**ПОД РЕДАКЦИЕЙ
В. В. СУДАКОВА**

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Москва — 1961

В небольшой монографии Г. К. Мак-Витти общая теория относительности излагается в связи с космологией.

В первых пяти главах книги автор рассматривает математический аппарат теории — тензорное исчисление, излагает специальную теорию относительности, выводит уравнения Эйнштейна и рассматривает метрику Шварцшильда.

В гл. VI—VII рассматриваются приближения к уравнениям Эйнштейна, причем попутно автор излагает методы решения задач классической газодинамики.

Главы VIII—IX посвящены собственно космологии и сравнению выводов теории с наблюдаемой картиной мира.

Книга рассчитана на студентов старших курсов и аспирантов, желающих ознакомиться с общей теорией относительности и ее приложением к космологии, а также будет интересна специалистам — астрономам и физикам.

Редакция астрономии и геофизики

Оглавление

Предисловие к русскому изданию	9
Предисловие автора	13
Глава I. Введение	
§ 1.1. Классическая, квантовая и релятивистская механика	15
§ 1.2. Природа научных законов	18
§ 1.3. Предварительные замечания	24
Глава II. Тензорное исчисление и риманова геометрия	
§ 2.1. Точечное многообразие. Тензоры	27
§ 2.2. Риманово пространство	36
§ 2.3. Геодезические линии	43
§ 2.4. Ковариантное дифференцирование	50
§ 2.5. Тензор Римана — Кристоффеля и тензор Риччи	55
§ 2.6. Локальные декартовы и римановы координаты	61
§ 2.7. Тожество Бьянки и тензор Эйнштейна	64
§ 2.8. Тензорное исчисление в теории относительности	66
Глава III. Ньютоновская механика и специальная теория относительности	
§ 3.1. Ньютоновская механика частицы	69
§ 3.2. Ньютоновская механика протяженных тел	73
§ 3.3. Ньютоновская теория тяготения	78
§ 3.4. Специальная теория относительности	82
§ 3.5. Скорость света	85
§ 3.6. Пространство-время Минковского	87
§ 3.7. Геодезические и нулевые геодезические линии пространства-времени Минковского	91
§ 3.8. Механика протяженных тел в специальной теории относительности	94

Глава IV. Принципы общей теории относительности

§ 4.1. Пространство-время Римана и уравнения Эйнштейна	99
§ 4.2. Физический смысл постоянной χ	103
§ 4.3. Принцип геодезических линий	109
§ 4.4. Ортогональное пространство-время и уравнения Эйнштейна	112
§ 4.5. Тяготение и кривизна пространства-времени	118
§ 4.6. Ускоренные координатные системы	122

Глава V. Пространство-время Шварцшильда

§ 5.1. Метрика пространства-времени Шварцшильда	128
§ 5.2. Обыкновенные геодезические линии пространства-времени Шварцшильда	135
§ 5.3. Нулевая геодезическая линия пространства-времени Шварцшильда	141
§ 5.4. Гравитационное и доплеровское смещения спектральных линий	148

Глава VI. Приближения к уравнениям Эйнштейна и ньютоновская газовая динамика

§ 6.1. Первое приближение к общему ортогональному пространству-времени	154
§ 6.2. Ньютоновская газовая динамика	159
§ 6.3. Принцип геодезических линий и ньютоновская теория	166
§ 6.4. Второе приближение. Газовая динамика при учете тяготения	168
§ 6.5. Космологическая постоянная как силовой параметр	177
§ 6.6. Выводы	180

Глава VII. Частные решения уравнений ньютоновской газодинамики

§ 7.1. Одномерное движение	183
§ 7.2. Сферическая симметрия и линейные волны	191
§ 7.3. Линейное волновое расширение газового шара конечных размеров	195
§ 7.4. Линейные волны в однородном газе	199

Глава VIII. Однородные модели вселенной

§ 8.1. Краткий обзор данных наблюдений	202
--	-----

§ 8.2. Однородная модель вселенной	206
§ 8.3. Некоторые геометрические свойства однородных моделей	209
§ 8.4. Красное смещение	214
§ 8.5. Расстояние и скорость удаления	219
§ 8.6. Видимая и абсолютная звездные величины. По- казатель цвета	229
§ 8.7. Число источников света	235
§ 8.8. Ньютоновская космология	236

Глава IX. Модели вселенной и система галактик

§ 9.1. Время распространения света, координата поло- жения и фотометрическое расстояние	239
§ 9.2. Красное смещение и видимая звездная величина	242
§ 9.3. Число галактик и видимые звездные величины	250
§ 9.4. Угловые размеры и красное смещение	257
§ 9.5. Плотность, давление и космологическая постоя- ная	259
§ 9.6. Двухцветные показатели цвета Стеббинса — Уит- форда. Наблюдения Баума	261
§ 9.7. Частные модели вселенной и возраст вселенной	265
§ 9.8. Неоднородные модели	271

Литература	278
----------------------	-----

Предисловие к русскому изданию

Книга профессора Иллинойского университета (США) Г. К. Мак-Витти займет особое место в имеющейся на русском языке литературе по общей теории относительности. С достаточной полнотой излагая общую теорию относительности, автор обращает особое внимание на те ее разделы, которые прилагаются далее к космологии, изложению которой посвящены последние главы книги.

Вопросы космологии приобретают за последнее время все больший интерес. Объясняется это как тем, что картина поведения мира как целого имеет большое принципиальное и, можно сказать, философское значение, так и тем, что последние успехи радиоастрономии дают космологии надежную экспериментальную основу и позволяют ожидать, что в недалеком будущем мы будем обладать достаточно точными значениями всех параметров, входящих в теорию. Но пока что положение такое же, как и к моменту выхода книги в свет (1956 г.), т. е. можно лишь делать более или менее предположительные оценки.

Сопоставление в заглавии книги общей теории относительности и космологии имеет глубокий смысл. С одной стороны, научная космология немыслима без теории относительности. С другой стороны, космология представляет собой единственное приложение общей теории относительности, в котором она используется в полной мере, а не в виде весьма малых поправок к ньютоновской теории.

В первых пяти главах книги автор строит математический аппарат общей теории относительности; излагает специальную теорию относительности, сопоставляя ее с ньютоновской механикой; выводит уравнения общей теории относительности, с наибольшей подробностью рассматривая практически важный случай ортогонального пространства-времени; получает

метрику Шварцшильда и находит величину известных малых эффектов общей теории относительности: смещение перигелиев планет, отклонение луча света, проходящего вблизи звезды, гравитационное и доплеровское смещения спектральных линий. Здесь же автор рассматривает вопросы подтверждения теории наблюдениями.

В главах VI—VII рассматриваются различные приближения к уравнениям Эйнштейна. Попутно автор получает важный побочный результат в виде методов решения задач классической газодинамики.

Собственно космологии посвящены центральные главы книги — VIII и IX. Излагая теоретическую основу космологии, автор подробно рассматривает различные методы сопоставления теоретических и наблюдаемых величин, что, как увидит читатель, является делом далеко не тривиальным.

На всех этапах изложения автор сохраняет в уравнениях Эйнштейна член, содержащий космологическую постоянную. Введение космологической постоянной является с физической точки зрения операцией мало осмысленной. Эйнштейн при ее введении преследовал чисто прикладные цели: получение стационарного космологического решения. После того как была установлена космологическая нестационарность нашего мира, необходимость в космологической постоянной отпала, и космология вернулась к первоначальным решениям, полученным советским ученым А. А. Фридманом (1922). Хотя фридмановские решения составляют теоретическую основу космологии и были высоко оценены создателем теории относительности А. Эйнштейном, мы не найдем в книге Мак-Витти ни ссылок на работы Фридмана, ни даже упоминания его имени.

Как известно, фридмановские решения обладают особыми точками, за которые решения не могут быть продолжены и с приближением к которым (назад или вперед во времени) решения становятся неустойчивыми (Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ, **16**, 587, 1946). Возникает естественный вопрос, не могут ли малые отклонения от принятых Фридманом однородности и изотропии, нарастающие с приближением к особой точке, привести к ее исчезновению. Ответ на этот вопрос был получен в работе Е. М. Лифшица, В. В. Судакова и И. М. Халатникова (ЖЭТФ, **40**, 1847, 1961), в которой показано, что решение, обладающее полной общностью (полным числом

степеней свободы), не может иметь физических особенностей (все особенности таких решений фиктивны, т. е. устраняются при переходе к другой системе отсчета). Ранее было также продемонстрировано (Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, ЖЭТФ, **39**, 149, 1960; 800, 1960), что решения с физическими особенностями не могут обладать полным числом степеней свободы.

Резюмируя, можно сказать, что книга Мак-Витти будет интересна как специалистам, желающим углубить свои знания в космологии (которые могут лишь пробежать или даже целиком выпустить главы I—V), так и лицам, недостаточно или даже совсем не знакомым с теорией относительности, которые могут изучить ее по книге Мак-Витти при условии владения дифференциальным и интегральным исчислением.

В. В. Судаков

Июль 1961 г.

Предисловие автора

Настоящая книга имеет своим источником различные курсы лекций по теории относительности, которые я читал в течение последних десяти лет в Лондонском, Гарвардском и Иллинойском университетах. Я пытался исследовать возможности общей теории относительности как метода в математической физике и астрономии и как средства интерпретации данных наблюдений. Этот труд, таким образом, продолжает традицию, установленную Р. С. Толменом в его книге „Relativity, Thermodynamics and Cosmology“ и развитую О. Геккменом в книге „Theorien der Kosmologie“. Исследования чисто математического характера, которых много в области общей теории относительности, были поэтому большей частью опущены. Первые пять глав содержат изложение основных принципов теории относительности и ее приложения к исследованию поля тяготения Солнца. Читатели, которых главным образом интересует классическая газодинамика, найдут в главах VI и VII описание того пути, на котором общая теория относительности может помочь при решении интересующих их проблем. Космологические проблемы рассматриваются в главах VIII и IX, и я старался придать выводам теории форму, подходящую для численных оценок параметров при появлении более полных данных наблюдений.

Мне остается выразить благодарность д-ру А. Х. Таубу, прочитавшему рукопись и сделавшему много ценных предложений и критических замечаний, моим коллегам по обсер-

ватории д-ру Стенли П. Уатту-младшему и д-ру М. Х. Роджерсу, поблагодарить студента Вернона Фаулера, проверившего формулы в некоторых параграфах книги, а также поблагодарить директора и астрономов обсерватории Маунт Вилсон и Паломарской, столь охотно снабдивших меня данными и описанием программы наблюдений, имеющих космологический характер, которыми они занимались или планировали. Если в книге остались ошибки или недостатки в изложении, то за них несут ответственность не мои коллеги, а только я один.

Г. Мак-Витти

Обсерватория Иллинойского университета
Декабрь 1954 г.

ГЛАВА I

Введение

§ 1.1. Классическая, квантовая и релятивистская механика

Ныне, в середине двадцатого столетия, одновременно используются три системы механики: классическая, восходящая к Ньютону и насчитывающая около 270 лет; квантовая механика, созданная в 1925 г., и специальная и общая теории относительности, предложенные Эйнштейном соответственно в 1905 и 1916 гг.

Историческое развитие двух первых систем было в значительной степени одинаковым. Последователи Ньютона постепенно разрабатывали следствия из его трех законов движения, привлекая эти законы для разрешения конкретных физических задач: было теоретически исследовано со все большей степенью точности движение планет; развита теория движения твердого тела и применена к задаче о вращении Земли; с постановкой новых физических задач разрабатывались новые отрасли классической механики (гидродинамика, теория упругости и т. д.). И все время, пока происходили эти обширные испытания и классическая теория основательно подвергалась проверке как орудие исследования в физике и астрономии, не возникало какой-либо необходимости в изменении ее основных постулатов. Это положение существовало до тех пор, пока во второй половине XIX в. оптические эксперименты не показали, что при скоростях, сравнимых со скоростью света, ньютоновское орудие исследования теряет свою остроту.

Аналогичное, хотя и более быстрое, развитие характеризует квантовую механику. Создатели квантовой механики — Шредингер, Дирак, Гейзенберг и другие — применили ее к исследованию движения, если это можно назвать движением (в классическом смысле. — *Ред.*), электрона в атоме водорода, а их последователи показали, что квантовая механика может объяснить явления, происходящие в атомах более сложного строения.

Теперь, когда атомное ядро привлекает наибольший интерес физиков, возможно возникает необходимость изменения основ теории. Но если это обстоятельство будет иметь место, то только вследствие непрерывного применения теории к конкретным физическим задачам. Развитие специальной теории относительности представляет собой пример именно такого рода развития, и область приложения этой теории все более и более становится атомная физика. И специальная теория относительности стремится обособиться от общей теории относительности, с которой она на первый взгляд так близко связана.

При рассмотрении истории развития общей теории относительности обращает на себя внимание разительное отличие ее от предшествующих теорий, так как в течение приблизительно 40 лет, которые прошли со времени сформулирования общей теории относительности Эйнштейна, эта теория была применена к исследованию только двух задач, которые обе являются астрономическими. Применение общей теории относительности к исследованию поля тяготения Солнца привело к объяснению противоречия в ньютоновской теории движения перигелия планеты Меркурий. Общая теория относительности была применена также к явлению искривления светового луча в поле тяготения. Позднее, в 30-х годах, появилось второе приложение теории, на этот раз к системе галактик, рассматриваемых как целое, — так называемая теория расширяющейся вселенной.

Не считая этих примеров, приложения общей теории относительности немногочисленны, — обстоятельство, которое, казалось, можно было бы объяснить исключительными математическими трудностями: исследователи сочли отдельные задачи математически трудными и, обескураженные, вскоре свернули с этого пути. Однако вряд ли это является удовлетворительным объяснением, так как математическая „неприступность“ не является свойством одной только общей теории относительности. Более вескую причину следует искать в тех отклонениях от прямого пути, которые были вызваны исследованиями по объединенной полевой теории тяготения и электромагнетизма, в результате которых теория 1916 г. неоднократно „вырывалась с корнем“ и заменялась теориями родственного характера. Однако каждый новый вариант даже самими авторами вскоре отбрасывался как несостоя-

тельный, и снова предпринималась попытка поисков решения из тех же основных принципов. Коротко говоря, было признано, что концепция поля играет важную роль и в классической теории тяготения и в классической электромагнитной теории, и так как четырехмерное пространство-время теории 1916 г. дает более полную картину поля тяготения, нежели ньютоновская схема, то в некотором смысле аналогичный аппарат должен был бы служить для совместного описания этих двух типов полей.

Этот аргумент был весьма веским вплоть до создания квантовой механики и до происшедшего несколько позже открытия нейтрона. Непрерывность является неотъемлемой чертой единой теории поля, однако квантовая механика показывает, что в области атомной физики, где доминирующую роль играют электрические силы, дискретность является фундаментальной характеристикой. Уже одно это серьезно предостерегает от использования методов единой теории поля в атомной физике. Более того, существует качественное отличие тяготения от электромагнетизма, так как не очевидно, что можно так изменить свойства вещества, что тело двигалось бы в поле тяготения, как будто это поле отсутствует. Напротив, тело может быть сделано электрически нейтральным, и тогда его движение не будет зависеть от электромагнитного поля. Коль скоро, однако, вещество считается состоящим только из протонов и электронов, казалось бы следует признать, что вещество в конечном счете не может избежать влияния электромагнитного поля. Однако действенность этого аргумента была разрушена после открытия электрически нейтральной элементарной частицы — нейтрона. Более важным, вероятно, является то, что ни одна единая теория поля до сих пор не объяснила ни одного явления и не предложила ни одного существенного эксперимента.

Правда, в теорию 1916 г., так сказать в собственно общую теорию относительности, электромагнетизм может быть включен половинчатым образом, поскольку гравитационный эффект электромагнитной энергии можно учесть в общей схеме теории. Однако обобщенные уравнения Максвелла лежат вне системы уравнений поля и должны быть постулированы особо. К тому же ни одно явление этим способом не было объяснено. Поэтому представляется более правиль-

ным заключить из практики последних сорока лет, что метод общей теории относительности не может сказать ничего существенного в области электромагнетизма, где, судя по всему, подходящим аппаратом является квантовая механика. Вместо этого общую теорию относительности лучше всего рассматривать как обобщение (и в то же время как объединение) ньютоновской теории тяготения и гидродинамики, т. е. как теорию, имеющую дело с большими количествами вещества, а не как теорию, справедливую для малых расстояний и способную пролить свет на атомные явления.

§ 1.2. Природа научных законов ¹⁾

В какой бы из трех систем механики не лежали интересы читателя, он неизбежно столкнется с философскими проблемами и должен будет ответить на такие вопросы: Что является природой научных знаний? Являются ли их заключения бесспорными и абсолютными фрагментами окончательной истины, или они являются неизбежно преходящими и исчезающими конструкциями? Какой-либо ученый, вероятно, полагает, что он ведет свою работу без рассмотрения философских вопросов такого рода; однако это иллюзия, которая возникает просто потому, что у этого ученого неосознанные метафизические взгляды. Поэтому ответы на специально философские вопросы являются „подсознательными“, причем ученый считает эти ответы очевидными и не допускает возможности, что они могли бы отличаться от тех, которые он дал. Хотя этот метод ведет к большой самоуверенности, ему свойственны недостатки, один из которых заключается в том, что любая новая теория провозглашается „революцией в физике“, хотя революция совершается не в физике, а только в научно-философских предпосылках. К более удовлетворительным взглядам можно прийти, подвергая испытанию наши привычные методы мышления, пока мы не осознаем свои философские предубеждения. Окажутся ли они глубокими или поверхностными, в известном смысле не так существенно; существование материи — вот то, что следует удерживать из этих предпосылок.

¹⁾ К содержанию этого параграфа следует отнестись критически. Хотя автор и признает существование материи, с целым рядом его философских взглядов советский читатель не может согласиться. — *Прим. ред.*

Читатель, таким образом, должен быть информирован о философских позициях автора, которые с необходимостью отражаются в книге, написанной им. Исходная точка зрения может быть найдена в том положении, что в первую очередь нам доступны данные ощущений — данные, полученные из наблюдений и экспериментов. Я знаю, что я вижу зеленый цвет, спектральную линию, булавочное острие в небе, которое я называю звездой. В дополнение к этим зрительным восприятиям имеются также слуховые, осязательные и другие восприятия, которые в совокупности образуют исходный и неупорядоченный конгломерат. Часто первая реакция человеческого ума на эту пищу данных ощущений может быть выражена словами „тревога“ или „смятение“: ребенок плачет от страха, когда его чувства атакованы зрительными, слуховыми и осязательными переживаниями, он страдает, как если бы оказался в поле во время грозы.

Но следующая реакция человеческого ума состоит в том, чтобы нарисовать рациональную картину данных ощущений, сыплющихся со всех сторон, чтобы упорядочить их определенным образом, короче, чтобы понять их. Это достигается процессом выбора одних и исключения других данных из совокупности данных ощущений, которые на первый взгляд все представляются одинаково относящимися к делу. Рассмотрим, например, высказывание „Солнце каждое утро поднимается над горизонтом“, что проявляется в переходе от темноты к свету, и что происходит, вообще говоря, каждый день. Живущие в северных широтах приходят к этому высказыванию, лишь исключив многие очень существенные наблюдения, противоречащие этому высказыванию. Если жители Лондона проснулись однажды и выразили свои восприятия фразой „сегодня туман“, то, конечно, не имеет место наличие восприятий, которые заключаются в высказывании „Солнце поднялось над горизонтом“. Все, что они узнали из своих теперешних наблюдений, можно было бы интерпретировать как то, что Солнце ночью исчезло и никогда не появится вновь. Между тем наше высказывание сохраняет силу, только из рассмотрения исключены восприятия ученых, живущих в местностях с туманной или облачной погодой или за полярным кругом в середине зимы. Значение этого высказывания заключается в том, что оно координирует и интерпретирует гораздо более обширную группу восприятий, чем те

восприятия, которые ассоциируются с туманом или полярной ночью и (хотя в некоторых случаях и связанные с переходом от ночи к дню) исключаются как не относящиеся к делу.

Обычная интерпретация окончательного результата изучения данных ощущений заключается в том, что эти данные обнаруживают существование внешнего мира, называемого природой, свойства которого являются *рациональными*, а также *независимыми* от наблюдателя. Наблюдатель занимается раскрытием этих свойств с помощью указаний, даваемых чувственным восприятием. Например, он старается обнаружить — имеются ли „сущности“, называемые электронами, имеет ли место закон обратных квадратов для тяготения и т. д. Более обще, законы природы придуманы как принципы, по которым „работает“ этот рациональный мир. Как иллюстрацию независимости от наблюдателя и как иллюстрацию свойств внешнего мира рассмотрим то положение, что уже рассмотренное нами высказывание о восходе Солнца было бы справедливо, даже если бы люди были нечувствительны ко всякого рода излучениям (рентгеновским лучам, свету, теплу, радиоволнам и т. п.). С такой научной точки зрения рассматриваются понятия „причины и следствия“, „доказательства“, „открытия“, „истины и заблуждения“. Так говорят, что Ньютон *открыл* закон обратных квадратов для тяготения, а Эйнштейн *доказал*, что этот закон *неправильен* и *открыл*, что *причиной* тяготения является кривизна пространства. Если, однако, наука призвана исследовать свойства независимо существующего внешнего мира, то следует признать, что это исследование было исключительно неудачным. Действительно, имеется много черт этого мира, которые были открыты учеными в прошлом и которые пришлось изменить или отбросить. Циклические и эпициклические орбиты планет, флогистон и теплород в теории горения, эфир XIX в., представление о том, что вещество состоит исключительно из протонов и электронов, были преходящими и выброшены за борт. Даже три закона движения Ньютона, которые так долго казались наиболее надежными и неизменными чертами внешнего мира, были заменены другими законами. Частный набор свойств внешнего мира, который известен ныне, с этой точки зрения не находится в лучшем положении, хотя этому набору и сопутствует прилагательное „современный“. Мы верим в эти свойства по той же причине, по которой верили

в „открытые“ ими черты внешнего мира наши предшественники, а именно потому, что они нужны нам для интерпретации данных ощущений, которыми мы располагаем в настоящий момент. Они служат целям упорядочения данных ощущений в стройное здание теории, рационализации того беспорядка, с которым эти данные предстают перед нами. Короче, если принята доктрина рационального внешнего мира, то опыт наших предшественников побуждает нас заключить, что наука неизбежно пребывает в заблуждении, так как Кеплер, Ньютон или Эйнштейн периодически „доказывали“, что их предшественники заблуждались.

Вариантом этой точки зрения является приближенная теория научного исследования, по которой синтез данных ощущений, полученных каждым последующим поколением ученых, рассматривается как новое и более хорошее приближение к конечной доктрине. Однако термином „приближение“ можно пользоваться только тогда, когда заранее известно, что предполагаемая конечная цель существует. В самом деле, можно говорить о приближении к сумме сходящегося ряда, так как можно независимо доказать существование суммы такого ряда; однако если ряд расходится, то приближение к его сумме является бессмысленным. Приближенная теория науки предполагает достижимость конечной и замкнутой картины, которая в свою очередь предполагает, что схема науки обладает рациональным характером, и таким образом опять вводится рациональный внешний мир, хотя и через черный ход.

Альтернативная к доктрине рационального внешнего мира точка зрения рассматривает науку как метод корреляции данных ощущений; она высказана Гербертом Динглем [3]. С этой точки зрения собрание данных ощущений может, или не может, образовывать рациональное целое, однако человеческий ум при выборе классов данных преуспевает, группируя эти данные в рациональные системы. Например, механика Ньютона и теория тяготения группируют в одну рациональную систему разнообразные явления движений планет, и в эту же систему включается, казалось бы, совершенно независимое явление движения яблока, упавшего в саду Ньютона. Логически отличная система корреляции — квантовая теория — служит для объединения в другое рациональное целое данных ощущений, которые мы называем

атомными явлениями. Ненаблюдаемые — такие как свет, атомы, электромагнитное и гравитационное поля и т. д. — не являются составными частями независимо существующего рационального внешнего мира; они являются только концепциями, используемыми при фабриковании систем корреляции. Свойства этих ненаблюдаемых могут меняться, например, для интерпретации определенных данных ощущений, свет рассматривается как поток частиц; для интерпретации другой группы данных свет представляют как волну. Понятия истины и заблуждения, причины и следствия, открытия и толкования можно теперь или отбросить, или считать условными. Единственно важный вопрос заключается в следующем. Как мы можем построить рациональную схему мышления, теорию, которая должна включать в свои рамки как можно больше, казалось бы, не связанных друг с другом данных ощущений? Обширная корреляция астрономических и механических явлений, достигнутая Ньютоном, не включала, как оказалось, одного явления — движения перигелия планеты Меркурий, которое относится к этому же классу. Однако то, что это одно явление каким-то образом ускользает из сети ньютоновской теории, не являлось и все еще не является основанием для провозглашения всего этого построения неверным. В самом деле, инженер-теоретик может указать много убедительных примеров обратного, так как большинство наших машин сконструировано строго по ньютоновским принципам. Другими словами, имеется обширный круг механических явлений — явлений в инженерных лабораториях и в астрономии, которые коррелируются и интерпретируются ньютоновской теорией движения до n -го десятичного знака. С другой стороны, общая теория относительности Эйнштейна является отличным методом корреляции явлений: она включает в себя и обычные движения планет и явление движения перигелия Меркурия. Однако включает ли в себя эта теория также явления, связанные с вращением, например приливы, не приводившие к трудностям в теории Ньютона, является пока нерешенной проблемой¹⁾

¹⁾ Утверждение автора неправильно. Общая теория относительности содержит как предельный случай ньютоновскую теорию тяготения и, следовательно, включает в себя все явления, объясняемые последней (см., например, Л. Ландау и Е. Лифшиц, Теория поля; В. Фок, Пространство, время и тяготение). — *Прим. ред.*

Одним следствием этого определения научной теории является то, что могут быть две (или более) теории, которые удовлетворительно интерпретируют некоторое частное явление. Так, например, явление аберрации, в силу которого звезда описывает небольшой замкнутый путь на небесной сфере в течение каждого года, может быть одинаково хорошо интерпретировано как в терминах теории Ньютона, так и в терминах теории Эйнштейна. Поэтому нельзя говорить о том, что имеется некоторый решающий эксперимент, посредством которого теория утверждается или низвергается: не один эксперимент создает хорошую теорию, а широкий круг экспериментальных результатов, которые связываются этой теорией. Теория также не может быть „правильной“ или „неправильной“; в некоторых случаях она применима к чрезвычайно узкой группе данных, обычно при игнорировании несложных „непослушных“ данных, и о теории лучше всего говорить, что она адекватна или неадекватна в качестве средства корреляции внутри членов определенной группы данных.

С этой точки зрения законы природы являются просто фундаментальными постулатами, лежащими в основе теории, и должны рассматриваться как свободные творения человеческого ума. Эти творения должны находиться в согласии с наблюдениями, и чем лучше эти творения, тем большее число наблюдений они предложат исследователю. Однако они не являются неизменными: по мере накопления данных может оказаться, что некоторая частная схема законов станет неадекватной и должна будет уступить место новому набору законов. Это имело место в прошлом, и нет гарантии, что этого не будет в будущем. Законы природы, провозглашенные в общей теории относительности, нельзя защитить ни аргументами, основанными на логической простоте или математической элегантности, ни указывая один или два решающих эксперимента, ни рассуждениями, сотканными из дифференциальных уравнений, выражающих эти законы. Напротив, критерий справедливости является критерием адекватности, что может быть обнаружено только посредством последовательного применения этих законов к такому количеству конкретных физических ситуаций, как это позволяют способности исследователя. Таким путем обнаруживается круг физических явлений, лежащих в рамках теории; и если в конце

концов эта теория должна быть модифицирована, то эти модификации могут быть сделаны лишь при полном знании достижений этой теории.

§ 1.3. Предварительные замечания

Если основные законы механики являются в основном созданиями человеческого ума, то их априорная справедливость имеет меньшее значение, нежели тщательное извлечение следствий из этих законов и сравнение этих следствий с экспериментом. Поэтому на последующих страницах не будет предпринят тщательный индуктивный вывод основных уравнений общей теории относительности, а его место займет аналогия с теорией Ньютона. Однако для того, чтобы показать, как возникает эта аналогия, необходимы тензорное исчисление и некоторые результаты дифференциальной геометрии многомерных многообразий. Общая теория относительности в ее точной форме будет применена к полю тяготения Солнца и к космологической проблеме. Однако, когда общая теория относительности рассматривается как орудие исследования математической физики, для получения плодотворных результатов может оказаться полезной приближенная форма этой теории. С этой точки зрения общая теория относительности дополнена методом нахождения решений уравнений классической газодинамики, соответствующих движению под влиянием градиента давления и гравитационного самопритяжения газа.

Во всей книге в качестве аксиомы будет принято положение: вещество в целом обладает свойством, называемым *тяготением*, и если это свойство вещества присутствует в некоторой физической ситуации, должна существовать некоторая система материальных тел, ответственная за эти гравитационные эффекты. Сказать вместо этого, что тяготение есть проявление кривизны четырехмерного геометрического многообразия, это значит объяснить некоторую тайну с помощью загадки и придать физическое значение одной из математических функций, полезной при описании физической ситуации. Аналогично поле тяготения в теории Ньютона или Эйнштейна рассматривается как концепция и (несмотря на могущество этого понятия) как не более чем вспомогатель-

ное средство при вычислениях¹⁾. По общему признанию эта интерпретация сильно отличается от интерпретации Эйнштейна, который писал: „Поле проявляет себя в движении тел“, как если бы поле было непосредственной реальностью, а движущиеся тела чем-то производным. Однако именно тела, покоящиеся или движущиеся, являются предметом научного наблюдения, а понятие поля тяготения было придумано для интерпретации происходящих с этими телами явлений.

Во многих изложениях общей теории относительности [4] используются определенные абстрактные единицы массы, длины и времени, в которых и постоянная тяготения G и скорость света c имеют численное значение, равное единице. Положительной чертой этой процедуры является то, что формулы теории могут быть написаны в наиболее компактной форме, однако, когда возникает необходимость получить приближения или разложения в ряды по степеням G/c^2 или $1/c^2$, проявляются отрицательные черты этой процедуры. Еще Гарольд Джеффрис [5] говорил, что исследователь несомненно использует обычные единицы массы, длины и времени в своих „домашних“ вычислениях, и, записывая свои результаты в абстрактных единицах, лишь сбивает читателя с толку. Поэтому во всей книге будут употребляться единицы CGS, не считая того, что могут быть введены, если это понадобится, кратные или доли сантиметра, такие, как парсек или ангстремы.

Две последние главы посвящены космологии общей теории относительности, и не предпринимается попытка обсуждения других космологических теорий [6], среди которых можно упомянуть кинематическую теорию относительности Е. А. Милна, теорию „творения вещества“ Бонди и Голда и теорию Иордана. Данные, имеющиеся в распоряжении космологии, столь немногочисленны, а измерения внутри каждого типа данных столь скудны и трудно достижимы, что многие отличные друг от друга теории одинаково хорошо объясняют эти измерения (в пределах ошибок наблюдений). Тем не менее космология ныне представляет собой средство для определения того, по какому из незначительно отличающихся друг от друга путей могут быть получены весьма предва-

¹⁾ Неверно: поле столь же материально, как и материальные тела. — *Прим. ред.*

рительные выводы; окончательная картина пока еще очень далека. Во всяком случае, это — точка зрения, полученная при трактовке общей теории относительности как космологической теории, в противоположность тем положительным и определенным выводам, относящимся к вселенной, которые, видимо, могут быть получены сторонниками конкурирующих теорий. Читатель должен сам для себя решить эти вопросы после должного изучения теоретических формул, с одной стороны, и весьма скудных данных наблюдений, подтверждающих эти формулы, — с другой.

Тензорное исчисление и риманова геометрия

§ 2.1. Точечное многообразие. Тензоры

Математический аппарат, называемый тензорным исчислением, имеет много приложений в математической физике, где, однако, можно обойтись и без этого аппарата. Но в теории относительности тензорное исчисление является столь же важным орудием исследования, как дифференциальное и интегральное исчисление в механике Ньютона, и полное понимание теории относительности невозможно без помощи тензорного исчисления. Фундаментальным понятием является понятие геометрической точки, которая определяется, как и в элементарной аналитической геометрии, посредством задания ее координат. Так, в геометрии евклидовой плоскости точка определяется заданием ее двух декартовых координат (X, Y) или ее полярных координат (r, θ) . О совокупности точек, составляющих плоскость, говорят как о *двумерном точечном многообразии*. Число измерений многообразия равно числу независимых координат, необходимых для определения точки в этом многообразии. Обычное трехмерное евклидово пространство образует трехмерное точечное многообразие; для полного задания точки требуются три координаты. Обобщением этих идей — *n -мерным точечным многообразием* — является многообразие, для полного определения каждой точки которого необходимо задание n независимых действительных чисел $(x^1, x^2, \dots, x^n)$. Совокупность этих n чисел обозначают через (x) и называют *координатами точки*. О структуре многообразия пока ничего не предполагается, кроме непрерывности в том смысле, что в окрестности каждой точки (x) имеются другие точки, координаты которых бесконечно мало отличаются от координат точки (x) . Такая соседняя точка имеет координаты $(x + dx)$, причем малые величины $(dx^1, dx^2, \dots, dx^n)$ называются *дифференциалами* координат (x) .

Координаты являются весьма важным средством описания точки. Это описание может быть изменено, и одна из задач тензорного исчисления состоит в выяснении, какие изменения определяются произвольным изменением координат всех точек многообразия. Операция, с помощью которой координаты (x) каждой точки заменяются на (x') , называется *преобразованием координат*. Два простых примера такого рода преобразований можно позаимствовать из обычной аналитической геометрии. В двумерном многообразии евклидовой плоскости преобразование от декартовых координат $X = x^1$, $Y = x^2$ к полярным координатам $r = x'^1$, $\theta = x'^2$ дается равенствами

$$x^1 = x'^1 \cos x'^2, \quad x^2 = x'^1 \sin x'^2, \quad (2.101)$$

тогда как в трехмерном многообразии евклидова пространства преобразование от декартовых координат $X = x^1$, $Y = x^2$, $Z = x^3$ к сферическим координатам $r = x'^1$, $\theta = x'^2$, $\varphi = x'^3$ дается равенствами

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= x'^1 \sin x'^2 \cos x'^3, \\ x^2 &= x'^1 \sin x'^2 \sin x'^3, \\ x^3 &= x'^1 \cos x'^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.102)$$

Эти два набора уравнений обладают свойством разрешимости, т. е. дают возможность выразить (x') через (x) . Например, в двумерном случае уравнения (2.101) дают

$$\begin{aligned} x'^1 &= \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}, \\ x'^2 &= \arctg \left(\frac{x^2}{x^1} \right); \end{aligned}$$

аналогичные, но более сложные соотношения могут быть получены из (2.102). В n -мерном многообразии преобразование координат выражается посредством n равенств

$$x'^\lambda = f^\lambda(x^1, x^2, \dots, x^n), \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n), \quad (2.103)$$

где функции f^λ разрешимы, так что

$$x^\lambda = g^\lambda(x'^1, x'^2, \dots, x'^n). \quad (2.104)$$

Взяв дифференциалы равенств (2.103), имеем

$$dx'^{\lambda} = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial f^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \quad (2.105)$$

— формулы, дающие преобразование дифференциалов при изменении координат. Однако не только координаты и их дифференциалы можно рассматривать как величины, претерпевающие изменение. Можно предположить, что претерпевают изменение и некие отдельные функции или наборы функций, определенные в каждой точке (x). Предположим, в частности, что функция $F(x)$ численно не меняется, хотя ее формальное математическое выражение может измениться при преобразовании координат (2.103); будем называть тогда $F(x)$ *скаляром* или *тензором нулевого ранга*. Очевидным примером, ¹⁾ заимствованным из евклидовой геометрии трех измерений, является $F(r)$, где $r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. Мы ограничимся лишь теми преобразованиями декартовых координат, которые соответствуют вращению координатных осей вокруг начала координат.

Рассмотрим теперь набор из n функций ($V^1, V^2, \dots, V^n$), причем каждая V^{λ} является известной функцией (x), и пусть к координатам применяется преобразование (2.103). Тогда эти n функций называют компонентами *контравариантного вектора* или *контравариантного тензора 1-го ранга*, если эти функции преобразуются по тому же правилу, что и дифференциалы координат, т. е. если преобразованные функции V'^{λ} связаны с V^{μ} формулами

$$V'^{\lambda} = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} V^{\mu} \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n). \quad (2.106)$$

Из этого определения следует, что дифференциалы (dx) сами образуют компоненты некоторого контравариантного тензора 1-го ранга. Вектор другого рода, компоненты которого суть

¹⁾ Пример, приведенный автором, неудачен. Он может вызвать у читателя неверное представление о том, что скаляр должен быть одной и той же функцией координат точки в различных системах отсчета, в то время как он обязан быть лишь одной и той же функцией точки. — *Прим. ред.*

$(U_1, U_2, \dots, U_n)$, называется *ковариантным (ковариантным тензором 1-го ранга)*, если его компоненты преобразуются по закону

$$U'_\lambda = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda} U_\mu \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n). \quad (2.107)$$

Взаимосвязь ковариантных и контравариантных векторов определяется теоремой, которая утверждает, что сумма произведений $\sum_{\lambda=1}^n V^\lambda U_\lambda$ всегда есть скаляр, какая бы пара векторов не рассматривалась. Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^n V'^\mu U'_\mu &= \sum_{\mu=1}^n \left(\sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\lambda} V^\lambda \right) \left(\sum_{\nu=1}^n \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu \right) = \\ &= \sum_{\lambda=1}^n \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\lambda} V^\lambda U_\nu. \end{aligned}$$

Но координаты x^ν , x^λ независимы, а поэтому

$$\frac{dx^\nu}{dx^\lambda} = \begin{cases} 0, & \text{если } \nu \neq \lambda, \\ 1, & \text{если } \nu = \lambda. \end{cases} \quad (2.108)$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{\mu=1}^n V'^\mu U'_\mu = \sum_{\lambda=1}^n V^\lambda U_\lambda,$$

так что величина суммы произведений не изменяется при преобразовании координат и, следовательно, есть скаляр. Сумма произведений соответствующих компонент некоторого ковариантного и некоторого контравариантного вектора называется *внутренним произведением* ¹⁾ этих двух векторов.

Примечательной чертой предыдущих формул является то, что любому члену в этих формулах, в котором индекс встречается дважды — один раз в „верхнем“, или контрава-

¹⁾ В нашей литературе наиболее употребителен термин *скалярное произведение*. — Прим. ред.

риантном, и один раз в „нижнем“, или ковариантном положении, — неизменно предпослано суммирование по этому повторяющемуся индексу от 1 до n . Это положение иллюстрируется индексом μ в формулах (2.105) — (2.107). В целях сокращения записи представляется целесообразным опустить знак суммирования в таких случаях и ввести *условие суммирования*, которое заключается в том, что индекс, встречающийся в некотором члене формулы дважды, подразумевает суммирование таких членов по всем значениям индекса от 1 до n . Так, например, формулы (2.106) и (2.107) запишутся в виде

$$V'^{\lambda} = \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\mu}} V^{\mu} \quad \text{и} \quad U'_{\lambda} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} U_{\mu}.$$

Данные выше определения скаляров и векторов существенно зависят от законов преобразования функций, включающих координаты. Нетрудно расширить эти понятия на объекты, законы преобразования которых аналогичны, но более сложны, чем законы преобразования скаляров или векторов. Рассмотрим, например, n^2 функций координат $T^{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$), закон преобразования которых имеет вид

$$T'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, n). \quad (2.109)$$

Говорят, что эти n^2 функций $T^{\mu\nu}$ образуют *контравариантный тензор 2-го ранга*, а отдельные функции $T^{\mu\nu}$ называют *компонентами тензора*. Сравнение (2.109) с (2.106) показывает, что в последнем равенстве закон преобразования контравариантного вектора в известном смысле был использован дважды. Однако читатель не должен сделать из этого обстоятельства (неправильный) вывод, что любой контравариантный тензор 2-го ранга может быть выражен в виде некоторой комбинации контравариантных векторов. С другой стороны, по аналогии с (2.107), n^2 функций координат $K_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$) с законом преобразования

$$K'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} K_{\alpha\beta} \quad (2.110)$$

образуют *ковариантный тензор 2-го ранга*. Наконец, мы можем определить n^2 функций координат P_{ν}^{μ} ($\mu, \nu = 1, 2, \dots, n$), закон преобразования которых имеет частично контравариантный и частично ковариантный характер, а именно

$$P_{\nu}^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}} P_{\beta}^{\alpha}. \quad (2.)$$

В таком случае говорят, что совокупность n^2 функций образует *смешанный тензор 2-го ранга*.

Ранг тензора указывает только на число индексов в компонентах, но не отражает ковариантный или контравариантный характер этих индексов. Можно определить тензоры более высокого ранга, чем второй, с помощью правила, что каждому контравариантному индексу ставится в соответствие закон преобразования, аналогичный закону преобразования контравариантного вектора, и что ковариантный индекс подчиняется правилу преобразования ковариантного вектора. Так, совокупность n^4 функций координат $R_{\lambda\mu\nu}^{\rho}$ образует тензор 4-го ранга с тремя ковариантными индексами и одним контравариантным индексом. Закон преобразования этого тензора имеет вид

$$R_{\lambda\mu\nu}^{\rho} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\nu}} R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha}.$$

Обычно вектор или тензор обозначают одной из его компонент, так что, например, тензор, закон преобразования которого дается равенством (2.109), будет упоминаться как „тензор $T^{\mu\nu\alpha}$ “.

Рассмотрение законов преобразования тензоров показывает, что если некоторый тензор является нулевым тензором, т. е. все его компоненты равны нулю в одной системе координат, то все его компоненты будут равны нулю и в любой другой системе координат. Таким образом нулевой характер тензора невозможно изменить никаким изменением системы координат.

¹⁾ Правильнее было бы не писать индексы один над другим, так как, вообще говоря, тензоры P_{ν}^{μ} и P_{ν}^{μ} не совпадают. — Прим. ред.

Имеются операции, которые могут быть применены к тензорам и посредством которых из данного тензора могут быть получены другие тензоры. Одной из таких операций является операция *свертывания*, которая превращает данный тензор ранга λ ($\lambda \geq 2$) в новый тензор ранга $\lambda - 2$. Выберем произвольный ковариантный и произвольный контравариантный индексы тензора и просуммируем все компоненты, в которых эти два индекса имеют одинаковое численное значение¹⁾. В результате получим компоненту нового тензора, называемого *свернутой формой* исходного тензора. Предположим, например, что задан тензор 4-го ранга $R_{\lambda\mu\nu}^{\rho}$ и что для операции свертывания выбраны контравариантный индекс ρ и третий ковариантный индекс ν . Свернутая форма есть

$$R_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu\rho}^{\rho}.$$

То, что $R_{\lambda\mu}$ представляет собой ковариантный тензор 2-го ранга, можно доказать следующим образом. Совершим преобразование системы координат

$$R'_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu\rho}^{\rho} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial x'^{\rho}} R_{\beta\gamma\delta}^{\alpha},$$

и с помощью (2.108) получим

$$R'_{\lambda\mu} = \frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\lambda}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial x'^{\mu}} R_{\beta\gamma}.$$

откуда видно, что закон преобразования функций $R_{\lambda\mu}$ совпадает с (2.110) и, следовательно, $R_{\lambda\mu}$ являются компонентами некоторого ковариантного тензора 2-го ранга. Операция свертывания может быть применена к тензору $R_{\lambda\mu\nu}^{\rho}$ и другим образом, например путем выбора индекса ρ и второго ковариантного индекса μ . В результате получаем новый свернутый тензор

$$S_{\lambda\nu} = R_{\lambda\rho\nu}^{\rho},$$

и, вообще говоря, равенство $S_{\lambda\mu} = R_{\lambda\mu}$ не имеет места.

¹⁾ Следует предположить также, что при такого рода суммировании остальные индексы имеют некоторые фиксированные значения. — *Прим. перев.*

Если операция свертывания применяется к смешанному тензору 2-го ранга, скажем к T^λ_μ , то в результате получится тензор нулевого ранга, т. е. скаляр. Таким образом, каждому смешанному тензору 2-го ранга может быть поставлен в соответствие единственным образом скаляр, получаемый свертыванием.

Другой операцией, которая может быть произведена над двумя тензорами, является операция образования *внутреннего произведения* двух тензоров; при этом один из тензоров должен иметь по крайней мере один контравариантный и другой — по крайней мере один ковариантный индекс. Компоненты с одинаковыми численными значениями этих двух индексов перемножаются, и берется сумма таких произведений. Результат представляет собой компоненту некоторого тензора, ранг которого на два меньше комбинированного ранга двух исходных тензоров. Пусть, например, тензоры суть $T^{\lambda\mu}$ и $S^\alpha_{\beta\gamma}$, их комбинированный ранг равен пяти; тогда из них могут быть образованы четыре внутренних произведения тензоров $T^{\lambda\mu}S^\alpha_{\lambda\gamma}$, $T^{\lambda\mu}S^\alpha_{\beta\lambda}$, $T^{\lambda\mu}S^\alpha_{\mu\gamma}$ и $T^{\lambda\mu}S^\alpha_{\beta\mu}$, причем ранг каждого из этих тензоров равен трем. Чтобы показать, что эти внутренние произведения действительно являются тензорами, рассмотрим закон преобразования, например $T^{\lambda\mu}S^\alpha_{\lambda\gamma}$:

$$\begin{aligned} T'^{\lambda\mu}S'^\alpha_{\lambda\gamma} &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\eta}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\gamma} T^{\rho\sigma} S^\tau_{\eta\zeta} = \\ &= \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\tau} \frac{\partial x^\zeta}{\partial x'^\gamma} T^{\rho\sigma} S^\tau_{\rho\zeta}, \end{aligned}$$

что является законом преобразования тензора 3-го ранга с одним контравариантным индексом и двумя ковариантными индексами. Таким образом операции свертывания и образования внутреннего произведения приводят к изъятию двух индексов (одного контравариантного и одного ковариантного) из исходных символов.

Процедура образования внутреннего произведения весьма полезна при определении тензорного характера некоторого набора функций координат с помощью так называемой *теоремы о частном*, которая гласит:

Всякий набор функций координат, внутреннее произведение которого с некоторым произвольным ковариантным (или контравариантным) вектором есть тензор, представляет собой совокупность компонент некоторого тензора.

Доказательство этой теоремы достаточно проиллюстрировать на примере применения этой теоремы к набору n^2 функций, которые можно обозначить через $T(\lambda, \mu)$ ($\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n$). Пусть известно, что внутреннее произведение $\sum_{\lambda=1}^n U_{\lambda} T(\lambda, \mu)$ этих функций с некоторым произвольным ковариантным вектором U_{λ} дает некий контравариантный вектор V^{μ} . Совершая преобразование координат, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^n U'_{\lambda} T'(\lambda, \mu) &= V'^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu} = \\ &= \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \left\{ \sum_{\lambda=1}^n U_{\lambda} T(\lambda, \nu) \right\}. \end{aligned}$$

Если, однако, поменять местами в формуле (2.107) штрихованные и нештрихованные символы, то мы получим

$$U_{\lambda} = \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\lambda}} U'_{\rho},$$

и, следовательно,

$$\sum_{\lambda=1}^n U'_{\lambda} T'(\lambda, \mu) = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \left\{ \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\lambda}} U'_{\rho} T(\lambda, \nu) \right\}$$

или

$$\sum_{\rho=1}^n U'_{\rho} \left\{ T'(\rho, \mu) - \sum_{\nu=1}^n \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\lambda}} T(\lambda, \nu) \right\} = 0.$$

Однако вектор U_{λ} произволен, и поэтому

$$T'(\rho, \mu) = \sum_{\nu=1}^n \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\lambda}} T(\lambda, \nu),$$

откуда видно, что n^2 функций $T(\rho, \mu)$ преобразуются по закону (2.109) и, таким образом, являются компонентами некоторого контравариантного тензора 2-го ранга.

С помощью теоремы о частном можно найти имеющий большое значение смешанный тензор 2-го ранга. Рассмотрим n^2 величин δ_μ^λ , где

$$\delta_\mu^\lambda = \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda \neq \mu, \\ 1, & \text{если } \lambda = \mu, \end{cases} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n). \quad (2.112)$$

Пусть U_ν — произвольный ковариантный вектор, тогда $\delta_\mu^\nu U_\nu = U_\mu$, и поэтому внутреннее произведение δ_μ^λ с произвольным ковариантным вектором есть ковариантный вектор. Таким образом, δ_μ^λ суть компоненты смешанного тензора 2-го ранга. Более того, компоненты этого тензора имеют одни и те же значения во всех системах координат¹⁾, так как, переходя к новой системе координат, имеем

$$\begin{aligned} \delta_\mu^{\prime\lambda} &= \frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\prime\mu}} \delta_\alpha^\beta = \frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\prime\mu}} = \frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial x^{\prime\mu}} = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda \neq \mu, \\ 1, & \text{если } \lambda = \mu. \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\delta_\mu^{\prime\lambda} = \delta_\mu^\lambda \quad (\lambda, \mu = 1, 2, \dots, n).$$

§ 2.2. Риманово пространство

Рассматривавшееся до сих пор точечное многообразие не обладало определенной структурой; в частности, не было дано определения „расстояния“ между парой точек многообразия. Для такого определения роль путеводной нити может сыграть случай поверхности, или двумерного многообразия. Простейшим примером поверхности является евклидова плоскость, на которой введены декартовы координаты. Если (X, Y) и $(X + dX, Y + dY)$ — две соседние точки этой пло-

¹⁾ Предыдущее являлось доказательством этого утверждения, последующее дает более простое доказательство того же. — *Прим. ред.*

скости, то, согласно теореме Пифагора, расстояние ds между этой парой точек равно

$$ds^2 = dX^2 + dY^2. \quad (2.201)$$

Эту формулу называют выражением для *метрики* многообразия, и можно показать, что она содержит в себе наиболее существенные черты геометрии плоскости, в частности, что прямая линия является кратчайшим расстоянием между двумя точками, что параллельные линии имеют бесконечную длину и не пересекаются в конечной части плоскости и т. п. Важно отметить, что оба коэффициента при квадратах dX и dY в формуле (2.201) равны единице; кроме того, из-за отсутствия члена с $dXdY$ метрика называется *ортогональной*. Эти свойства, однако, обусловлены использованием декартовой системы координат и исчезают при введении других типов координатных систем. Например, выраженная через полярные координаты (r, θ) , где $X = r \cos \theta$, $Y = r \sin \theta$, метрика приобретает вид

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

и коэффициенты при квадратах dr и $d\theta$ равны 1 и r^2 соответственно, в то время как свойство ортогональности не нарушается. Однако, если ввести систему координат (u, v) , где $X = uv$, $Y = \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$, метрика превращается в

$$ds^2 = (u^2 + v^2) du^2 + 4uv du dv + (u^2 + v^2) dv^2,$$

причем коэффициенты при квадратичных по du и dv членах равны $(u^2 + v^2)$, $4uv$ и $(u^2 + v^2)$ соответственно, так что свойство ортогональности оказывается замаскированным¹⁾ при использовании этой системы координат. Таким образом выражение метрики многообразия с частным случаем геометрии (в данном случае геометрии евклидовой плоскости) может принимать много форм в соответствии с применяемой координатной системой, и сведение одной формы к другой в том случае, когда преобразование координат а priori не известно, является весьма трудной задачей.

¹⁾ В двухмерном римановом пространстве всегда можно ввести ортогональные координаты, так что свойство ортогональности есть свойство системы отсчета, а не пространства. — *Прим. ред.*

В трехмерном евклидовом пространстве при использовании декартовых координат (X, Y, Z) метрика имеет вид

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2, \quad (2.202)$$

опять-таки в согласии с теоремой Пифагора. Если совершается преобразование координат (2.102) с обозначениями

$$\begin{aligned} x^1 &= X, & x^2 &= Y, & x^3 &= Z, \\ x'^1 &= r, & x'^2 &= \theta, & x'^3 &= \varphi, \end{aligned}$$

то метрика превращается в

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Поэтому метрика двумерной поверхности, образованной точками, лежащими на поверхности сферы радиуса a , есть

$$ds^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (2.203)$$

Геометрия поверхности сферы существенно отличается от геометрии евклидовой плоскости: прямые линии заменяются большими кругами сферы, которые имеют конечную длину и обязательно пересекаются, так что здесь нет параллельных прямых в евклидовом смысле, и т. д. Это различие в геометрии находит свое отражение в том, что не существует преобразования координат, которое бы переводило (2.203) в (2.201), или наоборот. Таким образом, не только метрика данного двумерного многообразия может принимать много форм в соответствии с используемой координатной системой, но имеются многообразия с существенно различными геометриями, метрики которых не могут быть переведены одна в другую при каком бы то ни было преобразовании координат. Позднее будет показано, как может быть проведено различие таких геометрий друг от друга.

Имеется преобразование формулы (2.203), которое понадобится впоследствии и которое можно получить, положив

$$\sin \theta = \frac{r}{1 + \frac{r^2}{4}}, \quad (2.204)$$

где r — безразмерная переменная, которую не следует путать с радиусом-вектором полярной системы координат эв-

клидовой плоскости. Метрика (2.203) превращается в

$$ds^2 = a^2 \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{\left(1 + \frac{r^2}{4}\right)^2}. \quad (2.205)$$

При возрастании θ от нуля до π , r возрастает от нуля до 2 (при $\theta = \frac{\pi}{2}$) и стремится к бесконечности при $\theta \rightarrow \pi$.

Предыдущие выражения для метрик двумерных и трехмерных многообразий имели одну общую черту: будучи выражены в ортогональной форме, они содержат только положительные члены. Однако это не обязательно должно быть так, и введение отрицательных членов является одним из способов получения многообразий, которые не обладают эвклидовой геометрией. В качестве примера рассмотрим трехмерное многообразие, отличающееся от трехмерного эвклидового пространства тем, что его метрика имеет вид

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 - dZ^2. \quad (2.206)$$

Если координаты заменяются на (r_1, θ, φ) , где

$$X = r_1 \operatorname{sh} \theta \cos \varphi, \quad Y = r_1 \operatorname{sh} \theta \sin \varphi, \quad Z = r_1 \operatorname{ch} \theta,$$

то метрика приобретает вид

$$ds^2 = -dr_1^2 + r_1^2 d\theta^2 + r_1^2 \operatorname{sh}^2 \theta d\varphi^2$$

и метрика поверхности $r_1 = a$, где a — постоянная, есть

$$ds^2 = a^2 (d\theta^2 + \operatorname{sh}^2 \theta d\varphi^2).$$

Если в этой формуле мы положим $\operatorname{sh} \theta = \frac{r}{1 - \frac{r^2}{4}}$, то по-

лучим

$$ds^2 = a^2 \frac{dr^2 + r^2 d\varphi^2}{\left(1 - \frac{r^2}{4}\right)^2} \quad (2.207)$$

— выражение, аналогичное (2.205). Очевидно $r = 0$ при $\theta = 0$ и возрастает до $r = 2$ при $\theta \rightarrow \infty$.

После этого предварительного знакомства с двумерными многообразиями мы можем перейти к общему случаю n -мерного многообразия. *Риманово пространство* — это точечное многообразие, в котором „расстояние“ между соседней парой точек (x) и $(x + dx)$ есть скаляр ds , выражение

которого через координаты называется *метрикой* и определяется формулой

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.208)$$

где $g_{\mu\nu}$ — функции координат (x) . Они называются *метрическими коэффициентами*; предполагается, что они симметричны относительно индексов

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}.$$

Таким образом имеется $\frac{1}{2}n(n+1)$ независимых метрических коэффициентов. Предполагается также, что определитель g , элементами которого являются $g_{\mu\nu}$,

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}, \quad (2.209)$$

не равен тождественно нулю. Наконец, ds будет называться *интервалом* между (x) и $(x+dx)$ (термину „интервал“ будет даваться предпочтение по сравнению с термином „расстояние“).

В большинстве приложений риманова пространства к общей теории относительности будут рассматриваться специальные типы пространств, в которых $g_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$; мы будем называть их ортогональными. Отличные от нуля $g_{\mu\nu}$ не обязательно положительны: разность между числом положительных и отрицательных $g_{\mu\nu}$ называется *сигнатурой* метрики. В наиболее общем римановом пространстве невозможно найти такую систему координат, в которой выражение для метрики является ортогональным, однако вблизи некоторой заранее выбранной точки пространства могут быть введены координаты, в которых выражение для метрики является ортогональным. Вблизи этой точки метрика имеет определенную сигнатуру, которая не может быть изменена переходом от одной системы координат к другой.

Теперь будет доказано, что функции $g_{\mu\nu}$ суть компоненты ковариантного тензора 2-го ранга, который называется метрическим тензором. Так как ds — скаляр, то

$$ds^2 = g'_{\lambda\mu} dx'^\lambda dx'^\mu = g_{\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu,$$

и поэтому, используя (2.105), имеем

$$g'_{\lambda\mu} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} dx^{\alpha} dx^{\beta} = g_{\lambda\mu} dx^{\lambda} dx^{\mu}.$$

Так как дифференциалы координат независимы, последнее равенство может иметь место только при условии, что

$$g'_{\lambda\mu} \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\beta}} = g_{\alpha\beta}.$$

Меняя местами штрихованные и нештрихованные буквы, получаем

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\lambda\mu} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\alpha}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\beta}},$$

что представляет собой закон преобразования (2.110) ковариантного тензора 2-го ранга.

С помощью метрического тензора можно определить второй симметричный фундаментальный тензор — *контравариантный метрический тензор* — следующим образом.

Рассмотрим n^2 функций $g^{\lambda\mu}$, определенных так:

$$g^{\lambda\mu} = \frac{\text{Алгебраическое дополнение } g_{\lambda\mu} \text{ в } g}{g}, \quad (2.210)$$

которые благодаря свойствам определителя удовлетворяют соотношениям

$$g^{\lambda\mu} g_{\lambda\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (2.211)$$

Тогда функции $g^{\lambda\mu}$ определяют некоторый контравариантный тензор 2-го ранга — утверждение, справедливость которого может быть проверена при помощи теории о частном. Если V^{ν} — произвольный контравариантный вектор, то внутреннее произведение $U_{\lambda} = g_{\lambda\nu} V^{\nu}$ есть произвольный ковариантный вектор. Но

$$g^{\lambda\mu} U_{\lambda} = g^{\lambda\mu} g_{\lambda\nu} V^{\nu} = \delta_{\nu}^{\mu} V^{\nu} = V^{\mu},$$

и поэтому внутреннее произведение $g^{\lambda\mu}$ с произвольным ковариантным вектором U_{λ} дает некоторый контравариантный вектор. Таким образом, $g^{\lambda\mu}$ должны быть компонентами контравариантного тензора 2-го ранга.

Предыдущие формулы могут быть иллюстрированы на примере метрики (2.205) поверхности сферы. Метрический тензор, определитель g и контравариантный метрический тензор имеют вид (если положить $r = x^1$, $\varphi = x^2$):

$$\begin{aligned} g_{11} &= a^2 \left(1 + \frac{r^2}{4}\right)^{-2}, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = a^2 r^2 \left(1 + \frac{r^2}{4}\right)^{-2}, \\ g &= a^4 r^2 \left(1 + \frac{r^2}{4}\right)^{-4}, \\ g^{11} &= a^{-2} \left(1 + \frac{r^2}{4}\right)^2, \quad g^{21} = g^{12} = 0, \quad g^{22} = a^{-2} r^{-2} \left(1 + \frac{r^2}{4}\right)^2. \end{aligned}$$

Стоит также отметить, что в трехмерной евклидовой геометрии при использовании декартовых координат, метрика в которых есть (2.202), мы имеем

$$\left. \begin{aligned} g_{11} = g_{22} = g_{33} &= 1, & g_{\mu\nu} &= 0 & (\mu \neq \nu), \\ g &= 1, \\ g^{11} = g^{22} = g^{33} &= 1, & g^{\mu\nu} &= 0 & (\mu \neq \nu), \end{aligned} \right\} \quad (2.212)$$

так что метрический тензор и его контравариантная форма имеют компоненты, численные значения которых равны единице или нулю.

Метрические тензоры позволяют нам совершать операции „поднятия“ и „опускания“ индексов тензора, которые переводят ковариантный индекс в контравариантный, и наоборот. Эта процедура состоит в образовании внутреннего произведения данного тензора с одним из двух метрических тензоров, и результирующий тензор рассматривается не как новый тензор, а скорее как новая форма старого тензора. Так, в случае векторов V^λ , U_λ , эта процедура дает соответственно

$$V_\mu = g_{\lambda\mu} V^\lambda, \quad U^\mu = g^{\lambda\mu} U_\lambda.$$

Из тензора 2-го ранга $T^{\lambda\mu}$ получаем¹⁾

$$T^\lambda_{\mu} = g_{\mu\nu} T^{\lambda\nu}, \quad T^\lambda_{\lambda\mu} = g_{\lambda\sigma} T^\sigma_{\mu} = g_{\lambda\sigma} g_{\mu\nu} T^{\sigma\nu}.$$

¹⁾ Здесь ярко проявляется неудобство обозначений, отмеченное в примечании на стр. 32: в записи тензора T^λ_{μ} ниоткуда не видно, что опускается именно второй индекс. — *Прим. ред.*

Не представляет труда доказать, что результаты этих операций действительно являются тензорами указанных типов. Рассмотрим, например, закон преобразования V^μ , который имеет вид

$$\begin{aligned} V'_\mu &= g'_{\lambda\mu} V'^\lambda = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\lambda} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} g_{\alpha\beta} \right) \left(\frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\gamma} V^\gamma \right) = \\ &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} g_{\alpha\beta} V^\gamma = \delta_\gamma^\alpha \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} g_{\alpha\beta} V^\gamma = \\ &= \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} g_{\alpha\beta} V^\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu} V_\beta \end{aligned}$$

и является, таким образом, законом преобразования ковариантного вектора.

Тензоры, полученные один из другого процессом поднятия или опускания индексов, называются *ассоциированными тензорами*. В евклидовой геометрии при использовании декартовых координат разница в значениях компонент тензора после поднятия или опускания индексов отсутствует, как легко видеть из (2.212). Это является одной из причин того, что в элементарной векторной алгебре обычно нет необходимости проводить различие между ковариантными и контравариантными векторами.

При помощи поднятия ковариантного индекса в случае необходимости вектор всегда может быть выражен в его контравариантной форме, скажем V^λ ; составив внутреннее произведение ковариантной и контравариантной форм этого вектора, мы получим скаляр, называемый *длиной* вектора, квадрат которой может быть выражен в одной из следующих форм:

$$V^2 = V^\lambda V_\lambda = g^{\lambda\mu} V_\lambda V_\mu = g_{\lambda\mu} V^\lambda V^\mu. \quad (2.213)$$

§ 2.3. Геодезические линии

До сих пор наше внимание было приковано к тем изменениям, которые претерпевают тензоры, когда совершается преобразование координат точек риманова пространства. Теперь необходимо рассмотреть изменения другого рода, которые возникают, когда при фиксированной системе координат значение тензора в одной точке сравнивается со

значением того же тензора в другой точке. Такие изменения целесообразно рассматривать как обусловленные „движением“ тензора из одной точки в другую, и поэтому необходимо найти вид „путей“ в римановом пространстве, вдоль которых мы будем рассматривать движение нашего тензора. Эти фундаментальные пути называются *геодезическими линиями* рассматриваемого пространства; они обладают свойствами, аналогичными свойствам прямых линий евклидова пространства. Геодезические линии являются частным видом кривых в пространстве, а кривая задается с помощью уравнений

$$x^\lambda = F^\lambda(\mu), \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n), \quad (2.301)$$

где μ — параметр, изменяющийся от точки к точке на кривой. Подставляя x^λ из этих уравнений в (2.208) и интегрируя по μ , можно выразить интервал, измеренный вдоль кривой, через μ . Геодезическая линия, соединяющая две точки P_0 и P_1 , определяется тогда как кривая, для которой интервал между P_0 и P_1 имеет стационарное значение по сравнению с интервалами, измеренными вдоль любых других близлежащих кривых, соединяющих эти две точки. Это свойство, конечно, остается в силе и для прямых линий в евклидовой геометрии, хотя в этом случае прямая линия дает кратчайший интервал между двумя точками. Для настоящих целей, однако, не является необходимым выяснение того, дают или не дают геодезические линии в римановом пространстве минимальное или максимальное значение интервалу между двумя точками этого пространства.

Дифференциальные уравнения геодезической линии могут быть получены следующим образом (окончательные уравнения этой кривой не могут быть найдены в явном виде без точного знания функций $g_{\mu\nu}$). Предположим, что (2.301) представляют собой окончательные уравнения геодезической линии, соединяющей точки P_0 и P_1 , так что интервал s равен

$$s = \int_{\mu_0}^{\mu_1} \left\{ g_{\lambda\nu}(x) \frac{dx^\lambda}{d\mu} \frac{dx^\nu}{d\mu} \right\}^{1/2} d\mu, \quad (2.302)$$

где μ_0 и μ_1 — значения параметра μ в точках P_0 и P_1 соответственно. Любая другая кривая, соединяющая P_0 и P_1 и

лежащая близко к геодезической линии, будет иметь уравнения вида

$$\bar{x}^\lambda = x^\lambda + \varepsilon \omega^\lambda = F^\lambda(\mu) + \varepsilon \omega^\lambda(\mu),$$

где $\omega^\lambda = 0$ при $\mu = \mu_0$ и $\mu = \mu_1$, а ε — малая величина, квадратом и более высокими степенями которой можно пренебречь. Если $\bar{s}$ — интервал вдоль соседней кривой, соединяющей P_0 и P_1 , то

$$\bar{s} = \int_{\mu_0}^{\mu_1} \left\{ g_{\lambda\nu}(\bar{x}) \frac{d\bar{x}^\lambda}{d\mu} \cdot \frac{d\bar{x}^\nu}{d\mu} \right\}^{1/2} d\mu,$$

и, пренебрегая всеми степенями ε выше первой, получим

$$\begin{aligned} \bar{s} - s = \int_{\mu_0}^{\mu_1} \left\{ g_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\mu} \frac{dx^\nu}{d\mu} + \varepsilon \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\mu} \omega^\sigma + \right. \right. \\ \left. \left. + 2g_{\lambda\nu} \frac{d\omega^\lambda}{d\mu} \right) \frac{dx^\nu}{d\mu} \right\}^{1/2} d\mu - \int_{\mu_0}^{\mu_1} \left\{ g_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\mu} \frac{dx^\nu}{d\mu} \right\}^{1/2} d\mu. \end{aligned}$$

Но так как $ds = \{g_{\lambda\nu} dx^\lambda dx^\nu\}^{1/2}$, последнее равенство может быть записано в виде

$$\bar{s} - s = \frac{1}{2} \varepsilon \int_{\mu_0}^{\mu_1} \left\{ \left(\omega^\sigma \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\mu} + 2g_{\lambda\nu} \frac{d\omega^\lambda}{d\mu} \right) \frac{dx^\nu}{d\mu} \frac{d\mu}{ds} \right\} d\mu.$$

Можно упростить выкладки, если $s \neq 0$, полагая параметр μ равным интервалу s , измеренному вдоль геодезической линии. В этом случае $d\mu/ds = 1$, и

$$\bar{s} - s = \frac{1}{2} \varepsilon \int_{\mu_0}^{\mu_1} \left\{ \left(\omega^\sigma \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\lambda}{ds} + 2g_{\lambda\nu} \frac{d\omega^\lambda}{ds} \right) \frac{dx^\nu}{ds} \right\} ds,$$

причем теперь x^λ , ω^λ рассматриваются как функции s . Интегрирование по частям второго члена в последнем равенстве дает

$$\begin{aligned} \bar{s} - s = \frac{1}{2} \varepsilon \int_{s_0}^{s_1} \left\{ \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} - 2 \frac{d}{ds} \left(g_{\sigma\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \right) \right\} \omega^\sigma ds + \\ + \varepsilon \left[g_{\lambda\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \omega^\lambda \right]_{s_0}^{s_1}. \end{aligned}$$

Однако функции ω^λ обращаются в нуль при $s=s_0$ и $s=s_1$, и поэтому проинтегрированный член равен нулю. Поскольку интеграл должен иметь стационарное значение для геодезической линии по сравнению с соседними кривыми, $\bar{s}-s$ должно равняться нулю при любом выборе функций ω^λ . Это может иметь место только в случае, если коэффициенты при каждом ω^σ в подынтегральном выражении все равны нулю, и поэтому дифференциальными уравнениями геодезической линии являются n уравнений

$$\frac{d}{ds} \left(g_{\sigma\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (\sigma=1, 2, \dots, n). \quad (2.303)$$

Форма (2.303) уравнений геодезической линии чрезвычайно полезна при практическом применении и будет неоднократно использована впоследствии. Но для теории удобнее другая форма, включающая символы Кристоффеля первого и второго родов, которые определяются соответственно следующим образом¹⁾:

$$\begin{aligned} (\lambda\mu, \nu) &= (\mu\lambda, \nu) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} \right), \quad (2.304) \\ \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} &= \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left(\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\sigma} \right). \end{aligned}$$

Эти символы симметричны по отношению к двум индексам, написанным вместе, однако они не являются компонентами тензора, как легко проверить, используя законы преобразования тензоров $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$. Легко также показать, что эти два рода символов Кристоффеля связаны соотношениями

$$\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} = g^{\nu\sigma} (\lambda\mu, \sigma), \quad (\lambda\mu, \nu) = g_{\nu\sigma} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}.$$

Уравнения (2.303) могут быть написаны в виде

$$g_{\sigma\nu} \frac{d^2 x^\nu}{ds^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0;$$

¹⁾ В настоящее время более употребительны обозначения $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ для $(\lambda\mu, \nu)$ и $\Gamma_{\lambda\mu}^\nu$ для $\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}$. — Прим. ред.

умножая эти уравнения на $g^{\tau\sigma}$ и производя суммирование по дважды встречающемуся индексу σ , получим

$$\frac{d^2 x^\tau}{ds^2} + \left\{ \begin{array}{c} \tau \\ \lambda\nu \end{array} \right\} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0, \quad (\tau = 1, 2, \dots, n), \quad (2.305)$$

что представляет собой стандартную форму уравнений геодезической линии риманова пространства, за исключением, однако, тех геодезических линий, для которых $s=0$ вдоль кривой.

Если dx^μ соответствует бесконечно малому смещению вдоль геодезической линии при изменении интервала на величину ds , то вектор dx^μ/ds ($\mu = 1, 2, \dots, n$) называют единичным тангенциальным вектором данной геодезической линии. Деля (2.208) на ds^2 , получаем, что тангенциальный вектор удовлетворяет уравнению

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 1, \quad (2.306)$$

из которого видно, если использовать (2.213), что этот вектор имеет единичную длину. Другой важный вывод состоит в том, что (2.306) есть первый интеграл n уравнений геодезической линии (2.305).

