

О. И. Маричев

Метод вычисления интегралов от специальных функций

(теория и таблицы
формул)

НАУКА И ТЕХНИКА

О. И. Маричев

**Метод вычисления
интегралов
от специальных
функций**

(ТЕОРИЯ И ТАБЛИЦЫ ФОРМУЛ)

Редактор
академик АН БССР,
доктор физико-математических наук
Ф. Д. ГАХОВ

Маричев О. И. **Метод вычисления интегралов от специальных функций (теория и таблицы формул)**. Мн., «Наука и техника», 1978, 312 с.

Излагается единый простой метод, позволяющий вычислить большое количество определенных интегралов от различных элементарных и специальных функций. Основой метода являются теорема о свертке для преобразования Меллина, свойства гамма-функции и теория вычетов. Приводится специальная таблица преобразований Меллина, из каждой пары формул которой читатель может вывести значения соответствующих интегралов.

В книгу включены вспомогательные сведения, с помощью которых систематически излагаются элементы современной теории специальных функций гипергеометрического типа. Разобраны характерные примеры вычисления интегралов в обычных и особых случаях, указана связь получаемых результатов с известными. Выведены формулы обращения общих классов интегральных преобразований сверточного и несверточного типов с G -функциями Мейера в ядрах, которые содержат частными случаями преобразования Фурье, Лапласа, Меллина, Ганкеля, Стильеса, Мейера, Конторовича—Лебедева, Мелера—Фока и др.

Предназначена для специалистов научно-исследовательских лабораторий, конструкторских бюро, вычислительных центров, математиков, физиков, инженеров, преподавателей и аспирантов вузов. Книга послужит не только справочником интегралов, но и учебно-методическим пособием по теории специальных функций, доступным для студентов старших курсов.

Иллюстраций 7. Библиография — 75 названий.

Рецензенты:

член-корреспондент АН СССР, профессор К. И. Бабенко,
доктор физико-математических наук, профессор А. П. Прудников

ОТ РЕДАКТОРА

Решения многих задач математической физики, техники, экономики выражаются через определенные интегралы, содержащие элементарные, а часто и так называемые специальные функции. Казалось бы, вычислить интеграл не так уж сложно. Нужно использовать существующую ныне весьма мощную вычислительную технику — быстродействующие ЭВМ и хорошо известные алгоритмы для получения приближенных численных значений интегралов. Однако в действительности дело обстоит совсем не просто. Часто подынтегральная функция зависит еще от некоторого дополнительного переменного — параметра. Тогда практически требуется вычислять не один интеграл, а континуум интегралов или, по крайней мере, целую их таблицу. Еще сложнее, когда параметров два или больше. В этих случаях численные методы становятся совсем мало пригодными и приходится проводить теоретические исследования с целью замены интеграла другим, более удобным аналитическим выражением (например, достаточно хорошо сходящимися бесконечными рядами или произведениями), откуда значения интеграла для требуемых значений параметров могли бы получаться простой подстановкой численных величин этих параметров.

В мировой математической литературе опубликовано большое количество различных справочников, где значения определенных интегралов от элементарных и специальных функций представляются через специальные, а в удачных случаях и через элементарные функции. Практически все специальные функции, содержащиеся в этих формулах, выражаются через обобщенные гипергеометрические ряды, частными примерами которых являются ряды Тейлора для экспоненты, логарифма, синуса, косинуса и степенной функции. Большинство справочников имеет специализированный характер: это таблицы различного рода интегральных преобразований (Фурье, Лапласа, Меллина, Ганкеля и т. д.) или подробные численные таблицы некоторых часто встречающихся интегралов (теории вероятности, астрономических и др.). Существуют и универсальные справочники. Наибольшей популярностью пользуются справочники И. С. Градштейна, И. М. Рыжика [7], В. А. Диткина, А. П. Прудникова [10] и переведенный с английского Г. Бейтмена, А. Эрдейи [3], а кроме того, изданный в ФРГ четырехтомный справочник Ф. Оберхеттингера [57—60] и некоторые другие.

Вся справочная литература по вычислению определенных интегралов имеет один общий недостаток; уместнее всего назвать его условно «статичность». Приведенные в ней интегралы даны в застывшем виде и потому ничего, кроме них самих, из таблиц извлечь нельзя. По этой причине существующие справочники, несмотря на их обилие и большой объ-

ем, обладают малой информационной емкостью. Содержащиеся в них интегралы можно считать лишь каплей в море всевозможных интегралов, которые уже появились или появятся в будущем при решении практических задач.

Предлагаемая справочная книга О. И. Маричева не имеет аналога ни в отечественной, ни в зарубежной литературе. Принципиальным отличием, позволяющим противопоставить ее всем другим известным справочникам интегралов, является динамичность. Каждый из помещенных в ней интегралов может стать источником для получения огромного множества других интегралов, выводимых из данного с помощью не очень сложных преобразований, правила осуществления которых с достаточной подробностью излагаются в книге.

Полагаю, что последняя фраза может огорчить читателей, привыкших к тому, что информация, черпаемая из справочников, обычно не требует никакой дальнейшей обработки. Для сознательного пользования данной книгой как справочником необходимо владеть некоторым минимумом математических знаний, примерно в объеме программы втуза с повышенной математической подготовкой (типа авиационных, электротехнических и др.). В первую очередь требуется знание математического анализа и основного курса теории аналитических функций.

С целью сделать книгу хотя бы в основной части доступной по возможности более широкому кругу читателей автор выделил в § 1 материал рецептурного характера, овладение которым не требует никаких специальных математических знаний; но вместе с тем это позволит читателю использовать книгу для получения значений многих интегралов. Останутся недоступными лишь различные исключительные случаи, а для уверенного пользования книгой в полном объеме, как уже говорилось, предварительная математическая подготовка необходима. Помощь читателям могут оказать помещенный в § 2 и 3 дополнительный теоретический материал, приведенная в § 4—6 информация из теории специальных функций и разнообразные примеры вычисления интегралов, рассмотренные в § 7.

Теоретическая часть книги (§ 2—8) может послужить хорошим, достаточно популярным пособием для изучения теории специальных функций и интегральных преобразований. Такого рода учебника у нас сейчас нет.

Подготовив настоящую книгу, автор проделал работу огромного объема. По материалам книги автор читал специальный курс лекций студентам Белорусского государственного университета им. В. И. Ленина, по просьбе различных лиц и ряда организаций им вычислено немало интегралов разной сложности.

Выражаю уверенность, что настоящий оригинальный справочник станет настольной книгой работников теоретического и прикладного направлений.

Ф. Д. Гахов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Во многих областях научных исследований встречаются определенные интегралы от произведений элементарных и специальных функций, имеющие вид

$$\int_a^b \varphi_1(cx^p, y_1, y_2, \dots, y_m) \varphi_2(\gamma x^q, z_1, \dots, z_n) dx = \\ = A(c, \gamma, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n), \quad (1)$$

где a, b, p, q — заданные действительные величины, причем $0 \leq a < b \leq \infty$.

Если параметры $c, \gamma, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n$ — постоянные величины, то числовое значение интеграла (1) от конкретных функций φ_1 и φ_2 в принципе может быть получено на ЭВМ с достаточно высокой точностью. Однако если значения $c, \gamma, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n$ не фиксированы, то интеграл (1) является функцией, зависящей от этих параметров, изучать которую, как правило, весьма затруднительно даже специалистам-математикам. В таких ситуациях обычно прибегают к помощи таблиц интегралов [3, 7, 9, 10, 52, 57—60] и др. Но даже если исследователю повезет и встретившийся интеграл в таблице найдется, у требовательного человека всегда останутся чувство неудовлетворенности и доля неуверенности, вызванные необходимостью использовать результат, метод получения которого неясен и в котором могут содержаться неточности. Способы контроля в таких случаях, как правило, весьма ограничены и специфичны: можно обратиться к другим таблицам, рассмотреть более простые частные случаи интеграла, обратить внимание на симметрию по параметрам и т. п. Однако вероятность удачи при обращении к таблицам невысока, так как в них содержится лишь до 10 тыс. определенных интегралов.

Поэтому возникла необходимость разработки и популярного изложения единых общих методов вычисления интегралов, позволяющих исследователю самому получить требуемый результат или же проверить взятый из таблицы. Наличие таких методов дает возможность исключить из таблиц редко встречающиеся в приложениях сложные интегралы, а взамен изложить методику нахождения их значений.

В книге разрабатывается некоторый общий метод вычисления интегралов вида (1) от функций φ_1 и φ_2 гипергеометрического типа, перечисленных в § 12. Список этих функций можно дополнить, но автор ограничился рассмотрением функций, для которых имеются общепринятые обозначения (в соответствии со справочником [2] и работами последних лет). Результаты вычислений выражаются, как и во всех справочниках такого рода, иногда в элементарных, а чаще в специальных функциях,

точнее, через комбинации степенных рядов гипергеометрического типа. Излагаемый здесь материал дает возможность путем несложных операций получить значения свыше миллиона интегралов и определить области их сходимости по следующей схеме вычислений.

1. Путем замен переменных $\gamma x^q = t$, $\gamma c^{q/p} = \gamma$, $\mathcal{H}_1(\tau) = \Phi_1(\tau^{-p/q}, y_1, \dots, y_m)$, $\mathcal{H}(y) = q\gamma^{1/q} A(c, \gamma, y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_n)$; $\mathcal{H}_2(t) = t^{1/q} \Phi_2(t, z_1, \dots, z_n)$, $\gamma a^q \leq t \leq \gamma b^q$; $\mathcal{H}_2(t) \equiv 0$, $t \in [\gamma a^q, \gamma b^q]$, интеграл (1) сводится к стандартной форме интеграла типа свертки Меллина:

$$\int_0^\infty \mathcal{H}_1(y/t) \mathcal{H}_2(t) t^{-1} dt = \mathcal{H}(y), \quad y > 0. \quad (2)$$

2. Над равенством (2) совершается преобразование Меллина, определяемое формулой

$$\mathcal{H}^*(s) = \int_0^\infty \mathcal{H}(y) y^{s-1} dy, \quad (3)$$

которое приводит это равенство к виду

$$\mathcal{H}_1^*(s) \mathcal{H}_2^*(s) = \mathcal{H}^*(s), \quad (4)$$

где $\mathcal{H}_j^*(s)$ — преобразования Меллина функций $\mathcal{H}_j(x)$, $j = 1, 2$, называемые еще образами этих функций.

3. После перемножения известных $\mathcal{H}_j^*(s)$ для их произведения $\mathcal{H}^*(s)$ находится прообраз $\mathcal{H}(y)$, связанный с $\mathcal{H}^*(s)$ формулой (3). Полученная функция $\mathcal{H}(y)$ выражает искомое значение интеграла (2).

Изложенная схема наиболее эффективно осуществляется в случае, когда $\mathcal{H}_j(x)$ относятся к классу функций гипергеометрического типа, то есть, в частности, когда преобразования Меллина $\mathcal{H}_j^*(s)$ являются произведениями отношений гамма-функций от s на постоянные. Тогда и произведение $\mathcal{H}^*(s)$ имеет такую же структуру:

$$\mathcal{H}^*(s) = C \prod_{i,j,k,l} \frac{\Gamma(a_i + s) \Gamma(b_j - s)}{\Gamma(c_k + s) \Gamma(d_l - s)}, \quad C = \text{const}, \quad (5)$$

где

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-y} y^{s-1} dy, \quad s > 0, \quad (6)$$

— гамма-функция Эйлера [2].

Переход от образов $\mathcal{H}^*(s)$, имеющих вид (5), к их прообразам $\mathcal{H}(y)$ осуществляется с помощью уточненной теоремы Слейтер [67] или теории вычетов, на основе которой эта теорема доказывается.

В § 1 приводится основная теорема, отражающая изложенную схему вычисления интегралов (2) типа свертки от функций $\mathcal{H}_j(x)$, которые находятся в специальной таблице преобразований Меллина (§ 10). Образы $\mathcal{H}_j^*(s)$ всех этих функций имеют вид (5). Чтобы облегчить задачу отыскания в таблице необходимых функций $\mathcal{H}_j(x)$, прилагаются параграф, поясняющий особенности таблицы (§ 9), перечень обозначений специальных функций (§ 11) и поисковый указатель (§ 12).

В § 2, 3 содержатся необходимые вспомогательные сведения, относящиеся к аналитическим функциям, интегральным преобразованиям и гамма-функции и позволяющие изложить весь дальнейший материал на

уровне знаний студентов старших курсов, изучавших математический анализ.

Центральное место в книге занимает § 4, в котором рассматриваются элементы современной теории функций гипергеометрического типа, теорема Слейтер и ее обобщения, а также приводятся сведения по асимптотике функций гипергеометрического типа. В § 5, 6 изучаются важные частные представители функций этого класса — функции Гаусса, Куммера и Бесселя. Исследованию различных способов вычисления интегралов в особых случаях посвящен § 7, где разобрано большое число соответствующих примеров, рассмотрены важные для приложений полилогарифмы, функции Миттаг — Леффлера и Курепы, а также кратко указан способ вычисления интегралов вида (1), содержащих, однако, произвольное количество множителей φ_m . В § 8 выводятся формулы обращения некоторых классов интегральных преобразований типа свертки и несверточного вида, которые, в частности, содержат преобразования Фурье, Лапласа, Ганкеля, Стилтеса, Мейера, Конторовича — Лебедева, Мелера — Фока и другие известные преобразования.

Порядок изложения материала предусматривает две стадии овладения методом вычисления интегралов: чисто техническое освоение приемов счета с помощью основной теоремы и подробно разобранных примеров ее использования (§ 1) и глубокое понимание основ современной теории специальных функций гипергеометрического типа и всех тонкостей метода (§ 2—7).

Проведенные в § 4—7 исследования показывают, что многие элементарные и большинство изученных специальных функций являются функциями гипергеометрического типа и поэтому, вообще говоря, могут быть определены как линейные комбинации интегралов Меллина—Бернса [2]:

$$\mathfrak{R}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \prod_{i,j,k,l} \frac{\Gamma(a_i + \alpha_i s) \Gamma(b_j - \beta_j s)}{\Gamma(c_k + \gamma_k s) \Gamma(d_l - \delta_l s)} z^{-s} ds, \quad (7)$$

где $\mathcal{L}$ — некоторый бесконечный контур; $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, \delta_l$ — действительные положительные, а a_i, b_j, c_k, d_l, z — комплексные параметры и переменная. Если все $\alpha_i = \beta_j = \gamma_k = \delta_l = 1$, а контур $\mathcal{L}$, количество и величины параметров a_i, b_j, c_k, d_l удовлетворяют некоторым условиям, то формула (7) осуществляет обратное преобразование Меллина произведения (5), точнее, $\mathcal{H}(y) = C\mathfrak{R}(y)$.

Очевидно, что количество гамма-функций, число и вид свободных параметров, входящих в правую часть (7), определяют ту или иную функцию гипергеометрического типа. Если эти величины произвольны, но контур $\mathcal{L}$ удовлетворяет некоторым условиям и все $\alpha_i = \beta_j = \gamma_k = \delta_l = 1$, а интеграл (7) сходится, то функция $\mathfrak{R}(z)$ сводится к так называемой G -функции Мейера [2, 51, 53]. Случай, когда коэффициенты $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, \delta_l$ отличны от единицы, приводит к еще более общей H -функции Фокса [42, 53]. Основные элементы теории этих функций излагаются в § 4, 7, 8.

Такой подход к теории функций гипергеометрического типа является определяющим во многих работах последних лет (см., например, монографии [51, 53] и указанную там библиографию). В этих работах вычисляются чрезвычайно сложные интегралы от произведений G, H и других общих функций одного или двух аргументов. Каждый подобный результат порождает множество частных интегралов, однако заметить и выделить из общих нужные для приложений частные соотношения — задача далеко не простая. Так, например, вряд ли рядовой специалист, встретив

интеграл от синуса, будет искать его в таблице среди интегралов от функции Бесселя $J_\nu(z)$. А между тем синус является некоторым частным случаем этой функции при $\nu=1/2$. Таким образом, получаемые в современной теории слишком общие результаты остаются абстрактными и практически недоступными для всех исследователей, за исключением узкого круга специалистов, занимающихся теорией специальных функций.

Цель настоящей книги — восполнить образовавшийся разрыв между современными достижениями теории специальных функций гипергеометрического типа и их практическим использованием для вычисления интегралов и обращения интегральных преобразований, а также способствовать популяризации этой интересной и полезной теории.

Автор глубоко признателен академику АН БССР Ф. Д. Гахову за постоянное внимание к работе и предложения по улучшению методики изложения материала.

§1. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ

Сущность разрабатываемого здесь метода вычисления интегралов можно сформулировать в виде следующего утверждения:

Основная теорема. *Каждая пара строк базовой таблицы преобразований Меллина (§ 10) может быть использована для вычисления интеграла вида*

$$\int_0^{\infty} \mathcal{K}_1\left(\frac{x}{t}\right) \mathcal{K}_2(t) \frac{dt}{t} = \mathcal{K}(x), \quad x > 0, \quad (1.1)$$

где $\mathcal{K}_1(\tau)$, $\mathcal{K}_2(\tau)$ — известные функции, расположенные в левых частях этих строк. Для получения значения $\mathcal{K}(x)$ этого интеграла достаточно осуществить следующие операции:

1. Перемножить образы $\mathcal{K}_1^*(s)$, $\mathcal{K}_2^*(s)$ функций $\mathcal{K}_j(\tau)$, $j = 1, 2$,

$$\mathcal{K}_1^*(s) \mathcal{K}_2^*(s) = \mathcal{K}^*(s), \quad (1.2)$$

которые находятся из правых частей этих строк и являются преобразованиями Меллина от оригиналов $\mathcal{K}_j(\tau)$, то есть связаны с ними формулой

$$\mathcal{K}_j^*(s) = \int_0^{\infty} \mathcal{K}_j(\tau) \tau^{s-1} d\tau, \quad j = 1, 2. \quad (1.3)$$

2. Для составленного таким образом произведения $\mathcal{K}^*(s)$ (1.2) следует вычислить оригинал $\mathcal{K}(x)$, также связанный с $\mathcal{K}^*(s)$ формулой преобразования Меллина (1.3). Функция $\mathcal{K}(x)$ выразит искомое значение интеграла (1.1).

Оригинал $\mathcal{K}(x)$ восстанавливается по известному значению своего образа $\mathcal{K}^*(s)$ с помощью теоремы Слейтер (§ 4 или строка 12.38 § 10), а в более сложных случаях для этого применяется теория вычетов (§ 7). Функция $\mathcal{K}(x)$ выражается, вообще говоря, в виде комбинации обобщенных гипергеометрических рядов. Ограничения на параметры, обеспечивающие сходимость интеграла (1.1), получаются автоматически из условий существования таких общих s , для которых оба интеграла (1.3) сходятся. Эти условия на параметры в некоторых случаях могут быть расширены к необходимым.

З а м е ч а н и е 1. С помощью основной теоремы можно вычислять многие интегралы типа (1.1), у которых, однако, интегрирование ведется не по лучу $(0, \infty)$, а по интервалам $(0, 1)$, $(1, \infty)$, $(0, x)$, (x, ∞) , $(x, 1)$ или $(1, x)$, где $x > 0$. Такие интегралы могут быть записаны в виде (1.1),

если одну или обе функции $\mathcal{K}_1(\tau)$, $\mathcal{K}_2(\tau)$ доопределить тождественным нулем на интервалах $(0, 1)$ или $(1, \infty)$ (см. примеры 2, 3).

Замечание 2. Базовую таблицу можно неограниченно дополнять по трем направлениям: 1) введением специальных обозначений для некоторых общих функций гипергеометрического типа; 2) вычитанием из имеющихся функций $\mathcal{K}_j(x)$ некоторых отрезков рядов Тейлора с последующими сдвигами интервалов изменения $\operatorname{Re} s$; 3) заменой аргумента x функций $\mathcal{K}_j(x)$ на аргументы вида $a_k \sqrt[k]{x}$, $k = 2, 3, \dots$, $a_k = \text{const}$. Эти свойства неограниченно расширяют класс вычисляемых интегралов. Подробнее об этом говорится в § 4, 7. Здесь отметим лишь, что если настоящим методом удастся вычислить интеграл (1.1), то метод применим и ко всякому сходящемуся

интегралу вида $\int_0^\infty \mathcal{K}_1(cx^p) \mathcal{K}_2(\gamma x^q) x^\alpha dx$, где p и q — действительные величины. Более того, как указывается в п. 8 § 7, повторным использованием преобразования Меллина, но по разным переменным можно вычислить вся-

кий сходящийся интеграл вида $\int_a^b x^\alpha \prod_{m=1}^n \mathcal{K}_m(c_m x^{p_m}) dx$, $0 \leq a < b \leq \infty$, где $\mathcal{K}_m(x)$ — произвольные функции из § 10. Его значение в общем случае будет выражаться через $(n-1)$ -кратные ряды. Такое обобщение метода нуждается в строгом теоретическом обосновании.

Основная теорема схематична. Чтобы лучше разъяснить механизм ее действия, разберем простейшие примеры использования этой теоремы.

Пример 1. Вычислим интеграл*)

$$\int_0^\infty e^{-x/t-t} t^{v-1} dt = \mathcal{K}(x), \quad x > 0. \quad (1.4)$$

Здесь можно положить

$$\mathcal{K}_1(\tau) = e^{-\tau}, \quad \mathcal{K}_2(\tau) = e^{-\tau} \tau^v. \quad (1.5)$$

Из строки 3.1 (1) § 10 базовой таблицы найдем образ первой функции

$$\mathcal{K}_1^*(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx = \Gamma(s), \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (1.6)$$

Этот интеграл носит название *интеграла Эйлера 2-го рода*, а функция $\Gamma(s)$, им определяемая, называется *гамма-функцией*. Ее свойства излагаются в курсе математического анализа [25, 29]. Образ второй функции $e^{-x} x^v$ можно найти из той же строки, если в левой ее части добавить множитель x^v , а в правой заменить s на $s+v$, что обосновывается равенством

$$\mathcal{K}_2^*(s) = \int_0^\infty (e^{-x} x^v) x^{s-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{(v+s)-1} dx = \Gamma(v+s), \quad \operatorname{Re}(v+s) > 0. \quad (1.7)$$

Перемножив эти образы

$$\mathcal{K}^*(s) = \mathcal{K}_1^*(s) \mathcal{K}_2^*(s) = \Gamma(s) \Gamma(s+v) \equiv \Gamma[s, s+v], \quad (1.8)$$

найдем прообраз полученного произведения, записываемого для простоты в виде $\Gamma[s, s+v]$. С этой целью воспользуемся *теоремой Слейтер* (§ 4

*) Пояснения к записи деления через косяк приведены в § 11.

или строка 12.38 § 10), выражающей значение оригинала $\mathcal{H}(x)$ по его известному образу $\mathcal{H}^*(s)$, равному отношению произведений гамма-функций. В рассматриваемом случае *размерности* A, B, C, D и *параметры* a_i, b_k, c_l, d_m , входящие в теорему, принимают значения $A=2, B=C=D=0, a_1=0, a_2=v$. Так как здесь $A+D > B+C, A+B > C+D$, то при соответствующих условиях $\text{Res} > 0, -\text{Rev}$ искомый оригинал равен значению

$$\mathcal{H}(x) = \Sigma_A(x) = x^0 \Gamma(v) {}_0F_1(1-v; x) + x^v \Gamma(-v) {}_0F_1(1+v; x). \quad (1.9)$$

С помощью формул 7.2 (12—13), 1.2 (6) из справочника Г. Бейтмена и А. Эрдейи [2] найденное выражение можно окончательно записать в форме

$$\mathcal{H}(x) = 2x^{v/2} K_v(2\sqrt{x}). \quad (1.10)$$

Этот результат согласуется с табличным ([3], формула 4.5 (29)). Такое же значение интеграла (1.4) через известную *функцию Макдональда* $K_v(z)$ можно получить и сразу из строки 9.3 (1) § 10, показывающей, что образу (1.8) соответствует прообраз (1.10). Интегралы (1.6), (1.7) сходятся, если $\text{Res} > 0, -\text{Rev}$. Так как для любого v найдется такое s , что одновременно выполняются условия $\text{Res} > 0, \text{Res} > -\text{Rev}$, и, следовательно, при этом s могут быть осуществлены все проведенные операции, то параметр v может быть произвольным комплексным. Легко видеть, что интеграл (1.4) сходится при любом v , если $x > 0$. Впрочем, он остается сходящимся и для комплексных x , таких, что $\text{Re} x > 0$, поэтому равенства (1.4), (1.10) можно продолжить и на случай комплексных x , у которых $\text{Re} x > 0$.

Следует отметить, что в соответствии с [3] полученный результат можно рассматривать как вычисление преобразования Меллина от функции $e^{-x/t-t}$ или преобразования Лапласа (8.19) от $e^{-1/\tau} \tau^{-v-1}$.

Пример 2. Вычислим интеграл

$$\int_0^1 t^{v-1} (1-t)^{\mu-1} \sin 2\sqrt{t/x} dt = \mathcal{H}(x), \quad x > 0. \quad (1.11)$$

В соответствии с (1.1) введем обозначения

$$\mathcal{H}_1(\tau) = \sin 2/\sqrt{\tau}, \quad \mathcal{H}_2(\tau) = \tau^v (1-\tau)_+^{\mu-1}, \quad \eta_+^{\mu-1} = \begin{cases} \eta^{\mu-1}, & \eta > 0, \\ 0, & \eta \leq 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Образы этих функций могут быть найдены из строк 3.2 (6) и 2.2 (1) § 10. Причем в последней добавление множителя x^v к функции $(1-x)_+^{\alpha-1}$ влечет замену s на $s+v$ в ее образе:

$$\mathcal{H}_1^*(s) = \sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2-s \\ s+1 \end{matrix} \right], \quad |\text{Re } s| < \frac{1}{2}; \quad \mathcal{H}_2^*(s) = \Gamma(\mu) \Gamma \left[\begin{matrix} s+v \\ s+v+\mu \end{matrix} \right], \quad (1.13)$$

$$\text{Re } \mu > 0, \quad \text{Re}(s+v) > 0.$$

Перемножив эти отношения из двух Γ -функций от s , получим образ интеграла (1.11) в виде произведения отношений гамма-функций от s на постоянный множитель:

$$\mathcal{H}^*(s) = \sqrt{\pi} \Gamma(\mu) \Gamma \left[\begin{matrix} s+v, 1/2-s \\ s+v+\mu, s+1 \end{matrix} \right]. \quad (1.14)$$

Прообраз $\mathcal{H}(x)$ этого выражения можно найти по теореме Слейтер. Здесь $A = B = 1$, $C = 2$, $D = 0$, $a_1 = v$, $b_1 = 1/2$, $c_1 = v + \mu$, $c_2 = 1$, $A + D < B + C$, $A + B = C + D$. Поэтому при условиях $-\operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 1/2$, $2 \operatorname{Re} s > -1 - \operatorname{Re} \mu$, $\operatorname{Re} \mu > 0$ имеем

$$\mathcal{H}(x) = \sqrt{\pi} \Gamma(\mu) \Sigma_B(1/x) = \sqrt{\pi} \Gamma(\mu) x^{-1/2} \Gamma \left[\begin{matrix} v + 1/2 \\ v + \mu + 1/2, 3/2 \end{matrix} \right] \times \\ \times {}_1F_2 \left(\begin{matrix} v + 1/2; -1/x \\ v + \mu + 1/2, 3/2 \end{matrix} \right). \quad (1.15)$$

Это же значение получается из таблиц ([3], 13.1 (29)), а также из таблиц интегралов И. С. Градштейна и И. М. Рыжика [7] (формула 3.771 (3)), если в последней произвести замену $x_1 = u \sqrt{t}$, $au = 2/\sqrt{x}$. Пересечение условий (1.13), накладываемых на действительные части параметров, приводит к указанным в [7] ограничениям $\operatorname{Re} \mu > 0$, $\operatorname{Re} v > -1/2$, при которых найдется значение $\operatorname{Re} s$, удовлетворяющее всем требованиям (1.13).

