Е.Г. ГОНИН:

жизнь, научная и педагогическая деятельность

Е.Г. ГОНИН: жизнь, научная и педагогическая деятельность

Министерство образования и науки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пермский государственный педагогический университет»

Е.Г. ГОНИН:

жизнь, научная и педагогическая деятельность

К 100-летию со дня рождения

Пермь
«Книжный мир»
2010

УДК 51(09);378
ББК Ч 481(2) + В1 г
Е11

**Составитель –
доктор физико-математических наук, профессор
А.Е. Малых**

Книга о жизни, научно-исследовательской
и педагогической деятельности Е.Г. Гонина –
создателя пермской научной школы комбинаторного
анализа, видного отечественного ученого и педагога

Печатается по решению редакционно-издательского
совета Пермского государственного педагогического
университета

ISBN 978-5-903861-20-0

ОТ СОСТАВИТЕЛЯ

Книга посвящена 100-летию со дня рождения Евгения Григорьевича Гонина (1910–1983) – основателя пермской школы комбинаторного анализа, ученого широчайшего научного диапазона, профессора, педагога, учителя и наставника.

За свою яркую трудовую жизнь Евгений Григорьевич помог многим аспирантам и сотрудникам обрести статус ученого и продолжить исследования в избранном направлении, обучил не одну тысячу студентов, был мудрым наставником многих поколений учителей математики. Е.Г. Гонин активно разрабатывал и внедрял в процес обучения студентов новые материалы, в соответствии с тенденциями математического образования того времени.

В книге пять частей.

Первая часть повествует о жизненном пути Е.Г. Гонина. Она написана Еленой Евгеньевной Гониной, его дочерью.

Во второй части рассказано о научно-исследовательской деятельности ученого. Широко представлено одно из перспективных направлений исследований комбинаторного анализа, бурно развившееся с середины XX века, – конечные геометрии. В то время известные ученые США, Англии, Германии, Италии, Испании, Франции, Швеции, Чехословакии, Голландии, Японии и многих других стран исследовали как частные виды конечных геометрических структур, так и целые их классы. В 1950-е годы к этой тематике активно подключился Е.Г. Гонин со своими аспирантами и сотрудниками. Комплексное их исследование осуществлялось главным образом по четырем направлениям: изучение структуры уже полученных проективных плоскостей порядка 9; исследование других видов плоских конечных геометрий; построение проективных плоскостей порядка 9, отличных от четырех, известных с 1907 года, с использованием частичных геометрий; решение проблемы ортогональности латинских квадратов, связанной с гипотезой Л. Эйлера (1782). Е.Г. Гонин на протяжении почти тридцати лет являлся референтом Всесоюзного института научной и технической информации. Все последние достижения в области конечных геометрических систем рассматривались, изучались и обсуждались на научном семинаре по комбинаторному анализу.

А.Е. Малых обобщила результаты исследований в этом направлении и представила структуру основных плоских конечных геометрий, сформировавшихся к концу XX столетия, отметив в ней те их виды, которые изучались в комбинаторной школе Е.Г. Гонина.

Третья часть книги посвящена педагогической деятельности Евгения Григорьевича Гонина, его работе в должности заведующего кафедрой алгебры и геометрии, руководителя научно-методического семинара по онтодидактике, функционировавшего много лет. Евгений Григорьевич был блестящим лектором, постоянным участником и докладчиком на научных конференциях не только Пермского государственного педагогического института, но и на конференциях преподавателей математики педагогических вузов Уральской зоны, которые фактически являлись всероссийскими, а иногда и всесоюзными. Много сил, времени и внимания Евгений Григорьевич уделял учебной и внеаудиторной работе со студентами. Для них он разработал много нестандартных курсов, учебных пособий, тематика которых соответствовала последним достижениям науки. Учебно-воспитательная и профориентационная проблематика также занимала видное место в работе руководимой им кафедры. Можно только поражаться широте и многогранности интересов замечательного ученого и педагога.

В четвертой части книги содержатся воспоминания коллег Евгения Григорьевича Гонина, его учеников, аспирантов, сотрудников и тех, кто был с ним знаком.

В пятую часть книги вошли неординарные научные и методические труды Е.Г. Гонина, не утратившие актуальности и в наши дни.

При работе над книгой я постоянно ощущала искреннюю заинтересованность и поддержку ректора Пермского государственного педагогического университета профессора Андрея Константиновича Колесникова. На всех этапах работы – при сборе необходимых материалов, фотографий, исполнении рисунков, чертежей, квалифицированного компьютерного набора первых четырех частей – огромную и бескорыстную помощь оказывала мне кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры Вера Ильинична Данилова. Доцент кафедры геометрии Людмила Яковлевна Панкратова качественно выполнила правку учебного пособия Е.Г. Гонина «Конечные проективные плоскости». Практическую помощь оказала мне ассистент кафедры алгебры Галина Витальевна Пастухова. Всем им я приношу глубокую благодарность.

Часть первая

О ЖИЗНЕННОМ ПУТИ ЕВГЕНИЯ ГРИГОРЬЕВИЧА ГОНИНА

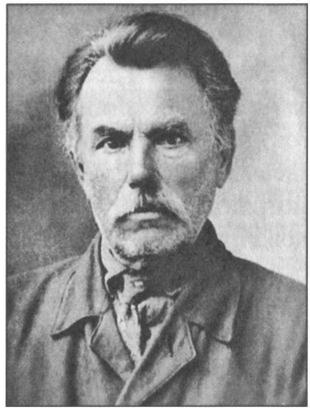
Елена Евгеньевна Гонина,
доцент кафедры высшей математики ПГТУ

Вся жизнь и деятельность Евгения Григорьевича Гонина связаны с Пермским педагогическим институтом (ныне Пермский государственный педагогический университет). Он проработал здесь 53 года, 22 года был заведующим кафедрой алгебры и геометрии, членом ученых советов факультета и института. Он основал в пединституте свою научную школу. Его деятельность была поистине многогранна: педагог и методист, ученый-математик, пропагандист передовых математических и педагогических идей, общественный деятель. Будучи интеллигентным человеком, обладающим высокой культурой и эрудицией, он оказал большое влияние на формирование и развитие творческого и научного потенциала физико-математического (впоследствии математического) факультета.

Евгений Григорьевич Гонин родился 23 (по старому стилю 10) апреля 1910 г. в селе Вишкиль Котельнического уезда Вятской губернии (теперь Кировской области). Его отец Григорий Иванович, родившийся в 1879 г. в городе Нолинске Вятской губернии, после учебы работал лесничим, т. е. был квалифицированным специалистом: руководил работой лесников, занимался лесовосстановлением и лесоразведением, охраной лесов и их использованием. По долгу службы Григорию Ивановичу с семьей приходилось жить в северных районах Кировской и Пермской областей, часто менять места службы: Нолинск, село Лойно, село Сергино, деревня Трушники, город Омутнинск, село Ныроб, город Чердынь, село Гайны... Село Вишкиль было только местом рождения старшего сына Евгения и старшей дочери Веры. А семья жила неподалеку в лесном кордоне.

Мать Евгения Григорьевича, Мария Федоровна, родившаяся в 1886 г., происходила из села Зура, расположенного на территории

Удмуртии. Село считалось русским, родители Марии Федоровны носили фамилию Лазоревы, были русскими православными крестьянами. Девочка, очевидно, была очень одаренной, потому что сумела поступить в гимназию города Глазова и окончила ее с серебряной медалью. Эта медаль до сих пор хранится в семье Гониных. На медали отчеканено имя императрицы – «Мария Федоровна». Интересно, что три внучки Марии Федоровны Гониной – Нина, Елена и Татьяна – окончили школу тоже с серебряной медалью. Мария Федоровна после окончания гимназии работала учителем, в советское время в трудовой книжке у нее было записано «шкраб», т. е. «школьный работник».



Григорий Иванович Гонин – отец Евгения Григорьевича

Семья была большая: после сына Евгения в 1911 г. родилась дочь Вера, в 1914-м – Нина, в 1916-м – второй сын Борис, в 1920-м – Лидия, в 1924 г. родился младший сын Николай. Были еще дети, но они умерли в младенчестве. Помогала родителям в уходе за детьми няня.

Отец воспитывал детей в строгости. Все разговоры и баловство за общим столом Григорий Иванович, по воспоминаниям взрослых детей, пресекал так: брал со стола деревянную ложку и бил шалуна по лбу. Не столько больно, сколько обидно и действенно. Уезжая по служебным делам, отец говорил старшему сыну, начиная с пятилетнего возраста: «Женя, ты старший мужчина, остаешься за главного». Надо отметить, что ответственность за младших братьев и сестер осталась у Евгения Григорьевича на всю жизнь. От мамы Евгений унаследовал спокойный характер, неординарные интеллектуальные способности (память, обучаемость, интерес к знаниям) и духовное богатство. В школе его сразу перевели во второй класс. Он даже помогал маме проверять тетради ее учеников. Учился Евгений хорошо, рано проявилась его склонность к математике. Одно время в школе ввели так называемый бригадный метод обучения. Он состоял в том, что задание давалось группе учеников, которые вместе его готовили. Затем отчитываться за всю бригаду шел один из ее участников, его оценка выставлялась каждому из бригады. Надо ли уточнять, что чаще всех бригада отправляла отвечать ученика Гонина.

В Омутнинске его учительницей была Мария Ивановна Залит, очень сильный математик, хороший методист, что в значительной степени повлияло на выбор Евгением будущей профессии. Позднее она вспоминала, что ученика талантливее Жени Гонина у нее не было никогда.


Мария Федоровна – мать Евгения Григорьевича

После окончания школы в Омутнинске в 1927 г. Евгений Гонин поехал поступать на физико-математическое отделение педагогического факультета Пермского государственного университета. При поступлении не обошлось без казусов. На письменном экзамене по математике абитуриент заметил ошибку в предлагаемом примере: если бы на месте знака «плюс» стоял «минус», то выражение легко свернулось бы по одной из формул сокращенного умножения и упростилось, а с предложенным знаком ответ получался чересчур громоздким. Евгений два раза подходил к экзаменатору, предлагая проверить условие. Первый раз от него отмахнулись: «Решайте, как написано!». Во второй раз решили все-таки проверить, и, благодаря настойчивости юноши, неточность была устранена, пример приобрел короткое решение. А на экзамене по физике экзаменатор пожал руку абитуриенту за великолепный ответ.

Годы, проведенные Евгением в университете, были заполнены не только учебой. Несмотря на плохое зрение, он был метким стрелком. На факультетских соревнованиях по стрельбе из мелкокалиберной винтовки с дистанции 35 шагов лежа без упора в закрытом тире он выбил 45 очков из 50 возможных и получил приз за второе место – кожаный портфель и почетную грамоту. На втором курсе в стрелковых соревнованиях Евгений выбил 46 очков из 50 возможных и был награжден чернильным прибором.

В 1929 г. Евгений получил из Чердыни от отца известие о безвременной кончине матери. Это был тяжелый удар для всех. Григорий Иванович впал в глубокую депрессию, он переложил все заботы о малолетних детях на плечи няни (Николаю было четыре года, а Лидии – восемь) и не смог материально помогать сыну-студенту.

Евгению некоторое время пришлось совмещать учебу с работой в должности научно-технического сотрудника кабинета математики Пермского университета. В 1930 г. после окончания предпоследнего курса университета он отправился в астрономическую экспедицию по Приобью (район сегодняшнего Сургута). Когда вернулся к началу занятий, его встретила неожиданность: педагогический факультет отделен от университета, преобразован в Пермский педагогический институт, студенты предпоследнего курса считаются закончившими пединститут, и ему следует получить диплом. В результате Евгений остался без стипендии, общежития, без места работы. К счастью, вопрос удалось быстро решить: талантливого выпускника взяли на кафедру математики вновь созданного пединститута в качестве ассистента. С 1 октября 1930 г. и до последнего дня жизни (6 октября 1983 г.) деятельность Евгения Григорьевича Гонина была связана с Пермским государственным педагогическим институтом.

В феврале 1931 г. он поступил в аспирантуру при Пермском пединституте, продолжая при этом работу и в институте, и в университете. Кафедрой алгебры и геометрии заведовал тогда профессор Александр Васильевич Ланков. Под его руководством и работал Е.Г. Гонин в 1930–1940-х гг. Во время обучения в аспирантуре Евгений Григорьевич снова отправился в длительную командировку в низовья Оби, где работал начальником астрономической группы северной устроительной партии Уралгосземтреста. После его возвращения аспирантура при кафедре была ликвидирована, и с осени 1933 г. Евгений Григорьевич продолжал работать в институте в качестве ассистента, а с 1935 г. – старшего преподавателя.

Об уровне его жизни тогда можно судить по такому факту. Однажды его навестил отец. Григорий Иванович с удивлением обнаружил, что у сына-преподавателя нет даже пиджака, он ходит на занятия в какой-то футболке. Отец снял свой пиджак и отдал сыну.

В личном деле Е.Г. Гонина, хранящемся в архиве Пермского государственного педагогического университета, есть характеристика от 20 апреля 1935 г. за подписью директора пединститута А.В. Козырева: «Е.Г. Гонин – совсем молодой научный работник, талантливый и с большими наклонностями к математике. Особенно много и с интересом работает в области геометрии. Ассистентскую работу ведет успешно. Может работать и на самостоятельных курсах. Проводит курс высшей геометрии с полным знанием дела. Интересуется специальной литературой. Вообще специальностью увлекается, но пока еще не может сосредоточиться на определенном участке работы».

А вот что писал позже в отзыве о нем заведующий кафедрой профессор Александр Васильевич Ланков: «Е.Г. Гонин имеет хорошую математическую подготовку и проявляет к математике живой интерес. Широкая и разносторонняя эрудиция в области математики и в смежных с ней дисциплинах (астрономия, теоретическая механика) позволили ему весьма успешно закончить кандидатские экзамены в 1937 г. В 1938 г. Гонин работает над кандидатской диссертацией на тему "Обобщение непрерывной геометрии Неймана". Диссертация еще не закончена, но имеются основания предполагать, что он успешно справится с этой трудной темой, если в этой работе его никто не опередит, и с 15 апреля он получит длительную командировку. Имеет печатные труды. Читает трудные курсы: основания геометрии, основания алгебры и др. Одновременно работал по теоретической механике, в текущем году ведет астрономию. С работой успешно справляется.

Излагая читаемые курсы широко и разносторонне, Е.Г. Гонин не выработал еще методики изложения: отсутствует четкая красочная литературная речь, не всегда соблюдается методически правильная последовательность материала, в этом отношении ему необходимо много и упорно работать над собой.

За последние 1–2 года т. Гонин проявляет значительный интерес к общественной работе: читает доклады на учительских конференциях и в секциях математиков г. Перми, активно работает по Осоавиахиму».

Эти выдержки из архивных документов свидетельствуют о том, как серьезно относился Евгений Григорьевич к избранному делу, как высока была его требовательность к себе, а также показывают его умение целенаправленно работать, добиваясь существенных результатов. Методика изложения материала со временем значительно улучшилась, последовательность изложения стала безукоризненной. Вот только на всю жизнь сохранил Евгений Григорьевич свой вятский говорок. Он сам рассказывал, что в юности многие слова знал только из книг, поэтому не всегда правильно ставил в них ударения, но упорно учился правильному произношению.

Преподаватель Пермского педагогического института Евгений Григорьевич Гонин. 1930-е гг.

С 1935 г. Е.Г. Гонин стал одним из организаторов и активным участником традиционных научно-методических конференций сотрудников математических кафедр педвузов Урала, инициатором проведения которых был его учитель А.В. Ланков.

Первая публикация молодого ученого «Знак и направление в элементарной геометрии» появилась в 1936 г.: работа была напечатана в сборнике тезисов научно-практической конференции математических кафедр Кировского, Пермского, Свердловского и Тюменского пединститутов, которая проходила в Перми. В 1938 г. были опубликованы его первые математические исследования в «Ученых записках» Пермского педагогического института: «Интерпретация Пуанкаре как аналог стереографической проекции» и «Доказательство независимости аксиом соединения проективной геометрии».

Все эти годы Евгений Григорьевич поддерживал тесную связь с семьей, которая жила на севере Пермской области, переписывался с отцом, братьями и сестрами. На севере жить было очень тяжело: и взрослых и детей посылали на лесозаготовки. Сестры и брат Борис, успешно окончив школу, приехали в Пермь, где их опекал Евгений. Нина окончила авиационный техникум и устроилась на работу на моторостроительный завод. Борис окончил физико-математическое отделение Пермского пединститута и всю дальнейшую жизнь работал в школах и техникумах преподавателем физики и математики. Вера и Лидия, окончив географический факультет того же вуза, также всю жизнь проработали в школах. Вера Григорьевна успела поработать учителем на севере области еще до поступления в вуз. Какое-то время сестры жили вместе со старшим братом Евгением, который фактически заменял им отца, особенно после смерти Григория Ивановича в 1939 г.

Зоя Ивановна Теленкова. 1930-е гг.

Во второй половине 1930-х гг. молодой преподаватель познакомился со своей будущей женой Зоей Теленковой, студенткой пединститута. Зоя Ивановна родилась 18 декабря 1919 г. в подмосковном городе Дрезна Орехово-Зуевского района. Ее отец, Иван Прокопьевич, был ткачом. Мать, Прасковья Климовна (в девичестве Федина), воспитывалась у тетки в московском монастыре, в 16 лет ее выдали замуж. Она родила 18 детей, многие из них умерли в детстве. Два сына, Григорий и Михаил, погибли на фронтах Гражданской войны, поэтому в 1930-е гг. в живых оставались четыре дочери и сын Алексей, кадровый военный, он погиб на фронте в 1941 г.

Зоя была предпоследним ребенком в семье Теленковых. После смерти Ивана Прокопьевича старшая дочь, Евдокия Ивановна, забрала ее, школьницу, в свою семью в Пермь. Муж Евдокии Ивановны, Иван Кириллович Никонов, работал инженером на заводе им. Ф.Э. Дзержинского. Зоя училась в школе, затем на рабфаке при Пермском университете (ее приняли туда как дочь рабочего и сироту): там платили стипендию. После окончания рабфака поступила на литфак Пермского пединститута.

В 1937 г. арестовали Ивана Кирилловича Никонова как представителя руководства завода, а также Евдокию Ивановну как члена семьи. К счастью, дети были уже достаточно взрослыми, их приютили родственники Ивана Кирилловича. Студентку Зою не посчитали членом семьи, и она ушла жить в общежитие. Через год Евдокию Ивановну выпустили из следственной тюрьмы, а еще через некоторое время отпустили и Ивана Кирилловича. Ему так и не предъявили обвинения. Считается, что причиной освобождения послужили мужество и стойкость на допросах главного обвиняемого из руководства завода, который так и не признал никакой вины, ничего не подписал. Иван Кириллович Никонов, уже немолодой и больной человек, отец двух взрослых детей, был горд, когда в годы войны его призвали на фронт: ему доверили защиту родины, значит, считают невиновным ни в чем. Он прошел всю войну, закончил ее в Германии и вернулся победителем.

В 1937 г. Е.Г. Гонин сдал кандидатский минимум при Московском пединституте им. К. Либкнехта, но написать диссертацию до войны не успел. Кроме всего прочего, тема требовала использования иностранной литературы, отсутствующей в Перми (тогда Молотове), и исследования были отложены. В своей автобиографии Е.Г. Гонин писал, что в годы войны занимался «вопросами методическими и прикладными. С последними имел дело, работая с 1943 г. по 1945 г. в одном из НИИ Наркомата вооружений».

В армию его не взяли: он был очень близорук. Е.Г. Гонин очень много работал и в пединституте, и в НИИ-13, который был эвакуирован в Молотов из блокадного Ленинграда. Занимался он там вопросами геометрически-вероятностного характера, связанными с проблемами производства деталей. Часто применяемое в исследованиях слово «калибр» дает представление о том, какие это были детали. В письме директору пединститута из НИИ-13, датированном 23 августа 1943 г., содержится просьба направить Е.Г. Гонина для работы по совместительству, аргументированная следующим образом: «Для выполнения некоторых оборонных тем и заданий нашему институту необходимо разрешить ряд математических вопросов и задач. Ввиду отсутствия специалистов–математиков в нашем институте прошу оказать содействие с Вашей стороны, направив для работы к нам по совместительству тов. Гонина Е.Г., который, как нам известно, обладает эрудицией именно в тех областях математических дисциплин, которые относятся к указанным вопросам».

Работая в НИИ-13, Евгений Григорьевич заслужил уважение коллег как специалист. В 1946 г. его приглашали на работу в Ленинград, но он отказался. Через 24 года после окончания войны его коллега по НИИ-13 доктор физико-математических наук А.К. Кутай писал, что рад видеть Евгения Григорьевича у себя в Ленинграде в любое время, но, по его мнению, «пора уже бросить все дела (аспирантов, консультации и пр.) и, пока есть силы и возможность, за год привести наработанное … в систему, кое-чем дополнить и… в бой!».

Впоследствии эти наработки были использованы в кандидатской диссертации младшего брата Николая Григорьевича. А в годы войны оба брата Евгения Григорьевича, Борис и Николай, сражались на фронте. Николай попал туда ближе к концу войны, сразу после окончания школы, за короткий срок получив специальность артиллериста.

Во время Великой Отечественной войны Евгению Григорьевичу пришлось заниматься не только преподаванием, методикой и научно-прикладными вопросами, но и такой практикой, без которой людям было бы не выжить в тех сложнейших условиях. В его автобиографии указано, что он «в комсомоле и партии не состоял», но «был профоргом, на протяжении двух лет являлся членом материально-бытового сектора месткома пединститута, входил в ревкомиссию месткома. За время войны принимал участие в ряде хозяйственных работ, в частности летом 1942 г. и летом 1943 г. замещал директора подсобного хозяйства пединститута». Последняя деятельность состояла в снабжении преподавателей и сотрудников продуктами питания и в распределении земельных участков. Такая работа требует большой порядочности, Евгений Григорьевич ею обладал в полной мере. Известно, что тогда в пединституте у него было прозвище «снабженец».

Медаль «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941–1945 гг.», которой награжден Е.Г. Гонин, заслужена самоотверженной работой в тылу.

После окончания войны вернулись с фронта братья Борис и Николай, прошедшие пол-Европы, живые и здоровые. Николай закончил войну в Праге, а Борис – в Вене. В подарок брату они привезли кожаное пальто, так называемый кожан – роскошь по тому времени. Оба брата поселились вместе с Евгением. Николай поступил учиться на физико-математический факультет пединститута. Боевой офицер, красавец, умница, он пользовался большим успехом у студенток.

Евгений Григорьевич после войны возобновил знакомство с Зоей Теленковой, которая окончила пединститут в 1940 г. и успе-

Семья Гониных. Слева направо стоят: брат Николай, Евгений с дочерью Леной, его жена Зоя, брат Борис, шурин Константин Кондратьев; сидят: сестры Лидия, Вера, Нина. 1948 г.

ла поработать в школах области и города. Во время войны ей настойчиво предлагали работу в обкоме комсомола. Она пыталась отказаться, очень уж ей нравилось преподавать русский язык и литературу, но ее уговорили. Работала Зоя Ивановна сначала инструктором, а потом и секретарем обкома комсомола. Евгений Григорьевич стал настойчиво ухаживать за приглянувшейся девушкой. 1 февраля 1947 г. состоялась их скромная свадьба.

Жили новобрачные в двух маленьких комнатках коммунальной квартиры без удобств, принадлежащей пединституту. Приходилось топить печь дровами, носить воду с колонки, расположенной за два квартала, готовить в общей кухне. Таким был тогда быт подавляющей части пермяков. Николай Гонин жил в той же квартире несколько лет. Всю студенческую стипендию оставляли ему на личные расходы. В ноябре 1947 г. у Евгения Григорьевича и Зои Ивановны Гониных родилась старшая дочь Елена. После рождения дочери Зоя Ивановна ушла с работы. Евгений Григорьевич считал, что, пока жена воспитывает детей, муж должен обеспечивать семью. Зоя Ивановна вернулась к преподавательской работе только тогда, когда пошла в школу их младшая дочь.

Обеспечивать семью было сложно, Евгений Григорьевич много подрабатывал, пока не запретили совместительство, но особого достатка не было.

В конце 1940-х гг. Евгений Григорьевич серьезно принялся за оформление диссертации. Каждый день после работы он печатал ее на портативной пишущей машинке. Оформлением работ Е.Г. Гонин никогда не любил заниматься, предпочитая устные выступления, но если делал это, то с крайней тщательностью, оттачивая логику текста и стиль каждого предложения. Недаром его работы любили готовить к печати в редакционном отделе пединститута: в них практически не было ошибок. Профессор Киевского университета, профессор В.С. Чарин, знакомый с работами Е.Г. Гонина, сравнивал его творчество с творчеством Данилы-мастера из сказов Бажова: такая же безукоризненная отделка деталей и высокая требовательность к себе. Тому, что Евгений Григорьевич вплотную занялся работой над диссертацией, способствовал его друг, приехавший после войны из Свердловска, доктор физико-математических наук, профессор, Сергей Николаевич Черников, учитель В.С. Чарина. Когда-то два молодых ученых, Е.Г. Гонин и С.Н. Черников, начинали вместе, встречались на конференциях. В 1950-е гг. С.Н. Черников был уже доктором наук, а Е.Г. Гонин даже не имел ученой степени. Сергей Николаевич вдохновлял друга, помогал советами. Семья Евгения Григорьевича навсегда благодарна Сергею Николаевичу Черникову, ставшему впоследствии членом-корреспондентом АН Украины.

В 1952 г. Е.Г. Гонин защитил кандидатскую диссертацию по новой теме «Обобщение теории вещественных чисел А.Н. Колмогорова» в Пермском (тогда Молотовском) государственном университете. В 1953 г. он был утвержден в должности и. о. доцента, а спустя год стал доцентом кафедры алгебры и геометрии. После этого он занимался преимущественно вопросами преподавания математики в школе и педвузе.

16 сентября 1954 г. Евгений Григорьевич Гонин был избран заведующим кафедрой алгебры и геометрии, с этого же года при кафедре была открыта аспирантура. Список его аспирантов довольно внушителен, здесь прошли обучение 20 человек. Среди них выпускницы ПГУ Н.Е. Домошницкая и О.М. Поносова, выпускники украинских вузов В.А. Ярмоленко и А.Е. Малых. Все остальные аспиранты были выпускниками Пермского

пединститута: Н.К. Пухарев, В.Ф. Козова, В.И. Рябухин, Ю.Н. Зверева, И.П. Непорожнев, Л.И. Истомина, Л.Б. Бурди, Л.И. Пантелеева, Т.М. Соромотина, В.И. Васильков, Л.Я. Панкратова, А.Д. Лумпов, А.Н. Пехлецкая, В.Г. Алябьева, Н.А. Куроедова и Б.Ф. Харитонов. Сложилась целая школа профессора Гонина по комбинаторному анализу, в частности по теории конечных проективных плоскостей. В течение десятилетий она была одной из немногих в Советском Союзе.

Исследования, начатые в педагогическом институте Перми, ученики Е.Г. Гонина продолжали в Полтаве, Виннице, Курске, Челябинске, Череповце, Глазове и других городах. Евгения Григорьевича приглашали работать в Минск, Воронеж, Киров, Свердловск, но он остался верен своему институту. Его работы были известны за рубежом. Он получал приглашения принять участие в работе конференций и семинаров в Италию, Швецию, Румынию, США. Поехать никуда не удалось по известным причинам: «в связи с поздним ходатайством о командировке» и «потому, что такие поездки планом не предусмотрены».

Евгений Григорьевич продолжал работу по организации научно-методических конференций сотрудников математических кафедр педвузов Урала, начатую еще до войны; участвовал во всесоюзных семинарах. Начиная с 1957 г. он член научно-методического совета Министерства просвещения РСФСР, один из разработчиков проекта учебного плана для физико-математических факультетов пединститутов.

Улучшалось и благосостояние семьи. В 1955 г. у Гониных родилась вторая дочь Ирина. Материальных благ Евгений Григорьевич никогда не умел добиваться, поэтому обещанную новую квартиру получил только в 1960 г. Все время находились люди, которым квартира была нужнее: приезжавшие в Пермь новые преподаватели, не все из которых впоследствии задерживались на Урале. Новая квартира в районе Комсомольской площади – трехкомнатная «хрущевка» – казалась семье сказочными хоромами: вся старая квартирка поместилась бы в одной комнате новой, горячая и холодная вода, газ, теплый туалет, совмещенный с ванной. Всего этого семья ранее была лишена. На самом деле квартира на первом этаже оказалась не слишком хорошей, сырой. Семья часто вспоминала печку на старой квартире, которую можно было растопить в любое время.

Немного раньше, в 1958 г., Е.Г. Гонин был приглашен работать в качестве совместителя на кафедру алгебры и геометрии Пермского государственного университета. Приглашение не было случайным. Гонин разработал оригинальные курсы по геометрии, топологии, алгебре, теории вероятностей, механике, комбинаторному анализу. В désинституте он прочел все курсы, перечисленные в учебном плане. Его лекции отличались логической строгостью, ясной композицией, убедительностью, глубиной мысли, большой математической культурой.

В 1959 г. в Москве было издано учебное пособие Е.Г. Гонина для пединститутов «Теоретическая арифметика». Оно было отнесено к числу лучших пособий для физико-математических факультетов педагогических институтов. В нем нашли завершение многочисленные исследования ученого по теории числовых систем. Всего его перу принадлежит более 20 работ – книг и научных статей.

Почти 27 лет Е.Г. Гонин был референтом реферативного журнала «Математика» Всесоюзного института научной и технической информации (ВИНИТИ). Он переводил тексты с разных языков (немецкого, английского, французского, испанского, итальянского, болгарского, чешского, словацкого, польского, украинского, венгерского, румынского, китайского), что позволяло ему реферировать статьи. Самым трудным языком, сложнее даже китайского, он считал венгерский.

Евгений Григорьевич не мыслил работы в институте вне связи со школой. Пропагандист передовых педагогических идей, он читал лекции для учителей школ. В течение ряда лет был активным членом оргкомитета областной математической олимпиады школьников, одним из организаторов юношеской математической школы, городского клуба «Математический огонек» при пединституте. С 1950 г. он возглавлял районную организацию общества «Знание».

Евгений Григорьевич обладал поистине энциклопедическими знаниями, богатой научной эрудицией, умел не только воспринимать новое, но и использовать его в своей научной и педагогической деятельности. Он первый из математиков Пермской области овладел теорией программирования и в конце 1950-х гг. подготовил спецкурс по ЭВМ для студентов. Вот как вспоминал об этом в газете «Вечерняя Пермь» за 19 июля 1994 г. доктор педагогических наук, профессор, заведующий кафедрой естественно-математических дисциплин Пермского института повышения квалификации работников образования Ю.Ф. Фоминых: «В 1959 году в Пермском университете решили, что он не должен отставать от других вузов, в которых была специальность "вычислительная математика". Первый шаг – написали бумагу в министерство. Получили согласие. Начали готовить кадры: двух математиков, будущих программистов для электронных машин, и двух физиков, чтобы эти машины обслуживать. В те годы еще было неизвестно, что такое ЭВМ. Не было никаких курсов, и неудивительно, что лекция Евгения Григорьевича Гонина из пединститута имела сенсационный успех, на нее сбежались студенты всех факультетов университета».

Евгений Григорьевич всю свою жизнь посвятил науке, преподавательской деятельности, служению людям. Сам он считал, что не вел большой общественной работы, но факты говорят о другом. В 1959 г. он был избран депутатом Пермского городского Совета депутатов трудящихся VII созыва, а в 1967-м – Свердловского районного Совета депутатов трудящихся. Эта деятельность требовала много внимания, времени и сил.

С марта 1962 г. Е.Г. Гонин исполнял на кафедре обязанности профессора. Ученые Перми и Свердловска начали ходатайствовать о присвоении ему звания профессора. Заведующий отделом алгебры Института математики АН УССР профессор С.Н. Черников написал великолепный отзыв о деятельности Евгения Григорьевича:

«Е.Г. Гонин принадлежит к старшему поколению советских математиков. Круг его интересов весьма широк: алгебра, проективная геометрия, теоретическая арифметика, комбинаторный анализ. В каждую из этих областей Е.Г. Гонин внес замечательный вклад. Результаты глубоких исследований Е.Г. Гонина в теоретической арифметике, в теории вещественных чисел, в теории измерения величин получили широкую известность. Написанная им на основе этих исследований книга "Теоретическая арифметика", утвержденная Министерством просвещения РСФСР в качестве учебного пособия для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов, является по существу монографией по теоретической арифметике, итогом этих исследований. Написана она с глубоким проникновением в существо излагаемых вопросов, на высоком современном научном уровне, четко, лаконично.

Алгебраистам известны работы Е.Г. Гонина по обобщенному измерению элементов упорядоченных полугрупп, геометрам – работы, связанные с аксиоматикой проективной геометрии. Последнее десятилетие Евгений Григорьевич плодотворно работает в области комбинаторного анализа и его приложений к конечным геометриям. Среди результатов, полученных Евгением Григорьевичем в этой относительно новой ветви математики, особое внимание заслуживает его метод поэтапных отождествлений решений комбинаторных задач с точностью до изоморфизма. Этот метод в настоящее время широко используется его учениками в исследованиях по конечным плоскостям и дает хорошие результаты. По комбинаторному анализу Е.Г. Гониным написано несколько работ, сделан ряд докладов на научных конференциях. Е.Г. Гонин успешно руководит научным семинаром по комбинаторному анализу».

Очень внимателен Евгений Григорьевич был к молодым ученым. Ю.Ф. Фоминых вспоминал, что, когда еще был аспирантом профессора Л.И. Волковысского в Пермском университете, то подготовил к изданию книжку для подростков «Под интегралом». Рукопись ее попала на рецензию к Е.Г. Гонину, с которым он тогда не был лично знаком. Гонин не только внимательно прочел текст, но и пригласил аспиранта к себе домой, высказал замечания, касавшиеся тонкостей применения аксиоматических методов геометрии Лобачевского. Тем самым Евгений Григорьевич подал начинающему ученому пример серьезности, внимательного отношения к печатному слову, четкости изложения математического материала.

Евгения Григорьевича отличали скромность, сдержанность, уважительное отношение и к людям вообще, и к коллегам, жене, детям, родственникам. Если он выступал на ученом совете факультета или института с какими-то замечаниями, предложениями, то делал это очень аргументированно и немногословно. Терпеть не мог обмана, безответственности, лицемерия и высокомерия, барства некоторых коллег, «шпаргалок» на экзаменах.

Евгений Григорьевич выписывал по каталогам академические издания не только по математике, но и по языкознанию, истории древнего мира и другим наукам. Его интересовали и среднеазиатская терракота эпохи бронзы, и финикийская культура в Испании, и древнейшие государства на территории СССР. Нередко он удивлял выбором книг. Так, получив уже после кончины ученого заказанное им издание «Основы земледелия в Средней Азии», родственники не сразу поняли его интерес к этому вопросу, пока не сообразили, что, во-первых, математика начиналась с практических дел – измерения земли, подсчета собранного урожая, – а во-вторых, Евгения Григорьевича интересовали письменности, их расшифровка.

Он серьезно увлекался изучением иностранных языков, необходимых не только для перевода математических текстов и реферирования. В его библиотеке было много словарей и книг на иностранных языках, в основном по историческим вопросам. Он изучал и цыганский язык, причем мог разговаривать с цыганами, признававшими в нем своего. У него было много пластинок с записями русских и цыганских романсов, некоторые из них он иногда сам любил петь. Выписывалось много газет и научно-популярных журналов. Толстые литературные журналы Евгений Григорьевич приносил из библиотеки.

Очень редко пользовался он правами члена профсоюза: раза два получал путевки на лечение в Железноводск – вот, пожалуй, и все. Семья отдыхала чаще в Курье, недалеко от дома, так удобнее было работать. Зимой Е.Г. Гонин ходил на лыжные прогулки с коллегами и детьми.

В 1975 г. Евгений Григорьевич перенес тяжелый инфаркт, по мнению врачей, уже второй, т. е. первый он перенес на ногах. Он больше месяца пролежал в больнице, долго не мог поправиться. После этого Евгений Григорьевич уменьшил свою административную деятельность, отказавшись от заведования кафедрой, которой руководил свыше двух десятилетий. Но со временем он вернулся к полной учебной нагрузке. В связи с 70-летием со дня рождения институт наградил его бесплатной путевкой в санаторий Подмосковья. Евгений Григорьевич очень тщательно выполнял все предписания врачей. Это, возможно, продлило его работоспособность.

Он с удовольствием играл в шахматы с коллегами и друзьями. В последние годы жизни увлекся решением шашечных задач по переписке с гроссмейстером В.Б. Городецким, который вел тогда отдел шашек в «Учительской газете», и получил первый

За шахматной доской

спортивный разряд по шашкам, но известие об этом пришло, когда Евгения Григорьевича уже не стало.

В предпраздничный день 6 октября 1983 г. (7 октября в том году был День Конституции, выходной) он ушел утром на работу, был в хорошем настроении, шутил. Вернувшись с работы, пообедал, взял юмористический журнал и прилег на диван. Именно тогда случился третий инфаркт. Приехавшая «скорая помощь» не смогла его спасти. Многие коллеги, которые общались с ним накануне и в этот день с утра, никак не могли поверить в его смерть.

В некрологе, опубликованном в журнале «Математика в школе», №2 за 1984 г., написано: «Евгений Григорьевич прожил прекрасную жизнь, наполненную неустанным трудом, успел многое сделать, повлиял на судьбы многих людей. Светлую память о Евгении Григорьевиче, интереснейшем интеллигентном человеке, замечательном ученом, блистательном лекторе, навсегда сохранят все, кто знал его и учился у него».

За заслуги в развитии науки и подготовке научных и педагогических кадров профессор Е.Г. Гонин был награжден орденом Трудового Красного Знамени, медалями, нагрудными знаками «Отличник народного просвещения РСФСР» и «Отличник просвещения СССР», множеством грамот, в том числе Почетной грамотой Президиума Верховного Совета РСФСР.

Часть вторая

НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ЕВГЕНИЯ ГРИГОРЬЕВИЧА ГОНИНА

НАЧАЛО НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Алла Ефимовна Малых,
доктор физико-математических наук, заведующая кафедрой геометрии ПГПУ

Свою научную и педагогическую деятельность Евгений Григорьевич Гонин начал в 1930 г. ассистентом кафедры математики. В 1938 г. кафедра математики была разделена на две: алгебры и геометрии (зав. кафедрой профессор А.В. Ланков) и математического анализа (зав. кафедрой доцент Б.В. Бородин).

Членами кафедры были профессор А.В. Ланков, старшие преподаватели В.У. Грибанов, М.К. Рахилевич, Е.Г. Гонин и ассистент Е.К. Минацевич. В свое время все сотрудники, кроме А.В. Ланкова, окончили педагогический факультет Пермского университета. В «Отзыве о научном работнике Е.Г. Гонине, исполняющем обязанности доцента по кафедре высшей алгебры и геометрии» зав. кафедрой А.В. Ланков писал:

«...Широкая и разносторонняя эрудиция в области математики и в смежных с ней дисциплинах (астрономия, теоретическая механика) позволили ему весьма успешно закончить кандидатские экзамены в 1937 г. В 1938 г. Гонин работает над кандидатской диссертацией. <...> Имеются основания предполагать, что он успешно справится с этой трудной темой и с 15 апреля получит длительную командировку. <...> Имеет печатные труды».

В 1938 г. были опубликованы первые научные результаты Е.Г. Гонина: «Интерпретация Пуанкаре как аналог стереографической проекции» [6] и «Доказательство независимости аксиом соединения проективной геометрии» [7]. В последующие годы это направление исследований в области теории проективной геометрии занимало ученого.

Начавшаяся Великая Отечественная война вынудила оставить работу над диссертацией. В этот период он работал в НИИ-13 Наркомата вооружений.

После войны физико-математический факультет стал быстро развиваться. Постепенно повышалась квалификация членов кафедры алгебры и геометрии. В 1952 г. ученая степень кандидата физико-математических наук была присуждена Е.Г. Гонину, написавшему диссертацию «Обобщение теории вещественных чисел А.Н. Колмогорова» [8]. А предшествовали ей долгие и трудные исследования. Они начались в 1946 г., когда в журнале «Успехи математических наук» в разделе «Математическая проблематика», возникшем в этом же году, была поставлена проблема, касающаяся обоснования теории вещественных чисел. Ее предложил академик Андрей Николаевич Колмогоров [18]. В заметке содержались указания по построению системы вещественных чисел. Ученый предложил определить положительные вещественные числа неотрицательными целочисленными функциями натурального аргумента $\varphi(n)$, обладающего свойствами:

1. для всех натуральных k $\varphi(n)=\left[\dfrac{\varphi(kn)}{k}\right]$, где запись справа означает наибольшее целое число m, для которого $mk \le \varphi(kn)$;

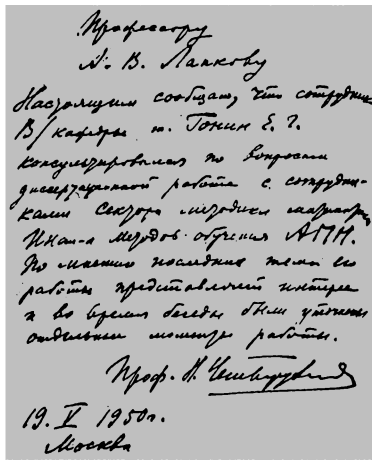
2. для любого натурального n существует такое натуральное k, что $\varphi(kn) > k\varphi(n)$.

Суть проблемы заключалась в доказательстве того, что множество D с определенными А.Н. Колмогоровым отношениями порядка и введенными операциями сложения и умножения действительно обладает всеми свойствами обычных положительных вещественных чисел, т. е. изоморфно системе положительных вещественных чисел, построенных любым другим общепринятым способом.

Через год построение на основе указаний А.Н. Колмогорова осуществил Н.И. Кавун [17], а еще через три года другой подход построения предложил в своей кандидатской диссертации Н.Г. Алимов [1]. Статья последнего была представлена для публикации академиком А.Н. Колмогоровым (заметим, что материалы авторов для публикации в журналах УМН и Известия АН СССР печатали только по представлению академиков).

Е.Г. Гонин обратил внимание на то, что теория, предложенная А.Н. Колмогоровым, является аналогом теории бесконечных десятичных дробей, так как с каждой такой дробью связана целочисленная функция, определенная на множестве степеней числа 10 с неотрицательными целыми показателями, удовлетворяющая условиям А.Н. Колмогорова, взятым в несколько более общей редакции. Именно, нужно в качестве значения функции для аргумента 10^n брать числитель приближенного значения по недостатку с n десятичными знаками. В связи с этим Е.Г. Гониным была построена и сообщена в январе 1949 г. на конференции математических кафедр педвузов Уральской зоны более общая теория, содержащая теории А.Н. Колмогорова и бесконечных десятичных дробей как частные случаи. В послевоенные годы к диссертациям предъявлялись высокие требования. В стране было не так уж много кандидатов наук, а защита докторской являлась едва ли не сенсацией.

Евгений Григорьевич обратился к заведующему сектором методики математики Института методов обучения Академии педагогических наук РСФСР, академику, доктору физико-математических наук, профессору Николаю Федоровичу Четверухину по вопросу диссертабельности его научного исследования. Ответ пришел 19 мая 1950 г. на имя Александра Васильевича Ланкова, бывшего тогда заведующим кафедрой алгебры и геометрии Пермского педагогического института, где работал Евгений Григорьевич. В ответе отмечалось, что, по мнению сотрудников сектора, материалы диссертационного исследования Е.Г. Гонина представляют интерес.


Профессору
А. В. Ланкову
Настоящим сообщаю, что сотрудник
В/кафедры т. Гонин Е. Г.
консультировался по вопросам
диссертационной работы с сотрудни-
ками Сектора методики математики
Ин-та методов обучения АПН.
По мнению последних тема его
работы представляет интерес
и во время беседы были уточнены
отдельные моменты работы.
Проф. Н. Четверухин
19. V 1950 г.
Москва

Из архива Пермского педагогического университета

В диссертации Евгения Григорьевича вещественное число определялось целочисленной функцией, заданной на некотором множестве натуральных чисел, названном базисом. На выбор базиса накладывались некоторые ограничения, сводящиеся к его бесконечности и существованию для любых двух чисел базиса кратного им числа, также принадлежащего базису. Как показало дальнейшее исследование, второе условие является лишним и может быть устранено. Условие бесконечности же необходимо, так как множество целочисленных функций, определенных на конечном множестве, счетно и не может быть изоморфным несчетному множеству вещественных чисел.

Ниже дается план построения наиболее общего варианта теории; изложение доказательств опущено. Заметим лишь, что приемы доказательства, которые использовал Н.И. Кавун, основанные на рассмотрении произведений аргументов, в случае произвольного базиса непригодны, и Е.Г. Гонин заменил их иными. Условия, налагаемые А.Н. Колмогоровым на функции, которые определяют вещественные числа, в случае произвольного базиса непригодны по тем же причинам. Первое из них заменено условием более сильным, хотя иногда, т. е. для некоторых базисов, эквивалентным.

Переход к произвольному базису сильно меняет все построение теории, так как определения, предложенные А.Н. Колмогоровым, и технические приемы, удобные для построения его теории, предполагают, что произведение любых двух чисел базиса также принадлежит базису, а это в общем случае не имеет места. Второе условие, необходимое в системе А.Н. Колмогорова для того, чтобы каждое вещественное число определялось единственной функцией, Е.Г. Гонин отбросил. Вместо него он ввел отношение эквивалентности функций. Такая замена сделала построение более гибким, в частности появилась возможность ввести число 0 так же, как и положительные вещественные числа, т. е. построить сразу систему неотрицательных вещественных чисел. Порядковые отношения Е.Г. Гонин ввел отличными от аналогичных в системе А.Н. Колмогорова, не взял и предложенные им определения суммы и произведения. Определения же этих понятий, данные Н.И. Кавуном, оказались более общими и поэтому были сохранены.

Основой теории является система неотрицательных целых чисел, которая предполагается уже построенной. Для упрощения определений и доказательств в § 1 работы, носящем вспомогательный характер, автор ввел в терминах целых чисел функцию «антье» $\left[\frac{m}{n}\right]$. Ее свойства хорошо известны и легко доказываются.

В § 2 вводятся понятия *базиса* и *определяющей функции* как однозначной функции вида $m = \alpha(n)$, определенной для всех чисел n базиса, имеющей неотрицательные целые значения и удовлетворяющие условию: для любых чисел n и p базиса имеет место $\left[\frac{n\alpha(p)}{p}\right] \le \alpha(n)$.

Затем на множестве определяющих функций вводятся отношения эквивалентности и порядка. Именно, если для некоторого числа базиса имеет место $\alpha(n) + 1 < \beta(n)$, то полагается, что функция $\alpha(n)$ *ниже* функции $\beta(n)$. Отношение *выше* определяется как обратное отношению *ниже*. Две определяющие функции называются *эквивалентными*, если первая не выше второй, а вторая не выше первой.

После доказательства рефлексивности, симметричности и транзитивности отношения эквивалентности понятие *неотрицательного вещественного числа* вводится определением через абстракцию. Утверждением того, что из двух неэквивалентных функций та, которая ниже, определяет меньшее число, на множестве Ф всех неотрицательных вещественных чисел вводится отношение порядка. Устанавливается, что Ф является упорядоченным и имеет первый элемент – число o, определяемое функцией $o(n) = 0$.

В § 3 рассматривается сложение неотрицательных вещественных чисел: *суммой* чисел α и β, определяемых функциями $\alpha(n)$ и $\beta(n)$, называется неотрицательное вещественное число γ, определяемое функцией $\gamma(n) = \max\left[\frac{n(\alpha(p)+\beta(p))}{p}\right]$, где максимум берется по всем числам p базиса. Затем доказывается, что сложение всегда выполнимо, однозначно, коммутативно и ассоциативно. Число o, упомянутое выше, играет роль нулевого элемента, все остальные числа, как большие o – положительны. Этим, в частности, оправдывается название системы. Из неотрицательности всех чисел системы Ф следует, что для существования разности двух чисел необходимо, чтобы уменьшаемое было больше или равно вычитаемому. Достаточность этого условия обосновывается тем, что при $\alpha > \beta$ функция $\gamma(n) = \max\left[\frac{n(\alpha(p)-\beta(p)-1)}{p}\right]$, где максимум берется по всем числам p базиса, для которых $\alpha(p) > \beta(p)$, существует и определяет число γ, удовлетворяющее условию $\gamma + \beta = \alpha$. Монотонность операции сложения и однозначность вычитания получаются как простые следствия ранее доказанных законов.

В § 4 вводится умножение неотрицательных вещественных чисел, причем произведение $\gamma = \alpha \cdot \beta$ определяется функцией

$\gamma(n) = \max\left[\dfrac{n(\alpha(p)\cdot\beta(q))}{pq}\right]$, где максимум берется по всем числам p и q базиса. Выполнимость, однозначность, коммутативность и ассоциативность умножения доказываются аналогично тому, как это сделано для сложения. Затем доказывается, что i, определяемое функцией $i(n) = n$, играет роль единичного элемента и что для любого положительного числа α существует обратное число β, определяемое функцией $\beta(n) = \max\left[\dfrac{np}{\alpha(p)+1}\right]$, где максимум берется по всем числам p базиса. В заключении доказываются дистрибутивный закон умножения относительно сложения, необходимость и достаточность равенства одного из множителей нулю для обращения произведения в нуль и монотонность операции умножения.

В § 5 производится выделение из уже построенной системы неотрицательных вещественных чисел подсистемы, изоморфной исходной системе неотрицательных целых чисел, и тем самым устанавливается, что старая система может рассматриваться как часть новой. С этой целью неотрицательные вещественные числа, определяемые функциями вида $\nu_a(n) = an$, где a – любое неотрицательное целое число, называются *целыми*, и доказывается, что отображение, относящее целому числу a вещественное число ν_a, является однозначным, монотонным, аддитивным и мультипликативным. Попутно устанавливается, что значение функции $\alpha(n)$, определяющей число α, является для любого числа n базиса наибольшим неотрицательным целым числом, не превышающим $n\alpha$, или наибольшим неотрицательным целым числом, меньшим $n\alpha$. Отсюда непосредственно следует, что неотрицательное вещественное число α определяется одной или двумя функциями; последнее, как показало дальнейшее исследование, имеет место лишь для чисел, представляющих отношения натуральных чисел к числам базиса.

В § 6 устанавливается, что система неотрицательных вещественных чисел непрерывна. При этом вместо аксиомы Дедекинда доказывается равносильное ей утверждение о существовании точной верхней границы у любого ограниченного сверху множества. Требование бесконечности – единственное, предъявляемое к базису, – делает выбор последнего весьма произвольным. Однако системы, построенные на различных базисах, изоморфны между собой.

Изоморфизм систем Ф и Ф′, построенных на базисах B и B', доказывается в § 7 конструктивно, а именно, построением отображения Ф в Ф′, определяемого равенством $\alpha'(n) = \max\left[\frac{n\alpha(p)}{p}\right]$, где максимум берется по всем числам p базиса B.

В заключительном § 8 доказывается, что предложенная автором теория действительно является обобщением как теории А.Н. Колмогорова, так и теории бесконечных десятичных дробей. Первая из них получается, если в качестве базиса взять множество всех натуральных чисел. Если же базис представляет множество всех степеней числа 10 с неотрицательными целыми показателями, то получается система, переход от которой к системе, рассматриваемой в теории бесконечных десятичных дробей, сводится к небольшому изменению в обозначениях.

Построение более общей теории в значительной степени выявляет возможности, содержащиеся в замысле академика А.Н. Колмогорова. Теория, созданная Е.Г. Гониным, может служить основой для построения более совершенных теорий бесконечных десятичных, двоичных и вообще систематических дробей. В 1952 г. он защитил кандидатскую диссертацию «Обобщение теории вещественных чисел А.Н. Колмогорова». Спустя год Евгению Григорьевичу было присвоено ученое звание доцента.

В 1953 г. после недолгой, но тяжелой болезни скончался А.В. Ланков. Кафедру возглавил доцент В.У. Грибанов, принявший на себя заведование аспирантурой по методике математики. С 1954 г. заведующим кафедрой алгебры и геометрии стал Е.Г. Гонин. С этого же года при кафедре открылась аспирантура под его руководством.

Первой аспиранткой была *Нина Ефимовна Домошницкая*. Ее научная работа явилась продолжением диссертационных исследований Е.Г. Гонина, Н.Г. Алимова и других. В частности, последний ввел и исследовал один класс алгебраических структур – полугруппы без аномальных пар. Он установил их архимедовость и коммутативность, а также доказал необходимые и достаточные условия для отсутствия аномальных пар в процессе расширения упорядоченной полугруппы до архимедовой группы. В диссертационном исследовании Нины Ефимовны Домошницкой решался вопрос о введении системы обобщенного измерения (СОИ) и существовании такой системы в различных полугруппах, изучению которых предшествовали работы O. Hölder'a (1901), E.V. Huntington'a (1902), Н.Г. Алимова (1950), Я.В. Хиона (1957), Е.Г. Гонина (1959) и A.H. Clifford'a (1959). При этом все авторы рассматривали только строго монотонно упорядоченные полугруппы. Анализ этих работ показал, в частности, что основной задачей построения системы измерения (СИ) или системы обобщенного измерения (СОИ) является создание аналогичной системы для множества положительных элементов.

В диссертационной работе и последующих статьях, выполненных Н.Е. Домошницкой под руководством Е.Г. Гонина, решался вопрос о введении и существовании СОИ для упорядоченных полугрупп с положительными элементами в следующих случаях: монотонной упорядоченности, почти монотонной упорядоченности и в некоторых случаях частичной упорядоченности. Кроме того, ею показано, каким образом можно свести обобщенное измерение элементов полугруппы к обычному.

Полугруппой называется множество элементов G с заданной на нем всегда выполнимой, однозначной и ассоциативной бинарной операцией. Если ее назвать *сложением*, то можно использовать аддитивные терминологию и обозначения. Полугруппа G называется *упорядоченной*, если на множестве ее элементов задано связное рефлексивное (или иррефлексивное) отношение порядка. Соответствующие обозначения – «$\leq(<)\geq$». Если между отношением порядка и групповой операцией установлены некоторые связи, то в название полугруппы вводятся уточняющие термины. Полугруппа называется *монотонно упорядоченной (строго монотонно упорядоченной)*, если отображения $x' = x + a$ и $x' = a + x$ сохраняют рефлексивное (иррефлексивное) отношение порядка. Полугруппа называется *частично упорядоченной*, если на ней задано иррефлексивное несвязное отношение порядка. Элемент $a \in$ G называется положительным, если для любого $x \in$ G имеет место $x + a > x$ и $a + x > x$. Полугруппа называется *положительной*, если все ее элементы положительны.

Системой обобщенного измерения (СОИ) полугруппы G называется отображение $\Lambda : G \to R$ (образ элемента $a \in G$ обозначается λ_a), удовлетворяющее следующим аксиомам:

- отображение Λ сюръективное;
- $\lambda_{a+b} = \lambda_a + \lambda_b$ для любых a и b из G;
- $a \le b \Rightarrow \lambda_a \le \lambda_b$ для любых a и b из G.

В диссертационной работе Н.Е. Домошницкой доказано, что необходимым и достаточным условием существования СОИ для строго монотонно упорядоченной полугруппы является выполнение односторонней аксиомы Архимеда, т. е. существование такого элемента $e \in G$, что для любого $a \in G$ существует натуральное число n, удовлетворяющее условию $ne > a$. Кроме того, показано, что простая монотонность не является необходимым условием существования СОИ. Приведены примеры полугрупп, упорядоченных не монотонно, для которых СОИ существует.

Относительно упорядоченной положительной полугруппы получено следующее *основное условие* существования нетривиальной СОИ: существует такой элемент $e \in G$, что для любых элементов $a, b, c \in G$ справедливы утверждения:

- $a < b \Rightarrow a + c < (b + c) + e,\ \ c + a < (c + b) + e,$
  $a + c < e + (b + c),\ \ \ c + a < e + (c + b);$
- $a < b \Rightarrow na < nb + e,\ \ na < e + nb$ для любого $n \in N$;
- $n(a + b) < (na + nb) + e,\ \ \ na + nb < n(a + b) + e,$
  $n(a + b) < e + (na + nb),\ \ \ na + nb < e + n(a + b);$
- для любого $a \in G$ существует такое $n \in N$, что $ne > a$.

Выяснено, что утверждения, входящие в основное условие, независимы между собой.

Первые три пункта выполняются в монотонно упорядоченной полугруппе, но являются более слабыми, чем монотонность. Такие полугруппы были названы *почти монотонно упорядоченными*. Доказано, что для них существует СОИ.

Если положительная полугруппа имеет СОИ, то она распадается на классы эквивалентности вида $K_a = \{x\}_{\lambda_x = \lambda_a}$, множество которых является строго монотонно упорядоченной полугруппой, допускающей систему измерения. Доказательство этой теоремы проведено с использованием системы натуральных чисел. Показано, что СИ для полугруппы классов эквивалентности индуцирует СОИ.

Приведенное выше основное условие можно ослабить, заменив его равносильной совокупностью четырех самостоятельных условий. Они имеют вид:

1) существует $e_1 \in G$ такой, что для любых $a, b, c \in G$ из $a < b$ следует $a + c < (b + c) + e_1$, $c + a < e_1 + (c + b)$;

2) существует $e_2 \in G$ такой, что для любых $a, b \in G$ и любого $n \in N$ из $a < b$ следует $na < nb + e_2$;

3) существует $e_3 \in G$ такой, что для любых $a, b \in G$ и любого $n \in N$ имеет место $n(a + b) < (na + nb) + e_3$, $na + nb < n(a + b) + e_3$;

4) существует $e_4 \in G$ такой, что для любого $a \in G$ найдется число $n \in N$ такое, что $ne_4 > a$.

Доказано, что условия 1) – 4) независимы между собой.

Развивая результаты, полученные в диссертационной работе, Н.Е. Домошницкая под руководством Е.Г. Гонина изучала вопросы существования СОИ в частично упорядоченных полугруппах. Итогом явилась ***теорема***: *если частично упорядоченная полугруппа из положительных элементов удовлетворяет основному условию, то она имеет нетривиальную СОИ.* Доказательство проведено путем построения искомой системы измерения.

Широта и глубина научных знаний Евгения Григорьевича, умение видеть актуальность проблем исследования позволяли ему успешно осуществлять руководство тематикой диссертаций из различных научных дисциплин.

Через год после того, как в Свердловске Н.Е. Домошницкая защитила диссертацию по вопросам алгебраических структур, под научным руководством и. о. профессора Е.Г. Гонина и доцента В.У. Грибанова в научно-исследовательском институте общего и политехнического образования при Академии педагогических наук РСФСР (г. Москва) состоялась защита диссертации *Владимира Ивановича Рябухина* «Теория пределов в русской и советской общеобразовательной школе» на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. Она носила историко-математическую направленность и касалась исследований в отечественном школьном образовании, история которого к тому времени насчитывала более двух столетий.

Развитие математической мысли прослеживается автором, начиная с появления первой русской массовой школы (XVIII в.)

и до середины XX столетия. Причем диссертант рассматривает только вопросы методики преподавания математики – теории пределов и ее приложений в средней школе. К последним отнесены: определение длины окружности, площади круга, площадей поверхностей и объемов тел вращения; доказательство теорем, связанных с пропорциональностью величин в случае их несоизмеримости; определение суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. На основе анализа первоисточников и учебников для средней школы рассматриваемого периода представлена лишь методика изложения теории пределов.

В.И. Рябухин указал на основные принципы, которыми руководствовался при анализе свыше 350 источников (учебников, статей и другой методической литературы). Выводы, сделанные в процессе историко-методического исследования, весьма важны для создания цельного представления о формировании и развитии методики обучения указанных выше вопросов. Владимир Иванович показал, что русские методисты одними из первых в мире с самого начала XIX в. стали последовательно излагать теорию пределов в учебниках по геометрии (С.Е. Гурьев и др.). Характерным для них являлось стремление сочетать высокий научный уровень с доступностью изложения.

В исследовании В.И. Рябухина отмечено, что теория пределов в середине XIX в. прочно вошла в учебники по геометрии, однако применение ее было не всегда последовательным. Невелик был и объем изучаемого материала: определение предела, теоремы о его единственности и пределе двух переменных, сохраняющих одно и то же отношение (С.Е. Гурьев, Ф.И. Буссе, А.Ю. Давыдов). Со второй половины XIX в. изучаемый материал расширился, были введены другие теоремы о пределах.

В.И. Рябухин выяснил, что характерной чертой методики изложения основ теории пределов в русских учебниках для средней школы XIX и XX вв. следует считать широкое использование понятия бесконечно малой величины. Сложилась определенная методика обучения: сначала предполагалось знакомство с бесконечно малыми, их свойствами, после чего такие величины использовались в определении предела и доказательстве теорем (К.Ф. Лебединцев, М.Г. Попруженко).

В исследовании В.И. Рябухина показано, что элементы теории пределов в учебниках алгебры (вывод формулы бесконечно убывающей геометрической прогрессии) стали использоваться лишь со второй половины XIX в., а к концу столетия в них появился отдельный раздел основ теории пределов.

С 1917 г. до середины XX в. советская учебная и методическая литература не содержала какой-либо единой линии при изложении материала, относящегося к теории последовательностей и пределов. Только в 1949 г. тема «Последовательность чисел» была включена в школьные программы. Однако до 1964 г. для изучения этого раздела отводилось небольшое количество часов. Главной методической линией являлась лишь иллюстрация основных положений учения о пределах на конкретных примерах. Какие-либо теоретические положения отсутствовали. В то же время учебные программы указывали на необходимость твердого и прочного усвоения школьниками основ теории пределов.

В соответствии с установками этих программ большинство авторов сразу вводили определение предела последовательности на «ε - языке». По мысли В.И. Рябухина, школьники должны быть знакомы с общим методом доказательства, что позволит им осознанно усваивать теоремы. Выводы его заключались в том, что методический уровень раздела, посвященного теории пределов, в стабильном сборнике задач по алгебре не соответствовал возросшим требованиям времени.

Еще одно направление исследований кафедры Е.Г. Гонина связано с диссертацией *Виктора Алексеевича Ярмоленко*. Тема исследования была предложена ему Николаем Федоровичем Четверухиным, академиком Академии педагогических наук РСФСР, доктором физико-математических наук, профессором. В силу каких-то обстоятельств В.А. Ярмоленко приехал из Винницы в Пермь. В архиве имеется краткое сообщение на имя Е.Г. Гонина о том, что исследование в этом направлении может быть диссертационным. Так Е.Г. Гонин стал научным руководителем В.А. Ярмоленко.

Исследования В.А. Ярмоленко представлены в его диссертации «Частичный порядок и геометрические структуры в множестве плоских фигур с бинарным отношением складывания», защита которой состоялась в МГПИ им. В.И. Ленина (1969). Она была посвящена решению проблемы, поставленной Н.Ф. Четверухиным в работе «О некоторых методологических вопросах преподавания геометрии», и касалась изучения свойств фигур евклидовой плоскости по отношению к унарной операции складывания, геометрический смысл которой состоял в следующем: фигура разбивается осью свой симметрии на две конгруэнтные части и выбирается одна из них. С ней выполняется аналогичная процедура.

Для изучения указанных свойств на множестве Г всех плоских квадрируемых фигур, гомеоморфных замкнутому кругу, определено бинарное отношение, связывающее фигуру Ф с фигурой Ψ, если и только если Ψ есть результат складывания Ф. Квазипорядковое замыкание этого отношения является отношением частичного порядка на множестве фигур. С помощью указанного отношения каждой фигуре Ф ставится в соответствие срез фигуры Ф, представляющий частично упорядоченное множество всех таких фигур Ψ, с которыми данная Ф связана этим отношением. Выяснено, при каких условиях такое частично упорядоченное множество представляет структуру. После этого изучаются свойства таких структур. В.А. Ярмоленко показано, в частности, что определение операции складывания фигур распространяется и на плоскость Лобачевского.

Исследование проводилось главным образом с использованием геометрических соображений, с привлечением к ним теории отношений и теории структур. Возникающие вопросы решались, если это было возможно, в абсолютной геометрии, после чего плоскость Евклида и плоскость Лобачевского исследовались раздельно.

Для каждой фигуры введены понятия размерности двух видов на основе определенных характеристик ее срезов. Один из них получен с помощью введенного отношения частичного порядка, описанного В.А. Ярмоленко, а другой – используя отношение, обратное данному.

В результате диссертантом найдены все фигуры как евклидовой плоскости, так и плоскости Лобачевского, имеющие бесконечную размерность первого вида. Исследована и размерность фигур второго вида в абсолютной плоскости.

Результаты исследования геометрических структур в плоскостях Евклида и Лобачевского показали, что все *бесконечные* *структуры* этих плоскостей получены непосредственным рассмотрением фигур, имеющих бесконечную размерность первого вида. *Конечные* же *структуры* были исследованы особо. В результате В.А. Ярмоленко нашел восемь типов таких структур, реализуемых одновременно и в евклидовой плоскости, и в плоскости Лобачевского. Он показал, что для евклидовой плоскости все они являются единственно возможными, но в плоскости Лобачевского существуют и другие конечные структуры. Все их представления найдены.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Из истории конечных геометрий

Теория конечных геометрий исторически оформилась в результате слияния трех направлений исследования: *геометрического*, *комбинаторного* и *алгебраического*. Самое общее их определение может быть дано следующим образом: это те части математики, которые предназначены для изучения конечных дискретных инцидентностных систем. Их свойства описываются с помощью систем аксиом типа геометрических. Соответственно для обозначения основных понятий употребляется геометрическая терминология. В конкретных условиях системы аксиом уточняются, и объекты исследования приобретают необходимую конкретность.

Истоки *геометрического направления* конечных геометрий относятся к середине XIX столетия, когда идея Николая Ивановича Лобачевского о том, что *логически мыслима не одна евклидова геометрия*, получила свое подтверждение. Появился ряд новых геометрий. Была воплощена в жизнь и другая идея ученого о том, что *истинность геометрии может быть проверена только опытом*, и что последний в процессе развития требует введения не одной евклидовой геометрии. Наряду с неевклидовой геометрией Лобачевского была создана эллиптическая геометрия Римана и др. Возникли многомерные геометрии. Третья идея Лобачевского о том, что *новые геометрии могут быть построены путем видоизменения и обобщения системы аксиом* и *вообще исходных положений геометрии Евклида*, породила за последние десятилетия XIX в. серию исследований по основаниям геометрии.

К концу XIX в. в геометрии укоренился *аксиоматический метод*. Сложились первые требования логической строгости, которым должны подчиняться все аксиомы рассматриваемой системы. Взаимная независимость, непротиворечивость и полнота их рассматривались на моделях, среди которых выделился класс *конечных проективных пространств*. Этот метод не только облегчил проверку логической стройности систем аксиом, не обязательно геометрических, но явился серьезным стимулом для возникновения новых видов конечных геометрий.

В последних десятилетиях XIX в. стали рассматриваться проблемы независимости аксиом и построения различных геометрий, в которых не выполняются те или иные аксиомы геометрии Евклида или классической проективной геометрии. Еще в середине XIX столетия J. K.Ch. v. Staudt обосновал независимость проективной геометрии от евклидовой. Вопрос о независимости аксиом непрерывности от других групп аксиом возбудил интерес к архимедовой, а затем и к конечной геометрии.

Хотя большинство математиков тогда признало, что можно строить различные неевклидовы геометрии, заменяя постулат о параллельных другим, многие из них не заметили того факта, что *остальные аксиомы евклидовой или проективной геометрий* также *можно заменять* и *строить* при этом *новые неевклидовы геометрии*.

Первыми учеными, осознавшими все значение открытия неевклидовых геометрий, были M. Pasch, а также представители итальянской школы математиков G. Veronese и G. Peano. В 1882 г. Pasch построил дедуктивную систему проективной геометрии, а спустя два года Peano интерпретировал ее в терминах изобретенной им символической логики. В 1891 г. появилось глубокое исследование Veronese, предпринявшего попытку построения неевклидовой геометрии (без аксиомы непрерывности), а в 1898 г. Levi Civita построил для нее арифметическую модель.

Первым, кто не только интересовался фундаментом, на котором строится геометрия, но и систематически исследовал ее логическую структуру, был Д. Гильберт. В своих «Основаниях геометрии» (1899) он дал аксиоматическое и аналитическое построение аффинной плоскости без несобственных точек, получил евклидову геометрию плоскости без аксиом непрерывности, а также систематически исследовал взаимную независимость аксиом. Его метод связан с использованием моделей: если модель противоречит одной из аксиом системы, но подчиняется всем другим, то из этого заключают, что первая не может быть следствием остальных. Ученый дал простой и полный список аксиом вещественных чисел, являвшихся еще со времен Р. Декарта (XVII в.) удовлетворительным материалом для построения математических моделей.

Используя метод моделей Гильберта, удается в общем случае вопросы проверки независимости, непротиворечивости и полноты систем геометрических аксиом свести к аналогичным вопросам арифметических аксиом, которые до сих пор остаются открытыми. Однако существует класс моделей, для которого вопросы такой проверки могут быть решены в абсолютном смысле. Таковыми являются *конечные проективные пространства.* Благодаря этому обстоятельству в конце XIX – начале XX в. возник и получил серьезное развитие интерес математиков к *конечным геометриям.* В частности, конечные проективные плоскости стали изучать в связи с плоскостной теоремой Дезарга, которая доказывается только при помощи пространственных соображений.

Исследования Гильберта продолжила чикагская школа математиков, которую возглавлял E.H. Moore. Изучением групповых свойств геометрий он занимался еще в 1894–1895 гг. В начале 1902 г. появилась его статья «Об аксиомах проективной геометрии», пятая глава которой была целиком посвящена теореме Дезарга. Moore доказал, что она является следствием плоскостных групп аксиом $I_{1\text{-}2}$, II, III, $IV_{1\text{-}5}$ Гильберта.

Ученик Moore'а O. Veblen исследовал многообразные связи между проективными пространствами, которые удовлетворяют определенным аксиомам инцидентности (без аксиом порядка), и числовыми полями. Он опубликовал в 1904 г. работу «Система аксиом для геометрии». Все аксиомы он сформулировал в терминах класса элементов, названных «точками», и связи между ними, названной «порядком». Все остальные понятия (прямая, плоскость, пространство и др.) определялись через точки и порядок. Кроме того, автор впервые ввел термин «конечные системы».

Основой аксиоматического построения проективной геометрии в начале XX в. явились исследования Staudt'а, рассмотревшего конечные проективные пространства как модели.

В них он определил число точек и прямых: на каждой прямой лежит $p+1$ точек, через каждую точку проходит в силу принципа двойственности $p+1$ прямых, а общее число как точек, так и прямых равно p^2+p+1.

Неизвестно, как осуществлялось бы впоследствии формирование конечных геометрий, если бы идеи Staudt'a получили дальнейшее развитие. Однако случилось иначе: на протяжении почти сорока лет они не только не привлекли в себе внимание геометров, но и были забыты. Интерес к ним возник лишь в последнем десятилетии XIX в., когда пример конечного проективного пространства был построен итальянским математиком G. Fano, учеником K. Segre. В 1892 г. он дал в своей работе синтетическое определение проективной плоскости. В качестве проективной геометрии, в которой не выполняются аксиомы непрерывности, приведена геометрия n-мерного пространства над полем вычетов по модулю p. Кроме того, даны примеры конечных проективных плоскостей с 7 и 13 точками. Следует, однако, заметить, что термином «конечное проективное пространство» Fano не пользовался.

В 1902–1903 гг. G. Gessenberg построил проективную геометрию аналитически над специальной числовой системой. Он изучал конечную геометрию с p действительными и одной идеальной прямой, ввел термин «конечная геометрия» и указал, что в смысле обычной геометрии она представляет конфигурацию (P_p, P_p).

Аксиоматику *конечного проективного пространства* впервые ввели O. Veblen и G. Bussey (1906). Они указали общий метод построения конечных проективных геометрий размерности, большей либо равной трем, в частности всех таких двумерных геометрий над полями Галуа $GF[p^k]$, где p – простое, k – натуральное числа. Плоскости, построенные над такими системами, являются *дезарговыми*.

В отличие от пространств размерности $k \geq 3$ проективные плоскости могут быть и недезарговыми. Первые примеры их указали в 1907 г. O. Veblen и M.H.J. Wedderburn [111]. Авторы исследовали связи между свойствами конечных ассоциативных линейных алгебр и проективными плоскостями над ними. Помимо самостоятельного интереса эти геометрии могут быть использованы для получения доказательства независимости системы аксиом геометрии.

Для построения конкретных недезарговых проективных плоскостей в качестве числовых систем авторы использовали системы, которые получил в 1905 г. L.E. Dickson. В первой элементы образуют абелеву группу относительно сложения; умножение ассоциативно, но не коммутативно; кроме того, сложение связано с умножением левым дистрибутивным законом. Во втором классе алгебр имеется тождественный элемент, умножение коммутативно, но не ассоциативно. Из полученных результатов авторы сделали вывод о том, что наименьшая дезаргова плоскость должна иметь, по крайней мере, шесть точек на прямой.

Тогда же, в 1907 г., C.R. MacInnes дал комбинаторное доказательство, названное им «тактическим», единственности проективной плоскости порядка 5, являющейся дезарговой и совпадающей с $PG_{(2;\,5)}$. Он доказал также геометрическим путем, что не существует проективной плоскости с семью точками на прямой. Последний результат обосновал и F.H. Safford, статья которого вышла одновременно с работой MacInnes'а. В ней дано доказательство проблемы, предложенной Veblen'ом, относительно расположения (если оно возможно) 43 различных объектов в 43 множествах, каждое из которых состоит из 7 объектов таким образом, чтобы каждая пара объектов принадлежала одному и только одному множеству из данных семи. Заметим, что несуществование проективной плоскости порядка 6 следовало и из работы G. Tarry, появившейся еще в 1901 г. [106]. В ней исследование было выполнено с использованием комбинаторных соображений, а потому этот факт оставался незамеченным вплоть до 40-х гг. XX столетия.

Первые общие подсчеты количества r-мерных плоскостей n-мерного проективного пространства, проходящих через данную s-мерную плоскость и лежащих в данной t-мерной плоскости, осуществил в 1906 г. английский ученый D.M.Y. Sommerville [98].

Таким образом, зарождение теории конечных проективных пространств относится к началу XX в. Тогда же была создана и *теория конечных проективных плоскостей*. Основными направлениями ее развития на начальном этапе были: построение конкретных плоскостей малых порядков, исследование их внутренней структуры, установление единственности и дезарговости плоскостей порядков $n = 2 - 5, 7 - 9$. В этот период исследования были тесно связаны с *алгебраическими структурами*.

Впоследствии интерес ученых был направлен к выяснению *существования* конечных проективных плоскостей, поиску *методов их описания* и *способов построения*, разработке *классификации* таких структур.

Возникновение *комбинаторного* направления конечных геометрий относится ко второй половине XVIII в., к трудам Л. Эйлера (1707–1783), хотя наличие отдельных задач и приемов можно проследить значительно раньше. Оно занимало видное место в системе всей математики XIX в. Большой вклад в формирование комбинаторного направления внесли T.P. Kirkman, J. Steiner, W.S.B. Woolhouse, P.A. MacMahon, A. Cayley и многие другие, развивая его, в свою очередь, по нескольким направлениям. К ним, в частности, могут быть отнесены:

• создание комбинаторной и алгебраической теории конструкций блочно-схемного типа; проблема ортогональности латинских квадратов;

• исследование вопросов о возможности расположения конечного числа объектов в подмножества согласно определенным правилам;

• изучение комбинаторных конфигураций в проективных и аффинных пространствах размерности *n*;

• использование конечных квазигрупп в алгебре логики и др.

Новую жизнь комбинаторному направлению конечных геометрий в конце XIX в. дали исследования P.A. MacMahon'a по использованию таких конструкций в дисперсионном анализе. В первых десятилетиях XX столетия актуальными стали вопросы, связанные с изучением подмножеств дискретных множеств, относительно которых введены комбинаторные операции упорядочения и выбора (R.A. Fisher).

Развитие проблемы ортогональности латинских квадратов, идущей от Л. Эйлера, привело к построению множества попарно ортогональных латинских квадратов. Проблема их *существования* и *методы построения* тесно связаны между собой, так как доказательство существования нередко оказывается и методом построения. Они являются центральными как в комбинаторном анализе, так и в теории планирования экспериментов. *Латинским квадратом* порядка *n* называется квадратная таблица размера $n \times n$, строки и столбцы которой представляют некоторые перестановки одних и тех же элементов. Два латинских квадрата порядка *n* называются *попарно ортогональными*, если при наложении одного квадрата на другой среди упорядоченных пар элементов в разных клетках квадрата каждая из n^2 возможных пар элементов встречается один и только один раз.

На примере решения задачи Эйлера о 36 офицерах было показано, что не для каждого латинского квадрата существует ортогональный. Строгое доказательство этого факта для любого n предложил H.B. Mann, получивший в XIX в. важную ***теорему***: *число взаимно ортогональных латинских квадратов порядка n не превосходит n* – 1. Кроме того, ученый доказал два необходимых и достаточных условия существования как пары, так и r взаимно ортогональных латинских квадратов, а также два необходимых условия для построения пар таких квадратов.

Неожиданную связь между множеством из $n - 1$ взаимно ортогональных латинских квадратов порядка n и аффинными (проективными) плоскостями того же порядка обнаружил индийский ученый R.C. Bose (1938), занимаясь вопросами планирования экспериментов. Осознание этого факта привело к получению ряда важных геометрических и прикладных результатов [43].

R.C. Bose показал, как осуществляется связь между множеством таких квадратов и проективной плоскостью порядка n. С этой целью одну из прямых принимают за несобственную и обозначают через $[\infty]$, а ее точки – через $(0), (1), \ldots, (n), (\infty)$.

Обыкновенные прямые пучков с несобственными центрами обозначают числами от 0 до n. Пучки с центрами (0) и (∞) принимают за координатные. Прямые координатных пучков образуют координатную сетку, которую можно представить в виде квадрата $n \times n$: столбцы его представляют прямые координатного пучка с центром (∞), строки – прямые координатного пучка с центром (0). Строки и столбцы квадрата располагают в порядке нумерации соответствующих прямых пучков. Номер столбца принимают за абсциссу, номер строки – за ординату точки пересечения соответствующих прямых.

Под номерами точек на координатной прямой подразумевают номера прямых второго координатного пучка, проходящих через эти точки. Тогда любой третий пучок с несобственным центром может быть представлен следующим образом: клетки квадрата заполняются обозначениями прямых этого пучка, проходящих через соответствующие точки пересечения координатных прямых (рис. 1). Результатом заполнения является латинский квадрат. Таких квадратов получается $n - 1$, по числу точек неособенной прямой, отличных от центров координатных пучков. Все они попарно ортогональны.

Наоборот, множество из $n - 1$ попарно ортогональных латинских квадратов порядка n определяет некоторую конечную аффинную плоскость того же порядка, которая единственным образом достраивается до проективной.

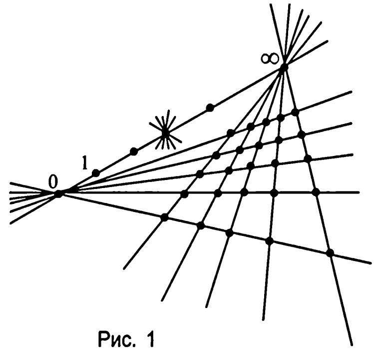


Рис. 1

В принципе все проективные плоскости порядка n можно найти, перебрав все семейства из $n - 1$ попарно ортогональных латинских квадратов. Получение такого семейства удобно начинать с выбора одного, «опорного» квадрата с последующим составлением $n - 2$ квадратов, ортогональных к нему и между собой. Такой способ описания плоскостей является универсальным. Bose рассмотрел плоскости, построенные не только над полями Галуа, но и над другими алгебраическими структурами. Следует, однако, заметить, что такая связь между латинскими квадратами и конечными плоскостями могла быть установлена гораздо ранее – из результатов Safford'a и Tarry о несуществовании проективной плоскости порядка 6. Однако тогда эти факты остались незамеченными.

Таким образом, вопросами изучения и построения конечных проективных плоскостей стали интересоваться не только геометры, алгебраисты, специалисты по планированию экспериментов, но и ученые, выполняющие исследования в комбинаторном анализе, создающие помехоустойчивые коды и др.

Итак, проективные плоскости порядка n могут быть интерпретированы как:

• (v, k, λ) – конфигурации с параметрами $v = b = n^2 + n + 1$; $k = r = n + 1$; $\lambda = 1$;

• системы из $n - 1$ попарно ортогональных латинских квадратов порядка n;

• системы троек Штейнера S $(2; n + 1; n^2 + n + 1)$, где $n = p^\alpha$ (p – простое, α – натуральное).

Результаты, касающиеся латинских квадратов, на наш взгляд, с полным правом могут быть отнесены к достижениям XX в.

Конечные проективные плоскости

С середины XX столетия теория конечных геометрий, и главным образом конечных проективных плоскостей, особенно интенсивно развивается. Результаты многочисленных исследований обрабатываются, систематизируются, обобщаются и издаются в ряде монографий (G. Pickert, 1955 [86]; P. Dembowski, 1968 [50]; F.W. Stevenson, 1972 [102]; D.R. Hughes и F.S. Piper, 1973 [65]; F. Karteszi, 1976 [67] и др.).

В системе плоских конечных геометрий проективные плоскости занимают центральное положение в основном в силу исторической традиции. Со второй половины XX в. появилось большое число новых видов конечных геометрий: инверсные плоскости, плоскости Эльмслева, Больяи – Лобачевского, полуплоскости, псевдоплоскости и др.

С середины XX в. число конечных геометрических структур увеличивалось, каждая из них представляла самостоятельный интерес и отличалась от других как по свойствам и методам исследования, так и по сферам их приложений.

В теории конечных проективных плоскостей имеются проблемы разной степени сложности, в том числе еще нерешенные; некоторым из них более 200 лет. Такие структуры находят применение в самых различных по содержанию и формулировке проблемах. Поэтому научный интерес представляет их изучение не только в отношении части инцидентностных систем, но и в связи с широкими возможностями приложений в различных областях науки и техники. Укажем лишь некоторые из них:

– в теории планирования экспериментов (в промышленности, сельском хозяйстве, медицине);

– при проектировании сложных систем и устройств на ЭВМ (сокращает перебор, уменьшает затраты машинного времени);

– в большом круге задач, связанных с проблемой экспертных оценок (оценка знаний учащихся, качества машин, изделий и приборов, достоинств кинофильмов, установление эффективности лекарственных средств, ценности картин, дегустации пищевых продуктов, вин и т. д.);

– в теории информации (построение помехоустойчивых кодов; проблема их построения приобрела актуальность в связи с появлением ракет, космических станций, спутников Земли и т. д.);

– при решении ряда задач теории игр и теории графов.

Широки возможности конечных проективных плоскостей в теории чисел, математической логике, теории конечных групп. Оказались они удобными и для педагогических целей.

С 40-х гг. XX в. внимание ученых привлекли проективные плоскости, так как их аксиоматика отличается простотой; они являются развитой частью конечных геометрий, наиболее оформленной в теоретическом плане; весьма широка сфера их приложения.

Теория конечных проективных плоскостей существует более столетия, за последние несколько десятков лет интенсивно развивается, но и сейчас, казалось бы, простые по формулировке вопросы остаются без ответа. В частности, вопрос о существовании проективных плоскостей данного порядка решен лишь частично. Более тонкий вопрос о *всех* типах проективных плоскостей порядка n решен до конца лишь для $n \leq 9$. Дело в том, что для полного решения требуется исчерпывающий перебор всех возможностей, а число последних с увеличением порядка растет с астрономической скоростью. На пути увеличения порядков изучаемых плоскостей имеются и другие трудности. Поэтому необходимо рассмотрение *разных подходов* к их преодолению. При проведении многих экспериментов предпочтение отдается ЭВМ, что значительно облегчает работу. С другой стороны, объем перебора существенно зависит от выбора *плана* работы, *способа описания* исследуемых плоскостей.

Аксиоматически *конечная проективная плоскость* определяется как множество, состоящее их двух непересекающихся подмножеств, элементы которых называются соответственно *точками* и *прямыми*, с симметричным *отношением инцидентности*, способным связывать их, удовлетворяющим следующим аксиомам:

1. любые две различные точки инцидентны одной и только одной прямой;
2. любые две различные прямые инцидентны одной и только одной точке;
3. существуют четыре различные точки, из которых никакие три не инцидентны одной прямой.

Условия 1 и 2 являются двойственными друг другу и вместе с 3 предполагают двойственность:

$\overline{3}$. существуют четыре различные прямые, из которых никакие три не инцидентны одной точке.

Проективная плоскость, состоящая из конечного числа точек и прямых, называется *конечной*. Одной из ее характеристик является число n, называемое *порядком*. В плоскости порядка n на каждой прямой лежит $n + 1$ точек, через каждую точку проходит $n + 1$ прямых, а общее число как точек, так и прямых равно $n^2 + n + 1$.

Структура, полученная из проективной плоскости удалением одной прямой и всех ее точек, называется *аффинной плоскостью*. Ее порядком считается порядок исходной проективной плоскости. В аффинной плоскости порядка n на каждой прямой лежит n точек, через каждую точку проходит $n + 1$ прямых, общее число точек равно n^2, а прямых – $(n^2 + n)$. Удаленные из проективной плоскости прямая и ее точки называются *несобственными элементами аффинной плоскости*. Две прямые, пересекающиеся в несобственной точке, называются *параллельными*. Множество всех прямых аффинной плоскости порядка n распадается на $n + 1$ пучков по n прямых в каждом.

Вопрос, который подняли O. Veblen и M.H.L. Wedderburn в 1907 г. [111], оставался открытым на протяжении более 80 лет. Он касался отыскания наименьшего порядка недезарговых проективных плоскостей. В 50-х гг. XX в. появились работы W.A. Pierce'а и M. Hall'а, в которых комбинаторными методами была построена проективная плоскость порядка 7 и установлена ее дезарговость. Комбинаторное доказательство единственности такой плоскости для $n = 8$ выполнили в 1956 г. M. Hall, J.D. Swift и R.J. Walker [63]. Из их результатов следует, что наименьший порядок недезарговых проективных плоскостей равен 9. Три плоскости, которые построили Veblen и Wedderburn, вместе с дезарговой, полученной в 1906 г. Veblen'ом и W.H. Bussey [110], являлись единственными для $n = 9$.

Так как полный список латинских квадратов порядка 9 к тому времени не был получен (во всяком случае он весьма велик), то сначала попытались расширить до плоскостей те квадраты, которые встречаются в описаниях уже известных плоскостей. Для каждой из них существует описание полной системой латинских квадратов, содержащее квадрат, совпадающий с таблицей операции элементарной абелевой группы. M. Hall, J.D. Swift и R.B. Killgrove [62] разработали процедуру построения систем ортогональных латинских квадратов и начали именно с этого квадрата. В результате были восстановлены все четыре известные плоскости. Аналогичную работу проделал E.T. Parker над пятью другими квадратами, встречающимися в этих же описаниях, но новые плоскости при этом не были открыты [84]. В дальнейшем плоскости строились не только над всеми квадратами, входящими в описания известных проективных плоскостей порядка 9, но и над определенными классами квадратов, не входящих в упомянутые описания, а также над латинскими квадратами более низких порядков.

В указанных выше работах иностранных авторов рассмотрены не все квадраты, встречающиеся в описаниях уже известных проективных плоскостей порядка 9, так как существуют описания, не содержащие квадрата элементарной абелевой группы. Л.Я. Харанен [37] исследовала три квадрата, входящих в одно из таких описаний плоскости Хьюза. Аналогичная работа была проделана Л.И. Пантелеевой [29] над квадратом из одного описания плоскости трансляций. В результате исследований также были получены только известные плоскости.

Постепенно все латинские квадраты из описаний известных проективных плоскостей порядка 9 были исследованы, и новых плоскостей они не дали. Впоследствии изучались определенные классы латинских квадратов, представители которых не входили в упомянутые описания. Так, R.B. Killgrove [68] сделал попытку построить плоскость над циклическим квадратом порядка 9 и нашел, что плоскость над ним не строится. Однако следует заметить, что полный перебор неизоморфных квадратов порядка 9 к 70-м гг. XX в. был практически невозможен.

Одной из важнейших задач теории является *перечисление* с точностью до изоморфизма *всех плоскостей* данного порядка и, прежде всего, выяснение *условий* их *существования*. К немногочисленным результатам общего характера принадлежит ***теорема***: *для любого* $n = p^{\alpha}$ (p – простое, $\alpha \in \mathrm{N}$) *существует дезаргова плоскость порядка* n. В начале XX в. L.E. Dickson дал краткое и исчерпывающее доказательство этому факту. Поэтому все конечные плоскости, известные в настоящее время, имеют порядок, равный степени простого числа.

Кроме изолированных результатов G. Tarry и F.H. Safford'а не было известно никаких ограничений на порядки плоскостей, пока R.H. Bruck и H.J. Ryser не доказали ***теорему*** о необходимом условии существования конечной проективной плоскости: *если* $n \equiv 1, 2\ (mod\ 4)$ *и n нельзя представить в виде суммы квадратов двух целых чисел, то проективная плоскость порядка n не существует* [44]. Таким образом, имеется бесконечно много значений n, для которых вопрос о существовании таких плоскостей остается открытым. В то же время для порядков 2 – 5, 7 – 9 существует по дезарговой плоскости. Для порядков 2, 3, 4, 5 была доказана их единственность: J. Fano (1892); G. Gessenberg (1903); C.R. MacInnes (1907); F.H. Safford (1907); O. Veblen, M.N.J. Wedderburn (1907). Для порядка 7 единственность проективной плоскости доказал M. Hall [60] *комбинаторно-геометрическим методом.* Для плоскости порядка 8 также была доказана единственность, но уже только с помощью электронно-вычислительных машин, используя обобщенно неизоморфные латинские квадраты порядка 7 [61].

На очереди были исследования проективных плоскостей порядка 9. Плоскости, которые построили Veblen и Wedderburn [111], вместе с дезарговой, полученной несколько раньше Veblen'ом и Bussey, являлись единственными для порядка 9 до начала 90-х гг. XX в. Точнее говоря, были известны четыре плоскости этого порядка: дезаргова, плоскость трансляций, плоскость, двойственная ей, называемая также плоскостью сдвигов, и плоскость Хьюза. Вместе с тем несуществование других проективных плоскостей порядка 9 не поддавалось доказательству.

Способов описания конечных проективных плоскостей предложено немало: *списками* и *графиком инцидентностей*, *списком полных рядов точек* (полным пучком прямых), *множеством алгебраических структур* (построение над полями, некоммутативными телами, полуполями, квазителами, веблен-веддербарновыми системами, почти-полями, системами Холла и др.). С алгебраическим *способом описания* связаны и *методы построения* проективных плоскостей. Однако для конкретных порядков они практически непригодны, так как не дают ответа на вопросы *о числе* и *видах* таких *плоскостей.*

Для построения проективных плоскостей малых порядков одним из первых был применен *комбинаторно-геометрический* метод, основанный на использовании некоторой фиксированной *частичной подплоскости* (конфигурации) с последующим расширением ее до всей плоскости. В качестве подплоскости для $n = 9$ прежде всего были выбраны латинские квадраты порядка 9 и даже их целые классы. Ученица Евгения Григорьевича Гонина *Людмила Яковлевна Панкратова* рассмотрела *все квадраты* порядка 9, состоящие из подквадратов порядка 3 повторяющегося состава, а *Лидия Ивановна Пантелеева* – симметричные квадраты того же порядка с симметричным себе подквадратом порядка 3 [28, 29]. В этих исследованиях были получены лишь известные с 1907 г. плоскости порядка 9.

Имеется и другая возможность построения конечных проективных плоскостей с применением латинских квадратов. Оказывается, для этой цели пригодны латинские квадраты порядка $n - 1$, и такая возможность уже была использована. В частности, доказательство единственности проективной плоскости порядка 8, выполненное M. Hall'ом, J.D. Swift'ом и Walker'ом в 1956 г. [63], было проведено на основе перебора всех 147 неизоморфных между собой латинских квадратов порядка 7, которые получил N.W. Norton в 1939 г. с поправкой A. Sade 1951 г. Аналогично в новом доказательстве несуществования проективной плоскости порядка 6, предложенном Н.М. Рыбниковой и А.К. Рыбниковым [35], использовались латинские квадраты порядка 5. Такой подход имеет то преимущество, что квадратов порядка $n - 1$ значительно меньше, чем квадратов порядка n. Однако квадрат порядка $n - 1$ несет меньше информации, и построение плоскости на его основе должно приводить к более разветвленным вариантам. Во всяком случае, он заслуживает внимания, тем более, что полный перебор латинских квадратов порядка 8 осуществил в 1967 г. M.B. Wells [113].

Предложенное А.Е. Малых, аспиранткой Е.Г. Гонина, *описание проективных плоскостей порядка n системой из n латинских квадратов порядка $n - 1$* имеет то преимущество, что технически значительно проще получается из обычного описания латинскими квадратами порядка n. Она осуществила следующий переход: в описании проективной плоскости порядка n полным множеством взаимно ортогональных латинских квадратов этого же порядка обозначила номера квадратов, строк и столбцов, соответственно, буквами k, i, j. Каждый из $n - 1$ латинских квадратов подстановками элементов был нормирован по какому-либо столбцу j_0, одному и тому же для всех квадратов, так, чтобы в нем все элементы оказались записанными в естественном порядке. При наложении квадратов друг на друга получится, так сказать, «параллелепипед». В основании его находится $n \times n$ ячеек, а по высоте – $(n - 1)$. Произведя вертикальные «разрезы» по строкам $0, 1, \ldots, (n - 1)$, получают прямоугольники размера $n \times (n - 1)$. Но в результате нормирования всех исходных квадратов по столбцу j_0 во всех прямоугольниках столбцы j_0 будут состоять из одинаковых элементов. Такие столбцы исключают из рассмотрения и получают n квадратов размера $(n - 1) \times (n - 1)$. Номером каждого нового квадрата является некоторое i, соответственно, номером его строки – некоторое k, т. е. обозначения квадратов и строк взаимно изменились; обозначения же столбцов остались прежними, но один из номеров, именно j_0 , отсутствует.

Полученные квадраты обладают рядом свойств. В каждой строке находятся различные элементы, так как строка нового квадрата является строкой некоторого исходного латинского квадрата, из которой удален один элемент. В каждом столбце также находятся различные элементы. Это следует из ортогональности исходных латинских квадратов; одинаковые же элементы находились в удаленном столбце. Элементы, стоящие в соответствующих клетках разных квадратов, различны, так как они находились в клетках одного и того же столбца одного из исходных латинских квадратов.

В любых двух различных столбцах любых квадратов упорядоченные пары элементов, находящиеся в одних и тех же местах, различны. Действительно, элементы, стоящие на местах k_1 и k_2 в любых двух столбцах новых латинских квадратов, различных или совпадающих, являются элементами исходных квадратов с номерами k_1 и k_2, причем находящимися в двух клетках, соответствующих выбранным столбцам. Ввиду ортогональности исходных латинских квадратов рассмотренные пары элементов должны быть различными.

Таким образом, полученные этим способом n квадратов порядка $(n - 1) \times (n - 1)$ удовлетворяют следующим требованиям:

1. Элементами квадратов являются числа от 0 до $n - 1$, но в квадрате i отсутствует элемент i.

2. Каждый из квадратов является латинским.

3.Элементы, находящиеся в соответствующих клетках разных квадратов, различны.

4. Не существует двух одинаковых упорядоченных пар элементов, стоящих в одних и тех же клетках двух различных столбцов двух квадратов.

С другой стороны, полученные квадраты, вообще говоря, не являются попарно ортогональными.

Пусть, наоборот, имеется n квадратов порядка $(n-1) \times (n-1)$, удовлетворяющих вышеуказанным четырем требованиям. Производят обратное построение: к каждому квадрату на одном и том же месте добавляют столбец, все клетки которого содержат одинаковый элемент, отсутствовавший в этом квадрате. Получают n прямоугольников размера $(n-1) \times n$. Наложив их друг на друга в порядке возрастания номеров i, получают «параллелепипед». В основании его находится $(n-1) \times n$ ячеек, а по высоте – n. Осуществляют «разрезы» по строкам 0, 1, ... , $(n-2)$ и получают $(n-1)$ квадратов.

Так как исходные квадраты являлись латинскими, то в каждой строке полученных квадратов стоят различные элементы. Так как в исходных квадратах элементы, стоящие в одних и тех же клетках, различны, то в каждом столбце новых квадратов располагаются также различные элементы. Следовательно, эти квадраты являются латинскими.

Из свойства 4 следует, что при попарном наложении полученных квадратов друг на друга в одной клетке будут стоять различные упорядоченные пары элементов. Это значит, что полученные квадраты являются взаимно ортогональными. Рассмотренное построение дает систему из $n-1$ латинского квадрата порядка n, а она однозначно определяет некоторую проективную плоскость этого порядка.

Таким образом, установлена возможность взаимно однозначного описания проективной плоскости порядка n системой из n латинских квадратов порядка $n-1$, удовлетворяющих требованиям 1 – 4.

Новое описание определяется выбором точек (0), (∞) и прямой j_0 пучка с центром (∞), отличной от прямой [∞], т. е. является фигурой, состоящей из пары точек и пары прямых, таких, что точки лежат на одной из этих прямых, а прямые проходят через одну из этих точек. Заметим, что эта фигура, рассматриваемая самостоятельно, двойственна себе. А.Е. Малых назвала ее *опорной* и дала геометрическую интерпретацию полученных квадратов.

Каждый квадрат порядка $n - 1$ из нового описания определяется некоторой прямой i_0 пучка (0), т. е. в конечном итоге выбором упорядоченной тройки неколлинеарных точек (0), (∞) и (j_0, i). В исходном квадрате k порядка n в клетке (j, i_0) стоит номер i прямой пучка с несобственным центром (k), пересекающей прямую i_0 пучка (0) в точке (j, i_0). Но так как все исходные квадраты нормированы по столбцу j_0, то номера прямых пучка (k) совпадают с номерами точек прямой j_0, через которые они проходят. Следовательно, точки (k), (i, j_0), (j, i_0) коллинеарны. Указанные три точки лежат, соответственно, на сторонах [∞], [0, i_0], [j_0] трехвершинника с вершинами (0), (∞), (j_0, i_0). Таким образом, каждый рассматриваемый латинский квадрат порядка $n - 1$ описывает связь между тремя рядами точек, отличных от вершин некоторого трехвершинника, с носителями, являющимися его сторонами.

Обычное описание проективной плоскости порядка n латинскими квадратами этого же порядка определяется выбором упорядоченной пары точек (0) и (∞), а каждый латинский квадрат такого описания – выбором упорядоченной тройки коллинеарных точек (0), (∞), (k). Естественно, что описаний и латинских квадратов порядка n существует очень много, поэтому их приходится рассматривать с точностью до изоморфизма. Аналогично предлагаемое описание проективной плоскости порядка n латинскими квадратами порядка $n - 1$, а также отдельные латинские квадраты должны рассматриваться таким же образом [21].

А.Е. Малых выполнила построение с помощью ЭВМ проективной плоскости порядка 9 над пятнадцатью латинскими квадратами порядка 8. В результате (после их отождествления) были получены три системы из девяти латинских квадратов порядка 8, удовлетворяющие требованиям 1 – 4. После выполнения обратной процедуры в соответствии с отмеченными выше условиями было построено восемь попарно ортогональных латинских квадратов порядка 9. Все они оказались изоморфными плоскости трансляций, двойственной ей, а также плоскости Хьюза. Кроме того, А.Е. Малых представила все 15 описаний четырех известных проективных плоскостей порядка 9 девятками латинских квадратов порядка 8 [22], провела сравнительную оценку эффективности классического метода и метода, предложенного автором.