Другой вид геодезических линий, называемых *нулевыми геодезическими линиями*, получается в предположении, что интервал между двумя точками на кривой равен нулю. Если μ — отличный от нуля скалярный параметр, меняющийся вдоль нулевой геодезической линии, то кривая такого рода характеризуется тем, что определяющие эту кривую уравнения имеют первый интеграл, который записывается в виде

$$h = g_{\lambda\nu} \frac{dx^\lambda}{d\mu} \frac{dx^\nu}{d\mu} = 0 \quad (2.307)$$

вместо (2.306). Дифференциальные уравнения нулевой геодезической линии получаются путем учета того, что если P_0 и P_1 — две точки на этой линии, то интеграл

$$I = \int_{\mu_0}^{\mu_1} h d\mu$$

должен равняться нулю вдоль кривой. Приближенное значение этого интеграла вдоль соседней кривой равно

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \int_{\mu_0}^{\mu_1} \bar{h} d\mu = \int_{\mu_0}^{\mu_1} \left\{ \bar{g}_{\nu\sigma}(\mu) \frac{d\bar{x}^\nu}{d\mu} \frac{d\bar{x}^\sigma}{d\mu} \right\} d\mu = \\ &= \int_{\mu_0}^{\mu_1} \left\{ g_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\mu} \frac{dx^\sigma}{d\mu} + \varepsilon \left(\frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\nu}{d\mu} \frac{dx^\sigma}{d\mu} \omega^\lambda + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2g_{\nu\sigma} \frac{dx^\nu}{d\mu} \frac{d\omega^\sigma}{d\mu} \right) \right\} d\mu.\end{aligned}$$

Первый член в подынтегральном выражении обращается в нуль, поскольку $h=0$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\bar{I} &= \varepsilon \int_{\mu_0}^{\mu_1} \left\{ \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\nu}{d\mu} \frac{dx^\sigma}{d\mu} - 2 \frac{d}{d\mu} \left(g_{\lambda\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\mu} \right) \right\} \omega^\lambda d\mu + \\ &\quad + \varepsilon \left[g_{\lambda\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\mu} \omega^\lambda \right]_{\mu_0}^{\mu_1},\end{aligned}$$

где, как и ранее, проинтегрированный член обращается в нуль. Если свойство $h=0$ справедливо до первого порядка для всех соседних кривых нулевой геодезической линии, соединяющих P_0 и P_1 , то $\bar{I}=I=0$. Поэтому

$$\frac{d}{d\mu} \left(g_{\lambda\sigma} \frac{dx^\sigma}{d\mu} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda} \frac{dx^\nu}{d\mu} \frac{dx^\sigma}{d\mu} = 0, \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n), \quad (2.308)$$

и, как и ранее, эти уравнения могут быть преобразованы к виду

$$\frac{d^2 x^\sigma}{d\mu^2} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} \frac{dx^\lambda}{d\mu} \frac{dx^\nu}{d\mu}, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n), \quad (2.309)$$

что представляет собой стандартную форму уравнений нулевой геодезической линии, первым интегралом которых является (2.307).

В качестве простого примера рассмотрим геодезические линии трехмерного евклидова пространства с метрикой (2.202). Так как все компоненты метрического тензора равны постоянным, дифференциальные уравнения геодезических линий (2.303) суть

$$\frac{d^2 X}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2 Y}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2 Z}{ds^2} = 0.$$

Эти уравнения непосредственно интегрируются и дают уравнение прямой линии, проходящей через точку (X_0, Y_0, Z_0)

$$\frac{X - X_0}{l} = \frac{Y - Y_0}{m} = \frac{Z - Z_0}{n} = s.$$

Направляющие косинусы этой прямой суть (l, m, n) и, как хорошо известно, удовлетворяют условию

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1.$$

Но они являются компонентами единичного тангенциального вектора геодезической линии, так что последнее уравнение эквивалентно уравнению (2.306), если метрика определяется (2.202).

В качестве другого примера проверим утверждение, что большие круги на сфере являются геодезическими линиями. Точка $\theta = 0$ в (2.203) может быть произвольно выбрана на поверхности сферы. Тогда кривые $\varphi = \text{const}$ — „меридианы“, соответствующие этому „полюсу“; кривые $\theta = \text{const}$ — (малые) „широтные окружности“, причем только кривая $\theta = \pi/2$ является большим кругом. Если в (2.303) ввести обозначения $x^1 = \theta$, $x^2 = \varphi$, эти уравнения сводятся к следующей паре:

$$\frac{d}{ds} \left(a^2 \frac{d\theta}{ds} \right) - a^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0,$$

$$\frac{d}{ds} \left(a^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0.$$

Частными решениями этих уравнений являются, очевидно, $\varphi = \text{const}$, $a\theta = s$, или $\theta = \pi/2$, $a\varphi = s$, являющиеся, соответственно, „меридианами“ и „экватором“ по отношению к выбранной в качестве „полюса“ точке. „Широтные окружности“, на которых θ имеет постоянное значение, отличное от $\pi/2$, не удовлетворяют уравнениям геодезической линии. Таким образом, большие круги на сфере являются геодезическими линиями, а малые круги — нет, хотя, конечно, мы не доказали того, что геодезическими линиями на сфере будут *только* большие круги.

Нулевыми геодезическими линиями евклидова пространства с метрикой (2.202) являются, если использовать (2.308) и (2.307), прямые линии

$$\frac{X - X_0}{l} = \frac{Y - Y_0}{m} = \frac{Z - Z_0}{n} = \mu, \quad (2.310)$$

направляющие косинусы которых удовлетворяют условию

$$l^2 + m^2 + n^2 = 0$$

и, следовательно, не могут быть действительными. Таким образом нулевые геодезические линии являются в этом случае мнимыми прямыми. Эта ситуация, однако, меняется в случае такого пространства как (2.206), где один из метрических коэффициентов является отрицательным, поскольку, хотя в этом случае уравнения геодезических линий по-прежнему имеют вид (2.310), (l, m, n) удовлетворяют теперь условию

$$l^2 + m^2 - n^2 = 0.$$

Таким образом, в этом случае возможны действительные значения для (l, m, n) и как геодезические, так и нулевые геодезические линии пространства (2.206) являются действительными прямыми.

§ 2.4. Ковариантное дифференцирование

Геодезические линии риманова пространства образуют семейство путей, определенных инвариантным образом благодаря свойству стационарности интервала, измеренного вдоль любого из путей. Поэтому эти кривые не зависят от частного вида системы координат и представляют собой естественный путь для перемещения из одной точки пространства к другой. Таким образом они могут быть использованы для подсчета изменения вектора или тензора от одной точки к другой, причем можно вообразить себе, что эти объекты „переносятся“ вдоль геодезической линии, соединяющей эти две точки. Пусть (x) — некоторая точка на геодезической линии $(x + dx)$ — соседняя точка на той же линии, и пусть $\lambda^p = \frac{dx^p}{ds}$ — единичный тангенциальный вектор геодезической линии. Пусть, далее, V^p — контравариантный вектор, ковариантная форма которого есть V_p ; тогда $V_p V^p$ является, конечно, скаляром. Вектор $V^p(x + dx)$ определяется как результат переноса V^p из

точки (x) в точку $(x + dx)$ посредством постулирования того, что

$$\frac{d}{ds}(V_\mu \lambda^\mu) = \frac{d}{ds}(g_{\mu\nu} V^\nu \lambda^\mu)$$

должно быть скаляром независимо от того, какие две соседние точки на геодезической линии рассматриваются. Это определение приводит к некоторому смешанному тензору 2-го ранга, который называется *ковариантной производной* V^μ . Учитывая (2.305) и (2.304), имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(g_{\mu\nu} V^\nu \lambda^\mu) &= \left[g_{\mu\nu} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\sigma} + V^\nu \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \sigma \mu \end{matrix} \right\} g_{\nu\tau} V^\nu \right] \lambda^\sigma \lambda^\mu = \\ &= \left\{ g_{\mu\nu} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\sigma} + \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - (\sigma\mu, \nu) \right) V^\nu \right\} \lambda^\sigma \lambda^\mu = \\ &= \left\{ \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\sigma} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma \mu \end{matrix} \right\} V^\mu \right\} \lambda_\nu \lambda^\sigma. \end{aligned}$$

Левая часть этого равенства — скаляр, тогда как в правой части стоит внутреннее произведение контравариантного вектора λ^σ , ковариантного вектора λ_ν и величины $\frac{dV^\nu}{dx^\sigma} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \sigma \mu \end{matrix} \right\} V^\mu$.

В силу теоремы о частном последняя величина должна быть компонентой тензора 2-го ранга, контравариантного по индексу ν и ковариантного по индексу σ . Этот тензор называется *ковариантной производной* исходного вектора V^μ и обозначается через $V^\mu_{;\nu}$; для обозначения того, что этот тензор есть ковариантная производная, используется запятая, так что

$$V^\mu_{;\nu} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu \sigma \end{matrix} \right\} V^\sigma. \quad (2.401)$$

Внутреннее произведение ковариантной производной от V^μ с единичным тангенциальным вектором λ^ν геодезической линии является контравариантным вектором, который может быть записан в виде

$$V^\mu_{;\nu} \lambda^\nu = \frac{dV^\mu}{ds} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma \tau \end{matrix} \right\} V^\sigma \lambda^\tau. \quad (2.402)$$

Этот вектор называется *полной ковариантной производной* исходного вектора V^μ . Если в качестве вектора V^μ выбрать

единичный тангенциальный вектор, то из (2.305) следует, что полная ковариантная производная единичного тангенциального вектора равна нулю. Таким образом, геодезические линии — это кривые, единичные тангенциальные векторы которых имеют нулевую полную ковариантную производную.

Инвариантность вдоль геодезической линии внутреннего произведения ковариантного вектора U_μ и единичного тангенциального вектора определяет ковариантную производную $U_{\mu, \nu}$ от U_μ . Имеем

$$\frac{d}{ds}(U_\mu \lambda^\mu) = \left\{ \frac{\partial U_\mu}{\partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} U_\sigma \right\} \lambda^\mu \lambda^\nu,$$

где

$$U_{\mu, \nu} = \frac{\partial U_\mu}{\partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} U_\sigma \quad (2.403)$$

— ковариантный тензор 2-го ранга (в силу теоремы о частном).

Процедура ковариантного дифференцирования тензоров, ранг которых выше первого, состоит в образовании скаляра при помощи составления внутреннего произведения тензора с единичным тангенциальным вектором геодезической линии и применении к этому скаляру операции d/ds . Тогда, если $Y_{\mu\nu}$ — ковариантный тензор 2-го ранга, то величина $Y_{\mu\nu} \lambda^\mu \lambda^\nu$ — скаляр, и, используя (2.305), мы имеем

$$\frac{d}{ds}(Y_{\mu\nu} \lambda^\mu \lambda^\nu) = \left\{ \frac{\partial Y_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \mu \sigma \end{matrix} \right\} Y_{\tau\nu} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \nu \sigma \end{matrix} \right\} Y_{\mu\tau} \right\} \lambda^\sigma \lambda^\mu \lambda^\nu.$$

В силу теоремы о частном набор величин

$$Y_{\mu\nu, \sigma} = \frac{\partial Y_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \mu \sigma \end{matrix} \right\} Y_{\tau\nu} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \nu \sigma \end{matrix} \right\} Y_{\mu\tau} \quad (2.404)$$

является контравариантным тензором 3-го ранга и представляет собой ковариантную производную от тензора $Y_{\mu\nu}$. Ковариантная производная смешанного тензора 2-го ранга X^λ_ν есть

$$X^\lambda_{\nu, \mu} = \frac{\partial X^\lambda_\nu}{\partial x^\mu} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \sigma \end{matrix} \right\} X^\sigma_\nu - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \nu \mu \end{matrix} \right\} X^\lambda_\sigma. \quad (2.405)$$

а ковариантная производная контравариантного тензора 2-го ранга $Z^{\lambda\nu}$ есть

$$Z^{\lambda\nu}_{, \mu} = \frac{\partial Z^{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu \sigma \end{matrix} \right\} Z^{\sigma\nu} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \mu \sigma \end{matrix} \right\} Z^{\lambda\sigma}. \quad (2.406)$$

Сравнение формул (2.404), (2.405) и (2.406) с формулами (2.401) и (2.403) показывает, что члены, включающие сим-

волы Кристоффеля, в первых трех упомянутых формулах подчиняются следующему правилу:

Каждый ковариантный индекс исходного тензора приводит к возникновению члена, содержащего символ Кристоффеля; этот член имеет такую же форму, как соответствующий член в ковариантной производной ковариантного вектора; каждый же контравариантный индекс приводит к возникновению члена, аналогичного члену в ковариантной производной контравариантного вектора.

Как может убедиться читатель, это правило сохраняет свою силу в случае тензора любого ранга.

Процедура ковариантного дифференцирования может быть применена к метрическим тензорам $g_{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}$ и δ_{ν}^{μ} . Используя (2.304) и (2.404), получаем

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu,\lambda} &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\lambda \end{matrix} \right\} g_{\sigma\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} g_{\mu\sigma} = \\ &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - (\mu\lambda, \nu) - (\nu\lambda, \mu) = \\ &= \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^{\lambda}} \right) = 0, \end{aligned}$$

и, следовательно, *ковариантная производная метрического тензора равна нулю*. С другой стороны,

$$\delta_{\nu,\lambda}^{\mu} = \frac{\partial \delta_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \sigma\lambda \end{matrix} \right\} \delta_{\nu}^{\sigma} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} \delta_{\sigma}^{\mu} = \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \nu\lambda \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} = 0,$$

и так как $g_{\mu\nu}g^{\lambda\nu} = \delta_{\mu}^{\lambda}$, то и ковариантная производная от $g^{\lambda\nu}$ равна нулю. Таким образом, при ковариантном дифференцировании все три фундаментальных тензора можно считать постоянными.

Имеется важный тензор, который можно получить из ковариантной производной некоторого заданного тензора 2-го ранга и который называется *векторной дивергенцией* последнего. Для того чтобы показать, как получается векторная дивергенция, используем следующий результат о сумме символов Кристоффеля: если g — определитель, составленный

из метрических коэффициентов, то по правилу дифференцирования определителя имеем

$$\frac{\partial g}{\partial x^\nu} = \sum_{\lambda, \mu} (\text{алгебраическое дополнение } g_{\lambda\mu} \text{ в } g) \times \\ \times \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = g \cdot g^{\lambda\mu} \frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}.$$

Но

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\sigma}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\sigma} \right) = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \frac{\partial g_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu}.$$

Поэтому

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^\nu}. \quad (2.407)$$

Рассмотрим теперь контравариантный вектор V^λ и пусть $V_{,\mu}^\lambda$ — его ковариантная производная; тогда $V_{,\lambda}^\lambda$ является скаляром, называемым *дивергенцией* V^λ . Этот скаляр

$$V_{,\lambda}^\lambda = \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \lambda\lambda \end{matrix} \right\} V^\lambda = \\ = \frac{\partial V^\lambda}{\partial x^\lambda} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^\lambda} V^\lambda = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} V^\lambda)}{\partial x^\lambda}. \quad (2.408)$$

Пусть, с другой стороны, $T^{\mu\nu}$ — контравариантный тензор 2-го ранга и $T_{,\lambda}^{\mu\nu}$ — его ковариантная производная; тогда $T_{,\lambda}^{\mu\lambda}$ есть некоторый вектор, ассоциированный с $T^{\mu\nu}$ и называемый его *векторной дивергенцией*. Формула для векторной дивергенции имеет вид

$$T_{,\lambda}^{\mu\lambda} = \frac{\partial T^{\mu\lambda}}{\partial x^\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} T^{\sigma\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} T^{\mu\sigma} = \\ = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} T^{\mu\lambda})}{\partial x^\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} T^{\sigma\lambda}. \quad (2.409)$$

Имеется, однако, и вторая векторная дивергенция, которая получается свертыванием по первому контравариантному индексу тензора $T^{\mu\nu}$, а именно

$$T_{,\lambda}^{\lambda\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} T^{\lambda\nu})}{\partial x^\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} T^{\lambda\sigma}.$$

Эти две векторных дивергенции равны, если тензор $T^{\mu\nu}$ — симметричный, т. е. если его компоненты таковы, что $T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}$. В других случаях эти две векторные дивергенции, полученные из данного тензора 2-го ранга, не совпадают.

§ 2.5. Тензор Римана — Кристоффеля и тензор Риччи

Имеются два важных тензора, один 4-го ранга ($R_{\lambda\mu,\nu}^{\sigma}$) и один 2-го ранга ($R_{\lambda\mu}$), которые включают первые и вторые частные производные метрических коэффициентов и возникают при повторном применении операции ковариантного дифференцирования к тензорам. В обычном (дифференциальном) исчислении, если $F(x)$ — функция n переменных x^{λ} , операция частного дифференцирования, примененная к первой частной производной $\frac{\partial F}{\partial x^{\mu}}$, дает вторую частную производную $\frac{\partial^2 F}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}$, которая независимо от выбранной функции F обладает специальным свойством быть равной $\frac{\partial^2 F}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}}$. Повторение операции ковариантного дифференцирования приводит, конечно, ко второй ковариантной производной (некоторому тензору), которая, однако, вообще говоря, не будет обладать свойством симметрии обычной второй частной производной. Пусть $V_{\lambda,\mu}$ — первая ковариантная производная вектора V_{λ} и пусть λ^{ν} — как обычно, обозначает единичный тангенциальный вектор геодезической линии. Тогда с помощью (2.404) имеем

$$\begin{aligned} V_{\lambda,\mu\nu} &= \frac{\partial V_{\lambda,\mu}}{\partial x^{\nu}} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} V_{\tau,\mu} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} V_{\lambda,\tau} = \\ &= \frac{\partial^2 V_{\lambda}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial V_{\tau}}{\partial x^{\mu}} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial V_{\lambda}}{\partial x^{\tau}} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} \frac{\partial V_{\tau}}{\partial x^{\nu}} - \\ &- V_{\tau} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \tau\lambda \end{matrix} \right\} V_{\sigma} + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\tau \end{matrix} \right\} V_{\sigma}, \end{aligned}$$

что представляет собой компоненту $V_{\lambda,\mu\nu}$ второй ковариантной производной вектора V_{λ} , полученной первым ковариантным дифференцированием по x^{μ} и затем по x^{ν} . Если обратить порядок этих двух ковариантных дифференцирований,

то мы получим компоненту $V_{\lambda, \nu\mu}$ второй ковариантной производной. Так как разность двух тензоров есть тензор, величины $V_{\lambda, \mu\nu} - V_{\lambda, \nu\mu}$ суть компоненты некоторого ковариантного тензора 3-го ранга и

$$V_{\lambda, \mu\nu} - V_{\lambda, \nu\mu} = \left[-\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \tau\nu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\tau \end{matrix} \right\} \right] V_\sigma.$$

В силу теоремы о частном выражение в квадратных скобках должно быть компонентой некоторого тензора 4-го ранга, контравариантного по индексу σ и ковариантного по индексам λ, μ и ν . Этот тензор, называемый *тензором Римана — Кристоффеля*, обозначается через

$$R_{\lambda\mu\nu}^\sigma = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\tau \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \tau\nu \end{matrix} \right\} \quad (2.501)$$

и строится исключительно из компонент метрического тензора и их первых и вторых частных производных. Важность этого тензора заключается в том, что он является наиболее сложным тензором риманова пространства, непосредственно связанным с метрикой пространства. Ковариантная форма тензора Римана — Кристоффеля имеет вид

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu}^\sigma &= g_{\sigma\lambda} R_{\lambda\mu\nu}^\sigma = g_{\sigma\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\mu} [g^{\sigma\sigma}(\lambda\nu, \varepsilon)] - g_{\sigma\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\nu} [g^{\sigma\sigma}(\lambda\mu, \varepsilon)] + \\ &+ \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} (\mu\tau, \kappa) - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} (\tau\nu, \kappa) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\lambda\nu, \kappa) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\lambda\mu, \kappa) + \\ &+ (\lambda\nu, \varepsilon) g_{\sigma\lambda} \frac{\partial g^{\sigma\sigma}}{\partial x^\mu} - (\lambda\mu, \varepsilon) g_{\sigma\lambda} \frac{\partial g^{\sigma\sigma}}{\partial x^\nu} + \\ &+ g^{\tau\sigma} [(\lambda\nu, \sigma)(\mu\tau, \kappa) - (\lambda\mu, \sigma)(\tau\nu, \kappa)]. \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} g_{\sigma\lambda} \frac{\partial g^{\sigma\sigma}}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu} (g_{\sigma\lambda} g^{\sigma\sigma}) - g^{\sigma\sigma} \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\mu} = \\ &= \frac{\partial \delta_\lambda^\sigma}{\partial x^\mu} - g^{\sigma\sigma} \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\mu} = -g^{\sigma\sigma} \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\mu}, \quad (2.502) \end{aligned}$$

и, так как $g_{\sigma\lambda, \mu} = 0$,

$$\frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\mu} = (\sigma\mu, \lambda) + (\lambda\mu, \sigma). \quad (2.503)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\mu\nu} = & \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\lambda_\nu, \kappa) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\lambda_\mu, \kappa) - \\ & - g^{\varepsilon\sigma} \left[(\lambda_\nu, \varepsilon) \frac{\partial g_{\sigma\kappa}}{\partial x^\mu} - (\lambda_\mu, \varepsilon) \frac{\partial g_{\sigma\kappa}}{\partial x^\nu} \right] + \\ & + g^{\varepsilon\sigma} [(\lambda_\nu, \sigma) (\mu\varepsilon, \kappa) - (\lambda_\mu, \sigma) (\varepsilon\nu, \kappa)]. \end{aligned}$$

Меняя местами индексы суммирования ε, σ в последних квадратных скобках и используя (2.503), получим

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\mu\nu} = & \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\lambda_\nu, \kappa) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} (\lambda_\mu, \kappa) + \\ & + g^{\varepsilon\sigma} [(\lambda_\mu, \varepsilon) (\kappa\nu, \sigma) - (\lambda_\nu, \varepsilon) (\mu\kappa, \sigma)]. \end{aligned}$$

Подставляя в первые два члена предыдущей формулы полные выражения для символов Кристоффеля первого рода (2.304), получим следующее выражение для ковариантной формы тензора Римана—Кристоффеля:

$$\begin{aligned} R_{\kappa\lambda\mu\nu} = & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\nu\kappa}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right] + \\ & + g^{\varepsilon\sigma} [(\lambda_\mu, \varepsilon) (\kappa\nu, \sigma) - (\lambda_\nu, \varepsilon) (\mu\kappa, \sigma)]. \end{aligned} \quad (2.504)$$

Отметим, что „опущенный“ индекс в ковариантной форме тензора Римана—Кристоффеля стоит на первом месте из четырех ковариантных индексов. Учитывая это условие расположения индексов, мы можем отметить следующие свойства симметрии и антисимметрии тензора Римана—Кристоффеля:

Перестановка местами ковариантных индексов в последней паре меняет знак компоненты тензора, т. е.

$$R_{\lambda\mu\nu}^\sigma = -R_{\lambda\nu\mu}^\sigma, \quad R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\kappa\lambda\nu\mu}; \quad (2.505)$$

следовательно, этот тензор является антисимметричным по отношению к этим двум индексам. Из формулы (2.504) вытекает, что тензор антисимметричен также по отношению к первой паре индексов и симметричен по отношению к одновременной перестановке индексов в первой и второй паре, т. е.

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = -R_{\lambda\kappa\mu\nu}, \quad R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\lambda\kappa\nu\mu}. \quad (2.505)$$

Более того, тензор симметричен по отношению к перестановке местами пар индексов без изменения порядка следования индексов внутри каждой пары, т. е.

$$R_{\alpha\lambda\mu\nu} = R_{\mu\nu\lambda\alpha}. \quad (2.505)$$

Наконец, компоненты тензора удовлетворяют *условию цикличности*, которое может быть установлено следующим образом. Пусть F — скалярная функция положения, тогда

$$\frac{dF}{ds} \frac{\partial F}{\partial x^\mu} \lambda^\mu$$

— скаляр „переноса“ вдоль геодезической линии. В силу теоремы о частном

$$X_\mu = \frac{\partial F}{\partial x^\mu}$$

— ковариантный вектор, ковариантная производная которого такова, что

$$X_{\mu, \nu} = \frac{\partial X_\mu}{\partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} X_\sigma = \frac{\partial^2 F}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu \nu \end{matrix} \right\} \frac{\partial F}{\partial x^\sigma} = X_{\nu, \mu}.$$

Следовательно, $X_{\mu, \nu\lambda} = X_{\nu, \mu\lambda}$, и справедливо следующее алгебраическое тождество:

$$X_{\mu, \nu\lambda} - X_{\mu, \lambda\nu} + X_{\nu, \lambda\mu} - X_{\nu, \mu\lambda} + X_{\lambda, \mu\nu} - X_{\lambda, \nu\mu} = 0.$$

Однако, по определению тензора Римана — Кристоффеля, имеем

$$X_{\mu, \nu\lambda} - X_{\mu, \lambda\nu} = R_{\mu\nu\lambda}^\sigma X_\sigma,$$

и тождество, данное выше, приобретает вид

$$X_\sigma (R_{\mu\nu\lambda}^\sigma + R_{\nu\lambda\mu}^\sigma + R_{\lambda\mu\nu}^\sigma) = 0.$$

Однако скалярная функция F — произвольна и, следовательно,

$$R_{\lambda\mu\nu}^\sigma + R_{\mu\nu\lambda}^\sigma + R_{\nu\lambda\mu}^\sigma = 0. \quad (2.506)$$

Результатом обсуждения свойств симметрии и антисимметрии является вывод о том, что число независимых компонент тензора Римана — Кристоффеля равно не n^4 , а намного меньшему числу. Можно показать [2], что в случае n -мер-

ного риманова пространства число независимых ковариантных компонент равно $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

В приложениях тензорного исчисления к теории относительности очень важную роль играет симметричный тензор 2-го ранга, называемый *тензором Риччи*, который получается свертыванием тензора Римана—Кристоффеля. Свертывая в (2.501) контравариантный индекс с последним из трех ковариантных индексов, получим одну из компонент тензора Риччи

$$R_{\lambda\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\tau \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \tau\sigma \end{matrix} \right\} = \\ = \frac{\partial^2 \ln \sqrt{g}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\tau \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} \frac{\partial \ln \sqrt{g}}{\partial x^\tau}. \quad (2.507)$$

Смешанная форма этого тензора есть, конечно, $R_\mu^\lambda = g^{\lambda\sigma} R_{\sigma\mu}$, из которой свертыванием может быть получен скаляр, называемый *инвариантом кривизны* [3], а именно

$$R_\lambda^\lambda = g^{\lambda\sigma} R_{\sigma\lambda}. \quad (2.508)$$

Тензор Римана—Кристоффеля называется также *тензором кривизны*, так как он является мерилем свойства риманова пространства, аналогичного кривизне двумерной поверхности. Эта точка зрения на тензор Римана—Кристоффеля имеет, с точки зрения автора, большее значение для тех, кто интересуется геометрическими приложениями тензорного исчисления, чем для тех, кто работает в области теории относительности. Тем не менее, представляет определенный интерес показать на примере рассмотрения сферической поверхности, как осуществляется связь тензора Римана—Кристоффеля с понятием кривизны. Если сфера имеет радиус a , то по (2.203) метрика ее поверхности имеет вид

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

и, вводя обозначения $\theta = x^1$, $\varphi = x^2$, имеем следующие отличные от нуля метрические коэффициенты и ассоциированные с ними функции:

$$g_{11} = a^2, \quad g_{22} = a^2 \sin^2 \theta, \\ g = a^4 \sin^2 \theta, \\ g^{11} = a^{-2}, \quad g^{22} = a^{-2} \sin^{-2} \theta.$$

Отличные от нуля символы Кристоффеля имеют вид

$$(12, 2) = (21, 2) = -(22, 1) = a^2 \sin \theta \cos \theta,$$

$$\left\{ \begin{smallmatrix} 1 \\ 22 \end{smallmatrix} \right\} = -\frac{1}{2} \sin 2\theta, \quad \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 21 \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 12 \end{smallmatrix} \right\} = \operatorname{ctg} \theta.$$

Соотношения (2.505) и (2.506) показывают, что имеется только одна независимая компонента ковариантного тензора Римана — Кристоффеля, в качестве которой можно взять R_{1221} , равную, в силу (2.504),

$$R_{1221} = -a^2 \sin^2 \theta. \quad (2.509)$$

Из формулы (2.507) следует, что тензор Риччи имеет две ненулевые компоненты, а именно

$$R_{11} = -1, \quad R_{22} = -\sin^2 \theta,$$

тогда как инвариант кривизны равен

$$R^\lambda_\lambda = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = -\frac{2}{a^2}.$$

Известно, что гауссова кривизна сферы радиуса a равна $1/a^2$, и последний результат показывает, что инвариант кривизны пропорционален гауссовой кривизне. Однако даже в этом простейшем возможном случае ни тензор Римана — Кристоффеля, ни тензор Риччи, ни даже инвариант кривизны не могут быть записаны в простом виде при знании гауссовой кривизны риманова пространства. Когда пространство имеет более двух измерений, связь этих тензоров с „кривизной“ пространства оказывается еще более отдаленной [4], и потому мы не будем здесь рассматривать эту связь, а ограничимся следующими замечаниями. В некоторых римановых пространствах n измерений оказывается возможным найти систему координат (X) , покрывающую все точки пространства, в которой метрика приобретает вид

$$ds^2 = \sum_{\lambda=1}^n \varepsilon_\lambda (dX^\lambda)^2, \quad (2.510)$$

где ε_λ — положительные или отрицательные константы. Тогда из (2.304) следует, что все символы Кристоффеля тождественно равны нулю, и из (2.504), (2.507) и (2.508) следует,

что тензор Римана — Кристоффеля, тензор Риччи и инвариант кривизны все тождественно равны нулю. Такие пространства называются *плоскими* по аналогии с евклидовой плоскостью, метрика (2.201) которой имеет вид (2.510) при использовании декартовых координат. Итак, тензор Римана — Кристоффеля является показателем неискривленности (или искривленности) риманова пространства [5]: если пространство плоское, этот тензор тождественно равен нулю, и нулевой характер тензора не может быть изменен никаким преобразованием координат. Таким образом, искривленность является свойством, внутренне присущим риманову пространству, и не зависит от выбора системы координат, в которой мы записываем метрику. Примерами плоских трехмерных пространств являются обычное евклидово пространство с метрикой (2.202) и пространство, метрика которого определяется (2.206). Риманово пространство, которое не является плоским, мы будем называть *искривленным*. Читатель не должен, однако, представлять себе, что этот термин означает своего рода „изогнутость“ пространства. Для целей нашей книги понятие „искривленное пространство“ означает просто такое пространство, тензор Римана — Кристоффеля которого отличен от нуля по крайней мере в одной точке этого пространства.

§ 2.6. Локальные декартовы и римановы координаты

В римановом пространстве n измерений имеются некоторые типы специальных координатных систем, которые полезны для описания точек, лежащих в окрестности произвольно заданной точки O . Первой системой такого рода является *локальная декартова* система координат, которая может быть введена вблизи произвольной точки риманова пространства любого типа. Однако мы дадим доказательство только для риманова пространства, которое допускает координатные системы, в которых метрика ортогональна, т. е.

$$ds^2 = \sum_{\lambda=1}^n \varepsilon_{\lambda} \gamma_{\lambda\lambda} (x) (dx^{\lambda})^2, \quad (2.601)$$

где $g_{\lambda\lambda} = \varepsilon_{\lambda} \gamma_{\lambda\lambda}$ и ε_{λ} равны $+1$ или -1 . Пусть точка O имеет координаты (x_0) . Рассмотрим координаты

$$X^{\lambda} = \gamma_{\lambda\lambda}^{1/2}(x_0) (x^{\lambda} - x_0^{\lambda}), \quad (\lambda = 1, 2, \dots, n), \quad (2.602)$$

причем условие суммирования временно не имеет силы. Дифференциалы этих координат равны

$$dX^\lambda = \gamma_{\lambda\lambda}^{1/2}(x_0) dx^\lambda, \quad (2.603)$$

и, подставляя в (2.601), приводим метрику к виду

$$ds^2 = \sum_{\lambda=1}^n \varepsilon_\lambda (dX^\lambda)^2, \quad (2.604)$$

что совпадает с метрикой (2.510) плоского производства. Координаты X_λ называются *локальными декартовыми координатами* и справедливы для тех достаточно близких к O точек, для которых разности $\gamma_{\lambda\lambda}^{1/2}(x) - \gamma_{\lambda\lambda}^{1/2}(x_0)$ не превосходят по порядку $x^\lambda - x_0^\lambda$. Если пространство плоское, то можно проинтегрировать дифференциальные уравнения

$$\frac{dX^\lambda}{dx^\lambda} = \gamma_{\lambda\lambda}^{1/2}(x);$$

это процедура, которая не может быть осуществлена в искривленном римановом пространстве.

Второй важный тип локальных координат называется *римановыми координатами*. Можно показать, что *в начале римановых координат символы Кристоффеля первого и второго рода и первые частные производные от $g_{\mu\nu}$ равны нулю*. Доказательство этой теоремы таково. Пусть O — заранее выбранная точка с координатами (x_0) . Рассмотрим семейство геодезических линий, которые проходят через точку O , причем каждая геодезическая линия задается ее единичным тангенциальным вектором λ_0^σ в O . Используя значок „нуль“ для обозначения числового значения, подсчитанного в точке O , из (2.305) имеем

$$\left(\frac{d\lambda^\sigma}{ds}\right)_0 = - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}_0 \lambda_0^\mu \lambda_0^\nu, \quad (2.605)$$

и, дифференцируя (2.305) по s , получаем

$$\left(\frac{d^2\lambda^\sigma}{ds^2}\right)_0 = A_{\mu\nu\tau}^\sigma \lambda_0^\mu \lambda_0^\nu \lambda_0^\tau, \quad (2.606)$$

где

$$A_{\mu\nu\tau}^\sigma = \left[-\frac{\partial}{\partial x^\tau} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} + 2 \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \tau\alpha \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \mu\nu \end{matrix} \right\} \right]_0.$$

Дальнейшие дифференцирования (2.305) по s дали бы значения более высоких производных от λ_0^σ , однако для наших целей они не нужны. Рассмотрим теперь точку P на одной из геодезических линий, проходящих через O , причем будем считать, что интервал равен нулю в O и равен S в P . Тогда координаты точки P могут быть выражены через координаты точки O при помощи ряда Тейлора, а именно

$$x^\sigma = x_0^\sigma + \lambda_0^\sigma s + \frac{1}{2} \left(\frac{d\lambda^\sigma}{ds} \right)_0 s^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^2\lambda^\sigma}{ds^2} \right)_0 s^3 + \dots, \\ (\sigma = 1, 2, \dots, n),$$

что по (2.605) и (2.606) равно

$$x^\sigma = x_0^\sigma + \lambda_0^\sigma s - \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}_0 \lambda_0^\mu \lambda_0^\nu s^2 + \frac{1}{6} A_{\mu\nu}^\sigma \lambda_0^\mu \lambda_0^\nu \lambda_0^\tau s^3 + \dots \quad (2.607)$$

Предположим, что введена новая система координат с началом в O , в которой координаты P будут

$$y^\sigma = \lambda_0^\sigma s, \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n). \quad (2.608)$$

Тогда (2.607) приобретает вид

$$x^\sigma - x_0^\sigma = y^\sigma - \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}_0 y^\mu y^\nu + \frac{1}{6} A_{\mu\nu}^\sigma y^\mu y^\nu y^\tau + \dots, \quad (2.609)$$

что представляет собой формулы преобразования от системы (x) к системе (y) , справедливые внутри области сходимости ряда, стоящего в правой части равенства. Метрика пространства есть

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu$$

и превращается в

$$ds^2 = g'_{\mu\nu}(y) dy^\mu dy^\nu,$$

если система координат преобразуется по (2.609). В системе (y) уравнения геодезической линии имеют вид

$$\frac{d^2 y^\sigma}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}' \frac{dy^\mu}{ds} \frac{dy^\nu}{ds} = 0, \quad (2.610)$$

где штрих указывает, что символы Кристоффеля подсчитаны для $g'_{\mu\nu}(y)$. Однако окончательные уравнения геодезических линий в системе (y) — это выражения (2.608), которые

должны быть решениями дифференциальных уравнений (2.610). Подстановка дает в точке O

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu, \nu \end{matrix} \right\}'_0 \lambda_0^\mu \lambda_0^\nu = 0,$$

и так как λ_0^μ может характеризовать любую геодезическую линию, проходящую через O , то отсюда следует, что

$$\left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu, \nu \end{matrix} \right\}'_0 = 0 \quad (\sigma, \mu, \nu = 1, 2, \dots, n).$$

Поэтому, в силу (2.304), все символы Кристоффеля первого рода также равны нулю в точке O , и из (2.304) и (2.503) вытекает, что

$$\left(\frac{\partial g'_{\mu\nu}}{\partial y^\sigma} \right)_0 = 0, \quad (\sigma, \mu, \nu = 1, 2, \dots, n).$$

Это завершает доказательство теоремы. Отсюда следствие: в начале римановых координат ковариантные производные сводятся к обычным частным производным.

§ 2.7. Тожество Бьянки и тензор Эйнштейна

С помощью римановых координат может быть установлено одно тождество, называемое *тождеством Бьянки*, которое является фундаментальным в теории относительно-сти. Если O — некоторая точка риманова пространства, в которой введены римановы координаты (y) , то выражение для смешанного тензора Римана — Кристоффеля, подсчитанное в точке O , с учетом (2.501) и результатов предыдущего параграфа, равно

$$R_{\lambda\mu\nu}^\sigma = \frac{\partial}{\partial y^\mu} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial y^\nu} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\},$$

а ковариантная производная этого тензора равна

$$R_{\lambda\mu\nu,\tau}^\sigma = \frac{\partial^2}{\partial y^\mu \partial y^\tau} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} - \frac{\partial^2}{\partial y^\nu \partial y^\tau} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}.$$

Переставляя циклически индексы μ, ν, τ и складывая полученные равенства, мы получаем *тождество Бьянки*

$$R_{\lambda\mu\nu,\tau}^\sigma + R_{\lambda\nu\tau,\mu}^\sigma + R_{\lambda\tau\mu,\nu}^\sigma = 0. \quad (2.701)$$

Хотя это тождество было получено при помощи специальной системы координат, оно является тензорным равенством и поэтому справедливо в любой координатной системе. Предположим поэтому, что (x) — произвольно выбранная система координат в римановом пространстве. Свертывая (2.701) по индексам σ и ν , получаем

$$R_{\lambda\mu, \tau} + R_{\lambda\sigma\tau, \mu} + R_{\lambda\tau\mu, \sigma} = 0.$$

Вспоминая, что $g_{\mu\nu}$ могут рассматриваться как постоянные при ковариантном дифференцировании, имеем

$$R_{\mu, \tau}^{\rho} + (g^{\lambda\rho} R_{\lambda\sigma\tau})_{, \mu} + (g^{\lambda\rho} R_{\lambda\tau\mu})_{, \sigma} = 0.$$

Но в силу свойств симметрии (2.505) тензора Римана — Кристоффеля

$$\begin{aligned} g^{\lambda\rho} R_{\lambda\sigma\tau} &= -g^{\lambda\rho} R_{\lambda\tau\sigma} = -R_{\tau}^{\rho}, \\ g^{\lambda\rho} R_{\lambda\tau\mu} &= g^{\lambda\rho} g^{\sigma\alpha} R_{\alpha\lambda\tau\mu} = g^{\sigma\alpha} g^{\lambda\rho} R_{\lambda\alpha\mu\tau} = g^{\sigma\alpha} R_{\alpha\mu\tau}^{\rho}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$R_{\mu, \tau}^{\rho} - R_{\tau, \mu}^{\rho} + (g^{\sigma\alpha} R_{\alpha\mu\tau}^{\rho})_{, \sigma} = 0,$$

или, свертывая индексы ρ и τ ,

$$R_{\mu, \rho}^{\rho} - R_{\rho, \mu}^{\rho} + (g^{\sigma\alpha} R_{\alpha\mu}^{\rho})_{, \sigma} = 0.$$

Меняя в последнем члене индекс суммирования σ на ρ , перепишем последнее равенство так

$$2R_{\mu, \rho}^{\rho} - R_{\rho, \mu}^{\rho} = 0. \quad (2.702)$$

Но если 2Λ — произвольная постоянная, то

$$R_{\rho, \mu}^{\rho} = \frac{\partial R_{\rho}^{\rho}}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial (R_{\rho}^{\rho} - 2\Lambda)}{\partial x^{\mu}} = \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \{ \delta_{\mu}^{\sigma} (R_{\rho}^{\rho} - 2\Lambda) \}$$

и, следовательно, (2.702) может быть записано в следующем окончательном виде:

$$\left\{ R_{\mu}^{\sigma} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\sigma} (R_{\rho}^{\rho} - 2\Lambda) \right\}_{, \sigma} = 0. \quad (2.703)$$

Это равенство утверждает, что *векторная дивергенция тензора Эйнштейна* $R_{\mu}^{\sigma} - \frac{1}{2} \delta_{\mu}^{\sigma} (R_{\rho}^{\rho} - 2\Lambda)$ *тождественно равна*

нулю — результат фундаментальной важности в приложениях тензорного исчисления к теории относительности. Поднимая или опуская индексы, мы можем привести тензор Эйнштейна к одной из следующих трех форм:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{ковариантной} & R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R_p^p - 2\Lambda), \\ \text{смешанной} & R_v^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_v^{\mu} (R_p^p - 2\Lambda), \\ \text{контравариантной} & R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R_p^p - 2\Lambda), \end{array} \right\} \quad (2.704)$$

а так как тензор Риччи $R_{\mu\nu}$ и метрический тензор $g_{\mu\nu}$ симметричны, тензор Эйнштейна также симметричен.

Исторически постоянная Λ была введена Эйнштейном при решении частной задачи о структуре вселенной, которая будет описана в § 9.7 (а). По этой причине ее называют *космологической постоянной*; однако это „космологическое“ наименование играет второстепенную роль, поскольку, как было показано выше, Λ входит в теорию как результат двух свертываний тождества Бьянки, который определяет тензор Эйнштейна через его ковариантную производную в (2.703). Космологическая постоянная является, таким образом, по существу постоянной интегрирования, которой, подобно другим постоянным интегрирования, не может быть а priori приписано какое-либо частное значение. Мы вернемся к этой точке зрения в § 9.5.

§ 2.8. Тензорное исчисление в теории относительности

Римановы пространства, применяемые в теории относительности, имеют четыре измерения, и поэтому каждая точка в этих пространствах характеризуется четырьмя действительными координатами (x^4, x^1, x^2, x^3). Метрики этих римановых пространств будут

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4), \quad (2.801)$$

и рассматриваемые пространства ограничиваются случаем пространств, которые обладают следующим свойством. Если

в некоторой точке введены локальные декартовы координаты, так что метрика приобретает вид

$$ds^2 = \sum_{\lambda=1}^4 \varepsilon_{\lambda} (dX^{\lambda})^2,$$

то одно из четырех ε_{λ} имеет противоположный знак по сравнению с остальными тремя. Подкласс таких римановых пространств, метрики которых ортогональны, играет важную роль в теории относительности; в них

$$ds^2 = \gamma_{44} (dx^4)^2 - \gamma_{11} (dx^1)^2 - \gamma_{22} (dx^2)^2 - \gamma_{33} (dx^3)^2, \quad (2.802)$$

где γ_{44} , γ_{11} , γ_{22} , γ_{33} — положительные функции четырех координат. Отличные от нуля компоненты метрического тензора

$$g_{44} = \gamma_{44}, \quad g_{11} = -\gamma_{11}, \quad g_{22} = -\gamma_{22}, \quad g_{33} = -\gamma_{33}. \quad (2.803)$$

Теперь удобно ввести соглашение, что *латинский* индекс может принимать только значения 1, 2, 3, тогда как *греческий* индекс — все четыре значения 1, 2, 3, 4. Индексы *lmn* будут использоваться для некоторой циклической перестановки чисел 123. Определитель, составленный из метрических коэффициентов, есть

$$g = g_{44}g_{11}g_{22}g_{33} = -\gamma_{44}\gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} \quad (2.804)$$

и, следовательно, имеет отрицательное значение. Это неудобно в практических применениях. Однако эта трудность может быть обойдена, если заметить, что во всех случаях, когда g входит в некоторую формулу, которая должна быть подробно сосчитана; присутствие g обусловлено в конечном счете использованием формулы (2.407). Примеры могут быть найдены в формулах (2.408), (2.409) или (2.507). Но формула (2.407) может быть записана в виде

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \lambda\nu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x^{\nu}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(-g)} \frac{\partial (-g)}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial (\ln \sqrt{-g})}{\partial x^{\nu}},$$

и поэтому $\sqrt{g}$ может быть заменен на $\sqrt{-g}$ в упомянутых формулах.

Контравариантные компоненты метрического тензора в случае метрики (2.802), суть, с учетом (2.210) и (2.803), (2.804),

$$g^{44} = \frac{1}{g_{44}} = \frac{1}{\gamma_{44}}, \quad g^{il} = \frac{1}{g_{ii}} = -\frac{1}{\gamma_{ii}}, \quad (2.805)$$

($l = 1, 2, 3$),

тогда как отличные от нуля символы Кристоффеля ($\lambda \neq \mu$)

$$\left. \begin{aligned} (\lambda\mu, \lambda) &= -(\lambda\lambda, \mu) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial x^\mu}, \\ (\lambda\lambda, \lambda) &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\lambda\lambda}}{\partial x^\lambda}, \quad \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu\mu \end{matrix} \right\} = -\frac{1}{2} \frac{1}{g_{\lambda\lambda}} \frac{\partial g_{\mu\mu}}{\partial x^\lambda}, \\ \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{2} \frac{\partial (\ln g_{\lambda\lambda})}{\partial x^\mu}, \quad \left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \lambda\lambda \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\ln g_{\lambda\lambda})}{\partial x^\lambda}; \end{aligned} \right\} \quad (2.806)$$

причем условие суммирования не имеет силы. Окончательные уравнения (2.303) геодезической линии приобретают вид

$$\frac{d}{ds} \left(g_{\lambda\lambda} \frac{dx^\lambda}{ds} \right) - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^4 \frac{\partial g_{\nu\nu}}{\partial x^\lambda} \left(\frac{dx^\nu}{ds} \right)^2 = 0 \quad (2.807)$$

$$(\lambda = 1, 2, 3, 4)$$

с аналогичной формой для уравнений нулевой геодезической линии (2.309) и интегралов (2.306) и (2.307), которые теперь записываются соответственно так:

$$\sum_{\nu=1}^4 g_{\nu\nu} \left(\frac{dx^\nu}{ds} \right)^2 = 1, \quad (2.808)$$

$$\sum_{\nu=1}^4 g_{\nu\nu} \left(\frac{dx^\nu}{d\mu} \right)^2 = 0. \quad (2.809)$$

Ньютоновская механика и специальная теория относительности

§ 3.1. Ньютоновская механика частицы

Чтобы яснее понять общую теорию относительности, необходимо знать кое-что о двух теориях, которые ей предшествовали, — механике Ньютона и специальной теории относительности. Мы не будем стремиться дать исчерпывающее изложение этих теорий, а лишь обратим внимание читателя на некоторые важные моменты.

Общеизвестно, что положение и движение одного тела не могут быть описаны или обнаружены без ссылки на какое-то другое тело. Гений Ньютона преодолел это осложнение введением в систему механики двух постулатов, лежащих в основе трех ньютоновских законов движения. Первый постулат утверждает, что существует универсальное абсолютное время, посредством которого может быть датировано любое наблюдаемое событие. Второй постулат гласит, что имеется некоторое абсолютное трехмерное евклидово пространство, в котором в любой момент времени может быть единственным образом локализовано любое тело. Метрика этого пространства, выраженная через прямоугольные декартовы координаты, имеет форму (2.202). Эту формулу более удобно переписать, используя обозначения (X_1, X_2, X_3) для трех декартовых координат в виде

$$ds^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2. \quad (3.101)$$

Однако теория Ньютона не содержит какого-либо правила, с помощью которого могли бы быть опознаны абсолютное время и абсолютная система координат. На практике абсолютное время отождествляется с временем, измеряемым по вращению Земли, и это время снимается с показаний часов, хранящихся в астрономических обсерваториях. Однако такое определение является прагматическим и не является необходимым с логической точки зрения: оправданием такого

отождествления является то, что предсказания, которые благодаря этому могут быть сделаны, находятся в согласии с наблюдениями. Кроме этой трудности, возникает также вопрос, как определить, что два события, относящиеся к двум далеко отстоящим в пространстве точкам, произошли одновременно.

Предположим, что в одном месте земной поверхности A произошло некоторое событие, которое, как утверждается, одновременно с другим событием, происшедшим в некоторой удаленной точке B Земли. Одним способом определения того, что два события являются одновременными, могло бы быть перенесение часов из точки A в точку B и сравнение показаний этих часов с показанием часов, расположенных в точке B . Однако подобная процедура предполагает, что перенесение часов из точки A никак не влияет на ритм их хода. С другой стороны, можно было бы использовать радиосигналы точного времени; но это предполагает в свою очередь, что известны законы распространения электромагнитных волн. В любом случае установление одновременности двух событий, столь удаленных друг от друга в пространстве, что один наблюдатель не в состоянии экспериментировать с ними одновременно, приводит к разработке некоторой специальной процедуры и к совершению некоторых расчетов. И далеко не самоочевидно, что факт одновременности, установленный с помощью одной процедуры и посредством соответствующих этой процедуре вычислений, будет совпадать с фактом одновременности, установленным посредством другой процедуры и других расчетов.

Процесс опознания абсолютного пространства еще труднее, даже если задача сводится к разысканию некоторой фундаментальной декартовой системы координат, которая, так сказать, „стоит на якоре“ в этом пространстве. Расположено ли начало такой координатной системы на Земле, на Солнце, на так называемых неподвижных звездах или еще где-либо? На практике никаких трудностей нет: гордиев узел разрубается посредством утверждения, что некоторая частная координатная система является фундаментальной, и эта система используется до тех пор, пока не обнаруживаются противоречия с измерениями; тогда на место прежней фундаментальной системы приходит другая система координат. Так, в технических лабораторных экспериментах коор-

динатная система с началом в некоторой точке земной поверхности может гарантировать полное согласие с наблюдениями. Но если эта система используется в метеорологии или в баллистике, то возникают противоречия с наблюдениями, которые, однако, могут быть преодолены, если отождествить фундаментальную систему с системой координат, начало которой расположено в центре Земли. По отношению к этой новой системе исходная уже не может рассматриваться как „стоящая на якоре“ в абсолютном евклидовом пространстве, а должна рассматриваться как в некотором смысле „плывущая“ относительно него.

Простейшим типом тела, которое рассматривается в ньютоновской механике, является *частица* — тело, не имеющее протяженности в пространстве, но обладающее некоторым скалярным атрибутом, называемым „массой“¹⁾. Частицу можно рассматривать как занимающую в любой момент времени некоторую математическую точку. Однако понятие частицы является условным, относительным: нет верхнего предела для размера тела, которое можно рассматривать как частицу. Например, в элементарной теории движения планет Солнце, Земля и другие планеты солнечной системы являются „частицами“; в элементарной баллистике Земля рассматривается как тело бесконечной протяженности в пространстве, а „частицей“ в этом случае является, например, ружейная пуля. Таким образом, невозможно дать абсолютного определения частицы; конкретный смысл этого понятия меняется в зависимости от рассматриваемого явления.

Первый закон движения Ньютона может быть математически сформулирован как утверждение, что уравнения движения свободной частицы, выраженные через элементы абсолютной декартовой системы координат, имеют вид

$$\frac{d^2 X_l}{dT^2} = 0, \quad (l = 1, 2, 3), \quad (3.102)$$

где (X_1, X_2, X_3) — координаты рассматриваемой частицы в момент T абсолютного времени. Эти уравнения определяют движение частицы и не зависят от ее массы, формы, температуры и других физических атрибутов. Второй закон

¹⁾ Для понятия „частицы“ обычно используется термин „материальная точка“. — *Прим. ред.*

движения можно математически сформулировать следующим образом:

$$m \frac{d^2 X_i}{dT^2} = F_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.103)$$

где m — масса частицы, а (F_1, F_2, F_3) — сила, действующая на нее. Третий закон движения проще всего выразить словами. Он утверждает, что если имеются два взаимодействующих тела, то силы, с которыми они действуют друг на друга, равны по величине и противоположно направлены. Следует отметить, что ускорение частицы при заданной силе обратно пропорционально ее массе, как это легко видеть из формулы (3.103).

С помощью уравнений (3.102) и (3.103) можно показать, что имеется не одна, а бесконечное число абсолютных декартовых координатных систем. Так как мы не смогли дать какое-либо определение абсолютной системы, предположим, что абсолютной системой является система координат, в которой первый и второй законы движения частицы выражаются посредством уравнений (3.102) и (3.103). Рассмотрим теперь преобразование от координатной системы (X) к системе (X') , заданное равенствами

$$T' = T, \quad X'_1 = X_1 - uT, \quad X'_2 = X_2, \quad X'_3 = X_3, \quad (3.104)$$

где u — постоянная. Очевидно координатные оси этих систем параллельны; начала этих систем совпадают при $T = 0$, и начало одной из них движется с постоянной скоростью вдоль общей оси этих систем. В механике Ньютона предполагается, что компоненты силы зависят только от ориентации координатных осей и не зависят от того, движется ли эта система относительно некоторой другой системы. Поэтому преобразованные уравнения (3.102) и (3.103) имеют вид

$$\frac{d^2 X'_i}{(dT')^2} = 0, \quad m \frac{d^2 X'_i}{(dT')^2} = F_i; \quad (3.105)$$

их математическая форма, таким образом, не меняется при переходе (3.104) от одной системы к другой. Следовательно, обе эти системы можно рассматривать как „фундаментальные“, или, давая им физическое наименование, как *ньютоновские инерциальные системы*. Эта эквивалентность ньютоновских инерциальных систем, равномерно движущихся друг относительно друга, только затуманивает понятие о том,

что системы некоторым образом „стоят на якоре“ в абсолютном евклидовом пространстве ньютоновской теории.

Скорость движущейся частицы равна dX_i/dT ($i = 1, 2, 3$) в одной из двух инерциальных систем (3.104), но равна

$$\frac{dX'_1}{dT} = \frac{dX_1}{dT} - u, \quad \frac{dX'_2}{dT} = \frac{dX_2}{dT}, \quad \frac{dX'_3}{dT} = \frac{dX_3}{dT} \quad (3.106)$$

в другой системе. Таким образом, хотя ускорение частицы имеет одно и то же значение в этих двух системах, равенство их скоростей, за одним исключением, не имеет места. Этот исключительный случай имеет место, когда величина скорости частицы бесконечно велика в одной из инерциальных систем (предполагая, естественно, что u конечно). Обозначая через $\mathcal{S}$ скорость бесконечной величины, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dX'_i}{dT} \right)^2 &= \left(\frac{dX_1}{dT} - u \right)^2 + \\ &+ \left(\frac{dX_2}{dT} \right)^2 + \left(\frac{dX_3}{dT} \right)^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{dX_i}{dT} \right)^2, \end{aligned}$$

так как u пренебрежимо мало по сравнению по крайней мере с одной из компонент скорости dX_i/dT . Таким образом в ньютоновской механике бесконечно большая скорость $\mathcal{S}$ является абсолютной в том смысле, что частица обладает ею во всех инерциальных системах, и преобразование от одной системы координат к другой не меняет величину этой скорости.

§ 3.2. Ньютоновская механика протяженных тел

Читатель, вероятно, знает, что ньютоновская механика может быть обобщена на тела, уже не являющиеся точечными массами, а имеющие конечные размеры. Один из способов такого рода обобщения состоит в том, что вводится понятие о так называемом твердом теле, под которым понимается совокупность частиц, взаимные расстояния которых друг от друга неизменны. Это понятие является вполне определенным вследствие предполагаемого существования абсолютного пространства и абсолютного времени. В любой данный момент абсолютного времени каждая из составляющих

тело частиц может быть однозначно описана как занимающая некоторую точку абсолютного пространства, и понятие о неизменном взаимном расстоянии частиц является ясным и осмысленным. Для полного описания движения твердого тела необходимы понятия моментов инерции, центра масс, углового момента и т. п. — все понятия, связанные с вращением. Можно было бы думать, что когда доходит дело до модификации ньютоновской теории в специальной и общей теории относительности, то эти модификации будут содержать некоторые аналогии ньютоновской динамики твердого тела, так как они обязательно будут включать динамику частицы. Однако это не имеет места: путь развития теории начинается с другого аспекта теории Ньютона — с гидродинамики сплошной среды.

В общей теории относительности непрерывной средой, которая играет важнейшую роль, является идеальная жидкость, ньютоновскую динамику которой мы сейчас кратко опишем. Для наших целей жидкость не следует представлять себе состоящей из частиц, а следует рассматривать как непрерывное распределение вещества, обладающего плотностью (т. е. массой в единице объема). Если поместить в жидкость некоторую поверхность, то жидкость с одной стороны от этой поверхности будет действовать с определенной силой на жидкость, находящуюся по другую сторону от поверхности, причем эта сила нормальна к поверхности. Можно показать, что в каждой точке жидкости эта сила, или напряжение, не зависит от направления. Эта сила называется *изотропным давлением жидкости*. Рассмотрим теперь идеальную жидкость с плотностью ρ и давлением p , движение которой должно быть описано в ньютоновской инерциальной системе с декартовыми координатами X_i ($i = 1, 2, 3$). Предполагается, что в точке (X_1, X_2, X_3) жидкость имеет скорость, компоненты которой равны (U_1, U_2, U_3) , причем последние три величины являются функциями трех координат X_i и времени T . Рассматривая закон сохранения импульса вещества в бесконечно малом объеме абсолютного пространства, можно показать, что уравнения движения жидкости имеют вид

$$\frac{\partial U_i}{\partial T} + \sum_{j=1}^3 U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial X_i} + F_i, \quad (i = 1, 2, 3), \quad (3.201)$$

где три величины $-\frac{\partial p}{\partial X_i}$ — компоненты той части силы, которая определяется градиентом давления, а три величины F_i — компоненты силы, приходящейся на единицу массы и обусловленной другими причинами.

В дополнение к уравнениям движения в ньютоновской гидродинамике имеется одно добавочное уравнение, которое выражает закон сохранения массы внутри единичного объема. Оно называется уравнением непрерывности и имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial (\rho U_j)}{\partial X_j} = 0. \quad (3.202)$$

Умножая уравнения (3.201) на ρ и используя обозначения § 2.8, определение (2.112) для δ_{ij}^λ и то, что при использовании в евклидовом пространстве декартовых координат исчезает различие между ковариантными и контравариантными составляющими, мы можем переписать эти уравнения в виде

$$\frac{\partial (\rho U_i)}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_j} (\rho U_i U_j + \delta_{ij} p) - U \left[\frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial (\rho U_j)}{\partial X_j} \right] = \rho F_i.$$

Следовательно, в силу (3.202), эквивалентная форма уравнений движения имеет вид

$$\frac{\partial (\rho U_i)}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_j} (\rho U_i U_j + \delta_{ij} p) = \rho F_i, \quad (i=1, 2, 3). \quad (3.203)$$

Таким образом, движение идеальной жидкости в ньютоновской гидродинамике описывается четырьмя уравнениями (3.202) и (3.203), которые содержат частные производные от десяти функций ρ , ρU_i и $(\rho U_i U_j + \delta_{ij} p)$ в левых частях и нуль или компоненты внешней силы F_i в правых частях. Важной чертой этих уравнений является то, что если даже сила F_i задана как функция координат, имеется только четыре уравнения для пяти неизвестных (ρ , p и трех U_i). Следовательно, эти уравнения сами по себе являются неопределенными, и необходимо ввести некоторое дополнительное соотношение между плотностью, давлением и (или) скоростью жидкости. Это дополнительное соотношение может быть получено из закона сохранения энергии, одна из форм которого будет рассмотрена ниже [1].

Неопределенность гидродинамических уравнений может быть легко преодолена в случае, когда непрерывная среда является жидкостью в собственном смысле этого слова, так как жидкость является фактически несжимаемой. В этом случае применимо условие $\rho = \text{const}$; оно является основой гидродинамики в узком смысле этого слова, которая интенсивно развивалась в XIX в. и начале XX в. В последующее время, однако, внимание было обращено к другому аспекту гидродинамики — к так называемой газовой динамике, в которой рассматриваются газы, являющиеся сжимаемыми непрерывными средами. Идеальный газ — это непрерывная среда, уравнение состояния которой (связывающее ее давление, плотность и температуру) может быть записано в виде

$$p = \mathcal{R} \rho \mathcal{T}, \quad (3.204)$$

где $\mathcal{T}$ — абсолютная температура, а $\mathcal{R} (= 8,314 \cdot 10^7 \text{ эрг/град})$ — газовая постоянная. Поскольку вводится температура, совокупность уравнений (3.202) — (3.204) все еще остается неопределенной, однако теперь можно обратиться за дополнительным уравнением к термодинамике. Теплота — одна из форм энергии. Количество энергии, требуемое для повышения температуры 1 г воды от $14,5^\circ$ до $15,5^\circ \text{C}$ при давлении 760 мм рт. ст., эквивалентно количеству механической энергии, равному $\mathcal{J} = 4,185 \cdot 10^7 \text{ эрг/кал}$. В случае газа для нагревания единицы массы вещества на один градус требуются различные количества тепла в зависимости от того, находится ли масса газа внутри жестких границ или может свободно расширяться, преодолевая остающееся неизменным давление окружающего газа. Эти условия определяют понятия удельной теплоемкости при постоянном объеме (c_v) и при постоянном давлении (c_p), отношение которых $\gamma = c_p/c_v$. В руководствах по термодинамике показывается, что если dQ — количество тепла, сообщаемое удельному объему газа, а соответствующее изменение температуры и объема равны $d\mathcal{T}$ и $d\left(\frac{1}{\rho}\right)$, то

$$\mathcal{J} dQ = \mathcal{J} c_v d\mathcal{T} + p d\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

или, если рассматриваемая единица массы находится в движении,

$$\mathcal{F} \frac{dQ}{dT} = \mathcal{F} c_v \frac{d\mathcal{T}}{dT} + p \frac{d}{dT} \left(\frac{1}{\rho} \right), \quad (3.205)$$

где d/dT — „сопровождающий движение“ оператор¹⁾

$$\frac{d}{dT} = \frac{\partial}{\partial T} + U_j \frac{\partial}{\partial X_j}. \quad (3.206)$$

Плотность ρ можно исключить из (3.205) с помощью (3.204). Используя также известное соотношение

$$\mathcal{R} = \mathcal{F} c_v (\gamma - 1), \quad (3.207)$$

получаем следующее выражение для (3.205)

$$\frac{1}{c_v \mathcal{F}} \frac{dQ}{dT} = \frac{d}{dT} (\ln p - \gamma \ln \rho).$$

В термодинамике вводится величина, называемая *энтропией*, которая для рассматриваемой нами единичной массы определяется как $dQ/\mathcal{T}$. Для наших целей удобнее предположить, что удельная теплоемкость при постоянном объеме является постоянной для данного газа, и определить энтропию как

$$dS = \frac{dQ}{c_v \mathcal{T}}.$$

Таким образом, окончательно первый закон термодинамики можно записать в виде

$$\frac{dS}{dT} = \frac{d}{dT} (\ln p - \gamma \ln \rho), \quad (3.208)$$

или, интегрируя вдоль движения единицы массы газа,

$$S = \ln \eta + \ln p - \gamma \ln \rho, \quad (3.209)$$

где η — постоянная, которая может меняться от одной единицы массы к другой для некоторого распределения газа. Если же, однако, энтропия каждой единицы массы постоянна и имеет одно и то же значение, то

$$p = \eta \rho^\gamma, \quad (3.210)$$

где η в данном случае абсолютная постоянная.

¹⁾ Оператор d/dT обычно называют *субстанциональной производной* по времени в отличие от *локальной производной* по времени $\partial/\partial T$. — *Прим. ред.*

Неопределенность пяти уравнений (3.202) — (3.204) для шести неизвестных (ρ , p , $\mathcal{T}$ и трех U_i) может быть теперь легко преодолена наложением некоторого условия на энтропию S . *Адиабатическим* потоком называется такой поток, каждая единица массы которого сохраняет свою энтропию (однако различные единичные массы не обязаны иметь одну и ту же энтропию). В силу (3.208), это условие имеет вид

$$\frac{d}{dT} (\ln p - \gamma \ln \rho) = 0. \quad (3.211)$$

Если все единичные массы имеют одну и ту же неизменную энтропию, то давление и плотность связаны *изэнтропическим* уравнением (3.210). В газодинамике часто это уравнение упоминают (несколько небрежно) под названием „уравнения состояния“ данного газа, однако такая терминология неправильна; уравнением состояния является соотношение (3.204), тогда как уравнения (3.211) и (3.210) являются просто частными возможностями, возникающими при определенных предположениях о термодинамическом поведении газа.

§ 3.3. Ньютоновская теория тяготения

Явление тяготения проявляется в первую очередь в том, что все отпущенные вблизи поверхности Земли тела падают на Землю с одним и тем же постоянным ускорением g . Говоря это, мы конечно отвлекаемся от второстепенных черт этого движения (таких, как влияние трения воздуха). Ускорение оказывается независимым от всех физических характеристик движущегося тела: от его формы, массы, температуры, возможного внутреннего строения и т. д. В этом отношении рассматриваемое движение тела аналогично движению тела, подчиняющегося первому закону движения Ньютона, где также не играют роли никакие физические атрибуты тела, за исключением того, что скорость тела в этом случае уже не постоянна. Присутствие в ньютоновской теории тяготения ускорения g рассматривается как свидетельство действия некоторой силы (в смысле второго закона Ньютона), которая называется силой тяготения. Эта сила, однако, имеет весьма своеобразный характер по сравнению с другими силами, встречающимися в природе,

например с силой, вызываемой растянутой пружиной. Данная пружина, натянутая в одной и той же степени и могущая ускорять тела различной массы, которые могут свободно двигаться, будет сообщать разные ускорения различным телам. В отличие от этой упругой силы сила тяжести имеет самосогласованный характер: она точно „знает“ как действовать, чтобы сообщить одно и то же ускорение телам различной массы. Это примечательное явление обычно выражают следующим образом, вскрывающим фундаментальный экспериментальный факт: *инертная и гравитационная массы тела равны*. Последнее утверждение можно пояснить следующим образом: если m — масса тела, то сила тяготения, действующая на это тело, по закону Ньютона, равна $W = mg$. Сила тяготения известна, конечно, как вес тела. Но предположим теперь, что все ускорения выражены в долях ускорения силы тяжести g . Тогда в (3.103) мы можем написать

$$W a_i = F_i, \quad (i = 1, 2, 3),$$

где a_i — компоненты ускорения, деленные на g , т. е.

$$a_i = \frac{d^2 X_i}{dt^2} / g.$$

Таким образом, в этой форме записи второго закона Ньютона вес, или гравитационная масса, тела играет ту же роль, что и инертная масса в исходной форме уравнения. С другой стороны, предположим, что выбрана некоторая стандартная масса m_0 , гравитационная масса которой равна $W_0 = m_0 g$. Поэтому

$$\frac{W}{W_0} = \frac{m}{m_0},$$

так как g есть одинаковое ускорение, сообщаемое массам m и m_0 силой тяжести. Таким образом, если m_0 выбрано за единицу инертной массы, а W_0 — за единицу гравитационной, то в этих единицах $W = m$ или, другими словами, инертная масса равна гравитационной. Основное значение, однако, имеет наблюдаемая одинаковость значения g для ускорения, вызываемого силой тяжести, что мы выше называли „самосогласованным характером“ этой своеобразной силы.

В ньютоновской теории тяготения это свойство силы тяготения принимается во внимание при обосновании предпо-

жения о том, что сила притяжения, действующая между двумя частицами, пропорциональна произведению инертных масс рассматриваемых частиц. Если m и M — массы частиц, одна из которых находится в (x_1, x_2, x_3) , а другая — в (X_1, X_2, X_3) в один и тот же момент абсолютного времени, то уравнения движения частицы m имеют вид

$$m \frac{d^2 x_l}{dt^2} = - \frac{GmM}{r^2} \frac{(x_l - X_l)}{r}, \quad (l = 1, 2, 3), \quad (3.301)$$

где r — расстояние между частицами в абсолютном пространстве, квадрат которого дается соотношением

$$r^2 = \sum_{j=1}^3 (x_j - X_j)^2, \quad (3.302)$$

а G — постоянная тяготения, численное значение которой в единицах CGS равно

$$G = 6,665 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{сек}^2. \quad (3.303)$$

Так как масса m не входит в уравнение движения (3.301), уравнения движения частиц всех масс будут иметь одну и ту же математическую форму, если предположить, что M фиксировано, другими словами, движения этих частиц будут существенно независимыми от их масс. Другая важная черта уравнений (3.301) заключается в том, что математическая форма этих уравнений не меняется при переходе от одной ньютоновской инерциальной системы координат к другой. В самом деле, в силу (3.104), компоненты ускорения при такого рода преобразованиях сохраняют свою форму; компоненты силы зависят от разностей $(x_j - X_j)$, которые также сохраняют свою форму из-за взаимного уничтожения членов, содержащих uT . Эти результаты, таким образом, определяются постулатами о существовании абсолютного пространства, в котором частица может быть единственным образом локализована, и абсолютного времени, в котором может быть однозначно датировано состояние частицы.