Формулы (1.11), (1.15) можно получить также с помощью строки 12.10 (4) § 10 как прообраз функции (1.14), положив там $a = v + 1/2$, $\gamma = 3/2$, $c = v + \mu + 1/2$ и заменив s на $s - 1/2$. Если в формулах (1.11) и (1.14) поменять μ на $v + 1/2$ и v на $1/2$, то прообраз такого частного образа (1.14) можно представить и в другой форме через функцию Струве $\mathbf{H}_\nu(z)$, воспользовавшись строкой 9.5 (3) § 10. Так получается формула 3.771 (6) из [7].

Заменив в (1.11), (1.14) μ на $v + 1/2$ и v на 1 , получим в результате сокращения $\Gamma(s + 1)$ значение образа (1.14) в виде $\sqrt{\pi} \Gamma(v + 1/2) \times \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2 - s \\ s + v + 3/2 \end{matrix} \right]$. В соответствии с теоремой Слейтер оригиналом для такого образа служит функция

$$\sqrt{\pi} \Gamma(v + 1/2) x^{-1/2} [\Gamma(v + 2)]^{-1} {}_0F_1(v + 2; -1/x) = \\ = \sqrt{\pi} \Gamma(v + 1/2) x^{v/2} J_{v+1}(2/\sqrt{x}), \quad (1.16)$$

которая, впрочем, может быть найдена и из строки 9.2 (5) § 10 заменой v на $v + 1$ и s на $s + v/2$. Из условий (1.13), накладываемых на параметры μ , v , в этом случае остается лишь ограничение $\operatorname{Re} \mu = \operatorname{Re}(v + 1/2) > 0$, которое также фигурирует в формуле 3.771 (11) из [7], сводящейся к (1.11), (1.16) при $v = 1$, $\mu = v + 1/2$.

Отметим, что к произведению (1.14) сводится также образ другого интеграла. Этот интеграл можно сконструировать, выделив из (1.14) два множителя, но уже другим способом: $\Gamma \left[\begin{matrix} s + v \\ s + 1 \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2 - s \\ s + v + \mu \end{matrix} \right]$. Вычислив прообразы этих функций из строк 2.2 (1), 9.2 (5) § 10: $[\Gamma(1 - v)]^{-1} x^v (1 - x)_+^{-v}$, $x^{(\mu+v)/2-3/4} J_{v+\mu-1/2}(2/\sqrt{x})$, при условиях $\operatorname{Re} v < 1$ и $-\operatorname{Re} v, -1/2 \times \operatorname{Re}(v + \mu) < \operatorname{Re} s < 1/2$ составим другой интеграл вида (1.1), значение которого совпадает с (1.15). После замены $v + \mu - 1/2 = \alpha$, $v = 1 - \beta$ этот интеграл принимает следующую форму:

$$\int_0^1 t^{(1-\alpha)/2-\beta} (1-t)^{\beta-1} J_\alpha(2\sqrt{t/x}) dt = \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} \beta, 3/2 - \beta \\ \alpha + 1 \end{matrix} \right] x^{-\alpha/2} {}_1F_2(3/2 - \beta; \alpha + 1, 3/2; -1/x), \quad (1.17)$$

$$0 < \operatorname{Re} \beta < 3/2.$$

Достаточное условие $\operatorname{Re} \alpha > -3/2$, при котором он выводился, можно опустить, так как величина α не влияет на его сходимость. Этот интеграл отсутствует в весьма полных таблицах [3, 7]. При $\alpha = 1/2$ он совпадает со значением (1.11), (1.15), где следует выбрать $\mu = 1 - \nu = \beta$.

Разобранные примеры убедительно иллюстрируют совпадение результатов вычисления отдельных интегралов настоящим методом с известными значениями этих интегралов. Приведем еще пример вычисления интеграла, отсутствующего в таблицах [3, 7].

Пример 3. Покажем, что

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} t^{\nu-1} (t-1)^{\mu-1} \sin 2\sqrt{t/x} dt &= \mathcal{H}(x) = \\ &= 2\Gamma\left[\begin{matrix} \mu, 1/2 - \nu - \mu \\ 1/2 - \nu \end{matrix}\right] x^{-1/2} {}_1F_2\left(\begin{matrix} \nu + 1/2; -1/x \\ 3/2, \nu + \mu + 1/2 \end{matrix}\right) + \\ &+ \sqrt{\pi} \Gamma\left[\begin{matrix} \nu + \mu - 1/2 \\ 2 - \nu - \mu \end{matrix}\right] x^{\nu+\mu-1} {}_1F_2\left(\begin{matrix} 1 - \mu; -1/x \\ 3/2 - \nu - \mu, 2 - \nu - \mu \end{matrix}\right), \\ &\operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re}(\mu + \nu) < 3/2. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Умножив прежнее $\mathcal{H}_1^*(s)$ (1.13) на значение образа

$$\mathcal{H}_2^*(s) = \Gamma(\mu) \Gamma\left[\begin{matrix} 1 - \nu - \mu - s \\ 1 - \nu - s \end{matrix}\right], \operatorname{Re} \mu > 0, \operatorname{Re}(s + \mu + \nu) < 1, \quad (1.19)$$

функции $\mathcal{H}_2(\tau) = \tau^{\nu} (\tau - 1)^{\mu-1}_+$, которое находится из строки 2.2 (3) § 10 заменой s на $s + \nu$, $\alpha = \mu$, получим

$$\mathcal{H}^*(s) = \sqrt{\pi} \Gamma(\mu) \Gamma\left[\begin{matrix} 1/2 - s, 1 - \nu - \mu - s \\ s + 1, 1 - \nu - s \end{matrix}\right]. \quad (1.20)$$

Прообраз этого значения может быть найден по теореме Слейтер при $A=0, B=2, C=D=1$. Он равен выражению, стоящему в (1.18) справа. Ограничения на параметры, выводимые из пересечения условий сходимости интегралов (1.3), обеспечивают условную сходимость интеграла (1.18) на ∞ и его абсолютную сходимость при $t=1$.

Положив в (1.18) $\mu = \nu + 1/2, \nu = 1/2$ и воспользовавшись свойством $\Gamma(0) = \infty$ и формулой 7.2 (3) из [2], получим значение правой части в виде $\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2) x^{\nu/2} J_{-\nu}(2/\sqrt{x})$, $|\operatorname{Re} \nu| < 1/2$. Подставив в (1.18) $\mu = \nu + 1/2, \nu = 1$ и воспользовавшись формулой 7.2 (4) из [2], найдем значение правой части в виде $\sqrt{\pi} \Gamma(\nu + 1/2) x^{\nu/2} Y_{-\nu-1}(2/\sqrt{x})$ при $-1/2 < \operatorname{Re} \nu < 0$ (последнее можно вывести и из строки 9.4 (3) § 10). Эти частные значения интеграла (1.18) совпадают с выражениями 13.2 (22—23) из [2] и 3.771 (7,11) из [7].

Отметим, что при $\mu + \nu = 1/2$ в правой части (1.18) возникает неопределенность (так называемый логарифмический случай). Однако так как левая часть непрерывна, то эту неопределенность можно раскрыть по непрерывности (§ 4, 7). Вычисленные значения интегралов (1.11), (1.18) в соответствии с [3] можно рассматривать как значения преобразований Меллина, Фурье или интегралов дробного порядка (§ 11) от соответствующих функций.

Эти и другие более сложные примеры, разобранные в § 7, показывают большую эффективность, универсальность и точность настоящего метода. Для достаточно популярного и замкнутого изложения его теории нам понадобится ряд вспомогательных сведений, которые не всегда подробно отражаются в вузовских курсах математики.

§2. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

При доказательстве основной теоремы и при изложении теории специальных функций гипергеометрического типа широко используется аппарат аналитических функций комплексного переменного и основные элементы теории интегральных преобразований Фурье и Меллина. Для большей доступности книги широкому кругу читателей в этом параграфе приводится вся необходимая в дальнейшем вспомогательная информация общего характера, причем в относительно простых случаях даны соответствующие доказательства.

Для первоначального ознакомления с теорией аналитических функций читателю можно рекомендовать учебники [25, т. 3; 30] или пособия [18, 28, 4], а для более углубленного — [12, 22]. Элементы теории преобразований Фурье и Меллина излагаются в книгах [9, 12, 14], а более подробно — в монографиях [26, 8]. Отметим еще справочник [15], в котором читатель может найти информацию по многим направлениям анализа, в том числе и по названным.

1. Аналитические функции. Обозначим через z комплексную переменную, через $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, $r = |z|$, $\varphi = \arg z$ — соответственно ее действительную и мнимую части, модуль и аргумент:

$$z = x + iy = re^{i\varphi} = r \cos \varphi + ir \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \bar{z} = x - iy, \quad i = \sqrt{-1}. \quad (2.1)$$

О п р е д е л е н и е [18]. Пусть в открытой области D из плоскости xy задана функция f комплексного переменного z :

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad z = x + iy \in D, \quad (2.2)$$

где u и v — некоторые вещественные функции точек области D , именуемые соответственно *действительной* и *мнимой частями* $f(z)$. Комплексное число A называется *пределом функции* f в конечной точке z_0 , принадлежащей замкнутой области $\bar{D}$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_\varepsilon > 0$, что для всех точек $z \in D$, $z \neq z_0$, находящихся от z_0 на расстоянии, меньшем δ_ε , то есть $0 < |z - z_0| < \delta_\varepsilon$, имеет место неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$. Для обозначения предельного соотношения между $f(z)$ и A используется обычный символ: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$.

В дальнейшем будем полагать, что в точках z_0 , где существует конечный предел $f(z)$, значением функции f выбран этот предел: $f(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$, то есть будем считать, что $f(z)$ в таких точках *доопределена по непрерывности*. Несложно убедиться в том, что последнее равенство эквивалентно следующим двум соотношениям: $u(x_0, y_0) = \lim u(x, y)$ и $v(x_0, y_0) = \lim v(x, y)$ при $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$, то есть для непрерывности комплексной функции $f(z)$ необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части в соответствующих точках были непрерывными функциями двух действительных переменных x и y .

Условия дифференцируемости функции комплексного переменного выгля-

дят иначе: для существования производной такой функции $f(z)$ недостаточно дифференцируемости ее двух действительных составляющих $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Однако при выполнении некоторых дополнительных условий (Коши—Римана) существует не только первая производная, но и производные любых порядков, а функция разложима в ряд Тейлора. Эти свойства характерны для так называемых аналитических функций комплексного переменного.

Определение. Функция $f(z)$, $z \in D$, называется *аналитической в области D* , если она дифференцируема в каждой точке этой области, то есть для любого $z \in D$ существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z), \quad \Delta f = f(z + \Delta z) - f(z), \quad \Delta z = \Delta x + i\Delta y, \quad (2.3)$$

называемый *производной функции f в точке z* .

Пусть в точке $z \in D$ существует производная $f'(z)$. Предел (2.3) не должен зависеть от способа приближения приращения Δz к нулю. Поэтому различные пути подхода к точке z не должны влиять на значение производной. Выберем наиболее простые способы стремления Δz к 0: по прямой, параллельной действительной оси (когда $\Delta z = \Delta x$), и по прямой, перпендикулярной этой оси (когда $\Delta z = i\Delta y$). Тогда получим равенство

$$f'(z) = u_x + iv_x = 1/i(u_y + iv_y),$$

из которого следуют упомянутые *условия Коши — Римана*:

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x, \quad (x, y) \in D. \quad (2.4)$$

Последние соотношения являются не только необходимыми условиями, но и входят важным элементом в достаточные условия аналитичности функции $f(z)$. Точнее, справедлива следующая

Теорема 1 (критерий аналитичности). Для аналитичности функции $f(z)$, $z = x + iy$, в области D необходимо и достаточно, чтобы ее действительная и мнимая части $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемыми в области D функциями двух действительных переменных x и y и чтобы их частные производные удовлетворяли условиям Коши — Римана (2.4).

Доказано (теорема Коши), что аналитическая в области функция обладает производными любого порядка и разлагается в степенной ряд Тейлора в соответствующей окрестности каждой точки области:

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < R. \quad (2.5)$$

Последнее свойство иногда кладут в основу равносильного определения аналитичности.

Примером аналитической функции является функция

$$\begin{aligned} w = f(z) &= \frac{1}{1-z} = \frac{1-\bar{z}}{(1-z)(1-\bar{z})} = \frac{1-x}{(1-x)^2 + y^2} + \\ &+ i \frac{y}{(1-x)^2 + y^2} = u + iv. \end{aligned} \quad (2.6)$$

По критерию (2.4) она аналитична в плоскости z всюду, кроме точки $z=1$, где обращается в бесконечность 1-го порядка. Сумма ряда Тейлора

этой функции в окрестности точки $z=0$ совпадает с суммой *бесконечно убывающей геометрической прогрессии* со знаменателем z :

$$f(z) = (1 - z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, \quad |z| < 1. \quad (2.7)$$

Причем область сходимости последнего ряда является единичным кругом $|z| < 1$, граница которого содержит особую точку $z=1$ функции $f(z)$. Поэтому равенство (2.7) справедливо лишь в круге $|z| < 1$, где ряд сохраняет сходимость.

Однако функцию $f(z) = (1 - z)^{-1}$ можно разлагать в ряд Тейлора и в окрестностях других точек $z = z_0 \neq 1$ или $z = \infty$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - z_0)^{-k-1} (z - z_0)^k, \quad f(z) = - \sum_{k=0}^{\infty} (1/z)^{k+1}. \quad (2.8)$$

Последние ряды сходятся соответственно в круге $|z - z_0| < |1 - z_0|$ и области $|z| > 1$. Таким образом, правые части формул (2.8) совпадают между собой (как и левые), если z принадлежит общей части названных областей.

В связи со сказанным возникают следующие вопросы. Допустим, что сумма $(1 - z)^{-1}$ рядов (2.7), (2.8) нам неизвестна. Можно ли утверждать, что все эти три ряда представляют собой разложения одной и той же аналитической функции, но в окрестностях разных точек? При каких условиях это свойство справедливо в отношении к произвольным рядам? И как от одного разложения перейти к другому, если сумма ряда неизвестна? Ответы на эти вопросы могут быть получены с помощью теоремы единственности и методов так называемого аналитического продолжения.

Т е о р е м а 2 (единственности аналитической функции). *Если аналитические в области D функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ равны между собой на некотором множестве $E \subset D$, имеющем по крайней мере одну предельную точку z_0 , лежащую внутри области D , то $\varphi(z) = f(z)$ всюду в области D .*

О п р е д е л е н и е. Пусть в области D_1 плоскости комплексного переменного z задана аналитическая функция $f_1(z)$, а D_2 является некоторой другой областью, пересекающейся с первой по части $d = D_1 \cap D_2$. Если существует аналитическая в D_2 функция $f_2(z)$, совпадающая с $f_1(z)$ в области d , то говорят, что $f_2(z)$ — *аналитическое продолжение* $f_1(z)$ из области D_1 в область D_2 через общую часть d этих областей.

Из теоремы 2 единственности вытекает, что *если существует аналитическое продолжение, то оно единственно.*

Стандартный метод аналитического продолжения заключается в следующем. Пусть функция $f(z)$ разлагается в ряд Тейлора, сходящийся в некотором круге $|z - z_0| < R$. Тогда для каждой точки z_1 этого круга известны значения $f(z_1)$, $f'(z_1)$, $f''(z_1)$, ... По ним можно построить другой ряд Тейлора в окрестности точки $z = z_1$, сходящийся внутри круга $|z - z_1| < R_1$ некоторого радиуса R_1 . Этот круг может выходить за пределы первого. Таким образом, мы получим аналитическое продолжение функции $f(z)$ в некоторую часть плоскости за пределы первого круга. Такие построения могут быть осуществлены не только в окрестности каждой точки z_1 из круга $|z - z_0| < R$, но и в окрестностях всех точек z_{j+1} вновь образуемых кругов $|z - z_j| < R_j$, $j = 1, 2, 3, \dots$ Указанный процесс продолжается до тех пор, пока не будет получена область, за которую функцию $f(z)$ аналитически продолжить нельзя. Такая область называется *естественной* (или *полной*) *областью существования аналитической функции*, а построенная в результате изложенного процесса аналитическая функ-

ция называется *полной аналитической функцией*. Вообще говоря, полная функция может быть неоднозначной.

Из сказанного следует, что ряды (2.8) осуществляют аналитическое продолжение суммы ряда (2.7) в окрестность точек $z = z_0 \neq 1$ и $z = \infty$.

Примером аналитически непродолжаемой функции является функция определяемая рядом $\sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k}$. Этот ряд сходится в круге $|z| < 1$, граница которого содержит всюду плотное множество особых точек суммы ряда, и поэтому аналитически продолжить такую функцию через естественную границу $|z| = 1$ нельзя.

Теорему 2 можно использовать для аналитического продолжения действительной аналитической функции действительного аргумента.

Определение. Заданная на отрезке $a \leq x \leq b$ действительная однозначная функция $f(x)$ называется *аналитической*, если в некоторой окрестности $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ каждой точки $x_0 \in [a, b]$ она представляется в виде суммы *степенного ряда* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ с действительными коэффициентами.

Чтобы осуществить аналитическое продолжение $f(x)$ с отрезка $[a, b]$ заменим в последнем ряде x на z : $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - x_0)^k$. Радиус сходимости полученного ряда будет не меньше, чем δ . Его сумма определяет аналитическую в круге $|z - x_0| < \delta$ функцию, значение которой при $z = x$ совпадает с $f(x)$, поэтому такую функцию естественно обозначить через $f(z)$ и назвать аналитическим продолжением функции $f(x)$ с интервала $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Воспользовавшись стандартным методом аналитического продолжения, функцию $f(z)$ можно аналитически распространить вплоть до ее естественных границ.

Пример 1. Функция e^z может быть определена как сумма всюду сходящегося ряда $\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k!$, получаемого из $\sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ заменой x на z . Если аналогичные замены осуществить в рядах для функций $\cos x$ и $\sin x$ и сравнить все эти три ряда, то несложно вывести известные *тождества Эйлера*, связывающие показательную и тригонометрические функции

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (2.9)$$

Ряды, определяющие последние функции, всюду сходятся, то есть эти функции аналитичны во всех конечных точках плоскости. Такие *аналитические во всей плоскости функции называются целыми*.

Пример 2. Интеграл Эйлера (1.6), оставаясь сходящимся при комплексных s , лежащих в полуплоскости $\text{Res} > 0$, дает возможность распространить гамма-функцию $\Gamma(s)$ с интервала $(0, \infty)$ оси $\text{Im}s = 0$ на полуплоскость $\text{Res} > 0$.

Из теоремы единственности вытекает следующий

Принцип консерватизма функциональных соотношений для аналитических функций ([15], гл. 7.8). *Если аналитическая в области D функция $f(z)$ удовлетворяет некоторому функциональному соотношению, в частности дифференциальному уравнению, то этому же соотношению удовлетворяет и аналитическое продолжение функции $f(z)$. В частности, если в области D установлено равенство $f(z) = \varphi(z)$, то оно сохраняет*

силу и в более широкой области $D^* \supset D$, для которой обе части равенства остаются аналитическими функциями. Утверждение остается верным и в случае, когда $f(z) = \varphi(z)$ на некотором отрезке из области D^* .

Этот принцип в дальнейшем будет неоднократно применяться.

Интеграл от функции комплексного переменного $f(z)$, заданной на простой ориентированной кривой C , определяется обычным способом Римана через конечный предел:

$$\lim_{\max |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k = \int_C f(z) dz, \quad (2.10)$$

где z_k ($k = 0, 1, \dots, n$) — произвольные точки кривой C , причем z_0 и z_n — ее концы; $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а ζ_k — произвольная точка, лежащая на участке $[z_{k-1}, z_k]$ кривой C .

Этот криволинейный интеграл существует, если C — кусочно-гладкая кривая, а $f(z)$ — кусочно-непрерывная и ограниченная функция. Несложно установить, что интеграл (2.10) обладает обычными свойствами криволинейных интегралов 2-го рода от вещественных функций и может быть выражен через них по формуле

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u dx - v dy) + i \int_C (v dx + u dy). \quad (2.11)$$

Оказывается, контурный интеграл (2.10) вдоль кривой C от аналитической функции не зависит от формы кривой, а зависит лишь от положения ее концов и вида интегрируемой функции. Поэтому для замкнутых кривых C он равен нулю. Точнее, справедлива следующая

Теорема 3 (Коши). *Если функция $f(z)$ аналитична в односвязной ограниченной области D , то для всех кривых C , лежащих в этой области и имеющих общие концы, интеграл (2.10) имеет одно и то же значение. В случае замкнутой кривой C он равен нулю. Если C совпадает с границей D , а функция f аналитична в D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$, то и в этом случае интеграл (2.10) равен нулю.*

Доказательство сводится к применению известной теоремы из математического анализа ([29], п. 601) об условии, при котором выражение $Pdx + Qdy$ является полным дифференциалом. В самом деле, подставив в (2.10) $f(z) = u + iv$, $dz = dx + idy$, легко получим равенство (2.11). Так как в области D функция $f(z)$ аналитична, то она имеет там непрерывную производную и выполняются условия Коши — Римана (2.4). Поэтому действительные выражения, стоящие в скобках под интегралами (2.11), будут полными дифференциалами некоторых функций (для них выполняется упомянутое условие полного дифференциала $Q_x = P_y$, где $P = u$, $Q = -v$ или $P = v$, $Q = u$). Отсюда следуют все утверждения теоремы для правой части равенства (2.11).

З а м е ч а н и е. Теорема Коши позволяет произвольным образом изменять контур C по области аналитичности функции f , не допуская при этом пересечения контуром точек, в которых нарушается аналитичность этой функции. При таких вариациях контура C величина интеграла (2.10) сохраняется.

Справедлива следующая обратная к теореме Коши

Теорема 4 (Морера). *Если функция $f(z)$ непрерывна в односвязной области D и интеграл $\int_C f(z) dz$ по любому замкнутому контуру C , лежащему в D , равен нулю, то $f(z)$ аналитична в этой области.*

Определяющая роль в теории аналитических функций принадлежит особым точкам, то есть точкам, в которых нарушается аналитичность

полной функции. По существу, в этих точках заложена вся основная информация об аналитических функциях. Показано (теорема Ж. Лиувилля), что *кроме тождественной постоянной не существует аналитической во всей плоскости и ограниченной функции*. Таким образом, все аналитические функции, за исключением постоянных, имеют особые точки. Простейшим типом таких точек являются изолированные особые точки однозначного характера.

О п р е д е л е н и е. Точка z_0 называется *изолированной особой точкой функции* $f(z)$ *однозначного характера*, если существует окрестность $0 < |z - z_0| < R$ этой точки (с исключенной точкой z_0), в которой $f(z)$ аналитична и однозначна. Если существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$, то точка z_0 называется *устранимой особой точкой* (например, $z=0$ у функции $\frac{\sin z}{z}$). Если существует конечный отличный от нуля предел $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) \neq 0$ при $z \rightarrow z_0$ и натуральном n , то точка z_0 называется *полюсом порядка n* (или *n -кратным полюсом*) функции $f(z)$; при $n=1$ полюс называется *простым* (например, в точке $z=1$ функция (2.7) имеет простой полюс). Если не существует ни конечного, ни бесконечного предела $f(z)$ при $z \rightarrow z_0$, то точка z_0 называется *существенно особой*.

Примером существенно особой точки служит точка $z = \infty$ для целых функций $f(z)$, равных e^z , $\cos z$, $\sin z$. Эта точка характеризуется тем, что для любого комплексного числа A (конечного или бесконечного) найдется такая последовательность точек $z_n \rightarrow z_0 = \infty$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = A$ (теорема Ю. В. Сохоцкого). Например, если $z = x \rightarrow +\infty$ (или $-\infty$), то функция $e^z = e^x \rightarrow +\infty$ (или 0).

Пример. Вычислим интеграл от функции $(z - z_0)^k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, взятый по произвольному замкнутому контуру L ($z_0 \notin L$). Покажем, что он всегда равен нулю, за исключением лишь случая, когда $k = -1$, а z_0 находится в области D , ограниченной контуром L :

$$\int_L (z - z_0)^k dz = \begin{cases} 0, & k \neq -1, z_0 \notin L \text{ или } k = -1, z_0 \notin \bar{D}, \\ 2\pi i, & k = -1, z_0 \in D. \end{cases} \quad (2.12)$$

В самом деле, если $z_0 \notin \bar{D}$ или $z_0 \in D$, но $k = 0, 1, 2, \dots$, то функция $(z - z_0)^k$ аналитична всюду в области D и по теореме 3 интеграл (2.12) равен нулю. Если $z_0 \in D$, а $k = -1, -2, \dots$, то в точке $z = z_0 \in D$ подынтегральная функция имеет полюс $|k|$ -го порядка, а в остальных точках она аналитична. Поэтому значение интеграла (2.12) не изменится, если в качестве контура L взять, в частности, окружность радиуса R с центром в точке z_0 , лежащую в области D : $L = L_1 \{z - z_0 = Re^{i\varphi}\}$. Интеграл по этой окружности равен нулю при $k = -2, -3, \dots$, а при $k = -1$ он равен $2\pi i$, о чем свидетельствуют равенства

$$\int_{L_1} (z - z_0)^k dz = \int_0^{2\pi} R^k e^{i\varphi k} (R e^{i\varphi} i d\varphi) = R^{k+1} i \frac{e^{i\varphi(k+1)}}{i(k+1)} \Big|_0^{2\pi} = 0, \quad k \neq -1; \quad (2.13)$$

$$\int_{L_1} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} i d\varphi = 2\pi i, \quad k = -1.$$

Исключительное положение случая $k = -1$ служит основой так называемой *теории вычетов*.

О п р е д е л е н и е. Пусть функция $f(z)$ аналитична в круге $|z - z_0| \leq R$ всюду, кроме его центра $z = z_0$, являющегося особой точкой f однозначного характера. Тогда число, равное значению

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} f(z) dz = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z), \quad L_1: z - z_0 = Re^{i\varphi}, \quad (2.14)$$

называется *вычетом функции $f(z)$ в конечной точке z_0* и обозначается $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$. Предполагается, что окружность L_1 обходится против часовой стрелки (в положительном направлении).

Пусть $f_1(z)$ — аналитическая в круге $|z - z_0| < R$ функция. Тогда в этом круге она представима через ряд Тейлора (2.5). Поделив это равенство на $(z - z_0)^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$, и введя обозначение $f(z) = (z - z_0)^{-n} f_1(z)$, легко получим следующее *представление аналитической функции $f(z)$ в окрестности полюса n -го порядка*:

$$f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad c_k (n + k)! = f_1^{(n+k)}(z_0), \quad c_{-n} \neq 0, \quad 0 < |z - z_0| < R.$$

Несложно убедиться, что *вычет функции $f(z)$ в точке $z = z_0$ равен c_{-1} и находится по формуле*

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} [(z - z_0)^n f(z)] = c_{-1}. \quad (2.15)$$

С помощью понятия вычета из теоремы Коши получается следующая *формула Коши*:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin \bar{D}, \end{cases} \quad (2.16)$$

выражающая значение интеграла Коши в случае, когда $f(\zeta)$ — контурное значение аналитической в области D и непрерывной в $\bar{D}$ функции $f(z)$, а L — граница области D (эта область может быть и многосвязной).

Д о к а з а т е л ь с т в о равенства (2.16) в случае, когда z не принадлежит области $\bar{D}$, следует из аналитичности функции $f(\zeta)/(\zeta - z)$ по переменной ζ всюду в области D . Причем применяемая в этом случае теорема Коши остается справедливой и для многосвязной области D , обходимой по границе L так, что D всегда остается слева.

Если $z \in D$, то аналитичность функции $f(\zeta)/(\zeta - z)$ в области D нарушается лишь в точке $\zeta = z$. Разложив числитель $f(\zeta)$ в ряд Тейлора по степеням $\zeta - z$, легко найдем вычет подынтегральной функции:

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z)}{k!} (\zeta - z)^k, \quad c_{-1} = f(z). \quad (2.17)$$

Теорема Коши и аналитичность подынтегральной функции в остальных точках области D (по переменной ζ) позволяют заменить произвольный контур L в интеграле (2.16) на окружность $L_1: \zeta - z = re^{i\theta}$ достаточно малого радиуса r с центром в точке $\zeta = z$. При этом величина интеграла останется прежней. Так как точка z внутренняя для области D , то всегда найдется такой круг радиуса r , целиком содержащийся в области D .