В 1978 г. сотрудники Института проблем управления Академии наук СССР описали процедуру построения всех приведенных латинских квадратов порядка *n*, которая была реализована для получения полного списка попарно неизоморфных латинских квадратов восьмого порядка [2]. Для его получения потребовалось около 60 часов машинного времени (быстродействие ок. 300 000 оп./сек) Оказалось, что число неизоморфных латинских квадратов порядка 8 – $N_8 = 283\,640$. Для каждого из них получен порядок группы автоморфизмов. Это позволило подсчитать число приведенных латинских квадратов этого порядка – $N_8^R = 535\,281\,401\,856$. Оно совпало со значением, полученным в работе M.B. Wells [113]. Авторы статьи выразили надежду на то, что, пользуясь методом, предложенным А.Е. Малых, можно было бы построить все неизоморфные между собой проективные плоскости порядка 9.

Комбинаторно-геометрический метод построения конечных проективных плоскостей, как было отмечено выше, основан на использовании некоторой частичной подплоскости (конфигурации) с последующим расширением ее до всей плоскости. Таким путем устанавливается либо несуществование ряда конечных проективных плоскостей, либо, в случае построения, доказательство ее единственности. Так, *Игорь Петрович Непорожнев* в предположении существования проективной плоскости порядка 6 решал комбинаторную задачу составления шести элементов пяти троек пар без их повторения и пришел к единственному решению. Оно определило одну из секущих овала. Полную систему таких секущих, как было им доказано, построить нельзя. На основе этого опровергается существование проективной плоскости порядка 6, содержащей конфигурацию Фано 7_3. А на основе несуществования такой плоскости, содержащей полный четырехвершинник с неколлинеарными диагональными точками, следует доказательство несуществования любых проективных плоскостей порядка 6.

Основная трудность при расширении фиксированной конфигурации – появление большого числа классов точек и прямых на ранних стадиях перебора. Поиск подплоскостей, обладающих в меньшей степени этим недостатком, приводит, в частности, к рассмотрению k-дуг, полных дуг, овалов. Кроме того, для повышения эффективности перебора при решении задачи создавались специальные приемы. К числу последних относится метод *клик*, разработанный Евгением Григорьевичем Гониным.

Кликой на множестве элементов с симметричным бинарным отношением σ называется подмножество, любые два элемента которого связаны этим отношением.

Множество клик называется *базисным*, если любые два элемента, связанные отношением σ, входят хотя бы в одну клику этого множества.

Выбор базисного множества, наилучшего в каком-то смысле, является сложной задачей. Если такое множество установлено, то выбор рассматриваемого элемента запрещает выбор каждого элемента каждой клики, которой принадлежит рассматриваемый элемент, и условно разрешает выбор любого другого элемента. Поэтому вместо списков запрещаемых элементов предлагается список всех клик, которым он принадлежит.

Преимущество этого метода состоит в уменьшении объема списков, что ведет к ускорению процесса внесения и снятия запретов. Кроме того, каждая клика может быть запрещена только один раз, в то время как элемент может запрещаться повторно.

Используя 6-дуги, M. Hall в 1953 г. комбинаторно-геометрическим путем доказал единственность проективной плоскости порядка 7. В статье [53] R.H.F. Denniston доказал теорему о несуществовании проективной плоскости порядка 10, имеющей полные 6-дуги. В принципе все проективные плоскости данного порядка можно построить путем расширения *всех* 6-дуг. В ряде работ авторы исследовали типы плоскостей порядка 9, содержащих k-дуги, полные дуги, овалы: B. Quist, D.R. Hughes, A. Wagner, L.Lunelli, G.E. Martin, G. Menichhetti, R.H.F. Denniston и многие другие.

Исследования групп коллинеаций конечных проективных плоскостей привели к появлению нового способа описания их при помощи разностных множеств. *Разностным множеством* называется множество D, состоящее из k вычетов $d_1, d_2, \ldots, d_k$ по модулю некоторого натурального числа v, причем для каждого $a \in D$, $a \equiv 0(mod\ v)$ существует точно λ упорядоченных пар (d_i, d_j) элементов из D таких, что $a \equiv d_i - d_j\ (mod\ v)$. Числа v, k, λ называются *параметрами* разностного множества. Например, множество $D = \{1;\ 3;\ 4;\ 5;\ 9\}$ вычетов по модулю 11 является разностным множеством с $\lambda = 2$.

В 1955 г. R.H. Bruck обобщил идею циклического разностного множества и определил групповое разностное множество D, которое может основываться на произвольной конечной группе G. Из результатов M. Hall'а [58] следует, что имеется бесконечное множество значений n, для которых разностное множество не существует. Он же высказал предположение о том, что все конечные плоскости являются *циклическими*, отметив при этом, что нельзя надеяться на чисто геометрическое доказательство этого предположения: нужны совместные усилия геометрии и арифметики. Он установил также несуществование циклических плоскостей для всех порядков $n = p^a$ (p – простое, $a \in \mathrm{N}$), не превышающих 1600.

Разностные множества тесно связаны с *комбинаторными блок-схемами*. Они обычно строятся прямыми методами с использованием свойств конечных полей, а также конечных геометрий. Ассоциировал их с блок-схемами еще в 1938 г. J. Singer, доказав ***теорему***: *гиперплоскости геометрии $PG(n, p^r)$, $q = p^r$, взятые в качестве блоков, и точки, взятые в качестве элементов, образуют симметричную блок-схему с параметрами* $v = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$; $k = \dfrac{q^n-1}{q-1}$; $\lambda = \dfrac{q^{n-1}-1}{q-1}$ (*). *Эта схема является циклической, и точки в любой гиперплоскости определяют* (v, k, λ) *– разностное множество* [97].

Заметим, что блок-схема вида (v, k, λ) представляет конечную проективную плоскость.

В основополагающей работе M. Hall (1956) представил основные семейства разностных множеств, выполнил доказательство их существования и разработал метод построения. К ним, в частности, отнесены:

• тип S (Зингеровы разностные множества). Это гиперплоскости в $PG\ (n, q)$, $q = p^r$. Они имеют параметры (*);

• тип Q (квадратичные вычеты в $GF(p^r)$, $p^r \equiv 3\ (mod\ 4)$ с параметрами $v = p^r = 4t - 1$; $k = 2t - 1$; $\lambda = t - 1$;

• тип H_6 (p – простое число вида $p = 4x^2 + 27$). Существует примитивный корень r по модулю p, такой, что $Ind_r(3) \equiv 1 (mod\, 6)$. Вычеты $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$ $(mod\, p)$ такие, что $Ind_r(a_i) \equiv 0$, 1 или 3 $(mod\, 6)$, образуют разностное множество с параметрами $v = p^r = 4t - 1$; $k = 2t - 1$; $\lambda = t - 1$ и др.

Заметим, что тип H_6 имеет те же параметры что и Q.

Циклические плоскости являются частным случаем *строго транзитивных*, они были исследованы первыми. Важный результат получил в 1938 г. J. Singer [97]: *любая конечная дезаргова плоскость является циклической.*

Очевидно, что подход к построению конечных проективных плоскостей, осуществляемый с использованием разностных множеств, является алгебраическим. Его использовал ученик Евгения Григорьевича Гонина *Борис Федорович Харитонов.* Он выполнял построение строго транзитивных плоскостей над циклическими группами [38, 39].

Плоскости, рассматриваемые Б.Ф. Харитоновым, имели регулярные транзитивные группы коллинеаций G. Это значит, что для любой пары M_1, M_2 точек плоскости существует единственная коллинеация $\alpha \in G$, преобразующая M_1 в M_2. Порядок такой группы коллинеаций для проективной плоскости конечного порядка n равен числу $v = n^2 + n + 1$ точек плоскости.

При выбранной начальной точке M_0 каждой точке M плоскости соответствует координата $\alpha \in G$, которая находится из условия $\alpha M_0 = M$. Каждой прямой плоскости соответствует множество D, состоящее из $n + 1$ координаты ее точек. Оно является *разностным множеством в группе G.* Если G – аддитивная группа, то равносильными условиями являются: для любого ненулевого элемента $\alpha \in G$ существует точно одна такая упорядоченная пара $(a_i; a_j)$ элементов D, что левая (правая) разность равна $a_i - a_j = \alpha$ $(- a_i + a_j = \alpha)$.

Пусть в аддитивной группе G порядка $n^2 + n + 1$ имеется разностное множество из $n + 1$ элементов. Тогда, рассматривая *элементы группы* как *точки*, а множества $D + x$, где x – некоторый элемент группы, – как *прямые*, получают проективную плоскость с группой коллинеаций, изоморфной G. Ее называют *правой плоскостью* над G. Другую плоскость, с группой коллинеаций, антиизоморфной группе G, можно получить, приняв за прямые множества $x + D$. Эту плоскость называют *левой*.

Если $n \equiv 1 \ (mod\, 3)$, то $v = 3q$, где $q \equiv 1 \ (mod\, 3)$. В этом случае для любого $n > 1$ существует, по крайней мере, две различные группы коллинеаций порядка v: циклическая C и нециклическая H. Они получены из двух циклических групп A, B порядков 3 и q, соответственно. В качестве A и B рассматривают группы вычетов. Элементами C и H являются пары (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Сложение в C определяется как $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, а в группе H задается формулой $(a, b) + (c, d) = (a + c, br^{c} + d)$, где $r \neq 1$ удовлетворяет сравнению $r^3 \equiv 1 \ (mod\, q)$. В рассматриваемом Б.Ф. Харитоновым случае в качестве r можно взять n, так как $n^3 - 1 = (n - 1)(n^2 + n + 1) = (n - 1)3q \equiv 0 \ (mod\, q)$.

Группа H представляет полупрямую сумму групп A и B, поэтому ее называют *полупрямой*.

Правая и левая разности пар (a, b) и (c, d) в группе H находятся по формулам:

$$-(c, d) + (a, b) = (a - c,\ b - dn^{a-c}),$$
$$(a, b) - (c, d) = (a - c,\ n^{-c}(b - d)).$$

Множителем разностного множества D в циклической группе называется такое число t, что $Dt = D + x$, где x – некоторый элемент группы. Множителями являются простые числа t, делящие n и поэтому удовлетворяющие условию $(t, v) = 1$. Известно также, что множитель сохраняет по крайней мере одну прямую плоскость. Более того, если $(v, n + 1) = 1$, то, как доказал M. Hall, существует прямая, фиксируемая каждым множителем, а значит, и n. Эта плоскость обозначается через D_0.

Б.Ф. Харитонов установил вид элементов этой прямой. В рассматриваемом случае $n^3 \equiv 1 \ (mod\, q)$ и $n \equiv 1 \ (mod\, 3)$, поэтому умножением на n элементы группы C разбиваются на циклы вида (a, b), (a, bn), (a, bn^2) за исключением элементов $(a, 0)$, для которых $n(a, 0) = (a, 0)$. Таким образом, *прямая* D_0, фиксируемая множителем n, *состоит из циклов*. Автор показал, что если с элементами подмножества оперировать как с элементами полупрямой группы H, то оно является разностным множеством в H. В процессе исследования были доказаны:

Теорема 1. *Если подмножество D_0, состоящее из циклов, есть разностное множество в циклической группе C, то эле-*

менты D_0, понимаемые как элементы полупрямой группы H, образуют разностное множество в этой группе.

С л е д с т в и е. Если существует плоскость с циклической регулярной транзитивной группой коллинеаций, то существует плоскость и с полупрямой регулярной транзитивной группой коллинеаций.

Теорема 2.

Если подмножество D_0, состоящее из циклов, есть разностное множество в полупрямой группе H, то элементы D_0, понимаемые как элементы циклической группы C, образуют разностное множество в этой группе.

В приведенной ниже теореме автор доказал, что плоскости, определяемые разностным множеством D_0 *над полупрямой группой*, обладают циклическими регулярными транзитивными группами коллинеаций. Выполнив отдельно доказательство для левых и правых плоскостей на H, Б.Ф. Харитонов установил справедливость ***теоремы* 3**: *правая (левая) плоскость над полупрямой группой, определяемая разностным множеством D_0, состоящим из циклов, совпадает с плоскостью, определяемой D_0 над циклической группой (обладает регулярной транзитивной группой коллинеаций).*

Обобщением результатов последних двух теорем является утверждение: *плоскости над полупрямой группой H, определяемые разностным множеством D_0, состоящим из циклов, обладают циклической регулярной транзитивной группой коллинеаций.*

Продолжая выполнять исследования в разностных множествах, Б.Ф. Харитонов определил *неполные разностные множества*, нашел их системы, обозначенные через T, для конкретных случаев. С опорой на введенные понятия и полученные соотношения автор рассмотрел *проективную плоскость порядка 10* с регулярной транзитивной нециклической группой коллинеаций H, разложенной по подгруппе B порядка q. Он получил три смежных класса $H = B_0 + B_1 + B_2$. Относительно числа элементов в каждом из них пришел к конкретной системе из двух уравнений, имеющих целочисленные неотрицательные решения. Они являются необходимым условием для существования разностного множества. Из полученного решения следовало, что *при любом выборе одиннадцати элементов циклической или полупрямой группы нельзя получить разностное множество.* Геометрически это означает, что не существует проективной плоскости порядка 10 с регулярной транзитивной нециклической группой коллинеаций, так же, как не существует плоскости с регулярной транзитивной циклической группой коллинеаций. Затем автор рассмотрел регулярную группу коллинеаций порядка $3 \cdot 61 = 183$. В соответствии с разработанной процедурой, составив и решив систему уравнений, он доказал уже с использованием ЭВМ, что *проективная плоскость порядка 13, построенная над полученным разностным множеством, является дезарговой.*

Евгений Григорьевич Гонин занимался также вопросами *упорядочения конечных проективных пространств и плоскостей.* Все понятия, характеризующие расположение элементов такого пространства, и плоскости в частности, определяются через одно основное понятие – разделение двух пар точек, составленных из четырех различных точек одной прямой: пара точек (A, B) *разделяет* пару (C, D), если сложное отношение $(ABCD)$ отрицательно, и *не разделяет*, если $(ABCD)$ положительно. Упорядочение обычной проективной плоскости, т. е. плоскости, построенной над полем вещественных чисел и называемой поэтому *вещественной*, связано с упорядоченностью этого поля.

К *упорядочению* других *проективных плоскостей*, в частности конечных, *возможны разные подходы.* Естественно, следует прежде всего упорядочить проективную плоскость по образцу вещественной. Поэтому не является сложным упорядочение дезарговых плоскостей, построенных над упорядоченными полями. Такой подход использовали в 50-х гг. XX в. E. Sperner [99, 100], P. Kustaanheimo [71, 72], G. Järnefelt [66], J. Lipman [74], F. Scherk [93]. При этом, если поле является конечным, то отношение порядка в плоскости над ним не может удовлетворять всем обычным аксиомам порядка, так как из них следует бесконечность точек прямой.

Более общим является другой подход, предложенный Евгением Григорьевичем Гониным в работе «О плоскостной аксиоме расположения проективной геометрии» [ч. V, 2]. Можно с самого начала перечислить все аксиомы, которым должно удовлетворять отношение порядка, а потом перейти к конструкции. Так как в случае конечной проективной плоскости все обычные аксиомы порядка выполняться не могут, то приходится выбирать ослабленную систему аксиом. Тогда представляется естественным сохранение наибольшего числа аксиом порядка, не противоречащих условию конечности плоскости.

Е.Г. Гонин предложил систему аксиом, полученную из обычных аксиом порядка удалением аксиомы о пяти точках. Он показал, что выбранная таким образом аксиоматика не противоречит конечности плоскости. Затем Евгений Григорьевич рассмотрел упорядочение проективной плоскости порядка 5, отметив, что аналогичным путем можно упорядочить все плоскости, порядок которых выражается простым числом вида $6n - 1$.

Под руководством Е.Г. Гонина работа была продолжена *Ольгой Моисеевной Поносовой*. Исследования показали, что наиболее существенным и технически сложным является упорядочение отдельной прямой на плоскости, так как при этом теряется ряд ограничений, задаваемых проективными преобразованиями прямой в себя. Поэтому для большей определенности задачи и возможности вложения прямой в плоскость вводилось дополнительное требование, следующее из трехкратной транзитивности группы проективных преобразований ряда точек в себя. Им, естественно, является трехкратная транзитивность группы автоморфизмов упорядоченной прямой, а из него следует условие: *для того чтобы прямую можно было проективно упорядочить, необходимо, чтобы число ее точек было кратно трем.*

О.М. Поносова доказала ***теорему*** о том, что *прямая, построенная над конечным полем, может быть проективно упорядочена, если и только если поле имеет порядок* $n = p^k > 2$, *где* p *– простое число вида* $3m - 1$, *а* k *– нечетное.*

Проективные упорядочения прямой, основанные на использовании сложных отношений четверок ее различных точек, названы *аналитическими*. О.М. Поносова показала, что на прямой порядка n возможно $3^{\left[\frac{n}{6}\right]}$ аналитических упорядочений, и доказала, что, *аналитически упорядочив конечную прямую порядка n, можно всегда аналитически упорядочить конечную проективную дезаргову плоскость и конечное m-мерное пространство* ($m \geq 3$) *этого же порядка* [31].

По сравнению с задачей нахождения всех аналитических упорядочений, более общей является задача *проективного упорядочения прямой*. Последняя решается комбинаторными методами.

Евгений Григорьевич Гонин предложил следующий *метод*. Рассматривается множество всех точек прямой, отличных от точек выбранной пары $\{A, B\}$. Две точки этого множества считаются связанными некоторым отношением, если они различны и составляют пару, разделенную парой $\{A, B\}$. Это отношение иррефлексивно и симметрично, а поэтому множество всех точек прямой, отличных от A и B, рассматриваемое с этим отношением, представляет неориентированный граф без петель, обозначаемый через Γ_{AB}. Его вершины изображаются точками плоскости, а ребра – отрезками. Для прямой порядка n такой граф имеет $n-1$ вершин; степень каждой из вершин равна $\frac{n-2}{3}$, общее число ребер $\frac{(n-1)(n-2)}{6}$. Требование трехкратной транзитивности группы G автоморфизмов прямой влечет транзитивность группы G_{AB} автоморфизмов прямой, сохраняющих пару $\{A, B\}$. Каждый автоморфизм группы G_{AB} порождает некоторый автоморфизм графа Γ_{AB}.

Однако граф может иметь и другие автоморфизмы. Группа его автоморфизмов обозначается через G_{AB}^*. Из трехкратной транзитивности G следует транзитивность группы G_{AB}, а отсюда – транзитивность G_{AB}^*. Это условие сильно ограничивает тип графа, и поэтому число возможных типов оказывается небольшим. Так, для 9 точек прямой граф должен иметь вид семиугольника; в случае 12 точек с парой рассматриваемых точек связан граф одного из трех видов. Один из них назван цилиндром, второй – листом Мебиуса, третий – графом Петерсена.

Из трехкратной транзитивности группы G следует транзитивность ее на парах точек, поэтому графы для всех пар точек изоморфны и имеют изоморфные группы автоморфизмов.

Для каждого возможного графа находятся затем совместные с ним графы для других пар точек. С этой целью используются свойства автоморфизмов прямой, в частности автоморфизмов, сохраняющих данную пару точек. Связав, например, с парой $\{A, B\}$ некоторый возможный граф Γ_{AB}, определяют группу G_{AB}^* автоморфизмов графа, а по ней – группу G_{AB} автоморфизмов прямой. Затем на прямой выбирают пару (C, D), разделяющую (A, B). Группы автоморфизмов G_{AB} и G_{CD} изоморфны. Это позволяет определить автоморфизмы прямой из группы G_{CD}, сохраняющие пары

(A, B) и (C, D). Наличие этих автоморфизмов налагает ограничения на выбор графа Γ_{CD}. Дальнейшее рассмотрение позволяет устранить ряд вариантов для его выбора. После этого (в немногих оставшихся случаях) получение графов для остальных пар проходит без противоречий и осуществляется однозначно до конца.

Результаты исследований О.М. Поносовой отражены в ее диссертации «Проективное упорядочение конечных прямых», где показано, что: прямые с 6 и 9 точками имеют, с точностью до изоморфизма, одно проективное упорядочение; прямые с 12 точками имеют три неизоморфных проективных упорядочения; все полученные таким путем проективные упорядочения прямых из 6, 9, 12 точек совпадают с аналитическими.

Разработанный метод дал возможность решить задачу о проективном упорядочении прямой из 15 точек. Так как поля из 14 элементов не существует, то поставленный вопрос можно было решить только комбинаторным путем; доказано, в частности, что на прямой из 15 точек проективное упорядочение ввести невозможно.

В работах О.М. Поносовой установлено, что, аналитически упорядочив конечную прямую порядка n, можно аналитически упорядочить конечную дезаргову плоскость и конечное m-мерное пространство ($m \geq 3$) этого же порядка [32].

С построениями конечных проективных плоскостей возникла *проблема их классификации*. Новые возможности для подхода к ее решению открыла введенная M. Hall'ом координатизация плоскостей, определенная им при помощи *тернарной операции*. Свойства последней оказались тесно связанными с *конфигурационными предложениями*. Конфигурация k реализуется в плоскости π, если k как подплоскость изоморфно отображается на некоторую ее подплоскость. Утверждение о том, что из реализуемости в π конфигурации со всеми инциденциями, кроме одной, вытекает реализуемость k со всеми инциденциями, называют *конфигурационным предложением,* или *конфигурационной теоремой*. Такие предложения могут вводиться в произвольную проективную плоскость только в качестве новых аксиом. При этом постулирование одной из них влечет справедливость других. Так, из теоремы Паппа следует теорема Дезарга. Следовательно, справедливость в π каких-либо конфигурационных предложений определенным образом организует его элементы. Изучение взаимосвязей тернаров и конфигурационных предложений привело к возникновению ряда задач теории конечных групп и, следовательно, конечных геометрий.

Свойства тернарной операции оказались тесно связанными также со свойствами групп коллинеаций изучаемых плоскостей. Такой подход к изучению *проективных плоскостей* впервые осуществил в 1946 г. R. Baer, отметивший взаимосвязь между теоремой Дезарга и существованием центральных коллинеаций. Введенное автором понятие (p, L)-транзитивности, соответствующее этой взаимосвязи, привело к новым результатам. С одной стороны, оно дало толчок к лучшему пониманию координатных структур, а с другой – стимулировало создание достаточно полной классификации проективных плоскостей, существующих к настоящему времени.

Изучение множеств (p, L)-транзитивностей является основным подходом к классификации конечных проективных плоскостей. R. Baer назвал проективную плоскость π *(p, L)-транзитивной*, если она содержит точку L и прямую p, такие, что для каждой пары точек P и P' ($P, P' \in p$, $P, P' \not\equiv L$; $PL \not\equiv P'L$) существует (p, L)-перспективность, ставящая в соответствие точке P точку P'.

С 1954 г. N. Lenz изучал множества (p, L)-транзитивностей, для которых $L \in p$. Позже A. Barlotti дал классификацию плоскостей, полученных Lenz'ем, используя ограничение $L \in p$. В результате исследований авторы получили 53 возможности для групп коллинеаций проективных плоскостей и, как следствие, столько же типов конечных проективных плоскостей.

Проблема *существования* проективных плоскостей различных типов изучалась многими авторами, но до сих пор полностью не решена.

Среди множества всех проективных плоскостей особую роль играют *трансляционные*. Классификация, введенная Lenz'ем и Barlotti, является недостаточно подробной. Для некоторых классов плоскостей она далека от полного их исследования. Детальное изучение плоскостей трансляций выполнил T.G. Ostrom в своих многочисленных работах, а также в 80-х гг. XX столетия – H. Lüneburg [78].

Проблемы, связанные с классификацией проективных плоскостей, интересны, как мы полагаем, при исследовании характеристических свойств новых типов плоскостей, рассмотрении и систематизации большого числа уже полученных плоскостей, нахождении их новых видов, принадлежащих *a priori* к возможному классу.

Существование четырех проективных плоскостей порядка 9 стало известно с 1907 г. Именно тогда O. Veblen и J.M. Wedderburn получили первые недезарговы, а значит, и непаскалевы геометрии. Вместе с дезарговой плоскостью порядка 9, построенной годом раньше O. Veblen'ом и Bussey'ем, до 1991 г. существовали четыре плоскости порядка 9: хьюзова, трансляционная, двойственная ей плоскость сдвигов и дезаргова.

На протяжении более восьмидесяти лет предпринимались многочисленные, но безуспешные попытки поиска плоскостей этого порядка, отличных от уже имеющихся. В результате плоскости над латинскими квадратами и над алгебраическими структурами либо не строились, либо получались только известные четыре.

В 1991 г. C.W.H. Lam, G. Kolesova и L. Thiel опубликовали статью [73], в которой описали процедуру построения таких плоскостей. При помощи первой компьютерной программы были получены все неизоморфные между собой латинские квадраты порядка 8. Их оказалось 283 657. Каждый из них дал матрицы инцидентности из 27 столбцов. Вторая программа на ЭВМ расширила каждую из этих матриц до 40 столбцов. Только 21 из матриц могла быть составлена таким образом. В результате получилось 326 матриц инцидентности, состоящих из 40 столбцов. Компьютерная программа пыталась доукомплектовать их. Только одна матрица из этого числа не была дополнена, остальные же 325 приведены к требуемому виду. Третья (тестирующая) программа находила изоморфные между собой матрицы из числа 325, отмечая этот факт, равно как и группы их коллинеаций. Полученные данные затем сопоставлялись с описаниями четырех известных плоскостей. При этом никаких новых плоскостей получено не было.

Авторы сделали вывод: так как корректность компьютерной программы очевидна, а результаты опирались на информацию об известных плоскостях и ассоциированных с ними латинских квадратах, то других проективных плоскостей порядка 9, отличных от четырех известных, нет.

Заметим, что еще в 1978 г. четыре московских ученых выполнили построение с помощью ЭВМ всех попарно неизоморфных латинских квадратов порядка 8 [2]. Таких квадратов оказалось 283 640. Число же квадратов в статье [73] отличается от этого числа на 17. Общее же число приведенных латинских квадратов порядка 8 оказалось 535 281 401 856, т. е. тем же.

Для каждого из неизоморфных квадратов порядка 8 авторы статьи [73] нашли группы автоморфизмов и объединили их в 33 класса изоморфизма.

Как видно, во всех попытках получения проективных плоскостей порядка 9 использовались латинские квадраты порядка 8.

Другие виды конечных геометрий

С 1940-х гг. опережающе по сравнению с классическими дисциплинами стала развиваться дискретная математика. Поэтому и в одной из составных частей ее – комбинаторном анализе – произошел научный «взрыв». Конечные геометрии и, в частности, конечные проективные плоскости привлекли внимание многих ученых широтой приложений и нерешенными проблемами их внутренней структуры. Изучались и другие виды конечных геометрий, плоских и пространственных. К 1970-м гг. только плоских конечных геометрий насчитывалось более шестидесяти. Е.Г. Гонин получал сведения о самых последних исследованиях, как говорится, из первых рук.

В Советском Союзе первые исследования по конечным геометриям стали выполнять преподаватели и аспиранты под руководством Е.Г. Гонина. Иногда новые научные результаты получали известные зарубежные ученые, иногда – пермские. Е.Г. Гонин генерировал идеи, разрабатывал и создавал новые методы и приемы эффективного решения вопросов, позволяющих уменьшать объем перебора вариантов. К их числу можно отнести *методы поэтапных отождествлений* и *клик*, а также разработанные под его руководством *средства малой механизации*. Евгений Григорьевич сам активно включался в процесс исследований.

Как отмечалось выше, если в конечной плоскости для каждой пары $[P, l]$, состоящей из точки P и прямой l ($P \notin l$), число прямых m_i ($P \in m_i$), не пересекающих l, равно 0 или 1, то она является *проективной* или *аффинной*, соответственно. Допуская, что число таких прямых больше 1, приходят к конечным *плоскостям Больяи – Лобачевского*. Они, как видно, являются обобщением конечных аффинных и проективных плоскостей. К середине 1960-х гг. определение таких плоскостей еще окончательно не установилось. В то время авторы придерживались определения, которое дал L. Szamkolowicz [105]. Первые попытки их построения принадлежали B.J. Topel [107] и R. Baer [40]. Результаты их исследования показали, что таких плоскостей не существует. Однако следует подчеркнуть, что система аксиом для определения конечной плоскости Больяи – Лобачевского (обозначаемой через B – L), введенная этими авторами, была более сильной по сравнению с той, которую представил в 1962 г. L. Graves [57].

Инцидентностная структура в [57] называется регулярной конечной (B – L)-плоскостью, если она состоит из двух непересекающихся множеств, называемых *точками* и *прямыми*, с *симметричным отношением инцидентности*, способным связывать точку и прямую, и удовлетворяет следующей системе аксиом:

A_1. Через любые две точки проходит только одна прямая.

A_2. Для каждой прямой существует точка, не лежащая на ней.

A_3. На каждой прямой лежит не менее двух точек.

A_4. Существует по крайней мере одна прямая.

A_5.Через данную точку P ($P \notin l$) проходит k ($k \geq 2$) прямых.

Из A_1 – A_5 следует справедливость *основной теоремы*: если на одной прямой лежат n точек, то:

а) на каждой прямой лежат n точек;

б) через каждую точку проходит $n + k$ прямых;

в) общее число точек плоскости равно $(n + k)(n - 1) + 1$;

г) общее число прямых плоскости равно

$$((n+k)(n-1)+1)\cdot\frac{(n+k)}{n}.$$

Доказательство а) – г) не представляет труда. В частности, подсчет точек в B – L производится следующим образом. Пусть l – любая прямая. Тогда по а) на ней лежат n точек $P_i (i = \overline{1;n})$. По A_2 и A_1 существует P ($P \notin l$) и n прямых, проходящих через P и P_i. Кроме того, имеется еще k прямых (по A_5), инцидентных P и не пересекающих l. Каждая из этих $n + k$ прямых в соответствии с а) содержит n точек, а потому на любой из них расположены $n - 1$ точек, отличных от P. Следовательно, в плоскости существует по крайней мере $(n + k)(n - 1) + 1$ точек. Легко доказать, что большего числа точек не может быть.

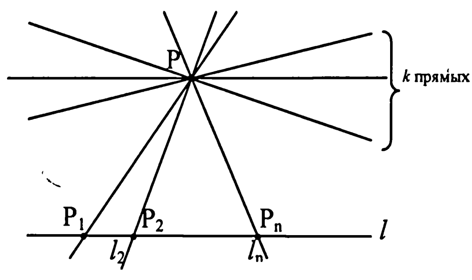


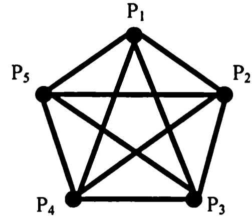
Рис. 2

Для доказательства г) рассматривают число $r = (n + k)(n - 1) + 1$ точек плоскости. По A_1 имеется самое большее C_r^2 прямых. Но так как на каждой из них лежат n точек и любые две точки определяют прямую, то каждая прямая при этом была подсчитана C_n^2 раз. Поэтому общее число прямых плоскости равно $C_r^2 : C_n^2 = \dfrac{((n+k)(n-1)+1)(n+k)}{n}$ (рис. 2).

Как следует из определения, при $k = 1$ и $k = 0$ регулярные плоскости называются *аффинной и проективной* соответственно. При $k > 1$ – *регулярной конечной плоскостью Больяи – Лобачевского*. В такой плоскости все прямые содержат одно и то же число $k \geq 2$ точек, и через каждую точку проходит одно и то же число $l \geq 3$. Ряд авторов обозначал их Π_l^k. Такие плоскости стали изучать лишь с середины 1960-х гг., и результаты еще не были значительными. Для различных типов Π_l^k не был решен вопрос их существования, не были изучены свойства таких плоскостей. В своих работах B.J. Topel [107] и R. Baer [40] описали регулярные конечные плоскости лишь с тремя точками на прямой, L. Graves [57] – плоскости, в которых прямые содержат неодинаковое число точек. Такие плоскости назвали *нерегулярными конечными плоскостями Больяи – Лобачевского*.

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}
P_1	●	●	●	●						
P_2	●				●	●	●			
P_3		●			●			●	●	
P_4			●			●		●		●
P_5				●			●		●	●

а



б

Рис. 3

Примерно в это же время* наряду с зарубежными учеными исследования в данном направлении выполнялись под руководством Евгения Григорьевича Гонина. Его ученики Н.К. Пухарев и А.Е. Малых решали комбинаторными методами задачи, связанные со структурой таких плоскостей при небольших значениях n и k. Для простейшего случая при $n = k = 2$ А.Е. Малых описала такую плоскость матрицей инцидентности и неориентированным графом (рис. 3 а, б). Она изучала также B – L (n, n)– плоскости для $n = 3, 4, 5$. В двух последних случаях общее число точек и прямых, содержащихся в них, равно соответственно 25 и 50; 41 и 82. Кроме методов задания и выполнения комбинаторных вычислений, изучались также виды коллинеаций в каждой из плоскостей.

Нетрудно построить неоднородные B – L (2, 3) и B – L (2, 4). Особый интерес представляет плоскость B – L (3, 4). При изучении ее структуры оказалось, что она имеет тесную связь с широко известными расположениями – тройками (системами) Киркмана. В 1850 г. Киркман сформулировал в привлекательном виде задачу о 15 школьницах: «Учительница ежедневно выводит на прогулку 15 девочек, выстраивая их в 5 рядов по 3 школьницы в каждом. Нужно расставить их таким образом, чтобы в течение 7 последовательных дней недели ни одна из девочек не гуляла со своими школьными подругами в любой тройке более одного раза». В последующем такой набор расстановок стали называть Киркмановским расположением. Лишь в конце XIX в. выяснилось, что его можно рассматривать как систему троек Я. Штейнера с параллелизмом. Последняя же трактуется в комбинаторном анализе блок-схемой S (2, 3, 15). Таблица инцидентности для B – L (3, 4) представлена на рис. 4. Плоскость такого вида является *неоднородной*, так как для каждой пары (A, B) ее точек не существует коллинеации, переводящей A в B.

	l_1	l_2	l_3	l_4	l_5	l_6	l_7	l_8	l_9	l_{10}	l_{11}	l_{12}	l_{13}	l_{14}	l_{15}	l_{16}	l_{17}	l_{18}	l_{19}	l_{20}	l_{21}	l_{22}	l_{23}	l_{24}	l_{25}	l_{26}	l_{27}	l_{28}	l_{29}	l_{30}
P_1	•					•					•					•					•					•				
P_2	•						•					•					•					•					•			
P_3	•							•					•					•					•					•		
P_4		•				•								•					•				•				•			
P_5			•			•									•			•						•					•	
P_6				•					•		•							•							•		•			
P_7					•					•	•									•			•							
P_8		•					•								•	•									•					•
P_9					•				•			•				•								•				•		•
P_{10}			•				•							•						•	•							•		
P_{11}				•						•		•							•		•								•	
P_{12}		•								•			•				•									•				
P_{13}				•				•							•					•				•		•				
P_{14}					•			•						•			•					•			•				•	
P_{15}			•						•				•						•			•								•

Рис. 4

Важнейшими задачами теории являются проблема существования для каждой пары натуральных чисел k и n плоскостей B – L (n, k), нахождения их числа, а также выяснение ограничений, налагаемых на n и k. В этом направлении были сделаны лишь первые шаги. T.G. Ostrom получил в 1962 г. бесконечный класс B – L (n, k) плоскостей для $n = 2m + 1$ и $n \not\equiv 1 \ (mod\, 8)$ [83].

Год спустя R. Sandler [89] дал метод построения еще одного бесконечного класса B – L (n, k) плоскостей и выяснил ряд их интересных свойств. Метод аналогичен построению аффинной плоскости из проективной. Пусть π – проективная плоскость порядка n ($n \geq 7$), а π_0 – множество точек, полученное удалением из π точек трех неконкурентных прямых, и множество прямых при удалении l_1, l_2, l_3 из всей совокупности прямых π. Тогда, как легко проверить, в π_0 выполняются $A_1 - A_5$.

Для проверки *однородности* B – L (n, k) R. Sandler исходил из того, что любая коллинеация π, отображающая l_1, l_2, l_3 на них же, индуцирует коллинеацию в π_0. Если π – дезаргова плоскость, то группа ее коллинеаций транзитивна на четырехвершинниках. Подгруппа ее, сохраняющая $l_i \cap l_j$ (i, j = 1, 2, 3), индуцирует группу коллинеаций плоскости π_0, транзитивную на ней, а потому π_0 – однородная.

S. Gess построил несколько бесконечных классов конечных однородных B – L (n, k) плоскостей и решил частный вопрос их существования: если $k(k-1) \not\vdots n$, то B – L (n, k) не существует. Доказательство очевидно: пусть B – L (n, k) построена, тогда по пункту г) число прямых в ней равно $r = \frac{((n+k)(n-1)+1)(n+k)}{n}$, где $n \in$ N. Выполнив тождественные преобразования, получим $r = n^2 + (2k-1)n + (k-1)^2 - \frac{k(k-1)}{n}$. Отсюда следует, что $k(k-1) \vdots$ n, что противоречит условию. Из этой теоремы вытекает, в частности, несуществование B – L (3, 2). Нетрудно показать также, что для $n > 2$ плоскостей B – L (n, 2) не существует.

S. Gess сформулировал, вместе с тем, и ряд нерешенных проблем:

- во всех ли случаях, когда $k(k-1) \vdots$ n, существует B – L (n, k);
- существует ли B – L (n, 3) для любого $n \in$ N, не запрещенного условием $k(k-1) \vdots$ n и др.

Глубокие исследования в этом направлении представлены в 1960-х гг. в диссертационном исследовании ученика Евгения Григорьевича Гонина *Николая Кузьмича Пухарева* «О регулярных конечных плоскостях и A_n^k-алгебрах». В ней рассмотрены вопросы существования и установлены некоторые свойства отдельных типов плоскостей Π_l^k (обозначение автора). С последними тесно связан специальный класс квазигрупп, называемых A_n^k-алгебрами. Поэтому основное внимание уделено изучению этих структур с целью построения над ними плоскостей.

A_n^k-алгеброй Н.К. Пухарев назвал конечную идемпотентную квазигруппу порядка n, в которой любая пара различных элементов a и b порождает подквазигруппу $M(a, b)$ одного и того же порядка k. Такое определение обобщает определения A_n^3 и A_n^4-алгебр, которые дал L. Szamkolowicz [105]. Заметим, что подквазигруппа $M(a, b)$ является подалгеброй A_k^k.

Квазигруппы, аналогичные описанным Н.К. Пухаревым, рассматривали также T.G. Ostrom и R. Sandler в [83] и [89]; при этом последний одновременно с Н.К. Пухаревым построил квазигруппы, являющиеся во введенной терминологии дважды транзитивными A_n^k-алгебрами.

При получении некоторых свойств Π_{k+m}^k Н.К. Пухарев показал, что если плоскость Π_{k+p}^k содержит подплоскость, то $m \geq (k-1)^2 + p(k-1)$.

Отсюда следует *необходимое условие вложимости* конечных проективных плоскостей Π_k^k в конечные плоскости Больяи – Лобачевского Π_l^k, где $k = 2^n$ и $l = 2k + 1$ [33].

В диссертации рассмотрена возможность *построения более сложных плоскостей* Π_l^k из некоторых *простых*. Доказаны утверждения о том, что:

• если существуют плоскости Π_l^k и $\Pi_{l_1}^{k_1}$, где $k_1 = l(k-1) + 1$, то существует и плоскость $\Pi_{ll_1}^k$;

• если существуют плоскости Π_l^k и Π_{k+1}^k, то существует плоскость Π_{lk+1}^k;

• существование плоскостей Π_l^k и Π_k^k влечет существование плоскости $\Pi_{l(k-1)+1}^k$.

К результатам диссертации относится также *способ построения плоскостей* типов $\Pi_{ll_1}^k$, Π_{lk+1}^k и $\Pi_{l(k-1)+1}^k$. В изучаемых плоскостях рассмотрены коллинеации Π_l^k и выяснены их простейшие свойства. В частности, если p – число двойных точек, а p' – количество двойных прямых коллинеации φ, то справедливо неравенство $n + p(l-1) \leq h + p'(k-1)$, где n – число всех точек, а h – число прямых плоскости Π_l^k. Если же коллинеация φ такова, что прямые s и $\varphi(s)$ всегда имеют точку пересечения, то получают равенство $n + p(l-1) = h + p'(k-1)$.

Подплоскость $\Pi_0 \subset \Pi_l^k$ названа *базой коллинеации*, если каждая точка в Π_0 является двойной и каждая прямая плоскости Π_l^k содержит по крайней мере одну точку, принадлежащую Π_0. Коллинеация, имеющая базу и центр, вполне определяется парой соответственных точек и обладает некоторыми свойствами, аналогичными свойствам гомологий проективных плоскостей.

Н.К. Пухаревым изучена также *связь A_n^k-алгебр с регулярными конечными плоскостями* [34]. В частности, рассмотрены вопросы существования и свойства A_n^k-алгебр, являющихся координатизационными системами для некоторых типов плоскостей Π_l^k. Доказано, что:

• любая A_n^k-алгебра порождает плоскость Π_l^k, где $l = (n-1)(k-1)$, если точками назвать элементы алгебры, а прямыми – подквазигруппы М. Справедливо и обратное: плоскость Π_l^k определяет A_n^k-алгебру, где $n = l(k-1)+1$, если существует A_n^k-алгебра. При этом одна и та же плоскость может определять неизоморфные A_n^k-алгебры;

• существование $A_{n_1}^k$ и $A_{n_2}^k$-алгебр, в которых все подалгебры М попарно изоморфны и дважды транзитивны, влечет существование алгебры $A_{n_1 n_2}^k = A_{n_1}^k \times A_{n_2}^k$. Последнее утверждение обобщается на случай любого конечного числа множителей, что приводит к положительному решению проблемы P_{376} L. Szamkolowicz'a о существовании $A_{n_1 n_2 \cdots n_m}^4$ при условии, что существуют $A_{n_1}^4$, $A_{n_2}^4$, ..., $A_{n_m}^4$.

Автор показал построение A_n^k-алгебр на основе некоторых абелевых групп, названных $N(n, k)$-группами. Такая группа определена как конечная абелева группа n-го порядка, обладающая таким автоморфизмом α, что при любом $a \neq 0$ множество $N_a = \{0, a, \alpha a, \ldots, \alpha^r a, \ldots\}$ является подгруппой порядка k. Из любой $N(n, k)$-группы A_n^k-алгебра получается введением операции, определенной следующим образом: $a \circ b = a + \alpha(b-a)$.

Если подгруппы $N_a \subset N(n_1, k)$ и $N_a \subset N(n_2, k)$ обладают изоморфизмом с определенными свойствами, то $N(n_1, k) \times N(n_2, k) = N(n_1 n_2, k)$.

Показано существование $N(n, k)$-групп, а следовательно и A_n^k-алгебр, при k, равном степени простого числа, и $n = k^m$. Отсюда следует и существование соответствующих плоскостей Π_l^k. В A_n^k-алгебре, построенной на основе $N(n, k)$-группы, имеет место равенство: $(a^r \circ b)^s \circ (c^r \circ d) = (a^s \circ c)^r \circ (b^s \circ d)$, где $a' \circ b = a \circ b$, $a^{r+1} \circ b = a \circ (a^r \circ b)$ при любых $a, b \in A_n^k$. Отсюда, в частности, следуют равенства: $(a \circ b) \circ (a \circ d) = a \circ (b \circ d)$ и $(a \circ b) \circ (c \circ b) = (a \circ c) \circ b$, т. е. дистрибутивность операции относительно себя, а также $(a \circ b) \circ a = a \circ (b \circ a)$.

Показано также построение A_n^k-алгебр на основе конечной алгебраической системы V порядка k, в которой определены две бинарные операции: сложение (+) и умножение (·), удовлетворяющие условиям:

1. элементы, принадлежащие V, по сложению образуют $N(k, k)$-группу;

2. отличные от нуля элементы из V по умножению образуют квазигруппу;

3. $(a+b)\cdot m = a\cdot m + b\cdot m$;

4. $a\cdot 0 = 0$ при любом $a \in$ V.

Пусть α – автоморфизм, входящий в определение $N(k, k)$-группы, а β – произвольный автоморфизм $N(k, k)$-группы. Из элементов, принадлежащих V, Н.К. Пухарев образовал упорядоченные пары и на множестве пар определил операцию $\circ$ следующим образом:

$$(a, b)\circ(c, d) = (a + \alpha(c-a), \varphi(c\text{-}a, b, d)),\ \text{где}$$

$$\varphi(c-a,b,d)=\begin{cases} b+\alpha(d-b) \text{ при } a=c, \\ b+\beta\alpha(c-a)\cdot z \text{ при } a\neq c, \end{cases}$$

а z определяется из уравнения $d-b=\beta(c-a)\cdot z$.

Множество пар является $A^k_{k^2}$-алгеброй относительно операции $\circ$ A^k_n-алгебры, построенных на основе системы V, вообще говоря, отличны от алгебр, построенных над $N(n, k)$-группами.

Доказано, что имеют место предложения:

• если существуют A^k_n и $A^{k_1}_{n_1}$, где $k_1 = n$, то существует $A^k_{n_1}$;

• если существуют A^k_n и $A^k_{k^2}$, то существует A^k_{nk};

• существование A^k_n и $A^k_{n_1}$, где $n_1 = k^2 - k + 1$ влечет существование $A^k_{n(k-1)+1}$.

Последнее предложение обобщает теорему 3.3, доказанную B.J. Topel'ем для $k = 3$.

Утверждается существование A^k_n-алгебр при k, отличном от степени простого числа; приведены примеры A^6_6 и A^{10}_{10}.

В заключении исследования Н.К. Пухарев рассмотрел вопрос о координатизации одного типа плоскостей Π^k_l, т.е. аффинных плоскостей Π^k_{k+1}. Он показал, что довольно широкий класс конечных аффинных плоскостей наряду с хорошо известной координатизацией посредством систем с двумя бинарными операциями может быть координатизирован группоидом S с операцией $\circ$, удовлетворяющей условиям:

1. S содержит такие различные элементы e и z, что $a\circ e = a$ и $(a\circ z)\circ z = a$ при любом $a \in S$;

2. если $a\circ c = b\circ c$, то $a = b$;

3. для любых x_1, x_2, y_1, y_2 $(x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2)$ существует такая пара (a, b), что выполняются равенства: $y_1 = (x_1\circ a)\circ b$, $y_2 = (x_2\circ a)\circ b$.

При этом точки задаются парами (x, y), а прямые – уравнениями вида: $x = c, y = c, y = (x \circ a) \circ b$. Группоиды S с указанными свойствами могут быть получены на основе конечных почти-полей, если операцию $\circ$ определить (для правого почти-поля) следующим образом: $x \circ e = x$, $x \circ a = a - (x - e)(e - z)^{-1}(e - a)$, при $a \neq e$, где e и z – фиксированные различные элементы.

Н.К. Пухаревым рассмотрена также возможность получения одних группоидов требуемого вида из других.

С 1930-х гг. наряду с интенсивным исследованием аффинных и проективных плоскостей стали изучать ***инверсные плоскости***. Это инцидентностные структуры, состоящие из двух множеств, называемых соответственно *точками* и *окружностями*, с симметричным отношением инцидентности I, способным связывать точки и окружности, удовлетворяющие следующим аксиомам:

A_1. через каждые три различные точки проходит одна и только одна окружность;

A_2. через точку, не лежащую на окружности, проходит одна и только одна окружность, касающаяся данной в указанной точке;

A_3. существуют по крайней мере четыре различные точки, не лежащие на одной окружности.

Многие авторы для *инверсной плоскости* использовали другие термины: G. Ewald, P. Dembowski, G. Lüneburg, K. Hering называли ее *мебиусовой*, *круговой*; W. Benz – *мебиусовой плоскостью в узком смысле* или *конформной*.

Конечная круговая плоскость характеризуется порядком – натуральным числом $n \geq 2$. *Связкой* называется множество всех окружностей, проходящих через две различные точки, – ее *носители*. Совокупность всех связок инверсной плоскости $\mathcal{J}$ обозначают через $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{J})$. Множество всех взаимно касательных окружностей, проходящих через данную точку, называется *касательным пучком* в этой точке. Он единственным образом определяется либо двумя его окружностями, либо точкой и любой из окружностей. Совокупность всех пучков $\mathcal{J}$ обозначают через $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{J})$.

Еще одно множество – *flock* (*семейство*) – образуют взаимно непересекающиеся окружности. В них каждая точка плоскости $\mathcal{J}$, за исключением двух, называемых *носителями*, необязательно находится на единственной окружности. Существование флоков не столь очевидно, как пучков и связок: они могут и не определяться своими носителями. Две различные окружности называются либо *непересекающимися*, либо *касательными*, либо *пересекающимися* в зависимости от числа 0, 1, 2 точек их пересечения.

Одним из *способов построения* инверсной плоскости является нахождение ее элементов путем пересечения овоида в трехмерном проективном пространстве V плоскостями. Таким путем строили плоскости $\mathcal{J}$ P. Dembowski [48] и G. Valette [108]. Под *овоидом* в V подразумевается множество точек $\mathcal{D}$ такое, что:

– любая прямая из V пересекает $\mathcal{D}$ не более чем в двух точках;

– объединение всех прямых, пересекающих $\mathcal{D}$ в одной и только одной точке P, представляет плоскость пространства V, называемую *касательной* к $\mathcal{D}$ в точке P.

Пусть $\mathcal{D}$ – овоид в PG(3) и $\mathcal{J}(\mathcal{D})$ – соответствующая ему инверсная плоскость. Если l – любая прямая в PG(3), то плоскости, проходящие через l и являющиеся окружностями в $\mathcal{J}(\mathcal{D})$, образуют связку, пучок или флок $\mathcal{J}(\mathcal{D})$ в зависимости от того, имеет ли l и $\mathcal{D}$ 2, 1 или 0 общих точек соответсвенно. Наоборот, каждая связка или пучок $\mathcal{J}$ могут быть интерпретированы таким образом, но для флоков это, вообще говоря, неверно.

Точками инверсной плоскости $\mathcal{J}(\mathcal{D})$ являются точки овоида $\mathcal{D}$, а окружностями – подмножество точек пересечений $\mathcal{D}$ с плоскостями V, содержащими более одной точки.

Инверсная плоскость называется *овоидальной*, если и только если она изоморфна некоторой $\mathcal{J}(\mathcal{D})$ для соответствующего $\mathcal{D}$. P. Dembowski и D. Hughes назвали ее еще *яйцеобразной* (egglike).

В 1957 г. Bamette получил инверсную плоскость порядка 3, точками которой являются точки поверхности второго порядка $x_1^2 + x_2^2 - x_0x_3 = 0$ в трехмерном проективном пространстве над GF(3), а окружностями – плоские сечения этой поверхности. P. Dembowski изучал инверсные плоскости четного порядка и доказал, что они могут быть интерпретированы овоидами в PG(3) с окружностями, получающимися при сечении их плоскостями. Примерами овоидов являются квадрики [47]. В конечном проективном пространстве, построенном над GF(n), при

$n = 2k + 1$ каждый овоид является квадрикой, а при $n = 2m$, где $m = 2k + 1$ и $m > 1$, в V имеются овоиды, не являющиеся таковыми.

Если в инверсной плоскости одну из точек P принять за *несобственную* и удалить, причем оставшиеся считать обыкновенными, а окружности, проходящие через P, прямыми, сохранив отношение инцидентности, то полученное множество точек и прямых удовлетворяет всем аксиомам аффинной плоскости. Легко установить, что все аффинные плоскости, построенные из данной инверсной, имеют один и тот же порядок. Его называют *порядком* $\mathfrak{J}$ и обозначают через n. Инверсная аффинная плоскость порядка n обладает следующими свойствами:

– на каждой окружности лежит $n + 1$ точек;

– число всех точек плоскости, окружностей пучка и связки равно соответственно $n^2 + 1$, $n + 1$, $n(n + 1)$;

– число всех окружностей равно $n(n^2 + 1)$;

– каждый касательный пучок и флок состоят из n и $n - 1$ окружностей соответственно;

– каждая окружность является касательной к $n^2 - 1$ другим и не пересекает $\frac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ окружностей.

Двумя основными *конфигурационными предложениями*, реализуемыми в инверсной плоскости, являются *теоремы связок* (или *пучков*) *Miquel'я* (Микеля). 4-*цепью* называют любую четверку окружностей C_1, C_2, C_3, C_4, никакие три из которых не имеют общих точек, но $C_i \cap C_{i+1} \neq \varnothing$ (индексы берутся по (mod 4). Пусть $C_i \cap C_{i+1} = \{A_i, B_i\}$ (*), где $A_i \equiv B_i$ не исключается, но A_i – различные точки. Тогда в инверсной плоскости выполняется ***теорема связок***: *для любой 4-цепи связки (пучки) $C_1, \ldots, C_4$, определяемые C_1, C_2 и C_3, C_4, имеют общую окружность тогда и только тогда, когда связки (пучки), определяемые C_1, C_3 и C_2, C_4, имеют общую окружность*. Заметим, что при этом оба пересечения содержат самое большее одну окружность, если $A_i \neq B_i$ $(i = \overline{1;4})$.

Теорема связок утверждает, что A_1, B_1, A_3, B_3 *концикулярны*, если и только если A_2, B_2; A_4, B_4 *концикулярны* (рис. 5).

Инверсная плоскость $M(q)$ называется *микелевой*, если в ней выполняется ***теорема Miquel'я***: для любой 4-цепи с условием (*) A_1, A_2, A_3, A_4 концикулярны, если и только если B_1, B_2, B_3, B_4 концикулярны (рис. 6).

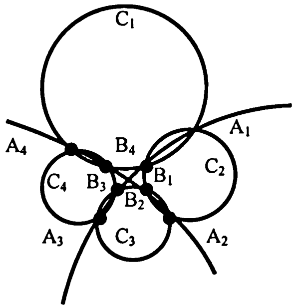


Рис. 5

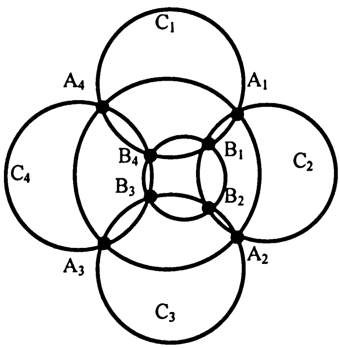


Рис. 6

Использование указанных выше конфигурационных предложений и понятие *овоидальности* приводит к ***теореме***: *всякая овоидальная плоскость удовлетворяет теореме связок*. Справедливость обратного утверждения пока не доказана. Важным является и другой вывод, следующий из результатов исследования, которые получили B.L. Van der Waerden, L.J. Smid в 1935 г. [109], а также W. Benz в 1958 г. [41]: *инверсная плоскость тогда и только тогда микелева, когда она представлена как $\mathfrak{J}(q)$ с q нелинейчатой квадрикой в трехмерной геометрии над полем.* Отсюда непосредственно следует ***теорема***: *микелевы инверсные плоскости являются овоидальными.*

Ученые второй половины XX столетия микелевы инверсные плоскости M(q) определяли различными способами. Были получены интересные результаты. Кроме того, предпринимались попытки их классификации, которая была тесно связана с изучением групп автоморфизмов Г этих плоскостей, в частности дилатаций и трансляций. Однако полной классификации конечных инверсных плоскостей и их групп автоморфизмов до сих пор не получено.

Имеется еще один класс конечных инверсных плоскостей. Геометрически такая плоскость S(q) представляет систему точек и плоских сечений овоида $t(\varphi)$. С комбинаторных позиций S(q) получается из следующих рассмотрений M. Suzuki 1962–1964 гг. [103, 104]. Пусть $q = 2^{2m+1}$, $m>0$ и $\Gamma = Sz(q)$ – группа Сузуки порядка $q^2(q^2+1)(q-1)$. Она дважды транзитивна на $q^2 + 1$

точках овоида $\mathcal{D} = t(\varphi)$ в $\mathcal{P}(3, q)$. Пусть плоскость α в $\mathcal{P}(3, q)$ имеет более одной общей точки с $\mathcal{D}$, а $\mathcal{B} = t(\varphi) \cap \alpha$. Тогда $\mathcal{D}(t(\varphi), \Gamma, \mathcal{B})$ является блок-схемой, приводящей к инверсной плоскости $\mathrm{S}(q)$, неизоморфной $\mathrm{M}(q)$. В ней также $n = q$. Алгебраически $\mathrm{S}(q)$ определил D.R. Hughes (1962).

Приведенные выше факты убеждают в том, что из теоремы Микеля следует теорема связок. Другими словами, имеется та же логическая связь между теоремами Микеля и связок, что и между теоремами Паппа и Дезарга в обычной проективной плоскости. Однако для конечного случая эта аналогия нарушается: $\mathrm{S}(q)$ – овоидальны, следовательно, удовлетворяют теореме связок, но не являются микелевыми. В общем же случае имеются не овоидальные инверсные плоскости. Относительно последних, порядка n, вопрос их существования остался открытым.

W. Benz определил *F-плоскость* как инверсную, дополненную аксиомой: если C касается трех различных окружностей касательного пучка α, то она принадлежит α. Важный результат в этом направлении был получен и P. Dembowski в 1964, 1965 гг. [47, 48]: *пусть в инверсной плоскости порядка n $\mathcal{B}$ – пучок, а C – окружность, не инцидентная носителю $\mathcal{B}$. Тогда*:

а) если n – нечетное число, то C касается точно одной окружности пучка;

б) если n – четное, то C или не касается, или касается в точности двух окружностей пучка.

Заметим, что, используя терминологию, которую предложил W. Benz [41, 42], из б) следует, что *каждая конечная инверсная плоскость является F-плоскостью.*

При изучении инверсных плоскостей важным является понятие *ортогональности*. Под ним понимают отношение $\perp$, заданное на *множестве окружностей*, которое удовлетворяет условиям:

а) $C \perp D \iff D \perp C$;

б) если даны две различные точки и окружность, проходящая через одну из них, то существует единственная окружность, проходящая через данные точки и ортогональная данной окружности;

в) если C ортогональна каждой из двух окружностей пучка $\mathcal{B}$, то она ортогональна и всем окружностям этого пучка.

Окружность называется *изотропной*, если она ортогональна самой себе, и *неизотропной* – в противном случае. Использование ортогональности позволяет получить ***признак овоидальности плоскости***: *конечная инверсная плоскость является овоидальной, если и только если она допускает ортогональность* и, как оказалось впоследствии, в количестве не более одной. Наконец, *каждая инверсная плоскость четного порядка*, равного степени числа 2, *является овоидальной* и, следовательно, удовлетворяет теореме связок [47, 48].

Что касается *инверсных плоскостей нечетного порядка*, то из анализа результатов исследований ученых следует, что они допускают ортогональность тогда и только тогда, когда плоскости являются микелевыми. На важный вопрос о *существовании конечных инверсных плоскостей* отвечает теорема P. Dembowski и D.R. Hughes [51], полученная в 1965 г.: *если инверсная плоскость порядка n имеет собственную подплоскость порядка m*, то $m \equiv n \pmod 2$ *и* $m^2 + m \leq n$. Заметим, что этот результат более строгий, чем аналогичное заключение для конечных проективных плоскостей.

С 60-х гг. XX в. исследованиями в области инверсных круговых плоскостей занималась ученица Е.Г. Гонина *Лидия Ивановна Истомина*. Как отмечалось выше, конечные круговые плоскости строились путем пересечения овоида в проективном трехмерном пространстве плоскостями. Однако таким способом можно получить лишь некоторые типы круговых плоскостей. Для нахождения *всех* типов Е.Г. Гонин предложил другой *подход*, который использовала Л.И. Истомина.

При удалении любой точки круговой плоскости оставшиеся точки вместе с окружностями, проходящими через нее, образуют аффинную плоскость, в которой все остальные окружности являются k-дугами, т. е. множеством из k точек, не коллинеарных по три. Поэтому, наоборот, любая круговая плоскость может быть получена из аффинной добавлением одной точки, принятием всех прямых за окружности, проходящие через эту точку, и добавлением новых окружностей из числа дуг аффинной плоскости.

Для построения круговой плоскости порядка n необходимо существование аффинной плоскости того же порядка. Последняя существует и является дезарговой, если $n = p^k$, где p – простое число, k – любое натуральное. Аффинная плоскость не существует, если $n \equiv 1(mod\ 4)$ или $n \equiv 2(mod\ 4)$ и n невозможно представить в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

Л.И. Истомина рассматривала построение круговых плоскостей порядка n над дезарговыми аффинными плоскостями того же порядка [15, 16].

Добавлением одной несобственной точки к числу точек аффинной плоскости и принятием всех ее прямых за окружности, проходящие через эту точку, получается $n(n + 1)$ окружностей. К этому множеству нужно добавить $n(n^2 + 1) - n(n + 1) = n^2(n - 1)$ новых окружностей так, чтобы получить *все* окружности круговой плоскости.

В зависимости от порядка n, а следовательно, и от числа точек на прямой аффинной плоскости, построение новых окружностей производилось по-разному.

Если *n – число нечетное*, то аффинную плоскость расширяют до проективной, добавляя на каждой прямой по одной несобственной точке, считая эти точки общими для параллельных прямых; и добавляя одну несобственную прямую, инцидентную только несобственным точкам. Получается проективная плоскость порядка n, состоящая из $n^2 + n + 1$ точек, и такого же числа прямых; на каждой прямой лежит $n + 1$ точек и через каждую точку проходит $n + 1$ прямых.

Так как число точек на прямой четное, то на несобственной прямой может быть установлена эллиптическая инволюция. Одна из них, индуцированная эллиптической кривой второго порядка, принимается за абсолютную.

Окружности находятся по их диаметрам. Для этого произвольную пару обыкновенных точек считают концами диаметра и проводят прямые через каждый из их концов и через $n - 1$ несобственных точек, отличных от несобственной точки диаметра и точки, сопряженной с ней в абсолютной инволюции. Пара таких прямых, проходящих через соответственные в абсолютной инволюции точки и разные концы диаметра, пересекаясь, даст точку окружности. Таких пар прямых, тем самым и точек пересечения, получится $n - 1$. С ранее выбранными двумя они составят окружность с $n + 1$ точками.

Аффинная плоскость порядка n содержит n^2 точек. Каждый диаметр определяется парой точек, поэтому число диаметров равно $C_{n^2}^2 = \frac{n^2(n^2-1)}{2}$. Диаметр окружности, имеющий с ней общую точку, имеет и вторую общую точку, а так как окружность состоит из $n + 1$ точек, то таких диаметров $\frac{n+1}{2}$. Таким образом, при данном способе построения окружность получается $\frac{n+1}{2}$ раз, поэтому число различных окружностей равно $\frac{n^2(n^2-1)}{2} : \frac{n+1}{2} = n^2(n-1)$, т. е. столько новых окружностей, сколько нужно было получить для полного построения круговой плоскости.

Если n – *число четное*, то на несобственной прямой проективной плоскости лежит нечетное число точек и эллиптическая инволюция не может быть установлена, поэтому ранее рассмотренный способ не может быть применим для четного n. Для примера Л.И. Истомина рассмотрела построение круговой плоскости четного порядка для случая $n = 8$. Аффинная плоскость порядка 8 строится над полем Галуа GF(8). Число окружностей из прямых аффинной плоскости равно $n(n + 1) = 72$. Всего же окружностей в круговой плоскости порядка 8 должно быть $n(n^2 + 1) = 520$.

Для построения остальных $n^2(n - 1) = 448$ окружностей Л.И. Истомина использовала отражения – аффинные преобразования, являющиеся в плоскостях четного порядка инволюционными сдвигами.

Строились два отражения: с осями Oy и Ox, обозначенные через S_y и S_x, соответственно. Они заданы следующими формулами:

$$S_y : \begin{cases} x' = x, \\ y' = 2x + y, \end{cases} \qquad S_x : \begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = y. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $S_y^2 = e$ и $S_x^2 = e$, где e – тождественное преобразование, поэтому отражения являются инволюционными преобразованиями.

Произведение $f = S_x \cdot S_y$ аналитически задается формулами:

$$\begin{cases} x' = 5x + 2y, \\ y' = 2x + y. \end{cases}$$

f – циклическое преобразование девятого порядка, так как $f^9 = e$. Начало координат – двойная точка этого преобразования, а потому оно называется вращением с центром в начале координат.

Произвольная точка плоскости, отличная от начала координат, например, точка 01 (где 0 и 1 – координаты точки в системе Oxy) подвергается всем вращениям f^i, где $i = 0, 1, ..., 8$. Получается множество из девяти точек, обозначенное через γ, следующего состава $\gamma = \{01, 21, 35, 53, 12, 10, 52, 33, 25\}$. Оно является окружностью с центром в начале координат.

Окружность γ подвергается дилатациям плоскости, которые являются аффинными преобразованиями, сохраняющими направления прямых. Любую дилатацию можно единственным образом представить в виде произведения гомотетии с данным центром и параллельного переноса. В качестве центров гомотетий с коэффициентами $k = 1, 2, 3, ..., 7$ принимается начало координат. Аналитическое задание гомотетии h_k имеет вид: $\begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky. \end{cases}$

Окружность γ подвергается гомотетиям h_k. Получается 7 различных наборов по 9 точек в каждом, являющихся также окружностями с центром в начале координат. Они подвергаются параллельным переносам t_{ab}, заданным формулами: $\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b, \end{cases}$ где $a, b \in GF(8)$. Все окружности, полученные дилатациями из окружности γ, различны. Всего их $7 \cdot 64 = 448$, где 7 – число окружностей, полученных из γ гомотетиями, а 64 – количество окружностей, полученных из одной окружности параллельными переносами.

Таким образом, окружностей получено столько, сколько нужно для расширения аффинной плоскости до круговой. Полученное множество точек и окружностей удовлетворяет всем аксиомам круговой плоскости и составляет искомую плоскость порядка 8.

Описанными выше способами могут быть построены лишь отдельные *примеры конечных круговых плоскостей*. Для решения вопроса о *числе плоскостей данного порядка n* используется следующий прием: находятся овалы, проходящие через данную пару точек в аффинной плоскости порядка n. Число таких овалов равно $\frac{1}{2}n^2(n-1)$. Из них составляются пучки из n попарно совместимых овалов в каждом, т. е. не имеющих других общих точек, кроме центров пучка. Эта часть работы выполнялась с применением ЭВМ. При составлении программы использовался *алгоритм перебора решений комбинаторных задач*, составленный Евгением Григорьевичем Гониным [10].

Дальнейшее построение плоскости производилось лишь над *неизолированными пучками*. В некоторых случаях построение круговой плоскости доходило до конца, и получалась плоскость, построенная ранее в качестве примера. Над другими пучками построение оказалось невозможным.

Вопросами построения и единственности круговых плоскостей занимались G. Valette [108], R.H.F. Denniston [55, 56]. Метод, использованный вторым автором, с увеличением порядка плоскости приводил к быстрому возрастанию объема работы. Метод же, предложенный Е.Г. Гониным и использованный Л.И. Истоминой, позволил рассмотреть круговые плоскости порядков $n \geq 7$, именно, 9, 11, 13, так как объем работы возрастал медленнее, чем предложенный Denniston'ом.

В итоге были построены круговые плоскости и доказана их единственность для порядков 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, найденных над дезарговыми аффинными плоскостями того же порядка.

Открытие еще одного класса конечных инцидентностных структур как ближайшего обобщения проективных (аффинных) плоскостей принадлежит B. Hjelmslev'y. В многочисленных работах 1920–1940 гг. он рассматривал конечные геометрии над алгебраическими структурами, в которых соединения точек и пересечения прямых оказывались неоднозначными.

Наметившееся тем самым геометрическое направление продолжилось с начала 1950-х гг. в работах W. Klingerberg'a, назвавшего геометрические структуры *проективными и аффинными плоскостями со смежными элементами*. Впоследствии ученые исследовали такие плоскости, исходя из определения и обозначений в том виде, как их дал W. Klingenberg [70]: *проективной эльмслевой плоскостью называется инцидентностная структура* $H = (p, \mathcal{B}, \mathrm{I})$, *удовлетворяющая требованиям*:

1. Через две различные точки проходит не менее одной прямой; две различные прямые пересекаются не менее чем в одной точке:

$$[X, Y] \geq 1 \text{ для } X, Y \in p; \quad [x, y] \geq 1 \text{ для } x, y \ni \mathrm{B}.$$

2. Существует канонический эпиморфизм ν структуры H на проективную плоскость H^*, при котором образы двух точек совпадают, если и только если через эти две различные точки проходило более одной прямой; образы двух прямых совпадают, если и только если эти две различные прямые пересекались более чем в одной точке:

$$X\nu = Y\nu \Leftrightarrow [X, Y] > 1; \quad x\nu = y\nu \Leftrightarrow [x, y] > 1.$$

Из этих требований непосредственно вытекает:

3. (свойство транзитивности):

$$[X, Y] > 1, [Y, Z] > 1 \Rightarrow [X, Z] > 1 \quad \text{и}$$

$$[x, y] > 1, [y, z] > 1 \Rightarrow [x, z] > 1.$$

Используя это определение, можно убедиться в том, что плоскость, двойственная H, является проективной эльсмлевой. Действительно, обычные проективные плоскости – это именно те из эльсмлевых, для которых выполняются строгие равенства $[X, Y] = 1$ и $[x, y] = 1$ для любых двух различных точек и прямых. Для них эпиморфизм ν (2) является тождественным автоморфизмом.

Для определенности проективную эльсмлеву плоскость H называют *собственной*, если она не является проективной. В произвольной эльсмлевой плоскости две точки X, Y называются *смежными*, если выполняется $X = Y$ *или* $X \neq Y$ и $[X, Y] > 1$, а отношение *смежности прямых* определяется двойственным образом. Смежность точек и прямых в H обозначается символом $\frown$. Таким образом:

$$4. \begin{cases} X \frown Y & \Leftrightarrow \quad X = Y \text{ или } X \neq Y \text{ и } [X, Y] > 1 \text{ для } X, Y \in p, \\ x \frown y & \Leftrightarrow \quad x = y \text{ или } x \neq y \text{ и } [x, y] > 1 \text{ для } x, y \ni \mathrm{B}. \end{cases}$$

Из 1–3 следует, что для любой проективной H-плоскости отношение смежности является отношением эквивалентности как на множестве точек, так и на множестве прямых. Кроме того, классы эквивалентности (2) являются классами смежности при действии канонического эпиморфизма ν структуры H в H^*.

E. Kleinfeld [69] в 1959 г. установил справедливость четырех условий, сформулировав ***теорему***: *инцидентностная структура, удовлетворяющая* (1), *является проективной H-плоскостью, если и только если отношение смежности* $\frown$, *определяемое в* (4), *удовлетворяет следующим требованиям*:

5. если X, Y, $Z \mathrm{I} p_1$ для некоторой прямой $p_1 \in p$ и если $X \frown Y$ и $Y \not\frown Z$, то $X \not\frown Z$;

6. если $X \frown Y$ и $Y \not\frown Z$, $X \mathrm{I} x \mathrm{I} Z$ и $Y \mathrm{I} y \mathrm{I} Z$, то $x \frown y$;

7. если $x \frown y$, $y \not\frown z$, $x \mathrm{I} X \mathrm{I} z$ и $y \mathrm{I} Y \mathrm{I} z$, то $X \frown Y$;

8. существуют четыре точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой и никакие две из них не являются смежными, такие, что никакие две из шести прямых, соединяющих любые две из этих точек, не являются смежными.

Со второй половины XX в. проявился интерес ученых к *конечным проективным эльмслевым плоскостям*. Существенной ***теоремой***, доказанной E. Kleinfeld'ом (1959), является:

пусть инцидентностная структура $H = (p, \mathcal{B}, \mathrm{I})$ *– конечная. Тогда существует такое целое число* j, *что*:

a) для любого данного флага $p \mathrm{I} B$ *в* H *существует точно* j *точек* X *таких, что* $p \frown X \mathrm{I} B$, *и точно* j *прямых* x, *таких, что* $\mathrm{B} \frown x \mathrm{I} p$;

b) H *является тактической конфигурацией с параметрами* $r = k$ *и* $v = k^2 - jk + j^2$;

c) H^* *имеет порядок* $n = (k - j)\, j^{-1}$, *откуда следует* $k \equiv 0 \pmod j$;

d) каждый смежный класс (точек или прямых) под действием эпиморфизма ν: $H \to H^*$ (2) *содержит в точности* j^2 *элементов*;

e) если H *– собственная эльмслева плоскость, то это эквивалентно утверждению*: *если* $j > 1$, то $k \leq j^2 + j$ [69].

Проективная H-плоскость, не обязательно конечная, называется *однородной*, если выполняется условие:

9. $B \mathrm{I} p \mathrm{I} C \mathrm{I} q$, $B \frown C$ и $p \frown q$ влечет $B \mathrm{I} q$.

Для конечной H-плоскости это свойство может быть описано несколькими путями:

пусть P – произвольная точка H. Назовем $\lambda_1 = \lambda_1(p)$ средним числом прямых, соединяющих точку P со смежными ей, отличными от P. Подсчитывая флаги $x \mathrm{I} X$ с $X \mathrm{I} p \neq x \frown p$ двумя путями, можно получить $k = \lambda_1(j + 1)$, где j определено выше.

10. Следовательно, λ_1 не зависит от выбора точки P.

Из этой теоремы и условия (9) автором была доказана эквивалентность следующих свойств *однородной конечной проективной эльмслевой плоскости*:

a) H – однородная, d) $k = j(j + 1)$,
b) λ_1 – целое число, e) H^* имеет порядок j.
c) $\lambda_1 = j$,

H. Lüneburg'у принадлежат результаты для *однородных конечных проективных эльмслевых плоскостей*, в частности доказательство равносильности следующих свойств:

a) H – однородная; b) $k = j(j + 1)$, c) H^* имеет порядок j;

d) существует класс C смежных точек, для которого структура A(C) является аффинной плоскостью;

e) для любого класса C смежных прямых множество A(c) представляет аффинную плоскость.

Самостоятельный интерес вызывают вопросы *существования однородных и неоднородных собственных конечных проективных эльмслевых плоскостей и методы их построения*. Так, открытым остается вопрос: при каких значениях k и j такие плоскости существуют? При помощи элементарных рассуждений в 1959 г. E. Kleinfeld [69] доказал, что H с параметрами j и k, однородная или нет, существует, если $k - j \neq 6$.

Прежде чем определить *аффинную эльмслеву плоскость*, введем отношение $\overset{\frown}{a}$ на прямых произвольной инцидентностной структуры: $b \overset{\frown}{a} c$, если и только если для каждой точки X на одной из прямых b или c существует точка Y на другой, такая, что $[X, Y] > 1$.

Понятие *аффинной эльмслевой плоскости* впервые ввел W. Klingenberg в 1954 г. [70]. Ниже приведено определение, данное в 1962 г. H. Lüneburg'ом [77]: ею называют инцидентностную структуру $J = (p, \mathcal{B}, I)$, удовлетворяющую аксиомам:

1. $[X, Y] \geq 1$ для $X, Y \in p$;

2. на множестве $\mathcal{B}$ задано бинарное отношение $\|$ (*параллельности*) такое, что для заданной пары «точка – прямая» $\{P, b\}$ существует единственная прямая c такая, что $P \, I \, c$ и $b \parallel c$;

3. если $B \neq C$ и $B \overset{\frown}{a} C$, то по определению $[B, C] \neq 1$;

4. существует канонический эпиморфизм μ структуры J в аффинную плоскость J* такой, что $X\mu = Y\mu \Leftrightarrow [X, Y] > 1$ для $X, Y \in p$ и $x\mu = y\mu \Leftrightarrow x \overset{\frown}{a} c$ для $x, y \in \mathcal{B}$.

Так как в определении $X \overset{\frown}{a} Y$ не исключено $X = Y$, то *каждая аффинная плоскость* является *аффинной эльмслевой*. Далее, аффинная H-плоскость называется *собственной*, если она не является обычной аффинной плоскостью.

Аналогичные результаты конечной проективной *H*-плоскости, отмеченные выше, имеют место и для *конечных аффинных эльмслевых плоскостей*. Они сформулированы в виде ***теоремы***: *пусть J – конечная аффинная эльмслева плоскость. Тогда существует целое число j такое, что*:

a) *для любого флага p* I *B структуры J существует в точности j точек x* I *B таких*, что $[p, x] > 1$;

b) *J является тактической конфигурацией с параметрами* $r = k + j$ *и* $v = k^2$; *откуда* $b = k(k + j)$ и $|\varkappa| = k$ *для каждого класса параллельности* $\varkappa$ *прямых*;

c) *аффинная плоскость J* в соответствии* с (4) *имеет порядок* kj^{-1}, *следовательно*, $k \equiv 0\ (mod\, j)$;

d) *каждое множество* (*точек или прямых*) *под действием эпиморфизма* μ *(п.4)*, *переводящего* $J \to J^*$, *состоит из* j^2 *элементов*;

e) *если J – собственная конечная аффинная H-плоскость, то* $k \leq j^2$.

Аффинная *J*-плоскость называется *однородной*, если она удовлетворяет условию 9. Для *однородных и неоднородных собственных J* один из общих результатов получил H. Lüneburg [77]: *собственная конечная эльмслева плоскость является однородной, если и только если* $k = j^2$ *или, что эквивалентно, если J* имеет порядок j*.

Если T(J) является группой, транзитивной на точках структуры J, то ее называют *аффинной эльмслевой трансляционной плоскостью*. Заметим, что до сих пор неясно, всегда ли T образует группу.

Аффинная эльмслева плоскость J назывется *дезарговой*, если она является эльмслевой плоскостью трансляций и если кольцо G(J) транзитивно на трансляциях в $T(\varkappa)$ группы трансляций эльмслевой плоскости трансляций J для всех параллельных классов $\varkappa$. Заметим, что если J – дезаргова, то J* – дезаргова в обычном смысле и плоскость J – не обязательно однородная.

Анализ внутренней структуры конечных эльмслевых плоскостей позволил представить их как различные виды комбинаторных блок-схем, и дальнейшие исследования проводились в этой области.

Частичные геометрии

Частичные плоские геометрии представляют широкий круг *инцидентностных систем* S($\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, I). Под такой структурой подразумевают пару непересекающихся множеств $\mathcal{D}$ и $\mathcal{L}$ с отношением инцидентности I, способным связывать *некоторые* элементы множества $\mathcal{D}$ с некоторыми элементами из $\mathcal{L}$. Элементы множества $\mathcal{D}$ называются *точками*, а элементы $\mathcal{L}$ – *прямыми*.

Если в системе S($\mathcal{D}$, $\mathcal{L}$, I) имеет место ***аксиома*** A_1: *через две различные точки проходит не более одной прямой – то она называется частичной плоской геометрией.*

Инцидентностная структура называется *конечной*, если число всех ее элементов конечно. Число $|\mathcal{D}|$ точек конечной структуры обозначается через v, а число $|\mathcal{L}|$ всех ее прямых – b. Отношение инцидентности I задается таблицей, называемой *матрицей инцидентности*.

Конечная инцидентностная структура называется *регулярной*, если на каждой прямой лежит одно и то же число точек и через каждую точку проходит одно и то же число прямых. Она называется *симметричной*, если число ее точек равно числу прямых.

Добавляя к аксиоме A_1 другие и видоизменяя их, можно получить другие виды частичных геометрий. Одним из них являются *конечные полуплоскости* и *псевдоплоскости*. Первые строят путем дополнения A_1 аксиомами A_2 и A_3:

A_2. *Для инцидентной пары точка – прямая (P, l) существует не более одной прямой, проходящей через P параллельно l, и не более одной точки Q инцидентной l такой, что $P \cup Q = \varnothing$.*

A_3. *(Условие невырожденности)* $|\mathcal{D}| \geq 3$ *и двойственно* $|\mathcal{L}| \geq 3$.

Другими словами, в *полуплоскости* через P ($P \notin l$) может не проходить ни одной прямой, параллельной l; в равной степени имеются и точки, не соединенные прямой.

Из аксиом A_1 – A_3 следует, что *конечные проективные* и *частичные плоскости* порядков $n > 2$ являются *полуплоскостями.* К ним относятся и *конечные аффинные плоскости*, так как в их аксиоматике условие A_2 усилено: выражение «не более одной прямой» заменено на «точно одна прямая» и слова «не более одной точки» – на «нет точки». Для последнего случая был введен класс *полуаффинных полуплоскостей* [46].

Рассмотрение других видоизменений A_2 привело к построению *плоскостей Люнебурга* [76, с. 441] и *Кронхейма* [45, с. 2], относительно которых была доказана вложимость в конечную проективную плоскость.

Аксиома A_3 является более строгой, чем обычно, например, по A_2 аффинная плоскость исключена. Однако она вполне удобна для классификации частичных плоскостей, удовлетворяющих A_2, но в которых не выполняется A_3.

Исследования P. Dembowski [50] позволили установить связь проективной плоскости с полуплоскостями: если $\mathcal{P}$– проективная плоскость порядка n ($n > 2$) и C – *замкнутое подмножество*, то $S = \mathcal{P} \setminus C$ является *полуплоскостью*. Заметим, что если две различные точки (прямые) лежат в C, то там находится и прямая, соединяющая их (точка их пересечения). В этом случае C называется *замкнутым множеством*. В частном случае, когда C состоит из прямых и всех инцидентных ей точек, S является *аффинной плоскостью*. Если же $C = \varnothing$, то S – *проективная плоскость*.

Для исследования полуплоскостей практически более удобным является обратное рассмотрение: в каких случаях данная полуплоскость может быть интерпретирована в терминах $S \setminus C$? Как показал P. Dembowski [46], такой процесс возможен не всегда.

Аксиома A_2 допускает существование в полуплоскости классов параллельности как для точек, так и для прямых. В первом случае такой класс представляет *несобственную прямую*, во втором – *несобственную точку*. Они, однако, отличны от соответствующих понятий в проективной плоскости. Степень точки P (прямой l) определяется как число прямых (точек), проходящих через P (лежащих на l). Если $n + 1$ – наибольшая степень точек (прямых) в S, то n ($n > 1$) называется ее *порядком*. Это определение согласуется с соответствующим порядком конечной проективной (аффинной) плоскости.

P. Dembowski доказал важную ***теорему***, касающуюся *классификации конечных полуплоскостей*: если $\mathfrak{D}$ – множество положительных целых чисел, обозначающих степени элементов в S, то для его выбора имеются только три возможности:

1) $\mathfrak{D} = \{n - 1, n, n + 1\}$;
2) $\mathfrak{D} = \{n, n + 1\}$;
3) $\mathfrak{D} = \{n + 1\}$.

В зависимости от того, какой из способов выбора 1) – 3) имеет место, S является *конечной гиперболической*, *параболической* и *эллиптической*, соответственно.

К таким же видам полуплоскостей можно прийти, рассматривая различные случаи замкнутого подмножества C конечной проективной плоскости $\mathcal{P}$: а) $C = \varnothing$; б) C состоит только из одной точки; в) C содержит одну прямую и n точек на ней; г) C состоит из одной точки и всех прямых, инцидентных ей.

В случае а) S – эллиптическая полуплоскость, а в остальных – параболическая. Двойственное утверждение выполняется, если S не содержит несобственных точек [46].

Рассматривая S лишь как $S = \mathcal{P} \setminus C$, невозможно получить гиперболические полуплоскости порядка n. Они появляются при замене C на U, где U – открытое подмножество $\mathcal{P}$ одного из видов:

а) U содержит две точки P и K ($P \not\equiv K$) и все прямые, проходящие через P, за исключением PK;

$\bar{\text{а}}$) U содержит две прямые ($l \not\equiv m$) и все точки, лежащие на l, за исключением $l \cap m$;

б) U состоит из неинцидентной пары (P, l), всех точек на l и n прямых, проходящих через P;

$\bar{\text{б}}$) U состоит из неинцидентной пары (P, l), всех прямых, проходящих через P, и n точек на l;

в) U содержит неинцидентную пару (P, l), n точек на l и n прямых, проходящих через P. Кроме того, единственная точка, не принадлежащая U, но лежащая на l, не инцидентна единственной прямой, не принадлежащей U, но проходящей через P.

Классификация полуплоскостей может быть осуществлена также тогда, когда в $S = \mathcal{P} \setminus B$, где множество B – бэрово подмножество проективной плоскости $\mathcal{P}$. Идея состоит в том, что аксиомы $\mathcal{P}$ относятся только к некоторым фиксированным элементам, причем построение таких структур выполнялось над тернарными лупами [49].

Множество π точек и прямых вместе с отношением их инцидентности I называется *псевдоплоскостью*, если имеются две различные точки P_1, P_2 из π и две различные прямые l_1 и l_2, принадлежащие π, такие, что выполняются аксиомы:

A_1. Для любой точки ($P \mathrm{I} l_1 \cup P \mathrm{I} l_2$) и любой точки Q ($Q \in \pi$) существует единственная прямая $l = PQ$ ($l \subset \pi$).

A_2. Для любой прямой l (P_1 I $l \cup P_2$ I l) и любой прямой m ($m \in \pi$) существует единственная точка $P = m \cap l$.

A_3. В π существуют четыре точки, из которых никакие три не лежат на одной и той же прямой.

Множество P_1, P_2, l_1, l_2 называется *координатизирующей конфигурацией* π, или *фундаментальной четверкой*. Некоторые факты, касающиеся π, могут быть установлены геометрическим путем. Например, всякая проективная плоскость есть псевдоплоскость, в которой любое множество двух точек P_1, P_2 и двух прямых l_1, l_2, причем P_1 I l_i, P_i I l_1, $i = 1, 2$, является координатизирующей конфигурацией. Таким образом, понятие *псевдоплоскости* является обобщением проективной плоскости.

Как видно, A_1 и A_2 двойственны друг другу. В π будет выполняться принцип двойственности, если имеет место аксиома, двойственная A_3: в псевдоплоскости существуют четыре прямые, из которых никакие три не инцидентны одной и той же точке [49].

В процессе изучения псевдоплоскостей были установлены их комбинаторные свойства. В частности, если π – конечная псевдоплоскость, то существует n ($n \in \mathrm{N}$) такое, что:

• каждая точка (прямая) из π инцидентна точно $n + 1$ прямым (точкам), принадлежащим π;

• π содержит точно $n^2 + n + 1$ прямых (точек).

Число n называют *порядком конечной псевдоплоскости*. Об их существовании известно следующее: *если n ($n \geq 2$) – целое число, то существует псевдоплоскость порядка n. Если на n накладываются условия Брука – Райзера, то π не может быть проективной.*

С другой стороны, существуют псевдоплоскости малых порядков ($\pi(4)$; $\pi(5)$), также не являющиеся проективными. Однако при $n \leq 2$ псевдоплоскость оказалась проективной.

При изучении полуплоскостей и псевдоплоскостей ученые полагали, что с их помощью могут быть решены некоторые вопросы существования конечных проективных плоскостей.

Другим примером конечных инцидентностных структур являются *частичные плоскости*. Для такой структуры выполняются аксиомы:

A_1. Для любых двух различных точек существует самое большее одна прямая, инцидентная этим точкам.

A_2. Для любых двух различных прямых существует самое большее одна точка, инцидентная этим прямым.

A_1 и A_2 двойственны друг другу, поэтому в теории частичных плоскостей выполняется *принцип двойственности*, а следовательно, A_1 и A_2 равносильны. Поэтому в определении такой структуры можно оставить только одну из аксиом или заменить их одной, двойственной себе: например, взять ***аксиому А***: не существует двух различных точек, инцидентных одновременно двум различным прямым.

Простейшими примерами конечных частичных плоскостей являются:

– *трехвершинник* (*трехсторонник*), т. е. структура, состоящая из трех точек (вершин) и трех прямых (сторон), соединяющих эти точки попарно;

– *полный четырехвершинник*, содержащий четыре точки и шесть прямых, соединяющих вершины попарно;

– *полный четырехсторонник* – структура, двойственная полному четырехвершиннику.

Первый вид частичных плоскостей изучала аспирантка Е.Г. Гонина А.Е. Малых – при дополнении латинских квадратов порядка 8 до проективных плоскостей порядка 9, а второй вид – Л.Я. Панкратова с той же целью.

Важным подклассом частичных плоскостей являются структуры, *замкнутые* относительно объединения или пересечения. Частичная плоскость называется *замкнутой относительно объединения* (*пересечения*), если для любых двух различных точек (прямых) существует инцидентная им прямая (точка). Частичная плоскость называется *замкнутой*, если она замкнута относительно объединения и пересечения.

К свойствам таких плоскостей относится существование трех неколлинеарных точек и, в силу принципа двойственности, трех неконкурентных прямых. В замкнутой частичной плоскости, имеющей четыре точки, неколлинеарные по три, выполняются две аксиомы:

A_1': на каждой прямой лежат по крайней мере три различные точки;

A_2': через каждую точку проходят по крайней мере три различные прямые.

Нетрудно установить равносильность этих аксиом. Непустая замкнутая частичная плоскость, удовлетворяющая A_1' и A_2', называется *проективной плоскостью*.

Еще одним из примеров частичных плоскостей являются ***геометрические конфигурации***.

Плоской конфигурацией называется система, состоящая из n точек и m прямых такая, что каждая точка инцидентна одному и тому же числу γ прямых и каждая прямая инцидентна одному и тому же числу μ точек системы. Тип конфигурации определяет матрица $\begin{pmatrix} n & m \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$, где $m\nu = n\mu$.

Конфигурация называется *симметричной*, если $m = n$, тогда $\nu = \mu$. Такую конфигурацию обозначат как n_μ. Простейшими примерами являются конфигурация 1_1 – прямая и лежащая на ней точка и 3_2 – три прямые, попарно пересекающиеся в трех различных точках.

Таблица инцидентности состоит из m строк и n столбцов, которым сопоставлены соответственно прямые и точки конфигурации. В каждом столбце содержится ν знаков инцидентности, а в каждой строке – μ таких знаков.

Конфигурация называется *геометрической*, если ее таблица инцидентности в любой подтаблице размера 2×2 содержит по крайней мере одну пустую клетку. Это означает, что любые две различные прямые не могут иметь двух общих точек.

Не всякая конфигурация допускает реализацию в евклидовой или классической проективной плоскости. Всякая такая плоскость, в частности и конечная проективная, сама представляет геометрическую конфигурацию.

Одна из основных *задач* исследования конечных проективных плоскостей заключается в том, чтобы установить, *существуют* ли у исследуемой плоскости определенные конфигурации и каково их число.

Для исследований в области конечных геометрий выделяют конечные частичные плоскости, удовлетворяющие аксиомам A_1' и A_2'. Ниже приведены виды таких плоскостей, изучавшиеся в школе Е.Г. Гонина.

1. Известная *конфигурация Фано* содержит 7 точек и 7 прямых таких, что на каждой прямой лежат три точки и через каждую точку проходят три прямые. Ее обозначают 7_3 (рис. 7).

Известно, что с точностью до изоморфизма существует только одна такая конфигурация. Заметим, что она невложима в классическую проективную плоскость, хотя сама представляет конечную проективную плоскость порядка 2.

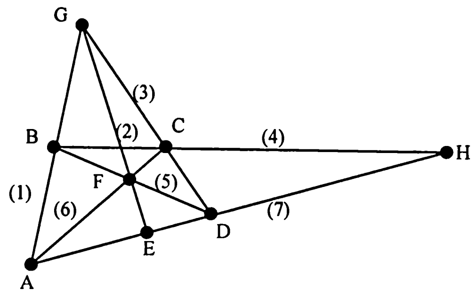


Рис. 7. *Конфигурация* 7_3

Невложимость равносильна тому, что диагональные точки любого полного четырехвершинника неколлинеарны.

2. Еще одной представляющей интерес *конфигурацией* является $\mathbf{8_3}$. В ней общее число точек (прямых) равно 8, на каждой прямой лежат три точки, через каждую точку проходят три прямые. Можно показать, что с точностью до изоморфизма существует точно одна конфигурация 8_3. Она, как и 7_3, невложима в обычную проективную плоскость. В таблице инцидентности вершины ее обозначены буквами, прямые – индийско-арабскими цифрами, заключенными в скобки (табл. 1). Графическая иллюстрация представлена на рис. 8.

Таблица 1

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
A	A	A	B	B	C	E	E
B	F	C	G	C	D	D	F
D	G	H	H	E	F	G	H

Конфигурация 8_3 представляет геометрический интерес: она играет важную роль в теории плоских кривых третьего порядка, не имеющих двойных точек.

Возможности реализации конфигурации 8_3 с коллинеарными диагональными точками в проективной плоскости порядка 9 были изучены Л.Я. Панкратовой. С помощью комбинаторно-алгебраических методов

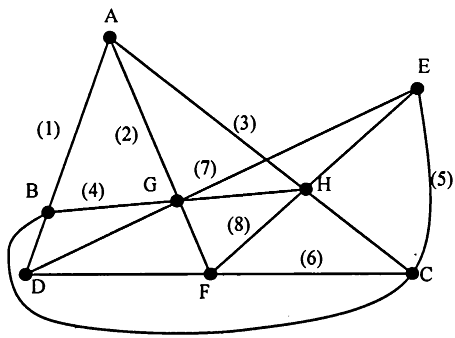


Рис. 8. *Конфигурация* 8_3

ею установлено, что конфигурация 8_3 с коллинеарными диагональными точками и определенным исходным набором точек плоскости на прямых конфигурации не может быть реализована в проективной плоскости порядка 9 [28].

3. Три типа *конфигураций* $\mathbf{9_3}$ являются неизоморфными между собой. Для исследования конечных проективных плоскостей наибольший интерес представляет одна из них – *конфигурация Паскаля – Паппа* (рис. 9). Она

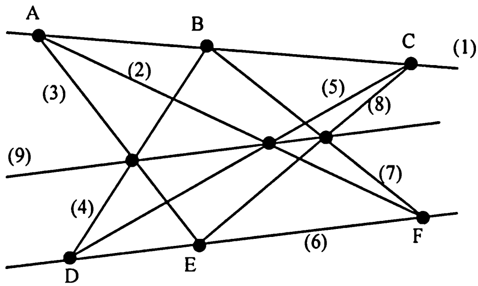


Рис. 9. *Конфигурация Паскаля – Паппа*

уже вложима в классическую проективную плоскость в соответствии с *принципом Паскаля*, когда точки пересечения противоположных сторон выпуклого шестивершинника, вписанного в кривую второго порядка, коллинеарны. Теорема справедлива и тогда, когда эта линия вырождается в пару прямых. Такой частный случай был известен еще в Древней Греции (IV в., Папп Александрийский). Две прямые, шесть вершин и шесть сторон шестивершинника, три точки пересечения противоположных сторон и проходящая через них прямая образуют конфигурацию типа 9_3.

4. Для расширения частичных плоскостей до конечных проективных может быть использована одна из 10 неизоморфных между собой *конфигураций* $\mathbf{10_3}$. Ею является *конфигурация Дезарга*, тесно связанная с одноименной ***теоремой***: *если прямые, соединяющие соответственные вершины двух трехвершинников, конкурентны, то точки пересечения соответственных сторон коллинеарны*. Стороны и вершины двух трехвершинников, прямые, соединяющие соответственные вершины, и их общая точка, а также точки пересечения соответственных сторон и проходящая через них прямая образуют конфигурацию 10_3.

Конфигурация Дезарга имеет полярности, а потому автодуальна. Она уже содержит в качестве частичных подплоскостей пять полных четырехвершинников, каждые два из которых имеют в точности одну общую вершину. Кроме того, в ней имеется 10 различных пар, составленных из общих вершин конфигурации. Совокупность таких пар совпадает с множеством всех десяти точек рассматриваемой конфигурации (рис. 10). Она играет большую роль в теории проективной геометрии.

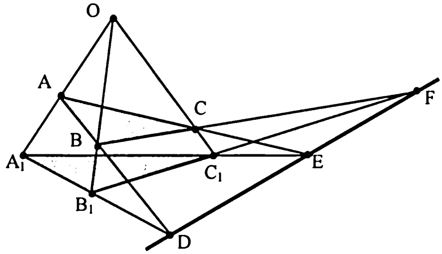


Рис. 10. *Конфигурация Дезарга*

Конфигурацию Дезарга можно расширить путем введения новых инцидентностей. Однако такое расширение невыполнимо в случае, когда выбранная точка коллинеарна хотя бы с одной из точек выбранной прямой. Это условие приводит к нарушению аксиомы А.

5. Подплоскостью порядка 3 является *конфигурация типа* **13_4**. Исследование ее реализации в проективной плоскости порядка 9 путем расширения в указанную плоскость позволило перечислить все проективные плоскости порядка 9, содержащие подквадраты порядка 3 повторяющегося состава. Как доказано Л.Я. Панкратовой, ими оказались все известные плоскости порядка 9 [26].

6. Еще одним важным видом частичных геометрий являются *сети*. Множество из n^2 элементов, называемых *точками*, представляет *геометрическую сеть*, если выполняются следующие условия:

1. Существуют три семейства множеств, содержащих по n подмножеств данного множества, называемых *прямыми*, каждая из которых состоит из n точек.

2. Любые две прямые различных семейств имеют одну и только одну общую точку. Любые две прямые одного семейства общих точек не имеют. Это означает, что каждое семейство содержит все n^2 точек.

3. Для любой точки в каждом семействе найдется единственная прямая, которой эта точка принадлежит.

При исследовании конечных проективных плоскостей порядка 9, когда еще не был известен их исчерпывающий список, интерес представляли поиски новых плоскостей указанного порядка с использованием латинских квадратов. Ставилась задача дополнения отдельного латинского квадрата порядка 9 до полной системы попарно ортогональных латинских квадратов того же порядка, которая представляла искомую плоскость.

В изучении структуры конечных проективных плоскостей важную роль играют *дуги* – еще один вид частичных геометрий. *Дугой* называется произвольное множество точек, любые три из которых не лежат на одной прямой. Дуга, состоящая из k точек, называется *k-дугой*. Дуга называется *полной*, если она не является собственной частью другой дуги; в противном случае она – *неполная*. Полная k-дуга в проективной плоскости порядка n называется *овалом*, если последняя не содержит $(k + 1)$-дуг.

Изучение рассматриваемых *частичных плоскостей* относится к 50-м гг. XX столетия. В 1952 г. B. Quist [87] установил, что в проективной плоскости порядка n число точек овала равно $n + 1$ для четного и $n + 2$ – для нечетного порядка. Он же привел конкретные примеры овалов и установил их свойства. Аналогичные результаты получили в недезарговых плоскостях порядка 9 D.R. Hughes в 1957 г. [64] и A. Wagner [112] спустя два года. В работе 1955 г. B. Segre доказал теорему о том, что любая n-дуга дезарговой проективной плоскости порядка n содержится в овале, т. е. является неполной. Однако этот вывод не обобщается на недезарговые плоскости [95].

Некоторые результаты о полных дугах получили L. Lunelli (1959) [79], M. Sce (1959, 1960) [91, 92] и другие, в основном для дезарговых плоскостей. Наиболее полное изложение вопроса о дугах в конечных проективных плоскостях дал G.E. Martin (1960) в работе [81]. Он обобщил результаты, полученные предыдущими авторами, и получил ряд новых, приведя материал в определенную систему.

Что касается конкретных конечных ПП, то для значений $n \leq 8$, исключая порядок 6, вопрос о *дугах* был практически решен в работах L. Lombardo-Radice (1962) [75], L. Lunelli (1959) [79], M. Sce (1960) [91].

На очереди стояли исследования проективных плоскостей порядка 9. Отдельные примеры полных k-дуг в плоскости трансляций были даны G. Menichetti [82] (1966) для $k = 7, 8, 9, 10$. R.H.F. Denniston в 1971 г. опубликовал статью, в которой исследовал дуги в недезарговых плоскостях; но даже с помощью

ЭВМ нашел (с точностью до изоморфизма) полные k-дуги в них только для $k = 6, 9, 10$. Автор отметил, что случаи $k = 7, 8$ не рассматривал ввиду большого разнообразия типов таких дуг и сложности выполняемой при этом работы [54].

В 1950-х гг. преподаватели и аспиранты под руководством Евгения Григорьевича Гонина также активно включились в исследование конечных геометрий. Они решали те же проблемы, что и зарубежные ученые. В области геометрических структур их работа велась в основном по четырем направлениям:

– выяснение внутренней структуры уже полученных конечных проективных плоскостей;

– исследование других видов конечных геометрий;

– построение ПП, отличных от четырех уже известных (с 1907 г.), с использованием частичных геометрий;

– решение проблемы ортогональности латинских квадратов, сформулированной еще Л. Эйлером.

Ученики школы Е.Г. Гонина находились на переднем крае науки. В СССР работы в указанных выше направлениях выполнялись тогда только в Перми.