Если имеется непрерывное распределение тяготеющего вещества, плотность которого равна ρ , то соответствующий гравитационный потенциал V связан с ρ посредством уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 V = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 V}{\partial X_j^2} = -4\pi G\rho. \quad (3.304)$$

Таким образом, сила тяготения, которая будет действовать со стороны распределенного вещества на частицу единичной массы, собственным притяжением которой можно пренебречь, равна

$$F_l = \frac{\partial V}{\partial X_l} \quad (l = 1, 2, 3). \quad (3.305)$$

Эта сила является, следовательно, гравитационным самопритяжением распределенного вещества, т. е. силой тяготения, приходящейся на единицу массы, с которой одна часть вещества воздействует на другую. В дальнейшем более удобно видоизменить определение потенциала, который в уравнении (3.304) имеет размерность (длина)²/(время)², и заменить V функцией ψ с размерностью масса/длина. Соотношение между V и ψ имеет вид

$$V = 4\pi G\psi, \quad (3.306)$$

и уравнения (3.304) и (3.305) превращаются соответственно в

$$\nabla^2 \psi = -\rho, \quad (3.307)$$

$$F_l = 4\pi G \frac{\partial \psi}{\partial X_l} \quad (l = 1, 2, 3). \quad (3.308)$$

Все уравнения § 3.1—3.3 были записаны в декартовых координатах, однако, как хорошо известно, в ньютоновской механике это не является необходимым. Можно также использовать криволинейные координаты, преобразование к которым от декартовых имеет вид

$$X_i = f_i(Y_1, Y_2, Y_3) \quad (i = 1, 2, 3),$$

где f_i — некоторые функции координат (Y): Сферические и цилиндрические координаты, обобщенные координаты в уравнениях Лагранжа и различные системы координат, применяемые в гидродинамике и теории потенциала, являются хорошими иллюстрациями, которые могут быть найдены в обычных руководствах по классической механике. Заслуживает упоминания, что если в уравнения преобразования входит время, то само время преобразуется путем тождественного преобразования, так что мы имеем

$$T = T',$$

$$X_i = f_i(Y_1, Y_2, Y_3, T') \quad (i = 1, 2, 3)$$

для наиболее общего преобразования пространства и времени в механике Ньютона.

§ 3.4. Специальная теория относительности [2]

С точки зрения механики в собственном смысле этого слова (в отличие от электромагнитной теории) решающее отличие специальной теории относительности от ньютоновской механики состоит в новом определении инерциальной системы координат, в котором бесконечная абсолютная скорость $\mathcal{S}$ заменяется конечной абсолютной скоростью c . Целесообразность такого изменения будет объяснена в следующем параграфе, где дается физическое истолкование скорости c . Здесь же мы опишем математическую сторону этой модификации.

Очевидные и громадные успехи ньютоновской механики при интерпретации и сопоставлении результатов наблюдений приводят нас к выводу, что если эта теория должна быть видоизменена, то она должна быть видоизменена так мало, как только возможно. По этой причине мы сохраним гипотезу о лежащем в основе трехмерном евклидовом пространстве, как сохраним и первый закон движения Ньютона. Первое видоизменение в ньютоновской схеме, которое будет сделано, является очевидным, а именно для полного описания любого происшествия или случая необходимо констатировать не только *где*, но и *когда* это происшествие имело место. Таким образом происшествие, именуемое физически *событием*, требует для своего полного описания четырех чисел, три из которых являются координатами, фиксирующими положение события в пространстве, тогда как четвертое число, которое может быть названо *временной координатой*, фиксирует это событие во времени. В ньютоновской механике эти очевидные характеристики события маскируются предположением о лежащем в основе абсолютном времени, причем предполагается, что два исследователя, наблюдающие некоторое событие, в состоянии фиксировать его абсолютное время с помощью той или иной процедуры.

В специальной теории относительности инерциальные системы могут быть определены следующим образом. Поскольку пространство является евклидовым, могут быть использованы декартовы координаты. Данное событие E может быть описано как происходящее в момент времени x^4 в положении (x^1, x^2, x^3) по отношению к некоторой одной инерциальной системе S . Пусть теперь S' — вторая инерциальная система,

движущаяся с постоянной скоростью u относительно системы S . Предположим, что то же самое событие E описывается в системе S' посредством его декартовых координат (x'^1, x'^2, x'^3) и времени x'^4 . В противоположность ньютоновской теории не предполагается а priori, что $x'^4 \equiv x^4$.

Рассмотрим теперь преобразование, известное под названием *преобразования Лоренца*:

$$\begin{aligned}x'^4 &= \beta \left(x^4 - \frac{u}{c^2} x^1 \right), \\x'^1 &= \beta (x^1 - u x^4), \\x'^2 &= x^2, \\x'^3 &= x^3, \\ \beta &= \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2},\end{aligned}\tag{3.401}$$

где u — некоторая постоянная, имеющая размерность скорости, а c — (конечная) абсолютная скорость. Это преобразование обладает следующими свойствами. Во-первых, если c велико по сравнению с u и ее можно считать равной $\mathcal{S}$, это преобразование совпадает с преобразованием (3.104), а время x'^4 совпадает со временем x^4 . Во-вторых, направления осей x^2 и x^3 совпадают с направлениями осей x'^2 и x'^3 , а начала координат лежат на общей оси x^1 и x'^1 . Очевидно, начала координат совпадают в момент времени, общий для двух систем ($x'^4 = x^4 = 0$). В-третьих, рассматриваемое преобразование является линейным преобразованием между пространственно-временными координатами этих двух систем. Поскольку проинтегрированные уравнения движения частицы, движущейся в согласии с первым законом движения Ньютона, представляют собой линейные уравнения, связывающие (x^1, x^2, x^3) с x^4 , эти уравнения останутся линейными и при введении (x'^1, x'^2, x'^3) и x'^4 . Наконец, компоненты скорости движущейся частицы равны

$$q_i = \frac{dx^i}{dx^4} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.402}$$

и при преобразовании (3.401) переходят в

$$\left. \begin{aligned} q'_1 &= \frac{dx'^1}{dx'^4} = \frac{q_1 - u}{1 - uq_1/c^2}, \\ q'_2 &= \frac{dx'^2}{dx'^4} = \frac{q_2}{\beta(1 - uq_1/c^2)}, \\ q'_3 &= \frac{dx'^3}{dx'^4} = \frac{q_3}{\beta(1 - uq_1/c^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.403)$$

Таким образом, частица, покоящаяся относительно координатной системы (x) [$q_1 = q_2 = q_3 = 0$] имеет скорость $-u$ относительно системы (x') , тогда как покоящаяся относительно второй системы точка имеет скорость $+u$ относительно первой системы. Кроме того, скорость c является абсолютной. В самом деле, если

$$q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 = c^2,$$

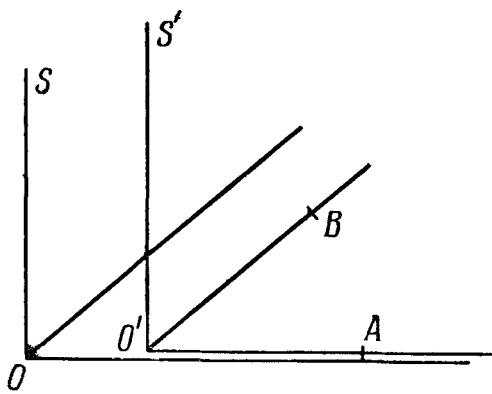
то из (3.403) следует

$$\begin{aligned} q'^2_1 + q'^2_2 + q'^2_3 &= \\ &= \left\{ (q_1 - u)^2 + \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)(q_2^2 + q_3^2) \right\} \left(1 - \frac{uq_1}{c^2}\right)^{-2} = \\ &= \left\{ c^2 - 2q_1u + u^2 - \frac{u^2}{c^2}(c^2 - q_1^2) \right\} \left(1 - \frac{uq_1}{c^2}\right)^{-2} = c^2. \end{aligned} \quad (3.404)$$

Комбинации временной и пространственных координат (x^4, x^1, x^2, x^3) и (x'^4, x'^1, x'^2, x'^3) , связанные преобразованием Лоренца (3.401), называются в специальной теории относительности инерциальными системами. Относительная скорость одной из систем по отношению к другой имеет постоянное значение u . Первый закон движения Ньютона имеет одинаковую математическую форму в обеих системах, и имеется конечная абсолютная скорость c , одинаковая для обеих систем. Принцип специальной теории относительности обобщает эти идеи и утверждает, что *все уравнения математической физики не должны менять свою математическую форму при преобразовании координат от одной инерциальной системы к другой*.

§ 3.5. Скорость света

Физическая интерпретация абсолютной скорости c получается при помощи знаменитого эксперимента, впервые проведенного в 1881 г. и с тех пор повторенного много раз, известного под названием опыта Майкельсона-Морли. Идея этого эксперимента такова. Два твердых плеча интерферометра $O'A$ и $O'B$ одинаковой длины расположены под прямым углом друг к другу. В точках A и B расположены зеркала,



Р и с. 1.

перпендикулярные к соответствующим плечам, а в точке O' имеется наполовину посеребренное зеркало, наклоненное под углом 45° к $O'A$. Если вдоль направления $O'A$ послан луч света, то он разделится зеркалом, расположенным в точке O' , на две части, так что одна часть луча будет распространяться к точке A и обратно к точке O' , тогда как другая часть луча — к B и обратно к O' . Возвращающиеся части луча будут соединяться в точке O' и могут наблюдаться при помощи соответствующего устройства, ориентированного вдоль линии $O'B$. Если времена распространения этих двух частей исходного луча не равны в точности друг другу, то воссоединенный луч окажется слегка не в фазе, и будут видны интерференционные полосы. При помощи описанного приспособления Майкельсон и Морли собирались определить скорость движения Земли по ее орбите вокруг Солнца,

равную примерно 30 км/сек , в долях скорости света, равной $3 \cdot 10^5 \text{ км/сек}$.

Майкельсон и Морли оперировали чисто ньютоновскими понятиями и использовали формулу для относительной скорости (3.106). Пусть $O'A$ ориентировано вдоль направления движения Земли в рассматриваемый момент времени, а $O'B$ — под прямым углом к этому направлению, и пусть оси X'_1 и X'_2 направлены соответственно вдоль $O'A$ и $O'B$. Пусть u — орбитальная скорость Земли, и координатная система (X_1, X_2, X_3) с началом в точке O является той системой, относительно которой Земля имеет скорость u , и пусть оси X_1 и X_2 параллельны соответственно $O'A$ и $O'B$. Если скорость света относительно системы (X_1, X_2, X_3) равна C , то из ньютоновской формулы (3.106) следует, что та часть светового луча, которая распространяется вдоль $O'A$, имеет скорость $C - u$ при движении от O' к A , и скорость $C + u$ при движении в противоположную сторону. Поэтому время, необходимое для распространения света от O' к A и обратно к O' , равно $\frac{2l}{C} \left(1 - \frac{u^2}{C^2}\right)$, где l — длина $O'A$ (или $O'B$).

Подобное же вычисление для распространения света от O' к B и обратно к O' дает время, равное $\frac{2l}{C} \sqrt{1 - \frac{u^2}{C^2}}$.

Пренебрегая третьей и более высокими степенями малой величины u/C , мы получаем, что даже в случае идеально сконструированного прибора разность во времени, равная $\frac{l}{C} \frac{u^2}{C^2}$. Таким образом, в воссоединенном луче будут видны интерференционные полосы. Далее, волновая теория света дает нам возможность (методами, которые мы здесь не будем рассматривать) найти по измерениям положений интерференционных полос скорость u в долях C . Экспериментальные методы гарантировали точность определения скорости $6 - 10 \text{ км/сек}$; однако, к изумлению экспериментаторов, скорость орбитального движения Земли в пределах ошибок наблюдений оказалась равной нулю.

Это противоречие между астрономическим и оптическим определениями скорости Земли разрешается в специальной теории относительности отказом от формулы Ньютона для относительной скорости (3.106) и отождествления скорости

света с конечной абсолютной скоростью c , фигурирующей в формулах преобразования Лоренца (3.401). Инерциальные системы S и S' § 3.4 можно определить следующим образом: S — система с началом в точке O , относительно которой Земля имеет скорость 30 км/сек ($=u$), и с осью x^1 , направленной вдоль движения Земли; S' скреплена с Землей, ее ось x'^1 направлена вдоль $O'A$ и совпадает с осью x^1 системы S , причем другие пространственные оси систем S и S' параллельны. С помощью преобразования Лоренца для случая, когда пространственное начало координат системы S' совпадает с O' , можно показать, что промежутки времени, необходимые для прохождения света туда и обратно вдоль $O'A$ и $O'B$, оба равны $2l/c$ по времени x'^4 , которое используется в S' , так что интерференционные полосы отсутствуют. С другой стороны, по времени x^4 , используемому в S , оба промежутка времени равны $2l\beta/c$ и, следовательно, интерференционные полосы опять-таки отсутствуют. Таким образом, если скорость света равна абсолютной скорости c и в S и в S' , то промежутки времени, необходимые для распространения света вдоль $O'A$ и $O'B$, равны друг другу и в S и в S' ; однако эти промежутки времени не должны иметь одинаковые значения в S и S' .

Отождествление c с абсолютной скоростью является частным случаем применения специального принципа относительности, причем свет рассматривается как электромагнитное явление, распространяющееся в виде волн. Можно доказать, что уравнения Максвелла для электромагнитного поля не меняют своей формы при преобразовании Лоренца (3.401); то же относится к волновому уравнению для любой величины F , а именно

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{(\partial x^4)^2} = \frac{\partial^2 F}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2 F}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2 F}{(\partial x^3)^2}.$$

§ 3.6. Пространство-время Минковского

Отождествив конечную абсолютную скорость специальной теории относительности со скоростью света, мы возвращаемся к физическим событиям, которые рассматриваются как нечто, определяемое четырьмя координатами, одна из которых обозначает время. Рассмотрим для определенности

систему S , в которой координаты некоторого события равны (x^4, x^1, x^2, x^3) , и предположим, что все рассматриваемые события изображены в виде точек в четырехмерном римановом пространстве, метрика которого имеет вид¹⁾

$$ds^2 = (dx^4)^2 - \frac{1}{c^2} [(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2]. \quad (3.601)$$

Разрешая преобразования Лоренца относительно нештрихованных координат, получаем

$$\begin{aligned} x^4 &= \beta \left(x'^4 + \frac{ux'^1}{c^2} \right), & x^1 &= \beta (x'^1 + ux'^4), \\ x^2 &= x'^2, & x^3 &= x'^3, \\ \beta &= \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (3.602)$$

Беря дифференциалы от этих равенств и полагая u и c постоянными, получаем следующее выражение для метрики (3.601):

$$ds^2 = (dx'^4)^2 - \frac{1}{c^2} \{ (dx'^1)^2 + (dx'^2)^2 + (dx'^3)^2 \}.$$

Таким образом, математическое выражение метрики не меняется при переходе от координатной системы S к системе S' , и поэтому мы можем рассматривать систему S в качестве типичной системы. Четырехмерное риманово пространство с метрикой (3.601) мы будем называть *пространством-временем Минковского* по имени математика, впервые применившего это пространство, и с тем, чтобы подчеркнуть, что одна из координат есть время, а другие три описывают положение в пространстве. Интервал s в формуле (3.601) имеет размерность времени.

¹⁾ Величина ds является здесь элементом собственного времени $d\tau$. Автор использует координату x^4 для обозначения времени t . Обычно, следуя Минковскому, полагают $x^4 = ict$, после чего преобразования Лоренца превращаются в мнимые вращения и отпадает необходимость различать ковариантные и контравариантные компоненты векторов и тензоров. Под ds обычно понимают бесконечно малый интервал, определяя его соотношением

$$ds = \sqrt{-(dx^i)^2} = c d\tau,$$

что отличается множителем c от величины ds , определяемой из (3.601). — Прим. ред.

Иногда говорят, что специальная теория относительности „уничтожила различие между пространством и временем“, так как в ней события изображаются, или представляются, как точки в четырехмерном пространстве-времени Минковского. Однако можно также отметить, что наше интуитивное ощущение разницы между пространством и временем заботливо сохранено и в этом методе представления. Предположим, что два события (x) и $(x+dx)$ совпадают в пространстве, однако отделены друг от друга во времени в системе S . Это означает, что

$$dx^4 \neq 0, \quad dx^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3);$$

интервал, отделяющий эти два события, в силу (3.601), равен

$$ds = \pm dx^4,$$

и, таким образом, является *действительным числом*. С другой стороны, предположим, что два события одновременны в системе S , но пространственно разделены, так что

$$dx^4 = 0, \quad dx^i \neq 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Если $dl^2 = \sum_{j=1}^3 (dx^j)^2$, то из формулы (3.601) вытекает, что интервал, отделяющий эти два события, равен

$$ds = \pm \left\{ - \frac{\sum_{j=1}^3 (dx^j)^2}{c^2} \right\}^{1/2} = \pm i dl/c,$$

что является *мнимым числом*, так как dl действительно. Таким образом два разделенных во времени события имеют интервал, который является действительным числом, а два события, разделенные в пространстве, имеют интервал, являющийся мнимым числом. В более сложных случаях все четыре разности координат могут быть отличны от нуля: если интервал между двумя событиями оказывается (отличным от нуля) действительным числом, то разделение двух событий называется *временеподобным*, а если мнимым числом, то *пространственноподобным*. Применяя преобразования Лоренца (3.401), легко видеть, что эти свойства пары событий не могут быть изменены при переходе от одной инерциальной системы к другой. Использование действительных и мнимых чисел для значений интервалов, отделяющих различные типы

событий, является таким образом выражением в специальной теории относительности интуитивного человеческого понятия о том, что пространство и время существенно различны. Имеются, однако, пары событий специального типа, а именно события, для которых интервал равен нулю. Для такого рода событий, в силу (3.601), имеем

$$c^2(dx^4)^2 = \sum_{j=1}^3 (dx^j)^2,$$

или, переходя к координатам другой инерциальной системы S' ,

$$c^2(dx'^4)^2 = \sum_{j=1}^3 (dx'^j)^2.$$

Таким образом, свойство интервала быть равным нулю опять-таки не может быть нарушено преобразованием координат.

Относительность понятий одновременности и длины может быть хорошо проиллюстрирована при помощи формул преобразований Лоренца. Рассмотрим два события E_1 и E_2 , координаты которых в системе S равны соответственно $(x_1^4, x_1^1, 0, 0)$ и $(x_2^4, x_2^1, 0, 0)$. Беря разности этих координат и используя (3.401), имеем для не равных нулю разностей координат системы S' следующие выражения:

$$x_2'^4 - x_1'^4 = \beta \left\{ (x_2^4 - x_1^4) - \frac{u}{c^2} (x_2^1 - x_1^1) \right\},$$

$$x_2'^1 - x_1'^1 = \beta \left\{ (x_2^1 - x_1^1) - u (x_2^4 - x_1^4) \right\}.$$

Если события E_1 и E_2 одновременны в системе S , но не совпадают в пространстве, то $x_2^4 = x_1^4$, $x_2^1 \neq x_1^1$, и, следовательно, $x_2'^4 \neq x_1'^4$, как и $x_2'^1 \neq x_1'^1$; поэтому E_1 и E_2 не одновременны и не совпадают в пространстве при использовании координат системы S' . Это не является неожиданным в свете сказанного в § 3.1: одновременность двух значительно удаленных друг от друга в пространстве событий всегда требует некоторого расчета, и переход от S к S' содержит в себе изменение в методе расчета. Более того,

$$x_2'^4 - x_1'^4 = -\frac{\beta u}{c^2} (x_2^1 - x_1^1) \neq 0,$$

$$x_2'^1 - x_1'^1 = \beta (x_2^1 - x_1^1),$$

и, следовательно, длина $x_2^1 - x_1^1$ в S становится равной $\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{1/2} (x_2'^1 - x_1'^1)$ в S' . Эта относительность длины иногда рассматривается как физическое свойство твердых измерительных стержней — так называемое „фитцджеральдово сокращение“, однако на самом деле является свойством координатных систем в пространстве-времени Минковского, т. е. свойством такого метода обозначения событий, при котором абсолютная скорость выражается не бесконечным, а конечным числом.

§ 3.7. Геодезические и нулевые геодезические линии пространства-времени Минковского

Вид метрики (3.601) пространства-времени Минковского указывает на то, что это пространство-время является четырехмерным римановым пространством, метрические коэффициенты которого, введенные в § 2.8, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} g_{44} &= 1, & g_{ii} &= -\frac{1}{c^2}, & g_{ij} &= 0 \quad (i \neq j = 1, 2, 3) \\ g &= -\frac{1}{c^2}, \\ g^{44} &= 1, & g^{ii} &= -c^2, & g^{ij} &= 0 \quad (i \neq j = 1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (3.701)$$

Так как S является типичной координатной системой, то метрика ортогональна в любой такой системе. Все компоненты метрического тензора суть постоянные, и пространство-время Минковского является плоским. Уравнения геодезических линий, в силу (2.806) и (2.807), принимают вид

$$\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} = 0 \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \quad (3.702)$$

Эти уравнения могут быть непосредственно проинтегрированы и дают

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx^\sigma}{ds} &= v^\sigma, \\ x^\sigma - x_0^\sigma &= v^\sigma s, \end{aligned} \right\} \quad (3.703)$$

где четыре величины v^a и четыре величины x_0^a — постоянные интегрирования. Первые четыре постоянные удовлетворяют, в силу (2.808), соотношению

$$(v^4)^2 - \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^3 (v^j)^2 = 1. \quad (3.704)$$

Вводя три новые постоянные q_i с помощью соотношений

$$q_i = \frac{v^i}{v^4} = \frac{dx^i}{dx^4}, \quad (3.705)$$

мы можем представить интегралы уравнений (3.702) в виде

$$\left. \begin{aligned} x^i - x_0^i &= q_i (x^4 - x_0^4), \\ x^4 - x_0^4 &= v^4 s, \end{aligned} \right\} \quad (3.706)$$

тогда как соотношение (3.704) принимает вид

$$\left(\frac{ds}{dx^4} \right)^2 = \frac{1}{(v^4)^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^3 (q_j)^2 = 1 - \frac{q^2}{c^2}. \quad (3.707)$$

Эти результаты были получены посредством решения уравнений геодезической линии (чем были использованы координаты системы S). Если бы вместо этого использовали координаты любой другой инерциальной системы S' , то получили бы аналогичные результаты, которые, однако, можно получить, добавляя штрих к каждому символу, кроме s и c , в формулах (3.702)—(3.707). Эти формулы допускают теперь физическую интерпретацию: три величины q_i являются (постоянными) компонентами скорости движущейся частицы, а уравнения (3.706) являются интегралами соответствующих уравнений движения, в предположении, что частица движется в согласии с первым законом движения Ньютона. Однако ниже будет показано, что скорость частицы должна быть меньше c и величина ds в (3.707) должна быть действительным числом, так как дифференциал времени dx^4 с необходимостью является действительным. Поэтому мы заключаем, что *времяподобные геодезические линии пространства-времени Минковского являются кривыми в четырех измерениях, которые представляют историю движения частицы, движущейся согласно первому закону Ньютона.* Под „историей движения“ мы понимаем последовательность

положений в пространстве с соответствующими им моментами времени, „вычерченную“ в системе S . Так как эти выводы основаны на теории геодезических линий, они справедливы в любой другой координатной системе.

Четыре постоянные v^α являются компонентами некоторого контравариантного вектора в четырехмерном пространстве-времени Минковского — единичного тангенциального вектора геодезической линии. Три компоненты скорости q_i не составляют, однако, части некоторого четырехмерного вектора, так как они являются отношениями трех компонент v^α к четвертой v^4 . Специальный принцип относительности утверждает, что уравнения математической физики должны сохранять свою форму при преобразовании (3.401), что может быть обеспечено записью всех соотношений с помощью тензоров. Для частицы, история движения которой представлена геодезической линией пространства-времени Минковского, тензорное определение скорости и ускорения получается постулированием положения, что скорость должна представляться единичным тангенциальным вектором геодезической линии v^α , называемым *4-вектором скорости*, тогда как ускорение представляется *4-вектором ускорения* d^2x^α/ds^2 ($\alpha=1, 2, 3, 4$). В силу (3.702), 4-вектор ускорения частицы, подчиняющейся первому закону Ньютона, есть нулевой вектор.

Нулевые геодезические линии пространства-времени Минковского можно получить, заменяя s в формулах (3.702), (3.703) и (3.706) отличным от нуля параметром ρ и заменяя уравнения (3.704) и (3.707) следующими двумя уравнениями:

$$\begin{aligned} (v^4)^2 - \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^3 (v^j)^2 &= 0, \\ q^2 &= c^2. \end{aligned} \quad (3.708)$$

Математическая форма записи этих результатов, как и выше, не зависит от вида использованной системы координат. В свете того, что было сказано в § 3.5, *нулевая геодезическая линия может быть физически интерпретирована как представление в пространстве-времени Минковского истории движения светового луча.*

Важный результат специальной теории относительности можно сформулировать здесь без доказательства. Выраженный

в четырехмерной форме импульс частицы описывается тремя пространственными компонентами некоторого 4-вектора, четвертая компонента которого является мерой энергии, связанной с массой

$$Mc^2 = mc^2 \left(1 - \frac{q^2}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Входящая в это выражение величина m называется *массой покоя* или *собственной массой* рассматриваемой частицы и является, следовательно, массой частицы в той системе координат, в которой скорость рассматриваемой частицы равна нулю. Так как $M \rightarrow \infty$ при $q \rightarrow c$, говорят, что частица не может достигнуть скорости, равной скорости света. Если всеми степенями q^2/c^2 , кроме первой, можно пренебречь, то мы имеем

$$Mc^2 = mc^2 + \frac{1}{2} m q^2,$$

так что энергия массы является суммой кинетической энергии частицы и величины mc^2 , — результат, который можно интерпретировать путем утверждения, что масса m частицы эквивалентна количеству энергии mc^2 . Доказательство этого результата, однако, предполагает, что переход от одной системы координат к другой определен преобразованиями Лоренца, — утверждение, которое не справедливо (за исключением предельного „локального“ случая) для более сложного пространства-времени общей теории относительности.

§ 3.8. Механика протяженных тел в специальной теории относительности.

Придание уравнениям математической физики формы, инвариантной относительно преобразований Лоренца, встречается с рядом трудностей, когда предпринимается попытка обобщения классической зависимости от расстояния в законе тяготения или когда рассматривается модифицированное определение твердого тела. Эти трудности происходят из того, что в обоих случаях необходимо найти аналог ньютоновского абсолютного расстояния между двумя частицами в пространстве, который был бы инвариантен относительно преобразования Лоренца. Рассмотрим инерциальную систему S

и пусть две частицы являются одновременными событиями

$$(x^4, x_1^1, x_1^2, x_1^3) \text{ и } (x^4, x_2^1, x_2^2, x_2^3).$$

Тогда пространственное расстояние между этими двумя частицами равно l , где

$$l^2 = (x_2^1 - x_1^1)^2 + (x_2^2 - x_1^2)^2 + (x_2^3 - x_1^3)^2.$$

Но эти же два события описываются в системе S' как $(x_1'^4, x_1'^1, x_1'^2, x_1'^3)$ и $(x_2'^4, x_2'^1, x_2'^2, x_2'^3)$; они уже не являются одновременными и, в силу (3.602), l^2 равно

$$\begin{aligned} l^2 &= \beta^2 (x_2'^1 - x_1'^1 + u x_2'^4 - u x_1'^4)^2 + (x_2'^2 - x_1'^2)^2 + (x_2'^3 - x_1'^3)^2 = \\ &= \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) (x_2'^1 - x_1'^1)^2 + (x_2'^2 - x_1'^2)^2 + (x_2'^3 - x_1'^3)^2 = \\ &= (l')^2 - \frac{u^2}{c^2} (x_2'^1 - x_1'^1)^2. \end{aligned}$$

Мы видим, что l , которое зависит только от пространственного расстояния между частицами при использовании координат системы S , включает относительную скорость двух систем при использовании координат системы S' . Таким образом, если использовать l в релятивистской формулировке закона всемирного тяготения, то необходимо будет устанавливать, какая из инерциальных систем является „правильной“ в противоречие со специальным принципом относительности. Точно так же должна быть конкретизирована частная инерциальная система координат, относительно которой частицы твердого тела остаются на неизменном расстоянии друг от друга. Эта погрешность в проблеме тяготения была преодолена посредством общей теории относительности; удовлетворительная релятивистская форма динамики твердого тела все еще не найдена [3].

Эта проблема обобщения гораздо легче разрешается для случая идеальной жидкости. Рассмотрим уравнения Ньютона (3.202) и (3.203) в случае, когда единственной силой, действующей на жидкость, является градиент давления жидкости, а именно

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{\partial (\rho U_j)}{\partial X_j} &= 0, \\ \frac{\partial (\rho U_i)}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial X_j} (\rho U_i U_j + \delta_{ij} p) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.801)$$

Предположим, что в некоторой инерциальной системе специальной теории относительности скорость жидкости в четырехмерной точке (x^4, x^1, x^2, x^3) представлена единичным 4-вектором скорости u^μ , который, таким образом, удовлетворяет условию

$$g_{\mu\sigma} u^\mu u^\sigma = u^\mu u_\mu = (u^4)^2 - \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^3 (u^j)^2 = 1, \quad (3.802)$$

тогда как компоненты скорости жидкости являются тремя величинами

$$g_i = \frac{u^i}{u^4} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Так как по-прежнему предполагается, что $q^2 = \sum_{j=1}^3 (q_j)^2 < c^2$, из (3.802) вытекает, что

$$\frac{1}{(u^4)^2} = 1 - \frac{q^2}{c^2} > 0. \quad (3.803)$$

Четыре функции u^μ являются в общем случае функциями всех четырех координат (x) , и, таким образом, движение жидкости является нестационарным. Предположим далее, что жидкость характеризуется двумя скалярами: плотностью ρ , выраженной в $г \cdot см^{-3}$, и изотропным давлением p , выраженным в $дин \cdot см^{-2}$, и рассмотрим десять функций положения

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} \frac{p}{c^2}, \quad (3.804)$$

которые удовлетворяют четырем дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (3.805)$$

Из того, что u^μ является контравариантным 4-вектором, а ρ и p — скалярами, следует, что $T^{\mu\nu}$ — контравариантный тензор 2-го ранга в пространстве-времени Минковского, который, очевидно, является симметричным. Этот тензор называется *тензором энергии* идеальной жидкости. При использовании равенств (3.701) в формуле (3.804) и отождествлении абсолютной скорости c с бесконечной скоростью $\mathcal{S}$ теории Ньютона, компоненты $T^{\mu\nu}$ сводятся к десяти величинам ρ ,

ρU_j и $(\rho U_i U_j + \delta_{ij} p)$, встречающимся в ньютоновских уравнениях (3.801). С другой стороны, преобразование Лоренца (3.401) показывает, что если s отождествляется с $\mathcal{S}$, то координата x^4 (или x'^4) может быть отождествлена с абсолютным временем T , а три координаты x^i (или x'^i) — с абсолютными декартовыми координатами X_i , X'_i , использованными в (3.104). Поэтому четыре уравнения (3.805) сводятся к уравнениям Ньютона (3.801) и могут рассматриваться как обобщение уравнений (3.801) на случай специальной теории относительности. Более того, уравнения (3.805) — тензорные уравнения, которые в терминологии § 2.4 утверждают, что *векторная дивергенция тензора энергии тождественно равна нулю*, так как все символы Кристоффеля в случае метрики (3.601) равны нулю.

Это обобщение, однако, вносит новый элемент во взаимосвязь плотности и давления жидкости. Рассмотрим компоненту T^{44} тензора энергии, которая, в силу (3.701) и (3.803), может быть записана в виде

$$T^{44} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right)^{-1} - \frac{p}{c^2}.$$

В ньютоновском случае члены $1/c^2$ равны нулю и эта компонента равна плотности жидкости. Однако в релятивистском случае это имеет место в том случае, если жидкость находится в покое относительно инерциальной системы ($q=0$). Плотность ρ может быть следовательно названа *собственной плотностью* жидкости [1], тогда как выражение

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right)^{-1} - \frac{p}{c^2}$$

является относительной плотностью. Если в ньютоновской гидродинамике плотность и давление рассматриваются как независимые свойства жидкости, то в специальной теории относительности это уже не имеет места. Эти величины теперь „смешиваются“, возможность чего подсказывается размерностями ρ и p/c^2 , равными масса/(длина)³. Подобно тому как масса и кинетическая энергия частицы, как это показано, являются родственными свойствами благодаря четырехмерному представлению специальной теории относительности, плотность и давление идеальной жидкости

не являются более независимыми свойствами, а суть аспекты одной и той же физической характеристики, которую можно назвать „энергией в обобщенном смысле“. Более того, не исключается возможность того, что плотность и давление могут переходить друг в друга [4].

Ковариантная форма тензора энергии получается из (3.804) опусканием индексов и имеет вид

$$T_{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_\mu u_\nu - g_{\mu\nu} \frac{p}{c^2}, \quad (3.806)$$

тогда как смешанная форма тензора энергии имеет вид

$$T^\mu_\nu = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u_\nu - \delta^\mu_\nu \frac{p}{c^2}. \quad (3.807)$$

Из последнего выражения свертыванием получается *инвариантная плотность*

$$T^\mu_\mu = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u_\mu - \delta^\mu_\mu \frac{p}{c^2} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) - 4 \frac{p}{c^2} = \rho - \frac{3p}{c^2},$$

которая снова подчеркивает, что инвариант тензора энергии является не одной только плотностью, или одним давлением, а их комбинацией.

Четыре уравнения (3.805), заменяющие Ньютона (3.801), все еще образуют неопределенную систему, несмотря на наличие дополнительного соотношения (3.802). Причина, конечно, заключается в том, что теперь имеются *четыре* функции u^μ , которые совместно с ρ и p дают шесть неизвестных, удовлетворяющих пяти уравнениям. Нелегко также найти дополнительное соотношение при обращении к термодинамике, поскольку до сих пор не было получено общепризнанного обобщения термодинамики на случай специальной и общей теории относительности, — обстоятельство, которое следует помнить при обобщении ньютоновской гидродинамики на случай общей теории относительности.

Принципы общей теории относительности

§ 4. 1. Пространство-время Римана и уравнения Эйнштейна

Пространство-время Минковского специальной теории относительности является весьма частным случаем четырехмерного риманова пространства. Так как все метрические коэффициенты пространства-времени Минковского постоянны, все соответствующие символы Кристоффеля тождественно равны нулю и, следовательно, равен нулю тензор Римана — Кристоффеля. Пространство-время поэтому является плоским в смысле § 2.5. Снятие этого ограничения приводит к общей теории относительности и к решению проблемы тяготения.

События, которые теперь подлежат рассмотрению, представляют собой историю распределения материи, ее плотности и давления в последовательности точек пространства в последовательные моменты времени, движение ее различных частей, гравитационные эффекты, которые имеют здесь место и т. д. По-прежнему мы будем считать, что каждое событие задается четырьмя числами (x^4, x^1, x^2, x^3) , эти числа мы будем называть *координатами* события. Предполагается, что всем событиям, которые рассматриваются исследователем, координаты приписываются одинаковым образом, однако использованный частный метод не конкретизируется а priori. Следовательно, x^4 не обязательно обозначает время, а (x^1, x^2, x^3) — пространственные координаты. Может оказаться, что исследователь найдет удобным задавать время наступления события при помощи, например, некоторой функции от x^4 и x^1 . Единственное условие, которое при этом ставится, заключается в том, что исследователь должен использовать *одну и ту же* функцию от x^4 и x^1 для задания времени всех событий. Эта неоднозначность процедуры сопоставления координат событиям подвергалась критике со стороны некоторых математиков-прикладников, которые утверждали, что удовлетворительная теория должна

начинаться с описания методов наблюдения — истинных или мыслимых, при помощи которых должны быть установлены координаты. Подобное ограничение свободы исследователя не представляется обоснованным, и одна аналогия, заимствованная из механики Ньютона, может прояснить этот вопрос. Хорошо известно, что механическую систему в механике Ньютона зачастую можно описывать с помощью уравнений Лагранжа, что приводит к большим преимуществам. Но уже в самих этих уравнениях используются обобщенные координаты, для выбора которых не дается никакого правила. Можно даже утверждать, что ценность метода Лагранжа заключается как раз в отсутствии подобных правил. Когда дело доходит до применений уравнений Лагранжа к конкретной физической ситуации, исследователь, разумеется, приписывает обобщенным координатам физический смысл, однако зачастую он может сделать это многими способами. Такая же процедура используется в общей теории относительности: в каждой рассматриваемой физической ситуации мы а posteriori приходим к интерпретации четырех координат события, не считая эту интерпретацию заранее существенным элементом теории.

Следующим шагом является изображение или представление всех рассматриваемых событий в виде точек в четырехмерном римановом пространстве, которое обладает следующими двумя свойствами:

а) тензор Римана — Кристоффеля и тензор Риччи имеют ненулевое значение по крайней мере в одной точке пространства;

б) когда вблизи некоторого события введены локальные декартовы координаты, метрика принимает вид

$$ds^2 = (dX^4)^2 - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^3 (dX^i)^2; \quad (4.101)$$

другими словами, риманово пространство таково, что оно „локально“ совпадает с пространством-временем Минковского. Это не имеет места для произвольного четырехмерного риманова пространства, и поэтому пространство, принадлежащее подклассу используемых в общей теории относительности, мы будем называть *римановым пространством-временем* по аналогии с пространством-временем Минковского

специальной теории относительности. Требование (а) утверждает, что риманово пространство-время является искривленным и его метрика в координатах (x) имеет вид

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (4.102)$$

Теперь должно быть специализировано распределение вещества, история которого была „изображена“ таким образом. В качестве общего руководящего соображения используется *принцип ковариантности* или *принцип эквивалентности*; он утверждает, что не существует привилегированных координатных систем, так что исследователь может произвольно выбрать любую такую систему, по существу не меняя используемых им уравнений. Для обеспечения этого следует использовать тензоры и тензорные уравнения, и ниже этот принцип будет применен к описанию распределения вещества; § 3.8 подсказывает, как это может быть сделано при условии, что вещество считается идеальной жидкостью. В каждой точке-событии риманова пространства-времени жидкость будет описываться 4-вектором скорости u^μ , скалярной плотностью ρ и скалярным давлением p , причем все шесть величин рассматриваются как функции от четырех координат этого события. Если в данной точке-событии вещество отсутствует, то u_μ , ρ и p равны в этой точке нулю. 4-вектор скорости является единичным вектором, и поэтому в силу формулы (2.213) удовлетворяет соотношению

$$u^\mu u_\mu = g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 1, \quad (4.103)$$

тогда как тензор энергии жидкости по определению равен

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} \frac{p}{c^2}. \quad (4.104)$$

Этот тензор имеет те же свойства симметрии, что и тензор (3.804) специальной теории относительности, а ковариантная и смешанная формы этого тензора аналогичны выражениям (3.806) и (3.807). Тензор энергии в специальной теории относительности удовлетворяет четырем уравнениям (3.805), которые утверждают, что векторная дивергенция тензора энергии равна нулю. Следовательно, они являются тензорными уравнениями и могут быть применены к любому риманову пространству-времени с метрикой (4.102). Поскольку,

однако, метрические коэффициенты уже не являются постоянными, равенство нулю векторной дивергенции выражается теперь с помощью формулы (2.407) посредством соотношения

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} T^{\mu\lambda})}{\partial x^\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} T^{\lambda\sigma} = 0, \quad (\mu = 1, 2, 3, 4). \quad (4.105)$$

Последние четыре уравнения можно рассматривать как обобщение уравнений Ньютона (3.202) и (3.203) на случай общей теории относительности.

Риманово пространство-время, используемое для распределения вещества, должно быть теперь связано с физическими характеристиками этого распределения. Мы будем рассматривать тензор энергии распределения вещества как краткую сводку этих физических характеристик. Мы уже отметили, что векторная дивергенция этого тензора равна нулю. Так как наиболее существенные черты риманова пространства-времени определяются его метрическим тензором, возможная взаимосвязь между распределением вещества и свойствами пространства может быть получена приравнованием тензора энергии некоторому тензору, который зависит от метрического и также имеет равную нулю векторную дивергенцию. Этим свойством обладает тензор Эйнштейна, и мы постулируем, что *риманово пространство-время, которое представляет распределение вещества с тензором энергии $T^{\mu\nu}$, обладает метрическим тензором, удовлетворяющим десяти уравнениям*

$$-\kappa c^2 T^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R^\sigma_\sigma - 2\Lambda), \quad (4.106)$$

где κc^2 — некоторый коэффициент пропорциональности, подлежащий определению в дальнейшем¹⁾. Эти уравнения из-

¹⁾ Космологическая постоянная Λ была введена Эйнштейном для получения статического решения в изотропной модели мира. Открытие „красного смещения“ в спектрах галактик, свидетельствующее о расширении известной нам области вселенной, позволяет положить $\Lambda = 0$. Значение $\Lambda \neq 0$ исключает метрику Минковского (галилееву метрику) из числа решений уравнений тяготения для пустого пространства ($T^{\mu\nu} = 0$), что является физически неудовлетворительным. — *Прим. ред.*

вестны под названием *уравнений Эйнштейна*; опуская индексы, мы можем записать эти уравнения в эквивалентных видах

$$-\kappa c^2 T^\mu_\nu = R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu (R^\sigma_\sigma - 2\Lambda), \quad (4.107)$$

$$-\kappa c^2 T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R^\sigma_\sigma - 2\Lambda), \quad (4.108)$$

В силу (2.703), имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\kappa c^2 \sqrt{-g} T^{\mu\lambda})}{\partial x^\lambda} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} \kappa c^2 T^{\sigma\lambda} &= (\kappa c^2 T^{\mu\lambda})_{,\lambda} = \\ &= - \left\{ R^{\mu\lambda} - \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (R^\sigma_\sigma - 2\Lambda) \right\}_{,\lambda} = \\ &= - g^{\mu\alpha} \left\{ R^\lambda_\alpha - \frac{1}{2} \delta^\lambda_\alpha (R^\sigma_\sigma - 2\Lambda) \right\}_{,\lambda} = 0, \end{aligned} \quad (4.109)$$

откуда видно, что уравнения (4.106) — (4.108) автоматически удовлетворяют четырем уравнениям (4.105).

В некоторой точке-событии, или в совокупности точек-событий, где тензор энергии равен нулю, уравнения Эйнштейна принимают более простой вид

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2} \delta^\mu_\nu (R^\sigma_\sigma - 2\Lambda) = 0.$$

Свертывая, получаем $R^\sigma_\sigma = 4\Lambda$, и уравнения Эйнштейна могут быть написаны в одной из следующих форм:

$$R^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu}, \quad R^\mu_\nu = \Lambda \delta^\mu_\nu, \quad R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (4.110)$$

Наконец, если космологическая постоянная равна нулю, то (4.110) принимает вид

$$R^{\mu\nu} = 0, \quad R^\mu_\nu = 0, \quad R_{\mu\nu} = 0. \quad (4.111)$$

§ 4.2. Физический смысл постоянной κ

В § 3.8 мы показали, что историю распределения вещества можно представить в пространстве-времени Минковского, задав 4-вектор скорости, плотность и давление и потребовав затем, чтобы тензор энергии распределения вещества удовлетворял уравнениям (3.805). Уравнения Эйнштейна, однако, содержат в себе нечто большее, поскольку они связывают тензор энергии с метрическим тензором пространства-вре-

мени. Поэтому можно поставить вопрос, что произойдет, если эти уравнения применить к пространству-времени Минковского? Так как пространство-время Минковского плоское, тензоры $R^{\mu\nu} = R^\sigma_\sigma = 0$ и уравнения (4.106) принимают вид

$$-\kappa c^2 T^{\mu\nu} = \Lambda g^{\mu\nu}. \quad (4.201)$$

Метрический тензор дается формулой (3.701), а тензор энергии — (4.104). Вспоминая, что lmn используются для циклической подстановки индексов, и пренебрегая условием суммирования, получаем следующие выражения для десяти уравнений (4.201):

$$-\kappa c^2 T^{44} = -\kappa c^2 \left\{ \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) (u^4)^2 - \frac{p}{c^2} \right\} = \Lambda, \quad (4.202)$$

$$-\kappa c^2 T^{l4} = -\kappa c^2 \left\{ \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^l u^4 \right\} = 0, \quad (4.203)$$

$$-\kappa c^2 T^{ll} = -\kappa c^2 \left\{ \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) (u^l)^2 + p \right\} = -c^2 \Lambda, \quad (4.204)$$

$$-\kappa c^2 T^{lm} = -\kappa c^2 \left\{ \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^l u^m \right\} = 0, \quad (4.205)$$

к которым следует добавить уравнение (4.103), а именно

$$(u^4)^2 - \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^3 (u^i)^2 = 1. \quad (4.206)$$

Уравнения (4.203), (4.205) и (4.206) показывают, что

$$u^l = 0, \quad u^4 = 1,$$

так что распределение вещества находится в покое относительно данной инерциальной системы. Уравнения (4.202) и (4.204), чем бы не являлась постоянная κ , дают

$$\rho = -\frac{\Lambda}{\kappa c^2}, \quad p = \frac{\Lambda}{\kappa}.$$

Таким образом, плотность и давление постоянны и обязательно имеют противоположные знаки, за исключением случая $\Lambda = 0$, когда они равны нулю. Таким образом эти результаты являются либо физически неприемлемыми, либо тривиальными. Отсюда вытекает, что уравнения Эйнштейна, примененные к пространству-времени Минковского, не дают

осмысленных результатов, и что физическая интерпретация постоянной κ таким путем не может быть получена.

Иная ситуация возникает, когда уравнения Эйнштейна применяются к риманову пространству-времени, метрический тензор которого мало отличается от метрического тензора пространства-времени Минковского. Рассмотрение космологической постоянной мы отложим до гл. VI и будем пока считать, что космологическая постоянная пренебрежимо мала. Примем также, что метрика совпадает с метрикой ортогонального, статического и изотропного пространства-времени

$$ds^2 = g_{44}(dx^4)^2 + \sum_{i=1}^3 g_{ii}(dx^i)^2,$$

где

$$\left. \begin{aligned} g_{44} &= 1 + \varepsilon f, \\ g_{ii} &= -\frac{1}{c^2}(1 + \varepsilon h), \end{aligned} \right\} \quad (4.207)$$

причем ε — малая постоянная, квадратом и более высокими степенями которой можно пренебречь, а f и h — функции только трех пространственных координат. Как и в случае пространства-времени Минковского, мы будем предполагать, что s и x^4 имеют размерность времени, а x^1, x^2, x^3 — размерность длины. Поэтому εf и εh являются безразмерными величинами. В силу (4.207),

$$g = -\frac{1}{c^6}(1 + 3\varepsilon h)(1 + \varepsilon f),$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} g^{44} &= 1 - \varepsilon f, & g^{ii} &= -c^2(1 - \varepsilon h), \\ g^{\lambda\mu} &= 0, & (\lambda \neq \mu). \end{aligned} \right\} \quad (4.208)$$

Поэтому тензор энергии (4.104) имеет следующие составляющие:

$$\begin{aligned} T^{44} &= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)(u^4)^2 - \frac{p}{c^2}(1 - \varepsilon f), \\ T^{i4} &= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^i u^4, \\ T^{ii} &= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)(u^i)^2 + p(1 - \varepsilon h), \\ T^{lm} &= \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^l u^m. \end{aligned} \quad (4.209)$$

Вычисление тензора Эйнштейна для этого частного случая проще всего провести, если исходить из тензора Римана — Кристоффеля (2.504). Поскольку в символы Кристоффеля входят только частные производные от $g_{\mu\nu}$, символы Кристоффеля будут порядка ε ; следовательно, произведения символов Кристоффеля будут иметь порядок ε^2 и ими можно пренебречь. Таким образом (2.504) сводится к

$$R_{\kappa\lambda\mu\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\nu\kappa}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\kappa} - \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu \partial x^\lambda} \right). \quad (4.210)$$

Компоненты этого тензора также имеют порядок ε . Тензор Риччи равен

$$R_{\lambda\mu} = g^{\nu\kappa} R_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{4\lambda\mu 4} - c^2 (R_{1\lambda\mu 1} + R_{2\lambda\mu 2} + R_{3\lambda\mu 3}), \quad (4.211)$$

так как члены порядка ε в $g^{\mu\nu}$ в выражении (4.208) будут давать члены порядка ε^2 в $R_{\lambda\mu}$. Используя (4.207), (4.210) и (4.211) и полагая

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2}, \quad (4.212)$$

мы получаем, что

$$R_{44} = -\frac{1}{2} \varepsilon c^2 \nabla^2 f, \quad R_{i4} = 0,$$

$$R_{ii} = \frac{1}{2} \varepsilon \left\{ \frac{\partial^2 (f+h)}{(\partial x^i)^2} + \nabla^2 h \right\},$$

$$R_{im} = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{\partial^2 (f+h)}{\partial x^i \partial x^m}.$$

Поднимая один нижний индекс, имеем

$$R_4^4 = g^{44} R_{44} = -\frac{1}{2} \varepsilon c^2 \nabla^2 f,$$

$$R_i^i = g^{ii} R_{ii} = -\frac{c^2 \varepsilon}{2} \left\{ \frac{\partial^2 (f+h)}{(\partial x^i)^2} + \nabla^2 h \right\},$$

и, следовательно,

$$R_\sigma^\sigma = R_4^4 + \sum_{i=1}^3 R_i^i = -\varepsilon c^2 \nabla^2 (f + 2h). \quad (4.213)$$

Поднимая оба нижних индекса, получим

$$\left. \begin{aligned} R^{44} &= -\frac{1}{2} \varepsilon c^2 \nabla^2 f, \quad R^{4i} = 0, \\ R^{ii} &= \frac{1}{2} \varepsilon c^4 \left\{ \frac{\partial^2 (f+h)}{(\partial x^i)^2} + \nabla^2 h \right\}, \\ R^{lm} &= \frac{1}{2} \varepsilon c^4 \frac{\partial^2 (f+h)}{\partial x^l \partial x^m}. \end{aligned} \right\} \quad (4.214)$$

Поэтому, используя (4.106), (4.209), (4.213) и (4.214), получаем следующие уравнения Эйнштейна с $\Lambda = 0$:

$$-\kappa c^2 \left\{ \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) (u^4)^2 - \frac{p}{c^2} (1 - \varepsilon f) \right\} = \varepsilon c^2 \nabla^2 h, \quad (4.215)$$

$$-\kappa c^2 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^i u^4 = 0, \quad (4.216)$$

$$\begin{aligned} &-\kappa c^2 \left\{ \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) (u^i)^2 + p (1 - \varepsilon h) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \varepsilon c^4 \left\{ \frac{\partial^2 (f+h)}{(\partial x^i)^2} - \nabla^2 (f+h) \right\}, \end{aligned} \quad (4.217)$$

$$-\kappa c^2 \left\{ \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^i u^m \right\} = \frac{1}{2} \varepsilon c^4 \frac{\partial^2 (f+h)}{\partial x^i \partial x^m}, \quad (4.218)$$

где в силу (4.103) и (4.207) 4-вектор скорости удовлетворяет условию

$$(1 + \varepsilon f) (u^4)^2 - \frac{1 + \varepsilon h}{c^2} \sum_{i=1}^3 (u^i)^2 = 1. \quad (4.219)$$

Уравнения (4.126) и (4.219) показывают, что

$$u^i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad u^4 = 1 - \frac{1}{2} \varepsilon f,$$

так что распределение вещества находится в покое относительно используемой координатной системы. Поэтому, согласно (4.218),

$$\frac{\partial^2 (f+h)}{\partial x^i \partial x^m} = 0, \quad (4.220)$$

и три уравнения (4.217) приобретают вид

$$-\kappa c^2 p (1 - \varepsilon h) = \frac{1}{2} \varepsilon c^4 \left\{ \frac{\partial^2 (f+h)}{(\partial x^i)^2} - \nabla^2 (f+h) \right\}. \quad (4.221)$$

На этом этапе появляется типичное условие, которое будет весьма важным впоследствии. Необходимое условие совместности трех уравнений (4.221) имеет вид

$$\frac{\partial^2 (f+h)}{(\partial x^1)^2} = \frac{\partial^2 (f+h)}{(\partial x^2)^2} = \frac{\partial^2 (f+h)}{(\partial x^3)^2}, \quad (4.222)$$

что является ограничением возможного выбора функций f и h , диктуемым алгебраической формой тензора энергии в комбинации с априорным выбором формы (4.207) для метрического тензора. Возникающие таким образом уравнения мы будем называть *условиями совместности*; они не являются тензорными уравнениями, но играют фундаментальную роль в приложениях уравнений Эйнштейна. Уравнения (4.220) и (4.222), очевидно, удовлетворяются при

$$f = -h,$$

и остающиеся уравнения Эйнштейна, согласно (4.215) и (4.221), имеют вид

$$-\kappa p(1 + \varepsilon h) = \varepsilon \nabla^2 h, \quad (4.223)$$

$$\kappa p(1 - \varepsilon h) = 0. \quad (4.224)$$

Последнее из этих уравнений показывает, что давление равно нулю в пределах принятой нами степени точности. Теперь мы предположим, во-первых, что в общей теории относительности должны фигурировать, помимо Λ , две мировых постоянных κ и c ; и, во-вторых, что общая теория относительности должна сводиться к ньютоновской теории тяготения, когда c отождествляется с $\mathcal{S}$. Первое предположение удовлетворяется, если положить $\varepsilon = 1/c^2$, что находится в согласии с предположением о малости этой постоянной. Второе предположение совместимо с наличием множителя $1/c^2$ в постоянной κ и с предположением, что ρ , p , f и h не содержат множителей порядка c^2 . Тогда ньютоновским приближением к (4.223) служит

$$-\lim_{c \rightarrow \mathcal{S}} (\kappa c^2 p) = \nabla^2 h$$

— уравнение, которое тождественно уравнению Пуассона $-4\pi G\rho = \nabla^2 V$, если $h = 2V$, и

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^2} = 1,864 \cdot 10^{-27} \text{ см} \cdot \text{г}^{-1}; \quad (4.225)$$

последнее равенство определяет κ . Если вместо V используется потенциал $\psi = V/4\pi G$, то мы имеем

$$\varepsilon h = -\varepsilon f = \frac{8\pi G}{c^2} \psi = \kappa \psi.$$

Метрика пространства-времени статического распределения вещества, ньютоновский потенциал тяготения которого есть $4\pi G\psi(x^1, x^2, x^3)$, имеет, в силу (4.207), вид

$$ds^2 = (1 - \kappa\psi)(dx^4)^2 - \frac{1 + \kappa\psi}{c^2} \{ (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \}, \quad (4.226)$$

при условии, что были опущены квадраты и более высокие степени $1/c^2$ при раскрытии уравнений Эйнштейна.

§ 4.3. Принцип геодезических линий

В § 3.7 было указано, что времяподобная геодезическая линия пространства-времени Минковского представляет историю движения частицы, подчиняющейся первому закону движения Ньютона. Более того, в § 3.3 было показано, что движение частицы в однородном поле тяготения обладает всеми свойствами движения, подчиняющегося первому закону Ньютона, за исключением того, что движение является ускоренным. Поэтому мы можем предположить, что геодезические линии риманова пространства-времени представляют историю движения частицы, подверженной гравитационному ускорению, — предположение, которое может быть подтверждено исследованием геодезических линий пространства-времени (4.226). Так как метрика ортогональна, применимы уравнения (2.807), и уравнения геодезической линии имеют вид

$$\frac{d}{ds} \left\{ (1 - \kappa\psi) \frac{dx^4}{ds} \right\} = 0, \quad (4.301)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\{ (1 + \kappa\psi) \frac{dx^i}{ds} \right\} - \frac{\kappa c^2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \left\{ \left(\frac{dx^4}{ds} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{dx^j}{ds} \right)^2 \right\} = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4.302)$$

Первое уравнение может быть проинтегрировано и дает

$$\frac{dx^4}{ds} = \beta(1 + \kappa\psi), \quad (4.303)$$

где β — постоянная интегрирования. Но первый интеграл (2.808) в нашем случае имеет вид

$$(1 - \kappa\psi) \left(\frac{dx^4}{ds} \right)^2 - \frac{1 + \kappa\psi}{c^2} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{dx^j}{ds} \right)^2 = 1$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{dx^j}{ds} \right)^2 = \beta^2 - (1 - \kappa\psi).$$

Таким образом, уравнение (4.302) может быть записано в виде

$$\frac{d}{ds} \left\{ (1 + \kappa\psi) \frac{dx^i}{ds} \right\} - \frac{\kappa c^2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \{ 2\beta^2 - 1 + \kappa\psi(1 + 2\beta^2) \} = 0. \quad (4.304)$$

Ньютоновское приближение получается при отождествлении s с $\mathcal{S}$, так что в силу (4.226)

$$s \equiv x^4 \equiv T, \quad (4.305)$$

и в этом случае (x^1, x^2, x^3) превращаются в прямоугольные координаты (X_1, X_2, X_3) ньютоновской инерциальной системы. Более того, $\kappa \rightarrow 8\pi G/\mathcal{S}^2 \rightarrow 0$, $\kappa c^2 = 8\pi G$, и в силу (4.303) и (4.305) $\beta \rightarrow 1$. Поэтому уравнения (4.304) приобретают вид

$$\frac{d^2 X_i}{dT^2} = 4\pi G \frac{\partial \psi}{\partial X_i} = \frac{\partial V}{\partial X_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

что представляет собой систему ньютоновских уравнений движения частицы в поле тяготения с потенциалом V , причем собственными гравитационными эффектами частицы пренебрегается.

Этот результат подсказывает следующий постулат: в любом римановом пространстве-времени с метрикой (4.102), представляющем распределение вещества, времяподобная геодезическая линия представляет историю движения частицы (с пренебрежимо малым собственным тяготением) в гравитационном поле этого распределения вещества. Поэтому уравне-

ния геодезической линии, записанные в римановых координатах § 2.6, которые локально применимы вблизи любой точки-события, принимают вид

$$\frac{d^2 y^\sigma}{ds^2} = 0 \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4);$$

движение частицы локально совпадает с движением частицы, подчиняющейся первому закону Ньютона, и применимы результаты § 3.7, относящиеся только к времяподобным геодезическим линиям. Выражаясь физически, можно сказать, что эти локальные римановы координаты образуют систему, которая свободно падает в поле тяготения заданного распределения вещества вблизи рассматриваемой точки-события. Для общей координатной системы (x) , в которой метрика риманова пространства-времени имеет форму (4.102), мы определим 4-вектор скорости частицы по аналогии со случаем пространства-времени Минковского как в § 3.7. Если dx^σ/ds ($\sigma = 1, 2, 3, 4$) — компоненты единичного тангенциального вектора геодезической линии, представляющей движение частицы, то 4-вектор скорости частицы имеет вид

$$v^\sigma = \frac{dx^\sigma}{ds} \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4), \quad (4.306)$$

и этот вектор, будучи единичным, должен удовлетворять, в силу (2.213), соотношению

$$g_{\mu\nu} v^\mu v^\nu = 1. \quad (4.307)$$

Историю движения светового луча мы представим нулевой геодезической линией риманова пространства-времени. Это очевидное обобщение соответствующего результата для пространства-времени Минковского, если предположить, что результаты § 3.7 справедливы в римановых координатах. Представление истории движения малых пробных частиц и световых лучей соответственно с помощью времяподобных и нулевых геодезических линий представляет собой *принцип геодезических линий*.

Согласно сказанному выше, принцип геодезических линий предполагает, что распределение вещества дается тензором энергии, соответствующее риманово пространство-время определяется при помощи уравнения Эйнштейна и сама частица ничего не вносит в распределение, под воздействием тяготения которого она движется. Однако саму малую частицу

можно рассматривать как предел некоторого распределения вещества, когда объем, занимаемый этим распределением, стремится к нулю. Возникает следующий вопрос: если рассматриваемое распределение само состоит из двух или более частиц и представляется некоторым тензором энергии, то можно ли найти соответствующее риманово пространство-время с помощью уравнений Эйнштейна и показать, опираясь на эти уравнения, что движение каждой из частиц представляется времяподобной геодезической линией? На этот вопрос можно ответить положительно [1] для специального случая, когда уравнения Эйнштейна сводятся к (4.111), за исключением (предельной) области, занимаемой частицей. Это означает, что пространство-время представляет распределение вещества, состоящего из дискретных „комков“, разделенных пустыми областями.

Однако в приложениях общей теории относительности к космологии, где рассматривается непрерывное распределение вещества, требуется нечто большее. На данном этапе развития теории поэтому лучше рассматривать принцип геодезических линий как независимый от уравнений Эйнштейна, отметив, что в некоторых случаях этот принцип может быть выведен из уравнений Эйнштейна.

§ 4.4. Ортогональное пространство-время и уравнения Эйнштейна

Имеются некоторые качественные соображения, помогающие определить риманово пространство-время, представляющее распределение вещества. Например, если распределение симметрично относительно некоторой точки в пространстве, то метрические коэффициенты тоже будут обладать симметрией относительно этой точки. Распределение может также не зависеть от одной координаты, так что свойства вещества будут одинаковы в каждой точке семейства плоскостей, перпендикулярных к заданному направлению. Может иметь место также осевая симметрия, при которой вещество имеет одинаковые свойства на поверхностях коаксиальных цилиндров. В каждом из этих случаев метрические коэффициенты будут обладать соответствующими свойствами симметрии.

В дополнение к указанным упрощениям исследования в общей теории относительности обычно, хотя и не всегда,

связаны с постулатом, что рассматриваемое риманово пространство-время относится к такому типу, который допускает ортогональные координатные системы. Это ограничение добавляется для того, чтобы избежать усложнений уравнений Эйнштейна в неортогональном случае. Дингль [2] получил в явном виде уравнения Эйнштейна для общего ортогонального случая, в котором метрика имеет вид

$$ds^2 = D(dx^4)^2 - A(dx^1)^2 - B(dx^2)^2 - C(dx^3)^2, \quad (4.401)$$

где D , $-A$, $-B$, $-C$ — метрические коэффициенты, являющиеся функциями всех четырех координат. Формулы Дингля можно рассматривать как основную справочную таблицу в общей теории относительности. Вводя обозначения

$$\frac{\partial D}{\partial x^\lambda} = D_\lambda, \quad \frac{\partial^2 D}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} = D_{\lambda\mu} \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3, 4),$$

и аналогичные обозначения для частных производных от A , B и C , имеем следующие выражения Дингля для символов Кристоффеля метрики (4.401):

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} &= \frac{A_1}{2A}, & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 21 \end{matrix} \right\} &= \frac{A_2}{2A}, & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 31 \end{matrix} \right\} &= \frac{A_3}{2A}, & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 41 \end{matrix} \right\} &= \frac{A_4}{2A}, \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 11 \end{matrix} \right\} &= -\frac{A_2}{2B}, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} &= \frac{B_1}{2B}, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 31 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 41 \end{matrix} \right\} &= 0, \\ \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 11 \end{matrix} \right\} &= -\frac{A_3}{2C}, & \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 21 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 31 \end{matrix} \right\} &= \frac{C_1}{2C}, & \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 41 \end{matrix} \right\} &= 0, \\ \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 11 \end{matrix} \right\} &= \frac{A_4}{2D}, & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 21 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 31 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 41 \end{matrix} \right\} &= \frac{D_1}{2D}, \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 12 \end{matrix} \right\} &= \frac{A_2}{2A}, & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} &= -\frac{B_1}{2A}, & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 42 \end{matrix} \right\} &= 0, \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} &= \frac{B_1}{2B}, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 22 \end{matrix} \right\} &= \frac{B_2}{2B}, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 32 \end{matrix} \right\} &= \frac{B_3}{2B}, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 42 \end{matrix} \right\} &= \frac{B_4}{2B}, \\ \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 12 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 22 \end{matrix} \right\} &= -\frac{B_3}{2C}, & \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \right\} &= \frac{C_2}{2C}, & \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 42 \end{matrix} \right\} &= 0, \\ \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 12 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 22 \end{matrix} \right\} &= \frac{B_4}{2D}, & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 32 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 42 \end{matrix} \right\} &= \frac{D_2}{2D}, \\ \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 13 \end{matrix} \right\} &= \frac{A_3}{2A}, & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 23 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \right\} &= -\frac{C_1}{2A}, & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 43 \end{matrix} \right\} &= 0, \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 13 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 23 \end{matrix} \right\} &= \frac{B_3}{2B}, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \right\} &= -\frac{C_2}{2B}, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 43 \end{matrix} \right\} &= 0, \\ \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 13 \end{matrix} \right\} &= \frac{C_1}{2C}, & \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 23 \end{matrix} \right\} &= \frac{C_2}{2C}, & \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 33 \end{matrix} \right\} &= \frac{C_3}{2C}, & \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 43 \end{matrix} \right\} &= \frac{C_4}{2C}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 13 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 23 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 33 \end{matrix} \right\} &= \frac{C_4}{2D}, & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 43 \end{matrix} \right\} &= \frac{D_3}{2D}, \\
\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 14 \end{matrix} \right\} &= \frac{A_4}{2A}, & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 24 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 34 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 44 \end{matrix} \right\} &= \frac{D_1}{2A}, \\
\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 14 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 24 \end{matrix} \right\} &= \frac{B_4}{2B}, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 34 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 44 \end{matrix} \right\} &= \frac{D_2}{2B}, \\
\left\{ \begin{matrix} 3 \\ 14 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 24 \end{matrix} \right\} &= 0, & \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 34 \end{matrix} \right\} &= \frac{C_4}{2C}, & \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 44 \end{matrix} \right\} &= \frac{D_3}{2C}, \\
\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 14 \end{matrix} \right\} &= \frac{D_1}{2D}, & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 24 \end{matrix} \right\} &= \frac{D_2}{2D}, & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 34 \end{matrix} \right\} &= \frac{D_3}{2D}, & \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 44 \end{matrix} \right\} &= \frac{D_4}{2D}.
\end{aligned}
\tag{4.402}$$

Десять уравнений Эйнштейна (4.106) имеют вид:

$$\begin{aligned}
\kappa c^2 A T^{11} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{B_{33} + C_{22}}{BC} - \frac{B_{44} - D_{22}}{BD} - \frac{C_{44} - D_{33}}{CD} \right\} - \\
&- \frac{1}{4} \left\{ \frac{B_3 C_3 + C_2^2}{BC^2} + \frac{C_2 B_2 + B_3^2}{CB^2} - \frac{B_4 D_4 - D_2^2}{BD^2} + \frac{D_2 B_2 - B_4^2}{DB^2} - \right. \\
&- \frac{C_4 D_4 - D_3^2}{CD^2} + \frac{D_3 C_3 - C_4^2}{DC^2} - \frac{C_2 D_2 + B_3 D_3 - B_4 C_4}{BCD} - \\
&- \left. \frac{DB_1 C_1 + CB_1 D_1 + BC_1 D_1}{ABCD} \right\} + \Lambda, \tag{4.403}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa c^2 B T^{22} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{A_{33} + C_{11}}{AC} - \frac{A_{44} - D_{11}}{AD} - \frac{C_{44} - D_{33}}{CD} \right\} - \\
&- \frac{1}{4} \left\{ \frac{A_3 C_3 + C_1^2}{AC^2} + \frac{C_1 A_1 + A_3^2}{CA^2} - \frac{A_4 D_4 - D_1^2}{AD^2} + \right. \\
&+ \frac{D_1 A_1 - A_4^2}{DA^2} - \frac{C_4 D_4 - D_3^2}{CD^2} + \frac{D_3 C_3 - C_4^2}{DC^2} - \\
&- \frac{C_1 D_1 + A_3 D_3 - A_4 D_4}{ACD} - \frac{DA_2 C_2 + CA_2 D_2 + AC_2 D_2}{ABCD} \left. \right\} + \Lambda, \tag{4.404}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa c^2 C T^{33} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{A_{22} + B_{11}}{AB} - \frac{A_{44} - D_{11}}{AD} - \frac{B_{44} - D_{22}}{BD} \right\} - \\
&- \frac{1}{4} \left\{ \frac{A_2 B_2 + B_1^2}{AB^2} + \frac{B_1 A_1 + A_2^2}{BA^2} - \frac{A_4 D_4 - D_1^2}{AD^2} + \frac{D_1 A_1 - A_4^2}{DA^2} - \right. \\
&- \frac{B_4 D_4 - D_2^2}{BD^2} + \frac{D_2 B_2 - B_4^2}{DB^2} - \frac{B_1 D_1 + A_2 D_2 - A_4 B_4}{ABD} - \\
&- \left. \frac{DA_3 B_3 + BA_3 D_3 + AB_3 D_3}{ABCD} \right\} + \Lambda, \tag{4.405}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\kappa c^2 DT^{44} = & \frac{1}{2} \left\{ \frac{A_{22} + B_{11}}{AB} + \frac{A_{33} + C_{11}}{AC} + \frac{B_{33} + C_{22}}{BC} \right\} - \\
& - \frac{1}{4} \left\{ \frac{A_2 B_2 + B_1^2}{AB^2} + \frac{B_1 A_1 + A_2^2}{BA^2} + \frac{A_3 C_3 + C_1^2}{AC^2} + \frac{C_1 A_1 + A_3^2}{CA^2} + \right. \\
& + \frac{B_3 C_3 + C_2^2}{BC^2} + \frac{C_2 B_2 + B_3^2}{CB^2} - \frac{B_1 C_1 + A_2 C_2 + A_3 B_3}{ABC} + \\
& \left. + \frac{CA_4 B_4 + BA_4 C_4 + AB_4 C_4}{ABCD} \right\} + \Lambda, \quad (4.406)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+\kappa c^2 ABT^{12} = \kappa c^2 ABT^{21} = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{DC_{12} + CD_{12}}{CD} \right\} + \\
& + \frac{1}{4} \left\{ \frac{C_1 C_2}{C^2} + \frac{D_1 D_2}{D^2} + \frac{A_2 C_1}{AC} + \frac{A_2 D_1}{AD} + \right. \\
& \left. + \frac{B_1 C_2}{BC} + \frac{B_1 D_2}{BD} \right\}, \quad (4.407)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+\kappa c^2 ACT^{13} = \kappa c^2 ACT^{31} = & \\
= & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{DB_{13} + BD_{13}}{BD} \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{B_1 B_3}{B^2} + \frac{D_1 D_3}{D^2} + \right. \\
& + \frac{A_3 B_1}{AB} + \frac{A_3 D_1}{AD} + \frac{C_1 B_3}{CB} + \frac{C_1 D_3}{CD} \left. \right\}, \quad (4.408)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
+\kappa c^2 BCT^{23} = \kappa c^2 BCT^{32} = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{DA_{23} + AD_{23}}{AD} \right\} + \\
& + \frac{1}{4} \left\{ \frac{A_2 A_3}{A^2} + \frac{D_2 D_3}{D^2} + \frac{A_2 B_3}{AB} + \frac{A_3 C_2}{AC} + \right. \\
& \left. + \frac{D_2 B_3}{DB} + \frac{D_3 C_2}{DC} \right\}, \quad (4.409)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\kappa c^2 ADT^{14} = -\kappa c^2 ADT^{41} = & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{CB_{14} + BC_{14}}{BC} \right\} + \\
& + \frac{1}{4} \left\{ \frac{B_1 B_4}{B^2} + \frac{C_1 C_4}{C^2} + \frac{A_4 B_1}{AB} + \frac{A_4 C_1}{AC} + \right. \\
& \left. + \frac{B_4 D_1}{BD} + \frac{C_4 D_1}{CD} \right\}, \quad (4.410)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\kappa c^2 BDT^{24} = -\kappa c^2 BDT^{42} = & \\
= & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{CA_{24} + AC_{24}}{AC} \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{A_2 A_4}{A^2} + \frac{C_2 C_4}{C^2} + \frac{A_2 B_4}{AB} + \right. \\
& \left. + \frac{C_2 B_4}{BC} + \frac{A_4 D_2}{AD} + \frac{C_4 D_2}{CD} \right\}, \quad (4.411)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\kappa c^2 CDT^{34} = -\kappa c^2 CDT^{43} = & \\
= & -\frac{1}{2} \left\{ \frac{BA_{34} + AB_{34}}{AB} \right\} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{A_3 A_4}{A^2} + \frac{B_3 B_4}{B^2} + \right. \\
& \left. + \frac{A_3 C_4}{AC} + \frac{B_3 C_4}{BC} + \frac{A_4 D_3}{AD} + \frac{B_4 D_3}{BD} \right\}. \quad (4.412)
\end{aligned}$$

Прежде чем мы начнем рассматривать различные частные случаи метрики (4.401), следует отметить, что обозначения (x^4 , x^1 , x^2 , x^3) для координат очень громоздки; гораздо удобнее использовать различные буквы для каждой координаты. Практически приписывание индексов 1, 2, 3, 4 координатам — например, при расчетах символов Кристоффеля — можно производить мысленно.