Подставив в интеграл (2.16) по окружности L_1 разложение (2.17), проинтегрируем полученный ряд почленно (что возможно в силу равномерной сходимости этого ряда в некотором кольце $r - \delta < |z - \zeta| < r + \delta$, $\delta > 0$). По формуле (2.13) все интегралы, кроме первого, обратятся в нуль, а первый даст значение $f(\zeta)$, равное вычету в точке $\zeta = z$.

Формула Коши может быть обобщена на случай, когда подынтегральная функция аналитична в области D всюду, за исключением отдельных изолированных особых точек однозначного характера.

Т е о р е м а 5 (о вычетах). Пусть функция $\varphi(z)$ аналитична во всех точках ограниченной области D , за исключением конечного числа полюсов и существенно особых точек $a_1, a_2, \dots, a_m$, лежащих внутри области D , а при z , стремящихся к границе L области D и $z \in D$, функция $\varphi(z)$ непрерывна. Тогда интеграл от φ по контуру L , деленный на $2\pi i$, равен сумме вычетов функции φ относительно всех ее особых точек, лежащих внутри области D , то есть справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(z) dz = \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{z=a_k} \varphi(z). \quad (2.18)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о аналогично приведенному выше.

Для нахождения вычетов произвольной функции $f(z)$ можно использовать формулу (2.15). Однако в некоторых случаях более удобным является способ, основанный на разложениях функций в ряды, который широко используется в § 7, и поэтому его изложение здесь будет полезным.

Пусть в точке $z = z_0$ функция $f(z)$ имеет полюс n -го порядка. Тогда произведение $f_1(z) = f(z)(z - z_0)^n$ в этой точке аналитично. Разложив его в ряд Тейлора по степеням $z - z_0$, выделим коэффициент при $(z - z_0)^{n-1}$ из этого разложения, который, очевидно, будет равен искомому вычету функции $f(z)$ в полюсе $z = z_0$. Если функция $f_1(z)$ является произведением двух аналитических функций $f_1(z) = f_2(z)f_3(z)$, то для нахождения этого вычета каждый из множителей f_2 и f_3 следует разложить в ряд Тейлора, выделив n его первых членов (до степени $(z - z_0)^{n-1}$ включительно). После перемножения этих рядов для $f_j(z)$ (с учетом n членов) из произведения нужно извлечь коэффициент при $(z - z_0)^{n-1}$, который является искомым вычетом:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f_2^{(k)}(z_0) f_3^{(n-k-1)}(z_0)}{k!(n-k-1)!}. \quad (2.19)$$

Пример. В соответствии с формулами (2.15), (2.19) функция $f(z) = \frac{2z^2 e^z}{(z^2 + 1)(z + 3)^2}$ имеет следующие вычеты: в простых полюсах $z = \pm i$ вычеты равны $\pm i e^{\pm i} (3 \pm i)^{-2}$, а в двойном полюсе $z = -3$ вычет равен $e^{-3} \cdot 1,68$.

Вычет функции $f(z)$ в точке $z = \infty$ определяется через интеграл (2.14), где под L_1 понимается достаточно большая окружность $|z| = R$, проходящая уже по часовой стрелке. Этот вычет равен коэффициенту при z^{-1} из разложения функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$, взятому с обратным знаком. Доказано, что если функция $f(z)$ имеет в полной плоскости (с присоединенной точкой $z = \infty$) конечное число особых точек, то сумма всех ее вычетов, включая и вычет на бесконечности, равна нулю. Применяя эту теорему, несложно определить вычет данной функции на ∞ : $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 5^{-2} [4 \sin 1 - 3 \cos 1 - 42 e^{-3}]$.

До сих пор речь шла об однозначных аналитических функциях. Однако в дальнейшем будут часто встречаться многозначные аналитические функции, простейшими из которых являются *логарифмическая* ($\ln z$) и *степенная функции* (z^γ с нецелым показателем γ). К многозначности этих функций приводит неоднозначность определения аргумента φ комплексного числа $z = re^{i\varphi}$, так как на величину z не оказывает влияния добавление к $\arg z = \varphi$ слагаемых, кратных 2π (в силу $e^{2\pi ki} = 1$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Многозначные функции имеют особые точки $z = z_0$ многозначного характера, называемые еще *точками ветвления*, при обходе которых по замкнутому контуру функция $f(z)$ изменяет свое значение: $f(z_1) \neq f(z_2)$, где $z_1 = z_2$, но $\arg(z_1 - z_0) \neq \arg(z_2 - z_0)$.

Примерами точек ветвления служат точки $z = 0$ и $z = \infty$ для функций

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad z = re^{i\varphi},$$

$$z^\gamma = r^\alpha e^{-\beta\varphi} [\cos(\beta \ln r) + i \sin(\beta \ln r)] e^{i\alpha\varphi}, \quad \gamma = \alpha + i\beta,$$

с нецелым показателем γ . Если положить $z_1 = re^{i\varphi}$, а $z_2 = re^{i(\varphi + 2\pi k)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, то, очевидно, $z_1 = z_2$, но для функции $f(z) = \ln z$: $f(z_2) - f(z_1) = 2\pi ki$, а для $f(z) = z^\gamma$: $f(z_2) = f(z_1) e^{2\pi k\gamma i}$. Ясно, что при нецелом γ значения z_2^γ и z_1^γ , вообще говоря, не совпадают, хотя $z_2 = z_1$. Таким образом, полные функции $\ln z$ и z^γ ($\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) являются многозначными.

Чтобы выделить из них *однозначные ветви*, следует сделать невозможными обходы вокруг точек ветвления $z = 0$ и $z = \infty$. Этого можно добиться, проведя *разрез*, соединяющий точки ветвления, пересекать который нельзя. Для указания выделяемой ветви в одной из точек разрезанной плоскости следует задать некоторое значение функции. Тогда в остальных точках разрезанной плоскости значение выделенной ветви функции может быть однозначно вычислено по непрерывности.

Разрез может иметь произвольную форму, однако чаще всего его берут прямолинейным. Например, если разрез идет по лучу $\arg z = \varphi_0$, $|\varphi_0| < \pi$, то для главных ветвей функций $\ln z$ и z^γ $\varphi_0 \leq \varphi = \arg z < \varphi_0 + 2\pi$, а у других ветвей промежутки изменения $\arg z$ отличаются от $[\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)$ сдвигом на $2\pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ Следует отметить, что число однозначных ветвей функций $\ln z$ и z^γ (с иррациональным или комплексным показателем γ) бесконечно. Если же показатель рациональный ($\gamma = p/q$), то степенная функция имеет q ветвей (p и q взаимно просты).

Рассмотрим два примера использования теории вычетов для вычисления определенных интегралов ([18], п. 74, 3), 4)).

Пример 1. Докажем, что имеет место следующее равенство для интеграла Эйлера:

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1} dx}{1+x} = -\frac{\pi}{\sin \pi s}, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1, \quad (2.20)$$

Для этого рассмотрим вспомогательный интеграл по некоторому замкнутому контуру C :

$$\int_C f(z) dz, \quad f(z) = \frac{z^{s-1}}{1+z} \equiv \frac{e^{(s-1) \ln z}}{1+z}, \quad (2.21)$$

и положим для простоты, что s действительное: $s = \operatorname{Re} s$.

Функция $f(z)$ имеет две точки ветвления: $z = 0$ и $z = \infty$. В рассматри-

ваемом случае в качестве разреза удобно брать положительную часть оси абсцисс $0 < \operatorname{Re} z = x < \infty$, так как вычисляется интеграл от 0 до $+\infty$. Однозначную ветвь функции $f(z)$ зададим равенством $f(x+i0) = x^{s-1}(1+x)^{-1}$, $x > 0$. Вне разреза эта ветвь функции $f(z)$ аналитична всюду, кроме точки $z = -1 = e^{\pi i}$, где она имеет полюс первого порядка с вычетом, находимым по формуле (2.15):

$$\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} (1+z) f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} z^{s-1} = e^{i\pi(s-1)}.$$

Поэтому интеграл (2.21) от этой ветви, взятый по всякому замкнутому контуру C , содержащему внутри точку $z = -1$ и не пересекающему разрез $(0, \infty)$, будет равен $2\pi i e^{i\pi(s-1)}$.

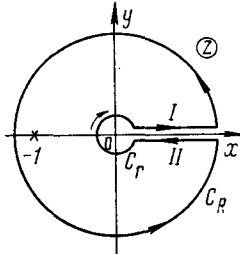


Рис. 1

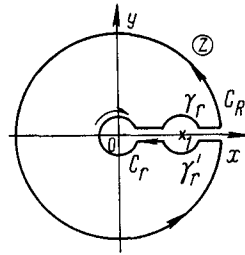


Рис. 2

Возьмем в качестве C контур, изображенный на рис. 1, то есть $C = I \cup C_R \cup II \cup C_r$, где C_R , C_r — окружности радиусов R , r , а I и II — участки берегов разреза. Тогда на верхнем берегу I справедливо равенство $f(x+i0) = x^{s-1}(1+x)^{-1}$, $x > 0$, а на нижнем берегу $f(x-i0) = f(xe^{2\pi i}) = x^{s-1}e^{2\pi i(s-1)}(1+x)^{-1}$, $x > 0$, и направление его обхода противоположно. Таким образом,

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_R} + \int_{C_r} + \int_r^R \frac{x^{s-1}}{1+x} (1 - e^{2\pi i(s-1)}) dx = 2\pi i e^{i\pi(s-1)}. \quad (2.22)$$

Докажем, что $\int_{C_R} \rightarrow 0$, $\int_{C_r} \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, $r \rightarrow 0$, если $0 < s < 1$. В самом деле, справедливы следующие оценки:

$$\left| \int_{C_R} \right| < \int_{C_R} \left| \frac{z^{s-1}}{1+z} \right| |dz| \leq \int_0^{2\pi} R^{s-2} |R i e^{i\varphi}| d\varphi \rightarrow 0, \quad s-1 < 0; \quad (2.23)$$

$$\left| \int_{C_r} \right| < \int_0^{2\pi} \frac{r^{s-1}}{|1+re^{i\varphi}|} r d\varphi < \int_0^{2\pi} r^s d\varphi \rightarrow 0, \quad s > 0.$$

Перейдя в равенстве (2.22) к пределу при $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$ и воспользовавшись формулами Эйлера (2.9), окончательно получим значение (2.20):

$$\int_0^\infty \frac{x^{s-1}}{1+x} dx = \frac{2\pi i e^{i\pi(s-1)}}{1 - e^{2\pi i(s-1)}} = \frac{\pi}{\sin \pi(1-s)}.$$

В силу аналитичности функций (2.20) и сходимости интеграла на отрезке $0 < s < 1$ это равенство можно аналитически продолжить с отрезка на полосу $0 < \operatorname{Re} s < 1$, в которой сходимость интеграла сохраняется (см. принцип консерватизма).

Пример 2. Докажем формулу, выражающую *главное значение особого интеграла*:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{s-1} dx}{1-x} = \pi \operatorname{ctg} \pi s, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1. \quad (2.24)$$

И в этом случае в качестве вспомогательного возьмем интеграл (2.21), но от функции $f(z) = z^{s-1}(1-z)^{-1}$, $s = \operatorname{Re} s$, и по контуру C , указанному на рис. 2. Этот интеграл равен нулю, так как внутри C функция $f(z)$ не имеет особенностей. С другой стороны:

$$\begin{aligned} 0 = \int_C f(z) dz = \int_{\tilde{C}_R} + \int_{\tilde{C}_r} + (1 - e^{2\pi i(s-1)}) \left(\int_r^{1-r} + \int_{1+r}^R \right) \frac{x^{s-1}}{1-x} dx + \\ + \int_{\gamma_r} + \int_{\gamma'_r}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Вдоль полуокружностей γ_r, γ'_r , где $z = 1 = re^{i\varphi}$, имеем $dz = ire^{i\varphi} d\varphi$, где φ меняется соответственно от π до 0 и от 2π до π , причем при $r \rightarrow 0$ $z^{s-1} = 1 + O(r)$, $z^{s-1} = e^{2\pi si} + O(r)$ (так как γ_r и γ'_r находятся на разных берегах разреза). Таким образом*, $\int_{\gamma_r} + \int_{\gamma'_r} = \pi i(1 + e^{2\pi si}) + O(r)$.

Перейдя в (2.25) к пределу при $r \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, в случае $0 < s < 1$ получим равенство $(1 - e^{2\pi si}) \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{1-x} dx + \pi i(1 + e^{2\pi si}) = 0$, откуда с помощью (2.9) найдем искомое значение (2.24).

В дальнейшем будут широко встречаться аналитические функции, определяемые интегралами вдоль неограниченных кривых, точнее, задаваемые несобственными интегралами, зависящими от параметра

$$f(z) = \int_C \psi(z, t) dt, \quad (2.26)$$

где C — неограниченная ориентированная кривая, уходящая в бесконечность. Для простоты ограничимся рассмотрением лишь таких кривых C , у которых всякие конечные отрезки C_l кусочно-гладкие. Будем считать, что на всей кривой C при каждом фиксированном z может находиться лишь конечное число особых точек $t = a_1, a_2, \dots, a_n$ функции $\psi(z, t)$, то есть точек, в которых эта функция обращается в ∞ .

*) Символ $O(r)$, как обычно, обозначает величину, которая при делении на r остается ограниченной (в достаточно малой окрестности точки $r=0$). Другими словами, если $g(r) = O(r)$ при $r \rightarrow 0$, то существует постоянная A такая, что $|g(r)| \leq Ar$ при достаточно малых r ($r \neq 0$). Сказанное выполняется, если, например, $g(r) = r^2$ или $g(r) = r \sin(r^{-1})$ и не имеет места при $g(r) = \sqrt{r}$.

Соотношение $g(r) = o(r)$ при $r \rightarrow 0$ означает, что $r^{-1}g(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$.

Если $t=a_1$ — единственная особая точка, лежащая на участке C_l , то несобственный интеграл по C_l определяется равенством

$$\int_{C_l} \psi(z, t) dt = \lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \left[\int_{C_l'} \psi(z, t) dt + \int_{C_l''} \psi(z, t) dt \right], \quad (2.27)$$

где C_l' , C_l'' — участки кривой C_l , оставшиеся после удаления из C_l некоторой малой окрестности особой точки a_1 , а ε_1 , ε_2 — длины удаленных частей C_l , отсчитываемые от их конца a_1 .

Предположим, что C не имеет конечных особых точек, простирается в бесконечность лишь в одну сторону и a — ее конец. Такую кривую C обозначим через $[a, \infty)$. Пусть C_l означает начальную часть кривой $[a, \infty)$, длина которой l отсчитывается от конца a . Тогда положим по определению

$$\int_C \psi(z, t) dt = \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{C_l} \psi(z, t) dt. \quad (2.28)$$

Если же C не ограничена в обе стороны, то мы определим интеграл по кривой C как сумму интегралов вдоль двух ее частей, на которые кривая C разбивается произвольной точкой $a \in C$.

Когда пределы (2.27), (2.28) существуют и конечны, то говорят, что несобственные интегралы, ими определяемые, сходятся. Примеры сходящихся интегралов, взятых по интервалам действительной оси, уже были рассмотрены.

В общем случае кривая C произвольно разбивается на участки, содержащие лишь по одной особой точке a_k , $k=1, 2, \dots, n$. Интегралы по каждому из участков определяются равенствами типа (2.27), (2.28). Сумма этих интегралов задает интеграл (2.26) по всей кривой C .

В случае, когда интеграл (2.27) расходится, но существует конечный предел (2.27) при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$, связанных дополнительным условием, что удаленная окрестность единственной особой точки a_1 является частью контура C_l , находящейся внутри круга радиуса ε с центром в точке a_1 , последний предел называется *главным значением особого интеграла* (2.27) (см., например, формулу (2.24)).

Как известно из вещественного анализа [29], несобственный интеграл $\int_a^\infty \varphi(x) dx$ от непрерывной функции $\varphi(x)$ абсолютно сходится, если эта функция $\varphi(x) = O(x^{-1-\delta})$, $\delta > 0$, при $x \rightarrow +\infty$, то есть φ на бесконечности имеет степенной порядок убывания выше первого. Это достаточное условие абсолютной сходимости переносится и на интегралы вида (2.26) от комплексных функций. Справедлива следующая

Теорема 6. Пусть $C=[a, \infty)$ — неограниченная кривая, причем длина l каждого конечного участка C_l этой кривой, находящегося в круге радиуса R с центром в a , имеет оценку $l=O(R)$. Если при фиксированном z функция $\psi(z, t)$ непрерывна по t и $|\psi(z, t)| \leq A|t|^{-1-\delta}$, $\delta > 0$, $A = \text{const}$, для больших $|t|$, то интеграл (2.26) при этом z сходится.

Доказательство. Всякая параметрически заданная кривая является образом некоторого действительного интервала. Совершим отображение кривой C на луч $\{0, \infty\}$, введя натуральный параметр l , рав-

ный длине участка C_l . Тогда интеграл (2.26) примет вид $f(z) = \int_0^\infty \psi(z, t(l)) t'(l) dl$. В силу условий, накладываемых на ψ , и соотношения $|t| = O(l)$ последний интеграл на ∞ сходится, что влечет сходимость исходного интеграла (2.26).

Если рассматривается последовательность интегралов вида (2.26) по ограниченным кривым C_n , $n = 1, 2, 3, \dots$, удаляющимся в ∞ , причем длины этих кривых имеют порядок $O(R)$, а функция $\psi(z, t)$ удовлетворяет условиям теоремы 6, то аналогично можно установить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{C_n} \psi(z, t) dt = 0$.

В теории и приложениях большой интерес представляет вопрос об условиях, при которых интеграл (2.26) сохраняет свойства подынтегральной функции по z , в частности ее аналитичность. Важная роль в этих условиях принадлежит понятию «равномерная сходимость».

Определение. Пусть функция $\psi(z, t)$ определена для всех z из области D и для всех t на бесконечном контуре $C = [a, \infty)$. Будем говорить, что интеграл (2.26) *сходится равномерно в области D* , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $l_\varepsilon > 0$, что при всех z из D для любого $l > l_\varepsilon$ оказывается справедливым неравенство $\left| \int_C \psi(z, t) dt - \int_{C_l} \psi(z, t) dt \right| < \varepsilon$.

Аналогично определяется понятие равномерной сходимости интеграла в конечных особых точках $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Имеет место следующая

Теорема 7 ([18], п. 16). *Если функция $\psi(z, t)$ аналитична по z и интегрируема по t на кривой C для всех z из односвязной области D , а интеграл (2.26) сходится равномерно в области D , то он является аналитической в этой области функцией.*

Доказательство основано на применении теоремы 4 Морера. Пусть замкнутый контур $\Gamma \subset D$, тогда равномерная сходимость интеграла (2.26) дает возможность установить его непрерывность по z и поменять порядок интегрирования в следующем интеграле [29]:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} dz \int_C \psi(z, t) dt = \int_C dt \int_{\Gamma} \psi(z, t) dz = 0.$$

Последний интеграл оказывается равным нулю в силу теоремы 3 Коши. Теорема 7 доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из теорем 6 и 7 вытекает следующее утверждение: если функция $\psi(z, t)$ аналитична по z при $z \in D$ и $t \in C = [a, \infty)$ и при всех z из D удовлетворяет условиям теоремы 6, то интеграл (2.26) является аналитической в D функцией от z .

З а м е ч а н и е 2. Рассмотренное понятие интеграла по неограниченной кривой дает возможность распространить теорему 3 Коши на случай неограниченной области D с границей C , простирающейся в ∞ . Справедливо следующее утверждение [12]: *Пусть функция $f(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\bar{D}$, причем $f(z) = o(1/z)$, $z \rightarrow \infty$, $z \in \bar{D}$. Если интеграл $\int_C f(z) dz$ сходится, то он равен нулю.*

З а м е ч а н и е 3. Если подынтегральная функция $\psi(z, t)$ аналитична по z во всей плоскости, то интеграл (2.26) для широкого класса функций $\psi(z, t)$ сохраняет аналитичность в той открытой части D плоскости z , где он сходится, причем граница этой части содержит хотя бы одну особую точку функции $f(z)$.

В качестве иллюстрации к замечанию 3 рассмотрим

П р и м е р гамма-функции $\Gamma(s)$, определяемой интегралом Эйлера (1.6). Покажем, что она аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$.

В самом деле, подынтегральная функция $\psi(s, t) = e^{-t} t^{s-1}$ аналитична по s и интегрируема по $t \in (0, \infty)$ для всех $s \in D = \{s | \operatorname{Re} s > 0\}$, так как $t^s = e^{s \ln t}$ — целая функция переменной s , причем

$$|t^s| = |e^{s \ln t}| = e^{\operatorname{Re} s \ln t} |e^{i \operatorname{Im} s \ln t}| = t^{\operatorname{Re} s}, \quad t > 0, \quad (2.29)$$

и поэтому

$$|\Gamma(s)| \leq \int_0^1 1 \cdot t^{\operatorname{Re} s - 1} dt + \int_1^\infty t^{-b + \operatorname{Re} s - 1} dt < \infty, \quad (2.30)$$

когда $0 < \operatorname{Re} s < b$, где $b > 0$ — произвольная величина (в силу $e^{-t} = o(t^{-b})$, $t \rightarrow +\infty$, $b > 0$). Из оценки (2.30) следует, что интеграл (1.6) сходится равномерно в каждой полосе $0 < a < \operatorname{Re} s < b$ и поэтому является там аналитической функцией. Произвольность границ b и $a > 0$ приводит к заключению, что *Г-функция аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$* . Этот же вывод следует из существования производной $\Gamma'(s)$ гамма-функции при $\operatorname{Re} s > 0$ и определения аналитичности.

Для доказательства возможности аналитического продолжения гамма-функции $\Gamma(s)$ на всю комплексную плоскость s (кроме особых точек $s = 0, -1, -2, \dots$) установим некоторые важные свойства этой функции.

Если значение $\Gamma(s+1)$ преобразовать путем интегрирования по частям

$$\Gamma(s+1) = - \int_0^\infty x^s d(e^{-x}) = -x^s e^{-x} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx = s\Gamma(s), \operatorname{Re} s > 0, \quad (2.31)$$

то получим *формулу понижения* $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, n -кратное применение которой приведет к более общему соотношению:

$$\Gamma(s+n) = (s)_n \Gamma(s), \quad (s)_n = s(s+1)(s+2) \dots (s+n-1), \\ n = 1, 2, \dots, (s)_0 = 1, \quad (2.32)$$

где $(s)_n$ — так называемый *символ Похгаммера*, определяемый этими равенствами. Подставив $s=1$ в (1.6), легко вычислим значение $\Gamma(1)=1$. Приняв его во внимание, из (2.32) при $s=1$ выведем равенство

$$\Gamma(n+1) = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = (1)_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

Эта формула показывает, что *гамма-функция совпадает с факториалом при натуральных значениях ее аргумента s* .

Свойство (2.32), выведенное при условии $\operatorname{Re} s > 0$, можно использовать для аналитического продолжения Г-функции на плоскость s по формуле

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+n)}{(s)_n} = \frac{1}{s(s+1) \dots (s+n-1)} \int_0^\infty e^{-x} x^{s+n-1} dx. \quad (2.34)$$

В самом деле, интеграл справа сходится при $\operatorname{Re} s > -n$ и является там аналитической функцией. Знаменатель также аналитически зависит от s , значит, вся правая часть аналитична при $\operatorname{Re} s > -n$, $n=0, 1, 2, \dots$, $s \neq 0, -1, \dots, 1-n$. Так как при $\operatorname{Re} s > 0$ правая часть совпадает с $\Gamma(s)$, то она может служить для аналитического доопределения Г-функции на случай неположительных значений $\operatorname{Re} s$.

Приняв во внимание, что при $s \rightarrow -k$ ($k=0, 1, 2, \dots, n-1$) знаменатель правой части (2.34) стремится к нулю первого порядка, а числитель не равен нулю, можно заключить, что в точках $s=0, -1, -2, \dots$ *функция $\Gamma(s)$ имеет полюсы первого порядка*. Других особенностей в конечных точках гамма-функция не имеет. Следует отметить, что точка $s=\infty$ является предельной точкой для полюсов гамма-функции, и поэтому поведение $\Gamma(s)$ при $s \rightarrow \infty$ во многом аналогично поведению целой функции на бесконечности (см. § 3, свойства 11, 12).

В заключение рассмотрим полезный для дальнейшего (см. § 7).

Пример вычисления вычета функции $f(s) = \Gamma(s)\Gamma(s-1)z^{-s}$ в точке $s=0$. Несложно заметить, что в точке $s=0$ эта функция имеет полюс второго порядка. Воспользовавшись общей формулой понижения (2.32), запишем $f(s)$ в виде $f(s)s^2 = \Gamma^2(s+1)z^{-s}(s-1)^{-1}$. Для нахождения вычета в соответствии с (2.19) каждую из функций, стоящих справа, разложим в ряд Тейлора по степеням s , ограничившись лишь двумя членами разложения (здесь порядок полюса $n=2$): $\Gamma(s+1) = \Gamma(1) + \Gamma'(1)s + \dots$, $z^{-s} \equiv e^{-s \ln z} = 1 - s \ln z + \dots$, $(s-1)^{-1} = -1 - s - \dots$. При перемножении этих разложений оставим лишь два члена, а остальные отбросим: $f(s)s^2 = -1 + s[\ln z - 2\Gamma'(1) - 1] + \dots$. Таким образом, $\operatorname{res}_{s=0} f(s) = \ln z - 2\Gamma'(1) - 1$. Аналогично можно получить вычеты в остальных двукратных полюсах $s = -k$, $k = 1, 2, 3, \dots$:

$$\operatorname{res}_{s=-k} f(s) = \frac{z^k}{k!(k+1)!} \left[\ln z - \frac{2}{k!} \Gamma'(k+1) - \frac{1}{k+1} \right]$$

и в простом полюсе $s = 1$: $\operatorname{res}_{s=1} f(s) = \frac{1}{z}$.

2. Преобразование Фурье, осуществляемое двойственными формулами

$$F(x) = F\{f(t); x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{itx} dt, \quad (2.35)$$

$$f(t) = F^{-1}\{F(x); t\} = F\{F(x); -t\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ixt} dx, \quad (2.36)$$

возможно, знакомо читателю из вузовского курса математики.

Первая из этих формул отображает заданную функцию $f(t)$ в некоторую функцию $F(x)$, называемую *преобразованием Фурье оригинала* $f(t)$ или его *образом*. *Оператор обратного преобразования Фурье* (2.36) отличается от оператора прямого лишь заменой мнимой единицы $i = \sqrt{-1}$ на $-i$. Он осуществляет обратное отображение образа $F(x)$ в *оригинал* $f(t)$.

Начало теории преобразования Фурье — важнейшего из интегральных преобразований — было положено монографией Фурье «Аналитическая теория теплоты» (1822 г.), в которой было выведено равенство

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos u(x-t) dt, \quad (2.37)$$

называемое сейчас *интегральной формулой Фурье*.

Независимо от Фурье Коши получил эквивалентное соотношение

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixu} du \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iut} dt, \quad (2.38)$$

которое называется *экспоненциальной формой формулы Фурье*. Из него следуют равенства (2.35), (2.36).

Определение. Обозначим через L^C множество вещественных или комплекснозначных функций f вещественного аргумента x , определенных и непрерывных на вещественной оси всюду (кроме, может быть, конечного числа точек), для которых существует конечный несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$. Через $L^C(0, \infty)$ обозначим соответствующий класс функций f , определенных лишь на луче $(0, \infty)$.

Если $f \in L^C$ и $f(x) = 0$, $x < 0$, то $f \in L^C(0, \infty)$. Например, $x^\alpha (1+x)^\beta \in L^C(0, \infty)$ при $-1 < \alpha < -1 - \beta$.

З а м е ч а н и е. Интегральные преобразования обычно рассматриваются в более широких классах L , L_2 , L_p функций, интегрируемых по Лебегу [8, 9, 14, 26]. Так как в дальнейшем встречаются лишь функции, непрерывные всюду, кроме, возможно, отдельных точек, где эти функции могут обращаться в бесконечность, то ограничимся изложением вспомогательных теорем в более узком, чем L , классе L^C .

Из основных свойств преобразований Фурье перечислим лишь следующие.