Выяснение структуры известных ПП пермские ученые осуществляли по следующей схеме:

• исследование групп коллинеаций в каждой из конечных плоскостей;

• подсчет наборов из k точек плоскости, в частности k-дуг, полных дуг, овалов;

• отыскание подплоскостей разных порядков и нахождение их числа;

• изучение связей между подплоскостями одного порядка.

Над решением этих задач трудилось не только большинство учеников Евгения Григорьевича, но и, в первую очередь, зарубежные ученые. Прежде всего, были исследованы все виды и группы коллинеаций во всех конечных проективных плоскостях, в том числе четырех ПП порядка 9.

Одним из центральных объектов изучения являлись *дуги, полные дуги, овалы*. В самом начале 1970-х гг. Юлия Николаевна Зверева, ученица Евгения Григорьевича Гонина, выполнила без применения ЭВМ полное исследование (с точностью до изоморфизма) дуг в плоскости трансляций [14], используя для этого единый подход – *метод поэтапных отождествлений, разработанный Е.Г. Гониным* в 1968 г. и описанный в работе [11]. Тот же метод был применен ею и во всех дезарговых плоских геометриях порядков $n = 2–5, 7–9$. При этом результаты изучения дуг в дезарговой плоскости порядка 9 в полном объеме были получены впервые.

В работах [3, 4] *Вадим Иванович Васильков,* ученик Е.Г. Гонина, используя тот же метод поэтапных отождествлений, исследовал k-дуги для $k = 3 - 5$ в плоскости Хьюза порядка 9. Впоследствии он провел исследование некоторых типов 6-дуг в указанной плоскости. Огромный объем работы не позволил полностью решить задачу без применения ЭВМ. Используя модифицированный для ЭВМ алгоритм Е.Г. Гонина, В.И. Васильков и его аспирант Г.В. Масленников провели полное исследование k-дуг в плоскости Хьюза для $k = \overline{3;10}$. При этом были подтверждены все результаты, полученные ранее В.И. Васильковым и R.H.T. Denniston'ом [5].

К середине 1990-х гг. задача исследования k-дуг (с точностью до изоморфизма) в конечных ПП оказалась решенной усилиями многочисленных зарубежных и отечественных математиков.

Сам Е.Г. Гонин и его ученики исследовали 6-дуги. Так как в известных ПП порядка 9 все полные 6-дуги уже были получены *Еленой Евгеньевной Гониной* (1979), то перешли к изучению *6-дуг,* имеющих *одну внешнюю точку.* Их исследование Е.Г. Гонин осуществлял совместно с О. М. Поносовой и Ю.Н. Зверевой. Такие дуги они назвали *конфигурациями,* состоящими из точек дуги, всех ее секущих и всех точек их пересечения. Они доказали существование 27 таких конфигураций и изучали проблему их вложимости в конечные проективные плоскости порядка 9 [12].

Аналогичную работу проделал Е.Г. Гонин со своим учеником *Анатолием Дмитриевичем Лумповым* [13]. Они рассмотрели 15 типов структур такого рода: 13 из них оказались невложимыми в конечные проективные плоскости порядка 9, а одна, названная ими *симметричной,* содержалась в дезарговой и хьюзовой плоскостях.

Изучением *структуры недезарговых плоскостей* и *подплоскостей в них* занимались J. Andre и G. Zappa. В 1955 г. они опубликовали результаты изучения групп коллинеаций в плоскостях трансляций и Хьюза. Вслед за ними R. Magari (1958) изучил подплоскости плоскости трансляций, провел их классификацию и определил число подплоскостей каждого типа [80]. При этом была допущена ошибка в вычислении подплоскостей порядка 3 одного типа, найденная В.И. Васильковым.

На основе исследований G. Zappa R.H.F. Denniston (1968) провел классификацию и выполнил подсчеты подплоскостей каждого типа в плоскости Хьюза [52]. Его метод отличен от использованного Magari. Независимо от них и другим путем выполнил аналогичную работу В.И. Васильков. Он же решил вопрос о подплоскостях в плоскостях трансляций и сдвигов порядка 9. Результаты его исследований отражены в кандидатской диссертации «О строении проективных плоскостей порядка 9».

В научной школе Е.Г. Гонина для построения ПП широко использовали *частичные геометрии*. Игорь Петрович Непорожнев осуществлял построение ПП порядков 6, 8, 10. Основное внимание уделялось вопросу *существования плоскости с овалом* и нахождению числа неизоморфных плоскостей такого типа. Для решения указанной проблемы был применен *комбинаторно-геометрический метод*, основанный на использовании некоторой фиксированной конфигурации (частичной подплоскости) с последующим ее расширением до всей плоскости. В качестве такой конфигурации рассматривался *овал,* как максимально возможное для плоскости данного порядка n множество точек, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Для четного порядка n это множество состоит из $(n + 2)$ точек, для нечетного – из $(n + 1)$ точек. Основная трудность при расширении состоит в появлении большого числа классов точек и прямых на ранних стадиях перебора. Поиск подплоскостей, обладающих в меньшей степени этим недостатком, приводит к рассмотрению, в частности, *дуг* и *овалов*.

Далее применялось *тактическое разложение проективных плоскостей*, т. е. деление точек плоскости относительно овала на два класса: точки овала и остальные точки плоскости, – а также деление прямых на три класса: секущие, касательные и внешние. Для овала в плоскости четного порядка касательные отсутствуют. Это обусловило малое число вариантов в начальной стадии построения и наличие достаточно богатых групп автоморфизмов, что позволило значительно уменьшить число разветвлений.

Для произвольной проективной плоскости рассматриваемого порядка нахождение всех возможных типов систем секущих овала, в предположении его существования, начинается с отыскания всевозможных случаев пересечения одной секущей овала с остальными. Эта задача равносильна комбинаторной о составлении всех неизоморфных между собой наборов из $n-1$ разбиений n элементов на пары без их повторений в таких разбиениях. После этого нахождение систем секущих овала последовательно производится путем набора секущих с учетом запретов, налагаемых выбором предыдущих секущих. В случае существования полных систем секущих последние дополняются согласованными с ним множествами внешних прямых. Если такие множества существуют, то получают *проективные плоскости с овалом*.

И.П. Непорожнев применил указанную процедуру для построения ПП порядка 6 в предположении ее существования. Комбинаторная задача о составлении из 6 элементов пяти троек пар без повторений пар имеет единственное решение, определяющее одну из секущих овала. Дальнейшие результаты исследования показали, что полную систему секущих овала построить невозможно. На основе этого было опровергнуто существование ПП порядка 6, содержащей конфигурацию Фано 7_3. А с опорой на несуществование проективной плоскости порядка 6, содержащей полный четырехвершинник с неколлинеарными диагональными точками, сделан вывод о том, что *не существует ни одной ПП порядка* 6 [23].

Для проективной плоскости порядка $n = 8$ комбинаторная задача о составлении из восьми элементов семи четверок пар без их повторений имеет 6 различных решений. Предполагая существование овала с секущей какого-либо одного из этих шести типов, последовательно перебирались другие секущие, допустимые с предыдущими. Полный перебор секущих овала в ПП порядка 8 с овалом приводит к двум неизоморфным решениям, содержащим секущие лишь *двух типов* из шести рассмотренных. Одно из решений опровергается при наборе внешних прямых, а второе приводит к известной *дезарговой плоскости*. Выполненное И.П. Непорожневым исследование дает *новый подход к доказательству единственности* проективной плоскости порядка 8. Типы секущих овала автор изучал также в ПП порядка 9 [25].

Для возможной ПП порядка 10 с овалом комбинаторная задача о составлении из 10 элементов девяти пятерок пар без их повторений имеет много решений. Поэтому И.П. Непорожнев рассмотрел лишь частные случаи, когда пятерки пар имеют между собой одинаковые связи (типы переплетений), сходственные с типами секущих овала для ПП порядка 8. К ним отнесены связи между пятерками пар, выражающимися либо композицией четырех– и шестичленных циклов, либо десятичленным циклом [24]. Автором доказано несуществование ПП порядка 10 с овалом, все секущие которого относятся к этим двум типам.

Основные результаты исследования И.П. Непорожнева вошли в его кандидатскую диссертацию «Построение конечных проективных плоскостей, содержащих овалы» (1971). Дальнейшая его научная работа связана с определением типов секущих овала в ПП порядка 9, а также конструктивным перечислением *систем групп пар* и *оглавленных систем троек Штейнера* порядков 10 и 12.

Следует заметить, что типы секущих овала тесно связаны с типами *симметричных латинских квадратов.* Соответствие между набором из $n-1$ разбиений n элементов на пары без повторения пар и симметричными латинскими квадратами порядка n устанавливается следующим образом. Разбиения нумеруются числами от 1 до $n-1$, и номер разбиения помещается в n ячеек квадрата размера $n \times n$ с координатами (i, j) и (j, i) для каждой из $\frac{1}{2}n$ упорядоченных пар (i, j), входящих в разбиение. В ячейки главной диагонали вписывается число n. Получается симметричный латинский квадрат порядка n с фиксированным элементом на главной диагонали. Указанная операция является *обратимой.*

Алгебраический подход к построению конечных ПП связан с изучением *разностных множеств.* Его осуществил ученик Е.Г. Гонина Б.Ф. Харитонов. В частности, он исследовал вопрос о существовании ПП порядков 10 и 13 с регулярными транзитивными нециклическими группами коллинеаций [38]. Плоскость с такой группой может быть задана разностным множеством D, состоящим из k различных элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k \in G$, если G рассматривать как аддитивную группу. Б.Ф. Харитонов получил следующие результаты:

– не существует ПП порядка 10 с регулярной транзитивной нециклической группой коллинеаций;

– для плоскости порядка 13 регулярная группа коллинеаций имеет порядок 183. Доказано, что с точностью до изоморфизма в полупрямой группе порядка 183 существует лишь одно разностное множество. Конечная ПП, построенная над ним, является дезарговой.

Б.Ф. Харитонов изучал и общие вопросы существования конечных проективных плоскостей с регулярными группами коллинеаций [39].

Еще одним видом конечных геометрий являются *латинские квадраты*. Изучение проблемы их ортогональности привело к построению множества попарно ортогональных латинских квадратов порядка n. Вопросы их *существования* и *методы построения* тесно связаны между собой, так как доказательство существования нередко оказывается и методом построения. Как отмечалось выше, R.C. Bose установил взаимную связь между множеством из $n-1$ взаимно ортогональных латинских квадратов порядка n и проективными (аффинными) плоскостями того же порядка (1938) [43]. В принципе все ПП порядка n можно найти, перебрав все семейства из $n-1$ попарно ортогональных латинских квадратов. Получение такого семейства удобно начинать с выбора одного, «опорного» квадрата с последующим составлением $n-2$ квадратов, ортогональных к нему и между собой. Такой способ построения плоскостей *является универсальным*.

Зарубежные ученые и ученики Е.Г. Гонина вначале расширяли до плоскости те квадраты, которые встречаются в описаниях уже известных плоскостей ($n=\overline{2;9}$). Эту работу выполняли M. Hall, J.D. Swift и R. Killgrove, разработавшие *процедуру построения семейств таких квадратов* [62]. Исходным явилось расширение квадрата порядка 9, совпадающего с таблицей операции элементарной абелевой группы. Были восстановлены все четыре известные плоскости этого порядка. Аналогичную работу проделал E.T. Parker над пятью другими квадратами, встречающимися в описаниях известных ПП, но новые плоскости при этом не были открыты [84]. В дальнейшем плоскости строились не только над всеми квадратами из этих описаний, но и над определенными их классами, не входящими в упомянутые описания. Новых плоскостей получено не было.

Ученицы Е.Г. Гонина Людмила Яковлевна Харанен (Панкратова) и Лидия Ивановна Пантелеева расширили до плоскостей квадраты из описаний, не содержащих квадрата элементарной абелевой группы (1968). Результатом построения стали лишь известные ПП порядка 9. Так как полного списка неизоморфных латинских квадратов порядка 9 не было получено, то Е.Г. Гонин предложил своим ученикам изучать структуру целых классов таких квадратов (*симметричных*, содержащих *подквадрат порядка* 3, *латинских прямоугольников размера* 3×9; *составных*, состоящих из подквадратов повторяющегося и разного состава и др.) с целью построения над ними конечных ПП. В этом направлении интенсивно работали Л.И. Пантелеева, Л.Я. Харанен, В.Г. Алябьева, А.Н. Фирсович, Т.М. Соромотина, Л.Б. Бурди, а также студенты-дипломники, занимавшиеся исследовательской деятельностью.

Для облегчения работы Е.Г. Гонин предложил *метод клик* [10]. Он является одним из вариантов перебора при решении комбинаторной задачи, основанном на *запрещении элементов целыми группами*. *Кликой* на множестве с бинарным отношением σ называется *подмножество*, *любые два элемента которого связаны* σ. Подмножество клик называется *базисным*, если любые два его различных элемента, связанные отношением σ, входят хотя бы в одну клику этого множества.

Отыскание базисного множества, более предпочтительного в каком-то смысле, представляет сложную задачу. Если такое множество установлено, то выбор рассматриваемого элемента запрещает любой элемент каждой клики, которой он принадлежит, и условно разрешает выбор любого другого элемента. Поэтому вместо списков элементов, запрещаемых рассматриваемым, предлагается список всех клик, которым он принадлежит.

Преимущество метода, предложенного Е.Г. Гониным, состоит в уменьшении объема списков, что ведет к ускорению процесса внесения и снятия запретов на выбор элементов. При этом каждая клика может быть запрещена только один раз, в то время как элемент может запрещаться повторно.

В дальнейшем, используя метод *клик*, созданный Е.Г. Гониным, Л.Я. Панкратова доказала ряд теорем. В частности: проективная плоскость порядка 9, содержащая подплоскость порядка 3, является либо дезарговой, либо трансляционной, либо сдвиговой, либо хьюзовой (1980). Отсюда в качестве следствия вытекает результат R.B. Killgrove о том, что каждая недезаргова плоскость представляет расширение некоторого полного четырехвершинника. Важной является еще одна теорема: в проективной плоскости порядка 9 не существует конфигурации 8_3 с коллинеарными диагональными точками и определенным исходным набором точек плоскости на прямых конфигурации [27].

Имеется и другая возможность построения конечных проективных плоскостей с применением латинских квадратов. Оказывается, что для этой цели пригодны латинские квадраты порядка $n-1$, и такая возможность уже была использована. В частности, доказательство единственности ПП порядка 8, которое выполнили M. Hall, J.D. Swift и R.J. Walker (1956), было осуществлено путем перебора всех 147 неизоморфных между собой латинских квадратов порядка 7. Аналогично, в новом доказательстве несуществования проективной плоскости порядка 6, предложенном А.К. Рыбниковым и Н.М. Рыбниковой (1966), использовались латинские квадраты порядка 5.

А.Е. Малых предложила новое описание ПП порядка *n* системой из *n* латинских квадратов порядка $n-1$, удовлетворяющих четырем требованиям [21]. Геометрическая интерпретация его определяется выбором определенных трехвершинников с их последующим описанием латинскими квадратами. Она осуществила полную классификацию трехвершинников в четырех известных ПП порядка 9 и расширила их в конечном счете до описаний известных плоскостей порядка 9 [22].

Для проверки эффективности метода, разработанного А.Е. Малых, Е.Г. Гонин предложил А.Н. Пехлецкой исследовать классы латинских квадратов порядка 8, составленных из подквадратов порядка 2 повторяющегося состава, с целью дальнейшего построения над ними ПП порядка 9. Работа осуществлялась с использованием комбинаторных инвариантов и графического представления структуры таких квадратов. Е.Г. Гонин разработал *прием*, при помощи которого квадраты порядка 8 такого вида могут быть рассмотрены как латинские квадраты порядка 4. А так как последних с точностью до изоморфизма имеется только два вида (А и В), то они изучались исчерпывающим образом. В конечном итоге А.Н. Пехлецкая получила общее число неизоморфных между собой латинских квадратов порядка 8 рассматриваемого вида, причем соответствующих виду А их оказалось в общем списке 12, а для В – 11 классов [30].

Актуальность построения пар ортогональных латинских квадратов порядка *n* состоит не только в возможности получения новых конечных ПП того же порядка, но и в решении знаменитой *гипотезы Эйлера*.

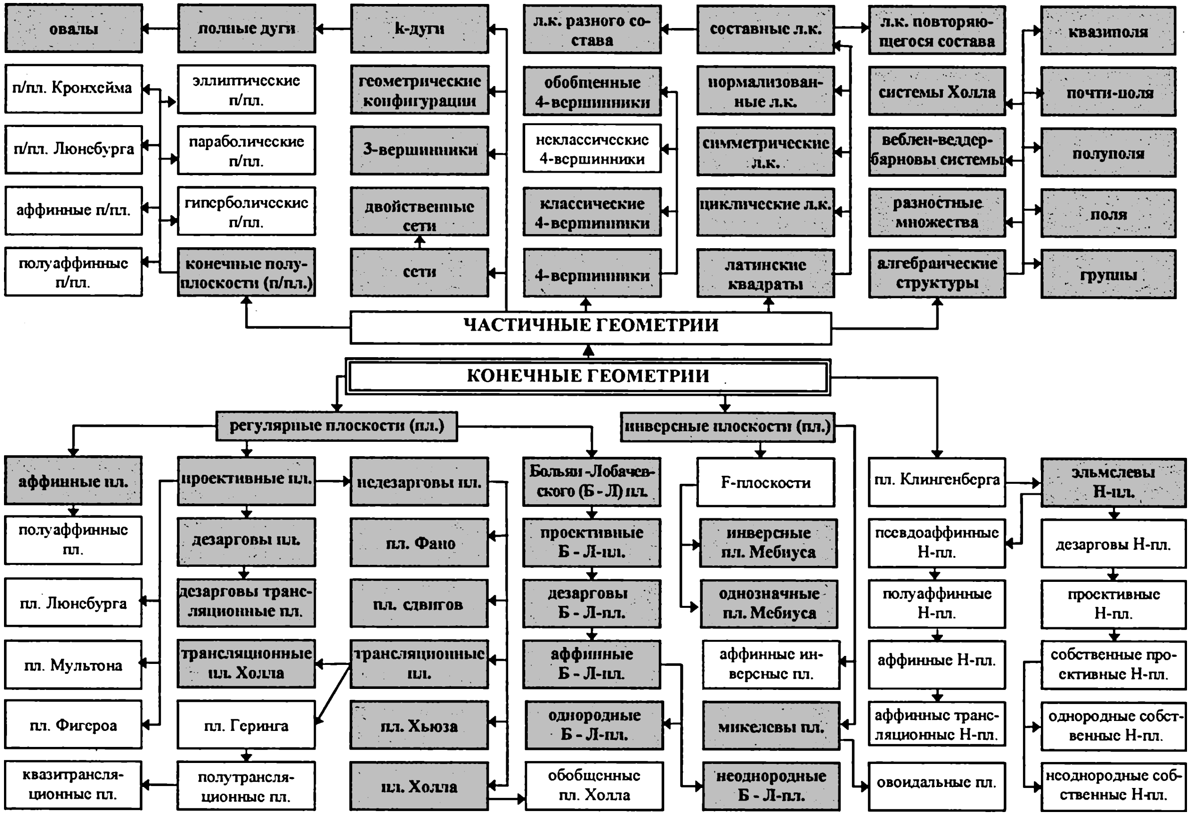
В 1782 г. великий Леонард Эйлер опубликовал большой мемуар «Исследование магического квадрата нового типа». В нем описывалась задача о размещении в каре 36 офицеров шести различных званий, взятых из шести разных родов войск так, чтобы в каждой шеренге и каждом ряду стояли офицеры разных званий, служащие в разных родах войск. Новый тип квадрата был назван им *латинским*, так как вместо чисел он писал буквы латинского алфавита. Задача, решаемая ученым, состояла в наложении двух квадратов – латинского и греческого – так, чтобы образовавшиеся пары (ортогональная пара) не повторялись. Интерес к этой задаче связан с тем, что для $n = 4$ и $n = 5$ такие пары были построены. Однако все попытки решить задачу для $n = 6$ не увенчались успехом. Поэтому Эйлер сформулировал *гипотезу*: *ни для какого латинского квадрата нечетно-четного порядка* ($n = 2(2k+1)$, $k \in \mathrm{N}$) *нельзя построить ортогональную пару*.

В дальнейшем она стала известна как *гипотеза Эйлера*. Прошло 118 лет. На рубеже XIX–XX вв. французский математик и инженер Gaston Tarry, получив все 9408 нормализованных латинских квадратов порядка 6, объединил их, как бы мы теперь сказали, в 22 класса неизоморфных между собой квадратов. К каждому из них он пытался достроить ортогональную пару, и этого сделать не удалось. А потому для $n = 6$ гипотеза оставалась *верной*. Следующий порядок был $n = 10$. С середины XX в. предпринимались многочисленные попытки построения такой ортогональной пары. Крупнейшие ученые: H.F. MacNeish, R.C. Bose, E.T. Parker, S.S. Shrikhande, R.M. Wilson, W.H. Mills и другие работали над проверкой гипотезы Эйлера для различных значений n. И усилия их увенчались успехом. В 1960–1961 гг. *гипотеза Эйлера была опровергнута для всех* $n \neq 2$, $n \neq 6$.

А первую пару ортогональных квадратов порядка $n = 10$ построил в 1963 г. E.T. Parker. Тогда об этом много писали. В 1961 г. была сдана в печать заметка *Александра Ивановича Лямзина* из комбинаторной школы Е.Г. Гонина. Опубликована она была спустя два года в журнале АН СССР «Успехи математических наук» [20].

На приведенной ниже схеме представлены *основные виды* конечных геометрий. Тематику выделенных в ней частей разрабатывали Евгений Григорьевич Гонин и его ученики.

СТРУКТУРА КОНЕЧНЫХ ГЕОМЕТРИЙ



Е.Г. ГОНИН – РЕФЕРЕНТ ВИНИТИ

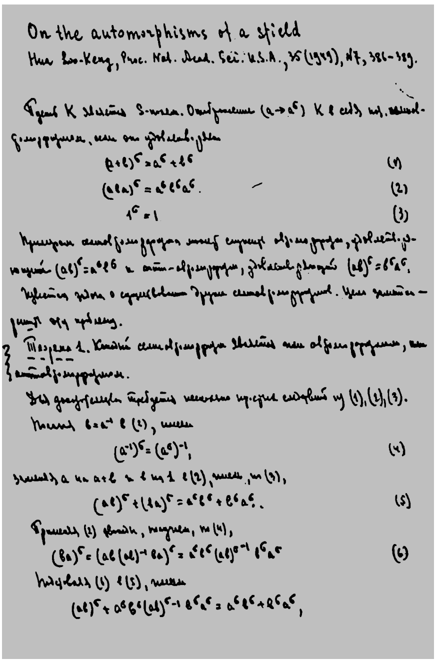
После окончания Великой Отечественной войны заметно возрос научно-технический прогресс, объем исследований во всем многообразии естественно-научных дисциплин чрезвычайно расширился. Приоритетные направления их развития, разработка методов эффективного решения конкретных проблем, доказательство теорем и получение новых результатов, как показывает опыт, иногда одновременно возникают и в умах отдельных ученых, и в целых научных коллективах. Для видения перспективных направлений развития, осуществления успешных подходов к решению текущих задач необходимо было четко ориентироваться в последних достижениях, результатах многочисленных исследований в конкретных областях естественно-научных знаний.

В 1957 г. был основан Всесоюзный институт научной и технической информации (ВИНИТИ). Тогда же стал выходить ежемесячный реферативный журнал (РЖ) «Математика», куда были приглашены для сотрудничества ведущие ученые нашей страны, активно работавшие в сфере многочисленных разделов математики. В числе первых в 1957 г. такое приглашение получил Евгений Григорьевич Гонин. Опубликованные в научных журналах всех стран мира статьи, заметки, а также книги, монографии и другие математические материалы разных ученых стали реферировать советские ученые.

По договору с издательством Е.Г. Гонин должен был реферировать работы по трем разделам: геометрии, комбинаторному анализу и теории графов. По-видимому, оговаривалось, что реферироваться будут только те работы, которые опубликованы на европейских языках: английском, немецком, французском, испанском и итальянском. Как показал выполненный нами анализ 494 (!) рефератов, написанных Е.Г. Гониным почти за 27 лет, он дополнительно переводил с других иностранных языков: венгерского, сербско-хорватского, румынского, болгарского, польского, финского, чешского и др. А.Е. Малых, бывшая тогда его аспиранткой, вспоминает, как однажды он сообщил, что прислали для реферирования статью на японском языке. Она спросила: «Оговорено ли это в договоре?» Евгений Григорьевич ответил: «Раз уж прислали, значит, надо».

А ведь для того чтобы квалифицированно написать хотя бы один реферат, требовалось приложить значительные усилия. Вначале

Е.Г. Гонин знакомился с содержанием работы на языке оригинала, затем тщательно переводил ее на русский язык, после чего своим бисерным почерком аккуратно записывал перевод остро отточенным карандашом (карандаш он точил сам маленьким перочинным ножичком). По всей видимости, делал он так для того, чтобы его аспиранты изучили работу, если она касалась тематики их исследований. Сколько обыкновенных школьных тетрадей так исписано – неизвестно. Все они были пронумерованы. А.Е. Малых вспоминает, что одна из таких тетрадей, попавшая к ней, имела номер 278... Ниже приведены копии первых страниц переводов статей с английского, немецкого, французского и итальянского языков, выполненных Евгением Григорьевичем и помещенных в его тетрадях.

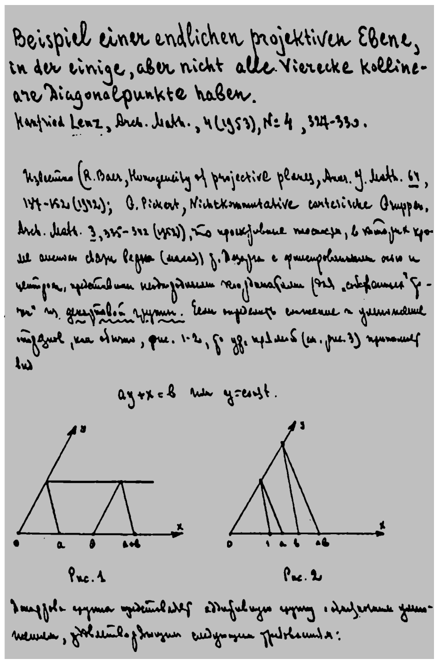

On the automorphisms of a sfield

Hua Loo-Keng, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 35 (1949), N7, 386-389.

$(a+b)^\sigma = a^\sigma + b^\sigma$ (1)

$(aba)^\sigma = a^\sigma b^\sigma a^\sigma$ (2)

$1^\sigma = 1$ (3)


Beispiel einer endlichen projektiven Ebene, in der einige, aber nicht alle Vierecke kollineare Diagonalpunkte haben.

Hanfried Lenz, Arch. Math., 4 (1953), N: 4, 324-330.

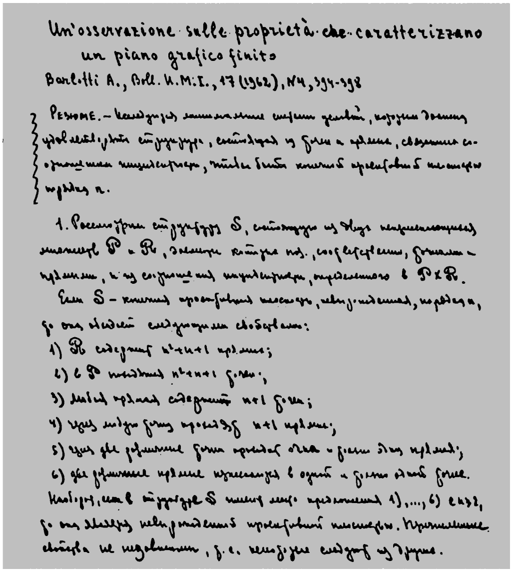
R. Baer, Homogeneity of projective planes, Amer. J. Math. 64, 137-152 (1942); G. Pickert, Nichtkommutative cartesische Gruppen, Arch. Math. 3, 335-342 (1952)

$ay+x=b$ или $y=\text{const}$.

Рис. 1

Рис. 2

Затем Евгений Григорьевич приступал к написанию самого реферата. Как правило, все они кратки, лаконичны. Их отличают логическая строгость и четкость изложения. Здесь представлены копии его рефератов о статьях из различных разделов математики, опубликованных на английском, немецком и итальянском языках.



Un'osservazione sulle proprietà che caratterizzano un piano grafico finito

Barlotti A., Boll. U.M.I., 17 (1962), N4, 394-398

Раздел «Комбинаторный анализ» (1980)

2 В614. Коллинеации проективных плоскостей порядка 10. Часть II. Whitesides S. H. Collineations of projective planes of order 10. Part II. «J. Combin. Theory», 1976, A 26, № 3, 269—277 (англ.)

Используя результаты части 1 своей работы реф. 2В613, автор доказывает, что проективная плоскость порядка 10 не может иметь группы коллинеаций порядка 9. Затем опровергаются порядки 25 и 15. Окончательный результат: Полная группа коллинеаций любой проективной плоскости порядка 10 имеет порядок 1, 3 или 5.

Е. Гонин

Раздел «Теория графов» (1982)

6 В501. Изучение возможности отыскания овалов в проективной плоскости порядка 10. A feasibility study of a search for ovals in a projective plane of order 10. Lam C., Thiel L., Swiercz S. «Lect. Notes Math.», 1982, 952, 349—352 (англ.)

Если существует проективная плоскость порядка 10 с овалом, т. е. дугой из 12 точек, то через каждую из 99 точек, не принадлежащих овалу, проходит по 6 секущих. Поэтому основная часть построения такой плоскости состоит в наборе 99 разбиений множества из 12 элементов таким образом, чтобы каждая пара пар без общих элементов встретилась только один раз. С помощью ЭВМ авторы подтвердили существование 396 неизоморфных девяток разбиений с общей парой. Пробные подсчеты показали, что нужно перебрать, частично используя автоморфизмы, около $4 \cdot 10^{11}$ разбиений. Авторы считают эту работу практически выполнимой.

Е. Гонин

Раздел «Инцидентностные системы»

6 В462. Диаграммы и системы инцидентности. Diagrams and incidence structures. Pasini Antonio. «J. Combin. Theory», 1982, A33, № 2, 186—194 (англ.)

Сначала детально излагается общее определение системы инцидентности, введенное Бьюкенхаутом. Опираясь на то, что система ранга 2, т. е. состоящая из элементов двух типов, является обобщенным двухвершинником или же частичным линейным пространством, автор вводит понятие чистоты. Вычетом флага, т. е. множества попарно инцидентных элементов попарно различных типов, называется подсистема, состоящая из всех инцидентных флагу элементов остальных типов. Классом вычетов типа $\{i, j\}$ названо множество всех вычетов, состоящих из элементов типов i и j. Такой класс назван чистым, если все входящие в него вычеты оказываются системами ранга 2 одного и того же вида. Система называется чистой, если все такие классы вычетов являются чистыми. Автор заметил, что в работах Бьюкенхаута неявно предполагается чистота любых систем инцидентности и примерами опроверг это допущение. Далее он нашел необходимые и достаточные условия чистоты, а также простое достаточное условие — отсутствие 3-циклов в графе системы.

Е. Гонин

Евгений Григорьевич был одним из немногих референтов, кто скрупулезно изучал в присланных работах ход поиска полученных результатов, а в случае нечеткости изложения выявлял заимствования у других авторов без соответствующих ссылок, указывал либо на то, что привело к неверному результату или ошибке (и такое случалось), либо на то, что в работе рассмотрены не все варианты, делал краткие, но квалифицированные замечания. Ниже приведены заглавия рефератов с примечаниями Е.Г. Гонина, опубликованных в РЖ «Математика» разных лет.

9 А315. О конечных подмножествах и простых замкнутых ломаных. Gemignan Michael. On finite subsets of the plane and simple closed polygonal path. «Math. Mag.», 1966, 39, № 1, 38-41. (англ.)

Примечание референта. Доказательство первого утверждения некорректно: часть (в) леммы 5 неверна. Для дальнейшего достаточно более слабое предложение: для любых двух соседних вершин объемлющего выпуклого многоугольника C_1 существуют две соседние вершины объемлемого многоугольника C_2, соединимые с первыми двумя отрезками, не пересекающими C_2 и друг друга.

1 В501. Несуществование некоторой конечной проективной плоскости. Erbald W. Nonexisten of some finite projective plane. «Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.», 1977, 82, № 1, 2-5-12. (англ.)

Комментарии референта. Это утверждение (основное в работе) является частью более общего результата, полученного и опубликованного И.П. Непорожневым (РЖ Мат., 1967, 7 А303). Оба исследования проведены по одному плану, но в деталях реферируемая работа выполнена менее рационально. В частности, проделан трудоемкий независимый анализ двух случаев, хотя второй сводится к первому подстановкой (2 3 6 4 9 5 7 8 10).

11 А452. Расширение четырехвершинников в проективных плоскостях. II. Killgrove Raymond B. Completions of quadrangles in projective planes. II. «Canad. J. Math.», 1965, 17, № 1, 155-165. (англ.)

Примечание референта. Автор не упоминает работу Магари (РЖ Мат., 1959, 4513), в которой утверждается, что плоскость трансляций порядка 9 содержит 3240 подплоскостей порядка 3. Проверка, проведенная референтом по латинским квадратам, дала результат 1080, в согласии со статьей.

4 А245. Разбиение группы двухсторонних гомографий проективной прямой в алгебре обобщенных кватернионов. Ertel Gabriel. Une partition du gruppe des homographaies bilatères de la droite projective, dans une algebra de quaternions generalises. «Compte rendus Acad. Sci.», 1967, 264, № 9, A 402-A 404. (франц.)

Примечание референта. Данное без доказательства равенство $\Lambda(a_{ij}) = {}^{\sigma}\left({}^{t}(a_{ij})^{-1}\right)$ неверно.

3 А235. О числе неизоморфных линейных пространств из *n* точек. Doyen Jean. Sur le nombre d'espaces lineares izomorphes de *n* points. «Bull. Soc. Math. Belg.», 1967, 19, № 4, 421-437. (франц.)

Примечание референта. Проведенное методом спуска доказательство того, что не все точки связного конечного линейного пространства являются точками склеивания, имеет логический пробел. Спуск нужно вести по пространствам, у которых самое большее одна точка не является точкой склеивания.

4 А365. Об упорядоченных проективных плоскостях. Levi F.W. Über angeordnete projektive Ebenen. «Arch. Math.», 1962, 13, № 1-3, 132-135. (нем.)

Примечание референта. Аксиома параллельности близка к более слабо сформулированной аксиоме II_6^{**} в статье референта по этому же вопросу (Уч. зап. Пермского пед. ин-та, 1957, вып. 14).

Для реферирования присылали множество работ, а времени давали мало – 7–10 дней. Ниже помещены сведения о количестве рефератов, написанных Е.Г. Гониным за некоторые годы: 1962 – 13; 1965 – 24; 1971 – 36; 1975 – 28; 1977 – 22; 1979 – 13; 1981 – 25; 1982 – 15; 1984 – 6. В среднем ему приходилось реферировать более 18 работ в год.

Об уровне трудности и сложности работы референта может судить лишь тот, кто сам был таковым. Даже через два года после смерти Евгения Григорьевича в РЖ «Математика» публиковались его рефераты. Автор этих строк был преемником Е.Г. Гонина, но реферировал только материалы одного раздела – «Комбинаторный анализ», и сил на такую работу хватило менее чем на три года.

Работоспособность Евгения Григорьевича была поразительной, высок был и его авторитет. Его приглашали на многочисленные международные конференции; работы ученого и его аспирантов цитировались, на них ссылались многие ученые, работавшие в области конечных геометрий и вообще комбинаторного анализа.

О РАБОТЕ КАФЕДРАЛЬНОГО НАУЧНОГО СЕМИНАРА ПОД РУКОВОДСТВОМ Е.Г. ГОНИНА

Людмила Яковлевна Панкратова,
доцент кафедры геометрии ПГПУ

Научный семинар был организован на кафедре геометрии в начале 1960-х гг. В разные годы он назывался по-разному: первоначальное название – «Конечные проективные плоскости», затем – «Комбинаторный анализ», позднее – «Комбинаторика». Но как бы он ни назывался, участники семинара – а ими были все члены кафедры алгебры и геометрии – занимались исследованием главным образом конечных геометрических структур комбинаторными методами. Е.Г. Гонин руководил семинаром вплоть до своей кончины в 1983 г.

Он являлся идейным руководителем, душой семинара, был в курсе всех новых открытий и достижений в области конечных геометрий и инцидентностных систем, щедро делился с коллегами своими идеями, разработками и научными результатами.

Основной интерес составляли исследования проективных плоскостей порядка 9, так как в те годы еще не был решен вопрос о перечислении всех возможных их типов.

Члены кафедры под руководством Е.Г. Гонина пытались приблизиться к решению этого вопроса, разрабатывая и применяя различные подходы. К ним относились, в частности: проективное упорядочение конечных прямых (О.М. Поносова); построение конечных круговых плоскостей (Л.И. Истомина); построение конечных проективных плоскостей, содержащих овалы (И.П. Непорожнев); представление проективных плоскостей порядка 9 полной системой попарно-ортогональных латинских квадратов того же порядка (А.Е. Малых, Л.Я. Панкратова, Л.И. Пантелеева); описание и разработка метода построения проективных плоскостей порядка n системой из n латинских квадратов специального вида, имеющих порядок $n - 1$ (А.Е. Малых); расширение до проективной плоскости порядка 9 заданной k-дуги, полной дуги (Е.Г. Гонин, Ю.Н. Зверева, О.М. Поносова, Е.Е. Гонина, А.Д. Лумпов); латинские прямоугольники размера 3×9 (Л.Б. Бурди); перечисление всех проективных плоскостей порядка 9, содержащих подплоскости порядка 3 (Л.Я. Панкратова, В.И. Васильков); изучение структуры всех известных проективных плоскостей порядка 9 (В.И. Васильков, А.Е. Малых); описание конечных плоскостей разностными множествами (Б.Ф. Харитонов); нахождение неизоморфных между собой латинских квадратов порядка 8, содержащих подквадраты порядка два повторяющегося состава (А.Н. Фирсович). В русле этих исследований выполнялись работы по изучению истории комбинаторного анализа, и конечных геометрий в частности (А.Е. Малых, В.Г. Алябьева, О.Д. Угольникова).

При любом из указанных выше подходов соответствующие исследования требовали большого перебора изучаемых комбинаторных объектов. Поэтому предпринимались поиски путей для облегчения такой работы. Поначалу применялись так называемые средства *малой механизации* (термин Е.Г. Гонина) в виде металлических решеток, изготовленных для решения комбинаторной задачи по составлению набора элементов, на которые накладывались определенные ограничения. Затем стали использовать ЭВМ, позволявшие получить окончательные результаты проведенных исследований. Наконец, разрабатывались сами *методы* для выполнения более эффективного перебора.

При составлении программ для решения поставленных задач приходилось искать и наиболее рациональные пути перебора огромного числа возможных вариантов. Для этого Е.Г. Гонин разработал методы внесения и снятия запретов на элементы, назвав их *со взглядом «вперед», со взглядом «назад»;* метод *клик.* И.П. Непорожнев, Л.И. Истомина, Ю.Н. Зверева, В.И. Васильков, А.Д. Лумпов и другие широко их использовали в исследованиях по конечным геометриям.

Участники семинара знакомились и с другими процедурами перебора, например, изучили метод *ветвей и границ*, предложенный И.А. Фараджевым – руководителем одного из секторов Института проблем управления Академии наук СССР (Москва) [36].

Полученные решения каждой конкретной комбинаторной задачи также нуждались в обработке, поскольку их, как правило, получалось очень много. Возникала необходимость разбиения множества решений на классы эквивалентности для выделения неизоморфных путем «отождествления» получаемых решений. Алгоритм такого отождествления был разработан Е.Г. Гониным и назван им *методом поэтапных отождествлений.* Основная идея метода состояла в следующем: каждое новое решение проверялось определенным образом на изоморфизм с полученными ранее, и лишь неизоморфные не отсеивались. Таким образом, получалось множество, состоящее лишь из представителей каждого класса эквивалентности.

Этот метод впоследствии помог при оформлении результатов исследований, проводимых учениками Е.Г. Гонина: И.П. Непорожневым, Ю.Н. Зверевой, Л.И. Истоминой, В.И. Васильковым и др.

В работе научного семинара принимали участие и коллеги из других вузов страны. Среди них были: Н.К. Пухарев (Полтава, Украина), А.В. Назарок (Киев, Украина), А.В. Кузнецов (Кишинев, Молдавия), Б.А. Розенфельд (Москва) и др.

На занятиях семинара изучались и обсуждались актуальные *книги* и *монографии* ученых, главным образом зарубежных, исследовавших конечные геометрии [1 – 9], а также основополагающие статьи зарубежных авторов [10–20].

Лидером среди докладчиков был, конечно, Е.Г. Гонин. Кроме того, на заседаниях научного семинара все его участники сообщали о результатах своих исследований. Ниже приведена тематика некоторых заседаний с указанием имен докладчиков.

1962

✓ Единственность проективной плоскости порядка 8 (Е.Г. Гонин).

✓ Машинное построение некоторых плоскостей порядка 9 (Е.Г. Гонин).

✓ Транзитивные группы преобразований множества (введение понятия разностного множества) (Е.Г. Гонин).

1963

✓ Циклические проективные плоскости (Е.Г. Гонин).

✓ Использование точек общего положения при построении конечных проективных плоскостей (дуги и овалы) (Е.Г. Гонин).

✓ Построение регулярных конечных плоскостей над группами (Н.К. Пухарев).

✓ Конечные плоскости Лобачевского и A_n^k-алгебры (Н.К. Пухарев).

✓ Особые латинские прямоугольники (А.В. Назарок, Киев).

✓ Несуществование пары нормализованных по столбцам ортогональных латинских квадратов порядка 10 (Е.Г. Гонин).

✓ Несуществование систем, состоящих из трех и более нормализованных по столбцам взаимно ортогональных латинских квадратов порядка 9 (Е.Г. Гонин).

1964

✓ О необходимом и достаточном условии существования взаимно ортогональных латинских квадратов (А.В. Назарок, Киев).

✓ Способы построения A_n^k-алгебр и связь их с конечными плоскостями (Н.К. Пухарев).

✓ Исследование конечных проективных плоскостей с помощью овалов (И.П. Непорожнев).

✓ Тактические разложения конечных проективных плоскостей (Е.Г. Гонин).

1965

✓ Построение недезарговых проективных плоскостей порядка q^2 с помощью латинских квадратов (Е.Г. Гонин).

✓ Типы проективных плоскостей порядка 9. Плоскость Хьюза (Е.Г. Гонин).

1968

✓ Варианты алгоритма перебора решений комбинаторной задачи («взгляд назад», «взгляд вперед») (Е.Г. Гонин).

1970

✓ Алгоритм перебора решений комбинаторной задачи (Е.Г. Гонин).

✓ Блок-схемы решения комбинаторной задачи со сложными запретами (Е.Г. Гонин).

1973

✓ Описание проективных плоскостей порядка n латинскими квадратами порядка $n - 1$ (А.Е. Малых).

1974

✓ Описание четырех известных проективных плоскостей порядка 9 латинскими квадратами порядка 8 (А.Е. Малых).

✓ Просто транзитивные плоскости (Е.Г. Гонин).

1975

✓ Метод *клик* (Е.Г. Гонин).

✓ По материалам книги «Miniquaternion geometry» by T.G. Room, A.M. Kirkpatrick: построение конечных почти-полей порядка 9 (З.И. Андреева).

1976

✓ Полные 6-дуги в проективной плоскости порядка 9 (Е.Г. Гонин).

✓ Типы прямых в проективной плоскости порядка 9 с полной 6-дугой (Е.Г. Гонин).

✓ Расширение полной 6-дуги до проективной плоскости порядка 9 (Е.Г. Гонин).

✓ Универсальный алгоритм перечисления решений комбинаторной задачи методом перебора «вширь» (Е.Г. Гонин).

✓ Метод перебора «вглубь» при решении комбинаторной задачи. Алгоритм чтения набора с заданным номером (Е.Г. Гонин).

✓ k-сети, латинские квадраты и конечные проективные плоскости (В.Г. Алябьева).

1977

✓ Внесение и снятие запретов при решении комбинаторной задачи методом *клик* (Е.Г. Гонин).

✓ Непосредственное отождествление решений комбинаторной задачи, нахождение классов эквивалентности (Е.Г. Гонин).

✓ Примеры алгоритмов отождествлений решений комбинаторных задач (Е.Г. Гонин).

✓ Алгоритм отождествления решений комбинаторной задачи (Е.Г. Гонин).

✓ Применение метода поэтапных отождествлений при расширении до проективной плоскости девятого порядка 6-дуги с тремя внешними точками (Е.Г. Гонин).

✓ Общее описание метода поэтапных отождествлений на множестве решений комбинаторной задачи (Е.Г. Гонин).

1978

✓ 6-дуги с одной, двумя и тремя внешними точками в проективной плоскости порядка 10 (Е.Г. Гонин).

✓ 6-дуги в проективной плоскости порядка 9 (Е.Г. Гонин).

✓ Отождествление на множестве возможных 64 вариантов полученных 6-дуг (Е.Г. Гонин).

1979

✓ Об истории становления теории конечных проективных плоскостей (В.Г. Алябьева).

1980

✓ Расширение до проективной плоскости девятого порядка 6-дуги с одной внешней точкой (О.М. Поносова).

✓ О конечных круговых плоскостях (Л.И. Истомина).

✓ 6-дуга с одной внешней точкой в проективной плоскости порядка 9. Один из случаев (Ю.Н. Зверева).

✓ «Конструктивное перечисление комбинаторных объектов». По материалам статьи И.А. Фараджева «Перечислительный вариант метода ветвей и границ» 36, С. 3–11]. (Е.Г. Гонин).

✓ Классы эквивалентности на множестве решений и их представители. Метод поэтапных отождествлений (Е.Г. Гонин).

1982

✓ Алгебраические предпосылки появления первых недезарговых конечных плоскостей (В.Г. Алябьева).

✓ О развитии исследований по проективной геометрии в СССР (В.Г. Алябьева).

✓ О несуществовании плоскости порядка 9 с 6-дугой определенного типа (Г.Е. Утемова).

1983

✓ Группы типа Ли и их геометрии (проф. Б.А. Розенфельд, Москва).

✓ Перечисление пространств, где группы Ли – компактные вещественные группы, и некомпактное пространство (проф. Б.А. Розенфельд, Москва).

1984

✓ Каждый член семинара выступал с сообщением по определенному разделу книги F.W. Levi «Geometrische Configurationen».

1987

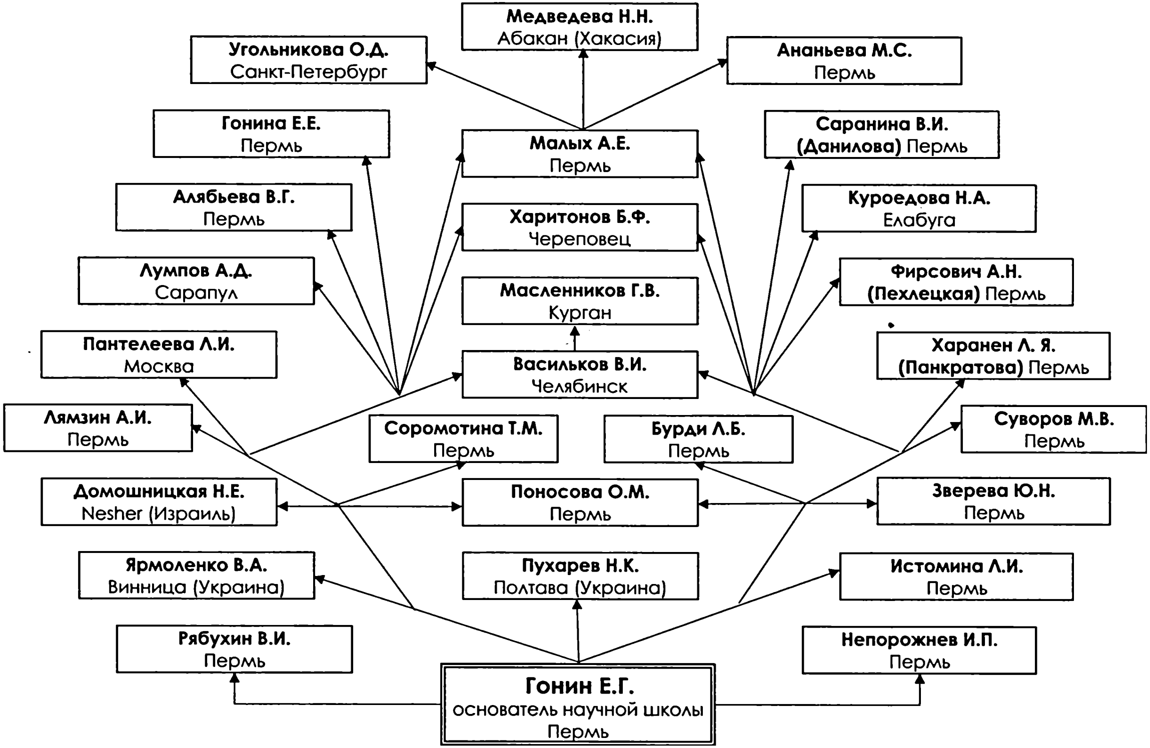
✓ На семинарах рассматривали актуальные главы книги J. Déneš'a, A.D. Keedwell'a «Latin Squares and their Applications».

✓ Конечные геометрии и их применение (теория планирования экспериментов, создание помехоустойчивых кодов) (А.Е. Малых).

✓ Обсуждение учебного пособия Е.Г. Гонина «Конечные проективные плоскости».

Столь продолжительное время семинар работал благодаря неустанным научным поискам Евгения Григорьевича Гонина. Участники семинара постоянно выступали с докладами на международных, всесоюзных, республиканских, региональных семинарах и конференциях, проводимых в Москве, Кишиневе, Ташкенте, Тбилиси, Одессе, Смоленске, Оренбурге, Самарканде, Киеве, Свердловске и многих других городах.

ГРАФ-ДЕРЕВО УЧЕНИКОВ ЕВГЕНИЯ ГРИГОРЬЕВИЧА



Литература, которая изучалась и обсуждалась на занятиях семинара под руководством Е.Г. Гонина

1. *Bruck R.H.* Existence problems for classes of finite projective planes. – Lecture notes / Canad. Math. Congr., 1963. – 168 p.

2. *Dembowsky P.* Finite geometries. – Berlin: Springer – Verlag, 1968. – 375 p.

3. *Dénes J., Keedwell A.D.* Latin Squares and their Applications. – Budapest: Akadémiai Kiadó, 1974. – 548 p.

4. *Hughes D.R., Piper F.S.* Projective planes. – N.–Y.: Springer, 1973. – 423 p.

5. *Levi F.W.* Geometrische Configurationen. – Leipzig: Hirzel, 1929. – 516 S.

6. *Levi F.W.* Finite geometrical systems. – Univ. Calcutta, 1942. – 218 p.

7. *Lüneburg H.* Translation Planes. – N.–Y.: Springer – Verlag, 1980. – 407 p.

8. *Room T.G., Kirkpatrick A.M.* Miniquaternion geometry. – Springer – Verlag, 1971. – 202 p.

9. *Stevenson F.W.* Projective planes. – San-Fr.: Freeman, 1972. – 426 p.

10. *Andre J.* Über nicht – Desarquessche Ebenen mit transitiver Traslationsgruppe // Math. Zeitschr., 1954. – №60. – S. 156–186.

11. *Bose R.C.* On the applications of the properties of Galois fields to the problem of construction of Hyper-Graeco-Latin squares. – Sanchyā // Indian J. Stat, 1938. – V. 3. – № 4. – P. 223–238.

12. *Bose R.C., Nair K.R.* On complete sets of Latin squares. – Sanchyā // Indian J. Stat, 1941. – V. 5. – № 4. – P. 361–382.

13. *Bruck R.H., Ryser H.J.* The non-existence of certain finite projective planes // Canad. J. Math., 1940. – № 1. – P. 88–93.

14. *Segre B.* Teoria di Galois, fibrasioni proiecttive e geometrie non-desarguesiane // Ann. Math. Pura Appl., 1891. – № 64. – P. 1–76.

15. *Singer J.* A theorem of finite projective geometry and some applications to number theory // Trans. Amer. Math. Soc., 1938. – № 43. – P. 337–387.

16. *Sommerville D.M.Y.* On certain projective configurations in space of *n* dimensions and related problems on arrangements // Proc. Edinburgh Math. Soc., 1906. – № 25. – P. 725–747.

17. *Veblen O., Bussey W.H.* Finite projective geometries // Trans. Amer. Math. Soc., 1906. – № 7. – P. 241–259.

18. *Veblen O., Wedderburn J.H.M.* Non-Desarguesian and non-Pascalian geometries // Trans. Amer. Math. Soc., 1907. – № 8. – P. 379–388.

19. *Wagner A.* On projective planes transitive on quadrangles // J. London Math. Soc., 1958. – № 33. – P. 25–33.

20. *Zappa G.* Sui gruppi di colleneasioni dei piani di Hughes // Boll. Un. Mat. Ital., 1957. – V.12. – № 3. – P. 507–516.

Литература к части II

1. *Алимов Н.Г.* Об упорядоченных полугруппах // Известия АН СССР, сер. математич. – М.: Изд-во АН СССР, 1950. – Т. 14. № 6. – С. 549–576.

2. *Арлазаров В.Л., Бараев А.М., Гельфанд Я.Ю., Фараджев И.А.* Построение с помощью ЭВМ всех латинских квадратов порядка 8 // Алгоритмические исследования в комбинаторике: сб. – М.: Наука, 1978. – С. 129–141.

3. *Васильков В.И.* Наборы точек и подплоскости в недезарговых проективных плоскостях порядка 9 // Комбинаторный анализ: сб. – М.: МГУ, 1976. – Вып. 4. – С. 48–53.

4. *Васильков В.И.* О строении плоскости Хьюза порядка 9 // Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1976. – Т. 152. – С. 55–68.

5. *Васильков В.И., Масленников Г.В.* Исследование *k*-дуг в плоскости Хьюза порядка 9 с помощью ЭВМ // Труды ИММ УрО РАН. – Свердловск, 1998. – Т. 5. – С. 28–38.

6. *Гонин Е.Г.* Интерпретация Пуанкаре как аналог стереографической проекции // Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1938. – Вып. 3. – С. 39–41.

7. *Гонин Е.Г.* Доказательство независимости аксиом соединения проективной геометрии // Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1938. – Вып. 3. – С. 43–46.

8. *Гонин Е.Г.* Обобщение теории вещественных чисел А.Н. Колмогорова: автореф дис. … канд. физ.-мат. наук. – Молотов: Молотов. гос. ун-т, 1952.

9. *Гонин Е.Г.* Метод поэтапных отождествлений // Материалы XXIV конф. матем. кафедр пед. ин-тов Урала. – Киров, 1968. – С. 50–51.

10. *Гонин Е.Г.* Перебор решений комбинаторных задач // Математика: сб. – Пермь: ПГПИ, 1971. – Т. 94. – С. 27–46.

11. *Гонин Е.Г., Гонина Е.Е.* Метод поэтапных отождествлений // Изв. науч.-образоват. центра «Математика». – Вып. 3. – Пермь: ПГТУ, 2006. – С. 16–38.

12. *Гонин Е.Г., Зверева Ю.Н., Поносова О.М.* Типы 6-дуг с одной внешней точкой в проективных плоскостях порядка 9. – Деп. в ВИНИТИ 16.02.1982, № 705-82.

13. *Гонин Е.Г., Лумпов А.Д.* Проективные плоскости порядка 9 с симметричными полными 6-дугами // Кибернетико-математические методы исследования процессов и структур: сб. Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1976. – Т. 156. – С. 26–38.

14. *Зверева Ю.Н.* Полные 6-дуги в проективной плоскости трансляций порядка 9 и в двойственной ей плоскости // Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1971. – Т. 94. – С. 54–57.

15. *Истомина Л.И.* Круговая плоскость порядка 5 // Комбинаторный анализ: сб. – М.: МГУ, 1972. – Вып. 2. – С. 73–85.

16. *Истомина Л.И.* Единственность круговой плоскости над дезарговой аффинной плоскостью порядка 9 // Приближенное решение краевых задач и функциональных уравнений: сб. – Пермь: ПГТИ, 1973. – Вып. 138. – С. 113–120.

17. *Кавун Н.И.* Обоснование теории вещественных чисел по способу А.Н. Колмогорова // УМН, 1947. – Т. II. – Вып. 5 (27). – С. 199 – 229.

18. *Колмогоров А.Н.* К обоснованию теории вещественных чисел // УМН, 1946. – Т. I. – Вып. 1 (11). – С. 217–219.

19. Личное дело Е.Г. Гонина // Архив Пермского государственного педагогического университета. № 50.

20. *Лямзин А.И.* Пример пары ортогональных латинских квадратов десятого порядка // УМН, 1963. – Т. XVIII. – Вып. 5 (113). – С. 173–174.

21. *Малых А.Е.* Описание проективных плоскостей порядка *n* латинскими квадратами порядка $n-1$ // Комбинаторный анализ: сб. – М.: МГУ, 1972. – Вып. 2. – С. 86–92.

22. *Малых А.Е.* Описание проективных плоскостей порядка 9 латинскими квадратами порядка 8 // Кибернетико-математические методы исследования процессов и структур: сб. Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1976. – Т. 156. – С. 39–54.

23. *Непорожнев И.П.* Новое доказательство невозможности проективной плоскости с 43 точками // Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1968. – Вып. 1. – Т. 61. – С. 24–28.

24. *Непорожнев И.П.* Несуществование одного из типов конечной проективной плоскости порядка 10 // Науч. труды Перм. политех. ин-та: сб. – Пермь: ПГТИ, 1966. – Вып. 21. – С. 108–124.

25. *Непорожнев И.П.* Типы секущих овала проективной плоскости порядка 9 // Комбинаторный анализ: сб. – М.: МГУ, 1971. – Вып. 1. – С. 64–72.

26. *Панкратова Л.Я.* Построение проективных плоскостей порядка 9 над латинскими квадратами порядка 9, состоящими из подквадратов порядка 3 повторяющегося состава // Комбинаторика: сб. Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1976. – Т. 152. – С. 54–59.

27. *Панкратова Л.Я.* Проективные плоскости порядка 9, содержащие подплоскости порядка 3 // Комбинаторный анализ: сб. – М.: МГУ, 1980. – Вып. 5. – С. 90–94.

28. *Панкратова Л.Я.* О возможностях реализации конфигурации 8_3 с коллинеарными диагональными точками в проективной плоскости порядка 9. – Деп. в ВИНИТИ 26.02.1990. – № 1094 – В90. – 9 с.

29. *Пантелеева Л.И.* Симметричные латинские квадраты порядка 9 с латинскими подквадратами порядка 3 / Комбинаторный анализ: сб. – М.: МГУ, 1980. – Вып. 5. – С. 95–98.

30. *Пехлецкая А.Н.* Описание одного класса латинских квадратов порядка 8 / Комбинаторика: сб. Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1976. – Т. 152. – С. 84–89.

31. *Поносова О.М.* Упорядочение конечных дезарговых проективных плоскостей и пространств // Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1968. – Т. 61. – С. 29–34.

32. *Поносова О.М.* Аналитическое упорядочение проективной прямой из 18 точек // Кибернетико-математические методы исследования процессов и структур: сб. Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1976. – Т. 156. – С. 69–74.

33. *Пухарев Н.К.* Некоторые свойства регулярных конечных плоскостей Лобачевского // Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1963. – Т. 103. – С. 61–63.

34. *Пухарев Н.К.* Об A_n^k-алгебрах и регулярных конечных плоскостях // Сибирский матем. журнал. – Новосибирск, 1965. – Т. 6. – № 4. – С. 892–899.

35. Рыбникова Н.М., Рыбников А.К. Новое доказательство несуществования проективной плоскости порядка 6 // Вестник Московского университета. Математика. Механика. – М.: МГУ, 1966, – № 6. – С. 20–24.

36. Фараджев И.А. Конструктивное перечисление комбинаторных объектов / Алгоритмические исследования в комбинаторике: сб. – М.: Наука, 1978. – С. 3–11.

37. Харанен Л.Я. Построение проективных плоскостей над латинскими квадратами, входящими в описание плоскости Хьюза порядка 9 // Математика: сб. Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1968. – Вып. 1. – С. 47–62.

38. Харитонов Б.Ф. Проективные плоскости порядка 10 и 13 с регулярными транзитивными нециклическими группами коллинеаций // Комбинаторный анализ: сб. – М.: МГУ, 1976. – Вып. 4. – С. 54–59.

39. Харитонов Б.Ф. Проективные плоскости порядка $n \equiv 1$ (mod 3) с регулярными транзитивными группами коллинеаций // Комбинаторика: сб. Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1976. – Т. 152. – С. 50–53.

40. Baer R. The infinity of generalized hyperbolic planes / Studies and Essays presented to R. Edurnaut on his 60th birthday. – N.-Y., 1948. – P. 21–27.

41. Benz W. Zur Theorie der Möbiusebenen. I // Math. Ann., 1958. – Bd. 134. – S. 237–247.

42. Benz W. Bezienhungen zwischen Orthogonalitäts – und Anordnungseigenschaften in Kreisehenen // Math. Ann., 1958. – Bd. 134. – S. 385–402.

43. Bose R.C. On the applications of the properties of Galois fields to the problem of construction of Hyper-Graeco-Latin squares. – Sankhyā // Indian J. Stat, 1938. – V. 3. – № 4. – P. 223–238.

44. Bruck R.H., Ryser H.J. The non-existence of certain finite projective planes // Canad. J. Math., 1940. – № 1. – P. 88–93.

45. Cronheim A. T-Groups and their geometry // Ill. J. Math., 1965. – V. 9. – P. 1–30.

46. Dembowski P. Semiaffine Ebenen // Arch. Math., 1962. – Bd. 13. – S. 120–131.

47. Dembowski P. Möbiusebenen gerade Ordnung // Math. Ann., 1964. – Bd. 157. – № 3. – S. 179–205.

48. Dembowski P. Automorphismen endlicher Möbius – Ebenen // Math. Z., 1965. – Bd. 87. – S. 11 5 -136.

49. Dembowski P. Zur Geometrie der Suzukigruppen // Math. Z., 1965. – V. 94. – P. 106–109.

50. Dembowski P. Finite geometries. – Berlin: Springer – Verlag, 1968.–375 p.

51. Dembowski P., Hughes D.R. On finite inversive planes // J. Lodon Math. Soc., 1965. – V. 40. – P. 171–182.

52. Denniston R.H.F. Subplanes of the Hughes plane of order 9 // Proc. Cambr. Phil. Soc. Math. Phys. Sci. – 1968. – V. 64. – № 3. – P. 589–598.

53. Denniston R.H.F. Non-existence of a certain projective plane // J. Austr. Math. Soc., 1959. – V. 10. – № 1–2. – P. 214–219.

54. Denniston R.H.F. On arcs in projective planes of order 9 // Manuscripta math., 1971. – V. 4. – № 4. – P. 61–89.

55. Denniston R.H.F. Uniqueness of the unversive plan of order 5 // Manuscripta math., 1973. – V.8 – № 1. – P. 11–19.

56. *Denniston R.H.F.* Uniqueness of the inversive plan of order 7 // Manuscripta math., 1973 – V. 8 – № 1. – P. 21–26.

57. *Graves L.* A finite Bolyai-Lobachevsky plane // Amer. Math. Monthly, 1962. – V. 69. – № 2. – P. 130–132.

58. *Hall M.* Cyclic projective planes // Duke Math. J., 1947. – V. 14. – P. 1079–1090.

59. *Hall M.* Projective planes // Trans. Amer. Math. Soc, 1943. – V. 54. – P. 229–277. Correction, 1949. – V. 65. – P. 473–474.

60. *Hall M.* Uniqueness of the projective plane with 57 points // Proc. Amer. Math. Soc, 1953. – V. 4. – P. 912–926. Correction, 1953. – V. 5. – P. 994–997.

61. *Hall M.* Finite projective planes // Amer. Math. Monthly, 1955. – V. 62. – P. 18–24.

62. *Hall M., Swift J.D., Killgrove R.B.* On projective planes of order nine // M. Tac., 1959. – V. 13. – № 68. – P. 223–246.

63. *Hall M., Swift J.D., Walker R.J.* Uniqueness of projective plane of order eight // M. Tac., 1956. – V. 10. – № 56. – P. 186–194.

64. *Hughes D.R.* A class of non-Desarguesian projective planes // Canad. J. Math., 1957. –V. 9. – P. 278–288.

65. *Hughes D.R., Piper F.S.* Projective planes. – N.-Y.: Springer, 1973. – 423 p.

66. *Järnefelt G.* Reflections on a finite approximation to Euclidean geometry. Physical and astr. / Prosp., Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, I, math.-phys., 1951. – V. 96. – 43 p.

67. *Karteszi F.* Introduction to finite geometries. – Acad. Kiado: Budadpest, 1976. – 458 p.

68. *Killgrove R.B.* A note of the nonexistence of certein projective planes of order nine. // Math. Comput., 14, 1960. – V. 14. – № 69. – P. 70–71.

69. *Kleinfeld E.* Finite Hjelmslev planes III // J. Math., – 1959. – V.3 – P. 403–407.

70. *Klingenberg W.* Projective und affine Ebenen mit Nachbarelementen // Math. Z., 1954. – Bd. 60. – S. 384–406.

71. *Kustaanheimo P.* On the relation of order in geometries over a Galois field // Comment. phys-math., 1957. – V. 20. – № 8, 9. – P. 108–112.

72. *Kustaanheimo P.* On the relation of order in finite geometries // Rend. mat. e appl., 1957. – V. 16. – № 3–4. – P. 292–296.

73. *Lam C.W.H., Kolesova G., Thiel L.* A computer search of finite projective planes of order 9 // Discrete Math., 1991. – Bd. 92. – № 1–3. – P. 187–195.

74. *Lipman J.* Order in affine and projective geometry // Canad. Math. Bull., 1963. – V. 6. – № 1. – P. 37–43.

75. *Lombardo-Radice L.* La decomposizione tattica di un piano grafico finito associato aun *k*-arco // Ann. Mat. Pure e appl., 1962. –V. 60. – P. 37–48.

76. *Lüneburg H.* Charakterisierungen der endlicher desarguscheen projektiven Ebenen // Math. Z., 1964. – Bd. 85. – S. 419–450.

77. *Lüneburg H.* Affine Hjelmslev – Ebenen mit transitiver Translationsgruppe // Math. Z., 1962. – Bd. 79. – S. 260–288.

78. *Lüneburg H.* Translation Planes. – N.–Y.: Springer – Verlag, 1980. – 348 p.

79. *Lunelli L., M. Sce.* *K*-archi completi nei piani proiettivi desarguesiani di rango 8 e 16 / Centro Calcol. Numerici, Politecnico Milano, 1958. – 15 p.

80. *Magari R.* Le configurazioni parziali chiuse contenute nel piano, P, sul quasicorpo associativo di ordine 9 // Boll. Un. mat. Ital., 1958. – № 13. – P. 128–140.

81. *Martin G.E.* On arcs in finite projective plane // Canad. J. Math, 1967. – V. 19. – № 22. – P. 376–393.

82. *Menichetti G.* Sorpa i *k*-archi completi nel pianograficodi traslazione di ordine 9 // Matematiche, 1966. – V. 21. – № 1. – P. 150–156.

83. *Ostrom T.* Ovals and finite Bolyai-Lobachevsky planes // Amer. Math. Monthly, 1962. – V. 69. – P. 899–901.

84. *Parker E.T.* Construction of some sets of mutually orthogonal Latin squares // Proc. Amer. Math. Soc., 1959. – V. 10. – P. 946–949.

85. *Parker E.T., Killgrove R.B.* A note on projective planes of order nine // Math. Comput., 1964. – V.18. – № 87. – P. 506–508.

86. *Pickert G.* Projective Ebenen. – Springer, 1955. – 318 S.

87. *Qvist B.* Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane // Ann. Acad. Sci. Fennical, Ser. A., I, math.-phys., 1952. – № 134. – 27 p.

88. *Sade A.* Quasigroupes obéissant à certaines lois // Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul, 1957. – A. 22. – P. 151–184.

89. *Sandler R.* Finite homogeneous Bolyai – Lobachevsky planes // Amer. Math. Monthly., 1963. – V. 70. – № 8. – P. 853–854.

90. *Sandler R.* Pseudo Planes and Pseudo Ternaries // J. Algebra, 1966. – V. 4. – P. 300–316.

91. *Sce M.* Preliminari ad una teoria aritmetico-gruppali dei *k*-archi // Rend. mat. e applic, 1960. – V. 19. – № 3-4. – P. 241–291.

92. *Sce M.* Sulla completessa degli archi nei piani proiettive finite // Nota I, Atti. Acad. nas. Lincei, 1959. – Ser. 8, 25. – № 1-2. – P. 43–51.

93. *Scherk F.* On ordered geometries // Canad. Math. Bull., 1963 – V. 6. – № 1. – P. 27–36.

94. *Segre B.* On complete *k*-arcs over GF (*q*) //Abstr. Short communs Internal Congress Math. in Edinburg, 1958. – 110 p.

95. *Segre B.* Ovals in a finite projective plane // Canad. J. Math., 1955. – V. 7. – № 3. – P. 414–416.

96. *Segre B.* Teoria di Galois, fibrasioni proiecttive e geometrie non desarguesiane // Ann. Mat. Pure. Appl., 1954. – T. 64. – P. 1–76.

97. *Singer J.* A theorem of finite projective geometry and some applications to number theory // Trans. Amer. Math. Soc., 1938. – № 43. – P. 337–387.

98. *Sommerville D.M.Y.* On certain projective configurations in space of *n* dimensions and related problems on arrangements // Proc. Edinburgh Math. Soc., 1906. – № 25. – P. 725–747.

99. *Sperner E.* Beziehangen zwischen geometrischer und algebraischer Anordnung // Arch. Math., 1948. – Bd. 1. – P. 148–153.

100. *Sperner E.* Die Ordnungafunktionen einer Geometrie // Math. Ann., 1949. – Bd. 121. – № 2. – P. 107–130.

101. *Stein S.* Homogeneous quasigroupes // Pasif. J. Math. 1964. – V. 14. – P. 1092–1102.

102. *Stevenson F.W.* Projective planes. – San-Fr.: Freeman, 1972. – 426 p.

103. Suzuki M. On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. , – 1962. – V. 75. – P. 105–145.

104. Suzuki M. On a class of doubly transitive groups: II // Ann. Math. , – 1964. – V. 79. – P. 514–589.

105. Szamkolowicz L. On the problem of existence of finite regular planes / Coll. Math., 1962. – V. 9. – P. 245–250.

106. Tarry G. Le probleme de 36 officiers // Compte Rendu de l'Association Francaise pour l'Avancement de Science naturel, 1901. – V.2. – P. 170–203.

107. Topel B.J. Bolyai – Lobachevsky planes with finite lines // Rep. Math. Colloquium Notre-Dame, Ind. – 1944. – V. 5-6. – Ser. 2. – P. 40–42.

108. Valette G. Le plan conforme sur le corps a trois elements // Mathesis, 1957. – № 7–9. – S. 269–283.

109. Van der Waerden B.L., Smid L.J. Eine Axiomatik der Kreisgeometrie und der Laguerre Geometrie // Math. Ann., – 1935. – Bd. 110. – S. 753–776.

110. Veblen O., Bussey W.H. Finite projective geometries // Trans. Amer. Math. Soc, 1906. – V. 7. – P. 241–259.

111. Veblen O., Wedderburn M.J.H. Non-desarguesian and non-pascalian geometries // Trans. Amer. Math. Soc, 1907. – V. 8. – P. 379–388.

112. Wagner A. On perspectivities of finite projective planes // Math. Z., 1959. – V. 71. – P. 113–123.

113. Wells M.B. The number of latin squares of order eight // J. Comb. Theory, 1967. – № 3. – C. 98–99.

114. Zappa G. Sui gruppi di collineasioni dei piani di Hughes // Boll. U.M.I., 1957. – №12. -P. 507–516.

Часть третья

ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ЕВГЕНИЯ ГРИГОРЬЕВИЧА ГОНИНА

Е.Г. ГОНИН – РУКОВОДИТЕЛЬ КАФЕДРЫ И ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

Юлия Николаевна Зверева,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры ПГПУ

В 1930 г. Евгений Григорьевич был оставлен для работы ассистентом кафедры математики в только что организованном Пермском педагогическом институте. Через пять лет он стал старшим преподавателем, читал сложные лекции, проводил практические занятия. В 1937 г. он сдал кандидатский минимум при Московском педвузе им. К. Либкнехта.

С 1934 г. руководить кафедрой математики стал профессор Александр Васильевич Ланков. При кафедре была открыта аспирантура по математике. А.В. Ланков был одним из организаторов ставших впоследствии традиционными конференций математических кафедр педагогических вузов Уральской зоны. Вторая из них была проведена в Перми (1936).

В соответствии с уставом пединститута кафедра математики в 1938 г. была разделена на две: алгебры и геометрии (зав. кафедрой проф. А.В. Ланков) и математического анализа (зав. кафедрой доц. Б.В. Бородин). Евгений Григорьевич Гонин вошел в состав первой. Рост этой кафедры осуществлялся в основном за счет окончивших аспирантуру по методике математики.

В 1953 г. кафедру алгебры и геометрии возглавил доцент В.У. Грибанов, принявший на себя и руководство аспирантурой по методике математики.

В 1954 г. Евгений Григорьевич Гонин был утвержден в ученом звании доцента кафедры алгебры и геометрии. Тогда же он возглавил ее и оставался в должности заведующего кафедрой 22 года. В 1954–1955 гг. на кафедру были приняты окончившие аспирантуру по методике математики А.М. Лурье, Е.А. Дышинский, В.И. Рябухин и выпускник пединститута М.В. Суворов.

В 1954 г. на кафедре была открыта аспирантура по алгебре и геометрии под научным руководством Е.Г. Гонина. Спустя год кафедра была переименована в кафедру элементарной математики. Она состояла из 15 преподавателей (1 доцент, 10 старших преподавателей, 4 ассистента), 4 аспирантов и 2 лаборантов.

Старший преподаватель кафедры Валентина Федоровна Козова в воспоминаниях о Е.Г. Гонине отмечала: «Евгений Григорьевич был внимательным, по-отечески заботливым к студентам, коллегам и всем окружающим его. Он умел беречь свое и чужое время, четко планировал свой рабочий день. Тематика всех заседаний кафедры была актуальна, тщательно продумана, поэтому они были насыщенными и продуктивными».

В 1957 г. на кафедре элементарной математики начала работать В.С. Морозова, молодой специалист, кандидат физико-математических наук, прибывшая по распределению после окончания аспирантуры Московского педагогического института. Впоследствии кафедра пополнялась главным образом за счет выпускников аспирантуры, руководимой Е.Г. Гониным. Так, после ее окончания были оставлены для работы в вузе Н.Е. Домошницкая, И.П. Непорожнев, О.М. Поносова, Ю.Н. Зверева, А.Н. Пехлецкая, Л.Я. Харанен (Панкратова), В.Г. Алябьева. Впоследствии пришли с кафедры методики математики Т.М. Соромотина и А.Е. Малых, а также окончившая институт В.И. Саранина (Данилова).

Евгений Григорьевич сумел сплотить вокруг себя дружный работоспособный коллектив. На кафедре сложилась деловая, доброжелательная обстановка. Этому способствовали и личностные качества его: аккуратность, сдержанность, трудолюбие, справедливость, внимательное отношение к окружающим и в то же время требовательность. Все знали, что к нему можно обратиться в трудную минуту за помощью, и он примет живое участие в судьбе человека не на словах, а на деле.

Е.Г. Гонин не был сухим и рассеянным человеком, погруженным только в мир отвлеченных формул, понятий и идей, как иногда думают об ученых-математиках. Он был остроумный собеседник, математик-лирик. Общение с ним всегда доставляло удовольствие, обогащало знаниями и научными идеями, обогащало и духовно. Зайдя в кабинет к Евгению Григорьевичу, когда у него бывала свободная минута, можно было увидеть его

Коллектив кафедры элементарной математики. Слева направо: 1-й ряд – В.Ф. Козова, В.У. Грибанов, Е.Г. Гонин, Е.К. Минацевич, П.В. Мыларщиков; 2-й ряд – О.М. Поносова, Н.Е. Домошницкая, В.Г. Куколев, Л.И. Истомина, В.С. Морозова; 3-й ряд – И.П. Непорожнев, Е.А. Дышинский, А.И. Лямзин, М.В. Суворов. 1961 г

застенчивую улыбку и прищуренные глаза, услышать острую шутку, интересные сведения.

Будучи широко образованным человеком, Е.Г. Гонин увлеченно и подробно, как присуще знатокам своего дела, мог рассказать об археологических раскопках, о достижениях современной физики и других наук. Он был в курсе всех событий и даже мог дать справку о прогнозе погоды.

Зная возможности каждого преподавателя, Евгений Григорьевич любые сколь угодно малые недоразумения, если таковые случались, сводил к спокойному и как бы отвлеченному анализу проблем. Микроклимат на кафедре за все время его руководства ею был идеальным.

Большое внимание уделялось повышению научной квалификации сотрудников кафедры. Тематика их научных исследований в большинстве своем была тесно связана с изучением конечных инцидентностных структур, в том числе конечных геометрий. О квалифицированном планировании научной работы можно судить хотя бы по пятилетнему перспективному плану, представленному заведующим кафедрой.

Перспективный план научно-исследовательской работы и повышения квалификации по кафедре элементарной математики Пермского педагогического института на 1966–1970 гг.

I. Коллективные темы

1. Экспериментальный учебный план подготовки преподавателей математики.

Разработка плана и программ – 1966 г.; начало эксперимента – сентябрь 1966 г., завершение – 1970 г. (Сроки указаны в предположении, что пединститут обеспечит возможность своевременной распечатки материалов).

Руководитель – проф. *Гонин Е.Г.*, исполнители – большинство членов кафедры элементарной математики в сотрудничестве с преподавателями кафедры высшей математики.

2. Исследование конечных плоскостей комбинаторными методами.

Продолжение работы, начатой ранее. Предполагается систематическое изучение проективных и конформных (инверсных) плоскостей 8–10 порядков с применением ЭВМ.

Руководитель – проф. *Гонин Е.Г.*, исполнители: *Лямзин А.И.*, *Поносова О.М.*, *Непорожнев И.П.*, *Истомина Л.И.*, *Зверева Ю.Н.*, *Харанен Л.Я.*

II. Индивидуальная работа преподавателей

1. Гонин Е.Г., проф. – участие в коллективных темах; разработка общих вопросов комбинаторного анализа (аксиоматика, инварианты, методы и приемы решения конкретных задач). Результат – написание статей, выступление с сообщениями на конференциях.

2. Морозова В.С., канд. физ.-мат. наук, ст. преп. – алгебраические вопросы построения тактических разбиений конечных проективных плоскостей. Результат – написание статьи.

3. Козова В.Ф., ст. преп. – работа над вопросами методики преподавания алгебры в средней школе. Результат – написание статьи и методических разработок для учителей математики.

4. Куколев В.Г., ст. преп. – представление учебника по математике для будущих учителей начальных классов (1966). Работа над темой «Математическая подготовка учителя начальных классов» (1968). Далее – работа по основаниям математики и методике их преподавания.

5. Суворов М.В., ст. преп. – работа над диссертационной темой «Проективные плоскости порядка 9, содержащие овалы», окончание – 1968 г. Далее – исследование конечных проективных плоскостей. Желательно обучение в годичной аспирантуре (1967/68 уч. г.).

6. Лямзин А.И., ст. преп. – сдача кандидатских экзаменов (1966–1968); защита кандидатской диссертации по теории латинских квадратов (1969). Далее – работа по этой же тематике.

7. Дышинский Е.А., ст. преп. – публикация книги «Игротека математического кружка». Работа над темой «Игровые методы в обучении математике» (5–7 кл.), окончание – 1967 г. Далее – работа в том же направлении.

8. Поносова О.М., ст. преп. – защита кандидатской диссертации «Упорядочение конечных проективных прямых» (1967). Далее – исследование конечных проективных плоскостей; результат – публикация статей.

9. Домошницкая Н.Е., канд. физ.-мат. наук, ст. преп. – продолжение исследования вопроса об обобщенном измерении частично-упорядоченных полугрупп после защиты кандидатской диссертации. Результат – написание статей, выступление с сообщениями на семинарах и конференциях.

10. Рябухин В.И., ст. преп. – защита кандидатской диссертации «Теория пределов в русской и советской общеобразовательной школе» (1966). Далее – работа по истории методики преподавания математики. Результат – написание статей, выступление с сообщениями на семинарах и конференциях.

11. Людмилов Д.С., ст. преп. – защита кандидатской диссертации «Принцип определяемости и его применение в методике решения задач» (1966). Далее – экспериментальная работа в области методики обучения решению задач и апробация полученных материалов. Результат – публикация статей и выступления на конференциях.

12. Непорожнев И.П., ст. преп. – защита кандидатской диссертации «Несуществование одного из типов проективных плоскостей порядка 10». Далее – исследование конечных проективных плоскостей. Результат – написание статей, выступления на конференциях.

13. Истомина Л.И., асс. – защита кандидатской диссертации «Перечисление круговых плоскостей до седьмого порядка включительно» (1967). Далее – исследование конечных круговых плоскостей. Результат – написание статей, выступление на конференциях разного уровня.

14. Зверева Ю.Н., асс. – защита кандидатской диссертации «Построение плоскостей над латинскими квадратами, входящими в описание плоскости трансляции порядка 9 и двойственной ей» (1968). Далее – исследование конечных проективных плоскостей. Результат – написание статей, выступления на конференциях.

15. Харанен Л.Я., асс. – защита кандидатской диссертации «Построение плоскости над латинскими квадратами, входящими в описание плоскости Хьюза порядка 9» (1967). Далее – исследование конечных проективных плоскостей. Результат – написание статей, выступления на конференциях.

В марте 1972 г. в служебной записке проректору по научной работе доценту Ф.С. Коротаеву в ответ на его запрос о состоянии исследований на кафедре Е.Г. Гонин писал:

«1. Результат научной работы должен оцениваться, прежде всего, по новизне полученного ответа на поставленную задачу и оригинальности найденного решения. При установлении объема затраченного труда нужно учитывать как подготовительную работу, т. е. поиск и обработку математических первоисточников, главным образом иностранных, так и время, затраченное на ее оформление. А его иногда требуется не меньше, чем для получения результата. Нужно учитывать также уровень научной подготовки преподавателя, так как очевидно, что работник более низкого уровня подготовки тратит времени больше квалифицированного.

2. Коллектив кафедры сложился постепенно, главным образом за счет окончивших аспирантуру по геометрии при кафедре. Все они занимаются общей проблемой – *исследованием и построением конечных плоскостей комбинаторными методами.* К этой тематике примкнули и некоторые сотрудники, не обучавшиеся в указанной аспирантуре (М.В. Суворов, З.И. Андреева). В результате 10 членов кафедры из 12 работают над одной актуальной проблемой. Хотя их индивидуальные темы исследований различны, но возникающие при этом вопросы, как и получаемые результаты, часто обсуждаются совместно. Происходит обмен найденными приемами и методами. По мере защиты диссертаций темы будут разрабатываться коллективно. В текущем пятилетии предполагается включиться в работу и по хоздоговорной тематике.

3. Связь с родственными кафедрами других вузов имеет важное значение. Приходится сожалеть, что традиционные уральские конференции математиков педвузов ликвидированы, а финансирование поездок как на тематические конференции, так и в московские вузы с каждым годом уменьшается».

В 1967 г. кафедра элементарной математики была разделена на две. Большая часть преподавателей осталась на вновь созданной кафедре алгебры и геометрии. Другие перешли на кафедру методики математики.

Пристальное внимание уделял Е.Г. Гонин организации учебного процесса, повышению его качества. На заседаниях кафедры всегда обсуждались актуальные вопросы. В протоколах заседаний они сохранились, приведем некоторые из них:

– работа по обновлению содержания читаемых курсов, разработка новых тем для спецсеминаров и спецкурсов;

– совершенствование новых форм и приемов проверки знаний студентов;

– самообразование преподавателей по индивидуальным планам;

– создание методических материалов, минимумов для самостоятельной работы студентов заочного обучения;

– работа по обеспечению занятий наглядными пособиями и другими средствами обучения;

– совершенствование методов проведения коллоквиумов, зачетов, экзаменов;

– оказание методической помощи молодым сотрудникам кафедры при разработке учебных планов и программ, чтение лекций, проведение практических и семинарских занятий.

Сотрудники кафедры читали курсы и проводили практические занятия по линейной и общей алгебре, математической логике, теории вероятностей, всем разделам элементарной и высшей геометрии, неевклидовым геометриям, дифференциальной геометрии, топологии, начертательной геометрии, элементарной математике и методике ее преподавания, современным основам школьного курса математики, а также иным дисциплинам не только на математическом, но и на других факультетах. Систематически обновлялась, расширялась тематика спецкурсов и спецсеминаров, сотрудники кафедры руководили педагогической практикой студентов. Евгений Григорьевич сам обновлял читаемые курсы и этого же требовал от преподавателей кафедры.

Все учебные дисциплины были объемными, требовали серьезной, основательной разработки курсов лекций и методов преподавания. Руководитель кафедры Е.Г. Гонин был творческим человеком, и каждый сотрудник кафедры, естественно, старался проявить себя с лучшей стороны. Сам Евгений Григорьевич содержание любого курса мог изложить в нескольких вариантах для обучаемых, имеющих различный уровень математической подготовки. Он вдумчиво вникал во все детали каждой дисциплины.

С первых шагов своей преподавательской деятельности Е.Г. Гонин проявил себя талантливым лектором, эрудированным методистом. Уже в начале педагогической деятельности он читал серьезные курсы и проводил практические занятия по теоретической механике, астрономии, геофизике, основаниям геометрии; аналитической, проективной, дифференциальной геометриям, топологии, современной алгебре, теории вероятностей, теоретической арифметике, линейной алгебре. И это не полный список.

Лекции Евгения Григорьевича всегда отличались оригинальностью построения, глубиной проникновения в сущность рассматриваемых вопросов, четкостью логики, и все это – в сочетании с доступностью изложения. Они оставляли глубокий след в памяти каждого слушателя. Глубокие знания, широкая научная эрудиция, педагогический талант и лекторские способности будили у слушателей интерес к творческому поиску. Читал он практически все лекционные курсы по кафедре алгебры и геометрии.

Активное участие принимал Евгений Григорьевич в работе по совершенствованию учебных планов математических отделений пединститутов. Очередная реформа школьного образования выдвигала новые требования и к характеру обучения в вузе. Одним из таких требований являлось сближение всего изучаемого материала с уровнем развития современной науки. Е.Г. Гонин высказал тогда идею унификации терминологии и символики, используемой в различных математических дисциплинах, на основе возможно раннего знакомства студентов с анализом основных общематематических понятий. Он читал студентам I курса новую для пединститутов дисциплину – «Введение в математику». Сначала многие сомневались, смогут ли первокурсники освоить элементы математической логики, теории отношений, теории множеств, с которыми раньше знакомились лишь на выпускном курсе. Однако опасения оказались напрасными: были получены хорошие результаты, положительно повлиявшие на характер изложения других математических дисциплин. И в наши дни необходимость такого курса стала общепризнанной.

В 1972 г. Е.Г. Гонин принял участие в работе всесоюзного семинара «Научные основы школьного курса математики» (г. Иваново) и вскоре разработал и стал читать такой курс для студентов нашего факультета.

В 1974 г. на всероссийском семинаре, проходившем в г. Смоленске, обсуждалась проблема преподавания геометрии в педвузах. По его результатам Министерство просвещения РСФСР, Главное управление высших и средних педагогических учебных заведений опубликовало «Методические рекомендации по преподаванию геометрии в педагогических институтах РСФСР» со списком рекомендованной литературы по пяти разделам. Один из них – «Изложение некоторых нетрадиционных разделов курса геометрии» – предложил Е.Г. Гонин. Он представил *варианты изложения* следующих разделов: преобразования плоскости; аффинное и евклидово n-мерные пространства; аффинные многомерные пространства.

Важное место в процессе изучения вузовских математических дисциплин занимает курс «Теоретическая арифметика». Учебное пособие Е.Г. Гонина с таким названием широко использовалось преподавателями математики вузов не только РСФСР, но и других республик.

Усовершенствовал Евгений Григорьевич и курс элементарной геометрии и успешно читал его. Учебно-методическая деятельность Е.Г. Гонина способствовала усилению духа творчества на кафедре при разработке преподавателями вузовских курсов.

Е.Г. Гонин взял на себя труд разработать лекционный и практический курсы математической логики в тот момент, когда эта дисциплина впервые была введена в учебный план физико-математических факультетов педагогических институтов. Логической символикой Евгений Григорьевич широко пользовался при чтении лекций по разным математическим дисциплинам.

Будучи профессором кафедры алгебры и геометрии, Евгений Григорьевич Гонин не снижал планки своей научной и учебно-методической деятельности. Отчеты о ней хранятся на математическом факультете. Объем такой работы, выполненный Е.Г. Гониным в последние годы жизни, ясен из приведенных ниже двух документов.

Отчет
проф. кафедры алгебры и геометрии Е.Г. Гонина о научно-исследовательской работе за 1981 год

Продолжалась работа по *коллективной теме «Построение плоскостей порядка 9 с помощью ЭВМ»*. Программа, разработанная в 1980 г., была улучшена, видоизменение было проверено на машине «Раздан-2» в порядке выполнения дипломной работы студенткой-выпускницей 1981 г. О. Жильцовой. Оно несколько увеличило скорость работы. Применение программы к одному конкретному варианту будет проведено в декабре 1981 г.

Представляются к опубликованию в декабре 1982 г. *две работы*:

1. Типы 6-дуг с одной внешней точкой в проективной плоскости порядка 9 (в соавторстве), 20 стр. рукописи.

2. Несуществование проективной плоскости порядка 9 с 6-дугой определенного типа, 15 стр. рукописи.

Принимал участие в реферировании статей по проективным плоскостям и смежным с ними вопросам. Опубликовано в РЖ «Математика» около 15 рефератов.

Руководил двумя *кафедральными семинарами*: *по комбинаторике* и *онтодидактике математики*. На первом из них сделал два сообщения на тему «Конструктивное перечисление комбинаторных объектов».

Руководил *проблемной группой по вопросам комбинаторики*. На студенческой научной конференции были сделаны 3 доклада, подготовленные под моим руководством:

1. Программирование перебора решений комбинаторных задач – студ. IV к. О. Жильцова.

2. Геометрические конфигурации и их автоморфизмы – студ. IV к. Н. Леонтьева.

3. Связь успеваемости студентов с данными аттестата и результатами вступительных экзаменов – студ. IV к. О. Кудрина.

Отчет
проф. Е.Г. Гонина об учебно-воспитательной работе
в 1981/82 учебном году

Прочитал лекции по *геометрии* на одном потоке (гр. 116–117) I курса; закончил чтение лекций по геометрии на одном потоке III курса (гр. 136–137).

Прочитал лекции по *теории вероятностей* на одном потоке III курса (гр. 136–137), в гр. 137 вел практические занятия.

Прочитал лекции по *математической логике* на одном потоке III курса (гр. 134–137).

Приступил к чтению лекций по курсу «*Основы школьного курса математики*» на одном потоке III курса (гр. 134–137). Закончил этот же курс на двух потоках IV курса (гр. 141–144).

Прочитал курс «*Числовые системы*» на одном потоке IV курса (гр. 141–142).

Прочитал *спецкурс* и провел *спецсеминар* в гр. 143. Темы спецкурса «Аксиоматическое построение евклидовой геометрии» и спецсеминара «Аксиоматика евклидовой геометрии» тесно связаны между собой. В спецкурсе было изложено построение геометрии на основе аксиоматики Гильберта – Шура, а на спецсеминаре рассматривались разные аксиоматики и различные варианты рассмотрения важнейших вопросов. Доклады готовил каждый студент, почти все из них были заслушаны и обсуждены. Несколько докладов были представлены в письменном виде. Зачет поставлен по итогам двух коллоквиумов с учетом качества представленного доклада на спецсеминаре.

Руководил *дипломной работой* студ. Леонтьевой «Циклические проективные плоскости малых порядков». По результатам исследования ею сделан доклад на научной студенческой конференции.

Руководил написанием *курсовых работ* студентами 3-го и 4-го курсов на различные геометрические темы. Одна из них, относящаяся к теории конечных проективных плоскостей, может быть продолжена в следующем учебном году в качестве дипломной.

Руководил работой *комбинаторного семинара.* К сожалению, проведено только одно занятие с докладом В.Г. Алябьевой по истории введения конечных геометрических структур.

Руководил работой семинара *по онтодидактике математики.* Прочитал *шесть докладов* по содержанию современных основ школьного курса математики.

Коллектив кафедры геометрии. Слева направо: 1-й ряд – Ю.Н. Зверева, В.С. Морозова, Е.Г. Гонин, О.М. Поносова; 2-й ряд – З.И. Андреева, В.Г. Алябьева, А.Н. Пехлецкая, Л.И. Истомина; 3-й ряд – Л.А. Панкратова, В.И. Саранина, Н.Е. Домошницкая, Л.А. Пермякова. 1981 г.

Участвовал в работе *методологического и методического семинаров.*

Особое внимание Евгений Григорьевич Гонин уделял молодым специалистам – преподавателям кафедры. Ю.Н. Зверева вспоминала, что, когда ей поручили читать курс лекций по основаниям арифметики, Евгений Григорьевич пригласил ее на беседу: порекомендовал дополнительную литературу к курсу, высказал ряд пожеланий, дал несколько советов. На начальном этапе чтения лекций часто посещал занятия, присутствовал на экзамене. Такое же отношение было и к другим преподавателям. Его замечания и советы оказывались всегда своевременными и полезными.

В 1976 г. Евгений Григорьевич Гонин по состоянию здоровья передал заведование кафедрой алгебры и геометрии своей ученице – кандидату физико-математических наук, доценту О.М. Поносовой. После очередной министерской проверки было высказано предложение о возможном делении кафедры на две. Кафедрой геометрии в 1984–1986 гг. заведовала кандидат физико-математических наук, доцент Л.И. Истомина. С 1988 г. этой кафедрой руководит доктор физико-математических наук, профессор А.Е. Малых. Кафедру алгебры в 1984–1988 гг. возглавлял кандидат физико-математических наук, доцент Э.С. Васильев, а с 1988 по 2004 г. – кандидат физико-математических наук, доцент Ю.Н. Зверева.

В 2008 г. исполнилось 70 лет со дня организации кафедры алгебры и геометрии. Евгению Григорьевичу Гонину как руководителю аспирантуры по специальности 01.01.04 «Геометрия и топология» и заведующему кафедрой было посвящено научное издание. Кроме того, с этого года на факультете большая учебная аудитория носит имя Е.Г. Гонина – замечательного ученого, педагога, человека.

Евгений Григорьевич Гонин – человек высокой культуры, принципиальный, требовательный к себе и к другим, исключительно скромный и отзывчивый, всегда будет служить нам образцом ученого-исследователя.

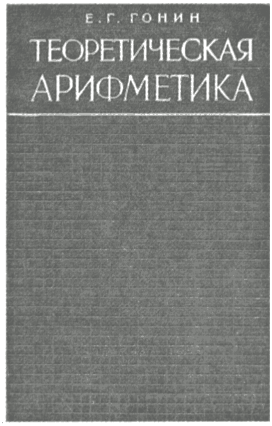
ОБ УЧЕБНОМ ПОСОБИИ Е.Г. ГОНИНА «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ АРИФМЕТИКА»

Анна Николаевна Пехлецкая,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры ПГПУ

В ряду лекционных математических дисциплин, читаемых Е.Г. Гониным, был курс *теоретической арифметики.* В разное время он именовался по-разному: теоретическая арифметика, основания арифметики, числовые системы. По существу, это курс по основаниям числовых систем: натуральных, целых, рациональных, вещественных чисел.

Проблемы оснований математики приобрели чрезвычайную актуальность с середины XIX в. Тогда были предложены разные теории вещественных чисел. В XX столетии проблемы аксиоматики вещественных чисел изучали многие ученые. А.Н. Колмогоров построил теорию неотрицательных вещественных чисел как аналог теории бесконечных десятичных дробей. Е.Г. Гонин обобщил теорию Колмогорова и теорию бесконечных десятичных дробей, построив свой вариант аксиоматики неотрицательных вещественных чисел в диссертации. В 1959 г. он опубликовал учебник «Теоретическая арифметика», содержащий аксиоматические построения систем натуральных, целых, рациональных и вещественных чисел. Для лекторов педвузов «Теоретическая арифметика» Е.Г. Гонина долгое время оставалась основным учебным пособием.

Главной в книге Е.Г. Гонина «Теоретическая арифметика» является вторая глава – «Основные числовые системы», охватывающая почти весь материал середины XX в., программы по основаниям арифметики для математических отделений педвузов. В параграфах главы представлены системы неотрицательных целых чисел, неотрицательных рациональных чисел, неотрицательных вещественных чисел, всех вещественных чисел, комплексных чисел и гиперкомплексных чисел.



Первая глава учебного пособия посвящена рассмотрению основных математических понятий: множества, их отображения, множества с отношениями. Начиная с понятия самого отношения и его свойств, Е.Г. Гонин обращает особое внимание на отношения эквивалентности и порядка, а также определение эквивалентности через абстракцию, что, в свою очередь, позволяет ввести таким образом понятие мощности множества. Кроме того, в главе рассмотрены такие понятия: непрерывные и дискретные упорядоченные множества, скалярные величины, множества с операциями, кольца и тела, упорядоченные полугруппы, аддитивные и аддитивно-скалярные величины.

Целесообразность предварительного рассмотрения ряда понятий в общем виде перед непосредственным изучением числовых систем Евгений Григорьевич поясняет во введении:

«Числовые системы имеют довольно сложное строение. Над числами можно выполнять сложение и умножение, а также действия, связанные с ними; многие системы являются упорядоченными. Каждое действие подчиняется ряду законов, они связаны между собой и с отношением порядка. Вместе с тем, различные системы имеют и много общего».

Именно предварительное рассмотрение общих понятий делает более прозрачным план изучения систем, освобождает от повторения рассуждений, позволяет давать в лекциях краткие формулировки.

Говоря о толковании числа, которое является одним из основных понятий в математике, Е.Г. Гонин указывает, что исторически оно складывалось постепенно, в процессе решения все более и более сложных вопросов сначала практического, а потом и теоретического характера, и о том, что общеупотребительными они стали только с XVI в. «В этот же период времени развитие алгебры привело к понятию комплексного числа. В середине XIX в. была построена первая из так называемых гиперкомплексных систем.

Создание системы натуральных чисел было связано с необходимостью описания важного *свойства* множеств предметов, называемого его *численностью.* Общее же понятие мощности любого множества сложилось лишь в XIX в. Создание системы рациональных чисел было вызвано необходимостью *измерения величин*; с этой же задачей связано создание системы вещественных чисел».

Таким образом, автор показывал, что понятие числа развивалось в тесной связи с изучением величин, эта связь сохраняется и в настоящее время.

Далее Е.Г. Гонин констатировал: «... в книге рассматриваются лишь математические вопросы, связанные с изучением числовых систем.

Во введении к учебному пособию указывается, что числовые системы целесообразно рассматривать в порядке увеличения множества содержащихся в них чисел. Из нескольких возможных вариантов рассмотрения их в пособии принят порядок изучения, указанный во второй главе. Каждая из числовых систем предваряется определениями, где перечисляются «технические условия», предъявляемые к ней. *Требования*, которым должна удовлетворять система, называются *аксиомами*, и такой способ изложения теории называется *аксиоматическим*. Вопрос о существовании систем, удовлетворяющих определению, и о связях между ними, если они существуют, доказывается построением конкретной числовой системы указанного типа. Особенно сложен этот вопрос для системы неотрицательных чисел C^+. Первоначальное определение здесь заменяется другим, содержащим лишь порядковые требования, а в качестве удовлетворяющей им конкретной системы рассматривается совокупность всех конечных *мощностей*. При этом вводится *допущение*, называемое *аксиомой бесконечности*, без рассмотрения сложных вопросов, связанных с ней. В остальных случаях конкретная система строится на основе предшествующей ей, элементы которой используются в качестве “строительного материала”».