Теперь приступим к перечислению трех классов пространства-времени, которые все относятся к категории метрики (4.401) и имеют частные свойства симметрии. Доказательство того, что пространство-время действительно обладает тем или иным свойством, не будет дано, так как это завело бы нас в „дебри“ теории групп и теории дифференциальных уравнений. Читатель, интересующийся этими вопросами, может обратиться к специальной литературе, приведенной в списке цитированной литературы.

1. *Плоская симметрия.* Метрика пространства-времени, в котором каждая плоскость $x = \text{const}$ является плоскостью симметрии, имеет вид [3]:

$$ds^2 = e^{2f} dt^2 - \frac{1}{c^2} \{e^{2f} dx^2 + e^{2h} (dy^2 + dz^2)\}, \quad (4.413)$$

где f и h — произвольные функции x и t . Обозначения использованных в выражении (4.413) координат таковы:

$$t = x^4, \quad x = x^1, \quad y = x^2, \quad z = x^3. \quad (4.414)$$

2. *Сферическая симметрия.* Метрика такого пространства-времени может быть построена, если рассмотреть сначала трехмерное евклидово пространство, метрика которого в сферических координатах была найдена в § 2.2 и имеет вид

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Используются две формы для метрики ортогонального пространства-времени, симметричного относительно точки $r = 0$, а именно

$$ds^2 = e^v dt^2 - \frac{1}{c^2} \{e^\mu dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2\}, \quad (4.415)$$

где v , μ — произвольные функции r и t , и

$$ds^2 = e^v dt^2 - \frac{e^\mu}{c^2} \{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2\}, \quad (4.416)$$

где ν, μ — по-прежнему произвольные функции r и t . Вторая форма для метрики называется *изотропной*; можно показать, что формы (4.415) и (4.416) следуют одна из другой [4]. Однако r, t и ν, μ в этих двух выражениях неидентичны; например, r из (4.415) является сложной функцией r и t из (4.415) и то же самое имеет место для t, ν, μ . Угловые координаты θ и φ , однако, не меняются при переходе от одной формы к другой. Связь координат такова

$$t = x^4, \quad r = x^1, \quad \theta = x^2, \quad \varphi = x^3. \quad (4.417)$$

3. *Цилиндрическая симметрия* [5]. Если осью симметрии является ось z , пространство-время, обладающее этой симметрией, имеет ортогональную метрику вида

$$ds^2 = e^\nu dt^2 - \frac{1}{c^2} \{ e^\mu (dr^2 + r^2 d\theta^2) + e^\lambda dz^2 \}, \quad (4.418)$$

где ν, μ, λ — произвольные функции t, r, z ; координаты связаны зависимостями:

$$t = x^4, \quad r = x^1, \quad \theta = x^2, \quad z = x^3. \quad (4.419)$$

Метрики (4.413), (4.416) и (4.418) сводятся в первом приближении к форме (4.226), если предположить, что метрические тензоры не зависят от $t (\equiv x^4)$, и если сделать следующие подстановки:

для (4.413)

$$x^1 = \int e^{f-h} dx, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z$$

и

$$e^{2f} = 1 - \kappa\psi(x^1), \quad e^{2h} = 1 + \kappa\psi(x^1);$$

для (4.416)

$$x^1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad x^3 = r \cos \theta$$

и

$$e^\nu(r) = 1 - \kappa\psi(r), \quad e^\mu(r) = 1 + \kappa\psi(r);$$

для (4.418)

$$x^1 = r \cos \theta, \quad x^2 = r \sin \theta, \quad x^3 = z$$

и

$$e^\nu(r, z) = 1 - \kappa\psi(r, z), \quad e^\mu(r, z) = e^\lambda(r, z) = 1 + \kappa\psi(r, z).$$

§ 4.5. Тяготение и кривизна пространства-времени

Тензор Римана—Кристоффеля пространства-времени (4.226) не равен нулю, как это легко получить из формулы (4.210). Например, компонента R_{4141} равна

$$R_{4141} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{44}}{(\partial x^1)^2} = \frac{\kappa}{2} \frac{\partial^2 \psi}{(\partial x^1)^2},$$

а все другие не равные нулю компоненты также пропорциональны κ . Таким образом, когда распределение вещества является статическим и метрические коэффициенты включают в себя только члены первого порядка по κ , пространство-время искривлено, и свободная пробная частица подвержена чисто гравитационному ускорению, как это было указано в § 4.3. Когда, как это было на первых порах развития общей теории относительности, внимание сосредоточено на статическом пространстве-времени, естественно заключить, что кривизна пространства-времени (т. е. наличие в тензоре Римана—Кристоффеля отличных от нуля компонент) связана с присутствием поля тяготения. Отсюда до утверждения, что тяготение является свойством самого пространства-времени, а не свойством распределения вещества, описываемого этим пространством-временем, лишь один маленький шаг. Однако такое утверждение подразумевало бы, что *любое* искривленное пространство-время должно с необходимостью соответствовать некоторому полю тяготения независимо от того, может ли быть реально указано распределение вещества, соответствующее этому полю. Мы покажем, что на нынешнем этапе развития теории точка зрения уже непригодна.

Рассмотрим пространство-время, метрика которого имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - \frac{e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}}{c^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (4.501)$$

где Λ — космологическая постоянная. Это пространство-время не является статическим, так как его метрические коэффициенты являются функциями временной коор-

динаты t . В обозначениях (4.401) эти метрические коэффициенты имеют вид

$$D = 1, \quad A = B = C = \frac{e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}}{c^2}, \quad (4.502)$$

где

$$t = x^4, \quad x = x^1, \quad y = x^2, \quad z = x^3. \quad (4.503)$$

Используя формулу Дингля (4.402) для символов Кристоффеля совместно с формулой (2.501) для тензора Римана — Кристоффеля, находим, что, например, компонента R_{441}^1 равна

$$R_{441}^1 = \frac{\Lambda}{3}.$$

Следовательно, одна компонента тензора Римана — Кристоффеля в этой частной системе координат отлична от нуля; тензор не является нулевым, так что пространство-время (4.501) искривлено. С другой стороны, уравнения Эйнштейна (4.407) — (4.412) показывают, что компоненты тензора энергии, для которых

$$\mu\nu = 12, 13, 23, 14, 24, 34,$$

тождественно равны нулю, поскольку A, B, C, D являются функциями только от одной координаты. Уравнение (4.406) принимает вид

$$\begin{aligned} -8\pi GT^{44} = & -\frac{1}{4} \left(\frac{CA_4B_4 + BA_4C_4 + AB_4C_4}{ABCD} \right) + \\ & + \Lambda = -\frac{3}{4} \left(\frac{4}{3} \Lambda \right) + \Lambda = 0, \end{aligned} \quad (4.504)$$

тогда как уравнения (4.403) — (4.405) дают

$$\begin{aligned} 8\pi G \frac{e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}}{c^2} T^{ii} = & -e^{-2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \frac{d^2}{dt^2} \left(e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \right) + \\ & + \frac{1}{4} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\ln \left(e^{2\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} \right) \right] \right\}^2 + \Lambda = \\ = & \left(-\frac{4}{3} \Lambda + \frac{1}{3} \Lambda \right) + \Lambda = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (4.505)$$

Таким образом, все компоненты тензора энергии тождественно равны нулю во всех точках-событиях (t, x, y, z) пространства-времени (4.501). Кроме того, не имеется сингулярных точек-событий, в которых тензор $T^{\mu\nu}$ можно было бы рассматривать как неопределенный из-за бесконечностей или каких-либо других особенностей в правых частях уравнений (4.403) — (4.412). Таким образом, данное пространство-время вообще не представляет какого-либо распределения вещества, и не существует поля тяготения, которое бы соответствовало его кривизне.

Описанный пример известен с 1917 г., и равенство (4.501) представляет собой одну из форм метрики вселенной де Ситтера, которая будет рассмотрена в § 9.7. Было высказано предположение, что это пространство-время могло бы представлять предельное распределение вещества, тензор энергии которого некогда был отличен от нуля и стремится к нулю с течением времени. Следует отметить, что автору неизвестно доказательство этого предположения. С другой стороны, вывод о равенстве нулю тензора энергии существенно зависит от наличия космологической постоянной в уравнениях Эйнштейна; последняя, как будет показано в § 6.5, определяет гравитационный эффект, эквивалентный гравитационному эффекту некоего распределения вещества. В самом деле, если в формуле (4.501) $\Lambda = 0$, то метрика превращается в метрику пространства-времени Минковского, кривизна которого равна нулю. Эта интерпретация могла бы показаться удовлетворительной, однако один пример, обнаруженный Таубом [3] в 1951 г., показывает ее несостоятельность. Пространство-время в примере Тауба не является ни статическим, ни ортогональным, и его метрика имеет вид

$$ds^2 = e^{(\alpha_1 + \alpha_2)t} \operatorname{ch} u \, dt^2 - \frac{1}{c^2} \left\{ e^{2t} \operatorname{ch} u \, dx^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{\operatorname{ch} u} \, dy^2 - 2\beta x \frac{1}{\operatorname{ch} u} \, dy \, dz + \left(\beta^2 x^2 \frac{1}{\operatorname{ch} u} + e^{\alpha_1 t} \operatorname{ch} u \right) dz^2 \right\}, \quad (4.506)$$

где

$$u = \beta c (t + t_0),$$

и $\alpha_1, \alpha_2, \beta, t_0$ — постоянные, первые три из которых удовлетворяют соотношению

$$\beta^2 c^2 = \alpha_1 \alpha_2.$$

Вычисляя следующие две компоненты тензора Римана — Кристоффеля и используя непосредственно определение (2.501), получаем

$$\begin{aligned} R_{411}^1 &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 41 \end{matrix} \right\} - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 44 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ 41 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ \tau 4 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ 44 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 1\tau \end{matrix} \right\} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 41 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 41 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 41 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 44 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 14 \end{matrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \beta^2 c^2 (1 - \text{th}^2 u) - \frac{\alpha_1}{4} (\alpha_2 + \beta c \text{th} u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{424}^2 &= -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 42 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ 44 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 2\tau \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ 42 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ \tau 4 \end{matrix} \right\} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 42 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 44 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 24 \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 24 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 24 \end{matrix} \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \beta^2 c^2 (1 - 2 \text{th}^2 u) - \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{4} \beta c \text{th} u. \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольного значения t обе компоненты тензора Римана — Кристоффеля отличны от нуля, и ни при каком значении t обе компоненты тензора не равны нулю одновременно. Ввиду этого пространство-время (4.506) искривлено в любой момент времени. Все компоненты тензора Риччи, подсчитанные с помощью формулы (2.507), оказываются тождественно равными нулю, несмотря на то, что тензор Римана — Кристоффеля отличен от нуля. Следовательно, если предположить, что космологическая постоянная в уравнениях Эйнштейна (4.108) равна нулю, то тензор энергии распределения вещества, представленного метрикой (4.506), тождественно равен нулю. Таким образом особые точки-события отсутствуют, и распределение вещества, поле тяготения которого соответствовало бы кривизне пространства-времени, на самом деле не существует.

Эти два примера показывают, что независимо от того, включена или не включена в уравнения Эйнштейна космологическая постоянная, невозможно утверждать, что причиной тяготения является кривизна пространства-времени. Можно лишь утверждать, что если пространство-время должно представлять гравитационные и механические свойства распределения вещества, то тензор Риччи должен быть отличен от нуля; это в свою очередь означает, что тензор Римана — Кристоффеля не может быть нулевым тензором и, следовательно,

пространство-время должно быть искривленным. Обратное утверждение, однако, неверно. Произвольное искривленное пространство-время не обязательно представляет распределение вещества: некоторым из этих пространств могут соответствовать нулевые тензоры энергии, тогда как другие могут представлять распределение вещества, тензоры энергии которых хотя и ненулевые, но недопустимы с физической точки зрения.

Важно также отметить, что два примера, рассмотренные в этом параграфе, не подразумевали, что тензор энергии имеет форму (4.104), соответствующую идеальной жидкости. Какова бы ни была природа вещества, пространствам (4.501) и (4.506) соответствуют нулевые тензоры энергии, и этот результат не теряет силы и в том случае, если вещество не является идеальной жидкостью.

§ 4. 6. Ускоренные координатные системы

В § 4.3 было установлено, что риманова система координат, построенная вблизи некоторой точки-события пространства-времени (4.102), свободно падает в поле тяготения с распределением вещества, описываемым этим пространством-временем (предполагается, конечно, что последнее не является пространством-временем такого исключительного типа, как рассмотренное в § 4.5). Поучительно исследовать этот вопрос несколько глубже, рассматривая снова пространство-время (4.226). Пусть начало римановых координат находится в точке-событии O , координаты которой $(x_0^4, x_0^1, x_0^2, x_0^3)$. Обращая опять ряды (2.609), получаем следующие выражения для римановых координат некоторого события P , расположенного вблизи O :

$$y^\sigma = x^\sigma - x_0^\sigma + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}_0 (x^\mu - x_0^\mu) (x^\nu - x_0^\nu) + \dots$$

$$(\sigma = 1, 2, 3, 4),$$

где в правых частях равенств опущены члены, включающие тройные и более высокого порядка произведения разностей

$x^\sigma - x_0^\sigma$. Дифференцируя один раз по переменной s и используя соотношение (2.608), имеем

$$\lambda_0^\sigma = \frac{dx^\sigma}{ds} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}_0 \frac{dx^\mu}{ds} (x^\nu - x_0^\nu) + \dots \quad (4.601)$$

$$(\sigma = 1, 2, 3, 4),$$

где левые части равенств являются постоянными. Второе дифференцирование по s дает

$$0 = \frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}_0 \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} + \dots \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4),$$

где в правых частях равенств опущены члены, содержащие множители $(x^\sigma - x_0^\sigma)$. Таким образом, в самой точке-события O эти равенства сводятся к

$$\left(\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} \right)_0 = - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\nu \end{matrix} \right\}_0 \lambda_0^\mu \lambda_0^\nu \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \quad (4.602)$$

4-вектор скорости пространственной точки (x_0^1, x_0^2, x_0^3) в момент времени x_0^4 есть v_0^σ ; здесь, полагая в равенстве (4.601) $x^\nu = x_0^\nu$, имеем

$$v_0^\sigma = \left(\frac{dx^\sigma}{ds} \right)_0 = \lambda_0^\sigma, \quad (\sigma = 1, 2, 3, 4), \quad (4.603)$$

и, в силу равенств (4.307) и (4.226),

$$(1 - \kappa\psi_0)(v_0^4)^2 - \frac{1 + \kappa\psi_0}{c^2} \sum_{j=1}^3 (v_0^j)^2 = 1.$$

Если теперь пространственная точка все время остается в покое относительно координатной системы (x) , то $v_0^j = 0$ ($j = 1, 2, 3$) и

$$(1 - \kappa\psi_0)(v_0^4)^2 = 1.$$

Поэтому уравнения (4.602) принимают вид

$$\left(\frac{d^2 x^\sigma}{ds^2} \right)_0 = - \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ 44 \end{matrix} \right\}_0 (v_0^4)^2 = - (1 + \kappa\psi_0) \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ 44 \end{matrix} \right\}_0$$

$$(\sigma = 1, 2, 3, 4),$$

или, используя в формуле (4.226) формулы Дингля (4.402),

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2 x^4}{ds^2} \right)_0 &= 0, \\ \left(\frac{d^2 x^j}{ds^2} \right)_0 &= \frac{xc^2}{2} (1 + \kappa \psi_0) \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right)_0 = \frac{xc^2}{2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right)_0 = \\ &= 4\pi G \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^j} \right)_0 \quad (j = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Первое из этих равенств показывает, что с рассматриваемой точностью x_0^4 совпадает с s в точке-событии O , а остальные три уравнения указывают, что пространственная точка (x_0^1, x_0^2, x_0^3) подвержена гравитационному ускорению поля, определенному функцией ψ . Так как точка-событие с координатами $(x_0^4, x_0^1, x_0^2, x_0^3)$ является началом римановой системы координат, отсюда следует, что эта система координат свободно падает в поле тяготения. Отметим также, что этот результат является следствием (4.602) и, следовательно, мог бы быть также выведен с помощью (2.305) и (4.603); другими словами, можно сказать, что начало римановых координат скреплено с пробной частицей, находящейся в гравитационном поле.

Если риманову систему координат (y) можно отождествить с инерциальной системой специальной теории относительности, поскольку уравнения геодезической линии в начале координат системы (y) принимают форму

$$\frac{d^2 y^\mu}{ds^2} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3, 4),$$

то отсюда следует, что системы (x) и (y) находятся в относительном ускоренном движении. Поэтому иногда говорят, что сущность общей теории относительности заключается в использовании систем координат, движущихся ускоренно друг относительно друга, и что именно это является характерной чертой, отличающей общую теорию относительности от специальной. Это утверждение, однако, вводит в заблуждение, так как ничто не мешает исследователю использовать ускоренные координатные системы в самом пространстве-времени Минковского, как показывает следующий

пример. Пусть метрика пространства-времени Минковского имеет вид

$$ds^2 = (dx^4)^2 - \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^3 (dx^j)^2 \quad (4.604)$$

в координатах (x^4, x^1, x^2, x^3) инерциальной системы S . Рассмотрим систему A с координатами (t, x, y, z) , где

$$\left. \begin{aligned} t + \frac{x}{c} &= \frac{1}{\alpha} \ln \left\{ \alpha \left(x^4 + \frac{x^1}{c} \right) \right\}, \\ t - \frac{x}{c} &= \frac{1}{\beta} \ln \left\{ \beta \left(x^4 - \frac{x^1}{c} \right) \right\}, \\ y &= x^2, \\ z &= x^3, \end{aligned} \right\} \quad (4.605)$$

а α и β — постоянные, размерность которых обратна размерности времени. Беря дифференциалы равенств (4.605), имеем

$$\begin{aligned} dx^4 + \frac{dx^1}{c} &= e^{\alpha \left(t + \frac{x}{c} \right)} \left(dt + \frac{dx}{c} \right), \\ dx^4 - \frac{dx^1}{c} &= e^{\beta \left(t - \frac{x}{c} \right)} \left(dt - \frac{dx}{c} \right), \\ dx^2 &= dy, \\ dx^3 &= dz, \end{aligned}$$

так что метрика (4.604) может быть также записана в виде

$$ds^2 = e^{\alpha \left(t + \frac{x}{c} \right) + \beta \left(t - \frac{x}{c} \right)} \left(dt^2 - \frac{dx^2}{c^2} \right) - \frac{1}{c^2} (dy^2 + dz^2). \quad (4.606)$$

Преобразование (4.605) не меняет, конечно, нулевой характер тензора Римана—Кристоффеля пространства-времени Минковского, которое независимо от того, какая из формул (4.604) или (4.606) используется для метрики, остается плоским. Поэтому тензор Риччи по-прежнему тождественно равен нулю, и то же относится к тензору энергии, хотя метрические коэффициенты в (4.606) уже не постоянны. Таким образом (4.606) не представляет какого-либо распределения вещества, и, следовательно, поле тяготения отсутствует. Тем

не менее рассмотрим пробную частицу, 4-вектор скорости которой v^μ имеет относительно системы A значения:

$$v^4 \neq 0, v^1 = \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = qv^4, v^2 = v^3 = 0. \quad (4.607)$$

Применяя уравнения геодезической линии (2.807) и (2.808) к метрике (4.606), имеем

$$\frac{d}{ds} \{e^{Xv^4}\} - \frac{\alpha + \beta}{2} \left\{ (v^4)^2 - \frac{(v^1)^2}{c^2} \right\} e^X = 0, \quad (4.608)$$

где

$$X = \alpha \left(t + \frac{x}{c} \right) + \beta \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

и

$$e^X \left\{ (v^4)^2 - \frac{(v^1)^2}{c^2} \right\} = 1. \quad (4.609)$$

Первое из этих равенств может быть также записано в виде

$$\frac{dv^4}{ds} + \left\{ \frac{1}{2} (\alpha + \beta) (\alpha - \beta) \frac{q}{c} + \frac{1}{2} (\alpha + \beta) \frac{q^2}{c^2} \right\} (v^4)^2 = 0. \quad (4.610)$$

Предположим, что пространственная скорость q пробной частицы мала по сравнению с c , так что в формуле (4.610) члены q/c и q^2/c^2 пренебрежимо малы. Тогда приближенный интеграл этого уравнения имеет вид

$$\frac{dt}{ds} = v^4 = \left\{ 1 + \frac{1}{2} (\alpha + \beta) s \right\}^{-1},$$

откуда

$$t = \frac{2}{\alpha + \beta} \ln \left\{ 1 + \frac{1}{2} (\alpha + \beta) s \right\}$$

и, следовательно,

$$v^4 = e^{-\frac{1}{2} (\alpha + \beta) t}. \quad (4.611)$$

Но теперь (3.609) можно представить в виде

$$e^X \left(1 - \frac{q^2}{c^2} \right) (v^4)^2 = 1,$$

или, используя (4.611),

$$1 - e^{-(\alpha - \beta) \frac{x}{c}} = \frac{q^2}{c^2}.$$

Поэтому, дифференцируя по t , получаем ускорение пробной частицы относительно системы координат A

$$\frac{dq}{dt} = \frac{c(\alpha - \beta)}{2} e^{-(\alpha - \beta) \frac{x}{c}}. \quad (4.612)$$

Однако скорость пробной частицы dx^1/dx^4 относительно инерциальной системы S постоянна, как показано в § 3.7, и, следовательно, ее ускорение относительно этой системы равно нулю. Ускорение (4.612) в действительности обусловлено выбором системы координат, движущейся с ускорением относительно S и является произвольным, так как теория пространства-времени Минковского не содержит методов, которые позволили бы связать постоянные α и β с гравитационными эффектами распределения вещества. Общая теория относительности, таким образом, представляет собой нечто большее, чем использование ускоренных координатных систем¹⁾; эта теория предусматривает связь с полями тяготения посредством не равного нулю тензора Риччи, и ускоренные системы появляются как второстепенная черта этой связи.

¹⁾ Мы *вынуждены* пользоваться в общей теории относительности ускоренными системами отсчета, так как *не существует* системы отсчета, неускоренной во всем пространстве-времени, что мы интерпретируем как появление поля тяготения, несмотря на то что локально поле тяготения всегда может быть ликвидировано преобразованием координат. — *Прим. ред.*

Пространство-время Шварцшильда

Как хорошо известно из ньютоновской теории тяготения, потенциал частицы массы M на расстоянии r от этой частицы равен $\psi = M/r$, и этот потенциал является так называемым *элементарным решением* уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \psi = 0.$$

Однако $\psi = M/r$ можно рассматривать так же, как потенциал тяготения сферы массы M конечных размеров на расстоянии r от центра сферы и вне ее. Таким образом, имея только элементарное решение уравнения Лапласа, без дополнительной информации, невозможно отличить частицу (точечную массу) от сферы конечных размеров. Это следует иметь в виду при интерпретации аналога элементарного решения уравнения Лапласа, который будет теперь получен из уравнений Эйнштейна.

§ 5.1. Метрика пространства-времени Шварцшильда

Рассмотрим пространство-время, обладающее сферической симметрией, метрические коэффициенты которого не зависят от времени. Метрика его, в силу (4.415), имеет вид

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - \frac{1}{c^2} \{ e^{\mu(r)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \}, \quad (5.101)$$

где ν, μ — функции от r , подлежащие определению. Предположим, что центр сферической массы M определяется значением $r = 0$, и пусть тензор энергии вне этой массы тождественно равен нулю. Предположим также, что космологическая постоянная равна нулю. Тогда, используя § 2.8 и

формулы (2.507) и (4.111), имеем уравнения Эйнштейна

$$R_{\lambda\mu} = \frac{\partial^2 (\ln \sqrt{-g})}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} - \frac{\partial}{\partial x^\sigma} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} + \\ + \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma \\ \mu\tau \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \tau \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} \frac{\partial (\ln \sqrt{-g})}{\partial x^\tau} = 0. \quad (5.102)$$

Для пространства-времени (5.101) с определением индексов (4.417) имеем

$$\sqrt{-g} = \frac{1}{c^3} \left\{ e^{\frac{1}{2}(\nu+\mu)} r^2 \sin \theta \right\}, \\ g^{44} = e^{-\nu}, \quad g^{11} = -c^2 e^{-\mu}, \\ g^{22} = -c^2 r^{-2}, \quad g^{33} = -c^2 r^{-2} \sin^{-2} \theta, \quad (5.103)$$

и, обозначая производную по r штрихом, имеем следующие отличные от нуля символы Кристоффеля 2-го рода:

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 11 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \mu', \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 31 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 13 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r}, \\ \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 14 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 41 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \nu', \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -r e^{-\mu}, \\ \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 23 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 3 \\ 32 \end{matrix} \right\} = \operatorname{ctg} \theta, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 33 \end{matrix} \right\} = -r e^{-\mu} \sin^2 \theta, \\ \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 33 \end{matrix} \right\} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 44 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} c^2 e^{\nu-\mu} \nu'. \quad (5.104)$$

Число ненулевых компонент тензора $R_{\lambda\mu}$ равно четырём, и десять уравнений (5.102) сводятся к следующим:

$$R_{44} = c^2 e^{\nu-\mu} \left\{ -\frac{1}{2} \nu'' - \frac{\nu'}{r} + \frac{1}{4} \mu' \nu' - \frac{1}{4} (\nu')^2 \right\} = 0, \quad (5.105)$$

$$R_{11} = \frac{1}{2} \nu'' - \frac{\mu'}{r} - \frac{1}{4} \mu' \nu' + \frac{1}{4} (\nu')^2 = 0, \quad (5.106)$$

$$R_{33} = \sin^2 \theta R_{22} = \sin^2 \theta \left\{ e^{-\mu} + \frac{1}{2} r e^{-\mu} (\nu' - \mu') - 1 \right\} = 0. \quad (5.107)$$

Уравнение $R_{11} + \frac{1}{c^2} e^{\mu-\nu} R_{44} = 0$ удовлетворяется при условии

$$\mu' + \nu' = 0,$$

т. е. при

$$\mu = -\nu,$$

тогда как уравнение (5.107) удовлетворяется, если

$$(1 + rv')e^v = 1,$$

т. е. если

$$e^v = 1 - \frac{\alpha}{r},$$

где α — постоянная интегрирования. Теперь легко проверить, что функции

$$e^v = e^{-\mu} = 1 - \frac{\alpha}{r} \quad (5.108)$$

удовлетворяют каждому из трех уравнений (5.105)–(5.107). Очевидно, что e^v и e^μ стремятся к единице при $r \rightarrow \infty$, и поэтому при больших значениях r пространство-время Шварцшильда вырождается в пространство-время Минковского. Однако оно не является плоским, так как при малых значениях r тензор Римана — Кристоффеля (2.504) имеет отличные от нуля компоненты.

Таким образом пространство-время (5.101) имеет метрику

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{dr^2}{1 - \frac{\alpha}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right\}, \quad (5.109)$$

причем тензор $g_{\mu\nu}$ имеет одну бесконечную и одну нулевую компоненту при $r = \alpha$; эти компоненты тензора меняют знак при $r < \alpha$. Таким образом, (5.109) определяет пространство-время, представляющее поле тяготения вне сферически симметричного распределения вещества с центром в $r = 0$. Имеется особая область внутри $0 \leq r \leq \alpha$, которая при $\alpha = 0$ становится особой точкой. Однако равенство $\alpha = 0$ сводит пространство-время (5.109) к пространству-времени Минковского и, таким образом, означает исчезновение поля тяготения.

Постоянная α определяется посредством перехода к теории Ньютона, и этот переход удобнее всего произвести с помощью уравнений геодезической линии. Используя (2.807) совместно с (5.103), (5.108), имеем соответственно для $\lambda = 4$, 2 и 3:

$$\frac{d}{ds} \left(e^v \frac{dt}{ds} \right) = 0, \quad (5.110)$$

$$\frac{d}{ds} \left(r^2 \frac{d\theta}{ds} \right) - r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 = 0, \quad (5.111)$$

$$\frac{d}{ds} \left(r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{ds} \right) = 0, \quad (5.112)$$

а вместо уравнения для $\lambda = 1$ мы можем использовать интеграл (2.808), а именно

$$e^{\nu} \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left\{ e^{\mu} \left(\frac{dr}{ds} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{ds} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \right\} = 1. \quad (5.113)$$

Эти четыре уравнения в согласии с принципом геодезических линий представляют движение частицы в поле тяготения, представленном пространством временем (5.109). Уравнение (5.110) может быть проинтегрировано и дает

$$\frac{dt}{ds} = \beta e^{-\nu} = \beta \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)^{-1}, \quad (5.114)$$

где β — постоянная интегрирования. Подставляя последнее выражение в интеграл (5.113), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta^2} \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)^2 &= \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) - \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Скорость частицы относительно системы координат (t, r, θ, φ) может быть определена как нетензорная величина q , причем

$$q^2 = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \quad (5.115)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{r}} - \frac{q^2}{c^2 \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right)^2}, \quad (5.116)$$

откуда

$$\frac{q^2}{c^2} = \frac{\beta^2}{4} - \left\{ \frac{\beta}{2} - \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\alpha}{r} \right) \right\}^2. \quad (5.117)$$

Если движение таково, что частица может достигать бесконечных значений r , то ее скорость на бесконечности будет V , где, в силу (5.116),

$$\frac{1}{\beta^2} = 1 - \frac{V^2}{c^2}. \quad (5.118)$$

Рассматривая случай чисто радиального движения, при котором q — функция только от r и t , из соотношения (5.115) получаем, что

$$q = \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{-1/2} \frac{dr}{dt}$$

Используя этот результат и дифференцируя равенство (5.117) по t , получаем

$$\frac{dq}{dt} = \frac{c^2}{\beta} \frac{\alpha}{r^2} \left\{ \frac{\beta}{2} - \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \right\} \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)^{1/2}, \quad (5.119)$$

что может быть названо (нетензорным) радиальным ускорением частицы. Предполагая, что α/r мало по сравнению с единицей, из формул (5.118) и (5.119) получим

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha c^2}{r^2} \left(1 - \frac{2V^2}{c^2}\right).$$

Отсюда, пренебрегая членом V^2/c^2 , имеем

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{\alpha c^2}{r^2},$$

а это уравнение имеет ту же самую форму, что и уравнение Ньютона для (радиального) движения частицы во внешнем поле тяготения сферической массы M , если

$$\alpha = \frac{2GM}{c^2},$$

что определяет α . Удобно заменить α на постоянную $2m$, где

$$m = \frac{1}{2} \alpha = \frac{GM}{c^2}, \quad (5.120)$$

тогда метрика (5.109) перепишется в виде

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 - \frac{1}{c^2} \left\{ \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right\}, \quad (5.121)$$

что является стандартной формой метрики пространства-времени Шварцшильда. Она представляет в общей теории относительности поле тяготения вне сферической массы M , центр которой находится в $r = 0$. Так как особая область $0 \leq r \leq 2m$ имеет конечные размеры при $M \neq 0$, представляется более правильным рассматривать (5.121) как обобщение решения

уравнения Лапласа для поля вне сферы конечных размеров, нежели как аналог решения для точечной массы в теории Ньютона.

Если пространство-время описывает гравитационное поле Солнца, то

$$2m = \frac{2GM_{\odot}}{c^2} = 2,956 \text{ км}, \quad (5.122)$$

и так как радиус Солнца равен $6,963 \cdot 10^5 \text{ км}$, то особая область находится глубоко внутри Солнца. Это означает, что задолго до того, когда достигается особая область, мы встретимся с веществом Солнца, и решение (5.121) уравнений Эйнштейна уже не применимо, так как тензор энергии не равен более нулю, когда мы проникаем сквозь физическую поверхность Солнца. Аналогичные выводы справедливы для всех других звезд, так как их физические радиусы всегда много больше произведения $2G/c^2$ на массу звезды.

В пространстве-времени Шварцшильда может быть введена новая радиальная координата $\bar{r}$ посредством соотношения

$$r = \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2 \bar{r},$$

так что

$$dr = \left(1 - \frac{m^2}{4\bar{r}^2}\right) d\bar{r},$$

$$1 - \frac{2m}{r} = \left(1 - \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2 / \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2.$$

Тогда (5.121) принимает вид

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2} dt^2 -$$

$$- \frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^4 \{d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\theta^2 + \bar{r}^2 \sin^2 \theta d\varphi^2\}, \quad (5.123)$$

что представляет собой изотропную форму метрики. Делая подстановку

$$t = x^4, \quad x^1 = \bar{r} \sin \theta \cos \varphi, \quad x^2 = \bar{r} \sin \theta \sin \varphi,$$

$$x^3 = \bar{r} \cos \theta,$$

получаем

$$ds^2 = \frac{\left(1 - \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2}{\left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2} (dx^4)^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^4 \{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\}, \quad (5.124)$$

где

$$\bar{r}^2 = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

Пренебрегая в формуле (5.124) членами порядка $(m/\bar{r})^2$, получаем

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{\bar{r}}\right) (dx^4)^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{2m}{\bar{r}}\right) \{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\}.$$

Последнее равенство имеет форму (4.226) при

$$\kappa\psi = \frac{8\pi G}{c^2} \psi = \frac{2G}{c^2} \cdot \frac{M}{\bar{r}}.$$

Итак, первое приближение к пространству-времени Шварцшильда соответствует ньютоновскому полю тяготения с потенциалом

$$4\pi\psi = \frac{M}{\bar{r}},$$

который является элементарным решением уравнения Лапласа

$$\nabla^2\psi = 0.$$

Преобразование Лоренца (3.401) оставляет неизменной математическую форму метрики пространства-времени Минковского (3.601). В пространстве-времени Шварцшильда ((5.124) не имеется аналогичных преобразований из-за наличия особой области $0 \leq \bar{r} \leq \frac{m}{2}$. Но, конечно, могут быть введены локальные декартовы системы координат для событий в окрестности некоторого данного события в пространстве-времени Шварцшильда, и преобразования Лоренца между этими координатными системами существуют. Таким образом, специальная теория относительности в пространстве-времени Шварцшильда справедлива локально.

§ 5.2. Обыкновенные геодезические линии пространства-времени Шварцшильда

Теперь мы детально изучим уравнения обыкновенных геодезических линий (5.110) — (5.113). Начнем с обсуждения значения постоянной β в выражении (5.117) для скорости частицы, а именно

$$\frac{q^2}{c^2} = \frac{\beta^2}{4} - \left\{ \frac{\beta}{2} - \frac{1}{\beta} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \right\}^2.$$

В силу (5.118), скорость при $r = \infty$ равна $V = c(1 - \beta^{-2})^{1/2}$ и является мнимой, нулевой или действительной соответственно при $\beta < 1$, $\beta = 1$, $\beta > 1$. Если $\beta < 1$, частица не может достигать бесконечных значений r . В двух других случаях постоянная β может быть интерпретирована следующим образом. При $r = \infty$ пространство-время Шварцшильда вырождается в пространство-время Минковского специальной теории относительности. Поскольку в этом случае

$\beta = \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{-1/2}$, постоянная β является множителем, используемым в преобразовании Лоренца от системы координат (t, r, θ, φ) к инерциальной системе, в которой частица покоится. Система (t, r, θ, φ) является инерциальной системой, в которой частица, имеющая при $r = \infty$ скорость, равную нулю, продолжает оставаться в покое. Таким образом, скорость частицы на бесконечности ограничена условием $V \leq c$ в противоположность случаю теории тяготения Ньютона, в которой скорость частицы на бесконечности могла иметь любое значение. Если частица движется радиально и имеет на бесконечности скорость V , то из (5.117), (5.118) и (5.119) следует, что максимально достижимая этой частицей скорость не превосходит скорости q_1 , численно равной

$$q_1 = \frac{1}{2} c \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{-1/2}. \quad (5.201)$$

и эта скорость достигается при $r = r_1$, где

$$r_1 = 4m \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) / \left(1 - \frac{2V^2}{c^2} \right), \quad (5.202)$$

в то время как при $r = \alpha = 2m$ скорость равна нулю. Ускорение dq/dt обращается в нуль при $r = r_1$ и $r = 2m$; оно

отрицательно при $r > r_1$ и положительно при $r_1 > r > 2m$. Таким образом движение частицы в области значений r , определяемой последним неравенством, может быть описано на языке механики Ньютона как обусловленное отталкиванием со стороны центрального тела. Поскольку допустимы лишь положительные значения r_1 , то максимально достижимое значение скорости частицы ограничено, в силу (5.202), неравенством $V \leq c/\sqrt{2}$. Поэтому максимальное значение скорости из (5.201) лежит в пределах

$$\frac{c}{\sqrt{2}} \geq q_1 \geq \frac{c}{2},$$

причем нижний предел соответствует достижению максимальной скорости при $r = 4m$, а верхний — при $r = \infty$. Для частиц, скорости которых на бесконечности заключены в интервале $c > |V| > c/\sqrt{2}$, значение β велико, и их скорости непрерывно уменьшаются с приближением к центральному телу. Таким образом, тяготение не может ускорить частицу до скорости, близкой к скорости света, но, наоборот, замедляет частицы, которые на бесконечности движутся с достаточно большими скоростями.

Геодезическая линия, которая представляет движение частицы в плоскости, проходящей через $r = 0$ (причем частица описывает некоторую орбиту вокруг этой точки), может быть найдена при помощи подстановки

$$\frac{d\theta}{ds} = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

в уравнения геодезической линии. В результате (5.111) выполняется тождественно; интеграл уравнения (5.112) равен $r^2 \frac{d\varphi}{ds} = hc$, где hc — постоянная интегрирования, тогда как (5.114) дает

$$\frac{dt}{ds} = \beta \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}.$$

Поэтому соотношение (5.113) приобретает вид

$$1 = \beta^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} - \frac{h^2}{r^4} \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2 \right\},$$

что подстановкой $u = \frac{1}{r}$ может быть преобразовано к виду

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2(1 - 2mu) = \frac{\beta^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2} u.$$

Продифференцировав это уравнение по φ , получаем эквивалентное дифференциальное уравнение второго порядка, а именно

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2. \quad (5.203)$$

Общее решение этого уравнения содержит эллиптические функции; если же $m/h^2 \gg 3mu^2$, то можно получить следующее приближенное решение. Известно, что орбита, дифференциальное уравнение которой имеет вид

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{m}{h^2}, \quad (5.204)$$

является коническим сечением

$$pu = 1 + e \cos(\varphi - \omega), \quad p = \frac{h^2}{m}, \quad (5.205)$$

где e и ω — постоянные интегрирования. Пусть

$$p'u = 1 + e \cos \chi, \quad \chi = (1 - \varepsilon)(\varphi - \omega) \quad (5.206)$$

— предполагаемое решение уравнения (5.203), где p' — некая новая постоянная, $e < 1$, величина m/p'^2 предполагается столь малой, что величиной $e^2 m/p'^2$ можно пренебречь, а ε — некая постоянная, квадратом которой также можно пренебречь. Подставляя выражение (5.206) в уравнение (5.203), при соблюдении упомянутых условий мы имеем

$$-\frac{e(1-2\varepsilon)}{p'} \cos \chi + \frac{1}{p'} + \frac{e}{p'} \cos \chi \equiv \frac{1}{p} + \frac{3m}{p'^2} (1 + 2e \cos \chi),$$

и

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{p} + \frac{3m}{p'^2}, \quad \varepsilon = \frac{3m}{p'}.$$

Следовательно, приближенно справедливы равенства

$$\frac{p}{p'} = 1 + \frac{3m}{p}, \quad \varepsilon = \frac{3m}{p}. \quad (5.207)$$

Теперь, если a — большая полуось эллипса (5.205), то $p = a(1 - e^2)$, и из (5.207) имеем

$$\varepsilon = \frac{3m}{a(1 - e^2)}.$$

Но последовательные максимумы u (минимумы r) отделены друг от друга интервалами χ , равными 2π , и это соответствует интервалам величины $\varphi - \omega$, равным

$$\varphi - \omega = \frac{2\pi}{1 - \varepsilon} = 2\pi(1 + \varepsilon).$$

Поэтому при одном обороте φ оказывается больше 2π на величину

$$\Delta\varphi = 2\pi\varepsilon = \frac{6\pi m}{a(1 - e^2)} \text{ рад} = \frac{6\pi m}{a(1 - e^2)} (2,06265 \cdot 10^5)'' . \quad (5.208)$$

Для применения этих результатов к солнечной системе необходимо прежде всего отождествить координаты (t, r, θ, φ) с координатами, применяемыми астрономами.

Метод измерения расстояний в солнечной системе в принципе состоит в следующем. Ньютоновская теория тяготения с лежащим в ее основе предположением о господстве евклидовой геометрии используется для построения с помощью третьего закона Кеплера и уравнения (5.204) модели солнечной системы в относительных единицах. Масштабный множитель находится при помощи измерения расстояния от Земли до какой-либо планеты, например до малой планеты Эрос в момент противостояния. Эта часть процедуры измерения является тригонометрической и требует построения базисной линии на поверхности Земли. Иногда высказывается мнение, что, поскольку в процедуру измерений включена длина этой базисной линии, все расстояния в солнечной системе в конечном счете зависят от жестких измерительных стержней. Однако, очевидно, это не так, поскольку мерная лента, с помощью которой производятся топографические измерения, не является жесткой. Существенным критерием является не жесткость (или нежесткость) измерительной аппаратуры, а внутренняя согласованность топографических съемок поверхности Земли. Во всяком случае, эти операции ведут к расстояниям в солнечной системе, точность которых оценивается в $1/9000$.

То, что найденное таким образом гелиоцентрическое расстояние возможно отождествить с величиной r пространства-времени Шварцшильда, можно обосновать так. Если $R_{\odot}$ — физический радиус Солнца, то метрика (5.121) применима только при $r > R_{\odot}$. Коэффициент при выражении $(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$ в формуле (5.121) показывает, что в любой момент времени t разность радиусов сфер R и $R_{\odot}$ с центрами, лежащими в Солнце, равна $R - R_{\odot}$. Изменение r между этими сферами, однако, определяется выражением

$$\int_{R_{\odot}}^R \frac{dr}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1/2}} = (R - R_{\odot}) \left\{ 1 + \frac{m}{R - R_{\odot}} \ln \frac{R}{R_{\odot}} + \frac{3}{2} \frac{m^2}{RR_{\odot}} + \dots \right\};$$

отклонение от евклидовой геометрии представлено членами в правой части равенства, включающими m . Однако, даже если R очень мало (скажем, $R = 2,48R_{\odot}$), величина $\frac{m}{R - R_{\odot}} \ln \frac{R}{R_{\odot}}$ порядка $1/8 \cdot 10^6$. Поэтому отождествление r с гелиоцентрическими расстояниями, вычисленными астрономами на основе евклидовой геометрии, дает ошибку, не превышающую одной восьмимиллионной, что намного меньше ошибок в самих расстояниях.

Подобно этому приближенно евклидовый характер геометрии наводит на мысль, что φ можно отождествить с углом между направлениями с Солнца на планету и на точку весеннего равноденствия, а θ — углом, измеряемым от нормали к плоскости орбиты. Наконец, будем предполагать, что временная координата t измеряет время, применяемое в астрономических обсерваториях, например всемирное время. Это чисто эмпирическое определение координат (t, r, θ, φ) , предназначенное для анализа конкретной физической ситуации и возможное только благодаря астрономической практике. Оно иллюстрирует высказанное в § 4.2 положение относительно апостериорного отождествления координат и справедливости определений, опирающихся на согласие наблюдений с такого рода определениями.

Чтобы найти отношение члена m/h^2 к $3mu^2$ в уравнении (5.203) для планет солнечной системы, необходимо знать

численные значения β и h . Средние расстояния до Солнца и средние орбитальные скорости планет меняются от $58 \cdot 10^6$ км и 48 км/сек для Меркурия до $45 \cdot 10^8$ км и $5,4$ км/сек для Нептуна¹⁾. Таким образом, $2m/r$ на орбите планеты порядка $5,1 \cdot 10^{-8}$ или еще меньше, тогда как q^2/c^2 не превосходит $2,56 \cdot 10^{-8}$. Поэтому из равенств (5.116) и (5.120) следует, что постоянная β чуть меньше единицы даже для такой близко расположенной к Солнцу планеты, как Меркурий. С другой стороны,

$$hc = r \left(r \frac{d\varphi}{ds} \right) = \beta r \left(r \frac{d\varphi}{dt} \right) \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1},$$

где $r \frac{d\varphi}{dt}$ можно отождествить с орбитальной скоростью планеты. Таким образом, с высокой степенью точности

$$h = 58 \cdot 10^6 \left(\frac{48}{3 \cdot 10^5} \right) = 9,3 \cdot 10^3 \text{ (Меркурий)},$$

$$h = 45 \cdot 10^8 \left(\frac{5}{3 \cdot 10^5} \right) = 7,5 \cdot 10^4 \text{ (Нептун)}.$$

Итак, отношение $3mu^2$ к m/h^2 равно $3h^2/r^2$, и его численное значение изменяется от $7,7 \cdot 10^{-8}$ для Меркурия до $8,3 \cdot 10^{-10}$ для Нептуна. Тем самым приближения, ведущие к формуле (5.208), полностью оправданы, и можно сделать вывод, что $\Delta\varphi$ дает величину смещения перигелия планеты за один оборот. Ньютоновская теория, однако, показывает, что перигелий планеты смещается из-за возмущений, создаваемых остальными планетами, и вследствие других причин. Для Меркурия полное угловое смещение [2] перигелия за 100 земных лет, обусловленное этими эффектами, равно $5557'',18 \pm 0'',85$, тогда как наблюдаемое смещение равно $5599'',74 \pm 0'',41$, т. е. имеется разность в $42'',56 \pm 0'',94$. Соответствующие числа для Земли — $6179'',1 \pm 2'',5$ и $6183'',7 \pm 1'',1$; разность равна $4'',6 \pm 2'',7$. Эти разности могут быть объяснены с помощью формулы (5.208), которую можно записать в виде

$$\Delta\varphi_{100} = \left\{ \frac{3\pi (2,956)}{a(1-e^2)} (2,06265) \frac{T_{\oplus}}{T} \cdot 10^7 \right\}'' = \left\{ \frac{57,465 \cdot 10^7}{a(1-e^2)} \cdot \frac{T_{\oplus}}{T} \right\}''.$$

¹⁾ Для Плутона, самой далекой из известных планет солнечной системы, эти числа равны соответственно $60 \cdot 10^8$ км и $4,7$ км/сек. — Прим. ред.

где $T_{\oplus}$ — период обращения Земли, T — период обращения рассматриваемой планеты. Результаты для Меркурия, Земли и Марса приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

	$a, 10^6 \text{ км}$	e	T , зв. сутки	$\Delta\varphi_{100}$, (выч.)	$\Delta\varphi_{100}$, (наблюд.)
Меркурий . .	47,740	0,2056	87,9692	43",15	42",56 ± 0",94
Земля	149,504	0,0167	365,256	3",84	4",6 ± 2",7
Марс	227,798	0,0934	686,980	1",35	—

Таким образом, отождествление планеты с частицей, описывающей геодезическую линию в пространстве-времени Шварцшильда, удовлетворительно объясняет тот эффект в смещении перигелия рассматриваемой планеты, который ньютоновская теория тяготения оставляла необъясненным. Важность этого результата часто недооценивается. Известно, что добавление к ньютоновскому закону тяготения малой силы вида ϵ/r^n , где ϵ и n (положительные) постоянные, вызывает вращение перигелия планеты. Однако постоянные ϵ и n не определяются теорией такого рода; вращение может быть прямым или обратным, и его характер и величина могут быть найдены только посредством апостериорного обращения к экспериментальным данным. В противоположность этому теория пространства-времени Шварцшильда ведет к конкретной формуле для вращения перигелия, показывающей, что эффект прямой и его величина зависят от массы Солнца и от элементов орбиты a , e , скомбинированных специальным образом, указанным формулой (5.208).

§ 5.3. Нулевая геодезическая линия пространства-времени Шварцшильда

Уравнения нулевой геодезической линии пространства-времени с метрикой (5.121) вытекают из уравнений (2.807) с заменой s ненулевым параметром μ , и имеют интеграл (2.809).

Эти уравнения имеют вид:

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \frac{dt}{d\mu} \right\} = 0, \quad (5.301)$$

$$\frac{d}{d\mu} = \left(r^2 \frac{d\theta}{d\mu} \right) - r^2 \sin \theta \cos \theta \left(\frac{d\varphi}{d\mu} \right)^2 = 0, \quad (5.302)$$

$$\frac{d}{d\mu} \left(r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\mu} \right) = 0, \quad (5.303)$$

$$\left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(\frac{dt}{d\mu} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\mu} \right)^2 + \right. \\ \left. + r^2 \left(\frac{d\theta}{d\mu} \right)^2 + r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\mu} \right)^2 \right\} = 0. \quad (5.304)$$

Если использовать определение (5.115) также и для скорости светового луча, то уравнение (5.304) дает

$$q^2 = c^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right), \quad (5.305)$$

и, следовательно, $q = c$ только на бесконечности. Скорость светового луча уменьшается при приближении к центральному телу. Движение в некоторой плоскости может быть также получено посредством подстановки

$$\frac{d\theta}{d\mu} = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2},$$

и в этом случае интегралы уравнений (5.301) и (5.303) соответственно имеют вид

$$\frac{dt}{d\mu} = \beta^* \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1}, \quad r^2 \frac{d\varphi}{d\mu} = h\beta^*c,$$

где β^* и $h\beta^*c$ — постоянные интегрирования. Уравнение (5.304) при подстановке $u = 1/r$ превращается в

$$\left(\frac{h}{d\varphi} \frac{du}{d\varphi} \right)^2 + h^2 u^2 = 1 + 2mh^2 u^3, \quad (5.306)$$

что определяет траекторию светового луча в плоскости r, φ . Предположим временно, что $2mh^2 u^3$ мало по сравнению с единицей. Тогда мы можем получить приближенное решение уравнения (5.306) в виде

$$hu = \cos \beta \sin \varphi - \sin \beta \cos \varphi + \frac{m}{h} f(\varphi),$$

где β — некоторый постоянный угол, f — функция, подлежащая определению, а квадратом и более высокими степе-

ниями m/h можно пренебречь. Нам будет удобно считать β малым углом и положить

$$\frac{m \cos \beta}{h} = \frac{m}{h}, \quad \frac{m}{h} \sin \beta = 0.$$

Тогда, подставляя написанное выше выражение для hu в (5.306), получаем уравнение для f

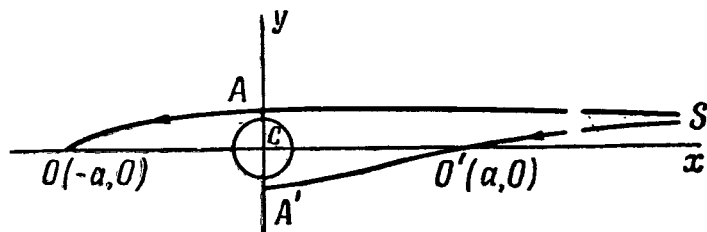
$$\frac{df}{d\varphi} \cos \varphi + f \sin \varphi = \sin^3 \varphi,$$

и интересующее нас частное решение этого уравнения имеет вид

$$f = \sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \varphi.$$

Так как $u = \frac{1}{r}$, путь светового луча имеет, таким образом, вид

$$\frac{h}{r} = \cos \beta \sin \varphi - \sin \beta \cos \varphi + \frac{m}{h} (\sin^2 \varphi + 2 \cos^2 \varphi).$$



Р и с. 2.

Вводя прямоугольные координаты с началом в центре C центрального тела, как показано на рис. 2, имеем

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

и поэтому путь луча света есть

$$h = y \cos \beta - x \sin \beta + \frac{m}{h} \frac{y^2 + 2x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (5.307)$$

Эта формула может быть использована для интерпретации явления отклонения световых лучей, наблюдаемого при полных затмениях Солнца. На рис. 2 C — центр Солнца, S — некоторая звезда, расположенная в точке (X, Y) и наблю-

даемая вблизи солнечного лимба во время полного затмения наблюдателем O , находящимся в точке $(-a, 0)$, где a — среднее значение радиуса земной орбиты. Спустя шесть месяцев наблюдатель находится в точке $O'(a, 0)$. Радиус Солнца $R_\odot$ и координата Y звезды много меньше, чем a и X , а само a пренебрежимо мало по сравнению с X . Так как путь луча OAS проходит через точку $(-a, 0)$, мы имеем

$$h = a \sin \beta + \frac{2m}{h} a, \quad (5.308)$$

откуда видно, что h порядка $a \sin \beta$ и также пренебрежимо мало по сравнению с X . Но OAS проходит также через точку (X, Y) , что приближенно дает

$$h = Y \cos \beta - X \sin \beta + \frac{2m}{h} X,$$

или, пренебрегая членом h/X ,

$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg} \beta - \frac{2m}{h} \frac{1}{\cos \beta}.$$

Соответствующие соотношения для постоянных h' , β' светового пути $O'A'S$ и уравнение для Y/X имеют аналогичный вид

$$h' = -a \sin \beta' + \frac{2m}{h'} a, \quad (5.309)$$

$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tg} \beta' - \frac{2m}{h'} \frac{1}{\cos \beta'}.$$

Так как β , β' — малые углы, два значения Y/X дают

$$\beta - \beta' = \frac{2m}{h} - \frac{2m}{h'}. \quad (5.310)$$

Вблизи поверхности Солнца x и y в равенстве (5.307) по крайней мере порядка $R_\odot$, и световые лучи являются приближенно прямыми линиями

$$\begin{aligned} h &= y \cos \beta - x \sin \beta, \\ h' &= y \cos \beta' - x \sin \beta'. \end{aligned}$$

Так как $X \gg a$, эти линии будут лежать симметрично по обе стороны от точки C , и их расстояния по нормальям до точки C будут одинаковыми. Пусть $nR_\odot$ — величина любого из этих расстояний, где n — число, лежащее, скажем, между 1 и 10.

Тогда, используя равенства (5.308) и (5.309), приближенно имеем

$$\begin{aligned} nR_{\odot} &= a \sin \beta = h, \\ nR_{\odot} &= a \sin \beta' = -h', \end{aligned}$$

что случайно удовлетворяет приближениям, которые были сделаны при решении уравнения (5.306), так как член $2mh^2u^3$ теперь меньше или равен $2m/nR_{\odot}$, что уже мало по сравнению с единицей. Написав $\Delta\beta = \beta - \beta'$ в (5.310), мы получаем

$$\Delta\beta = \frac{4m}{nR_{\odot}},$$

или в дуговых секундах

$$\Delta\beta = \frac{4m}{nR_{\odot}} (2,06265 \cdot 10^5)'' = \frac{1'',751}{n}, \quad (5.311)$$

Последнее соотношение дает угловое смещение звезды во время солнечного затмения по сравнению с положением этой звезды при отсутствии затмения.

На практике звезды, сфотографированные во время затмения, не находятся на тех местах пластинок, которые соответствовали бы лучам света, „касающимся“ поверхности Солнца ($n=1$); не может быть также точно определено их смещение относительно математической линии OSO' . Угловые расстояния звезд друг относительно друга на пластинке, снятой во время затмения, должны быть сопоставлены с их расстояниями на пластинке сравнения, снятой несколько месяцев спустя; отсюда выводится значение $n\Delta\beta$. При сопоставлении этих двух пластинок трудно различить эффект влияния Солнца на положение звезд и эффект, вызванный изменением масштаба пластинки. Изменение масштаба, если оно имеет место, учесть чрезвычайно трудно; действительно, до затмения 1947 г. не было предусмотрено никакого приспособления для обнаружения подобных изменений масштаба. Во время затмения контрольное звездное поле, расположенное под углом 90° к Солнцу, проектируется на пластинку, снимающую затмившееся Солнце; оно фотографируется одновременно со звездным полем, расположенным вблизи Солнца. Это же самое контрольное звездное поле снимается таким же

образом на пластинке сравнения, что позволяет определить изменение масштаба.

Различные значения $n \Delta\beta$, найденные из наблюдений [3], приведены в табл. 2 с их вероятными или средними ошибками, если эти ошибки были упомянуты авторами. Автору этой книги, не являющемуся астрономом-практиком, трудно судить о том, что следует делать с такими противоречивыми выводами. Тем не менее лучшее поле звезд сравнения снято во время затмения Солнца 1919 г.: звезды оказались равномерно распределенными вокруг Солнца. Звездные поля во время других затмений были скудными: так, звездное поле во время затмения 1929 г. было таково, что по одну сторону солнечного диаметра лежало 17 звезд сравнения, а по другую — только одна. Во время затмения 1936 г. звездное поле было столь неблагоприятным, что Михайлову пришлось в основном использовать звезды, расположенные вблизи краев снятой им пластинки. Поэтому полученные Михайловым результаты не могут иметь большого веса. Примечательно, что все наблюдатели находили значения (если не считать значений Собрал II, Косимицу и Бокаюв, которые испорчены очевидными погрешностями инструментов) в согласии с теорией, за исключением затмения 1929 г. Повторные пересчеты дают различные значения, вероятно, из-за различной трактовки эффекта изменения масштаба. Тем не менее Трюмплер нашел из спорных данных затмения 1929 г. значение $(1,75 \pm 0,19)''$. В этом вопросе мнение специалиста по Солнцу должно иметь большой вес, и интересно отметить, что С. А. Митчелл [4] считает, что затмения 1919, 1922 и 1929 гг. дают значение

$$n \Delta\beta = (1,79 \pm 0,06)'', \quad (5.312)$$

которое, по-видимому, находится в согласии со значением 1952 г. Те, кто считает, что наблюдения дают $n \Delta\beta \geq 2''$, вероятно, считают бесспорным фрейндлиховское значение $(2,24 \pm 0,10)''$ для затмения 1929 г., предпочитают пересчеты данных Собрал I и Валлал II и игнорируют пересчеты Трюмплера и Джексона для затмения 1929 г. Если считать, что наблюдения дают значение (5.312), то предсказание теории можно считать находящимся в согласии с данными наблюдений.

Таблица 2

Дата	Станция	Инструмент		№ пла- стинки	№ звезды	Результаты наблюдений	Наблюдатели	Повторные расчеты
		диа- метр, дюй- мы	фокус- ное рассто- яние, футы					
1919, 29 мая	Собрал I	4	19	7	7	$1'' 98 \pm 0'' 12$ (вер.)	Кромелин [а]	{ Данжон [к] $2'' 05 \pm 0'' 20$ (ср.) Хопман [л] $2,16 \pm 0,14$ *
	Собрал II	8	11	16	6—12	$0,93 \pm ?$	Дэвидсон	
1922, 21 сент.	Принцип	8	11	2	5	$1,61 \pm 0,3$ *	Коттингхэм [а] Эддингтон	{ Данжон [к] $2,05 \pm 0,13$ Фрейдлинх [м] $2,07 \pm ?$ Хопман [м] $2,14 \pm 0,18$ Джексон [н] $2,12 \pm ?$ Данжон [к] $2,07 \pm ?$
	Валлол I	6	10	2	18	$1,74 \pm 0,3$ *	Чант [б] Юнг	
	Валлол II	5	15	4	62—85	$1,72 \pm 0,11$ *	Кэмпбелл [в] Трюмплер	
	Валлол III	4	5	6	134—143	$1,82 \pm 0,15$ *	Кэмпбелл [в] Трюмплер	
1929, 9 мая	Корилло- Даунс	3	5	2	14	$1,77 \pm 0,3$ *	Дэвидсон [г] Долвелл	{ Данжон [к] $2,04 \pm 0,27$ *
	Такенгон	8	28	4	17—18	$2,24 \pm 0,10$ (ср.)	Фрейдлинх [д] Брунн Клюбер	
1936, 19 июня	Куйбышевка	6	20	2	?	$2,71 \pm 0,26$ *	Михайлов [е]	{ Данжон [к] $1,98 \pm 0,14$ *
	Козимицу	8	16	1	10	$2,13 \pm 1,15$ *	Матукума [ж]	
1947, 20 мая	Бокоюва	6	20	1	51	$1,28 \pm 2,67$ *	ван Ёнсбрук [з]	{ Данжон [к] $1,75 \pm 0,19$ *
	Хартум	6	20	2	9—11	$2,01 \pm 0,27$ *	ван Ёнсбрук [и]	
1952, 25 февр.						$1,70 \pm 0,10$ *		

Ссылки на буквы в квадратных скобках см. в [3].

§ 5.4. Гравитационное и доплеровское смещения спектральных линий

Основанное на нулевых геодезических линиях рассмотрение распространения света, используемое в общей теории относительности, соответствует геометрической оптике классической физики. Это рассмотрение не учитывает того обстоятельства, что свет представляет собой периодическое явление. Если постулировать теперь, что свет есть волновое явление и что каждая световая волна характеризуется некоторым временным интервалом, называемым *периодом волны*, то могут быть получены некоторые новые выводы.

Пусть P_i — источник света, расположенный в момент времени t_i в точке $(r_i, \frac{\pi}{2}, 0)$ в пространстве-времени Шварцшильда. Предположим, что P_i движется радиально относительно координатной системы (r, θ, φ) и в момент времени t_i испускает световую волну с периодом Δt_i . Рассмотрим наблюдателя P_0 , находящегося в фиксированном положении $(r_0, \pi/2, 0)$, где $r_0 > r_i$. Световая волна распространяется вдоль нулевой геодезической линии, соединяющей точки P_i и P_0 , причем ее распространение определяется уравнением

$$\frac{dr}{dt} = c \left(1 - \frac{2m}{r} \right).$$

В процессе испускания световой волны точка P_i перемещается в точку $(r_i + \Delta r_i, \pi/2, 0)$; если световая волна проходит через точку P_0 в течение времени от t_0 до $t_0 + \Delta t_0$, то

$$\begin{aligned} t_0 - t_i &= \frac{1}{c} \int_{r_i}^{r_0} \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}}, \\ t_0 + \Delta t_0 - (t_i + \Delta t_i) &= \frac{1}{c} \int_{r_i + \Delta r_i}^{r_0} \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}} = \\ &= \frac{1}{c} \left(\int_{r_i + \Delta r_i}^{r_i} + \int_{r_i}^{r_0} \right) \frac{dr}{1 - \frac{2m}{r}}. \end{aligned}$$

Вычитая из одного соотношения другое, имеем

$$\Delta t_0 - \Delta t_i = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\Delta r_i}{1 - \frac{2m}{r_i}}. \quad (5.401)$$

Но, в силу (5.115) и (5.120), скорость точки P_i в процессе испускания света равна

$$q = \left(1 - \frac{2m}{r_i}\right)^{-1/2} \frac{\Delta r_i}{\Delta t_i}, \quad (5.402)$$

и, таким образом, в силу (5.401), имеем

$$\Delta t_0 = \left\{1 - \frac{q}{c} \left(1 - \frac{2m}{r_i}\right)^{-1/2}\right\} \Delta t_i. \quad (5.403)$$

Следовательно, $\Delta t_0 = \Delta t_i$, если P_i находится в покое ($q = 0$) относительно координатной системы (r, θ, φ) и период световой волны не меняется при перемещении волны вдоль нулевой геодезической линии. Если $q \neq 0$, Δt_0 и Δt_i не равны друг другу и если членом $2m/r_i$ в формуле (5.403) можно пренебречь, мы получаем классическую формулу для эффекта Доплера, причем положительные значения q означают, что источник света P_i движется по направлению к наблюдателю P_0 .

Световая волна, которая имела при испускании период Δt_i , достигает точки P_0 , обладая временным интервалом Δt_0 , и сравнивается там с „эквивалентной“ световой волной. Нам необходимо дать определение этой эквивалентности. Это определение можно получить следующим образом. События $(t_i, r_i, \pi/2, 0)$ и $(t_i + \Delta t_i, r_i + \Delta r_i, \pi/2, 0)$, соответствующие началу и концу процесса испускания световой волны источником P_i , разделены интервалом Δs_i , который, в силу (5.121) и (5.402), равен

$$\begin{aligned} \Delta s_i &= \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r_i}\right) \Delta t_i^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - \frac{2m}{r_i}\right)^{-1} \Delta r_i^2 \right\}^{1/2} = \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r_i}\right)^{1/2} \left\{ 1 - \frac{q^2}{c^2} \left(1 - \frac{2m}{r_i}\right)^{-1} \right\}^{1/2} \Delta t_i. \end{aligned}$$

Таким образом, если членом q^2/c^2 можно пренебречь, имеем

$$\Delta s_i = \left(1 - \frac{2m}{r_i}\right)^{1/2} \Delta t_i.$$

Рассмотрим теперь световую волну вблизи точки P_0 с периодом δt_0 , причем события, соответствующие началу и концу

процесса испускания такой волны вблизи точки P_0 , суть $(t_0, p_0, \pi/2, 0)$ и $(t_0 + \delta t_0, r_0, \pi/2, 0)$ соответственно. Интервал между этими событиями, таким образом, равен

$$\delta s_0 = \left(1 - \frac{2m}{r_0}\right)^{1/2} \delta t_0 = \delta t_0,$$

если $2m/r_0$ пренебрежимо мало. Исходная световая волна периода Δt_i вблизи P_i по определению эквивалентна волне периода δt_0 вблизи P_0 посредством инвариантного соотношения

$$\Delta s_i = \delta s_0,$$

откуда

$$\delta t_0 = \left(1 - \frac{2m}{r_i}\right)^{1/2} \Delta t_i.$$

Таким образом, исключая Δt_i с помощью соотношения (5.403), имеем

$$\frac{\Delta t_0}{\delta t_0} = \left(1 - \frac{2m}{r_i}\right)^{-1/2} \left\{1 - \frac{q}{c} \left(1 - \frac{2m}{r_i}\right)^{-1/2}\right\} = 1 + \frac{m}{r_i} - \frac{q}{c},$$

где и $2m/r_i$ и q/c считаются малыми величинами, квадратами и произведениями которых можно пренебречь. Таким образом, если $\lambda + d\lambda$ — длина волны света, приходящего из P_i при достижении им точки P_0 , и если λ — длина волны эквивалентной световой волны в P_0 , имеем

$$\lambda + d\lambda = c \Delta t_0, \quad \lambda = c \delta t_0,$$

и, следовательно,

$$d\lambda = \lambda \left(\frac{m}{r_i} - \frac{q}{c}\right), \quad (5.404)$$

откуда видно, что, даже если источник света и измерительная аппаратура находятся в относительном покое, происходит смещение спектральных линий к красному концу спектра, определяемое соотношением

$$d\lambda = \lambda \frac{m}{r_i} = \lambda \frac{GM}{c^2 r_i}, \quad (5.405)$$

Это смещение называется *гравитационным красным смещением*; метод, который мы использовали для обнаружения этого эффекта, показывает, что красное смещение переплетается с любым доплеровским эффектом, который может при этом присутствовать.

Применяя соотношения (5.404) и (5.405) к случаю Солнца, можно отождествить P_i с газами в солнечной атмосфере, ответственными за образование линий в спектре Солнца, тогда как P_0 находится на Земле. Поэтому $r_i = R_\odot = 6,963 \cdot 10^5$ км, и, в силу формулы (5.405), $d\lambda/\lambda = 2,12 \cdot 10^{-6}$. Для того чтобы сравнить соотношение (5.404) с измерениями красного смещения в линиях Солнца вблизи $\lambda = 6100 \text{ \AA}$ ($1 \text{ \AA} = 10^{-8} \text{ см}$), сделанными мисс М. Г. Адам [5], мы выразим s , q и $tc/R_\odot$ в км/сек и введем обозначение $\Delta = 1000 d\lambda$. Таким образом, соотношение (5.404) принимает вид

$$\Delta = \frac{6100 \cdot 10^3}{2,998 \cdot 10^5} (0,64 - q) = 20,35 (0,64 - q), \quad (5.406)$$

откуда при $q = 0$ имеем $\Delta = 13,02$. На рис. 3 $NBAS$ — солнечный меридиан, для различных точек которого было

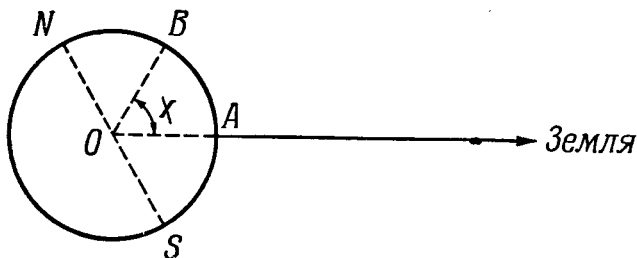


Рис. 3.

найдено красное смещение, а O — центр Солнца. Строго говоря, соотношение (5.406) применимо только к точке A , но так как радиус Солнца мал по сравнению с расстоянием до Земли, формулу для точки B можно записать в виде

$$\Delta = 20,35 (0,64 - q \cos \chi), \quad (5.407)$$

где q — скорость газов Солнца вдоль OB . Измерения производились для точек, лежащих на солнечном меридиане, чтобы избежать введения поправок на эффект Доплера, связанный с вращением Солнца. Однако должны быть учтены поправки (максимальной) величины 0,253 и 0,500 км/сек, связанные с эффектом Доплера, вызванным вращением и орбитальным движением Земли. Эти поправки являются заметными долями

гравитационного красного смещения, эквивалентного скорости $0,64 \text{ км/сек.}$ В колонке Δ_0 табл. 3 приведены данные наблюдений для различных значений угла χ , из которых видно, что теоретическое значение для Δ (при $q=0$) достигается только вблизи лимба. В других точках Δ_0 сильно отличается от теоретического значения. По мнению мисс Адамс, смещения линий, проведенные в колонке Δ_A , вызываются столкновениями атомов в солнечной атмосфере. Согласно подсчетам, для некоторых линий смещение, обусловленное столкновениями, направлено не в красную, а в фиолетовую сторону. Хотя теория, использованная мисс Адам, является очень приближенной, Спитцер [6] подтвердил, что знаки смещений Δ_A могут быть обращены; эти значения приведены в колонке Δ_S . В колонках Δ_1 и Δ_2 приведены разности $\Delta_1 = \Delta_0 - \Delta_A$ и $\Delta_2 = \Delta_0 - \Delta_S$. Далее, в предположении, что именно Δ_1 и Δ_2 — величины, которые описываются соотношением (5.407), в колонках q_1 и q_2 приведены значения радиальной скорости в км/сек. Специалисты по физике Солнца могут допустить или не допустить систематические радиальные скорости атмосферы Солнца столь большой величины, как q_1 или q_2 , со столь странным распределением по солнечному диску. Тем не менее ясно, что эти результаты зависят от величины поправок на столкновения Δ_A или Δ_S , и пока эти поправки не известны с достаточной точностью и уверенностью, интерпретация остающегося красного смещения посредством соотношения (5.406) не может иметь большой убедительности, если вообще имеет таковую.