Т е о р е м а 8 (Римана — Лебега). Если функция $f(x) \in L^C$, то ее преобразование Фурье $F(x)$ (2.35) существует и является ограниченной непрерывной на числовой оси функцией, исчезающей на ∞ : $\lim_{|x| \rightarrow \infty} F(x) = 0$.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что не для каждой непрерывной исчезающей на ∞ функции $F(x)$ существует оригинал $f(x)$ [14]. Чтобы такой оригинал существовал, функция F должна убывать на ∞ достаточно быстро.

Т е о р е м а 9 (об обращении преобразования Фурье). Если $f(x) \in L^C$ является кусочно-дифференцируемой функцией ([29], п. 684), то во всех точках $x=t$, где $f(x)$ непрерывна, справедлива формула (2.36), в которой интеграл на ∞ следует понимать в смысле главного значения по Коши:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-ixt} dx = \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^N F(x) e^{-ixt} dx. \quad (2.39)$$

В точках $x=t$, где $f(x)$ имеет разрывы 1-го рода, справедлива формула, получаемая из (2.36) заменой $f(t)$ на $1/2 [f(t+0) + f(t-0)]$, то есть на среднее арифметическое предельных значений $f(t \pm 0)$ функции f в точке $x=t$.

З а м е ч а н и е. Если интеграл (2.36) существует как несобственный, то его значение совпадает с главным значением. Однако бывает так, что главное значение (2.39) интеграла (2.36) существует, а сам интеграл как несобственный расходится.

О п р е д е л е н и е. Сверткой функций f и g , определенных на всей числовой оси, называется функция

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x-t) dt \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(x-\tau) d\tau. \quad (2.40)$$

Т е о р е м а 10 (о свертке Фурье). Если $f(x)$, $g(x) \in L^C$, то их свертка $(f * g)(x)$ существует и принадлежит L , при этом справедливо равенство

$$F\{(f * g)(t); x\} = F\{f(\eta); x\} \cdot F\{g(\tau); x\}, \quad (2.41)$$

то есть преобразование Фурье свертки равно произведению образов свертываемых функций.

Замечание. Для широкого класса функций $f, g \in L^C$ и функция $(f * g) \in L^C$. Так, например, если еще $g(\tau)$ ограничена, то $(f * g)(x)$ равномерно непрерывна и принадлежит L^C [12].

Остановимся лишь на формальном выводе равенства (2.41):

$$\begin{aligned} F\{(f * g)(t); x\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau \right\} e^{itx} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{i\tau x} d\tau \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) e^{i(t-\tau)x} d(t - \tau) = G(x) \cdot F(x). \end{aligned}$$

Законность перестановки местами двух несобственных интегралов строго устанавливается с помощью *теоремы Фубини* ([8], теорема 1.6; [14], с. 76).

Применив тождества Эйлера (2.9), из общего преобразования Фурье (2.35) можно выделить *косинус- и синус-преобразования Фурье* соответственно четной f_1 и нечетной f_2 составляющих функции f :

$$f(t) \equiv 1/2 [f(t) + f(-t)] + 1/2 [f(t) - f(-t)] = f_1(t) + f_2(t),$$

$$f_k(-t) = (-1)^{k-1} f_k(t), \quad k = 1, 2. \quad (2.42)$$

В самом деле, подставив (2.42) в (2.35) и приняв во внимание, что интегралы по всей оси от нечетных функций $f_2(t) \cos tx$, $f_1(t) \sin tx$ равны нулю, а интегралы от четных функций равны удвоенным интегралам по полуоси, без труда получим представление

$$F(x) = F\{f_1(t) + f_2(t); x\} = F_c\{f_1(t); x\} + iF_s\{f_2(t); x\}, \quad (2.43)$$

где

$$F_c\{f_1(t); x\} = F_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_1(t) \cos txdx, \quad (2.44)$$

$$F_s\{f_2(t); x\} = F_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f_2(t) \sin txdx. \quad (2.45)$$

Формулы *обратных косинус- и синус-преобразований Фурье* выводятся из равенства (2.36) с помощью замены (2.42), (2.43). Они имеют симметричный вид

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_c(x) \cos txdx, \quad (2.46)$$

$$f_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_s(x) \sin txdx. \quad (2.47)$$

Для косинус- и синус-преобразований Фурье как частных случаев общего преобразования Фурье (2.35) теоремы 8, 9 остаются справедливыми, но нуждаются в некотором изменении формулировок. Примеры вы-

числения синус-преобразования были рассмотрены в § 1 (см. (1.11), (1.18)).

3. Преобразование Меллина, определяемое формулой (1.3), получается из преобразования Фурье (2.35) экспоненциальной заменой и поворотом комплексной плоскости на прямой угол:

$$\begin{aligned}\varphi^*(s) &= \mathfrak{W}\{\varphi(\tau); s\} = F\{\sqrt{2\pi} \varphi(e^t); -is\} = \\ &= \int_0^\infty \varphi(\tau) \tau^{s-1} d\tau.\end{aligned}\quad (2.48)$$

Поэтому все результаты, относящиеся к этим преобразованиям, тесно связаны между собой, и для получения теорем об основных свойствах преобразования Меллина достаточно аккуратно осуществить указанные в (2.48) преобразования над теоремами и формулами первого пункта.

Покажем, что формулы (2.35), (2.36), (2.40), (2.41) после «экспоненциальных замен и поворота плоскости на угол $\pi/2$ » принимают соответственно вид (2.48), (2.49), (1.1), (1.2), причем

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \varphi^*(s) \tau^{-s} ds, \quad 0 < \tau < \infty, \quad \operatorname{Re} s = \gamma. \quad (2.49)$$

В самом деле, подставив в (2.35), (2.36), (2.40) вместо $f(t)$ функцию $\sqrt{2\pi} \varphi(e^t)$, заменив переменные $e^t = \tau$, $x = -is$ и функцию $\mathcal{H}_1(\eta) = g(\ln \eta)$, получим равенства

$$F\{\sqrt{2\pi} \varphi(e^t); -is\} = \int_{-\infty}^\infty \varphi(e^t) e^{it(-is)} dt = \int_0^\infty \varphi(\tau) \tau^{s-1} d\tau,$$

$$\sqrt{2\pi} \varphi(e^t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty F(-is) e^{-it(-is)} d(-is),$$

$$(f * g)(\ln x) = (\varphi \circ \mathcal{H}_1)(x) = \int_0^\infty \varphi(\tau) g(\ln x/\tau) d(\ln \tau).$$

Из них следуют соотношения (2.48), (2.49) при $\dot{\gamma} = 0$, а также формула, определяющая *свертку Меллина функций φ и $\mathcal{H}_1$* :

$$(\varphi \circ \mathcal{H}_1)(x) = (\mathcal{H}_1 \circ \varphi)(x) = \int_0^\infty \varphi(\tau) \mathcal{H}_1\left(\frac{x}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau}. \quad (2.50)$$

Если интеграл в преобразовании Меллина (2.48) функции $\varphi(\tau)$ существует при s , у которого $\operatorname{Re} s = \gamma$, то и в формуле (2.49), осуществляющей *обратное преобразование Меллина*, интеграл следует брать по линии $\operatorname{Re} s = \gamma$, параллельной мнимой оси (подробнее об этом говорится в конце параграфа).

Вычисление преобразования Меллина (2.48) от *свертки Меллина* (2.50) также не вызывает технических затруднений:

$$\mathfrak{W}\{(\varphi \circ \mathcal{H}_1)(x); s\} = \int_0^\infty x^{s-1} dx \int_0^\infty \varphi(\tau) \mathcal{H}_1(x/\tau) \tau^{-1} d\tau =$$

$$= \int_0^{\infty} \varphi(\tau) \tau^{-1} d\tau \int_0^{\infty} \tau^s \mathcal{H}_1(x/\tau) (x/\tau)^{s-1} d(x/\tau) = \varphi^*(s) \cdot \mathcal{H}_1^*(s). \quad (2.51)$$

Обозначив в последних формулах $\varphi(\tau) = \mathcal{H}_2(\tau)$, придем к соотношениям (1.1), (1.2).

Следует отметить, что идея двойственности формул (2.48), (2.49) встречается в знаменитом мемуаре Римана о простых числах (1876 г.). Однако строгое обоснование этих соотношений было осуществлено Меллином в работах 1896 и 1902 гг.

После указанных замен теоремы 8–10 в отношении к преобразованию Меллина принимают следующий вид [8, 9, 14, 26]:

Теорема 11 (о существовании преобразования Меллина). Пусть функция $\varphi(x) \in L^c(\varepsilon, E)$, $0 < \varepsilon < E < \infty$, и непрерывна на интервалах $(0, \varepsilon]$, $[E, \infty)$, причем $|\varphi(x)| \leq Ax^{-a}$, $0 < x < \varepsilon$; $|\varphi(x)| \leq Ax^{-b}$, $x > E$, $A = \text{const}$. Тогда для существования полосы из плоскости s , в которой функция $\varphi(x)x^{s-1}$ принадлежит $L^c(0, \infty)$, достаточно, чтобы $a < b$. При выполнении последнего условия преобразование Меллина $\varphi^*(s)$ в вертикальной полосе $\text{Re } s = \gamma$, $a < \gamma < b$, существует, интеграл (2.48) во всякой полосе $a + \delta \leq \text{Re } s \leq b - \delta$, $\delta > 0$, сходится равномерно и поэтому $\varphi^*(s)$ является функцией, аналитической в полосе $a < \text{Re } s < b$.

Теорема 12 (об обращении преобразования Меллина). Пусть $\varphi(x)x^{\gamma-1} \in L^c(0, \infty)$ и в некоторой окрестности $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, точки $y=x>0$ функция $\varphi(y)$ кусочно-дифференцируема, а в точке $y=x$ непрерывна. Тогда в точке x справедлива следующая формула обращения преобразования Меллина (2.48):

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-i\sigma}^{\gamma+i\sigma} \varphi^*(s) x^{-s} ds, \quad \gamma = \text{Re } s, \quad x > 0. \quad (2.52)$$

Если $\varphi(y)$ в точке $y=x$ имеет разрыв 1-го рода, то в левой части (2.52) функцию $\varphi(x)$ следует заменить на выражение $1/2 [\varphi(x+0) + \varphi(x-0)]$.

Теорема 13 (о свертке Меллина). Если $\mathcal{H}_n(x)x^{\gamma-1} \in L^c(0, \infty)$, $n=1, 2$, то свертка $(\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2)(x)$ существует, функция $x^{\gamma-1} (\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2)(x)$ принадлежит $L(0, \infty)$, а для всякого s , у которого $\text{Re } s = \gamma$, преобразование Меллина свертки (1.1) существует и равно произведению образов свертываемых функций (1.2).

Замечание 1. Условия, накладываемые этой теоремой на функции $\mathcal{H}_n(x)$, являются достаточными. Свойство (1.2) сохраняется в некоторых случаях, когда один из интегралов $\mathcal{H}_n^*(s)$ сходится условно или понимается в смысле главного значения.

Замечание 2. Если для каждой функции $\mathcal{H}_n(x)$ выполняются условия теоремы 11 с показателями порядка a_n и b_n , $n=1, 2$, то интервалы (a_1, b_1) и (a_2, b_2) должны пересекаться и γ следует брать из их общей части: $\max(a_1, a_2) < \gamma < \min(b_1, b_2)$. Следствием последнего неравенства являются условия $a_1 < b_2$, $a_2 < b_1$, обеспечивающие сходимость интеграла (1.1) на концах 0 и ∞ .

Доказательство теоремы 11. Разобьем интеграл (2.48) на три интеграла, взятых соответственно по промежуткам $(0, \varepsilon)$, (ε, E) , (E, ∞) , $0 < \varepsilon < 1 < E$, и оценим значение

$$\int_0^{\infty} |\varphi(\tau) \tau^{s-1}| d\tau \leq A \int_0^{\varepsilon} \tau^{-a+\gamma-1} d\tau + \int_{\varepsilon}^E |\varphi(\tau)| \tau^{\text{Re } s-1} d\tau +$$

$$+ A \int_E^{\infty} \tau^{-b+\gamma-1} d\tau = A \frac{e^{\gamma-a}}{\gamma-a} + B + A \frac{E^{\gamma-b}}{b-\gamma} < \infty. \quad (2.53)$$

В этих оценках было использовано свойство (2.29). Последнее равенство из (2.53) может иметь место лишь при условиях $\gamma-a>0$, $\gamma-b<0$, обеспечивающих сходимость крайних интегралов в 0 и на ∞ . Средний же интеграл существует, так как $\varphi \in L^C(e, E)$. Его величина обозначена через B . Таким образом, для существования s , при которых интеграл (2.53) конечен, достаточно, чтобы $a < b$. Тогда для всякого комплексного s , находящегося в вертикальной полосе $a < \operatorname{Re} s = \gamma < b$, интеграл (2.53) сходится, причем эта сходимость является равномерной для каждой внутренней полосы $a+\delta \leq \operatorname{Re} s \leq b-\delta$, $\delta > 0$ (по мажорантному признаку Вейерштрасса). Но так как подынтегральная функция аналитична по s , то равномерная сходимость переносит это свойство на интеграл $\varphi^*(s)$ для всех s , лежащих в полосе $a < \operatorname{Re} s < b$ (теорема 7).

Примерами преобразований Меллина функций e^{-x} и $(1+x)^{-\rho}$ могут служить известные гамма- и бета-функции Эйлера, задаваемые интегралом (1.6) и формулой [2, 29]:

$$B(s, \rho-s) = \int_0^{\infty} (1+\tau)^{-\rho} \tau^{s-1} d\tau. \quad (2.54)$$

Как уже отмечалось и в соответствии с теоремой 11, гамма-функция $\Gamma(s)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$. Поэтому интеграл в обратном преобразовании (2.52) следует брать по прямой из этой полуплоскости:

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma(s) x^{-s} ds, \quad \operatorname{Re} s = \gamma > 0, \quad x > 0. \quad (2.55)$$

Аналогично можно заключить, что интеграл (2.54) существует и является функцией, аналитической в полосе $0 < \gamma = \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \rho$, и в этой полосе обратное преобразование Меллина от левой части (2.54) равно $(1+x)^{-\rho}$.

Следует отметить, что формулы (2.20), (2.24) также можно истолковать как примеры вычисления преобразования Меллина от функций $(1 \pm x)^{-1}$. Некоторые формулы, отражающие общие свойства преобразования Меллина, перечислены в начале § 10. Они непосредственно вытекают из определения (2.48).

Так как в дальнейшем широко используется преобразование Меллина аналитических функций, то будет уместным привести две теоремы, касающиеся этого вопроса.

Теорема 14 (о преобразовании Меллина аналитических функций) ([26], п. 1.29). Пусть $\varphi(z)$, $z = re^{i\theta}$, — функция, аналитическая в секторе $-\alpha < \theta < \beta$, $0 < \alpha \leq \pi$, $0 < \beta \leq \pi$, и пусть $\varphi(z)$ есть $O(|z|^{-a-\delta})$ для малых z и $O(|z|^{-b+\delta})$, $\delta > 0$, для больших z равномерно в любом угле, внутреннем к $-\alpha < \theta < \beta$, причем $a < b$. Тогда функция $\varphi^*(s)$, определенная формулой (2.48), аналитична по s в полосе $a < \operatorname{Re} s < b$ и удовлетворяет условиям

$$\varphi^*(s) = \begin{cases} O(e^{-(\beta-\varepsilon) \operatorname{Im} s}), & \operatorname{Im} s \rightarrow +\infty, \\ O(e^{(\alpha-\varepsilon) \operatorname{Im} s}), & \operatorname{Im} s \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

для всякого $\varepsilon > 0$ равномерно в каждой полосе, внутренней к $a < \operatorname{Re} s < b$, причем имеет место формула (2.49), где $\tau = z$.

Обратно, если $\varphi^*(s)$ — заданная функция, удовлетворяющая указанным условиям, то функция $\varphi(z)$, определенная формулой (2.49), удовлетворяет наложенным на нее ранние условиям и имеет место формула (2.48).

Доказательство. Как следует из теоремы 11, интеграл $\varphi^*(s)$ представляет собой функцию, аналитическую в полосе $a < \operatorname{Re} s < b$. Так как функция $\varphi(z)$ аналитична в секторе, то величина интеграла $\int_0^R \varphi(\tau) \tau^{s-1} d\tau$ не зависит от пути интегрирования, лежащего в этом секторе. Поэтому $\int_0^R \varphi(\tau) \tau^{s-1} d\tau = \int_C \varphi(z) z^{s-1} dz$, где криволинейный контур C состоит из луча $\theta = -\alpha + \varepsilon$, $0 < r \leq R$, и дуги $C_R = \{|z| = R, -\alpha + \varepsilon \leq \theta \leq 0\}$. При $R \rightarrow \infty$ справедлива оценка $\left| \int_{C_R} \varphi(z) z^{s-1} dz \right| = C \left(\int_{-\alpha+\varepsilon}^0 R^{-b+\delta+\operatorname{Re} s} d\varphi \right) \rightarrow 0$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \varphi(\tau) \tau^{s-1} d\tau &= \int_0^\infty \varphi(re^{i\theta}) r^{s-1} dr \cdot e^{i\theta s} \Big|_{\theta=-\alpha+\varepsilon} = \\ &= O(e^{(\alpha-s) \operatorname{Im} s}), \operatorname{Im} s \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Аналогично при $\theta = \beta - \varepsilon$ устанавливается вторая оценка функции $\varphi^*(s)$ на бесконечности. Отметим, что на ∞ в полосе $a < \operatorname{Re} s < b$ функция $\varphi^*(s)$ исчезает, притом экспоненциально, что согласуется с теоремой 8.

Для доказательства двойственной формулы (2.49) применим теорему Коши. В силу равенства (2.56) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma-i0} z^{-s} ds \int_0^\infty \varphi(\tau) \tau^{s-1} d\tau &= \int_0^{\infty e^{i(\varepsilon-\alpha)}} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma} \left(\frac{\tau}{z} \right)^s ds = \\ &= \int_0^{\infty e^{i(\varepsilon-\alpha)}} \left(\frac{\tau}{z} \right)^\gamma \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau (\ln \tau - \ln z)}, \int_{\gamma+i0}^{\gamma+i\infty} \varphi^*(s) z^{-s} ds = \\ &= - \int_0^{\infty e^{i(\beta-\varepsilon)}} \left(\frac{\tau}{z} \right)^\gamma \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau (\ln \tau - \ln z)}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Если эти интегралы по лучам $\theta = -\alpha + \varepsilon$ и $\theta = \beta - \varepsilon$ сложить, то в правой части получится интеграл по границе сектора $-\alpha + \varepsilon < \theta < \beta - \varepsilon$. Совершив в нем замену $\ln \tau = t$ и применив формулу Коши (2.16), несложно вычислить его значение $2\pi i \varphi(z)$. Что и требовалось доказать.

Замечание. Так как функция $\varphi^*(s)$ аналитична в полосе $a < \operatorname{Re} s < b$, то, применив к интегралу $\int_C \varphi(z) z^{s-1} dz$ по прямоугольнику $\Pi[\gamma - iR, \gamma_1 - iR, \gamma_1 + iR, \gamma + iR]$, $a < \gamma < \gamma_1 < b$, $R > 0$, формулу Коши и устремив $R \rightarrow \infty$, несложно установить, что величина интеграла (2.52) не зависит от положения γ в полосе аналитичности.

Это замечание и теорема 14 обосновывают необходимость интегрирования в формуле (2.49) по прямой $\text{Re } s = \gamma$ из полосы аналитичности $\varphi^*(s)$. Отметим также, что из теоремы 14 путем замены переменных несложно вывести аналогичный результат, относящийся к преобразованиям Фурье аналитических функций.

Теорема 15 [12]. Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x > 0$, исчезает на ∞ быстрее любой степени x , а в окрестности точки $x=0$ разлагается в сходящийся ряд $\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{\lambda_k}$, $0 < x \leq \varepsilon$, $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ и $\lambda_n \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$. Тогда преобразование Меллина $\varphi^*(s)$ (2.48) аналитически продолжимо на всю плоскость s , за исключением точек $s = -\lambda_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, в которых $\varphi^*(s)$ имеет полюсы первого порядка.

Доказательство. Разобьем интеграл (2.48) на три части:

$$\varphi^*(s) = \int_0^1 \sum_{k=n}^{\infty} c_k x^{\lambda_k + s - 1} dx + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{s + \lambda_k} + \int_1^{\infty} \varphi(x) x^{s-1} dx.$$

Первое слагаемое правой части аналитично при $\lambda_n + \text{Re } s > 0$, так как интеграл, стоящий там, равномерно сходится в полуплоскости $\text{Re } s \geq -\lambda_n + \delta$ при всяких $\delta > 0$. Второе слагаемое выводится при $\text{Re } s > 0$ после интегрирования отрезка ряда для $\varphi(x)$ по интервалу $(0, 1)$. Оно сохраняет аналитичность при всех $s \neq -\lambda_k$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Третье слагаемое аналитично при всех s , так как $\varphi(x)$ исчезает на ∞ быстрее любой степени x . Поэтому функция $\varphi^*(s)$ аналитична при всех s , кроме точек $s = -\lambda_k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, где она имеет полюсы первого порядка. Что и требовалось установить.

З а м е ч а н и е 1. Положив здесь $c_k = (-1)^{k-1}/(k-1)!$, $\lambda_k = k-1$, получим функцию $\varphi(x) = e^{-x}$, преобразование Меллина которой $\varphi^*(s)$ равно $\Gamma(s)$. Из теоремы 15 следует, что эта функция аналитически продолжима на всю плоскость s , за исключением точек $s = 0, -1, -2, \dots$. Последнее утверждение было установлено выше иным способом.

З а м е ч а н и е 2. Граница полосы сходимости интеграла (2.48) содержит особые точки функции $\varphi^*(s)$. Если допускается любое $b > a$ (то есть можно считать $b = \infty$), то функция $\varphi^*(s)$ аналитична в полуплоскости $\text{Re } s > a$. Это имеет место, когда $\varphi(x)$ убывает на ∞ быстрее любой степени x , то есть, например, когда $\varphi(x) = O(e^{-x^\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$.

§ 3. ГАММА-ФУНКЦИЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

Функция $\Gamma(s)$ в вузовских курсах обычно определяется интегралом Эйлера (1.6) и только при вещественных положительных значениях аргумента s . Вывод различных свойств этой функции и построение ее графика излагаются как пример применения к названному конкретному объекту общей теории несобственных интегралов, зависящих от параметра. В частности, показывается, что Γ -функция, являясь одной из простейших неэлементарных функций, осуществляет естественное распространение факториала на вещественные значения аргумента (2.32), (2.33). Но поскольку факториалы и факториальные образования широко встречаются в теориях степенных рядов и специальных функций, то в конечном итоге отмеченное обстоятельство ставит Γ -функцию в особое положение среди других функций и приводит к необходимости излагать ее теорию исходя из функционального свойства (2.31), которое кладется в основу определения, эквивалентного прежнему [18, 28, 29, 33].

Следует отметить, что само по себе *функциональное свойство* (2.31)

$$f(s+1) = sf(s), \quad f(1) = 1 \quad (3.1)$$

даже с *нормировкой* $f(1)=1$ определяет целый класс аналитических функций, элементом которого является и гамма-функция (1.6). В самом деле, наряду с Γ -функцией всякая функция вида $\Gamma(s)\theta(s)$, где $\theta(s)$ аналитична и периодична с периодом 1 ($\theta(s+1)=\theta(s)$), причем $\theta(1)=1$, также удовлетворяет уравнению (3.1). Поэтому для однозначного выделения гамма-функции из этого класса к условию (3.1) следует добавить еще некоторое дополнительное ограничение, характер которого может существенно меняться. Этот вопрос подробно изучается в работах [29, 33, 37]. Остановимся на доказательстве одной из основных теорем такого рода.

Теорема 16. *Если функция $f(s)$ аналитична, не обращается в нуль и удовлетворяет функциональному уравнению (3.1) для всех комплексных s , а при действительных $s > 0$ логарифмически выпукла, то есть $\ln f(s)$, $s > 0$, является выпуклой функцией, то $f(s) \equiv \Gamma(s)$, другими словами, такую функцию можно представить в виде интеграла Эйлера (1.6) (при $\operatorname{Re} s > 0$).*

Доказательство. Повторным применением (3.1) легко получить равенство

$$f(s+n+1) = (s+n)(s+n-1)\dots(s+1)f(s+1), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.2)$$

Положив здесь $s=0$ и воспользовавшись нормировкой $f(1)=1$, придем к равенству $f(n+1)=n!$, откуда в силу (2.33) утверждение теоремы следует для всех натуральных $s=n$.

Для распространения равенства $f(s) \equiv \Gamma(s)$ со счетного множества $s=n$, $n=1, 2, \dots$, на случай любых действительных $s=a$ достаточно ввиду (3.1) установить его для интервала $0 < a < 1$. Для этого воспользуемся неравенством

$$\frac{\varphi(x_1) - \varphi(x)}{x_1 - x} \leq \frac{\varphi(x_2) - \varphi(x)}{x_2 - x}, \quad x_1 < x_2, \quad (3.3)$$

справедливым для всякой выпуклой функции $\varphi(x)$ при любом x , $\operatorname{Im} x = 0$ ([29], п. 143). Подставим $\varphi(x) = \ln f(x)$ в (3.3) и возьмем в качестве точек x_1, x_2, x сначала значения $n, a+n+1, n+1$, а затем $a+n+1, n+2, n+1$. Приняв во внимание, что $\ln f(n+1) = \ln n!$, получим неравенства

$$\ln n \leq \frac{\ln f(a+n+1) - \ln n!}{a} \leq \ln(n+1).$$

Отсюда после потенцирования приходим к оценкам

$$n^a n! \leq f(a+n+1) \leq (n+1)^a n!, \quad (3.4)$$

которые с помощью формул (3.2), (3.1), (2.32) могут быть записаны в виде

$$f(a) \leq \frac{(n+1)^a n!}{(a)_{n+1}} \leq f(a) \frac{a+n+1}{n+1} \quad (3.5)$$

(для получения последнего неравенства в левой части (3.4) n было заменено на $n+1$).

Так как пределы крайних членов (3.5) при $n \rightarrow \infty$ совпадают с $f(a)$, то для искомой функции $f(a)$ получается следующее представление:

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^a n!}{(a)_{n+1}}. \quad (3.6)$$

Докажем теперь, что такое же представление имеет и функция, определяемая интегралом Эйлера (1.6). Заменив в (1.6) функцию e^{-x} на предел $e^{-x} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - x/n)^n$, $s = a$, а промежуток $0 < x < \infty$ на $0 < x < n$, рассмотрим выражение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{a-1} dx, \quad a > 0. \quad (3.7)$$

Покажем, что этот предел, с одной стороны, равен значению (1.6), а с другой — пределу (3.6). Первое утверждение представляется вполне очевидным, если принять во внимание, что из определения e^{-x} при больших n следует оценка $e^{-x} - (1 - x/n)^n = O(1/n) = O(x^2 e^{-x} / (2n))$, а по определению несобственного интеграла $\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x} x^{s-1} dx$, откуда

$$\left| \int_0^n \left[e^{-x} - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \right] x^{a-1} dx \right| < \frac{1}{n} \int_0^n e^{-x} x^{a+1} dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Для установления равенства пределов (3.6), (3.7) вычислим интеграл

$$\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{a-1} dx = n^a \int_0^1 (1 - \tau)^n \tau^{a-1} d\tau = \frac{n^a n!}{(a)_{n+1}}. \quad (3.8)$$

Приведенное значение получается после n -кратного интегрирования по частям. Отсюда следует равенство пределов (3.6) и (3.8).

Таким образом, для действительных $s > 0$ теорема доказана. Если s лежит в комплексной плоскости, то теорема остается справедливой, так как функции (3.6) ($a=s$) и (1.6) аналитически зависят от s и совпадают при действительных $s > 0$.