Во введении Е.Г. Гонин отмечает: «Во всех случаях оказывается, что различные конкретные системы, удовлетворяющие определению некоторой числовой системы, *математически равноценны*, отличаясь лишь характером элементов, но обладая одними и теми же связями между ними. *Абстрактная система*, к которой приходят, отвлекаясь от конкретных особенностей элементов этих систем, *оказывается единственной*.

Переход от уже полученной (старой) системы к следующей (новой) производится по одному плану: сначала предполагается существование системы нового типа и доказывается, что в ней содержится некоторая конкретная система старого типа. Затем доказывается, что любое число новой системы можно задать некоторой, определенным образом организованной, совокупностью чисел старой системы. Как правило, такой совокупностью оказывается пара чисел старой системы. Например, любое действительное число можно получить как разность двух неотрицательных действительных чисел, что является указанием к построению конкретной системы нового типа. Его можно проводить, уже не пользуясь допущением о существовании систем нового типа. При этом строится новая система вместе с включенной в нее старой».

Далее Е.Г. Гонин пишет о том, что построение, состоящее в добавлении к старой системе лишь новых чисел, не содержащихся в ней, весьма *нерационально*, хотя и кажется более естественным. При этом *определения* соотношений между числами и операциями над ними *будут различными* для разных комбинаций старых и новых чисел, а *это* сильно *усложнит доказательство* законов.

Задача измерения важнейших видов величин рассматривается в третьей главе после построения числовых систем и включает вопросы пропорциональной зависимости, измерения аддитивно-скалярных и других величин. Построенные на основе формальных определений числовые системы оказываются хорошо приспособленными для целей измерения величин, так как формальные определения являются результатом длительного и глубокого анализа систем, исторически сложившихся в связи с изучением величины.

В заключении учебного пособия Е.Г. Гонин утверждает, что понятие числа является исходным для построения большинства математических дисциплин. К ним он относит: разделы классической алгебры; классический анализ со всеми его разветвлениями; теорию вероятностей; различные геометрические системы.

Даже в тех разделах или их частях, при построении которых можно не рассматривать величины и не пользоваться системой действительных чисел, не могут быть обойдены натуральные числа. Они нужны, как отмечает автор, для описания мощностей множеств объектов изучения и как значения аргумента для различных последовательностей этих объектов.

Естественное продолжение «жизни» числовых систем – это знакомство с ними в средней школе, где не ставится задача полного логического анализа понятия числа. В связи с этим Е.Г. Гонин отмечает, что изучение рациональных чисел начинается еще в начальной школе, когда надо вводить численное описание значений аддитивных величин, прежде всего длины. Соотношения между дробями, т. е. упорядоченными парами целых чисел, вводятся так, чтобы между неотрицательными рациональными числами и значениями величин, соизмеримых с некоторым значением, принятым за единицу, было взаимно однозначным и строго монотонным. Правило сложения дробей формулируется так, чтобы это соответствие было аддитивным. Из таких же естественных соображений устанавливается правило умножения дробей. Евгений Григорьевич подчеркивает, что такое построение отличается по целям и плану от рассмотренного в этой книге, но приводит к тем же результатам.

Не останавливаясь здесь на возможности различных вариантов построения системы всех действительных чисел в средней школе, отметим следующее: Е.Г. Гонин, предлагая описание иррациональных чисел с использованием рациональных, обосновывает, что *единственно приемлемым для средней школы* способом *задания иррациональных* чисел оказалось описание их посредством *бесконечных десятичных дробей*. При этом важно показать, что каждой бесконечной десятичной дроби соответствует единственный отрезок, т. е. что дробь совершенно точно задает число. Полезно также *не проводить* резкого *различия между рациональными и иррациональными* числами, а, наоборот, сразу же установить, что рациональные числа также могут задаваться бесконечными (чистыми или смешанными периодическими) десятичными дробями, и в дальнейшем по мере возможности рассматривать сразу все действительные числа, а не одни лишь иррациональные.

Говоря о роли учебного пособия Е.Г. Гонина «Теоретическая арифметика», необходимо отметить, что ко времени его выхода в свет сложившихся и глубоко проверенных учебников по основаниям арифметики не было. Книга Е.Г. Гонина была едва ли не первым учебным руководством того времени, соединяющим прикладную и чистую математику, которым пользовались, как известно, все преподаватели, учителя и ученые–математики в своей профессиональной деятельности. Известны, например, случаи, когда советские преподаватели, уезжая работать в вузах стран Азии, Африки, Латинской Америки, пользовались демократическим учебником Е.Г. Гонина «Теоретическая арифметика» в качестве основного.

Ученица Е.Г. Гонина, кандидат физико-математических наук, доцент О.М. Поносова, которой он во всем доверял, а впоследствии передал заведование кафедрой алгебры и геометрии, вспоминает, что однажды на международной конференции по математике член-корреспондент АН Украины Сергей Николаевич Черников поинтересовался, почему у Е.Г. Гонина нет статуса профессора кафедры. Узнав о том, что у Евгения Григорьевича сравнительно небольшое количество опубликованных работ, он удивленно воскликнул: «Да “Теоретическая арифметика” перекрывает любую научную монографию!» К сожалению, Евгений Григорьевич мало заботился о своем карьерном росте: для него главным была чистота математических рассуждений, четкость доказательства теорем и свойств, логическая строгость построения теории.

Трудно сейчас подсчитать, сколько учебных пособий по основаниям арифметики или числовым системам было написано участниками образовательного содружества нашей страны, и для этих пособий служила истоком «Теоретическая арифметика» Е.Г. Гонина. Известно лишь, что учебное пособие «Величины и числа» для факультетов педагогики и методики начального обучения В.Г. Куколев подготовил к изданию под непосредственным руководством Евгения Григорьевича.

Академик А.Н. Колмогоров в книге «Математика – наука и профессия» пишет: «Гибельным для математики могло оказаться только чрезмерно резкое расслоение математиков на два течения: одни культивируют абстрактные новейшие разделы математики, не ориентируясь отчетливо в их связях с породившим их реальным миром, другие заняты «приложениями», не восходя до исчерпывающего анализа их теоретических основ. Поэтому нужно подчеркнуть *законность* и *достоинство* позиций математика, понимающего место и роль своей науки в развитии естественных наук, техники да и всей человеческой культуры, но стойко продолжающего развивать «чистую математику» в соответствии с внутренней логикой ее развития».

Думается, что именно Евгений Григорьевич Гонин и был таким достойным математиком, который связывал абстрактные новейшие разделы математики с реальным обучением в средней школе, предлагая гармоничный и исчерпывающий анализ теоретических основ.

Учебное пособие Е.Г. Гонина «Теоретическая арифметика» отвечает требованиям современной математики, где числовые системы представляются с позиций как чистой теории множеств, так и свойств различных структур, вытекающих из принятой системы аксиом.

О РАБОТЕ МЕТОДИЧЕСКОГО СЕМИНАРА «ОНТОДИДАКТИКА» ПОД РУКОВОДСТВОМ Е.Г. ГОНИНА

Людмила Яковлевна Панкратова,
доцент кафедры геометрии ПГПУ

Кроме научного семинара, руководимого Евгением Григорьевичем Гониным, с 1974 г. на кафедре алгебры и геометрии стал постоянно работать второй – по онтодидактике математики, включая ее методику. Основной его целью было обсуждение методики преподавания различных тем математических курсов, которые читали преподаватели кафедры, а также углубление знаний по рассматриваемым вопросам, знакомство с новыми идеями и методами обучения.

Каждую из выбранных тем представлял докладчик, один из членов кафедры, излагая свои предложения по организации ее изучения. Затем в ходе обсуждения вырабатывались общие методические рекомендации к изучению предложенной темы.

Среди тем, методика изучения которых обсуждалась на занятиях семинара, можно упомянуть, например, такие: «Законность рекурсивных определений» (Е.Г. Гонин, 1976); «Непротиворечивость аксиом Вейля» (О.М. Поносова, 1976); «Топологические пространства» (З.И. Андреева, 1976); «Цепные дроби» (Е.Г. Гонин, 1977); «Аксиомы конструктивной геометрии» (З.И. Андреева, 1977); «Бинарные отношения» (Ю.Н. Зверева, 1979); «Решетка линейных подпространств линейного пространства» (Е.Г. Гонин, 1978); «Эйлерова характеристика поверхности» (Е.Г. Гонин, 1979) и др.

Все преподаватели кафедры во главе с Евгением Григорьевичем Гониным принимали активное участие и в работе межкафедрального методического семинара. На его заседаниях рассматривались общие вопросы преподавания, например «Построение и чтение лекций в пединституте» (доц. В.И. Яцеев, ст. преп. А.М. Лурье, доц. В.И. Рябухин, ст. преп. И.С. Цай, 1979), а также некоторые частные методики, например «Знакомство с общими требованиями к наглядным пособиям» (Е.А. Дышинский, 1979).

На факультетском семинаре рассматривались также вопросы установления межпредметных связей математических дисциплин не только с целью устранения дублирования материала в процессе преподавания, но и согласования используемых обозначений. Выявлялись межпредметные связи математических и физических курсов, читаемых в педвузе в соответствии с учебными программами.

Работа методических семинаров математического факультета ПГПИ в 1970-е гг. была согласована с тематикой региональных, а также республиканских семинаров и конференций, которые тогда проходили ежегодно. На них обсуждались программы вузовских курсов математики, принимались соответствующие решения и рекомендации по методике преподавания отдельных разделов. Так, в 1974 г. на XIV Всероссийской конференции преподавателей геометрии педвузов был представлен доклад Е.Г. Гонина «Как преподавать тему “Геометрические преобразования”, как изучать тему “Аффинные *n*-мерные пространства”».

Методические семинары на кафедре геометрии и математическом факультете продолжают свою работу и ныне, так как часто меняются программы, учебные планы, распределение часов по курсам. В связи с этим постоянно возникают вопросы, требующие их обсуждения.

УЧАСТИЕ Е.Г. ГОНИНА В НАУЧНЫХ КОНФЕРЕНЦИЯХ ПГПУ

Юлия Николаевна Зверева,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры ПГПУ

В годы своей педагогической деятельности Евгений Григорьевич Гонин был активным участником научных институтских конференций.

Ниже приведены темы лишь некоторых его выступлений:

1. Электронный перевод с одного языка на другой (1957).
2. Сведение обобщенного измерения к обычному измерению для строго монотонно упорядоченных полугрупп (1959).
3. Чтение лекции по математике (1959).
4. Построение аналитической геометрии плоскости на I курсе (1961).
5. Определение комбинаторной задачи и алгоритм ее решения (1965).
6. Методы отождествления решений комбинаторных задач (1968).
7. Спецкурс по измерению величин (1969).
8. Программа перебора решений комбинаторной задачи с использованием клик (1969).
9. Методы нахождения и отождествления решений комбинаторных задач (1971).
10. Решение комбинаторных задач на счетных машинах (1972).
11. Развитие комбинаторного анализа в Советском Союзе (1972).
12. Перебор и отождествление решений комбинаторных задач (1974).

10. Соотношение между шаблонными и творческими видами деятельности при изучении математики (1974).

13. Наборы разбиений шестерки элементов на пары (1975).

15. Применение 6-дуг к построению конечных проективных плоскостей (1976).

16. Геометрия в СССР за 60 лет (1977).

17. Построение проективной плоскости порядка 9 над произвольными 6-дугами (1977).

18. Построение проективной плоскости порядка над 6-дугами с одной внешней точкой (соавт. Ю.Н. Зверева, О.М. Поносова, 1978)

19. Плоскости порядка 9 с неполной 6-дугой (1979).

20. Улучшение программы перебора решений комбинаторных задач (1981).

21. Результаты машинного построения проективных плоскостей порядка 9 над некоторыми 6-дугами (1982).

22. Коллинеации хьюзовой проективной плоскости порядка 9 (1983).

Материалы некоторых докладов были опубликованы в «Ученых записках» Пермского государственного педагогического института, трудах Пермского политехнического института, а также в научных сборниках МГУ им. М.В. Ломоносова, МГПИ им. В.И. Ленина, ЛГПИ им. А.И. Герцена, Киевского государственного университета и др.

Евгений Григорьевич был бессменным руководителем ежегодных секционных научных заседаний кафедры, а иногда и факультетских математических секций. В одном из лаконичных отчетов за 1982 г. перечислены темы докладов:

Результаты машинного построения проективных плоскостей порядка 9 над некоторыми 6-дугами – проф. Е.Г. Гонин.

Вариант доказательства несуществования проективной плоскости порядка 6 – канд. физ.-мат. наук Н.Е. Домошницкая.

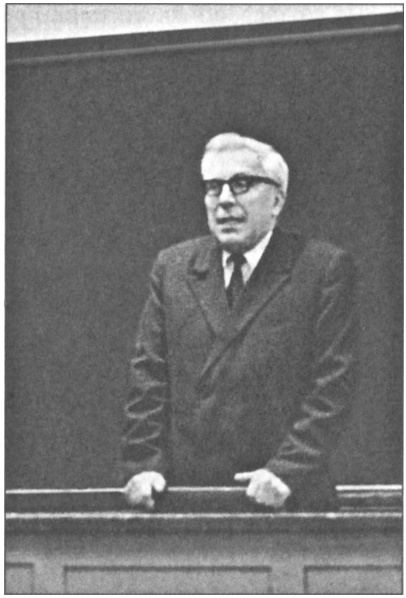
Почти конформные отображения в почти приводимом римановом пространстве – канд. физ.-мат. наук Н.А. Гурьева.

Построение проективной плоскости порядка 9 над конфигурацией 8_3 с коллинеарными диагональными точками – ст. преп. Л.Я. Панкратова.

Первые недезарговы конечные проективные плоскости и их координатизация – ст. преп. В.Г. Алябьева.

Все доклады получили одобрение. Содержание доклада Н.А. Гурьевой было рекомендовано к публикации.

Обладая большой эрудицией и научными знаниями из различных разделов математики, Е.Г. Гонин быстро вникал в суть разноплановых докладов преподавателей. Это позволяло ему всегда высказывать ясное и обоснованное суждение по рассматриваемым вопросам, рекомендовать новейшую литературу. Нередко преподаватели приходили к нему за советом при написании тезисов, докладов или статей.



Е.Г. Гонин выступает на одной из научных конференций

Евгений Григорьевич оказал большое влияние на научную и творческую деятельность большинства сотрудников всех математических кафедр факультета ПГПИ.

НАУЧНОЕ ОБЩЕНИЕ НА КОНФЕРЕНЦИЯХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КАФЕДР ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ВУЗОВ УРАЛА

Юлия Николаевна Зверева,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры ПГПУ

Вера Ильинична Данилова,
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры алгебры ПГПУ

Евгений Григорьевич Гонин принимал активное участие в организации и проведении почти всех научно-методических конференций математических кафедр педагогических институтов зоны Урала. На них приезжали не только уральцы, но и представители других высших учебных заведений Советского Союза.

На конференциях Евгений Григорьевич выступал с интересными и содержательными докладами по результатам своих научных исследований, методике преподавания математических дисциплин в вузе и школе, проблемам педагогической работы.

I научно-методическая конференция математических кафедр педагогических институтов Урала по инициативе Пермского и Свердловского педагогических институтов состоялась в 1935 г. в г. Свердловске (ныне Екатеринбург). Она была посвящена главным образом обмену опытом работы. В ней принимали участие преподаватели только двух упомянутых вузов.

Во II конференции (Пермь, 1936) участвовали преподаватели математических кафедр уже четырех techинститутов: Кировского, Пермского, Свердловского, Тюменского. В их числе были, в частности, пермские математики: профессор, заведующий кафедрой алгебры и геометрии ПГПИ А.В. Ланков, доцент Б.В. Бородин; и.о. доцента Е.Г. Гонин и А.В. Чазов, аспиранты Н.Д. Беспамятных, В.У. Грибанов, М.К. Рахилевич, Е.П. Уварова. Из Кирова приехали профессор В.М. Шепелев и доцент Ф.Ф. Нагибин, из Тюмени – доцент Э.К. Хилькевич, из Свердловска – и. о. доцента С.Н. Черников. Почти на всех заседаниях конференции присутствовали представители Пермского государственного университета и средних учебных заведений города, а также студенты.

Открывая конференцию, А.В. Ланков заметил:

«...Мы слишком разобщены, мало встречаемся, удалены от культурных центров, непосредственных истоков научной мысли. В таких условиях легко впасть в кустарничество, потерять перспективу, замкнуться в узком собственном опыте».

Были обозначены основные задачи конференции: улучшение постановки преподавания математических дисциплин; воспитание научных кадров; активизация научно-исследовательской работы преподавателей кафедр.

В программу конференции были включены научные сообщения, доклады, посвященные вопросам методики и истории математики. Участники обменялись опытом по организации научно-исследовательской работы, проведению педагогической практики студентов, методике проведения практических занятий, работе научных студенческих кружков. Одно из заседаний было полностью посвящено 200-летию со дня рождения гениального математика Жозефа Луи Лагранжа (1736–1813). Состоялась выставка его трудов, среди них были первоисточники – 14 томов на французском языке.

Е.Г. Гонин сразу же проявил себя активным участником этой конференции и выступил с двумя докладами: «Работы Ж.Л. Лагранжа по механике»; «Знак и направление в элементарной геометрии».

В довоенный период состоялись еще три конференции: в Кирове (1937), Тюмени (1938), Свердловске (1939). На последней Евгений Григорьевич сделал доклад «Приложение структур к обоснованию проективной геометрии», участвовал в дискуссии по вопросу преподавания учебных дисциплин. Профессор А.В. Ланков отметил, что обмен опытом очень важен для преподавателей, поскольку в то время по ряду основных курсов педвузы совсем не имели программ. Объем учебного материала определялся индивидуальными соображениями заведующего кафедрой или декана факультета.

Деятельность конференций techinститутов зоны Урала возобновилась в 1948 г., и затем они стали проводиться ежегодно. Их основная цель – дать новый импульс развитию научно-исследовательской работы математических кафедр и решить наиболее острые вопросы, связанные с преподаванием математики в высшей школе.

Интерес к конференциям возрастал, они значительно переросли рамки Урала. В них стали принимать участие представители различных городов и республик страны. Среди них были учителя школ, научные работники университетов, члены редколлегии журнала «Математика в школе», представители Министерства просвещения РСФСР и Академии педагогических наук.

В VII научно-методической конференции (Тюмень, 1949) участвовали представители Свердловска, Тюмени, Челябинска, Чкалова, Кудымкара, Томска, Тобольска. От Пермского (Молотовского) пединститута выступили с докладами проф. А.В. Ланков («Развитие передовых идей в русской методике математики в XIX веке»); ст. преп. В.У. Грибанов («Арифметика приближенных вычислений в средней школе»); ст. преп. Е.Г. Гонин («Построение теории вещественных чисел по способу академика Колмогорова»).

Доклад Евгения Григорьевича был основан на материалах его будущей кандидатской диссертации, которую он представил к защите в 1951 г.

На VIII конференции, которая состоялась в Перми (Молотове, 1950), были представлены уже десять педагогических институтов и четыре учительских. В ней приняли участие 46 преподавателей.

На секционных заседаниях были заслушаны 12 методических и 10 научных докладов, среди них доклады Е.Г. Гонина «Аналитическая теория показательной и тригонометрических функций» и «Понятие величины в научной и учебной литературе». А.В. Ланков отметил, что большой обмен мнений вызвал доклад, посвященный анализу понятия «величина», которое в существующей тогда литературе трактовалось весьма различно, что нередко вызывало недоумения в процессе преподавания.

Во время работы конференции была развернута выставка оригинальных наглядных пособий, изготовленных студентами Пермского techинститута. На заключительном заседании было высказано пожелание об издании материалов конференции.

IX конференция прошла в г. Челябинске (1951). В работе участвовали 45 человек. Вопросам методологии и методики преподавания математики было посвящено 12 докладов. Евгений Григорьевич Гонин выступил с сообщением «Теория пределов в курсе средней школы», в котором была представлена новая методическая трактовка, прошедшая апробацию. Среди 11 математических докладов был и доклад Е.Г. Гонина «Измерение монотонно-упорядоченных ассоциативных систем».

X конференция проходила в Свердловске (1952). В ней принимали участие более 100 человек из 24 педагогических и учительских институтов, университетов и технических учебных заведений. На конференции работали три секции: методики преподавания математики, геометрии, алгебры и математического анализа. Е. Г. Гонин выступил с сообщениями: «Теория неотрицательных вещественных чисел»; «О постановке курса проективной геометрии в педагогическом институте». Разработанный им курс лекций по проективной геометрии служил образцом строгости и ясности математических доказательств.

На заключительном заседании XI конференции (Киров, 1953) Е.Г. Гонин выступил с докладом «О жизни и научно-педагогической деятельности профессора Александра Васильевича Ланкова».

В XII научно-методической конференции (Чкалов, 1954) принимали участие представители 35 вузов, в том числе вузов Москвы, Ленинграда, Казани и Куйбышева. Е.Г. Гонин выступил с докладом «Теория бесконечных десятичных дробей».

XIII конференция прошла в Перми (1955). В ней участвовали преподаватели более 30 вузов. Московские институты представляли профессора В.И. Левин (МГЗПИ) и А.А. Бухштаб (МГПИ им. В.И. Ленина). На пленарных заседаниях обсуждались вопросы политехнического обучения.

На секционных заседаниях заслушали и обсудили 29 докладов. С двумя докладами выступил Е.Г. Гонин: «Построение систем вещественных чисел» и «О плоскостной аксиоме расположения проективной геометрии».

Евгений Григорьевич был активным докладчиком и эрудированным оппонентом при обсуждении докладов по различной тематике. Почти на всех конференциях он руководил секциями по геометрии или алгебре и теории чисел, являлся бессменным организатором конференций, проходящих в Перми. Его деятельность способствовала повышению уровня преподавания математики в вузах и школах.

В работе XVI конференции, состоявшейся в 1958 г. в г. Кирове, приняли участие 162 представителя математических кафедр из 50 учебных заведений.

На пленарном заседании были заслушаны доклады: «О путях развития преподавания математики в средней школе» (доктор физ.-мат. наук, проф. В.И. Левин, Москва); «О преподавании математики в зарубежных школах» (доктор физ.-мат. наук, акад. АПН СССР А.И. Маркушевич, Москва); «О понятии величины» (доц. Е.Г. Гонин, Пермь).

На секционных заседаниях с докладами выступили также аспиранты Е.Г. Гонина: ст. преп. Л.И. Истомина («Построение и основные свойства конечных конформных плоскостей») и ст. преп. И.П. Непорожнев («Упрощение доказательства единственности конечной проективной плоскости с 57 точками»).

На XVIII конференции (Пермь, 1960) были представители 40 городов, всего 133 делегата. Работали секции: методики преподавания математики в средней школе и вузе (председатель –

доц. Ф.Ф. Нагибин, Киров); алгебры и теории чисел (председатель – проф. В.А. Курбатов, Свердловск); геометрии (председатель – доц. В.Д. Измайлов, Свердловск); математического анализа (председатель – проф. В.И. Левин, Москва).

Проведено 17 заседаний, заслушано 104 доклада. Наибольший интерес вызвали сообщения «Некоторые приложения современной теории функций комплексного переменного» (проф. Л.И. Волковысский, Пермь) и «Диссертации по методике математики» (акад. АПН СССР И.К. Андронов, Москва). На секционных заседаниях были отмечены доклады Е.Г. Гонина «Вариант теории конечных множеств» и «Основные операции в проективной геометрии с теоретико-структурной точки зрения», а также Н.Е. Домошницкой «Независимость аксиом обобщенного измерения упорядоченной полугруппы». Большое внимание было уделено обсуждению вопроса о постановке вузовского курса «Алгоритмы и математические машины». На заключительном заседании отметили активность старейших участников: доцента Е.Г. Гонина (Пермь), профессора В.А. Курбатова (Свердловск), доцента Э.К. Хилькевича (Тюмень), профессора Н.А. Колмогорова (Киров).

Профессор В.А. Курбатов выступил с предложением, чтобы участники конференций возглавляли организацию юношеских физико-математических школ в своих городах. Предложение было принято. По инициативе кандидатов физико-математических наук Е.Г. Гонина и В.С. Морозовой при физико-математическом факультете Пермского пединститута была открыта юношеская математическая школа для учащихся старших классов. Она функционировала до 1981 г., пользовалась большой популярностью у школьников. Занятия вели преподаватели факультета и студенты старших курсов.

На XIX конференции (Челябинск, 1961) Е.Г. Гонин сделал доклад «О некоторых вопросах математической символики». Этой тематикой он активно занимался и впоследствии.

В XXI конференции (Киров, 1963) принимали участие представители 48 пединститутов и 3 университетов.

На трех пленарных заседаниях заслушали и обсудили 7 докладов. Наиболее интересными были: «Профессионализация в преподавании математики в педагогических институтах» (проф. Н.Я. Виленкин, Москва); «О программированном обучении по математике» (доц. А.Я. Маргулис, Орехово-Зуево); «Об итогах международного симпозиума по вопросам преподавания математики в Будапеште» (доц. Р.С. Черкасов, Москва).

На секциях математического анализа и теории функций заслушали 21 сообщение; по алгебре и теории чисел – 17; по геометрии – 26; по методике преподавания математики – 31; по черчению – 4.

На заключительном заседании с большим интересом был воспринят доклад доцента Б.А. Вертгейма (ПГУ, Пермь) «О новом направлении в математике по изучению закономерностей оптимальных процессов».

В феврале 1964 г. в Перми проходила XXII конференция. В ней принимали участие представители педагогических и учительских институтов, преподаватели математики университетов и технических вузов из 32 городов страны. Присутствовали также учителя школ г. Перми и области, студенты математического факультета. Всего на конференции присутствовало более 140 человек, из них 80 – иногородних.

Работали четыре секции: методики преподавания математики; алгебры; геометрии; математического анализа и теории функций.

На пленарном заседании особое внимание делегатов конференции привлекли выступления профессора Н.Я. Виленкина (Москва) «Об издании учебно-методической литературы для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов» и профессора В.И. Левина (Москва) «Некоторые вопросы современной теории связи».

Профессор Е.Г. Гонин и выпускники его аспирантуры представили следующие научные доклады: «Роль общематематических вопросов в построении математических курсов» и «Алгоритм набора решений комбинаторной задачи» (Е.Г. Гонин); «Об A_n^k-алгебрах и регулярных конечных плоскостях» (ст. преп. Н.К. Пухарев); «Исследование аксиоматики почти монотонно упорядоченных полугрупп» (ст. преп. Н.Е. Домошницкая); «Нереализуемость конфигурации Холла в проективной плоскости порядка» (ст. преп. И.П. Непорожнев).

На XXIV конференции (Челябинск, 1966) значительный интерес вызвали сообщения и доклады преподавателей и аспирантов ПГПИ: «Постановка математических курсов в пединституте» и «Об определении комбинаторной задачи» (проф. Е.Г. Гонин); «Построение плоскостей над латинскими квадратами, входящими в описания плоскости трансляций порядка 9 и двойственной ей плоскости» (Ю.Н. Зверева); «Упорядочение проективной прямой с 12 точками» (О.М. Поносова); «Представление плоскости трансляций порядка 9 латинскими квадратами» (асп. В.И. Васильков); «О конечных геометрических структурах на множестве плоских фигур с отношением складывания» (асп. В.А. Ярмоленко).

Участники XXIV научно-методической конференции работников математических кафедр педагогических институтов Уральской зоны. Челябинск, 1966 г.

В 1967 г. на XXV конференции (Свердловск) было создано зональное объединение кафедр для координации научных исследований и других форм работы в педвузах.

На пленарном заседании XXVI конференции (Киров, 1968) с сообщением «О государственных экзаменах по математике в пединститутах выступил доктор физико-математических наук, профессор Н.Я. Виленкин (Москва). На секционных заседаниях научные доклады представили профессор Е.Г. Гонин и выпускники его аспирантуры: «Метод поэтапных отождествлений» (Е.Г. Гонин); «Наборы точек в плоскости Хьюза порядка 9» (В.И. Васильков); «Дуги в проективной плоскости порядка 8» (Ю.Н. Зверева); «Метод описания проективных плоскостей порядка n системой из n латинских квадратов порядка n–1 и его реализация для $n = 9$» (А.Е. Малых).

Одной из центральных проблем дискретной математики является выяснение возможности исключения перебора вариантов при решении задач на дискретных структурах. Метод *поэтапных отождествлений*, разработанный Е.Г. Гониным, внес заметный вклад в разрешение этой проблемы при исследовании дискретных инцидентностных структур, частным случаем которых являются конечные проективные плоскости. Он применим к двум типам комбинаторных задач. Один из них довольно трудоемкий, его преимущества проявляются в задачах с большим числом решений и богатой группой преобразований. Эффективность метода продемонстрировала в своем докладе Ю.Н. Зверева.

В Ижевске (1969) на секции геометрии XXVII конференции по конечным инцидентностным структурам состоялись доклады преподавателей математики – бывших аспирантов Е.Г. Гонина: «Подплоскости в плоскости трансляций порядка 9» и «Наборы точек и подплоскости плоскости Хьюза порядка 9» (В.И. Васильков); «Дуги в дезарговой проективной плоскости порядка 9» (Ю.Н. Зверева); «Построение проективных плоскостей порядка 9 над латинскими квадратами того же порядка, состоящими из подквадратов порядка 3 разного состава» (А.Д. Лумпов); «Проективное упорядочение прямой из 15 точек» (О.М. Поносова).

На секции алгебры был представлен доклад профессора Е.Г. Гонина «Вариант перебора решений комбинаторных задач».

По плану, принятому Министерством просвещения РСФСР, организация и проведение XXVIII конференции были поручены Пермскому пединституту. Конференция состоялась в начале февраля 1970 г. В ней участвовало более 150 человек из 52 городов страны.

На секционных заседаниях по комбинаторной тематике Е.Г. Гонин и бывшие выпускники его аспирантуры выступили с докладами: «Об измерении величин» (проф. Е.Г. Гонин); «Обобщенное измерение для упорядоченных полугрупп с положительными и отрицательными элементами» (Е.Г. Гонин и Н.Е. Домошницкая); «Существование полных 6-дуг в проективной плоскости трансляций порядка 9» (Ю.Н. Зверева); «Латинские квадраты порядка 9» (А.Д. Лумпов); «Подбор латинских квадратов порядка 8 к данным квадратам этого порядка для построения проективных плоскостей порядка 9» (А.Е. Малых); «Группы автоморфизмов латинских квадратов порядка 8, состоящих из подквадратов порядка 2 четырехкратно повторяющегося состава» (А.Н. Фирсович); «Наборы точек и подплоскости в плоскости трансляций порядка 9» (В.И. Васильков); «Замечания об аксиомах движения» (Т.М. Соромотина).

Большой интерес вызвало сообщение о работе клуба «Математический огонек» при Пермском пединституте (Е.А. Дышинский, О.М. Поносова), созданного в соответствии с решением XVIII конференции. Занятия проводились для школьников младших классов (с 5-го по 8-й).

Активное участие Евгения Григорьевича в работе конференций несомненно носило прогрессивный характер. Старший преподаватель кафедры методики преподавания математики ПГПИ В.Ф. Козова вспоминала: «Евгений Григорьевич был душой конференций. Многие математики специально приезжали к нему за советами и консультациями». Его эрудиция ярко проявлялась в докладах, весьма разнообразных по тематике. Вместе с тем интерес к многочисленным научным направлениям приводил к тому, что у Е.Г. Гонина оставалось мало времени на подготовку публикаций результатов исследований в центральных изданиях. Так, о разработанном им методе *поэтапных отождествлений* он сделал сообщение на конференции в 1968 г., но его математическим описанием и подготовкой к печати занялся лишь в 1982–1983 гг. К сожалению, работу опубликовать не успел.

В целом научно-методические конференции математических кафедр педвузов Уральской зоны сыграли значительную роль в деле улучшения постановки преподавания математических дисциплин, оказали большое влияние на активизацию научно-исследовательской работы, повышение квалификации научных работников математических кафедр педагогических и учительских институтов.

РАБОТА Е.Г. ГОНИНА СО СТУДЕНТАМИ

Вера Ильинична Данилова,
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры алгебры ПГПУ

Свои научно-методические интересы Е.Г. Гонин естественным образом реализовывал и в работе со студентами. Анализ сохранившихся документов позволяет выделить следующие ее направления (исключая лекции и практические занятия): чтение различных спецкурсов, ведение спецсеминаров, руководство проблемными группами, кружками, курсовыми и дипломными работами.

В 1960–1970-е гг. работа студенческих кружков строго регламентировалась: занятия проводились по расписанию, число слушателей практически совпадало с числом студентов в группах. Планируя работу одного из таких кружков, Е.Г. Гонин отмечал, что в первом семестре доклады на занятиях кружка будет делать он сам по темам, посвященным конечным проективным плоскостям и алгоритмам решения комбинаторных задач. Во втором семестре доклады делают студенты. Как правило, выступления студентов были связаны с их собственными исследованиями в области комбинаторного анализа при написании курсовых и дипломных работ.

В 1970-е гг. Е.Г. Гонин поддержал идею Е.А. Дышинского о ежегодном проведении на факультете «Недели науки». В эту неделю проходили не только заседания секций с научно-исследовательскими докладами студентов, но и математические вечера, различные конкурсы, открытые занятия математических кружков, диспуты. Евгений Григорьевич был инициатором и научным руководителем разнообразных мероприятий в рамках всей программы «Недели науки».

Е.Г. Гонин со студентами

Обычно он сам выступал на пленарных заседаниях с докладами. И, как правило, несколько студентов, работавших под его руководством, ежегодно представляли результаты своих научных изысканий. Анализ тем докладов, с которыми его студенты выступали на конференциях, позволяет выделить следующие направления их исследований в различных областях математических знаний: геометрия, конечные геометрии, программирование решений комбинаторных задач, математическая логика, статистика, методика преподавания математики.

Остановимся более подробно на научном направлении, связанном с *программированием решений комбинаторных задач*. Один из разделов работы Е.Г. Гонина, опубликованной в 1971 г., был посвящен реализации алгоритмов перебора решений рассматриваемого вида задач. В ней Евгений Григорьевич отметил вклад и студентов, и аспирантов, разрабатывавших под его руководством эту тему. Так, в 1964 г. студентка физмата Т.А. Кичанова изготовила по его указаниям комплект с опорными решетками квадратной формы, имеющими $10 \times n$ отверстий ($n = \overline{1,10}$), которые использовались при решении ряда задач, например для исчерпывающего перебора трасверсалей латинских квадратов. Метод, с помощью которого это осуществлялось, Е.Г. Гонин называл *малой механизацией*. Он предложил применять для реализации алгоритмов переборов разнообразные схемы с реле, как электромагнитными, так и полупроводниковыми. В 1963 г. образец такой схемы собрал и демонстрировал на XXI конференции математических кафедр педвузов Уральской зоны его аспирант Л.Б. Бурди. Понимая, что наибольшей скорости перебора можно достичь, используя автоматические счетные машины, Евгений Григорьевич стал активно привлекать своих студентов к реализации этого проекта. В этой же статье Е.Г. Гонин привел программу для условной двухадресной машины, которая смогла бы осуществить такой перебор.

Заинтересованность Евгения Григорьевича в разработке теории конечных плоскостей, изучении их структуры, решении комбинаторных задач, в том числе с помощью вычислительной техники, которая в то время была еще недостаточно мощной, но в то же время бурно развивалась, отражалась в названиях студенческих докладов, представляемых на ежегодных научных конференциях. Приведем тематику некоторых из них:

– Схема сложения на электронных лампах (Л. Бурди, 1959);

– Схема сложения на ферритах (Т. Кох, 1959);

– Схема однозарядного сумматора на диодах и триодах (Л. Бурди, 1960);

– Неоновая лампа как элемент счетных схем (Т. Соромотина, 1960);

– Малая механизация решения комбинаторных задач (Л. Горшеня, 1963);

– Автоморфизмы латинских квадратов 6-го порядка (А. Фирсович, 1965);

– Изучение структуры латинских квадратов 9-го порядка, рассмотренных Parker'ом E.T. и Killgrov'ом R.B. (Т. Чернова, 1965);

– Простейшие конфигурации и их автоморфизмы (Т. Шутько, 1966);

– Латинские квадраты порядка 9, составленные из подквадратов порядка 3 повторяющегося состава (В. Алябьева, 1967);

– Характеристика некоторых пар ортогональных латинских квадратов порядка 10 (З. Арсланова, 1967);

– Подплоскости порядка 3 плоскости трансляций порядка 9 (Л. Комаровская, 1967);

– Несуществование проективной плоскости порядка 6 (Н. Жуйкова, 1967);

– Отождествление некоторых латинских квадратов порядка 9 (А. Хакимов, 1968);

– Латинские прямоугольники размера 6×4 (Н. Масюгина, 1968);

– Сравнение двух (k, n)-дуг (Б. Харитонов, 1968);

– Свойства двух (28, 4)-дуг (Б. Харитонов, 1969);

– Обучение машины игре «шестипешка» (Е. Рогожников, 1970);

– Конфигурации Дезарга (Н. Ларионова, 1971);

– Программирование перебора решений комбинаторных задач (В. Саранина, 1979);

– Программирование перебора решений комбинаторных задач по методу «клик» (Л. Жигалова, 1980);

– Программирование перебора решений комбинаторных задач с заносом запретов (Т. Поспелова, 1980);

– Программирование составления подмножества (Ф. Саликова, 1980);

– Программирование перебора решений комбинаторных задач (О. Жильцова, 1981);

– Геометрические конфигурации и их автоморфизмы (Н. Лопатина, 1981);

– Группа трансляций и полуоборотов (Е. Хацюк, 1982);

– Циклическая проективная плоскость порядка 9 (В. Леонтьева, 1982);

– Построение хьюзовых проективных плоскостей (Е. Морозова, 1983);

– Перечисление конфигураций типа 10_3 (Р. Гиниятова, 1983).

Программа, написанная Евгением Григорьевичем для условной двухадресной машины, реализовывалась студентами на протяжении нескольких лет на имеющихся в то время в Пермском пединституте реальных машинах. Одной из них была ЭВМ «Раздан-2». Это и реальная, и двухадресная машина. Для нее была составлена и отлажена В.И. Сараниной программа, предложенная Е.Г. Гониным, на примере решения задачи о расстановке восьми ферзей на шахматной доске размера 8×8 на взаимно неатакующих позициях. Евгений Григорьевич прежде всего предложил решить задачу для доски 4×4 и четырех ферзей, последовательно выполняя все действия в соответствии с алгоритмом и оформлением промежуточных результатов. Для этого на бумаге отводилось место для всех ячеек, задействованных в работе алгоритма, и последовательно изменялось их содержимое в процессе решения задачи. Такая методика работы позволяла проследить все этапы работы машины и наглядно представить пошаговое исполнение алгоритма. После того как программа была отлажена на бумаге, началось ее составление для реальной машины. «Раздан-2», конечно же, имела отличия от условной машины, в связи с чем пришлось изменить некоторые команды. Программа была написана в кодах (1979), фрагмент ее представлен на рис. 11.

Для предложенной задачи о восьми ферзях автор составил списки всех команд, соответствующих условиям задачи, на основе *списков клик*, образующих базисное множество. Программа оказалась достаточно универсальной: для каждой конкретной задачи списки команд различались, а в самой программе менялись лишь некоторые номера тех ячеек, где хранилась информация об условиях рассматриваемой задачи.

Программа для машины «Раздан-2»

	№ ком	КОП	I A	II A	Пояснения и вставки
0075	0075	0426	0772	0001	очистка ячеек,
	0076	1426	0000	4700	отведенных для
	0077	0031	0001	0076	клик.
	0100	0426	0160	0132	$A_1 \to A_2, \Sigma$.
	0101	0030	0000	0132	БП $\to A_2$
	0102	0020	0745	0103	$A_1 \oplus_2 A_2 \to A_2, \Sigma$.
	0103	0020	0743	0700	
	0104	0730	0000	0110	УП $\to$ 0110
	0105	0007	0744	0106	$A_1 \oplus A_2 \to A_2, \Sigma$.
	0106	0426	0172	0111	$A_1 \to A_2, \Sigma$
	0107	0030	0000	0111	БП $\to$ 0111
	0110	0007	0744	0111	$(0741) \oplus (0111) \to \{0111, \Sigma$
	0111	0426	0302	0103	$A_1 \to A_2, \Sigma$.
	0112	0120	0103	0304	$A_1 \oplus A_2 \to \Sigma$
	0113	0730	0000	0102	УП $\to$ 102
	0114	0426	0106	0753	$A_1 \to A_2, \Sigma$.
	0115	0120	0132	0161	$A_1 \oplus_2 A_2 \to \Sigma$.
	0116	0730	0000	0145	УП $\to$ 145

Рис. 11. Фрагмент программы для ЭВМ «Раздан-2»

Решение задачи о восьми ферзях было успешно осуществлено и заняло вместе с распечаткой результатов 4 минуты. Подобные задачи были учебными, отладка программы на них позволяла изучать возможности появляющейся вычислительной техники и использовать ее для решения ряда научно-исследовательских проблем в конечных проективных плоскостях различных порядков, и не только в них.

В последующие годы студенты, работавшие уже под руководством Ю.Н. Зверевой, Л.И. Истоминой, продолжали усовершенствовать программу и переработали ее для других ЭВМ: «Наири-2», «Ямаха» и др. Она была переведена с языка кодов на языки программирования «Бейсик», «Паскаль». В частности, на «Наири-2» в 1984 г. Ю.Н. Зверевой и В.И. Даниловой решалась задача об отыскании конечной проективной плоскости с неполной 6-дугой определенного типа.

Приведем тематику студенческих докладов, подготовленных под руководством Е.Г. Гонина, связанную с другими направлениями исследований:

– Аналитическая интерпретация геометрии Евклида (Н. Карпович, 1958);

– Точность измерения и построения отрезков (И. Миронычева, 1960);

– Статистический контроль методом группировки (В. Бастырева, Л. Букина, Н. Желонко, М. Михайлова, Г. Постаногова, А. Троховцева, 1960);

– Статистический контроль методом группировки (В. Бастырева, Л. Букина, М. Михайлова, Г. Постаногова, А. Троховцева, 1961);

– Статистические методы контроля производственного процесса (Г. Шихалеев, 1972);

– Теория и методика изложения темы «Параллельный перенос» (Н. Степин, 1972);

– Исчисление предикатов (Н. Максимова, 1975);

– Построение геометрии плоскости на основе аксиом конгруэнтности отрезков (В. Барабанщикова, 1978);

– Сопоставление оценок студентов с итогами вступительных экзаменов и с данными школьных аттестатов (Г. Дисс, 1979);

– Аксиомы конгруэнтности отрезков (Г. Пушкарев, 1980);

– Связь успеваемости студентов с данными аттестата и результатами вступительных экзаменов (О. Кудрина, 1981).

Е.Г. Гонин и сам выступал на студенческих научных конференциях с докладами и сообщениями. Приведем темы некоторых из них: «Успехи советских геометров» (1979); «Вопросы преподавания геометрии в средней школе» (1980); «Роль конечных геометрий» (1981); «Вступительное слово о конечных геометриях» (1982).

ВНЕАУДИТОРНАЯ РАБОТА КАФЕДРЫ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ

Юлия Николаевна Зверева,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры ПГПУ
Вера Ильинична Данилова,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры ПГПУ

На протяжении всего срока заведования кафедрой Евгений Григорьевич Гонин уделял большое внимание учебно-воспитательной работе со студентами. Основные направления такой работы отражены в планах и рассмотрены на заседаниях кафедры. Назовем некоторые:

– профессиональная направленность обучения;

– ориентация студентов на работу в сельской школе;

– работа членов кафедры в качестве наставников или кураторов;

– руководство научно-исследовательской работой студентов;

– подготовка студентов к участию в предметных олимпиадах (внутривузовских, городских и др.);

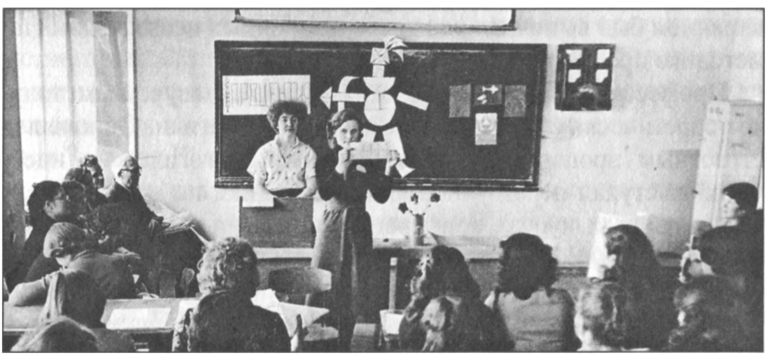
– организация работы кружков, проблемных групп;

– лекторская работа студентов;

– привлечение студентов к работе со школьниками;

– участие в организации факультетских вечеров, смотров художественной самодеятельности, конкурсов.

Все члены кафедры принимали активное участие в разных аспектах работы. Так, Ю.Н. Зверева формировала группы «консультантов» из числа хорошо успевающих студентов. Они помогали однокурсникам готовиться к коллоквиумам, контрольным и другим видам учебной деятельности.



Занятия методистов

При приеме зачетов О.М. Поносова успешно использовала математические игры. К разработке материалов для них привлекались студенты. Для курсовых работ предлагались темы, связанные с изучением опыта работы учителей математики – выпускников физико-математического факультета.

На протяжении нескольких лет эстетическим советом факультета руководила О.М. Поносова. Проводились вечера встречи со студентами и преподавателями других факультетов, артистами театров, студентами вузов города и др. Учебно-воспитательную комиссию возглавляла Л.И. Истомина. Работу студенческого научного общества курировала Н.Е. Домошницкая. Ежегодно в торжественной обстановке на «Неделе науки» проводились открытые заседания кружков, были организованы выставки студенческих работ, заседания научных секций.

Евгений Григорьевич не мыслил работу преподавателя педагогического института вне связи со школой. Большой диапазон знаний и широта взглядов позволили ему внести существенный вклад в область методики преподавания математики. В поле его зрения всегда находились наиболее сложные и важные проблемы: изучение геометрических величин, теория пределов, геометрические преобразования, вещественные и комплексные числа – вот далеко не полный перечень методических вопросов, разработанных Е.Г. Гониным.

Евгений Григорьевич был известен далеко за пределами Пермского края как ученый и педагог, способный высказать ясное и обоснованное суждение по любому, казалось бы запутанному вопросу. Под его руководством или непосредственным влиянием был выполнен ряд диссертационных исследований по методике преподавания математики.

Профессор Е.Г. Гонин не ограничивался изучением только теоретических проблем в методике математики. Он являлся страстным пропагандистом передовых педагогических идей, часто выступал перед учителями математики на многочисленных семинарах, курсах, конференциях. Тысячи преподавателей – его учеников – работали и продолжают работать в школах Перми и Пермского края.

Не забывал Е.Г. Гонин и о школьниках. На протяжении многих лет он являлся одним из активных членов областного оргкомитета математической олимпиады, вел занятия в юношеской математической школе при пединституте. Л.Б. Бурди вспоминал: «Он был бессменным председателем жюри математических олимпиад учащихся, с необыкновенной легкостью решал любую олимпиадную задачу».

По инициативе Е.Г. Гонина и В.С. Морозовой в 1967 г. при факультете была открыта школа юных математиков (ШЮМ) для учащихся старших классов. Занятия в ней проводились по воскресеньям, форма занятий – лекционно-практическая. Работали в ШЮМ студенты IV курса и аспиранты Е.Г. Гонина. Тематика и содержание занятий разрабатывались под руководством преподавателей кафедры, иногда и занятия вели они, в том числе и сам Евгений Григорьевич. Каждый год он выступал на открытом занятии в школе.

Программа ШЮМ утверждалась на заседаниях кафедры. В разные годы организационной работой в этой школе занимались В.С. Морозова, Ю.Н. Зверева, З.И. Андреева, А.Н. Пехлецкая. Школа работала до 1981 г. и пользовалась большой популярностью.

Евгений Григорьевич и преподаватели кафедры регулярно читали лекции на курсах повышения квалификации учителей математики по линии областного Института усовершенствования учителей и Университета учителя. Они консультировали также учителей математики школ города и области.

Под руководством О.М. Поносовой с 1964 по 1972 г. в школах Мотовилихинского и Индустриального районов Перми работали математические кружки для учащихся 1–4-х классов. Занятия проводили студенты.

Ольга Моисеевна Поносова была одним из организаторов летнего математического лагеря в Усть-Кишерти. Несколько лет занятия там проводили студенты факультета, и это становилось основой для их курсовых работ. В Перми аналогичную работу вела Зинаида Ивановна Андреева.

Ю.Н. Зверева в течение ряда лет входила в состав институтского совета по связям с выпускниками, была председателем факультетского совета и одним из организаторов проведения научно-практических конференций выпускников факультета. Профессор Е.Г. Гонин постоянно выступал на этих конференциях с докладами, которые были посвящены актуальным вопросам школьной математики, современным методам ее преподавания.

В 1972 г. на юбилейной конференции учителей, окончивших физико-математический факультет ПГПИ, Е.Г. Гонин на пленарном заседании выступил с докладом «Некоторые вопросы аксиоматического построения геометрии в средней школе». В 1981 г. также на пленарном заседании он выступил с сообщением «Дискуссия о преподавании математики в средней школе».

Участниками таких конференций были также преподаватели кафедры и студенты.

Евгений Григорьевич Гонин выступал с лекциями не только перед учителями и школьниками. Многие годы он был членом районной организации общества «Знание», а с 1950 г. – ее председателем. Он был членом Общества охраны памятников истории и культуры. Е.Г. Гонина неоднократно избирали депутатом городского и районного Советов депутатов трудящихся. С 1957 г. профессор Гонин – член научно-методического совета Министерства просвещения РСФСР.

Он являлся организатором и активным участником всех математических конференций педвузов Уральской зоны, постоянным членом оргкомитета и редакционно-издательского совета. И выполнял свои обязанности с большой ответственностью.

Исключительная преданность Е.Г. Гонина науке, делу обучения и воспитания подрастающего поколения, его интеллигентность, доброжелательное отношение к людям при несомненно выдающихся дарованиях создали ему авторитет в научном сообществе, глубокое уважение коллег и всех, кого сводила с ним жизнь.

Часть четвертая

ВОСПОМИНАНИЯ О ЕВГЕНИИ ГРИГОРЬЕВИЧЕ ГОНИНЕ

ОН БЫЛ САМОРОДОК

Нина Ефимовна Домошницкая,
кандидат физико-математических наук, доцент
(Нешер, Израиль)

Я окончила Пермский государственный университет в 1954 г. На последнем году обучения нам читал спецкурс по теоретической арифметике приглашенный из Пермского государственного педагогического института доцент Евгений Григорьевич Гонин. К тому времени он был признанным специалистом в области теоретической арифметики, так как вплотную занимался подготовкой учебного пособия по этой тематике. В 1959 г. была издана его монография «Теоретическая арифметика», утвержденная Министерством просвещения РСФСР в качестве учебного пособия для студентов физико-математических факультетов педагогических институтов. Мы, студенты университета, сразу поняли, что имеем дело с незаурядным ученым, человеком огромной эрудиции, обладающим большим педагогическим мастерством. Евгений Григорьевич поразил нас широтой и своеобразием своих взглядов на многие математические понятия.

После окончания университета меня приняли на работу в качестве преподавателя математики в Пермское высшее командно-инженерное училище ракетных войск, где я преподавала месяца полтора. Однажды вечером, когда я проходила мимо здания пединститута, меня кто-то окликнул. Это был Евгений Григорьевич. Он сказал, что из Москвы пришло разрешение на открытие аспирантуры под его руководством, и предложил мне поступить в нее. Я была ошарашена этим: ведь для поступления нужно сдать три экзамена. Кроме того, не знала, отпустят ли меня с работы. Евгений Григорьевич успокоил, сказав, что я недавно сдавала государственные экзамены в университете, а потому будет нетрудно сдать и вступительные – в аспирантуру. Кстати, он был членом ГЭК в университете.

Увольнение из военного училища осложнялось тем, что мне поставили условие: найти замену, а выпускники университета к тому времени почти все разъехались по распределению. Только Ингу Гамбер никуда не взяли, так как ее отец был арестован в 1937 г. и расстрелян как «враг народа». Заканчивался 1954-й – прошел год после смерти И.В. Сталина. В стране менялся политический климат. Ингу взяли на мое место в военное училище, хотя годом раньше это было бы невозможно. А я очутилась в аспирантуре пединститута, и Евгений Григорьевич стал моим научным руководителем.

Еще студенткой я специализировалась по алгебре у профессора Сергея Николаевича Черникова, поэтому из предложенных мне Евгением Григорьевичем тем выбрала алгебраическую – «Обобщенное измерение почти упорядоченных полугрупп». Занималась темой очень увлеченно, опубликовала много статей. Предложенная тематика вызывала тогда широкий интерес. Нам с Евгением Григорьевичем приходили письма из университетов Токио, Кембриджа и других городов. После окончания аспирантуры мне предложили работать на кафедре алгебры и геометрии, возглавляемой Евгением Григорьевичем. В 1964 г. защитила кандидатскую диссертацию на заседании ученого совета Свердловского государственного университета. Оппонентами выступили мой бывший педагог профессор С.Н. Черников и профессор Як Хион из Тартуского университета, который занимался смежными вопросами.

Несколько десятков лет я работала рядом с Евгением Григорьевичем.

Его эрудиция в области математики, физики, химии и даже филологии восхищала и поражала всех. К нему на консультации приезжали люди из различных городов и высших учебных заведений Советского Союза.

Доклады Евгения Григорьевича на научных конференциях, на кафедре были всегда интересны, неординарны, поражали новым подходом к уже известным вещам. Е.Г. Гонин знал много языков (английский, немецкий, французский, итальянский и др.). Ему нравились цыганские песни, а потому он выучил и этот язык.

Я очень любила и глубоко уважала Евгения Григорьевича за его мудрость, доброту и безграничную честность; иногда делилась с ним некоторыми сложными моментами своей жизни и до сих пор помню его слова: «Все образуется, Нина Ефимовна».

Евгений Григорьевич – это самородок. Не каждому в жизни встречается такой человек. Я счастлива, что на моем жизненном пути был Евгений Григорьевич Гонин, такой большой талант, человек долга и чести, удивительно широкой души и в то же время – скромный.

Я БЫЛА УЧЕНИЦЕЙ Е.Г. ГОНИНА

Ольга Моисеевна Поносова,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры геометрии ПГПИ

Моя первая встреча с Евгением Григорьевичем произошла в январе 1956 г., когда я пришла на собеседование по поводу поступления к нему в аспирантуру. Оно прошло успешно. Сдав вступительные экзамены, осенью я стала аспиранткой Евгения Григорьевича.

Очень скоро я поняла, что судьба милостиво подарила мне возможность учиться у настоящего ученого и уникального человека. Евгений Григорьевич стал для меня ориентиром на все последующие годы. К нему можно было обратиться с любым вопросом и получить единственно правильный ответ.

Под влиянием Евгения Григорьевича на кафедре царила атмосфера доброжелательности, взаимного уважения и понимания. Евгений Григорьевич был требовательным и к себе, и к нам. Он замечал наши ошибки, промахи, но они никогда не были предметом публичного обсуждения. Все выяснялось в личной беседе, делалось это тактично. Он удивительным образом умел разрешать возникающие конфликты. Хорошо помню случай, когда на заседании кафедры проходило распределение поручений. Евгений Григорьевич предложил мне взять руководство педагогической практикой группы студентов. Я, как и в предыдущие годы, категорически отказалась: как выпускница университета, не считала себя подготовленной для такой работы. Уговоры не помогли. Евгений Григорьевич мог воспользоваться своим правом заведующего кафедрой и дать мне это поручение без моего согласия. Вместо этого Евгений Григорьевич сказал: «Хорошо. Давайте поделим работу пополам. Половину студентов я беру себе». Это меня ошеломило, и я сразу согласилась на такой компромисс. Правда, потом меня мучили угрызения совести, что я переложила часть своей работы на такого занятого человека. Работа со студентами в школе мне понравилась. Все последующие годы я с удовольствием сотрудничала с учителями города и области, применяла различные формы внеклассной работы с учащимися. Это было мне интересно, приносило внутреннее удовлетворение. Евгений Григорьевич это предвидел.

До сих пор с большой благодарностью вспоминаю наставления и советы Евгения Григорьевича, которыми он снабдил меня, передавая заведование кафедрой алгебры и геометрии.

Я гордилась и горжусь тем, что имею право называть себя ученицей Евгения Григорьевича Гонина.

ЕВГЕНИЙ ГРИГОРЬЕВИЧ ГОНИН – УЧИТЕЛЬ И ЧЕЛОВЕК

Зинаида Ивановна Андреева,
доцент кафедры алгебры ПГУ

Я познакомилась с Евгением Григорьевичем в марте 1970 г., когда он пригласил меня работать на кафедру алгебры и геометрии в Пермский государственный педагогический институт и предложил читать лекции по всем геометрическим курсам, входящим в учебный план математического отделения физико-математического факультета: аналитическую, дифференциальную, проективную геометрии и основания геометрии. Нужно сказать, что до этого момента, работая в Пермском университете, я не вела занятий ни по одному из этих курсов. Более того, после окончания университета я была уверена, что геометрия – консервативная наука, в ней уже все давно сделано, развиваться ей дальше некуда. Но Евгений Григорьевич обещал постоянную помощь. И действительно, в течение трех лет он опекал меня.

При кафедре алгебры и геометрии работал постоянно действующий методический семинар. На его заседаниях мы обсуждали методические и теоретические вопросы по всем разделам общих курсов «Геометрия» и «Алгебра». С докладами выступали все члены кафедры, но, подводя итоги очередного заседания, Евгений Григорьевич высказывал свои замечания, из которых было видно, насколько глубоко он понимает материал.

В результате преподавания геометрии, особенно бесед с Евгением Григорьевичем, я полностью изменила свой взгляд на эту науку, поняла, что она живая и бурно развивается. Благодаря Евгению Григорьевичу я начала работать над вопросами, близкими к тем, которыми занимались члены кафедры. Исследование плоскости, двойственной плоскости трансляций, стало темой моей выпускной работы на факультете повышения квалификации при кафедре геометрии в Московском государственном педагогическом институте.

Евгений Григорьевич повлиял и на всю мою последующую научную и методическую работу. Я разработала такие спецкурсы, как «Псевдоевклидовы и полуевклидовы пространства», «Сферическая геометрия и элементы планиметрии Римана», «Группы и геометрии».

Евгений Григорьевич умел создать на кафедре рабочую атмосферу: каждый добросовестно занимался порученным ему делом. Он очень много занимался со студентами, его примеру следовали все члены кафедры. Евгений Григорьевич был добрым, в высшей степени тактичным человеком, никогда ни на кого не повышал голос – и на кафедре была спокойная, доброжелательная обстановка. В то же время Евгений Григорьевич был очень требователен к себе и к другим. Такими же старались быть и члены кафедры.

Почти все преподаватели кафедры, которой руководил Евгений Григорьевич, прошли его научную школу. И до сих пор на кафедрах алгебры и геометрии работают его последователи и уже их ученики. Следовательно, дух профессора Гонина жив.

УЧЕНЫЙ И ПЕДАГОГ

Георгий Семенович Шевцов,
кандидат физико-математических наук,
доцент ПГУ

В 2010 г. 23 (10) апреля исполнилось сто лет со дня рождения Евгения Григорьевича Гонина – известного ученого-математика и выдающегося педагога, честного и принципиального гражданина, глубоко порядочного, внимательного и доброжелательного человека. На его долю выпало и во время войны потрудиться, и основательно поработать на благо Отечества в мирное довоенное и послевоенное время.

Первый раз я встретил Евгения Григорьевича в начале своей трудовой деятельности. Я работал преподавателем математики в учительском институте г. Молотова. В феврале 1953 г. в Кирове проходила XI конференция ассистентов и преподавателей математических кафедр учительских и педагогических институтов зоны Урала. Он был одним из ее организаторов, ее душой и вдохновителем. Хотя к тому времени Евгений Григорьевич был уже крупным, известным ученым и опытным педагогом, он оставался исключительно скромным, доступным, доброжелательным и внимательным человеком. Не случайно Евгения Григорьевича постоянно окружала и сопровождала толпа участников конференции.

Его доклады и выступления были глубокими по содержанию, отличались новизной и ясностью изложения. Они легко воспринимались слушателями. На всю жизнь я усвоил, например, как следует эффективно решать текстовые задачи по арифметике и алгебре. Это очень помогло мне потом при проведении занятий по арифметике в учительском институте. Мои студенты вскоре перестали бояться текстовых задач, даже таких, как задачи М.Ю. Лермонтова, Л.Н. Толстого, А.П. Чехова, и, тем более, текстовые задачи для выпускников средней школы.

В конце 1953 г. я поступил в аспирантуру при Пермском государственном университете к известному ученому-алгебраисту С.Н. Черникову. С этого времени мне случалось уже частенько встречаться с Евгением Григорьевичем, и он, хотя и не был моим научным руководителем, оказал глубокое влияние на мое становление как математика. Мне посчастливилось прослушать несколько спецкурсов по общей алгебре, например теорию структур, которые Евгений Григорьевич читал тогда студентам и аспирантам в ПГУ. Его спецкурсы отличались новизной и глубоким содержанием. Читал он их блестяще, ярко и доходчиво. Он умел даже сложные вещи растолковать, как говорится, на пальцах и довести их до слушателей. Несколько позже Евгений Григорьевич сам увлекся математической логикой и нас вовлек в занятия по глубокому изучению этого предмета.

Когда заканчивался срок моего пребывания в аспирантуре, Евгений Григорьевич пригласил меня проводить занятия по аналитической геометрии со студентами-заочниками пединститута. Тогда он существенно помог мне в осмыслении этого предмета и методики его преподавания. Это очень помогло мне впоследствии, когда я читал самостоятельно курс аналитической геометрии в ПГУ.

Настало время защиты кандидатской диссертации. Евгений Григорьевич без колебаний согласился быть моим оппонентом, за что я ему искренне благодарен. И потом, когда я уже встал, как говорят, на ноги, Евгений Григорьевич продолжал щедро помогать мне советами и поддержкой. Под его влиянием, например, была подготовлена и опубликована в 1962 г. моя статья «К вопросу о понятии полупрямого произведения групп».

А скольким людям, кроме меня, этот замечательный человек, ученый и педагог помог войти в науку и обрести самостоятельность! За свою яркую трудовую жизнь Евгений Григорьевич обучил и помог найти путь в жизни не одной тысяче студентов и нескольким десяткам аспирантов. Все они с благодарностью помнят своего доброжелательного, бескорыстного учителя и наставника Евгения Григорьевича Гонина.

ШТРИХИ К ПОРТРЕТУ УЧИТЕЛЯ

Игорь Петрович Непорожнев,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры прикладной математики ПГТУ

Евгений Григорьевич Гонин обладал энциклопедическими познаниями не только в области математики, но и ряде других наук, например в физике. Моя первая студенческая курсовая работа была выполнена под его руководством. Она касалась расчета двухполупериодного выпрямителя переменного тока с достаточно большой емкостью. Исследования были доведены до вычисления среднего выпрямленного напряжения в зависимости от углов отсечки с применением соответствующей номограммы. В дальнейшем материалы работы были опубликованы.

Помню также, что Евгений Григорьевич увлекался расшифровкой клинописей некоторых древних языков и даже в дополнение к работе Н.И. Дворецкой написал статью «К вопросу об урартских мерах емкости», которая была опубликована в «Ученых записках» Пермского педагогического института за 1959 г. Он хорошо играл в шахматы.

Постоянно и регулярно Е.Г. Гонин занимался со своими аспирантами и сотрудниками кафедры по тематике их исследований, не считаясь со временем, даже в отпуске. Когда я учился в аспирантуре, я не раз бывал у него в Верхней Курье, где он снимал дачу.

После окончания аспирантуры я был оставлен для работы на кафедре алгебры и геометрии. Защитив кандидатскую диссертацию, я продолжил исследования по структуре конечных проективных плоскостей и в то же время стал заниматься задачами о неизоморфных раскрасках ребер обыкновенных полных графов. И в этой работе я постоянно чувствовал поддержку Евгения Григорьевича Гонина. К указанным задачам до сих пор имею интерес и занимаюсь ими.

ОН БЫЛ БОЛЬШОЙ УЧЕНЫЙ

Лидия Ивановна Истомина,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры геометрии ПГПУ

Мне посчастливилось учиться у Евгения Григорьевича начиная с первого курса института и до его окончания. Он вел у нас аналитическую, проективную геометрии, основания геометрии, а также все спецкурсы и спецсеминары. Евгений Григорьевич поражал нас своим особым изложением материала, выстраивая его логически последовательно, строго и доступно, не диктовал лекции, а в основном рассуждал, анализировал материал вместе со слушателями. Так же своеобразно Е.Г. Гонин принимал экзамены, иногда с утра до позднего вечера, стараясь быть объективным. Не любил ставить «неуды». Спрашивал досконально. Если студент что-то недопонимал, то Евгений Григорьевич старался объяснить, научить прямо на экзамене.

Наша группа очень уважала Евгения Григорьевича. Когда он заболел во время сессии и экзамен должен был принимать другой преподаватель, то мы пошли его навестить и упросили принять экзамен, что он и сделал.

Евгений Григорьевич был очень внимательным, добрым и скромным человеком, создавая вокруг себя атмосферу доброжелательности. Относился к своим подчиненным тактично, справедливо и ненавязчиво, поэтому в нашем коллективе не было никаких обид, никаких интриг.

Аспирантам Евгений Григорьевич уделял много внимания. Все идеи и методы, которые в дальнейшем были изложены в их диссертационных исследованиях, по большей части принадлежали ему. Высокие требования он предъявлял к оформлению статей и диссертации: приходилось много раз переделывать и переоформлять материал.

Запомнился Евгений Григорьевич своими выступлениями на конференциях преподавателей математики педвузов Уральской зоны. Его сообщений всегда ждали. Он принимал активное участие в дискуссиях, мнение его по любому научному вопросу интересовало каждого, авторитет был огромным, непререкаемым.

Евгений Григорьевич не стоял в стороне от жизни факультета, на собраниях он выступал только с очень нужными и важными предложениями, участвовал во многих мероприятиях для студентов и преподавателей.

Когда были организованы комсомольцами-аспирантами лыжные вылазки, он был одним из активных участников.

Евгений Григорьевич отличался широкой эрудицией, разбирался во многих областях науки. Знал несколько иностранных языков, свободно переводил научные статьи. Многие преподаватели нашего и других вузов обращались к нему за консультацией по актуальным вопросам из различных математических дисциплин.

К большому сожалению, Евгений Григорьевич не спешил публиковать результаты своих научных исследований, многие так и остались в карандашных набросках. Сделав их, он откладывал работу, говоря: «Пусть отлежится».

Это был большой ученый.

ИДЕАЛ, К КОТОРОМУ СЛЕДУЕТ СТРЕМИТЬСЯ

Тамара Михайловна Соромотина,
доцент кафедры геометрии ПГПУ

Евгений Григорьевич Гонин – необычайно многогранная личность. Энциклопедически образованный ученый, полиглот, прекрасный педагог, математик, для которого занятие математикой было постоянным и естественным состоянием, добрый, доброжелательный, обаятельный человек.

Его ученики, коллеги, все, кого судьба привела к общению с Е.Г. Гониным, назовут и другие прекрасные черты этого человека, я же хочу выделить одну из сторон его дарования – педагогическую, которая оказала на меня большое влияние.

В пору студенчества моими кумирами были Е.Г. Гонин, Л.И. Волковысский, Е.М. Жуховицкий. Но первое место, естественно, занимал Евгений Григорьевич. Он преподавал нам в течение всех пяти лет обучения. Читал все геометрические курсы, теорию вероятностей, основания арифметики. Он влиял на нас своим отношением к делу, своей огромной эрудицией, любопытством, пытливостью и добросовестностью настоящего ученого. Мы впитывали этот дух увлеченности наукой, были покорены логической отточенностью лекций, спокойной манерой изложения. На лекции он приходил без всяких записей и инструментов, писал на доске небольшим кусочком мела. Иногда строгое логическое изложение прерывалось неожиданной фразой. Вот одна из них: «Все гомологии похожи друг на друга, как кошки в темноте». После такой фразы соответствующие понятия надолго запоминались, а далее снова следовало строгое последовательное изложение материала. Подобные фразы появлялись непринужденно, сиюминутно, легко. У меня всегда возникало ощущение, что мир математики был ему абсолютно подвластен. Он видел фигуры, функции, числа, различные конструкции во всем их многообразии, со всеми многочисленными связями, глыбы классических сложившихся теорий и только-только нарождающиеся направления (например, конечные геометрические системы, развитие ЭВМ). Ему нравилось рассказывать о математике, все разъяснять, и даже экзамен был продолжением обучения, а не просто процедурой оценки знаний студента.

Случилось так, что мы с моим однокурсником по аспирантуре Львом Борисовичем Бурди стали первыми выпускниками, не оставшимися в нашем институте, а уехавшими по распределению в другие вузы (Лев Борисович – в Благовещенский пединститут, я – в Новосибирский, где «застряла» на 17 лет).

В Новосибирском пединституте работал Яков Львович Трайнин (все мы знаем его как автора прекрасного учебника «Основания геометрии»). К моменту моего приезда он уже вышел на пенсию. В это время в институте работала Валентина Анатольевна Кузнецова. С ней вместе мы проработали один год. После отъезда Кузнецовых мне какое-то время пришлось вести геометрические курсы на всех отделениях факультета.

Как и другие преподаватели, я начинала работу в должности ассистента, но приходилось выполнять и по 300–400 лекционных часов в год. И в этой ситуации мне очень помог опыт ученичества у Евгения Григорьевича. Был определенный запас знаний, но самое главное – был пример Учителя, его образ. Я старалась так же четко, логично выстраивать курс лекций, рассказывать просто и доходчиво, находить более простые доказательства и интересные примеры. На лекции приходила только с кусочком мела, иногда брала с собой небольшие листочки, когда необходимо было записать даты жизни ученого или привести конкретный пример со специально подобранными числовыми данными. Естественно, пришлось много готовиться к занятиям, писать лекции, а потом их учить. Но если удавалось пробудить интерес студентов к предмету, то это во многом потому, что мне в свое время было интересно изучать его под руководством и влиянием Евгения Григорьевича. Как получалось – судить не мне, но был идеал, к которому надлежало стремиться.

МАТЕМАТИК ОТ БОГА

Вадим Иванович Васильков,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики ЧГТУ (Челябинск)

Он родом из большой семьи
С высоким генетическим порогом,
И со студенческой скамьи
Был математиком от Бога.

На мой взгляд, это самая точная характеристика математического таланта Евгения Григорьевича Гонина. Кто в этом сомневается, прочтите его книгу «Теоретическая арифметика», изданную в 1959 г. в Москве под грифом учебного пособия, утвержденного Министерством просвещения РСФСР.

Мне же еще удалось прослушать у Е.Г. Гонина в 1959–1964 гг. три геометрических курса (до 1970 г. в педвузах СССР и России не было единого курса геометрии, как сейчас, а изучались отдельные разделы геометрии как самостоятельные дисциплины): годовой курс аналитической геометрии (I курс), семестровый курс проективной геометрии (III курс), семестровый курс по основаниям геометрии (V курс). Все названные курсы профессор Е.Г. Гонин читал по-своему, оригинально, так как подобного изложения в существовавших тогда учебных пособиях по геометрии не было. Например, в курсе аналитической геометрии он давал определение понятия «вектор», отличное от всех известных в литературе того времени, но оно четко вписывалось в стройную систему изложения основ векторной алгебры.

Более всего восхищал меня Е.Г. Гонин как научный руководитель в период моего обучения в аспирантуре (1964–1967), а также в последующие годы на конференциях математиков педвузов Уральской зоны (1966–1970) в Челябинске, Свердловске, Кирове, Ижевске, Перми. Именно на этих конференциях Е.Г. Гонин с успехом и одновременно очень скромно демонстрировал свою блестящую математическую эрудицию и большую мудрость. Например, при обсуждении одного методического доклада на конференции в Кирове (1968) Е.Г. Гонин сказал примерно следующее: «В торговле есть принцип: упаковка должна соответствовать товару; если товар большой, то и упаковка большая, для маленького товара и упаковка маленькая. В предлагаемом докладе дается большая упаковка для маленького товара». Докладчику было нечего возразить...

При обсуждении различных попыток реформирования школы Е.Г. Гонин всегда мудро говорил: «Школа – это очень нежный организм, и нельзя к школе подходить с топором». К сожалению, сейчас нашей системе образования остро не хватает таких мудрых людей.

«Мудрые – не спешат» – одно из любимых выражений Евгения Григорьевича. Мне пришлось услышать эту фразу в 1964/65 учебном году в общежитии пединститута (район Балатово), куда команда шахматистов кафедры алгебры и геометрии приехала на трамвае для проведения матча с командой шахматистов общежития (в основном студентов физико-математического факультета ПГПИ). Играли, если мне не изменяет память, на пяти досках. Команду кафедры представляли: Е.Г. Гонин (второй спортивный разряд), А.И. Лямзин (первый разряд), И.П. Непорожнев (второй разряд), В.И. Васильков (второй разряд), В.Г. Куколев (второй или третий разряд). Попутно замечу, что мужчины составляли в то время более 60% (!) от общего состава кафедры, и все играли в шахматы (!). Е.Г. Гонин и я закончили свои партии раньше остальных и с большим интересом наблюдали за развитием событий в оставшихся партиях. По поводу быстрого исхода одной из них я и высказал Евгению Григорьевичу свои соображения. Ответом на мой прогноз были его слова: «Мудрые – не спешат», – произнесенные с некоторой долей сомнения в правильности моей оценки. Как оказалось, профессор был прав: партия закончилась не так, как я ожидал. Поэтому фразу «МУДРЫЕ – НЕ СПЕШАТ» я запомнил на всю жизнь.

МЫ ПОЧУВСТВОВАЛИ СЕБЯ НА ПЕРЕДНЕМ КРАЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ НАУКИ

Валентина Георгиевна Алябьева,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры алгебры ПГПУ

Евгений Григорьевич Гонин – мой первый научный руководитель. На третьем курсе в педагогическом институте под его руководством я писала курсовую работу, целью которой было исследование латинских квадратов девятого порядка определенного состава. Построение конечных плоскостей с использованием латинских квадратов предполагало большой перебор вариантов. Сначала требовалось разобраться во множестве латинских квадратов, ввести на множестве отношение эквивалентности, распределить квадраты по классам эквивалентности. В это время у Евгения Григорьевича было несколько аспирантов, чьи диссертации были посвящены конечным проективным плоскостям, изучению структуры, способам их построения. Чтобы погрузить в новую математическую атмосферу, Евгений Григорьевич приглашал меня на научные семинары, которые были организованы на кафедре для аспирантов и сотрудников, так как большая их часть состояла из учеников Евгения Григорьевича, причастных к тематике конечных геометрий. Словом, кафедра представляла собой коллектив единомышленников, говоривших на особом языке посвященных.

После окончания пединститута я поступила в аспирантуру к Евгению Григорьевичу по специальности «Геометрия и топология» и продолжила исследование латинских квадратов, состоящих из подквадратов третьего порядка. В процессе обучения состоялось мое приобщение к жизни научных сотрудников.

Памятна работа над оформлением матѐриалов первого исследования. Написав статью, я приходила к Евгению Григорьевичу, чтобы выслушать замечания. В основном все сводилось к тому, что статью следует существенно переделать. Мне нравилось, с какой серьезностью каждый раз Евгений Григорьевич приступал к исправлению статьи в моем присутствии. Он задумывался, весь особым образом собирался, сосредотачивался, как спортсмен перед прыжком, даже слегка бледнел, брал в руки неизменный простой, остро заточенный карандаш, нацеливался им на статью и приступал к экспериментам: он переставлял фразы, заменял слова, менял знаки пунктуации. После этого статья переписывалась. Я приходила к Евгению Григорьевичу с новым вариантом, и… все повторялось. Сейчас, вспоминая беседы с Е.Г. Гониным, его редакторскую правку, я осознаю, как много они значили для меня, сколь важным был этот метод передачи навыка из рук в руки, сколь важно было наблюдать мгновенную аргументированную реакцию на логический сбой в статье, нарушение стиля, ссылки на первоисточники.

Работа над диссертацией в кабинетной тиши дополнялась явным общением с научным сообществом. При кафедре работал научный семинар, на котором мы делились результатами своих достижений. Евгений Григорьевич внимательно следил за развитием заграничной дискретной математики, знал обо всех результатах исследований в областях, сопредельных с нашими, и сообщал нам об этом. Благодаря ему, мы могли оценить место и значимость работ нашего направления в комбинаторном анализе.

Вместе с Евгением Григорьевичем мы выезжали на научные конференции в различные города страны. С начала 1970-х гг. стали активно участвовать в работе постоянно действующего научного семинара по комбинаторному анализу под руководством доктора физико-математических наук, профессора К.А. Рыбникова в Московском университете им. М.В. Ломоносова, проходить предзащиту кандидатских и докторских диссертаций, публиковаться в сборнике «Комбинаторный анализ», издававшемся там же. Эти времена были примечательны тем, что в математике стали приоритетными дискретные разделы, широко внедрялась компьютерная математика, когда ЮНЕСКО объявлял один год комбинаторики за другим. Это были времена, когда мы почувствовали себя на переднем крае мировой математической науки. Это были времена, подтвердившие веру Евгения Григорьевича в значимость выбранного им направления научных исследований его учеников, состоятельность как ученого и организатора науки.

ИМЯ Е.Г. ГОНИНА – ВИЗИТНАЯ КАРТОЧКА УЧЕНЫХ ПЕРМИ

Галина Николаевна Васильева,
кандидат педагогических наук, доцент, заведующая
кафедрой методики преподавания математики ПГПУ

Евгений Григорьевич Гонин… Первое, что у меня ассоциируется с его именем, – глубокое уважение ведущих ученых-математиков и методистов Москвы.

Имя Е.Г. Гонина было словно визитная карточка Перми, ее науки. Как известно, в 1970-е гг. А.Н. Колмогоров и Р.С. Черкасов создали новый учебник по геометрии для 6–8-х классов. Идеи обновления содержания школьного математического образования широко обсуждались педагогической общественностью на конференциях разного уровня, заседаниях Московского математического общества при МГУ им. М.В. Ломоносова. К мнению профессора Е.Г. Гонина были неравнодушны все участники научных дискуссий.

К моему педагогическому образованию Евгений Григорьевич имеет как прямое, так и косвенное отношение. Для первокурсников 1967 года лекции и практические занятия по геометрии доцента Л.И. Истоминой, учебные занятия по алгебре и заседания математического кружка доцента Н.Е. Домошницкой – образец преподавания в высшей школе. Математическая эрудиция, глубокий интерес к науке, четкость изложения предмета, обаяние являются главными характеристиками их профессиональной деятельности. И это закономерно. Мы учились у педагогов, достойных своего Учителя, среди которых Е.А. Дышинский, Ю.Н. Зверева, Л.Я. Панкратова, В.А. Ярмоленко и др.

Знакомство с Евгением Григорьевичем состоялось при изучении курса «Введение в математику». Впечатления от необычности содержания дисциплины для первокурсника (вопросы теории множеств, логики) дополнялись неординарной манерой чтения лекции – диалогом, проблемными вопросами, иногда обращенными к нам, слушателям, а чаще к себе самому. По прошествии времени я хорошо понимаю, что эти занятия пробудили у меня любовь к точности языка математики и к математической символике как средству его выражения. Как красиво и лаконично можно представить виды теорем, используя математический язык:

$$(\forall x)(S(x) \Rightarrow P(x));\ (\forall x, y, z)(A(x, y, z));\ (\forall x)(\exists y)(A(x, y)).$$

Овладевая основами теоретической арифметики на старших курсах института, мы поражались простотой изложения и скрупулезностью доказательств, представленных в книге Е.Г. Гонина «Теоретическая арифметика». Достаточно процитировать несколько строк введения, чтобы почувствовать необыкновенный и обаятельный стиль изложения Евгения Григорьевича, глубочайшую эрудицию ученого:

«Представление о первых натуральных числах сложилось еще в доисторическую эпоху. Древние египтяне и вавилоняне создали системы нумерации и пользовались дробями. Греческие математики за несколько веков до нашей эры установили недостаточность рациональных чисел для строгого решения задачи измерения длин и близко подошли к понятию вещественного числа, создав теорию пропорций. Представление об отрицательных числах имели уже древние индийцы, но общеупотребительными они стали только с XVI в. <...> Хотя введение отрицательных и мнимых чисел первоначально было порождено внутренним развитием математики и связано с изучением уравнений, не имеющих решений в пределах существовавших до этого систем, интересен и важен тот факт, что эти числа получили полное признание лишь после нахождения величин, выражаемых такими числами. <...> Мы видим, что понятие числа развивалось в тесной связи с изучением величин, эта связь сохраняется и в настоящее время. Но величины являются реальными свойствами реальных объектов, поэтому числа выражают некоторые связи между объектами и представляют для науки интерес как орудие познания действительности».

Понимая сложность математических вопросов, связанных с построением и изучением числовых систем, Евгений Григорьевич заботился об особой четкости изложения, целесообразности предварительного рассмотрения некоторых понятий в общем виде. «Это делает более понятным план изучения систем, освобождает от повторения рассуждений, позволяет давать краткие формулировки». Так, аксиоматическое определение системы неотрицательных целых чисел как дискретного точечного упорядоченного коммутативного полукольца с единичным элементом, не являющимся нулевым, дает представление о содержании первой главы «Основные общематематические понятия».

Характерно, что изложение математической теории основных числовых систем пронизано методическим содержанием, представленным очень естественно, ненавязчиво. Так, из порядкового определения системы неотрицательных целых чисел как дискретного упорядоченного множества C^+, имеющего первый элемент и не имеющего последнего, выводятся четыре предложения, называемые аксиомами Пеано. «Это связано с тем, что они тоже могут быть использованы для определения системы неотрицательных целых чисел (установлено итальянским математиком Пеано). Построение системы на основе аксиом Пеано несколько сложнее, чем на основе определения, принятого нами». Здесь же, излагая вопрос о принципах полной математической индукции, Е.Г. Гонин называет индуктивным доказательство, «если оно ведется от частного к общему, т. е. если справедливость предложения выводится из его справедливости для частных случаев. Например, некоторые теоремы о треугольниках доказываются отдельно для остроугольных, прямоугольных и тупоугольных треугольников. Чтобы индуктивное доказательство имело логическую силу, должны быть рассмотрены все частные случаи; тогда индукция называется полной. Вывод из рассмотрения отдельных, но не всех частных случаев, результат так называемой неполной индукции, доказательной силы не имеет, он может рассматриваться лишь как правдоподобная гипотеза».

И сегодня мы обращаемся к книгам и учебным пособиям Евгения Григорьевича при подготовке к занятиям и для уточнения дискуссионных вопросов, и для организации научной работы студентов, и для убеждения студентов в методических истинах, ссылаясь на авторитет профессора-математика Е.Г. Гонина.

ВСПОМИНАЕМ С ГЛУБОКОЙ ПРИЗНАТЕЛЬНОСТЬЮ

Любовь Авдеева (Сальник),
Валентина Горшкова (Окулова),
Татьяна Плохих (Федосеева), **Надежда Пушкина,**
Лидия Пантелеева, Людмила Харанен (Панкратова),
Светлана Хенова (Катаева),
выпускники ПГПИ 1962 года

Евгений Григорьевич Гонин читал нам лекции по курсам «Аналитическая геометрия», «Основания геометрии», «Проективная геометрия». Его лекции всегда поражали стройностью и строгостью изложения, изобиловали крылатыми выражениями, например: «Этот результат можно на пальцах получить» – или: «Это нам даром досталось».

Е.Г. Гонин и все члены кафедры, которой он руководил, очень внимательно и доброжелательно относились к студентам. Евгений Григорьевич всегда поощрял любознательность студентов и всегда был готов объяснить и разъяснить любое недоумение, даже если вопрос возникал на экзамене. И порой случалось так, что именно любознательность помогала кому-то из экзаменующихся нечаянными подсказками самого экзаменатора.

Таня Плохих вспоминает, что ее знакомство с Е.Г. Гониным состоялось заочно, задолго до поступления в институт. Евгений Григорьевич сам обратил внимание на знакомую ему фамилию среди фамилий первокурсников. Оказывается, как рассказывала Танина бабушка, Евгений Григорьевич в первые годы своей работы в пединституте жил на квартире в одном доме с отцом Татьяны. Случилось так, что в квартиру проникли воры, и Евгений Григорьевич остался без единственного костюма, в котором он ходил на лекции. Поскольку отец Тани был такого же роста, как и Евгений Григорьевич, то именно он выручил соседа, уступив ему свой костюм, чтобы тому было в чем прийти к студентам в этот злополучный день.

Заочное знакомство с Евгением Григорьевичем также задолго до поступления в институт было и у Любы Авдеевой. Ее отец учился в свое время заочно в Московском авиационном институте им. Орджоникидзе, а слушал лекции и сдавал зачеты и экзамены в Перми. Лектором-математиком у него был Е.Г. Гонин, о котором он всегда говорил с большим уважением. Вступительный экзамен в пединститут по математике у Любы принимал Е.Г. Гонин, причем очень доброжелательно, помогая преодолеть волнение. На первом курсе при чтении лекций часто обращался именно к ней: «А вы как думаете, товарищ Авдеева?». Позднее Люба познакомилась с сестрой Евгения Григорьевича Верой Григорьевной. Произошло это в 1964 г. В трамвае в г. Львове по пути на одну из туристических баз в Закарпатье Люба вдруг услышала «родной» голос в этом незнакомом для нее городе (голоса сестры и брата Гониных были удивительно похожи) – и весь отпуск они уже не разлучались.

Люда Харанен и Лида Пантелеева после окончания института поступили в аспирантуру к Е.Г. Гонину и были покорены его увлеченностью, скрупулезностью в научных исследованиях и высокой человеческой порядочностью.

Л. Харанен в первый год ее обучения в аспирантуре Евгений Григорьевич взял с собой в командировку в Москву для работы в библиотеке им. В.И. Ленина. Все время командировки по-отечески опекал свою аспирантку. Даже в поезде, чтобы ей не было скучно, развлекал различными логическими задачами комбинаторного характера. А та, чтоб не ударить в грязь лицом, изо всех сил старалась их решить, даже ночью не могла спать, пока, наконец, не отыскивалось нужное решение.

Нам всем очень повезло, что в нашей жизни был такой замечательный человек и учитель, как Е.Г. Гонин. Он учил нас не только математике, но и методике ее преподавания, такой стройности и четкости изложения материала, чтобы даже сложные вопросы усваивались учениками без особого напряжения. Этому в немалой степени способствовали и манера поведения лектора, его доброжелательное общение с аудиторией.

Мы, ученики Е.Г. Гонина и его коллег, выпускники 1962 года, почти все стали педагогами – в школах, в вузах, в военном училище. Мы с глубокой признательностью вспоминаем наш родной вуз и наших учителей.

ВОСПОМИНАНИЯ ОБ ОТЦЕ

Елена Евгеньвна Гонина, Ирина Евгеньевна Гонина

Нашему отцу, Евгению Григорьевичу Гонину, 23 апреля 2010 года исполнилось 100 лет. Его помнят многочисленные ученики, коллеги, родственники. А для нас, двух его дочерей Елены и Ирины, он всегда рядом, мы помним его мудрые советы, стараемся им следовать. Мы не сумеем выразить словами всю нашу огромную, бесконечную любовь и благодарность к такому удивительному человеку, но постараемся вспомнить, каким он был в обычной человеческой жизни, во взаимоотношениях с родными, близкими, друзьями.

Евгений Григорьевич и Зоя Ивановна Гонины с дочерью Леной. 1948 г.

Мы – поздние дети. Жизнь наших родителей нарушила война. В послевоенные годы жили бедно, но радостно и с надеждой на лучшее. Отец очень любил нас, много возился с нами, занимался, разговаривал. Одно из первых детских воспоминаний старшей сестры: папа посадил дочь на шею и катал по маленькой квартирке. Вместе с папой мы ходили на уютный близлежащий рынок в Разгуляе, гуляли вокруг квартала (это называлось «наобокружку»). Папа пел нам песни собственного сочинения про «дядю Попова», который тоже ходил на рынок, ел компот, но в конце каждой песни «придумывал радио». Позднее мама призналась, что она гораздо лучше оценила своего мужа и даже сильнее его полюбила, когда увидела его отношение к детям.

Среди всех высоких человеческих качеств отца особо нужно отметить его глубокую интеллигентность в лучшем смысле этого слова, его разностороннюю образованность, широту интересов, эрудицию и подлинное уважение к людям. Отец занимался математикой всегда, даже в отпуске что-то писал коротеньким карандашиком в блокноте. Он хорошо знал физику, а астрономию даже преподавал и, конечно, мог опознать на небе любую звезду и планету. В молодости он выполнял астрономические и геодезические измерения, выезжая в район Сургута. Позднее наблюдал солнечные затмения в других областях страны. В дни нашего детства он увлекался радиолюбительством, собирал из маленьких деталек приемники, позднее эти детальки лежали дома в коробочках.

Отдельный рассказ – увлечение отца историей древних цивилизаций и чтением текстов на разных языках. У отца была обширная библиотека по истории Древнего мира, особенно его интересовали Древний Египет, цивилизации Междуречья (шумеры, аккадяне, вавилоняне), Древняя Греция. Он умел читать клинопись, разбирался в иероглифах, греческие тексты читал свободно. Однажды отец сильно веселился, когда в каком-то журнале увидел фотографию клинописной надписи, напечатанную «вниз головой». Интересно, заметили ли это другие?

Евгений Григорьевич с дочерью Ириной. 1955 г.

Первой книгой, которую он подарил старшей дочери, было адаптированное для детей издание «Приключения Одиссея». Конечно, книги Гомера «Илиада» и «Одиссея» были в домашней библиотеке в лучших переводах, и все в семье их прочитали.

Отец знал много иностранных языков, и хотя разговорной практики не имел, но читал и переводил с основных европейских языков, считая самым сложным из них венгерский. Он выписывал математический журнал на китайском языке, правда, через год не возобновил подписку, посчитав математические результаты неинтересными. При возможности он покупал в пермских и московских киосках газеты на арабском языке, иврите. Этих языков он не знал, но прочитать написанное мог, находя некоторые знакомые слова. Словарный запас отца был огромен, и это позволяло легко отгадывать кроссворды. Однажды, когда он долго оставался дома один и его спросили, не скучно ли было, ответил, что вообще-то ему никогда не бывает скучно. К счастью, это редкое качество перешло к нам по наследству.

Отец был хорошо развит физически, прилично плавал (мог переплыть Каму в районе построенной позже КамГЭС). Зимой он ходил с коллективом математиков пединститута в лыжные походы. Любил играть с коллегами в шахматы, а в последние годы увлекся решением шашечных задач, предлагаемых «Учительской газетой», причем достаточно успешно. В газете писали, что Е.Г. Гонин из Перми высказывает «емкие мысли», и отцу присваивали спортивные разряды. Удостоверение о присвоении первого разряда по шашкам пришло по почте вскоре после его смерти.

В молодости папа ходил с друзьями в лес на охоту, добывал рябчиков, иногда глухарей. Но там же добыча обычно и съедалась, домой привозились крылышки, которыми иногда сметали пыль.

Отец любил музыку, в его фонотеке было много пластинок с оперной классикой, модными до войны романсами, популярными песнями. Сам он неплохо пел, у него был приятный баритон. Пели обычно во время семейных застолий. Одной из любимых песен была «Глухой неведомой тайгою», часто он пел романс «Перестаньте рыдать надо мной, журавли». Из песен более позднего времени нравились «Бригантина» и «Главное, ребята, сердцем не стареть».

Особенно увлекался отец цыганской музыкой, как романсами, так и народными напевами. Он присутствовал на гастрольных концертах цыганских ансамблей. Будучи в Москве, по возможности посещал спектакли театра «Ромэн». Когда-то на вопрос преподавателя математики университета Ивана Власовича Цыганкова о его хобби отец, подумав, ответил: «Цыгане». В роду у него цыган не было, откуда же пошел этот интерес? Возможно, от волнующих звуков цыганской песни, колдовства старинного языка индоевропейской группы. На цыганском языке он даже умел говорить. Как-то в присутствии старшей дочери заговорил с цыганкой в Ленинграде на ее языке. Эффект был потрясающим: сбежалась толпа цыганок, которые окружили его и стали убеждать, что он цыган («ром»). Отец объяснил им, что язык он выучил по книгам, чем удивил их еще больше. Кстати, отец был совершенно лишен суеверия, никакие гадания и предсказания его не интересовали.

Папа уважительно относился к каждому человеку, независимо от его положения в обществе. Со студентами он был строг и требователен, всегда долго принимал экзамены, досконально все выспрашивая. За это его часто укоряла мама, уговаривая быть снисходительнее. Он отвечал, что представляет официальную организацию и не может допустить недобросовестность; несколько смягчился он только к старости. Тем не менее, студенты относились к нему с большим уважением и пиететом.

Отец был человеком спокойным и уравновешенным. В 1950-е гг. наша семья из четырех человек жила в двух маленьких комнатах одноэтажного деревянного дома без всяких удобств, принадлежащего пединституту. В подвальном помещении дома жила семья институтского шофера: красивая жена, которую муж отчаянно и, видимо, беспочвенно ревновал, и двое детей. Однажды пьяный муж набросился на жену с топором, она в ужасе выскочила на улицу с криком: «Спасите!» – и побежала к нам. Наши родители выбежали за дверь и увидели эту жуткую картину. Интересно, что сделал бы на месте отца любой другой человек? Наверное, закричал бы: «Брось топор, скотина!». Отец спокойно сказал: «Иван Григорьевич, что вы делаете, вы ведь умный человек!» – и это пьяному хулигану с топором. Эффект был потрясающий: «умный человек» Иван Григорьевич бросил топор и зарыдал.

В этом же дворе стоял другой дом, где жили и преподаватели, и дворники, вахтеры, шоферы. Однажды два обитателя этого дома так отчаянно дрались, что уже катались по двору. Собралась толпа любопытных и охающих, наблюдая за этим «интересным» зрелищем. Отец взял полное ведро воды, окатил драчунов – и все, драка кончилась. Еще раз он проявил хладнокровие, когда на нашем деревянном доме загорелась внешняя электропроводка: просто рванул и оборвал ее. На причитания мамы об опасности, что могло его дернуть, он заметил, что по законам физики не должно было ударить током, а медлить было нельзя.

Было в личности отца нечто такое, что заставляло людей в его присутствии даже вести себя по-другому, более сдержанно. Возможно, это была спокойная доброжелательность и высокие профессиональные качества педагога.

Хорошие отношения складывались у наших родителей с соседями по коммунальной квартире: семьями физика Павла Владимировича Мейкляра и физика Бориса Ивановича Казанцева. Семья Мейкляра приехала после «дела врачей» в Пермь (тогда еще Молотов) из Ленинграда, где они с женой пережили блокаду. В обеих семьях было по двое детей, причем младшие дети родились почти одновременно. Кормящие матери иногда делились своим молоком, поэтому Ирочку Гонину и Мишу Мейкляра иногда в шутку называли «молочными сестрой и братом». Отец и Павел Владимирович уважали друг друга, часто беседовали, общались. Оба участвовали в институтских соревнованиях по стрельбе, причем весьма успешно, получали призы. Павел Владимирович был одесситом, веселым и остроумным, любил общаться с детьми, учил нас одесским прибауткам, называл «орлицами».

П.В. Мейкляр

К сожалению, Мейкляр воспринимал Пермь как город своей ссылки и при первой возможности уехал в Казань. Он стал доктором физико-математических наук, успешно работал по своей специальности – оптике – и прожил до глубокой старости. После Мейкляров в освободившиеся комнаты въехала семья Казанцевых, где тоже было двое детей примерно нашего возраста. Борис Иванович был значительно моложе отца, что не мешало их взаимопониманию. Казанцевы советовались со старшими соседями по разным вопросам. Они раньше нас приобрели телевизор, и мы часто ходили к ним смотреть фильмы и передачи. В семье их произошло большое несчастье: в возрасте 33 лет умерла жена Бориса Ивановича, учительница физики Мина Николаевна. В больнице, куда она ушла своими ногами, ей поставили неверный диагноз, и она не перенесла операции. Остались сиротами двое детей. Через некоторое время Борис Иванович женился на своей студентке, а потом их семья получила благоустроенную квартиру и переехала туда. Но и после этого Борис Иванович частенько забегал в гости, советовался с родителями по разным вопросам.

Б.И. Казанцев

Друзьями отца были Николай Степанович Торкин, Александр Иванович Ефимов, Сергей Николаевич Черников и Владимир Иванович Рябухин. Все они оказали различное влияние на его жизнь, развитие, становление. Физик Торкин был довоенным другом начинающего ученого Гонина. Видимо, именно он учил отца, как надо вести себя, как одеваться, есть необычные для сельского юноши блюда, например маслины, разбираться в винах. Человеком он был более «светским», хотя примерно ровесником отца. Торкин посещал рестораны, был вхож в мир театра, куда вводил и Евгения. Позже Николай Степанович, как рассказывают, женился на балерине. К сожалению, в середине сороковых годов Торкин уехал из Молотова, дружба прервалась.

Н.С. Торкин

В эту же компанию входил молодой филолог из пединститута Александр Иванович Ефимов. Он был направлен из Москвы: на выбор ему были предложены Средняя Азия и Урал. Ефимов выбрал второй вариант, объясняя это тем, что в Средней Азии ему, специалисту-филологу, знакомому с тонкостями языков, придется работать с людьми, для которых все равно, «кошка пришла» или «кошка пришел». Именно он, по-видимому, обратил внимание Евгения Григорьевича на нашу будущую маму, которая тогда была студенткой Ефимова на литфаке. Александра Ивановича поразило лицо девушки – чисто славянское. Он прозвал ее «славяночкой». Зоя Теленкова, будущая жена Евгения Григорьевича, была родом из Подмосковья, где чисто славянский тип встречается чаще, чем на Урале. У нее были длинная золотисто-русая коса, выразительные серые глаза. Однокурсники Зои посвящали стихи ее «легкой походке и тяжелой косе». У отца были какие-то азиатские черты. Во всяком случае, еще в довоенные годы один из друзей нарисовал его карандашом в китайском костюме и шапочке, подписав: «Нин-Го». К сожалению, этот забавный портрет с течением времени совсем обветшал и не сохранился.

Александр Иванович Ефимов позже вернулся в Москву, стал профессором, автором нескольких книг по литературоведению и языкознанию. Приезжая в Москву, отец с ним, по обыкновению, встречался.

Сергей Николаевич Черников приехал в Пермь после войны из Свердловска. В это время он был уже известным ученым, доктором физико-математических наук. Здесь он возобновил знакомство с отцом, которого знал с довоенных лет по научным конференциям. Он рассказывал, как поразил

Е.Г. Гонин и А.И. Ефимов

его в свое время молодой математик из Перми (они были почти ровесниками), который рассказывал ему что-то про правую и левую единицы. «Для меня, – вспоминал Черников, – тогда хорошо уже было то, что на множестве была единица, а он – и о правой, и о левой». В Перми Сергей Николаевич обнаружил, что ученый, с которым они вместе начинали, еще даже и не кандидат наук. Черников, который к тому времени успел подготовить несколько кандидатов физико-математических наук, принялся «воспитывать» нашего отца. До войны отец не успел написать диссертационное исследование, хотя результаты уже были. После войны он оформил диссертацию и послал ее на отзыв в Москву одному известному ученому, фамилию которого мы в семье прекрасно помним, но здесь не упоминаем. Работа пропала, ответа не

С.Н. Черников

было. Через некоторое время вышла объемная работа ученика того ученого по теме исследования отца, в которой целыми страницами повторялись его результаты безо всякого упоминания об истинном авторе. Пришлось брать другую тему и начинать все заново. В этом деле огромную помощь оказал Сергей Николаевич. Он был как бы «двигателем» на начальном этапе исследования. Мама часто с благодарностью повторяла, что если бы не Черников, то отец так, наверное, никогда бы и не защитился.