Таблица 3

$\cos \chi$	Δ_0	Δ_A	Δ_S	Δ_1	Δ_2	q_1	q_2
1,000	$5,0 \pm 0,5$	4,1	—4,1	0,9	9,1	0,60	0,19
0,817	$5,3 \pm 0,6$	3,8	—3,8	1,5	9,1	0,69	0,24
0,639	$5,2 \pm 0,6$	3,4	—3,4	1,8	8,6	0,86	0,34
0,468	$5,9 \pm 0,6$	2,9	—2,9	3,0	8,8	1,05	0,45
0,398	$7,2 \pm 0,6$	2,6	—2,6	4,6	9,8	1,04	0,40
0,282	$9,1 \pm 0,7$	2,1	—2,1	7,0	11,2	1,05	0,32
0,181	$12,9 \pm 0,7$	1,5	—1,5	11,4	14,4	0,45	—0,36

Для любой другой звезды измеряемое значение Δ_0 , очевидно, должно быть некоторым интегральным значением по

всему звездному диску. Данные по Солнцу вынуждают нас заключить, что величины Δ_0 , полученные подобным способом, не могут быть связаны простым образом с гравитационным красным смещением. Белые карлики являются звездами с большими значениями отношения M/r_i , и их гравитационное красное смещение, вероятно, перекрывает любые эффекты, связанные с радиальными скоростями в атмосферах этих звезд. Для звезды 40 Эрида В Поппер [7] измерил смещения, соответствующие $c d\lambda/\lambda = (21 \pm 4) \text{ км/сек}$. Он оценивает массу и радиус этой звезды $M_S = (0,43 \pm 0,04) M_\odot$ и $R_S = (0,016 \pm 0,002) R_\odot$, что приводит по формуле (5.405) с $M = M_S$ и $r_i = R_S$ к величине $c d\lambda/\lambda = (17 \pm 3) \text{ км/сек}$ в хорошем согласии с данными наблюдений. Однако для Сириуса В измеренное красное смещение [8] соответствует значению $c d\lambda/\lambda$, лежащему между 10 и 30 км/сек¹⁾, тогда как массу и радиус звезды полагают равными $M_S = M_\odot$, $R_S = 0,008 R_\odot$, что ведет к теоретическому значению для $c d\lambda/\lambda$, равному 79 км/сек. Таким образом, необходимы дальнейшие наблюдения, прежде чем можно будет решить вопрос о том, находится ли в согласии с наблюдением предсказываемое соотношением (5.405) гравитационное красное смещение. Следует также напомнить, что эта формула выводится из частного решения уравнений Эйнштейна, представленного формулой (5.121). Оно не является единственно возможным решением [9] — точка зрения, на которую часто не обращают внимания те критики, которые, видимо, отождествляют всю общую теорию относительности с теорией пространства-времени Шварцшильда.

¹⁾ Непубликованный анализ этого материала Дж. Койпером показывает, что красное смещение порядка 60—80 км/сек является более вероятным, чем значение, приведенное в тексте, которое, видимо, связано с рассеянием на Сириусе В света от Сириуса А. Поэтому для Сириуса В также имеется хорошее согласие теории и наблюдений.

Приближения к уравнениям Эйнштейна и ньютоновская газовая динамика

При изложении общей теории относительности стало уже традиционным показывать (как это было сделано и в § 4.2), что пространство-время, метрические коэффициенты которого имеют весьма частный вид (4.207), сводится к уравнению Пуассона, если считать находящуюся в нем материю покоящейся.

Мы предполагаем продвинуться несколько дальше в вопросе о приближениях к уравнениям Эйнштейна. Во-первых, будут получены дальнейшие следствия из этих уравнений, а во-вторых, выявится важный побочный результат в виде метода решения уравнений классической газовой динамики.

§ 6.1. Первое приближение к общему ортогональному пространству-времени

Примем для упрощения выкладок, что метрика пространства-времени имеет ортогональную форму (4.401) и что ее коэффициенты мало отличаются от коэффициентов пространства-времени Минковского. Малость будет определяться постоянной κ , определяемой (4.225), второй и более высокими степенями которой мы будем пренебрегать. Метрические коэффициенты в обозначениях Дингля мы примем следующими:

$$\left. \begin{aligned} D &= 1 - \kappa\psi, \quad A = \frac{1}{c^2} \left\{ 1 + \kappa \left(\psi + \frac{2\psi_1}{c^2} \right) \right\}, \\ B &= \frac{1}{c^2} \left\{ 1 + \kappa \left(\psi + \frac{2\psi_2}{c^2} \right) \right\}, \quad C = \frac{1}{c^2} \left\{ 1 + \kappa \left(\psi + \frac{2\psi_3}{c^2} \right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (6.101)$$

где ψ , ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 — функции всех четырех координат x^4 , x^1 , x^2 , x^3 . Из формул Дингля с очевидностью следует, что

достаточно принять

$$\frac{1}{D} = 1, \quad \frac{1}{A} = \frac{1}{B} = \frac{1}{C} = c^2, \quad \sqrt{-g} = \frac{1}{c^3}, \quad (6.102)$$

так как степенями κ выше первой мы пренебрегаем.

Если lmn означает любую циклическую перестановку 1, 2, 3, то выражения (6.101), подставленные в формулы Дингля, приводят к следующей приближенной форме уравнений Эйнштейна:

$$\left. \begin{aligned} \kappa T^{lm} &= -\kappa \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^l \partial x^m}, \\ \kappa T^{l4} &= \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^4} \left\{ \psi + \frac{\psi_m + \psi_n}{c^2} \right\}, \\ \kappa T^{ll} &= \kappa \left\{ -\frac{\partial^2}{(\partial x^4)^2} \left(\psi + \frac{\psi_m + \psi_n}{c^2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \psi_m}{(\partial x^n)^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{(\partial x^m)^2} \right\} + \Lambda, \\ \kappa T^{44} &= -\kappa \left\{ \nabla^2 \psi + \frac{1}{c^2} \sum_{l, m, n} \left(\frac{\partial^2}{(\partial x^m)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2} \right) \psi_l \right\} - \frac{\Lambda}{c^2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.103)$$

где ∇^2 — оператор Лапласа (4.212) для пространственных координат x^1, x^2, x^3 . Легко доказать путем непосредственного дифференцирования, что выражения (6.103) для $T^{\mu\nu}$ удовлетворяют тождественно четырем соотношениям

$$\frac{\partial (\kappa T^{\mu\sigma})}{\partial x^\sigma} = 0 \quad (\mu, \sigma = 1, 2, 3, 4). \quad (6.104)$$

При этом члены, пропорциональные квадрату и более высоким степеням κ , опускаются. Следовательно, пренебрежение членами второго порядка по κ эквивалентно пренебрежению в левой части (4.109) членами, содержащими символы Кристоффеля. Это происходит потому, что символы Кристоффеля сами пропорциональны κ .

После сокращения множителя κ уравнения (6.104) приводятся к форме (3.805) и представляют гидродинамические уравнения движения и уравнение неразрывности в специальной теории относительности, если единственная действующая сила — градиент давления. Отсюда можно заключить, что уравнения Эйнштейна в точной форме будут содержать не

только теорию тяготения, но и обобщение ньютоновской гидродинамики.

Если рассматривать идеальную жидкость, то ее тензор энергии дается формулой (4.104), и уравнения (6.103) заменой $\sigma = \rho + \frac{p}{c^2}$ приводятся к виду

$$\left. \begin{aligned} \sigma u^l u^m &= - \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^l \partial x^m}, \\ \sigma u^l u^4 &= - \frac{\partial^2}{\partial x^l \partial x^4} \left(\psi + \frac{\psi_m + \psi_n}{c^2} \right), \\ \sigma (u^l)^2 + p &= - \frac{\partial^2}{(\partial x^4)^2} \left(\psi + \frac{\psi_m + \psi_n}{c^2} \right) + \\ &\quad + \frac{\partial^2 \psi_m}{(\partial x^n)^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{(\partial x^m)^2} + \frac{\Lambda}{\kappa}, \\ \sigma (u^4)^2 - \frac{p}{c^2} &= - \nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \sum_{l, m, n} \left(\frac{\partial^2}{(\partial x^n)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial x^m)^2} \right) \psi_l - \frac{\Lambda}{\kappa c^2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.105)$$

где с достаточной степенью точности 4-вектор скорости удовлетворяет соотношению

$$(u^4)^2 - \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^3 (u^j)^2 = 1. \quad (6.106)$$

В системе уравнений (6.105) и (6.106) одиннадцать уравнений, левые части которых содержат шесть функций координат ρ , p , u^μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$), а правые части содержат четыре функции ψ , ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 . Поэтому должно иметь место дополнительные соотношения между этими двумя системами функций, например четыре уравнения (6.104), являющиеся дифференциальными уравнениями, содержащими ρ , p , u^μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$). Но возможно также (по крайней мере в принципе) исключить эти шесть функций из (6.105) и (6.106) и таким образом получить дифференциальные уравнения, содержащие только ψ , ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 . Эти уравнения являются по сути дела условиями совместности того рода, который рассматривался в § 4.2, так как пока ψ , ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 не удовлетворяют этим условиям, одиннадцать уравнений (6.105) и (6.106) несовместны.

Система координат $(x^4, x^1, x^2, x^3) = (x)$, однако, неоднозначна, поскольку, вообще говоря, имеются другие

системы координат, в которых пространственно-временная метрика ортогональна и бесконечно мало отличается от метрики пространства-времени Минковского. Достаточно рассмотреть бесконечно малое преобразование от (x) к новой системе (y) , которое удобно записать в виде

$$x^\mu = y^\mu + \frac{\kappa}{2} \frac{\xi^\mu}{c^2}, \quad (\mu = 1, 2, 3, 4), \quad (6.107)$$

где ξ^μ — четыре функции координат (y) . При этом метрические коэффициенты будут

$$D = 1 - \kappa \bar{\psi}, \quad A = \frac{1}{c^2} \left\{ 1 + \kappa \left(\bar{\psi} + \frac{2\bar{\psi}_1}{c^2} \right) \right\}, \\ B = \frac{1}{c^2} \left\{ 1 + \kappa \left(\bar{\psi} + \frac{2\bar{\psi}_2}{c^2} \right) \right\}, \quad C = \frac{1}{c^2} \left\{ 1 + \kappa \left(\bar{\psi} + \frac{2\bar{\psi}_3}{c^2} \right) \right\},$$

где (здесь и далее по дважды повторяющемуся индексу i суммирование не производится)

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi} &= \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \xi^4}{\partial y^4}, \\ \bar{\psi}_i &= \psi_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial y^i} + \frac{\partial \xi^4}{\partial y^4} \right), \quad (i = 1, 2, 3); \end{aligned} \right\} \quad (6.108)$$

ψ и ψ_i являются теми же самыми функциями, но от нового аргумента (y) . Чтобы метрика была ортогональной, ξ^μ должны удовлетворять условиям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi^4}{\partial y^i} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \xi^i}{\partial y^4} &= 0, \quad (i = 1, 2, 3) \\ \frac{\partial \xi^i}{\partial y^m} + \frac{\partial \xi^m}{\partial y^i} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (6.109)$$

l, m, n — любая циклическая перестановка 1, 2, 3. Это, однако, не единственные уравнения, которым удовлетворяют ξ^μ ; другие соотношения получаются при рассмотрении преобразования уравнений (6.103). Тензор энергии преобразуется так:

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^\beta} \bar{T}^{\alpha\beta} = \left(\delta_\alpha^\mu + \frac{\kappa}{2c^2} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial y^\alpha} \right) \left(\delta_\beta^\nu + \frac{\kappa}{2c^2} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial y^\beta} \right) \bar{T}^{\alpha\beta}.$$

Однако левая часть уравнений (6.103) порядка κ и поэтому достаточно положить

$$\bar{T}^{\mu\nu}(y) = T^{\mu\nu}(y).$$

Рассмотрим в качестве примера первое из уравнений (6.103), которое в системе отсчета (y) принимает вид

$${}_x \bar{T}^{lm} = -\kappa \frac{\partial^2 \bar{\psi}_n}{\partial y^l \partial y^m}$$

или

$${}_x T^{lm} = -\kappa \left\{ \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^l \partial y^m} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^l \partial y^m} \left(\frac{\partial \xi^n}{\partial y^n} + \frac{\partial \xi^4}{\partial y^4} \right) \right\}.$$

Так как ψ_n — та же самая функция, но от нового аргумента y , то

$${}_x T^{lm}(y) = -\kappa \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial y^l \partial y^m}.$$

Следовательно, ξ^μ должны удовлетворять условию

$$\frac{\partial^2}{\partial y^l \partial y^m} \left(\frac{\partial \xi^n}{\partial y^n} + \frac{\partial \xi^4}{\partial y^4} \right) = 0, \quad (6.110)$$

Поступая таким же образом с остальными уравнениями системы (6.103), находим

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^l \partial y^4} \left(\frac{\partial \xi^m}{\partial y^m} + \frac{\partial \xi^n}{\partial y^n} \right) = 0, \\ & -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{(\partial y^4)^2} \left(\frac{\partial \xi^m}{\partial y^m} + \frac{\partial \xi^n}{\partial y^n} \right) + \frac{\partial^2}{(\partial y^n)^2} \left(\frac{\partial \xi^m}{\partial y^m} + \frac{\partial \xi^4}{\partial y^4} \right) + \\ & \quad + \frac{\partial^2}{(\partial y^m)^2} \left(\frac{\partial \xi^n}{\partial y^n} + \frac{\partial \xi^4}{\partial y^4} \right) = 0, \\ & \sum_{l, m, n} \frac{\partial^2}{(\partial y^l)^2} \left(\frac{\partial \xi^m}{\partial y^m} + \frac{\partial \xi^n}{\partial y^n} \right) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.110)$$

Следовательно, если ξ^μ удовлетворяют (6.109) и (6.110), уравнения Эйнштейна имеют ту же самую форму в системе отсчета (y), какую они имели в (x).

Возвращаясь к системе отсчета (x) и уравнениям Эйнштейна в форме (6.105), рассмотрим случай статического пространства-времени, в котором ψ и ψ_i являются функциями лишь (x^1, x^2, x^3). Уравнения для трех комбинаций $\sigma u^l u^4$ дают

$$u^l = 0, \quad (l = 1, 2, 3),$$

и материя в этой системе отсчета покоится. Из уравнений для $\sigma u^l u^m$ мы находим

$$\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^l \partial x^m} = 0,$$

в то время как тремя уравнениями для p являются

$$p - \frac{\Lambda}{\kappa} = \frac{\partial^2 \psi_m}{(\partial x^n)^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{(\partial x^m)^2} = \frac{\partial^2 \psi_l}{(\partial x^m)^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{(\partial x^l)^2} = \frac{\partial^2 \psi_l}{(\partial x^n)^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{(\partial x^l)^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial p}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^n} \left(\frac{\partial^2 \psi_m}{\partial x^l \partial x^n} \right) + \frac{\partial}{\partial x^m} \left(\frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^l \partial x^m} \right) = 0,$$

и аналогично

$$\frac{\partial p}{\partial x^m} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x^n} = 0.$$

Отсюда $p = \text{const.}$ Поэтому общая теорема, частный случай которой был рассмотрен в § 4.2, утверждает:

Если метрика пространства-времени ортогональна и статична и метрические коэффициенты отличаются членами порядка κ от метрики пространства-времени Минковского, то материя в данной системе отсчета будет покоится, а ее давление будет постоянным (с точностью до вторых степеней κ).

§ 6.2. Ньютоновская газовая динамика

Приближение предыдущего параграфа существенным образом опиралось на предположение о малости постоянной κ и (если не принимать во внимание космологическую постоянную) сводилось к гидродинамике специальной теории относительности. Если теперь константу c заменить бесконечной скоростью $\mathcal{S}$ и пренебречь членами порядка $1/\mathcal{S}^2$, то получилось бы ньютоновское приближение для уравнений (6.105) и (6.106). Для получения этого приближения предположим, что ρ , p и четыре компоненты u^i не содержат множителя порядка c^2 . Что касается ψ , ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 , то возможны два предположения. Согласно первому, четыре функции также не содержат членов порядка c^2 . Следствия из этого предположения будут получены в этом и следующих двух

параграфах. Но имеется и другая возможность, состоящая в том, что $\psi, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ допускается присутствие членов порядка c^2 , которые потом исключаются при помощи космологической постоянной, как будет показано в § 6.5.

Если в правой части уравнений (6.105) члены порядка c^2 отсутствуют и давление и плотность в ньютоновском приближении остаются конечными, то очевидно, что космологическая постоянная должна быть выбрана таким образом, чтобы при $c \rightarrow \mathcal{S}$ пределы как Λ/κ , так и $\Lambda/\kappa c^2$ были бы конечными (или равными нулю). Для этого следует предположить, что Λ содержит максимум множитель $1/c^2$, так что

$$\lim_{c \rightarrow \mathcal{S}} \frac{\Lambda}{\kappa} = \lambda, \quad \lim_{c \rightarrow \mathcal{S}} \frac{\Lambda}{\kappa c^2} = 0, \quad (6.201)$$

где λ — конечная постоянная. Эти условия позволяют определить малую космологическую постоянную. Далее, если пренебречь членами порядка $1/c^2$, то $u^4 = 1$ в (6.106) и (u^1, u^2, u^3) становятся соответственно компонентами ньютоновской скорости жидкости (U_1, U_2, U_3) . Координаты (x^4, x^1, x^2, x^3) вырождаются в ньютоновские координаты (T, X_1, X_2, X_3) , s совпадает с T и x^4 . Наконец, заменяя c на $\mathcal{S}$ в (6.105) и опуская все члены порядка $1/\mathcal{S}^2$, имеем

$$\rho U_l U_m = - \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial X_l \partial X_m}, \quad (6.202)$$

$$\rho U_l = \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_l \partial T}, \quad (l = 1, 2, 3), \quad (6.203)$$

$$\rho (U_l)^2 + p = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial X_m^2} + \frac{\partial^2 \psi_m}{\partial X_n^2} + \lambda, \quad (6.204)$$

$$\rho = - \nabla^2 \psi. \quad (6.205)$$

Отметим, что в десяти уравнениях (6.202) — (6.205) ρ и p обозначают ньютоновские плотность и давление соответственно.

Исключение ρ, U_1, U_2, U_3 из уравнений (6.202), (6.203) и (6.205) дает три уравнения:

$$\frac{\partial^2 \psi_l}{\partial X_m \partial X_n} = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial X_m \partial T} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_n \partial T} \right) / \nabla^2 \psi. \quad (6.206)$$

Далее, исключив p , ρ , U_1 , U_2 , U_3 из (6.203) — (6.205), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nabla^2\psi} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial X_1 \partial T} \right)^2 + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial X_2^2} &= \frac{1}{\nabla^2\psi} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial X_2 \partial T} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial^2\psi_1}{\partial X_3^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial X_1^2} = \frac{1}{\nabla^2\psi} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial X_3 \partial T} \right)^2 + \\ &+ \frac{\partial^2\psi_1}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2\psi_2}{\partial X_1^2}. \end{aligned} \quad (6.207)$$

Уравнения (6.206) и (6.207) являются условиями совместности для десяти уравнений (6.202) — (6.205). Если для удобства обозначить три выражения в (6.207) через E_1 , E_2 , E_3 соответственно, а их общее значение через χ — λ , то

$$\begin{aligned} \frac{\partial\chi}{\partial X_l} &= \frac{\partial E_l}{\partial X_l} = \frac{\partial}{\partial X_l} \left\{ \frac{1}{\nabla^2\psi} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial X_l \partial T} \right)^2 \right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial X_m} \left(\frac{\partial^2\psi_n}{\partial X_m \partial X_l} \right) + \frac{\partial}{\partial X_n} \left(\frac{\partial^2\psi_m}{\partial X_n \partial X_l} \right), \end{aligned} \quad (6.208)$$

где суммирование по повторяющимся индексам не производится. Отсюда при помощи (6.206)

$$\frac{\partial\chi}{\partial X_l} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_l} \left\{ \frac{1}{\nabla^2\psi} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial X_l \partial T} \cdot \frac{\partial^2\psi}{\partial X_i \partial T} \right) \right\}, \quad (6.209)$$

и, следовательно, χ определяется через ψ .

Решение (6.202) — (6.205) с использованием (6.207) и выражения для χ дают

$$\begin{aligned} U_i &= - \frac{1}{\nabla^2\psi} \frac{\partial^2\psi}{\partial X_i \partial T}, \quad (i=1, 2, 3), \\ p &= - \nabla^2\psi, \\ p &= - \frac{\partial^2\psi}{\partial T^2} + \chi. \end{aligned} \quad (6.210)$$

Эти уравнения показывают, что космологическая постоянная исключается из окончательного результата вследствие предположения об отсутствии больших по величине членов в ψ , ψ_1 , ψ_2 , ψ_3 . Такой же результат, конечно, можно получить, если бы приравнять нулю космологическую постоянную в уравнениях Эйнштейна в их первоначальном виде.

Читатель может легко проверить прямой подстановкой с использованием (6.209), что полученные выражения для ρ , p и трех компонент U_i тождественно удовлетворяют уравнениям (3.201) и (3.202) для всех ψ при условии, что компоненты внешней силы F_i равны нулю. Так как ρ в общем случае является функцией T и (X_1, X_2, X_3) , то выражения (6.210) являются зависящими от одной неопределенной функции ψ решениями классических уравнений движения газа (сжимаемой жидкости), когда единственной действующей силой является градиент давления.

Характерной чертой задачи является неопределенность, поскольку, как было показано в § 3.2, четыре уравнения (3.201) и (3.202) не могут определить все пять неизвестных. Величина скорости по существу ничем не ограничена. То, что ρ и ψ в (6.210) связаны уравнением Пуассона, еще не означает, что гравитационное самопритяжение газа ограничивает его движение. Если бы это было так, то внешние силы F_i не могли бы равняться нулю; в том приближении, с которым мы имеем дело, потенциал тяготения ψ входит лишь как дополнительная функция в решение уравнений гидродинамики.

Уравнение (6.210) показывает, что

$$\frac{\partial(\rho U_l)}{\partial X_m} - \frac{\partial(\rho U_m)}{\partial X_l} = 0, \quad (6.211)$$

что ограничивает возможные типы движения. Это ограничение является следствием предположения об ортогональности метрики пространства-времени и использования уравнений Эйнштейна. Однако уравнения (6.210) наводят на мысль, что в классической теории могло бы быть получено решение более общего типа [1]. В самом деле можно найти формальное решение уравнения непрерывности ньютоновской теории

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial(\rho U_j)}{\partial X_j} = 0,$$

положив

$$\rho U_i = \frac{\partial A_i}{\partial T} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.212)$$

где (A_1, A_2, A_3) — три функции от (T, X_1, X_2, X_3) , так что

$$\rho = - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial A_j}{\partial X_j}. \quad (6.213)$$

Три уравнения движения (3.203) тогда преобразуются так:

$$\begin{aligned} \rho F_i &= \frac{\partial \rho}{\partial X_i} + \frac{\partial (\rho U_i)}{\partial T} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_j} (\rho U_j U_i) = \\ &= \frac{\partial \rho}{\partial X_i} + \frac{\partial^2 A_i}{\partial T^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_j} \frac{\frac{\partial A_i}{\partial T} \frac{\partial A_j}{\partial T}}{\sum_{k=1}^3 \frac{\partial A_k}{\partial X_k}}. \end{aligned} \quad (6.214)$$

Таким образом, (6.212), (6.213) и (6.214) определили бы плотность и компоненты скорости и силы, если A_1, A_2, A_3 и p — заданные функции. Очевидно, если положить

$$A_i = \frac{\partial \psi}{\partial X_i},$$

то уравнения (6.212) и (6.213) дадут выражения для U_i и ρ , найденные в (6.210), но (6.214) теперь имеет вид

$$\rho F_i = \frac{\partial \rho}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} \right) - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\frac{\partial^2 \psi}{\partial X_i \partial T} \frac{\partial^2 \psi}{\partial X_j \partial T}}{\nabla^2 \psi} \right),$$

или, подставляя значение χ из (6.209),

$$\rho F_i = \frac{\partial}{\partial X_i} \left(p + \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} - \chi \right). \quad (6.215)$$

Таким образом, в то время как выражения для ρ и U_i , определяемые (6.210), сохраняют силу и в этом более общем случае, формула для p уже не справедлива. Она заменяется формулой (6.215), которая связывает функции p, ψ, ρ с компонентами внешней силы F_i .

Теперь необходимо рассмотреть влияние неоднозначности выбранной системы отсчета. Если наше приближение с самого начала выводилось бы в системе отсчета (y) (6.107), а не (x) , отличался бы существенно конечный результат от (6.210)? Чтобы ответить на этот вопрос с достаточной для наших

целей общностью, примем, что функции ξ^μ в (6.107) имеют следующую форму:

$$\begin{aligned}\xi^4 &= -c^2 \int \xi dy^4, \\ \xi^l &= c^2 \int \left(\xi + \frac{\zeta_l}{c^2} \right) dy^l + c^4 \eta_l(y^4, y^m, y^n),\end{aligned}\quad (6.216)$$

где ξ и ζ_l могут быть функциями всех четырех координат, но каждое η_l ($l=1, 2, 3$) не зависит от соответствующей координаты y_l . Условия (6.109) и (6.110) запишутся тогда соответственно

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y^l} \left(\int \xi dy^4 \right) + \frac{\partial \eta_l}{\partial y^4} &= -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial y^4} \left\{ \int \left(\xi + \frac{\zeta_l}{c^2} \right) dy^l \right\}, \\ \frac{\partial \eta_l}{\partial y^m} + \frac{\partial \eta_m}{\partial y^l} &= -\frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial}{\partial y^m} \left\{ \int \left(\xi + \frac{\zeta_l}{c^2} \right) dy^l \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y^l} \left\{ \int \left(\xi + \frac{\zeta_m}{c^2} \right) dy^m \right\} \right],\end{aligned}\right\} \quad (6.217)$$

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial y^l \partial y^m} &= 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^l \partial y^4} \left(2\xi + \frac{\zeta_m + \zeta_n}{c^2} \right) = 0, \\ \frac{\partial^2}{(\partial y^4)^2} \left(2\xi + \frac{\zeta_m + \zeta_n}{c^2} \right) &= \frac{\partial^2 \zeta_m}{(\partial y^n)^2} + \frac{\partial^2 \zeta_n}{(\partial y^m)^2}, \\ \sum_{l, m, n} \frac{\partial^2}{(\partial y^l)^2} \left(2\xi + \frac{\zeta_m + \zeta_n}{c^2} \right) &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (6.218)$$

Теперь рассмотрим переход к ньютоновской механике, заменяя c на $\mathcal{S}$ и пренебрегая членами $1/\mathcal{S}^2$ или $1/\mathcal{S}^4$. По предположению, система отсчета (x) превращается в ньютоновскую систему отсчета (T, X_1, X_2, X_3) , а (y) — в ньютоновскую систему отсчета (Y_4, Y_1, Y_2, Y_3) . Тогда, подставляя (6.216) в (6.107) и пренебрегая всеми членами, содержащими множитель $1/c^2$, имеем

$$\left. \begin{aligned}Y_4 &= T, \\ X_l &= Y_l + 4\pi G \eta_l(T, Y_m, Y_n).\end{aligned}\right\} \quad (6.219)$$

Таким образом, преобразование (6.216) сохраняет однозначность ньютоновского времени. Дифференцируя первое из уравнений (6.217) по y^4 и затем опуская все члены, содер-

жащие множитель $1/c^2$ в этом и всех других уравнениях (6.217) и (6.218), получаем их ньютоновскую форму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial Y_l} + \frac{\partial^2 \eta_l}{\partial T^2} &= 0, & \frac{\partial \eta_l}{\partial Y_m} + \frac{\partial \eta_m}{\partial Y_l} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial Y_l \partial Y_m} &= 0, & \frac{\partial^2 \xi}{\partial Y_l \partial T} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial T^2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \zeta_m}{\partial Y_n^2} + \frac{\partial^2 \zeta_n}{\partial Y_m^2} \right), & \nabla^2 \xi &= 0. \end{aligned} \quad (6.220)$$

Читатель может легко убедиться, что решение этих уравнений дается выражениями:

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{j=1}^3 \alpha_j Y_j + f(T), \\ \zeta_i &= \sum_{j=1}^3 Y_j^2 h_{ij}(T) \quad (i=1, 2, 3), \\ \eta_l &(\beta_{lm} Y_m + \beta_{ln} Y_n) T - \frac{1}{2} \alpha_l T^2, \end{aligned} \quad (6.221)$$

где α_j и β_{ij} — постоянные, причем

$$\beta_{lm} + \beta_{ml} = 0,$$

а h_{ij} и f — функции T , удовлетворяющие условию

$$\frac{d^2 f}{dT^2} = h_{12} + h_{21} = h_{31} + h_{13} = h_{23} + h_{32}. \quad (6.222)$$

В силу (6.216) и (6.221), формула (6.108) превращается в

$$\left. \begin{aligned} \bar{\psi} &= \psi + \sum_{j=1}^3 \alpha_j Y_j + f(T), \\ \bar{\psi}_i &= \psi_i + \frac{1}{2} \zeta_i = \psi_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 Y_j^2 h_{ij}(T) \quad (i=1, 2, 3). \end{aligned} \right\} \quad (6.223)$$

Новые условия совместности отличаются от (6.206) и (6.207) заменой ψ , ψ_i и (X_1, X_2, X_3) на $\bar{\psi}$, $\bar{\psi}_i$ и (Y_1, Y_2, Y_3) ; так, например, (6.206) заменяется на

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}_l}{\partial Y_m \partial Y_n} = \left(\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial Y_m \partial T} \cdot \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial Y_n \partial T} \right) / \nabla^2 \bar{\psi}.$$

Но при использовании (6.223) это уравнение превращается в

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial Y_m \partial Y_n} = \frac{1}{\nabla^2 \psi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y_m \partial T} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y_n \partial T} \right);$$

поскольку ψ , ψ_i так же зависят от (T, Y_1, Y_2, Y_3) , как они ранее зависели от (T, X_1, X_2, X_3) , условия совместности по существу не изменились. То же самое справедливо для (6.207) [в силу (6.222)] и (6.208). Наконец, если $\bar{U}_i$, $\bar{\rho}$, $\bar{p}$ отнесены к системе отсчета (Y) , то, в силу (6.223),

$$\begin{aligned}\bar{U}_i &= - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y_i \partial T} / \nabla^2 \psi \quad (i = 1, 2, 3), \\ \bar{\rho} &= - \nabla^2 \psi, \\ \bar{p} &= - \frac{\partial^2 \psi}{\partial T^2} + \chi.\end{aligned}\tag{6.224}$$

Другими словами, выражения для скорости, плотности и давления жидкости имеют одну и ту же форму как в системе координат (Y) , так и в системе (X) . Следовательно, поскольку граничные и начальные условия в двух координатных системах должны быть согласованы при помощи (6.219), можно сказать, что уравнения (6.210) и (6.224) описывают одно и то же распределение материи и переход к другой системе отсчета никак не меняет физическую картину.

§ 6.3. Принцип геодезических линий и ньютоновская теория

Некритическое применение принципа геодезических линий может привести к явному противоречию с результатами, полученными в конце предыдущего параграфа. Обычная геодезическая линия в пространстве-времени, метрические коэффициенты которого определяются (6.101), описывает историю движения свободной пробной частицы в поле тяготения материи с распределением (6.105) в пренебрежении полем тяготения самой частицы. Полагая $dx^\mu/ds = v^\mu$ и используя (2.807) и (6.101), получаем в первом порядке по χ следующие урав-

нения геодезических линий (с точностью до второго порядка по κ):

$$\begin{aligned} \frac{dv^4}{ds} - \frac{\kappa}{2} \left\{ 2 \sum_{\mu=1}^4 \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} v^4 v^\mu - \frac{\partial \psi}{\partial x^4} (v^4)^2 - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^4} + \frac{2}{c^2} \frac{\partial \psi_j}{\partial x^4} \right) \frac{(v^j)^2}{c^2} \right\} = 0, \\ \frac{dv^i}{ds} - \frac{\kappa c^2}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} (v^4)^2 - \frac{\kappa}{2} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i} + \frac{2}{c^2} \frac{\partial \psi_j}{\partial x^i} \right) (v^j)^2 + \\ + \kappa \sum_{\mu=1}^4 \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} + \frac{2}{c^2} \frac{\partial \psi_i}{\partial x^\mu} v^i v^\mu \right) = 0 \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (6.301)$$

Если заменить c на $\mathcal{S}$, то $\kappa \rightarrow 0$, $\kappa c^2 \rightarrow 8\pi G$; кроме того, $s \equiv T$, $v^4 = 1$ и $v^i = dX_i/dT$. Остаются, следовательно, три уравнения системы (6.301):

$$\frac{d^2 X_i}{dT^2} = 4\pi G \frac{\partial \psi}{\partial X_i} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (6.302)$$

Если бы мы воспользовались с самого начала системой отсчета (y) (6.107) вместо (x) , то уравнения геодезических линий превратились бы в

$$\frac{d^2 Y_i}{dT^2} = 4\pi G \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial Y_i} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.303)$$

где $\bar{\psi}$ определяется (6.223). Следовательно,

$$\frac{d^2 Y_i}{dT^2} = 4\pi G \left(\frac{\partial \psi}{\partial Y_i} + \alpha_i \right) \quad (i = 1, 2, 3), \quad (6.304)$$

так что появляется добавочная постоянная сила тяготения $4\pi G \alpha_i$, действующая на единицу массы. Однако это никак не отражается на распределении материи, описываемом (6.210) или (6.224), которое ответственно за поле тяготения. Добавочная сила тяготения просто свидетельствует о том, что системы отсчета (Y) и (X) движутся ускоренно одна

относительно другой. В самом деле из (6.219) и (6.221) следует

$$\frac{d^2 X_i}{dT^2} = \frac{d^2 Y_i}{dT^2} - 4\pi G \alpha_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.305)$$

и

$$\frac{\partial \psi}{\partial Y_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \psi}{\partial X_j} \frac{\partial X_j}{\partial Y_i} = \frac{\partial \psi}{\partial X_i} + 4\pi G \left(\beta_{mi} \frac{\partial \psi}{\partial X_m} + \beta_{ni} \frac{\partial \psi}{\partial X_n} \right) T.$$

В пренебрежении членами порядка $(4\pi G)^2$, что соответствует в ньютоновском приближении отбрасыванию членов порядка κ^2 , уравнение (6.304) переходит в (6.302). Однако уравнения (6.305) показывают, что относительное ускорение двух систем отсчета точно равно $4\pi G \alpha_i$. Что это ускорение не является истинным гравитационным ускорением, подчеркивается тем, что оно остается при $\psi \equiv 0$, $\psi_i \equiv 0$, т. е. если материя, являющаяся источником поля тяготения, отсутствует. Пространство-время с метрикой (6.101) сводится тогда к пространству-времени Минковского, и система отсчета (у) становится ускоренной системой в смысле § 4.6. Следует ожидать, что псевдогравитационное ускорение, появляющееся при использовании неподходящей системы отсчета, появится также при решении уравнений Эйнштейна в их точной форме, и слишком большое доверие к принципу геодезических линий может привести к ошибке.

§ 6.4. Второе приближение. Газовая динамика при учете тяготения

Выполним разложение метрических коэффициентов в уравнениях Эйнштейна до членов порядка κ^2 и покажем, что образующееся ньютоновское приближение определяет движение жидкости или газа под действием как градиента давления, так и гравитационного притяжения. Общее решение задачи приводит к очень сложным формулам, и поэтому метод будет проиллюстрирован на примере двух важных частных случаев.

1. Плоская симметрия. Примем, что космологическая постоянная равна нулю. На основании (4.413) и (4.414) метрические коэффициенты в обозначениях Дингля будут

$$D = A c^2 = e^{2f}, \quad B = C = \frac{e^{2h}}{c^2}. \quad (6.401)$$

Выражения для T^{12} , T^{13} , T^{24} и T^{34} показывают, что все эти компоненты тождественно равны нулю. Отсюда $u^2 = 0$ и $u^3 = 0$, и тождество, которому удовлетворяет 4-вектор скорости, сводится к

$$1 = D(u^4)^2 - A(u^1)^2. \quad (6.402)$$

Удобно ввести обозначения

$$L = e^f u^4, \quad U = e^f u^1, \quad \sigma = \rho + \frac{p}{c^2} \quad (6.403)$$

и обозначать частные производные f и h по $x = x^1$ и $t = x^4$ посредством соответствующих индексов. Оставшиеся уравнения Эйнштейна, приведенные ниже, соответствуют следующим компонентам тензора энергии:

$$\begin{aligned} T^{11}, \quad T^{22} = T^{33}, \quad T^{44}, \quad T^{14} = T^{41}, \\ \kappa(\sigma U^2 + p) = e^{-2f} \{ -2h_{tt} + c^2(h_x^2 + 2h_x f_x) - \\ - (3h_t^2 - 2h_t f_t) \}, \end{aligned} \quad (6.404)$$

$$\kappa p = e^{-2f} \{ -h_{tt} - f_{tt} + c^2(h_{xx} + f_{xx}) + c^2 h_x^2 - h_t^2 \}, \quad (6.405)$$

$$\begin{aligned} -\kappa \left(\sigma L^2 - \frac{p}{c^2} \right) = e^{-2f} \{ 2h_{xx} + 3h_x^2 - 2h_x f_x - \\ - \frac{1}{c^2} (h_t^2 + 2h_t f_t) \}, \end{aligned} \quad (6.406)$$

$$-\kappa \sigma UL = 2e^{-2f} \{ -h_{xt} - h_x h_t + h_x f_t + h_t f_x \}; \quad (6.407)$$

уравнение (6.402) принимает вид

$$1 = L^2 - \frac{U^2}{c^2}. \quad (6.408)$$

Используя уравнение (6.405), можно выразить σU^2 и σL^2 в (6.404) и (6.406) через производные f и h ; затем можно исключить σ , U и L с помощью уравнения (6.407). В результате получается условие совместности, которому должны удовлетворять f и h , чтобы уравнения (6.404) и (6.407) были совместными:

$$\begin{aligned} 4 \{ h_{xt} + h_x h_t - f_t h_x - f_x h_t \}^2 = \\ = \frac{1}{c^2} \{ h_{tt} - f_{tt} + c^2(h_{xx} + f_{xx} - 2f_x h_x) + \\ + 2(h_t^2 - f_t h_t) \} \times \{ h_{tt} + f_{tt} + \\ + c^2(h_{xx} - f_{xx} + 2h_x^2 - f_x h_x) - 2f_t h_t \}. \end{aligned} \quad (6.409)$$

Если f и h удовлетворяют этому условию, σ может быть найдено путем исключения p , U^2 и L^2 из уравнений (6.405), (6.406) и (6.408); можно определить также p , так как уравнение (6.405) дает p . Далее уравнения (6.404) и (6.405) дают σU^2 ; таким образом пять уравнений (6.404) — (6.408) эквивалентны уравнению (6.409) вместе с уравнениями

$$\kappa p = e^{-2f} \left\{ f_{xx} - h_{xx} + \frac{1}{c^2} (h_{tt} - f_{tt}) - 3h_x^2 + \frac{3}{c^2} h_t^2 \right\}, \quad (6.410)$$

$$\kappa p = e^{-2f} \left\{ c^2 (f_{xx} + h_{xx}) - (h_{tt} + f_{tt}) + c^2 h_x^2 - h_t^2 \right\}, \quad (6.411)$$

$$\kappa U^2 = \frac{e^{-2f}}{\sigma} \left\{ -c^2 (f_{xx} + h_{xx}) - (h_{tt} - f_{tt}) + \right. \\ \left. + 2c^2 f_x h_x - 2h_t^2 + 2f_t h_t \right\}, \quad (6.412)$$

$$L^2 = 1 + \frac{U^2}{c^2}, \quad (6.413)$$

где σ , входящее в уравнение (6.412), можно исключить с помощью соотношения

$$\kappa \sigma = \frac{2e^{-2f}}{c^2} \left\{ c^2 f_{xx} - f_{tt} - c^2 h_x^2 + h_t^2 \right\}. \quad (6.414)$$

Эти формулы являются точными, и мы должны теперь получить их приближенную форму, пренебрегая членами порядка κ^3 и выше. Пусть

$$f = -\frac{\kappa}{2} \psi + \kappa^2 F, \quad h = -\frac{\kappa}{2} \omega + \kappa^2 H,$$

где ψ , ω , F и H — функции x и t , не содержащие членов порядка c^2 и в которых опущены члены более высокого порядка, чем κ^2 . Так как частные производные f и h имеют по меньшей мере порядок κ , то достаточно положить $e^{-2f} = 1 + \kappa \psi$. Условие совместности (6.409) можно тогда записать в виде

$$4\kappa^2 \left\{ -\frac{1}{2} \omega_{xt} + \kappa \left(H_{xt} + \frac{1}{4} \omega_x \omega_t - \frac{1}{4} \psi_t \omega_x - \frac{1}{4} \psi_x \omega_t \right) \right\}^2 = \\ = \kappa^2 \left[\frac{1}{2} (\psi - \omega)_{tt} - \frac{c^2}{2} (\psi + \omega)_{xx} + \kappa \left\{ c (H + F)_{xx} + \right. \right. \\ \left. + (H - F)_{tt} - \frac{c^2}{2} \psi_x \omega_x + \frac{1}{2} \omega_t^2 - \frac{1}{2} \psi_t \omega_t \right\} \right] \times \\ \times \left[-\frac{1}{2c^2} (\psi + \omega)_{tt} + \frac{1}{2} (\psi - \omega)_{xx} + \kappa \left\{ (H - F)_{xx} + \right. \right. \\ \left. + \frac{1}{c^2} (H + F)_{tt} + \frac{1}{2} \omega_x^2 - \frac{1}{2} \psi_x \omega_x - \frac{2}{c^2} \psi_t \omega_t \right\} \right], \quad (6.415)$$

а (6.410), (6.411) и (6.407) преобразующие соответственно в

$$\rho = \frac{1}{2}(\omega - \psi)_{xx} - \frac{1}{2c^2}(\omega - \psi)_{tt} + \kappa \left\{ \frac{1}{c^2}(H - F)_{tt} - \right. \\ \left. - (H - F)_{xx} - \frac{1}{2c^2}\psi(\omega - \psi)_{tt} + \frac{1}{2}\psi(\omega - \psi)_{xx} - \right. \\ \left. - \frac{3}{4}\omega_x^2 - \frac{3}{4c^2}\omega_t^2 \right\}, \quad (6.416)$$

$$p = \frac{1}{2}(\psi + \omega)_{tt} - \frac{c^2}{2}(\psi + \omega)_{xx} + \kappa \left\{ c^2(F + H)_{xx} - \right. \\ \left. - (F + H)_{tt} - \frac{c^2}{2}\psi(\psi + \omega)_{xx} + \frac{1}{2}\psi(\psi + \omega)_{tt} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4}c^2\omega_x^2 - \frac{1}{4}\omega_t^2 \right\}, \quad (6.417)$$

$$\sigma UL = -\omega_{xt} + \kappa \left(2H_{xt} - \psi\omega_{xt} + \frac{1}{2}\omega_x\omega_t - \frac{1}{2}\psi_t\omega_x - \frac{1}{2}\psi_x\omega_t \right). \quad (6.418)$$

Чтобы перейти к ньютоновскому приближению, мы должны заменить c на бесконечную скорость $\mathcal{S}$ и пренебречь всеми членами порядка $1/\mathcal{S}$. В результате $f \rightarrow 0$, $u^4 \rightarrow 1$ и $L \rightarrow 1$, x и t становятся ньютоновским расстоянием X и ньютоновским абсолютным временем T соответственно, в то время как U становится ньютоновской скоростью жидкости. Кроме того, σ и p становятся равными и совпадают с ньютоновской плотностью ρ , в предположении, что плотность и давление не содержат членов порядка c^2 . Кроме того, можно написать

$$\omega = \frac{1}{c^2}\Psi - \psi, \quad (6.419)$$

если Ψ , ψ , F и H не содержат членов порядка c^2 . Подставляя в уравнение (6.415) и пренебрегая всеми членами порядка $1/\mathcal{S}^2$, находим

$$\psi_{xt}^2 = \psi_{xx} \left\{ \psi_{tt} - \frac{1}{2}\Psi_{xx} + 8\pi G \left(\frac{1}{2}\psi_x^2 + H_{xx} + F_{xx} \right) \right\},$$

где член $8\pi G (= \kappa c^2)$ должен теперь рассматриваться как член второго порядка по сравнению с остальными членами. Следовательно, приравнявая по отдельности члены первого и второго порядка нулю, имеем

$$\frac{1}{2}\Psi_{xx} = \psi_{tt} - \frac{\psi_{xt}^2}{\psi_{xx}}, \quad (H + F)_{xx} = -\frac{1}{2}\psi_x^2. \quad (6.420)$$

Подставляя (6.419) и (6.420) в (6.416), (6.417) и (6.418) и снова пренебрегая членами порядка $1/\mathcal{P}^2$, имеем

$$\begin{aligned}\rho &= -\psi_{XX}, \quad p = -\psi_{TT} + \frac{\psi_{XT}^2}{\psi_{XX}} - 2\pi G\psi_X^2, \\ U &= -\psi_{XT}/\psi_{XX},\end{aligned}\quad (6.421)$$

что дает нам распределение материи для метрики (6.401) в ньютоновском приближении. Эти формулы легко интерпретируются с помощью (3.201) и (3.202) с ρ , p , зависящими лишь от $X_1 (=X)$ и T , $U_1 = U$, $U_2 = U_3 = 0$ и обращающимися в нуль F_2 и F_3 . Прямая подстановка (6.421) в (3.202) показывает, что уравнение непрерывности удовлетворяется для всех функций ψ ; остающееся уравнение дает гравитационное самопритяжение

$$F_1 = 4\pi G\psi_X. \quad (6.422)$$

Выражения для ρ и F_1 показывают, что $4\pi G\psi$ является потенциалом тяготения массы жидкости.

2. Сферическая симметрия. Изотропная форма (4.416) для метрики лучше всего подходит для наших целей и поэтому можно принять

$$D = e^\nu, \quad A = \frac{e^\mu}{c^2}, \quad B = \frac{e^\mu r^2}{c^2}, \quad C = \frac{e^\mu r^2 \sin^2 \theta}{c^2},$$

где ν и μ являются функциями r и t . Для последующих приложений к космологии необходимо сохранить на некоторое время космологическую постоянную в уравнениях Эйнштейна. Формулы для T^{24} , T^{34} , T^{12} , T^{23} , T^{13} (стр. 115) показывают, что эти компоненты обращаются в нуль и потому $u^2 = 0$, $u^3 = 0$. 4-вектор скорости жидкости удовлетворяет условию

$$1 = e^\nu (u^4)^2 - \frac{e^\mu}{c^2} (u^1)^2, \quad (6.423)$$

и скорость в системе отсчета (t, r, θ, φ) равна

$$q = \frac{u^1}{u^4}. \quad (6.424)$$

Не обращающиеся в нуль уравнения Эйнштейна (в их точной форме), в силу (4.406), (4.403), (4.404), (4.405) и (4.410), будут

$$\begin{aligned} \kappa \left\{ \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) (u^4)^2 - e^{-\nu} \frac{p}{c^2} \right\} e^{\nu} = \\ = -e^{-\mu} \left\{ \mu_{rr} + \frac{1}{4} \mu_r^2 + \frac{2}{r} \mu_r \right\} + \frac{3}{4} \frac{e^{-\nu}}{c^2} \mu_t^2 - \frac{\Lambda}{c^2}, \quad (6.425) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa \left\{ \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) (u^1)^2 + e^{-\mu} p \right\} e^{\mu} = \\ = c^2 e^{-\mu} \left\{ \frac{1}{2} (\mu + \nu)_r + \frac{1}{4} \mu_r^2 + \frac{1}{2} \mu_r \nu_r \right\} - \\ - e^{-\nu} \left(\mu_{tt} + \frac{3}{4} \mu_t^2 - \frac{1}{2} \mu_t \nu_t \right) + \Lambda, \quad (6.426) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa p = c^2 e^{-\mu} \left\{ \frac{1}{2} (\mu + \nu)_{rr} + \frac{1}{2r} (\mu + \nu)_r + \frac{1}{4} \nu_r^2 \right\} - \\ - e^{-\nu} \left(\mu_{tt} + \frac{3}{4} \mu_t^2 - \frac{1}{2} \mu_t \nu_t \right) + \Lambda, \quad (6.427) \end{aligned}$$

$$\kappa \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^4 u^1 = e^{-(\mu+\nu)} \left(\mu_{rt} - \frac{1}{2} \mu_t \nu_r \right). \quad (6.428)$$

Приближение с точностью до членов порядка κ^2 включительно мы получим, положив

$$\begin{aligned} e^{\mu} &= 1 + \kappa \psi + \kappa^2 \Psi, \\ e^{\nu} &= 1 + \kappa \left(\frac{2}{c^2} \omega - \psi \right) + \kappa^2 Z, \quad (6.429) \end{aligned}$$

где ψ , Ψ , ω , Z — функции r и t . С точностью до κ^2 имеем

$$\mu = \kappa \psi + \kappa^2 \xi, \quad \nu = \kappa \left(\frac{2}{c^2} \omega - \psi \right) + \kappa^2 \zeta,$$

где

$$\xi = \Psi - \frac{1}{2} \psi^2, \quad \zeta = Z - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{c^2} \omega - \psi \right)^2. \quad (6.430)$$

Учитывая, что в рассматриваемом случае

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r},$$

получаем для (6.425) — (6.428)

$$\begin{aligned} \kappa \left\{ \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) (u^4)^2 - e^{-\nu} \frac{p}{c^2} \right\} e^\nu = \\ = -\kappa \nabla^2 \psi - \kappa^2 \left(-\psi \nabla^2 \psi + \nabla^2 \xi + \frac{1}{4} \psi_r^2 - \frac{3}{4} \frac{1}{c^2} \psi_t^2 \right) - \frac{\Lambda}{c^2}, \end{aligned} \quad (6.431)$$

$$\begin{aligned} \kappa \left\{ \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) (u^1)^2 + e^{-\mu} p \right\} e^\mu = \kappa \left(\frac{2}{r} \omega_r - \psi_{tt} \right) + \\ + \kappa^2 \left\{ -\frac{2}{r} \psi \omega_r + \frac{c^2}{r} (\xi + \zeta)_r + \frac{c^2}{4} \psi_r^2 + \frac{c^2}{2} \psi_r \left(\frac{2}{c^2} \omega - \psi \right)_r + \right. \\ \left. + \left(\frac{2\omega}{c^2} - \psi \right) \psi_{tt} - \xi_{tt} - \frac{3}{4} \psi_t^2 + \frac{1}{2} \psi_t \left(\frac{2}{c^2} \omega - \psi \right)_t \right\} + \Lambda, \end{aligned} \quad (6.432)$$

$$\begin{aligned} \kappa p = \kappa \left(\omega_{rr} + \frac{1}{r} \omega_r - \psi_{tt} \right) + \kappa^2 \left\{ -\psi \left(\omega_{rr} + \frac{1}{r} \omega_r \right) + \right. \\ \left. + \frac{c^2}{2} (\xi + \zeta)_{rr} + \frac{c^2}{2r} (\xi + \zeta)_r + \frac{c^2}{4} \left(\frac{2}{c^2} \omega_r - \psi_r \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{2\omega}{c^2} - \psi \right) \psi_{tt} - \xi_{tt} - \frac{3}{4} \psi_t^2 + \frac{1}{2} \psi_t \left(\frac{2}{c^2} \omega - \psi \right)_t \right\} + \Lambda, \end{aligned} \quad (6.433)$$

$$\kappa \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^4 u^1 = \kappa \psi_{rt} + \kappa^2 \left\{ \xi_{rt} - \frac{1}{2} \psi_t \left(\frac{2}{c^2} \omega - \psi \right)_r - \frac{2\omega}{c^2} \psi_{rt} \right\}, \quad (6.434)$$

где e^μ и e^ν означают правые части (6.429). Условие совместности этих уравнений будет получено в гл. VIII [уравнение (8.205)]. Сейчас же мы перейдем к ньютоновскому приближению, заменив c бесконечной скоростью $\mathcal{S}$. Время t тогда становится ньютоновским абсолютным временем T , координата r превращается в радиус-вектор от начала отсчета в абсолютном евклидовом пространстве и отношение u^1/u^4 (6.424) становится ньютоновской скоростью жидкости q . Кроме того, выражение (6.423) с помощью (6.429) может быть записано в виде

$$\frac{1}{(u^4)^2} = 1 - \frac{q^2}{c^2} + \kappa \left(\frac{2\omega}{c^2} - \psi - \frac{q^2}{c^2} \psi \right) + \kappa^2 \left(Z - \frac{q^2}{c^2} \Psi \right).$$

Следовательно, при $c \rightarrow \mathcal{S}$ $u^4 = 1$, если только ни одна из функций q , ω , ψ , Z и Ψ не возрастает при этом настолько, что еще один член, кроме первого, не обращается в нуль.

В частности, это означает, что ω не может быть порядка c^4 или выше; она может быть, однако, порядка c^2 ; эту возможность мы рассмотрим в § 6.5. Предполагая, что q , ω , ψ , Z и Ψ имеет порядок ниже чем c^2 , нужно также ввести предположение о малости космологической постоянной, удовлетворяющей (6.201), с тем чтобы ньютоновское давление оставалось конечным. Замена c на $\mathcal{S}$ в членах левых частей (6.431) и (6.432) дает

$$(u^4)^2 e^\nu = 1, \quad (u^1)^2 e^\mu = q^2,$$

откуда получается ньютоновская форма уравнений (6.431) — (6.434):

$$\rho = -\nabla^2 \psi, \quad (6.435)$$

$$\rho q^2 + p = \frac{2}{r} \omega_r - \psi_{TT} + 4\pi G \left\{ \frac{2}{r} (\xi + \zeta)_r - \frac{1}{2} \psi_r^2 \right\} + \lambda, \quad (6.436)$$

$$p = \omega_{rr} + \frac{1}{r} \omega_r - \psi_{TT} + 4\pi G \left\{ (\xi + \zeta)_{rr} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} (\xi + \zeta)_r + \frac{1}{2} \psi_r^2 \right\} + \lambda, \quad (6.437)$$

$$\rho q = \psi_{rT}, \quad (6.438)$$

здесь p — ньютоновское давление. Но эти уравнения оказываются несовместными для произвольных наборов функций ω , $(\xi + \zeta)$ и ψ . В самом деле, исключая ρ , q и p , мы получаем условие совместности

$$\omega_{rr} - \frac{1}{r} \omega_r + 4\pi G \left\{ (\xi + \zeta)_{rr} - \frac{1}{r} (\xi + \zeta)_r + \psi_r^2 \right\} = (\psi_{rT})^2 / \nabla^2 \psi, \quad (6.439)$$

так что две из трех функций ω , $(\xi + \zeta)$ и ψ связаны с третьей. Таким образом четыре уравнения (6.435) — (6.438) эквивалентны (6.439) совместно с уравнениями

$$\rho = -\nabla^2 \psi, \quad (6.440)$$

$$p = -\psi_{TT} + \omega_{rr} + \frac{\omega_r}{r} + 4\pi G \left\{ (\xi + \zeta)_{rr} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r} (\xi + \zeta)_r + \frac{1}{2} \psi_r^2 \right\} + \lambda, \quad (6.441)$$

$$q = -\psi_{rT} / \nabla^2 \psi. \quad (6.442)$$

Функции ω и $(\xi + \zeta)$ можно исключить из (6.441), используя (6.439). Пусть

$$\left. \begin{aligned} I(r, T) &= \psi_{rT}^2 / \nabla^2 \psi, \\ \Omega &= \xi + \zeta, \end{aligned} \right\} \quad (6.443)$$

так что (6.439) принимает вид

$$\omega_{rr} - \frac{1}{r} \omega_r = I - 4\pi G \left(\Omega_{rr} - \frac{1}{r} \Omega_r + \psi_r^2 \right),$$

откуда

$$\frac{1}{r} \omega_r = \int \left\{ \frac{I}{r} - \frac{4\pi G}{r} \left(\Omega_{rr} - \frac{1}{r} \Omega_r + \psi_r^2 \right) \right\} dr - \frac{1}{2} \lambda,$$

где интегрирование производится при постоянном T , а $-\frac{1}{2} \lambda$ является постоянной интегрирования. Далее,

$$\begin{aligned} \omega_{rr} + \frac{1}{r} \omega_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial(\omega_r r)}{\partial r} = 2 \int \left(\frac{I}{r} - \frac{4\pi G}{r} \psi_r^2 \right) dr + \\ &+ I - 4\pi G \psi_r^2 - 4\pi G \left(\Omega_{rr} + \frac{1}{r} \Omega_r \right) - \lambda. \end{aligned}$$

Итак, окончательно уравнения (6.440) — (6.442) принимают вид

$$\rho = -\nabla^2 \psi, \quad (6.444)$$

$$p = -\psi_{TT} + 2 \int \left(\frac{I}{r} - \frac{4\pi G}{r} \psi_r^2 \right) dr + I - 2\pi G \psi_r^2, \quad (6.445)$$

$$q = -\psi_{rT} / \nabla^2 \psi. \quad (6.446)$$

Эти уравнения — результат сведения уравнений Эйнштейна к ньютоновскому приближению для случая сферической симметрии. Так как ψ в общем случае может быть функцией как r , так и G , градиент плотности и давления явно входит в эти формулы, и движение может быть нестационарным (q может быть явной функцией T).

Функцию ψ можно интерпретировать при помощи (3.202) и (3.201); первое является уравнением непрерывности, которое для случая сферической симметрии принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho q) = 0, \quad (6.447)$$

и, в силу (6.440) — (6.442), тождественно удовлетворяется для любых функций ψ . Уравнение движения будет

$$\frac{\partial q}{\partial T} + q \frac{\partial q}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F,$$

где F — добавочная сила на единицу массы жидкости, (кроме давления). С учетом уравнения непрерывности уравнение движения может быть написано в виде

$$\frac{\partial(\rho q)}{\partial T} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho q^2 + p) + \frac{2}{r} \rho q^2 = \rho F. \quad (6.448)$$

Из (6.440) — (6.442) следует, что для произвольных функций ψ и $(\xi + \zeta)$ и для любых конечных значений λ

$$F = 4\pi G \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad (6.449)$$

откуда следует, что эта сила является гравитационным самопритяжением жидкости.

Если бы мы попытались учесть члены более высокого порядка (скажем, κ^3) в точных уравнениях (6.425) — (6.428), мы получили бы снова формулы (6.444) — (6.446). Это происходит потому, что члены (6.445), содержащие G , возникают из тех членов уравнений (6.426) и (6.427), которые умножаются на c^2 . Таким образом, более высокое приближение содержало бы члены, имеющие множитель $c^2 \kappa^n$ с $n > 1$. Но этот множитель обращается в нуль при замене c на $\mathcal{S}$, и добавочные члены в ньютоновском приближении исчезают.

§ 6.5. Космологическая постоянная как силовой параметр [2]

В § 6.2 указывалось, что существует другой метод перехода к ньютоновской теории, и мы сейчас используем его для случая сферической симметрии. Космологическую постоянную запишем в виде суммы двух членов, а именно

$$\Lambda = \kappa c^2 \Lambda_0 + \Lambda_1,$$

где $\kappa c^2 \Lambda_0$ — „большой член“, а Λ_1 — „малая“ космологическая постоянная, упоминавшаяся выше. В предыдущем параграфе мы встречались со случаем $\Lambda_0 = 0$; как было показано, величина Λ_1 давала в ньютоновской теории тривиальный

эффект. В этом параграфе можно Λ_1 опустить. Остающаяся „большая“ космологическая постоянная может быть скомпенсирована, если принять, что функция ω в (6.429) имеет порядок c^2 . Полагая

$$\omega = \bar{\omega}c^2, \quad \Lambda = \kappa c^2 \Lambda_0, \quad (6.501)$$

мы видим, что члены $2\kappa\omega_r/r + \Lambda$ в (6.432) и $\kappa(\omega_{rr} + \omega_r/r) + \Lambda$ в (6.433) по порядку величины в c^2 раз больше остальных членов этих уравнений. Следовательно, эти большие члены должны тождественно обращаться в нуль, если возможно ньютоновское приближение. Используя $\bar{\omega}$ и Λ_0 (из 6.501), получаем, что

$$\frac{2}{r} \bar{\omega}_r + \Lambda_0 = 0, \quad \bar{\omega}_{rr} + \frac{1}{r} \bar{\omega}_r + \Lambda_0 = 0. \quad (6.502)$$

Оба эти уравнения удовлетворяются при

$$\bar{\omega} = -\frac{1}{4} \Lambda_0 r^2 \quad (6.503)$$

независимо от значений плотности, давления и 4-вектора скорости распределения материи. Подставляя (6.501) и (6.502) в (6.431) — (6.434) и приравнявая нулю совокупность членов, содержащих множитель $1/c^2$, получаем ньютоновское приближение

$$\begin{aligned} \rho &= -\nabla^2 \psi - \Lambda_0, \\ \rho q^2 + p &= -\psi_{TT} + 8\pi G \left(\Lambda_0 \psi + \frac{\Omega_r}{r} - \frac{1}{4} \psi_r^2 - \frac{1}{2} r \Lambda_0 \psi_r \right), \\ p &= -\psi_{TT} + 8\pi G \left\{ \Lambda_0 \psi + \frac{1}{2} \Omega_{rr} + \frac{1}{2r} \Omega_r + \frac{1}{4} (r \Lambda_0 + \psi_r)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (6.504)$$

$$\rho q = \psi_{rT},$$

где $\Omega = \xi + \zeta$. Вводя обозначение

$$I_0 = \frac{\psi_{rT}^2}{\nabla^2 \psi + \Lambda_0}$$

и исключая p , ρ , q из уравнений (6.504), получаем условие совместности:

$$\Omega_{rr} - \frac{1}{r} \Omega_r = \frac{I_0}{4\pi G} - \psi_r^2 - 2\Lambda_0 r \psi_r - \frac{1}{2} \Lambda_0^2 r^2. \quad (6.505)$$

Вычисляя комбинацию $\Omega_{rr} + \Omega_r/r$ тем же способом, как было сделано в § 6.4 (б), и подставляя результат в формулу для p (6.504), получаем, что четыре уравнения (6.504) эквивалентны (6.505) совместно с

$$\rho = -\nabla^2\psi - \Lambda_0, \quad (6.506)$$

$$p = -\psi_{TT} + 2 \int \left(\frac{I_0}{r} - \frac{4\pi G}{r} \psi_r^2 \right) dr + I_0 - \\ - 2\pi G \psi_r^2 - 4\pi G \Lambda_0 \left(2\psi + r\psi_r + \frac{1}{2} \Lambda_0 r^2 \right), \quad (6.507)$$

$$q = -\frac{\psi_{rT}}{\nabla^2\psi + \Lambda_0}. \quad (6.508)$$

Уравнение непрерывности (6.447), которое тождественно удовлетворяется выражениями (6.504) и уравнением движения (6.448), приводит к выражению

$$F = 4\pi G \left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \Lambda_0 r \right). \quad (6.509)$$

Если вместо ψ ввести новую функцию $\psi_0 = \psi + \frac{1}{6} \Lambda_0 r^2$, уравнение (6.506) примет вид $\rho = -\nabla^2\psi_0$. Следовательно, ψ_0 может быть названо потенциалом тяготения, создаваемым распределением материи с плотностью ρ , поскольку ρ и ψ_0 связаны уравнением Пуассона. Теперь мы можем определить две массы, находящиеся внутри сферы радиуса r : одну, соответствующую ρ , и другую, соответствующую эквивалентной постоянной плотности $-2\Lambda_0$:

$$M = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr = -4\pi \frac{\partial\psi_0}{\partial r} r^2,$$

$$M_0 = 4\pi \int_0^r (-2\Lambda_0) r^2 dr = -\frac{8\pi}{3} \Lambda_0 r^3.$$

Тогда уравнение (6.509) принимает вид

$$F = -\frac{GM}{r^2} + \frac{8\pi G}{3} \Lambda_0 r = -\frac{GM}{r^2} - \frac{GM_0}{r^2}.$$

Первое выражение для F показывает, что „большая“ космологическая постоянная проявляется в виде силы, действующей вдоль радиуса-вектора и пропорциональной расстоянию r . Эта сила действует наряду с силой, создаваемой распределением материи с плотностью ρ ; она будет отталкиванием

или притяжением в зависимости от того, положительна или отрицательна космологическая постоянная Λ_0 . Второе выражение для F показывает, что эта добавочная сила может быть также интерпретирована как гравитационное притяжение, создаваемое материей с эквивалентной постоянной плотностью $-2\Lambda_0$. Таким образом, наличие „большой“ космологической постоянной в уравнениях Эйнштейна приводит в ньютоновском приближении к такому же гравитационному эффекту, какой имел бы место в присутствии дополнительной фиктивной материи с постоянной (положительной или отрицательной) плотностью. При такой интерпретации плотность, входящая в обычное уравнение Пуассона, не включает эту фиктивную дополнительную плотность. Однако очевидно, что плотность фиктивной материи не может быть сравнима по величине с плотностью, рассматриваемой обычно в приложениях ньютоновской теории потенциала. В противном случае ньютоновская теория не имела бы никакого успеха. В общей теории относительности можно было бы считать $\Lambda_0 \neq 0$ только для задач космологии (см. § 9.5). Таким образом численное значение Λ_0 не превышает по порядку величины усредненной плотности систем галактик, рассматриваемых как целое, т. е. $10^{-30} - 10^{-31}$ г/см³. „Большая“ космологическая постоянная такого порядка величины никак не проявит себя в любой „обычной“ физической ситуации.

Члены, содержащие Λ_0 в предшествующих уравнениях, появляются из членов порядка κ^2 в уравнениях (6.431) — (6.434) и поэтому имеют второй порядок величины. Следовательно, они не могут присутствовать, если разложения метрических коэффициентов содержат члены лишь до первого порядка, как было сделано в § 6.1.

Таким образом влияние „большой“ космологической постоянной сходно с силой тяготения в ньютоновской теории и не может проявиться в виде силы, обусловленной градиентом давления.

§ 6.6. Выводы

В этой главе мы рассмотрели следующие свойства ортогональных решений точных уравнений Эйнштейна (по крайней мере тех решений, метрические коэффициенты которых могут быть разложены по степеням κ):

1) если космологическая постоянная имеет порядок $1/c^2$, то определяемый ею эффект тривиален; если она порядка κc^2 , то ее эффект эквивалентен тяготению фиктивной материи, имеющей постоянную (положительную или отрицательную) плотность;

2) в первом приближении по κ (независимо от того, велика или мала космологическая постоянная) ньютоновское приближение к уравнениям Эйнштейна дает гидродинамическое движение жидкости под действием одного лишь градиента давления. Это заключение основывается на предположении, что жидкость идеальна; так как плотность, вообще говоря, переменна, то жидкость подобна газу;

3) учет членов второго порядка по κ приводит в ньютоновском приближении к гравитационному самопритяжению частиц жидкости и (если космологическая постоянная имеет порядок κc^2) к гравитационному действию фиктивной материи.

Мы разобрали также некоторые трудности, встречающиеся при нахождении точных решений уравнений Эйнштейна и рассмотрели движение жидкости, происходящее под действием внутренних напряжений и сил тяготения и подчиняющееся гораздо более сложным уравнениям, чем классические. В качестве первого приближения это рассмотрение дает, между прочим, решение уравнений ньютоновской газовой динамики — одной из наиболее сложных задач математической физики. Не удивительно поэтому, что прогресс в этом направлении был столь медленным.

Следует отметить, что не каждое точное решение уравнений Эйнштейна физически приемлемо в том смысле, что могут нарушаться требования $\rho \geq 0$, $p \geq 0$, а также однозначности скорости и давления (за исключением возможных разрывов непрерывности). В качестве примера нарушения этих требований рассмотрим решение, сводящееся в ньютоновском приближении к (6.421), причем

$$\psi = \rho_0 \cos(X - UT) - \frac{1}{2} \rho_0 T^2,$$

где ρ_0 , U , p_0 — постоянные. Тогда

$$\rho = \rho_0 \cos(X - UT), \quad p = p_0 - 2\pi G \rho_0^2 \sin^2(X - UT);$$

плотность принимает как положительные, так и отрицательные значения и обращается в нуль, если $X - UT = \frac{\pi}{2} (2n+1)$, где n — целое число. Очевидно, это решение неприемлемо и нет никакой гарантии, что соответствующее точное решение уравнений Эйнштейна окажется физически допустимым. Поэтому каждое решение должно быть тщательно проанализировано с точки зрения его физического смысла.

В следующей главе будут рассмотрены частные случаи ньютоновской газовой динамики на основе уравнений, выведенных в § 6.2 и 6.4. Так как в этих уравнениях уже произведена замена s на $\mathcal{S}$, эти частные задачи не смогут пролить дополнительного света на другие возможные типы приближений к уравнениям Эйнштейна. Мы имеем в виду решения уравнений (6.103), в которых тяготение не учитывается, хотя абсолютная скорость не считается бесконечной. Такие задачи, как гравитационные волны или газовая динамика в специальной теории относительности, мы рассматривать не будем. Ограничимся лишь указанием на то, что эти задачи существуют и поддаются исследованию [3].