Теперь уже теорию Γ -функции можно строить исходя из ее аналитических представлений в виде интеграла Эйлера (1.6) или *предела Эйлера — Гаусса* (3.6) (справедливого и для всех комплексных $a \neq 0, -1, -2, \dots$). Перечислим полученные ранее и приведем некоторые другие

Основные свойства гамма-функции [2, 18, 19, 28, 29]:

1) $\Gamma(s)$ аналитична в комплексной плоскости s всюду, кроме точек $s = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, в которых имеет полюсы первого порядка с вычетами $(-1)^n/n!$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Последнее утверждение следует, если в равенстве (2.34), заменив n на $n+1$, перейти к пределу при $s \rightarrow -n$ и воспользоваться формулой (2.15):

$$\begin{aligned} \operatorname{res} \Gamma(s) &= \lim_{s \rightarrow -n} (s+n) \Gamma(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow -n} \frac{\Gamma(s+n+1)}{(s)_n} = \frac{\Gamma(1)}{-n(-n+1) \dots (-n+n-1)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2) $\Gamma(s)$ удовлетворяет формуле понижения (2.32) и, в частности, при натуральных $s = n + 1$ совпадает с факториалом: $\Gamma(n + 1) = n!$, $\Gamma(1) = 1$.

3) $\Gamma(s)$ однозначно определяется двумя условиями теоремы 16, интегралом Эйлера (1.6) или пределом Эйлера — Гаусса (3.6).

4) $\Gamma(s)$ представима в виде суммы ряда из простейших дробей и целой функции

$$\Gamma(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{1}{s+k} + \int_1^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx. \quad (3.9)$$

В самом деле, разложив интеграл Эйлера (1.6) на сумму двух интегралов по промежуткам $[0, 1]$ и $(1, \infty)$, вычислим первый из них, представив функцию e^{-x} в виде степенного ряда Тейлора:

$$\int_0^1 e^{-x} x^{s-1} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} x^{k+s-1} dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^1 x^{k+s-1} dx. \quad (3.10)$$

Почленное интегрирование допустимо при $\operatorname{Re} s > 0$, так как ряд сходится равномерно при $0 < x < 1$, $\operatorname{Re} s \geq \varepsilon > 0$, а интегралы от его членов существуют. Произведя интегрирование при $\operatorname{Re} s > 0$, придем к формуле (3.9). Эта формула содержит ряд, сходящийся абсолютно и равномерно в каждой замкнутой ограниченной области комплексной плоскости s , не содержащей точек $s = -k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, где знаменатели обращаются в нуль. Поэтому этот ряд представляет собой функцию от s , однозначную и аналитическую в плоскости s всюду, кроме точек $s = -k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, в которых эта функция имеет полюсы первого порядка с вычетами $(-1)^k/k!$.

Значит, разность между $\Gamma(s)$ и этим рядом, равная интегралу $\int_1^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx$, нигде в конечных точках не имеет особенностей и поэтому является целой функцией. Что и требовалось доказать.

5) $\Gamma(s)$ в полосе $-(n+1) < \operatorname{Re} s < -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, представима интегралом Коши — Заальшютца

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \left(e^{-x} - \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k}{k!} \right) x^{s-1} dx, \quad -(n+1) < \operatorname{Re} s < -n. \quad (3.11)$$

Доказательство. Выражение, стоящее в скобках интеграла (3.11), образовано вычитанием из e^{-x} отрезка ее ряда Тейлора, поэтому при $x \rightarrow 0$ оно имеет порядок $O(x^{n+1})$. Значит, интеграл при $x \rightarrow 0$ сходится, если $n+1 + \operatorname{Re} s > 0$. При $x \rightarrow \infty$ интеграл от многочлена сходится, если $n + \operatorname{Re} s < 0$. Тем самым по теореме 7 интеграл в этой полосе является аналитической функцией. Равенство выражений (3.9) и (3.11) в полосе $-(n+1) < \operatorname{Re} s < -n$ устанавливается путем разбиения интеграла (3.11) на два по промежуткам $[0, 1]$ и $(1, \infty)$, использования равенства (3.10) и почленного вычисления интеграла по интервалу $(1, \infty)$.

6) Γ -функция связана с бета-функцией (2.54) формулой

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \quad (3.12)$$

Доказательство. Заменив в интеграле (1.6) переменные $s = \rho$, $x = y(1 + \tau)$, получим значение

$$\Gamma(\rho)(1 + \tau)^{-\rho} = \int_0^{\infty} y^{\rho-1} e^{-y(1+\tau)} dy.$$

Домножив равенство (2.54) на $\Gamma(\rho)$, подставим в его правую часть это значение и, поменяв порядок интегрирования, вычислим внутренний интеграл

$$\begin{aligned} \Gamma(\rho) B(s, \rho - s) &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} y^{\rho-1} e^{-y(1+\tau)} dy \right) \tau^{s-1} d\tau = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-y} y^{\rho-1} dy \int_0^{\infty} e^{-y\tau} \tau^{s-1} d\tau = \Gamma(\rho - s) \Gamma(s). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Поменяв в этом равенстве s на a и $\rho - s$ на b , получим формулу (3.12). Все выкладки можно обосновать при $\operatorname{Re} a > 0$, $\operatorname{Re} b > 0$. Следует отметить, что в силу аналитичности Γ -функции равенство (3.12) можно использовать для аналитического продолжения бета-функции на произвольные значения ее аргументов a и b .

7) Для Γ -функции справедлива формула дополнения

$$\Gamma(s) \Gamma(1 - s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \right). \quad (3.14)$$

Равенство (3.14) следует из формулы (2.54) при $\rho = 1$, если учесть значение интеграла Эйлера (2.20) и связь (3.12) между бета- и гамма-функциями. Подставив в (3.14) $s = 1/2$, получим $\Gamma^2(1/2) = \pi$.

8) Функция $1/\Gamma(s)$ является целой, то есть $\Gamma(s)$ нигде не обращается в нуль.

В самом деле, из формулы (3.14) следует, что

$$\frac{1}{\Gamma(1 - s)} = \frac{\sin \pi s}{\pi} \Gamma(s). \quad (3.15)$$

Правая часть (3.15) аналитична при всех s как произведение аналитических функций, имеющее лишь устранимые особенности при $s = -n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Значит, и левая часть аналитична во всей плоскости s , то есть является целой функцией, а поэтому ее знаменатель $\Gamma(1 - s)$ нигде не обращается.

9) Для гамма-функции справедлива формула умножения Гаусса — Лежандра

$$\Gamma(ms) = m^{ms - \frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1-m}{2}} \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(s + \frac{k}{m}\right), \quad m = 2, 3, 4, \dots, \quad (3.16)$$

принимая при $m = 2$ вид формулы удвоения Лежандра

$$\Gamma(2s) = \frac{2^{2s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(s) \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right). \quad (3.17)$$

Доказательство. Подставив в равенство (3.6) значение $a = s + k/m$, перемножим пределы от $k = 0$ до $k = m - 1$:

$$\Pi(s) = \prod_{k=0}^{m-1} \Gamma\left(s + \frac{k}{m}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n + 1)^{sm + \frac{(m-1)m}{2m}} (n!)^m A^{-1}, \quad (3.18)$$

где $A = (ms)_{m(n+1)} m^{-m(n+1)}$. Заменив в (3.6) a на ms и n на mn , получим равенство

$$\Gamma(ms) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(mn+1)^{ms} (mn)!}{(ms)_{mn+1}}.$$

Отсюда можно вывести соотношение

$$m^{-ms} \frac{\Gamma(ms)}{\Pi(s)} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1+m}{2}} (mn-1)! m^{-mn} (n!)^{-m} = \frac{1}{K}, \quad (3.19)$$

где через $1/K$ обозначена правая часть равенства, не зависящая от s , причем $K > 0$.

Для вычисления постоянной K положим в равенстве (3.19) $s = 1/m$. Таким образом, $\Pi(1/m) = K/m \Gamma(1)$. Возведя это равенство в квадрат и воспользовавшись формулой дополнения (3.14) при перемножении членов вида $\Gamma\left(\frac{1+k}{m}\right) \Gamma\left(\frac{m-1-k}{m}\right)$, получим соотношение

$$K^{-2} = \pi^{1-m} m^{-2} \prod_{k=1}^{m-1} \sin(\pi k/m). \quad (3.20)$$

Для вычисления произведения синусов, следуя Дирихле, рассмотрим тождество

$$z^m - 1 = (z-1)(z - e^{i \frac{2\pi}{m}}) \dots (z - e^{i(m-1) \frac{2\pi}{m}}),$$

откуда в пределе при $z \rightarrow 1$ по правилу Лопиталья найдем

$$\begin{aligned} \left| \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z^m - 1}{z - 1} \right| &= m = \left| \prod_{k=1}^{m-1} (1 - e^{ik \frac{2\pi}{m}}) \right| = \\ &= \prod_{k=1}^{m-1} \left| e^{i \frac{k\pi}{m}} \right| \left| 2i \sin \frac{k\pi}{m} \right| = 2^{m-1} \prod_{k=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi}{m}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Подставив значение $1/K$ из (3.21), (3.20) в равенство (3.19), получим доказываемую формулу (3.16).

10) Γ -функция однозначно определяется как непрерывно дифференцируемое отличное от нуля решение системы функциональных уравнений (2.32), (3.17) [29, 33].

11) При $|s| \rightarrow \infty$ гамма-функция и факториал асимптотически разлагаются по формулам Стирлинга ([29], п. 540):

$$\Gamma(s) = \sqrt{2\pi} s^{s-1/2} e^{-s} \left[1 + \frac{1}{12s} + O(s^{-2}) \right], \quad |\arg s| < \pi,$$

$$n! = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n [1 + O(1/n)]. \quad (3.22)$$

12) При $|s| \rightarrow \infty$ и $|y| \rightarrow \infty$ справедливы равенства ([2], 1.18 (4), (6))

$$\frac{\Gamma(s+a)}{\Gamma(s+b)} = s^{a-b} \left[1 + \frac{(a-b)(a+b-1)}{2s} + O(s^{-2}) \right], \quad |\arg s| < \pi, \quad (3.23)$$

$$|\Gamma(x+iy)| = \sqrt{2\pi} |y|^{x-1/2} e^{-\pi/2|y|} [1 + O(1/y)], \quad |y| \rightarrow \infty, \quad (3.24)$$

где x, y — вещественные величины.

Доказательство получается после применения формулы Стирлинга:

$$\frac{\Gamma(s+a)}{\Gamma(s+b)} = \frac{(s+a)^{s+a-1/2}}{(s+b)^{s+b-1/2}} e^{a-b} [1 + O(1/s)] = s^{a-b} [1 + O(1/s)],$$

$$\begin{aligned} |\Gamma(x+iy)| &= \sqrt{2\pi} |\exp[(x-1/2+iy)(\ln \sqrt{x^2+y^2} + \\ &+ i \operatorname{arctg}(y/x)) - x - iy]| = \sqrt{2\pi} \exp\{(x-1/2)[\ln |y| + O(y^{-2})] - \\ &- y[\pm \pi/2 - x/y + O(1/y^2)] - x\} = \sqrt{2\pi} |y|^{x-1/2} e^{-|y|\pi/2} [1 + O(1/y)], \\ &x > 0, y \geq 0. \end{aligned}$$

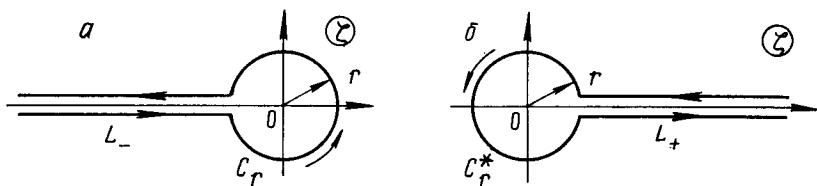


Рис. 3

13) Гамма-функция допускает аналитическое продолжение путем перехода к контурным интегралам Ганкеля:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_-} e^{\zeta} \zeta^{-s} d\zeta, \quad |\arg \zeta| \leq \pi, \quad (3.25)$$

$$\Gamma(s) = \frac{1}{e^{2\pi i s} - 1} \int_{L_+} e^{-\zeta} \zeta^{s-1} d\zeta, \quad (3.26)$$

где контуры L_- , L_+ указаны на рис. 3, а и б.

Доказательство. Очевидно, что контуры $L_{\mp}$ можно стянуть в разрезы от $-\infty$ до 0 и от 0 до $+\infty$. Покажем, что имеются такие области изменения комплексной переменной s , где контурные интегралы (3.25), (3.26) тождественно совпадают с левыми частями этих равенств. Тогда в силу аналитичности всех этих функций равенства сохранятся и для таких значений переменной s , при которых эти функции определены (принцип консерватизма равенств аналитических функций).

В самом деле, если в интеграле (3.25) контур L_- стянуть к участку $(-\infty, -r]$ оси $\operatorname{Im} \zeta = 0$, то в силу условия $|\arg \zeta| \leq \pi$ на верхнем и нижнем берегах разреза будем иметь

$$\zeta^{-s} = e^{-s \ln \zeta} = \exp[-s(\ln |\zeta| \pm i\pi)] = (-\zeta)^{-s} e^{\mp i\pi s}, \quad \operatorname{Im} \zeta = 0.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{L_-} e^{\zeta} \zeta^{-s} d\zeta &= \int_{-\infty}^{-r} e^{\zeta} (-\zeta)^{-s} e^{i\pi s} d\zeta + \int_{\zeta_r}^+ + \int_{-r}^{-\infty} e^{\zeta} (-\zeta)^{-s} e^{-i\pi s} d\zeta = \\ &= (e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}) \int_r^{\infty} e^{-t} t^{(1-s)-1} dt + \int_{\zeta_r} e^{\zeta} \zeta^{-s} d\zeta \xrightarrow{r \rightarrow 0} 2i \sin \pi s \Gamma(1-s) + 0 \quad (3.27) \end{aligned}$$

при $\operatorname{Re}(1-s) > 0$, так как интеграл по окружности $C_r (|\zeta|=r)$ в этом случае стремится к нулю при $r \rightarrow 0$ (см. (2.23)). Применяя к правой части (3.27) формулу дополнения (3.14), получим там значение $2\pi i/\Gamma(s)$, откуда следует предельное выполнение равенства (3.25) в случае $\operatorname{Re} s < 1$. Но так как обе функции целые, то равенство сохраняется при всех s .

Аналогично устанавливается и второе равенство, представляющее гамма-функцию как отношение двух целых функций.

14) График $\Gamma(s)$ при действительных $s=x$ имеет вид, представленный на рис. 4.

15) В соответствующей окрестности любой точки s_0 ($s_0 \neq 0, -1, -2, \dots$) Γ -функция представима по формуле Тейлора

$$\Gamma(s) = \Gamma(s_0) \{1 + \psi(s_0)(s-s_0) + [\psi'(s_0) + \psi^2(s_0)](s-s_0)^2/2! + O[(s-s_0)^3]\}, \quad (3.28)$$

где пси-функция $\psi(z)$ означает логарифмическую производную Γ -функции:

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}. \quad (3.29)$$

Радиус сходимости ряда Тейлора для $\Gamma(s)$ по степеням $(s-s_0)$, получаемого из (3.28) отодвиганием остаточного члена на ∞ , равен расстоянию от

s до ближайшей из особых точек $-n, n=0, 1, 2, \dots$, функции $\Gamma(s)$.

Для доказательства достаточно в обычную формулу Тейлора для $\Gamma(s)$ по степеням $(s-s_0)$ подставить вместо производных от $\Gamma(s)$ значения $\psi(s)$ и ее производных.

16) В окрестности точки $s=-k, k=0, 1, 2, \dots$, Γ -функция имеет следующее разложение по степеням $s+k=\varepsilon$:

$$\Gamma(s) = \frac{(-1)^k}{k! \varepsilon} \times \left\{ 1 + \varepsilon \psi(1+k) + \varepsilon^2 \left[\psi'(1) + \frac{\psi^2(1+k) - \psi'(1+k)}{2} \right] + O(\varepsilon^3) \right\}. \quad (3.30)$$

Доказательство. С помощью (3.14) легко убедиться, что справедливо равенство $\Gamma(s) = \frac{(-1)^k}{\varepsilon} \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(1+k-\varepsilon)}$. Разложив каждую из трех гамма-функций по формуле (3.28) в окрестности точки $\varepsilon=0$ и перемножив эти разложения (с учетом равенства $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \dots$), без затруднений получим соотношение (3.30).

17) Гамма-функция не может удовлетворять никакому линейному дифференциальному уравнению с рациональными коэффициентами (теорема Гельдера) [28].

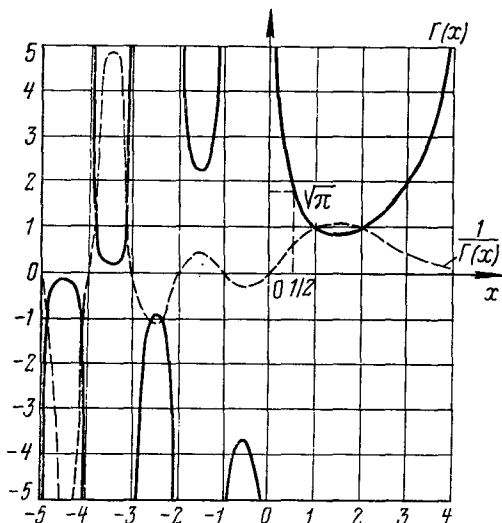


Рис. 4

18) Бета-функция (2.54), связанная с Γ -функцией формулой (3.12), представима интегралом Эйлера 1-го рода

$$B(s, b) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{b-1} dx, \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad \operatorname{Re} b > 0. \quad (3.31)$$

Для доказательства в выражении (2.54) достаточно совершить замену $\tau = x/(1-x)$, $\rho = s + b$.

19) Пси-функция (3.29) имеет простые полюсы в точках $z=0, -1, -2, \dots$ с вычетами, равными -1 , то есть $\psi(z)(z+n) \rightarrow -1$ при $z \rightarrow -n$, $n=0, 1, 2, \dots$

Доказательство легко следует из определения (3.29) и свойства 1.

Кроме перечисленных основных, Γ -функция обладает также и другими менее известными свойствами, полную информацию о которых можно найти в справочнике [2]. Основные свойства Γ -функции широко используются в § 4 при доказательстве теоремы Слейтер, восстанавливающей значение функции $\mathcal{H}(x)$ в случае, когда ее преобразование Меллина $\mathcal{H}^*(s)$ равно отношению произведений Γ -функций (5). Однако уже и сейчас ясно, как выглядят прообразы некоторых таких образов $\mathcal{H}^*(s)$. Например, строки 2.1—2.4, 3.1 § 10 без труда получаются из формул (3.31), (2.54), (3.12), (2.24), (3.14), (1.6), формулы умножения для гамма-функции (3.16) и строк 1.1—1.8 § 10. Действительно, замена $\varphi(\tau)$ на $\varphi(\sqrt[k]{\tau})k^{-1}$ в формуле (2.48) эквивалентна замене там s на ks (что легко проверяется подстановкой $\tau = t^k$). Поэтому образом функции $k^{-1}(1-\sqrt[k]{x})_+^{\alpha-1}$ будет в силу (3.31) функция $B(ks, \alpha)$. Применив к последней формулу (3.12) и формулу умножения (3.16), получим строку 2.2 (2) базовой таблицы. Остальные указанные строки выводятся аналогично.

Строки 4.2, 4.3 могут быть установлены из формул (2.20), (2.24), (3.14), (2.33) путем интегрирования по частям с заменой s на $s+1$.

§4. ФУНКЦИИ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА И ИНТЕГРАЛЫ МЕЛЛИНА—БЕРНСА

Как отмечалось выше, особый интерес для настоящего метода вычисления интегралов представляет правило нахождения функции $\mathcal{H}(x)$, преобразование Меллина $\mathcal{H}^*(s)$ которой является отношением произведений гамма-функций (5) общего вида, или, другими словами, задача вычисления интегралов Меллина—Бернса (7) в тех частных случаях, когда все коэффициенты при s равны единице: $\alpha_i = \beta_j = \gamma_k = \delta_l = 1$. В этом параграфе устанавливается, что такая функция $\mathcal{H}(x)$, вообще говоря, выражается в виде некоторых комбинаций обобщенных гипергеометрических рядов, а точнее, принадлежит к классу функций гипергеометрического типа. О важности этого класса в приложениях и теории специальных функций свидетельствует тот факт, что к нему относится большая часть изучаемых специальных функций. Так, два тома из уникального трехтомного справочника [2] целиком посвящены функциям названного класса и их обобщениям.

1. Обобщенные гипергеометрические функции при частных значениях своих параметров содержат такие простые элементарные функции, как степенная, экспоненциальная, логарифмическая, специальные многочлены, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, и являются естественными аналитическими обобщениями этих элементарных

функций. Для уточнения сказанного рассмотрим подробнее, как можно прийти к понятиям «обобщенная гипергеометрическая функция» и «функция гипергеометрического типа», изучив строение рядов Тейлора для степенной, экспоненциальной и тригонометрических функций.

Как следует из теории аналитических функций, изложенной в § 2, произвольная последовательность комплексных величин $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и фиксированная точка z_0 однозначно определяют некоторую функцию f комплексной переменной, равную сумме ряда

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k (z - z_0)^k. \quad (4.1)$$

Эта функция определена для тех z , при которых ряд (4.1) сходится, то есть указанный предел существует и конечен. Эти z находятся в некотором круге сходимости с центром в точке z_0 : $|z - z_0| < R$. Предположим, что его радиус $R \neq 0$. Тогда в круге $|z - z_0| < R$ функция $f(z)$ является аналитической функцией переменной z . Если радиус R бесконечен, то функция $f(z)$ определена и аналитична на всей плоскости z , то есть является целой. Если R конечен и $R \neq 0$, то на окружности $|z - z_0| = R$ имеется хотя бы одна особая точка функции $f(z)$ и во многих случаях эта функция, определенная в круге $|z - z_0| < R$ формулой (4.1), допускает однозначное аналитическое продолжение на всю плоскость z или до некоторой так называемой естественной границы. Для такого продолжения используются различные приемы (см. § 2, 3) и, в частности, переразложения ряда (4.1) в новые ряды в окрестности других точек (см., например, формулы (2.6) — (2.8)).

Очень важным в приложениях рядом является *обобщенный геометрический ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a)_k z^k / k!, \quad |z| < 1, \quad (4.2)$$

где символ $(a)_k$ определен формулами (2.32), (2.33). Как легко установить по признаку Даламбера, этот ряд сходится в круге радиуса 1 с центром в начале координат ($R=1$, $z_0=0$). В случае, когда $a=-n$, $n=0, 1, 2, \dots$, ряд обрывается в многочлен степени n ($(-n)_{n+1} = (-n)_{n+2} = \dots = 0$), равный разложению бинома Ньютона $(1-z)^n$. В случае произвольного a , заметив, что

$$(a)_k = (-1)^k (1 - a - k)_k, \quad (4.3)$$

также без труда можно найти значение суммы ряда (4.2) в виде *степенной функции*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a)_k z^k / k! = (1 - z)^{-a} = f(z), \quad |z| < 1. \quad (4.4)$$

Как уже отмечалось в § 2, особыми точками степенной функции $(1-z)^{-a}$ являются точки $z=1$ и $z=\infty$, где в общем случае (при $a \neq \pm n$) наблюдается ветвление. В остальных точках сумма $(1-z)^{-a}$ аналитична, поэтому такую функцию $f(z)$ можно аналитически продолжить в окрестности любых точек z_0 , отличных от 1 и ∞ . Однако и в окрестности точек 1 и ∞ функция $f(z)$ представима в виде произведения степенной функции на аналитическую, задаваемую рядом. Например, в окрестности $z_0 = \infty$ справедливо равенство

$$f(z) = (-z)^{-a} (1 - 1/z)^{-a} = (-z)^{-a} \sum_{k=0}^{\infty} (a)_k z^{-k} / k!, \quad |z| > 1. \quad (4.5)$$

Равенство (4.5) осуществляет аналитическое продолжение суммы ряда (4.2) на внешность единичного круга и, наоборот, ряд (4.2) является аналитическим продолжением функции (4.5) на внутренность круга $|z| < 1$. Однако следует отметить, что для выделения однозначной ветви функции (4.5) необходимо провести разрез между точками $z=0$ и $z=\infty$ и указать значение функции на одном из его берегов. Обычно полагают, что $|\arg(-z)| < \pi$, то есть разрез идет по положительной полуоси $\text{Re} z = x > 0, y=0$, и $f(x-i0) = e^{-\pi i a} (x-1)^{-a}, x > 1$.

В связи со сказанным возникает вопрос, что получится, если над рядом (4.2) осуществить некоторые операции, приводящие к слиянию особых точек. Покажем, что путем преобразований из ряда (4.2) можно получить ряд, определяющий простейшую целую функцию e^z .

В самом деле, заменив в (4.2) z на z/a , получим ряд с особенностью при $z=a$, а устремив $a \rightarrow \infty$, придем к всюду сходящемуся ряду, определяющему экспоненциальную функцию e^z :

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{a^k} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \quad |z| < \infty. \quad (4.6)$$

Осуществленное преобразование, называемое *конфлюенцией*, на языке сумм рядов принимает широкоизвестную форму

$$\lim_{a \rightarrow \infty} (1 - z/a)^{-za/z} = e^z. \quad (4.7)$$

Заменив в разложении (4.6) z на $\pm iz$ и составив суммы $e^{iz} \pm e^{-iz}$, без труда получим ряды, представляющие собой функции $2\cos z$ и $2i\sin z$.

Впрочем, к разложению в ряд, например, функции $\cos z$ можно прийти и иным путем. Рассмотрим целую функцию, задаваемую рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(a)_k} \frac{z^k}{k!} = {}_0F_1(a; z), \quad |z| < \infty \quad (4.8)$$

(символ ${}_0F_1$ означает, что функция F в числителе не имеет факториалов, а в знаменателе имеет лишь один «факториал» $(a)_k$). Положив в (4.8) $a=1/2$, вычислим значение $(1/2)_k$, применив для этого формулы (2.32), (3.17), (2.33):

$$(1/2)_k = \frac{\Gamma(1/2 + k)}{\Gamma(1/2)} = \frac{\Gamma(2k + 1)}{\Gamma(k + 1) 2^{2k}} = \frac{(2k)!}{k! 2^{2k}}. \quad (4.9)$$

Заменив еще z на $-z^2/4$, в результате получим

$${}_0F_1\left(\frac{1}{2}; -\frac{z^2}{4}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = \cos z, \quad (4.10)$$

то есть ряд (4.8), в частности, содержит функцию косинус.

Все сказанное вызывает особый интерес к изучению аналитических функций, задаваемых рядами, коэффициенты которых содержат выражения $(a)_k$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \dots (a_p)_k}{(b_1)_k \dots (b_q)_k} \frac{z^k}{k!} &= {}_pF_q((a); (b); z) \equiv \\ &\equiv {}_pF_q\left(\begin{matrix} (a); \\ (b) \end{matrix}; z\right) \equiv {}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_p; \\ b_1, b_2, \dots, b_q \end{matrix}; z\right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$(a) = a_1, a_2, \dots, a_p, (b) = b_1, \dots, b_q.$$

Такие ряды (4.11), содержащие в числителе p , а в знаменателе q параметров, называются *обобщенными гипергеометрическими рядами* [2] порядка q и класса $q-p+1$ [13]. Они, как и аналитические функции, ими порождаемые, обозначаются символами, указанными в равенствах (4.11). Таким образом, из формул (4.6), (4.4) следует, что, в частности,

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k/k! = {}_0F_0(z) = e^z, \quad {}_1F_0(a; z) = (1-z)^{-a}. \quad (4.12)$$

Последнее равенство, связывающее функции ${}_pF_q$ с суммой обобщенного геометрического ряда, вполне оправдывает термин «обобщенный гипергеометрический ряд». Теорию функции (4.11) и ее частных случаев можно найти в книгах [2, 7, 13, 16, 17, 19, 27, 28, 31, 51, 52, 67].

Воспользовавшись признаком Раабе, несложно установить следующую картину сходимости ряда (4.11):

$$\begin{aligned} \text{ряд сходится при } & \begin{cases} \text{любых } z, \text{ если } p \leq q, \\ |z| < 1, \text{ если } p = q + 1, \\ |z| = 1, \text{ если } p = q + 1, \quad \sigma = \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^p a_j - \sum_{k=1}^q b_k \right) < 0, \\ |z| = 1, z \neq 1, \text{ если } p = q + 1, \quad 0 \leq \sigma < 1, \end{cases} \\ \text{ряд расходится при } & \begin{cases} z \neq 0, \text{ если } p > q + 1, \\ |z| > 1, \text{ если } p = q + 1, \\ |z| = 1, \text{ если } p = q + 1, \sigma \geq 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Если некоторый параметр числителя $a_j = -n$ ($n=0, 1, 2, \dots$), то ряд (4.11) обрывается в многочлен степени n , в частности, справедливо равенство ${}_pF_q(0, a_2, a_3, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = {}_pF_q((a); (b); 0) = 1$. Если один из параметров знаменателя $b_k = -l$ ($l=0, 1, 2, \dots$), то ряд (4.11) не имеет смысла, так как начиная с некоторого места знаменатель его общего члена обращается в нуль.