В семье Черниковых (а он женился в Перми на своей аспирантке, Нине Васильевне Баевой) было двое детей, сын и дочь, по возрасту они ближе к младшей из нас, Ирине. Дружили семьями, ходили друг к другу в гости. Черниковы делали детям незабываемые подарки. Например, запомнился набор «Юный химик», позволявший проводить настоящие химические опыты. Несколько раз семьи летом вместе выезжали отдыхать на Ласьву, купались, загорали. В начале 1960-х гг. Черниковы уехали из Перми. Много лет Сергей Николаевич жил и плодотворно работал в Киеве, был членом-корреспондентом Украинской Академии наук. Уехал он туда по приглашению своего ученика академика АН СССР В.М. Глушкова. Старшего поколения семей уже нет, но младшее до сих пор старается поддерживать отношения.

В.И. Рябухин

Владимир Иванович Рябухин – человек, близкий отцу по духу, хотя гораздо более молодой. Они сблизились во время написания Владимиром Ивановичем диссертации по истории теории пределов в русской и советской общеобразовательной школе. Отец оказывал молодому коллеге помощь своими советами. Семья Рябухиных прониклась большой благодарностью к Евгению Григорьевичу, постоянно подчеркивала свое уважение. Владимир Иванович был очень интересным человеком. Инвалид (после перенесенной в детстве болезни у него не действовали ноги), он был большим оптимистом и жизнелюбом. У него были любящая, заботливая жена Фаина Ивановна и двое детей. Владимир Иванович всеми способами старался расширить свой взгляд на мир, в том числе и чисто физически. У него всегда была самая современная техника: прекрасный магнитофон давал ему возможность слушать музыку, цветные слайды позволяли и зимой наслаждаться летними видами. Среди наших знакомых первыми цветной телевизор купили Рябухины. У Владимира Ивановича была машина с ручным управлением, которую он сам водил, и он вывозил на природу не только свою семью, но и нашу. Мы часто ходили друг к другу в гости, встречи всегда проходили интересно и весело. Владимир Иванович, как и отец, интересовался историей, но больше был склонен к краеведению.

Отец помог получить образование всем своим братьям и сестрам. Кроме сестры Нины, закончившей техникум, все окончили пединститут и стали преподавателями. Многие члены семьи Гониных – педагоги, учителя, преподаватели техникумов и вузов. Ниже перечислены представители трех поколений.

Мария Федоровна Гонина, мать Евгения Григорьевича. Работала учителем в школах Кировской (Вятской) и Пермской областей.

Евгений Григорьевич Гонин. 53 года работал в Пермском педагогическом институте, пройдя путь от ассистента до профессора.

Зоя Ивановна Гонина, жена Евгения Григорьевича. Работала в школах Пермской области и Перми.

Вера Григорьевна Гонина, сестра Евгения Григорьевича. Работала в школах Пермской области и Перми. Много лет была завучем пермской школы № 10.

Борис Григорьевич Гонин, брат Евгения Григорьевича. Преподавал физику и математику в школах и техникумах Перми, Пермской и Свердловской областей, а также в городе Цурюпинске Херсонской области.

Нина Ивановна Гонина, жена Бориса Григорьевича. Работала в школах и техникумах тех же населенных пунктов, что и Борис Григорьевич.

Лидия Григорьевна Поддубная (Семенова), сестра Евгения Григорьевича. Работала в школах Перми и других городов страны (Казахстан, Псковская область).

Николай Григорьевич Гонин, брат Евгения Григорьевича. Работал учителем в школах Перми и Краснокамска, был директором школы № 51 в Мотовилихе, преподавателем пермских вузов. Последнее место работы – кафедра математического анализа ПГПУ, доцент.

Галина Ивановна Гонина, жена Николая Григорьевича. Работала учителем математики в школах Перми.

Елена Евгеньевна Гонина, дочь Евгения Григорьевича. Более 35 лет работает на кафедре высшей математики Пермского технического университета, доцент.

Нина Васильевна Терехова (Семенова), дочь Лидии Григорьевны. Работала преподавателем в школе и техникуме в селе Зюкайка Пермской области.

Татьяна Николаевна Ложкина (Гонина), старшая дочь Николая Григорьевича. Работала преподавателем математики в вузах Перми.

Ольга Николаевна Гонина, средняя дочь Николая Григорьевича. Работала преподавателем музыки в городе Протвино (Подмосковье).

Семья была дружная. Старший брат был для всех непререкаемым авторитетом. Младшего брата Николая сестры считали маленьким даже тогда, когда он стал дедушкой. После войны вернувшиеся с фронта Борис и Николай жили в квартире Евгения; потом там остался студент Николай до своей женитьбы. Вместе слушали по радио репортажи Вадима Синявского с футбольных матчей, хрипловатый голос Леонида Утесова, звучащий с грампластинки. Братья и сестры старались собираться у нас в праздничные дни, иногда забегали во время демонстраций поесть вкусных пирожков, которые стряпала наша мама. А мы часто ездили на трамвае в Рабочий поселок навестить семью Николая Григорьевича – они жили в маленьком домике во дворе школы, где Николай с женой работали. Ездили мы и на Сталинский поселок к Нине Григорьевне.

Немного о привычках, вкусах и облике отца. Был он среднего роста, с темными в молодости, чуть волнистыми волосами, с голубыми глазами. Одевался всегда строго, костюмы предпочитал темно-серого цвета, галстуки – неяркие, рубашки – белые или голубые. Весной и осенью носил кепку, зимой – ушанку или меховую кепку, не носил курток, а только пальто. Вообще он считал, что красивая вещь (например, запонка) должна иметь строгую форму. Вкус у него был хороший, с ним можно было посоветоваться и о женских нарядах. В еде был неприхотлив за небольшим исключением: не переносил свеклу. В детстве он вытащил из печки и съел целый чугунок пареной свеклы, предназначенный для всей семьи. В результате до старости не ел ни борщи, ни винегреты. Конечно, всегда с удовольствием ел домашние пельмени и пироги. Зная это, мама старалась печь пироги каждые выходные. Вина он предпочитал хорошие, марочную мадеру, армянский коньяк. На рынке для семьи отец старался выбирать самые качественные фрукты и овощи, при возможности покупал хорошую рыбу.

Речь у отца была лаконичная и образная, он пользовался поговорками и присказками. Например, с детства он помнил стишок для запоминания слов с буквой «ять» – про «бедного беса», который «дал обет не делать бед». Реже он рассказывал стихотворение про алхимика для запоминания химических элементов. Многие ученики помнят его выражение: «Кушай, кумушка, девяту шанежку», которое он использовал, когда что-то неоправданно повторялось. Ему нравилось, что в этом выражении видна и прожорливая гостья, и скуповатая хозяйка.

Дочери Е.Г. Гонина с подругой. 1975 г.

Коллеги из Москвы вспоминали, что очень удивились, увидев провинциального математика Гонина у себя на факультете в период ужесточенного пропускного режима в МГУ им. М.В. Ломоносова. «Евгений Григорьевич, как это вы прошли без пропуска?» – «Попа и в рогоже видать», – ответил отец. Часто он упоминал такие выражения: «История учит, что история никого ничему не учит», «Бог создал небо и землю, а черт – Пермскую и Вятскую губернии». Об отношениях, сложившихся внутри некоторых семей, он иногда говорил: «Какой ни муж, а все-таки огородишко».

Отец жил высокой духовной жизнью, хотя хорошо ориентировался и в практических делах. В первые годы брака мама, посчитав профессию математика несколько оторванной от жизни, спросила отца: «Скажи, а бухгалтером ты смог бы работать?» Подумав, он ответил: «Смог бы». Иногда он давал неоценимые советы, например, никогда ничего не покупать в кредит (этого мы по возможности и придерживаемся). Сам же давал в долг, и многие этим пользовались, не всегда отдавая деньги вовремя.

Отец интересовался и политикой, переживал, когда в мире происходило что-нибудь негативное. Он не признавал никакой протекции, «блата», никогда не пользовался своими связями и известностью. Так, долго не мог получить благоустроенную квартиру: все время находились люди, которым «нужнее» была квартира в так называемом Доме ученых на Комсомольском проспекте, а также в других престижных зданиях, – и он уступал. Полученная им квартира на первом этаже «хрущевки» в районе Комсомольской площади оказалась неудачной, но отец никогда больше не пытался улучшить жилищные условия.

Ежедневно имея перед собой пример его постоянного труда, духовного совершенства, мы с сестрой получили на всю жизнь «прививку» от зависти, стяжательства, рвачества. Мы можем только восхищаться людьми талантливыми, трудолюбивыми, эрудированными – такими, каким в полной мере был наш отец.

ВОСПОМИНАНИЯ О МОЕМ ДЯДЕ

Татьяна Николаевна Ложкина

Мой отец Николай Григорьевич Гонин был младшим братом Евгения Григорьевича и даже жил несколько лет в его семье после возвращения с фронта, пока не женился. И папа, и мама были студентами-математиками Пермского педагогического института, оба учились у Евгения Григорьевича. Он на всю жизнь остался для них самым главным авторитетом. Вспоминаю раннее детство, разговоры родителей. Обсуждаются события, люди, встречи, строятся планы. Звучат имена, одно имя – Евгений – я отличаю среди других по неизменно уважительной и теплой интонации.

В детстве мы часто ездили в гости к дяде Жене в маленькую квартирку, расположенную в деревянном доме на Разгуляе. Порядки у них были строже, чем у нас дома; мы не шалили, чтобы не мешать взрослым читать: все Гонины читали газеты или книги. Зоя Ивановна, жена Евгения Григорьевича, называла это «избой-читальней». Однажды моя мама, Галина Ивановна, поехала в гости к старшим Гониным с моей новорожденной сестрой Ольгой (все звали ее Лялькой). В тот день мы так и не дождались маму с Лялькой: на людей, стоящих на трамвайной остановке, наехал грузовик. Многие тогда погибли, а мама упала на землю, прикрыв Ляльку своим телом. Пострадал только мамин нос – немного покривился. Евгений Григорьевич очень сочувствовал маме и радовался, что все обошлось.

Я росла, училась, оканчивала школу – и все эти годы видела отношение моего отца к брату. Звучало: «Надо посоветоваться с Евгением»; «Евгений сказал...»; «Интересно, что думает Евгений?». Он был для отца большим авторитетом, иногда только отец подшучивал над рассеянностью старшего брата. Особенно часто встречались братья в период, когда мой отец писал кандидатскую диссертацию: Евгений Григорьевич помог папе в выборе темы, консультировал его.

Когда я стала учиться в университете на мехмате, то почувствовала ауру дяди через общение с преподавателями. На первой сессии, почти на каждом экзамене, услышав мою фамилию – Гонина, – преподаватель спрашивал, не дочь ли я Евгения Григорьевича. Я отвечала: «Он мой дядя». Далее следовало удовлетворенное покачивание головой, кто-то просил передать привет, другие говорили хорошие слова о нем. Особенную силу его авторитета я почувствовала, когда уже на третьем курсе сдавала экзамен по дифференциальной геометрии. Принимал экзамен Иван Власович Цыганков. Пока мы готовились к ответу, он, по своему обыкновению, грыз орехи. Я недостаточно хорошо была подготовлена к экзамену. Когда я села отвечать, Иван Власович, просмотрев мои записи, попробовал слушать мой лепет и вдруг, бросив свои орехи, воскликнул: «Эх вы, а еще племянница Евгения Григорьевича!» После этого он не захотел продолжать слушать меня, поставив невысокую оценку. Я тогда подумала, что мои старшие двоюродные сестры Нина и Лена, учившиеся на мехмате раньше меня, наверняка постоянно должны были оправдывать высокие ожидания преподавателей.

ОН БЫЛ И ОСТАЕТСЯ МОИМ УЧИТЕЛЕМ

Алла Ефимовна Малых,
доктор физико-математических наук,
профессор, зав. кафедрой геометрии ПГПУ

Я окончила Николаевский государственный педагогический институт им. В.Г. Белинского и поехала работать учителем средней школы в районный центр Широкий Лан (Украина). Желая продолжить профессиональное и научное образование, самостоятельно прошла углубленную подготовку по геометрии – своему любимому предмету, стала готовиться к поступлению в аспирантуру по специальности «Геометрия и топология». Написала реферат «Эллиптическая геометрия Римана в тензорном изложении». Тему предложил руководитель аспирантуры Кишиневского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор Андрей Михайлович Заморзаев. Но в год моего поступления министерство перепрофилировало большинство специальностей для поступления в аспирантуру. Украина и Молдавия стали принимать на автоматику, кибернетику, информатику, бионику. Откладывать поступление на год я не стала и поехала в Смоленск, где в techинституте работал известный геометр – доктор физико-математических наук, профессор Борис Иванович Аргунов. Этот видный ученый, интеллигентный человек, ознакомившись с моим рефератом, похвалил его и предложил поступить к нему в аспирантуру на следующий год, так как в этом на единственное имевшееся место претендовала его студентка. Я объяснила, что ждать не могу. Тогда Борис Иванович посоветовал обратиться к Е.Г. Гонину, руководившему аспирантурой по геометрии в Перми.

Евгений Григорьевич доброжелательно встретил меня, выяснил уровень моих научных познаний не только в математике, но и в геометрии. Оценив материал реферата, он в целом отозвался о нем высоко и дал некоторые рекомендации.

Но и здесь на одно место по специальности претендовали три человека, из них двое закончили в тот год Пермский пединститут. Вступительные экзамены, однако, я сдала успешно и стала аспиранткой Е.Г. Гонина. Впоследствии он как-то обмолвился, что «пришлось запрашивать у Москвы» дополнительное место.

Пошли дни учебы и работы над диссертацией. Сама тематика исследования была для меня совершенно новой. Оказалось, что во всей стране этой темой занимались только в Перми.

Евгений Григорьевич осуществлял мудрое руководство. Сначала давал мне задания по овладению комбинаторным аппаратом исследования. Я изучала тогда структуру, теоретико-групповые свойства латинских квадратов различных порядков, проблему их ортогональности; конечные проективные плоскости, методы их описания, способы построения и др. Все было новым, интересным.

Я сразу же ощутила пристальное и ненавязчивое внимание со стороны Евгения Григорьевича. Довольно часто он приносил опубликованные статьи зарубежных ученых, посвященные решению близких проблем. После знакомства с материалами мы беседовали. Естественно, что эффективность работы над диссертационным исследованием происходила с переменным успехом. Меня тогда удивляла позиция научного руководителя. Если я не приходила к нему на консультацию, не говорила о возникших трудностях (а их на первых порах было хоть отбавляй), Евгений Григорьевич молчал и не обращал на меня внимания. Если же удавалось принести хоть сколько-нибудь значимые результаты, он давал новое задание и через день-два спрашивал: «А почему так мало?»

Мы, его аспиранты, принимали постоянное участие в работе научных конференций разных уровней. Помню свое первое выступление на одной из них, проходившей в Свердловске. На секции геометров среди многочисленных участников были пять или шесть учеников Евгения Григорьевича и он сам. После всех наших выступлений он взял слово, рассказал о результатах каждого, отметив, в частности, где находит применение общее направление исследований, выполненных в Перми. Как сейчас помню, в глазах присутствующих загорались огоньки искреннего интереса, мне даже показалось, что все они до некоторой степени завидуют нам. Да и мы сами были удивлены его выступлением. Он никогда прежде не говорил о том, что направление, которым мы занимались, – комбинаторные исследования, – начали применяться в создании помехоустойчивых кодов, обнаруживающих и корректирующих ошибки. Оно стало актуальным в связи с появлением первых искусственных спутников Земли, космических ракет.

Еще одно воспоминание – о том, как Е.Г. Гонин помогал оформлять результаты моих исследований: тезисы, доклады, статьи, рефераты. Кажется, все продумала, четко и математически грамотно изложила материал, сформулировала результат. Пришла к Евгению Григорьевичу показать статью. Он внимательно вчитывался в текст, порой задумываясь, а затем начинал по-своему его переделывать: изменял порядок слов в предложении, переставлял абзацы, менял пунктуационные знаки и т. д. Ошарашенная, я отправлялась переписывать и усовершенствовать работу. При следующей встрече многое повторялось... После третьего или четвертого посещения Евгений Григорьевич, читая, кивал головой, глубоко вздыхал, искал в боковых карманах что-то... Наконец, поставив отсутствующую, по его мнению, запятую своим остро отточенным шестигранным карандашом, удовлетворенно потирал руки, улыбался и говорил: «Пусть теперь отлежится». Как же впоследствии много значило для меня такое общение с ним!

Окончив аспирантуру с представлением кандидатской диссертации, я была оставлена в Пермском педагогическом институте на вновь созданной кафедре методики математики. Избранным направлением научных исследований продолжала заниматься. Правда, реже, чем раньше, беседовала с Евгением Григорьевичем. В процессе обсуждений интересующих нас вопросов я с некоторым удивлением выяснила, что его интересовали и вопросы истории комбинаторного анализа. Вспоминаю наш общий перевод с латинского языка двух трактатов великого Леонарда Эйлера. Обложившись словарями, от предложения к предложению мы реконструировали ход мысли ученого. Евгений Григорьевич от удовольствия, как всегда, потирал руки и улыбался.

Научное общение с Евгением Григорьевичем Гониным, предлагаемые им рефераты, статьи, книги и монографии зарубежных ученых, в которых содержались результаты последних достижений в области конечных геометрий, значительно обогащали меня, давали возможность видеть перспективы дальнейших исследований.

Называть себя учеником Евгения Григорьевича – большая честь. Он был удивительным человеком, яркой личностью, талантливым исследователем, добрым наставником. Он умел удивлять и восхищать студентов. Лекции Е.Г. Гонина были блестящие, эмоциональные по форме и научные по содержанию, не похожие одна на другую, они изобиловали проблемными вопросами, вызывали повышенный интерес у аспирантов и студентов.

Я благодарна судьбе за то, что она дала мне радость общения с таким учителем.

МОЙ НАСТАВНИК

Вера Ильинична Данилова,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры алгебры ПГПУ

Прежде чем зайти, подумайте о выходе…

Отчетливы воспоминания о первых днях сентября 1975 года. Мы, первокурсники, внимательно изучаем расписание занятий, к которым только что приступили. Тогда на первый курс математического факультета Пермского педагогического института было принято 150 человек, которых распределили на три потока, по две группы в каждом. Было очень интересно, какие дисциплины и в какой последовательности нам поставили в расписании, кто из преподавателей будет с нами работать. Особую гордость испытали мы, когда увидели, что курс аналитической геометрии закреплен за профессором Е.Г. Гониным – и только в нашем потоке. С нетерпением ждали встречи с профессором. И вот наступил долгожданный момент – лекция по геометрии. Открывается дверь в аудиторию, входит преподаватель и представляется: «Андреева Зинаида Ивановна»… Потом-то мы узнали, что Евгений Григорьевич совсем недавно перенес инфаркт, и поэтому вместо него пока будет другой педагог. Но так как наш поток был все-таки закреплен за Евгением Григорьевичем, в конце концов встреча состоялась. Профессор читал нам традиционные разделы геометрии, а на старших курсах – теорию вероятностей и элементы математической статистики, научные основы школьного курса математики, вел спецкурс, спецсеминар по геометрии.

Однажды, на экзамене по научным основам школьного курса математики, выслушав внимательно мой ответ, Евгений Григорьевич, комментируя отдельный фрагмент, произнес: «Ну что ж, разумно… Но я на лекции доказывал левый дистрибутивный закон, а вы в ответе привели правый». Для меня эти слова были как награда.

На протяжении двух лет Е.Г. Гонин был наставником нашей группы, а я – старостой, и потому встречались мы не только на занятиях. Я приходила на кафедру, чтобы побеседовать с ним. Его интересовало все о группе: текущие дела, настроение, успеваемость, сессионные задолженности, успехи в художественной самодеятельности, личные проблемы. Поражало, что интерес его был искренним. По мере возможности он помогал нам решать насущные вопросы.

Общаясь с Евгением Григорьевичем в течение семи лет, я не переставала удивляться его умению говорить на уровне, доступном собеседнику, будь это студент, лаборант, преподаватель, сотрудник, технический работник. Он был со всеми приветливый, уважительно относящийся к мнению окружающих и в то же время с очень стойкими, принципиальными позициями, касающимися каких-то морально-нравственных ситуаций. Невольно происходило «впитывание» такого стиля и формирование подобного собственного поведения.

Часто, пробегая из корпуса в корпус мимо окон библиотеки, мы, студенты, видели, как Евгений Григорьевич сидит в небольшом преподавательском читальном зале, склонившись над книгой или журналом, и делает заметки маленьким карандашиком в своем блокноте. И это систематическое и увлеченное занятие, то, с каким удовольствием он изучал литературу, также было для нас примером неустанной работы над собой.

Когда на третьем курсе пришло время выбирать тему курсового проекта, судьбе было угодно, чтобы моим научным руководителем и наставником стал Е.Г. Гонин. Вот тогда, приступив к работе, связанной с программированием решений комбинаторных задач, впервые я услышала от него фразу: «Прежде чем зайти, подумайте о выходе». Конечно же, она была связана прежде всего с искусством составления подпрограмм внесения и снятия запретов выбора элемента, так необходимых для ускорения процесса решения задачи, но оказалась для меня в некотором смысле его напутствием на всю жизнь. Каждый раз, когда приходится принимать решение в непростой жизненной ситуации, вспоминаются мне эти его слова, и, чаще всего после размышлений, я делаю верный выбор.

СУДЬБОЮ ПОСЛАННЫЙ УЧИТЕЛЬ

Анна Николаевна Пехлецкая,
кандидат педагогических наук,
доцент кафедры алгебры ПГПУ

Сколько бы лет ни прошло, а память о Евгении Григорьевиче Гонине не стирается: каждое воспоминание о нем будит образ, от которого светлеет на душе, теплеет на сердце и возникают «картинки» заседаний кафедры, семинаров по онтодидактике, поездок на научные конференции… Евгений Григорьевич был для нас не только руководителем, учителем или наставником, но и ангелом-хранителем. Меня охватывало чувство защищенности, которое испытываешь при отеческой заботе.

На физико-математический факультет ПГПИ я поступила в 1961 г., после года работы учителем математики в 5–7-х классах поселковой школы Гайнского района Пермской области. Уже в первые месяцы обучения на факультете мы благоговейно слушали старшекурсников, сообщивших нам о том, что лекции по высшей геометрии будет читать «сам» Гонин. А в конце второго курса Нина Ефимовна Домошницкая, читавшая нам лекции по элементарной арифметике, после экзамена представила меня несколько удивленному и не меньше меня смущенному Евгению Григорьевичу. Тогда же в течение нескольких минут и была определена моя научно-исследовательская работа на несколько последующих лет: Евгений Григорьевич «нарисовал» на своей ладони числовой квадрат шестого порядка и сказал, что хорошо бы заняться так называемыми латинскими квадратами.

Возвращаясь мысленно к тому времени, я не перестаю удивляться необыкновенной силе притяжения, которая заставляла меня заниматься абстрактными вопросами типа «Приведение латинских квадратов шестого порядка к стандартному виду» или «Группы автоморфизмов латинских квадратов порядка 6». Я тратила уйму времени, отказываясь порой от самых «молодежных» дел, только потому, что мне хотелось порадовать Учителя очередным результатом, поскольку любая удача была для него праздником: он радовался, как ребенок, больше студента или аспиранта.

Вообще же именно в годы обучения в Пермском пединституте, когда приходилось часто общаться со специалистами-преподавателями разного уровня и всевозможных дисциплин, пришло осознание того, что мне крупно повезло: Е.Г. Гонин – это, безусловно, судьбою посланный Учитель!

На факультете Евгений Григорьевич имел отношение ко всему: непосредственному преподаванию, руководству аспирантами, организации здорового образа жизни, консультациям для специалистов других дисциплин. Все сферы деятельности преподавателей и студентов направлял он.

Возможно, я преувеличиваю, но Евгений Григорьевич был единственным, кто ставил цель самоактуализации своих учеников-аспирантов, и вовсе не для того, чтобы вложить как можно больше знаний в головы их, расходуя на это как можно меньше времени, усилий и т. п. Он понимал, что школьная система обучения, да и вузовская, настроена не на развитие оригинальности мышления, а на внешнее научение. Учащиеся повторяют вызубренное без глубокого понимания того, о чем говорят. Творчество в школах всегда было наказуемо, а студенческая среда жила по законам азартной игры «сдал – не сдал».

На IV курсе, узнав о том, что ученый совет факультета рекомендовал меня для поступления в аспирантуру к Е.Г. Гонину, я пришла к нему на прием, чтобы высказать свои сомнения: я не считала себя слишком одаренной в математике и вообще после окончания средней школы собиралась поступать на психологический или филологический факультет. Тогда в беседе со мной Евгений Григорьевич высказал три тезиса: занимаясь интересным делом, можно попытаться найти себя; не оставлять интерес к психологии, тем более, что в институте существует школа Вольфа Соломоновича Мерлина; а грамотность и начитанность еще никому не мешали.

Этим он определил мою дальнейшую жизнь.

Оставшись на кафедре алгебры и геометрии, я под руководством Евгения Григорьевича стала работать над психолого-педагогической тематикой, которой он интересовался не меньше, чем математической.

Е.Г. Гонин был не только предан истине, справедливости, добру, красоте, цельности, простоте, вечным ценностям бытия, но и являлся непосредственным носителем их. Он понимал, что конечная цель образования и воспитания – помочь человеку (студенту, аспиранту или преподавателю) стать хорошим специалистом. Евгений Григорьевич, говоря современным языком, проповедовал на факультете принцип синергии на всех уровнях образования, воспитания и социальных явлений. Он был эталоном «полной человечности», включающей такие характеристики, как способность к абстрагированию, владение языками, представление о вечных ценностях. У него было чувство ответственности перед другими, он помогал ученикам осознать необходимость быть открытым, скромным, непосредственным, готовым допускать ошибки, способным жить в непрерывно изменяющемся мире.

Е.Г. Гонин помогал студентам, аспирантам и преподавателям стать настолько хорошими, насколько каждый из них был готов к этому. Он редко ставил двойки на экзаменах, но это не значило, что он с легкостью дарил хорошие оценки: любое общение со студентами и аспирантами было творческим. Однажды, будучи аспиранткой, я вынуждена была зайти в аудиторию, где Евгений Григорьевич принимал экзамен у студентов, чтобы получить его подпись на какой-то бумаге. В это время он комментировал ответ студентки: «Говорили долго, много, но совсем непонятно». Он грустно раздумывал... Но когда студентка, пообещав разобраться в материале, спросила, через сколько дней можно пересдать экзамен, Евгений Григорьевич повеселел и выразил надежду, что студентка справится.

У Е.Г. Гонина был свой, сугубо-индивидуальный смысловой «аппарат» контроля и оценки знаний. Для меня, например, его «разумно» значило многое: руководство к действию, оценка выполненного, наличие ориентиров поиска, моральный стимул, призыв к творчеству. Думается, что и руководство молодыми учеными и аспирантами он воспринимал не совсем по тем правилам, которые диктовали формальные предписания сверху. Его работа с аспирантами и преподавателями включала такие психолого-воспитательные факторы: установка на творчество, ощущение достижения, забота о здоровье, возможность экспериментировать. Он видел и принимал людей такими, какими они были, и создавал ауру плодотворной работы, опираясь на индивидуальные способности каждого.

Е.Г. Гонин никогда не занимался псевдопроблемами, но серьезные задачи образования, связанные с дисциплинами математического цикла, он не просто осознавал, но и ощущал. Он как бы нацеливался на новый тип образования и воспитания, формирующего творческого специалиста, самостоятельного, доверяющего себе и... здорового физически. Он рассматривал образование не просто как процесс обучения, а как процесс воспитания характера и формирования личности. Показателен тот факт, что Евгений Григорьевич безошибочно определял творческих людей и с удовольствием работал с ними. Так было, когда в 1965 г. из Николаева приехала поступать к нему в аспирантуру А.Е. Малых. Уже с первых дней общения с нею он интересовался, сколькими иностранными языками она владеет, какие дисциплины ей нравятся, чем она хотела бы заниматься... До сих пор помню, как удивлялся и восхищался Евгений Григорьевич тем, что у Аллы Ефимовны I спортивный разряд по стрельбе из мелкокалиберной винтовки и что она чемпион и призер Украины по спортивной гимнастике, фехтованию и мастер по радиоспорту. Ее удивительные работоспособность и трудолюбие, неиссякаемая жажда знаний, наряду с такими чертами характера, как скромность, доброта, чуткость, ее творческий потенциал были для Евгения Григорьевича достаточным основанием уже тогда надеяться, что А.Е. Малых достигнет научных высот. Жизнь это подтвердила. В настоящее время Алла Ефимовна Малых имеет все мыслимые научные статусы, она единственная женщина в Пермском крае со степенью доктора физико-математических наук. Сфера научных интересов профессора А.Е. Малых чрезвычайно широка. Под ее руководством защищено четырнадцать диссертаций. Ее школа по изучению истории комбинаторной математики известна не только в России, но и во многих зарубежных странах. У кабинета профессора А.Е. Малых выстраивается длинная очередь студентов, желающих работать под ее руководством. Она не ропщет, считая, что приблизительно так вел бы себя Евгений Григорьевич Гонин.

Возвращаясь к научной школе Е.Г. Гонина, стоит задать вопрос: какой школе? Сугубо математической, связанной с геометрией, алгеброй и арифметикой? Или школе подготовки преподавателей математических дисциплин, связанной с методикой преподавания математики?

Занятия латинскими квадратами во время обучения в институте и аспирантуре под руководством Е.Г. Гонина привели меня к «открытию» о возможном моделировании латинских квадратов своеобразными графическими схемами. Евгений Григорьевич сразу оценил эффективность моделирования и очень радовался тому, что строки (столбцы) квадрата можно изобразить точками (вершинами), а связи между строками (столбцами) – отрезками линий разного вида (ребрами). Именно использование графических моделей латинских квадратов помогло оптимизировать приведение квадратов порядка 6 к стандартному виду. В дальнейшем, благодаря подключению к этому исследованию А.Е. Малых, нам удалось опубликовать совместную статью.

Психолого-педагогическая тематика моего исследования «Сложность – трудность учебного материала по математике» явилась продолжением (или результатом) моей учебно-педагогической деятельности на кафедре алгебры и геометрии (затем алгебры) под руководством Е.Г. Гонина. Я была еще ассистентом, когда стала женой И.Д. Пехлецкого, заведующего кафедрой математического анализа. Я часто консультировалась у Евгения Григорьевича по поводу отбора материала для занятий, а также соответствующей методики преподавания и других вопросов учебного плана. Поскольку рабочие столы заведующих кафедрами И.Д. Пехлецкого и Е.Г. Гонина были в одном кабинете, то любое мое обращение к Евгению Григорьевичу было известно Игорю Дмитриевичу, так как они постоянно общались друг с другом.

В сфере психологических исследований тех лет модной была тематика, связанная с формированием индивидуального стиля деятельности человека. Кроме того, все психологические эксперименты проводились с использованием математических методов обработки данных. Игорь Дмитриевич и Евгений Григорьевич были в центре внимания специалистов – психологов, биологов, педагогов нашего института – как консультанты по вопросам применения математики в научных исследованиях.

Я была старостой научно-методического семинара по онтодидактике, которым руководил Евгений Григорьевич. Однажды, обсуждая с Е.Г. Гониным материал очередного доклада, я посетовала на то, что не хватает наглядности при оценке сложности текста. Вот если бы можно было представить текст в виде какой-либо «картинки» типа графа? Этот момент я запомнила навсегда: лицо Евгения Григорьевича озарилось! Он какое-то время смотрел в сторону, а затем с легкой улыбкой спросил: «А почему бы и нет?» Уже на следующий день я принесла несколько моделей – текстов в виде обобщенных графов. Обсуждение возможностей моделирования математических текстов, в котором принимал участие и Игорь Дмитриевич, привело к варианту построения модели, аналогичной графу – связей латинского квадрата.

Вся дальнейшая работа вылилась в масштабный поток экспериментов, предпринятых в нескольких школах Перми и на факультете. Итогом этого исследования стал общий вывод: учет параметров сложности значительно расширяет возможности использования всего богатого арсенала педагогических и методических средств для повышения эффективности учебного процесса; а моделирование структуры учебных текстов позволяет выделить объективные характеристики с точки зрения количества и качества составляющих текст элементов и связей. Это направление продолжало интенсивно развиваться уже под руководством И.Д. Пехлецкого. Он создал научную школу из студентов, аспирантов, преподавателей, изучающих различные аспекты аппарата дидактических исследований. Думается, что научная школа И.Д. Пехлецкого была сформирована в результате генерирования идей, опыта, мудрости в тесном общении с Евгением Григорьевичем Гониным.

Е.Г. Гонин имел безупречный авторитет среди ученых самых разных научных сфер. Отзывы о нем как об ученом широчайшего диапазона были настолько восторженными, что даже статус его ученика имел особый вес в любой научной аудитории.

Я готовилась защищать кандидатскую диссертацию. Мой руководитель, а им был Евгений Григорьевич, сам увлекся проблемами методологического анализа обучения, выдвигал гипотезы для построения теории «сложности – трудности» в учебном процессе. Предстояло подыскать место защиты в Санкт-Петербурге (тогда Ленинграде). Игорь Дмитриевич посоветовал обратиться в университет, на психологический факультет. Я очень боялась, что там, не зная Евгения Григорьевича, могут отказать и мне, его ученице. Но Нина Васильевна Кузьмина, заведующая кафедрой психологической педагогики, доктор психологических наук, профессор, к которой я обратилась с просьбой о рассмотрении диссертации, взглянув на фамилию Гонина, воскликнула, что он является автором учебника «Теоретическая арифметика» и референтом многих научных статей в РЖ «Математика». Она тут же согласилась помочь мне интерпретировать материал диссертации в соответствии с требованиями положений по психологии аттестационной комиссии.

Возвратившись в Пермь, я поделилась с Евгением Григорьевичем своими страхами о целесообразности «психологизации» диссертации. Он коротко заметил: «Установки Кузьминой разумны, и я согласен на такое сотрудничество». Я успешно защитилась 13 февраля 1976 г. Научными руководителями были: доктор психологических наук, профессор Н.В. Кузьмина и кандидат физико-математических наук, профессор Е.Г. Гонин. После защиты диссертации я начала внедрять конкретные результаты своего исследования в практику вузовского преподавания.

В 1979 г. я была председателем предметной комиссии по математике для поступающих на математический, физический факультеты и факультет начальных классов. Мне удалось осуществить эксперимент, связанный с профессиональной направленностью вступительных экзаменов. Идея эксперимента заключалась в попытке предоставить абитуриентам возможность проявить свои педагогические способности на вступительном экзамене по математике. Традиционная форма экзамена и содержание программного учебного материала были полностью сохранены, но в каждый билет устного экзамена был включен четвертый вопрос. Абитуриенту предлагалось представить себя в роли учителя и объяснить решение задачи, как это, по его мнению, следовало сделать для школьников соответствующего класса. Эксперимент прошел весьма успешно. А когда поступившим первокурсникам была предложена анкета с просьбой поделиться впечатлениями о вступительных экзаменах по математике и, в частности, о целесообразности включения в билеты вопросов профессионального характера, студенты единодушно высказались за включение в билеты таких вопросов.

Я оформила материалы эксперимента в виде статьи для журнала «Математика в школе». И.Д. Пехлецкий категорически возражал против обнародования таких «мелочей». Мои сомнения, уместно или нет посылать статью, разрешил Евгений Григорьевич: «Было бы неразумно не поделиться идеей хорошего опыта с педагогической общественностью других вузов. Справедливости ради полезно опубликовать материалы эксперимента». Статью напечатали в журнале «Математика в школе» (1980, №3).

На протяжении всей жизни Евгений Григорьевич помогал своим ученикам достичь совершенства в том, чем они уже владели. Научно-профессиональный багаж, сформированный Е.Г. Гониным в сознании учеников, стал золотым фондом и основным ресурсом в кадровой составляющей преподавательского состава на факультете. Большая часть преподавателей – это непосредственные ученики Е.Г. Гонина: Ю.Н. Зверева, Л.И. Истомина, Т.М. Соромотина, И.С. Цай, Л.Г. Ярославцева, Л.Я. Панкратова, А.Е. Малых, А.Н. Пехлецкая, В.Г. Алябьева, – а также те, кто были студентами либо аспирантами его учеников: В.И. Данилова, Л.Г. Недре, Л.П. Латышева, Г.Н. Васильева, М.С. Ананьева, И.Н. Власова, И.В. Мусихина, И.В. Косолапова, О.Д. Угольникова и др.

И еще об одном необходимо сказать: о духовной составляющей Евгения Григорьевича. Он искренне верил в непреходящую силу искусства, изучал и знал культуру и национальные традиции, он поощрял все проявления художественной самодеятельности студентов и преподавателей, был активным участником театрализованных представлений с математическим уклоном. Мне иногда кажется, что на праздничные вечера Е.Г. Гонин приходил, чтобы расширить границы привычного мира. Он сознавал важность сплоченности и единства на пути духовной эволюции человека, способного к созиданию.

ОЛИЦЕТВОРЕНИЕ НАСТОЯЩЕГО ПРОФЕССОРА

Вера Петровна Краснощекова,
доцент кафедры методики преподавания математики ПГПУ

Евгений Григорьевич для меня был олицетворением настоящего профессора: седой, степенный, основательный, увлеченный, мудрый. Он размышлял у доски, читая лекцию, вовлекал нас, студентов, в эти размышления: «А что, если пойти таким путем, что же получится?» Отойдет от доски, посмотрит со стороны на записи, а потом искренне удивится тому, что получилось. Негромкий, спокойный голос вел нас за ходом его мысли. Ровный, убористый почерк на доске, белые от мела руки, а то и костюм – все это Евгений Григорьевич…

ОН БЫЛ УЧИТЕЛЬ УЧИТЕЛЕЙ

Татьяна Толстикова (Фатюнина),
выпускница 1979 г., преподаватель математики факультета СПО института железнодорожного транспорта
Ольга Толстикова (Беркутова),
выпускница 1983 г., учитель математики и технологии МОУ СОШ № 140

Мы, бывшие студентки ПГПИ, хорошо запомнили занятия профессора Е.Г. Гонина, который читал у нас курс геометрии. На своих лекциях он так увлекался доказательством теорем, что порой заканчивал их весь в мелу. У него была очень интересная привычка: отойдя от доски, приложить указательный палец к лицу, в задумчивости продолжая доказательство теоремы. Бывало, сотрет все с доски и начинает доказывать эту же теорему другим способом…

Только со временем мы поняли ценность метода доказательства несколькими способами одного и того же утверждения.

Вспоминается также его отношение к студентам во время сессии. На экзаменах он не позволял себе перебивать отвечающих, а увидев интересный ход доказательства, вместе со студентом доводил ответ до логического завершения.

В жизни каждого выпускника математического факультета Пермского педагогического института сыграло важную роль обучение у Евгения Григорьевича Гонина. Мы благодарны за привитую нам любовь к математике.

ЕГО НАСЛЕДИЕ БЕСЦЕННО

Ирина Сергеевна Цай,
доцент кафедры методики преподавания математики ПГПУ

В памяти на всю жизнь сохранилась удивительная тактичность Евгения Григорьевича Гонина. Вот один эпизод. Я пришла работать в институт из школы в 1969 г. Мне сразу же предложили выступить перед учителями с темой «Решение тригонометрических уравнений». Первое публичное выступление перед столь высокой, авторитетной аудиторией, волнение – себя не слышишь. Затем были вопросы. После одного из них Евгений Григорьевич, почувствовав мое замешательство и не дожидаясь ответа, сразу же пояснил, что я оговорилась (вместо союза «или» я произнесла «и»). Его тактичная, тихая, спокойная реплика запомнилась мне на всю жизнь.

Пожалуй, не было ни одного вопроса школьного курса математики, который не интересовал бы Е.Г. Гонина. Традиционно сложной в теоретическом и методическом планах была тема, относящаяся к теории пределов. В архивах Евгения Григорьевича есть материалы, которые свидетельствуют о том, что он возвращался к этой теме неоднократно, каждый раз рассматривая ее с различных точек зрения. В нашем распоряжении имеются следующие материалы: преподавание теории пределов в школе; теория пределов (фрагменты); вариант изложения теории пределов (без заголовка); числовые последовательности и пределы (пособие для учащихся 9-х классов); числовые системы (по-видимому, подготовлено к публикации). Все материалы относятся примерно к середине 1960-х гг.

В первой статье Евгений Григорьевич высказал свои соображения о причинах неудовлетворительных знаний выпускников, формального изложения материала. К ним относятся, безусловно, объективная логическая сложность понятия предела, изолированное положение основ этой теории в школьном курсе математики. Он предлагал свои методические рекомендации построения теории пределов.

Анализ статей Евгения Григорьевича показывает, что он пытался найти наиболее приемлемое изложение материала для учащихся: с одной стороны, достаточно строгое, без логических пробелов, чтобы школьники были убеждены в точности и надежности выводов, а с другой – руководствуясь тем, что изложение должно быть доступным для них. Интересно заметить, что термин «бесконечно-малая» он предлагал заменить на «бесконечно-уменьшающаяся», подчеркивая тем самым переменность рассматриваемой величины.

В статье без названия Евгений Григорьевич изложил содержание темы «Теория пределов». В нее включены вопросы: основные свойства числовых неравенств; абсолютная величина числа, а также основной принцип, который будет использован в дальнейшем для доказательства ряда теорем. Он состоит в том, что единственным неотрицательным числом, меньшим любого положительного числа, является 0.

Затем следуют: лемма о подобии треугольников, теорема о площади треугольника, бесконечные последовательности; бесконечно увеличивающиеся (уменьшающиеся) величины, их свойства. Наконец, вводилось определение предела последовательности: постоянное число называется пределом последовательности, если разность между общим членом последовательности и этим числом бесконечно уменьшается; доказывалась его единственность, рассматривались теоремы о пределах. К числу важных вопросов относились: бесконечное увеличение и уменьшение членов прогрессий, число, определяемое бесконечной десятичной дробью, длины окружности и дуги, площадь круга. Все теоремы строго доказаны.

В 1972 г. идеи Евгения Григорьевича легли в основу экспериментальных материалов для учащихся 9-х классов по теме «Числовые последовательности и пределы». В них введено оригинальное понятие «гаранта», сформулированы его свойства. С помощью этого понятия дано определение бесконечно убывающего члена числовой последовательности, сформулированы свойства бесконечно уменьшающихся величин, дано определение предела последовательности, доказана единственность предела, теоремы о пределах, теорема Вейерштрасса о существовании предела. В качестве приложений рассмотрен вопрос о длине окружности и площади круга.

Все материалы прошли апробирование в 9-х классах средней школы № 21, где преподавателем математики в то время был заслуженный учитель Российской Федерации Григорий Иванович Уткин. Практика показала, что предложенная Е.Г. Гониным методика изложения теории пределов числовых последовательностей вызвала интерес учителя, а учащиеся успешно справились с этим сложным разделом школьной программы.

К сожалению, материалы не были опубликованы и остались в ротапринтном варианте в Пермском государственном педагогическом институте. Интересно отметить некоторые выдержки из этой работы Евгения Григорьевича. Прежде всего, понятие «гаранта»: если все члены последовательности, начиная с некоторого номера, подчиняются какому-либо требованию, то говорят, что это требование гарантируется. Число (номер) N, начиная с которого оно выполняется, называется *гарантом*. Свойства гарантов:

– любое число N_1, большее гаранта N некоторого требования, также является гарантом;

– если гарантируется выполнение первого условия (требования) и гарантируется выполнение второго условия (требования), то гарантируется выполнение обоих условий (требований). Отсюда вытекает определение предела последовательности: постоянное число a называется пределом последовательности x_n, если для любого $\varepsilon > 0$ гарантируется выполнение неравенства $|x_n - a| < \varepsilon$.

ОН ОПЕРЕДИЛ СВОЕ ВРЕМЯ

Людмила Георгиевна Ярославцева,
доцент кафедры методики преподавания математики ПГПУ

Лекции Евгения Григорьевича были всегда содержательными и интересными, читал он их тихим голосом, но с изумительным мастерством. Изложение материала всегда было точным, ярким, обоснованным.

К нему приходили консультироваться коллеги с разных кафедр: биологи, филологи, преподаватели кафедры физвоспитания и др. Будучи аспиранткой, я обращалась к нему по вопросам своего научного исследования «Бинарные отношения в школьном курсе геометрии». Беседы с ним всегда были интересными, познавательными. Он восхищал своим интеллектом, добротой, участливым отношением, интеллигентностью, мягкостью, точностью суждений.

У него было чему учиться.

Сохранился протокол выступления Евгения Григорьевича Гонина на IX конференции учителей, окончивших физико-математический факультет (28–30 марта 1974 г.). Из его содержания следует, что уже тогда Е.Г. Гонин предлагал использовать в процессе обучения задачи и алгоритмы, назвав их *шаблонами*:

«Решение любой задачи требует творческого подхода, даже если она решается по формуле. Деление деятельности на творческую и шаблонную не является четким, так как имеется много промежуточных видов деятельности. Какие-то элементы задачи требуют творческого подхода, а некоторые характеризуются шаблонными приемами работы.

Сейчас обращается внимание на такой вид деятельности ученика, когда он постоянно должен находиться в ситуации поиска. Однако следует установить равновесие между шаблонными и творческими видами деятельности. В выступлении я более подробно буду говорить о шаблонах при решении задач.

Различают несколько видов шаблонной деятельности. Учитель и ученик должны знать целый ряд алгоритмов: таблицы сложения и умножения, алгоритмы действий с дробями (обыкновенными, десятичными), алгоритмы деления и т. д. При изучении алгебры ученики снова встречаются с алгоритмами. В высшей математике имеются алгоритмы интегрирования, дифференцирования, оперирования с рядами… Другими словами, человек должен знать и освоить в процессе обучения много алгоритмов.

Кроме алгоритмов, существует множество различных методов и приемов решения задач. К последним можно отнести деление отрезка на равные части, построения: перпендикуляра к прямой, параллельных прямых, равных углов, касательной к окружности и др.

Кроме того, нужно знать целый ряд методов: геометрических мест точек, геометрических преобразований, алгебраический метод. Все они помогают свести решение задачи к определенным алгоритмам. Суть самого метода ученик должен знать, а также понимать, в каком случае его применение наиболее рационально. Затруднение в решении задачи на построение в основном связано с плохим знанием этих методов.

Приемов, которые не являются алгоритмами, также много. В школьном курсе математики к ним относятся: тождественные преобразования выражений, составление уравнения по условию задачи, приемы решения задач на построение и др.

Сам процесс творчества идет успешнее, если сформировано умение пользования шаблонами. У разных авторов учебных пособий для школьников раскрываются приемы пользования шаблонами в творческой деятельности. Примером яркого описания этого вида деятельности является книга Д. Пойа «Как решать задачу».

Усвоение шаблонных приемов и их применение в определенных ситуациях – это шаблон высшей марки. Знание шаблонов необходимо для успешного решения задач. С другой стороны, знакомство с большим количеством шаблонов опасно, а небольшое их число затрудняет решение сложных задач.

Основные шаблонные приемы должны быть твердо усвоены школьниками. Само обучение шаблонам должно быть творческим. На ярких примерах следует показать необходимость знания их. Для решения некоторых задач нужно показать два-три приема и сравнить их по эффективности использования при решении конкретной задачи.

В процессе усвоения шаблонов необходимо требовать их обоснование. Следует постоянно повторять шаблоны и регулярно их использовать. При решении задач, опираясь на шаблоны, выполняются творческие операции.

Сами шаблонные задачи также решаются с опорой на другие.

Некоторые задачи полезно решать, используя различные шаблоны и умея аргументировать их применение. Развитие творческой деятельности должно быть тесно связано с усвоением шаблонов. Справедливо и обратное».

Мысли ученого намного опередили его время. Интерес к шаблонам возник в самом начале XXI в. Только теперь одни называют такие задачи опорными, а другие – ключевыми.

Часть пятая

ИЗБРАННЫЕ НАУЧНЫЕ ТРУДЫ ЕВГЕНИЯ ГРИГОРЬЕВИЧА ГОНИНА

Под научной редакцией доктора физико-математических наук, профессора, зав. кафедрой геометрии ПГПУ

Аллы Ефимовны Малых

В эту часть книги вошли работы Е.Г. Гонина, ставшие еще при его жизни редкостью. В нее включены: исследование «Метод поэтапных отождествлений», статьи «О плоскостной аксиоме расположения проективной геометрии», «Изложение некоторых нетрадиционных разделов курса геометрии», опубликованные в «Методических рекомендациях по преподаванию геометрии в педагогических институтах РСФСР» (1974); учебное пособие «Конечные проективные плоскости». Эти работы являются значимыми в научном и научно-методическом наследии Е.Г. Гонина.

Разработка и апробация метода поэтапных отождествлений позволила осуществить новый подход к решению актуальной проблемы перечисления комбинаторных объектов. Дело в том, что с повышением порядка изучаемых конкретных конечных геометрических структур число возможных вариантов возрастает с огромной скоростью. Метод оказался также эффективным при нахождении неизоморфных решений комбинаторных задач. Благодаря ему аспиранты Е.Г. Гонина и сотрудники смогли получить значимые результаты в своих исследованиях.

В статье «О плоскостной аксиоме расположения проективной геометрии» разработана система аксиом, не противоречащая условию конечности плоскости, в качестве примера рассмотрено упорядочение проективной плоскости порядка 5 и указано, что аналогичным путем можно упорядочить все плоскости, порядок которых выражается простым числом вида $6n - 1$, где n – натуральное число. Применение метода позволило решить задачу проективного упорядочения прямой. Ученики Е.Г. Гонина, опираясь на этот метод, установили, что, аналитически упорядочив конечную прямую n-го порядка, можно аналитически упорядочить конечную дезаргову плоскость и конечное m-мерное пространство этого же порядка.

В «Изложении некоторых нетрадиционных разделов курса геометрии» Е.Г. Гонин представил вариант чтения раздела «Геометрические преобразования». В основу классификации линейных преобразований положено число инвариантных элементов. Подробно представлена аффинная группа преобразований плоскости, указана ее структура. Рассмотрены аффинное и евклидово n-мерные пространства и аффинные многомерные пространства. В 1970-х гг. не было единых учебных программ, утвержденных Министерством просвещения РСФСР. Общий взгляд на структуру изложения основных тем устанавливался в процессе обсуждения на республиканских научно-методических конференциях. Вариант изложения учебной программы, предложенный Е.Г. Гониным, был одобрен и рекомендован министерством к внедрению.

Наконец, учебное пособие «Конечные проективные плоскости» явилось первой и успешной попыткой внедрения в процесс обучения студентов передовых идей и полученных научных результатов, касающихся конечных геометрий. Все это было новым и разительно отличалось от тематики установившихся вузовских курсов. После Е.Г. Гонина такие курсы сначала стали читать его ученики, а затем и преподаватели других вузов во многих городах нашей страны.

1. МЕТОД ПОЭТАПНЫХ ОТОЖДЕСТВЛЕНИЙ

1.1. Группы подстановок и классы эквивалентности

Взаимно однозначное отображение множества M на множество N будем называть *преобразованием* M в N и обозначать через f, g, h, ...; при этом $f(a)$ – *образ элемента* a, $a \in M$.

Преобразование в общем случае задается некоторым правилом, иногда его удается выразить формулой. Если M и N – конечные множества, то преобразование можно задать таблицей.

Преобразование множества M в себя задает на M некоторое бинарное соотношение, связывающее элемент a с элементом b, если и только если $f(a) = b$. Поэтому множество M с таким преобразованием можно рассматривать как ориентированный граф.

Преобразования конечного множества M в себя называются также подстановками. Подстановки в этих случаях удобно задавать циклами; при этом элемент, сохраняемый подстановкой, образует цикл из одного элемента (одночленный цикл). Транспозиция, входящая в состав подстановки, дает цикл из двух элементов (двучленный цикл) и т. д. В графе подстановки каждому циклу, входящему в ее описание, соответствует связная компонента. На рисунке графа r-членный цикл – изображается ориентированным многоугольником, если $r > 2$; двучленный цикл изображается парой точек, соединенных двумя противоположно ориентированными отрезками, их целесообразно заменить одним неориентированным отрезком; одночленный цикл изображается точкой с петлей, которую также можно не ориентировать.

Отображение, обратное преобразованию f множества M в N, *есть некоторое преобразование N* в M, оно обозначается через f^{-1}. *Произведение преобразования множества M* в N на *преобразование g множества N* в P *есть некоторое преобразование M* в P. Будем обозначать его посредством gf, тогда для $\forall a \in M$ имеет место

$$(gf)(a) = g(f(a)). \tag{1.1}$$

Множество S всех преобразований множества M в себя является *группой относительно умножения*, так как:

– умножение преобразований строго однозначно (т. е. всегда выполнимо и однозначно) и ассоциативно;

– роль единичного элемента играет тождественное преобразование e;

– для каждого преобразования f существует обратное преобразование f^{-1}, такое, что $ff^{-1} = f^{-1}f = e$.

Если множество M конечно, то эта группа называется *симметрической* и обозначается S_n, где $n = |M|$ и имеет порядок $n!$.

Любая группа преобразований множества M в себя является подгруппой группы S_n. Поэтому для того, чтобы некоторое множество G преобразований данного множества M в себя было группой, достаточно выполнение двух условий:

1) произведение любых двух преобразований, принадлежащих G, также принадлежит G;

2) преобразование, обратное некоторому преобразованию, принадлежащему G, также принадлежит G.

Если множество M конечно, то достаточно выполнения условия 1), так как из него следует, что G есть конечная полугруппа с сокращениями, а такая полугруппа является группой. Таким образом, *множество G подстановок множества M является группой, если и только если оно замкнуто относительно умножения.*

Из последнего утверждения следует, что подмножество H группы G подстановок множества M является подгруппой группы G, если и только если H замкнуто относительно умножения. Тривиальными подгруппами группы G являются $E = \{e\}$ и сама группа G.

Для каждого множества B подстановок, принадлежащих группе G, существует минимальная подгруппа, содержащая B. Она состоит из всех произведений элементов B (допускается повторение множителей) и называется группой, *порожденной множеством* B; она обозначается через $<B>$. Если множество B задано перечислением его элементов, то фигурные скобки в обозначении B опускаются; например, группа, порожденная множеством $\{f, g\}$, обозначается через $<f, g>$. Элементы множества B называются *порождающими элементами группы* $<B>$. Группа $<f> = \{f^k\}$, порожденная одной подстановкой f, называется *циклической.* Любую группу G подстановок можно рассматривать как порожденную некоторыми ее элементами. Во многих случаях желательно, чтобы порождающие элементы были независимы, то есть чтобы ни один из них не мог быть представлен произведением остальных. Задание группы порождающими элементами особенно удобно, если ее порядок велик, а число порождающих элементов можно сделать небольшим. Показателен пример симметрической группы S_n, которую можно задать только двумя порождающими элементами: произвольным n-членным циклом и транспозицией каких-либо двух элементов, соседних в этом цикле. Работа с группой, заданной порождающими элементами, сильно упрощается, если известно какое-либо каноническое представление любого элемента через порождающие элементы и правило получения канонического представления произведения двух элементов, заданных в канонической форме.

Множество B подстановок, порождающих группу G подстановок множества M, определяет некоторое множество графов. Эти графы имеют одно и то же множество вершин – множество M, поэтому объединение графов представляет мультиграф с ребрами разных типов, соответствующих различным подстановкам из множества B. На рисунке ребра должны изображаться отрезками разных видов или цветов. В дальнейшем, краткости ради, будем называть такой мультиграф графом группы G, хотя он в общем случае не является обычным графом или графом группы в смысле Кэли. В простейшем случае, для циклической группы $<f>$, получается обычный граф, совпадающий с графом подстановки f. Если дана группа G преобразований множества M в себя, то для любого элемента a множества M множество

$$G_a = \{f \mid f \in G \wedge f(a) = a\}, \qquad (1.2)$$

состоящее из всех преобразований, принадлежащих G и сохраняющих a, является группой. Действительно,

$$f, g \in G_a \Leftrightarrow (gf)(a) = g(f(a)) = (a) = a \Rightarrow gf \in G_a,$$

то есть множество G_a замкнуто относительно умножения.

Группа G_a называется *стабилизатором элемента a* в группе G. Аналогично, множество G_A всех преобразований, принадлежащих G и сохраняющих подмножество A множества M, является подгруппой группы G и называется *стабилизатором подмножества A* в группе G. Множество $G_{[A]}$ всех преобразований, принадлежащих G и сохраняющих каждый элемент подмножества A, также есть подгруппа группы G; она равна пересечению всех стабилизаторов элементов A.

Множество всех преобразований, принадлежащих G и преобразующих элемент a в один и тот же элемент, скажем b, представляет *левый смежный класс* в разложении группы G по стабилизатору G_a. Действительно,

$$f(a) = g(a) \Leftrightarrow g^{-1}(f(a)) = a \Leftrightarrow (g^{-1}f)(a) = a \Leftrightarrow g^{-1}f \in G_a \Leftrightarrow f \in gG_a.$$

Поэтому, если $g(a) = b$, то

$$\{f \mid f \in G \wedge f(a) = b\} = g\,G_a. \qquad (1.3)$$

Стабилизаторы различных элементов относительно данной группы преобразований G связаны между собой, если связаны сами элементы. Именно, если $g(a) = b$, то

$$G_b = g\,G_a\,g^{-1}. \qquad (1.4)$$

Действительно,

$$f \in G_b \Leftrightarrow f(b) = b \Leftrightarrow f(g(a)) = g(a) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (g^{-1}fg)(a) = a \in G_a \Leftrightarrow g^{-1}fg \in G_a \Leftrightarrow f \in g\,G_a\,g^{-1}.$$

Это значит, что G_b получается из G_a *внутренним автоморфизмом*, то есть G_a и G_b сопряжены в группе G. Отсюда следует изоморфизм групп G_a и G_b.

Если H – подгруппа группы G, то стабилизатор элемента a в H является частью стабилизатора a в G. Действительно, из $H \subset G \Rightarrow f \in H_a \Rightarrow f \in H; f(a) = a \Rightarrow f \in G; f(a) = a \Rightarrow f \in G_a$.

Каждой группе преобразований G множества M в себя соответствует соотношение θ_G, заданное на множестве M условием

$$a\, \theta_G\, b \Leftrightarrow (\exists f)(f \in G \wedge f(a) = b).$$

Соотношение θ_G рефлексивно, симметрично и транзитивно, оно называется *эквивалентностью относительно группы* G. Если рассматривается только одна группа, то в названии и обозначении указатель группы можно опускать.

Множество M с соотношением θ распадается на *классы эквивалентности* так, что любые два элемента одного класса эквивалентны, а элементы из разных классов неэквивалентны. Класс эквивалентности задается любым своим элементом, называемым *представителем этого класса.* Класс с представителем a обозначается M_a, при этом

$$M_a = \{x \mid x\, \theta\, a\}.$$

Если θ – эквивалентность относительно группы G, то

$$M_a = \{f(a) \mid f \in G\}. \qquad (1.5)$$

Если группа G настолько обширна, что любые два элемента множества M эквивалентны относительно G, а поэтому M состоит из одного класса эквивалентности, то она называется *транзитивной.* В общем случае, рассматривая действие группы G на отдельных классах эквивалентности, видим, что любая группа преобразований транзитивна на каждом таком классе. Поэтому классы эквивалентности называются также *классами транзитивности,* или *орбитами группы* G. В графе группы G классам эквивалентности соответствуют связные компоненты графа.

Формула (1.3) показывает, что между элементами класса эквивалентности M_a и левыми смежными классами $g\, G_a$ в разложении группы G по стабилизатору G_a существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому для группы G подстановок конечного множества M число $|M_a|$ элементов класса M_a равно индексу стабилизатора G_a в группе G. По теореме Лагранжа

$$|G_a| \cdot |M_a| = |G|. \qquad (1.6)$$

Каждый класс эквивалентности относительно подгруппы H

группы G содержится в некотором классе эквивалентности относительно G. Действительно, если $H \subset G$, то

$$a\,\theta_H\, b \Leftrightarrow (\exists f)(f \in H \wedge f(a) = b) \Rightarrow (\exists f)(f \in G \wedge f(a) = b) \Rightarrow a\,\theta_G\, b.$$

1.2. Построение классов эквивалентности

Рассмотрим приемы нахождения классов эквивалентности и стабилизаторов их представителей для заданной группы подстановок конечного множества.

Если группа G дана перечислением всех ее элементов, то класс эквивалентности M_a можно найти по формуле (1.5): $M_a = \{f(a) \mid f \in G\}$, то есть выборкой образов элемента a для всех подстановок, принадлежащих G. При этом попутно найдется и стабилизатор G_a элемента a по формуле (1.2): $G_a = \{f \mid f \in G \wedge f(a) = a\}$, то есть выборкой всех подстановок, принадлежащих G и сохраняющих a. Для частичного контроля работы можно использовать формулу (1.6): $|G_a| \cdot |M_a| = |G|$.

Для перебора всех классов нужно начать с какого-либо элемента a; найдя M_a, взять какой-либо элемент $b \notin M_a$; найдя M_b, взять элемент $c \notin M_a$, M_b и т. д., пока не исчерпаем все множество M.

Однако этот простой план удобен лишь в случае группы малого порядка. Как правило, проще не отдельные элементы подвергать всем подстановкам из данной группы, а наоборот, все элементы подвергать лишь тем подстановкам, которые порождают эту группу.

Пусть группа G порождается множеством B подстановок, то есть $G = \langle B \rangle$. По этим подстановкам легко строятся некоторые *клики* относительно эквивалентности θ_G. Кликой такого рода является, прежде всего, множество G всех элементов любого цикла, входящего в разложение подстановки g, $g \in B$. Кликой является и множество

$$K_a = \{a, g(a) \mid g \in B\}, \tag{1.7}$$

состоящее из произвольного элемента a и всех его образов в порождающих подстановках.

Назовем множество клик *полным*, если для любого элемента a и любого его образа $b = g(a)$, где $g \in B$, существует клика, содержащая a и b. Замена в этом множестве любых двух различных клик, имеющих общий элемент, на их объединение, приводит снова к полному множеству клик. Из конечности множества M следует конечность множества клик, поэтому процесс последовательного объединения клик через некоторое число шагов завершится получением полного множества клик, попарно не имеющих общих элементов. Эти клики и будут искомыми классами эквивалентности.

Для доказательства заметим сначала, что любая клика первоначального полного множества содержится в некоторой клике полученного множества клик. Поэтому, если $b = g(a)$, где $g \in B$, то a и b принадлежат одной клике полученного множества. Пусть теперь a и b – любые элементы, эквивалентные относительно G. По определению, существует такая подстановка $f \in G$, что $f(a) = b$. Так как G порождается множеством B, то $f = g_S \dots g_2 g_1$, где все $g_i \in B$. В последовательности

$$a_0 = a;\ a_1 = g_1(a_0);\ a_2 = g_2(a_1);\ \dots;$$
$$a_S = g_S(a_{S-1}) = (g_S \dots g_2 g_1)(a_0) = f(a) = b$$

любые два соседних элемента a_i и a_{i+1} принадлежат одной и той же клике полученного полного множества. Поэтому a и b принадлежат одной такой клике. Из принадлежности любых эквивалентных элементов одной и той же клике следует неэквивалентность элементов из разных клик. Это значит, что полученные клики являются классами эквивалентности.

Нетрудно видеть, что множество всех введенных выше множеств G для всех порождающих подстановок представляет полную систему клик. Эта система имеет преимущество в том, что параллельно с отысканием классов эквивалентности строится граф группы подстановок G. Целесообразно использовать порождающие подстановки последовательно, постепенно усложняя изображение графа. Другой полной системой клик является множество всех введенных выше множеств K_a. Если составить таблицу из $|B| + 1$ столбцов, заполнив первый из них обозначениями элементов множества M, а остальные, соответствующие различным порождающим подстановкам, – обозначениями образов, то каждая строка даст одно из множеств K_a. Число элементов каждой клики не превышает $|B| + 1$, но может быть и меньше за счет совпадения некоторых элементов; число различных клик не превышает $|M|$.

Использование этой системы клик требует меньшей работы по поиску элементов в списках, что упрощает механизацию процесса. Значительно сложнее нахождение стабилизатора G_a элемента a – представителя класса эквивалентности, особенно, если мы желаем задать G_a множеством B_a порождающих подстановок. Одной из причин трудностей является то, что в общем случае не существует множества B_a, содержащегося в множестве B, порождающем группу G. Автору неизвестен простой алгоритм, приводящий к цели. Практически приходится перебирать произведения порождающих подстановок, постепенно увеличивая число сомножителей, и выбирать те из них, которые сохраняют элемент a и не являются тождественными. По мере накопления элементов B_a нужно находить промежуточные подгруппы, порожденные накопленными элементами, и новые преобразования, сохраняющие a, но принадлежащие промежуточной подгруппе, должны опускаться. Процесс заканчивается, когда порядок подгруппы, порождаемой накопленными элементами, достигает порядка искомой подгруппы G_a; последний находится из формулы (1.6): $|G_a| \cdot |M_a| = |G|$, откуда $|G_a| = |G| : |M_a|$. Эта работа существенно облегчается использованием графа группы G.

Поскольку на выбор представителя a класса эквивалентности обычно ограничений заранее не накладывается, то это можно использовать для упрощения работы. Целесообразно в качестве a брать *элемент с возможно более просто находимым стабилизатором*. Для этой цели также весьма полезно рассмотрение графа группы G. Уменьшить работу по построению классов эквивалентности можно и за счет применения порождающих подстановок лишь к некоторым элементам. Пусть B_0 – правильная часть множества B подстановок, порождающих группу G, и пусть уже построены классы эквивалентности относительно группы $G_0 = \langle B_0 \rangle$. Эти классы и множество всех пар вида $\{a, g(a)\}$, где $a \neq g(a)$ и $g \in B \setminus B_0$, составляют полное множество клик для группы G. Каждая из таких пар позволяет объединить класс эквивалентности относительно G_0, содержащий a, с таким же классом, содержащим $g(a)$. Из нескольких пар, связывающих одни и те же элементы двух классов, достаточно использовать одну.

Однако в общем случае нельзя ограничиться рассмотрением только одного представителя класса эквивалентности относительно группы G_0. Например, если $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $g_1 = (1\ 2\ 3)(4\ 5\ 6)$, $g_2 = (1)(2\ 5)(3\ 6)(4)$, $B = \{g_1, g_2\}$, то группа $G = \langle B \rangle$ транзитивна на M. Если $B_0 = \{g_1\}$, то относительно группы $G_0 = \langle B_0 \rangle$ множество M распадается на два класса $\{1, 2, 3\}$ и $\{4, 5, 6\}$. Так как подстановка g_2 сохраняет элемент 1 из первого класса, то рассмотрение только этого элемента не позволит объединить классы в один.

С другой стороны, при определенных условиях использование только по одному представителю каждого класса возможно.

Пусть $B \setminus B_0$ содержится в нормализаторе $N(G_0)$ группы G_0. Это значит, что для любой подстановки $g \in B \setminus B_0$ имеет место

$$g\, G_0\, g^{-1} = G_0;\ f \in G_0 \Rightarrow g f g^{-1} \in G_0.$$

Если элементы a и b эквивалентны относительно группы G_0, то существует такая подстановка $f \in G_0$, что $f(a) = b$. Отсюда

$$g(b) = g(f(a)) = (gf)(g^{-1}(g(a))) = (gfg^{-1})(g(a)),$$

то есть элементы $f(a)$ и $g(b)$ также эквивалентны относительно группы G_0. Поэтому все элементы одного класса эквивалентности относительно G_0 преобразуются в элементы одного и того же класса; для объединения этих классов достаточно рассмотрения одного представителя класса. Для контроля полезно учитывать, что объединяемые классы должны состоять из одного и того же числа элементов.

Для выполнения условия $g \in N(G_0)$ достаточно, чтобы для $\forall g_0 \in B_0$ имело место $g\, g_0\, g^{-1} \in G_0$. Действительно, группа $g\, G_0\, g^{-1}$ порождается множеством $g\, G_0\, g^{-1} = \{g\, g_0\, g^{-1} \mid g_0 \in B_0\}$; при выполнении указанного условия будем иметь

$$g\, B_0\, g^{-1}; \qquad g\, G_0\, g^{-1} \subset G_0; \qquad g\, G_0\, g^{-1} = G_0.$$

Отметим один частный случай. Пусть множество M распадается на подмножества, называемые далее *блоками*, так, что каждая подстановка $f \in G$ преобразует любой блок снова в блок. Для этого достаточно, чтобы таким свойством обладала любая подстановка $g \in B$. Тогда множество всех подстановок из G_0, сохраняющих каждый блок, будет замкнуто относительно умножения и окажется подгруппой группы G.

Подгруппа G_0 нормальна в G. Действительно, если $g_0 \in G_0$, $f \in G$, K' – любой блок, K – прообраз K' в преобразовании f, то

$$(f g_0 f^{-1})(K') = f(g_0(f^{-1}(K'))) = f(g_0(K)) = f(K) = K';$$

подстановка $f g_0 f^{-1}$ сохраняет любой блок и поэтому принадлежит G_0, откуда $f\, g_0\, f^{-1} \in G_0$. Вследствие произвольности f это значит, что G_0 есть нормальная подгруппа группы G и $N(G_0) = G$.

Если теперь B_0 – множество подстановок, порождающее G_0, а B – множество подстановок, порождающее G и содержащее B_0, то условие $B \setminus B_0 \subset N(G_0)$ будет выполнено. Целесообразно сначала найти множество B_0, а потом остаток $B \setminus B_0$, используя следующие соображения. По условию, каждой подстановке $f \in G$ строго соответствует некоторая подстановка f^* множества блоков, причем

$$f^*(K) = f(K);$$
$$(gf^*)(K) = g^*(f^*(K)) = g(f(K)) = (gf)(K) = (gf)^*(K).$$

Это значит, что множество $\dot{G}^*$ всех подстановок f^* замкнуто относительно умножения и поэтому является группой. Отсюда же видно, что группа G^* гомоморфна группе G. Ядром гомоморфизма является множество всех f, индуцирующих на множестве блоков тождественную подстановку, то есть сохраняющих каждый блок; по условию, это есть группа G_0. Поэтому группа G^* изоморфна факторгруппе G / G_0. Пусть теперь B^* – множество подстановок из G^*, порождающих G^*. Возьмем для каждой подстановки $g^* \in B^*$ ее прообраз g в группе G, тогда можно положить $B \setminus B_0 = \{g |\ g^* \in B^*\}$. Действительно, для любой подстановки $f \in G$ имеем

$$f^* = g_S^* \ldots g_2^* g_1^* \in B_i^*; \qquad f\,\theta_{Go} f_0 = g_S \ldots g_2 g_1; \qquad f \in f_0\, G_0.$$

Это значит, что группа G порождается множеством подстановок $B = B_0 \cup (B \setminus B_0)$.

1.3. Отождествление решений комбинаторной задачи

Множество с заданными на нем соотношениями будем называть *системой* и обозначать посредством (M, Σ), где M – данное множество, а Σ – множество соотношений. Если множество Σ пусто, то систему можно отождествить с множеством M.

Пусть даны такие две системы $S = (M, \Sigma)$ и $S' = (M', \Sigma')$, что M и M' эквивалентны и существует преобразование Σ в Σ', относящее каждому *s-арному* соотношению $\sigma \in \Sigma$ также *s-арное* соотношение $\sigma' \in \Sigma'$; соотношения σ и σ' можно отождествить. Преобразование множества M в M' называется *изоморфным преобразованием*, или просто *изоморфизмом* системы S в систему S', если любые s элементов множества M связаны данным s-арным соотношением σ точно тогда, когда соответствующие им элементы множества M' связаны соотношением σ'.

Например, если σ, а поэтому и σ' – бинарные соотношения, то требуется $(\forall a)\ (\forall b)(a\ \sigma\ b \Leftrightarrow a'\ \sigma'\ b')$.

Преобразование f^{-1}, обратное изоморфному преобразованию f системы S в систему S', есть изоморфное преобразование S' в S. Произведение gf изоморфного преобразования f системы S в систему S' на изоморфное преобразование g системы S' в систему S'' есть изоморфное преобразование S в S''.

Система S называется *изоморфной* системе S', если существует изоморфное преобразование S в S'.

Соотношение изоморфизма систем рефлексивно, симметрично, транзитивно, то есть является некоторой эквивалентностью. Поэтому эквивалентные конкретные системы определяют одну и ту же *абстрактную систему* или *структуру*.

Нахождение абстрактных систем будем называть *отождествлением конкретных систем*. Фактически оно сводится к нахождению классов изоморфизма и выделению представителей этих классов.

Изоморфное преобразование системы в себя называется ее *автоморфизмом*. Множество всех автоморфизмов данной системы является группой; каждая группа автоморфизмов системы S представляет подгруппу этой группы. Поэтому множество G автоморфизмов системы S является группой, если оно замкнуто относительно умножения и если преобразование, обратное любому преобразованию, принадлежащему G, также принадлежит G. Если множество M всех элементов системы S конечно, то достаточно выполнения первого условия.

В дальнейшем предполагается, что *комбинаторная задача* состоит в нахождении всех подсистем S данной конечной системы $S_0 = (M, \Sigma)$, удовлетворяющих некоторым условиям. *Каждая такая подсистема будет называться решением данной задачи.*

Автоморфизм системы S_0, преобразующий решение S в решение S', будем называть *изоморфным преобразованием* S в S'; если такое преобразование для данных решений S и S' существует, то решение S называется изоморфным решению S'. Изоморфизм решений является рефлексивным, симметричным и транзитивным соотношением, заданным на множестве всех решений. Это множество распадается на классы изоморфизма, каждый из которых задается любым своим элементом – представителем класса. С другой стороны, все изоморфные между собой решения определяют одно и то же *абстрактное решение*; нахождение последних, фактически – нахождение представителей класса, будем называть *отождествлением решений.* Множество всех автоморфизмов системы S_0 , преобразующих решение S в себя, представляет группу; она называется *группой автоморфизмов решения* S. Знание этой группы во *многих* случаях также является необходимым.

В общем случае автоморфизм системы S_0 может преобразовать решение S в подсистему S', не являющуюся решением; это может иметь место для некоторых, но не всех решений. Назовем *допустимым преобразованием* любой автоморфизм системы S_0, преобразующий каждое решение комбинаторной задачи в некоторое решение этой задачи. Множество G всех допустимых преобразований замкнуто относительно умножения, поэтому является группой. На практике нередко оказывается, что все автоморфизмы системы S_0 являются допустимыми или же хотя они и не все допустимы, но каждый автоморфизм системы S_0, преобразующий одно решение в решение, является допустимым преобразованием. Если же существует автоморфизм, преобразующий некоторые, но не все решения в решения, то помимо исследования отождествлений допустимыми преобразованиями требуется дополнительная работа.

Каждое допустимое преобразование f индуцирует подстановку f^* множества всех решений, если положить

$$(\forall S)(f^*(S)) = f(S). \qquad (1.8)$$

Аналогично доказанному в конце предыдущего параграфа имеем $(gf)^* = g^*f^*$. Это значит, что множество G^* всех подстановок f^* является группой и группа G гомоморфна группе G^*. Поэтому группа G^* изоморфна факторгруппе G/N, где N – ядро гомоморфизма, то есть

$$N = \{f \mid f^* = e^*\}.$$

В случае $N = E$ группы G и G^* можно отождествить. Пусть по условиям задачи можно найти группу G всех допустимых преобразований исходной системы S_0 и ядро N рассмотренного выше гомоморфизма. Если кроме того имеется список всех решений, то можно получить и группу G^*. Тогда отождествление всех решений можно произвести методами, рассмотренными в предыдущем параграфе. Из (1.8) следует

$$f(S) = S \Leftrightarrow f^*(S) = S.$$

Поэтому f принадлежит группе G_S автоморфизмов решения S, содержащихся в G, если и только если соответствующая подстановка f^* принадлежит стабилизатору $G_S{}^*$ решения S в группе G^*. Отсюда следует, что G_S является полным прообразом группы $G_S{}^*$, то есть

$$G_S = \{f \mid f^* \in G_S{}^*\} = \cup(fN \mid f^* \in G_S{}^*). \qquad (1.9)$$

Автоморфизмами системы S_0, порождающими группу G_S, являются преобразования, порождающие подгруппу N, и прообразы подстановок g^*, порождающих группу $G_S{}^*$. Предварительное выделение ядра гомоморфизма N не является обязательным. Если группа G имеет малый порядок, то можно, как это было описано в предыдущем параграфе, действовать всеми преобразованиями на некоторые решения, выбранные в качестве представителей. При этом попутно найдется и группа N. Если группа G обширна, то ее следует задать порождающими элементами g, их образы g^* будут порождающими группы G^*. Если среди этих g^* имеются тождественные, то их нужно отбросить, а остальные использовать так, как это было описано в предыдущем параграфе. Прообразы отброшенных преобразований порождают нормальную подгруппу G_0 группы G; любая группа автоморфизмов G_S порождается преобразованиями, порождающими G_0, и прообразами подстановок g^*, порождающих стабилизатор.

1.4. Метод поэтапных отождествлений

Приемы, описанные выше, пригодны, если множество решений задачи не очень велико. Вручную можно составить и обработать список из нескольких десятков или нескольких сотен решений, компьютер может справиться со значительно большим количеством. Однако и компьютер бессилен перед массивом, скажем, из нескольких миллиардов решений. В то же время, если группа автоморфизмов исходной системы также очень велика, то число неизоморфных решений может быть небольшим. В таких случаях изоморфизмы решений нужно использовать, хотя бы частично, до получения списка всех решений, в процессе их нахождения. На практике эта возможность используется весьма часто, прежде всего в форме произвола в выборе обозначений. Если, например, все элементы множества M равноправны, то их можно обозначить выбранными символами в любом порядке.

Часто *решения комбинаторной задачи получаются путем постепенного составления их из элементов исходного множества M, причем на каждом этапе выбирается и добавляется к ранее выбранным один новый элемент. Это упорядочивает множество элементов решения и обращает его в конечную последовательность или в набор. Каждое промежуточное множество, рассматриваемое в процессе составления решения, также является набором, представляющим начальный поднабор каждого следующего за ним набора.* В дальнейшем такой набор, состоящий из k элементов, будем называть *k-набором* и обозначать через S^k. Положим, далее, что в дополнении к условиям задачи сформулированы такие условия, налагаемые на k-наборы, где $0 \leq k \leq m$, что каждый k-набор, удовлетворяющий этим условиям, дает решение и, наоборот, каждое решение дается таким набором. Пусть, кроме того, эти условия таковы, что любые начальные поднаборы k-набора, удовлетворяющего условиям, также удовлетворяют им, обратное не требуется. В дальнейшем изложении k-наборы, удовлетворяющие таким условиям, будут называться *разрешенными.*

Для более простого рассмотрения отождествлений сделаем еще одно допущение, положив, что каждое допустимое преобразование исходной системы S_0 переводит разрешенный k-набор снова в разрешенный. Перебор решений можно провести, начав с единственного 0-набора – пустого множества, получив все разрешенные 1-наборы, затем все разрешенные 2-наборы и т.д. до всех разрешенных m-наборов. Так как начальный k-поднабор разрешенного $(k + 1)$-набора является разрешенным k-набором, то все разрешенные $(k + 1)$-наборы получаются из разрешенных k-наборов добавлением одного элемента. Будем называть элемент, который можно присоединить к разрешенному k-набору S^k для получения разрешенного $(k + 1)$-набора, *элементом, разрешенным набором* S^k. Множество всех таких элементов будем обозначать через M^k с тем же номером, что и S^k. Если решения задачи нужно знать с точностью до изоморфизма, то можно после получения всех 1-наборов разбить их на классы изоморфизма и оставить по одному представителю из каждого класса, это же повторить после получения всех 2-наборов и т. д. Однако опыт показывает, что, если отождествления проводятся без четкого плана, то работа быстро уже для $k = 3, 4$ становится запутанной. Во многих случаях оказывается возможным на определенном этапе прекратить отождествления и получить список решений, хотя и избыточный, но не очень обширный. К сожалению, отождествление решений по неполному списку (этих решений) имеет свои трудности. Поэтому в сложных случаях целесообразно выполнять на каждом этапе все возможные отождествления, при этом попутно можно получить группы автоморфизмов как промежуточных наборов, так и решений задачи. Рассмотрим *метод поэтапных отождествлений в двух вариантах.*

Положим сначала, что решение задачи представляют m-наборы, составленные из элементов множества M системы S_0, удовлетворяющие некоторым условиям. Тогда *естественно набирать элементы в том порядке, в котором они должны входить в решение. Однако можно и изменить этот порядок, но он должен быть выбран заранее и зафиксирован.* Положим, что вся описанная выше подготовительная работа уже проведена. Начнем перебор решений с отождествлениями на каждом этапе. Относительно группы G всех допустимых преобразований множество всех разрешенных k-наборов распадается на классы изоморфизма; если они известны, то их можно занумеровать в некотором порядке и выбрать из каждого класса по представителю. *Обозначим представитель класса с номером i через S_i^k, а его группу автоморфизмов – через G_i^k; множество элементов, разрешенных k-набором S_i^k, через M_i^k.* Любое преобразование $f \in G_i^k$ сохраняет S_i^k, поэтому преобразует $(k+1)$-набор $S^{k+1} = (S_i^k, x)$, где $x \in M_i^k$, в разрешенный $(k+1)$-набор $(S_i^k, f(x))$. Отсюда следует, что $f(x) \in M_i^k$, поэтому f преобразует M_i^k в себя. *Относительно группы G_i^k множество M_i^k распадается на классы эквивалентности, которые можно занумеровать в произвольном порядке; в дальнейшем они будут обозначаться через $M_{i,j}^k$,* а их представители через $x_{i,j}^k$ (также выбираемые произвольно). Обозначим пару $(S_i^k, x_{i,j}^k)$ через $S_{i,j}^k$. Ее группа автоморфизмов $G_{i,j}^k$ содержится в группе G_i^k и, сохраняя $x_{i,j}^k$, является стабилизатором элемента $x_{i,j}^k$ в группе G_i^k. На основании формулы (1.6) имеем: $|G_i^k| = |M_{i,j}^k| \cdot |G_{i,j}^k|$, отсюда

$$|G_{i,j}^k| = |G_i^k| : |M_{i,j}^k|. \tag{1.10}$$

Эта формула полезна для контроля.

Пусть все «*опорные*» k-наборы S_i^k и их группы автоморфизмов G_i^k каким-либо образом найдены. По ним находим множества $M_{i,j}^k$ и выбираем элементы $x_{i,j}^k$. Любой $(k+1)$-набор S^{k+1} состоит из начального k-набора S^k и еще одного элемента a_{k+1}. По условию, S^k изоморфен некоторому опорному k-набору S_i^k, поэтому существует преобразование $f \in G$, со свойством $f(S^k) = S_i^k$. Пусть $f(a_{k+1}) = x$, тогда $x \in M_i^k$, поэтому $x \in M_{i,j}^k$ для некоторого номера j. Существует преобразование $g \in G_i^k$ со свойством $g(x) = x_{i,j}^k$ при этом $g(S_i^k) = S_i^k$. Подстановка $h = gf$ преобразует S^{k+1} в $(S_i^k,\ x_{i,j}^k)$, это значит, что $(k+1)$-наборами вида $(S_i^k,\ x_{i,j}^k)$ исчерпываются, с точностью до изоморфизма, все $(k+1)$-наборы. Группой автоморфизмов набора $(S_i^k,\ x_{i,j}^k)$ является $G_{i,j}^k$. Все эти наборы попарно неизоморфны, так как, по условию, k-наборы S_i^k попарно неизоморфны, а для данного S_i^k пары $(S_i^k,\ x_{i,j}^k)$ также попарно неизоморфны.

Таким образом, если известны опорные k-наборы и их группы автоморфизмов, то можно найти опорные $(k+1)$-наборы и их группы автоморфизмов. Теперь легко показать, что задача нахождения опорных k-наборов и их групп автоморфизмов разрешима для всех k от 0 до m.

Она разрешима для $k = 0$. Как уже сказано выше, единственным 0-набором является пустое множество, его группа автоморфизмов $G_1^0 = G$.

Если задача разрешима для некоторого $k < m$, то она, по доказанному, разрешима и для $k+1$. Тогда по принципу полной математической индукции задача разрешима для всех k, в частности для $k = m$.

Другой *вариант* в некотором роде *противоположен рассмотренному*. Положим, что решения задачи представляют множества из m элементов и, соответственно этому, условия, ограничивающие выбор промежуточных наборов, наложены на них как на множества. *Поэтому любое изменение порядка элементов в разрешенном наборе снова дает разрешенный набор.*

Пусть для некоторого $k < m$ каким-либо образом найдены все опорные наборы S_i^k, их группы автоморфизмов G_i^k и соответствующие им множества M_i^k. Разобьем M_i^k на классы $M_{i,j}^k$, выделим элементы $x_{i,j}^k$ и найдем группу $G_{i,j}^k$ автоморфизмов пар

$(S_i^k, x_{i,j}^k)$. Как и в предыдущем случае, любой разрешающий $(k+1)$-набор S^{k+1} можно представить в форме объединения S^k и $\{x\}$, где S^k – разрешенный k-набор и x – элемент, разрешенный этим k-набором. Но *теперь роль x может играть любой элемент набора S^{k+1}*. Действительно, упорядочив множество элементов набора S^{k+1} так, чтобы элемент x оказался последним, получим разрешенный $(k+1)$-набор, его начальный k-поднабор также будет разрешенным и поэтому может быть принят за S^k. Набор S^k изоморфен некоторому опорному набору S_i^k, существует преобразование $f \in G$, переводящее S^k в S_i^k, при этом S^{k+1} переходит в разрешенный $(k+1)$-набор $S_i^k \cup \{y\}$, поэтому $y = f(x) \in M_i^k$ и класс $M_{i,j}^k$, содержащий y. В группе G_i^k существует подстановка g, переводящая y в $x_{i,j}^k$, она сохраняет S_i^k. Таким образом, $(gf)(S^{k+1}) = S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$; для любого $(k+1)$-набора S^{k+1} существует и может быть найдено допустимое преобразование в набор вида $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$, притом так, что произвольно выбранный элемент x данного набора переходит в $x_{i,j}^k$. Наборами вида $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$ исчерпываются все разрешенные $(k+1)$-наборы.

Заметим, что для данного $(k+1)$-набора S^{k+1} изоморфный ему набор $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$ однозначно определяется выбором элемента x. Действительно, этим выбором с точностью до порядка элементов определяется k-набор S^k, последний изоморфен единственному опорному набору S_i^k. Преобразование f набора S^k в S_i^k, вообще говоря, не единственно, но если $f(S^k) = f'(S^k) = S_i^k$, то $S^k = f^{-1}(S_i^k)$; $(f' f^{-1}(S_i^k)) = f'(S^k) = S_i^k$, поэтому $f' f^{-1} \in G_i^k$. Если $f(x) = y, f'(x) = y'$, то $x = f^{-1}(y)$; $(f' f^{-1}(y)) = f'(x) = y'$. Так как $f' f^{-1} \in G_i^k$, то y и y' эквивалентны относительно G_i^k, поэтому y и y' принадлежат одному и тому же классу $M_{i,j}^k$ и некоторыми подстановками g и g' преобразуются в один и тот же элемент $x_{i,j}^k$. С другой стороны, в качестве x можно взять любой элемент данного $(k+1)$-набора S^{k+1}, число различных выборов равно $k+1$. Разные выборы x приводят, вообще говоря, к разным наборам вида $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$, изоморфным данному набору. Поэтому среди наборов этого вида существуют изоморфные, для отыскания опорных $(k+1)$-наборов нужно использовать все эти изоморфизмы.

В отличие от предыдущего случая, лишь некоторые $(k+1)$-

наборы вида $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$ можно принять за опорные; остальные наборы этого вида будем называть вспомогательными. Если (k + 1)-наборы $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$ и $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$ изоморфны, то существует преобразование $h \in G$, переводящее первый из них во второй. Прообраз $h^{-1}(x_{i,j}^k)$ элемента $x_{i,j}^k$ в этом преобразовании принадлежит первому набору, прообразом k-набора S_i^k будет остаток $(S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\} \setminus \{x\})$. Это значит, что преобразование h принадлежит к рассмотренному выше виду.

Если $x = x_{i,j}^k$, то остаток представляет k-набор S_i^k, наборы S_i^k и $S_{i'}^k$ изоморфны, а так как различные опорные k-наборы не могут быть изоморфными, то $S_i^k = S_{i'}^k$; $h(S_i^k) = S_i^k$; $h \in G_i^k$, поэтому $h(x_{i,j}^k) = h(x) = x_{i',j'}^k = x_{i,j'}^k$, то есть элементы $x_{i,j}^k$ и $x_{i',j'}^k$ являются представителями одного и того же класса $M_{i,j}^k$, откуда следует, что $x_{i,j}^k = x_{i',j'}^k$. Это значит, что h сохраняет набор (k + 1)-набор $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$ и поэтому принадлежит группе G^{k+1} его автоморфизмов. Более того, h сохраняет упорядоченную пару $(S_i^k, \{x_{i,j}^k\})$ и поэтому принадлежит стабилизатору $G_{i,j}^k$ этой пары. Наоборот, любое преобразование $h \in G_{i,j}^k$ является автоморфизмом (k + 1)-набора $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$. В общем случае $x \neq x_{i,j}^k$, но и тогда возможно $S_i^k = S_{i'}^k$, откуда $i = i'$; при этом, вообще говоря, $x_{i,j}^k \neq x_{i',j'}^k = x_{i,j'}^k$. Если все же $x_{i,j}^k = x_{i',j'}^k$, то h является автоморфизмом (k + 1)-набора $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$, но не принадлежит $G_{i,j}^k$. Любые два таких автоморфизма h_1 и h_2, одинаково преобразующих x в $x_{i,j}^k$, принадлежат одному и тому же правому смежному классу в разложении группы G^{k+1} по ее подгруппе $G_{i,j}^k$. Действительно, $h_1(x) = h_2(x) = x_{i,j}^k \Rightarrow (h_2 h_1^{-1})(x_{i,j}^k) = h_2(h_1^{-1}(x_{i,j}^k)) = h_2(x) = x_{i,j}^k \Rightarrow h_2 h_1^{-1} \in G_{i,j}^k$, $h_2 \in G_{i,j}^k h_1$. Число таких автоморфизмов для данного элемента x равно $|G_{i,j}^k|$, а общее число автоморфизмов (k + 1)-набора $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$ произведению $|G_{i,j}^k|$ на число элементов x, принадлежащих этому набору и преобразуемых некоторым $h \in G^{k+1}$ в $x_{i,j}^k$; в подсчет включается и элемент $x_{i,j}^k$. Если $S_i^k = S_{i'}^k$, но $x_{i,j}^k \neq x_{i',j'}^k$ или $S_i^k \neq S_{i'}^k$, то будем иметь отождествление (k + 1)-наборов, получаемых из разных пар $(S_i^k, x_{i,j}^k)$ и $(S_{i'}^k, x_{i',j'}^k)$. Таким образом, при сделанных выше предположениях отождествление (k + 1)-наборов вида $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$, выделение из них опорных наборов и нахождение групп автоморфизмов последних можно осуществить следующим образом. Возьмем один такой набор $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$ и будем принимать за x поочередно каждый элемент k-набора S_i^k. Для каждого x найдем преобразование $f \in G$, переводящее $(S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}) \setminus x$ в некоторый, причем вполне определенный, опорный k-набор $S_{i'}^k$, а по нему – элемент $y = f(x) \in M_i^k$. Затем найдем класс $M_{i',j'}^k$, содержащий y, и преобразование $g \in G_{i'}^k$, переводящее в представитель $x_{i',j'}^k$ этого класса. Тогда $h = g\,f$ есть изоморфное преобразование $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$ в $S_{i'}^k \cup x_{i',j'}^k$. Проделав эту работу для всех $x \in S_i^k$, мы можем принять $(k + 1)$-набор $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$ за опорный, все полученные из него $(k + 1)$-наборы $S_{i'}^k \cup \{x_{i',j'}^k\}$, отличные от него самого – за вспомогательные. Группа автоморфизмов этого опорного $(k + 1)$-набора будет состоять из группы $G_{i,j}^k$ и ее правых смежных классов, определяемых найденными преобразованиями h, сохраняющими данный $(k + 1)$-набор $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$. Заметим, что при этом оказываются рассмотренными все $(k + 1)$-наборы, изоморфные данному, поэтому в дальнейшей работе по отождествлению, состоящей в повторении процесса, для других $(k + 1)$-наборов вида $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$ до исчерпания всех возможностей, вспомогательные наборы, изоморфные данному, не встретятся. В дальнейшем будем предполагать, что наборы $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$ рассматриваются в лексико-графическом порядке, введенном для пар (i, j). Рассмотрим теперь вопрос об отыскании преобразований f и g, входящих в состав изоморфного преобразования h. Нахождение g состоит в отыскании в группе $G_{i'}^k$ преобразования, переводящего элемент y класса $M_{i',j'}^k$ в элемент $x_{i',j'}^k$ этого же класса. План отыскания g связан с планом построения классов, но практически представляется несложным. Например, g легко находится по графу группы $G_{i'}^k$, причем достаточно рассмотреть одну связную компоненту графа. Нахождение преобразования f значительно сложнее, но может быть полностью описано, если работа по отождествлению была проведена на предыдущем этапе. Положим, что уже выделены все опорные $(k - 1)$-наборы S_l^{k-1}, для них найдены группы автоморфизмов G_l^{k-1}, множества M_l^{k-1}, классы $M_{l,m}^{k-1}$, выделены элементы $x_{l,m}^{k-1}$ и составлены

k-наборы $S_l^{k-1} \cup \{x_{l,m}^{k-1}\}$. Положим далее, что эти k-наборы разбиты на опорные и вспомогательные, опорные наборы занумерованы в порядке их получения, и для каждого из них найдена группа автоморфизмов, а для каждого вспомогательного набора известен изоморфный ему опорный k-набор и преобразование, которым он получается из последнего. Именно это семейство опорных и вспомогательных наборов и нужно использовать для дальнейшей работы.

Пусть для каждого опорного k-набора $S_i^k = S_l^{k-1} \cup \{x_{l,m}^{k-1}\}$ найдено множество M_i^k, классы $M_{i,j}^k$ и выбраны представители $x_{i,j}^k$, а для них указаны группы $G_{i,j}^k$. Возьмем $(k+1)$-набор $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$ и элемент $x \in S_i^k$. По предположению, известно преобразование s, переводящее S_i^k в k-набор $S_n^{k-1} \cup \{x_{n,p}^{k-1}\}$ так, что $s(S_i^k \setminus \{x\}) = S_n^{k-1}$; $s(x) = x_{n,p}^{k-1}$. Заметим, что для $x = x_{l,m}^{k-1}$ имеем $s = e$. Пусть $s(x_{i,j}^k) = y$, тогда $s(S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}) = S_n^{k-1} \cup \{x_{n,p}^{k-1}\} \cup \{y\} = (S_n^{k-1} \cup \{y\}) \cup \{x_{n,p}^{k-1}\}$. Элемент y принадлежит некоторому классу $M_{n,q}^{k-1}$ с представителем $x_{n,q}^{k-1}$, и существует преобразование $t \in G_l^{k-1}$, сохраняющее S_n^{k-1} и преобразующее y в $x_{n,q}^{k-1}$; при этом $x_{n,p}^{k-1}$ преобразуется в некоторый элемент $z \in M_{n,p}^{k-1}$. Таким образом, $t((S_n^{k-1} \cup \{y\}) \cup \{x_{n,p}^{k-1}\}) = (S_n^{k-1} \cup \{x_{n,q}^{k-1}\}) \cup \{z\}$. Набор $S_n^{k-1} \cup \{x_{n,q}^{k-1}\}$ является, вообще говоря, вспомогательным; по предположению, известны изоморфный ему опорный набор S_r^k и преобразование u, переводящее S_r^k в $S_n^{k-1} \cup \{x_{n,q}^{k-1}\}$, поэтому $u^{-1}((S_n^{k-1} \cup \{x_{n,q}^{k-1}\}) \cup \{z\}) = S_r^k \cup \{w\}$, $w = u^{-1}(z) \in M_r^k$. Если набор $S_n^{k-1} \cup \{x_{n,q}^{k-1}\}$ является опорным, то можно положить $u = u^{-1} = e$. Таким образом, искомое преобразование находится, а именно: $f = u^{-1} t\, s$; $f((S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}) \setminus \{x\}) = S_r^k$; $f(x) = w \in M_r^k$. Добавив преобразование g, получим окончательно $h = g\, u^{-1}\, t\, s$.

Разные выборы элемента $x \in M_r^k$ могут привести к одному и тому же опорному $(k+1)$-набору $S_{i'}^k \cup \{x_{i',j'}^k\}$. Пусть $h_1(S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}) = h_2(S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}) = S_{i'}^k \cup \{x_{i',j'}^k\}$; $h_1(x_1) = h_2(x_2) = x_{i',j'}^k$, тогда $h_2^{-1}h_1$ есть автоморфизм данного $(k+1)$-набора и $(h_2^{-1}h_1)(x_1) = x_2$, поэтому $h = h_2^{-1}h_1 \in G^{k+1}$, элементы x_1 и x_2 эквивалентны относительно группы G^{k+1}. Наоборот, если существует преобразование $h \in G^{k+1}$ со свойством $h_1(x_1) = x_2$ и рассмотрение элемента x_2 приводит к изоморфизму h_2 набора $S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$ в набор $S_{i'}^k \cup \{x_{i',j'}^k\}$. Тогда $h_1 = h_2 h$ есть преобразование S^{k+1} в тот же набор $S_{i'}^k \cup \{x_{i',j'}^k\}$ со свойством $h_1(x_1) = x_{i',j'}^k$. Таким образом, рассмотрение элементов x_1 и x_2 приводит к одному и тому же $(k + 1)$-набору, если и только если x_1 и x_2 эквивалентны относительно группы G^{k+1} автоморфизмов рассматриваемого $(k + 1)$-набора. Это позволяет уменьшить количество рассматриваемых отождествлений, выбирая в качестве x лишь некоторые элементы, самое экономное – по одному элементу из каждого класса. К сожалению, приступая к рассмотрению набора $S^{k+1} = S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$, мы не знаем его группу G^{k+1} автоморфизмов, известна только ее подгруппа $G_{i,j}^k$, являющаяся также подгруппой другой известной нам группы G_i^k. Относительно группы G_i^k k-набор S_i^k распадается на классы эквивалентности, которые мы обозначим через $S_{i,h}^k$, а относительно группы $G_{i,j}^k$ – на более мелкие классы $S_{i,j,r}^k$. В S^{k+1} отдельным классом относительно группы $G_{i,j}^k$ окажется также единичное множество $\{x_{i,j}^k\}$.

Положим, что на предыдущем этапе работы для каждого опорного набора S_i^k по его группе автоморфизмов G_i^k были найдены классы $S_{i,h}^k$, в каждом из них выделен представитель $a_{i,h}^k$ и сохранена информация об отождествлении S_i^k со вспомогательными наборами для этого представителя. Тогда при рассмотрении отождествлений опорного $(k + 1)$-набора $S^{k+1} = S_i^k \cup \{x_{i,j}^k\}$ нужно найти классы $S_{i,j,r}^k$, в каждом из них выбрать по представителю $a_{i,j,r}^k$ и отождествление производить только для этих элементов. Каждый элемент $x = a_{i,j,r}^k$ принадлежит некоторому классу $S_{i,h}^k$, существует преобразование $v \in G_i^k$, переводящее x в $a_{i,h}^k$. Для элемента $a_{i,h}^k$, по предположению, можно найти преобразование s, переводящее S_i^k в некоторый набор $S_n^{k-1} \cup \{x_{n,q}^{k-1}\}$. И при данном подходе возможно отождествление S^{k+1} с одним и тем же набором. Количество повторений можно уменьшить, используя автоморфизмы набора S^{k+1}, находимые в процессе работы, для расширения известной нам с самого начала группы $G_{i,j}^k$. Поэтому желательно, используя какие-либо соображения, в первую очередь искать эти автоморфизмы; в частности, можно после повторного отождествления S^{k+1} с одним и тем же набором преобразованиями h_1 и h_2 найти автоморфизм $h_2^{-1}h_1$, а одно из преобразований h_1 и h_2 далее не рассматривать.