ГЛАВА VII

Частные решения уравнений ньютоновской газодинамики

Результаты предыдущей главы указывают путь для систематической классификации типов движений газов в ньютоновской теории. Можно составить перечень функций ψ , дающих с помощью уравнений (6.210), (6.421) или (6.444)—(6.446) решение уравнений движения и непрерывности для движущегося газа. Среди этих функций ψ будут такие, которые соответствуют адиабатическим или изоэнтропическим течениям; подкласс функций ψ , соответствующих неадиабатическим движениям, будет определяться уравнением (3.208), описывающим изменение энтропии единицы массы газа. Наконец, функции ψ можно классифицировать в соответствии с тем, удовлетворяют или не удовлетворяют они предписанным граничным условиям различных типов. Однако составление такого перечня само по себе потребовало бы отдельной книги.

§ 7.1. Одномерное движение

Наиболее простым движением газа является такое, при котором скорость газа параллельна заданной прямой. Поэтому наш перечень должен открываться такого рода движением. Пусть ось X_1 выбрана параллельно оси движения; расстояние вдоль этой оси обозначим через X . Тогда, по определению, все переменные, входящие в уравнения (6.209) и (6.210), будут функциями лишь X и T . Отсюда сразу получаем $U_2 = 0$, $U_3 = 0$, $U_1 = U$. Условие (6.209) может быть выполнено, если

$$\chi = \psi_{XT}^2 / \psi_{XX}; \quad (7.101)$$

индексы обозначают частные производные по X и T . В тех же самых обозначениях уравнения (6.210) принимают вид

$$U = -\psi_{XT}/\psi_{XX}, \quad (7.102)$$

$$\rho = -\psi_{XX}, \quad (7.103)$$

$$p = -\psi_{TT} + \psi_{XT}^2/\psi_{XX}. \quad (7.104)$$

В этих формулах гравитационным самопритяжением газа мы пренебрегли. Однако (6.421) показывает, что учет тяготения оставляет (7.102) и (7.103) неизменными, но (7.104) заменяется на

$$p = -\psi_{TT} + \psi_{XT}^2/\psi_{XX} - 2\pi G\psi_X^2. \quad (7.105)$$

Таким образом, для построения перечня можно использовать (7.102), (7.103) и (7.105) и выделить подкласс движений, у которых мы пренебрегаем гравитационным взаимодействием, просто опустив члены, имеющие множитель G .

Линейное волновое движение. Этот термин будет использоваться для описания любого течения газа, скорость которого является линейной функцией лишь одной пространственной переменной. В одномерном случае простейшего течения этого типа скорость определяется выражением

$$U = (n+1) \left(\frac{X}{T} + \frac{nq}{n+1} \right), \quad (7.106)$$

где n — безразмерная величина (число), а q — константа, имеющая размерность скорости. Удобнее всего начать перечень анализом именно таких течений. Введя обозначение $\mu = \psi_X$ и подставив (7.106) в (7.102), получаем для μ уравнение первого порядка в частных производных

$$\mu_T + (n+1) \left(\frac{X}{T} + \frac{nq}{n+1} \right) \mu_X = 0,$$

откуда

$$\mu = \psi_X = -f \left\{ \left(\frac{X}{T} + q \right) T^{-n} \right\},$$

где f — произвольная функция. Отсюда следует, что

$$\psi = -T^{n+1} F \left\{ \left(\frac{X}{T} + q \right) T^{-n} \right\} - \int \left\{ \int P(T) dT \right\} dT, \quad (7.107)$$

где P — произвольная функция T и

$$F = \int f \left\{ \left(\frac{X}{T} + q \right) T^{-n} \right\} T^{-(n+1)} dX, \quad (7.108)$$

причем при интегрировании T считается постоянным. Вводя новую переменную ζ посредством

$$\zeta = \left(\frac{X}{T} + q \right) T^{-n}, \quad (7.109)$$

записываем уравнение (7.108) в виде

$$F = \int f(\zeta) d\zeta.$$

С помощью (7.109) находим частные производные ζ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial T} &= -(n+1) X T^{-(n+2)} - nq T^{-(n+1)}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} &= (n+1) \{ (n+2) X T^{-(n+3)} + nq T^{-(n+2)} \}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial X} &= T^{-(n+1)}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial X \partial T} = -(n+1) T^{-(n+2)}, \end{aligned}$$

а из (7.107) — частные производные ψ

$$\begin{aligned} \psi_{TT} &= -n(n+1) T^{(n-1)} F - \left\{ 2(n+1) \frac{\partial \zeta}{\partial T} + \right. \\ &\quad \left. + T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial T^2} \right\} T^n F_{\zeta} - T^{n+1} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial T} \right)^2 F_{\zeta\zeta}, \\ \psi_{TX} &= -\frac{\partial \zeta}{\partial T} F_{\zeta\zeta}, \\ \psi_{XX} &= -T^{-(n+1)} F_{\zeta\zeta}. \end{aligned}$$

С помощью этих результатов уравнения (7.102), (7.103) и (7.105) принимают вид

$$\begin{aligned} U &= (n+1) \left\{ \zeta T^n - \frac{q}{n+1} \right\}, \\ \rho &= T^{-(n+1)} F_{\zeta\zeta}, \\ p &= P - n(n+1) T^{n-1} \zeta^2 (F/\zeta)_{\zeta} - 2\pi G F_{\zeta}^2. \end{aligned} \quad (7.110)$$

Очевидно, физически допустим лишь случай $\rho > 0$, т. е. F должно удовлетворять условию $F_{\zeta\zeta} > 0$ для всех значений ζ в области пространства, занимаемой движущимся газом в соответствующие моменты времени; кроме того, должно быть $p > 0$. Поэтому F , P и n необходимо выбрать так, чтобы эти требования выполнялись.

В качестве следующего шага с помощью (3.208) вычислим скорость изменения энтропии. Оператор $\frac{d}{dT}$ равен теперь $\frac{\partial}{\partial T} + U \frac{\partial}{\partial X}$; из (7.106) и (7.109) легко показать, что

$$\frac{d\zeta}{dT} = 0.$$

Отсюда с учетом выражений (7.110) для p и ρ получаем из (3.208)

$$\frac{dS}{dT} = \frac{n+1}{pT} \left[\frac{TP_T}{n+1} + \gamma P - n \{n-1 + \gamma(n+1)\} T^{n-1} \zeta^2 (F/\zeta)_\zeta - 2\pi G \gamma F_\zeta^2 \right]. \quad (7.111)$$

Первые два члена в квадратных скобках являются функциями лишь T ; остальные показывают, что линейное волновое течение с произвольными функциями $P(T)$ и $F(\zeta)$ являются, вообще говоря, неадиабатическим. Субстанциональная скорость изменения энтропии единицы массы газа дается (7.111). Если диссипация энергии (в $\text{эрг/сек} \cdot \text{см}^3$) равна dE/dT , то из (3.205) и определения S имеем

$$\frac{dE}{dT} = \mathcal{J}_\rho \frac{dQ}{dT} = - \frac{\mathcal{K}_\rho \mathcal{J}}{\gamma-1} \frac{dS}{dT} = - \frac{p}{\gamma-1} \frac{dS}{dT}, \quad (7.112)$$

где dS/dT дается (7.111). Эта энергия, разумеется, полностью теряется газом (например, путем лучеиспускания).

Подкласс адиабатических течений представляет особый интерес; он соответствует функциям P и F , удовлетворяющим соотношению

$$\frac{TP_T}{n+1} + \gamma P = n \{ (n-1) + \gamma(n+1) \} T^{n-1} \zeta^2 (F/\zeta)_\zeta + 2\pi G \gamma F_\zeta^2. \quad (7.113)$$

а) Рассмотрим сначала случай, когда гравитационным самопритяжением газа мы пренебрегаем, так что движение происходит под действием одного лишь градиента давления. Эта ситуация соответствует пренебрежению в предыдущих формулах членами со множителем G и поэтому (7.113) может удовлетворяться произвольными функциями F при

$$(n-1) + \gamma(n+1) = 0, \quad \frac{TP_T}{n+1} + \gamma P = 0,$$

откуда

$$n = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad P = p_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-2\gamma/(\gamma+1)}, \quad (7.114)$$

где p_0 и T_0 — постоянные интегрирования. Таким образом, из (7.110) и (7.114) с $G \equiv 0$ мы получили следующую теорему: любое одномерное течение газа, у которого скорость, плотность и давление даются выражениями:

$$U = \frac{2}{\gamma+1} \left\{ \frac{X}{T} - \frac{1}{2} (\gamma-1) q \right\},$$

$$\rho = T^{-\frac{2}{\gamma+1}} F_{\zeta\zeta}, \quad (7.115)$$

$$p = p_0 (T/T_0)^{-\frac{2\gamma}{\gamma+1}} + \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} T^{-\frac{2\gamma}{\gamma+1}} \zeta^2 (F/\zeta),$$

где F — произвольная функция, а $\zeta = (X/T + q) T^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$ является адиабатическим течением. Физически допустимы лишь решения с $F_{\zeta\zeta} > 0$ и $p > 0$ во всей области, занимаемой течением.

Подкласс адиабатических течений, которые являются изоэнтропическими, определяется выражением $p = \eta \rho^\gamma$, где η — постоянная. Отсюда, используя (7.115), имеем

$$p_0 T_0^{\frac{2\gamma}{\gamma+1}} + 2 \frac{\gamma-1}{(\gamma+1)^2} \zeta^2 F_{\zeta\zeta} = \eta F_{\zeta\zeta}^\gamma. \quad (7.116)$$

Это уравнение определяет функцию F для изоэнтропического течения. Хорошо известный случай простой волны получается в предположении, что

$$F = A \zeta^\lambda,$$

где A — положительная постоянная, а λ — постоянная, подлежащая определению. Подставляя выражение для F в (7.116) и приравнивая члены с одинаковыми степенями ζ , получаем

$$p_0 \equiv 0, \quad \lambda = \frac{2\gamma}{\gamma-1},$$

так что (7.115) сводится к системе

$$U = \frac{2}{\gamma+1} \frac{X}{T} - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} q,$$

$$\rho = \frac{2\gamma(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2} A \left(\frac{X}{T} + q \right)^{\frac{2}{\gamma-1}},$$

$$p = \frac{2A}{\gamma+1} \left(\frac{X}{T} + q \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}. \quad (7.117)$$

Это решение уравнений ньютоновской газовой динамики использовалось в задаче о расширении в пустоту фронта (плоского и бесконечно протяженного) облака межзвездного газа, однородного в начальный момент [1]. Можно показать, что постоянная q совпадает с $-2q_0/(\gamma - 1)$, где q_0 — скорость звука в еще невозмущенной части газа.

б) Ситуация существенно изменится, если рассматривать адиабатическое движение газа с учетом его гравитационного самопритяжения. При этом необходимо удовлетворить уравнению (7.113), принимая во внимание член, содержащий постоянную G . Так как левая часть уравнения является функцией лишь T , правая часть не должна зависеть от ζ . Есть только две возможности удовлетворить этому требованию: во-первых, можно положить $F_\zeta = \text{const}$; отсюда $\rho = 0$ и мы получаем физически тривиальное решение. Во-вторых, положить $n = 1$ и

$$\frac{1}{2}TP_T + \gamma P = \text{const}.$$

В результате (7.113) преобразуется к виду

$$\zeta^2 (F/\zeta)_\zeta + \pi G F_\zeta^2 = \text{const}.$$

Продифференцировав это равенство по ζ , получаем два случая:

$$1) F_{\zeta\zeta} = 0 \quad \text{и} \quad 2) F_\zeta = -\frac{\zeta}{2\pi G}.$$

В первом случае $\rho = 0$, во втором $\rho = -(2\pi GT^2)^{-1}$; оба случая физически тривиальны. Следовательно, не существует нетривиального одномерного движения газа под действием как гравитационного притяжения, так и градиента давления.

Но так как любое адиабатическое или изэнтропическое движение типа, рассмотренного выше в (а), удовлетворяет условию

$$\frac{TP_T}{n+1} + \gamma P = n \{ (n-1) + \gamma(n+1) \} T^{n-1} \zeta^2 (F/\zeta)_\zeta,$$

то отсюда из (7.113) и (7.111) следует, что такое движение возможно, если энтропия единицы массы при ее движении меняется по закону

$$\frac{dS}{dT} = -\frac{\gamma(n+1)}{p} \frac{2\pi G}{T} F_\zeta^2.$$

Отсюда с помощью (7.112) получаем диссипацию энергии за 1 сек в 1 см³

$$\frac{dE}{dT} = \frac{\gamma(n+1)}{\gamma-1} \frac{2\pi G}{T} F_{\zeta}^2,$$

для простого изэнтропического движения (7.117), в котором

$$F = A \zeta^{2\gamma/\gamma-1} \quad \text{и} \quad n = -(\gamma-1)/(\gamma+1),$$

диссипация будет

$$\frac{dE}{dT} = \frac{16\pi G A^2}{\gamma+1} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right)^3 \left(\frac{X}{T} + q \right)^2 \frac{\gamma+1}{\gamma-1} T.$$

Таким образом, одномерное движение газа с учетом тяготения требует выполнения дополнительных условий: чтобы движение существовало, газ должен терять энергию определенным образом.

Подробный перечень различных наборов функций P и F мы проводить здесь не будем. Это требует рассмотрения граничных условий и завело бы нас слишком далеко в теорию ударных волн и других типов границ, которые могут ограничивать движение газа. Поэтому перейдем к краткому изложению другого раздела перечня одномерных движений; здесь для примера мы используем некоторые простые типы граничных условий.

Поле скоростей газа, не зависящее от положения. Этот тип движения, включающий изоэнтропическое движение, называемый иногда звуковыми волнами конечной амплитуды, определяется соотношением

$$\psi = - \int f(\zeta) d\zeta - \int \left\{ \int P(T) dT \right\} dT, \quad (7.118)$$

где f и P — произвольные функции своих аргументов, а

$$\zeta = X - \int v(T) dT, \quad (7.119)$$

где v — произвольная функция. В силу (7.102), (7.103) и (7.104) получаем

$$U = v(T), \quad \rho = f_{\zeta}, \quad p = P - v_T f - 2\pi G f^2. \quad (7.120)$$

Таким образом, U зависит только от времени: все части газа движутся с одной и той же скоростью в любой момент вре-

мени. Так как $d\zeta/dT=0$, формула, определяющая скорость изменения энтропии, превращается в

$$\frac{dS}{dT} = \frac{P_T - f v_{TT}}{P - f v_T - 2\pi G f^2}. \quad (7.121)$$

Рассматривая снова адиабатическое движение, находим

$$P_T = 0, \quad v_{TT} = 0,$$

следовательно,

$$P = \Pi, \quad v = \alpha t + \beta, \quad (7.122)$$

где Π , α и β — постоянные. Поэтому в подклассе адиабатических течений скорость, плотность и давление будут соответственно

$$U = \alpha t + \beta, \quad \rho = f_\zeta, \quad p = \Pi - \alpha f - 2\pi G f^2. \quad (7.123)$$

Наиболее простая картина с точки зрения граничных условий получается, если газ заключен между двумя плоскостями, перпендикулярными оси X . Расстояние между плоскостями неизменно и равно L ; слой газа граничит с пустотой. В любой момент времени T слой газа занимает область шириной X ; в силу (7.119) и (7.122) X удовлетворяет неравенствам

$$0 \leq X - \left(\frac{1}{2} \alpha T^2 + \beta T \right) \leq L.$$

Таким образом, границы области определяются значениями $\zeta=0$ и $\zeta=L$; ρ и P_0 должны обращаться в нуль на обеих границах. Из равенства $\rho=0$ следует $f_\zeta(0)=0$, $f_\zeta(L)=0$; разумеется $\rho>0$ при $0 \leq \zeta \leq L$. Следовательно, ρ должно иметь максимум ρ_m при $\zeta=l$ ($0 < l < L$). Равенство $p=0$ на границах дает

$$\begin{aligned} 0 &= \Pi - \alpha f(0) - 2\pi G f^2(0), \\ 0 &= \Pi - \alpha f(L) - 2\pi G f^2(L). \end{aligned} \quad (7.124)$$

Поскольку внутри области $p>0$, функция f должна быть выбрана так, чтобы

$$0 < \Pi - \alpha f(\zeta) - 2\pi G f^2(\zeta), \quad (0 < \zeta < L).$$

Читатель может убедиться, что функции

$$f = -\rho_m \frac{L}{\pi} \cos \frac{\pi \zeta}{L} \quad \text{или} \quad f = \frac{4\rho_m}{L^2} \left(\frac{1}{2} L \zeta^2 - \frac{1}{3} \zeta^3 \right) + \mu,$$

где μ — постоянная, удовлетворяют приведенным выше условиям. Для любой подходящей функции f можно указать определенные характеристики. Если окажется, что $f(0) = -f(L) \neq 0$, то из (7.124) следует, что $\alpha = 0$ и $\Pi = 2\pi G f^2(L)$. В соответствии с (7.123) скорость газа постоянна для всех таких движений. Напротив, если $f(0) \neq \pm f(L)$ и по крайней мере одно из этих значений отлично от нуля, то

$$\alpha = -2\pi G \{f(0) + f(L)\},$$

$$\Pi = -2\pi G \{f^2(0) + f(0)f(L) + f^2(L)\};$$

движение газа происходит под действием постоянного ускорения α . В любом случае ширина области L определяется в зависимости от плотности и давления или температуры при $\zeta = l$. Например, при $\alpha = 0$

$$p_m = 2\pi G \{f^2(L) - f^2(l)\}. \quad (7.125)$$

Но так как $\rho_m = f_\zeta(l)$ и f являются известной функцией f_ζ , то

$$f(l) = g(\rho_m).$$

Кроме того, $p_m = \mathcal{R}\rho_m\mathcal{T}_m$ и поэтому (7.125) принимает вид

$$f(l) = \left\{ \frac{\mathcal{R}\rho_m\mathcal{T}_m + 2\pi G g^2(\rho_m)}{2\pi G} \right\}^{1/2},$$

что определяет L как функцию ρ_m и $\mathcal{T}_m$. Подобное же рассмотрение применимо для случая $\alpha \neq 0$. Однако при вычислении L приходится учитывать член, содержащий G [см. (7.123)]; другими словами, если область, занимаемая газом, имеет конечную ширину, то, для того чтобы газ удерживался в ней, необходимо гравитационное самопритяжение газа.

Хотя применение этих результатов для межзвездного газа может показаться чрезмерной идеализацией, интересно все же отметить, что теория при значениях плотностей и температур, принятых для $\zeta = l$ (наиболее плотная часть газа), дает ширину области от 45 до $1/3$ парсек [2]. Эти величины находятся в приблизительном согласии с наблюдениями.

§ 7.2. Сферическая симметрия и линейные волны

Сложности при рассмотрении сферически симметричного течения газа по сравнению с одномерным течением возникают вследствие того, что в уравнения (6.444) — (6.446) включают

интегралы по переменной r . Составление перечня тех сферически симметричных течений, которые могут быть выражены в конечном виде, значительно сложнее. Поэтому мы ограничимся случаем линейных волн, не только потому, что анализ его проще всего, но и потому, что некоторые из полученных результатов являются фундаментальными для ньютоновской космологии. Под линейным волновым движением мы будем понимать движение, для которого зависимость скорости q вдоль радиуса-вектора такова:

$$q = \frac{f_T}{f} r, \quad (7.201)$$

где f — произвольная функция T . Закон (7.201) для скорости имеет следующее интересное следствие. Пусть O — начало отсчета r , а P — произвольный элемент движущейся жидкости. Тогда в векторных обозначениях $OP = \mathbf{r}$ и скорость элемента P относительно O равна

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{q} = \frac{f_T}{f} \mathbf{r}.$$

Элемент газа, находящийся в точке O , разумеется, покоится относительно O . Предположим теперь, что O' — другое начало отсчета, связанное с некоторым элементом газа. Если $O'P = \mathbf{r}'$ и $OO' = \mathbf{a}$, то скорость P относительно O' будет

$$\dot{\mathbf{r}}' = \dot{\mathbf{r}} - \dot{\mathbf{a}} = \frac{f_T}{f} (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = \frac{f_T}{f} \mathbf{r}'.$$

Скорость элемента газа в O' будет снова равна нулю относительно O' . Следовательно, форма закона скоростей (7.201) не зависит от выбора начала отсчета (если считать, что начало отсчета движется вместе с соответствующим элементом газа). Наблюдатель, сопровождающий произвольный элемент газа, видит, что газ вокруг него движется сферически симметрично: каждый элемент газа удаляется от наблюдателя (или приближается к нему) со скоростью, пропорциональной расстоянию до наблюдателя.

Подставив $\mu = \psi_r$ в (6.446) и используя (7.201), получаем дифференциальное уравнение для μ в виде

$$r\mu_r = \frac{f\mu_T}{f_T} + 2\mu = 0,$$

откуда

$$\mu = -\frac{1}{f^2} h(r f^{-1}),$$

где h — произвольная функция $r f^{-1}$. Интегрирование по частям по переменной r дает требуемое выражение для ψ :

$$\psi = -\frac{1}{f^2} \int h(r f^{-1}) dr - \int \left\{ \int P(T) dT \right\} dT, \quad (7.202)$$

или, вводя переменную ζ подстановкой:

$$\zeta = r f^{-1}, \quad (7.203)$$

имеем

$$\psi = -\frac{1}{f} \int h(\zeta) d\zeta - \int \left\{ \int P(T) dT \right\} dT. \quad (7.204)$$

Производные и интегралы, требующиеся для вычисления ρ и p по формулам (6.445) и (6.444), перечислены ниже:

$$\begin{aligned} \zeta_r &= 1/f, & \zeta_T &= -\frac{f_T}{f^2} r = -\frac{f_T}{f} \zeta, \\ \psi_r &= -\frac{h}{f^2}, & \psi_{rr} &= -\frac{h_\zeta}{f^3}, & \nabla^2 \psi &= -\left(h_\zeta + \frac{2}{\zeta} h\right) f^{-3}, \\ \psi_{rT} &= \frac{f_T}{f^3} \frac{1}{\zeta} (h \zeta^2)_\zeta, \\ \psi_T &= -\int P(T) dT + \frac{f_T}{f^2} \left(\int h d\zeta + h \zeta \right), \\ \psi_{TT} &= -P + \left(\frac{f_{TT}}{f^2} - \frac{2f_T^2}{f^3} \right) \left(\int h d\zeta + h \zeta \right) - \\ &\quad - \frac{f_T^2}{f^3} (\zeta^2 h)_\zeta, \\ I &= \frac{\psi_{rT}^2}{\nabla^2 \psi} = -\frac{f_T^2}{f^3} (\zeta^2 h)_\zeta, \end{aligned} \quad (7.205)$$

$$\int \frac{I}{r} dr = -\frac{f_T^2}{f^3} \left(\int h d\zeta + h \zeta \right),$$

$$\int \frac{\psi_r^2}{r} dr = \frac{1}{f^4} \int \frac{h^2}{\zeta} d\zeta.$$

Из приведенных выражений следует

$$p = P(T) - \frac{f_{TT}}{f^2} \left(\int h d\zeta + h\zeta \right) - \frac{8\pi G}{f^4} \left(\int \frac{h^2}{\zeta} d\zeta + \frac{1}{4} h^2 \right), \quad (7.206)$$

$$\rho = \frac{1}{f^3} \left(h\zeta - \frac{2h}{\zeta} \right). \quad (7.207)$$

Вычисление скорости изменения энтропии S упрощается при введении переменных

$$\begin{aligned} H(\zeta) &= \int h d\zeta + h\zeta, \\ J(\zeta) &= \int \frac{h^2}{\zeta} d\zeta + \frac{1}{4} h^2. \end{aligned} \quad (7.208)$$

Замечая также, что (7.201) и (7.203) дают

$$\frac{d\zeta}{dT} = 0,$$

мы получаем из (3.208) после некоторых преобразований

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dT} &= \frac{1}{P} \left[\left\{ P_T + 3\gamma \frac{f_T}{f} P \right\} - \left\{ \left(\frac{f_{TT}}{f^2} \right)_T + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 3\gamma \frac{f_T}{f} \frac{f_{TT}}{f^2} \right\} H + 8\pi G (4 - 3\gamma) \frac{f_T}{f^5} J \right]. \end{aligned} \quad (7.209)$$

Следовательно, подкласс адиабатических линейных волновых течений описывается функциями $P(T)$, $f(T)$ и $h(\zeta)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\begin{aligned} P_T + 3\gamma \frac{f_T}{f} P &= \left\{ \left(\frac{f_{TT}}{f^2} \right)_T + 3\gamma \frac{f_T}{f} \frac{f_{TT}}{f^2} \right\} H(\zeta) - \\ &- 8\pi G (4 - 3\gamma) \frac{f_T}{f^5} J(\zeta). \end{aligned} \quad (7.210)$$

Левая часть этого уравнения является функцией только T , так что правая часть не может зависеть от ζ . Ограниченность места снова не позволяет нам дать исчерпывающее описание всех возможных типов адиабатических движений [3]; однако в последующих параграфах приведены два характерных примера.

§ 7.3. Линейное волновое расширение газового шара конечных размеров

Следуя методу, примененному к одномерному движению газа, сначала пренебрежем гравитационным самопритяжением массы газа. Другими словами, будем считать, что градиент давления является главной силой, определяющей течение газа, по сравнению с которой силой тяготения можно пренебречь. Уравнения (7.206), (7.207) и (7.210) принимают вид

$$p = P(T) - \frac{f_{TT}}{f^2} H(\zeta), \quad (7.301)$$

$$\rho = \frac{1}{f^3} \left(h_\zeta + \frac{2h}{\zeta} \right), \quad (7.302)$$

$$P_T + 3\gamma \frac{f_T}{f} P = \left\{ \left(\frac{f_{TT}}{f^2} \right)_T + 3\gamma \frac{f_T}{f} \left(\frac{f_{TT}}{f^2} \right) \right\} H(\zeta). \quad (7.303)$$

Выберем следующие граничные условия:

а) плотность и давление конечны всюду внутри газового шара, в том числе в центре при $r=0$;

б) вне шара находится вакуум, так что на границе $p=0$, $\rho=0$. Если радиус шара в момент времени T равен $r_b(T)$, то

$$\frac{dr_b}{dT} = (q)_{r=r_b} = \frac{f_T}{f} r_b.$$

Следовательно,

$$r_b(T) = f(T),$$

так что функцию f можно отождествить с внешним радиусом газового шара. Тогда в силу (7.203) $\zeta=0$ в центре и $\zeta=1$ на внешней границе массы газа.

Пусть индекс нуль отмечает значения f и ее производных в момент времени T_0 и пусть ρ_{0c} и p_{0c} — соответственно конечные плотность и давление в центре газового шара в этот же момент времени. Если предположить, что $P \sim f_{TT}/f^2$, то функции в (7.303), зависящие от T , пропорциональны друг другу, и уравнение (7.303) будет удовлетворено при произвольной функции $h(\zeta)$, если

$$P = \rho_{0c} f_0^3 \frac{f_{TT}}{f^2}, \quad (7.304)$$

$$P_T + 3\gamma \frac{f_T}{f} P = 0. \quad (7.305)$$

Решением (7.305) является

$$P = p_{0c} \left(\frac{f_0}{f} \right)^{3\gamma}, \quad (7.306)$$

и это решение может быть подставлено в (7.304) для получения дифференциального уравнения для f , а именно

$$\frac{d^2 f}{dT^2} = \frac{p_{0c}}{\rho_{0c}} f_0^{3(\gamma-1)} f^{2-3\gamma}.$$

Если f_T принимает значение v_0 при $T = T_0$, интегралом этого уравнения будет

$$\left(\frac{df}{dT} \right)^2 - v_0^2 = \alpha^2 v_0^2 (f_0^{3(1-\gamma)} - f^{3(1-\gamma)}), \quad (7.307)$$

где, используя уравнение состояния (3.204), имеем

$$\alpha^2 = \frac{2p_{0c}}{3(\gamma-1)\rho_{0c}v_0^2} f_0^{3(\gamma-1)} = \frac{2\mathcal{R}T_{0c}}{3(\gamma-1)v_0^2} f_0^{3(\gamma-1)}$$

Таким образом, при

$$\beta^2 = \alpha^2 (1 + \alpha^2 f_0^{3(1-\gamma)})^{-1}, \quad x^2 = f^{3(\gamma-1)} - \beta^2$$

уравнение (7.307) может быть сведено к квадратурам

$$v_0(T - T_0) = \frac{2\beta}{3(\gamma-1)\alpha} \int_{x_0}^x (x^2 + \beta^2)^{\frac{5-3\gamma}{6(\gamma-1)}} dx, \quad (7.308)$$

где

$$x_0^2 = f_0^{3(\gamma-1)} - \beta^2 = \frac{3(\gamma-1)\rho_{0c}v_0^2 f_0^{3(\gamma-1)}}{2p_{0c} + 3(\gamma-1)\rho_{0c}v_0^2}.$$

Значение этих формул иллюстрирует характерный пример. Если газ является одноатомным (например, водород), то $\gamma = 5/3$ и (7.308) может быть проинтегрировано:

$$v_0(T - T_0) = \frac{\beta}{\alpha} (x - x_0).$$

Очевидно, не теряя общности, можно положить $T_0 = 0$. Тогда для f получаем формулу

$$f^2 = f_0^2 + 2 \frac{\alpha}{\beta} x_0 v_0 T + \frac{\alpha^2}{\beta^2} v_0^2 T^2,$$

и поэтому из (7.201) получаем для скорости

$$q = \frac{\alpha}{\beta} v_0 \frac{x_0 + \alpha v_0 T/\beta}{f_0^2 + 2\alpha x_0 v_0 T/\beta + \alpha^2 v_0^2 T^2/\beta^2} r.$$

При действительном q $x_0^2 \geq 0$, что независимо видно из

$$x_0^2 = \frac{\rho_{0c} v_0^2 f_0^2}{\rho_{0c} + \rho_{0c} v_0^2} = \frac{v_0^2}{\mathcal{R} T_{0c} + v_0^2} f_0^2 > 0.$$

Следовательно, q всегда действительно. Ясно также, что при возрастании T $f \rightarrow \alpha v_0 T/\beta$, т. е. граница удаляется пропорционально времени, в то время как скорость стремится к простой зависимости r/T . Если γ не имеет частного значения $5/3$, то интегрирование (7.308) становится более сложным, но можно доказать, что в конечном счете f будет возрастать линейно с T .

Если функция f найдена из (7.308), то необходимо еще выбрать функцию $h(\zeta)$ так, чтобы удовлетворить граничным условиям. Можно показать, что любой многочлен с постоянными коэффициентами

$$h = \sum_{j=1}^n a_j \zeta^j, \quad (7.309)$$

где по меньшей мере a_1 , a_2 и a_3 не равны нулю, является подходящей формой для h . Для давления и плотности из (7.208), (7.301), (7.302), (7.304) и (7.306) получаем:

$$p = p_{0c} \left(\frac{f_0}{f} \right)^{3\gamma} \left(1 - \frac{1}{\rho_{0c} f_0^3} \sum_{j=1}^n \frac{j+2}{j+1} a_j \zeta^{j+1} \right),$$

$$\rho = \frac{1}{f^3} \sum_{j=1}^n (j+2) a_j \zeta^{j-1}.$$

В центре массы газа $\zeta = 0$, и центральное давление и плотность в любой момент времени T даются выражениями:

$$p_c = p_{0c} \left(\frac{f_0}{f} \right)^{3\gamma}, \quad \rho_c = \frac{3a_1}{f^3} = \rho_{0c} \left(\frac{f_0}{f} \right)^3.$$

Отсюда

$$a_1 = \frac{1}{3} \rho_{0c} f_0^3$$

и поскольку $\rho_c > 0$, то должно быть $a_1 > 0$. На внешней границе $\zeta = 1$ и $p = 0$, так что коэффициенты a_j должны быть выбраны так, чтобы удовлетворить условиям:

$$\rho_{0c} f_0^3 = \sum_{j=1}^n \frac{j+2}{j+1} a_j,$$

$$0 = \sum_{j=1}^n (j+2) a_j,$$

что можно сделать всегда. Читатель может легко проверить, что последние два условия выполняются при

$$a_1 = \frac{1}{3} \rho_{0c} f_0^3, \quad a_2 = \frac{9}{4} \rho_{0c} f_0^3, \quad a_3 = -2 \rho_{0c} f_0^3$$

$$a_j = 0, \quad (j = 4, 5, \dots, n),$$

и для этого случая, вспоминая, что $\zeta = r f^{-1}$, получаем

$$p = \rho_{0c} \left(\frac{f_0}{f} \right)^{3\gamma} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{f} \right)^2 - 3 \left(\frac{r}{f} \right)^3 + \frac{5}{2} \left(\frac{r}{f} \right)^4 \right\},$$

$$\rho = \rho_{0c} \left(\frac{f_0}{f} \right)^3 \left\{ 1 + 9 \left(\frac{r}{f} \right) - 10 \left(\frac{r}{f} \right)^2 \right\}. \quad (7.310)$$

Таким образом, для любого момента T максимум p достигается в центре, а минимум — на внешней поверхности газового шара. Плотность возрастает до $r = 9f/20$, а затем падает до нуля при $r = f$.

Как и в случае одновременного течения, учет тяготения резко сокращает возможные случаи движения адиабатического потока. Чтобы удовлетворить уравнению (7.210), теперь необходимо принять

$$H(\zeta) = 2AJ(\zeta),$$

где A — произвольная постоянная. Это уравнение дает либо $h = \zeta/A$, либо $h = B\zeta^{-2}$, где B — постоянная интегрирования. В первом случае $\rho = 3/(Af^3)$, и удовлетворить граничному условию (б) невозможно; во втором случае $\rho = 0$, что тривиально. Поэтому в общем случае сферически симметричное линейное волновое гравитационное течение, удовлетворяющее граничным условиям (а) и (б), неадиабатично. Другими словами, если в газовом шаре мы каким-либо способом создадим в начальный момент времени линейное волновое течение,

то оно будет нарушено, если не подводить (или не отводить) энергию к каждому элементу газа определенным образом. Необходимо отметить, что в любом гравитационном движении, при котором P , f даются (7.306) и (7.308) и h определяется так, чтобы удовлетворить граничным условиям, потери энергии в 1 см³ за 1 сек даются выражением

$$\frac{dE}{dT} = 8\pi G \frac{3\gamma - 4}{\gamma - 1} \frac{f_T}{f^5} J,$$

как можно убедиться из (7.112) и (7.209). В любой момент процесса движения скорость потери энергии во всем объеме шара дается выражением

$$4\pi f^3 \int_0^1 \frac{dE}{dT} \zeta^2 d\zeta = 32\pi^2 G \frac{3\gamma - 4}{\gamma - 1} \frac{f_T}{f^2} \int_0^1 J \zeta^2 d\zeta.$$

Если шар расширяется, то $f_T/f > 0$ и, очевидно, $f > 0$. Более того, в силу (7.208) интеграл $J\zeta^2$ по ζ от $\zeta = 0$ до $\zeta = 1$ также будет положительным. Отсюда заключаем: если газовый шар расширяется вследствие гравитационного линейного волнового течения, то для поддержания движения газ должен излучать энергию (в предположении, что $\gamma > 4/3$, что, конечно, справедливо для реальных газов). Но если газ состоит, например, из идеализированных „шероховатых шарообразных молекул“ [4], то $\gamma = 4/3$, и движение может продолжаться без подведения или отвода энергии. Взрывы новых и сверхновых звезд происходят, по-видимому, более сложно, чем мы рассматривали здесь. Тем не менее интересно отметить, что линейное волновое расширение происходит с испусканием энергии (преимущественно в форме излучения) и не требует поглощения энергии газовым шаром.

§ 7.4. Линейные волны в однородном газе

Имеется частный случай линейного волнового течения в ньютоновской механике, интересный тем, что он дает аналогию космологии общей теории относительности. Если в уравнении (7.207) предположить, что ρ не зависит от r , то функция h будет удовлетворять уравнению

$$h_{\zeta} + \frac{2h}{\zeta} = \rho_0 f_0^3.$$

где ρ_0 , f_0 — постоянные. Отсюда

$$h = \frac{1}{3} \rho_0 f_0^3 \zeta + \frac{A}{\zeta^2}, \quad (7.401)$$

где A — постоянная интегрирования. Подстановкой полученного выражения в (7.206) и интегрированием получаем

$$p = P(T) - \frac{1}{2} \rho_0 f_0^3 \left(\frac{f_{TT}}{f^2} + \frac{4\pi G}{3} \rho_0 \frac{f_0^3}{f^4} \right) \zeta^2 + 4\pi G \frac{A \rho_0 f_0^3}{f^4 \zeta}.$$

Если также предположить, что p не зависит от r , то нужно положить $A = 0$ и

$$f_{TT} + \frac{4\pi G}{3} \rho_0 \frac{f_0^3}{f^2} = 0. \quad (7.402)$$

Первым интегралом этого уравнения будет

$$\frac{f_T^2}{f^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho_0 f_0^3 \left(\frac{1}{f^3} - \frac{k_n}{f_0 f^2} \right), \quad (7.403)$$

где k_n/f_0 — постоянная интегрирования, а k_n — некоторое число. Последующее интегрирование дает

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{8\pi G}{3} \rho_0 k_n^3 (T - T_0)} = \arcsin \sqrt{\frac{k_n f}{f_0}} - \sqrt{\frac{k_n f}{f_0} \left(1 - \frac{k_n f}{f_0} \right)} - \\ - \arcsin \sqrt{k_n} + \sqrt{k_n (1 - k_n)}, \quad (k_n \neq 0) \end{aligned} \quad (7.404)$$

и

$$f = \sqrt[3]{6\pi G \rho_0 f_0^3} \sqrt[3]{(T - T_0)^2}, \quad (k_n = 0), \quad (7.405)$$

где T_0 — вторая постоянная интегрирования. Таким образом, если f дается (7.404) или (7.405), то плотность, давление и радиальная скорость газа будут равны соответственно

$$\rho = \rho_0 \frac{f_0^3}{f^3}, \quad p = P(T), \quad q = \frac{f_T}{f} r. \quad (7.406)$$

Так как давление и плотность не зависят от пространственных координат, будет правильным называть газ однородным; его физическое состояние будет одним и тем же во всех точках пространства в любой момент времени T . Плотность и скорость зависят друг от друга в том смысле, что одна и та же функция f определяет обе величины. Однако давление не зависит от плотности до тех пор, пока не

принимаются во внимание термодинамические соотношения. Если, например, течение является адиабатическим, то из (3.208) следует, что

$$P = p_0 \left(\frac{f_0}{f} \right)^{3\gamma},$$

и, следовательно, P теперь также зависит от f .

В § 7.2 было показано, что зависимость скорости линейного волнового течения имеет одну и ту же форму для любого элемента газа, выбранного в качестве начала отсчета; подобный же результат для силы тяготения получается комбинированием (6.449), (7.204) и (7.401) при $A = 0$. В векторных обозначениях эта сила для произвольного элемента газа P имеет выражение

$$\mathbf{F} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_0 \left(\frac{f_0}{f} \right)^3 \mathbf{r}$$

относительно начала O . Отсюда сила тяготения в точке O' равна

$$\mathbf{F}_0 = -\frac{4\pi G}{3} \rho_0 \left(\frac{f_0}{f} \right)^3 \mathbf{a}.$$

Но сила тяготения в P , отнесенная к началу O' , будет

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F} - \mathbf{F}_0 = -\frac{4\pi G}{3} \rho_0 \left(\frac{f_0}{f} \right)^3 (\mathbf{r} - \mathbf{a}) = -\frac{4\pi G}{3} \rho_0 \left(\frac{f_0}{f} \right)^3 \mathbf{r}',$$

и, следовательно, форма зависимости не меняется, если взять за начало отсчета O' вместо O . Отсюда, какой бы элемент газа мы ни выбрали в качестве начала отсчета, остальной газ будет казаться движущимся радиально по отношению к этому элементу, а сила тяготения, действующая на любую точку газа, будет определяться притяжением материи внутри сферы с центром в начале отсчета и проходящей через выбранную точку [5].

ГЛАВА VIII

Однородные модели вселенной

Литература по этому вопросу уже была указана в гл. I в связи с теорией расширяющейся вселенной — вторым из основных приложений общей теории относительности в ее точной форме. В наши дни термин *космология* — изучение вселенной как целого — заменил более ранний термин, хотя следует напомнить, что космология в этом смысле относится только к тому исследованию вселенной, которое возможно благодаря нашим астрономическим инструментам. Те аспекты вселенной, которые являются предметом изучения биологии, философии и религии, тем самым исключаются из нашего рассмотрения. Оставшаяся часть книги будет посвящена изложению „астрономической космологии“ в той степени, в которой эта теория может быть выведена из принципов общей теории относительности.

§ 8.1. Краткий обзор данных наблюдений

В течение XX в. основным достижением астрономии было установление картины мира с „островным“ распределением звезд и межзвездных газовых облаков. Выяснилось, что эти объекты скорее следует рассматривать как некие колоссальные скопления, называемые *галактиками*, причем каждая галактика отделена от соседней областью, которая вероятно (хотя и не достоверно) лишена вещества и в пределах которой распространяется лишь излучение, испущенное галактиками. Формы галактик варьируют от почти сферической через различные эллипсоидальные формы до уплощенных систем с протяженными спиральными ветвями, состоящими из звезд и облаков газа. Однако в дополнение к этим регулярным системам имеется множество галактик неправильной формы. Эта картина мира была установлена при

помощи 100-дюймового рефлектора обсерватории Маунт Вилсон, с помощью которого были впервые „разрешены“ в галактиках отдельные звезды с наибольшей видимой яркостью. Инструменты с большими диаметрами или иной конструкции (например, камера Шмидта) способствовали уточнению этой картины без существенного качественного изменения ее общего характера (по крайней мере до настоящего времени). Наше Солнце само является членом галактики спирального типа, называемой *Галактикой*, темные межзвездные облака которой являются помехой в изучении системы галактик как целого. К счастью, эти облака сосредоточены в основном вблизи плоскости Млечного Пути, и поэтому при наблюдении в других направлениях влияние затемнения может быть преодолено. Фотографии участков неба, в которых влиянием межзвездного затемнения можно пренебречь, показывают следующее: 1) пластинки с одинаковым временем экспозиции дают качественно одинаковую картину в различных направлениях, если только засняты галактики с видимой звездной величиной около 17^m ; 2) по-видимому, нет нижнего предела для видимых звездных величин галактик, так как количество изображений на пластинках всегда увеличивается с уменьшением видимой яркости (т. е. с увеличением мощности инструмента); 3) распределение изображений на фотографических пластинках нерегулярно, причем галактики образуют мелкомасштабные группировки, называемые *скоплениями* [1].

Если считать видимую звездную величину галактики грубым указателем расстояния до нее, то свойство (1) указывает, что система галактик обладает сферической симметрией относительно точки наблюдения, которой является Земля. Свойство (2) показывает, что вся система галактик не находится в пределах видимости наших наиболее мощных телескопов, и наблюдается лишь часть некоторой большей системы. Увеличение числа галактик с уменьшающимся блеском свидетельствует также в пользу того, что крупномасштабное пространственное распределение галактик однородно. Однако свойство (3) указывает, что в малом масштабе это распределение нерегулярно. В настоящее время общее число галактик, которые наблюдаются с помощью лучших телескопов, доходит до нескольких десятков миллионов; скопления обычно содержат около 200 членов, а наиболее крупные — до 1000.

Расстояние до некоторой галактики в парсеках ($1 \text{ парсек} = 3,0871 \cdot 10^{18} \text{ см}$) определяется с помощью формулы [2]

$$\lg D = 0,2 (m - M) + 1, \quad (8.101)$$

где m — видимая звездная величина, а M — абсолютная звездная величина рассматриваемого объекта. Вывод этой формулы опирается на предположение, что интенсивность источника света уменьшается обратно пропорционально квадрату расстояния D . Абсолютные звездные величины галактик оцениваются прежде всего по таким отождествленным объектам в галактиках, как цефеиды и другие переменные звезды, шаровые звездные скопления, новые звезды и т. д., блеск которых известен из критериев, не зависящих от расстояния. Эти объекты дают значение D для галактики, в которой они находятся; отсюда по видимой звездной величине галактики как целого находится ее абсолютная звездная величина. Отдельные объекты типа звезд или звездных скоплений могут быть отождествлены лишь в относительно ярких галактиках, но эти определения показывают, что абсолютные звездные величины галактик распределены по приближению гауссовой кривой. Поэтому можно предположить, что в очень слабых скоплениях галактик наиболее яркие члены будут сравнимы по абсолютной величине с наиболее яркими близкими галактиками. Хорошо известная галактика в Андромеде ($M \ 31$)¹⁾ является одной из таких близких гигантских систем и имеет $D = 6,92 \cdot 10^5 \text{ парсек}$. На другом конце шкалы 200-дюймовый телескоп может, вероятно, „видеть“ галактики на расстоянии около 10^9 парсек ²⁾.

Спектры галактик обладают замечательным свойством: чем в среднем более слабой абсолютно является галактика,

¹⁾ Галактики, как правило, обозначают номерами по каталогу галактик Мессье (M) или номерами Генерального каталога Дрейера (NGC). — *Прим. ред.*

²⁾ Эти числа указывают расстояние по так называемой „старой шкале“ расстояний, основанной на работах Шепли 1919 г. В 50-х годах был получен ряд достаточно убедительных свидетельств в пользу того, что шкала расстояний Шепли до внегалактических объектов должна быть увеличена примерно вдвое, так что в „новой шкале“ расстояние до галактики в Андромеде составляет $\sim 1,5$ млн. *парсек*. Новая шкала расстояний имеет большое значение для космологии, ибо она уменьшает примерно вдвое постоянную расширения Хаббла и увеличивает вдвое временную шкалу. Это следует иметь в виду в дальнейшем. — *Прим. ред.*

тем больше линии в ее спектре смещены в красную сторону. Если смещение спектральной линии, лабораторная длина волны которой равна λ , равно $d\lambda$, то $\delta = d\lambda/\lambda$ постоянно для всех линий в спектре данной галактики. В классической теории такое смещение спектральных линий могло бы быть приписано наличию некоторой скорости удаления данной галактики относительно наблюдателя, и это представление переносится в общую теорию относительности. Скорости удаления галактик, эквивалентные, по классической теории, наблюдаемым „красным смещениям“, велики и меняются от 1000 км/сек при видимой величине около 8^m до 61 000 км/сек при видимой величине 18^m . Красные смещения для галактик из какого-либо скопления не все одинаковы; эти дополнительные индивидуальные движения, помимо общего удаления скопления как целого, дают возможность определить массы отдельных галактик. Массы, найденные этим и другими методами [3], лежат в пределах от $5 \cdot 10^9$ до $4 \cdot 10^{11}$ солнечных масс.

Другой общий тип данных, имеющих космологический интерес, касается подсчета числа галактик. В площадках неба, выбранных в качестве типичных, фотографируются галактики до определенного предела видимой величины, и подсчитывается число галактик при каждом таком фотографировании. Экстраполяция дает числа галактик до данной величины для всего неба. Эти данные по необходимости являются весьма грубыми, отчасти из-за трудности определения предельных величин, а отчасти из-за эффекта наличия скопления галактик. Тем не менее оказывается, что, в очень грубом приближении, число галактик растет как D^3 ; таким образом, однородность распределения галактик в пространстве является предположением, заслуживающим внимания.

В распоряжении космологии имеется и ряд других типов данных наблюдений. Эти данные будут описаны тогда, когда будет рассмотрена теория соответствующих явлений (в этой и следующей главах). Вероятно, уже достаточно было сказано, чтобы подчеркнуть, что космология общей теории относительности имеет дело с механикой системы галактик как целого, а не с такими вопросами, как эволюция различных составных частей галактики, изменения формы, которые может претерпевать галактика за свою историю и т. д. Необходимо подчеркнуть еще раз, что вся система

галактик недоступна для наших наблюдений; мы знаем лишь некоторую часть ее. Космологическая теория, которая будет изложена, не даст единственно ответа, а укажет лишь ряд возможностей. Гипотетические системы галактик, описанные таким образом, будут иметь один общий элемент: все они будут удовлетворять данным наблюдений, полученным в доступной нам области наблюдаемой системы галактик.

§ 8.2. Однородная модель вселенной

Если система галактик рассматривается как множество, состоящее из дискретных масс, то соответствующее пространство-время должно быть модификацией пространства-времени Шварцшильда с подвижными сингулярностями, разделенными пустыми областями. В решении этой задачи были достигнуты весьма незначительные успехи (см. § 9.8), что объясняется ее исключительными математическими трудностями. Эти трудности, однако, могут быть преодолены, если заменить дискретные массы системы галактик непрерывным распределением вещества. Поле тяготения и движение этого непрерывно распределенного вещества должны быть выбраны так, чтобы как можно лучше удовлетворить данным наблюдений. Будем представлять себе вещество в виде идеальной жидкости; тогда данные предыдущего параграфа подсказывают, что эта жидкость должна обладать сферической симметрией относительно точки наблюдения, т. е. Земли. Очевидно, подобная идеализация может служить только грубым приближением к реальной системе, так как при этом мы игнорируем не только дискретный характер самих галактик, но и тенденцию галактик образовывать скопления. Поэтому для учета этих особенностей рассматриваемая картина должна быть модифицирована.

Если Земля находится в точке $r=0$ в сферически симметричном пространстве-времени с метрикой

$$ds^2 = e^{\nu} dt^2 - \frac{e^{\mu}}{c^2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (8.201)$$

где ν и μ — функции r и t , то 4-вектор скорости жидкости сводится, как было показано в § 6.4, к виду

$$u^4 \neq 0, \quad u^1 = qu^4, \quad u^2 = 0, \quad u^3 = 0, \quad (8.202)$$

где, в силу (6.423),

$$1 = \left(e^{\nu} - \frac{q^2}{c^2} e^{\mu} \right) (u^4)^2. \quad (8.203)$$

Остающиеся уравнения Эйнштейна суть (6.425) — (6.428). Последнее из этих уравнений показывает, что имеется подкласс метрик пространства-времени (8.201), в котором $q = 0$. Сейчас мы покажем, что условие $q = 0$ не означает с необходимостью, что жидкость покоится относительно рассматриваемой системы координат, а является некоторым ограничением, наложенным на систему отсчета. В силу этого ограничения система отсчета является *сопутствующей*, т. е. координаты r и t выбраны так, что „сферическая поверхность“ $r = \text{const}$ движется вместе с веществом, лежащим на этой поверхности. Согласно (6.428), сопутствующие координаты существуют, если ν и μ удовлетворяют дифференциальному уравнению в частных производных

$$\mu_{rt} = \frac{1}{2} \mu_t \nu_r.$$

Интегрируя по переменной r при постоянном t , получаем

$$\ln \mu_t = \frac{1}{2} \nu + \ln \frac{2R'}{R},$$

где $R(t)$ — произвольная функция t , производную которой по t мы обозначили через R' . Интегрируя по переменной t и считая на этот раз r постоянным, получаем

$$\mu = \chi(r) + 2 \int \frac{R'}{R} e^{\frac{1}{2}\nu} dt, \quad (8.204)$$

где $\chi(r)$ — произвольная функция r . Таким образом, сопутствующие координаты существуют, если μ и ν связаны соотношением (8.204).

Если в (6.426) и (6.427) положить $q = 0$, то получаем два выражения для p , тождественные при

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\mu + \nu)_{rr} + \frac{1}{2} \frac{1}{r} (\mu + \nu)_r + \frac{1}{4} \nu_r^2 = \\ = \frac{1}{r} (\mu + \nu)_r + \frac{1}{4} \mu_r^2 + \frac{1}{2} \mu_r \nu_r; \end{aligned} \quad (8.205)$$

последнее равенство является условием совместимости рассматриваемой задачи. Рассмотрим теперь подкласс метрик

пространства времени, в котором а) существуют сопутствующие координаты и б) функция $\nu = 0$. Тогда из равенства (8.204) вытекает, что

$$\mu = \chi(r) + 2 \ln R, \quad (8.206)$$

так что условие совместности (8.205) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению для χ

$$\frac{d^2 \chi}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{dr} \right)^2.$$

Подстановка $\frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} = w$ дает

$$\frac{1}{w^2} \frac{dw}{dr} = \frac{1}{2} r.$$

Интеграл этого уравнения имеет вид

$$w = \frac{1}{r} \frac{d\chi}{dr} = - \frac{k}{1 + kr^2/4},$$

где k — постоянная интегрирования. Последующее интегрирование дает

$$\chi = -2 \ln(1 + kr^2/4); \quad (8.207)$$

постоянную интегрирования, имеющую смысл масштабного множителя, можно положить равной нулю. Таким образом, пространство-время (8.201), в котором $\nu = 0$, а μ дается формулами (8.206) и (8.207), имеет метрику

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{c^2} \left\{ \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}{(1 + kr^2/4)^2} \right\}, \quad (8.208)$$

где R — произвольная функция t , а k — некоторая неопределенная постоянная. В отличие от общего случая (8.201) пространство-время (8.208) однородно [4]; другими словами, если выбрать за начало координат $r = 0$ другую точку, то математическое выражение для метрики не изменится, и будет существовать преобразование координат, связывающее исходную и новую систему координат. Это свойство отражено в значениях плотности и давления рассматриваемого распределения вещества, которые получаются из (6.425) и (6.427), если положить

$$\nu = 0, \quad \mu = \ln \{ R^2 (1 + kr^2/4)^{-2} \}, \quad u^4 = 1. \quad (8.209)$$

Выражения для p и ρ имеют вид

$$\kappa c^2 \rho = \frac{3}{R^2} (kc^2 + R'^2) - \Lambda, \quad (8.210)$$

$$\kappa p = -\frac{2R''}{R} - \frac{R'^2}{R^2} - \frac{\kappa c^2}{R^2} + \Lambda. \quad (8.211)$$

Следовательно, и давление и плотность не зависят от пространственных координат r , θ , φ и являются функциями только времени t . Таким образом, распределение вещества, описываемое (8.208), представляет собой идеальную жидкость, давление которой, конечно, изотропно, и в которой в любой момент времени плотность, как и давление, имеют одинаковое численное значение во всех точках пространства. Поэтому рассматриваемое распределение вещества можно называть *однородным*, а класс пространства-времени с метрикой вида (8.208) будет представлять *однородную модель вселенной*. Это определение однородности было сделано с помощью уравнений Эйнштейна (6.425) — (6.428) и, следовательно, предполагает справедливость этих уравнений. Однако все, что мы до сих пор доказали, сводится к тому, что (8.208) является возможным частным случаем общей симметричной формы (8.201); пригодность метрики (8.208) для описания системы галактик остается предметом исследования, и остальная часть этой главы, а также следующая глава посвящены этому вопросу.

§ 8.3. Некоторые геометрические свойства однородных моделей

Прежде чем продолжить наше рассмотрение, полезно познакомиться с некоторыми свойствами пространства-времени (8.208). Начнем с вопроса о размерностях координат и величины R . Предполагая, как обычно, что s и t имеют размерность времени, а c — размерность скорости, мы можем заключить, что r , как и θ и φ , является безразмерной величиной. Тогда k должно быть отвлеченным числом, а R должно иметь размерность длины. Координаты r , θ , φ можно заменить безразмерными координатами (x, y, z) :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta; \quad (8.301)$$

в этом случае (8.208) принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2(t)}{c^2} \left\{ \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 + kr^2/4)^2} \right\}. \quad (8.302)$$

Далее, пусть $t = t_i$ — некоторый выбранный момент времени; положим $R(t_i) = R_i$. Тогда значение R в любой момент времени, отличный от t_i , может быть записано в виде

$$R(t) = R_i e^{\frac{1}{2} g(t)}, \quad (8.303)$$

где $g(t)$ — такая функция t , что $g(t_i) = 0$. Вводя также линейную координату ζ с размерностью длины посредством

$$\zeta = R_i r, \quad (8.304)$$

запишем метрику (8.208) в виде

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 - \frac{e^{g(t)}}{c^2} \left\{ \frac{d\zeta^2 + \zeta^2 d\theta^2 + \zeta^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}{1 + \left(\frac{k\zeta^2}{4R_i^2} \right)^2} \right\} = \\ &= dt^2 - \frac{R^2}{c^2 R_i^2} \left\{ \frac{d\zeta^2 + \zeta^2 d\theta^2 + \zeta^2 \sin^2 \theta d\varphi^2}{\left(1 + \frac{k\zeta^2}{4R_i^2} \right)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (8.305)$$

Выбирая соответствующим образом масштабный множитель в определении r , мы можем привести постоянную пространственной кривизны k к следующим значениям:

$$k = +1, 0, \text{ или } -1. \quad (8.306)$$

Возможны следующие дальнейшие преобразования координат.

$k = +1$. Пусть ω — новая угловая координата, определяемая соотношением

$$\zeta = R_i r = 2R_i \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}, \quad (8.307)$$

из которого следует, что r (или ζ) $\rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow \pi$. Тогда

$$d\zeta = R_i \frac{1}{\cos^2 \frac{\omega}{2}} d\omega, \quad \left(1 + \frac{\zeta^2}{4R_i^2} \right)^{-2} = \cos^4 \frac{\omega}{2},$$

и метрика (8.305) принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2}{c^2} \{ d\omega^2 + \sin^2 \omega (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \}. \quad (8.308)$$

Метрика трехмерного пространства, определяемого условием $t = \text{const}$, имеет вид

$$ds^2 = R^2 \{ d\omega^2 + \sin^2 \omega (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \}. \quad (8.309)$$

Эту формулу следует сравнить с метрикой двумерной сферической поверхности (2.203). Нетрудно видеть, что выражение

$$(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

в формуле (8.309) играет роль члена $d\varphi^2$ в формуле (2.203), R —аналог радиуса сферы a , ω заменяет θ . Таким образом, выражение (8.309) представляет собой обобщение на случай трех измерений понятия поверхности сферы обычной евклидовой геометрии, и потому говорят, что пространство, соответствующее модели вселенной (8.208) с $k=1$, является „сферическим“. Читателю следует обратить внимание на сходство формул (2.205) и (8.309), когда последняя формула выражена через первоначальную координату r , а именно

$$ds^2 = R^2 \left\{ \frac{dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{(1 + r^2/4)^2} \right\}.$$

Еще одну форму этой метрики можно получить введением линейной координаты ξ с размерностью длины, определяемой соотношениями

$$\xi = R_i \sin \omega = \frac{R_i r}{1 + r^2/4} = \frac{\xi}{1 + \xi^2/(4R_i^2)}. \quad (8.310)$$

Так как

$$d\omega = \frac{d\xi}{R_i (1 - \xi^2/R_i^2)^{1/2}},$$

метрика (8.308) принимает вид

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2}{c^2 R_i^2} \left\{ \frac{d\xi^2}{1 - \xi^2/R_i^2} + \xi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\}. \quad (8.311)$$

Эти четыре формы метрики с $k=1$ (8.208), (8.305), (8.308) и (8.311) отличаются лишь тем, что содержат различные линейные координаты, перечисленные в (8.310). Эти изменения не более существенны, чем те изменения в геометрии сферы, которые вытекают из перехода от формулы (2.203) к формуле (2.205).

$k=0$. В этом случае мы имеем

$$\zeta = \xi = R_i r, \quad (8.312)$$

и метрика соответствующей модели вселенной имеет вид

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2}{c^2 R_i^2} (d\xi^2 + \xi^2 d\theta^2 + \xi^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (8.313)$$

Так как момент $t=t_i$ произволен, то при соответствующем определении ξ метрика трехмерного пространства при $t=t_i$ имеет вид

$$ds^2 = d\xi^2 + \xi^2 d\theta^2 + \xi^2 \sin^2 \theta d\varphi^2,$$

что совпадает с метрикой трехмерного евклидова пространства, выраженной через сферические координаты (ξ, θ, φ) . Поэтому о модели вселенной с $k=0$ говорят как об имеющей „плоское пространство“. Это не означает, конечно, что плоским является четырехмерное пространство-время, так как условие $k=0$ не гарантирует с необходимостью того, что обращаются в нуль тензор Римана — Кристоффеля или тензор Риччи, как можно видеть из правой части (8.210) и (8.211).

$k=-1$. Определяя ζ посредством (8.304) и определяя координаты ω и ξ при помощи соотношений

$$\begin{aligned} \zeta &= R_i r = 2R_i \operatorname{th} \frac{\omega}{2}, \\ \xi &= R_i \operatorname{sh} \omega = \frac{R_i r}{1-r^2/4} = \frac{\zeta}{1-\zeta^2/(4R_i)^2}, \end{aligned} \quad (8.314)$$

можно записать метрику этой модели вселенной в виде

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2}{c^2} \{ d\omega^2 + \operatorname{sh}^2 \omega (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \}, \quad (8.315)$$

либо

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2}{c^2 R_i^2} \left\{ \frac{d\xi^2}{1 + \frac{\xi^2}{4R_i^2}} + \xi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\}. \quad (8.316)$$

Первая форма показывает, что трехмерное пространство $t=\text{const}$ является трехмерным аналогом поверхности с метрикой (2.207). Эту модель вселенной называют моделью с „гиперболическим пространством“. Из (8.314) следует также, что ω и ξ обращаются в бесконечность при $r=2$, или $\zeta=2R_i$.

Очевидно, координата ξ , определяемая (8.310), (8.312) или (8.314), может быть использована вместо координаты r в (8.208) во всех трех предшествующих случаях, причем метрика приобретает вид

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2}{c^2 R_i^2} \left\{ \frac{d\xi^2}{1 - \frac{k\xi^2}{R_i^2}} + \xi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\}. \quad (8.317)$$

Так как плотность и давление в (8.210) и (8.211) суть функции только от $R(t)$, изменение линейной координаты не будет изменять этих равенств. Этот вывод можно обосновать, преобразуя с помощью формул Дингля уравнения Эйнштейна для метрики (8.317).

Постоянная кривизны пространства k связана с объемом, лежащим внутри $0 \leq r \leq r_i$ в трехмерном пространстве, определяемом условием $t = \text{const} = t_0$. Этот объем, если положить $R(t_0) = R_0$, равен:

$$\mathcal{V} = R_0^3 \int_0^{r_i} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi}{(1 + kr^2/4)^3} = 4\pi R_0^3 \int_0^{r_i} \frac{r^2 dr}{(1 + kr^2/4)^3}. \quad (8.318)$$

Для случая $k = +1$ этот интеграл можно вычислить подстановкой $r = 2 \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$:

$$\mathcal{V}_+ = 4\pi R_0^3 \left\{ \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} r_i \right) - \frac{1}{2} r_i \left(1 - \frac{1}{4} r_i^2 \right) \left(1 + \frac{1}{4} r_i^2 \right)^{-2} \right\}.$$

Но бесконечному значению r_i соответствует $\omega = \pi$, и поэтому объем, лежащий внутри $0 \leq r < \infty$, в любой момент t_0 *конечен* и равен

$$\mathcal{V}_+(\infty) = 2\pi^2 R_0^3. \quad (8.319)$$

Подобно поверхности сферы, которая не имеет границ и имеет конечную площадь, сферическое пространство не имеет границ и занимает конечный объем. Это представление таит некоторую опасность: сферическое пространство не следует смешивать с объемом, лежащим *внутри* обычной сферы в трехмерном евклидовом пространстве. Такой объем имеет границу, а именно поверхность сферы, и вне этой

сферы лежит большая часть „объема“ евклидова пространства. Сферическое пространство не имеет подобной границы, вне которой лежала бы большая часть его объема.

Если $k=0$, то объем, лежащий внутри $r=r_i$, равен

$$\mathcal{V}_0 = \frac{4\pi}{3} R_0^3 r_i^3,$$

и, следовательно, $\mathcal{V}_0 \rightarrow \infty$ с возрастанием r_i . Наконец, если $k=-1$, интеграл (8.318) можно вычислить с помощью подстановки $r = 2 \operatorname{th} \frac{\omega}{2}$; его значение равно

$$\mathcal{V}_- = 4\pi R_0^3 \left\{ \frac{1}{2} r_i \left(1 + \frac{1}{4} r_i^2 \right) \left(1 - \frac{1}{4} r_i^2 \right)^{-2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{2} r_i \right) \right\},$$

откуда видно, что $\mathcal{V}_- \rightarrow \infty$ при $r_i \rightarrow 2$. Таким образом, модели вселенной, в которой пространство плоское или гиперболическое, таковы, что полный объем пространства бесконечен, причем гиперболическое пространство, так сказать, обладает большим объемом, чем плоское.

§ 8.4. Красное смещение

Первым шагом в анализе пространства-времени (8.208) будет выяснение того, может ли оно дать объяснение красному смещению, наблюдаемому в спектрах галактик. Для этого рассмотрим геодезические и нулевые геодезические линии этого пространства-времени. Так как метрика ортогональна, можно использовать уравнения геодезических линий (2.807), и удобно воспользоваться эквивалентной формой (8.302) с такими обозначениями координат:

$$t = x^4, \quad x = x^1, \quad y = x^2, \quad z = x^3.$$

Тогда уравнения геодезических линий имеют вид

$$\frac{d^2 x^4}{ds^2} + \frac{RR'}{c^2(1+kr^2/4)^2} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{dx^j}{ds} \right)^2 = 0, \quad (8.401)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \left(\frac{R^2}{c^2(1+kr^2/4)^2} \frac{dx^i}{ds} \right) + \\ & + \frac{kR^2 x^i}{2c^2(1+kr^2/4)^3} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{dx^j}{ds} \right)^2 = 0 \quad (i=1, 2, 3), \end{aligned} \quad (8.402)$$

и нетрудно видеть, что для всех трех значений k и для любой функции R класс решений этих уравнений будет

$$x^4 = s + s_0, \quad x^i = x_0^i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (8.403)$$

где s_0 и три x_0^i — постоянные интегрирования. Так как решения этого типа содержат только четыре произвольные постоянные, они не являются общим решением уравнений, определяющих геодезические линии, которое должно содержать восемь произвольных постоянных. Тем не менее частицы, движение которых определяется (8.403), представляют особый интерес, так как все они имеют фиксированные координаты (x, y, z) , и интервал вдоль геодезической линии любой из этих частиц измеряется посредством координаты t . Поэтому мы предположим, что галактики, рассматриваемые как источники света, можно отождествить с подобными частицами, и это предположение будет использовано при нахождении теоретической формулы для красного смещения.

Так как теперь источник света имеет фиксированные координаты (x, y, z) , он должен иметь и фиксированные координаты (r, θ, φ) , если метрика выражена при помощи (8.208). Пусть один из этих источников, расположенный в точке P_i с координатами $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$, испускает свет, который наблюдается в точке O с координатами $(0, 0, 0)$. Распространение света описывается нулевой геодезической линией, проходящей через P_i и O , уравнения которой совпадают по форме с (8.401) и (8.402), с тем отличием, что s заменяется на ненулевой параметр μ . Необходимо показать, что нулевые геодезические линии радиальны, т. е. вдоль них $\theta = \theta_i$, $\varphi = \varphi_i$. Предположим, что это имеет место; тогда для любой точки вдоль нулевой геодезической линии между P_i и O

$$x = \alpha^1 r, \quad y = \alpha^2 r, \quad z = \alpha^3 r,$$

где $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ — постоянные, которые, в силу (8.301), можно выразить через θ_i, φ_i :

$$\alpha^1 = \sin \theta_i \cos \varphi_i, \quad \alpha^2 = \sin \theta_i \sin \varphi_i, \quad \alpha^3 = \cos \theta_i,$$

так что

$$(\alpha^1)^2 + (\alpha^2)^2 + (\alpha^3)^2 = 1.$$

смаатривая передний фронт волны, получаем связь интервала времени от t_i до t_0 с r_i :

$$c \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = - \int_{r_i}^0 \frac{dr}{1 + kr^2/4}, \quad (8.409)$$

тогда как задний фронт волны дает

$$c \int_{t_i+dt_i}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{R(t)} = - \int_{r_i}^0 \frac{dr}{1 + kr^2/4}, \quad (8.410)$$

так как координата r точек P_i и O фиксирована. Но

$$\begin{aligned} \int_{t_i+dt_i}^{t_0+dt_0} \frac{dt}{R} &= \left\{ \int_{t_i+dt_i}^{t_i} + \int_{t_i}^{t_0} + \int_{t_0}^{t_0+dt_0} \right\} \frac{dt}{R} = \\ &= - \frac{dt_i}{R(t_i)} + \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{R} + \frac{dt_0}{R(t_0)}. \end{aligned}$$

Поэтому, вычитая (8.409) из (8.410) и используя только что полученный результат, имеем

$$\frac{dt_i}{R(t_i)} = \frac{dt_0}{R(t_0)}. \quad (8.411)$$

Таким образом, dt_0 и dt_i не равны друг другу, за исключением случая $R = \text{const}$. Следовательно, период световых колебаний в точке O отличается от периода световых колебаний при испускании света в P_i .

Соотношение (8.411) можно выразить через длины волн следующим образом. Испускание волны в точке P_i есть событие $(t_i, r_i, \theta_i, \varphi_i)$, или, в силу (8.301), событие (t_i, x_i, y_i, z_i) . Поэтому локальные декартовы координаты в окрестности P_i имеют вид

$$X^4 = t - t_i, \quad X^j = \frac{R(t_i)}{1 + kr_i^2/4} (x^j - x_i^j) \quad (j = 1, 2, 3),$$

где, как обычно, $(x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$. Таким образом, метрика (8.302) локально имеет вид

$$ds^2 = (dX^4)^2 - \frac{1}{c^2} \sum_{j=1}^3 (dX^j)^2,$$

и, следовательно, локальная скорость света в P_i равна c . Если длина волны испущенного в точке P_i света равна λ_i , то мы имеем

$$c dt_i = \lambda_i.$$

Вводя локальные декартовы координаты вблизи события $(t_0, 0, 0, 0)$, которое описывает прибытие световой волны в точку O , мы можем показать аналогичным образом, что длина волны света в точке O равна $\lambda_i + d\lambda$, причем

$$c dt_0 = \lambda_i + d\lambda.$$

Но так как отправление переднего и заднего фронтов волны из точки P_i суть события $(t_i, r_i, \theta_i, \varphi_i)$ и $(t_i + dt_i, r_i, \theta_i, \varphi_i)$, интервал между ними равен, в силу (8.208), $ds_i = dt_i$. Соответствующие события в точке O для волны, испущенной там с периодом dt_{00} , разделены интервалом $ds_{00} = dt_{00}$. Инвариантное определение эквивалентных волн (испущенной в P_i и испущенной в O) может быть получено так. Предположим, что эквивалентность означает $ds_i = ds_{00}$, отсюда $dt_{00} = dt_i$. Следовательно, $\lambda_i (= \lambda)$ является также длиной эквивалентной волны в точке O , так что

$$\lambda = c dt_{00} = c dt_i, \quad (\lambda + d\lambda) = c dt_0.$$

Наконец, полагая $\delta = \frac{d\lambda}{\lambda}$, $R_0 = R(t_0)$, $R_i = R(t_i)$, из соотношения (8.411) имеем

$$\delta = \frac{R_0}{R_i} - 1. \quad (8.412)$$

Эта формула указывает на то, что относительное изменение длины волны зависит только от значений R при $t = t_i$ и $t = t_0$ и одинаково для всех длин волн. Поэтому δ по своей природе сходно с эффектом Допплера и, как будет сейчас показано, может быть связано со скоростью изменения расстояния между O и P_i . В настоящее время согласно наблюдениям $\delta > 0$ при $R_0 > R_i$, т. е. существует красное смещение.