О п р е д е л е н и е *). Функцией гипергеометрического типа от переменной z будем называть всякую функцию $u(z)$, представимую в окрестности точки $z=0$ в форме линейной комбинации функций вида $E((a), (b), \alpha) \times \times z^{\alpha} {}_pF_q((a); (b); hz^v)$ (где $E((a), (b), \alpha)$ — некоторая функция параметров $(a), (b), \alpha, v > 0, h = \text{const}$), а также всякую функцию, которую можно непрерывно получить из такой линейной комбинации предельными переходами по параметрам.

Примеры. Функциями гипергеометрического типа являются функции $z^{\alpha} e^{hz}$, $(1-z)^{-a}$, $\ln(1+z)$, $\ln z$, $\arcsin z$, $\arctg z$, $(1 + \sqrt{1-z})^{-a}$ и их линейные комбинации. Принадлежность функции $u(z) = \ln z$ к названному классу следует из равенства $\ln z = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (z^{\alpha} - 1) \alpha^{-1}$ и второй части определения.

* Автору не удалось найти в литературе четкого определения понятия функции гипергеометрического типа. Поэтому для удобства в дальнейшем примем за основу настоящее определение, охватывающее всевозможные линейные комбинации, составленные из всех функций § 12, за исключением функций $J_{\nu, \lambda}^{\mu}(x)$, $E_{\rho}(x, \mu)$ при иррациональных μ и ρ .

К функциям гипергеометрического типа относятся: *гипергеометрическая функция* (или *функция Гаусса*) ${}_2F_1(a, b; c; z)$, обозначаемая просто $F(a, b; c; z)$, *вырожденная гипергеометрическая функция* (или *функция Куммера*) ${}_1F_1(a; c; z)$, обозначаемая часто символом Гумберта $\Phi(a, c, z)$, *функция* ${}_0F_1(c; z)$, сводящаяся к функции Бесселя, и *функция Клаузена* ${}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; z)$. Главные аспекты теории первых трех функций и функций Бесселя излагаются в § 5, 6 на основе их интегральных представлений через контурные интегралы Меллина — Бернса (7), которые могут быть использованы как средства для эквивалентных определений этих функций.

2. Теорема Слейтер. Изучим вопрос о нахождении функции $\mathcal{H}(x)$, преобразование Меллина $\mathcal{H}^*(s)$ которой имеет вид (5). Для этого, помимо обозначений (2.32), (2.33), (4.11), нам понадобятся следующие символы:

$$\Gamma \left[\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_A \\ b_1, b_2, \dots, b_B \end{matrix} \right] \equiv \Gamma[(a); (b)] = \frac{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2) \dots \Gamma(a_A)}{\Gamma(b_1) \dots \Gamma(b_B)} \quad (4.13)$$

(пустое произведение заменяется единицей),

$$(a) + s = a_1 + s, a_2 + s, \dots, a_A + s,$$

$$(b)' - b_k = b_1 - b_k, \dots, b_{k-1} - b_k, b_{k+1} - b_k, \dots, b_B - b_k, \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_A(z) &= \sum_{j=1}^A z^{a_j} \Gamma \left[\begin{matrix} (a)' - a_j, (b) + a_j \\ (c) - a_j, (d) + a_j \end{matrix} \right] \times \\ &\times {}_{B+C}F_{A+D-1} \left(\begin{matrix} (b) + a_j, 1 + a_j - (c); (-1)^{C-A} z \\ 1 + a_j - (a)', (d) + a_j \end{matrix} \right), \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_B(1/z) &= \sum_{k=1}^B z^{-b_k} \Gamma \left[\begin{matrix} (b)' - b_k, (a) + b_k \\ (d) - b_k, (c) + b_k \end{matrix} \right] \times \\ &\times {}_{A+D}F_{B+C-1} \left(\begin{matrix} (a) + b_k, 1 + b_k - (d); \frac{(-1)^{D-B}}{z} \\ 1 + b_k - (b)', (c) + b_k \end{matrix} \right), \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$|\arg z| < \pi.$$

Если ряды сходятся, то функции $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$ являются функциями гипергеометрического типа, причем переходят друг в друга, если поменять местами A -мерный *комплексный вектор* $(a) = a_1, a_2, \dots, a_A$ с аналогичным B -мерным вектором (b) , C -мерный вектор (c) с D -мерным (d) , а z заменить на $1/z$. Эти функции аналитически зависят от *комплексных параметров* (a) , (b) , (c) , (d) и переменной z . Если некоторые параметры векторов (a) (или (b)) совпадают между собой или отличаются на целое число, то векторы $(a)' - a_j$ ($(b)' - b_k$) содержат нулевые или отрицательные целые компоненты и в силу свойства $\Gamma(-n) = \infty$, $n = 0, 1, 2, \dots$, у функций $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$, вообще говоря, могут возникнуть неопределенности типа $\infty - \infty$ (если особенности числителей гамма-коэффициентов из (4.15), (4.16) не сократятся с особенностями соответствующих знаменателей). Ниже доказывается, что в таких *логарифмических случаях* неопределенности раскрываются, то есть имеющиеся особенности устранимы по непрерывности. Поэтому в логарифмических случаях под значениями $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$ будем понимать соответствующие пределы «регу-

лярных» функций $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$, когда их параметры непрерывно стремятся к рассматриваемым особым значениям (см. § 7).

Следует отметить, что без ограничения $|\arg z| < \pi$ функции $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$ в общем случае являются многозначными. В дальнейшем для однозначности будем предполагать, что $|\arg z| < \pi$, хотя во многих случаях это условие можно ослабить либо совсем устранить, если допускать многозначность рассматриваемых функций (см. теоремы 18—20).

Докажем, что справедлива следующая

Теорема 17 (Слейтер) [67]. Пусть

$$\mathcal{H}^*(s) = \Gamma \left[\begin{matrix} (a) + s, & (b) - s \\ (c) + s, & (d) - s \end{matrix} \right], \quad (4.17)$$

где векторы (a) , (b) , (c) , (d) имеют соответственно A , B , C , D компонент a_j , b_k , c_l , d_m . Тогда, если выполняются следующие две группы условий:

$$-\operatorname{Re}(a_j) < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(b_k) \quad (j = 1, 2, \dots, A, \quad k = 1, 2, \dots, B), \quad (4.18a)$$

$$\begin{cases} A + B > C + D, \\ A + B = C + D, \quad \operatorname{Re} s(A + D - B - C) < -\operatorname{Re} v, \\ A = C, \quad B = D, \quad \operatorname{Re} v < 0, \quad v = \sum_{j=1}^A a_j + \sum_{k=1}^B b_k - \sum_{l=1}^C c_l - \sum_{m=1}^D d_m, \end{cases} \quad (4.18b)$$

то для таких s справедливы равенства

$$\mathcal{H}^*(s) = \begin{cases} \int_0^\infty x^{s-1} \Sigma_A(x) dx, & \text{если } A + D > B + C, \\ \int_0^1 x^{s-1} \Sigma_A(x) dx + \int_1^\infty x^{s-1} \Sigma_B(1/x) dx, & A + D = B + C, \\ \int_0^\infty x^{s-1} \Sigma_B(1/x) dx, & \text{если } A + D < B + C, \end{cases} \quad (4.19)$$

$\Sigma_A(1) = \Sigma_B(1)$, если $A + D = B + C$, $\operatorname{Re} v + C - A + 1 < 0$, $A \geq C$.

Следствие. При условиях (4.18) прообразом функции (4.17) является функция $\mathcal{H}(x)$ гипергеометрического типа, равная одному из следующих выражений:

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} \Sigma_A(x) \text{ при } x > 0, & \text{если } A + D > B + C, \\ \Sigma_A(x) \text{ при } 0 < x < 1 \text{ или } \Sigma_B(1/x) \text{ при } x > 1, & \text{если } A + D = B + C, \\ \Sigma_B(1/x) \text{ при } x > 0, & \text{если } A + D < B + C, \end{cases} \quad (4.20)$$

$\mathcal{H}(1) = \Sigma_A(1) = \Sigma_B(1)$, если $A + D = B + C$, $\operatorname{Re} v + C - A + 1 < 0$, $A \geq C$.

Замечание 1. Соответствующая теорема 1 из [67] (§ 4.8) содержит ряд неточностей: 1) вместо условий (4.18б) указано лишь условие $A + B \geq C + D$; 2) вместо $\operatorname{Re} v + C - A + 1 < 0$ приводится условие $\operatorname{Re} v < 0$; 3) говорится, что при $A + D = B + C$ функции $\Sigma_A(z)$ и $\Sigma_B(1/z)$ аналитически продолжают друг друга, а это верно лишь в случае $A + B > C + D$.

Замечание 2. В случае $|A + D - B - C| > 1$, $A + B = C + D$ or-

раничение на Res , указанное в (4.186), может быть несколько ослаблено до условия

$$\text{Res}(A + D - B - C) < 1/2 - \text{Re } v. \quad (4.18v)$$

Это следует из приведенной ниже теоремы 20 (формула (4.52)). Доказывать справедливость замечания мы не будем.

З а м е ч а н и е 3. Если для некоторых параметров выполняется одно или несколько условий $a_j = c_l + n$ (или $a_j = -d_m - n$) [$b_k = d_m + n$ (или $b_k = -c_l - n$)], где $n = 0, 1, 2, \dots$, и при этом векторы $(a)' - a_j$, $(b)' - b_k$ не содержат целые компоненты, то из группы условий (4.18a) можно устранить (или ослабить) условия, относящиеся к этим параметрам. При $a_j = c_l + n$ [$b_k = d_m + n$] соответствующие условия $\text{Re}(s + a_j) > 0$ [$\text{Re}(b_k - s) > 0$] устраняются, а при $a_j = -d_m - n$ [$b_k = -c_l - n$] они заменяются на ослабленные требования $\text{Re}(s + a_j) > -n - 1$ [$\text{Re}(b_k - s) > -n - 1$]. Если же векторы $(a)' - a_j$, $(b)' - b_k$ содержат целые компоненты, то вопрос об ослаблении ограничений (4.18a) требует специальных исследований.

З а м е ч а н и е 4. Ограничения (4.18a — в) обеспечивают, по крайней мере, условную сходимость интегралов (4.19) в $0, \infty$ (и 1). Если эти ограничения нарушаются, то интегралы (4.19) как несобственные, вообще говоря, расходятся, однако в отдельных случаях они существуют в смысле главного значения (см. замечание 1 в конце § 4).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 17. I этап. Для большей наглядности рассмотрим вначале один из простейших случаев при $A = B = 1$, $C = D = 0$, который приводит к степенной функции $\mathcal{H}(x) = \Gamma(\rho) (1+x)^{-\rho}$. Для этого вычислим следующий интеграл по некоторому контуру L :

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int_L \Gamma[s, \rho - s] x^{-s} ds, \quad x > 0. \quad (4.21)$$

Покажем, что если в качестве L взять прямую, параллельную мнимой оси $L = (\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$, то интеграл $I[\Gamma(\rho)]^{-1}$ при $0 < \text{Re } s = \gamma < \text{Re } \rho$ примет одно из значений (4.4), (4.5), где $z = -x$, $a = \rho$, что в силу (4.12) полностью согласуется с формулами преобразования Меллина (2.48), (2.49), (2.54) и теоремой Слейтер в случае $A + D = B + C$.

Подынтегральная функция из (4.21) аналитична всюду в плоскости s , кроме лишь полюсов первого порядка у гамма-функций $s = -n$, $s = \rho + n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ Как следует из свойства 1) Γ -функции, вычеты функции $\Gamma[s, \rho - s] x^{-s}$ в этих полюсах равны соответственно

$$(-1)^n / n! \Gamma(\rho + n) x^n, \quad \Gamma(\rho + n) (-1)^{n+1} / n! x^{-\rho-n}. \quad (4.22)$$

В качестве L возьмем произвольный простой замкнутый контур L_{-N} , который содержит участок вертикальной прямой $\text{Re } s = \gamma$, разделяющей точки $(0, 0)$ и $(\text{Re } \rho, 0)$: $0 < \gamma < \text{Re } \rho$, и охватывает лишь некоторое количество N левых полюсов $s = -n$, $n = 0, 1, \dots, N$. Тогда интеграл (4.21) в соответствии с теоремой о вычетах (2.18) будет равен сумме N первых вычетов (4.22) в указанных полюсах, лежащих внутри контура. Устремим в этом равенстве N к $+\infty$, предположив, что контур L_{-N} , растягиваясь по мере добавления полюсов $s = -n$ в левую петлю $L_{-\infty}$, нигде не приближается к этим полюсам на расстояние, меньшее некоторой малой величины $\varepsilon > 0$. Тогда в пределе получим соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{-\infty}} \Gamma[s, \rho - s] x^{-s} ds = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Gamma(\rho + n) x^n / n! = \Gamma(\rho) (1+x)^{-\rho}. \quad (4.23)$$

Конечный предел правой части существует (то есть ряд сходится), если $|x| < 1$. Тогда по теореме о переходе к пределу в равенствах следует, что при этих $|x| < 1$ интеграл по полученной бесконечной петле $L_{-\infty}$ сходится (см. рис. 3, а). Эту петлю, начинающуюся из ∞ в третьем квадранте и оканчивающуюся на ∞ во втором квадранте, можно считать произвольной, в частности ее можно развернуть в прямую $\text{Res} = \gamma$, $0 < \gamma < \text{Re} \rho$, как и требуется в формуле (2.49), сохранив при этом сходимость интеграла.

Если в качестве L взять аналогичный контур L_N , охватывающий *правые полюсы* $s = \rho + n$, $n = 0, 1, 2, \dots, N$, то такие же рассуждения приведут в пределе к формуле

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{+\infty}} \Gamma[s, \rho - s] x^{-s} ds &= -x^{-\rho} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(\rho + n) (-x)^{-n} / n! = \\ &= -\Gamma(\rho) (1+x)^{-\rho}, \\ |x| > 1, x > 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Развернув $L_{+\infty}$ в прямую $\text{Res} = \gamma$, проходимую сверху вниз, и поменяв направление ее обхода, опять выведем доказываемое равенство.

Отметим, что в этом случае получаемые ряды (4.23) и (4.24) (с минусом) аналитически продолжают друг друга как функции x , однако в общем случае функции $\Sigma_A(z)$ и $\Sigma_B(1/z)$ могут не являться аналитическим продолжением друг друга (если $A+B=C+D$). Это показывает пример, приводимый ниже.

З а м е ч а н и е 1. Правая часть формулы (4.23) аналитически зависит от параметра ρ . Поэтому для нее ограничение $\text{Re} \rho > 0$, при котором выводилось равенство (4.23), является излишним. Равенство (4.23) можно аналитически продолжить на случай произвольных $\rho \neq 0, -1, -2, \dots$, если устранить условие отделимости правых и левых полюсов $s = -n, \rho + n, n = 0, 1, 2, \dots$, именно прямой $\text{Res} = \gamma$. Для аналитического продолжения естественно допускать петлю L_{∞} произвольной разомкнутой, однако такой, чтобы она отделяла все левые полюсы от правых. Это возможно лишь при условии, что эти полюсы не сливаются, то есть при $\rho \neq 0, -1, -2, \dots$. В этом случае функция $(1+x)^{-\rho}$ не превращается в многочлен.

З а м е ч а н и е 2. Если в интеграле (4.23) положить $\rho = 0$, а контур $L_{-\infty}$ взять разделяющим точки $s = -1$ и $s = 0$ ($-1 < \gamma < 0$), то из суммы (4.23) необходимо будет удалить первый вычет (член $n = 0$), соответствующий «слившемуся» полюсу $s = 0$, и положить там $\rho \rightarrow 0$. В результате по непрерывности получится ряд для функции $-\ln(1+x)$, $|x| < 1$. Такой особый случай, когда совпадают полюсы из разных серий, также называется *логарифмическим*.

П р и м е ч а н и е. Доказательство теоремы Слейтер в общем случае, которое излагается здесь, значительно отличается от данного в работе [67].

Рассмотрим интеграл по некоторому простому замкнутому контуру L , соответствующий обратному преобразованию Меллина (2.49) от функции $\mathcal{H}^*(s)$ (в случае $L = (\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$, $\text{Im} z = 0$):

$$I_L(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \Gamma \left[\begin{matrix} (a) + s, (b) - s \\ (c) + s, (d) - s \end{matrix} \right] z^{-s} ds. \quad (4.25)$$

Если L — кривая, простирающаяся в бесконечность, то этот интеграл называется *интегралом Меллина — Бернса*.

Подынтегральная функция $\mathcal{H}^*(s)z^{-s}$ аналитична в плоскости (s) всюду, кроме, может быть, двух серий точек — *левой серии*: $s = -a_j - n_j$, $n_j = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, A$; и *правой серии*: $s = b_k + n_k$, $n_k = 0, 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, B$. В этих точках подынтегральная функция, вообще говоря, имеет полюсы. Если для всех параметров выполняется условие, что векторы $(a)' - a_j$, $(b)' - b_k$, $(a) + b_k$, $(a) + d_m$, $(c) - a_j$, $(b) + c_l$, $(d) - b_k$ не содержат компонент вида $-n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), то указанные серии точек являются простыми полюсами. Если же это условие нарушается для некоторых параметров, то соответствующие им точки могут накладываться (сливаться), что приводит в общем случае к увеличению порядков полюсов или к устранению особенностей в этих точках (когда особенности числителя и знаменателя взаимно сокращаются).

Так как изучение общей картины требует весьма сложных выкладок, то в дальнейшем остановимся на рассмотрении важного частного случая, когда выполняются указанные выше условия. В этой ситуации точки $s = -a_j - n_j$, $s = b_k + n_k$ для функции $\mathcal{H}^*(s)z^{-s}$ являются полюсами 1-го порядка с вычетами, равными соответственно

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{n_j}}{n_j!} \Gamma \left[\begin{matrix} (a)' - a_j - n_j, (b) + a_j + n_j \\ (c) - a_j - n_j, (d) + a_j + n_j \end{matrix} \right] z^{a_j + n_j}, \\ & \frac{(-1)^{n_k-1}}{n_k!} \Gamma \left[\begin{matrix} (a) + b_k + n_k, (b)' - b_k - n_k \\ (c) + b_k + n_k, (d) - b_k - n_k \end{matrix} \right] z^{-b_k - n_k}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Обозначим эти вычеты через $\text{res}(n_j)$ и $\text{res}(n_k)$. Возьмем в качестве L произвольный простой замкнутый контур L_{-N} (рис. 5), охватывающий лишь начальную часть левой серии полюсов, то есть полюсы с номерами $n_j = 0, 1, 2, \dots, N_j$, $j = 1, 2, \dots, A$. Обозначим $N = \min N_j$, $j = 1, 2, \dots, A$. Тогда, если $N \rightarrow \infty$, то контур L_{-N} разрывается в некоторую *левую петлю* $L_{-\infty}$, начинающуюся и оканчивающуюся в «левой» бесконечности, охватывающую все левые полюсы в положительном направлении (против часовой стрелки), но не охватывающую ни одного полюса из правой серии. При этом предполагается, что когда $N \rightarrow \infty$, никакой из участков контура L_{-N} не приближается к полюсам подынтегральной функции ближе, чем на некоторую малую величину $\varepsilon > 0$, то есть левые полюсы заскакивают внутрь L_{-N} при $N \rightarrow \infty$.

Воспользовавшись формулой (2.18), запишем значение интеграла (4.25) через сумму вычетов

$$I_{L_{-N}}(z) = \sum_{j=1}^A \sum_{n_j=0}^{N_j} \text{res}(n_j). \quad (4.27)$$

Если существует конечный предел левой части этого равенства при $N \rightarrow \infty$, то будет существовать конечный предел и правой части. Иными словами, при условии сходимости интеграла по петле $L_{-\infty}$ ряды, возникающие в правой части (4.27) при $N \rightarrow \infty$, также будут сходиться, и равенство (4.27) в пределе примет вид

$$I_{L_{-\infty}}(z) = \sum_{j=1}^A \sum_{n_j=0}^{\infty} \text{res}(n_j) = \Sigma_A(z), \quad (4.28)$$

где $\Sigma_A(z)$ выражается формулой (4.15), а в случае $A=0$ $\Sigma_A(z) \equiv 0$. Это значение легко получается с помощью соотношения (2.32) и его следствия:

$$\Gamma(s-n) = \frac{\Gamma(s)}{(s-n)_n} = \frac{(-1)^n \Gamma(s)}{(1-s)_n}. \quad (4.29)$$

В соответствии с теоремами 6, 7 для исследования сходимости интеграла $I_{L_\infty}(z)$ оценим подынтегральную функцию $\Gamma[\]z^{-s}$ интеграла (4.25) при $s \rightarrow \infty$, считая, что $|\arg(-s)| < \pi$, то есть разрез проведен по положительной полуоси $\text{Im } s = 0$. Чтобы воспользоваться формулой Стирлинга и ее следствиями, домножим и разделим эту функцию на $\Gamma \left[\frac{1-(a)-s}{1-(c)-s} \right]$ и применим формулу дополнения (3.14), тогда

$$\Gamma[\]z^{-s} = z^{-s} \Gamma \left[\frac{(b)-s, 1-(c)-s}{(d)-s, 1-(a)-s} \right] \pi^{A-C} \prod_{l,j=1}^{C,A} \frac{\sin(c_l + s)\pi}{\sin(a_j + s)\pi}. \quad (4.30)$$

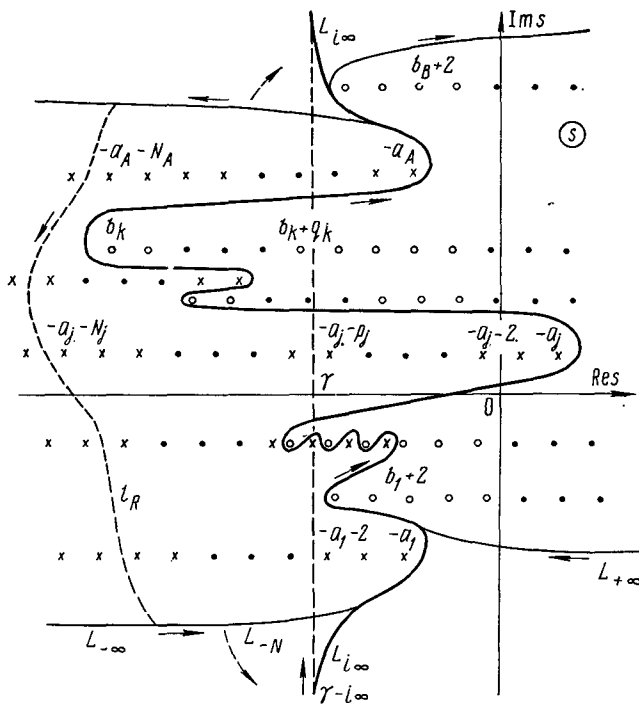


Рис. 5

Приняв во внимание равенства

$$\begin{aligned} |z^{-s}| &= |e^{-s \ln z}| = |\exp[-(\text{Re } s + i \text{Im } s)(\ln |z| + i \arg z)]| = \\ &= \exp(-\text{Re } s \ln |z| + \text{Im } s \arg z), \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \Gamma(b_k - s) &= O(\Gamma(-s)(-s)^{b_k}) = O\{\exp[s - (s + 1/2 - b_k) \ln(-s)]\} = \\ &= O\{\exp[\text{Re } s - (\text{Re } s + 1/2 - \text{Re } b_k) \ln |s| + \text{Im } s \arg(-s)]\}, \\ \sin(c_l + s)\pi &= O(e^{\pi |\text{Im } s|}), \end{aligned}$$

которые выводятся с помощью формул (3.22) и (2.9), легко получим следующую оценку подынтегральной функции при $\text{Re } s \rightarrow -\infty$:

$$|\Gamma[\]z^{-s}| = O\{\exp\{-\text{Re } s \ln |z| + \text{Im } s \arg z +$$

$$+ [\operatorname{Re} s - (\operatorname{Re} s + 1/2) \ln |s| + \operatorname{Im} s \arg(-s)] (B + C - A - D) + \\ + (\operatorname{Re} v + C - A) \ln |s| + \pi |\operatorname{Im} s| (C - A)\}, \quad (4.32)$$

где v означает сумму, стоящую в формулах (4.186).

Главная часть выражения справа, то есть функция $\exp[-\operatorname{Re} s \ln |s| (B + C - A - D)]$, стремится к нулю при $\operatorname{Re} s \rightarrow -\infty$, если $B + C - A - D < 0$, а z — любое конечное. В случае, когда $B + C = A + D$, главной частью является уже $\exp[-\operatorname{Re} s \ln |z|]$. Она исчезает при $\operatorname{Re} s \rightarrow -\infty$, если $\ln |z| < 0$, то есть $|z| < 1$. В обоих случаях интеграл по левой петле $L_{-\infty}$ абсолютно сходится (если считать, что $|\operatorname{Im} s|$ ограничена при $s \in L_{-\infty}$), так как подынтегральное выражение экспоненциально убывает, $\arg(-s) \rightarrow 0$ при $\operatorname{Re} s \rightarrow -\infty$ и

$$|I_{l_R}(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{l_R} |\Gamma[\] z^{-s}| |ds| = O(e^{-MR}), \quad M > 0, \quad (4.33)$$

где l_R — часть контура L_{-N} , точки которой находятся на расстоянии, большем R от точки $s=0$.

Если $|z|=1$ и $B+C=A+D$, то главной частью (4.32) является выражение степенного порядка $|s|^{\operatorname{Re} v + C - A}$. Интеграл (4.28) сходится, если (теорема 6)

$$\operatorname{Re} v + C - A + 1 < 0. \quad (4.34)$$

Если $B+C-A-D > 0$, то подынтегральная функция экспоненциально растет и интеграл $I_{L_{-\infty}}(z)$ расходится.

Остановимся подробнее на более сложном случае, когда $\operatorname{Im} s$ не ограничена при $s \in L_{-\infty}$, то есть, когда левая петля может быть развернута в контур $L_{i\infty}$, начинающийся и кончающийся в точках $\gamma \mp i\infty$, $\operatorname{Im} \gamma = 0$. Так как контур $L_{-\infty}$ произвольный, то можно считать, что $\operatorname{Im} s$ и $\operatorname{Re} s$ стремятся к бесконечности независимо друг от друга при $|s| \rightarrow \infty$, $s \in L_{-\infty}$.

Для нахождения порядка подынтегральной функции при $|\operatorname{Im} s| \rightarrow \infty$ воспользуемся следствием (3.24) из формулы Стирлинга, из которого вытекает оценка

$$|\Gamma(a+s)| = O\{\exp[(\operatorname{Re}(a+s) - 1/2) \ln |\operatorname{Im} s| - \pi/2 |\operatorname{Im} s|]\}. \quad (4.35)$$

Применив эту оценку и первую из формул (4.31), получим равенство

$$|\Gamma[\] z^{-s}| = O\{\exp\{(\operatorname{Re} v + \gamma(A - B - C + D) - \\ - 1/2(A + B - C - D)) \ln |\operatorname{Im} s| - \\ - \pi/2 |\operatorname{Im} s| (A + B - C - D) - \operatorname{Re} s \ln |z| + \operatorname{Im} s \arg z\}\}, \quad |\operatorname{Im} s| \rightarrow \infty. \quad (4.36)$$

Главный член правой части $\exp[-\pi |\operatorname{Im} s| (A + B - C - D)/2 + \operatorname{Im} s \arg z]$ экспоненциально исчезает при $|\operatorname{Im} s| \rightarrow \infty$, если $A + B > C + D$ и

$$0 \leq |\arg z| < \pi/2 (A + B - C - D). \quad (4.37)$$

При таких z интеграл $I_{L_{i\infty}}(z)$ по контуру $L_{i\infty}$ абсолютно сходится и определяет функцию, аналитическую в секторе (4.37) и, вообще говоря, многозначную (если $A + B - C - D > 2$). Эта функция будет однозначной, если наряду с (4.37) потребовать выполнения условия $|\arg z| < \pi$. Пример однозначной функции в случае $A = B = 1$, $C = D = 0$ был разобран на первом этапе доказательства.