Многие из описанных выше операций допускают некоторый произвол в выборе элемента или преобразования, это нужно использовать для упрощения работы. В частности, представитель $x_{i,j}^k$ класса $M_{i,j}^k$ целесообразно выбирать не сразу после нахождения класса, а по ходу дела. Для опорного класса следует в качестве $x_{i,j}^k$ брать элемент с возможно более просто находимой группой $G_{i,j}^k$, а для вспомогательных наборов в качестве $x_{i',j'}^k$ нужно брать элемент w, тогда $g = e$ и $h = f$.

Из описанного метода видно, что он тяжеловесен и поэтому нерационален в случае простой задачи. Его преимущества проявляются при решении задач с большим числом решений и с богатой группой допустимых преобразований. Он полезен и в случае отыскания наборов из разного числа элементов; типичным примером является отыскание всех дуг в конечной проективной плоскости.

2. О ПЛОСКОСТНОЙ АКСИОМЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ ПРОЕКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Все понятия, характеризующие расположение элементов проективного пространства, определяются через понятие разделения двух пар точек, составленных из четырех различных точек одной прямой. В дальнейшем разделение будет обозначаться знаком |, т. е. мы будем писать $AB \mid CD$, если пара (A, B) разделяет пару (C, D).

Свойства разделения выражаются *линейными аксиомами*.

II_1. Для любых двух различных точек A и B существуют такие точки C и D, что $AB \mid CD$.

Она может быть заменена, если в аксиомах соединения уже содержится утверждение о существовании на каждой прямой по крайней мере трех различных точек, следующей, более сильной:

II_1^*. Для любых трех различных точек A, B и C прямой существует такая точка D, что $AB \mid CD$.

II_2. Если $AB \mid CD$, то $AB \mid DC$.

II_3. Если $AB \mid CD$, то $CD \mid AB$.

Из двух последних аксиом следует, что отношение разделения сохраняется при перестановке пар и перестановке точек в каждой из них. Поэтому можно говорить о взаимном разделении двух пар, не обращая при этом внимания на порядок точек в парах.

II_4. Любые четыре различные точки прямой можно разбить на две взаимно разделяющиеся пары одним и только одним способом.

II_5. Если на прямой даны пять различных точек и две из них разделяют одну из трех пар, составленных из трех остальных точек, то они разделяют по крайней мере одну из двух оставшихся пар.

Эти аксиомы достаточны для решения всех вопросов, связанных с расположением точек на прямой. Из них следует, в частности, что множество всех точек прямой бесконечно. Кроме того, нужна еще одна, плоскостная по своему характеру, аксиома. Ее можно взять в форме, аналогичной постулату Паша евклидовой геометрии:

II_6. Если две различные прямые, лежащие в плоскости трехвершинника и не проходящие ни через одну из его вершин, пересекают одну из сторон в точках, разделяющих вершины, лежащие на этой стороне, то они пересекают по крайней мере одну из двух оставшихся сторон в точках, разделяющих вершины.

Можно доказать, что при условиях этой аксиомы пересекать все три стороны трехвершинника в точках, разделяющих вершины, прямые не могут.

Аксиома II_6 является, однако, более сильной, так как позволяет доказать II_5. Это возможно, если даже ослабить аксиому II_6 требованием, чтобы точка пересечения упоминаемых в ней прямых не лежала ни на одной из сторон трехвершинника [1]. Поэтому естественно, что почти все авторы курсов проективной геометрии используют другую плоскостную аксиому:

II_6*. Разделение пар точек сохраняется при перспективном преобразовании прямой в прямую в пределах плоскости.

Эта аксиома относительно слабее, чем II_6, так как теперь в совокупности всех аксиом соединения и расположения аксиома II_5 независима от остальных. Для доказательства этого предлагается следующая интерпретация. Возьмем конечную плоскость, построенную над полем из пяти элементов, обозначаемых далее через 0, 1, 2, 3, 4. Она содержит 31 точку и столько же прямых, причем на каждой прямой лежит 6 точек, и через каждую точку проходит 6 прямых. Введем понятие разделения, полагая, что две пары разделяют друг друга, если и только если они разделяют друг друга гармонически. Из существования четвертой гармонической для любой упорядоченной тройки точек прямой следует справедливость аксиомы II_1*. Из свойств гармонической четверки видна справедливость аксиом II_2 и II_3.

Сложное отношение четырех различных точек прямой может равняться любому элементу поля, кроме 0 и 1, т. е. для него возможны значения 2, 3 и 4. Из формул, выражающих изменение сложного отношения при переходе от одного порядка данных точек к другому, следует, что для любой четверки различных точек при одном ее разбиении на две пары сложное отношение, в зависимости от порядка точек в парах, имеет значения 2 и 3; при другом разбиении – эти же значения, а при третьем, независимо от порядка точек в парах, – значение $4 = -1$. При последнем разбиении, и только при нем, пары точек разделяют друг друга гармонически. Этим установлена справедливость аксиомы II_4.

Выполняемость аксиомы II_6* видна из того, что при перспективном преобразовании образов первой ступени гармоническое разделение пар элементов сохраняется.

Таким образом, все аксиомы соединения и расположения, кроме II_5, в рассматриваемой интерпретации выполняются. Аксиома II_5 иметь места не может, так как в противном случае множество точек прямой было бы бесконечным, вопреки построению. Можно подобрать и конкретные примеры ее нарушения, воспользовавшись любой пятеркой точек одной прямой. Этим независимость аксиомы II_5 от аксиом соединения и аксиом $II_1{}^*{}_{-4}$ и II_6* доказана.

Заметим, что для построения интерпретации можно использовать любую плоскость, построенную над конечным полем, порядок которого выражается простым числом вида $6n-1$.

Рассмотрим теперь одну возможность ослабления аксиомы II_6 включением в ее условия ограничения, более сильного, чем то, которое использовалось в [1]. Потребуем, чтобы прямые пересекались на одной из сторон трехвершинника. Тогда получим аксиому:

II_6^{**}. Если две прямые, лежащие в плоскости трехвершинника, не проходящие ни через одну из его вершин и пересекающиеся на одной из его сторон, пересекают другую сторону в точках, разделяющих вершины, лежащие на этой стороне, то они пересекают и третью сторону в точках, разделяющих вершины.

Эта аксиома является вместе с тем и ослаблением аксиомы II_6^*, так как равносильна утверждению о сохранении разделения пар точек при перспективном преобразовании одной прямой в другую в случае, когда точка пересечения этих прямых входит в состав четверки. Однако на базисе, состоящем из аксиом I и $II_{2\text{-}4}$, аксиомы II_6^* и II_6^{**} равносильны. Действительно, если четверки (A, B, C, D) и (A', B', C', D'), лежащие на прямых s и s′, перспективны, и точка пересечения этих прямых не входит в состав четверок, то можно взять прямую s″, проходящую через A и B', а на ней – точки C″ и D″, лежащие на соответствующих прямых пучка. Тогда, по аксиоме II_6^{**}, из $AB \mid CD$ следует $AB' \mid C''D''$, а из $AB' \mid C''D''$ следует $A'B' \mid C'D'$. Это значит, что аксиома II_6^* справедлива; равносильность аксиом доказана.

Литература

1. *Вебер Г., Вельштейн И.*, Энциклопедия элементарной математики. – М., 1909. Т. II, кн. I. С. 179–180.

3. ИЗЛОЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ НЕТРАДИЦИОННЫХ РАЗДЕЛОВ ГЕОМЕТРИИ

Введение

В настоящем разделе предлагаются *возможные варианты изложения* отдельных разделов программы по геометрии.

3.1. Преобразования плоскости

За основу классификации линейных преобразований плоскости *берется* число тех или иных инвариантных элементов (направлений, прямых, точек). Студенты знакомятся с различными подгруппами аффинной группы преобразований плоскости, а также множествами преобразований, не являющимися группами, но имеющими важное теоретическое и практическое значение. К последним, например, относятся аффинные гомологии (см. схему), не являющиеся группой, подмножество эквиаффинных гомологий, совокупность сдвигов, параллельных переносов, косых и прямых симметрий, центральных симметрий и тождественного преобразования и др.

После рассмотрения различных подгрупп и подмножеств аффинной группы дается общая структура аффинной группы преобразований плоскости, представленная на схеме. При этом акцентируется внимание на основных ее подгруппах: эквиаффинной и главной (группе подобий), а также их пересечении – группе движений. Затем выделяются все подгруппы 1-го рода: группа аффинных преобразований 1-го рода и ее подгруппы – эквиаффинных преобразований 1-го рода, подобий 1-го рода; пересечении последних – группе движений 1-го рода и других. Подгруппами группы подобий 1-го рода являются: группа гомотетий и параллельных переносов; группа центральных симметрий и параллельных переносов; группа параллельных переносов; группа, состоящая лишь из двух преобразований – центральной симметрии и Е.

Кроме того, студенты знакомятся с пятью концентрическими структурами аффинной группы преобразований, пять различных подгрупп которой находятся лишь в отношениях подчинения.

На практических занятиях и во внеаудиторное время студенты выполняют различные упражнения, цель которых – глубже изучить группы и множества геометрических преобразований. Такими заданиями, например, являются: выяснение отношений, в которых находятся те или иные совокупности множеств преобразований или операторов, исследование структуры определенной группы преобразований. Вначале студенты выполняют упражнения на установление отношений лишь между двумя-тремя множествами преобразований, затем тремя-четырьмя и т. д.

Далее рассматриваются вопросы применения групповых свойств преобразований к решению задач, доказательству теорем, в частности к ним относятся композиции движений, подобий и других видов преобразований. На лекции же дается лишь общая схема применения групповых свойств преобразований.

На практических занятиях и во внеаудиторное время студенты выполняют необходимые построения на чертеже, используют таблицы умножения операторов, позволяющие вначале находить композицию операторов, ассоциированных с данными точечными преобразованиями, а затем и композицию этих самих точечных преобразований. Изучение темы заканчивается исследованием групп симметрии плоских фигур.

3.2. Аффинное и евклидово *n*-мерные пространства

Такие пространства целесообразно определять как точечные множества, связанные с некоторыми векторными пространствами при помощи аксиомы об откладывании вектора.

Раздел о плоскостях в аффинном пространстве дает возможность подобрать интересные и разнообразные упражнения, с помощью которых можно проиллюстрировать, в частности, непривычные для студентов случаи расположения плоскостей в пространствах высших размерностей.

Определение изоморфного отображения одного аффинного пространства на другое дается с использованием понятия преобразования векторного пространства, ассоциированного с точечным преобразованием аффинного пространства; эти понятия иллюстрируются примерами.

Аффинное преобразование определяется как изоморфное отображение аффинного пространства на себя. Такое определение дает возможность быстро перейти к содержательным теоремам и хорошо согласуется с групповым подходом к геометрии. Замечание об эквивалентности этого определения тому определению, с которым студенты были знакомы ранее, дается в обзорном порядке.

Аффинное пространство названо *точечным евклидовым* или просто евклидовым пространством, если связанное с ним векторное пространство является векторным евклидовым. *Движение* евклидова пространства определяется как аффинное преобразование этого пространства, не меняющее расстояний между точками. К значительному упрощению изложения приводит также определение движения, как изоморфного отображения евклидова пространства на себя.

Доказательства ряда теорем о преобразованиях многомерных пространств могут быть проведены по тому же плану, что и уже известные студентам доказательства соответствующих теорем из раздела «Преобразования плоскости». В этих случаях можно ограничиваться лишь формулировкой теоремы, предоставляя их доказательства студентам в качестве самостоятельного упражнения.

При недостатке времени могут быть сообщены в обзорном порядке некоторые чисто алгебраические сведения, например, отдельные теоремы об ортогональных преобразованиях евклидова векторного пространства.

При выборе обозначений и терминологии следует учитывать специфику современных учебников, не отказываясь вместе с тем от ознакомления студентов и с терминологией, общепринятой в научной литературе; в частности целесообразно одновременное употребление терминов «произведение преобразований» и «композиция преобразований», «движение» и «перемещение» и др.

Сообщая определение геометрии по Ф. Клейну, следует сопоставить все результаты, полученные в этом направлении, после изучения темы и рассмотреть достаточное количество примеров. Вместе с тем, можно указать, что определение геометрии, данное Клейном, не исчерпывает всего богатства современной геометрии, но все же ему удовлетворяют многие важные геометрические теории, как уже изученные, так и те, которые будут излагаться в дальнейшем.

В заключении изучения раздела целесообразно подчеркнуть, что возникновение понятия многомерного пространства было обусловлено потребностями развития как самой математики, так и других научных дисциплин. Примеры практических приложений многомерных геометрий позволяют значительно оживить изложение материала.

3.3. Аффинные многомерные пространства

3.3.1. Основные понятия и определения

Пусть даны некоторое непустое множество R и совокупность T преобразований R в себя. Преобразование, состоящее в последовательном выполнении двух преобразований t_1 и t_2 из T, будем называть их *суммой*.

Положим далее, что дано *умножение* любого преобразования из T на любое вещественное число, результатом которого снова является элемент множества T, и введем следующие аксиомы:

А1. Множество T относительно сложения и умножения на вещественное число является линейным пространством.

А2. Для любых элементов A и B из R существует единственное преобразование t из T, переводящее A в B.

Такое преобразование будем обозначать посредством t_{AB}.

Из А1, в частности, следует, что T относительно сложения является коммутативной группой.

Множество R с группой T его преобразований в себя, удовлетворяющее аксиомам А1 и А2, называется *аффинным пространством*; элементы R называются *точками*, а преобразования из T – *параллельными переносами* или трансляциями.

3.3.2. Определение вектора

По аксиоме А2 любую точку A можно преобразовать в любую точку B. Иначе обстоит дело с парами точек. Упорядоченная пара точек $(A\ B)$ в дальнейшем будет обозначаться через $\overrightarrow{AB}$.

Пара $\overrightarrow{AB}$ называется *эквивалентной* относительно T паре $\overrightarrow{CD}$, если существует параллельный перенос, преобразующий $\overrightarrow{AB}$ в $\overrightarrow{CD}$.

Этот параллельный перенос должен переводить A в C; по аксиоме А2 он является единственным, поэтому переводит B во вполне определенную точку B', если $B' \equiv D$, то $\overrightarrow{AB} \Theta \overrightarrow{CD}$, в противном случае эквивалентность не имеет места.

Из того, что множество параллельных переносов образует группу, непосредственно следует: *эквивалентность упорядоченных пар точек рефлексивна, симметрична и транзитивна.* Это позволяет ввести некоторое свойство упорядоченных пар, которое естественно назвать *вектором пары. Вектором* упорядоченной пары точек называется такое ее свойство, что две пары имеют один и тот же вектор, если и только если они эквивалентны.

Вектор пары AB обозначим через $\vec{v}_{AB}$. Допустимо также обозначение посредством $\overrightarrow{AB}$. По определению, данному выше, $\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\,\Theta\,\overrightarrow{CD}$.

3.3.3. Связь векторов с параллельными переносами

При параллельном переносе t каждая точка A преобразуется в некоторую точку A', пара (AA') имеет некоторый вектор $\vec{v}_{AA'}$, называемый *вектором смещения* точки A. Так как группа параллельных переносов коммутативная, то легко показать, что для любого такого переноса векторы смещения всех пар точек равны.

Назовем вектор $\vec{v}_{AA'}$, где A – любая точка, а A' – ее образ при параллельном переносе t, *вектором параллельного переноса.* Обозначим его через $\vec{v}_t$.

Таким образом, каждому параллельному переносу строго однозначно соответствует вектор $\vec{v}_t$. Наоборот, каждому вектору $\vec{v}_{AB}$ соответствует один определенный параллельный перенос, а именно, t_{AB} или, иначе, $\vec{v}_t$.

Операция сложения параллельных переносов теперь может быть перенесена на векторы. Именно, назовем *суммой двух векторов*, соответствующих данным параллельным переносам, вектор, соответствующий сумме этих переносов.

Так как $t_{AB} + t_{BC} = t_{AC}$, то должно выполняться $\vec{v}_{AB} + \vec{v}_{BC} = \vec{v}_{AC}$.

Пару $\overrightarrow{AC}$ будем называть *суммой* пар $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$. Согласно определению суммы векторов множество всех векторов изоморфно относительно сложения множеству T всех параллельных переносов. Поэтому множество векторов V является коммутативной группой относительно операции сложения.

Назовем *произведением* вектора $\vec{v}_t$, соответствующего параллельному переносу t, на действительное число α вектор, соответствующий параллельному переносу αt. Тогда множество V всех векторов и множество T всех параллельных переносов изоморфны относительно умножения на число. В целом множество V относительно сложения и умножения на число α, где $\alpha \in R$, является *линейным пространством*.

3.4. Аффинные координаты точки

Выберем некоторую точку O пространства R, назвав ее *началом отсчета*. Для любой точки M пространства пара $\overrightarrow{OM}$ определяет некоторый вектор $\vec{r} = \vec{v}_{OM}$. Назовем $\vec{r}$ *вектором положения точки* M. Очевидно, что вектор положения строго однозначно задается выбором точки M. Наоборот, если вектор $\vec{r}$ задан, то пара OM с $\vec{v}_{OM} = \vec{r}$ существует и является единственной. Поэтому M строго однозначно задается ее вектором положения $\vec{r}$. Между точками и их векторами положения существует взаимно однозначное соответствие. Для задания точки M достаточно задать ее вектор положения $\vec{r}$; что обозначается в записи $M(\vec{r})$.

Если линейное пространство T, а поэтому и линейное пространство V, является *n-мерным*, то для описания вектора $\vec{r}$ можно выбрать базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$. Тогда вектор $\vec{r}$ имеет единственное представление $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + ... + x_n\vec{e}_n$.
Он задается упорядоченной n-кой действительных чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$ – его координат: $\vec{r}(x_1, x_2, ..., x_n)$. Они называются также координатами соответствующей точки M.

Пусть даны две точки $M(\vec{r})$ и $M'(\vec{r}')$. Так как $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'}$, то, обозначив $\vec{v}_{MM'} = \vec{v}$, имеем

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{v}. \tag{3.1}$$

Отсюда, прежде всего, вытекает

$$\vec{v} = \vec{r}' - \vec{r}. \tag{3.2}$$

Если M и M' соответственные точки при параллельном переносе t с вектором $\vec{v}$, то $\vec{v}_{MM'} = \vec{v}$ для любой точки M. Формула (3.1) тогда указывает на связь между векторами положения соответственных точек $\quad t_v: \quad M(\vec{r}) \to M'(\vec{r} + \vec{v})$.

3.5. Пример аффинного пространства

Выяснив, что координатизация многомерного аффинного пространства устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками и векторами, и представив векторное выражение параллельного переноса, можно получить план построения примеров аффинных пространств. Более того, можно построить аффинное пространство с заданной группой его параллельных переносов.

Пусть $V=\{\vec{v}\}$ – некоторое линейное пространство. Отнесем каждому вектору этого пространства некоторый новый объект, называемый *точкой* и обозначаемый через $(\vec{r})$. Полагаем при этом, что разным векторам соответствуют разные точки. Множество всех точек, принадлежащих V, обозначим через R. Введем на нем параллельные переносы и назовем их отображениями $(\vec{r})\to(\vec{r}+\vec{v})$, где $\vec{v}$ некоторый постоянный вектор. Очевидно, что перенос t_v, определенный вектором $\vec{v}$, является взаимно однозначным отображением, т. е. преобразованием. Далее различным векторам $\vec{v}$ соответствуют различные параллельные переносы; справедливо и обратное.

Множество T всех параллельных переносов удовлетворяет аксиоме А2. Действительно, точка $(\vec{r})$ преобразуется в точку $(\vec{r}')$ переносом $t_{\vec{v}}$, где $\vec{v}$ удовлетворяет условию (3.1), а следовательно и (3.2). Очевидно далее, что

$$t_{\vec{v}}+t_{\vec{w}}=t_{\vec{v}+\vec{w}}\,. \tag{3.3}$$

Из (3.3) видно также, что соответствие между векторами $\vec{v}$ и переносами $t_{\vec{v}}$ изоморфно относительно сложения. Отсюда непосредственно следует, что $T=\{t_{\vec{v}}\}$ образует группу, коммутативную относительно введенной операции.

Определим на множестве T операцию умножения на вещественное число α, положив $\alpha\, t_{\vec{v}}=t_{\alpha\vec{v}}$.

Из определения видно, что соответствие между векторами $\vec{v}$ и параллельными переносами $t_{\vec{v}}$ изоморфно относительно умножения. Поэтому переносы, так же как и векторы, образуют линейное пространство. Следовательно, R является аффинным пространством с $T=\{t\}$, изоморфным данному векторному пространству $V=\{\vec{v}\}$.

3.6. *K*-мерные плоскости

Пусть в линейном пространстве T выделено k-мерное подпространство T_k. Оно является некоторой группой преобразований множества R в себя. Назовем точки A и B *эквивалентными относительно* T_k, если существует параллельный перенос $t\in T_k$, преобразующий A в B. Так как T_k – группа, то отношение эквивалентности рефлексивно, симметрично и транзитивно. Поэтому R распадается на *классы эквивалентности*. Они называются *k-мерными плоскостями*.

Каждый класс эквивалентности задается любым своим элементом, т. е. каждая k-мерная плоскость, связанная с данным линейным подпространством параллельных переносов T_k, определяется своей точкой A.

Итак, *k-мерной плоскостью*, связанной с данным подпространством переносов $T_k \in T$ *и проходящей* через данную точку A, называется множество точек, *эквивалентных* точке A относительно группы T_k.

Непосредственно из определения следует, что всякая n-мерная плоскость в аффинном пространстве R_n является подпространством пространства R.

4. КОНЕЧНЫЕ ПРОЕКТИВНЫЕ ПЛОСКОСТИ

Введение

Конечные геометрии представляют собой один из разделов дискретной математики. Исторически теория конечных геометрий складывалась под влиянием комбинаторных, геометрических и алгебраических идей и методов. На русском языке насчитывается порядка десяти переводных книг, посвященных общей комбинаторной теории, по которым можно познакомиться с современным состоянием этой дисциплины.

Непосредственно тематике конечных геометрий посвящена книга венгерского математика Ф. Картеси «Введение в конечные геометрии» (М.: Наука, 1980). Основополагающей по теории проективных плоскостей является обзорная статья Л.А. Скорнякова «Проективные плоскости» (1951), а по общей теории комбинаторного анализа – книга профессора Московского университета К.А. Рыбникова «Введение в комбинаторный анализ» (1972). Из публикаций последних лет можно отметить книгу В.Н. Сачкова «Введение в комбинаторные методы дискретной математики» (1982) и обзорную статью Б.И. Аргунова и Е.П. Емельченкова «Инцидентностные структуры и тернарные алгебры» (1982), в которых рассматриваются и конечные геометрии.

Учебное пособие написано по материалам спецкурса для студентов четвертого курса математического факультета Пермского пединститута. Его содержание и методы изложения практически не пересекаются с упомянутой книгой Ф. Картеси «Введение в конечные геометрии», а существенно дополняют ее.

Пособие знакомит читателя с основными понятиями и методами теории конечных геометрий, некоторыми достижениями последних лет, сообщает о нерешенных проблемах. В пособии материал распределен на десять параграфов. Сначала дается понятие инцидентностной структуры, являющееся наиболее общим; другие системы определяются как частные ее случаи. Затем вводятся частичные плоскости, проективные плоскости, аффинные плоскости, r-сети.

Для конечных проективных и аффинных плоскостей рассматривается процесс их построения над конечными полями, а также обратный процесс координатизации сетей и плоскостей алгебраическими системами, включая тернары. Дается описание конечных аффинных плоскостей латинскими квадратами. Подробно излагается вопрос о группах коллинеаций различных плоскостей и связи их с реализацией различных конфигурационных теорем.

В заключении сообщаются известные к настоящему времени результаты о существовании и единственности проективных плоскостей малых порядков.

4.1. Инцидентностные структуры

4.1.1. Исходные определения

Проективные и тесно связанные с ними аффинные плоскости входят в обширный класс более общих математических структур.

Определение. *Инцидентностной структурой* называется пара непересекающихся множеств P и L с соотношением инцидентности I, связывающим некоторые элементы из P с некоторыми элементами из L.

Элементы множества P называются *точками*, а элементы множества L – *блоками*. Точки будут обозначаться большими, а блоки – малыми латинскими буквами. Обозначение может быть индивидуальным, т. е. присвоенным только одному элементу, но допускаются и коллективные обозначения всех элементов некоторого типа одной и той же буквой. Для индивидуализации элемента или выделения подтипа применяются различные индексы. Вместо полного обозначения элемента буквой с индексом можно использовать сам индекс, если это не ведет к недоразумениям. Тождество и различие элементов будут обозначаться, соответственно, знаком равенства и знаком неравенства.

В общем случае множества P и L задаются некоторыми правилами, устанавливающими, из каких объектов они состоят. Аналогично, инцидентность точек и блоков задается правилом, позволяющим для любой точки A и любого блока a установить, инцидентны они или нет. Это равносильно заданию некоторого множества

$$G_{\mathrm{I}} = \{(A,a) \mid A\mathrm{I}a\},$$

состоящего из пар (A, a), где A – точка, a – блок и A инцидентна a. Каждая такая пара называется *флагом.* Множество G_I, состоящее из всех флагов, называется *графиком* соотношения инцидентности. Так как любая пара (A, a) принадлежит прямому произведению

$P \times L = \{(A, a) \mid A \in P, a \in L\}$ множеств P и L, то $G_I \subset P \times L$.

В свою очередь, задание множества G_1 равносильно заданию его характеристической функции, т. е. функции $h(X, x)$, заданной на множестве $P \times L$ всех пар и имеющей значение 1, если $(X, x) \in G_1$, т. е. $X\mathrm{I}x$; и значение 0, если $(X, x) \notin G_1$ т. е. $X \not{\mathrm{I}}\, x$.

Заметим, что определение инцидентностной структуры позволяет после выбора множеств P и L ввести инцидентность совершенно произвольно.

В качестве примера инцидентностной структуры можно взять классическую евклидову плоскость, понимая под блоками все ее прямые, рассматривая точки и инцидентность обычным образом. За точки и блоки можно принять точки и плоскости или прямые и плоскости трехмерного евклидова пространства при обычном понимании инцидентности. Весьма общим примером является следующий: P – произвольное множество, L – некоторое множество подмножеств P, инцидентность будем понимать как принадлежность элемента подмножеству.

Хотя некоторые инцидентностные структуры могут весьма мало походить на плоскость, при изучении таких структур используется обычная геометрическая терминология. Прежде всего, соотношение, обратное соотношению инцидентности, имеет это же название и то же самое обозначение. Другими словами, инцидентность рассматривается как симметричное соотношение. Однако можно эти два соотношения различать.

Определение. Если точка и блок инцидентны между собой, то точка называется *лежащей в блоке*, а блок называется *проходящим через точку.*

Точка, лежащая в блоке, сокращенно называется точкой этого блока. Аналогично, допустимо, хотя это и малоупотребительно, называть блок, проходящий через точку, блоком этой точки. В соответствии с этим, точка, лежащая во всех данных блоках, называется их общей точкой; блок, проходящий через все данные точки, можно называть общим блоком этих точек.

Определение. Точки, лежащие в одном блоке, называются *коллинеарными*: любое множество коллинеарных точек называется *рядом*, а их общий блок – *осью* или *носителем* ряда. Блоки, проходящие через одну точку, называются *конкурентными*; любое множество конкурентных блоков называется *пучком*, а их общая точка – *центром* пучка.

В частности, множество всех точек одного блока будем называть полным рядом, а множество всех блоков одной точки – полным пучком. Ясно, что полный ряд задается его осью, а полный пучок – его центром.

Определение. Блок, проходящий через две данные точки, называется *соединением* этих точек. Точка, лежащая в двух данных блоках, называется *пересечением* этих блоков.

Соединение точек A и B будем обозначать через AB. В общем случае это обозначение является коллективным, так как точки A и B могут иметь различные общие блоки. С другой стороны, точки A и B могут оказаться неколлинеарными, тогда соединение AB не существует. Определение допускает совпадение точек A и B; ясно, что AA обозначает любой блок, проходящий через точку A, а символ $\{AA\}$ – множество всех блоков, проходящих через A, т. е. полный пучок с центром A. Бинарная операция, относящая точкам A и B их соединение AB, также носит название соединения. Эта операция в общем случае неоднозначна и не всегда выполнима, но она коммутативна в том смысле, что любой блок AB есть блок BA, и наоборот.

Пересечение блоков a и b будем обозначать посредством ab, это обозначение также является коллективным; в случае неконкурентности блоков a и b пересечение ab не существует. Символ aa обозначает любую точку блока a, а символ $\{aa\}$ – полный ряд с осью a. Бинарная операция, относящая блокам a и b их пересечение ab, в общем случае неоднозначна и не всегда выполнима, но она коммутативна.

4.1.2. Конечные инцидентностные структуры

Инцидентностная структура называется *конечной* или *бесконечной* в зависимости от количества всех ее элементов. Число $|P|$ точек конечной структуры обозначим через v, а число $|L|$ всех ее блоков – через b. Множество P точек и множество L блоков конечной инцидентностной структуры могут быть заданы перечислением их элементов. Аналогично, инцидентность можно задать перечислением всех элементов графика G_I, т. е. всех флагов. Порядок флагов в списке может быть произвольным, однако экономнее и удобнее для пользования ввести некоторую систему. Можно флаги сгруппировать по точкам, перечислив для каждой из них все проходящие через нее блоки, т. е. дать список всех полных пучков. Можно, наоборот, сгруппировать флаги по блокам и для каждого из них перечислить все лежащие в нем точки, т. е. дать список всех полных рядов.

Для задания инцидентности характеристической функцией $h(X, x)$, зависящей от двух аргументов, целесообразно построить прямоугольную таблицу из v строк, соответствующих точкам, и b столбцов, соответствующих блокам. Тогда паре (M, m) соответствует ячейка таблицы, лежащая в строке для точки M и в столбце для блока m. В эту ячейку вносится значение $h(M, m)$, т. е. 1, если MIm, и 0, если $M \not{I}\, m$. Такая таблица называется *матрицей инцидентности.* Разрешается вместо 1 вносить другой символ, например × или •. В таких случаях нули обычно опускаются, т. е. соответствующие ячейки оставляются пустыми.

Каждая строка матрицы инцидентности показывает, в каких блоках лежит точка, сответствующая этой строке, т. е. она задает некоторый полный пучок. Аналогично, каждый столбец этой матрицы задает один из полных рядов.

Для подсчета всех инцидентностей обозначим через k_a число всех точек, лежащих на прямой a, а через r_A – число всех блоков, проходящих через точку A. Эти числа легко находятся по матрице инцидентности, а именно, k_a равно числу единиц в столбце a, r_A – числу единиц в строке A. Число всех инцидентностей, равное числу $|G_I|$ элементов графика G_I, можно найти как суммированием по точкам, так и суммированием по прямым. Это дает формулу

$$|G_I| = \sum_{A \in P} r_A = \sum_{a \in L} k_a \,. \tag{1.1}$$

Ясно, что число $|G_I|$ равно числу всех единиц в матрице инцидентности.

Определение. Конечная инцидентностная структура называется *регулярной*, если в каждом блоке лежит одно и то же число точек и через каждую точку проходит одно и то же число блоков.

Это значит, что все k_a равны некоторому числу k, все r_A равны некоторому числу r. Так как число всех точек обозначено через v, то теперь $\sum r_A = vr$; аналогично, $\sum k_a = bk$, и формула (1.1) принимает вид

$$|G_I| = vr = bk. \qquad (1.2)$$

Выделим важный частный случай.

Определение. Регулярная конечная инцидентностная структура называется *блочным планом* или *блок-схемой*, если через *любые* две различные точки проходит одно и то же число λ блоков.

Блок-схемы имеют ряд применений в теории планирования экспериментов.

Таблица 1

I	a	b	c	r_A
A	1	1	0	2
B	1	1	1	3
C	1	1	0	2
D	0	0	1	1
E	0	0	0	0
k_m	3	3	2	8

Определение. Регулярная конечная инцидентностная структура называется *симметричной*, если число ее точек равно числу блоков, т. е. $v = b$.

Заметим, что на основании формулы (1.2) равенство $v = b$ влечет $k = r$.

Любую конечную инцидентностную структуру можно представить плоским чертежом, изобразив каждую ее точку некоторой отмеченной точкой плоскости, а каждый блок – отрезком гладкой линии, лучше всего прямой, содержащим изображения всех точек, лежащих в этом блоке.

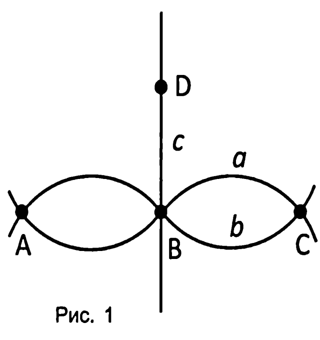


Рис. 1

Пусть, например, $P = \{A, B, C, D, E\}$; $L = \{a, b, c\}$, инцидентность задана матрицей, показанной на табл. 1. Изображение структуры $\Sigma = \langle P, L, \mathbf{I} \rangle$ дано на рис. 1. Матрица здесь расширена добавлением строки значений k_m и столбца значений r_A, добавлено также число $|G_I| = 8$.

4.1.3. Инцидентностные подструктуры

Часть множества всех элементов иницидентностной структуры естественно назвать подструктурой, если на ней сохранены все инцидентности и не введено новых. Выразим это точнее.

Определение. Инцидентностная структура $\Sigma' = \langle P', L', \mathrm{I}' \rangle$ называется инцидентностной *подструктурой* структуры $\Sigma = \langle P, L, \mathrm{I} \rangle$, если $P' \subset P; L' \subset L$ и

$$A \in P'.\ a \in L' \Rightarrow (A \mathrm{I}' a \Leftrightarrow A \mathrm{I} a). \qquad (1.3)$$

Структура Σ в этом случае называется *надструктурой* структуры Σ'.

Из определения следует, что

$$A \mathrm{I}' a \Leftrightarrow A \in P'.\, a \in L'.\ A \mathrm{I} a. \qquad (1.4)$$

Действительно, инцидентность I' задана в структуре Σ', поэтому $A \mathrm{I}' a \Rightarrow A \in P',\ a \in L'$. По формуле (1.3) имеем $A \mathrm{I}' a \Leftrightarrow A \mathrm{I} a$, откуда $A \mathrm{I}' a \Rightarrow A \mathrm{I} a$. Следовательно, левая часть формулы (1.4) влечет правую. Пусть, наоборот, дано $A \in P', a \in L', A \mathrm{I} a$. Условие $A \in P', a \in L'$ снова влечет $A \mathrm{I}' a \Leftrightarrow A \mathrm{I} a$, откуда $A \mathrm{I} a \Rightarrow A \mathrm{I}' a$; правая часть формулы (1.4) влечет левую. Таким образом, правая и левая части эквивалентны.

Так как

$$A \in P'.\ a \in L' \Leftrightarrow (A, a) \in P' \times L';\ A \mathrm{I} a \Leftrightarrow (A, a) \in G_{\mathrm{I}};$$

$A \mathrm{I}' a \Leftrightarrow (A, a) \in G_{\mathrm{I}'}$, то формула (1.4) и определение пересечения множеств дают

$$(A, a) \in G'_{\mathrm{I}} \Leftrightarrow (A, a) \in P' \times L'. (A, a) \in G_{\mathrm{I}} \Leftrightarrow (A, a) \in (P' \times L') \cap G_{\mathrm{I}},$$

откуда

$$G_{\mathrm{I}'} = (P' \times L') \cap G_{\mathrm{I}}. \qquad (1.5)$$

Матрица инцидентности подструктуры Σ' конечной инцидентностной структуры Σ является *подматрицей* (минором) матрицы инцидентности для Σ. Она состоит из строк и столбцов, соответствующих элементам подмножеств P' и L'.

Для получения подструктуры Σ' данной структуры Σ подмножества P' и L' можно брать произвольно, но после их выбора инцидентность I' оказывается вполне определенной. Многие подструктуры уже встречались в предыдущем изложении: это любые флаги, ряды точек, пучки блоков. Далее встретятся более сложные примеры.

Из формулы (1.5) следует $G_{I'} \subset G_I$, однако это соотношение, как будет показано, слабее условия (1.3), входящего в определение подструктуры и не может его заменить. Введем более общее понятие.

Определение. Инцидентностная структура $\Sigma' = \langle P', L', \mathrm{I}' \rangle$ называется инцидентностной *субструктурой* структуры $\Sigma = \langle P, L, \mathrm{I} \rangle$, Σ – *суперструктурой* структуры Σ', если $P' \subset P$; $L' \subset L$ и $G_{I'} \subset G_I$.

Как и для подструктур, имеем $A\mathrm{I}'a \Rightarrow A \in P'.\ a \in L'$, т.е., откуда $G_{I'} \subset P' \times L'$. Поэтому условие равносильно условию

$$G_{I'} \subset (P' \times L') \cap G_I, \qquad (1.6)$$

более слабому, чем условие (1.5). Отсюда видно, что каждая подструктура является субструктурой, но обратное неверно.

Интересен частный случай, когда $P' = P$ и $L' = L$, т. е. субструктура Σ' содержит все элементы структуры Σ, но, вообще говоря, не все ее инцидентности. К нему можно свести и общий случай. Сопоставим субструктуру $\Sigma' = \langle P', L', \mathrm{I}' \rangle$ с подструктурой $\Sigma'' = \langle P', L', \mathrm{I}'' \rangle$. По формуле (1.4), $G_{I''} = (P' \times L') \cap G_{I'}$; по формуле (1.6) $G_{I'} \subset G_{I''}$. Таким образом, субструктура Σ' и подструктура Σ'' имеют одни и те же элементы и $G_{I'} \subset G_{I''}$. Переход от Σ к Σ' состоит в выделении некоторой подструктуры и сохранении некоторых, но не обязательно всех, ее инцидентностей.

Наоборот, добавление новых инцидентностей к имеющимся дает некоторую суперструктуру данной структуры. Иногда такая структура называется частным случаем данной структуры.

4.1.4. Коллинеации и корреляции

Рассмотрим важнейшие виды отображений инцидентностных структур в такие же структуры. Отображения будут обозначаться малыми латинскими буквами, а образы точки A и блока a в отображении f – обычно через $f(A)$ и $f(a)$. В соответствии с этим композиция отображений f и g будет называться их произведением и обозначаться посредством gf. В отдельных случаях, однако, удобны аддитивные обозначения.

Определение. Изоморфное отображение инцидентностной структуры в такую же структуру называется *коллинеацией.*

Другими словами, коллинеация структуры $\Sigma = \langle P, L, \mathrm{I} \rangle$ в структуру $\Sigma' = \langle P', L', \mathrm{I}' \rangle$ есть взаимно однозначное (биективное) отображение f множества $P \cup L$ на множество $P' \cup L'$, относящее точкам точки, блокам – блоки и удовлетворяющее условию

$$A\mathrm{I}a \Leftrightarrow f(A)\,\mathrm{I}'f(a). \qquad (1.7)$$

Это условие равносильно совокупности двух более слабых:

$A\mathrm{I}a \Rightarrow f(A)\,\mathrm{I}\,f(a)$; $\qquad f(A)\,\mathrm{I}'\,f(a) \Rightarrow A\mathrm{I}a$.

Первое из них утверждает, что коллинеация сохраняет инцидентность точек и блоков, второе дает то же самое для обратного отображения. По закону контрапозиции, второе условие эквивалентно следующему: $A\not{\mathrm{I}}\,a \Rightarrow f(A)\not{\mathrm{I}}'f(a)$.

Таким образом, условие (1.7) равносильно тому, что отображение f сохраняет как инцидентность, так и неинцидентность точек и блоков.

Из определения коллинеации сразу следуют некоторые связи между различными отображениями. Отображение, обратное коллинеации Σ в Σ', есть коллинеация Σ' в Σ.

Произведение коллинеации Σ в Σ' на коллинеацию Σ' в Σ'' есть коллинеация Σ в Σ'.

Коллинеацию структуры Σ в эту же структуру Σ будем называть просто коллинеацией Σ, или *автоморфизмом* Σ. Непосредственным следствием последних предложений является ***утверждение:*** *множество всех коллинеаций инцидентностной структуры есть группа.*

Роль единичного элемента этой группы играет тождественное преобразование, обозначаемое далее буквой *e*.

Математическая структура называется *изоморфной* другой структуре, если существует изоморфное отображение первой структуры на вторую. Соотношение изоморфизма рефлексивно, симметрично и транзитивно, т. е. представляет собой некоторую *эквивалентность*. Поэтому множество математических структур, рассматриваемых в некотором вопросе, распадается на классы изоморфизма, и все структуры одного класса задают одну и ту же абстрактную структуру. Все сказанное относится и к инцидентностным структурам. Во многих случаях нас будут интересовать именно абстрактные инцидентностные структуры.

Рассмотрим другой тип отображений, тесно связанных с коллинеациями.

Определение. *Корреляцией* инцидентностной структуры $\Sigma = <P, L, \mathrm{I}>$ в структуру $\Sigma' = <P', L', \mathrm{I}'>$ называется взаимно однозначное отображение f множества $P \cup L$ на множество $P' \cup L'$, относящее точкам блоки, а блокам – точки и удовлетворяющее условию $A \mathrm{I} a \Leftrightarrow f(A)\ \mathrm{I}'\ f(a)$.

Это условие внешне совпадает с условием (1.7) и будет упоминаться под этим индексом. Как и для коллинеаций, из него следует, что корреляция f и обратное ей отображение f^{-1} сохраняют инцидентность точек и блоков и что f сохраняет неинцидентность. Аналогичны и дальнейшие следствия.

Отображение, обратное корреляции Σ в Σ', есть корреляция Σ' в Σ. Произведение корреляции Σ в Σ' на корреляцию Σ' в Σ'' есть коллинеация Σ в Σ''. Произведение коллинеации Σ в Σ' на корреляцию Σ' в Σ'' и произведение корреляции Σ в Σ' на коллинеацию Σ' в Σ'' являются корреляциями Σ в Σ''.

Корреляцию структуры Σ в эту же структуру Σ будем называть просто корреляцией Σ. Из предыдущего непосредственно следует такое ***утверждение***: *множество всех коллинеаций и корреляций инцидентностной структуры есть группа.*

Эта группа содержит группу коллинеаций данной структуры в качестве подгруппы. Корреляции группы не образуют хотя бы потому, что произведение двух корреляций не является корреляцией.

Корреляция f инцидентностной структуры может совпасть с обратной корреляцией f^{-1}. Равенство $f = f^{-1}$, равносильное $f^2 = e$, равносильно также взаимности соответствия между элементами, т. е. условию $f(A) = a \Leftrightarrow f(a) = A$.

Преобразования множества в себя с таким свойством называются *инволюционными.* Инволюционные корреляции имеют особое название.

Определение. Инволюционная корреляция инцидентностной структуры называется *полярностью.*

Инцидентностная структура, имеющая полярность, называется *автополярной.*

Примером полярности может служить отображение вершин и сторон трехвершинника, относящее каждой вершине противолежащую сторону, а каждой стороне – противолежащую вершину. Еще проще пример полярности флага, относящей точке флага его блок, а блоку – точку. Среди корреляций важное значение имеют следующие.

Определение. *Дуализацией* инцидентностной структуры называется переименование ее точек в блоки, а блоков в точки с сохранением инцидентности.

Ранее каждый элемент структуры рассматривался с учетом того, какую роль, точки или блока, он играет. Но прежде эта роль для каждого элемента была постоянной, теперь же она сделана переменной. Обозначим дуализацию буквой d, блок $d(A)$ и точку $d(a)$, полученные из точки A и блока a их переименованием, через A^* и a^*, соответственно. Дуализация преобразует структуру $\Sigma = <P, L, \mathrm{I}>$ в новую инцидентностную структуру

$$\Sigma^* = <P^*, L^*, \mathrm{I}^*>, \text{ где}$$

$$P^* = d(L) = \{a^* | \, a \in L\}; \, L^* = d(P) = \{A^* | \, A \in P\}; \, a^* \, \mathrm{I} \, A^* \Leftrightarrow a \, \mathrm{I} \, A.$$

Определение. Инцидентностная структура Σ^*, полученная из данной структуры Σ дуализацией, называется *двойственной* или *дуальной*, короче – *дуалью* данной структуры.

Из определения дуализации видно, что ее повторение возвращает каждому элементу прежнее имя. Поэтому отображение d^{-1} , обратное дуализации d структуры Σ в структуру Σ', есть дуализация Σ' в Σ. Это можно выразить следующим образом: инцидентностная структура, двойственная дуали данной структуры, есть сама данная структура.

Каждая дуализация является некоторой корреляцией. Поэтому произведение дуализации на коллинеацию и произведение коллинеации на дуализацию являются корреляциями. Оказывается, что к такой форме можно привести любую корреляцию.

Каждая корреляция представима как произведение дуализации на коллинеацию и как произведение коллинеации на дуализацию.

Действительно, пусть дана корреляция f структуры Σ в структуру Σ'. Обозначим буквой d дуализацию Σ в ее дуаль Σ^*, тогда d^{-1} будет обратной дуализацией Σ^* в Σ. Далее, $g = fd^{-1}$, как произведение двух корреляций будет коллинеацией Σ^* в Σ. Отсюда получаем $f = fd^{-1}d = gd$, т. е. f есть произведение дуализации структуры на некоторую коллинеацию. Обозначим теперь через d дуализацию Σ' в ее дуаль Σ'^*, тогда d^{-1} будет дуализацией Σ'^* в Σ'. Отображение $g = df$ будет коллинеацией Σ в Σ'^* и $f = d^{-1}df = d^{-1}g$, т. е. f есть произведение некоторой коллинеации структуры Σ на дуализацию ее образа.

4.1.5. Принцип двойственности

Будем называть объектами теории инцидентностных структур не только элементы и подструктуры, но также различные свойства и соотношения. При дуализации инцидентностной структуры, в результате переименования элементов, каждый объект переходит в другой объект, имеющий, вообще говоря, другое название. Например, при дуализации ряд, т. е. множество точек, инцидентных некоторому блоку, обращается в множество блоков, инцидентных некоторой точке – образу этого блока, т. е. в пучок. Множество коллинеарных точек обращается в множество конкурентных блоков, поэтому такое свойство множества точек, как коллинеарность, переходит в конкурентность блоков. Если дано некоторое название объектов, то в различных инцидентностных структурах имеются различные объекты, имеющие это название. При дуализации эти объекты имеют различные образы, но всем им можно присвоить одно название. Фактически терминология теории инцидентностных структур строится так, что общее название этих образов в ней имеется.

Таким образом, дуализация позволяет установить некоторое соответствие между названиями объектов и их образов, а тем самым – соответствие между понятиями, выражаемыми этими названиями. Это соответствие между понятиями называется двойственностью. Так как отображение, обратное дуализации, есть дуализация, то двойственность понятий взаимна. Понятие, двойственное данному, вообще говоря, отлично от него, но может совпадать с ним. Из определения дуализации получаются следующие ***утверждения***:

Понятия точки и блока двойственны друг другу.

Понятие инцидентности двойственно себе.

Понятие инцидентностной структуры двойственно себе.

Взаимно двойственны понятия ряда и пучка, коллинеарности точек и конкурентности прямых, соединения точек и пересечения блоков. Двойственны себе понятие флага, коллинеации, корреляции, полярности.

Определение. Предложение, полученное из данного предложения заменой каждого содержащегося в нем понятия на двойственное ему понятие, называется предложением, *двойственным* данному.

Теоретико-множественные и арифметические понятия при этом не заменяются на другие; падежи и предлоги заменяются по грамматическим правилам. Слово «предложение» используется здесь в широком смысле; им названы определения, аксиомы, теоремы. Если некоторое предложение справедливо для инцидентностной структуры Σ, то двойственное ему предложение справедливо для ее дуали Σ^*.

Действительно, при дуализации каждое понятие, входящее в данное предложение, переименовывается в двойственное ему понятие, поэтому связи между понятиями, выражаемые данным предложением, переходят в связи между двойственными понятиями, выражаемые двойственным предложением.

Предложение, справедливое для любой инцидентностной структуры, назовем предложением теории инцидентностных структур. Докажем следующее важное утверждение.

***Принцип двойственности**: предложение, двойственное предложению теории инцидентностных структур, также является предложением теории инцидентностных структур.*

Действительно, пусть данное предложение справедливо для любой инцидентностной структуры. Возьмем произвольную структуру Σ, она имеет дуаль Σ^*. По условию, данное предложение справедливо для Σ^*. Поэтому двойственное ему предложение справедливо для дуали структуры Σ^*, т. е. – для структуры Σ. Так как это верно для любой структуры Σ, то принцип доказан.

Из принципа двойственности видно, что предложение, двойственное определению некоторого понятия, является определением понятия, двойственного данному. Поэтому для двойственных понятий можно брать взаимно двойственные определения и список взаимно двойственных понятий получить из последовательного сопоставления определений. Более того, такой подход можно использовать для рекурсивного определения самого соотношения двойственности понятий.

В дальнейшем будут рассматриваться частные типы инцидентностных структур. Они будут задаваться некоторыми условиями (аксиомами), налагаемыми на структуру. Структуры, двойственные структурам данного типа, должны иметь двойственное определение и поэтому задаваться условиями, двойственными условиям, характеризующим данный тип. Если совокупность условий, задающих данный тип, двойственна себе, то данный тип структур двойствен себе.

Предложение, справедливое для всех инцидентностных структур данного типа, назовем предложением теории инцидентностных структур этого типа. Из принципа двойственности получается следующее ***утверждение:*** *предложение, двойственное предложению теории инцидентностных структур некоторого типа, является предложением теории инцидентностных структур типа, двойственного данному.*

В частности, если данный тип структур двойствен себе, то предложение, двойственное предложению теории структур этого типа, также является предложением для этих структур. Это можно выразить следующим образом.

Если данный тип структур двойствен себе, то в теории структур этого типа справедлив принцип двойственности.

Принцип двойственности позволяет доказывать только одно из двух взаимно двойственных предложений и поэтому сокращает работу по построению теории. ***Приведем пример***: *если инцидентностная структура имеет три различные неколлинеарные точки, то для каждого блока существует не лежащая в нем точка.*

Действительно, пусть точки A, B, C различны и неколлинеарны. Возьмем любой блок m. Если бы точки A, B, C лежали в блоке m, то они были бы коллинеарными, но это противоречит условию. Поэтому хотя бы одна из точек A, B, C не лежит в блоке m.

По принципу двойственности справедливо следующее предложение:

Если инцидентностная структура имеет три различных неконкурентных блока, то для каждой точки существует не проходящий через нее блок.

4.2. Частичные плоскости

4.2.1. Определение и основные свойства

Наложим на инцидентностную структуру некоторые ограничения, позволяющие называть ее, хотя и несколько условно, плоскостью. Блоки далее будут называться *прямыми*.

Определение. Инцидентностная структура называется *частичной плоскостью*, если выполняются следующие условия (аксиомы):

0') Для любых двух различных точек существует самое большее одна прямая, проходящая через обе точки.

0'') Для любых двух различных прямых существует самое большее одна точка, лежащая на обеих прямых.

Символически эти условия выражаются следующим образом:

$$A, B \,\mathrm{I} a, b.\ A \neq B \Rightarrow a = b \qquad (2.1)$$
$$A, B \,\mathrm{I} a, b.\ a \neq b \Rightarrow A = B. \qquad (2.2)$$

Условия 0') и 0'') двойственны друг другу, поэтому в теории частичных плоскостей выполняется принцип двойственности.

Условия 0') и 0'') равносильны.

Действительно, пусть выполняется условие 0'). Допустим, что две различные прямые a, b имеют две различные общие точки A и B. Тогда через A и B будут проходить две различные прямые, что противоречит условию 0'). Следовательно, прямые a и b имеют не более одной общей точки, т. е. выполняется условие 0''). По принципу двойственности для инцидентностных структур из 0'') следует 0').

Формально импликации (2.1) и (2.2) получаются друг из друга по обобщенному правилу контрапозиции.

Из доказанного следует, что в определении частичной плоскости можно оставить только одно из условий 0') и 0''). Можно также заменить их на одно условие, интересное тем, что оно двойственно себе.

0) Не существует двух различных точек, лежащих одновременно на двух различных прямых.

Это можно записать как $A, B \,\mathrm{I}\, a, b \Rightarrow \overline{A \neq B.\ a \neq b}$, или, проще,

$$A, B \,\mathrm{I}\, a, b \Rightarrow A = B \vee a = b. \qquad (2.3)$$

Формально (2.3) получается заменой (2.1) на

$A, B \mathrm{I} a, b \Rightarrow (A \neq B \Rightarrow a = b)$ и использованием эквивалентности $(A \neq B \Rightarrow a = b) \Leftrightarrow A = B \vee a = b$.

Условие 0) для конечных частичных плоскостей обозначает, что матрица инцидентности не должна иметь подматриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотренные условия равносильны также следующим двум условиям, на которые иногда будем ссылаться.

***Условия неинцидентности*:**

а) *Прямая, проходящая через одну из двух различных точек другой прямой, не проходит через вторую точку.*

б) *Точка, лежащая на одной из двух различных прямых, проходящих через другую точку, не лежит на второй прямой.*

Эти условия двойственны друг другу. С другой стороны, они выражают одну и ту же мысль; это видно из того, что оба они записываются одной импликацией

$$A\mathrm{I}b.\ B\mathrm{I}a.\ B\mathrm{I}b.\ A \neq B.\ a \neq b \Rightarrow A \not\mathrm{I}\, a. \tag{2.4}$$

Формально (2.4) получается из (2.1) заменой сокращенной записи A, $B\mathrm{I}a$, b на полную $A\mathrm{I}a$, $A\mathrm{I}b$, $B\mathrm{I}a$, $B\mathrm{I}b$ и применением обобщенного правила контрапозиции. Равносильность двух условий неинцидентности видна также из рис. 2.

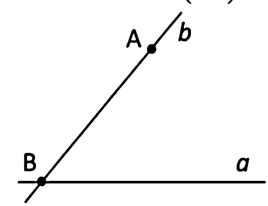


Рис. 2

Из условия 0') следует однозначность операции соединения любых двух различных точек, а из условия 0″) – однозначность операции пересечения любых двух различных прямых. Однако эти операции не всегда выполнимы.

Примерами бесконечных частичных плоскостей могут служить классические проективная и аффинная. В первой из них обе операции всегда выполнимы, во второй это верно для операции соединения, но операция пересечения выполнима не всегда, так как параллельные прямые лишены общей точки.

Пример конечной частичной плоскости – *трехвершинник*, т. е. структура, состоящая из трех точек (вершин) и трех прямых (сторон), соединяющих эти точки попарно. Другой пример – *полный четырехвершинник*, состоящий из четырех точек (вершин) и шести прямых (сторон), также соединяющих вершины попарно. Структура, двойственная полному четырехвершиннику, называется *полным четырехсторонником*. Последние три частичные плоскости изображены на рис. 3. Понятие

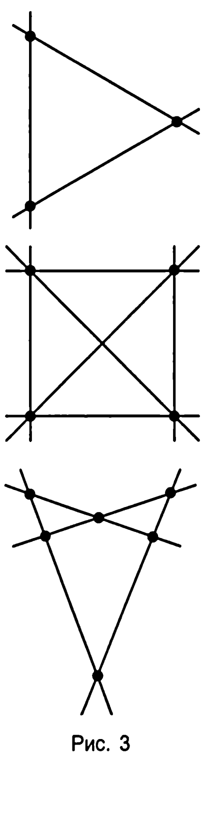


Рис. 3

частичной плоскости настолько широко, что многие из них совсем не напоминают привычные плоскости. Например, множество всех точек и прямых трехмерного евклидова пространства является частичной плоскостью. Это же верно для множества всех прямых, понимаемых как точки, и множества всех плоскостей, понимаемых как прямые того же пространства.

Рассмотрим некоторые свойства частичных плоскостей. Краткости ради иногда будем называть их просто *плоскостями.*

Признак неколлинеарности. *Если прямая, проходящая через две различные точки, не проходит через третью, то эти три точки различны и неколлинеарны.*

Пусть $A \neq B$; $s \mathrm{I} A, B$; $s \not\mathrm{I}\, C$. Так как $A \mathrm{I} s$ и $C \not\mathrm{I}\, s$, то $A \neq C$; аналогично, $B \neq C$. Таким образом, точки A, B, C попарно различны. Допустим, что они коллинеарны, т. е. существует прямая $t \mathrm{I} A, B, C$. Так как $s \not\mathrm{I}\, C$ и $t \mathrm{I} C$, то $s \neq t$. Но $s, t \mathrm{I} A, B$. Через две различные точки A и B проходят две различные прямые, что противоречит условию 0'). Допущение опровергнуто, следовательно, A, B, C неколлинеарны.

Принцип двойственности дает теперь следующее утверждение:

Признак неконкурентности. *Если точка, лежащая на двух различных прямых, не лежит на третьей, то эти три прямые различны и неконкурентны.*

Из определения частичной плоскости сразу следует и такое ***свойство***:

Любая подструктура частичной плоскости также является частичной плоскостью. Она называется *подплоскостью* данной плоскости.

4.2.2. Замкнутые плоскости

Выделим из класса частичных плоскостей один важный подкласс.

Определение. Частичная плоскость называется *замкнутой относительно соединения*, если выполняется следующее условие:

1') Для любых двух различных точек существует проходящая через них прямая.

В такой плоскости через любые две различные точки проходит точно одна прямая, операция соединения для несовпадающих точек строго однозначна. Любые две различные точки коллинеарны, так как они обе лежат на соединяющей их прямой.

В плоскости, замкнутой относительно соединения, существование трех неколлинеарных точек влечет существование трех неконкурентных прямых.

Действительно, пусть точки A, B, C неколлинеарны. Тогда прямые $a = BC$; $b = AC$ и $c = AB$ попарно различны, так как совпадение двух из них дало бы прямую, проходящую через все три точки. Далее, точка A лежит на прямых b и c, но не лежит на прямой $a = BC$. По признаку неконкурентности, прямые a, b, c неконкурентны.

Примерами плоскостей, замкнутых относительно соединения, могут служить классическая аффинная плоскость, любой ряд точек с его осью, трехвершинник, полный четырехвершинник.

Определение. Частичная плоскость называется *замкнутой относительно пересечения*, если выполняется следующее условие:

1$''$) Для любых двух различных прямых существует лежащая в них точка.

В такой плоскости любые две различные прямые пересекаются точно в одной точке, операция пересечения для несовпадающих прямых строго однозначна, любые две различные прямые конкурентны.

Условия 1$'$) и 1$''$) двойственны друг другу, поэтому можно сразу дать следующее ***утверждение***: *в плоскости, замкнутой относительно пересечения, существование трех неконкурентных прямых влечет существование трех неколлинеарных точек.*

Классическая аффинная плоскость и полный четырехвершинник удовлетворяют условию 1$'$), но не удовлетворяют условию 1$''$). Наоборот, полный четырехсторонник удовлетворяет условию 1$''$), но не условию 1$'$). Это показывает независимость условий 1$'$) и 1$''$). Плоскость может удовлетворять обоим условиям, примером служит хотя бы трехвершинник. Такие плоскости играют важную роль.

Определение. Частичная плоскость называется *замкнутой*, если она замкнута относительно соединения и относительно пересечения.

Так как условия 1$'$) и 1$''$) двойственны друг другу, то определение замкнутой плоскости двойственно себе. Поэтому в теории замкнутых частичных плоскостей выполняется принцип двойственности. Примерами замкнутых плоскостей служат классическая проективная плоскость, уже упомянутый трехвершинник, любой ряд, любой пучок. Заметим, что для ряда условие 1″) имеет пустое удовлетворение, так как в этом случае нет двух различных прямых. В случае пучка пустое удовлетворение имеет условие 1′).

Из *свойств* замкнутых плоскостей выделим следующее: *в замкнутой плоскости существование трех неколлинеарных точек влечет существование трех неконкурентных прямых и наоборот.*

Это непосредственно следует из двух ранее доказанных предложений, например: *если в замкнутой плоскости ось полного ряда и центр полного пучка неинцидентны, то ряд и пучок эквивалентны.*

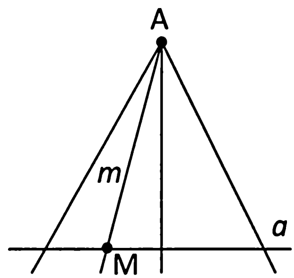


Рис. 4

Действительно, если ось a полного ряда $\{aa\}$ и центр A полного пучка $\{AA\}$ неинциндентны, то положим, что точка $M\mathrm{I}a$ и прямая $m\mathrm{I}A$ соответствуют друг другу, если и только если Mm (рис. 4). Тогда точке M соответствует прямая $m = AM$, она существует и единственна, а прямой m соответствует точка $M = am$, которая также существует и единственна. Поэтому рассматриваемое соответствие взаимно однозначно, и $\{aa\} \sim \{AA\}$ ряд и пучок имеют одно и то же число элементов.

4.2.3. Типы замкнутых плоскостей

Пусть дана некоторая замкнутая плоскость. Если плоскость не имеет точек, то она является пустым множеством или же состоит из одной прямой, так как в случае большего числа прямых существовали бы точки их пересечения. Единственную прямую можно рассматривать как ось пустого ряда. Если плоскость имеет только одну точку, то множество L ее прямых может быть пустым, может состоять только из одной прямой, проходящей или же не проходящей через данную точку, и может иметь более одной прямой. В последнем случае прямые должны пересекаться в данной точке. Таким образом, в рассматриваемом случае плоскость представляет собой пучок, возможно, пустой или состоящий только из одной прямой, вместе с его центром, или же состоит из неинцидентных точки и прямой, которые можно рассматривать, соответственно, как центр пустого пучка и ось пустого ряда.

Если точек более одной, но все они коллинеарны, то существует прямая a, на которой эти точки лежат. Если других прямых нет, то плоскость представляет собой ряд точек с его осью. Если же имеются другие прямые, то все они, вместе с прямой a, должны быть конкурентны, так как три неконкурентные прямые дали бы три неколлинеарные точки. В этом случае плоскость является объединением ряда точек и пучка прямых, центр которого принадлежит ряду.

Пусть плоскость имеет три неколлинеарные точки A, B, C, а поэтому и три неконкурентные прямые $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$. Любая, отличная от них прямая m, по условию 0), не может проходить через две из точек A, B, C. Если m проходит через одну из этих точек, то пересекает в ней две из прямых a, b, c, а третью пересекает в некоторой новой точке. Если же m не проходит ни через одну из точек A, B, C, то она пересекает прямые a, b, c в трех различных точках, отличных от A, B, C. Поэтому если точек, отличных от A, B, C нет, то нет и прямых, отличных от a, b, c. В этом случае плоскость является трехвершинником. В случае, когда точки, отличные от A, B, C, существуют и все лежат на одной из прямых a, b, c, например на a, то любая прямая m, отличная от a, b, c, должна пересекать прямые b и c в точке A, так как иначе точки bm и cm были бы различны и хотя бы одна из них не лежала на a. Плоскость оказывается объединением ряда с осью a и пучка с центром A, вместе с точкой A и прямой a (рис. 5). В случае трехвершинника за центр можно принять любую из точек A, B, C.

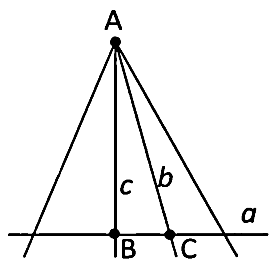


Рис. 5

Если, наконец, не все точки, отличные от неколлинеарных точек A, B, C, лежат на одной из прямых a, b, c, то существует четыре точки, неколлинеарные по три. Действительно,

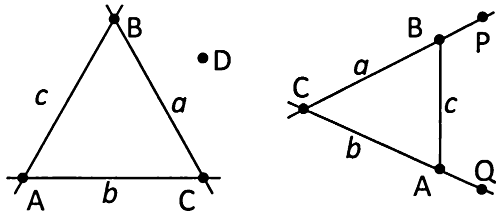


Рис. 6, a, b

если $D \not| a, b, c$ (рис. 6, a), то A, $B\mathrm{I}c\mathrm{I}D$, по признаку неколлинеарности, влечет неколлинеарность точек A, B, D. Аналогично, неколлинеарны точки A, C, D и точки B, C, D, а точки A, B, C неколлинеарны по условию. Пусть нарушение условия принадлежности точек, отличных от A, B, C, одной из прямых a, b, c состоит в том, что такие точки лежат на двух из этих прямых. Без ограничения общности можно положить, что имеются $P\mathrm{I}a$ и $Q\mathrm{I}b$ (рис. 6, b).

Тогда $A, Q \not| a = BP$ и $B, P \not| b = AQ$.

По принципу неколлинеарности, точки B, P, A неколлинеарны; это же верно для точек B, P, Q, точек A, Q, B и точек A, Q, P.

Заметим, что замкнутая плоскость, имеющая четыре точки, неколлинеарные по три, достаточно богата элементами. Точнее говоря, в ней выполняются следующие условия:

2′) На каждой прямой лежит по крайней мере три различные точки.

2″) Через каждую точку проходит по крайней мере три различные кривые.

Действительно, пусть точки A, B, C, D неколлинеарны по три. Снова возьмем прямые $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$ (рис. 6, a). Так как $A\mathrm{I}a$, то прямая $s = AD$ отлична от a и пересекается с a в некоторой точке P. Так как точки A, B, D коллинеарны, то s не проходит через B; аналогично, s не проходит через C. Поэтому точка P отлична от точки B и C, и на прямой a лежит не менее трех точек. Это верно и для прямых b и c.

Так как прямые a, b, c неконкурентны, то произвольно взятая точка M не лежит хотя бы на одной из этих прямых. Пусть, например, $M\mathrm{I}a$; тогда полный пучок $\{MM\}$ эквивалентен полному ряду $\{aa\}$, поэтому пучок имеет не менее трех элементов. Этим установлено выполнение условия 2″). Из существования трех неколлинеарных точек следует, что для любой прямой m существует не лежащая на ней точка M. Из эквивалентности ряда $\{mm\}$ пучку $\{MM\}$ следует, что ряд $\{mm\}$ имеет не менее трех точек. Следовательно, выполняется и условие 2′).

Справедливо и обратное: непустая замкнутая частичная плоскость, удовлетворяющая условиям 2′) и 2″), имеет четыре точки, неколлинеарные по три.

Прежде всего, плоскость, имеющая точку, имеет, по 2″), прямые; наоборот, из существования прямой следует, по 2′), существование точек. Поэтому непустая замкнутая плоскость имеет как точки, так и прямые.

Возьмем некоторую точку C. По 2″), существуют несовпадающие прямые a, b, проходящие через C. По 2′), на b лежат еще две точки A и Q, а на a – еще две точки B и P. Так как $A, C \mathrm{I} b \not\mathrm{I} B$, то точки A, B, C неколлинеарны, остальные две точки P и Q лежат на разных прямых $a = BC$ и $b = AC$ (рис. 6 b). Выше было установлено, что при этих условиях точки A, B, P, Q неколлинеарны по три.

Установив равносильность двух условий, введем новое понятие.

Определение. Непустая замкнутая частичная плоскость, удовлетворяющая условиям 2′) и 2″), называется *проективной плоскостью*.

Другие замкнутые плоскости будут называться непроективными; они называются также *вырожденными проективными*.

Сопоставляя результаты рассмотрения замкнутых плоскостей, получаем следующее ***утверждение***: *непроективная замкнутая частичная плоскость может быть пустым множеством, рядом с его осью, пучком с его центром или объединением ряда и пучка вместе с их осью и центром, соответственно. В последнем случае центр пучка может лежать на оси ряда, но может и не лежать.*

4.3. Конфигурации

4.3.1. Определение конфигураций

Термин «конфигурация» используется в разных смыслах; здесь он будет применяться к конечным частичным плоскостям, удовлетворяющим условиям 2′) и 2″).

Определение. Конечная частичная плоскость называется *конфигурацией*, если на любой прямой лежит не менее трех точек и через любую точку проходит не менее трех прямых.

Ограничимся рассмотрением нескольких симметричных регулярных конфигураций. В этих случаях $v = b$ и $k = r$, поэтому четыре параметра сводятся к двум, v и $к$. Конфигурация с данными v и k называется относящейся к типу $v_к$. По определению, $k \geq 3$ и $r \geq 3$. Через произвольную точку A конфигурации проходит не менее трех прямых, на каждой из них лежит не менее двух точек, отличных от A. Поэтому уже на прямых, проходящих через A, лежат по крайней мере $1 + 3 \cdot 2 = 7$ точек. Следовательно, $v \geq 7$; $b \geq 7$.

Далее рассматриваются конфигурации типов 7_3, 8_3 и по одной, наиболее важной, конфигурации типов 9_3 и 10_3. В частности, будет показано, что каждая из изучаемых здесь конфигураций *автодуальна*, т. е. двойственна себе. Будет дано некоторое представление о группах коллинеаций. Заметим, что коллинеацию можно задавать преобразованием множества точек, так как образ прямой должен проходить через образы ее точек, а последних не менее двух. Будем говорить, что преобразование множества точек *индуцирует* преобразование множества прямых.

4.3.2. Конфигурация Фано

Существование наиболее бедной элементами конфигурации типа 7_3 доказывается примером. Он дается на рис. 7 и соответствующей матрице инцидентности (табл. 2).

С другой стороны, любую конфигурацию типа 7_3 можно свести к этому примеру подходящим выбором обозначений элементов. Действительно, точки конфигурации можно обозначить буквами A, B, C, D, E, F, G так, чтобы на одной из трех прямых, проходящих через A, лежали B, D, на другой – C, G, на третьей – E, F.

Таблица 2

I	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*G*
A	•	•		•			
B	•		•				•
C		•				•	•
D	•				•	•	
E				•	•		•
F			•	•		•	
G		•	•		•		

Через точку B, кроме прямой AB, проходят две прямые, каждая инцидентна одной из точек C, G и одной из точек E, F. Так как обозначения точек E и F можно, если потребуется, транспонировать, т. е. поменять местами, то можно положить, что прямая BC проходит через E, тогда прямая BG пройдет через F. Для последних двух прямых остаются только тройки C, D, F и D, E, G. Наконец,

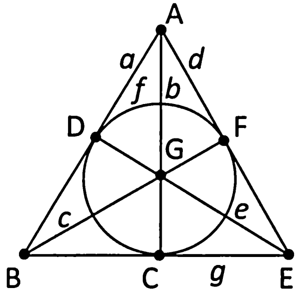


Рис. 7

прямые можно обозначить буквами a, b, c, d, e, f, g в соответствии с рис. 7.

Таким образом, все конфигурации типа 7_3 изоморфны одной из них, поэтому попарно изоморфны. Это можно выразить следующим образом: *существует точно одна абстрактная конфигурация* 7_3.

На рис. 7 одна из прямых конфигураций изображена кривой линией. Это связано с тем, что в обычной проективной плоскости невозможно выбрать 7 точек и 7 прямых так, чтобы они составили конфигурацию 7_3, т. е. справедливо следующее ***утверждение***: *конфигурация* 7_3 *невложима в классическую проективную плоскость.*

Выделим в конфигурации 7_3 одну прямую, например f. Точки, не лежащие на этой прямой, в нашем примере A, B, E, G, и 6 остальных прямых, образуют полный четырехвершинник с диагональными точками, в нашем примере C, D, F, лежащими на выделенной прямой. Поэтому конфигурацию 7_3 можно понимать как полный четырехвершинник, расширенный добавлением трех диагональных точек и прямой, проходящей через них. Поэтому невложимость конфигурации 7_3 в классическую проективную плоскость равносильна следующему ***предложению***: *в классической проективной плоскости диагональные точки любого полного четырехвершинника неколлинеарны.*

На важную роль, которую это свойство играет в построении классической проективной геометрии, указал итальянский математик Фано. В связи с этим конфигурация 7_3 называется также *конфигурацией Фано.*

Конфигурация Фано имеет полярность, поэтому автодуальна.

Обозначения точек и прямых выбраны выше так, что полярностью является отображение $X \rightleftarrows x$, где X и x – любые одноименные буквы, использованные для обозначения элементов. Это следует из того, что матрица инцидентности симметрична, поэтому сохраняется при транспозиции строк и столбцов. Несложна и проверка по рисунку.

Для нахождения группы G всех коллинеаций конфигурации Фано заметим сначала, что подстановка точек ($A\ B\ C\ D\ E\ F\ G$) сохраняет коллинеарность троек точек, поэтому задает коллинеацию. Обозначим ее буквой s, преобразование прямых выразится подстановкой ($g\ f\ e\ d\ c\ b\ a$). Коллинеация s порождает группу $H = \langle s \rangle$, циклическую порядка 7.

Найдем теперь группу G_f, состоящую из всех коллинеаций, сохраняющих прямую f, и называемую *стабилизатором* этой прямой. Любая коллинеация, сохраняющая f, преобразует четверку точек вне f, т. е. точек A, B, E, G, в себя. Наоборот, любое преобразование этой четверки в себя индуцирует преобразование шестерки сторон четырехвершинника, затем преобразование тройки диагональных точек и отображение f в себя, т. е. оно задает некоторую коллинеацию, сохраняющую прямую f. Поэтому группа G_f изоморфна группе S_4 всех подстановок четырех элементов, порядок $|G_f|$ группы G_f равен $4! = 24$.

Пусть теперь t – любая коллинеация; она преобразует прямую f в некоторую прямую $t(f)$. В циклической группе H также существует некоторая коллинеация t_0 со свойством $t_0(f) = t(f)$.

Теперь $(t_0^{-1}t)(f) = t_0^{-1}(t(f)) = f$, коллинеация $u = t_0^{-1}t$ сохраняет f, поэтому $u \in G_f$. Далее, $u = t_0^{-1}t$ влечет $t = t_0 u$. Это значит, что каждая коллинеация представляет произведение некоторой коллинеаций $u \in G_f$ на некоторую коллинеацию $t_0 \in H$, т. е. $G = HG_f$.

Отсюда следует $\qquad |G| = |H||G_f| = 7 \cdot 24 = 168.$

Группа коллинеаций конфигурации Фано является произведением циклической группы порядка 7 на группу типа S_4 и имеет порядок 168.

4.3.3. Конфигурация 8_3

Конкретная конфигурация типа 8_3 показана на рис. 8. Все другие конфигурации этого типа изоморфны ей. Действительно, точки можно обозначить буквами от A до H так, чтобы на одной из трех прямых, проходящих через точку A, лежали B, D, на другой – F, G, на третьей – C, H.

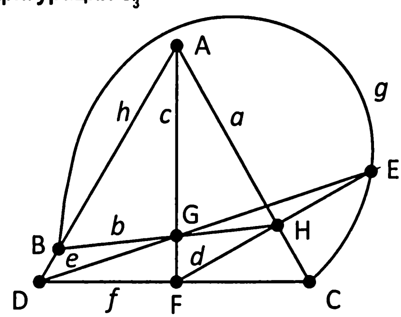


Рис. 8

Через точку E также проходят три прямые, на них лежат 6 точек, отличных от A. Поэтому каждая из точек B, C, D, F, G, H соединена с A и с E, через эти 6 точек проходят оставшиеся две прямые, по одной через каждую точку. Свобода в выборе обозначений позволяет считать, что на одной из этих двух прямых лежат B, G, H, а на другой – D, F, C. Теперь прямая BE может проходить через C или через F, второй случай транспозицией обозначений (CF) (GH) сводится к первому. Поэтому можно положить, что на одной из прямых, проходящих через E, лежат точки B, C. Прямая DE может проходить через G или через H, но второе допущение приводит к тому, что для третьей прямой останутся точки F и G, уже лежащие на одной прямой. Поэтому вторая прямая пучка с центром E проходит через D и G. Для третьей прямой имеются точки F, H. Теперь остается обозначить прямые буквами от a до h. Все конфигурации типа 8_3, будучи изоморфны одной из них, попарно изоморфны.

Существует точно одна абстрактная конфигурация 8_3.

Конфигурация 8_3 *также невложима в обычную проективную плоскость.*

Конфигурация 8_3 *имеет полярность, поэтому автодуальна.*

Обозначения на рис. 8 снова выбраны так, что полярностью является отображение $X \rightleftarrows x$. Переходя к рассмотрению коллинеаций, сначала заметим, что конфигурация 8_3 имеет коллинеацию s, задаваемую подстановкой точек $(A\ B\ C\ D\ E\ F\ G\ H)$, индуцирующую подстановку прямых $(h\ g\ f\ e\ d\ c\ b\ a)$. Выше было отмечено, что для каждой точки конфигурации существует одна неколлинеарная с ней точка. Поэтому восьмерка точек распадается на 4 пары, точки которых неколлинеарны между собой. Одна пара уже найдена попутно, она состоит из A и E. Другие пары можно найти по рисунку или же подвергая уже известную пару преобразованию s. Занумеруем эти пары: 1) A, E; 2) B, F; 3) C, G; 4) D, H.

Каждая коллинеация, сохраняя неколлинеарность точек, сохраняет эту четверку пар. Например, коллинеация s индуцирует преобразование четверки пар, выражаемое подстановкой (1 2 3 4) их номеров. Найдем коллинеации, сохраняющие каждую пару. Пусть коллинеация сохраняет пары A, E и B, F. Если она сохраняет каждую из точек этих пар, то сохраняет прямые AB, AF, BE, EF, а поэтому и третьи точки этих прямых, т. е. D, G, C, H, следовательно, является тождественной. Если коллинеация сохраняет точки A и E, но транспонирует B и F, то она транспонирует D и G, C и H. Такая коллинеация существует и транспонирует пары 3 и 4. Аналогично, существует коллинеация, сохраняющая точки B и F, но транспонирующая A и E; она также транспонирует пары 3 и 4. Но произведение двух последних коллинеаций сохраняет каждую из четырех пар, транспонируя точки в каждой паре. Таким образом, существует две коллинеации, сохраняющие каждую пару: тождественная коллинеация e и коллинеация t, дающая подстановку точек (AE) (BF) (CG) (DH).

Коллинеация s индуцирует на четверке номеров пар подстановку (1234); попутно получена коллинеация, индуцирующая на четверке пар транспозицию (34). Цикл и транспозиция каких-либо двух элементов, соседних в цикле, порождает группу всех подстановок четверки, состоящую из $4!=24$ элементов. Так как сохраняют каждую пару две коллинеации, то для любой заданной подстановки пар также существует две коллинеации, индуцирующие эту подстановку. Поэтому число всех коллинеаций равно числу $24 \cdot 2=48$.

Группа коллинеаций конфигурации 8_3 имеет порядок 48.

4.3.4. Конфигурация Паппа

Известно, что конфигурации типа 9_3 не все изоморфны между собой. Точнее говоря, существуют три абстрактные конфигурации этого типа. Наибольший интерес представляет одна из них, названная *конфигурацией Паппа*, по имени древнегреческого геометра (рис. 9).

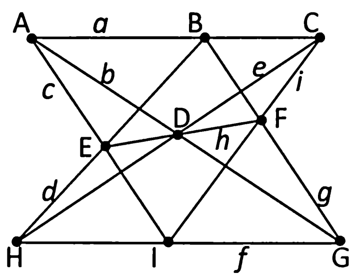


Рис. 9

Эта конфигурация вложима в классическую проективную плоскость в силу теоремы Паскаля, утверждающей, что точки пересечения противоположных сторон простого шестивершинника, вписанного в линию второго порядка, коллинеарны. Теорема справедлива, в частности, когда линия второго порядка является парой прямых. Этот частный случай теоремы был известен ученым Древней Греции. Данные две прямые, шесть вершин и шесть сторон шестивершинника, три точки пересечения противоположных сторон и проходящая через них прямая образуют конфигурацию типа 9_3 (рис. 9).

Обозначения точек буквами от A до I и прямых – буквами от a до i выбраны так, чтобы отображение $X \rightleftarrows x$ было полярностью. Этим установлено следующее предложение:

Конфигурация Паппа автодуальна.

Прямые конфигурации разбиваются на три тройки попарно непересекающихся прямых, а именно, на тройки a, h, f; b, d, i; c, g, e. Это разбиение лучше видно на рис. 10.

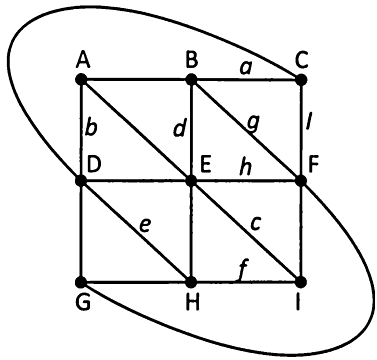


Рис. 10

Каждая коллинеация конфигурации Паппа, сохраняя неконкурентность прямых, сохраняет разбиение девятки прямых на тройки. Найдем сначала коллинеации, сохраняющие каждую тройку с сохранением каждой из прямых a, h, f. Таких коллинеаций три: тождественная e, коллинеация, задаваемая подстановкой точек (ABC) (DEF) (GHI), и обратная ей. Каждую из этих коллинеаций можно умножить на любую из шести коллинеаций, переставляющих прямые b, d, i. Эти коллинеации образуют группу, порождаемую, например, коллинеацией, задаваемой подстановкой точек (ADG) (BEH) (CFI), и коллинеацией, задаваемой подстановкой (AE) (BD) (CF) (GH). Всего имеется $6{\cdot}18 = 108$ коллинеаций, сохраняющих каждую из троек.

Существуют коллинеации, переставляющие тройки. Первая и вторая тройки транспонируются коллинеацией, задаваемой подстановкой (BD) (CG) (FH). Подстановка точек (AB) (DF) (HI) задает коллинеацию, транспонирующую вторую и третью тройки. Перемножением этих двух коллинеаций можно получить любую коллинеацию, индуцирующую заданную подстановку троек.

Произведения шести фиксированных коллинеаций, индуцирующих разные подстановки троек, на 18 коллинеаций, сохраняющих каждую тройку, составляют полную группу G коллинеаций. Ее порядок равен числу $6{\cdot}18 = 108$.

Группа всех коллинеаций конфигурации Паппа имеет порядок 108.

По принципу двойственности, в конфигурации Паппа имеется три тройки попарно неколлинеарных точек, а именно, *A*, *H*, *F*; *B*, *D*, *I*; *C*, *G*, *E*. Расширение конфигурации добавлением прямой, проходящей через три попарно неколлинеарные точки, или точки, лежащие на трех попарно непересекающихся прямых, называется малой конфигурацией Паппа.

4.3.5. Конфигурация Дезарга

Известно, что имеется 10 абстрактных конфигураций типа 10_3. Из них мы рассмотрим только одну, называемую *конфигурацией Дезарга.* Она тесно связана с теоремой Дезарга: *если прямые, соединяющие соответственные вершины двух трехвершинников, конкурентны, то точки пересечения соответственных сторон коллинеарны.* Стороны и вершины двух трехвершинников, прямые, соединяющие

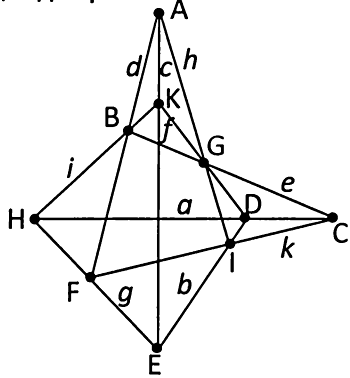


Рис. 11

соответственные вершины, и их общая точка, точки пересечения соответственных сторон и проходящая через них прямая образуют конфигурацию типа 10_3 (рис. 11). В нашем примере можно считать, что конфигурация порождена трехвершинниками *BKG* и *FEI*.

Конфигурация Дезарга имеет полярность, поэтому автодуальна.

Обозначения снова выбраны так, что искомой полярностью является инволюционное отображение $X \rightleftarrows x$. Строение и порядок группы коллинеаций здесь можно найти следующим, несколько искусственным путем. Конфигурация содержит в качестве подплоскостей 5 полных четырехвершинников:

1) *AEFI*; 2) *ABCK*; 3) *BCHF*: 4) *CDGI*; 5) *DEKH*, любые два из них имеют точно одну общую вершину, причем 10 различных пар дают в качестве общих точек все 10 точек конфигурации. Каждая коллинеация преобразует четырехвершинник в четырехвершинник, поэтому индуцирует некоторую подстановку номеров этих четырехвершинников. Нетрудно проверить, что подстановка точек (*ABCDE*) (*FGHIK*) дает коллинеацию s, индуцирующую на пятерке номеров подстановку (1 2 3 4 5). Подстановка точек (*BF*) (*EK*) (*GI*) также дает коллинеацию, она индуцирует на пя-

терке номеров подстановку (1 2). Так как цикл и транспозиция двух элементов, соседних в цикле, порождают группу всех подстановок пятерки, то общее число коллинеаций не меньше, чем $|S_4| = 5! = 120$. С другой стороны, коллинеация, сохраняющая каждый четырехвершинник, сохраняет общую вершину любой пары четырехвершинников, т. е. любую точку конфигурации, поэтому является тождественной. Отсюда следует, что коллинеация, индуцирующая данную подстановку пятерки номеров, единственна. Поэтому между коллинеациями и подстановками пятерки номеров существует взаимно однозначное соответствие, причем это соответствие является изоморфизмом группы G и группы S_5 подстановок номеров. Установлено следующее ***утверждение***: *группа всех коллинеаций конфигурации Дезарга изоморфна группе S_5 подстановок множества из 5 элементов, ее порядок равен 120.*

Из конфигурации Дезарга можно получить суперструктуры введением новых инцидентностей. Такая добавочная инцидентность недопустима, если данная точка коллинеарна хотя бы одной точке данной прямой, так как ее введение приведет к нарушению условия 0).

Из конфигурации Дезарга можно получить суперструктуры введением новых инцидентностей. Такая добавочная инцидентность недопустима, если данная точка коллинеарна хотя бы одной точке данной прямой, так как ее введение приведет к нарушению условия 0). Каждая точка M конфигурации коллинеарна шести другим точкам, поэтому неколлинеарна трем, и эти три точки всегда лежат на одной прямой, а именно, на прямой m, соответствующей точке M, в рассмотренной выше полярности.

Конфигурация, полученная из конфигурации Дезарга введением одной новой инцидентности, называется *малой конфигурацией Дезарга*. Она показана на рис. 12. Возможно введение двух, трех и четырех инцидентностей, но не более.

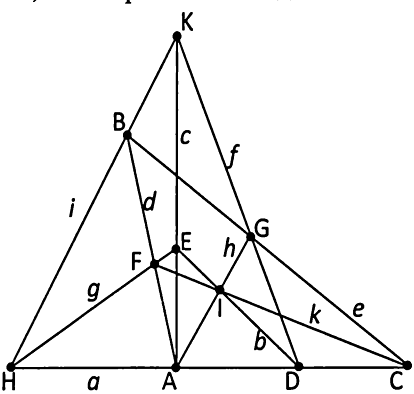


Рис. 12

4.4. Проективные плоскости

4.4.1. Определение и основные свойства

Напомним понятие проективной плоскости.

Определение. Непустая замкнутая частичная плоскость называется *проективной плоскостью*, если выполняются следующие *условия*:

2′) На каждой прямой лежат по крайней мере три различные точки.

2″) Через каждую точку проходят по крайней мере три различные прямые.

Условия 2′) и 2″) двойственны друг другу, поэтому в теории проективных плоскостей действителен принцип двойственности.

Примером может служить классическая проективная плоскость. Простейшей конечной проективной плоскостью является конфигурация Фано. Несколько более сложная плоскость изображена на рис. 13.

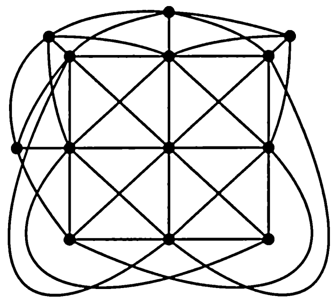


Рис. 13

Выше было показано, что в проективной плоскости существуют четыре точки, неколлинеарные по три. Наоборот, замкнутая плоскость, имеющая такие точки, является проективной. По принципу двойственности, справедливо и такое ***утверждение***: ***в проективной плоскости существуют четыре прямые, неконкурентные по три, и наоборот, замкнутая плоскость, имеющая такие прямые, является проективной.***

Важным ***свойством***[1] проективной плоскости является следующее: *в проективной плоскости все полные ряды точек и полные пучки прямых эквивалентны.*

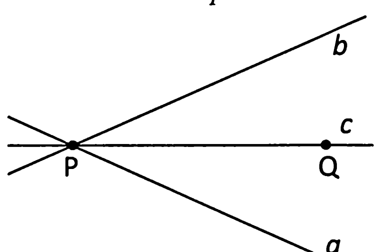


Рис. 14

Действительно, если прямые a и b различны, то существует точка $P = ab$ и, по 2″), прямая c, проходящая через P и отличная от a, b (рис. 14). По 2′), на c лежит точка Q, отличная от P и поэтому не лежашая на a и на b. По одному из свойств замкнутой плоскости, $\{aa\} \backsim \{QQ\}$ и $\{bb\} \backsim \{QQ\}$, поэтому $\{aa\} \backsim \{bb\}$. Следовательно, любые два полных ряда эквивалентны. По принципу двойственности, любые два полных пучка также эквивалентны. Так как $\{aa\} \backsim \{QQ\}$, то один, а поэтому любой полный ряд эквивалентен одному, а поэтому любому полному пучку.

Для конечных проективных плоскостей это значит, что все полные ряды и полные пучки содержат одно и то же число элементов. Поэтому любая конечная проективная плоскость является регулярной и симметричной инцидентностной структурой.

Определение. *Порядком* конечной плоскости называется число, на единицу меньшее числа точек прямой.

Будем обозначать порядок плоскости буквой n (иногда используется буква q). Из равенства $n = k - 1$ и $k = r$ следует

$$k = r = n + 1. \tag{4.1}$$

Из условия 2') следует $k \geq 3$, поэтому

$$n \geq 2. \tag{4.2}$$

Случай n=2 возможен, так как для конфигурации Фано число k точек прямой равно трем. Рис. 13 дает проективную плоскость порядка 3. Ряд плоскостей больших порядков будет рассмотрен ниже.

Нетрудно найти число v всех точек и равное ему число b всех прямых проективной плоскости порядка n. Возьмем произвольную точку A. По условию 2'), каждая точка M плоскости лежит на некоторой прямой, проходящей через A, а именно, на прямой AM. Поэтому множество всех точек плоскости совпадает с множеством всех точек на прямых полного пучка с центром A. Число прямых пучка $\{AA\}$ равно $n + 1$, на каждой из них лежит n точек, отличных от A, поэтому число всех точек, т. е. с включением точки A, равно

$$(n + 1)n + 1 = n^2 + n + 1.$$

Установлено следующее ***утверждение***: *для проективной плоскости порядка n справедливо равенство*

$$v = b = n^2 + n + 1. \tag{4.3}$$

Например, для конфигурации Фано имеем $n = 2$, отсюда $v = b = 2^2 + 2 + 1 = 7$. Для плоскости порядка 3 должно быть $v = b = 3^2 + 3 + 1 = 13$; это подтверждается рис. 13.

Заметим, наконец, что любую конечную проективную плоскость можно рассматривать как симметричную блок-схему с $\lambda = 1$, так как через любые две различные точки проходит точно одна прямая. Ясно также, что каждая такая плоскость является конфигурацией, притом замкнутой.

4.4.2. Проективные плоскости над полями

Поле определяется как множество с двумя бинарными операциями, называемыми сложением и умножением, удовлетворяющее следующим условиям: относительно сложения множество является коммутативной группой, относительно умножения – коммутативной полугруппой, в которой выполнимо деление любого элемента на любой ненулевой элемент, умножение дистрибутивно относительно сложения. Это значит, что сложение и умножение строго однозначны, коммутативны и ассоциативны; операция вычитания, обратная сложению, также строго однозначна, поэтому существует единственный нулевой элемент 0, и для каждого элемента a существует единственный противоположный ему элемент $-a$, справедливо равенство $a - b = a + (-b)$. Аналогично, существует единственный единичный элемент e, для каждого ненулевого элемента a существует единственный обратный ему элемент a^{-1}, справедливо равенство $a : b = ab^{-1}$. Дистрибутивность состоит в выполнении условий

$$a(b + c) = ab + ac; \ (a + b)c = ac + bc.$$

Первый из них называется *левым*, а второй – *правым дистрибутивным законом.* Вследствие коммутативности умножения эти законы равносильны.

Примерами служат, прежде всего, поле Q рациональных чисел, поле R вещественных чисел, поле C комплексных чисел. Конечным полем является каждое кольцо вычетов целых чисел по простому модулю p, обозначаемое посредством Z_p. Далее будут рассмотрены другие конечные поля.

Пусть дано поле P. На множестве всех упорядоченных троек (a, b, c), где $a, b, c \in P$, обычным образом определяется сложение, а также умножение на элемент поля:

$(a, b, c) + (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f)$,

$k(a, b, c) = (ka, kb, kc)$.

Относительно сложения это множество троек является коммутативной группой, нулевым элементом оказывается тройка

(0, 0, 0). После добавления умножения тройки на элемент эта группа обращается в трехмерное линейное пространство над полем P.

Введем теперь на множестве всех ненулевых троек бинарное соотношение пропорциональности, обозначаемое далее буквой Θ, положив

$$(a, b, c)\Theta(d, e, f) \Leftrightarrow (\exists k)\ [k(a, b, c) = (d, e, f)] \qquad (4.4)$$

Заметим, что $(d, e, f)\neq(0, 0, 0)$ влечет $k\neq 0$.

Пропорциональность ненулевых упорядоченных троек рефлексивна, симметрична и транзитивна.

Действительно, $e(a, b, c) = (a, b, c)$, поэтому $(a, b, c)\Theta(a, b, c)$; Θ рефлексивно. Далее, $k(a, b, c) = (d, e, f)$ влечет $k^{-1}(d, e, f) = (a, b, c)$, поэтому $(a, b, c)\Theta(d, e, f)\Rightarrow(d, e, f)\Theta(a, b, c)$; Θ симметрично. Наконец, из $k_1(a, b, c) = (d, e, f)$ и $k_2(d, e, f) = (g, h, i)$ следует $k_2k_1(a, b, c) = (g, h, i)$, поэтому

$(a, b, c)\Theta(d, e, f)\cdot(d, e, f)\Theta(h, g, i)\Rightarrow(a, b, c)\Theta(g, h, i)$; Θ транзитивно.

Определение. Общее свойство пропорциональных ненулевых упорядоченных троек называется *отношением* их элементов.

Другими словами, каждая тройка (a, b, c) имеет некоторое свойство, называемое отношением ее элементов и обозначаемое посредством $a{:}b{:}c$, причем

$$a{:}b{:}c = d{:}e{:}f \Leftrightarrow (a, b, c)\Theta(d, e, f). \qquad (4.5)$$

Для построения проективной плоскости назовем *точкой* любое отношение элементов упорядоченной тройки с указателем точек, а *прямой* – любое такое отношение с указателем прямой. В качестве указателя точки возьмем круглые, а в качестве указателя прямой – квадратные скобки. Инцидентность точки и прямой введем *условием*

$$(x{:}y{:}z)\mathrm{I}[u{:}v{:}w] \Leftrightarrow xu + yv + zw = 0. \qquad (4.6)$$

Так как правая часть равенства однородна относительно x, y, z, то замена этих элементов на пропорциональные им не нарушит равенства. Поэтому инцидентность точки и прямой не зависит от выбора тройки элементов, задающих точку. Это же верно и для задания прямой.

Покажем, что построенная инцидентностная структура является проективной плоскостью.

Пусть даны две различные точки $M_1(x_1 : y_1 : z_1)$ и

$M_2(x_2 : y_2 : z_2)$. Нахождение прямой $m=u:v:w$, проходящей через M_1 и M_2, сводится к решению системы двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1u + y_1v + z_1w = 0 \\ x_2u + y_2v + z_2w = 0 \end{cases} \quad \text{с матрицей} \quad \begin{pmatrix} x_1\, y_1\, z_1 \\ x_2\, y_2\, z_2 \end{pmatrix}.$$

Так как $M_1 \neq M_2$, то строки матрицы непропорциональны, поэтому она имеет ранг 2. Такая система имеет одно линейно независимое решение, а именно,

$$u : v : w = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{4.7}$$

Это значит, что искомая прямая m существует и единственна; выполняются условия 0') и 1'). Условия 0") и 1") проверяются аналогичным расчетом.

Пусть дана прямая $m = [u:v:w]$. По крайней мере один из элементов u, v, w является ненулевым; положим, что $w \neq 0$. Для нахождения точки $M=(x:y:z)$, лежащей на m, нужно решить уравнение $ux + vy + wz = 0$, придавая x и y произвольные значения и вычисляя затем z. Поле P имеет два различных элемента, 0 и e; они дают три различные, ввиду непропорциональности троек, точки $(0 : e : z_0)$; $(e : 0 : z_1)$; $(e : e : z_2)$. Таким образом, на любой прямой m лежит не менее трех точек; выполняется условие 2'). Условие 2") проверяется аналогично.

Итак, предлагаемое построение дает проективную плоскость. Она называется проективной плоскостью над данным полем P.

Проективная плоскость над полем имеет полярности. Одной из них является дуализация. Действительно, переименование точек в прямые, а прямых в точки приводит к отображению множества всех элементов в себя по формулам

$$(x : y : z) \to [x : y : z]; [u : v : w] \to (u : v : w); \tag{4.8}$$

в сокращенной записи имеем $(a:b:c) \rightleftarrows (a:b:c)$. Это отображение взаимно однозначно; кроме того, оно не изменяет инцидентности, так как

$$(x:y:z)\mathrm{I}[u:v:w] \Leftrightarrow xu + yv + zw = 0 \Leftrightarrow [x:y:z]\mathrm{I}(u:v:w).$$

Для дальнейшего изложения интересна еще одна полярность

$$(a:b:c) \rightleftarrows (a:-b:-c). \tag{4.9}$$

Это отображение также взаимно однозначно и инволюционно, причем

$(x{:}y{:}z)\mathrm{I}[u{:}v{:}w] \Leftrightarrow xu + yv + zw = 0 \Leftrightarrow xu+(-z)(-w)+(-y)(-v) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [x{:}-z{:}-y]\mathrm{I}(u{:}-w{:}-v)$.

Его можно рассматривать как произведение дуализации на отображение $(x:y:z) \to (x:-z:-y)$; $[u:v:w] \to [u:-w:-v]$, представляющее собой коллинеацию, так как оно взаимно однозначно, переводит точки в точки, а прямые – в прямые и не изменяет инцидентности.

Над полем вещественных чисел строится классическая проективная плоскость, называемая также вещественной. Аналогично, над полем рациональных чисел можно построить рациональную, а над полем комплексных чисел – комплексную проективную плоскость.

Естественно, что над конечным полем строится конечная плоскость. Порядком поля называется число его элементов. Обозначим элементы конечного поля P порядка n буквами $a_1, a_2, \ldots, a_n$, положив при этом $a_1 = 0$; $a_2 = e$. Учтем теперь, что любую точку можно задать тройкой, в которой первый ненулевой элемент равен e. Если в тройке, задающей точку, этот элемент равен a, то достаточно тройку умножить на элемент a^{-1}. Для нахождения порядка плоскости над полем найдем все точки некоторой прямой $m = [u{:}\ v{:}\ w]$ с $w \neq 0$. Точка $(0, 0, e)$ не лежит на m; точка вида $(0{:}\ e{:}\ z)$ имеется только одна, точек вида $(e{:}\ y{:}\ z)$ имеется n, по числу элементов y из поля P. Таким образом, число точек прямой m равно $n + 1$, порядок проективной плоскости равен числу n, установлено следующее ***предложение***:

Порядок проективной плоскости над конечным полем равен порядку этого поля.

Желание получить такую простую связь между порядками поля и проективной плоскости над ним является одной из причин того, что за порядок проективной плоскости принимается число, на единицу меньшее числа точек прямой.

4.4.3. Конечные поля

Рассмотрим конечные поля и плоскости над ними более подробно. Поле порядка n будем обозначать через P_n, оно обозначается также через $GF(n)$. Здесь GF – сокращение английского названия Galois field (поле Галуа) по имени одного из основателей теории групп.