ние спектральных линий P_i , наблюдаемых в O . Однако теория однородной модели вселенной не гарантирует этого, так как функция $R(t)$ не определена. Между тем, однородность может быть столь же хорошо совместима и с противоположной возможностью отрицательного (фиолетового) смещения, или с возможностью как положительных, так и отрицательных смещений. Например, рассмотрим источник света P_j , который испускает свет при $t = t_j \neq t_i$, достигающий O при $t = t_0$. Тогда R могло бы быть таким, что

$$R_0 > R_i, \quad R_0 < R_j.$$

Таким образом спектральные линии P_i были бы смещены в красную сторону, а линии P_j — в фиолетовую. Вопрос о том, какая из однородных моделей может представлять наблюдаемое распределение галактик, является, таким образом, предметом практического исследования. Не теория, а опыт должен помочь выбрать соответствующую функцию R . Если отождествить точку O с наблюдателем на Земле и момент времени $t = t_0$ с настоящим моментом, то то, что все обнаруженные до сих пор галактики имеют $\delta > 0$, означает, что функция R должна удовлетворять условию

$$R_0 > R_i \quad (8.413)$$

для всех приемлемых моментов испускания t_i .

§ 8.5. Расстояние и скорость удаления

Нет, вероятно, такого вопроса в космологии, который вел бы к большей путанице, чем вопрос о смысле понятия „расстояние“. Эта путаница, вероятно, проистекает из того обстоятельства, что астрономы привыкли применять, например, в теории движения планет или в задаче о движении звезд ньютоновскую механику с ее абсолютным временем и абсолютным пространством. В любой момент абсолютного времени понятию „расстояние между двумя небесными телами“ может быть приписан единственный смысл. Достаточно сказать, что это — евклидово расстояние между точками абсолютного пространства, в которых расположены эти объекты, в рассматриваемый момент времени. Расстояние, таким образом, неявно отождествляется с некоторой абсолютной и единственной в своем роде величиной, опреде-

ленным образом сопоставляемой двум небесным телам в каждый момент абсолютного времени. В общей теории относительности, однако, такое понятие уже неприемлемо: расстояние становится функцией не только этих двух тел, но и функцией той процедуры, посредством которой измеряется это расстояние. Различные процедуры могут (а в общем случае будут) вести к различным „расстояниям“, и не имеется ни одного расстояния, которое можно было бы назвать „правильным“. Это положение вещей можно хорошо проиллюстрировать на примере пространства-времени с метрикой

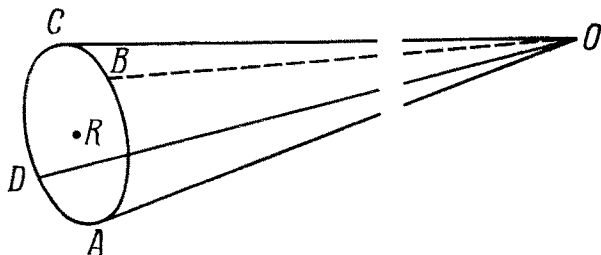


Рис. 4.

(8.208); этот разбор важен потому, что он поможет выяснить вопрос о расстоянии. Мы детально обсудим три типа расстояния: другие типы рассмотрены Мак-Кри [5].

Расстояние, определяемое по видимому размеру. Для определения этого типа расстояния рассмотрим модель вселенной с метрикой, записанной в виде

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R_i^2}{cR_i^2} \left\{ \frac{d\xi^2}{1 - \frac{k\xi^2}{4R_i^2}} + \xi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\}, \quad (8.501)$$

где

$$\xi = \frac{R_i r}{1 + kr^2/4}, \quad R_i = R(t_i).$$

Выберем в качестве небесного объекта некоторую галактику, которая, как известно, не является точечным источником света, а занимает конечную (хотя и малую) площадь небесной сферы. На рис. 4 $ABCD$ — контур видимой границы галактики, причем точка P_i с фиксированными координатами

$(r_i, \theta_i, \varphi_i)$ лежит внутри этой области, а точка наблюдения находится в O с координатами $(0, 0, 0)$. Координаты точки контура A равны $(r_i, \theta_i + \Delta\theta_i, \varphi_i + \Delta\varphi_i)$ и, таким образом, отличаются на малые углы $\Delta\theta_i$ и $\Delta\varphi_i$ от координат точки P_i . Свет, испущенный точкой контура A в момент t_i , достигает точки O в момент t_0 после прохождения вдоль радиальной нулевой геодезической линии AO . Следовательно, любые две образующие конуса нулевых геодезических линий, вершина которого находится в O , а основанием является $ABCD$ (например, AO и CO), образуют друг с другом в точке O угол, который зависит от разностей $\Delta\theta_i$ и $\Delta\varphi_i$ для A и C соответственно. Поэтому видимый из точки O размер единичной площадки в пределах контура $ABCD$ определяется телесным углом, опирающимся на единичную площадку в момент t_i испускания света из точек контура A, B, C, D . Но метрика двумерной поверхности $t = t_i, \xi = \xi_i = \frac{R_i r_i}{1 + k r_i^2/4}$ имеет,

в силу (8.501), вид

$$ds^2 = \xi_i^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

и, следовательно, интересующий нас телесный угол равен ξ_i^{-2} . Поэтому, если расстояние до источника света, представляющего собой малую конечную площадку вокруг P_i с фиксированными координатами $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$, измеряется по видимому размеру площадки, то мы получаем величину, называемую *расстоянием, определяемым по видимому размеру объекта*. Оно дается соотношением

$$\xi = \frac{R_i r_i}{1 + k r_i^2/4}, \quad (8.502)$$

где момент испускания света (t_i) и момент прибытия света в O (t_0) связаны уравнением нулевой геодезической линии

$$-c \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{R(t)} = \int_{r_i}^0 \frac{dr}{1 + k r^2/4}. \quad (8.503)$$

Всегда, когда приходится иметь дело с неопределенной функцией и с постоянной, которая может принимать более

одного значения, полезно рассмотреть характерный пример. В качестве примера можно рассмотреть случай

$$R = \alpha e^{\frac{c}{\alpha} t}, \quad k = +1. \quad (8.504)$$

где α — некоторая постоянная с размерностью длины. Модель вселенной, определенная таким образом, не имеет особого физического интереса; ее достоинство заключается в математической простоте. Начало отсчета t произвольно, и поэтому можно положить $t_0 = 0$, тогда момент времени t_i испускания света некоторым объектом, видимым в O в момент $t_0 = 0$,

будет отрицательным. Очевидно, $e^{\frac{c}{\alpha} t_0} = 1$, и поэтому $\alpha = R_0$. Таким образом, мы имеем

$$t_0 = 0, \quad e^{\frac{c}{\alpha} t_0} = 1, \quad t_i < 0, \quad R = R_0 e^{\frac{c}{R_0} t}, \quad k = +1. \quad (8.505)$$

С помощью соотношений (8.505) можно подсчитать интеграл в левой части уравнения (8.503) и выразить r_i :

$$r_i = 2 \operatorname{tg} \left\{ \frac{1}{2} \left(e^{-\frac{c}{R_0} t_i} - 1 \right) \right\}. \quad (8.506)$$

Таким образом, выражение для расстояния, определяемого по видимому размеру P_i , имеет вид

$$\xi = R_0 e^{\frac{c}{R_0} t_i} \sin \left(e^{-\frac{c}{R_0} t_i} - 1 \right). \quad (8.507)$$

Так как R увеличивается с ростом t , спектральные линии смещены в красную сторону и, в силу (8.412) и (8.505),

$$\delta = e^{-\frac{c}{R_0} t_i} - 1, \quad (8.508)$$

так что равенство (8.507) можно также записать в виде

$$\xi = \frac{R_0}{1 + \delta} \sin \delta. \quad (8.509)$$

Другой интересный вопрос, который можно иллюстрировать с помощью модели вселенной (8.505), связан с источником света, имеющего максимальное расстояние, определяемое по видимому размеру, который можно наблюдать в точке O . Можно было бы думать, что этот наиболее удаленный источ-

ник имеет $r_i = \infty$, однако это не так. Значение $r_i = \infty$ означает, что t_i получается из соотношения $e^{-\frac{c}{R_0} t_i} - 1 = \pi$; это соответствует $\xi = 0$. Другими словами, и $r_i = 0$, и $r_i = \infty$ соответствуют $\xi = 0$, а максимальное значение ξ можно подсчитать следующим образом. Пусть $\eta = e^{-\frac{c}{R_0} t_i}$, тогда, в силу (8.507),

$$\xi = \frac{R_0}{\eta} \sin(\eta - 1), \quad (8.510)$$

$$\frac{d\xi}{dt_i} = c \left\{ \frac{\sin(\eta - 1)}{\eta} - \cos(\eta - 1) \right\}, \quad (8.511)$$

$$\frac{d^2\xi}{dt_i^2} = \frac{c^2}{R_0} \left\{ \frac{\sin(\eta - 1)}{\eta} - \cos(\eta - 1) - \eta \sin(\eta - 1) \right\}. \quad (8.512)$$

Из (8.511) следует, что экстремальное значение ξ по отношению к переменной t_i (но не t_0) соответствует $\eta = \eta_m$, где

$$\operatorname{tg}(\eta_m - 1) = \eta_m$$

или

$$\operatorname{tg}(\eta_m - 1) - (\eta_m - 1) = 1.$$

По таблицам натуральных значений тригонометрических функций легко найти, что наименьший корень этого уравнения лежит вблизи

$$\eta_m = 2,133. \quad (8.513)$$

Более того, если индекс m указывает значение некоторой величины при $\eta = \eta_m$, то равенство (8.510) принимает вид

$$\xi_m = R_0 \frac{\sin(1,133)}{2,133} = 0,42 R_0,$$

тогда как (8.512) имеет вид

$$\left(\frac{d^2\xi}{dt_i^2} \right)_m = -\frac{c^2}{R_0} (2,133) \sin(1,133) < 0,$$

откуда видно, что ξ_m — максимальное значение ξ . Для красного смещения спектральных линий, излученных наиболее удаленным объектом, мы получаем, в силу (8.508) и (8.513),

$$\delta = \eta_m - 1 = 1,133, \quad (8.514)$$

ник имеет $r_i = \infty$, однако это не так. Значение $r_i = \infty$ означает, что t_i получается из соотношения $e^{-\frac{c}{R_0} t_i} - 1 = \pi$; это соответствует $\xi = 0$. Другими словами, и $r_i = 0$, и $r_i = \infty$ соответствуют $\xi = 0$, а максимальное значение ξ можно подсчитать следующим образом. Пусть $\eta = e^{-\frac{c}{R_0} t_i}$, тогда, в силу (8.507),

$$\xi = \frac{R_0}{\eta} \sin(\eta - 1), \quad (8.510)$$

$$\frac{d\xi}{dt_i} = c \left\{ \frac{\sin(\eta - 1)}{\eta} - \cos(\eta - 1) \right\}, \quad (8.511)$$

$$\frac{d^2\xi}{dt_i^2} = \frac{c^2}{R_0} \left\{ \frac{\sin(\eta - 1)}{\eta} - \cos(\eta - 1) - \eta \sin(\eta - 1) \right\}. \quad (8.512)$$

Из (8.511) следует, что экстремальное значение ξ по отношению к переменной t_i (но не t_0) соответствует $\eta = \eta_m$, где

$$\operatorname{tg}(\eta_m - 1) = \eta_m$$

или

$$\operatorname{tg}(\eta_m - 1) - (\eta_m - 1) = 1.$$

По таблицам натуральных значений тригонометрических функций легко найти, что наименьший корень этого уравнения лежит вблизи

$$\eta_m = 2,133. \quad (8.513)$$

Более того, если индекс m указывает значение некоторой величины при $\eta = \eta_m$, то равенство (8.510) принимает вид

$$\xi_m = R_0 \frac{\sin(1,133)}{2,133} = 0,42 R_0,$$

тогда как (8.512) имеет вид

$$\left(\frac{d^2\xi}{dt_i^2} \right)_m = -\frac{c^2}{R_0} (2,133) \sin(1,133) < 0,$$

откуда видно, что ξ_m — максимальное значение ξ . Для красного смещения спектральных линий, излученных наиболее удаленным объектом, мы получаем, в силу (8.508) и (8.513),

$$\delta = \eta_m - 1 = 1,133, \quad (8.514)$$

Предположим теперь, что за некоторый малый промежуток времени Δt_i в точке P_i беспорядочно во все стороны излучается n фотонов. Среднее число фотонов, проходящих через единицу площади S_i за единицу времени, равно

$$\frac{n_i}{S_i} = \frac{n}{S_i \Delta t_i}.$$

Пусть эти n фотонов проходят через S_0 за время Δt_0 . Тогда, так как нулевая геодезическая линия, соединяющая P_i с некоторой точкой на S_0 , представляет движение фотона, и обе эти точки имеют фиксированные координаты (r, θ, φ) , снова можно использовать тот аргумент, с помощью которого было выведено соотношение (8.411) из (8.409) и (8.410), и, таким образом, показать, что

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_i} = 1 + \delta = \frac{R_0}{R_i}.$$

Таким образом, средняя плотность потока фотонов через S_0 равна

$$\frac{n_0}{S_0} = \frac{n}{S_0 \Delta t_0} = \frac{n_i}{S_0} \frac{\Delta t_i}{\Delta t_0} = \frac{n_i}{S_0} \frac{R_i}{R_0},$$

а средняя плотность потока энергии через S_0

$$dh_i = \left(\frac{hc}{\lambda_i} \frac{R_i}{R_0} \right) \left(\frac{n_i}{S_0} \frac{R_i}{R_0} \right) = \left(\frac{hcn_i}{S_i \lambda_i} \right) \left\{ \frac{R_i^2}{R_0^1} \frac{(1 + kr_i^2/4)^2}{r_i^2} \right\}. \quad (8.516)$$

Величина $hcn_i/S_i \lambda_i$ — плотность потока энергии через S_i , уносимой фотонами с длиной волны λ_i . Энергия, падающая на единицу площади S_0 за единицу времени, изменяется обратно пропорционально квадрату величины

$$D = \frac{R_0^2}{R_i} \cdot \frac{r_i}{1 + kr_i^2/4}. \quad (8.517)$$

Эту величину мы и назовем *фотометрическим расстоянием* источника P_i , измеренным в O в момент наблюдения t_0 .

Фотометрическое расстояние и расстояние, определяемое по видимому размеру объекта, в общем случае не равны друг другу, поскольку в силу (8.502) и (8.517)

$$D = \frac{R_0^2}{R_i^2} \xi. \quad (8.518)$$

Тем не менее D и ξ приближаются к равенству, когда источник P_i таков, что разность значений R при $t = t_i$ и $t = t_0$ оказывается пренебрежимо малой.

В рассматриваемой модели вселенной (8.505) фотометрическое расстояние точки P_i , в силу (8.518) и (8.507), выражается так:

$$\begin{aligned} D &= R_0 e^{-\frac{c}{R_0} t_i} \sin \left(e^{-\frac{c}{R_0} t_i} - 1 \right) = \\ &= R_0 \eta \sin (\eta - 1) = R_0 (1 + \delta) \sin \delta. \end{aligned} \quad (8.519)$$

Для наиболее удаленного источника света фотометрическое расстояние определяется теперь условиями

$$\frac{dD}{dt_i} = 0, \quad \frac{d^2 D}{dt_i^2} < 0,$$

а уравнение для η_m имеет вид

$$\operatorname{tg} (\eta_m - 1) + (\eta_m - 1) = -1.$$

Приближенное значение корня этого уравнения равно

$$\eta_m = 1 + \frac{\pi}{2} + 0,332 = 2,903. \quad (8.520)$$

Таким образом, максимальное фотометрическое расстояние некоторого объекта, свет от которого достигает O при $t_0 = 0$, равно

$$D_m = R_0 (2,903) \cos (0,332) = 2,7 R_0.$$

Фотометрическое расстояние до некоторого объекта с максимальным расстоянием, определяемым по видимому размеру, в силу (8.513) и (8.519), равно

$$D_m^* = R_0 (2,133) \sin (1,133) = 1,93 R_0 = 4,6 \xi_m.$$

Поэтому фотометрическое расстояние является более эффективным средством зондирования пространства ($D_m > D_m^*$), кроме того, для удаленного объекта фотометрическое расстояние и расстояние, определяемое по видимым размерам, далеки от равенства друг другу ($D_m^* > \xi_m$).

Красное смещение, соответствующее D_m , в силу (8.508) и (8.520), равно

$$\delta = 1,903. \quad (8.521)$$

так что длина волны света, достигающего O , в 2,903 раза больше длины волны света, испущенного объектом.

В § 8.2 было упомянуто, что условие $q=0$ еще не означает, что распределение вещества неподвижно. Это утверждение мы сейчас подтвердим, показав, что источник света P_i имеет некоторую скорость по отношению к наблюдателю в O . Предположим, что неравенство (8.413) справедливо, так что все спектральные линии смещены в красную сторону. Тогда, обращаясь к классической теории эффекта Допплера, мы получим несколько наивное определение, полагая скорость удаления P_i равной

$$V_\delta = c\delta. \quad (8.522)$$

Но „скорость“ означает „степень изменения расстояния со временем“, и слабость предыдущего определения заключается в том, что при этом не было конкретизировано расстояние, о котором шла речь. Более удовлетворительные определения скорости удаления могут быть получены при рассмотрении скоростей изменения со временем расстояний D и ξ . Рассмотрим сначала фотометрическое расстояние. Пусть световой сигнал испускается в P_i при $t=t_i$ и достигает O при $t=t_0$, тогда как сигнал, испущенный в P_i в более поздний момент $t=t_i+\Delta t_i$, достигает O при $t=t_0+\Delta t_0$. Так как r -координаты точек P_i и O фиксированы, опять можно использовать аргументы, которые привели нас к соотношению (8.411), откуда

$$\frac{\Delta t_i}{\Delta t_0} = \frac{R_i}{R_0}. \quad (8.523)$$

Тогда изменение D , в силу (8.517), равно

$$\begin{aligned} \Delta D &= \left\{ \frac{R^2(t_0 + \Delta t_0)}{R(t_i + \Delta t_i)} - \frac{R^2(t_0)}{R(t_i)} \right\} \frac{r_i}{1 + kr_i^2/4} = \\ &= \frac{R_0^2}{R_i} \left\{ \left(1 + 2 \frac{R'_0}{R_0} \Delta t_0 \right) \left(1 - \frac{R'_i}{R_i} \Delta t_i \right) - 1 \right\} \frac{r_i}{1 + kr_i^2/4}. \end{aligned}$$

Здесь мы разложили разность в фигурных скобках в ряд Тейлора и использовали штрих для обозначения производной R по t . Поэтому скорость изменения D со временем, наблюдаемая в O , есть предел $\frac{\Delta D}{\Delta t_0}$ при $\Delta t_0 \rightarrow 0$, что можно

назвать скоростью удаления V_D для фотометрического расстояния. В силу (8.523) и (8.517), мы имеем

$$V_D = \left(\frac{2R'_0 - R'_i}{R_0} \right) \frac{R_0^2}{R_i} \cdot \frac{r_i}{1 + kr_i^2/4} = \frac{2R'_0 - R'_i}{R_0} D. \quad (8.524)$$

Рассмотрим теперь расстояние, определяемое по видимому размеру объекта. Скорость изменения ξ со временем, наблюдаемая в O , равна пределу $\Delta\xi/\Delta t_0$ при $\Delta t_0 \rightarrow 0$. Это дает скорость удаления V_ξ по отношению к расстоянию, определяемому по видимому размеру; используя (8.523) и (8.502), получаем

$$V_\xi = \left(\frac{R'_i}{R_0} \right) \frac{R_i r_i}{1 + kr_i^2/4} = \frac{R'_i}{R_0} \xi. \quad (8.525)$$

Так как для произвольной функции $R(t)$ красное смещение δ дается формулой (8.412), невозможно простым способом выразить V_D и V_ξ через δ , хотя с помощью методов, которые будут изложены в гл. IX, могут быть получены приближенные формулы. Наш пример (8.505) иллюстрирует, какого рода различия имеют V_δ , V_D и V_ξ . Так как в этом случае

$$R' = ce^{\frac{c}{R_0}t} \text{ из (8.508), (8.519) и (8.524)}$$

$$V_D = c(1 + 2\delta) \sin \delta,$$

тогда как (8.508), (8.509) и (8.525) дают

$$V_\xi = \frac{c \sin \delta}{(1 + \delta)^2}.$$

Очевидно, если δ столь мало, что квадратами и более высокими степенями δ можно пренебречь, то

$$V_\delta = V_D = V_\xi = c\delta$$

и все три скорости удаления равны друг другу. Но если красное смещение велико, то это равенство нарушается. Например, источник, для которого $\delta = 1$, имел бы скорости удаления, равные

$$V_\delta = c, \quad V_D = 2,52c, \quad V_\xi = 0,21c,$$

которые значительно отличаются друг от друга. Таким образом, хотя относительное смещение спектральных линий имеет в общей теории относительности вполне определенный смысл,

это не относится к скорости удаления соответствующей этому смещению линий; эта скорость оказывается различной в зависимости от принятого вида расстояния. В частности, объект, для которого $\delta = 1$, не обязан иметь скорость удаления, равную c (т. е. равную локальной скорости света), как это часто предполагают само собой разумеющимся.

Расстояние, определяемое по объему. Расстояния D и ξ играют важную роль, так как имеются очевидные экспериментальные методы нахождения этих расстояний. Однако можно постулировать типы расстояний, определяемых для чисто теоретических целей. Можно, например, ввести расстояние Ξ , определяемое по объему, положив, что объем, лежащий внутри $0 \leq r \leq r_i$ в момент t_0 выражается соотношением

$$V = \frac{4\pi}{3} \Xi^3.$$

В силу (8.318), определение Ξ можно выразить в следующем виде:

$$\Xi^3 = 3R_0^3 \int_0^{r_i} \frac{r^2 dr}{(1 + kr^2/4)^3}. \quad (8.526)$$

Эта формула показывает, что в общем случае Ξ не совпадает ни с D (8.517), ни с ξ (8.502). Например, для нашей модели (8.505) из (8.506) и (8.508) следует, что

$$\Xi = R_0 \left\{ \frac{3}{2} (\delta - \sin \delta \cos \delta) \right\}^{\frac{1}{3}},$$

тогда как (8.519) и (8.509) дают

$$D = R_0(1 + \delta) \sin \delta, \quad \xi = R_0 \frac{\sin \delta}{1 + \delta}.$$

Но опять-таки при достаточно малом δ

$$\Xi = D = \xi = R_0 \delta.$$

§ 8.6. Видимая и абсолютная звездные величины. Показатель цвета.

Смещение спектральных линий доплеровского типа, при котором отношение $d\lambda/\lambda$ постоянно для всех длин волн, наблюдаемых у данного источника света, сказывается на

распределении энергии в наблюдаемом спектре источника, а это распределение энергии в свою очередь связано с видимой и абсолютной звездными величинами и с показателем цвета. Можно развить общую теорию этих эффектов, которая не зависит от какой-либо частной интерпретации смещения спектральных линий. Пусть P_i — один из источников, а δ_i — наблюдаемое в точке O смещение спектральных линий, излучаемых данным источником. Волна, испущенная с длиной волны λ_i , имеет в точке O длину волны λ , где

$$\lambda = (1 + \delta_i) \lambda_i, \quad (8.601)$$

и, так как δ_i не зависит от длины волны,

$$d\lambda = (1 + \delta_i) d\lambda_i. \quad (8.602)$$

Пусть $B_i(\lambda_i) d\lambda_i$ — энергия, излучаемая в интервале длин волн $d\lambda_i$ за единицу времени и приходящаяся на единицу поверхности излучателя (измеряемая в $\text{эрг}/\text{см}^2 \cdot \text{сек}$). Функция B_i зависит не только от длины волны, но и от ряда параметров, описывающих физические условия источника P_i . Например, если P_i — абсолютно черное тело, то имеется только один параметр — температура T_i ; в этом случае функция B_i имеет вид

$$B_i = B(T_i, \lambda_i) = \frac{8\pi hc^2}{\lambda_i^5 \left\{ e^{\frac{hc}{k_B \lambda_i T_i}} - 1 \right\}} \text{ эрг}/\text{см}^2 \cdot \text{сек}, \quad (8.603)$$

где h — постоянная Планка (равная $6,62 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}$), а k_B — постоянная Больцмана (равная $1,380 \cdot 10^{-16} \text{ эрг}/\text{град}$). Мы предположим, что все источники света описываются одной и той же функцией B , однако физические параметры, характеризующие эту функцию, могут отличаться друг от друга для разных источников света (например, если все источники света являются черными телами, то они не обязаны иметь одну и ту же температуру).

В силу (8.601) и (8.602),

$$B_i(\lambda_i) d\lambda_i = B_i\left(\frac{\lambda}{1 + \delta_i}\right) \frac{d\lambda}{1 + \delta_i}. \quad (8.604)$$

Если обозначить через A_i полную излучающую поверхность источника P_i через D_i — фотометрическое расстояние источ-

ника до O , то энергия, достигающая O и приходящаяся на интервал $d\lambda$ *приходящих* волн, равна

$$dh_i = \frac{A_i}{4\pi D_i^2} B_i \left(\frac{\lambda}{1 + \delta_i} \right) \frac{d\lambda}{1 + \delta_i} \text{ эрг/см}^2 \cdot \text{сек.} \quad (8.605)$$

Если, однако, измерение этой энергии в O производится при тех условиях, которые соответствуют обычным астрономическим наблюдениям, то регистрируется не вся приходящая энергия; следует учесть поглощение в атмосфере, чувствительность регистрирующей аппаратуры и т. д. Эти поправки можно описать посредством некоторой эмпирической функции $\sigma(\lambda)$ *приходящей* длины волны λ , и, таким образом, измеряемая в O энергия равна

$$dL_i = \sigma(\lambda) dh_i. \quad (8.606)$$

Поэтому энергия, приходящая от источника P_i и регистрируемая по всем длинам волн, равна

$$L_i = \frac{A_i}{4\pi D_i^2} \frac{1}{1 + \delta_i} \int_0^\infty \sigma(\lambda) B_i \left(\frac{\lambda}{1 + \delta_i} \right) d\lambda \text{ эрг/см}^2 \text{сек.} \quad (8.607)$$

Эта полная энергия в O описывается посредством *видимой* звездной величины P_i — некоторого числа, которое характеризует болометрическую, фотографическую, фотовизуальную, визуальную и другие видимые звездные величины соответственно выбору функции $\sigma(\lambda)$. Соответственно каждой из этих видимых звездных величин имеется некоторая абсолютная звездная величина, определение которой требует некоторой осторожности. Для выяснения сути дела предположим, что источники света представляют собой абсолютно черные тела, температуры которых претерпевают вековые изменения относительно временной координаты t . Предположим также, что смещение линий в спектре света, испущенного источником, возрастает с промежутком времени, потребным для распространения света от источника до O (по времени t). Источник P_i испускает свет в момент t_i ; этот свет достигает O в момент t_0 . Поэтому температура источника P_i равна $\mathcal{T}_i = \mathcal{T}(t_i)$ в момент испускания и $\mathcal{T}_0 = \mathcal{T}(t_0)$ в момент прибытия света в O . Теперь можно определить два источника света, сходные с P_i , на фотометрическом расстоянии в 10 *парсек* от O : оба источника

имеют одинаковую площадь поверхности A_i ; функция B для них та же, что и у P_i ; оба источника имеют нулевое смещение спектральных линий. Однако один источник (P_{00}) имеет температуру $\mathcal{T}_0$, тогда как другой источник (P_{0i}) — температуру $\mathcal{T}_i$. Источник света P_{00} наблюдатель в O мог бы взять в качестве стандарта при исследовании источников света, находящихся вблизи O , учитывая предположение о том, что имеется вековое изменение температуры всех источников света. С другой стороны, источник света P_{0i} тождествен по физическим условиям с источником света P_i в момент испускания того света, который мы теперь видим. С помощью соотношения (8.607) мы можем записать полные энергии, регистрируемые от P_{00} и P_{0i} соответственно

$$L_{00} = \frac{A_i}{4\pi \cdot 10^2} I_0, \quad L_{0i} = \frac{A_i}{4\pi \cdot 10^2} I_i, \quad (8.608)$$

где

$$I_0 = \int_0^\infty \sigma(\lambda) B(\mathcal{T}_0, \lambda) d\lambda, \quad (8.609)$$

$$I_i = \int_0^\infty \sigma(\lambda) B(\mathcal{T}_i, \lambda) d\lambda,$$

и поэтому, если M_0 и M_i — соответствующие абсолютные звездные величины, то

$$M_0 - M_i = 2,5 \lg \frac{L_{0i}}{L_{00}} = 2,5 \lg \frac{I_i}{I_0}. \quad (8.610)$$

Таким образом, если m — видимая звездная величина P_i , то из (8.607) и (8.608) следует, что

$$\begin{aligned} M_0 - m &= 2,5 \lg \frac{L_i}{L_{00}} = \\ &= 5 \left[1 - \lg D_i + \frac{1}{2} \lg \left\{ \frac{1}{(1 + \delta_i) I_0} \int_0^\infty \sigma(\lambda) B\left(\mathcal{T}_i, \frac{\lambda}{1 + \delta_i}\right) d\lambda \right\} \right], \end{aligned}$$

или

$$\lg D_i = 0,2(m - M_0) + F + 1, \quad (8.611)$$

где

$$F = \frac{1}{2} \lg \left\{ \frac{1}{(1 + \delta_i) I_0} \int_0^\infty \sigma(\lambda) B\left(\mathcal{T}_i, \frac{\lambda}{1 + \delta_i}\right) d\lambda \right\}. \quad (8.612)$$

Приближенная формула для F , справедливая до второго порядка по δ_i , может быть получена при помощи разложения функции B в ряд Тейлора

$$\begin{aligned} B\left(\mathcal{J}_i, \frac{\lambda}{1+\delta_i}\right) &= B\left[\mathcal{J}_i, \{\lambda - \lambda\delta_i + \lambda\delta_i^2\}\right] = \\ &= B(\mathcal{J}_i, \lambda) - \lambda B'(\mathcal{J}_i, \lambda)\delta_i + \\ &+ \left\{ \lambda B'(\mathcal{J}_i, \lambda) + \frac{1}{2} \lambda^2 B''(\mathcal{J}_i, \lambda) \right\} \delta_i^2, \end{aligned}$$

где штрих обозначает производную функции B по λ . Положим

$$\begin{aligned} J_i &= \int_0^\infty \sigma(\lambda) \lambda B'(\mathcal{J}_i, \lambda) d\lambda, \\ H_i &= \int_0^\infty \sigma(\lambda) \left\{ \lambda B'(\mathcal{J}_i, \lambda) + \frac{1}{2} \lambda^2 B''(\mathcal{J}_i, \lambda) \right\} d\lambda = \\ &= J_i + \frac{1}{2} \int_0^\infty \sigma(\lambda) \lambda^2 B''(\mathcal{J}_i, \lambda) d\lambda. \quad (8.613) \end{aligned}$$

Тогда формула для F принимает вид

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2E} \left[\ln \frac{I_i}{I_0} + \ln \left(1 - \frac{J_i}{I_i} \delta_i + \frac{H_i}{I_i} \delta_i^2 \right) + \ln (1 - \delta_i + \delta_i^2) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lg \frac{I_i}{I_0} - \frac{1}{2E} \left[\left(1 + \frac{J_i}{I_i} \right) \delta_i + \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{J_i}{I_i} \right)^2 - \frac{H_i}{I_i} \right\} \delta_i^2 \right], \end{aligned}$$

где через E обозначено $\ln 10 = 2,303$. Таким образом, выражение (8.611) можно представить в виде

$$\lg D_i = 0,2 \{ m - K - (M_0 + \Delta M) \} + 1, \quad (8.614)$$

где

$$K = K_1 \delta_i + K_2 \delta_i^2, \quad (8.615)$$

$$\left. \begin{aligned} K_1 &= \frac{2,5}{E} \left(1 + \frac{J_i}{I_i} \right), \\ K_2 &= \frac{2,5}{E} \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left(\frac{J_i}{I_i} \right)^2 - \frac{H_i}{I_i} \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (8.616)$$

$$\Delta M = -2,5 \lg \left(\frac{I_i}{I_0} \right). \quad (8.617)$$

В силу (8.610), $M_0 + \Delta M = M_i$, что является абсолютной звездной величиной источника света P_{0i} , принятого в качестве стандартного; поэтому величина ΔM , которую мы называем *поправкой Стеббинса — Уитфорда*, возникает вследствие различия физических условий P_i и P_{00} и не может включать в себя δ_i . С другой стороны, *поправка К* является функцией δ_i , так как эта величина существует, даже если температуры всех источников света одинаковы.

Для случая, когда все источники света являются черными телами с одной и той же температурой ($\Delta M = 0$), постоянные K_1 и K_2 были подсчитаны де Ситтером [6]. Его результаты для фотографических звездных величин таковы:

$$K = 1,81\delta + 1,54\delta^2 \quad (\text{температура } 6000^\circ),$$

$$K = 2,96\delta + 1,34\delta^2 \quad (\text{температура } 5000^\circ).$$

Дополнительные данные имеются в сводке, обнаруженной среди посмертных бумаг Хаббла. Автор получил эту сводку благодаря любезности сотрудников обсерватории Маунт Вилсон и Паломар. С помощью кривой распределения энергии для галактики М32 Хаббл эмпирически подсчитал величину поправки K для каждого из красных смещений, перечисленных в табл. 4 (стр. 246). Однако нет уверенности, что эта сводка представляет собой окончательный результат работы Хаббла по этому вопросу. Во всяком случае, его график для поправки K , соответствующей фотографическим звездным величинам, является одним из наиболее точных линейных графиков:

$$K = 3,55\delta.$$

Методы сравнения теории и наблюдения, которые будут развиты в гл. IX, не требуют точных заранее принятых значений величин K_1 и K_2 . Достаточно будет знать, что K_1 для фотографических звездных величин является положительным числом, лежащим между 3 и 4, и опустить на время вопрос о (пока неизвестной) величине K_2 .

Теория поправки K и поправки Стеббинса — Уитфорда, развитая в этом параграфе, должна быть изменена (с выделением большего числа физических параметров), если источники света излучают не как черные тела. Приложение к модели вселенной (8.208) осуществляется посредством формулы (8.412) для δ_i и формулы (8.517) для D_i , которые

вместе с уравнением (8.503) дают некоторое соотношение между красным смещением и фотометрическим расстоянием, которое будет получено в следующей главе. Комбинирование полученного выражения с соотношением (8.614) ведет к некоторой формуле для смещения спектральных линий в функции видимой звездной величины.

Двухцветный показатель цвета для P_i (для энергий, излученных в интервалах длин волн от λ_i до $\lambda_i + d\lambda_i$ и от λ_i^* до $\lambda_i^* + d\lambda_i^*$) можно определить посредством соотношений (8.605) и (8.606) в виде

$$C_i(\lambda, \lambda^*) = 2,5 \lg \frac{\sigma(\lambda) d\lambda}{\sigma(\lambda^*) d\lambda^*} + 2,5 \lg \frac{B_i\left(\frac{\lambda}{1+\delta_i}\right)}{B_i\left(\frac{\lambda^*}{1+\delta_i}\right)}.$$

Если P_a — второй источник света, то разность двухцветных показателей цвета P_i и P_a не зависит от σ , и может быть записана после разложения B_i и B_a в ряд Тейлора до первого порядка по δ_i и δ_a включительно:

$$C_i - C_a = \lg \left\{ \frac{\frac{B_i(\lambda)}{B_a(\lambda)}}{\frac{B_i(\lambda^*)}{B_a(\lambda^*)}} \right\} + \frac{2,5}{E} \left[\delta_a \left\{ \frac{\lambda B'_a(\lambda)}{B_a(\lambda)} - \frac{\lambda^* B'_a(\lambda^*)}{B_a(\lambda^*)} \right\} - \right. \\ \left. - \delta_i \left\{ \frac{\lambda B'_i(\lambda)}{B_i(\lambda)} - \frac{\lambda^* B'_i(\lambda^*)}{B_i(\lambda^*)} \right\} \right]. \quad (8.618)$$

Очевидно первый член обращается в нуль, если P_i и P_a имеют одинаковые значения соответствующих физических параметров, так что $B_i(\lambda) = B_a(\lambda)$ и $B_i(\lambda^*) = B_a(\lambda^*)$.

§ 8.7. Число источников света

Число источников света с фиксированными координатами (r, θ, φ) в модели вселенной (8.208), лежащих в пределах слоя с радиусами r и $r + dr$, можно подсчитать следующим образом. Рассмотрим трехмерное пространство с метрикой

$$ds^2 = \frac{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{(1 + kr^2/4)^2}, \quad (8.701)$$

элемент объема которого равен

$$d\nu = \frac{r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}{(1 + kr^2/4)^3}.$$

Если имеется однородное распределение источников света с фиксированными координатами (r, θ, φ) в пространстве (8.701), то число источников в единице объема α должно быть постоянным. Поэтому в объеме $d\nu$ число источников будет $\alpha d\nu$. Но в пространстве-времени (8.208) объем, соответствующий $d\nu$ в момент t_0 , равен

$$d\mathcal{V} = \frac{R_0^3 r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}{(1 + kr^2/4)^3},$$

и поэтому

$$\alpha d\nu = \frac{\alpha}{R_0^3} d\mathcal{V}.$$

Следовательно, число источников света, лежащих внутри слоя между r и $r + dr$, равно

$$dN = \frac{\alpha}{R_0^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{R_0^3 r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi}{(1 + kr^2/4)^3} = 4\pi\alpha \frac{r^2 dr}{(1 + kr^2/4)^3},$$

и полное число таких источников, лежащих внутри объема $0 \leq r \leq r_i$, равно

$$N = 4\pi\alpha \int_0^{r_i} \frac{r^2 dr}{(1 + kr^2/4)^3}. \quad (8.702)$$

Интеграл, входящий в эту формулу, можно подсчитать тем же методом, который был использован при вычислении интеграла (8.318).

§ 8.8. Ньютоновская космология

Ниже мы сделаем краткий обзор ньютоновской космологии, поскольку ею в последние годы заинтересовались специалисты, а также потому, что ньютоновская космология естественно вытекает из исследований гл. VII. В § 7.4 было показано, что существуют сферически симметричные решения уравнений ньютоновской гидродинамики, в которых да-

вление и плотность являются функциями одного только абсолютного времени T , а скорость жидкости пропорциональна эвклидовскому расстоянию элемента жидкости от центра симметрии. Более того, было доказано, что этот центр симметрии можно поместить в любой элемент жидкости. При сравнении этого ньютоновского движения жидкости с моделью вселенной общей теории относительности удобно обозначить эвклидово расстояние через r_n , а ньютоновские плотность и давление — через ρ_n и p_n . Формулы (7.406), (7.402) и (7.403) принимают вид

$$\rho_n = \frac{f_0^3}{f^3} \rho_0, \quad p_n = P(T), \quad q = \frac{f_T}{f} r_n, \quad (8.801)$$

$$\frac{f_{TT}}{f} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_0 \frac{f_0^3}{f^3}, \quad (8.802)$$

$$\left(\frac{f_T}{f}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho_0 f_0^3}{3} \left(\frac{1}{f^3} - \frac{k_n}{f_0 f^2}\right). \quad (8.803)$$

Рассмотрим теперь давление и плотность в однородной модели вселенной, которые даны соотношениями (8.210) и (8.211). Легко показать, что

$$\frac{d}{dt}(\rho R^3) + \frac{p}{c^2} \frac{dR^3}{dt} = 0, \quad (8.804)$$

откуда следует, что при $p/c^2 = 0$

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^3}{R^3}, \quad (8.805)$$

где $\rho_0 R_0^3$ — постоянная интегрирования. Положим $\Lambda = 0$, тогда (8.210) и (8.211) можно представить в виде

$$\frac{R''}{R} = -\frac{4\pi G}{3} \rho_0 \frac{R_0^3}{R^3}, \quad (8.806)$$

$$\left(\frac{R'}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3} \left\{ \frac{1}{R^3} - \frac{3kc^2}{8\pi G \rho_0 R_0^2} \cdot \frac{1}{R_0 R^2} \right\}. \quad (8.807)$$

Ньютоновское приближение к последним двум формулам означает замену c на бесконечную скорость $\mathcal{S}$. При этом $k \rightarrow 0$, так как эвклидово пространство механики Ньютона

является плоским. Таким образом, если $k \rightarrow 0$ и $c \rightarrow \mathcal{S}$ так, что

$$\lim_{\substack{c \rightarrow \mathcal{S} \\ k \rightarrow 0}} \frac{3kc^2}{8\pi G \rho_0 R_0^2} = k_n,$$

где k_n — конечное (положительное или отрицательное) число, то уравнение (8.807) принимает вид

$$\left(\frac{R'}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G \rho_0 R_0^3}{3} \left(\frac{1}{R^3} - \frac{k_n}{R_0 R^2}\right). \quad (8.808)$$

Теперь мы получаем полную формальную аналогию между соотношениями (8.806), (8.808) и (8.802), (8.803) в том смысле, что f является той же самой функцией от T , что и R от t . Мы приходим к выводу, что однородная модель вселенной, в которой $\frac{p}{c^2} = 0$ и $\Lambda = 0$, имитирует ньютоновское течение жидкости, описываемое соотношениями (8.801), в такой степени, что в этой модели имеются та же формула для давления и одинаковые функциональные формы для f и R . Однако из этого не следует, что $p_n = 0$ при $\frac{p}{c^2} = 0$. Распределение вещества, движение которого описывается (8.801), можно, таким образом, назвать ньютоновской моделью вселенной, соответствующей нулевому значению космологической постоянной. Ньютоновскую модель вселенной для ненулевого значения космологической постоянной можно найти, предполагая в (6.508), что $q = \frac{f_T r}{f}$, повторяя анализ § 7.2 для определения соответствующей функции ψ и подсчитывая после этого плотность и давление по формулам (6.506) и (6.507). Если добиться того, что ρ и p зависят только от T , то получатся формулы, аналогичные (8.210) и (8.211).

Модели вселенной и система галактик

Однородные модели вселенной, рассмотренные в предыдущей главе, содержат два параметра, которые не могут быть определены посредством теории, а именно функцию $R(t)$ и постоянную k . Поэтому если эти модели интересуют астронома, то необходимо показать, что эти две неизвестные величины могут быть выведены из наблюдений системы галактик. Решение этой проблемы ни в коей мере не является простым, по крайней мере в точном виде; тем не менее метод разложений, который будет изложен, дает частный ответ, который, вероятно, окажется полезным в ближайшем будущем.

§ 9.1. Время распространения света, координата положения и фотометрическое расстояние

Отождествим типичную галактику P_i с источником света, имеющим фиксированные координаты $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$ в пространстве-времени (8.208). Свет, испущенный этой галактикой в момент t_i , наблюдается в точке $O(0, 0, 0)$ в момент t_0 . Меняя определение координаты ζ из (8.304) на следующее:

$$\zeta = R(t_0) r = R_0 r \quad (9.101)$$

и вводя обозначение

$$a^2 = \frac{4R_0^2}{k}, \quad (9.102)$$

запишем метрику (8.208) в виде

$$ds^2 = dt^2 - \frac{R^2}{c^2 R_0^2} \left\{ \frac{d\zeta^2 + \zeta^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}{(1 + \zeta^2/a^2)^2} \right\}. \quad (9.103)$$

Первый шаг в методе разложений состоит в том, что время прохождения света от P_i до O , которое равно $\tau = t_0 - t_i$,

выражается в виде степенного ряда по координате $\zeta_i = R_0 r_i$. Это выполняется при помощи уравнения нулевой геодезической линии (8.409); в наших новых обозначениях оно имеет вид

$$\int_0^{\zeta_i} \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2/a^2} = c R_0 \int_{t_i}^{t_0} \frac{dt}{R(t)}. \quad (9.104)$$

Обозначая временно

$$F(t) = \int \frac{dt}{R(t)},$$

имеем

$$F'(t) = \frac{1}{R}, \quad F''(t) = -\frac{R'}{R^2}, \quad F'''(t) = -\frac{R''}{R^2} + \frac{2}{R} \left(\frac{R'}{R}\right)^2. \quad (9.105)$$

Следующие две функции от t_0 будут играть важную роль в нашем исследовании:

$$h_1 = \frac{R'(t_0)}{R(t_0)} = \frac{R'_0}{R_0}, \quad h_2 = \frac{R''(t_0)}{R(t_0)} = \frac{R''_0}{R_0}. \quad (9.106)$$

Первая из этих функций является так называемой „постоянной Хаббла“, хотя ни теория, ни наблюдения не могут показать, что эта величина действительно не зависит от t_0 и является постоянной. Мы будем называть ее в дальнейшем *параметром Хаббла*. С учетом (9.106) выражения (9.105) принимают вид:

$$R_0 F'(t_0) = 1, \quad R_0 F''(t_0) = -h_1, \quad R_0 F'''(t_0) = -h_2 + 2h_1^2.$$

Разложение в ряд Тейлора правой части равенства (9.104) с точностью до членов τ^3 дает

$$\begin{aligned} \int_0^{\zeta_i} \frac{d\zeta}{1 + \zeta^2/a^2} &= c R_0 \{F(t_0) - F(t_i)\} = c R_0 \{F(t_0) - F(t_0 - \tau)\} = \\ &= c R_0 \left\{ F(t_0) - F(t_0) + \tau F'(t_0) - \frac{1}{2} \tau^2 F''(t_0) + \frac{1}{6} \tau^3 F'''(t_0) \right\} = \\ &= c \tau \left\{ 1 + \frac{1}{2} h_1 \tau + \frac{1}{6} (2h_1^2 - h_2) \tau^2 \right\}. \end{aligned}$$

Разлагая в левую часть равенства (9.104) до членов порядка ζ^2/a^2 и интегрируя, запишем предыдущее соотношение в виде

$$\tau = \frac{\zeta_i}{c} - \frac{1}{2} h_1 \tau^2 - \frac{1}{6} (2h_1^2 - h_2) \tau^3 - \frac{1}{3} \frac{\zeta_i^3}{a^2 c}.$$

получаем первое, второе и третье приближения по степеням ζ_i/c для величины τ :

$$\tau = \frac{\zeta_i}{c},$$

$$\tau = \frac{\zeta_i}{c} - \frac{h_1}{2} \left(\frac{\zeta_i}{c} \right)^2, \quad (9.107)$$

$$\tau = \frac{\zeta_i}{c} - \frac{h_1}{2} \left(\frac{\zeta_i}{c} \right)^2 + \frac{1}{3} \left\{ -\frac{c^2}{a^2} + \frac{h_1^2 + h_2}{2} \right\} \left(\frac{\zeta_i}{c} \right)^3. \quad (9.108)$$

Таким образом член в левой части уравнения (9.104), содержащий a^{-2} , появляется в выражении для τ только тогда, когда ряд для τ включает члены порядка $(\zeta_i/c)^3$.

Следующий шаг состоит в том, чтобы связать τ и ζ_i с фотометрическим расстоянием D источника P_i посредством формулы (8.517), имеющей теперь вид

$$D = \frac{R_0}{R(t_0 - \tau)} \frac{\zeta_i}{1 + \zeta_i^2/a^2}.$$

Поэтому приближенно

$$D = \zeta_i \left(1 - \frac{\zeta_i^2}{a^2} \right) R_0 \frac{1}{R_0 - R_0' \tau + \frac{1}{2} R_0'' \tau^2} =$$

$$= \zeta_i \left(1 - \frac{\zeta_i^2}{a^2} \right) \left\{ 1 + h_1 \tau + \left(h_1^2 - \frac{1}{2} h_2 \right) \tau^2 \right\},$$

откуда, используя соотношение (9.107),

$$\zeta_i = D - h_1 \frac{\zeta_i^2}{c} + \left(\frac{c^2}{a^2} - \frac{1}{2} h_1^2 + h_2 \right) \frac{\zeta_i^3}{c^2}, \quad (9.109)$$

что дает для первого, второго и третьего приближений по степеням D для величины ζ_i :

$$\zeta_i = D,$$

$$\zeta_i = D \left(1 - \frac{h_1}{c} D \right), \quad (9.110)$$

$$\zeta_i = D \left\{ 1 - \frac{h_1}{c} D + \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \frac{h_2}{h_1^2} + \frac{c^2}{h_1^2 a^2} \right) \left(\frac{h_1 D}{c} \right)^2 \right\}. \quad (9.111)$$

Следует подчеркнуть, что член a^{-2} в формуле (9.111) появился потому, что он содержится в формуле для D , а не

как следствие подстановки выражения для τ . Комбинируя соотношения (9.107) и (9.110), получаем для τ ряд по степеням D , справедливый до второго порядка по D :

$$\tau = \frac{D}{c} \left(1 - \frac{3}{2} h_1 \frac{D}{c} \right). \quad (9.112)$$

§ 9.2. Красное смещение и видимая звездная величина

Так как спектральные линии света, излучаемого всеми наблюдаемыми до сих пор галактиками, смещены в красную сторону, то функция R должна удовлетворять неравенству (8.413). Далее астроном наблюдает красное смещение δ и видимую звездную величину галактики m ; он не измеряет непосредственно ни расстояния до галактики, ни скорости ее удаления, которые появляются как результат некоторых вычислений, как было отмечено в предыдущей главе. Поэтому сравнение теории и наблюдений может быть лучше всего сделано с помощью формулы, связывающей δ непосредственно с m ; именно такую формулу мы теперь и получим. Выражение (8.412) может быть преобразовано так:

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{R_0}{R(t_0 - \tau)} - 1 = \frac{R_0 - R(t_0 - \tau)}{R(t_0 - \tau)} = \\ &= \tau \left(\frac{R'_0}{R_0} + \frac{1}{2} \tau \frac{R''_0}{R_0} + \dots \right) \left(1 + \tau \frac{R'_0}{R_0} + \dots \right)^{-1} = \\ &= h_1 \tau \left\{ 1 + \frac{2h_1^2 - h_2}{2h_1^2} (h_1 \tau) + \dots \right\}, \end{aligned} \quad (9.201)$$

если сделано разложение в ряд Тейлора до членов порядка $(h_1 \tau)^2$. Выражение для τ через δ с точностью до δ^2 имеет вид

$$\tau = \frac{\delta}{h_1} \left(1 - \frac{2h_1^2 - h_2}{2h_1^2} \delta + \dots \right). \quad (9.202)$$

Исключая τ из (9.201) с помощью (9.112), имеем, с точностью до членов порядка $(h_1 D/c)^2$,

$$\delta = \frac{h_1 D}{c} \left\{ 1 - \frac{h_1^2 + h_2}{2h_1^2} \left(\frac{h_1 D}{c} \right) + \dots \right\}. \quad (9.203)$$

Первое приближение к этой формуле будет

$$c\delta = h_1 D; \quad (9.204)$$

оно справедливо до тех пор, пока δ пренебрежимо мало. При этих условиях, как было рассмотрено в § 8.5, различные определения расстояния являются эквивалентными друг другу; то же самое относится к соответствующим скоростям удаления, которые все сводятся к $c\delta$. Таким образом, для малых δ скорость удаления пропорциональна расстоянию, причем коэффициент пропорциональности равен параметру Хаббла. Однако эта простая зависимость перестает выполняться, коль скоро рассматриваются большие значения.

Связь между фотометрическим расстоянием и видимой звездной величиной дается (8.614):

$$\lg D = 0,2 \{ m - K - (M_0 + \Delta M) \} + 1, \quad (9.205)$$

где M_0 — абсолютная звездная величина некоторой галактики, находящейся вблизи наблюдателя и подобной наблюдаемой галактике. Как было показано в § 8.6, поправка K равна

$$K = K_1 \delta + K_2 \delta^2, \quad (9.206)$$

если пренебречь степенями δ выше второй. Величина ΔM — поправка Стеббинса — Уитфорда, которая, как можно принять, описывает эффект векового изменения физических параметров, определяющих распределение энергии в спектрах галактик одного типа. Чтобы понять суть дела, будем снова считать галактики абсолютно черными телами, температуры которых претерпевают вековые изменения. В силу (8.617),

$$\Delta M = -2,5 \lg \left(\frac{I_i}{I_0} \right).$$

Разложение функций B и $\mathcal{J}$ в ряд Тейлора из (8.609) дает

$$\begin{aligned} \frac{I_i}{I_0} &= \frac{1}{I_0} \int_0^\infty \sigma(\lambda) B \{ \mathcal{J}(t_0 - \tau), \lambda \} d\lambda = \\ &= 1 - \frac{\tau}{I_0} \int_0^\infty \sigma(\lambda) \left(\frac{\partial B}{\partial \mathcal{J}} \right)_0 \mathcal{J}'_0 d\lambda + \dots, \end{aligned}$$

где штрих обозначает производную по t . Другими словами, I_i/I_0 можно выразить в виде степенного ряда по τ и, таким

образом, в виде степенного ряда по δ . Не пытаясь вычислить коэффициенты, мы можем сказать, что с точностью до δ^2

$$\Delta M = W_1 \delta + W_2 \delta^2, \quad (9.207)$$

где W_1 и W_2 — постоянные. Теперь, вводя безразмерную переменную x и постоянные A , b_1 , b_2 , посредством соотношений

$$x = 10^{0,2m}, \quad A = 10^{1-0,2M_0} \text{ парсек},$$

$$b_1 = 0,2E(K_1 + W_1), \quad b_2 = 0,2E(K_2 + W_2), \quad (9.208)$$

где

$$E = \ln 10 = 2,303,$$

мы можем переписать (9.205) в виде

$$D = Ax \exp \{-b_1 \delta - b_2 \delta^2\},$$

или, с точностью до δ^2 ,

$$D = Ax \left\{ 1 - b_1 \delta - \left(b_2 - \frac{1}{2} b_1^2 \right) \delta^2 \right\}. \quad (9.209)$$

С той же точностью можно получить из (9.203) выражение для D через δ :

$$D = \frac{c}{h_1} \delta \left(1 + \frac{h_1^2 + h_2}{2h_1^2} \delta \right). \quad (9.210)$$

Вводя постоянные A_1 и A_2 ,

$$A_1 = \frac{c}{h_1 A}, \quad A_2 = \frac{c}{h_1 A} \left(b_1 + \frac{h_1^2 + h_2}{2h_1^2} \right), \quad (9.211)$$

и исключив D из (9.209) и (9.210), окончательно получим

$$x = A_1 \delta + A_2 \delta^2. \quad (9.212)$$

Это — одна из форм так называемой *зависимости скорости — расстояние*, которую, по-видимому, удобнее всего использовать для сравнения теории и наблюдений. Эта зависимость справедлива в предположении, что членами порядка δ^3 и выше можно пренебречь, и содержит δ в качестве независимой переменной, а m — в качестве зависимой переменной, так как предполагается, что красное смещение можно измерить с гораздо большей точностью, чем видимую звездную величину. Вычисления, использующие все измерен-

ные пары δ , m , дадут A_1 и A_2 ; тогда, разрешая (9.211) относительно h_1 и h_2 , получаем

$$h_1 = \frac{R'_0}{R_0} = \frac{c}{A_1} 10^{0,2M_0-1} \text{ сек}^{-1}, \quad (9.213)$$

$$h_2 = \frac{R''_0}{R_0} = -\left(1 + 2b_1 - \frac{2A_2}{A_1}\right) \left(\frac{c}{A_1}\right)^2 \cdot 10^{0,4M_0-2} \text{ сек}^{-2}, \quad (9.214)$$

где

$$b_1 = 0,2E(K_1 + W_1), \quad c = 9,711 \cdot 10^{-9} \text{ парсек/сек.}$$

Из этих формул можно найти скорость изменения со временем параметра Хаббла в настоящее время:

$$\left(\frac{dh_1}{dt}\right)_{t=t_0} = \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{R'}{R}\right)\right\}_{t=t_0} = h_2 - h_1^2 = -2\left(1 + b_1 - \frac{A_2}{A_1}\right) h_1^2. \quad (9.215)$$

Из анализа § 8.5 следует, что в первом приближении все скорости удаления равны $c\delta$ и, следовательно, в силу (9.204), эта скорость равна $h_1 D$. Поэтому для некоторого заданного D эта скорость увеличивается в настоящий момент, если в формуле (9.215) множитель $\left(1 + b_1 - \frac{A_2}{A_1}\right)$ отрицателен, и уменьшается, если этот множитель положителен. Используя также определение b_1 , мы получаем

$$\begin{aligned} &\text{ускорение, если } K_1 + W_1 < \frac{5}{E} \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right), \\ &\text{замедление, если } K_1 + W_2 > \frac{5}{E} \left(\frac{A_2}{A_1} - 1\right). \end{aligned} \quad (9.216)$$

Вывод таков. Знание средней абсолютной звездной величины некоторой галактики и постоянных K_1 и W_1 в принципе дает возможность найти отношения R'/R и R''/R в момент наблюдения t_0 в предположении, что зависимость красного смещения δ и видимой звездной величины справедлива до δ^2 . Это дает также возможность определить, является ли расширение ускоренным или замедленным. Отметим, что в этом приближении полученные результаты не зависят ни от кривизны пространства k , ни от K_2 и W_2 .

В качестве примера применения этих формул можно использовать значения δ и m , измеренные для скоплений

галактик. Автор располагает этими данными благодаря любезности сотрудников обсерватории Маунт Вилсон и Паломар. Видимая фотографическая звездная величина третьей по блеску галактики m^* в каждом скоплении и красное смещение δ для скопления как целого приведены в табл. 4.

Таблица 4

Скопление	m^*	δ	$\Delta\beta$	$K=3,55\delta$	$m_1=m^*-\Delta\beta$	$m_2=m^*-\Delta\beta-K$
Дева	9,80	0,004	0,00	0,01	9,80	9,79
Волосы Вероники	13,50	0,022	0,00	0,08	13,50	13,42
Пегас I	12,86	0,013	0,08	0,05	12,78	12,73
Персей	14,52	0,018	0,87	0,06	13,65	13,59
Пегас II	15,37	0,045	0,09	0,16	15,28	15,12
Северная Корона	16,71	0,072	0,05	0,27	16,66	16,39
Дева 3	16,08	0,072	0,00	0,26	16,08	15,82
Волопас	18,15	0,130	0,02	0,46	18,13	17,67
0024+2223	19,15	0,161	0,14	0,57	19,01	18,44
0138+1832	18,55	0,173	0,12	0,61	18,43	17,82
0925+2022	19,20	0,192	0,09	0,68	19,11	18,43
Гидра	19,56	0,203	0,24	0,72	19,32	18,60

Далее в таблице приведена поправка $\Delta\beta$ на затемнение, обусловленное облаками поглощающей материи в нашей собственной Галактике. Это случайный источник ошибок с космологической точки зрения, и, следовательно, видимая, фотографическая звездная величина m_1 является той звездной величиной, которую следует подставить в формулу (9.208) для вычисления x . Эмпирическая поправка K Хаббла для фотографических звездных величин также приведена в таблице. Наконец, m_2 — видимая фотографическая звездная величина, полученная вычитанием и $\Delta\beta$ и K из m^* . Теперь мы можем приступить к делу двумя способами.

1. Используем m_1 для вычисления соответствующего x и затем найдем методом наименьших квадратов значения A_1 и A_2

$$A_1 = 33 \cdot 10^3, A_2 = 6 \cdot 10^3, \frac{A_2}{A_1} = 0,18.$$

Т а б л и ц а 5

M_0	-19,9	-19,6	-19,3	-19,0	-18,7
h_1 (сек $^{-1}$)	$3,09 \cdot 10^{-18}$	$3,55 \cdot 10^{-18}$	$4,07 \cdot 10^{-18}$	$4,68 \cdot 10^{-18}$	$5,37 \cdot 10^{-18}$
$1/h_1$ (лет)	$1,03 \cdot 10^{10}$	$8,94 \cdot 10^9$	$7,79 \cdot 10^9$	$6,78 \cdot 10^9$	$5,91 \cdot 10^9$

Чтобы определить численное значение h_1 по формуле (9.213), необходимо оценить абсолютную фотографическую звездную величину типичной галактики, наблюдаемой вблизи от нашей собственной Галактики, которая подобна третьей по счету яркой галактике скопления. В настоящее время соседние галактики M31 и M81 имеют абсолютные фотографические звездные величины $-19^m,9$ и $-19^m,3$. Как полагают, наиболее яркие галактики в гигантских скоплениях имеют абсолютную фотографическую звездную величину $-19^m,4$. По этим данным были вычислены значения h_1 по формуле (9.213) для ряда значений M_0 (табл. 5). Соответствующие цифры (в годах) для обратной величины параметра Хаббла также приведены в этой таблице. Наш пример показывает, что обратная величина параметра Хаббла имеет в настоящее время значение, лежащее между $6-10 \cdot 10^9$ лет. Что касается h_2 , то $A_2/A_1=0,18$, что, в силу (9.214), указывает на то, что $h_2 < 0$, если $b_1 \geq 0$. Бóльший интерес представляет скорость изменения h_1 в настоящее время. Подставляя $K_1=3,55$ и $A_2/A_1=0,18$ в (9.216), мы видим, что в настоящее время расширение галактик является ускоренным при

$$W_1 < -3,55 - \frac{5}{E} \cdot 0,82 = -5,33. \quad (9.217)$$

В силу (8.610), (8.617) и (9.207), это означает, что блеск L_{0i} , присущий третьей по блеску галактике скопления в момент излучения того света, который мы теперь видим, связан с блеском L_{00} , присущим подобной, но близкой к нам галактики, приближенной формулой

$$L_{0i} = 10^{-0,4 \Delta M} L_{00} = 10^{-0,4 W_1 \delta_i} L_{00}.$$

Для скопления в созвездии Гидра, приняв $W_1 = -5,34$ и $\delta_i = 0,203$, получим

$$L_{0i} = 2,7 L_{00}.$$

Если такое большое изменение собственного блеска скопления галактик в Гидре за время, необходимое свету для того, чтобы достичь нашей Галактики, является приемлемым, то наш пример побуждает нас заключить, что расширение системы галактик в настоящее время происходит с замедлением.

Следует отметить, что A_1 и A_2 можно найти по данным наблюдений без учета поправок видимых звездных величин, зависящих от δ , в частности поправки K . Если оценки величин K_1 и W_1 изменены, то не требуется пересчитывать A_1 и A_2 ; при этом нужно лишь вычислить новое значение для h_2 , что выполняется по формуле (9.214) с прежними значениями A_1 и A_2 . Не требуется пересчета A_1 и при изменении M_0 в соотношении (9.213), часто упоминаемом как „пересмотр шкалы расстояний вселенной“. Этими преимуществами не обладает другой метод, который будет рассмотрен ниже.

2. Следуя процедуре [1], аналогичной процедуре Хаббла, мы предположим, что K_1 известно точно и соответствующие звездные величины, которые должны быть использованы, — это те, которые приведены в колонке m_2 табл. 4. Но так как K_1 теперь включено в m , а поэтому и в x , мы должны в формуле (9.214) положить

$$b_1 = 0,2EW_1$$

и опустить K_1 в левых частях неравенств (9.216). Решение для x ($=10^{0,2m_2}$), полученное методом наименьших квадратов, дает:

$$A_1 = 34 \cdot 10^3, \quad A_2 = -48 \cdot 10^3, \quad \frac{A_2}{A_1} = -1,41.$$

Это новое значение A_1 не изменяет существенным образом величины h_1 и $1/h_1$, как показано в табл. 5. Однако теперь ускоренное расширение имеет место лишь при

$$W_1 < \frac{5}{E} (-1,41 - 1) = -5,23.$$

Это значение сравнимо со значением (9.217) и также требует признания больших изменений собственного блеска скопления галактик в Гидре. Невыгодная сторона этого метода состоит, конечно, в том, что A_1 и A_2 должны пересчитываться для каждого нового значения поправки K .

Таким образом, методы, использующие в (9.212) фотографические звездные величины, дают для обратной величины параметра Хаббла значение, которое лежит в пределах от $6 \cdot 10^9$ до $10 \cdot 10^9$ лет и убедительно показывает, что расширение системы галактик в настоящее время является замедленным. Следует отметить, что (9.212) подразумевает также, что красное смещение обусловлено движением галактик и что все эффекты удаления учтены отчасти посредством определения D через δ [формула (9.210)] и отчасти посредством поправки K . Вывод о замедленном расширении будет тем более определенным, если поправку Стеббинса — Уитфорда $W_1\delta$ (первого порядка) считать пренебрежимо малой. Анализ Хаббла [2] тех же данных при $W_1\delta = 0$ привел его к заключению, что расширение является ускоренным, однако он пришел к этому результату, лишь качественно рассмотрев влияние „фактора удаления“ на видимые звездные величины галактик и не развил теории, связывающей этот „фактор удаления“ и ускорение. Во всяком случае, при использовании фотовизуальных видимых звездных величин для десятой по блеску галактики в каждом скоплении эмпирическое соотношение Хаббла имеет вид

$$0,2m_{\text{фотовиз.}} = \lg(c\delta) - 1,16, \quad (2.218)$$

где c — теперь измеряется в км/сек . Насколько удалось автору выяснить по тем данным, которые ему были представлены обсерваторией Маунт Вилсон и Паломар, величина $m_{\text{фотовиз.}}$ представляет собой наблюдаемую фотовизуальную видимую звездную величину десятой по блеску галактики минус поправка $\Delta\beta$ и фотовизуальная поправка K . Таким образом, соотношение (9.218) следует сравнить с логарифмической формой выражения (9.212); однако член b_1 опущен в формуле для h_2 , но снова включен в m . Эта форма зависимости имеет вид

$$0,2m = \lg\left(\frac{A_1}{c}\right) + \lg c\delta + \frac{A_2}{A_1 E} \delta,$$

и поэтому

$$\lg\left(\frac{A_1}{c}\right) = -1,16, \quad A_2 = 0.$$

В силу (9.215), с опущенным b_1 и $A_2 = 0$,

$$\left(\frac{dh_1}{dt}\right)_{t=t_0} = -2h_1^2,$$

что снова приводит к выводу о замедленном расширении. С другой стороны, теперь $A_1 = 21 \cdot 10^3$, а средняя абсолютная фотовизуальная звездная величина десятой по блеску галактики равна $-18^m,9$, в согласии с Хабблом. Отсюда $1/h_1 = 4,14 \cdot 10^9$ лет, что немного меньше значения, приведенного в табл. 5.

Особо следует подчеркнуть, что все предшествующие численные значения являются предварительными и приведены для примера; видимые звездные величины, которые были использованы, еще не окончательны, и обработка наблюдений продолжается. В частности, полагают, что были недооценены звездные величины слабых скоплений.

§ 9.3. Число галактик и видимые звездные величины

Согласно табл. 4, надежные измерения фотографических звездных величин и красного смещения в настоящее время ограничиваются $m = 19^m,32$. Тем не менее первая работа Хаббла по подсчетам галактик [3], проведенная им в 1930 г., показала, что такие подсчеты могут быть распространены на более слабые галактики, вероятно вплоть до $m = 22$. При использовании в этой задаче метода разложений целесообразно поэтому продолжать разложение еще на один порядок, чем это было необходимо при выводе соотношения между красным смещением и видимой звездной величиной. Число источников света в пространстве-времени (8.208), лежащих в пределах $0 \leq r \leq r_i$, дается соотношением (8.702), которое в терминах координаты $\zeta = R_0 r$ имеет вид

$$N = \frac{4\pi\alpha}{R_0^3} \int_0^{\zeta_i} \frac{\zeta^2 d\zeta}{(1 + \zeta^2/a^2)^3}. \quad (9.301)$$

Логически нет необходимости предполагать, что все эти источники света имеют одну и ту же присущую им яркость; однако это предположение находится в согласии с однородностью распределения вещества, описываемого (8.208), и поэтому мы сделаем такое предположение. Наблюдатель, находящийся в начале координат $r = 0$ и изучающий систему источников света, видимую им в момент t_0 , будет иметь право приписать одну и ту же видимую звездную величину всем источникам света, имеющим общую координату r . Если

N_m — число источников света с видимыми величинами, равными и меньшими, чем предельная видимая величина m , приходящееся на 1 кв. град. неба, то

$$N = QN_m, \quad Q = 41253 \text{ кв. град.} \quad (9.302)$$

и, следовательно, с точностью до членов ζ_i^2/a^2

$$N_m = \frac{4\pi\alpha}{3QR_0^3} \zeta_i^3 \left(1 - \frac{9}{5} \frac{\zeta_i^2}{a^2} \right). \quad (9.303)$$

Подставляя соотношение (9.111) в эту формулу и ограничиваясь точностью до $(h_1 D/c)^2$, после некоторых вычислений получаем

$$N_m = \frac{4\pi\alpha}{3QR_0^3} D^3 \left[1 - \frac{3h_1 D}{c} + 3 \left\{ 2 + \frac{h_1^2 + h_2}{2h_1^2} + \frac{2}{5} \frac{c^2}{a^2 h_1^2} \right\} \left(\frac{h_1 D}{c} \right)^2 \right], \quad (9.304)$$

что дает соотношение между N_m и фотометрическим расстоянием D , соответствующим предельной звездной величине m . С другой стороны, комбинируя (9.203) и (9.209), мы имеем, с точностью до $(h_1 Ax/c)^2$,

$$D = Ax \left[1 - b_1 \left(\frac{h_1 Ax}{c} \right) + \left\{ b_1 \left(\frac{h_1^2 + h_2}{2h_1^2} \right) + \frac{3}{2} b_1^2 - b_2 \right\} \left(\frac{h_1 Ax}{c} \right)^2 \right], \quad (9.305)$$

где, конечно, $A (= 10^{1-0,2M_0})$ зависит от принятой общей абсолютной звездной величины M_0 источников света. Подставляя (9.305) в (9.304), имеем, после дальнейших вычислений, с точностью до $(h_1 Ax/c)^2$

$$N_m = \frac{4\pi\alpha}{3QR_0^3} A^3 x^3 \left[1 - 3(1 + b_1) \left(\frac{h_1 Ax}{c} \right) + 3 \left\{ 2(1 + b_1)^2 + \frac{1}{2} b_1^2 - b_2 + (1 + b_1) \left(\frac{h_1^2 + h_2}{2h_1^2} \right) + \frac{2}{5} \frac{c^2}{a^2 h_1^2} \right\} \left(\frac{h_1 Ax}{c} \right)^2 \right], \quad (9.306)$$

что представляет собой требуемую формулу, связывающую число источников света на 1 кв. град. неба и предельную видимую звездную величину $m (=5 \lg x)$. Подгонка этого теоретического соотношения к данным наблюдений может быть произведена следующими различными путями.