Если $A + B = C + D$, то следует брать действительное положительное z

($\arg z = 0$). Главным членом здесь является уже выражение степенного порядка, стоящее в первых двух строках (4.36).

Докажем, что если показатель степени этого выражения отрицателен, то есть имеет место ограничение

$$\gamma(A - B - C + D) < -\operatorname{Re} v, \quad \gamma = \lim_{s \rightarrow \infty} \operatorname{Re} s, \quad s \in L_{i\infty}, \quad (4.38)$$

то интеграл $I_{L_{i\infty}}(z)$ сходится, по крайней мере, условно при всех действительных $z = x \neq 1$, а при

$$\gamma(A - B - C + D) < -\operatorname{Re} v - 1 \quad (4.39)$$

этот интеграл сходится абсолютно при всех $z = x \in (0, \infty)$.

Второе утверждение очевидно (теорема 6). Для доказательства первого используем рассуждения, аналогичные приведенным в работе ([18], п. 73, лемма Жордана). Пусть $z = x \in (0, 1)$, $\alpha = \operatorname{Re} v + \gamma(A - B - C + D) < 0$, а C_R означает некоторую левую дугу окружности радиуса R , то есть $C_R = \{s = Re^{i\varphi}, 0 < \theta \leq |\varphi| \leq \pi\}$. Тогда, как следует из оценок (4.32), (4.36), при условии $A + D \geq B + C$ имеет место неравенство

$$|I_{C_R}(x)| \leq \frac{1}{2\pi} 2R^\alpha \int_0^\pi x^{-R \cos \varphi} R d\varphi.$$

Если $\theta \geq \pi/2$, $0 < x < 1$, то, приняв во внимание оценку $\sin \psi \geq 2\psi/\pi$, справедливую при $0 \leq \psi \leq \pi/2$, после замены $\varphi = \pi/2 + \psi$ получим соотношения

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x^{-R \cos \varphi} R d\varphi &= R \int_{\theta - \pi/2}^{\pi/2} x^{R \sin \psi} d\psi \leq R \int_0^{\pi/2} x^{2/\pi R \psi} d\psi = \\ &= \pi \frac{x^R - 1}{2 \ln x} \rightarrow -\frac{\pi}{2 \ln x} \quad (R \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

В случае $\theta < \pi/2$ оцениваемый интеграл разобьем на два: по промежуткам $(\theta, \pi/2)$ и $(\pi/2, \pi)$. Ограниченность второго интеграла при $R \rightarrow \infty$ уже установлена. Первый также ограничен в силу соотношений

$$\int_0^{\pi/2} x^{-R \cos \varphi} R d\varphi \leq x^{-R \cos \theta} R (\pi/2 - \theta) \rightarrow x^{-\gamma} \gamma \quad (R \rightarrow \infty).$$

Указанный предельный переход осуществляется в предположении, что при $R \rightarrow \infty$ величина $R \cos \theta = \operatorname{Re} s \rightarrow \gamma$.

Таким образом, при всех $0 < \theta \leq \pi$, $0 < x < 1$ интеграл $I_{C_R}(x) \rightarrow 0$, когда $R \rightarrow \infty$, а $\alpha < 0$. Ввиду аналитичности подынтегральной функции по s это утверждение сохраняет силу и для всякого контура C_R^* , удаляющегося в бесконечность, если его длина растет пропорционально расстоянию R от точки $s = 0$ до ближайшей точки контура. Это замечание завершает доказательство сходимости $I_{L_{i\infty}}(x)$ в случае $0 < x < 1$, $\alpha < 0$. Аналогично рассматривается случай $x > 1$. Здесь выбирается дуга, симметричная C_R относительно оси $\operatorname{Re} s = 0$.

Пусть наряду с условием $A + B = C + D$ выполняется ограничение $A + D = B + C$ (т. е. $A = C$, $B = D$). Тогда условие (4.38) имеет место при любом γ и $\operatorname{Re} v < 0$. В точке $z = 1$ при $-1 \leq \operatorname{Re} v \leq 0$ интеграл $I_{L_{i\infty}}(z)$ может расходиться, но, однако, можно показать, что в этой точке существует его главное значение по Коши ([2], гл. 1.19).

В случае $A + B = C + D$ интеграл $I_{L_{i\infty}}(z)$ непрерывен на луче $0 < z < \infty$ всюду, кроме, может быть, точки $z = 1$. Если еще $A + D \neq B + C$, то он допускает аналитическое продолжение с этого луча на плоскость z , $|\arg z| < \pi$, которое осуществляется функциями $\Sigma_A(z)$ или $\Sigma_B(1/z)$. В случае $A + D = B + C$ существуют две аналитические функции: одна из них $\Sigma_A(z)$ аналитична в круге $|z| < 1$ с разрезом $|\arg z| < \pi$ и при $0 < z = x < 1$ выражается интегралом $I_{L_{i\infty}}(z)$, а другая $\Sigma_B(1/z)$ аналитична во внешности $|z| > 1$, $|\arg z| < \pi$, и при $z = x > 1$ выражается интегралом $I_{L_{i\infty}}(z)$. Эти функции, вообще говоря, не являются аналитическими продолжениями друг друга.

Пример. В случае $A = C = 1$, $B = D = 0$, $a_1 = 0$, $\gamma = \operatorname{Re} s > 0$ условие (4.38) выполнится, если $\operatorname{Re} c_1 > 0$. В соответствии с формулами (3.31), (3.12) интеграл (4.25) принимает значение $I_{L_{i\infty}}(z) = (1-x)^{c_1-1}/\Gamma(c_1)$, $z = x$. Эта функция не является аналитически продолжимой на плоскость, хотя две ее «составляющие» $(1-z)^{c_1-1}/\Gamma(c_1)$ и $f(z) \equiv 0$ аналитичны соответственно в круге $|z| < 1$ и вне этого круга. Условия, когда $\Sigma_A(z)$ и $\Sigma_B(1/z)$ аналитически продолжают друг друга, указаны ниже в теореме 18.

Отметим еще, что так как Γ -функция аналитична, то и интеграл (4.25) аналитически зависит от параметров. Поэтому если отделимы полюсы разных серий, а интеграл $I_L(z)$ по бесконечному контуру L сходится, то в силу теоремы 7 и функция $\Sigma_A(z)$, им порождаемая, аналитична по параметрам и поэтому непрерывна в логарифмических случаях, когда некоторые из параметров (a) различаются на целое число (то есть накладываются некоторые группы полюсов левой серии).

Положив в равенстве (4.28), в частности, $z = x > 0$ ($\arg z = 0$), $L = L_{i\infty}$ и потребовав выполнения дополнительного условия $-\operatorname{Re}(a_j) < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(b_k)$, которое обеспечивает возможность разделения всех левых и правых полюсов функции (4.17) именно некоторой прямой $L_{i\infty} : \operatorname{Re} s = \gamma$, получим с учетом (2.49), (4.25), (4.28), (4.34) утверждение теоремы Слейтера в случаях $A + D > B + C$, $x > 0$ и $A + D = B + C$, $0 < x \leq 1$.

Из симметрии (4.25) ясно, что замена s на $-s$ эквивалентна перемене (a) и (b) , (c) и (d) , z и $1/z$ местами. После этих замен легко прийти к утверждениям теоремы в случаях $A + D \leq B + C$, так как условия (4.18) не реагируют на эти замены. Последний результат получается и другим способом: если в качестве контура L взять контур L_N , охватывающий правые полюсы, и аналогично образовать правую петлю $L_{+\infty}$, обходимую в отрицательном направлении (см. рис. 5).

В тех случаях, когда некоторые особенности подынтегрального выражения из (4.25) устраняются (погашаются нулями, происходящими от знаменателя), отдельные из условий (4.18a) могут быть ослаблены, что нашло отражение в замечании 3.

3. Теорема о представлении интегралов Меллина — Бернса через функции гипергеометрического типа $\Sigma_A(z)$ и $\Sigma_B(1/z)$. Асимптотика $\Sigma_A(z)$. Проведенные выше рассуждения являются доказательством большинства утверждений следующей общей теоремы, основанной на некоторых результатах, полученных Мейером в серии работ 1936—1946 гг. (см. [2, 51, 53]).

Теорема 18. Пусть задана функция $\mathcal{H}^*(s)$ (4.17) с комплексными параметрами (a) , (b) , (c) , (d) и переменной s . Причем векторы $(a)' - a_j$, $(b)' - b_k$, $(a) + b_k$, $(a) + d_m$, $(c) - a_j$, $(b) + c_k$, $(d) - b_k$ не содержат компонент вида $-n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), то есть серии точек $s = -a_j - n_j$, $s = b_k + n_k$, $n_j = 0, 1, 2, \dots$, $j = 1, 2, \dots, A$, $n_k = 0, 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, B$, являются простыми полюсами этой функции. Тогда интеграл $I_L(z)$ (4.25), взятый по не-

которому бесконечному контуру L , отделяющему левые полюсы $s = -a_j - n_j$ от правых $s = b_k + n_k$, представляет собой однозначную аналитическую функцию параметров (a) , (b) , (c) , (d) и комплексной переменной z из сектора $|\arg z| < \pi$. Эта функция при соответствующих условиях допускает следующие представления через функции гипергеометрического типа:

$$I(z) = I_L(z) = \begin{cases} \Sigma_A(z), & A + D > B + C, & L = L_{-\infty}, & |z| < \infty, \\ & A + D = B + C, & L = L_{-\infty}, & |z| < 1, \\ \Sigma_B(1/z), & A + D < B + C, & L = L_{+\infty}, & |z| < \infty, \\ & A + D = B + C, & L = L_{+\infty}, & |z| > 1, \end{cases} \quad (4.40)$$

где $\Sigma_A(z)$ и $\Sigma_B(1/z)$ задаются формулами (4.15), (4.16).

Если векторы $(a)' - a_j$, $(b)' - b_k$ содержат компоненты вида $-n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), то есть кратность некоторых групп полюсов внутри серий увеличивается, то равенства (4.40) сохраняют силу, если функции $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$ считать доопределенными по непрерывности. Если A или B равны нулю, то соответствующее значение $I(z)$ обращается в нуль.

Здесь $L_{-\infty}$ ($L_{+\infty}$) означает левую (правую) петлю, начинающуюся и оканчивающуюся в точке $\operatorname{Re} s = -\infty$ ($\operatorname{Re} s = +\infty$) и охватывающую все полюсы функций $\Gamma(a_j + s)$, $j = 1, 2, \dots, A$ ($\Gamma(b_k - s)$, $k = 1, 2, \dots, B$) в положительном (отрицательном) направлении, но не охватывающую ни одного полюса $\Gamma[(b) - s]$ (соответственно $\Gamma[(a) + s]$) (см. рис. 5). Предполагается, что на петлях $L_{\mp\infty}$ величина $\operatorname{Im} s$ ограничена, то есть раствор этих петель ограничен.

Представление (4.40) остается справедливым и в случае произвольного контура $L = L_{i\infty}$, идущего от $\gamma - i\infty$ до $\gamma + i\infty$ и отделяющего левую и правую серии полюсов, если при $A + B > C + D$ выполняется дополнительное условие (4.37) (функции (4.40) могут быть неоднозначными). Если еще $A + D = B + C$, то функции $\Sigma_A(z)$ и $\Sigma_B(1/z)$ (вообще говоря, многозначные) аналитически продолжают друг друга в секторе (4.37), причем если $A + B - C - D \geq 4$, то разрез, соединяющий точки $z = (-1)^{A-C}$ и $z = \infty(-1)^{A-C}$, можно устранить, так как в точке $z = (-1)^{A-C}$ функция $\Sigma_A(z)$ при $A + B - C - D \geq 4$ особенности не имеет. Если $A + D = B + C$ и $A + B = C + D$, $\operatorname{Re} \nu < 0$, то функции $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$ не являются аналитическими продолжениями друг друга, но на оси $0 < z < \infty$ они непрерывны в точке $z = 1$: $\Sigma_A(1) = \Sigma_B(1)$, если выполняется дополнительное ограничение $\operatorname{Re} \nu + C - A + 1 < 0$.

Абсолютная сходимость интеграла $I_{L_{i\infty}}(z)$ сохраняется и на границе сектора (4.37), то есть при $|\arg z| = \pi/2(A + B - C - D)$, если имеют место условия

$$A + B \geq C + D, \quad \gamma(A + D - B - C) < -1 - \operatorname{Re} \nu + 1/2(A + B - C - D). \quad (4.41)$$

В случае $A + B = C + D$ для сходимости интеграла $I_{L_{i\infty}}(z)$ необходимо, чтобы $\arg z = 0$, то есть чтобы z была действительной и положительной ($z = x > 0$). Тогда при условии (4.38) справедливы равенства (4.40), где $z = x \neq 1$, $L = L_{i\infty}$. Эти равенства сохраняются и при $A = C$, $B = D$, если $\operatorname{Re} \nu < 0$.

При $z \rightarrow 0$ функция $\Sigma_A(z)$ имеет порядок *)

$$\Sigma_A(z) = O(|z|^\alpha), \quad \alpha = \min(\operatorname{Re} a_j), \quad j = 1, 2, \dots, A, \quad (4.42)$$

*) Предполагается, что никакие из параметров a_j не отличаются друг от друга на целое число, точнее, здесь исключаются логарифмические случаи.

если $A+D \geq B+C$. При $z \rightarrow \infty$ функция $\Sigma_A(z)$ имеет следующее асимптотическое разложение *):

$$\Sigma_A(z) \sim \Sigma_B(1/z) = O(|z|^{-\beta}), \quad \beta = \min(\operatorname{Re} b_k), \quad k = 1, 2, \dots, B, \quad (4.43)$$

если $B \geq 1$, $A+D \geq B+C$, $A+B > C+D$, $|\arg z| < \pi/2(A+B-C-D)$. При тех же условиях, если $B=0$, то функция $\Sigma_A(z)$ на бесконечности имеет экспоненциальный порядок и ее асимптотическое поведение носит более сложный характер, описываемый теоремами, приведенными в [53] (§ 1.4, 1.8) или [51] (§ 5.7, 5.10), но в других терминах.

Чтобы сформулировать основные результаты, характеризующие асимптотику многозначной (в общем случае) функции $\Sigma_A(z)$, предварительно введем некоторые обозначения:

$$H(z) = [\exp(-\Delta z^{1/\Delta})] z^{\rho} \frac{(2\pi)^{(\Delta-1)/2}}{\sqrt{\Delta}} \{1 + O(z^{-1/\Delta})\},$$

$$\Delta = A + D - B - C, \quad \rho = [\nu + 1/2(1 + C + D - A - B)] \Delta^{-1},$$

$$M = (2\pi i)^{B-D} \exp \left\{ \pi i \left(\sum_{m=1}^D d_m - \sum_{k=1}^B b_k \right) \right\},$$

$$\tilde{M} = (-2\pi i)^{B-D} \exp \left\{ -\pi i \left(\sum_{m=1}^D d_m - \sum_{k=1}^B b_k \right) \right\}, \quad (4.44)$$

$$\begin{aligned} E(x) = & \frac{2}{\sqrt{\Delta}} (\sqrt{2\pi})^{A+B-C-D-1} x^{\rho} \left\{ \exp \left[-\Delta x^{1/\Delta} \cos \left(\frac{D-B}{\Delta} \pi \right) \right] \right\} \times \\ & \times \cos \left\{ \Delta x^{1/\Delta} \sin \left(\frac{D-B}{\Delta} \pi \right) + \frac{\pi}{\Delta} \left[(D-B) \left(A-C-1/2 + \sum_{l=1}^C c_l - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{j=1}^A a_j \right) + (A-C) \left(\sum_{k=1}^B b_k - \sum_{m=1}^D d_m \right) \right] \right\} \{1 + O(x^{-1/\Delta})\}. \end{aligned}$$

В этих терминах справедливы следующие теоремы [51, 53]:

Теорема 19. Пусть $B=0$, $A > C$, $D \geq 1$. Тогда при $|z| \rightarrow \infty$ в секторе $0 < \arg z < (A-C+1)\pi$ имеет место асимптотическое представление

$$\Sigma_A(z) \sim MH(ze^{\pi i D}), \quad B=0, \quad (4.45)$$

в секторе $-(A-C+1)\pi < \arg z < 0$ справедлива формула

$$\Sigma_A(z) \sim \tilde{M}H(ze^{-\pi i D}), \quad B=0, \quad (4.46)$$

а при $\arg z = 0$, то есть при $z = x \rightarrow +\infty$:

$$\Sigma_A(x) \sim MH(xe^{\pi i D}) + \tilde{M}H(xe^{-\pi i D}) = E(x), \quad B=0. \quad (4.47)$$

Если $B=D=0$, $A > C$, то в секторе $|\arg z| < (A-C+\varepsilon)\pi$ (где $\varepsilon = 1/2$, $A-C=1$; $\varepsilon = 1$, $A-C \geq 2$) справедливо представление

$$\Sigma_A(z) \sim H(z), \quad B=D=0. \quad (4.48)$$

*) Предполагается, что $b_k - b_j \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $k, j = 1, 2, \dots, B$, $k \neq j$.

Теорема 20. Пусть $a_j + b_k \neq 0, -1, -2, \dots, j = 1, 2, \dots, A, k = 1, 2, \dots, B; B \geq 0, A > C, A + B \leq D + C$. Тогда при $|z| \rightarrow \infty$ в секторе $0 < \arg z < (A - C + 1)\pi$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\Sigma_A(z) \sim MH(ze^{\pi i(D-B)}), \quad (4.49)$$

а в секторе $-(A - C + 1)\pi < \arg z < 0$ имеет место формула

$$\Sigma_A(z) \sim \tilde{M}H(ze^{-\pi i(D-B)}). \quad (4.50)$$

Если $\arg z = 0$ и $z = x \rightarrow +\infty$, то при всех прежних ограничениях и условии $A + B < D + C$ выполняется соотношение

$$\Sigma_A(x) \sim MH(xe^{\pi i(D-B)}) + \tilde{M}H(xe^{-\pi i(D-B)}) = E(x), \quad (4.51)$$

а в случае $A + B = C + D, b_k - b_j \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots, k, j = 1, 2, \dots, B, k \neq j$, имеет место формула

$$\Sigma_A(x) \sim E(x) + \Sigma_B(1/x). \quad (4.52)$$

Если $a_j + b_k \neq 0, -1, -2, \dots, j = 1, 2, \dots, A, k = 1, 2, \dots, B, B \geq 0, A \geq 1, A + D > B + C, A + B > C + D$, то при $|z| \rightarrow \infty$ в секторе $(A + B - C - D)\pi/2 < \arg z < (A - C + \varepsilon)\pi$ (где $\varepsilon = 1/2$ при $A + D - B - C = 1; \varepsilon = 1, A + D - B - C > 1$) справедлива формула (4.49), а в секторе $-(A - C + \varepsilon)\pi < \arg z < -(A + B - C - D)\pi/2$ имеет место формула (4.50).

З а м е ч а н и е. Строго говоря, соотношения (4.45) — (4.50) имеют место при дополнительном условии, что $\arg z$ при $|z| \rightarrow \infty$ не приближается к границам секторов. Например, (4.45) справедливо при $\delta \leq \arg z \leq (A - C + 1)\pi - \delta$, где $\delta > 0$. Для большей краткости формулировки это условие из теорем вынесено в настоящее замечание.

Из этих и аналогичных теорем следует, что функция $\Sigma_A(z)$ на бесконечности в разных секторах изменения $\arg z$ и в зависимости от величин A, B, C, D имеет степенной, экспоненциальный, степенно-синусоидальный или степенно-логарифмический характер роста или убывания. Так, например, если $B = 0, A > C + D$, то функция $\Sigma_A(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ экспоненциально убывает; если же $B \geq 0, A > C, A + B < C + D$, то $\Sigma_A(x)$ на ∞ экспоненциально растет. Главные члены, характеризующие эти изменения $\Sigma_A(x)$, указаны в формулах (4.47), (4.51).

Вернемся к рассмотрению интеграла $I(z)$ (4.25). Из всего сказанного следует, что интеграл $I(z)$, взятый по контуру типа $L_{\mp\infty}$ или $L_{i\infty}$, в случае его сходимости однозначно определяет аналитическую функцию от z при всех значениях комплексных параметров $(a), (b), (c), (d)$ ($a_j + b_k \neq 0, -1, -2, \dots$) произвольных размерностей A, B, C, D (≥ 0), если $A + D \neq B + C$. Эта функция представима в виде $\Sigma_A(z)$ или $\Sigma_B(1/z)$ и равна интегралу $I(z)$ при соответствующих ограничениях на характеристики параметров, величину $\arg z$ и при соответствующем выборе контура L . При чем если допустимы несколько типов контуров L одновременно, то никаких недоразумений не возникает.

Если $A + D = B + C$, то интеграл $I(z)$ порождает сразу две аналитические функции: $\Sigma_A(z)$ при $|z| < 1$ и $\Sigma_B(1/z)$ при $|z| > 1$, которые, вообще говоря, не являются аналитическими продолжениями друг друга.

При $A + D > B + C$ функция $\Sigma_A(z)$ имеет две особые точки: $z = 0$ и $z = \infty$, причем точка $z = 0$ является *правильной* особой точкой *) (типа точки ветвления), а $z = \infty$ — *неправильной* (типа существенно особой точ-

*) Правильные и неправильные особые точки часто называют регулярными и иррегулярными особыми точками соответственно. Определения этих типов особых точек приведены в § 5 после формулы (5.22).

ки). Если $A+D=B+C$, то особой точкой аналитической функции, порожденной $\Sigma_A(z)$, $|z|<1$, может быть еще точка $z=(-1)^{A-C}$, причем все три особые точки ($z=0$, $(-1)^{A-C}$, ∞) в этом случае правильные. Если $A+D=B+C$ и выполняется дополнительное условие $A+B-C-D \geq 4$, то в точке $z=(-1)^{A-C}$ функция $\Sigma_A(z)$ особенности не имеет.

В соответствии со сказанным функция $I(z)$ удовлетворяет некоторому обыкновенному линейному однородному дифференциальному уравнению порядка $\max(A+D, B+C)$ ([2], гл. 5.4), имеющему при $A+D \neq B+C$ две особые точки: $z=0$, $z=\infty$ — правильную и неправильную, а при $A+D=B+C$ три правильные особые точки: $z=0$, $(-1)^{A-C}$ и ∞ (см. § 5).

Исследуемая здесь функция $I(z)$ простыми заменами параметров сводится к так называемой *G-функции Мейера*:

$$G(z) = G_{pq}^{mn}(z) = G_{pq}^{mn}\left(z \left| \begin{matrix} \alpha_p \\ \beta_q \end{matrix} \right. \right) = G_{pq}^{mn}\left(z \left| \begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_p \\ \beta_1, \dots, \beta_q \end{matrix} \right. \right) = \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^m \Gamma(\beta_j + s) \prod_{j=1}^n \Gamma(1 - \alpha_j - s)}{\prod_{j=m+1}^q \Gamma(1 - \beta_j - s) \prod_{j=n+1}^p \Gamma(\alpha_j + s)} z^{-s} ds, \quad L=L_{\mp\infty}, L_{i\infty}. \quad (4.53)$$

Эта функция, получаемая из (4.25) заменами (a) на $\beta_1, \dots, \beta_m$, (b) на $1-\alpha_1, \dots, 1-\alpha_n$, (c) на $\alpha_{n+1}, \dots, \alpha_p$, (d) на $1-\beta_{m+1}, \dots, 1-\beta_q$, $A=m$, $B=n$, $C=p-n$, $D=q-m$, была определена Мейером в 1941 г. через контурный интеграл, стоящий в (4.53) справа, хотя ранее (в 1936 г.) эта функция им определялась иначе (через выражения типа $\Sigma_A(z)$). Элементы теории G-функции Мейера излагаются в справочнике [2], а более подробно она рассматривается в монографиях [51, 53].

В качестве примера использования теорем 18—20 получим асимптотические свойства обобщенной гипергеометрической функции (4.11) и укажем формулу ее аналитического продолжения при $p=q+1$.

Как следует из формулы (4.40), при $A=1$, $C=0$, $D \geq B-1$, $a_1=0$ имеет место соотношение

$$\Gamma \left[\begin{matrix} (b) \\ (d) \end{matrix} \right]_{BFD} \left(\begin{matrix} (b); \\ (d) \end{matrix} -z \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{-\infty}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, (b)-s \\ (d)-s \end{matrix} \right] z^{-s} ds = \Sigma_1(z)|_{a_1=0}, \quad (4.54)$$

где предположено, что выполняется условие $b_k \neq 0, -1, -2, \dots$, $k=1, 2, \dots, B$, отделимости полюсов, а петля $L_{-\infty}$ охватывает левые полюсы $s=0, -1, -2, \dots$ в положительном направлении, отделяя их от правых.

Положим в теореме 20 $A=1$, $C=0$, $D>B$ и заменим z на $ze^{\pi i}$ в формуле (4.49) (или z на $ze^{-\pi i}$ в (4.50)). Тогда, как несложно установить из теоремы 20, справедливы первые два утверждения следующей теоремы:

Теорема 21. Пусть $D>B$. Тогда в секторе $|\arg z|<\pi$ при $|z|\rightarrow\infty$ имеет место соотношение

$$\Gamma \left[\begin{matrix} (b) \\ (d) \end{matrix} \right]_{BFD} \left(\begin{matrix} (b); \\ (d) \end{matrix} z \right) \sim \frac{(V\sqrt{2\pi})^{B-D}}{V\Delta_1} [\exp(\Delta_1 z^{1/\Delta_1})] z^{\rho_1}, \quad (4.55)$$

$$\Delta_1 = 1 + D - B, \quad \rho_1 = \Delta_1^{-1} \left[\sum_{k=1}^B b_k - \sum_{m=1}^D d_m + 1/2(D-B) \right].$$

Если $D > B + 1$, $\arg z = 0$, $z = x \rightarrow +\infty$, то справедлива формула

$$\Gamma \left[\begin{matrix} (b) \\ (d) \end{matrix} \right] {}_B F_D \left(\begin{matrix} (b); \\ (d) \end{matrix} -x \right) \sim \frac{2 (\sqrt{2\pi})^{B-D}}{\sqrt{\Delta_1}} \times \\ \times \{ \exp [\Delta_1 x^{1/\Delta_1} \cos (\pi/\Delta_1)] \} x^{\rho_1} \cos [\pi \rho_1 + \Delta_1 x^{1/\Delta_1} \sin (\pi/\Delta_1)], \quad (4.56)$$

показывающая, что функция ${}_B F_D(-x)$ экспоненциально растет при $D > B + 1$.

Если $D = B + 1$, то в секторе $|\arg z| < 2\pi$ при $|z| \rightarrow \infty$ справедливо представление

$$\Gamma \left[\begin{matrix} (b) \\ (d) \end{matrix} \right] {}_B F_{B+1} \left(\begin{matrix} (b); \\ (d) \end{matrix} -z \right) \sim \frac{z^{\rho_1}}{\sqrt{\pi}} \cos (\pi \rho_1 + 2 \sqrt{z}) \times \\ \times \{ 1 + O(1/\sqrt{z}) \} + \Sigma_B(1/z), \quad (4.57)$$

где $\Sigma_B(1/z)$ выражается соответствующей формулой (4.16), которая получается из (4.54) и равна сумме правых вычетов (4.54).

Если $D = B$, то в секторах $-(2 + \varepsilon) \frac{\pi}{2} < \arg z < (2 - \varepsilon) \frac{\pi}{2}$, $\varepsilon = \pm 1$, при $|z| \rightarrow \infty$ справедливо соотношение

$$\Gamma \left[\begin{matrix} (b) \\ (d) \end{matrix} \right] {}_B F_B \left(\begin{matrix} (b); \\ (d) \end{matrix} z \right) \sim e^{z z^{\frac{B}{\Sigma}} (b_k - d_k)} \{ 1 + O(1/z) \} + \Sigma_B \left(\frac{1}{ze^{\pi i \varepsilon}} \right). \quad (4.58)$$

Последние утверждения вытекают из равенств ([51], 5.11.2(7), 5.11.3(3)). К теореме 21 в полной мере относится замечание на с. 58.