Известно, что поле P_n существует, если и только если $n = p^k$, где p – любое простое, а k – любое натуральное число. Все поля данного порядка изоморфны между собой, поэтому для данного n достаточно найти одно конкретное поле. Мультипликативная группа поля P_n, т. е. множество всех ненулевых элементов с операцией умножения, является циклической, поэтому состоит из всех степеней некоторого элемента, называемого первообразным. Поле порядка p^k имеет k автоморфизмов; они образуют циклическую группу, порождаемую подстановкой $\varphi: x \to x^p$. В случае $k = 1$, т. е. когда $n = p$, поле имеет только тождественный автоморфизм.

В качестве поля простого порядка p проще всего взять кольцо Z_p классов вычетов кольца Z целых чисел. Напомним, как оно строится. На множестве всех целых чисел вводится соотношение сравнимости по данному натуральному модулю m следующим образом: $a \equiv b (mod\ m)$, если и только если $a - b$ делится на m. Из свойств делимости следует, что сравнимость по данному модулю рефлексивна, симметрична и транзитивна. Поэтому множество целых чисел разбивается на *классы сравнимости*, представитель класса называется *вычетом* по данному модулю. Класс с представителем a будет обозначаться посредством $\bar{a}$, при этом

$$\bar{a} = \{\, x \mid x \equiv a(mod\ m) \}; \quad \bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow a \equiv b(mod\ m). \tag{4.10}$$

Любое целое число a представимо в форме $a = qm + a_0$, где $0 \le a_0 < m$, откуда $\bar{a} = \bar{a}_0$. Поэтому в качестве представителя класса всегда можно взять неотрицательное целое число, меньшее m; список классов имеет вид $\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{m-1}$, множество Z_m всех классов состоит из m элементов.

Суммы соответственно сравнимых целых чисел также сравнимы по данному модулю. Это верно и для произведений. Поэтому можно определить сложение и умножение классов формулами

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}; \qquad \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{ab}. \tag{4.11}$$

Действительно, правые части формул не зависят от выбора представителей a и b данных классов. После введения сложения и умножения множество Z_m классов обращается в коммутативное и ассоциативное кольцо с единичным элементом $\bar{1}$. Это кольцо является полем, если и только если модуль m есть простое число p. Элементом, обратным $\bar{a} \neq \bar{0}$, является $\overline{a^{p-2}}$ действительно, $\bar{a} \cdot \bar{a}^{\,p-2} = \bar{a}^{\,p-1} = \bar{1}$, так как по теореме Ферма $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.

Далее классы $\bar{a}$ будем обозначать просто через a, сложение и умножение классов производить как операции над целыми числами по данному модулю, т. е. с заменой результата на остаток от его деления на модуль. Например, в поле P_7 имеем $5 \cdot 6 = 2$, так как для целых чисел $5 \cdot 6 = 30 = 4 \cdot 7 + 2$.

Простейшим является поле порядка 2; $P_2 = \{0, 1\}$, таблицы сложения и умножения имеют вид $0 + 0 = 0$; $0 + 1 = 1 + 0 = 1$; $1 + 1 = 0$; $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$; $1 \cdot 1 = 1$.

Для порядка $n = 3$ имеем $P_3 = \{0, 1, 2\}$; таблицы операций имеют вид (табл. 3, 4).

Таблица 3

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Таблица 4

•	1	2
1	1	2
2	2	1

В таблицу умножения не включены сомножители, равные 0, так как их произведения известны: они равны 0. Поле порядка $n=p^k$, где $k > 1$, можно получить как алгебраическое расширение поля порядка p. Это производится по образцу уже рассмотренного построения поля простого порядка.

Для данного поля P множество $P[x]$ всех многочленов с переменной x и с коэффициентами из P есть коммутативное и ассоциативное кольцо, содержащее P. На этом кольце вводится сравнимость по модулю $f(x)$ – некоторому многочлену степени $k > 1$. Нужно положить, что $g(x) \equiv h(x) (mod\ f(x))$, если и только если $g(x) - h(x)$ делится на $f(x)$. Сравнимость многочленов рефлексивна, симметрична, транзитивна, множество $P[x]$ разбивается на классы сравнимости. Класс с представителем $g(x)$ будет обозначаться через $\overline{g(x)}$, представитель $g(x)$ можно заменить на сравнимый с ним остаток от деления $g(x)$ на $f(x)$. Поэтому любой класс можно, притом единственным образом, задать многочленом степени, меньшей k. На множестве всех классов вычетов, обозначаемом посредством $P[x]/f(x)$, вводятся *сложение* и *умножение* формулами

$$\overline{g(x)} + \overline{h(x)} = \overline{g(x) + h(x)}; \quad \overline{g(x)} \cdot \overline{h(x)} = \overline{g(x) \cdot h(x)}. \qquad (4.12)$$

Это дает коммутативное и ассоциативное кольцо с единичным элементом $\bar{1}$. Построенное кольцо является полем, если и только если модуль $f(x)$ неприводим над полем P, т. е. не разлагается на множители из $P[x]$, не входящие в P. Обозначим это поле через P^*.

Так как $x = \overline{1 \cdot x + 0} \in P[x]$, то в полученном поле имеется элемент $i = \overline{x}$; произвольный многочлен

$$g(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

дает элемент поля $g(\overline{x}) = a_m i^m + a_{m-1} i^{m-1} + \ldots + a_1 i + a_0 = g(i)$.

Так как $f(x) \equiv 0(mod\, f(x))$, то $f(i) = \overline{f(x)} = \overline{0}$. Это значит, что в полученном поле многочлен $f(x)$ имеет корень i. Множество $\{\overline{a} | a \in P\}$ есть подполе поля P^*, изоморфное исходному полю P. После отождествления соответственных элементов a и $\overline{a}$ поле P оказывается частью поля P^*, а поле P^* – расширением поля P путем присоединения корня алгебраического уравнения $f(x) = 0$.

Таким образом,

$$P^* = \{a_{k-1} i^{k-1} + \ldots + a_1 i + a_0 \,|\, a_0, a_1, \ldots, a_{k-1} \in P\}; \qquad (4.13)$$

сложение и умножение производятся по правилам действий над многочленами, произведение степени, равной или большей k, заменяется на остаток от деления на $f(i)$.

Если поле P конечно и имеет порядок n, то каждый из k коэффициентов $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ может иметь n различных значений, поэтому число элементов поля P^* равно n^k. Расширение поля простого порядка p дает поле порядка p^k.

Обозначение элементов поля простого порядка целыми числами можно распространить и на расширенные поля. Занумеруем элементы $a_{k-1} i^{k-1} + \ldots + a_1 i + a_0$ числами от 0 до n^k-1 в лексикографическом порядке, тогда номер каждого элемента будет выражаться числом $a_{k-1} p^{k-1} + \ldots + a_1 p + a_0$. Если символ «$a_i$», изображающий число a_i, понимать как цифру, то номер элемента будет равен значению символа «$a_{k-1} \ldots a_1 a_0$» в системе счисления с основанием p.

Простейшим полем непростого порядка является P_4, здесь $n = 4 = 2^2$. Единственным непроводимым многочленом степени $k = 2$ над полем P_2 является $f(x) = x^2 + x + 1$.

Далее, $P_4 = \{0, 1, i, i + 1\}$.

Таблицы сложения и умножения в полном (табл. 5 и 7) и сокращенном (табл. 6 и 8) обозначениях имеют следующий вид.

Таблица 5

+	0	1	i	$i+1$
0	0	1	i	$i+1$
1	1	0	$i+1$	1
i	i	$i+1$	0	1
$i+1$	$i+1$	i	1	0

Таблица 6

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Таблица 7

•	1	i	$i+1$
1	1	i	$i+1$
i	i	$i+1$	1
$i+1$	$i+1$	1	i

Таблица 8

•	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

При составлении таблицы умножения используется равенство $i^2 + i + 1 = 0$ или его следствие $i^2 = -i - 1 = i + 1$. Переход от полного обозначения элементов к сокращенному состоит в замене i на 2, $i + 1$ на 3. Поле P_4 имеет один нетождественный автоморфизм $\varphi : x \to x^2$; в сокращенном обозначении $\varphi = (0)(1)(23)$.

Возьмем теперь $n = 8 = 2^3$. В качестве неприводимого многочлена степени 3 над полем P_2 можно взять $f(x) = x^3 + x + 1$. Элементы P_8 в полном и сокращенном обозначении имеют вид:

$0, 1, 2 = i,\ 3 = i + 1, 4 = i^2, 5 = i^2 + 1,\ 6 = i^2 + i, 7 = i^2 + i + 1.$

Получение таблицы сложения несложно, поэтому опущено. Однако попарное перемножение элементов требует немалого труда. Работу можно ускорить следующим приемом. Мультипликативная группа поля P_8 имеет простой порядок $7 = 8 - 1$, поэтому любой ее элемент, отличный от 1, является первообразным. Выберем элемент i и составим таблицу его степеней, используя равенство $i^3 = - i - 1 = i + 1$:

$i^0 = 1; i^1 = i; i^2 = i^2; i^3 = i + 1; i^4 = i^2 + i; i^5 = i^3 + i^2 = i^2 + i + 1;$
$i^6 = i^3 + i^2 + i = i + 1 + i^2 + i = i^2 + 1$; для контроля,
$i^7 = i^3 + i = i + 1 + i = 1 = i^0.$

Таблица 9

k	0	1	2	3	4	5	6
2^k	1	2	4	3	6	7	5

Переход к сокращенным обозначениям (табл. 10) дает табл. 9.

Таблица 10

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	6	4	5	2	3	0	1
7	7	7	5	4	3	2	1	0

Для составления таблицы умножения правые множители, оглавляющие столбцы, возьмем в естественном порядке, а левые – оглавляющие строки, расположим в порядке степеней элемента 2. Тогда в столбце левых множителей, а поэтому, вследствие равенства $2a \cdot b = 2 \cdot ab$, и в любом столбце таблицы каждый следующий элемент будет равен удвоенному произведению предыдущего. Следовательно, в каждом столбце элементы будут расположены в циклическом порядке 1, 2, 4, 3, 6, 7, 5, 1...

Достаточно заполнить первую строку таблицы, соответствующую левому множителю, равному 1. После составления такой таблицы нужно переставить строки в естественном порядке левых множителей. Окончательная таблица имеет следующий вид (табл. 13). Поле P_8 имеет два нетождественных автоморфизма $\varphi = (0)(1)\,(246)(357)$ и $\varphi^2 = \varphi^{-1}$.

Таблица 11

•	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	3	1	7	5
3	3	6	5	7	4	1	2
4	4	3	7	6	2	5	1
5	5	1	4	2	7	3	6
6	6	7	1	5	3	2	4
7	7	5	2	1	6	4	3

•	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	4	6	3	1	7	5
3	3	6	5	7	4	1	2
4	4	3	7	6	2	5	1
5	5	1	4	2	7	3	6
6	6	7	1	5	3	2	4
7	7	5	2	1	6	4	3

Таблица 12

k	$(i+1)^k$	4^k
0	1	1
1	$i+1$	4
2	$2i$	6
3	$2i+1$	7
4	2	2
5	$2i+2$	8
6	i	3
7	$i+2$	5

Таблица 13

•	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	1	6	8	7	3	5	4
3	3	6	2	5	8	1	4	7
4	4	8	5	6	1	7	2	3
5	5	7	8	1	3	4	6	2
6	6	3	1	7	4	2	8	5
7	7	5	4	2	6	8	3	1
8	8	4	7	3	2	5	1	6

Таблица 14

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	0	4	5	3	7	8	6
2	2	0	1	5	3	4	8	6	7
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	3	7	8	6	1	2	0
5	5	3	4	8	6	7	2	0	1
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	6	1	2	0	4	5	3

Рассмотрим еще $n = 9 = 3^2$. Здесь можно положить $f(x) = x^2+1$. Элементы P^9 имеют вид 0, 1, 2, $3 = i$, $4 = i + 1$; $5 = i + 2$, $6 = 2i$, $7 = 2i + 1$, $8 = 2i + 2$. Здесь i не будет первообразным элементом, но можно выбрать $i + 1$. Список степеней элемента $i + 1$ в полной и сокращенной форме дан в табл. 12. При составлении списка используется равенство $i^2 = -1 = 2$. Сложение и умножение даются в табл. 13 и 14.

Поле P_9 имеет один нетождественный автоморфизм $\varphi : x \to x^2$; в сокращенной записи $\varphi = (0)(1)(2)(36)(47)(58)$. Этот автоморфизм, транспонирующий i и $2i$, т. е. i и $-i$, напоминает автоморфизм поля C комплексных чисел.

4.4.4. Примеры проективных плоскостей над конечными полями

Плоскость над полем $GF(n)$ обозначается посредством $PG(n)$.

Возьмем наиболее бедное поле $GF(2)$, имеющее только два элемента 0 и 1. По формуле (4.3), $v = b = 2^2 + 2 + 1 = 7$, плоскость имеет по 7 точек и прямых. Перенумеруем точки в лексикографическом порядке числами от 1 до 7 и обозначим каждую буквой A с соответствующим индексом. Аналогичным образом обозначим прямые буквой a с индексом. Получим следующие списки:

$$A_1 = (0:0:1);\ A_2 = (0:1:0);\ A_3 = (0:1:1);\ A_4 = (1:0:0);\ A_5 = (1:0:1);$$
$$A_6 = (1:1:0);\ A_7 = (1:1:1).\ a_1 = [0:0:1];\ a_2 = [0:1:0];\ a_3 = [0:1:1];$$
$$a_4 = [1:0:0];\ a_5 = [1:0:1];\ a_6 = [1:1:0];\ a_7 = [1:1:1].$$

Матрица инцидентности плоскости $PG(2)$ имеет следующий вид (табл. 15). Как видно из формулы (4.1), $k = r = 3$. Таким образом, плоскость $PG(2)$ является симметрической регулярной конфигурацией Фано. Так как эта конфигурация единственная, то изображение плоскости $PG(2)$ совпадает с изображением на рис. 7, но при другом обозначении имеет вид: $A_1 = C$; $A_2 = G$; $A_3 = A$; $A_4 = B$; $A_5 = E$; $A_6 = F$; $A_7 = D$.

Таблица 15

I	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
A_1		•		•		•	
A_2	•			•	•		
A_3			•	•			•
A_4	•	•	•				
A_5		•			•		•
A_6	•					•	•
A_7			•		•	•	

Соответствие между обозначениями прямых получается из предыдущего заменой больших латинских букв на малые.

Положим теперь $n = 3$. Поле $GF(3)$ состоит из элементов 0, 1, 2, складываемых и умножаемых по модулю 3. Для плоскости $PG(3)$ имеем $v = b = 13$ и $k = r = 4$. Список точек имеет вид

$A_1 = (0:0:1)$; $A_2 = (0:1:0)$; $A_3 = (0:1:1)$; $A_4 = (0:1:2)$; $A_5 = (1:0:0)$; $A_6 = (1:0:1)$; $A_7 = (1:0:2)$; $A_8 = (1:1:0)$; $A_9 = (1:1:1)$; $A_{10} = (1:1:2)$; $A_{11} = (1:2:0)$; $A_{12} = (1:2:1)$; $A_{13} = (1:2:2)$.

Список прямых состоит из тех же отношений, но взятых в квадратные скобки. Составление матрицы инцидентности здесь значительно более трудоемко, так как требует рассмотрения 169 пар, состоящих из точки и прямой. Проще составить список полных рядов или равноценный ему список полных пучков. Для этого нужно решать уравнения вида $ux + vy + wz = 0$; рационально приводить их к явному виду.

Эти рассуждения тем более справедливы для больших значений n. Для упрощения составления списков полных рядов и пучков, а также и по другим соображениям, рассмотрим несколько иной, притом более экономный способ описания точек и прямых.

4.4.5. Неоднородные координаты точек и прямых

В проективной плоскости над произвольным полем P точка $M = (x:y:z)$ задается упорядоченной тройкой $\bar{M}=(x,y,z)$, которую можно заменить на любую другую, пропорциональную ей тройку $\bar{M}'$. Назовем x, y, z проективными координатами точки. Аналогично, прямая $m = [u:v:w]$ задается тройкой $m = (u,v,w)$, элементы которой называются *проективными координатами прямой.*

Возьмем сначала прямую $o = [0: 0: e]$, ее уравнение – $z = 0$, поэтому на ней лежат все точки вида $(x:y:0)$, и только эти точки. Если $x \neq 0$, то умножением на x^{-1} точку можно представить в форме $(e: h: 0)$, где $h = x^{-1}y$. Элемент h не изменяется при переходе от тройки $(x, y, 0)$ к пропорциональной ей тройке $(kx, ky, 0)$, поэтому определяется заданием точки, и наоборот, каждому значению h соответствует единственная точка $(e:h:0)$ рассматриваемого вида. Назовем h *координатой точки* и обозначим точку сокращенно посредством (h). Если точка прямой o имеет координату $x = 0$, то $y \neq 0$, так как тройка должна быть ненулевой. Так как элемент 0 не имеет обратного, то предыдущий прием неприменим, но точку $(0: y: 0)$ умножением тройки координат на y^{-1} можно представить в форме $(0: e: 0)$. Отсюда видно, что такая точка единственна. Введем новый элемент ∞ и обозначим рассматриваемую точку посредством (∞).

Любая точка, не лежащая на прямой o, имеет вид $(x: y: z)$, где $z \neq 0$. Умножением тройки координат на z^{-1} точку можно представить в форме $(x': y': e)$, где $x' = z^{-1}x$; $y' = z^{-1}y$. После переобозначения можно сказать, что любая точка вне прямой o имеет вид $(x: y: e)$; такая точка взаимно однозначно задается упорядоченной парой (x, y), и эту пару можно принять за обозначение точки. Теперь каждая точка имеет вид (x, y), где $x, y \in P$, или (h), где $h \in P^* = P \cup \{\infty\}$.

Перейдя к прямым, введем сначала для прямой o обозначение $[\infty]$. Любая другая прямая имеет вид $[u: v: w]$ с $u \neq 0$ или $v \neq 0$. Ее уравнение $ux + vy + wz = 0$ для точек $(x: y: e)$ принимает вид $ux + vy + w = 0$. Если $v \neq 0$, то уравнение можно решить относительно y, приведя к форме

$$y = kx + m, \tag{4.14}$$

где $k = -v^{-1}u$; $m = -v^{-1}w$. Элементы k и m также не зависят от выбора тройки (u, v, w) и могут быть названы координатами прямой, прямую же можно обозначить посредством $[k, m]$. Если $v = 0$, то, по условию, $u \neq 0$, уравнение прямой имеет вид $ux + w = 0$ и умножением на u^{-1} приводится к форме:

$$x = c, \tag{4.15}$$

где $c = u^{-1}w$. Элемент c снова зависит только от выбора прямой и считается ее координатой. Такая прямая обозначается посредством $[c]$.

Условия инцидентности точек вида (x, y) прямым $[k, m]$ и $[c]$ даны в уравнениях этих прямых (4.14) и (4.15). Для получения условий инцидентности этих прямых с точками прямой $[\infty]$, т. е. точками вида (h) и точкой (∞), возвратимся к проективным координатам. Прежде всего, $(h) = (e: h: 0)$ и $(\infty) = (0: e: 0)$; прямая с уравнением $y = kx + m$, т. е. $kx - y + m = 0$, есть $[k: -e: m]$, а прямая $x = c$, т. е. $x - c = 0$, есть $[e: 0: -c]$. Теперь

$$(e: h: 0)\mathrm{I}[k: -e: m] \Leftrightarrow k - h = 0 \Leftrightarrow k = h;$$

$$(0: e: 0)\mathrm{I}[k: -e: m] \Leftrightarrow e = 0, \text{ что невозможно;}$$

$$(e: h: 0)\mathrm{I}[e: 0: -c] \Leftrightarrow e = 0; \text{ что невозможно;}$$

$$(0: e: 0)\mathrm{I}[e: 0: -c] \Leftrightarrow 0 = 0,$$

что выполняется тождественно, т. е. при любом c. Это значит, что $(h)\mathrm{I}[k, m] \Leftrightarrow h = k$, а точка (∞) лежит на всех прямых вида $[c]$ и не лежит на прямых вида $[k, m]$.

Таким образом, в неоднородной системе координат, введенной выше, каждая точка имеет вид (x, y), где $x, y \in P$, или (h), где

$h \in P^*$, а каждая прямая – вид $[k, m]$. где $k, m \in P$, или $[c]$, где $c \in P^*$. Условия инцидентности имеют форму:

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)\mathrm{I}[k, m] \Leftrightarrow y = kx+m;\ (x,y)\mathrm{I}[c] \Leftrightarrow x = c;\\ (h)\mathrm{I}[k, m] \Leftrightarrow h = k;\ (h)\mathrm{I}[c] \Leftrightarrow h = \infty \vee c = \infty.\end{array}\right\}. \quad (4.16)$$

Ясно, что построение проективной плоскости над полем P можно сразу вести в неоднородных координатах. Сначала вводится множество $P^*=P\cup\{\infty\}$; указатели точки и прямой, т. е. скобки двух видов, используются те же, что и раньше. *Точкой* считается любая упорядоченная пара (x, y) с $x, y \in P$ и любое единичное множество (h) с $h \in P^*$. *Прямой* считается любая упорядоченная пара $[k, m]$ с $k, m \in P$ и любое единичное множество $[c]$ с $c \in P^*$. Инцидентность задается формулами (4.16).

Полярность $(a\colon b\colon c) \rightleftarrows [a\colon b\colon c]$ в неоднородных координатах имеет сравнительно сложное выражение. Наоборот, полярность $(a\colon b\colon c) \rightleftarrows [a\colon -c :-b]$ выражается очень просто. А именно, в этой полярности точки $(0\colon e\colon 0)$, $(e\colon h\colon 0)$, $(x\colon y\colon e)$ отображаются, соответственно, в прямые $[0\colon 0\colon -e]=[0\colon 0\colon e]$, $[e\colon 0\colon -h]$, $[x\colon -e\colon -y]$.

В неоднородных координатах это имеет вид:

$$(\infty) \rightleftarrows [\infty];\ (h) \rightleftarrows [h];\ (x, y) \rightleftarrows [x, -y]. \quad (4.17)$$

4.5. Аффинные плоскости

4.5.1. Определение и основные свойства

Рассмотрим теперь обобщения классической аффинной плоскости.

Определение. Частичная плоскость называется *аффинной плоскостью*, если она удовлетворяет следующим условиям:

1′) Для любых двух различных точек существует проходящая через них прямая.

2*) Для любой прямой и не лежащей на ней точки существует единственная прямая, проходящая через данную точку и не пересекающая данную прямую.

3) Существуют по крайней мере три различные неколлинеарные точки.

Из условия 1′) следует, что аффинная плоскость замкнута относительно соединения. Наоборот, из условия 2*), называемого *аксиомой параллельности*, видно, что условие 1″) нарушается, поэтому аффинная плоскость незамкнута относительно пересечения. Отсюда следует, что в теории аффинных плоскостей принцип двойственности недействителен.

Из условий 3) и 1′) следует существование трех попарно пересекающихся, но неконкурентных прямых.

Примером аффинной плоскости служит, прежде всего, классическая аффинная плоскость. Простейшей конечной аффинной плоскостью является полный четырехвершинник. Несколько сложнее плоскость, изображенная на рис. 15. Она состоит из 9 точек и 12 прямых.

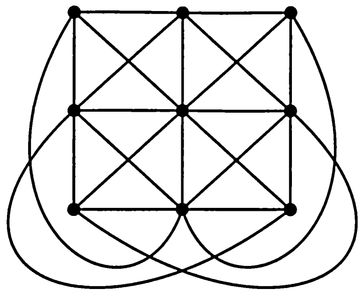


Рис. 15

Определение. Две прямые аффинной плоскости называются *параллельными*, если они совпадают или же не имеют общей точки.

Соотношение параллельности прямых обозначается знаком $\|$.

Аксиома 2*) утверждает, что через точку вне данной прямой проходит точно одна прямая, параллельная данной. Укажем еще на некоторые *свойства параллельности.*

Прямая, пересекающая одну из двух параллельных прямых, пересекает и вторую.

Пусть $a \| b$ и прямая c пересекает a. Если $a=b$, то c пересекает b. Пусть $a \neq b$, обозначим $A=ac$ (рис. 16). Так как a – единственная прямая, проходящая через A и параллельная b, то $c \nparallel b$, поэтому c пересекает b.

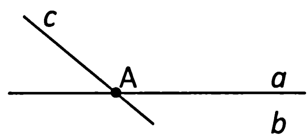


Рис. 16

Две различные прямые, параллельные третьей и отличные от нее, параллельны между собой.

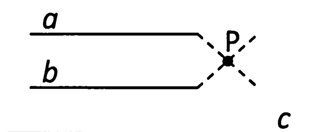


Рис. 17

Действительно, если $a \neq b \neq c \neq a$ и $a, b \| c$, то из допущения непараллельности a и b, т. е. существования точки PIa, b, следует нарушение аксиомы параллельности (рис. 17). Поэтому $a \| b$.

Через каждую точку плоскости проходит точно одна прямая, параллельная данной прямой.

Действительно, если данная точка B лежит на данной прямой a, то искомая прямая b, удовлетворяющая условию $B\mathrm{I}b\square a$, совпадает с a. Если же $B \not{I}\, a$, то прямая b существует и единственна по аксиоме параллельности.

Параллельность прямых рефлексивна, симметрична, транзитивна.

Рефлексивность и симметричность соотношения параллельности видны из определения. Вследствие рефлексивности, транзитивность достаточно проверить для случая, когда три данные прямые различны. Пусть $a \neq b \neq c \neq a$; $a \parallel b$; $b \parallel c$, тогда a, $c \parallel b$, а это влечет $a \parallel c$. Таким образом, $a \parallel b$ и $b \parallel c$, тогда $a \parallel c$, транзитивность доказана.

Из последней теоремы следует, что множество всех прямых аффинной плоскости распадается на *классы параллельности*, называемые также *семействами* или *пучками* параллельных прямых. Каждый класс задается любым своим элементом – *представителем* класса – и состоит из всех прямых, параллельных представителю. Определением через абстракцию можно ввести понятие направления прямой.

Определение. Общее свойство параллельных прямых называется их *направлением.*

Это означает, что направление есть некоторое свойство прямой, причем параллельные прямые имеют одно и то же направление, а непараллельные прямые – различные направления.

Между направлениями прямых и классами параллельности существует взаимно однозначное соответствие, так как все прямые одного класса имеют одно и то же направление и, наоборот, все прямые одного направления образуют один класс.

Конкретное направление задается прямой, имеющей это направление. Из существования и единственности прямой, проходящей через данную точку, параллельно данной прямой, следует такое ***предложение:***

Через каждую точку аффинной плоскости проходит точно одна прямая, имеющая данное направление. Отсюда имеем ***следствие.***

Множество всех прямых, проходящих через одну точку, эквивалентно множеству всех направлений. Все полные пучки прямых эквивалентны.

Существование трех попарно пересекающихся, а поэтому непараллельных, прямых влечет следующее ***утверждение:***

Для любой аффинной плоскости существует не менее трех различных направлений прямых.

Докажем следующее важное ***предложение:***

В аффинной плоскости все полные ряды точек и классы параллельности прямых эквивалентны.

Для доказательства рассмотрим сначала класс параллельности K и прямую a, не входящую в K и поэтому непараллельную прямым из K (рис. 18). Каждая прямая $m \in K$ пересекает a в некоторой точке $M=am$, и наоборот, через каждую точку MІa проходит точно одна прямая пучка. Поэтому между прямыми класса K и точками ряда $\{aa\}$ существует взаимно однозначное соответствие, откуда $K \backsim \{aa\}$.

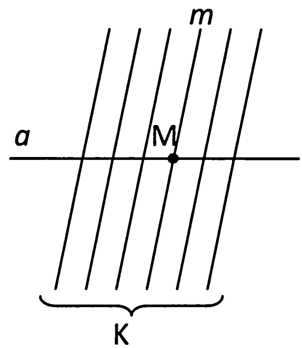


Рис. 18

Возьмем две прямые a и b, они задают не более двух направлений, существует направление, отличное от направлений a и b, и класс параллельности K прямых, имеющих это новое направление. По доказанному выше, $\{aa\},\{bb\} \backsim K$. Поэтому $\{aa\} \backsim \{bb\}$. Таким образом, все полные ряды эквивалентны. Так как для любого класса K существует прямая, не принадлежащая K, то каждый класс параллельности эквивалентен некоторому полному ряду. Этим доказательство завершено.

Для конечной плоскости последняя *теорема* утверждает, что все полные ряды и все классы параллельности имеют одно и то же число элементов.

Определение. Число всех точек прямой называется *порядком* аффинной плоскости. Это число не зависит от выбора прямой и обозначается буквой n. Число прямых любого класса параллельности также равно порядку n. Из условий 3) и 1') следует существование прямых, инцидентных по крайней мере двум точкам, поэтому $n \geq 2$. (5.1)

Полный четырехвершинник имеет наименьший порядок, т. е. $n = 2$. Для плоскости на рис. 15 порядок $n = 3$.

Из существования трех неконкурентных прямых следует, что для каждой точки A найдется не проходящая через нее прямая a. Полный пучок с центром A состоит из прямых, соединяющих A со всеми точ-

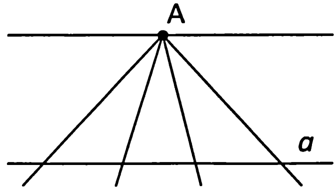


Рис. 19

ками прямой a и еще одной прямой, параллельной a (рис. 19). Поэтому в конечной проективной плоскости порядка n полный пучок состоит из $n + 1$ прямых, т. е.

$$r = n + 1. \qquad (5.2)$$

Этому же числу $n + 1$ равно число всех направлений прямых и число всех классов параллельности.

Найдем число v всех точек и число b всех прямых конечной аффинной плоскости порядка n. Возьмем какой-либо класс параллельности K. Каждая точка плоскости лежит точно на одной прямой этого класса, поэтому число всех точек плоскости равно числу точек, лежащих на прямых из K. Так как К состоит из n прямых и на каждой прямой лежит n точек, то

$$v = n^2. \qquad (5.3)$$

Так как число классов параллельности равно $n+1$ и каждый класс состоит из n прямых, то

$$b = n(n + 1) = n^2 + n. \qquad (5.4)$$

Таким образом, конечная аффинная плоскость порядка n состоит из n^2 точек и $n^2 + n$ прямых. Она регулярна, но несимметрична; при $n \geq 3$ она может рассматриваться как конфигурация.

4.5.2. Связь аффинных плоскостей с проективными

Любая аффинная плоскость может быть *расширена до проективной* следующим образом. Добавим к аффинной плоскости новые точки, называемые несобственными, по одной для каждого направления прямых. Положим, что каждая несобственная точка лежит на всех прямых, имеющих соответствующее ей направление. Тогда на каждой прямой a аффинной плоскости будет лежать точно одна несобственная точка, поэтому последняя задается прямой a. Эту точку будем обозначать большой латинской буквой с индексом a, например через P_a. Из способа введения новых точек следует, что

$$P_a = Q_b \Leftrightarrow a \parallel b; \; b \mathrm{I} P_a \Leftrightarrow b \parallel a. \qquad (5.5)$$

Далее, введем одну несобственную прямую, обозначив ее буквой o, и положим, что на ней лежат все несобственные и только несобственные точки. Точки и прямые аффинной плоскости будем называть обыкновенными.

Докажем, что результатом расширения является проективная плоскость, для этого нужно проверить выполнение условий 0'), 0"), 1'), 1"), 2'), 2").

Пусть даны две различные точки. Если хотя бы одна из них является обыкновенной, то проходящая через них прямая должна быть обыкновенной, так как несобственная прямая o не проходит через обыкновенные точки. Через две различные обыкновенные точки A и B проходит одна обыкновенная прямая $s=AB$. Для обыкновенной точки A и несобственной точки B_t условие $s\text{I}A$, B_t равносильно условию $A\text{I}s \parallel t$, поэтому искомая прямая s проходит через точку A параллельно прямой t. Такая прямая существует и единственна. Если даны различные несобственные точки A_u и B_t, то прямая $s\text{I}A_u$, B_t не может быть обыкновенной, поскольку на такой прямой лежит только одна несобственная точка. Единственной прямой, соединяющей данные точки, является несобственная, т. е. $s = o$. Таким образом, через две различные точки всегда проходит точно одна прямая; выполняются условия 0') и 1').

Пусть даны две различные прямые. Обыкновенные прямые a, b могут быть непараллельными, тогда они имеют одну обыкновенную общую точку, но их несобственные точки P_a и Q_b различны. Если $a \parallel b$, то обыкновенной общей точки нет, но зато $P_a=Q_b$, прямые пересекаются в несобственной точке. Для обыкновенной прямой a и несобственной прямой o общая точка должна быть несобственной, а так как она лежит на a, то допустима только точка P_a. Так как $P_a\text{I}a$, o, то и в этом случае искомая точка существует. Таким образом, две различные прямые всегда имеют точно одну общую точку; выполняются условия 0") и 1").

На каждой обыкновенной прямой лежат по крайней мере две обыкновенные и одна несобственная точка. Три различных направления прямых дают на несобственной прямой три несобственные точки. Таким образом, на любой прямой лежит не менее трех различных точек; выполняется условие 2').

Через каждую обыкновенную точку проходят по крайней мере три различные прямые. Так как каждый класс параллельности содержит не менее двух прямых, то через каждую несобственную точку проходят по крайней мере две обыкновенные прямые и одна несобственная. Таким образом, через любую точку проходят по крайней мере три различные прямые; выполняется условие 2'').

Итак, результатом рассматриваемого построения является проективная плоскость. Она называется *проективным расширением аффинной плоскости.*

Если исходная аффинная плоскость конечна и имеет порядок n, то в ее проективном расширении каждая прямая имеет $n + 1$ точку. Поэтому порядок проективной плоскости, на единицу меньший числа точек прямой, равен n. Установлено следующее ***утверждение:***

Порядок проективного расширения конечной аффинной плоскости равен порядку последней.

Установленная связь между аффинной и проективной плоскостями взаимна, а именно, в каждой проективной плоскости содержатся аффинные подплоскости, для которых данная плоскость служит проективным расширением. Это ясно для плоскости, полученной из аффинной, но это верно и в общем случае.

Выберем в данной проективной плоскости произвольную прямую o, назовем эту прямую и все ее точки *несобственными* элементами; все остальные точки и прямые назовем *обыкновенными.* Докажем, что частичная подплоскость, состоящая из всех обыкновенных элементов, является аффинной. Для этого нужно проверить условия 1'), 2*) и 3), входящие в определение аффинной плоскости.

Так как прямая o не имеет обыкновенных точек, то прямая, проходящая через две обыкновенные точки, является обыкновенной. Это обозначает выполнение условия 1'). Пусть обыкновенная точка A не лежит на обыкновенной прямой a. Любая прямая b, проходящая через точку A, пересекает прямую a в некоторой точке. Эта точка ab не будет обыкновенной, если и только если она окажется несобственной точкой прямой a, т. е. совпадает с точкой ao (рис. 20). Та-

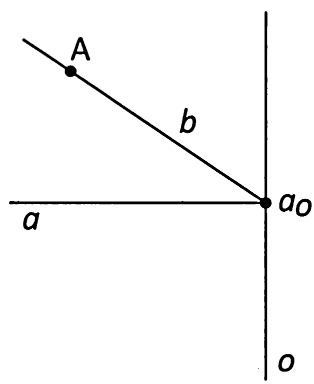


Рис. 20

ким образом, существует точно одна обыкновенная прямая $b = A\cdot(ao)$, проходящая через A и не пересекающая a в обыкновенной точке, т. е. выполняется аксиома параллельности 2*).

Из трех различных прямых, проходящих, по условию 2"), через некоторую несобственную точку, две должны быть обыкновенными. По условию 2'), на каждой из них лежат по крайней мере две обыкновенные точки. Взяв на одной прямой две точки, а на второй одну, получим три различные обыкновенные точки, не лежащие на одной прямой. Следовательно, условие 3) также выполняется; проверка завершена. Классом параллельности является пучок всех прямых аффинного сокращения, проходящих через одну и ту же точку прямой o.

Если для получения проективного расширения для уже построенного аффинного сокращения в качестве несобственных точек использовать точки прямой o и за несобственную прямую принять o, то восстановится исходная проективная плоскость.

Заметим, что проективное расширение аффинной плоскости, с точностью до изоморфизма, единственно, однако o аффинное сокращение проективной плоскости зависит от выбора несобственной прямой. Аффинные сокращения, полученные для различных выборов прямой o, не только состоят из различных элементов, но в общем случае неизоморфны.

В качестве известного примера связанных между собой аффинной и проективной плоскостей можно взять классическую аффинную и проективную плоскости; вторая является проективным расширением первой. Далее, проективным расширением аффинной плоскости порядка 2, т. е. полного четырехвершинника, является конфигурация Фано, представляющая собой проективную плоскость того же порядка 2. Проективное расширение аффинной плоскости (рис. 15) есть проективная плоскость, данная на рис. 13; обе они имеют порядок 3.

4.5.3. Аффинные плоскости над полями

Найденная связь между аффинными и проективными плоскостями дает возможность строить различные аффинные плоскости как сокращения уже известных проективных. В частности, из каждой проективной плоскости, построенной над полем, можно получить аффинную плоскость, удалив одну прямую вместе со всеми ее точками. Проще всего в качестве несобственной взять прямую [0: 0: 1].

Пусть проективная плоскость Π построена над полем P. Обозначим, как и ранее, $P^* = P \cup \{\infty\}$. Точки и прямые плоскости будем задавать неоднородными координатами. Положим, что $o = [\infty]$, тогда точками o будут все точки вида (l), где $l \in P^*$. После удаления прямой $[\infty]$ и ее точек останутся точки вида (x, y), где $x, y \in P$, и прямые видов $[k, m]$ и $[c]$, где $k, m, c \in P$. Условия инцидентности имеют вид:

$$(x, y)\mathrm{I}[k, m] \Leftrightarrow y = kx + m; \qquad (x, y)\mathrm{I}[c] \Leftrightarrow x = c. \qquad (5.6)$$

Для построения аффинной плоскости над полем нет необходимости предварительно строить всю проективную плоскость. Достаточно ввести только обыкновенные точки и прямые. Тогда *построение* примет следующий вид.

Дано поле P. Назовем точками все упорядоченные пары (x, y), где $x, y \in P$, а прямыми – все пары $[k, m]$ и единичные множества $[c]$, где $k, m, c \in P$. Инцидентность точек и прямых введем условиями (5.6), иначе говоря, положим, что прямая $[k, m]$ имеет уравнение $y = kx + m$, а прямая $[c]$ – уравнение $x = c$.

Образцовым примером является построение классической аффинной плоскости над полем R вещественных чисел. По аналогии с классическим случаем будем называть x и y координатами точки (x, y), при этом x называется *абсциссой*, а y – *ординатой*. Аналогично, для прямой $[k, m]$ элемент k называется *угловым коэффициентом* или наклоном, а m – *начальной ординатой*. Точка $O\,(0, 0)$ называется началом координат, а проходящие через нее прямые $[0, 0]$ с уравнением $y = 0$ и $[0]$ с уравнением $x = 0$ – *осью x* и *осью y*, соответственно.

Утверждение, что инцидентностная структура, построенная рассмотренным здесь образом, есть аффинная плоскость, опирается на то, что эта структура является аффинным сокращением проективной плоскости над полем P. Однако возможна и прямая *проверка аксиом* аффинной плоскости.

Пусть даны две различные точки $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$; будем искать прямую $s\mathrm{I}M_1, M_2$. Если $x_1 \neq x_2$, то прямая s не может быть типа $[c]$, так как система $x_1 = c$, $x_2 = c$ противоречива. Поэтому полагаем $s = [k, m]$, элементы k и m должны удовлетворять системе $y_1 = kx_1 + m$ и $y_2 = kx_2 + m$. Почленное вычитание дает уравнение $y_2 - y_1 = kx_2 - kx_2$, по левому дистрибутивному закону оно приводится к виду $y_2 - y_1 = k(x_2 - x_1)$, откуда k есть левое частное от деления $y_2 - y_1$ на $x_2 - x_1$. Так как $x_1 \neq x_2$, то

$x_2 - x_1 \neq 0$, поэтому искомое частное существует и единственно. По найденному значению k сразу получаем $m = y_1 - kx_1 (= y_2 - kx_2)$. Если $x_1 = x_2$, то $M_1 \neq M_2$ влечет $y_1 \neq y_2$. Теперь противоречива система $y_1 = kx_1 + m$ и $y_2 = kx_2 + m$, так как после почленного вычитания она дает $y_2 - y_1 = 0$. Зато уравнения системы $x_1 = c$, $x_2 = c$ совместны и дают единственное решение $c = x_1$ $(= x_2)$. Итак, в любом случае прямая s, проходящая через данные точки M_1 и M_2, существует и единственна; выполняются условия 0') и 1'), рассматриваемая структура является частичной плоскостью, удовлетворяющей условию 1').

Для проверки условия 2*), т. е. аксиомы параллельности, сначала установим, какие прямые не имеют общей точки. Любые две различные прямые вида $[c]$, т. е. прямые $[c_1]$ и $[c_2]$ с $c_1 \neq c_2$, не пересекаются, так как их уравнения $x_1 = c$ и $x = c_2$ несовместны. Аналогично, не пересекаются две различные прямые вида $[k, m]$ с общим угловым коэффициентом k, т. е. прямые $[k, m_1]$ и $[k, m_2]$ с $m_1 \neq m_2$, так как система $y = kx + m_1$ и $y = kx + m_2$ противоречива – она влечет $m_1 = m_2$.

С другой стороны, для прямых $[c]$ и $[k, m]$ система $x = c$ и $y = kx + m$ имеет решение $x = c$ и $y = kc + m$, эти прямые имеют общую точку $(c, kc + m)$. Две прямые вида $[k, m]$ с различными угловыми коэффициентами, т. е. прямые $[k_1, m_1]$ и $[k_2, m_2]$ с $k_1 \neq k_2$, имеют уравнения $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$. Почленное вычитание дает уравнение $k_2x - k_1x + m_2 - m_1 = 0$, откуда $k_2x - k_1x = m_1 - m_2$. По правому дистрибутивному закону оно приводится к виду $(k_2 - k_1)x = m_1 - m_2$, неизвестная абсцисса x равна правому частному от деления $m_1 - m_2$ на $k_2 - k_1$. Так как $k_1 \neq k_2$, откуда $k_2 - k_1 \neq 0$, то искомое частное существует и единственно. Значение $y = k_1x + m_1$ $(k_2x + m_2)$ также существует и единственно.

Таким образом, две различные прямые параллельны, если и только если обе они имеют вид $[c]$ или же вид $[k, m]$ с общим значением k. Возьмем теперь любую прямую s_0 и не лежащую на ней точку $M_0 = (x_0, y_0)$ и будем искать прямую s, проходящую через M_0 и не пересекающую s_0. Если $s_0 = [c_0]$, то должно быть $s = [c]$, а так как $M_0 \mathrm{I} s$, то $x_0 = c$, откуда $s = [x_0]$. Если $s_0 = [k_0, m_0]$, то допустимы только прямые $s = [k_0, m]$, теперь $M_o \mathrm{I} s$ влечет $y_0 = k_0x_0 + m$, откуда $m = y_0 - k_0x_0$ и

$s = [k_0, y_0 - k_0x_0]$. В любом случае искомая прямая s существует и единственна; условие 2*) выполняется.

Гораздо проще проверка последнего условия 3). Возьмем три различные точки $0 = (0, 0)$; $E_1 = (e, 0)$; $E_2 = (0, e)$ и прямую s с уравнением, $x = 0$. Сразу видно, что 0, $E_2 \mathrm{I} s$ и $E_1 \mathrm{I} s$, поэтому точки 0, E_1, E_2 неколлинеарны. Проверка аксиом закончена.

В построенной выше аффинной плоскости все прямые вида $[c]$, включая $[0]$, т. е. ось y, параллельны, образуют один класс параллельности и имеют одно и то же направление, которое можно назвать вертикальным. Аналогично, попарно параллельны, составляют один класс параллельности и имеют одно направление все прямые вида $[k, m]$ с данным значением k. Можно сказать, что направление такой прямой задается коэффициентом k.

Теперь проективную плоскость над полем P можно получить как проективное расширение аффинной плоскости над этим полем. Достаточно направлению прямых вида $[c]$ отнести несобственную точку (∞), а каждому направлению прямых с угловым коэффициентом k – несобственную точку (K) и ввести несобственную прямую $[\infty]$, проходящую через все несобственные точки.

Над конечными полями строятся конечные аффинные плоскости. Для некоторых малых порядков они уже построены как аффинные подплоскости проективных плоскостей.

4.5.4. Аффинные плоскости над квазителами

При доказательстве того, что инцидентностная структура, построенная над полем, является аффинной плоскостью, использованы не все свойства поля. Например, не потребовались коммутативность и ассоциативность умножения. Это позволяет строить аффинные и проективные плоскости над более общими алгебраическими структурами.

Определение. *Левым квазителом* называется множество с двумя бинарными операциями, сложением и умножением, удовлетворяющее следующим условиям: относительно сложения множество является коммутативной группой, а относительно умножения – группоидом, в котором однозначно выполнимо левое деление любого элемента на любой ненулевой элемент; умножение леводистрибутивно относительно сложения, т. е. выполняется левый дистрибутивный закон:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Ассоциативное левое квазитело называется *левым почтителом.*

В левом квазителе умножение леводистрибутивно и относительно вычитания, т. е. выполняется условие $a(b-c)=ab-ac$; всегда справедливы равенства $a\cdot 0=0$; $a(-b)=-ab$. Действительно, $(b-c)+c=b \Rightarrow a[(b-c)+c]=ab \Rightarrow a(b-c)+ac=ab \Rightarrow$ $\Rightarrow a(b-c)=ab-ac$;

$a\cdot 0=a(b-b)=ab-ab=0$; $a(-b)=a(0-b)=a0-ab=$ $0-ab=-ab.$

Аналогично определяется *правое квазитело*; теперь требуется однозначная выполнимость правого деления на любой ненулевой элемент и праводистрибутивность умножения относительно сложения, т. е. выполнение условия $(a+b)c=ac+bc$.

В правом квазителе умножение праводистрибутивно относительно вычитания, справедливы равенства $0\cdot a=0$ и $(-a)b=-ab$. Ассоциативное правое квазитело называется *правым почтителом.*

Правое квазитело можно получить из левого, сохранив сложение и заменив данное умножение на новое, обозначенное здесь посредством $*$, по правилу $a*b=ba$. Умножение также строго однозначно; однозначная разрешимость уравнения $b*x=a$ следует из однозначной разрешимости уравнения $xb=a$, а правая дистрибутивность умножения относительно сложения – из левой дистрибутивности старого умножения.

$$(a+b)*c=c(a+b)=ca+cb=a*c+b*c.$$

Если данное левое квазитело конечно, то таблица умножения получается из таблицы данного умножения транспозицией строк и столбцов. Ясно, что таким же приемом можно получить левое квазитело из правого.

Определение. Множество с двумя бинарными операциями, сложением и умножением, являющееся одновременно левым квазителом и правым квазителом, называется *квазителом.*

Нетрудно видеть, что ассоциативное квазитело, иначе говоря, двустороннее почтитело, является *телом.* Рассмотрение построения, проведенного в п. 3, аффинной плоскости над полем показывает справедливость следующего *утверждения.*

Инцидентностная структура, построенная над квазителом по методу построения аффинной плоскости над полем, также является аффинной плоскостью.

При таком же построении инцидентностной структуры над левым квазителом полностью сохраняется доказательство существования и единственности прямой, проходящей через две различные точки. Однако доказать существование общей точки двух прямых с неравными угловыми коэффициентами уже невозможно, так как не обеспечены правая дистрибутивность и выполнимость правого деления. Заметим теперь, что эти свойства нужны лишь для решения уравнения $k_2x - k_1x = y_2 - y_1$. Поэтому достаточно дополнительно ввести следующее ***условие***:

γ) Уравнение $ax - bx = c$, $a \neq b$ всегда разрешимо относительно x.

Единственность решения может быть доказана. Пусть $ax_1 - bx_1 = c$ и $ax_2 - bx_2 = c$; допустим, что $x_1 \neq x_2$ откуда $x_2 - x_1 \neq 0$. Тогда $ax_1 - bx_1 = ax_2 - bx_2$; $ax_2 = - ax_1\ bx_2 - bx_1$; $a(x_2 - x_1) = b(x_2 - x_1)$; однозначность левого деления влечет $a = b$, что противоречит условию. Допущение опровергнуто, доказано $x_1 = x_2$; уравнение имеет единственное решение.

Конечное левое квазитело удовлетворяет условию γ).

Действительно, только что проведенное рассуждение показывает, что при $a \neq b$ имеем

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow ax_1 - bx_1 \neq ax_2 - bx_2.$$

Это значит, что выражение $ax - bx$ для различных значений аргумента x имеет различные значения. Если квазитело состоит из n элементов, то функция имеет n различных значений, ими окажутся все элементы. Поэтому для любого элемента c существует точно одно такое значение x, что $ax - bx = c$; условие γ) выполняется.

Таким образом, рассмотрение построения плоскости показывает справедливость следующего ***утверждения:***

Над левым квазителом, удовлетворяющим условию γ), ***в частности над любым конечным левым квазителом, строится аффинная плоскость.***

Заметим теперь, что прямая $[0, m]$ имеет уравнение $y = 0{\cdot}x + m$. Чтобы, как в аффинной плоскости над полем, это уравнение имело вид $y = m$, необходимо и достаточно выполнение следующего *условия:*

δ) Всегда $0{\cdot}a = 0$.

Это условие не выводится из определения левого квазитела даже в предположении его конечности. Добавим, что из условий γ) и δ) следует однозначная выполнимость правого деления любого элемента на любой ненулевой элемент. Действительно, уравнение $bx = a$ равносильно, по δ), уравнению $bx - 0 \cdot x = a$; если $b \neq 0$, то оно имеет, по γ), единственное решение.

Рассмотренное построение аффинной плоскости выполнимо и над правым квазителом, удовлетворяющим следующему *условию*, аналогичному условию γ):

γ')Уравнение $xa - xb = c$ всегда разрешимо относительно x.

Теперь доказательство существования и единственности общей точки двух прямых проходит на основе определения правого квазитела. Нахождение прямой, проходящей через две точки с различными абсциссами x_1 и x_2, требует решения уравнения $kx_2 - kx_1 = y_2 - y_1$ относительно неизвестного k. Оно разрешимо однозначно по свойству γ'). Условие δ') $a \cdot 0 = 0$, аналогичное условию δ), здесь обеспечивает прохождение прямой $[k, m]$ через точку $(0, m)$. Действительно, уравнение $y = kx + m$ этой прямой при $x = 0$ дает $y = k \cdot 0 + m = 0 + m = m$. Заметим еще, что конечное правое квазитело всегда удовлетворяет условию γ'). Таким образом, установлено следующее предложение: над правым квазителом, удовлетворяющим условию γ'), в частности над любым конечным правым квазителом, строится аффинная плоскость.

Если левое квазитело удовлетворяет условию γ'), то полученное из него заменой данного умножения на новое по формуле $a*b = ba$ правое квазитело будет удовлетворять условию γ'). Аффинные плоскости строятся над общими квазителами. При этом плоскость над правым квазителом можно построить и над левым, представив уравнение $y = k*x + m$ прямой $[k, m]$ в форме $y = xk + m$.

4.6. Сети

4.6.1. Определение и основные свойства

Частичная плоскость называется *сетью*, если множество ее прямых распадается на семейства таким образом, что через каждую точку плоскости проходит точно по одной прямой из каждого семейства; любые две прямые из разных семейств пересекаются. Все полные ряды точек и семейства прямых эквивалентны.

Из определения видно, что любые две различные прямые одного семейства не пересекаются. Как и в случае аффинной плоскости, совпадающие или же не имеющие общей точки прямые называются *параллельными*, каждое семейство прямых оказывается *классом параллельности.* Общее свойство параллельных прямых называется их *направлением.* В сети выполняются *аксиома параллельности* и следствия из нее, данные выше. Если число классов параллельности не менее трех, то последнее условие определения, т. е. эквивалентность полных рядов и классов параллельности, следует из предыдущих; доказательство то же, что и для аффинных плоскостей. Примером сети может служить любая аффинная плоскость. Другие конкретные сети можно получить, удалив из аффинной плоскости некоторые классы параллельности прямых. Существуют и иные сети.

Определение. Если множество классов параллельности сети конечно и число их равно r, то она называется *r-сетью.*

Использование буквы r связано с тем, что число классов параллельности равно числу всех прямых, проходящих через точку.

Сеть может быть *конечной*, для этого достаточно, чтобы полные ряды были конечны и имелось более одной точки (если $k = 1$, то сеть представляет собой пучок, который может содержать любое количество прямых). Тогда каждый класс параллельности, а поэтому и множество всех точек будут конечными. Классы параллельности будут иметь не менее двух прямых, поэтому для любой прямой a найдется не лежащая на ней точка A. Через эту точку может пройти самое большое k прямых, пересекающих a, и одна прямая, параллельная a. Поэтому пучок с центром A конечен, сеть является r-сетью с $r \leq k + 1$. Множество прямых также оказывается конечным. Далее полагаем $k > 2$.

Определение. *Порядком* конечной сети называется число точек ее прямой.

Порядок обозначается буквой n. Число всех точек r-сети порядка n равно числу всех точек из всех n прямых какого-либо класса параллельности, поэтому есть n^2. Число всех прямых равно произведению числа классов r на порядок n, т. е. числу rn. Таким образом, установлено следующее *предложение.*

Конечная r-сеть порядка n является регулярной частичной плоскостью с параметрами

$$v = n^2; \quad b = rn; \quad k = n; \quad r \leq n + 1. \qquad (6.1)$$

Примером конечной сети порядка n служит аффинная плоскость этого порядка. В этом случае r имеет наибольшее допустимое значение $n + 1$. Наоборот, любая $(n + 1)$-сеть порядка n является аффинной плоскостью порядка n. Действительно, при $n \geq 2$ найдутся 3 неколлинеарные точки, т. е. выполняется условие 3) определения аффинной плоскости. Выполняется и условие 2*). Для любых двух различных точек A и B существует прямая a, проходящая через B. Если $a\mathrm{I}A$, то в пучке из $r = n + 1$ прямых с центром A одна прямая параллельна a, остальные n прямых пересекают a в n различных точках. Так как на прямой a лежит точно n точек, то одна из прямых пучка проходит через точку B.

Таким образом, в любом случае существует прямая AB, выполняется условие 1′). Следовательно, рассматриваемая сеть удовлетворяет определению аффинной плоскости.

Примером конечной сети, отличной от аффинной плоскости, может служить конфигурация Паппа. Как видно из рис. 10, она является 3-сетью порядка 3.

4.6.2. Координатизация сетей

Пусть дана произвольная сеть N. Возьмем некоторое множество S, эквивалентное какому-либо полному ряду, а поэтому всем полным рядам и всем классам параллельности. Будем далее называть S *координатным множеством.* Расширим S, добавив новый элемент ∞, т. е. построив $S^* = S \cup \{\infty\}$. Множество S можно использовать для координатизации полного ряда. Для этого нужно взять некоторое взаимно однозначное отображение ряда на S и считать координатой точки M ее образ – элемент множества S. Аналогично координатизируются классы параллельности. Для координатизации множества направлений элементов S может не хватить: в случае конечной аффинной плоскости число направлений больше числа точек прямой. Для этой цели используется множество S^*. Определенности ради, положим, что координатизирован полный ряд точек прямой a. Возьмем точку A вне a и направлению прямой m пучка с центром A, проходящей через точку M ряда, припишем координату точки M. В общем случае будет использована часть S_0 множества S, но для аффинной плоскости эта часть совпадает с S. Направлению прямой a припишем координату ∞.

Для координатизации множества всех прямых сначала координатизируем множество всех направлений, отнеся каждому из них элемент $k \in S_0^* = S_0 \cup \{\infty\}$. Затем координатизируем каждый класс параллельности, отнеся взаимно однозначно каждой прямой класса некоторый элемент $m \in S$. Тогда каждой прямой будет отнесена упорядоченная пара $[k, m]$. Вместо $[\infty, m]$ будем писать просто $[m]$.

Для координатизации множества точек возьмем класс параллельности ∞. Каждая прямая класса уже имеет некоторую координату $x \notin S$. Координатизируем полные ряды на прямых этого класса, отнеся взаимно однозначно каждой точке данного ряда элемент $y \in \mathrm{S}$. Тогда каждой точке будет отнесена упорядоченная пара (x, y), где x – координата прямой класса ∞, проходящей через точку, а y – координата точки на этой прямой $[x]$.

Координатизации полных рядов на прямых пучка ∞ можно выбрать независимо друг от друга. В случае 1-сети только так и можно поступить. Если же имеется более двух классов, то такая независимая координатизация усложняет работу. Поэтому наложим на координатизации рядов некоторые ограничения. Обозначим один из элементов множества S_0 буквой o и возьмем его в качестве координаты некоторого направления. Через каждую точку M сети проходит точно одна прямая класса o, координату этой прямой в классе и примем за вторую координату y точки M. Другими словами, пару координат (x, y) отнесем точке пересечения прямой $[x]$ класса ∞ с прямой $[o, y]$ класса o. Классы параллельности ∞, k, o назовем координатными; назовем x абсциссой, а y – ординатой данной точки.

Для описания конкретной сети нужно знать все инцидентности точек с прямыми, например, знать все полные ряды точек. Они сразу находятся для прямых координатного класса ∞. А именно, из введения координатизации видно, что на прямой $[c]$ этого класса лежат все точки вида (c, y), где $y \in S$ и только эти точки; прямая $[c]$ имеет уравнение $x = c$.

Прямая $[k, m]$ класса k, где $k \in S_0$, пересекает координатную прямую $[x]$ точно в одной точке (x, y). Поэтому для любого $x \in S$ существует единственная точка данной прямой, имеющая абсциссу x; ордината y этой точки есть строго однозначная функция от x. Так как рассматриваемая прямая задается координатами k и m, то ордината y произвольной точки произвольной прямой, не входящей в класс ∞, является строго однозначной функцией трех переменных x, k, m. Обозначим эту функцию буквой t, т. е. положим

$$y = t(x, k, m). \tag{6.2}$$

Значения этой функции известны для $k = o$. Действительно, на прямой $[o, m]$ класса o лежат все точки вида (x, m), где $x \in S$, и только эти точки; прямая $[o, m]$ имеет уравнение $y = m$. Поэтому

$$t(x, o, m) = m. \tag{6.3}$$

Так как через любую точку (x, y) проходит точно одна прямая $[k, m]$ из данного класса k, то для любых данных значений x, y, k уравнение $t(x, k, m) = y$ с неизвестным m имеет единственное решение. Любые две прямые $[k_1, m_1]$ и $[k_2, m_2]$ из разных классов имеют единственную общую точку (x, y). Из $y = t(x, k_1, m_1)$ и $y = t(x, k_2, m_2)$ следует $t(x, k_1, m_1) = t(x, k_2, m_2)$; это уравнение для любых значений k_1, m_1, k_2, m_2 с $k_1 \neq k_2$ имеет единственное решение. В частности, для прямых $[k, m]$ с $k \neq 0$ и $[o, b]$ уравнение принимает вид $t(x, к, m) = t(x, o, b)$, т. е. $t(x, o, b) = b$; оно имеет единственное решение для любых m, k, b, где $k \neq 0$. Таким образом, установлено следующее ***предложение***:

Рассмотренная выше координатизация данной сети задает строго однозначную функцию $t(x, k, m)$, где $x, m \in S$ и $k \in S_0$, со следующими *свойствами*:

1) Всегда $t(x, o, m) = m$.

2) Для любых данных k, x, y уравнение $t(x, k, m) = y$ с неизвестным m имеет точно одно решение.

3) Для любых данных k_1, m_1, k_2, m_2 с $k_1 \neq k_2$ уравнение $t(x, k_1, m_1) = t(x, k_2, m_2)$ с неизвестным x имеет точно одно решение.

Из 1) и 3) следует:

4) Для любых данных k, m, y с $k \neq 0$, уравнение $t(x, k, m) = y$ с неизвестным x имеет точно одно решение.

Функция t, называемая также *тернарной операцией* над x, k, m, задает инцидентность точек и прямых сети. А именно (ср. форм. (5.6)),

$$(x, y)\mathrm{I}[c] \Leftrightarrow x = c; \quad (x, y)\mathrm{I}[k, m] \Leftrightarrow y = t(x, k, m). \tag{6.4}$$

Пусть, наоборот, на некотором множестве S задана строго однозначная функция $t(x, k, m)$, с $x, m \in S$ и $k \in S_0 \subset S$, удовлетворяющая условиям 1), 2), 3), а поэтому и условию 4).

Пользуясь этой функцией, можно *построить* сеть следующим образом.

Назовем точкой любую упорядоченную пару (x, y), где $x, y \in S$, и прямой – любое единичное множество $[c]$, где $c \in S$, и любую пару $[k, m]$, где $k \in S$, $m \in S$. Инцидентность зададим условиями (6.4).

Через точку (x_0, y_0) проходит точно одна прямая вида $[c]$, а именно, $[x_0]$, и для любого $k \in S_0$ точно одна прямая вида $[k, m]$, так как, по свойству 2) функции t, существует точно одно значение m, удовлетворяющее уравнению $y_0 = t(x_0, k, m)$. Объединим прямые $[c]$ в одно семейство; для каждого допустимого значения построим свое семейство прямых $[k, m]$. Докажем, что любые две прямые из разных семейств имеют точно одну общую точку.

Действительно, прямая $[c]$ имеет с прямой $[k, m]$ общую точку $(c, t(c, k, m))$ и только ее. Для прямых $[k_1, m_1]$ и $[k_2, m_2]$ с $k_1 \neq k_2$ общая точка (x, y) удовлетворяет условиям $y = t(x, k_1, m_1)$ и $y = t(x, k_2, m_2)$, откуда для x получаем уравнение $t(x, k_1, m_1) = t(x, k_2, m_2)$. По условию 3) оно имеет единственное решение. После этого находится единственное значение $y = t(x, k_1, k_2)$. И в этом случае прямые имеют точно одну общую точку.

Все полные ряды точек эквивалентны множеству S. Это ясно для семейства прямых $[c]$ и семейства прямых $[o, m]$. Если имеются еще другие семейства, то проверка эквивалентности полных рядов, как показано выше, уже не требуется.

Итак, построенная рассмотренным способом структура является сетью.

Если множество S бесконечно, то выбор $S_0 = S$ еще не гарантирует, что полученная в результате построения сеть окажется аффинной плоскостью. Чтобы для любых двух точек существовала проходящая через них прямая, необходимо выполнение следующего *условия:*

5) Для любых данных x_1, y_1, x_2, y_2 с $x_1 \neq x_2$ система уравнений $y_1 = t(x_1, k, m)$, $y_2 = t(x_2, k, m)$ с неизвестными k и m имеет точно одно решение.

4.6.3. Координатизация конечных сетей

Для конечной сети тернарную операцию t можно задать таблицами. Пусть дана r-сеть порядка n. В качестве множества S всегда будем брать $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$, а в качестве S_0 – множество $\{0, 1, 2, ..., r-2\}$.

Для фиксированных значений k и m ордината $y = t(k, m, x)$ является функцией одного аргумента и задается таблицей с одним входом (табл. 16). Такие таблицы нужны только для $k \neq 0$. По свойству 4) каждое значение y появляется точно для одного значения аргумента x; т. е. точно один раз; столбец значений y представляет собой некоторую перестановку, составленную из чисел $0, 1, \ldots, n-1$. Каждая пара соответствующих друг другу значений x и y является парой (x, y) координат одной из точек прямой $[k, m]$, где $k \neq 0$. Для фиксированного значения k функция $y = t(x, k, m)$ имеет два аргумента x и m, поэтому задается таблицей с двумя входами (табл. 17). Каждый столбец этой таблицы представляет собой некоторую перестановку элементов 0, 1, ..., $n - 1$. Элементы, находящиеся в одной строке, являются значениями y для данных значений x и k. По свойству 2), для каждого данного значения y найдется точно одно значение m, удовлетворяющее уравнению $y = t(x, k, m)$, поэтому оно войдет в строку точно один раз. Поэтому в каждой строке таблицы находится некоторая перестановка чисел 0, 1, ..., $n - 1$. Квадратная таблица с найденными свойствами имеет особое название.

Определение. Таблица размера $n \times n$, заполненная n различными элементами так, что каждый элемент входит точно по одному разу в каждую строку и в каждый столбец, называется *латинским квадратом порядка n.*

Таблица 16

x	y
0	y_0
1	y_1
2	y_2
...	...
n-1	y_{n-1}

Таблица 17

m / x	0	1	2	...	n-1
0	y_{00}	y_{01}	y_{02}	...	$y_{0(n-1)}$
1	y_{10}	y_{11}	y_{12}	...	$y_{1(n-1)}$
2	y_{20}	y_{21}	y_{22}	...	$y_{2(n-1)}$
...	...	...	...	...	...
n-1	$y_{(n-1)0}$	$y_{(n-1)1}$	$y_{(n-1)2}$	...	$y_{(n-1)(n-1)}$

Таким образом, таблица значений функции $t(x, k, m)$ для любого данного значения k является латинским квадратом с элементами 0, 1, ..., $n - 1$ (табл. 17).

Множество $S_0/\{0\} = \{1, 2, \ldots, r-2\}$ состоит из $r - 2$ элементов, поэтому таблицы нужно иметь для $r - 2$ различных значений

k. Назовем совокупность этих таблиц *альбомом*. Найдем связь между двумя различными таблицами альбома, соответствующими значениям k_1 и k_2 переменной k. Связь между значениями функции дается свойством 3). Значениям m_1 и m_2 соответствуют некоторые столбцы первой и второй таблиц. Требованию, чтобы значения функции были равны точно для одного значения x, соответствует условие, чтобы в выбранных столбцах нашлись ячейки, причем точно по одной, занимающие одно и то же положение и занятые одним и тем же элементом.

Это условие должно выполняться для любого столбца первой таблицы и для любого столбца второй таблицы.

Покажем, какой вид имеет альбом для 4-сети порядка 4, изображенной на рис. 21. Сеть имеет 16 точек и 16 прямых, разбитых на 4 класса параллельности. На рис. 21 объединение четверок прямых в классы показано фигурными скобками. К классам отнесены элементы ∞, 0, 1, 2; классы ∞ и 0 приняты за координатные.

В пределах класса прямые занумерованы числами 0, 1, 2, 3. Координаты точек легко находятся по номерам прямых классов ∞ и 0, поэтому не надписаны. Альбом состоит из двух таблиц, получивших общий номер 18.

Конечная аффинная плоскость порядка n, будучи $(n + 1)$-сетью, имеет альбом из $n - 1$ таблиц.

Пусть, наоборот, дан альбом из $r - 2$ латинских квадратов, удовлетворяющих следующему *условию*.

В любых двух столбцах из разных квадратов имеются ячейки, причем точно по одной, занимающие одно и то же положение и занятые одним и тем же элементом.

Таблица 18

$k = 1$

	0	1	2	3
0	1	0	3	2
1	3	2	1	0
2	2	3	0	1
3	0	1	2	3

$k = 2$

	0	1	2	3
0	3	1	2	0
1	2	0	3	1
2	1	3	0	2
3	0	2	1	3

Альбом задает строго однозначную функцию $t(x, k, m)$, где $x, m \in \{0, 1, ..., n - 1\}$; $k \in \{1, 2, ..., r - 2\}$. Положим еще $t(x, 0, m) = m$. Из того, что каждый элемент входит в каждый столбец точно один раз, следует выполнение условия 4), наложенного на функцию t. Так как каждый элемент входит в каждую строку точно один раз, то выполняется условие 2). Дополнительное условие, наложенное на пары квадратов, гарантирует выполнение условия 3). Поэтому альбом задает r-сеть порядка n.

Если альбом состоит из $n - 1$ таблиц порядка n, то он задает $(n + 1)$-сеть порядка n, т. е. аффинную плоскость порядка n. Требование, чтобы через любые две различные точки проходила прямая, проверять, в отличие от общего случая, не нужно.

4.6.4. Основное описание сетей латинскими квадратами

Существует другой способ описания конечных сетей латинскими квадратами, в некотором смысле более естественный; далее он будет называться *основным.*

Пусть дана r-сеть порядка n. *Координатизируем* ее способом, описанным ранее. Возьмем теперь квадрат размера $n \times n$, занумеруем строки сверху вниз и столбцы слева направо числами от 0 до $n - 1$. Отнесем каждой прямой $[x]$ класса параллельности ∞ строку с номером $i = x$, а каждой прямой $[o, y]$ класса o – столбец с номером $j = y$. Тогда каждой точке (x, y) будет соответствовать ячейка квадрата, принадлежащая строке $i = x$ и столбцу $j = y$.

Каждая прямая $[k, m]$, где $k \neq 0$, имеет n точек, им соответствуют n ячеек квадрата. Впишем в эти ячейки значение координаты m данной прямой, задав тем самым полный ряд ее точек. Так как на каждой прямой класса ∞ лежит точно одна точка данной прямой, то в каждой строке квадрата будет занята одна ячейка. Аналогично, в каждом столбце будет занята элементом m одна ячейка. Множество из ячеек квадрата размера $n \times n$, расположенных по одной в каждой строке и по одной в каждом столбце, называется его *трансверсалью.* Поэтому можно сказать, что данной прямой $[k, m]$ соответствует некоторая трансверсаль квадрата, все ячейки которой заняты элементом.

Класс параллельности k состоит из прямых $[k, m]$, где $m = 0, 1, ..., n - 1$; каждой из них соответствует своя трансверсаль. Вписывая в каждую ячейку значение координаты m единственной прямой класса k, проходящей через соответственную точку, заполним весь квадрат. При этом каждое значение m будет внесено n раз, по одному для каждой строки и для каждого столбца. Это значит, что получится латинский квадрат. Он будет *описанием* данного класса параллельности.

Полным описанием r-сети порядка n служит альбом из $r-2$ латинских квадратов, составленных для $k = 1, 2, ..., r-2$. Возьмем два из них для значений k_1 и k_2. Прямые $[k_1, m_1]$ и $[k_2, m_2]$ пересекаются в одной точке, которой в рассмотренных квадратах соответствуют ячейка квадрата k_1 и ячейка квадрата k_2, занимающие одно и то же положение. В ячейке первого квадрата находится элемент m_1, а в ячейке второго квадрата – элемент m_2, они образуют упорядоченную пару (m_1, m_2). Это справедливо для любых значений m_1 и m_2, т. е. для любой упорядоченной пары, составленной из чисел $0, 1, \ldots, n-1$, найдутся такие соответственные ячейки двух квадратов, что из элементов, находящихся в этих ячейках, составляется данная пара. Наглядно это описывается следующим образом. Совместим данные латинские квадраты, тогда в каждой ячейке окажутся два элемента; составим из них упорядоченную пару, поместив на первое место элемент первого квадрата, а на второе место – элемент второго. Тогда каждая из n^2 возможных пар встретится точно один раз. Латинские квадраты с такой связью имеют особое название.

Определение. Два латинских квадрата одного порядка называются *ортогональными*, если в список всех упорядоченных пар, состоящих из элементов, занимающих соответственные ячейки этих квадратов, каждая возможная пара входит точно один раз.

Таким образом, в альбоме латинских квадратов, представляющем собой основное описание конечной сети, любые два квадрата ортогональны.

Таблица 19

$k = 1$

	0	1	2	3
0	1	0	3	2
1	3	2	1	0
2	2	3	0	1
3	0	1	2	3

$k = 2$

	0	1	2	3
0	3	1	2	0
1	1	3	0	2
2	2	0	3	1
3	0	2	1	3

13	01	32	20
31	23	10	02
22	30	03	11
00	12	21	33

Основным описанием r-сети порядка n является альбом из $n - 2$ попарно ортогональных латинских квадратов порядка n.

Например, 4-сеть порядка 4, изображенная на рис. 21, описывается альбомом из двух латинских квадратов (табл. 19); из дополнительного квадрата, полученного наложением латинских квадратов, видна их ортогональность.

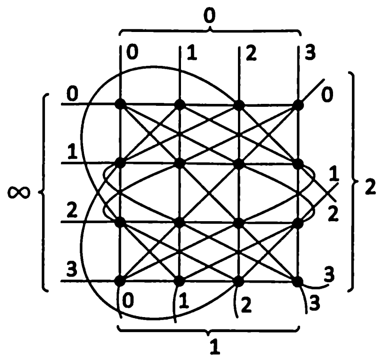


Рис. 21

4.6.5. Координатизация Холла

Рассматривая координатизацию сети, мы допускали любые координатизации множества направлений и каждого класса параллельности. Этот произвол можно ограничить, приняв за образец естественно возникающую координатизацию аффинной плоскости над полем. В этой координатизации каждая точка имеет пару координат – элементов поля; каждая прямая задается одной координатой c или парой координат k и m. При этом как прямые вида $[c]$, так и прямые вида $[k, m]$ с данным значением k образуют классы параллельности, а c или m задают прямую в пределах класса. Точка (x, y) является пересечением прямых $[x]$ и $[o, y]$ из классов ∞ и o, играющих поэтому роль координатных.

Такая естественная координатизация аффинной плоскости над полем имеет ряд особенностей. Прежде всего, на прямой $[e, o]$, уравнение которой имеет вид $y = x$, каждая точка имеет равные между собой координаты. Далее, каждая прямая $[k, o]$ имеет уравнение $y = kx$; полагая $x = o$ и $x = e$, находим, что она проходит через точки (o, o) и (e, k). Наконец, прямая $[k, m]$ имеет уравнение $y = kx + m$; полагая $x = 0$, находим, что она проходит через точку (o, m) прямой $[o]$. Это значит, что рассматриваемая координатизация удовлетворяет следующим *условиям:*

1) Существует прямая класса параллельности e, каждая точка которой имеет вид (c, c).

2) Координата k прямых вида $[k, m]$ равна ординате точки пересечения прямой $[k, o]$, проходящей через начало координат (o, o), с прямой $[e]$.

3) Координата m прямой $[k, m]$ равна ординате точки ее пересечения прямой $[o]$, т. е. осью y.

Для любой сети существует координатизация, удовлетворяющая условиям 1), 2), 3).

Чтобы получить такую координатизацию, выделим в координатном множестве S, кроме элемента o, еще один элемент, обозначив его буквой e. Примем e за координату k одного из некоординатных классов и выберем в этом классе некоторую прямую w, а на ней две различные точки O и E. В случае аффинной плоскости можно, наоборот, выбрать сначала точки O и E, лежащие на разных прямых как класса ∞, так и класса o, положить $w = OE$ и отнести направлению прямой w элемент e. Координатизируем полный ряд точек прямой w элементами из S, отнеся точке O элемент o, а точке E – элемент e. Этого достаточно для однозначного задания координатизации сети с выполнением условий 1), 2), 3).

Для координатизации классов параллельности ∞ и o отнесем прямым из этих классов, проходящим через точку A с координатой a на прямой w, эту координату a. Тогда каждая точка A на w получит пару координат (a, a), в частности получим $O(o, o)$ и $E(e, e)$. Будет выполняться условие 1). Прямые класса параллельности ∞ уже сейчас можно обозначить посредством $[c]$.

Каждая прямая, проходящая через точку O и не принадлежащая классу ∞, пересекает прямую $[e]$ этого класса в некоторой точке (e, k). Для выполнения условия 2) припишем направлению этой прямой координату k. Так как прямая класса o, проходящая через $O(o, o)$, имеет уравнение $y = o$, то она пересекает прямую $[e]$ в точке (e, o). По общему правилу ее направление должно иметь координату o, но именно эта координата присвоена ему с самого начала.

Наконец, каждая прямая класса k, где $k \neq \infty$, пересекает прямую $[o]$ класса ∞ в некоторой точке (o, m). Для выполнения условия 3) примем этот элемент m за вторую координату прямой, т. е. присвоим ей обозначение $[k, m]$. На этом координатизация сети завершается. Все сказанное относится к аффинным плоскостям. Координатизация распространяется и на проективные плоскости. Действительно, выбрав в проективной плоскости несобственную прямую, мы выделим аффинную плоскость. После ее координатизации достаточно каждую общую несобственную точку прямых класса параллельности k, где $k \in S_0 \cup \{\infty\}$, обозначить через (k), а несобственную прямую – через $[\infty]$. Заметим, что в рассматриваемой координатизации имеем $S_0 = S$.

Координатизации сетей, в частности аффинных плоскостей, удовлетворяющие условиям 1), 2), 3) этого раздела, и *основанные* на них координатизации проективных плоскостей, называются *координатизациями Холла.*

Координатизация Холла для·проективной плоскости иллюстрируется рис. 22. Можно положить, что сначала задана четверка O, E, U, V точек, неколлинеарных по три. Точка O называется *началом координат*, E – *единичной точкой*, прямая $x=OU$ – *осью* x, прямая $y=OV$ – *осью* y, прямая $o=UV$ – *несобственной прямой.* Введем еще обозначения $w=OE$, $W=ow$.

Выбирается множество S, эквивалентное множеству всех обыкновенных точек прямой w, в частности, за S можно принять само это множество точек. Два элемента из S получают обозначения o и e; при координатизации ряда точек прямой w множеством S точкам O и E приписываются координаты o и e, соответственно.

Для нахождения координат обыкновенной точки M нужно найти точки $O = w \cdot VM$ и $P = w \cdot UM$, координата x точки Q на прямой w есть абсцисса, а координата y точки R на прямой w – ордината точки M. На рис. 22 даны еще координаты точек Q, R, а также $N = x \cdot VM$ и $P = y \cdot UR$. На рис. 23 показано нахождение координат обыкновенной прямой и координат несобственных точек.

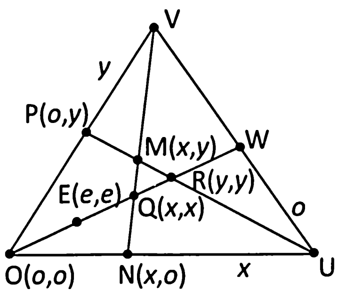


Рис. 22

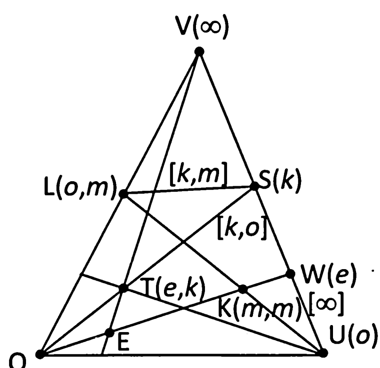


Рис. 23

Тернарную операцию, задаваемую координатизацией Холла для аффинной или проективной плоскости, обозначим буквой T. Она удовлетворяет условиям 1–5) из п. 4.6.2 с заменой t на T, а также следующим *условиям*, соответствующим дополнительным ограничениям 1), 2), 3), наложенным на координатизацию:

6) $T(x, e, o) = x$.

7) $T(e, k, o) = k$.

8) $T(o, k, m) = m$.

4.6.6. Тернарные структуры

Установив, что координатизация Холла для аффинной или проективной плоскости задает на координатизирующем множестве S тернарную операцию, удовлетворяющую некоторым условиям, введем новое понятие.

Определение. Непустое множество S со строго однозначной тернарной операцией T, удовлетворяющей условиям 1) – 8) из пп. 4.6.2 и 4.6.5, называется *тернарной структурой Холла.*

Напомним, что если $d = T(a, b, c)$, то d есть ордината точки с абсциссой a на прямой $[b, c]$. Построение точки D с координатой d по точкам A, B, C с координатами a, b, c, соответственно, на прямой w показано на рис. 24. Последовательно находятся:

$T = VE{\cdot}UB$; $S = UV{\cdot}OT$;

$L = 0V{\cdot}UC$; $M = SL{\cdot}VA$; $D = 0W{\cdot}UM$.

Покажем теперь, что операция T обратима, но с некоторыми оговорками.

Уравнение $T(a, b, c) = d$ однозначно разрешимо относительно c без ограничений, относительно b при условии $a \neq o$, относительно a при условии $b \neq o$.

Однозначная разрешимость уравнения относительно c для любых a, b, d сразу следует из условия 2). Если $b \neq o$, то однозначная разрешимость уравнения относительно a следует из условия 4). Если в условии 5) заменить x_1, y_1, x_2, y_2, k, соответственно на a, d, o, c, b, то оно будет утверждать, что при $a \neq 0$ система $d = T(a, b, m)$, $c = T(o, b, m)$ однозначно разрешима относительно b и m. По 8), второе уравнение приводится к $c = m$; поэтому условие 5) обеспечивает однозначную разрешимость

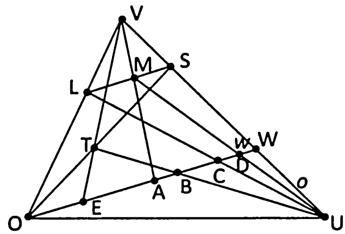


Рис. 24

уравнения $d = T(a, b, c)$ относительно b. Теорему можно получить и геометрически, используя рис. 24.

Для плоскости, построенной над полем, имеет место

$T(x, k, m) = kx + m$. Так как $a + o = a$ и $ea = ae = a$,

то $a + b = ea + b = T(a, e, b)$; $ab = ab + o = T(b, a, o)$.

Эти равенства можно распространить на любые тернарные структуры.

Определение. *Сумма* и *произведение* элементов тернарной структуры Холла задаются равенствами

$$a + b = T(a, e, b) \qquad (6.5)$$

$$ab = T(b, a, o). \qquad (6.6)$$

Построение $c = a + b$ показано на рис. 25, а построение $c = a \cdot b$ – на рис. 26.

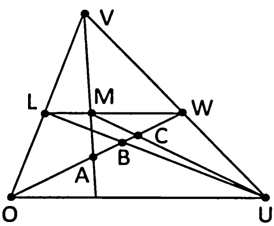


Рис. 25

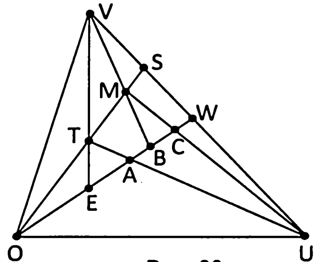


Рис. 26

Из определения видно, что бинарные операции сложения и умножения строго однозначны.

Из условий 8) и 6) следует, что $o + a = T(o, e, a) = a$,

$a + o = T(a, e, o) = a$, т. е.

$$o + a = a + o = a. \qquad (6.7)$$

Это значит, что элемент o является нулевым. Уравнение $a + b = c$ равносильно $T(a, e, b) = c$. Так как $e \neq$ O, то оно однозначно разрешимо относительно a и относительно b. Это означает однозначную выполнимость левого и правого вычитания для любых элементов. Отсюда следует существование и единственность левого противоположного и правого противоположного элементов для любого данного элемента.

Относительно сложения тернарная структура Холла является квазигруппой с нейтральным элементом, т. е. *лупой.*

Из условий 6), 7) следует, что $ea = T(a, e, o) = a$, $T(e, a, o) = a$, т. е:

$$ea = ae = a. \qquad (6.8)$$

Это значит, что элемент e является единичным. Далее, уравнение $ab = c$ равносильно $T(b, a, o) = c$. Оно однозначно разрешимо относительно a, если $b \neq o$, и однозначно разрешимо относительно b, если $a \neq o$. Это означает однозначную выполнимость левого деления и правого деления любого элемента на любом ненулевой элемент. Отсюда следует существование и единственность левого обратного и правого обратного элементов для любого данного ненулевого элемента.

Из условий 1) и 8) следует

$oa = T(a, o, o) = o$ и $ao = T(o, a, o) = o$, т. е.

$$oa = ao = o. \qquad (6.9)$$

Тернарная структура Холла, рассматриваемая как множество с двумя бинарными операциями, обладает многими свойствами кольца, поэтому называется также *тернарным кольцом.* Ясно, что здесь термин «кольцо» имеет более общий смысл, чем обычно.

4.7. Подплоскости проективных плоскостей

4.7.1. Подплоскости и связанные с ними элементы

Любая инцидентностная подструктура плоскости называется ее *подплоскостью*. Точки и прямые, не принадлежащие подплоскости, делятся по отношению к ней на несколько типов.

Определение. Точка плоскости, не принадлежащая подплоскости, называется *внешней*, если она не лежит ни на какой прямой подплоскости; она называется *касательной*, если лежит точно на одной прямой подплоскости; и называется *диагональной*, если лежит хотя бы на двух прямых подплоскости; диагональная точка называется *простой*, если она лежит только на двух прямых подплоскости, и *кратной* в остальных случаях. Прямая плоскости, не принадлежащая подплоскости, называется *внешней*, если она не проходит ни через какую точку подплоскости; называется *касательной*, если проходит точно через одну точку подплоскости, и называется *диагональной*, если проходит хотя бы через две точки подплоскости; диагональная прямая называется *простой*, если проходит только через две точки подплоскости, и *кратной* в остальных случаях.

Диагональные прямые называются также *диагоналями* или *секущими* подплоскости. Из определения видно, что на прямой подплоскости могут лежать кроме точек подплоскости только касательные и диагональные точки, на касательной и диагональной прямой – точки всех типов, на внешней прямой – точки всех типов, кроме точек подплоскости.

Далее рассматриваются только подплоскости проективных плоскостей.

Примером подплоскости может служить ряд точек с его осью. Каждая точка оси, не принадлежащая ряду, является касательной, полный ряд таких точек не имеет; каждая точка вне оси является внешней. Каждая прямая, отличная от оси ряда, является касательной, если она проходит через некоторую точку ряда, и оказывается внешней в противном случае; полный ряд внешних прямых не имеет.

Трехвершинник имеет касательные точки и прямые, внешние точки и прямые, но у него нет диагональных точек и прямых. Рассмотрим еще несколько примеров.

Определение. Любое непустое множество точек, неколлинеарных по три, называется *дугой.* Дуга, состоящая из k точек, называется *k-дугой*.

Любая дуга имеет диагонали, притом только простые, обычно они называются ее секущими. Для k-дуги число секущих есть

$$C_k^2 = \frac{1}{2}k(k-1).$$

Подплоскость, двойственная дуге и состоящая из прямых, неконкурентных по три, общепринятого названия не имеет; будем называть ее *дуалью* дуги.

Определение. Подплоскость, полученная из k-дуги добавлением всех ее секущих, называется *полным k-вершинником*; точки дуги называются ее *вершинами*, а секущие дуги – ее *сторонами*. Подплоскость, двойственная полному многовершиннику, называется *полным многосторонником*.

Полный одновершинник состоит из одной точки, а полный двухвершинник – из двух точек и соединяющей их прямой. Полный трехвершинник под названием трехвершинника рассмотрен выше.

Полный четырехвершинник, в отличие от трехвершинника, имеет диагональные точки, их число равно трем. Он не имеет диагоналей, но условно диагонали подплоскости, полученной из четырехвершинника добавлением всех его диагональных точек, называются диагоналями самого полного четырехвершинника.

4.7.2. Замкнутые подплоскости

Среди различных подплоскостей данной проективной плоскости особый интерес для дальнейшего представляют замкнутые подплоскости. Так как прямая, соединяющая две различные точки такой подплоскости, и точка пересечения двух различных ее прямых также принадлежат ей, то справедливо следующее ***утверждение:***

Замкнутая подплоскость проективной плоскости не имеет диагональных точек и прямых; каждая не принадлежащая ей точка лежит самое большее на одной ее прямой и каждая не принадлежащая ей прямая проходит самое большее через одну ее точку.

Одной из замкнутых подплоскостей проективной плоскости является она сама. Укажем на некоторые ***признаки*** совпадения подплоскости с плоскостью, начав с тривиального.

Замкнутая подплоскость проективной плоскости совпадает с плоскостью, если ей принадлежат все точки или все прямые плоскости.

Действительно, если все точки плоскости входят в подплоскость, то любая прямая плоскости проходит через две точки подплоскости, поэтому принадлежат ей. Вторая часть утверждения доказывается двойственным образом.

Для получения более сильных признаков совпадения введем некоторые новые понятия.

Определение. Центр полного пучка прямых, содержащихся в подплоскости, называется *центром подплоскости*; подплоскость, имеющая центр, называется *центральной*. Ось полного ряда точек, содержащегося в подплоскости, называется осью подплоскости; подплоскость, имеющая ось, называется *осевой*.

Другими словами, точка является центром подплоскости, если каждая прямая, проходящая через эту точку, входит в подплоскость; прямая является осью подплоскости, если любая точка этой прямой входит в подплоскость. Ясно, что понятия центра и оси двойственны друг другу. Отметим следующее ***свойство.***

Прямая центральной замкнутой подплоскости, не проходящая через ее центр, является осью.

Действительно, каждая точка такой прямой лежит на двух прямых подплоскости: данной прямой и прямой, соединяющей точку с центром подплоскости. Поэтому каждая точка данной прямой принадлежит подплоскости, эта прямая является осью.

По принципу двойственности справедливо следующее ***утверждение:***

Точка осевой замкнутой подплоскости, не лежащая на оси, является центром.

Покажем теперь, что наличие в замкнутой подплоскости даже небольшого количества центров или осей влечет ее совпадение с плоскостью.

Замкнутая подплоскость проективной плоскости, имеющая три неколлинеарных центра или три неконкурентные оси, совпадает с плоскостью.

Действительно, если подплоскость имеет три неколлинеарных центра P, Q, R, то для любой точки M плоскости среди прямых PM, QM, RM, принадлежащих подплоскости, имеются хотя бы две различные (рис. 27). Поэтому точка M входит в подплоскость, подплоскость содержит все точки плоскости и, следовательно, совпадает с плоскостью. Вторая часть предложения справедлива по принципу двойственности.

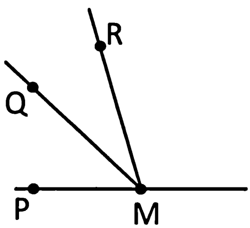


Рис. 27

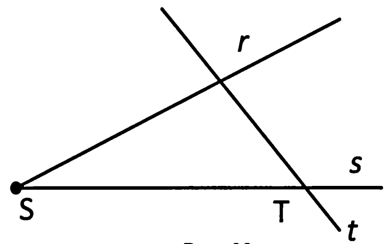


Рис. 28

Это условие используем для получения более сильного.

Замкнутая подплоскость проективной плоскости, имеющая два центра или две оси, совпадает с плоскостью.

Пусть подплоскость имеет два центра S и T (рис. 28). Через каждый из них, по аксиоме 2″ (с. 270), проходят по крайней мере две прямые, отличные от ST. Выберем из них прямые r, $s \mathrm{I} S$ и прямую $t \mathrm{I} T$; все они принадлежат подплоскости. Так как r, $s \not\mathrm{I} T$ и $t \not\mathrm{I} S$, то r, s, t являются осями подплоскости, притом неконкурентными, по соответствующему признаку. Таким образом, подплоскость имеет три неконкурентные оси; по предыдущему она совпадает с плоскостью. Вторая часть предложения справедлива по принципу двойственности.

Из последнего *предложения* следует, что собственная замкнутая подплоскость проективной плоскости имеет не более одного центра и не более одной оси.

4.7.3. Максимальные замкнутые подплоскости

Рассмотрим теперь несобственные замкнутые подплоскости, наиболее близкие, в некотором смысле, к самой плоскости.

Определение. Собственная замкнутая подплоскость называется *максимальной*, если она не является правильной частью какой-либо другой собственной замкнутой подплоскости.

Другими словами, единственной другой замкнутой подплоскостью, содержащей данную, должна быть сама плоскость. Рассмотрим одно ***достаточное условие максимальности***.

Собственная замкнутая подплоскость проективной плоскости максимальна, если она не имеет внешних элементов.

Для доказательства положим, что в проективной плоскости Π замкнутая плоскость Π_0 не имеет внешних элементов. Тогда все точки и прямые, не входящие в Π_0, будут касательными. Пусть теперь Π_0 является правильной частью замкнутой подплоскости Π_1. Тогда в Π_1 имеются элементы, не входящие в Π_0. Если таким элементом является точка A, то для Π_0 она должна быть касательной, поэтому лежащей на одной прямой из Π_0. Все другие прямые, проходящие через точку A, будут касательными для Π_0. Возьмем одну из этих касательных, обозначив ее через s; на ней лежит некоторая точка B подплоскости Π_0. Эта точка входит и в подплоскость Π_1. Так как A не входит в Π_0, то $A \neq B$, а так как A и B принадлежат Π_1, то прямая $s = AB$ также принадлежит Π_1. Этим установлено, что все прямые пучка с центром A входят в Π_1, поэтому точка A есть центр подплоскости Π_1.

На прямой s лежит точка C, отличная от A и B. Так как из всех точек прямой s только B входит в Π_0, то точка C для подплоскости Π_0 является касательной, через нее проходит прямая t подплоскости Π_0, входящая и в Π_1. Так как s не входит в Π_0, то $s \neq t$ и $C = st$; так как прямые s и t обе входят в Π_1, то точка C тоже входит в Π_1. По доказанному в предыдущем абзаце, точка C подплоскости Π_1, не входящая в Π_0, является центром для Π_1, поэтому Π_1 имеет два центра, а это влечет $\Pi_1 = \Pi$.

По принципу двойственности, $\Pi_1 = \Pi$ и при допущении, что подплоскость Π_1 имеет прямую a, не входящую в Π_0. По определению, равенство $\Pi_1 = \Pi$ обозначает максимальность Π_0; доказательство завершено.

Приведем несколько примеров.

Подплоскость проективной плоскости, состоящая из полного ряда и полного пучка, максимальна.

Действительно, эта подплоскость замкнута. Далее, на прямых полного пучка лежат все точки плоскости и через точки полного ряда проходят все прямые плоскости. Поэтому рассматриваемая подплоскость не имеет внешних элементов, следовательно, она максимальна.

Любая проективная подплоскость замкнута. Если она является собственной, то ее порядок меньше порядка самой плоскости. Можно получить и более сильное ***ограничение***.

Порядок n конечной проективной плоскости и порядок m ее собственной проективной подплоскости связаны условием $m^2 = n$ или $m^2 + m \leq n$.

Действительно, пусть Π_0 – собственная проективная подплоскость проективной плоскости Π. Уже отмечено, что $m < n$. На произвольной прямой a из Π_0 лежит $n + 1$ точка плоскости, из них входят в подплоскость $m + 1$. Так как $m + 1 < n + 1$, то некоторые точки прямой a в Π_0 не входят, они оказываются касательными. Следовательно, Π_0 имеет касательные точки, она может иметь и внешние точки.

Возьмем на прямой a касательную точку A. В полном пучке с центром A прямая a содержит $m + 1$ точку из Π_0, остальные $(m^2 + m + 1) - (m + 1) = m^2$ точки подплоскости Π_0 лежат на касательных, входящих в пучок. Так как полный пучок содержит $n + 1$ прямую, то должно выполняться условие $m^2 + 1 \leq n + 1$, т. е. $m^2 \leq n$. Число внешних прямых, проходящих через A, равно $n - m^2$. Возможны два случая.

Если подплоскость Π_0 не имеет внешних прямых, то $m^2 = n$. Наоборот, если $m^2 = n$, то не существует внешних прямых, проходящих через A. Так как это верно для любой касательной точки, поэтому Π_0 вообще не имеет внешних прямых. По принципу двойственности, она не имеет и внешних точек.

Если подплоскость Π_0 имеет внешнюю точку B, то через нее проходит $m^2 + m + 1$ касательных прямых, по числу точек Π_0. Это дает неравенство

$m^2 + m + 1 \leq n + 1$, откуда $m^2 + m \leq n$. Доказательство завершено.

Определение. Собственная проективная подплоскость проективной плоскости, не имеющая внешних элементов, называется *бэровой.*

Она названа по имени математика Бэра, впервые обратившего внимание на такие подплоскости. По найденному выше признаку, бэрова подплоскость максимальна. Ее порядок m связан с порядком n самой плоскости условием $m^2 = n$. Поэтому бэровы подплоскости могут иметь только те конечные проективные плоскости, порядок которых является квадратом некоторого натурального числа.

Поэтому проективная плоскость над полем порядка 9 имеет бэровы подплоскости, одной из них является проективная плоскость над полем порядка 3.

Однако, например, плоскость порядка 7 бэровых подплоскостей иметь не может.

4.7.4. Замыкание подплоскостей

Для любой подплоскости Π_0 проективной плоскости Π существуют содержащие ее замкнутые подплоскости. В любом случае одной из них является сама плоскость Π, при этом она максимальна. Интересна также минимальная замкнутая подплоскость, содержащая Π_0, т. е. не содержащая других таких подплоскостей. Для ее нахождения докажем сначала одно ***предложение.***

Пересечение любого непустого множества замкнутых подплоскостей данной проективной плоскости является замкнутой подплоскостью.

Пусть Φ – произвольное множество замкнутых подплоскостей Π' проективной плоскости Π. Пересечение $\Pi^* = \cap(\Pi' | \Pi' \in \Phi)$ есть подплоскость. Каждый элемент подплоскости Π^* принадлежит всем пересекаемым подплоскостям Π'. В частности, любые две различные точки A и B из Π^* принадлежат каждой подплоскости Π' из Φ. Вследствие замкнутости всех рассматриваемых подплоскостей прямая $s = AB$ также принадлежит всем подплоскостям Π' из Φ, поэтому s принадлежит Π^*. Это значит, что подплоскость Π^* замкнута относительно соединения. Аналогично, она замкнута относительно пересечения; следовательно, она замкнута.

Используя доказанное предложение, можно утверждать, что для произвольной подплоскости Π_0 пересечение Π^* всех замкнутых подплоскостей Π', содержащих Π_0, есть замкнутая подплоскость. Так как Π^* содержится во всех рассматриваемых подплоскостях Π', то любая из этих подплоскостей не может быть правильной частью Π^*. Это значит, что подплоскость Π^* минимальная среди всех замкнутых подплоскостей, содержащих Π_0. Дадим такой всегда существующей и единственной подплоскости название.

Определение. Минимальная замкнутая подплоскость, содержащая данную подплоскость, называется ее *замыканием*.

Замыкание подплоскости Π_0 будем обозначать посредством $\overline{\Pi_0}$. Существует простой процесс получения элементов $\overline{\Pi_0}$ из элементов Π_0.

Присоединив к данной подплоскости Π_0 все ее диагональные точки, получим подплоскость Π_1, замкнутую относительно пересечения. Присоединив к Π_1 ее диагонали, получим подплоскость Π_2, замкнутую относительно соединения. За счет присоединения новых прямых подплоскость Π_2 может иметь диагональные точки, отсутствующие у Π_0. Присоединяя к Π_2 эти точки, получим Π_3, снова замкнутую относительно пересечения. Таким путем строится последовательность подплоскостей Π_0, $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$, из которых каждая следующая содержит все предыдущие. При этом все подплоскости Π_i с положительными нечетными номерами замкнуты относительно пересечения, а плоскости с четными номерами замкнуты относительно соединения.

Так как из двух соседних подплоскостей Π_i и Π_{i+1}, отличных от Π_0, одна замкнута относительно пересечения, а другая – относительно соединения, то в случае их совпадения подплоскость Π_i обладает обоими свойствами, т. е. будет замкнутой. Поэтому все следующие за ней подплоскости Π_{i+1}, Π_{i+2}, … будут совпадать с нею, процесс не требует продолжения. Покажем, что подплоскость Π_i, совпадающая с Π_{i+1}, совпадает и с замыканием $\overline{\Pi_0}$ подплоскости Π_0. Так как Π_i замкнута и содержит Π_0, то Π_i содержит $\overline{\Pi_0}$. С другой стороны, $\overline{\Pi_0}$ содержит все прямые из Π_0, поэтому содержит точки пересечения этих прямых, т. е. диагональные точки подплоскости Π_0. Отсюда следует, что $\overline{\Pi_0}$ содержит подплоскость Π_1. Таким же образом можно установить, что $\overline{\Pi_0}$ содержит подплоскость Π_2; это же верно для Π_3, Π_4 … и, наконец, для Π_i. Так как Π_i и $\overline{\Pi_0}$ взаимно содержат друг друга, то $\Pi_i = \overline{\Pi_0}$.