Метод I. Сначала не будем учитывать величин h_1 и h_2 , получаемых из (9.213) и (9.214) по данным о красном смещении. Абсолютная звездная величина M_0 , которая входит в выражение для постоянной A в (9.306), отождествляется со средней абсолютной звездной величиной галактик, близкой к нашей Галактике; поправка Стеббинса—Уитфорда здесь пренебрежимо мала. Тогда, вводя обозначения:

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{4\pi\alpha}{3QR_0^3} A^3, \\ B_1 &= -3(1+b_1) \frac{h_1 A}{c} B_0, \\ B_2 &= 3 \left\{ 2(1+b_1)^2 + \frac{1}{2} b_1^2 - b_2 + \right. \\ &\quad \left. + (1+b_1) \left(\frac{h_1^2 + h_2}{2h_1^2} \right) + \frac{2}{5} \frac{c^2}{a^2 h_1^2} \right\} \left(\frac{h_1 A}{c} \right)^2 B_0, \end{aligned} \quad (9.307)$$

запишем формулу (9.306) в виде

$$N_m = (B_0 + B_1 x + B_2 x^2) x^3. \quad (9.308)$$

Используя все имеющиеся в распоряжении пары значений N_m и m , можно определить численные значения B_0 , B_1 и B_2 . После этого (9.307), (9.102), (9.106) и (9.302) совместно дают:

$$\frac{\alpha}{R_0^3} = \frac{3Q}{4\pi} B_0 10^{0,6M_0-3} \text{ парсек}^{-3}, \quad (9.309)$$

$$h_1 = \frac{R'_0}{R_0} = -\frac{c}{3(1+b_1)} \frac{B_1}{B_0} 10^{0,2M_0-1} \text{ сек}^{-1}, \quad (9.310)$$

$$\begin{aligned} \frac{1+b_1}{2} \frac{R''_0}{R_0} + \frac{c^2}{10} \frac{k}{R_0^2} &= c^2 10^{0,4M_0-2} \left[\frac{1}{3} \frac{B_2}{B_0} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{9(1+b_1)^2} \left(\frac{B_1}{B_0} \right)^2 \left\{ 2(1+b_1)^2 + \frac{1}{2} b_1^2 - b_2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} (1+b_1) \right\} \right] \text{ сек}^{-2}, \end{aligned} \quad (9.311)$$

где

$$Q = 41253, \quad b_1 = 0,2E(K_1 + W_1),$$

$$b_2 = 0,2E(K_2 + W_2), \quad c = 9,711 \cdot 10^{-9} \text{ парсек} \cdot \text{сек}^{-1}.$$

Первая из этих формул будет рассмотрена в § 9.5; вторая определяет параметр Хаббла независимо от данных по красному смещению [формула (9.213)]; третья показывает, что постоянная k и параметр R_0''/R_0 не могут быть численно найдены независимо друг от друга с помощью этого метода. Два значения параметра Хаббла, определяемые (9.213) и (9.310) соответственно, не являются обязательно одинаковыми, так как в этих двух методах расчета не только используются различные типы данных, но и области изменения m также сильно отличаются друг от друга. Тем не менее, если приравнять друг другу эти два значения h_1 , мы получим

$$h_1 = -\frac{c}{3} \frac{B_1}{B_0} \frac{1}{1+b_1} 10^{0,2M_0-1} = \frac{c}{A_1} 10^{0,2M_0-1}.$$

Если предположить, что рассматривается одно и то же значение M_0 , то можно найти b_1 и, следовательно, $K_1 + W_1$. Поэтому

$$W_1 = -K_1 - \frac{5}{E} \left(1 + \frac{A_1 B_1}{3B_0} \right), \quad (9.312)$$

что определяет первую постоянную в выражении (9.207) для поправки Стеббинса — Уитфорда. Это определение, конечно, предполагает, что параметры красного смещения и число галактик могут быть „подогнаны“ к пространству-времени (8.208). Подсчеты числа галактик, по мнению ряда астрономов, столь неточны, что бесполезны для астрономических приложений. Важность этих подсчетов, тем не менее, не должна быть принижена, особенно если учесть, что они могут помочь в определении поправки Стеббинса — Уитфорда.

Метод II. Предположение, которое теперь делается, состоит в том, что h_1 и h_2 предполагаются известными из данных по красному смещению и что K_1 , K_2 и W_1 , W_2 непосредственно подсчитаны. Таким образом, A_1 , A_2 и b_1 , b_2 рассматриваются теперь как заданные числовые постоянные, и поэтому значение выражения

$$x^3 \left\{ 1 - 3(1+b_1) \left(-\frac{h_1 A x}{c} \right) \right\} = x^3 \left\{ 1 - 3 \frac{1+b_1}{A_1} x \right\},$$

которое встречается в (9.306), известно для каждого значения m . Ввиду этого (9.306) можно записать в виде

$$N_m = C \left\{ x^3 - \frac{3(1+b_1)}{A_1} x^4 \right\} + C_2 x^5, \quad (9.313)$$

где две неопределенные постоянные равны

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{4\pi\alpha}{3QR_0^3} A^3, \\ C_2 &= 3 \left\{ 2(1+b_1)^2 + \frac{1}{2} b_1^2 - b_2 + \right. \\ &\quad \left. + (1+b_1) \left(\frac{h_1^2 + h_2}{2h_1^2} \right) + \frac{2}{5} \frac{c^2}{a^2 h_1^2} \right\} \frac{C_1}{A_1^2}. \end{aligned} \quad (9.314)$$

Численный подсчет C_1 и C_2 с использованием данных о N_m и m определит в комбинации с (9.207) и (9.208) α/R_0^3 и k/R_0^2 ($=4a^{-2}$) посредством равенств:

$$\frac{\alpha}{R_0^3} = \frac{3Q}{4\pi} C_1 10^{0,6M_0-3} \text{ парсек}^{-3}, \quad (9.315)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{10} \frac{k}{R_0^2} &= 10^{0,4M_0-2} \left\{ \frac{C_2}{3C_1} - \frac{2 + 3b_1 + \frac{3}{2} b_1^2 - b_2}{A_1^2} - \right. \\ &\quad \left. - (1+b_1) \frac{A_2}{A_1^3} \right\} \text{ парсек}^{-2}, \end{aligned} \quad (9.316)$$

где

$$\begin{aligned} Q &= 41253, \quad b_1 = 0,2E(K_1 + W_1), \\ b_2 &= 0,2E(K_2 + W_2), \quad c = 9,711 \cdot 10^{-9} \text{ парсек/сек.} \end{aligned}$$

Следовательно, в этом методе h_1 и h_2 определяются зависимостью между видимой звездной величиной и красным смещением, тогда как α/R_0^3 и k/R_0^2 выводятся из подсчетов числа галактик. В частности, k равно $+1$, 0 или -1 в зависимости от того, положительна, равна нулю или отрицательна правая часть (9.316). Таким путем можно получить ответ, является ли пространство-время (8.208) сферическим, плоским или гиперболическим. Однако следует напомнить, что, для того чтобы получить этот вывод, необходимо

до анализа подсчетов галактик знать поправку K , поправку Стеббинса — Уитфорда и численные значения h_1 и h_2 .

Метод III. В этом методе постулируется существование некоторой „откорректированной“ видимой звездной величины, которая должна быть использована в формуле для красного смещения и в формуле для числа галактик. Логарифмируя (9.211), получаем

$$0,2m = \lg x = \lg \delta + \frac{1}{E} \frac{A_2}{A_1} \delta + \lg A_1$$

с точностью до членов порядка δ^2 . Поэтому, используя (9.211), имеем

$$\lg \delta = 0,2 \left\{ m - \frac{5}{E} \left(b_1 + \frac{h_1^2 + h_2}{2h_1^2} \right) \delta \right\} + \lg \left(\frac{h_1 A}{c} \right). \quad (9.317)$$

В формуле для подсчетов числа галактик (9.306) можно опустить член $(h_1 A x / c)^2$; прологарифмировав, мы получим

$$\lg N_m = 0,6m - \frac{3}{E} (1 + b_1) \frac{h_1 A x}{c} + \lg \left\{ \frac{4\pi \alpha A^3}{3QR_0^3} \right\}.$$

Но в первом приближении (9.212) и (9.211) дают $x = A_1 \delta = \frac{c\delta}{h_1 A}$, и поэтому

$$\lg N_m = 0,6 \left\{ m - \frac{5}{E} (1 + b_1) \delta \right\} + \lg \left\{ \frac{4\pi \alpha A^3}{3QR_0^3} \right\}. \quad (9.318)$$

Предположение о существовании „откорректированной“ видимой звездной величины m_c позволяет написать (9.317) и (9.318) соответственно в виде

$$\lg \delta = 0,2m_c + \text{const},$$

$$\lg N_m = 0,6m_c + \text{const}.$$

Если это предположение справедливо, то должно быть

$$1 + b_1 = b_1 + \frac{h_1^2 + 2h_2}{2h_1^2}.$$

Это означает, что h_1 и h_2 не являются независимыми, а связаны априорным соотношением

$$h_1^2 = h_2. \quad (9.319)$$

Таким образом, при этом методе фактически принимается за уже решенный вопрос о том, какое соотношение между h_1^2 и h_2 наилучшим образом представляет данные наблюдений. Поэтому метод III логически неудовлетворителен и упоминается здесь только потому, что он был (в принципе) применен Хабблом в его первом исследовании по подсчетам числа галактик [3].

В конце § 9.2 было отмечено, что значения постоянных A_1 и A_2 могут быть получены без знания величин M_0 , K_1 , K_2 , W_1 и W_2 ; то же самое относится к подсчету B_0 , B_1 , B_2 . В методе II, однако, это уже не имеет места, так как при расчете C_1 и C_2 необходимы численные значения A_1 , A_2 и комбинации $K_1 + W_1$, $K_2 + W_2$. Можно было бы провести примерный расчет B_0 , B_1 , B_2 , используя подсчеты числа галактик, сделанные Хабблом, — единственные, которыми мы располагаем в настоящее время для $m \geq 18^m$. Однако, к сожалению, видимые звездные величины галактик считаются теперь столь неточными, что такой расчет привел бы к весьма неудовлетворительным результатам. Поэтому лучше повременить с попыткой численных оценок, пока мы не будем располагать новыми подсчетами числа галактик с видимыми звездными величинами, оцененными столь точно, как это допускают методы наблюдений.

Последнее наше замечание относится к тому, какой смысл мы приписываем однородности распределения в пространстве. Иногда высказывается мнение, что однородное распределение галактик находится в противоречии с формулой типа (9.304), где N_m выражено в виде степенного ряда по D ; если бы имела место однородность, то N_m было бы пропорционально D^3 . Однако по существу это означает, что мы путаем понятие однородности с той формулой, которая отображает это свойство распределения галактик, если бы галактики покоились в евклидовом пространстве и D было бы евклидовым расстоянием. Пространственная однородность в пространстве-времени с метрикой вида (9.103) была определена в § 8.2 с помощью уравнений Эйнштейна, без апелляции к идеям евклидовой геометрии. Если же, однако, читатель, считает, что N_m все-таки должно быть пропорционально кубу некоторого расстояния, то в качестве такового необходимо использовать расстояние Ξ , определяемое по объему.

В силу (9.302), (8.526) и (8.702)

$$N_m = \frac{4\pi}{3Q} \left(\frac{\alpha}{R_0^3} \right) \mathbb{E}^3,$$

что, в формальном смысле, делает N_m для момента t_0 большим, чем значение N_m для однородного и покоящегося распределения галактик в эвклидовом пространстве, где $\mathbb{E}$ было бы расстоянием (в эвклидовом смысле).

§ 9.4. Угловые размеры и красное смещение

Техника наблюдений в настоящее время не позволяет приписать однозначно значение видимых угловых размеров галактике некоторого частного типа, например эллиптической галактики. Но если эта проблема будет решена в будущем, то возможны интересные теоретические выводы. Предполагая, что все эллиптические галактики имеют приблизительно один и тот же линейный диаметр l , рассмотрим одну из таких галактик P_i , видимый угловой диаметр которой равен a_i рад; расстояние, определяемое по видимому размеру, равно ξ_i , а красное смещение равно δ_i . Тогда

$$l = \xi_i a_i, \quad (9.401)$$

и, в силу (8.502), (9.101) и (9.102),

$$\xi_i = \frac{R(t_0 - \tau) r_i}{1 + k r_i^2/4} = \frac{R(t_0 - \tau)}{R_0} \frac{\zeta_i}{1 + \zeta_i^2/a^2}. \quad (9.402)$$

С другой стороны, разрешая (9.107) относительно ζ_i с точностью до τ^2 , имеем

$$\zeta_i = c\tau \left(1 + \frac{1}{2} h_1 \tau \right); \quad (9.403)$$

с той же точностью (9.402) имеет вид

$$\xi_i = c\tau (1 - h_1 \tau) \left(1 + \frac{1}{2} h_1 \tau \right) = c\tau \left(1 - \frac{1}{2} h_1 \tau \right). \quad (9.404)$$

Подставляя выражение для τ из (9.202), имеем с точностью до δ_i^2

$$\xi_i = \frac{c}{h_1} \delta_i \left(1 - \frac{3h_1^2 - h_2}{2h_1^2} \delta_i \right),$$

и, в силу (9.401),

$$\frac{1}{a_i} = A'_1 \delta_i + A'_2 \delta_i^2, \quad (9.405)$$

где

$$A'_1 = \frac{c}{h_1 l}, \quad A'_2 = -\frac{c}{h_1 l} \left(\frac{3h_1^2 - h_2}{2h_1^2} \right). \quad (9.406)$$

Вычисление A'_1 и A'_2 по измеренным парам a_i и δ_i дало бы следующие выражения для h_1 и h_2 :

$$h_1 = \frac{c}{l} A'_1, \quad (9.407)$$

$$h_2 = \left(3 + 2 \frac{A'_2}{A'_1} \right) \left(\frac{c}{l A'_1} \right)^2. \quad (9.408)$$

Следует признать, что эти формулы содержат неизвестный линейный диаметр галактик. Но приравнявая друг другу два значения для h_1 , полученные соответственно из (9.407) и (9.213), получаем

$$l = A_1 A'_1 10^{-0.2M_0+1}, \quad (9.409)$$

что дает соотношение между линейным диаметром и средней абсолютной звездной величиной галактики. С другой стороны, приравнявая друг другу значения h_2 из (9.214) и (9.408), находим

$$W_1 = -K_1 + \frac{5}{E} \left(\frac{A_2}{A_1} - \frac{A'_2}{A'_1} - 2 \right). \quad (9.410)$$

Таким образом мы получили формулу для первой постоянной в поправке Стеббинса — Уитфорда, дополняющую (9.312). Важность определения, по крайней мере части поправки Стеббинса — Уитфорда, без обращения к подсчетам числа галактик и установление при помощи (9.409) связи между l и M_0 не нуждается в специальном подчеркивании. Таким образом, весьма желательна выработка удовлетворительного эмпирического метода нахождения видимого углового диаметра слабых эллиптических галактик.

§ 9.5. Плотность, давление и космологическая постоянная

Если параметры h_1 , h_2 и k/R_0^2 определены численно с помощью методов трех предыдущих параграфов, то плотность и давление в модели вселенной в момент t_0 даются (8.210) и (8.211):

$$\rho_0 = \frac{1}{8\pi G} \left\{ 3h_1^2 + \frac{3c^2 k}{R_0^2} - \Lambda \right\} \text{ г/см}^3, \quad (9.501)$$

$$p_0 = \frac{c^2}{8\pi G} \left\{ -2h_2 - h_1^2 - \frac{c^2 k}{R_0^2} + \Lambda \right\} \text{ дн/см}^2, \quad (9.502)$$

где R_0 должно выражаться в см, c — в см/сек и $G = 6,665 \times 10^{-8} \text{ см}^3/\text{г} \cdot \text{сек}^2$. Эти выражения, однако, содержат космологическую постоянную, численное значение которой неизвестно. Необходимость удержания этой постоянной в теории и метод определения ее значения опираются на следующие доводы. Давление в модели вселенной обычно рассматривают как меру хаотического движения галактик, которое накладывается на движение, соответствующее красному смещению, и давление излучения. Наблюдения показывают, что в настоящее время эти эффекты очень малы, так что $p_0 = 0$ в (9.502). Поэтому

$$\Lambda = \left(2h_2 + h_1^2 + \frac{c^2 k}{R_0^2} \right) \text{ сек}^{-2}, \quad (9.503)$$

что фиксирует численное значение космологической постоянной, тогда как плотность равна

$$\rho_0 = \frac{1}{4\pi G} \left(-h_2 + h_1^2 + \frac{c^2 k}{R_0^2} \right) \text{ г/см}^3. \quad (9.504)$$

Значение $\Lambda = 0$ было бы приемлемым, если бы правая часть (9.503) была равна нулю, что было бы весьма примечательной игрой случая. Однако, насколько известно в настоящее время, сохранение космологической постоянной в уравнениях Эйнштейна необходимо только для внутренней согласованности уравнений (9.501)—(9.503).

Вывод $p_0 = 0$, сделанный на основе наблюдений, подсказывает, что полезно исследовать подкласс однородных моделей вселенной, в которых $p = 0$ для всех значений t .

Этот подкласс уже был упомянут в § 8.8, где было показано, что плотность в любой момент времени t равна

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^3}{R^3}.$$

Ссылаясь на § 8.7, мы видим, что если $\mathcal{M}$ (в z) — средняя масса галактики, то возможно другое выражение для ρ имеет вид

$$\rho = \frac{\alpha \mathcal{M}}{R^3}.$$

Поэтому в момент t_0

$$\rho_0 = \frac{\alpha}{R_0^3} \mathcal{M} \quad z/c\mathcal{M}^3. \quad (9.505)$$

Постоянная α/R_0^3 , как следует надеяться, когда-нибудь будет определена из наблюдений с помощью формул (9.309) или (9.315). Тогда формулы (9.505) и (9.501) обеспечат своего рода „перекрестный контроль“ над значением средней массы галактики (конечно, в предположении, что лучше всего представляет наблюдения модель вселенной, в которой давление все время равно нулю).

Любопытный, хотя и весьма предварительный вывод можно получить из соотношения (9.504) в комбинации с нашим примером из § 9.2. Записывая (9.504) в виде

$$\frac{c^2 k}{R_0^2} = 4\pi G \rho_0 + (h_2 - h_1^2)$$

и используя (9.215), имеем

$$\frac{c^2 k}{R_0^2} = 4\pi G \rho_0 - 2 \left\{ 1 - \frac{A_2}{A_1} + 0,4606 (K_1 + W_1) \right\} h_1^2. \quad (9.506)$$

Среднюю сглаженную плотность вещества в пространстве [4] принимают теперь равной от 10^{-30} до 10^{-31} г/см^3 ; поэтому возьмем несколько более широкий диапазон для ρ_0 :

$$5 \cdot 10^{-30} \text{ г/см}^3 \geq \rho_0 \geq 5 \cdot 10^{-32} \text{ г/см}^3,$$

и достаточно широкий диапазон для h_1 : $8 \cdot 10^{-18} \geq h_1 \geq 3 \cdot 10^{-18} \text{ сек}^{-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} 4,2 \cdot 10^{-36} \text{ сек}^{-2} &\geq 4\pi G \rho_0 \geq 0,04 \cdot 10^{-36} \text{ сек}^{-2}, \\ 128 \cdot 10^{-36} \text{ сек}^{-2} &\geq 2h_1^2 \geq 18 \cdot 10^{-36} \text{ сек}^{-2}. \end{aligned}$$

Но K_1 лежит в интервале от 3 до 4, а A_2/A_1 не превышает 0,18 (см. § 9.2); поэтому, предполагая $W_1 > -2$, мы получаем, что правая часть (9.506) всегда *отрицательна*. Таким образом, $k = -1$ и наши примеры подсказывают, что *пространство является гиперболическим и, следовательно, бесконечно протяженным*.

§ 9.6. Двухцветные показатели цвета Стеббинса — Уитфорда. Наблюдения Баума

Теорию § 8.6 можно использовать для интерпретации измерений покраснения света некоторых галактик, проведенных Стеббинсом и Уитфордом, а также для объяснения измерений блеска и угловых диаметров галактик, сделанных в последнее время Баумом.

1. Стеббинс и Уитфорд измеряли интенсивность в двух широких участках спектра галактик с эффективными длинами волн

$$\begin{aligned}\lambda &= 5,29 \cdot 10^{-5} \text{ см (желтый)}, \\ \lambda^* &= 4,32 \cdot 10^{-5} \text{ см (синий)}.\end{aligned}\tag{9.601}$$

Беря разность интенсивностей, они получили двухцветные показатели цвета. Приближенная теория измерений Стеббинса — Уитфорда получается при помощи выражения (8.618), в пренебрежении тем, что ширины участков спектра являются конечными (ширины принимаются равными $d\lambda$ и $d\lambda^*$ соответственно). Предполагая сначала, что параметры функций B_i идентичны для всех галактик, так что

$$B_i = B_a = B,$$

и вводя обозначение

$$\varepsilon = \frac{2,5}{E} \left\{ \frac{\lambda^* B'(\lambda^*)}{B(\lambda^*)} - \frac{\lambda B'(\lambda)}{B(\lambda)} \right\},\tag{9.602}$$

имеем

$$C_i - C_a = \varepsilon (\delta_i - \delta_a).\tag{9.603}$$

Предполагая теперь, что галактики излучают как черные тела с различными температурами, имеем в силу (9.603)

$$B_i(\lambda) = \frac{8\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda \mathcal{T}_i}} - 1},$$

где

$$c_2 = \frac{hc}{k_B} = 1,435 \text{ см} \cdot \text{град}.$$

Таким образом,

$$\frac{B_i(\lambda)}{B_a(\lambda)} = \exp \left\{ \frac{c_2}{\lambda} \left(\frac{1}{\mathcal{T}_a} - \frac{1}{\mathcal{T}_i} \right) \right\} \frac{1 - \exp(-c_2/\lambda \mathcal{T}_a)}{1 - \exp(-c_2/\lambda \mathcal{T}_i)},$$

аналогичная формула имеет место для $B_i(\lambda^*)/B_a(\lambda^*)$. Но если длина волны λ порядка $5 \cdot 10^{-5}$ см, а $\mathcal{T} \approx 5000^\circ$, то $\exp(-c_2/\lambda \mathcal{T}) \approx 1/310$. Таким образом, приближенно

$$\ln \left\{ \frac{B_i(\lambda)}{B_a(\lambda)} \right\} = \frac{c_2}{\lambda} \left(\frac{1}{\mathcal{T}_a} - \frac{1}{\mathcal{T}_i} \right).$$

Итак,

$$\frac{\lambda B'_i(\lambda)}{B_i(\lambda)} = -5 + \frac{c_2}{\lambda \mathcal{T}_i} \{1 - \exp(-c_2/\lambda \mathcal{T}_i)\} = -5 + \frac{c_2}{\lambda \mathcal{T}_i}.$$

Поэтому формула (8.618) принимает вид

$$C_i - C_a = \frac{2,5}{E} \frac{c_2}{\mathcal{T}_a} \left(\frac{1}{\lambda^*} - \frac{1}{\lambda} \right) \left\{ \frac{\mathcal{T}_a}{\mathcal{T}_i} (1 + \delta_i) - (1 + \delta_a) \right\},$$

что можно рассматривать как выражение $\mathcal{T}_i$ через $\mathcal{T}_a$

$$\frac{\mathcal{T}_a}{\mathcal{T}_i} = 1 + \left\{ (C_i - C_a) (1 - \delta_i) \left(\frac{2,5}{E} \frac{c_2}{\mathcal{T}_a} \right)^{-1} \left(\frac{1}{\lambda^*} - \frac{1}{\lambda} \right)^{-1} - (\delta_i - \delta_a) \right\}. \quad (9.604)$$

Это соотношение справедливо до первого порядка по δ_i и δ_a . Использованный нами двухцветный показатель цвета совпадает с двухцветным показателем цвета Стеббинса — Уитфорда, за исключением нуля-пункта. Беря 18 галактик в скоплении Девы за стандарт, обозначаемый индексом a , и полагая $\mathcal{T}_a = 6000^\circ$, можно вычислить значения ϵ и $\mathcal{T}_i$ для любой другой галактики соответственно при тех гипотезах, при которых были получены (9.603) и (9.604). Результаты приведены в табл. 6, где C — измеренный двухцветный показатель цвета. Изменения этого показателя индекса указы-

вают, что для М32 $\epsilon = 5$, но $\epsilon = 4$ или меньшему числу для того момента времени, который соответствует скоплению в Волопасе. Аналогичный вывод следует из рассмотрения значений $\mathcal{J}_i$, т. е. в предположении, что галактики излучают как черные тела. В этом случае имеет место спад температуры черного тела от 6000° (или более) для М32 до $\sim 5000^\circ$ для галактик скопления в Волопасе. Однако связь ϵ или $\mathcal{J}_i$ с δ_i и через (9.203) с фотометрическим расстоянием не является простой. Если бы в конечном счете оказалось, что для всех галактик имеет место одно и то же значение ϵ , то его можно было бы использовать для подсчета функции B из (9.602), и, таким образом, найти распределение энергии в спектре галактики. С другой стороны, если значение ϵ меняется от галактики к галактике и спектры галактик считаются спектрами черных тел с различными температурами, то из (8.617) может быть подсчитана поправка Стеббинса — Уитфорда ΔM для абсолютной звездной величины каждой галактики. Для решения этих задач необходимо иметь много больше наблюдательных данных, чем то количество, которым мы располагаем в настоящее время.

Таблица 6

Галактика	δ	C	ϵ	$\mathcal{J}_i$
М32	0,0	0,84	4,9	6100°
Дева (18 галактик)	0,0041	0,86	—	(6000)
Волосы Вероники № 1, 2	0,0219	0,96	5,6	5600
Волосы Вероники № 3	0,0219	1,05	10,7	5200
Северная Корона № 1, 3, 4	0,0733	1,13	3,9	5200
Северная Корона № 2	0,0733	1,15	4,2	5100
Волопас 1	0,1297	1,36	4,0	4700
Волопас 2	0,1297	1,39	4,2	4600
Волопас 3	0,1297	1,31	3,6	4900
Волопас 4	0,1297	1,17	2,5	5400

2. Обратимся теперь к наблюдениям Баума. Пусть

$$\mathcal{J}_i = \int_0^{\infty} \sigma(\lambda) B_i \left(\mathcal{J}_i, \frac{\lambda}{1 + \delta_i} \right) d\lambda, \quad (9.605)$$

так что формула (8.607) для полной энергии, приходящей к наблюдателю от источника P_i , принимает вид

$$L_i = \frac{A_i}{4\pi D_i^2} \frac{\mathcal{I}_i}{1 + \delta_i}. \quad (9.606)$$

Итак, в силу (8.502), (8.517) и (8.412), если ξ_i — расстояние, определяемое по видимому размеру P_i , а δ_i — красное смещение для P_i , то

$$D_i = \frac{R_0^2}{R_i^2} \xi_i = (1 + \delta_i)^2 \xi_i. \quad (9.607)$$

С другой стороны, если l_i — линейный диаметр P_i , а a_i — видимый угловой диаметр (в *рад*), то

$$a_i = \frac{l_i}{\xi_i}. \quad (9.608)$$

Поэтому, комбинируя (9.606), (9.607) и (9.608), имеем

$$L_i = \frac{A_i}{4\pi l_i^2} \frac{a_i^2}{(1 + \delta_i)^5} \mathcal{I}_i,$$

и, следовательно, если P_j — другой источник, для которого $A_i/l_i^2 = A_j/l_j^2$, то

$$\frac{L_i}{L_j} = \frac{a_i^2}{a_j^2} \left(\frac{1 + \delta_j}{1 + \delta_i} \right)^5 \cdot \frac{\mathcal{I}_i}{\mathcal{I}_j}; \quad (9.609)$$

Эта формула включает полные энергии $\mathcal{I}_i$ и $\mathcal{I}_j$ от двух источников, измеренные в точке наблюдения в момент прибытия света в эту точку. В принципе измерения Баума дают нам некоторое эмпирическое соотношение между $(\lg L_i - \lg L_j)$ и $(\lg a_i - \lg a_j)$ для эллиптических галактик. Таким образом, в силу (9.609), соответствующее теоретическое соотношение можно записать в виде

$$\lg \frac{\mathcal{I}_i}{\mathcal{I}_j} = (\lg L_i - \lg L_j) - 2(\lg a_i - \lg a_j) + 5 \lg \frac{1 + \delta_i}{1 + \delta_j}. \quad (9.610)$$

Правая часть этого соотношения известна по измерениям Баума и по измерениям красного смещения. Следовательно, можно найти отношение $\mathcal{I}_i/\mathcal{I}_j$ для пар галактик. Если для

некоторых пар галактик $\mathcal{J}_i$ не совпадает с $\mathcal{J}_j$, то, как показывает исследование равенства (9.605), возможны две интерпретации этого несовпадения. Во-первых, можно предположить, что физические параметры в B_i и B_j не равны друг другу. В этом случае данные для различных пар таких галактик прольют свет на то, как меняются эти параметры для различных промежутков времени прохождения света от галактики до наблюдателя. Во-вторых, можно предположить тождественность физических параметров для всех галактик, что требует различных функций $\sigma(\lambda)$ для вычисления $\mathcal{J}_i$ и $\mathcal{J}_j$. Это имело бы место, если за неравенство $\mathcal{J}_i$ и $\mathcal{J}_j$ ответственно поглощение излучения межгалактическим веществом. Конечно, можно предложить и комбинацию обеих интерпретаций.

§ 9.7. Частные модели вселенной и возраст вселенной

Предыдущие исследования показывают, что наблюдения в конечном счете могут дать численные значения для k , R , R' и R'' в некоторый момент t_0 . Однако функция $R(t)$ не будет полностью определена. Эта неопределенность находится в согласии с тем фактом, что различные модели вселенной можно „подогнать“ к той части системы галактик, которая доступна нашим инструментам. Поскольку таким образом получить единственное решение космологической проблемы не удастся, много усилий было затрачено на исследование другого, чисто теоретического метода. Этот метод состоит в детальном изучении следствий двух уравнений Эйнштейна (8.210) и (8.211) с тем, чтобы определить поведение $R(t)$ при различных гипотезах. Уравнение (8.210) имеет вид

$$\kappa c^2 \rho = \frac{3}{R^2} (kc^2 + R'^2) - \Lambda, \quad (9.701)$$

тогда как уравнение (8.211) можно заменить на уравнение (8.804), а именно

$$\frac{d}{dt} (\rho R^3) + \frac{p}{c^2} \frac{dR^3}{dt} = 0, \quad (9.702)$$

которое заменой независимой переменной t на R можно преобразовать к виду

$$\frac{d\rho}{dR} = -3 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) R^2. \quad (9.703)$$

Уравнения (9.701) и (9.703) содержат две постоянные, k и Λ , и две функции от t , ρ и p . Как всегда, произвольный выбор значений k , Λ и $R(t)$ не будет давать физически приемлемую модель; например, может оказаться, что плотность и давление при этом окажутся отрицательными. Поэтому а priori исследования начинаются с некоторых физически правдоподобных ограничений, например, что ρ и p не должны быть отрицательными. Тогда из (9.703) следует, что ρ уменьшается при увеличении R , и наоборот. Более того, (9.701) дает

$$\frac{R'}{R} = \left(\frac{\kappa c^2 \rho}{3} - \frac{k c^2}{R^2} + \frac{1}{3} \Lambda \right)^{1/2}, \quad (9.704)$$

и, поскольку R должно быть действительным и $\rho \geq 0$, выражение под знаком корня должно быть всегда не отрицательным. Подобные качественные выводы дают некоторые указания на ход R со временем для различных значений k и Λ [7]. Некоторые частные случаи мы упомянем здесь.

1. *Модели с нулевым давлением.* Если в (9.702) $p=0$, то $\rho = \rho_0 R_0^3 / R^3$ и (9.704) принимает вид

$$\frac{dR}{dt} = R \left(\frac{\kappa c^2 \rho_0}{3} \frac{R_0^3}{R^3} - \frac{k c^2}{R^2} + \frac{\Lambda}{3} \right)^{1/2}. \quad (9.705)$$

Это уравнение не может быть в общем случае проинтегрировано в элементарных функциях. Однако для некоторых значений k и Λ возможны элементарные интегралы, как показывает следующий пример.

а) Пусть

$$R = R_0 = R_e = \text{const}, \quad k = +1, \quad \Lambda = \frac{c^2}{R_e^2}. \quad (9.706)$$

Тогда, в силу (8.211), $p = 0$, и из (9.701)

$$\kappa \rho_e = \frac{2}{R_e^2}. \quad (9.707)$$

Эта модель является моделью вселенной Эйнштейна, в которой плотность постоянна и давление равно нулю. Но, в силу

(8.412) и (9.706), красное смещение равно нулю, и потому эта модель бесполезна для интерпретации данных наблюдений.

б) Пусть

$$R = R_0 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t}, \quad \Lambda > 0, \quad k = 0,$$

что, в силу (9.701), дает $\rho = 0$. Это — модель вселенной де Ситтера, которую мы уже рассматривали в § 4.5; в ней плотность, как и давление, равны нулю. По этой причине эта модель опять-таки бесполезна для интерпретации данных наблюдений, хотя красное смещение в этой модели

$$\delta = e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} (t_0 - t)} - 1$$

и, таким образом, отлично от нуля. Следует отметить, что $k = 0$ является существенной частью определения этой модели — обстоятельство, на которое часто не обращают внимания. Между тем, часто говорят, что любая модель, в которой $\rho \rightarrow 0$ и $p \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, является такой моделью, которая с необходимостью стремится к модели вселенной де Ситтера. Следующий пример покажет, что это обстоятельство не обязательно имеет место. Пусть

$$R = R_0 \operatorname{sh} \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right),$$

где R_0 — некоторая постоянная, а k равно $+1$ или -1 . Тогда, в силу (8.210) и (8.211),

$$\begin{aligned} \kappa c^2 \rho &= \left(\Lambda + \frac{3kc^2}{R_0^2} \right) \left\{ \operatorname{cth}^2 \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right) - 1 \right\}, \\ \kappa p &= \frac{1}{3} \left(\Lambda + \frac{3kc^2}{R_0^2} \right) \left\{ 1 - \operatorname{cth}^2 \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right) \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому при $t \rightarrow \infty$ $p \rightarrow 0$ и $\rho \rightarrow 0$, но это не доказывает, что и $k \rightarrow 0$. Таким образом, некоторая модель может стремиться к модели „пустой вселенной“, не становясь при этом моделью вселенной де Ситтера. Между тем, как было подчеркнуто в § 4.5, модель вселенной де Ситтера является сингулярным пространством-временем, не представляющим никакого распределения вещества.

в) Три модели, аналогичные ньютоновской:

$$\Lambda = 0, \quad k = 0, \quad R = \left(\frac{3}{4} \kappa c^2 \rho_0 R_0^3 \right)^{1/3} (t - t_1)^{2/3};$$

$$\Lambda = 0, \quad k = 1$$

$$c(t - t_1) = R_1 \left\{ \arcsin \left(\frac{R}{R_1} \right)^{1/2} - \left(\frac{R}{R_1} \right)^{1/2} \left(1 - \frac{R}{R_1} \right)^{1/2} \right\};$$

$$\Lambda = 0, \quad k = -1,$$

$$c(t - t_1) = R_1 \left\{ \left(\frac{R}{R_1} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{R}{R_1} \right)^{1/2} - \operatorname{arcsch} \left(\frac{R}{R_1} \right)^{1/2} \right\},$$

где $R_1 = \frac{1}{3} \kappa \rho_0 R_0^3$, а t_1 — постоянная интегрирования. У всех этих трех моделей $R = 0$ при $t = t_1$; в первой и в третьей из них $R \rightarrow \infty$ со временем; вторая является осциллирующей моделью, так как $R = 0$, когда $c(t - t_1)$ есть целое кратное πR_1 .

г) Модель вселенной Леметра [8] имеет $k = +1$ и ее начальное состояние совпадает с состоянием модели вселенной Эйнштейна. Поэтому в начальный момент

$$R = R_0 = R_e, \quad \kappa \rho = \kappa \rho_0 = \frac{2}{R_e^2},$$

и $\Lambda = c R_e^2$. Тогда уравнение (9.705) можно проинтегрировать при помощи подстановки $R = R_e(1 + x)$, что дает

$$\begin{aligned} \frac{c}{\sqrt{3} R_e} (t - t_1) = \ln \{ x + 2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3} \} + \\ + \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left\{ \frac{x - \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}}{x + \sqrt{3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} \right\}, \end{aligned}$$

где t_1 — постоянная интегрирования. Эта модель начинает расширяться от $R = R_e$ при $t = -\infty$ и продолжает расширяться до бесконечности.

Возраст вселенной. Рассмотрение частных моделей тесным образом связано с интерпретацией обратной величины параметра Хаббла h_1 как времени расширения системы галактик — так называемого „возраста вселенной“. Так как $1/h_1$ имеет размерность времени, часто считается самоочевидным, что $1/h_1$ должно быть возрастом вселенной — вывод, который мы теперь исследуем.

Если $1/h_1$ должно быть прямо пропорционально времени расширения, то из соотношения

$$h_1 = R'(t_0)/R(t_0)$$

следует, что R должно иметь форму

$$R = R_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^n, \quad (9.708)$$

где R_0 , t_0 — постоянные, а n — число, большее нуля. Нет надобности задавать значения h и Λ . Используя определение h_1 и соотношение (9.708), имеем

$$t_0 = \frac{n}{h_1}. \quad (9.709)$$

Теперь момент $t=0$ можно считать начальным моментом расширения, так как в этот момент каждый объем, заключенный внутри конечного радиуса r_i , равен нулю [см. (8.318)]. Таким образом, t_0 в соотношении (9.709) — это время, прошедшее с момента начала расширения до наших дней, т. е. его можно назвать возрастом вселенной. Но этот результат зависит от начального выбора (9.708) для R , который не был обоснован и который ведет к следующим трудностям. Во-первых, предположим, что численное значение h_2 известно; тогда

$$h_2 = \frac{R''(t_0)}{R(t_0)} = n(n-1) \frac{1}{t_0^2} = \frac{n-1}{n} h_1^2,$$

или

$$n = \frac{h_1^2}{h_1^2 - h_2}.$$

Но так как $n > 0$, то $h_2 < h_1^2$. Это — численное соотношение, которое можно, а может быть и нельзя, вывести из наблюдений (см. § 9.2). Во-вторых, соотношение (9.708) и уравнения Эйнштейна (8.210) и (8.211) дают для плотности и давления

$$\kappa c^2 \rho = \frac{3kc^2 t_0^{2n}}{R_0^2} \frac{1}{t^{2n}} + \frac{3n^2}{t^2} - \Lambda,$$

$$\kappa p = - \frac{kc^2 t_0^{2n}}{R_0^2} \frac{1}{t^{2n}} - \frac{n(3n-2)}{t^2} + \Lambda.$$

Поэтому в общем случае $\rho \geq 0$ и $p \geq 0$ только для тех значений t , которые удовлетворяют неравенствам

$$\left. \begin{aligned} \frac{kc^2}{R_0^2} \left(\frac{t_0}{t} \right)^{2n} + \frac{n^2}{t^2} &\geq \frac{\Lambda}{3}, \\ \frac{kc^2}{R_0^2} \left(\frac{t_0}{t} \right)^{2n} + \frac{n^2}{t^2} + \frac{2n(n-1)}{t^2} &\leq \Lambda, \end{aligned} \right\} \quad (9.710)$$

а при всех остальных значениях t давление и плотность отрицательны. При произвольном выборе k , R_0 , t_0 и Λ этим неравенствам нельзя удовлетворить при всех значениях t . Однако, принимая специальные значения для n и вводя специальные зависимости между этими четырьмя постоянными, можно добиться удовлетворения неравенств (9.710). Рассмотрим в качестве примера случай $n=1$, при котором возраст вселенной равен $1/h_1$. Тогда (9.710) удовлетворяются для всех значений t в предположении, что $\Lambda=0$, $k=-1$ и $R_0=ct_0$, но не иначе. Таким образом, хотя существуют физически правдоподобные модели, в которых $1/h_1$ пропорционально возрасту вселенной, такие модели включают произвольные предположения о постоянных, которые входят в эту модель.

В качестве второго примера рассмотрим следствие распространенной догмы, что h_1 — естественная постоянная и что ее численное значение не зависит от времени наблюдения t_0 . Для того чтобы это обстоятельство имело место, мы должны иметь

$$R = R_0 e^{h_1 t} \quad (h_1 = \text{const}), \quad (9.711)$$

тогда как значения k и Λ можно не конкретизировать. Беря опять $R=0$ в качестве начального состояния, получаем, что $R=0$ при $t=-\infty$, так что возраст вселенной является в этом случае бесконечным. При этом $1/h_1$ равно промежутку времени, необходимому для увеличения R в e раз, и интерпретация $1/h_1$ как возраста вселенной, таким образом, оказывается непригодной. Кроме того, в силу (9.711), $h_2 = h_1^2$ — условие, которое, вообще говоря, может не подтвердиться наблюдениями. Наконец, уравнения Эйнштейна показывают, что $\rho \geq 0$ и $p \geq 0$ только для тех значений t , которые удовлетворяют условию

$$\frac{3kc^2}{R_0^2} (\Lambda - 3h_1^2)^{-1} \geq e^{2h_1 t} \geq \frac{kc^2}{R_0^2} (\Lambda - 3h_1^2)^{-1}.$$

Число этих примеров можно было бы увеличить [9], однако уже достаточно было сказано для того, чтобы показать: а) численное значение $1/h_1$ само по себе не определяет возраста вселенной, который определяется предполагаемой формой функции R ; б) даже такие очевидные предположения о форме этой функции, как (9.708) и (9.711), могут приводить к физически неприемлемым следствиям.

§ 9.8. Неоднородные модели

Однородные модели вселенной, рассмотренные до сих пор, по-видимому, будут представлять систему галактик только в качестве первого приближения, так как каждую отдельную галактику следует рассматривать как некоторое локальное сгущение вещества. Неоднородные модели, в которых плотность и давление являются функциями и положения и времени, можно получить при помощи уравнений Эйнштейна, если принять, что галактика является гравитирующим сгущением вещества, погруженным в окружающую идеальную жидкость. Если имеется одно сферически симметричное сгущение, находящееся в точке $r=0$, можно найти точное решение уравнений (6.425) — (6.428) [10]. Однако более реальным типом модели вселенной будет модель с произвольным числом сферически симметричных сгущений. Хотя точное решение этой проблемы неизвестно, имеется приближенное решение [11]. В качестве путеводной нити возьмем опять приближенное решение (4.226) уравнений Эйнштейна, а именно

$$ds^2 = (1 - \kappa\psi)(dx^4)^2 - \frac{1 + \kappa\psi}{c^2} \{ (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \}, \quad (9.801)$$

и пусть это решение соответствует n сферическим телам с массами $m_1, m_2, \dots, m_n$ в некотором в остальном пустом пространстве-времени. Тогда результаты § 4.2 показывают, что ψ должно удовлетворять уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \psi = 0, \quad (9.802)$$

и приближенное решение должно иметь вид

$$\psi = \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{V(x^1 - x_i^1)^2 + (x^2 - x_i^2)^2 + (x^3 - x_i^3)^2}, \quad (9.803)$$

причем сгущения расположены в точках (x_i^1, x_i^2, x_i^3) . С другой стороны, если сгущения отсутствуют и имеется только однородная идеальная жидкость, то соответствующее пространство-время имеет метрику (8.302), где $(t, x, y, z) = (x^4, x^1, x^2, x^3)$. Это указывает на то, что комбинация сгущений с распределением идеальной жидкости будет обладать метрикой вида (4.401), где

$$D = 1 - \kappa\phi, \quad A = B = C = \frac{R^2(x^4)}{c^2(1 + kr^2/4)^2}(1 + \kappa\omega); \quad (9.804)$$

здесь ϕ и ω — функции всех четырех координат, и степенями κ выше первой следует пренебречь.

Первый шаг в раскрытии уравнений Эйнштейна можно сделать, если положить B и C равными A , и обозначить частную производную от A нижним индексом. Тогда формулы Дингля принимают вид: ($i, j = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} 8\pi GAT^{ii} = & \frac{1}{2} \left(\frac{\nabla^2 A}{A^2} + \frac{\nabla^2 D}{AD} - \frac{\sum_{j=1}^3 A_j^2}{A^3} - \frac{1}{2} \frac{\sum_{j=1}^3 D_j^2}{AD^2} \right) - \\ & - \left(\frac{A_{44}}{AD} - \frac{1}{2} \frac{A_4 D_4}{AD^2} - \frac{1}{4} \frac{A_4^2}{A^2 D} \right) + \Lambda - \\ & - \left\{ \frac{1}{2} \frac{A_{ii}}{A^2} + \frac{1}{2} \frac{D_{ii}}{AD} - \frac{3}{4} \frac{A_i^2}{A^3} - \frac{1}{4} \frac{D_i^2}{AD^2} - \frac{1}{2} \frac{A_i D_i}{A^2 D} \right\}, \quad (9.805) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 8\pi GA^2 T^{ij} = & - \left\{ \frac{1}{2} \frac{A_{ij}}{A} + \frac{1}{2} \frac{D_{ij}}{D} - \frac{3}{4} \frac{A_i A_j}{A^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \frac{D_i D_j}{D^2} - \frac{1}{4} \frac{A_i D_j + A_j D_i}{AD} \right\}, \quad (i \neq j) \quad (9.806) \end{aligned}$$

$$- 8\pi GADT^{i4} = - \left(\frac{A_{i4}}{A^2} - \frac{A_i A_4}{A} - \frac{1}{2} \frac{D_i A_4}{AD} \right), \quad (9.807)$$

$$- 8\pi GDT^{44} = \frac{\nabla^2 A}{A^2} - \frac{3}{4} \frac{\sum_{j=1}^3 A_j^2}{A^3} - \frac{3}{4} \frac{A_4^2}{A^2 D} + \Lambda. \quad (9.808)$$

Предположим, что, за исключением (малых) областей, занятых сгущениями, тензор энергии по-прежнему имеет форму, соответствующую идеальной жидкости, а именно

$$T^{\mu\nu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^\mu u^\nu - g^{\mu\nu} \frac{p}{c^2}.$$

Предположим далее, что для пространства-времени с метрическими коэффициентами (9.804) можно выбрать сопутствующие координаты; тогда $T^{i4} = 0$ ($i = 1, 2, 3$), и, интегрируя (9.807) один раз по переменной x^i , получаем

$$\frac{\partial \ln A}{\partial x^4} = FD^{1/2},$$

где F — произвольная функция x^4 . Поэтому, в силу (9.804), с точностью до первого порядка по x

$$2 \frac{R'}{R} + \kappa \omega_4 = F(x^4) \left(1 - \frac{\kappa}{2} \psi\right);$$

отсюда $F = 2R'/R$ и

$$\omega_4 = -\frac{R'}{R} \psi. \quad (9.809)$$

Итак, 4-вектор скорости идеальной жидкости принимает вид $(u^4, 0, 0, 0)$. Поскольку он является единичным вектором, он удовлетворяет условию

$$1 = (1 - \kappa \psi) (u^4)^2. \quad (9.810)$$

Эта форма для 4-вектора скорости жидкости приводит к тому, что $T^{ij} = 0$ ($i \neq j$), так как метрика ортогональна, а также $T^{ii} = \frac{p}{Ac^2}$ ($i = 1, 2, 3$). Поэтому в (9.805) член в фигурных скобках должен иметь одно и то же значение для каждого из трех значений i (условие совместности для рассматриваемой задачи), и в (9.806) правая часть должна равняться нулю для каждой пары значений ij при $i \neq j$. Эти условия выполняются, если Z — некоторая функция, симметричная относительно (x^1, x^2, x^3) , причем

$$Z\delta_{ij} = -\left\{ \frac{1}{2} \frac{A_{ij}}{A} + \frac{1}{2} \frac{D_{ij}}{D} - \frac{3}{4} \frac{A_i A_j}{A^2} - \frac{1}{4} \frac{D_i D_j}{D^2} - \frac{1}{4} \frac{A_i D_j + A_j D_i}{AD} \right\}.$$

Раскрывая выражение в правой части с точностью до членов первого порядка по x с помощью (9.804), получаем

$$Z\delta_{ij} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k\delta_{ij}}{1 + kr^2/4} - \frac{\kappa}{2} \left\{ (\omega - \psi)_{ij} + \frac{1}{2} \frac{kx^i}{1 + kr^2/4} (\omega - \psi)_j + \frac{1}{2} \frac{kx^j}{1 + kr^2/4} (\omega - \psi)_i \right\}.$$

Поэтому симметрия по i и j будет гарантирована, если

$$\omega = \psi,$$

откуда

$$Z = \frac{1}{2} \frac{k}{1 + kr^2/4}.$$

Первое из этих уравнений совместно с (9.809) дает, после частного интегрирования по переменной x^4 ,

$$\psi = \omega = \Psi(x^1, x^2, x^3) \cdot R^{-1}, \quad (9.811)$$

где Ψ — произвольная функция (x^1, x^2, x^3) .

До сих пор наше рассмотрение включало, во-первых, введение сопутствующих координат и, во-вторых, наложение условия изотропности на метрические коэффициенты; последнее сводит тензор энергии к некоторой комбинации плотности и давления (по крайней мере во всех точках, не занятых сгущениями вещества). Но этого недостаточно для определения вида функции ψ . Однако известно [12], что оператор

$$\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2 \left\{ \nabla^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{kx^j}{(1 + kr^2/4)} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\}$$

является в случае трехмерного пространства с метрикой

$$ds^2 = \frac{(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2}{(1 + kr^2/4)^2}$$

аналогом оператора ∇^2 обычного трехмерного евклидова пространства с метрикой

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2.$$

Теперь (9.803) является суммой элементарных решений уравнения Лапласа (9.802). Поэтому для метрики с коэффициентами (9.804) мы определим функцию ψ , соответствующую произвольному числу n сгущений, как сумму элементарных решений [13] уравнения

$$\left\{ \nabla^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{kx^j}{1 + kr^2/4} \frac{\partial}{\partial x^j} \right\} \Psi = 0,$$

где $\psi R = \Psi$ в силу (9.811). Преобразуя это уравнение к сферической системе координат (r, θ, φ) при помощи формул вида (8.301), получим для $k \neq 0$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{2}{r(1+kr^2/4)} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} = 0; \quad (9.812)$$

для $k = 0$, конечно,

$$\nabla^2 \Psi = 0.$$

Элементарное решение [14] уравнения (9.812), соответствующее сгущению вещества с постоянной массой m_i , расположенному в точке $r = a_i$, $\theta = \theta_i$, $\varphi = \varphi_i$ имеет вид

$$\Psi_i = \left(\frac{1}{a_i'} \frac{z_i'}{z_i} - \frac{1}{a_i} \frac{z_i}{z_i'} \right) m_i,$$

где

$$z_i^2 = r^2 + a_i^2 - 2a_i r \{ \cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i \cos(\varphi - \varphi_i) \},$$

$$z_i'^2 = r^2 + a_i'^2 - 2a_i' r \{ \cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i \cos(\varphi - \varphi_i) \},$$

а a_i , a_i' связаны условием

$$a_i a_i' = \frac{4}{k}.$$

Поэтому для n сгущений функция ψ равна

$$\psi = \frac{\Psi}{R} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{1}{a_i'} \frac{z_i'}{z_i} - \frac{1}{a_i} \frac{z_i}{z_i'} \right) \quad (k \neq 0) \quad (9.813)$$

$$\psi = \frac{\Psi}{R} = \frac{1}{R} \sum_{i=1}^n \frac{m_i}{z_i} \quad (k = 0).$$

Следовательно, пространство-время, соответствующее n сгущениям вещества, погруженным в идеальную жидкость, имеет метрику

$$ds^2 = (1 - \kappa\psi)(dx^4)^2 - \frac{R^2(1 + \kappa\psi)}{c^2(1 + kr^2/4)^2} \times \\ \times \{ (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \}, \quad (9.814)$$

где ψ дается одной из двух формул (9.813) в зависимости от значения k , а члены порядка выше первого по κ опущены.

Влияние ψ должно сводиться к добавлению малых потенциалов тяготения, аналогичных потенциалам точечных масс в ньютоновской теории, или, приближенно, потенциалов пространства-времени Шварцшильда (5.121), к пространству-времени, соответствующему распределению идеальной жидкости. До тех пор пока массы m_i малы, очевидно, результаты § 8.2—9.7 не будут сильно изменены, за исключением, конечно, окрестностей сгущений, где члены $\kappa\psi$ уже не малы и наши приближения перестают быть справедливыми.

Сгущения имеют фиксированные координаты в сопутствующей системе координат и, таким образом, движутся вместе с идеальной жидкостью. Если R — возрастающая функция x^4 , то в точке (r, θ, φ) , удаленной от любого сгущения, значение ψ непрерывно убывает со временем. Поэтому влияние сгущений заметнее всего на ранних этапах развития и становится все более пренебрежимым при дальнейшем развитии расширения.

В общем случае, когда ψ дается равенствами (9.813), вычисление компонент тензора энергии становится утомительным. Однако можно привести простой пример, если приписать k и R значения для модели вселенной де Ситтера (см. § 9.7, (б)), а именно

$$k = 0, \quad R = R_0 e^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^4}.$$

В силу (9.805) и (9.808), компоненты, не равные тождественно нулю, даются равенствами

$$8\pi G A T^{ii} = \Lambda - 3\left(\frac{\Lambda}{3}\right) + \frac{2}{R_0}\left(\frac{\Lambda}{3} - \frac{\Lambda}{3}\right) \Psi e^{-\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^4} = 0$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

$$-8\pi G D T^{44} = \Lambda - 3\left(\frac{\Lambda}{3}\right) + \frac{\kappa c^2}{R_0^3} e^{-3\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} x^4} \nabla^2 \Psi = 0,$$

так как при $k=0$ $\nabla^2 \Psi = 0$ всюду, кроме самих сгущений. Таким образом, пространство-время (9.814) представляет теперь произвольное распределение гравитирующих гущений в пустом пространстве, причем эти сгущения удалены друг от друга. Таково, видимо, первое приближение к системе галактик, рассматриваемых как сферические массы, отделенные друг от друга пустыми областями.

* * *

Подводя итоги исследованиям, описанным в гл. VIII и IX, можно сказать, что однородные модели вселенной общей теории относительности удовлетворительно представляют данные наблюдений для системы галактик. Во всяком случае, не возникают противоречия с наблюдениями, а только такого рода противоречия будут вескими доводами в пользу изменения теории. Для каждого типа измерения, уже сделанного или проводимого, оказывается возможным найти формулу, являющуюся теоретическим „двойником“ этого измерения. Эти формулы содержат ряд параметров, численные значения которых в принципе можно определить из наблюдений, по мере увеличения их числа и точности. Сюда входят параметры самой однородной модели вселенной h_1 , h_2 , k и R_0 , поправочные постоянные K_1 , K_2 , W_1 и W_2 и параметр подсчетов числа галактик α/R_0^3 . Эти параметры связаны с имеющимися в настоящее время значениями плотности ρ_0 , давления p_0 и космологической постоянной Λ . Единственный параметр, известный ныне сравнительно точно, это h_1 ; значение остальных параметров большей частью неизвестно, за исключением h_2 и K_1 , которые можно грубо оценить. Численные значения параметров не независимы, а образуют переплетающийся набор чисел для различных видов наблюдений, обеспечивающих перекрестный контроль над этими числами. Наконец, появляется более правдоподобная модель вселенной, в которой рассмотренное до сих пор однородное распределение вещества заменяется на нерегулярное распределение, которое более точно представляет галактики как дискретные материальные объекты, отделенные друг от друга относительно пустыми областями.

Литература

Библиография, приводимая ниже, не претендует на исчерпывающую полноту, а имеет целью служить своего рода путеводной нитью для читателя, который захочет получить дополнительные сведения по затронутым в книге вопросам. Изложение истории создания теории относительности и предшествующих ей теорий можно найти в книге: Whittaker E. T., *History of the Theories of the Aether and Electricity* (New York, Philosophical Library, 1954), в частности в гл. II и V тома II, где также приведена обширная библиография. Подробное изложение теории относительности можно найти в [2] и [4], гл. I, и в [2], гл. III.

ГЛАВА I

1. Einstein A., *Ann. Phys.*, **17**, 891 (1905).
Einstein A., *Ann. Phys.*, **49**, 769 (1916).
2. Несколько примеров теорий этого типа можно найти в следующих книгах:
Weyl H., *Space — Time — Matter*, New York, Dover Publ., 1918 (1951 printing), § 35—36.
Eddington A. S., *Mathematical Theory of Relativity*, Cambridge, Univ. Press, 1924, гл. VII. (Русский перевод: А. С. Эддингтон, *Математическая теория относительности*, Харьков — Киев, 1933.)
Bergman P. G., *Introduction to Relativity*, New York, Prentice-Hall, 1942, гл. XVII. (Русский перевод: П. Бергман, *Введение в теорию относительности*, ИЛ, 1947.)
Einstein A., *The Meaning of Relativity*, Princeton, Univ. Press, 1950, приложение II. (Русский перевод: А. Эйнштейн, *Сущность теории относительности*, ИЛ, 1955.)
3. Dingle H., *Through Science to Philosophy*, Oxford, Clarendon Press, 1937.

4. Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, Univ. Press, 1934, § 8. 1.
5. Jeffreys H., Phil. Mag., 32, 177 (1941).
6. Milne E. A., Relativity, Gravitation and World-Structure, Oxford, Univ. Press, 1935; Kinematic Relativity, Oxford, Univ. Press, 1948.
- Bondi H., Cosmology, Cambridge, Univ. Press, 1952.
- Jordan P., *Schwerkraft und Weltall*, Braunschweig, Fr. Vieweg und Sohn, 1952.

ГЛАВА II

1. Для более детального изучения можно рекомендовать:
Synge J. L., Schild A., *Tensor Calculus*, Toronto, Univ. Press, 1949.
Eisenhart L. P., *Riemannian Geometry*, Princeton, Univ. Press, 1949.
2. Synge J. L., Schild A., *цит. соч.*, § 3.4.
3. Обычное обозначение для R^λ_λ есть R ; мы изменили это обозначение с тем чтобы не возникла путаница с величиной R из гл. VIII и IX.
4. Synge J. L., Schild A. *цит. соч.*, § 3.4.
5. Сведение одной формы метрики к другой и связанная с этим эквивалентность геометрий, упомянутые в § 2, определяются тензором Римана—Кристоффеля. См. Eisenhart L. P., *цит. соч.*, § 10.

ГЛАВА III

1. Несколько отличное решение проблемы неопределенности дается в следующих работах:
Eckart C., *Phys. Rev.*, 58, 919 (1940).
Taub A. H., *Phys. Rev.*, 74, 328 (1948).
Предлагается также иная интерпретация собственной плотности, определенной в § 3.8.
2. Для более детального изучения можно рекомендовать:
Dingle H., *The Special Theory of Relativity*, London, Methuen & Co., 1940.
McCrea W. H., *Relativity Physics*, London, Methuen & Co., 1949.
Møller C., *The Theory of Relativity*, Oxford, Clarendon Press, 1952.

3. Вопросы, связанные с вращением и движением системы частиц или твердого тела, рассмотрены в следующих статьях:
van Stockum W. J., Proc. Roy. Soc. Edinb., **57**, 135 (1937);
Proc. Roy. Irish Acad. **44**, 109 (1938).
Clark G. L., Proc. Roy. Soc. Edinb., **62**, 412, 434 (1947—1949).
Hogarth J. E., McCrea W. H., Proc. Camb. Phil. Soc., **48**, 616 (1952).
Salzman G., Taub A. H., Phys. Rev., **95**, 1659 (1954).
4. McCrea W. H., Proc. Roy. Soc., **A206**, 562 (1951).
McVittie G. C., Proc. Roy. Soc., **A211**, 295 (1952).

ГЛАВА IV

1. Papapetrou A., Proc. Roy. Soc., **A209**, 248 (1951); Proc. Phys. Soc. Lond., **64**, 57 (1951); См. также литературу, указанную в этих статьях.
2. Dingle H., Proc. Nat. Acad. Sci. Wash., **19**, 559 (1933).
3. Taub A. H., Ann. Math. Princeton, **53**, 472 (1951).
4. Kustaanheimo P., Proc. Edinb. Math. Soc., Ser. 2, **9**, 17 (1953).
5. Общий случай, в котором обходятся без предположения об ортогональности, рассматривался ван Стокумом: van Stockum W. J., Proc. Roy. Soc. Edinb., **57**, 135 (1937).

ГЛАВА V

1. Hadamard J., Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, Yale, Univ. Press, 1923, стр. 75 и след.
2. Clemence G. M., Rev. Mod. Phys., **19**, 361 (1947); Proc. Amer. Phil. Soc., **93**, 532 (1949).
3. Таблица 2 составлена по данным таблицы, использованной Овенденом (Ovenden M. W., Sci. Progr., **40**, 645, 1952); ссылки в таблице 3: (a) Phil. Trans., **A220**, 291 (1919); (б) Publ. Dominion Astrophys. Obs., **2**, 275 (1924); (в) Lick Obs. Bull., **11**, 41 (1923); **13**, 130 (1923); (г) Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **84**, 150 (1924); (д) Abh. Preuss. Akad. Berlin, No. 1 (1931), Lembang Ann., **5**, II (1933); (е) Докл. АН СССР, **29**, 189 (1940), Phys. Ber., **22**, 934 (1941); (ж) Jap. J. Astron. Geophys., **18**, 51 (1940); (з) Astron. J., **55**, 49 (1950); (и) Astron. J., **58**, 87 (1953); (к) J. Phys. Radium, Ser. 7, **3**, 281 (1932); (л) Phys. Z., **24**, 476 (1923); (м) Z. Astrophys., **4**, 221 (1932); (н) Observatory, **54**, 292 (1931); (о) Z. Astrophys., **4**, 208 (1932).

4. Mitchell S. A., Eclipses of the Sun, New York, Columbia Univ. Press, 1951, гл. XVIII.
5. Adam M. G., Month. Not. Roy. Astron. Soc., 108, 446 (1948).
6. Spitzer L., Month. Not. Roy. Astron. Soc., 110, 216 (1950).
7. Popper D. M., Astrophys. J., 120, 316 (1954).
8. Findlay-Freundlich E., Phil. Mag., 45, 303 (1954).
9. *Задача двух тел в общей теории относительности*. Пространство-время Шварцшильда описывает поле тяготения одного массивного тела, вокруг которого движутся частицы с относительно пренебрежимыми массами. Задача двух тел со сравнимыми массами, движущихся в их общем поле тяготения, была решена только приближенно; см.:
Eddington A. S., Clark G. L., Proc. Roy. Soc., A166, 465 (1938); Einstein A., Infeld L., Hoffmann B., Ann. Math. Princeton, 39, 65 (1938); Robertson H. P., Ann. Math. Princeton, 39, 101 (1938), а также ссылки на литературу, данные в этих работах; см. также статьи Кларка из [3] гл. III.

ГЛАВА VI

1. Этот метод предложен Уайтхэмом (Whitham G. B., Qu. Appl. Math., 12, 316, 1954).
2. Содержание § 6.5 взято из статьи: Schlüter A., Astron. J., 60, 141 (1955).
3. Eddington A. S., Mathematical Theory of Relativity, Cambridge, Univ. Press, 1924, § 5. (Русский перевод: А. С. Эддингтон, Математическая теория относительности, Харьков—Киев, 1933.)
Einstein A., Rosen J., J. Franklin Inst., 223, 43 (1937).
Salzman G., Taub A. H., Phys. Rev., 95, 1659 (1954).
McVittie G. C., J. Rat. Mechs. and Anal., 4, 201 (1955).

ГЛАВА VII

1. Burgers J. M., Proc. Acad. Sci. Amst., 49, 2 (1946).
McVittie G. C., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 110, 224 (1950).
2. McVittie G. C., Astrophys. J., 119, 352 (1954).
3. См. также: McVittie G. C., Proc. Roy. Soc., A220, 339 (1953).
4. Chapman S., Cowling T. G., The Mathematical Theory of Nonuniform Gases, Cambridge, Univ. Press, гл. 11. (Русский перевод: С. Чепмен, С. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1961.)

5. Таким образом не имеется избранного направления для силы тяготения в газе, взятом как целое, как и для скорости. На это обстоятельство не обратил внимания Лейзер (L a u z e r D., *Astron. J.*, 59, 268, 1954), который по существу возражает против того, что наши уравнения не могут быть выведены из ньютоновской теории тяготения. Однако представляется несомненным, что эти уравнения вытекают из ньютоновской теории тяготения, скомбинированной с ньютоновской гидродинамикой, как впервые было показано в статье: Milne E. A., McCrea W. H., *Quart. J. Math.*, 5, 73 (1934).

Г Л А В А VIII

1. Общие сведения о галактиках см. Payne-Gaposchkin C., *Introduction to Astronomy*, New York, Prentice-Hall, главы XVI и XVII. Эффект образования скоплений описан Шейном и Виртаненом: Shane C. D., Wirtanen C. A., *Astron. J.*, 59, 285 (1954).
2. Russell, Dugan, Stewart, *Astronomy*, New York, Ginn & Co., vol. II, 1938, §§ 689, 716.
3. Smith S., *Astrophys. J.*, 83, 23 (1936).
Page T., *Astrophys. J.*, 116, 75 (1952).
Holmberg E., *K. fyslogr. Sällsk. Lund Förh.*, 24, No. 11 (1954).
Schwarzschild M., *Astrophys. J.*, 59, 273 (1954).
4. См. Robertson H. P., *Proc. Nat. Acad. Sci. Wash.*, 15, 822 (1929) и литературу к этой статье.
5. McCrea W. H., *Z. Astrophys.*, 9, 290 (1934—1935).
6. Наше определение K находится в согласии с определением Хаббла и Толмена [*Astrophys. J.*, 82, 302 (1935), уравнение (27)]. Их дополнительная поправка $5 \lg(1 + \delta)$ появляется следующим образом. Задавая расстояние, определяемое по видимому размеру источника, излучающего свет в момент t_i и наблюдаемого в момент t_0 с помощью (8.502), Хаббл и Толмен вводят некоторый вид расстояния, которое они называют $\bar{r}$; определение последнего имеет вид

$$\bar{r} = \frac{R_0 r_i}{1 + k r_i^2 / 4}.$$

Таким образом, $\bar{r}$ — расстояние, определяемое по видимому размеру источника света, которое будет найдено, когда

свет *испущенный* в момент t_0 , дойдет в конце концов до наблюдателя. Используя (8.518) и (8.412), имеем

$$D = \frac{R_0^2}{R_i^2} \left(\frac{R_i r_i}{1 + k r_i^2/4} \right) = \frac{R_0}{R_i} \bar{r} = (1 + \delta) \bar{r}.$$

Хаббл и Толмен, по-видимому, считают $\bar{r}$ (а не D) тем расстоянием, которое определяется при измерениях видимой звездной величины. Поэтому, предполагая, что $\Delta M = 0$, и полагая $M_0 = M$ и $\delta = z$, получим для формулы (8.614) следующее выражение:

$$\lg \bar{r} = 0,2 \{m - K - 5 \lg (1 + z) - M\} + 1,$$

что представляет собой формулу Хаббла — Толмена (21). Де Ситтер (Bull. Astr. Insts. Netherlands, 7, 210, 1933—1936) также заменяет наше δ на z , и его поправка, которую следует вычитать из видимых звездных величин, равна δm ; эта величина следующим образом определяется через величину K_s [уравнения (26), (27), (28)]:

$$\delta m = -2,5 \lg K_s = K + \frac{5}{2} \lg (1 + z).$$

В своих расчетах де Ситтер записывает δm в виде $p_1 z + p_2 z^2$, и, следовательно,

$$K_1 = p_1 - \frac{5}{2E}, \quad K_2 = p_2 - \frac{5}{4E}.$$

ГЛАВА IX

1. Hubble E., Astrophys. J., **84**, 517 (1936); Heckmann O., Theorien der Kosmologie, Berlin, Springer-Verlag, 1942, стр. 61 и след.
2. Hubble E., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **113**, 658 (1953).
3. Hubble E., Astrophys. J., **84**, 517 (1936).
4. Whitford A. E., Astrophys. J., **59**, 154 (1954).
5. Stebbins J., Whitford A. E., Astrophys. J., **108**, 413 (1948). Stebbins J., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **110**, 416 (1950).
6. Baum W. A., Astron. J., **58**, 211 (1953).
7. См. Tolman R. C., Relativity, Thermodynamics and Cosmology, Oxford, Univ. Press, 1934, § 157—165.
8. Lemaître G., Ann. Soc. Sci. Bruxelles, **47A**, 49 (1927).
9. McVittie G. C., Astron. J., **58**, 129 (1952).

10. McVittie G. C., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **93**, 325 (1933).
Järnefelt G., Ann. Akad. Sci. Fenn., Ser. A, **45**, No. 3 (1940);
No. 12 (1942).
Einstein A., Strauss E. G., Rev. Mod. Phys., **17**, 120 (1945).
Bondi H., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **107**, 410 (1947).
Omer G. C., Astrophys. J., **109**, 164 (1949).
11. Метод, использованный здесь, является видоизменением метода из статьи:
McVittie G. C., Mon. Not. Roy. Astron. Soc., **91**, 274 (1931).
См. также Infeld L., Schild A., Rev. Mod. Phys., **21**, 408 (1949); рассматривается случай точечных масс, находящихся в пустом пространстве-времени, причем космологическая постоянная равна нулю.
12. Eisenhart L. P., Riemannian Geometry, Princeton, Univ. Press, 1949, § 14.
13. Hadamard J., цит. соч., ссылка [1] к гл. V.
14. Whittaker J. M., Proc. Camb. Phil. Soc., **24**, 414 (1928). Уравнение (9.812) идентично по форме с уравнением Уиттекера (20) при $\mu = -k/4$.
-

Г. К. Мак-Витти

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ И КОСМОЛОГИЯ

Редактор Л. В. САМСОНЕНКО

Художник С. П. Чахирьян

Технический редактор М. П. Грибова

Сдано в производство 10/VIII 1961 г. Подписано к печати 30/XI 1961 г. Бумага 84×108¹/₃₂ = 4,4 бум. л., 14,5 печ. л. Уч.-изд. л. 13,2 Изд. № 27/5307 Цена 1 р. 12 к. Зак. 2738.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1-й Рижский пер., д. 2

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза
Ленинград, Измайловский пр., 29