Если данная плоскость Π конечна, то добавление новых точек и прямых не может продолжаться бесконечно, поэтому рассмотренное построение всегда заканчивается получением замыкания $\overline{\Pi}$.

Наоборот, в случае бесконечности Π процесс расширения может продолжаться без конца. Можно показать, что в этом случае замыкание $\overline{\Pi_0}$ является объединением всех подплоскостей Π_i, т. е. $\overline{\Pi_0} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Pi_i$. Интересно то, что любой элемент замыкания $\overline{\Pi_0}$ получается выполнением конечного числа операций. Действительно, любой элемент объединения подплоскостей Π_i принадлежит какой-либо из этих подплоскостей.

Замыкание данной подплоскости Π_0 может оказаться проективной плоскостью. Для этого достаточно, чтобы в Π_0 имелось 4 точки, неколлинеарные по три, или четыре прямые, неконкурентные по три; действительно, эти элементы войдут и в $\overline{\Pi_0}$.

Возьмем в качестве подплоскости Π_0 полный четырехвершинник. Присоединение трех его диагональных точек дает подплоскость Π_1. Если диагональные точки подплоскости Π_0 коллинеарны, то Π_1 имеет единственную диагональ, ее присоединение дает новую плоскость Π_2. Так как диагональ подплоскости Π_1 пересекает все ее прямые в точках, принадлежащих ей же, то под плоскость Π_2 не имеет диагональных точек, она замкнута и оказывается конфигурацией Фано, т. е. проективной плоскостью порядка 2. Если диагональные точки подплоскости Π_0 неколлинеарны, то подплоскость Π_1 имеет три диагонали, пересекающие прямые в шести точках. Здесь $\Pi_2 \neq \Pi_3$, процесс расширения продолжается дальше, но для конечной плоскости завершается построением проективной подплоскости.

4.8. Коллинеации проективных плоскостей

4.8.1. Определение коллинеации проективной плоскости

Напомним, что для любых инцидентностных структур изоморфные отображения иначе называются *коллинеациями*. Поэтому коллинеация плоскости Π в плоскость Π' есть взаимно однозначное отображение Π на Π', относящее точкам точки, прямым прямые и удовлетворяющее условию $M\mathrm{I}m \Leftrightarrow M'\mathrm{I}m'$. Это условие распадается на два: $M\mathrm{I}m \Rightarrow M'\mathrm{I}m'$ и $M'\mathrm{I}m' \Rightarrow M\mathrm{I}m$; второе из них равносильно условию $M \not\mathrm{I}\, m \Rightarrow M' \not\mathrm{I}\, m'$. Другими словами, коллинеация должна сохранять инцидентность и неинцидентность точек с прямыми. Покажем, что в случае проективных и аффинных плоскостей второе условие излишне, т. е. справедливо следующее ***утверждение:***

Коллинеацию проективной или аффинной плоскости Π на такую же плоскость Π' можно определить как взаимно однозначное отображение Π на Π', относящее точкам точки, прямым прямые и сохраняющее инцидентность точек с прямыми.

Для *доказательства* достаточно показать, что отображение Π на Π', удовлетворяющее условиям теоремы, сохраняет инцидентность. Пусть точка A не лежит на прямой a; возьмем точку $B\mathrm{I}a$, тогда $B \neq A$ и существует прямая $b = AB$. Так как $a \not\mathrm{I}\, A$ и $b\mathrm{I}A$, то $a \neq b$ (рис. 29). Из взаимной однозначности отображения и сохранения инцидентности следует

$$B'\mathrm{I}a';\ B' \neq A';\ b'\mathrm{I}A',\ B';\ \ a' \neq b'.$$

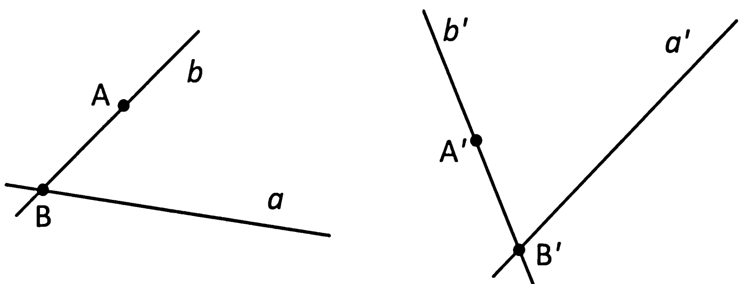


Рис. 29

Отсюда, по признаку неинцидентности, следует $A' \not\mathrm{I}\, a'$. Следовательно, рассматриваемое отображение сохраняет неинцидентность, поэтому является коллинеацией.

Рассмотрим некоторые ***предложения***, позволяющие задавать коллинеации плоскостей через отображения их частей, конечно, достаточно богатых.

Коллинеация проективной или аффинной плоскости Π в такую же плоскость Π' может быть задана отображением множества P всех точек первой плоскости во множество P' всех точек второй.

Пусть для коллинеации f плоскости Π в плоскость Π' известно действие на все точки. Так как на каждой прямой m из Π лежат две различные точки A, B с вполне определенными образами A', B', то образ m' прямой m вполне определен, а именно $m' = A'B'$. Поэтому отображение множества L всех прямых плоскости Π на множество L' всех прямых плоскости Π' задано.

Характерным свойством действия коллинеаций на точки является то, что она переводит коллинеарные точки в коллинеарные, короче говоря, сохраняет их коллинеарность. Именно с этим связано ее название. Это свойство можно использовать для усиления предыдущего предложения.

Взаимно однозначное отображение множества P всех точек проективной или аффинной плоскости Π на множество P' всех точек такой же плоскости Π', сохраняющее коллинеарность троек точек, задает коллинеацию Π в Π'.

Пусть отображение f_0 множества P на множество P' имеет требуемое свойство. Двум различным точкам A и B прямой m плоскости Π соответствуют несовпадающие точки A' и B' плоскости, они задают прямую $m' = A'B'$. Любая точка M прямой m коллинеарна с A и B, поэтому соответствующая точка M' коллинеарна с A' и B', следовательно, M' лежит на m'. Если C и D – любые несовпадающие точки прямой m, то C' и D' тоже не совпадают и лежат на m', поэтому $m' = C'D'$. Это значит, что прямая m' не зависит от выбора пары точек на m. Положим, что $m' = f(m)$; этим отображение f будет распространено на множество L всех прямых плоскости Π. Из построения видно, что f сохраняет инцидентность, поэтому f есть коллинеация Π в Π'.

Для проективных плоскостей справедливы также ***предложения***, двойственные двум последним.

Перед введением следующего предложения докажем одно ***свойство*** коллинеации аффинных плоскостей, имеющее много приложений.

Коллинеация аффинной плоскости A в аффинную плоскость A' переводит пересекающиеся прямые в пересекающиеся, а параллельные – в параллельные.

Первая часть утверждения очевидна, так как $a,b \mathrm{I} P$; $a',b' \mathrm{I} P'$.

Если $a||b$, то любая точка плоскости A неинцидентна хотя бы одной из прямых a и b. Так как коллинеация сохраняет неинцидентность, то любая точка плоскости A' неинцидентна хотя бы одной из прямых a' и b'. Поэтому a' и b' не имеют общей точки, т. е. $a||b$.

Из сохранения параллельности прямых следует и такое ***утверждение***: *при коллинеации аффинных плоскостей классы параллельности первой плоскости взаимно однозначно отображаются в классы параллельности второй.*

Теперь можно рассмотреть *связь* между коллинеациями проективных и аффинных плоскостей.

Сокращение коллинеации проективной плоскости Π на аффинной плоскости A, полученной выбором в Π несобственной прямой o, есть коллинеация плоскости A.

Пусть f – коллинеация проективной плоскости Π в проективную плоскость Π'. Обозначим $o' = f(o)$ и примем o' за несобственную прямую плоскости Π'. Коллинеация f взаимно однозначно отображает точки плоскости Π, не лежащие на o, в точки плоскости Π', не лежащие на o', а прямые плоскости Π, отличные от o, – в прямые Π', отличные от o'. Поэтому f взаимно однозначно отображает аффинную плоскость A, содержащуюся в Π, на аффинную плоскость A', содержащуюся в Π', сохраняя инцидентность. Следовательно, сокращение Π на A есть коллинеация A в A'.

Коллинеация аффинной плоскости A в аффинную плоскость A' единственным образом расширяется до коллинеации проективного замыкания Π плоскости A в проективное замыкание Π' плоскости A'.

Пусть f – коллинеации A в A'. Расширяем A до Π и A' до Π' добавлением несобственных элементов. Ради сохранения инцидентности, образом несобственной точки P_a, лежащей на всех прямых класса K_a, включающего прямую a, следует считать несобственную точку $P'_{a'}$, лежащую на всех прямых класса $K'_{a'}$, содержащего прямую $a' = f(a)$. Несобственной прямой o, проходящей через все несобственные точки плоскости Π, должна соответствовать несобственная прямая o' плоскости Π'. С другой стороны, такое расширение коллинеации f до отображения Π на Π' удовлетворяет определению коллинеации.

Последняя ***теорема*** позволяет задавать коллинеацию проективной плоскости коллинеацией любого ее аффинного сужения.

Как для проективных, так и для аффинных плоскостей справедливы следующие ***предложения***, вытекающие из свойств коллинеаций любых инцидентностных структур:

• *Произведение* коллинеации плоскости Π в плоскость Π' на коллинеацию плоскости Π' в плоскость Π'' есть коллинеация Π в Π''.

• *Отображение*, обратное коллинеации плоскости Π в плоскость Π', есть коллинеация Π' в Π.

4.8.2. Двойные элементы коллинеации

Далее рассматриваются только коллинеации данной плоскости в себя; будем называть их кратко коллинеациями. Из данных выше предложений следует, что коллинеация проективной или аффинной плоскости может быть задана преобразованием множества всех точек. Более того, любое такое преобразование, сохраняющее коллинеарность троек точек, единственным образом расширяется до коллинеации плоскости.

Одной из коллинеаций плоскости является тождественное преобразование e. Имеется ряд ***признаков*** того, что данная коллинеация оказывается тождественной.

Коллинеация проективной или аффинной плоскости является *тождественной*, если ее сокращение на множестве точек есть тождественное преобразование.

Тождественное преобразование всех точек проективной или аффинной плоскости задает тождественную коллинеацию плоскости.

Действительно, такое преобразование сохраняет коллинеарность троек точек, поэтому задает единственную коллинеацию плоскости. Подходящей коллинеацией является e; вследствие единственности она является искомой.

Единственным расширением тождественной коллинеацнии аффинной плоскости A на ее проективное замыкание Π является тождественная коллинеация плоскости Π.

Для изучения коллинеаций важную роль играют их двойные элементы.

Определение. Элемент плоскости называется *двойным* элементом данной коллинеации, если коллинеация преобразует его в себя.

Относительно двойного элемента будем говорить также, что коллинеация *сохраняет его.* Отметим некоторые ***свойства*** двойных элементов, легко выводимые из определений; они справедливы для любых частичных плоскостей:

• *Каждая точка двойной прямой преобразуется в точку этой же прямой.*

Пусть $A\mathrm{I}a$, тогда $A'\,\mathrm{I}a'$; так как, по условию $a' = a$, то $A'\,\mathrm{I}a$.

• *Каждая прямая двойной точки преобразуется в прямую этой же точки.*

Это утверждение справедливо по принципу двойственности.

Таким образом, двойная прямая проходит через пары соответственных точек, а двойная точка лежит на парах соответственных прямых. В определенной степени справедливо и *обратное.*

• *Прямая, проходящая через две различные пары соответственных точек, является двойной.*

Действительно, если $s\mathrm{I}A, A', B, B'$, то из $s\mathrm{I}A, B$ следует $s'\,\mathrm{I}A', B'$, а так как $s\mathrm{I}A', B'$ и $A'\neq B'$ (в случае $A'=B'$ было бы $A = B$, пары совпали бы), то $s = s'$.

Задание двойной точки можно понимать как задание пары соответственных точек, поэтому из последнего предложения получаются такие ***следствия.***

• *Прямая, проходящая через двойную точку и пару соответственных точек, отличных от ее, является двойной.*

• *Прямая, проходящая через две различные двойные точки, является двойной.*

Принцип двойственности дает теперь следующие ***предложения.***

Точка, лежащая на двух различных парах соответственных прямых, является двойной.

Точка, лежащая на двойной прямой и на паре отличных от нее соответственных прямых, является двойной.

Точка пересечения двух различных двойных прямых является двойной.

Рассмотрим теперь некоторые ***свойства*** элементов, не являющихся двойными, для коллинеаций проективных плоскостей.

На каждой недвойной прямой лежит точно одна пара соответственных точек.

Действительно, если прямая a не является двойной, то ее прообраз a_0 в данной коллинеации отличен от нее, $a_0 \neq a$. Возьмем точку $A = aa_0$, из $A\mathrm{I}a_0$ следует $A'\mathrm{I}a$, поэтому $A, A'\mathrm{I}a$, точки A и A' образуют искомую пару. Другой такой пары не существует, так как в противном случае прямая была бы двойной.

Принцип двойственности дает теперь следующее ***предложение:***

Через каждую недвойную точку проходит точно одна пара соответственных прямых.

Из того, что соединение двух двойных точек и пересечение двух двойных прямых также являются двойными элементами, следует важное ***предложение:***

Множество всех двойных элементов коллинеации проективной плоскости является замкнутой подплоскостью.

Для коллинеации f плоскости Π эта подплоскость будет обозначаться через Π_f. Отметим одно ее *свойство* для случая, когда плоскость Π конечна.

Любая коллинеация конечной проективной плоскости имеет одно и то же число двойных точек и двойных прямых.

Для доказательства вспомним, что для конечной проективной плоскости число v всех точек и число b всех прямых равны. Обозначим число всех двойных точек одной коллинеации через p, а число всех ее двойных прямых через q. Подсчитаем двумя путями число подплоскостей, состоящих из пары соответственных точек и проходящей через них прямой. Каждая пара несовпадающих соответственных точек дает одну такую подплоскость, а каждая двойная точка дает $n + 1$. Отсюда общее число подплоскостей есть

$$(v - p) + p\,(n + 1) = v + np.$$

С другой стороны, каждая недвойная прямая дает одну подплоскость, а каждая двойная прямая дает $n + 1$ подплоскость, по числу пар соответственных точек на ней. Число всех подплоскостей есть

$$(b - q) + q(n + 1) = b + nq.$$

Отсюда получаем $v + np = b + nq$, а так как $v = b$, имеем

$$np = nq; \quad p = q.$$

Из последней теоремы следует, что замкнутая подплоскость Π_f может быть только одного из следующих *типов*:

а) пустое множество;

б) объединение ряда точек с его осью и пучка прямых с его центром, причем ряд и пучок должны иметь одно и то же число элементов;

в) проективная плоскость.

В случае в) подплоскость Π_f может совпадать с данной плоскостью Π; это возможно, если и только если $f = e$.

Различные коллинеации имеют, вообще говоря, различные подплоскости двойных элементов. Заметим, что каждый двойной элемент данной коллинеации f является двойным элементом обратной коллинеации f^{-1} и наоборот. Отсюда следует равенство

$$\Pi_{f^{-1}} = \Pi_f. \qquad (8.1)$$

Элемент, сохраняемый коллинеациями f и g, сохраняется при их последовательном выполнении, поэтому является двойным для коллинеации gf. Поэтому элемент, принадлежащий Π_f и Π_g, иначе говоря, элемент подплоскости $\Pi_f \cap \Pi_g$, принадлежит и подплоскости Π_{gf}, это дает соотношение

$$\Pi_{gf} \supset \Pi_f \cap \Pi_g. \qquad (8.2)$$

Обратное, вообще говоря, неверно, т. е. элемент подплоскости Π_{gf} может не принадлежать Π_f и Π_g. Если, например, $f(A) = B \neq A$ *и* $g(B)=A$, то

$(gf)(A)=g(f(A))=g(B)=A$; $\quad A \in \Pi_{gf}$, но $A \in \Pi_f \Pi_g$.

Из правила (7.2) следует, в частности,

$$\Pi_{f^2} \supset \Pi_f \cap \Pi_f = \Pi_f\ ;\ \Pi_{f^3} \supset \Pi_{f^2} \cap \Pi_f = \Pi_f$$

и вообще

$$\Pi_{f^k} \subset \Pi_f. \qquad (8.3)$$

4.8.3. Оси и центры коллинеации

Точка двойной прямой и прямая двойной точки могут не быть двойными элементами. Однако может оказаться, что все элементы, инцидентные данному, являются двойными.

Определение. Двойная прямая, все точки которой являются двойными, называется *осью* коллинеации. Двойная точка, все прямые которой являются двойными, называется *центром* коллинеации.

Понятия оси и центра двойственны друг другу. Из определения видно также, что ось и центр коллинеации f являются, соответственно, осью и центром подплоскости Π_f. Если коллинеация f имеет две оси или два центра, то это имеет место и для подплоскости Π_f, что влечет $\Pi_f = \Pi$, откуда $f = e$.

Коллинеация, имеющая две оси или два центра, является тождественной; нетождественная коллинеация имеет самое большее один центр. Рассмотрим некоторые ***свойства*** коллинеации, имеющей данную ось p, для проективной плоскости.

а) Соответственные прямые, отличные от оси, пересекают ось в одной и той же точке. Это следует из того, что каждая точка оси является двойной.

б) Прямая, проходящая через две соответственные точки вне оси, является двойной.

Действительно, такая прямая a проходит через пару соответственных точек и двойную точку $X = ap$, лежащую на оси (рис.30).

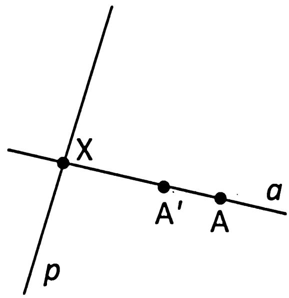


Рис. 30

Из последнего предложения непосредственно выводятся такие ***следствия***.

в) Двойная точка, не лежащая на оси, является центром. Заметим, что это следует также из того, что точка замкнутой подплоскости Π_f, не лежащая на ее оси, должна быть ее центром.

г) Через каждую точку плоскости проходит по крайней мере одна двойная прямая.

Действительно, через точку на оси p проходит сама ось. Для точки A вне оси двойной будет прямая aIA, A', по свойству б). Теперь можно доказать следующее важное ***предложение:***

Коллинеация проективной плоскости, имеющая ось, имеет центр.

Пусть коллинеация f имеет ось p. Существуют различные двойные прямые, отличные от p, так как в противном случае все точки вне оси лежали бы на одной прямой, что невозможно. Если общая точка S двух таких двойных прямых a, b не лежит на оси, то она является центром, по в). Если такой пары двойных прямых нет, то все двойные прямые, отличные от оси, попарно пересекаются в точке на оси, поэтому проходят через одну и ту же точку S на оси. Так как через каждую точку вне оси проходит двойная прямая, то все прямые, отличные от оси и проходящие через S, будут двойными; двойной будет и ось. Следовательно, точка S будет центром данной коллинеации. В любом случае коллинеация f имеет центр.

Для *конечных* проективных плоскостей последняя теорема может быть доказана без использования свойств а) – г). Коллинеация, имеющая ось, может быть тождественной, тогда каждая точка плоскости будет центром. Если коллинеация f плоскости Π отлична от тождественной, то подплоскость Π_f не может быть пустой, ведь $f \in \Pi_f$. Эта подплоскость Π_f не может быть проективной подплоскостью, так как такая подплоскость, будучи собственной, имеет на каждой прямой менее $n+1$ точки, поэтому не может иметь оси. Следовательно, Π_f есть объединение ряда с осью p и некоторого пучка с его центром. Так как на p ряд содержит $n+1$ точку, то и пучок должен содержать $n+1$ прямую, т. е. быть полным. Центр этого пучка и будет центром коллинеации.

Справедливо и ***предложение***, двойственное доказанному: *коллинеация проективной плоскости, имеющая центр, имеет ось.*

4.8.4. Гомологии

Из доказанного выше следует, что нетождественная коллинеация проективной плоскости или не имеет центров и осей, или имеет одну ось и один центр.

Определение. Коллинеация проективной плоскости, имеющая ось и центр, называется *гомологией.*

Под это определение подходит тождественное преобразование e, осью его служит каждая прямая, а центром – каждая точка. Нетождественная гомология имеет точно одну ось и один центр.

Чтобы доказать, что данная коллинеация является гомологией, достаточно установить существование оси или же существование центра. Можно разбить гомологии на два типа.

Определение. Гомология называется *гиперболической*, если центр не лежит на оси, и *параболической*, если центр лежит на оси. Параболическая гомология называется также *эляцией.*

Из определений видно, что понятия гомологии, гиперболической гомологии и эляции каждое двойственно себе. Далее будем обозначать гомологии буквой h, если потребуется, с различными индексами.

Так как коллинеации f и f^{-1} имеют одни и те же двойные элементы и общие двойные элементы коллинеации f и g являются двойными для коллинеации gf, то справедливы следующие ***утверждения***:

• *Коллинеация h^{-1}, обратная гомологии h, является гомологией с теми же осью и центром.*

• *Произведение gh двух гомологий f и g с общей осью или с общим центром является, соответственно, гомологией с той же осью или тем же центром.*

Подплоскость Π_h двойных элементов гомологии h включает объединение Π_0 полного ряда точек на оси p и полного пучка прямых с центром S. Подплоскость Π_0 максимальна, поэтому если Π_h содержит какой-то элемент, не принадлежащий Π_0, то $\Pi_h = \Pi$, т. е. h есть тождественное преобразование. Этим установлено следующее ***предложение:***

Нетождественная гомология не имеет двойных точек, отличных от центра и не лежащих на оси, и двойных прямых, отличных от оси и не проходящих через центр.

Рассмотрим важнейшие ***способы задания*** конкретных гомологий.

Существует самое большее одна гомология, имеющая данные ось и центр, а также пару соответственных точек, отличных от центра и не лежащих на оси.

Пусть гомологии h_1 и h_2 имеют данные ось p, центр S и соответственные точки A, A'. Коллинеация h_2^{-1}, а поэтому и коллинеация $h_2^{-1}h_1$ являются гомологиями с теми же осью p и центром S. Так как $h_2(A) = A'$, то $h_2^{-1}(A') = A$, поэтому

$$(h_2^{-1}h)(A) = h_2^{-1}(h_1(A)) = h_2^{-1}(A') = A;$$

гомология $h_2^{-1}h_1$ имеет двойную точку A, отличную от центра и не лежащую на оси. Отсюда следует $h_2^{-1}h_1 = e$; это влечет $h_2 = h_1$. Единственность гомологии доказана.

Существует самое большее одна элация, имеющая данные ось и пару соответственных точек, не лежащих на оси.

Пусть даны ось p и соответственные точки A, A' вне оси. Если $A \neq A'$, то прямая $a = AA'$ является двойной, поэтому $a\mathrm{I}S$. Так как по условию $S\mathrm{I}p$; то $S\mathrm{I}p$, a и $S = pa$. По предыдущему предложению, гомология единственна. Если $A = A'$, то точка A, как двойная и не лежащая на оси, является центром. Данная элация, имея два центра, на оси и вне оси, тождественна; она снова единственна.

Существует самое большее одна гомология, имеющая данные ось и две различные пары соответственных точек, не лежащих на оси.

Если гомологии имеют данные ось p и пары соответственных точек A, A'; B, B', то коллинеация является гомологией с осью p. Кроме того, теперь $(h_2^{-1}h_1)(A) = A$; $(h_2^{-1}h_1)(B) = B$; гомология $h_2^{-1}h_1$ имеет две двойные точки A и B вне оси, т. е. два центра. Поэтому $h_2^{-1}h_1 = e$;

$$h_1 = h_2.$$

Существует самое большее одна инволюционная гомология, имеющая данные ось и пару несовпадающих соответственных точек.

Действительно, инволюционная гомология h, преобразующая A в A', преобразует A' в A; если $A \neq A'$, то $A, A' \mathrm{I} p$, и упорядоченные пары (A, A') и (A', A) различны. Поэтому задание одной пары несовпадающих соответственных точек инволюционной гомологии влечет задание двух пар и требуемое утверждение есть следствие одного из предыдущих.

Справедливы, по принципу двойственности, и следующие ***утверждения***:

Существует самое большее одна гомология, имеющая данные ось, центр и пару соответственных прямых, отличных от оси и не проходящих через центр, или же данные центр и две различные пары соответственных прямых, не проходящих через центр.

Существует самое большее одна элация, имеющая данные центр и пару соответственных прямых, не проходящих через центр. Существует самое большее одна инволюционная гомология, имеющая данные центр, пару несовпадающих соответственных прямых, не проходящих через центр.

Все нетождественные инволюционные гомологии классической проективной плоскости являются гиперболическими, однако для других плоскостей они могут быть и параболическими. Вопрос решается просто для конечных плоскостей. А именно, точки двойной прямой, отличные от центра и не лежащие на оси, группируются в пары несовпадающих взаимно соответственных точек. Поэтому число таких точек четно. На двойной прямой остаются еще центр и точка пересечения с осью, т. е. две точки, в случае гиперболической гомологии или одна точка, если гомология является параболической. В первом случае число $n + 1$ всех точек прямой должно быть четным, а во втором случае – нечетным. Отсюда следует такое ***утверждение***:

Нетождественная инволюционная гомология конечной проективной плоскости порядка n является гиперболической, если и только если n нечетно, она является параболической, если и только если n четно.

4.8.5. Группы коллинеаций проективной плоскости

Рассмотрим множество всех коллинеаций данной проективной плоскости Π. Из того, что произведение двух коллинеаций и отображение, обратное коллинеации, снова являются коллинеациями, следует такое ***утверждение:***

множество G всех коллинеаций данной проективной плоскости Π является группой относительно умножения. Она называется *группой коллинеаций* плоскости Π. Выделим некоторые важные подгруппы. Прежде всего, из свойств произведений и обращений гомологии получаются следующие ***утверждения***:

Множество $H_{S,p}$ всех гомологий с осью p и центром S является группой.

Множество H_p всех гомологий с осью p является группой.

Множество H_S всех гомологий с центром S является группой.

Нуждается в более сложном доказательстве следующее ***предложение***:

множество H^*_p всех эляций с осью p является группой; она коммутативна, если включает нетождественные эляции с разными центрами.

Сначала заметим, что в H^*_p входит тождественное преобразование e, поскольку любую прямую можно считать осью, а любую точку – центром e. Произведение двух эляций из H^*_p принадлежит H^*_p, если хотя бы один из сомножителей есть e, так как $eh = he = h$. Положим теперь, что $h_1, h_2 \in H^*_p$ и $h_1, h_2 \neq e$, центры h_1 и h_2 обозначим, соответственно, через S_1 и S_2. Если $S_1 = S_2$, то h_2h_1 есть произведение гомологий с общими осью и центром, поэтому является гомологией с осью p и центром $S = S_1 (= S_2)$. Если $S_1 \neq S_2$, то возьмем произвольную точку A вне оси p и положим $h_1(A) = A'$; $h_2(A') = A''$, откуда $(h_1h_2)(A) = A''$ (рис. 31). Так как h_1, h_2 – нетождественные эляции, то $A \neq A' \neq A''$; прямые AA' и $A'A''$ отличны от оси и пересекают ее в разных точках S_1 и S_2, поэтому $AA' \neq A'A''$. По признаку неинцидентности, $A \neq A''$; следовательно, произведение h_2h_1 является гомологией с осью p, преобразующей любую точку A вне оси в отличную от нее точку. Так как гомология h_2h_1 не имеет двойных точек вне оси p, то она является эляцией. Первая часть теоремы доказана.

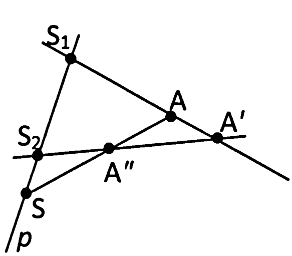


Рис. 31

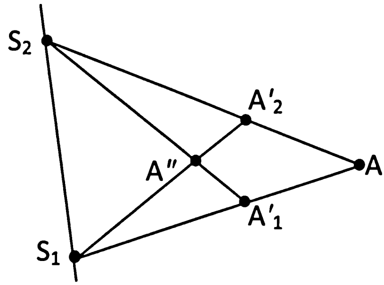


Рис. 32

Заметим, что центр эляции $h = h_2h_1$ лежит на прямой AA'', соединяющей ее соответственные точки. Так как $p\mathrm{I}A$, A', A'', то p пересекает прямые AA', $A'A''$, AA'' в разных точках. Поэтому центры S_1, S_2, S эляций h_1, h_2, $h = h_2h_1$ попарно различны.

Для доказательства второй части теоремы положим, что в группе H^*_p имеются эляции с разными центрами. Переставимость двух эляций обеспечена, если хотя бы одна из них является тождественной: $eh = he = h$. Возьмем нетождественные эляции h_1, h_2 с центрами S_1, S_2 соответственно. Возможны два случая.

1) $S_1 \neq S_2$ (рис. 32). Возьмем точку A вне оси и положим $h_1(A) = A'_1$; $h_2(A) = A'_2$; $A'' = S_2A'_2 \cdot S_2A'_1$. Так как h_1 сохраняет $S_1A'_2$ и переводит S_2A в $S_2A'_1$ то $h_1(A'_2) = A''$. Аналогично, $h_2(A_1) = A''$. Отсюда следует

$(h_2h_1)(A) = h_1(h_2(A) = h_2(A') = A''$; $(h_1h_2)(A) = h_1(h_2(A)) = h_1(A'_2) = A''$.

Так как $(h_2h_1)A = (h_1h_2)(A)$ для любой точки вне оси p, то $h_2h_1 = h_1h_2$.

2) $S_1 = S_2$. Для эляций с совпадающими центрами предыдущее рассуждение непригодно, но, опираясь на его результат, можно быстро получить требуемое. По условию, существует нетождественная эляция h_3 с центром $S_1 \neq S_2$. По доказанному, $h_2h_3 = h_3h_2$ и центр S эляции $h = h_1h_3$ отличен от $S_1 = S_2$ и S_3. Поэтому эляции h_2 и h также перестановимы. Теперь $h_2h_1h_3 = h_2h = hh_2 = h_1h_3h_2 = h_1h_2h_3$; сокращая справа на h_3, получаем $h_2h_1 = h_1h_2$. Коммутативность группы H^*_p установлена.

По принципу двойственности, *множество* H^*_s *всех эляций с центром* S *также есть группа, притом коммутативная, если в ней имеются эляции с разными осями.*

Произведение двух произвольных гомологий может не быть гомологией; это имеет место, например, в случае классической проективной плоскости. Поэтому множество H всех гомологий данной проективной плоскости Π в общем случае не является группой. Однако всегда существует группа коллинеаций, порожденная данными гомологиями. Ее можно определить как минимальную группу коллинеаций, содержащую все данные гомологии; она состоит из всевозможных произведений конечного числа данных гомологий.

Определение. Группа $\mathbf{H} = \langle H \rangle$, порожденная всеми гомологиями данной проективной плоскости, называется ее *проективной* группой. Группа $\mathbf{H}^* = \langle H^* \rangle$, порожденная всеми эляциями данной проективной плоскости, называется ее *малой проективной* группой.

Ясно, что вторая группа является подгруппой первой.

4.8.6. Связь групп коллинеаций с теоремой Дезарга

В пункте 4.8.4 дан ряд теорем о единственности гомологий, удовлетворяющих тем или иным условиям, однако вопрос о существовании таких гомологий не рассматривался. Оказывается, он тесно связан с реализуемостью различных конфигураций Дезарга.

Для сокращения выражений далее часто используется понятие транзитивности групп преобразований. Напомним, что группа преобразований множества называется *транзитивной*, если для любых двух его элементов существует хотя бы одно преобразование из этой группы, переводящее первый элемент во второй. Говорят также, что такая группа действует на элементах множества *транзитивно.* Если группа преобразований сохраняет некоторое подмножество, то она может быть транзитивной на нем, не будучи транзитивной на всем множестве.

Любая гомология с осью p и центром S сохраняет на каждой прямой, проходящей через S, ряд, состоящий из всех ее точек, кроме S и точки на p. Группа $H_{S,p}$ всех гомологий с осью p и центром S может быть транзитивной на каждом таком ряде. Плоскость с такой группой гомологий имеет соответствующее название.

Определение. Проективная плоскость называется *(S, p)-транзитивной*, если гомология с осью p и центром S существует для любой пары соответственных точек A и A', не лежащих на p, отличных от S и коллинеарных с S.

Заметим, что в такой плоскости гомология с осью p и центром S существует также для любой пары соответственных прямых b и b', не проходящих через S, отличных от p и конкурентных с p. Для доказательства достаточно взять прямую a, проходящую через S и неконкурентную с b и b', а затем точки $A = ab$, $A' = ab'$. Гомология, переводящая A в A', переводит b в b'. Справедливо и обратное: из существования в $H_{S'p}$ гомологий с любыми допустимыми парами соответственных прямых следует существование в $H_{S'p}$ гомологий с любыми допустимыми парами соответственных точек. Поэтому понятие (S, p)-транзитивности двойственно себе.

Необходимое и достаточное условие (S, p)-транзитивности проективной плоскости выражается следующими двумя *теоремами:*

В (S, p)-транзитивной проективной плоскости теорема Дезарга выполняется для любой пары трехвершинников, у которых прямые, соединяющие соответственные вершины, проходят через S и две точки пересечения соответственных сторон лежат на p.

Пусть трехвершиники ABC и $A'B'C'$ таковы, что AA', BB', CC' проходят через точку S, а точки $Y = bb'$ и $Z = cc'$ лежат на прямой p. Вследствие (S, p)-транзитивности существует гомология h с осью p и центром S, преобразующая A в A'. Она сохраняет точки Y, Z и прямые BB', CC', поэтому преобразует $b = AY$ в $b' = A'Y$ и, аналогично, c в c'. Далее B и C преобразуются, соответственно, в B' и C', прямая $a = BC$ – в $a' = B'C'$. По свойствам гомологии, прямые a и a' пересекают ось p в одной точке, поэтому $X = aa'$ лежит на p. Трехвершинники ABC и $A'B'C'$ подчиняются теореме Дезарга.

Если теорема Дезарга выполняется для любой пары трехвершинников, у которых прямые, соединяющие соответственные вершины, проходят через точку S и две точки пересечения соответственных сторон лежат на прямой p, то проективная плоскость (S, p)-транзитивна.

Возьмем любые две точки A, A', не лежащие на p, отличные от S и коллинеарные с S. На множестве всех точек плоскости, не лежащих на прямой q, проходящих через S, A, A', построим отображение f, относящее каждой точке M, точку $M' = SM \cdot A'V$, где $V = p \cdot AM$ (рис. 33). Отображение f взаимно однозначно. Если $M \mathrm{I} p$, то $V = M$, откуда $M' = SM \cdot A'M = M$; отображение f сохраняет любую точку рассматриваемого множества, лежащую на p.

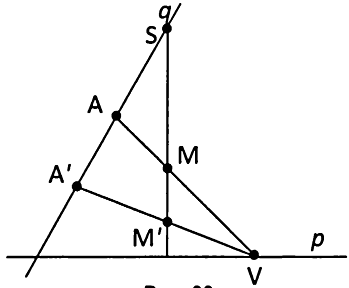


Рис. 33

Покажем, что f сохраняет коллинеарность троек точек. Это верно для точек прямой p, сохраняемых отображением. Это верно и для точек любой прямой, проходящей через S, так как образ M' любой точки M такой прямой снова лежит на ней. Это верно и для точек любой прямой, проходящей через точку A, так как ее точки преобразуются в точки прямой $b' = A'V$, где $V = pb$.

Возьмем теперь любую прямую a, отличную от p и не проходящую через S или A; на a возьмем две различные точки B и C. Из построения точек B' и C' следует, что у трехвершинников ABC и $A'B'C'$ прямые AA', BB', CC' проходят через S, а точки $Y = bb'$ и $Z = cc'$ лежат на прямой p. По условию, для ABC и $A'B'C'$ выполняется теорема Дезарга, поэтому точка $X = aa'$ также лежит на p.

Это значит, что f сохраняет коллинеарность точек X, B, C. Возьмем любую точку D прямой a, ее образ D' лежит на a', поэтому f сохраняет коллинеарность любой тройки точек прямой a.

Таким образом, отображение f сохраняет коллинеарность любых троек точек. Поэтому f задает коллинеацию аффинной плоскости с несобственной прямой q. Эта коллинеация единственным образом расширяется до коллинеации проективной плоскости. При этом прямая q и точка $A_0 = pq$ преобразуются в себя. Отсюда следует, что p является осью, а S – центром расширенной коллинеации, кроме того, A преобразуется в A'. Этим установлено, что плоскость (S, p) – транзитивна.

В p-транзитивной плоскости существует гомология с осью p и двумя данными парами соответственных точек A, A′ и B, B′ вне оси, удовлетворяющими условиям $A \neq B$; $A' \neq B'$; $AB \cdot A'B'$ Ip.

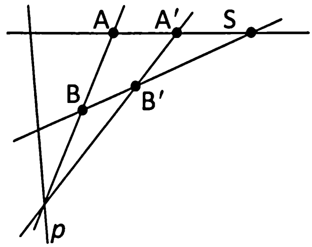


Рис. 34

Действительно, если $A = A'$ или $B = B'$, то искомая гомология задается центром, A или B, и парой соответственных точек. Пусть $A \neq A'$ и $B \neq B'$. Если при этом $AA' \neq BB'$ (рис. 34), то искомой окажется гомология с центром $S = AA' \cdot BB'$ и парой соответственных точек A и A'. Если $AA' = BB'$ (рис. 35), то возьмем вне p и AA' точку C и построим $C' = A'Y \cdot B'X$, где $X = p \cdot BC$; $Y = p \cdot AC$. Искомой окажется гомология с осью p и двумя парами соответственным A, A' и C, C'. Во всех случаях требуемая гомология существует.

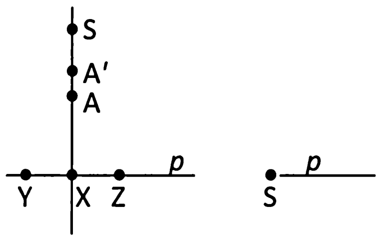


Рис. 35

Из доказанных теорем сразу следует такое ***утверждение:***

если проективная плоскость (S, p) транзитивна для любой точки S и любой прямой p, то теорема Дезарга выполняется без ограничений, т. е. плоскость является дезарговой.

Наоборот, дезаргова проективная плоскость (S, p) транзитивна для любых S и p, т. е. в ней гомология существует для любых оси, центра и пары соответственных точек.

Установим еще одно ***свойство*** дезарговых плоскостей: *проективная группа $\overline{H}$ дезарговой проективной плоскости транзитивна на упорядоченных полных четырехвершинниках.*

Это значит, что для любых двух четырехвершииников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ существует проективное преобразование, переводящее A, B, C, D, соответственно, в A',B',C',D'. Возьмем диагональные точки $P = AB \cdot CD$ и $P' = A'B' \cdot C'D'$. Существует гомология h_1, переводящая P в P'; она переводит $ABCD$ в некоторый четырехвершинник $A''B''C''D''$, причем $A''B'' \cdot C''D'' = P'$

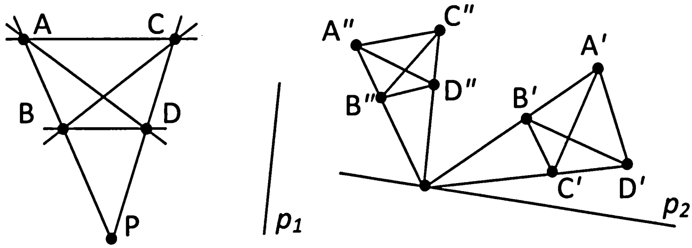


Рис. 36

(рис. 36). Далее, существует гомология h_2 с осью p_2, проходящей через P' и отличной от $A''B''$, $A'B'$, переводящая A'', B'', соответственно, в A', B'. Она сохраняет точку P' и переводит C'', D'' в некоторые точки C''', D''', коллинеарные с P'. Наконец, существует гомология h_3 с осью $p_3 = A'B'$, переводящая C''', D''', соответственно, в C', D'; она сохраняет A' и B'. Коллинеация $f = h_3h_2h_1$ является искомой. Так как $f \in \overline{H}$, то транзитивность группы $\overline{H}$ доказана.

Ясно, что вся группа коллинеаций G проективной плоскости в этом случае также будет транзитивной; справедливо и ***обратное***.

Если группа коллинеаций G проективной плоскости транзитивна на упорядоченных четырехвершинниках, то плоскость является дезарговой.

Для доказательства зададим гиперболическую гомологию с осью p, центром S и парой соответственных точек A и A'. Пусть $X = p \cdot AA'$ (рис. 37). На p существуют две точки Y, Z, отличные от X. Искомая гомология преобразует полный четырехвершинник $YZSA$ в полный четырехвершинник $YZSA'$.

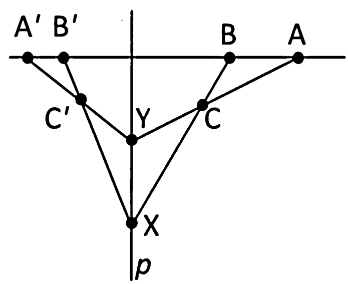


Рис. 37

4.8.7. Аффинная группа

Коллинеации аффинной плоскости называются также *аффинными преобразованиями,* или, короче, *аффинитетами.* Напомним, что любую аффинную плоскость A можно рассматривать как сокращение некоторой проективной плоскости Π посредством удаления некоторой прямой ∞ и всех ее точек. Коллинеации плоскости А можно рассматривать как сужения на A коллинеаций плоскости Π, сохраняющих прямую o. Аффинную группу A можно отождествить с подгруппой G_0 группы коллинеаций G плоскости Π.

Как сама аффинная плоскость, построенная из данной проективной плоскости Π, так и ее группа аффинитетов, зависит от выбора несобственной прямой o. Если прямые a,b различны, то группы G_a и G_b, вообще говоря, также различны, но они могут оказаться изоморфными. Это непременно имеет место, если в группе G имеется коллинеация g, переводящая a в b. Она преобразует аффинную плоскость, полученную из Π удалением полного ряда с осью a, в аффинную плоскость, полученную из Π удалением полного ряда с осью b. Поэтому рассматриваемые аффинные плоскости изоморфны и имеют изоморфные группы коллинеаций. Более того, можно сразу получить G_a из G_b, а именно, $G_b = gG_ag^{-1}$. Если группа G транзитивна на прямых плоскости Π, а это имеет место, например, если Π дезаргова, то все аффинные сокращения плоскости Π изоморфны и имеют изоморфные группы аффинитетов.

Гомология проективной плоскости является аффинитетом, если она сохраняет несобственную прямую o. Так как нетождественная гомология сохраняет только свою ось и все прямые, проходящие через центр, то для сохранения прямой o имеются две возможности: прямая o есть ось гомологии или o проходит через центр гомологии, иначе говоря, центр лежит на o. Установлено следующее ***предложение:***

аффинитетами являются только гомологии с несобственной осью или с несобственным центром.

Если гомология имеет несобственную ось, т. е. $p = o$, то обыкновенные соответственные прямые a и a' пересекают ось p в одной и той же несобственной точке, откуда $a||a'$. Это значит, что такая гомология преобразует каждую прямую в прямую того же направления, короче говоря, она сохраняет направление любой обыкновенной прямой.

Определение. Гомология с несобственной осью называется *дилатацией.*

Множество всех дилатаций, будучи множеством всех гомологий с данной осью o, является группой; она называется *группой дилатаций*.

Если дилатация имеет несобственный центр S, то все обыкновенные двойные прямые, проходя через S, окажутся параллельными.

Определение. Эляция с несобственной осью называется *трансляцией*.

Существует самое большее одна трансляция, имеющая данную пару обыкновенных соответственных точек.

Действительно, эляция однозначно задается осью, в данном случае прямой o, и парой соответственных точек вне ее.

Множество T всех трансляций является группой.

Действительно, T можно рассматривать как множество всех эляций с данной осью.

Определение. Аффинная плоскость и ее проективное расширение называются *трансляционными*, если группа трансляций транзитивна на обыкновенных точках.

Тривиальным примером трансляционной плоскости является дезаргова.

Плоскость над левым квазителом является *трансляционной*. Для доказательства покажем сначала, что любое преобразование координат точек вида $x' = x + a$, $y' = y + b$ задает трансляцию. Это преобразование на множестве обыкновенных точек взаимно однозначно. Далее, уравнение $x = c$ равносильно уравнению $x' = c + a$; это значит, что прямая $[c]$ преобразуется в прямую $[c + a]$. Так как $x = x' - a$ и $y = y' - b$, то уравнение $y = kx + b$ равносильно уравнению $y' - b = k(x' - a)$; его преобразование дает

$$y' = k(x' - a) + b; \qquad y' = kx' + (-ka + b).$$

Это значит, что прямая $[k, m]$ преобразуется в прямую $[k, -ka + b]$. Таким образом, любая прямая преобразуется в прямую, притом параллельную данной; все несобственные точки сохраняются. Преобразование точек действительно задает некоторую трансляцию; обозначим ее посредством $t_{a,b}$.

Пусть даны точки $M = (x_1, y_1)$ и $M' = (x'_1, y'_1)$. Трансляция $t_{a,b}$ преобразует M в M', если $x'_1 = x_1 + a$, $y'_1 = y_1 + b$; это дает $a = x'_1 - x_1$; $b = y'_1 - y_1$. Это значит, что любую точку можно преобразовать в любую другую некоторой трансляцией; группа T трансляций транзитивна.

Определение. Дилатация, имеющая центр обыкновенный, т. е. гиперболическая гомология с несобственной осью, называется *гомотетией.*

Задается гомотетия центром и парой соответственных точек. Множество H_s всех гомотетий с данным центром S является группой.

Определение. Инволюционная гомотетия называется *преобразованием центральной симметрии* или *полуоборотом.*

Для существования полуоборотов в конечной проективной плоскости необходимо, чтобы порядок n был нечетным. Действительно, только в этом случае инволюционная гомология проективной плоскости будет гиперболической.

Переходя к рассмотрению гомологий с несобственным центром, заметим, что если ось также является несобственной, то гомология будет трансляцией.

Определение. Гомология с несобственным центром и обыкновенной осью называется *осевым аффинитетом.* Параболический осевой аффинитет называется *сдвигом.*

Нетождественный осевой аффинитет не имеет обыкновенных двойных точек, а все его двойные прямые, отличные от оси, параллельны.

Определение. Направление двойных прямых, отличных от оси осевого аффинитета, называется его *направлением.*

Направление сдвига совпадает с направлением его оси.

Существует самое большее один осевой аффинитет, имеющий данные ось и пару соответственных точек вне оси.

Пусть даны ось p и пара соответственных точек A, A', не лежащих на p. Прямая aIA, A' является двойной прямой, отличной от оси; она проходит через центр S. Так как SIo, то $S = oa$; гомология имеет заданными p, S, A, A'.

Множество $A_{p,S}$ всех аффинитетов с данной осью p и данным направлением является группой.

Множество $A_{p,S}$ всех осевых аффинитетов с данной осью является группой.

Действительно, коллинеация, обратная осевому аффинитету, есть осевой аффинитет с той же осью и того же направления. Произведение двух осевых аффинитетов с осью p есть аффинитет с той же осью.

4.9. Строго транзитивные плоскости

4.9.1. Строго транзитивные группы коллинеаций

Напомним, что группа преобразований множества называется *транзитивной*, если для любых двух элементов множества существует хотя бы одно преобразование, принадлежащее группе и отображающее первый элемент во второй. В общем случае преобразований с этим свойством может быть более одного, но сейчас важен один частный случай.

Группа преобразований множества называется *строго транзитивной*, если для любых двух элементов существует точно одно преобразование из этой группы, отображающее первый элемент во второй.

В этом случае каждое преобразование, принадлежащее группе, строго однозначно задается одной парой соответствующих элементов. В частности, преобразование из группы, сохраняющее некоторый элемент, является тождественным, так как тождественное преобразование принадлежит группе и имеет заданную пару соответственных элементов, в данном случае совпадающих. Отсюда следует, что любое нетождественное преобразование из строго транзитивной группы не имеет двойных элементов. Понятие строгой транзитивности естественным образом переносится на коллинеации проективной плоскости.

Определение. Группа коллинеаций проективной плоскости называется строго транзитивной, если она *строго транзитивна* как на множестве P всех точек, так и на множестве L всех прямых. Проективная плоскость, имеющая такую группу коллинеаций, также называется *строго транзитивной.*

Выберем в проективной плоскости Π со строго транзитивной группой коллинеаций некоторую точку A. Тогда каждой коллинеации f из G будет соответствовать единственная точка $M = f(A)$, и наоборот, каждой точке M – единственная коллинеация f, отображающая A в M. Поэтому справедливо следующее ***утверждение:***

множество коллинеаций, составляющих строго транзитивную группу, эквивалентно множеству всех точек, т. е. $G \sim P$.

Для конечных проективных плоскостей это дает равенство

$$|G| = |P| = v = n^2 + n + 1. \qquad (9.1)$$

Рассмотрение строго транзитивных плоскостей целесообразно вести, пользуясь аддитивными обозначениями. Образы точки M и прямой m в коллинеации f будем обозначать, соответственно, через $M+f$ и $m+f$. Композицию коллинеации f и g будем называть их суммой и обозначать посредством $f+g$, поэтому

$$M+(f+g)=(M+f)+g. \qquad (9.2)$$

Тождественная коллинеация получает обозначение Θ; коллинеация, симметричная данной коллинеации f, будет называться противоположной f и обозначаться посредством $-f$. В общем случае группа G может быть некоммутативной, поэтому следует различать левую и правую разности данных коллинеаций f и g. Левая разность определяется как элемент x, удовлетворяющий условию $x+g=f$, откуда $x=f+(-g)$, сокращенно $x=f-g$; а правая разность как элемент y, удовлетворяющий условию $g+y=f$, откуда $y=(-g)+f$, сокращенно $y=-g+f$.

4.9.2. Координатизация строго транзитивной плоскости

Пусть проективная плоскость имеет строго транзитивную группу коллинеаций G. Выберем некоторые точку M_0 и прямую m_0. Для любой точки M существует точно одна такая коллинеация $x\in G$, что $M=M_0+x$. Эту коллинеацию x можно рассматривать как своеобразную координату точки M и ввести обозначение $M=(x)$. Аналогично, каждая прямая m характеризуется коллинеацией $y\in G$, удовлетворяющей условию $m=m_0+y$; введем обозначение $m=[y]$. В частности, $M_0=(o)$ и $m_0=[0]$.

Справедливы следующие формулы:

$$(x)+z=(x+z); \qquad [y]+z=[y+z]. \qquad (9.3)$$

Действительно,

$$(x)+z=(M_0+x)+z=M_0+(x+z)=(x+z).$$

Формула для прямых выводится аналогично.

Обозначим множество координат всех точек прямой m_0 через D, т.е. положим:

$$D=\{x|\,(x)\mathrm{I}m_0\}. \qquad (9.4)$$

Тогда множество координат всех точек прямой $m=[y]=m_0+y$ будет иметь вид:

$$\{x+y\mid x\in D\}=D+y.$$

Отсюда получается условие инцидентности:

$$(x)\ \mathrm{I}\ [y]\Leftrightarrow x=D+y\Leftrightarrow x-y\in D. \qquad (9.5)$$

Возьмем теперь любую нетождественную коллинеацию $x\in G$. Точки (o) и (x) различны, через них проходит единственная прямая $[y]$. По условию инцидентности, o, $x \in D + y$; откуда $o = d_1 + y$ и $x = d_2 + y$, где $d_1, d_2 \in D$. Это дает $d_1 = -y$, $x = d_2 - d_1$, т. е. x представима в форме левой разности некоторых элементов множества D.

Если, наоборот, дано $x_2 = d_2 - d_1$, то, *учитывая* $o = d_1 - d_1$, получим

$$o, x \in D - d_1;\ (0),(x)\ \mathrm{I}\ [-d_1].$$

Прямая $[-d_1]$ единственна, поэтому d_1 – некоторый определенный элемент. Это же верно и для $d_2 = x + d_1$. Установим следующее ***свойство*** множества D:

α) *Для любого ненулевого элемента x группы G существует точно одна такая пара элементов d_1, d_2 множества D, что $x = d_2 - d_1$.*

С другой стороны, для любой нетождественной коллинеации $x \in G$ прямые $[o]$ и $[x]$ различны, поэтому имеют единственную общую точку (y). По условию инцидентности, $y \in D$ и $y \in D + x$, откуда $y = d_3$ и $y = d_4 + x$, где $d_3, d_4 \in D$. Это дает $d_3 = d_4 + x$; $x = -d_4 + d_3$, т. е. x представима в форме правой разности некоторых элементов множества D.

Если дано $x = -d_4 + d_3$, то $d_3 = d_4 + x$, $d_3 \in D + x$ и $d_3 \in D$, поэтому $d_3 \mathrm{I} [x], [o]$, точка (d_3) единственна, откуда элементы d_3 и $d_4 = d_3 - x$ единственны. Установлено другое ***свойство*** множества D:

β) *Для любого ненулевого элемента группы G существует точно одна такая пара элементов d_3, d_4 множества D, что $x = -d_4 + d_3$.*

Определение. Часть D аддитивной группы G называется *разностным множеством*, если она удовлетворяет условиям α) и β), т. е. если каждый ненулевой элемент группы единственным образом представим в форме левой разности и в форме правой разности некоторых элементов множества D.

Результат проведенного выше рассмотрения можно сформулировать следующим образом:

При любом выборе точек M_0 и прямой m_0 координаты всех точек прямой m_0 образуют разностное множество G.

Множество D зависит от выбора M_0 и m_0. Возьмем новую точку $M'_0 = (a)$ и прямую $m'_0 = [b]$; координаты точки M и прямой m в новой системе координат обозначим через x' и y', соответственно. Так как

$$M = M_0 + x = M'_0 + x' = (M_0 + a) + x' = M_0 + (a + x');$$
$$m = m_0 + y = m'_0 + y' = m_0 + (b + y'),$$

то формулы преобразования координат будут иметь вид:

$$x = a + x'; \qquad y = b + y. \tag{9.6}$$

Далее,

$$M \mathrm{I}\, m'_0 = m_0 + b \Leftrightarrow x \in D + b \Leftrightarrow a + x' \in D + b \Leftrightarrow x' \in -a + D + b.$$

Это значит, что множество новых координат точек новой начальной прямой m' имеет вид

$$D' = -a + D + b. \tag{9.7}$$

Определение. Разностные множества D и D', связанные формулой (9.7), называются *эквивалентными*.

Легко видеть, что эквивалентность разностных множеств рефлексивна, симметрична и транзитивна.

4.9.3. Строго транзитивные плоскости над группами

Связь между строго транзитивными проективными плоскостями и разностными множествами аддитивных групп обратима. И именно справедлива следующая *теорема*:

если аддитивная группа G имеет разностное множество D с $|D| \geq 3$, то существует проективная плоскость со строго транзитивной группой коллинеаций, изоморфной группе G.

Построим из G инцидентностную структуру, приняв за точку любое единичное множество (x), а за прямую – любое единичное множество $[y]$, где $x, y \in G$, и положив

$$x \,\mathrm{I}\, [y] \Leftrightarrow x \in D + y.$$

Для нахождения прямой $[y]$, проходящей через две данные различные точки (x_1) и (x_2), из условия $x_1, x_2 \in D + y$, получаем систему

$$x_1 = d_1 + y \quad \text{и} \quad x_2 = d_2 + y, \text{ где } d_1, d_2 \in D.$$

Последовательно находим

$$y = -d_1 + x_2, \quad y = -d_2 + x_2; \quad -d_1 + x_1 = -d_2 + x_2; \quad d_2 - d_1 = x_2 - x_1.$$

Так как $x_2 - x_1 \neq 0$, то по условию α) последнее уравнение имеет точно одно решение, оно дает единственный ответ $y = -d_1 + x_1 (= -d_2 + x_2)$. Это значит, что через любые две различные точки проходит единственная прямая.

Находя точку (x) пересечения двух данных различных прямых $[y_1]$ и $[y_2]$ сначала из условия $x \in D + y_1, D + y_2$, получаем систему $x = d_3 + y_1; x = d_4 + y_2$,

откуда $d_3 + y_1 = d_4 + y_2$; $-d_4 + d_3 = y_2 - y_1$. Здесь $y_2 - y_1 \neq 0$ и по условию β), последнее уравнение имеет единственное решение, имеем один ответ $x = d_3 + y_1 = d_4 + y_2$. Этим установлено, что любые две различные прямые имеют точно одну общую точку.

Таким образом, рассматриваемая инцидентностная структура является замкнутой частичной плоскостью. Из условия $|D| \geq 3$ следует, что каждый полный ряд точек, а поэтому и каждый полный пучок прямых, имеют не менее трех элементов.

Возьмем теперь для каждого элемента a группы G отображение f_a построенной плоскости, положив

$$(x) + f_a = (x + a); \quad [y] + f_a = [y + a].$$

Это отображение плоскости взаимно однозначно. Оно сохраняет инцидентность, так как

$$(x) \mathrm{I} [y] \Rightarrow x \in D + y \Rightarrow x + y \in (D + y) + a = D + (y + a) \Rightarrow$$
$$(x + a) \mathrm{I} [y + a] \Rightarrow (x) + f_a \mathrm{I} [y] + f_a.$$

Следовательно, f_a есть коллинеация рассматриваемой плоскости и $G^* = \{f_a \mid a \in G\}$ есть некоторое множество коллинеаций. Далее, $a \neq b \Rightarrow f_a \neq f_b$, поэтому отображение $a \rightarrow f_a$ группы G в множество G^* взаимно однозначно. Наконец,

$$(x) + f_{a+b} = (x + (a + b)) = ((x + a) + b) = ((x) + f_a) + f_b = (x) + (f_a + f_b);$$

аналогично $[y] + f_{a+b} = [y] + (f_a + f_b)$.

Это дает $f_{a+b} = f_a + f_b$, отображение $a \rightarrow f_a$ изоморфно относительно сложения, поэтому G^* есть группа, изоморфная группе G. Доказательство завершено.

4.9.4. Дуали строго транзитивных плоскостей

Пусть проективная плоскость Π имеет строго транзитивную группу коллинеаций G и координатизирована этой группой. Для построения дуали Π^* плоскости Π назовем каждую точку (x) прямой, обозначив ее через $(x)^*$, и назовем каждую прямую $[y]$ точкой, обозначив ее через $[y]^*$; инцидентность I сохраним. Так как без учета роли элементов $P^* = L$ и $L^* = P$, то группа G будет транзитивной группой коллинеаций и для Π^*, т. е. справедливо такое ***утверждение:***

дуаль строго транзитивной проективной плоскости также строго транзитивна.

Найдем разностное множество для плоскости Π^*. Оно состоит из координат точек $[y]^*$ дуали, лежащей на прямой $(0)^*$. Так как

$$[y]^* \mathrm{I} (0)^* \Leftrightarrow (0) \mathrm{I} [y] \Leftrightarrow 0 \in D + y \Leftrightarrow -y \in D \Leftrightarrow y \in -D,$$

где $-D = \{-z \mid z \in D\}$, то имеем равенство

$$D^* = -D. \tag{9.8}$$

Дуаль, вообще говоря, не изоморфна данной плоскости. Однако, если группа G коммутативна, то отображение f, заданное условием

$$f((x)) = [-x]\,; \qquad f([y]) = (-y),$$

является полярностью для данной плоскости, а поэтому порождает изоморфизм данной плоскости с ее дуалью. Действительно, вследствие коммутативности сложения

$$(x)\ \mathrm{I}\ [y] \Leftrightarrow x - y \in D \Leftrightarrow -y - (-x) \in D \Leftrightarrow (-y)\ \mathrm{I}\ [-x] \in D \Leftrightarrow f([y])\ \mathrm{I}\ f((x)).$$

4.9.5. Циклические проективные плоскости

Порядок строго транзитивной группы коллинеаций G конечной проективной плоскости порядка n равен числу всех точек, т. е. $|G| = v = n^2 + n + 1$. Порядок разностного множества равен числу всех точек и прямой, т. е. $|D| = k = n + 1$. Наоборот, если конечная аддитивная группа G порядка $n^2 + n + 1$ имеет разностное множество D, то $m = |D| = n + 1$, поэтому над G можно построить строго транзитивную плоскость. Действительно, число $m(m - 1)$ разностей неравных элементов разностного множества D должно равняться числу $n^2 + n$ ненулевых элементов группы G; уравнение $m^2 - m = n^2 + n$ имеет два решения $- n$ и $n + 1$, первое отпадает вследствие $m > 0$. Заметим, что группа рассматриваемого порядка может и не иметь разностных множеств.

Наиболее просто исследуются циклические группы. Для каждого натурального числа v существует единственная абстрактная циклическая группа порядка v. В качестве представителя проще всего взять аддитивную группу кольца Z_v вычетов целых чисел по модулю v. Нас интересуют только значения v, имеющие вид $n^2 + n + 1$, где n – натуральное число, больше 1. Если группа порядка v имеет разностное множество D, то существует проективная плоскость порядка n с циклической строго транзитивной группой коллинеаций.

Определение. Проективная плоскость, имеющая строго транзитивную циклическую группу коллинеаций, называется *циклической.*

Так как циклические группы коммутативны, то справедливо следующее ***утверждение:***

конечная циклическая проективная плоскость имеет полярность и поэтому автодуальна.

Рассмотрим несколько примеров построения циклических проективных плоскостей. Для малых значений n разностное множество можно найти простым подбором элементов. Для упрощения работы заметим, что в любом разностном множестве D циклической группы существуют элементы a и b с разностью $b - a = 1$. Прибавлением $-a$ к множеству D получается новое разностное множество, содержащее элементы 0 и 1, полученные, соответственно, из a и b. Поэтому достаточно найти разностное множество, имеющее эти элементы 0 и 1.

Пусть $n = 2$, тогда $v = 7$, $Z_v = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Разностное множество должно иметь $2 + 1 = 3$ элемента, из них известны 0 и 1 с разностями 1 и $-1 = 6$. В качестве третьего элемента нельзя взять 2, так как разность $2 - 1 = 1$ повторяется. Элемент 3 согласуется с 0 и 2, действительно 0 и 3 дают разности 3 и $-3 = 4$, а 1 и 3 – разности 2 и $-2 = 5$. Таким образом, разностями неравных элементов тройки $\{0, 1, 3\}$ являются все ненулевые элементы группы, эта тройка является искомым разностным множеством.

Построим циклическую плоскость, пользуясь этим множеством. Результат дан в табл. 20; краткости ради, для обозначения точки (x) использовано x, а для обозначения прямой $[y]$ использовано $\bar{y}$. Нетрудно видеть, что эта плоскость изоморфна конфигурации Фано, как проективная плоскость порядка 2. Изоморфное отображение f плоскости в конфигурацию весьма просто: $f(x) = A_x$; $f(\bar{y}) = a_y$. Для построения циклической проективной плоскости порядка 3 нужно найти разностное множество, содержащее 4 элемента, в циклической группе порядка 13. С элементами 0 и 1 совместим элемент 3; проверка показывает, что с 0, 1, 3 согласуется только элемент 9. Следовательно, искомым разностным множеством D является четверка $\{0, 1, 3, 9\}$.

Таблица 20

$\bar{y}$	X
$\bar{0}$	0, 1, 3
$\bar{1}$	1, 2, 4
$\bar{2}$	2, 3, 5
$\bar{3}$	3, 4, 6
$\bar{4}$	4, 5, 0
$\bar{5}$	5, 6, 1
$\bar{6}$	5, 6, 1

Построенная над нею циклическая плоскость является дезарговой, это будет установлено позднее.

Естественно, что с увеличением порядка n работа по нахождению разностных множеств быстро усложняется. Однако подбор элементов выполним вручную для порядков 4 и 5. Для $n = 6$

проводить подбор бесполезно, так как проективной плоскости этого порядка не существует. Для порядков 7, 8 и следующих работа может быть проведена с помощью некоторых специальных приемов. Пользуясь ими, сравнительно легко установить, что циклической проективной плоскости порядка 10 не существует.

В настоящее время известен целый ряд признаков несуществования циклической проективной плоскости. В частности, в пределах до $n = 1600$ запрещены все значения n, не имеющие вида p^k. Однако общего запрещения на все порядки, отличные от чисел p^k, не получено.

4.9.6. Теорема Зингера

В 1938 г. была опубликована теорема, названная по имени открывшего ее математика.

Теорема Зингера. *Каждая конечная дезаргова проективная плоскость является циклической.*

Для доказательства будем рассматривать дезаргову проективную плоскость порядка n как плоскость над полем P_n этого порядка. Построим его кубическое расширение P_n^3. Мультипликативная группа нового поля является циклической порядка $n^3 - 1$ по числу ненулевых элементов и состоит из степеней первообразного элемента, который будем обозначать далее буквой i.

Так как $P_n \subset P_n^2$, то каждый неизвестный элемент поля P также является некоторой степенью элемента i. Пусть h – наименьший положительный показатель степени элемента i, принадлежащий P_n. Тогда для любого неотрицательного целого множителя k имеем $i^{kh} = (i^h)^k \in P_n$; наоборот, если $i^m \in P_n$, то m кратно h. В частности, так как $i^{n^3-1} = e \in P_n$, то $n^3 - 1 = kh$, при этом k равно числу всех ненулевых элементов поля P_n, т. е. $n - 1$. Таким образом,

$$n^3 - 1 = (n-1)\,h; \quad h = n^2 + n + 1 = v; \quad i^v \in P_n.$$

Элементы $e, i, i^2, \ldots, i^{v-1}$ попарно различны и, кроме e, не принадлежат P_n. Если $m = kv + r$, $0 \le r < v$, то $i^m = i^{kv+r} = (i^v)^k i^r$, это значит, что прибавление к показателю степени числа, кратного v, приводит к умножению данного элемента на некоторый ненулевой элемент поля P_n.

Первообразный элемент i является корнем некоторого многочлена $x^3 + a_0x^2 + b_0x + c_0$, неприводимого над полем P_n. Поэтому каждый элемент расширенного поля P_n^3

единственным образом представим в форме $ai^2 + bi + c$, где a, b, $c \in P_n$. Отнесем этому элементу точку $(a: b: c)$ проективной плоскости над полем P_n. Это отображение однозначно, но данная точка является образом нескольких элементов, отличающихся на множители вида i^{kv}, принадлежащих P_n. Различными будут образы элементов e, i, i^2,., i^{v-1}, при дальнейшем увеличении показателя начнется повторение.

Умножение всех элементов поля $P_n^{\,3}$ на i представляет преобразование поля в себя, оно порождает преобразование f плоскости $П$ над полем. Найдем его аналитическое выражение. Так как $i^3 + a_0i^2 + b_0i + c_0 = 0$, то

$$i^3 = -a_0{}^2 - b_0i - c_0;\ (ai^2 + bi + c)\, i = ai^3 + bi^2 + ci =$$
$$a(-a_0i^2 - b_0i - c_0) + bi^2 + ci = (-a_0a + b)i^2 + (-b_0a + c)i - c_0a;$$

поэтому $f(a: b: c) = f(a': b': c')$, где $\begin{cases} a' = -a_0a + b \\ b' = -b_0a + c \\ c' = -c_0a \end{cases}$

Преобразование координат является линейным. Определитель матрицы равен $-c_0 \neq 0$, так как иначе многочлен $x^3 + a_0x^2 + b_0x + c_0$ был бы приводим. Следовательно, f – коллинеация плоскости $П$. Она порождает циклическую группу $\langle f \rangle$ порядка v. Теорема доказана.

4.10. Конечные плоскости малых порядков

4.10.1. Перечисление плоскостей данного порядка

В теории конечных проективных плоскостей одной из важных задач является нахождение всех плоскостей данного порядка n. Однако даже более простой вопрос о существовании плоскости решен лишь для некоторых значений n. В сущности говоря, все, что сейчас об этом известно, выражается двумя следующими ***теоремами:***

1. Для любого $n = p^k$, где p – простое, а k – произвольное натуральное число, существует проективная плоскость порядка n, притом дезаргова.

Этот факт непосредственно следует из существования поля такого порядка.

2. Теорема Брука – Райзера. Если $n \equiv 1, 2 (mod\ 4)$ и n не является суммой двух квадратов натуральных чисел, то не существует проективной плоскости порядка n.

Эта теорема опубликована в 1949 году математиками, имя которых она носит. Авторы дали ей довольно сложное доказательство; позднее было найдено более простое. Под условие теоремы подходит бесконечное множество чисел, первые из них: 6, 14, 21, 22.

Существует бесконечно много порядков n, для которых обе теоремы не дают определенного ответа на вопрос о существовании проективной плоскости. Для таких порядков невозможны дезарговы плоскости, но существование недезарговых не исключено. Интересно, однако, то, что ни для одного из этих порядков никаких плоскостей не найдено; порядок любой из известных конечных проективных плоскостей является числом вида p^k. Вопрос о существовании плоскости спорного порядка n решится положительно, если плоскость каким-либо регулярным способом будет построена; он решится отрицательно, если будет найден некоторый признак невозможности типа теоремы Брука – Райзера. Вопрос можно решить и полным перебором всех возможностей построения плоскостей данного порядка.

Более сложный вопрос о перечислении, т. е. составлении полного списка всех абстрактных проективных плоскостей данного порядка, можно решить только перебором. Избрав какой-либо план построения любой искомой плоскости, нужно рассмотреть все варианты, которые будут появляться в процессе его выполнения. Если в некоторых разветвлениях работа будет доведена до конца, то полученные плоскости нужно разбить на классы изоморфизма и выбрать из каждого класса по представителю. Если все варианты приведут к противоречиям, то будет доказано несуществование. К сожалению, объем перебора вариантов с увеличением порядка n растет чрезвычайно быстро, поэтому такая работа выполнима только для малых значений n.

Один из методов перечисления конечных плоскостей данного порядка состоит в получении всех семейств из $n - 1$ попарно ортогональных *латинских квадратов* порядка n. Сначала выбирается некоторый опорный квадрат, затем подбираются новые квадраты, каждый из которых ортогонален ко всем ранее выбранным. В качестве опорного квадрата должны быть использованы все попарно неизоморфные квадраты порядка n. В качестве второго и следующих квадратов нужно также рассмотреть все, возможные на очередном этапе работы.

Другой употребительный план перечисления называется *комбинаторно-геометрическим.* Выбирается некоторая опорная подплоскость, существующая во всех ожидаемых плоскостях. Такой подплоскостью может служить *полный четырехвершинник*; используются и другие многовершинники, пары полных пучков прямых. Затем опорная подплоскость постепенно расширяется добавлением новых семейств точек и прямых. И здесь на каждом этапе возможны различные варианты.

Далее рассматривается комбинаторно-геометрическое *построение проективных плоскостей самых малых порядков.* Выберем в качестве опорной подплоскости полный четырехвершинник. Он имеет 6 сторон и 3 диагональные точки. Если эти точки коллинеарны, то присоединение проходящей через них прямой дает конфигурацию Фано (см. п. 4.3.2). Неколлинеарные диагональные точки определяют попарно 3 прямые, называемые диагоналями; каждая из них пересекает стороны в двух новых точках, всего таких точек 6, они лежат по одной на каждой стороне (см. там же). Обозначив вершины посредством A_1, A_2, A_3, A_4, положим для сторон $a_{ik} = A_iA_k$ $(1 \leq i < k < 4)$. Диагональные точки и диагонали обозначим, соответственно, буквами B и b, положив $B_1 = a_{12}a_{34}$; $B_2 = a_{13}a_{24}$; $Bз = a_{14}a_{23}$; $b_1 = B_2B_3$; $b_2 = B_1B_3$; $B_3 = B_1B_2$.

Пересечения сторон с диагоналями обозначим буквой C, положив $a_{ik}\mathrm{I}C_{ik}$. Точки A, B, C, всего их 13, и прямые a, b, их число равно 9, образуют подплоскость. На каждой ее прямой лежат 4 точки, через каждую точку A проходят 3 прямые, через B – 4 и через C – 2 (рис. 38). Практически удобно считать опорной подплоскостью не сам полный четырехвершинник, а одно из рассмотренных двух его расширений. Первое из них и далее будем называть конфигурацией Фано, второе оставим без особого названия.

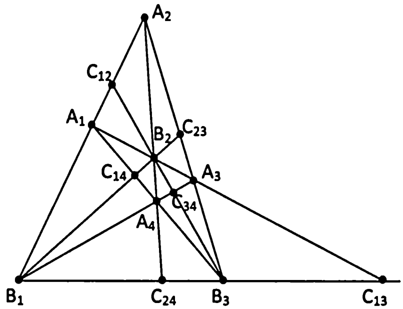


Рис.38

В плоскости порядка n на каждой прямой конфигурации Фано, если она имеется, лежат 3 ее точки и $n + 1 - 3 = n - 2$ касательные точки. Число касательных точек на всех 7 сторонах равно $7\ (n-2)$, вместе с 7 точками конфигурации имеем $7 + 7(n-2) = 7n - 7$ точек. Отсюда число внешних точек есть $(n^2 + n + 1) - (7n - 7) = n^2 - 6n + 8 = (n-2)(n+4)$.

Во второй опорной подплоскости на каждой прямой лежит 4 ее точки, а поэтому $(n+1) - 4 = n - 3$ касательные точки. Вместе с точками подплоскости имеем $13 + 9(n-3) = 9n - 14$ точек, поэтому число внешних точек есть $(n^2 + n + 1) - (9n - 14) = n^2 - 8n + 15 = (n-3)(n-5)$. Значения выражений $(n-2)(n-4)$ и $(n-3)(n-5)$ даны в табл. 21.

Таблица 21

n	$(n-2)(n-4)$	$(n-3)(n-5)$
2	0	3
3	-1	0
4	0	-1
5	3	0
6	8	3
7	15	8
8	24	15
9	35	24
10	48	35

Отрицательные значения говорят о невозможности соответствующей подплоскости. А именно в плоскости порядка 3 невозможна конфигурация Фано, а для $n = 4$ – вторая опорная подплоскость. Заметим сразу же, что конфигурация Фано, будучи проективной плоскостью порядка 2, невозможна и для плоскости порядка 5, так как условия вложимости $m^2 = n$ или $m^2 + m \leq n$, для $n = 5$ и $m = 2$ не выполняются (п. 4.7.3).

4.10.2. Проективные плоскости порядков 2, 3, 4, 5

Так как числа 2, 3, $4 = 2^2$ и 5 – степени простых чисел, то каждое из них является порядком дезарговой плоскости.

Найдем теперь все проективные плоскости этих порядков.

***n* = 2**. Для этого порядка $v = b = 7$. Вершины и диагональные точки полного четырехвершинника исчерпывают все 7 точек плоскости, а кроме его 6 сторон имеется только одна прямая. Так как через вершины уже проходят по три стороны, то седьмая прямая плоскости должна проходить через диагональные точки четырехвершинника. Это значит, что плоскость является конфигурацией Фано. Таким образом, конфигурация Фано есть *единственная* плоскость порядка 2.

***n* = 3**. Для этого порядка $v = b = 13$. Конфигурация Фано, как уже отмечено, в этом случае невозможна. Вторая опорная подплоскость содержит все 13 точек плоскости; но $13 - 9 = 4$ прямых плоскости в подплоскость не входят. Через каждую из точек B уже проходят 4 прямые подплоскости, но каждая точка A лежит только на трех таких прямых. Поэтому 4 оставшиеся прямые проходят по одной через точки A, на каждой из них лежит еще по три точки C.

Так как каждая из точек C_{12}, C_{13}, C_{14} лежит на одной из сторон четырехвершинника, проходящей через вершину A_1, то четвертая прямая, проходящая через A_1, должна проходить через C_{23}, C_{24}, C_{34}. Таким образом, ряды точек из четырех оставшихся прямых легко находятся. A_1, C_{23}, C_{24}, C_{34}; A_2, C_{13}, C_{14}, C_{34}; A_3, C_{12}, C_{14}, C_{24}; A_4, C_{12}, C_{13}, C_{23}.

Из построения видна *единственность*, с точностью до изоморфизма, абстрактной проективной плоскости порядка 3. Она должна совпадать с абстрактной дезарговой плоскостью этого порядка.

$\boldsymbol{n = 4}$. Для этого порядка $v = b = 21$. Как установлено выше, в плоскости возможна только конфигурация Фано. Обозначим все ее вершины буквой A, стороны – буквой a, занумеровав их так, как это сделано в п. 4.4.3. На каждой прямой конфигурации, кроме трех точек A, лежат еще две касательные точки, всего таких точек $7 \cdot 2 = 14$; внешних точек нет. Обозначим касательные точки буквой B и занумеруем числами от 1 до 14. Нумерацию можно выбрать так, чтобы список инцидентностей точек с прямыми подплоскости выражался табл. 22.

Через каждую точку A, кроме трех прямых конфигурации, проходят еще две касательные прямые, содержащие по 4 касательные точки. Для касательных, проходящих через A_1 и пересекающих стороны a_3, a_5, a_6, a_7 в точках B, находим, с учетом произвола в выборе обозначений, следующие полные ряды:

$$A_1, B_5, B_9, B_{11}, B_{13}; \quad A_1, B_6, B_{10}, B_{12}, B_{14}.$$

Для двух касательных в точке A_2, пересекающих прямые a_2, a_4, a_5, a_6 в точках B, получаем, с учетом еще не использованного произвола в выборе обозначений точек B на прямых a_2, a_4, а также запрещения уже встречавшихся пар B_9, B_{11} и B_{10}, B_{12}, такие полные ряды:

$$A_2, B_3, B_7, B_9, B_{12}; \quad A_2, B_4, B_8, B_{10}, B_{11}.$$

Для касательных в точке A_3, пересекающих a_1, a_3, a_4, a_5 в точках B, используя произвол в выборе обозначений точек B на a_1 и запрещения уже встречавшихся пар, получаем полные ряды:

$$A_3, B_1, B_5, B_7, B_{10}; \quad A_3, B_2, B_6, B_8, B_9.$$

Для остальных касательных можно использовать только запрещения пар точек B; полные ряды оказываются вполне определенными:

$$\begin{array}{ll} A_4, B_3, B_5, B_8, B_{14}; & A_4, B_4, B_6, B_7, B_{13}; \\ A_5, B_1, B_3, B_6, B_{11}; & A_5, B_2, B_4, B_5, B_{12}; \\ A_6, B_1, B_4, B_9, B_{14}; & A_6, B_2, B_3, B_{10}, B_{13}; \\ A_7, B_1, B_8, B_{12}, B_{13}; & A_7, B_2, B_7, B_{11}, B_{14}. \end{array}$$

Из построения видна *единственность* абстрактной проективной плоскости порядка 4, и поэтому ее совпадение с дезарговой плоскостью этого порядка.

***n* = 5**. Для этого порядка $v = b = 31$. Как уже установлено выше, в этой плоскости конфигурация Фано содержаться не может. Поэтому плоскость имеет опорную подплоскость второго типа, состоящую из 13 точек и 9 прямых. На каждой из этих прямых лежат 4 точки подплоскости и 2 касательные точки, всего касательных точек имеется $9 \cdot 2 = 18$; внешних точек нет. Обозначим касательные точки буквой D с номерами от 1 до 18. Эту нумерацию можно выбрать так, чтобы список инцидентностей точек и прямых подплоскости выражался табл. 23.

На трех прямых a, проходящих через данную точку A, лежат остальные точки A, все точки B и три точки C. Три остальные прямые, проходящие через A, содержат три точки C и некоторые точки D. Каждая из этих прямых пересекает 6 прямых подплоскости, не проходящих через данную A, в 5 точках, поэтому она проходит через одну точку C и 4 точки D. Таких прямых имеется $4 \cdot 3 = 12$; обозначим их буквой t.

Через каждую точку B кроме четырех прямых подплоскости проходят еще две прямые. Такая прямая, пересекая в B четыре прямые подплоскости, пересекает остальные 5 ее прямых в 5 точках. Поэтому она проходит только через касательные точки; число таких прямых есть $3 \cdot 2 = 6$; обозначим их буквой u. Остальные $31 - (9 + 12 + 6) = 4$ прямых проходят лишь через точки C и D. Каждая из этих прямых пересекает 9 прямых опорной подплоскости в 6 точках, поэтому три эти точки будут типа C, а остальные – типа D. Обозначим эти прямые буквой x.

Нахождение полных рядов точек на прямых, не принадлежащих опорной подплоскости, начнем с подбора троек точек C на прямых x. В эти тройки не могут входить пары C_{12}, C_{34}; C_{13}, C_{24}; C_{14}, C_{23}, расположенные на прямых b. Перебор показывает, что этим разрешается 8 троек вида C_{ij}, C_{ik}, C_{il} и C_{ij}, C_{ik}, C_{jk}, где i, j, k,

l – различные номера из четверки $\{1, 2, 3, 4\}$. Однако, например, точки C_{12}, C_{13}, C_{14} являются диагональными для четырехвершинника $B_1B_2B_3A_1$ и вследствие невозможности конфигурации Фано оказываются неколлинеарными. Поэтому 4 тройки вида C_{ij}, C_{ik}, C_{jl} запрещены, допустимы только 4 тройки вида C_{ij}, C_{ik}, C_{jk}. Эти тройки имеют попарно общие точки, поэтому прямые x не имеют общих точек D. Используя произвол в выборе обозначений, получаем следующие инцидентности:

$x_1\mathrm{I}C_{23}, C_{24}, C_{34}, D_1, D_3, D_5$; $x_2\mathrm{I}C_{13}, C_{14}, C_{34}, D_2, D_7, D_9$;
$x_3\mathrm{I}C_{12}, C_{14}, C_{24}, D_4, D_8, D_{11}$; $x_4\mathrm{I}C_{12}, C_{13}, C_{23}, D_6, D_{10}, D_{12}$.

Состав полных рядов точек на прямых t_1, t_2, t_3, проходящих через A, получаем с учетом произвола в выборе обозначений точек D на прямых b; для остальных прямых t он устанавливается однозначно:

$t_1\mathrm{I}A_1, C_{23}, D_9, D_{11}, D_{13}, D_{15}$; $t_2\mathrm{I}A_1, C_{34}, D_8, D_{10}, D_{16}, D_{17}$;
$t_3\mathrm{I}A_1, C_{24}, D_7, D_{12}, D_{14}, D_{18}$;
$t_4\mathrm{I}A_2, C_{34}, D_4, D_6, D_{15}, D_{18}$; $t_5\mathrm{I}A_2, C_{14}, D_3, D_{12}, D_{13}, D_{16}$;
$t_6\mathrm{I}A_2, C_{13}, D_5, D_{11}. D_{14}, D_{17}$;
$t_7\mathrm{I}A_3, C_{14}, D_1, D_{10}, D_{14}, D_{15}$; $t_8\mathrm{I}A_3, C_{12}, D_5, D_9, D_{16}. D_{18}$;$t_9\mathrm{I}A_3$,
$C_{24}, D_2, D_6, D_{13}, D_{17}$;
$t_{10}\mathrm{I}A_4, C_{12}, D_3, D_7, D_{15}, D_{17}$; $t_{11}\mathrm{I}A_4, C_{23}, D_2, D_4, D_{14}, D_{16}$;
$t_{12}\mathrm{I}A_4, C_{13}, D_1, D_8, D_{13}, D_{18}$.

Таблица 22

$a_1\ \mathrm{I}A_1, A_2, A_4, B_1, B_2$
$a_2\mathrm{I}A_1, A_3, A_7, B_3, B_4$
$a_3\mathrm{I}A_2, A_6, A_7, B_5, B_6$
$a_4\mathrm{I}A_1, A_5, A_6, B_7, B_8$
$a_5\mathrm{I}A_4, A_5, A_7, B_9, B_{10}$
$a_6\ \mathrm{I}A_3, A_4, A_6, B_{11}, B_{12}$
$a_7\ \mathrm{I}A_1, A_2, A_4, B_1, B_2$

Таблица 23

$a_{12}\mathrm{I}A_1, A_2, B_1, C_{12}, D_1, D_2$
$a_{13}\mathrm{I}A_1, A_3, B_2, C_{13}, D_3, D_4$
$a_{14}\mathrm{I}A_1, A_4, B_3, C_{14}, D_5, D_6$
$a_{23}\mathrm{I}A_2, A_3, B_3, C_{23}, D_7, D_8$
$a_{24}\mathrm{I}A_2, A_4, B_2, C_{24}, D_9, D_{10}$
$a_{34}\mathrm{I}A_3, A_4, B_1, C_{34}, D_{11}, D_{12}$
$b_1\mathrm{I}B_2, B_3, C_{12}, C_{34}, D_{13}, D_{14}$
$b_2\mathrm{I}B_1, B_3, C_{13}, C_{24}, D_{15}, D_{16}$
$b_3\mathrm{I}B_1, B_2, C_{14}, C_{23}, D_{17}, D_{18}$

Однозначно устанавливается и состав полных рядов точек на прямых u:

$u_1\mathrm{I}B_1, D_4, D_5, D_7, D_{10}, D_{13}$; $u_2\mathrm{I}B_1, D_3, D_6, D_8, D_9, D_{14}$;
$u_3\mathrm{I}B_2, D_2, D_5, D_8, D_{12}, D_{15}$;
$u_4\mathrm{I}B2, D_1, D_6, D_7, D_{11}, D_{16}$; $u_5\mathrm{I}B_3, D_1, D_4. D_9, D_{12}, D_{17}$;
$u_6\mathrm{I}B_3, D_2, D_3, D_{10}, D_{11}, D_{18}$.

Снова установлена *единственность* абстрактной проективной плоскости, а поэтому ее дезарговость.

Итогом этого раздела является следующая *теорема: существуют только дезарговы плоскости порядков 2, 3, 4, 5.*

4.10.3. Некоторые сведения о конечных проективных плоскостях порядков, больших 5

Из теоремы Брука – Райзера следует несуществование проективной плоскости порядка 6. Невозможность такой плоскости видна также из несуществования пары ортогональных латинских квадратов порядка 6, установленной Тарри еще в 1900 году. Существует также комбинаторно-геометрическое доказательство этого факта.

***n* = 7**. Так как 7 – простое число, то существует дезаргова плоскость этого порядка. Ее единственность доказал в 1954 году М. Холл, используя комбинаторно-геометрический метод. Так как ранее была установлена невозможность конфигурации Фано, то за основу построения была взята вторая опорная подплоскость. Естественно, что доказательство оказалось значительно более сложным, чем для порядка 5.

***n* = 8**. Для плоскости порядка 8 комбинаторно-геометрический метод оказался практически неприменимым из-за огромного числа вариантов, подлежащих рассмотрению. Передать эту работу счетной машине трудно, так как программы оказываются весьма сложными. Гораздо проще запрограммировать получение латинских квадратов.

Поэтому естественно, что перечисление проективных плоскостей порядка 8 было проведено с помощью ЭВМ по программе, подбиравшей латинские квадраты. Правда, строились не системы из 7 попарно ортогональных квадратов порядка 8, а были иным способом использованы квадраты порядка 7. Это связано с тем, что типов латинских квадратов порядка 7 гораздо меньше, чем типов квадратов порядка 8. Работа была проведена в 1956 году под руководством М. Холла. Оказалось, что проективная плоскость порядка 8, с точностью до изоморфизма, единственна. Она, естественно, дезаргова.

***n* = 9**. Так как $9 = 3^2$ есть степень простого числа, то существует дезаргова плоскость порядка 9. В 1907 году Веблен и Веддерберн описали две недезарговы плоскости этого порядка. Одна из них строится над левым почтителом порядка 9 [3]. Она имеет полную группу трансляций и поэтому называется *трансляционной.* Двойственная ей плоскость может быть построена над правым почтителом; она имеет богатую группу сдвигов и называется *сдвиговой.* Вторая плоскость, найденная Вебленом и Веддерберном, двойственна себе и может быть построена над любым из почтител порядка 9, конечно, другим способом, чем трансляционная. Она называется *хьюзовой*, так как входит в бесконечное семейство конечных недезарговых проективных плоскостей, найденное Хьюзом. Построение трансляционной и сдвиговой плоскостей над почтителами описано в работе [3].

За прошедшие десятилетия новых проективных плоскостей порядка 9 не получено. Таким образом, в данный момент известны 4 плоскости этого порядка: дезаргова, трансляционная, сдвиговая и хьюзова. Возможно, что других плоскостей нет, но категорически утверждать этого нельзя, так как полное перечисление не проведено из-за огромного объема работы.

Порядок 10 является первым, для которого общие теоремы не дают ответа на вопрос о существовании проективной плоскости. С одной стороны, число 10 не является степенью простого числа, поэтому нет дезарговой плоскости порядка 10, но это не запрещает существования недезарговых. С другой стороны, хотя $10 \equiv 2\ (mod\,4)$, имеем $10 = 3^2 + 1^2$, т. е. 10 есть сумма двух квадратов натуральных чисел. Поэтому 10 не удовлетворяет условиям теоремы Брука – Райзера, утверждать несуществование плоскости нельзя. Различные попытки построить плоскость к цели не привели. Полный перебор всех возможностей построения требует колоссальной работы. Пока плоскости порядка 10 изучаются условно, в предположении, что они существуют. Например, доказано, что такая плоскость имеет только тождественную коллинеацию.

Конечно, существуют дезарговы плоскости порядка 11 и 13, недезарговы плоскости неизвестны. Вообще все известные проективные плоскости простых порядков являются дезарговыми. Относительно существования плоскостей порядков 12 и 15 ничего не известно. Проективная плоскость порядка 14 не существует, это утверждает теорема Брука – Райзера.

Данный здесь краткий обзор показывает, что вопросы существования и перечисления конечных проективных плоскостей решены только для малых порядков. Дальнейшее продвижение требует огромной вычислительной работы с применением ЭВМ и серьезного развития теории.

Рекомендуемая литература

1. Аргунов Б. И., Емельченков Е. П. Инцидентностные структуры и тернарные алгебры // УМН, 1982. – Т. 37. – Вып. 2. – С. 3–37.

2. Белоусов В. Д. Алгебраические сети и квазигруппы. – Кишинев: Штиинница, 1971.

3. Гонин Е. Г. Типы полных 6-дуг в проективных плоскостях порядка 9 // Учен. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1976. – Т. 152. – С. 3–27.

4. Малых А. Е. Способы описания конечных проективных плоскостей // Комбинаторный анализ. – М.: МГУ, 1980. – Вып. 5. – С. 78–89.

5. Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ. – М.: МГУ, 1972. – 456 с.

6. Сачков В. Н. Комбинаторные методы дискретной математики. – М.: Наука, 1977. – 354 с.

7. Скорняков Л. А. Проективные плоскости // УМН, 1951. – Т. 6. – Вып. 6 (46). – С. 112–154.

8. Холл М. Теория групп. – М.: ИЛ, 1962. – 468 с.

9. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970. – 423 с.

Список основных научных трудов профессора Е.Г. Гонина

Знак и направление в элементарной геометрии // Материалы науч.-практ. конф. матем. кафедр Кировского, Пермского, Свердловского и Тюменского пед. ин-тов. – Пермь, 1936.

Интерпретация Пуанкаре как аналог стереографической проекции // Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1938. – Вып. 3. – С. 39–41; Пермь: ПГПИ, 1968. – Т. 61. – С. 20–23.

Доказательство независимости аксиом соединения проективной геометрии // Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1938. – Вып. 3. – С. 43–46.

Аналитическая теория показательной и тригонометрической функции // Материалы VIII науч.-метод. конф. пед. и учит. ин-тов Урала. – Пермь, 1951. – С. 30–31.

Обобщение теории вещественных чисел А.Н. Колмогорова: автореф. дис. … канд. физ.-мат. наук. – Молотов: Молотов. гос. ун-т, 1952.

Новый вариант теории неотрицательных вещественных чисел // Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1954. – Вып. 13. – С. 47–52.

Анализ теоретико-множественной аксиоматики проективной геометрии.// Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1954. – Вып. 13. – С. 53–62.

О плоскостной аксиоме расположения проективной геометрии // Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1957. – Вып. 14. – С. 212–214.

Обобщенное измерение элементов строго монотонно упорядоченной полугруппы // Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1959. – Вып. 20. – С. 1–12.

Теоретическая арифметика. – М.: Учпедгиз, 1959. – 232 с.

К вопросу об урартских мерах емкости // Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь: ПГПИ, 1959. – Вып. 20. – С. 67–69.

Понятие величин в научной и учебной литературе // Материалы VIII науч.-метод. конф. пед. и учит. ин-тов Урала. – Пермь, 1950. – С. 31.

Об определении комбинаторной задачи // Материалы XXIV конф. работников матем. кафедр пед. ин-тов Уральской зоны. – Челябинск, 1967. – С. 29.

Постановка математических курсов в педагогическом институте // Материалы XXIV конф. работников матем. кафедр пед. ин-тов Уральской зоны. – Челябинск, 1967. – С. 84.

Гонин Е.Г., Малых А.Е. Латинские квадраты для троек рядов с неконкурентными носителями в проективных плоскостях порядка 9 // Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь, 1971. – Вып. 2. – С. 23–28.

Метод поэтапных отождествлений // Материалы XXVI конф. работников матем. кафедр пед. ин-тов Урала. – Киров, 1968. – С. 50–51.

Гонин Е.Г., Домошницкая Н.Е. Обобщенное измерение для упорядоченных полугрупп с положительными и отрицательными элементами // Физико-математические науки. – Пермь: ПГТИ, 1968. – С. 74–83.

Вариант алгоритма перебора решений комбинаторных задач // Материалы XXVII межвузов. науч. конф. матем. кафедр пед. ин-тов Уральской зоны. – Ижевск, 1969. – С. 165.

Перебор решений комбинаторных задач // Математика. – Т. 94. – Пермь, 1971. – С. 27–46.

Гонин Е.Г. Типы полных 6-дуг в проективных плоскостях порядка 9 // Комбинаторика. Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь, 1976. – Т. 152. – С. 3–27.

Гонин Е.Г., Лумпов А.Д. Проективные плоскости порядка 9 с симметричными полными 6-дугами // Кибернетико-математические методы исследования процессов и структур. Уч. зап. Перм. пед. ин-та. – Пермь, 1976. – Т. 156. – С. 26–38.

Гонин Е.Г., Зверева Ю.Н., Поносова О.М. Типы 6-дуг с одной внешней точкой в проективных плоскостях порядка 9. Деп. в ВИНИТИ 16.02.1982, №705-82. – Деп. – 17 с.

Несуществование проективной плоскости 6-дугой определенного типа. Деп. в ВИНИТИ 16.02.1982, №706-82.

Конечные проективные плоскости: учебное пособие к спецкурсу. – Пермь, ПГПИ, 1983. – 93 с.

Гонин Е.Г., Гонин Н.Г. Статистический контроль размеров деталей калибрами // Приближенное решение краевых задач и функциональных уравнений. – Пермь: ПГТИ, 1971. – Вып. 84. – С. 64–78.

Гонин Е.Г., Гонина Е.Е. Методическая разработка темы «Подплоскости и строго транзитивные плоскости». – Пермь: ПГПИ, 1985.

Проективные плоскости порядка 9 с симметричными полными 6-дугами // Математические исследования. – АН Молдавской ССР. – Кишинев, 1976. – Вып. 43.

Гонин Е.Г., Гонина Е.Е. Метод поэтапных отождествлений // Известия научно-образовательного центра «Математика». – Пермь: ПГТУ, 2006. – Вып. 3. – С. 16–38.

Основные публикации о Евгении Григорьевиче Гонине

Александров П. У времени на виду // Звезда. – Пермь. – 1970. – 24 апр.

Георгиев В. Математика – родная стихия // Учитель. — Пермь: ПГПИ. – 1967. – 7 марта.

Дышинский Е.А., Поносова О.М. Евгений Григорьевич Гонин (к 70-летию со дня рождения) // Математика в школе, 1980. – № 4. – С. 60.

Евгений Григорьевич Гонин: руководство аспирантурой и кафедрой / Сост. Ю.Н. Зверева, О.Л. Калинина, В.И.Данилова. – Пермь: ПГПУ, 2008.

Зверева Ю.Н., Малых А.Е. Педагогическая и научная деятельность Евгения Григорьевича Гонина // История и методология науки: сб. – Пермь: ПГУ, 1996. – Вып. 3. – С. 75–82.

Зверева Ю.Н., Истомина Л.И., Малых А.Е. Исследование вопросов дискретной математики в Пермском педагогическом университете // История и методология науки: сб. – Пермь: ПГУ, 1997. – Вып. 4. – С. 88–101.

Зверева Ю.Н. Роль профессоров А.В. Ланкова и Е.Г. Гонина в развитии научного потенциала математического факультета ПГПИ // Проблемы обучения математике в современной школе. – Пермь: ПГПУ, 2001.

Зверева Ю.Н. Гонин Евгений Григорьевич // Биографический словарь: профессора и преподаватели Пермского государственного педагогического университета (1921–2003). – Пермь: Книжный мир, 2003.

Зверева Ю.Н., Калинина О.Л. Из истории научно-методических конференций математических кафедр педвузов Уральской зоны // Проблемы историко-научных исследований в математике и математическом образовании. – Пермь: ПГПУ, 2007.

Малых А.Е. 50 лет в институте // Учитель. – Пермь: ПГПИ. – 1980. – 9 апр.

Математика в СССР за 40 лет (1917–1957) // Библиография. – М.: Наука, 1959. – Т. 2.

Математика в СССР (1958–1967) // Библиография. – М.: Наука, 1969. – Вып. 1. – Т. 2.

Ошуркова Р.А., Гонина Е.Е. Евгений Григорьевич Гонин – ученый-энциклопедист // История и методология науки. – Пермь: ПГУ, 1995. – Вып. 2. – С. 103–115.

Памяти товарища Е.Г. Гонина // Учитель. – Пермь: ПГПИ. – 1983. – 26 ноября.

40 лет Пермскому государственному педагогическому институту. – Пермь: ПГПИ, 1961. – С. 68–72.

Справочник научных работ сотрудников Пермского государственного педагогического института (1921–1971) / Сост. Е.В. Золотова, Ф.Д. Бойченко. – Пермь, 1971.

Фоминых Ю.Ф. Компьютер: польза и вред // Вечерняя Пермь. – 1994. – 19 июля.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть четвертая

Часть пятая

Научное издание

Е.Г. ГОНИН:
жизнь, научная и педагогическая деятельность

Составитель А.Е. Малых

Редактор Н.Н. Гашева
Художественный редактор С.П. Можаева
Набор рукописи и рисунки В.И. Даниловой
Компьютерная верстка – Ф. Назаров
Корректор А. Егорова

Фотографии – из личных архивов преподавателей и сотрудников
Пермского государственного педагогического университета,
из библиотеки вуза, а также из личного архива Е.Е. Гониной

Подписано в печать 25.10.2010. Формат 84×108 1/32.
Бумага для ВХИ. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 19,74.
Тираж 500 экз. Заказ № 808.

Издательство «Книжный мир»
614990, г. Пермь, ул. Дружбы, 34, тел. (342) 22-00-170

Отпечатано в соответствии с качеством
предоставленного оригинал-макета
в ОАО «ИПП «Уральский рабочий»
620990, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 13.
http://www.uralprint.ru e-mail: sales@uralprint.ru

Алла Ефимовна Малых

Доктор физико-математических наук, профессор, заслуженный работник высшей школы Российской Федерации, отличник народного просвещения РФ.

В 1965 г. поступила в аспирантуру Пермского государственного педагогического института по специальности «Геометрия и топология» (научный руководитель – профессор Е.Г. Гонин). После ее окончания с представлением кандидатской диссертации была оставлена для работы в институте на вновь созданной кафедре элементарной математики, впоследствии преобразованной в кафедру методики математики.

С 1984 г. и по настоящее время А.Е. Малых работает заведующей кафедрой геометрии. В 1983 г. защитила кандидатскую диссертацию, в 1992-м – докторскую, тогда же ей было присвоено ученое звание профессора.

А.Е. Малых – автор более 320 публикаций, в том числе 5 монографий по комбинаторному анализу, конечным геометриям, истории математики, методике обучения математике. Она редактор более 20 сборников научно-методических работ и научных трудов, член редакционной коллегии ряда межвузовских сборников.

С 1996 г. является научным руководителем аспирантуры по двум специальностям: 07.00.10 «История математики» и 13.00.02 «Теория и методика обучения и воспитания (математика)».

КНИЖНЫЙ
МИР
2010

Е.Г. Гонин: жизнь, научная и педагогическая деятельность