Аналитическое продолжение ряда (4.54) при $B = D + 1$, как следует из общей теории, осуществляется с помощью соответствующей функции $\Sigma_B(1/z)$. Таким образом, при $C = 0$, $a_1 = 0$ справедлива формула $\Sigma_1(z) = \Sigma_B(1/z)$, которая может быть записана в виде

$${}_{D+1} F_D \left(\begin{matrix} (b); \\ (d) \end{matrix} z \right) = \Gamma \left[\begin{matrix} (d) \\ (b) \end{matrix} \right] \sum_{k=1}^{D+1} \Gamma \left[\begin{matrix} b_k, (b)' - b_k \\ (d) - b_k \end{matrix} \right] (z^{-1} e^{\pi i})^{b_k} \times \\ \times {}_{D+1} F_D \left(\begin{matrix} b_k, 1 + b_k - (d); \\ 1 + b_k - (b)' \end{matrix} 1/z \right), \quad 0 < \arg z < 2\pi. \quad (4.59)$$

Частный случай этой формулы, когда $D = 0$, разобран выше на первом этапе доказательства теоремы Слейтер. В § 5 рассматривается случай $D = 1$, приводящий к функции Гаусса.

Отметим, что формула (4.59), в частности, выражает асимптотическое поведение функции ${}_{D+1} F_D((b); (d); z)$ при $z \rightarrow \infty$.

В заключение сделаем три важных замечания:

З а м е ч а н и е 1. Из условий (4.18) самым существенным является условие $A + B \geq C + D$, показывающее, что число гамма-функций в знаменателе $\mathcal{H}^*(s)$ не должно превышать числа гамма-множителей из числителя. Остальные условия на ν и $\text{Re } s$ допускают некоторые ослабления.

В самом деле, например, из (2.24), (3.14) следует, что прообраз функции $\mathcal{H}_1^*(s) = \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1-s \\ s+1/2, 1/2-s \end{matrix} \right]$ существует при $0 < \text{Re } s < 1$ и равен $[\pi(1-x)]^{-1}$. Однако такая функция $\mathcal{H}_1^*(s)$ не удовлетворяет последнему из условий (4.18б): здесь $\text{Re } \nu = 0$.

Замечание 2. Если первая группа условий (4.18) (с учетом замечания 3) не выполняется, но прямая $\operatorname{Re} s = \gamma$ не содержит полюсов функции (4.17), то теорема Слейтер остается справедливой, если функции $\Sigma_A(x)$, $\Sigma_B(1/x)$ заменить соответственно на функции $\Sigma_{A+}(x) - \Sigma_{B-}(1/x)$ и $\Sigma_{B+}(1/x) - \Sigma_{A-}(x)$, где $\Sigma_{A\pm}(x)$, $\Sigma_{B\pm}(1/x)$ означают некоторые «куски» функций $\Sigma_A(x)$ и $\Sigma_B(1/x)$, то есть $\Sigma_A(x) = \Sigma_{A-}(x) + \Sigma_{A+}(x)$, $\Sigma_B(1/x) = \Sigma_{B-}(1/x) + \Sigma_{B+}(1/x)$. Эти «куски» получают следующим образом.

Предположим, что прямая $\operatorname{Re} s = \gamma$ рассекает обе серии полюсов так, что от левой отсекаются полюсы $s = -a_j - n_j$, $n_j = 0, 1, \dots, p_j$, а от правой серии — полюсы $s = b_k + n_k$, $n_k = 0, 1, \dots, q_k$, где j, k — некоторые из номеров $1, 2, \dots, A; 1, 2, \dots, B$ (см. рис. 5). Таким образом, для этих номеров j, k имеют место неравенства

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} b_k + q_k < \gamma = \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} a_j - p_j, \\ -\operatorname{Re} a_j - p_j - 1 < \gamma < \operatorname{Re} b_k + q_k + 1, \end{aligned} \quad (4.60)$$

а для оставшихся номеров j, k останутся справедливыми соответствующие неравенства из группы (4.18a).

Обозначим через $P_-(z)$, $P_+(z)$ соответственно n -й отрезок и n -й остаток некоторого степенного ряда $\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k z^k$:

$$P_-(z) = \sum_{k=0}^n \lambda_k z^k, \quad P_+(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda_k z^k.$$

Пусть тогда $\Sigma_{A+}(x)$ и $\Sigma_{B-}(1/x)$ означают функции, получаемые из $\Sigma_A(x)$, $\Sigma_B(1/x)$ путем удаления из рассекаемых обобщенных гипергеометрических рядов соответственно p_j -отрезков и q_k -остатков с теми номерами j, k , для которых справедливы неравенства (4.60).

Введя такие обозначения, с помощью теории вычетов несложно установить справедливость теоремы Слейтер с указанной поправкой. В самом деле, прежнее доказательство легко переносится и на этот случай, только вместо вычетов отсеченных левых полюсов $s = -a_j - n_j$, стоящих в сумме (4.27), следует добавить вычеты $\operatorname{res}(n_k)$, $n_k = 0, 1, \dots, q_k$, полюсов, отсекаемых от правой серии.

Например, из сказанного и формулы (3.11) следует, что прообразом $\Gamma(s)$ при $-(n+1) < \operatorname{Re} s < -n$ является функция $e^{-x} - \sum_{k=0}^n (-x)^k/k!$.

Замечание 3. Из сказанного выше следует, что каждая функция $u(z)$ гипергеометрического типа может быть представлена в виде некоторой линейной комбинации интегралов Меллина — Бернса: $u(z) = \sum C_m \mathfrak{R}_m(h_m z^{v_m})$, где $\mathfrak{R}_m(z)$ выражаются формулой (7) при $\alpha_i = \beta_j = \gamma_k = \delta_l = 1$, а $v_m > 0$, C_m , h_m — постоянные.

§5. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ГАУССА

1. Основные свойства и представления. На первом этапе доказательства теоремы Слейтер был вычислен частный случай интеграла (4.25), соответствующий степенной функции ${}_1F_0(\rho, x) = (1-x)^{-\rho}$. Эта функция имеет две правильные особые точки ветвления: $x=1$ и $x=\infty$.

Рассмотрим сейчас несколько более общую, чем степенная, *гипергеометрическую функцию Гаусса*, имеющую уже три правильные особые точки: $z=0, 1$ и ∞ . Эта функция, изученная Гауссом в 1813 г., в единичном круге определяется как сумма ряда (4.11) при $p=2, q=1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k k!} z^k = {}_2F_1(a, b; c; z) \equiv F(a, b; c; z). \quad (5.1)$$

Пользуясь признаком Раабе, несложно установить, что такой ряд абсолютно сходится в круге $|z| < 1$. На окружности $|z| = 1$ он сходится абсолютно и равномерно, если $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$. Если $-1 < \operatorname{Re}(c-a-b) \leq 0$, то в точке $z=1$ ряд расходится, оставаясь при этом условно сходящимся в других точках окружности $|z|=1$. Если $\operatorname{Re}(c-a-b) \leq -1$, то на всей этой окружности ряд расходится.

Однако в соответствии с теоремой Слейтер и условием (4.37) можно ввести и эквивалентное определение функции Гаусса через *интеграл Меллина — Бернса* (1908 г.), равный (4.25) при $A=1, B=2, C=0, D=1, a_1=0, b_1=a, b_2=b, d_1=c, L=L_{i\infty}$ (с заменой z на $-z$):

$$\Gamma \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \right] F(a, b; c; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} s, a-s, b-s \\ c-s \end{matrix} \right] (-z)^{-s} ds, \quad (5.2)$$

$$|\arg(-z)| < \pi, \quad |z| < 1.$$

Это равенство получается из формулы (4.40) при условии $|z| < 1$ и содержит в левой части сумму соответствующих левых вычетов $\Sigma_A(-z)$. Путь интегрирования может быть любым, простирающимся от $\gamma_1 - i\infty$ до $\gamma_2 + i\infty$, лишь бы только он отделял *левые полюсы* *) $s=0, -1, -2, \dots$ от *правых полюсов* $s=a+n, s=b+n, n=0, 1, 2, \dots$ (впрочем, допускается и соответствующая левая петля $L_{-\infty}$). Такой путь существует, если эти полюсы не совпадают, то есть как a , так и b отличны от $0, -1, -2, \dots$ и, значит, степенной ряд не обрывается в многочлен.

При $c = -n, n=0, 1, 2, \dots$, доопределим (5.2) по непрерывности как предел при $c \rightarrow -n$. Тогда из (5.1), (2.32) следует, что

$$\lim_{c \rightarrow -n} \frac{1}{\Gamma(c)} F(a, b; c; z) = \frac{(a)_{n+1} (b)_{n+1}}{(n+1)!} z^{n+1} F(a+n+1, b+n+1; n+2; z), \quad (5.3)$$

а доопределенное равенство (5.2) остается справедливым при всех c . Отметим, что такой подход к устранимым особенностям дает возможность не указывать в базовой таблице искусственных ограничений типа $c \neq 0, -1, -2, \dots$ для (5.2), при нарушении которых образ сохраняет аналитичность.

К функциям, содержащим ряды ${}_2F_1$, можно прийти, если в теореме Слейтер перебрать все такие размерности A, B, C, D векторов, для которых $A+D=B+C=2, A+B \geq C+D$, то есть 1) $A=D=1, B=2, C=0$; 2) $A=B=2, C=D=0$; 3) $A=C=2, B=D=0$; 4) $A=B=C=D=1$; 5) $A=2, B=C=1, D=0$; 6) $A=C=0, B=D=2$. Эти типы образов $\mathcal{H}^*(s)$ (4.17) в соответствии со знаком s и положениями Γ -функций удобно обозначать символами: 1) $\left(\begin{smallmatrix} + & - & - \\ - \end{smallmatrix} \right)$; 2) $(++--)$;

*) Предполагается, что полюсы не устраняются нулями от знаменателя, то есть что $c \neq -n, c-a \neq -n, c-b \neq -n$ ($n=0, 1, 2, \dots$).

3) $\begin{pmatrix} ++ \\ ++ \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} +- \\ +- \end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix} ++ & - \\ + & \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} -- \\ -- \end{pmatrix}$. Так, например, в правой части (5.2) образ $\mathcal{H}^*(s)$ относится к типу 1) $\begin{pmatrix} + & - & - \\ - & \end{pmatrix}$.

Поскольку замена s на $-s$ эквивалентна замене z на $1/z$, то интерес представляют лишь первые четыре типа, остальные два после этой замены к ним сводятся. Отметим, что от условия $A+B \geq C+D$ можно освободиться, если в качестве контура интегрирования допускать лишь «неразгибаемые» петли $L_{\pm\infty}$. Так, для образа $\mathcal{H}^*(s)$ типа $\begin{pmatrix} + & - \\ + & \end{pmatrix}$ при $|z| < 1$ следует брать левую петлю $L_{-\infty}$, а для $\begin{pmatrix} - & - \\ - & \end{pmatrix}$ при $|z| > 1$ следует брать правую петлю $L_{+\infty}$.

Рассмотрим подробнее тип 1) $\begin{pmatrix} \pm & - \\ - & \end{pmatrix}$. В соответствии с пояснениями к равенству (4.40) интеграл (5.2) при $|z| > 1$ можно считать также через сумму «правых» вычетов. Тогда, если нет кратных полюсов, то есть $a-b$ не целое, интеграл будет равен некоторой регулярной функции $\Sigma_B(-1/z)$, что в силу (4.16) приведет к значению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} s, & a-s, & b-s \\ & c-s \end{matrix} \right] (-z)^{-s} ds = \\ & = \Gamma \left[\begin{matrix} b-a, & a \\ & c-a \end{matrix} \right] (-z)^{-a} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, & 1-c+a; & 1/z \\ & 1-b+a \end{matrix} \right) + \\ & + \Gamma \left[\begin{matrix} a-b, & b \\ & c-b \end{matrix} \right] (-z)^{-b} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} b, & 1-c+b; & 1/z \\ & 1-a+b \end{matrix} \right), \quad |z| > 1. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Так как $A+B-C-D=2>0$ и условие (4.37) выполняется при $|\arg(-z)| < \pi$, то контурный интеграл (5.2) существует при всех z , не лежащих на разрезе $0 < \operatorname{Re} z = x < \infty$, и является аналитической функцией от z . Внутри круга $|z| < 1$ он имеет представление (5.2), а вне круга выражается формулой (5.4). Значит, функции $\Sigma_A(-z)$ и $\Sigma_B(-1/z)$, стоящие в (5.2) и (5.4), аналитически продолжают друг друга.

Обозначим через $F(a, b; c; z)$ не только сумму ряда (5.1), но и аналитическое продолжение этого ряда в плоскость с разрезом по лучу $0 < x < \infty$. Тогда из (5.2), (5.4) следует равенство

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= \Gamma \left[\begin{matrix} c, & b-a \\ & b, & c-a \end{matrix} \right] (-z)^{-a} F \left(a, 1-c+a; 1-b+a; \frac{1}{z} \right) + \\ &+ \Gamma \left[\begin{matrix} c, & a-b \\ & a, & c-b \end{matrix} \right] (-z)^{-b} F \left(b, 1-c+b; 1-a+b; \frac{1}{z} \right), \quad (5.5) \\ &a-b \neq n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad |\arg(-z)| < \pi. \end{aligned}$$

Эта формула является частным случаем соотношения (4.59) (при $D=1$). При целом $a-b$ в правой части (5.5) возникает неопределенность (логарифмический случай), раскрываемая по непрерывности ввиду аналитической зависимости левой части от параметров a, b, c . Способы раскрытия такой неопределенности рассматриваются в конце этого параграфа и в начале §7.

Формула (5.5) показывает, что при больших $|z|$ для нецелых $a-b$ функция Гаусса имеет оценку

$$F(a, b; c; z) = \lambda_1 z^{-a} + \lambda_2 z^{-b} + O(z^{-a-1}) + O(z^{-b-1}), \quad (5.6)$$

где λ_1, λ_2 — постоянные. В логарифмическом случае, когда, например, $b-a=m, m=0, 1, 2, \dots$, вместо z^{-b} надо написать $z^{-b} \ln z$.

Последние равенства раскрывают структуру правильной особенности функции Гаусса на бесконечности. Чтобы выявить характер ее особенности в точке $z=1$, удобно воспользоваться аналитическим представлением функции Гаусса в виде *интеграла Эйлера* (1778 г.):

$$F(a, b; c; z) = \Gamma \left[\begin{matrix} c \\ b, c-b \end{matrix} \right] \int_0^1 \tau^{b-1} (1-\tau)^{c-b-1} (1-\tau z)^{-a} d\tau, \quad (5.7)$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0, \quad |\arg(1-z)| < \pi, \quad |z| < \infty.$$

Для вывода этой формулы заметим, что образ $\Gamma \left[\begin{matrix} s, a-s, b-s \\ c-s \end{matrix} \right]$ из равенства (5.2) можно представить в виде произведения образов $\Gamma[s, a-s]$ и $\Gamma \left[\begin{matrix} b-s \\ c-s \end{matrix} \right]$ двух степенных функций (4.23), (1.19), (3.31), (3.12). По теореме 6 о свертке Меллина такое разбиение образа $\mathcal{H}^*(s)$ на два множителя $\left(\begin{matrix} + & - & - \\ - & & \end{matrix} \right) = (+ -) \left(\begin{matrix} - \\ - \end{matrix} \right)$ эквивалентно представлению его прообраза $\mathcal{H}(x)$ в виде интеграла (1.1) от произведения прообразов сомножителей. Прообразом $\Gamma[s, a-s]$ в силу (4.23) является функция $\mathcal{H}_1(x) = \Gamma(a) \times (1+x)^{-a}$. Это соответствие справедливо, если $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a$. Прообразом $\Gamma \left[\begin{matrix} b-s \\ c-s \end{matrix} \right]$ является функция $\mathcal{H}_2(x) = x^{1-c} (x-1)^{c-b-1} / \Gamma(c-b)$, если $\operatorname{Re}(b-s) > 0, \operatorname{Re}(c-b) > 0$. В этом можно убедиться, заменив в (3.31) x на $1/x$, b на $c-b$ и s на $b-s$ или же воспользовавшись теоремой Слейтера. Составив из этих функций интеграл (1.1) и совершив замену переменной $1/t = \tau$, придем в силу равенства (5.2) к формуле (5.7), где вместо z будет стоять действительное $-x$ ($0 < x < 1$).

Указанные выше условия на $\operatorname{Re} s$, при которых было выведено равенство (5.7), автоматически приводят к ограничениям $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$. Первое из них может быть опущено, так как величина a не влияет на сходимость интеграла, если особая точка $\tau=1/z$ не лежит на $[0,1]$, то есть $z \notin [1, \infty)$ или, другими словами, $|\arg(1-z)| < \pi$. При таких z и $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ интеграл (5.7) сходится и является однозначной аналитической функцией от z . Поэтому равенство (5.7), выведенное при $z=-x$ ($0 < x < 1$), остается справедливым для всех $|z| < \infty$, не лежащих на разрезе $[1, \infty)$. Оно доставляет главную ветвь многозначной функции Гаусса. Отметим, что это равенство может быть установлено и другим способом: если при $|z| < 1$ функцию $(1-\tau z)^{-a}$ разложить в степенной ряд по степеням τz и вычислить бета-интегралы, получающиеся из правой части (5.7) по формулам (3.31), (3.12), (2.32).

Так как подынтегральная функция в интеграле (5.7) аналитична по переменной τ , то величина интеграла (5.7) не изменится, если вместо отрезка $[0,1]$ интегрирование вести по любой простой кривой L с концами 0 и 1, не проходящей через особую точку $\tau=1/z$ подынтегральной функции и не пересекающей разреза.

Это свойство можно использовать для аналитического продолжения интеграла (5.7) по параметрам b и c , позволяющего освободиться от условия $\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} b > 0$ сходимости интеграла (5.7) на концах 0 и 1. Такое продолжение осуществляется путем перехода к интегралу по замк-

нутому контуру, дважды охватывающему отрезок $[0,1]$, то есть к интегралу по так называемой *двойной петле Похгаммера* [2, 16].

Представление (5.7) позволяет вывести *формулу Больца* (по параметру a)

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{-a} F\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right), \quad (5.8)$$

формулу автотрансформации

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; c; z) \quad (5.9)$$

и получить значение *функции Гаусса в единице*

$$F(a, b; c; 1) = \Gamma\left[\begin{matrix} c, c-a-b \\ c-a, c-b \end{matrix}\right], \quad \operatorname{Re}(c-a-b) > 0, \quad (5.10)$$

$$c \neq 0, -1, -2, \dots$$

Для доказательства (5.8) в интеграле (5.7) достаточно совершить замсну переменной $\tau = 1-t$. Равенство (5.9) получается из (5.8) повторным применением к правой части формулы Больца, но уже по параметру b . Для вывода (5.10) достаточно подставить значение $z=1$ в соотношение (5.7) и вычислить получающийся бета-интеграл по формуле (3.12). Условие $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$ обеспечит его сходимость. Если оно нарушается, то функция $F(a, b; c; z)$ в точке $z=1$ имеет степенную особенность порядка $-(c-a-b)$ (при $c \neq a+b$) или логарифмическую особенность (при $c=a+b$) (см. (5.13), (5.40)).

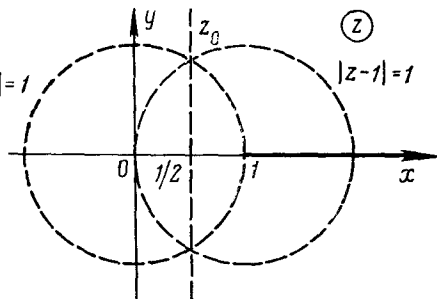


Рис. 6

Равенство (5.8) осуществляет аналитическое продолжение функции Гаусса в полуплоскость $\operatorname{Re} z < 1/2$, где $|z/(z-1)| < 1$. Комбинация формул (5.1), (5.5), (5.7), (5.8), (5.9) позволяет получить полное аналитическое продолжение функции Гаусса в область $|\arg(1-z)| < \pi$ (рис. 6). Отсюда следует, что в любой точке z плоскости, кроме точек $z=z_0 = \exp(\pm i\pi/3)$, функция $F(a, b; c; z)$ может быть вычислена с помощью рядов, которые сходятся с быстротой геометрической прогрессии. При $z=z_0$ эти ряды сходятся либо условно, либо так, как ряды $\sum z^n n^{-k}$, где $k > 1$ — постоянная. Подробнее о вычислительной стороне сказано в [51] (§ 1.9).

Выведем представление функции Гаусса в окрестности особой точки $z=1$. Для этого к правой части равенства (5.5) применим вначале формулу Больца (5.8), а затем саму формулу (5.5). Так как слагаемые правой части (5.5) переходят друг в друга, если a и b поменять местами, то проследим лишь за первым слагаемым, которое обозначим через Φ_1 :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \Gamma\left[\begin{matrix} a \\ a \end{matrix}\right] (-z)^{-a} (1-1/z)^{-a} F(a, c-b; 1-b+a; (1-z)^{-1}) = \\ &= \Gamma\left[\begin{matrix} c, b-a, 1+a-b, c-a-b \\ b, c-a, c-b, 1-b \end{matrix}\right] (1-z)^{-a} (z-1)^a \times \end{aligned}$$

$$\times F(a, b; 1+a+b-c; 1-z) + \Gamma \left[\begin{matrix} c, b-a, 1-b+a, a+b-c \\ b, c-a, a, 1+a-c \end{matrix} \right] \times \\ \times (1-z)^{-a} (z-1)^{c-b} F(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-z). \quad (5.11)$$

Первое слагаемое правой части (5.11) коэффициентом при F имеет функцию

$$(-1)^a \Gamma \left[\begin{matrix} b-a, 1+a-b \\ b, 1-b \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} c, c-a-b \\ c-a, c-b \end{matrix} \right].$$

Второй гамма-множитель, как и функция F , симметричен относительно a и b , а первый множитель при сложении с аналогичным множителем, полученным из второго слагаемого Φ_2 правой части (5.5), в силу (3.14), (2.9) дает единицу:

$$(-1)^a \Gamma \left[\begin{matrix} b-a, 1+a-b \\ b, 1-b \end{matrix} \right] + (-1)^b \Gamma \left[\begin{matrix} a-b, 1+b-a \\ a, 1-a \end{matrix} \right] = \\ = \frac{e^{i\pi a} \sin \pi b - e^{i\pi b} \sin \pi a}{\sin(b-a)\pi} \equiv 1.$$

Таким же способом преобразуются коэффициенты при функции $(1-z)^{c-a-b} \times F(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-z)$. В итоге получается следующее представление функции Гаусса в окрестности особой точки $z=1$:

$$F(a, b; c; z) = \Gamma \left[\begin{matrix} c, c-a-b \\ c-a, c-b \end{matrix} \right] F(a, b; 1+a+b-c; 1-z) + \\ + \Gamma \left[\begin{matrix} c, a+b-c \\ a, b \end{matrix} \right] (1-z)^{c-a-b} F(c-a, c-b; 1+c-a-b; 1-z), \quad (5.12) \\ c \neq a+b \pm m, \quad m=0, 1, 2, \dots, \quad |\arg(1-z)| < \pi.$$

Из этой формулы вытекает, что при $z \rightarrow 1$ для нецелых $c-a-b$ функция Гаусса имеет оценку

$$F(a, b; c; z) = \gamma_1 [1 + O(1-z)] + \gamma_2 (1-z)^{c-a-b} [1 + O(1-z)], \quad (5.13)$$

где γ_1, γ_2 — некоторые постоянные. В логарифмическом случае, когда $c=a+b \pm m, m=0, 1, 2, \dots$, в правой части (5.13) второе (или первое) слагаемое следует домножить на $\ln(1-z)$. В этом случае соответствующая формула получается из (5.12) по непрерывности (см. конец параграфа).

Соотношения (5.5), (5.12) показывают, что в окрестностях особых точек $z=\infty$ и $z=1$ функция ${}_2F_1(a, b; c; z)$ относится к гипергеометрическому типу. Как следует из равенства (4.59), это свойство в окрестности точки $z=\infty$ сохраняется и для более общих функций ${}_{D+1}F_D((b); (d); z), D>1$. Однако вблизи точки $z=1$ эти функции имеют более сложное поведение негипергеометрического типа ([51], гл. 5.3).

Равенство (5.12) позволяет вывести следующее представление функции Гаусса через интеграл Меллина—Бернса ([28], § 14. 53):

$$F(a, b; c; 1-z) = \Gamma \left[\begin{matrix} c \\ a, b, c-a, c-b \end{matrix} \right] \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma[s, s+c-a-b, a-s, b-s] z^{-s} ds, \quad (5.14)$$

$$|\arg z| < \pi, \quad |z| < \infty,$$

где интегрирование ведется по произвольному контуру L , простирающемуся от $-i\infty$ до $i\infty$, лишь бы только он отделял левые полюсы $s=-n$, $s=a+b-c-n$, $n=0, 1, 2, \dots$, от правых полюсов $s=a+n$, $s=b+n$, $n=0, 1, 2, \dots$. Такой путь существует, если выполняются условия отделимости полюсов: $a, b \neq -n$, $c-b \neq -n$, $c-a \neq -n$, $n=0, 1, 2, \dots$. Если еще $|z| < 1$ (или $|z| > 1$), то в качестве L можно взять левую (или правую) петлю $L_{\mp\infty}$ (4.40).

Для доказательства (5.14) воспользуемся теоремой 18 при $A=B=2$, $C=D=0$. Условие (4.37) здесь выполняется, и по первой из формул (4.40) несложно получить значение соответствующей функции $\Gamma[\Sigma_A(z)]$ в виде рядов, стоящих в правой части (5.12) (где z будет заменено на $1-z$). Если использовать вторую формулу (4.40), то для доказательства (5.14) придется применить еще и свойства (5.5), (5.8).

Следует отметить, что интеграл из правой части (5.14) является функцией, аналитической в секторе $|\arg z| < 2\pi$ (4.37) всюду, в том числе и в точке $z=1$, где имеет устранимую особенность. Поэтому нет необходимости проводить разрез $(1, \infty)$, соединяющий особые точки $z=1$ и $z=\infty$ из этого сектора. Но в то же время для выделения однозначных ветвей функций, входящих в равенство (5.14), плоскость z следует разрезать по лучу $(-\infty, 0)$, что и указано в (5.14).

Положив в (5.14) $z=1$ и воспользовавшись теоремой Слейтер, приводящей к условию $\text{Res} < 1$, получим лемму Бернса ([2], 1.19 (8)).

Случаю $(\frac{+}{-})_{+-}$ соответствует представление функции Гаусса через интеграл по левой петле $L_{-\infty}$ (4.40), охватывающей левые полюсы $s=0, -1, -2, \dots$:

$$F(a, b; c; z) = \frac{\Gamma[1-a, 1-b, c]}{2\pi i} \times \\ \times \int_{L_{-\infty}} \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ 1-a+s, 1-b+s, c-s \end{matrix} \right] (-z)^{-s} ds, \quad |z| < 1. \quad (5.15)$$

Если интеграл (5.15) вычислять по правой петле $L_{+\infty}$ при $|z| > 1$, то он окажется равным нулю, так как подынтегральная функция не имеет правых полюсов. Отметим, что петли $L_{\pm\infty}$ в рассматриваемом случае нельзя разогнуть в контур $(-i\infty, i\infty)$, так как нарушается условие $A+B \geq C+D$.

Если в (5.15) устремить $b \rightarrow 1$, то левая часть непрерывно перейдет в значение $F(a, 1; c; z)$, а для раскрытия неопределенности в правой части следует воспользоваться формулами (3.28), (2.31), из которых получается равенство

$$\Gamma \left[\begin{matrix} 1-b, s \\ 1-b+s \end{matrix} \right] = \frac{1}{1-b} [1 + (\psi(1) - \psi(s))(1-b)] + O(1-b). \quad (5.16)$$

Подставив его в (5.15) и приняв во внимание, что коэффициент правой части, стоящий при $(1-b)^{-1}$, равен нулю, легко найдем следующее представление функции Гаусса при $b=1$:

$$F(a, 1; c; z) = \frac{\Gamma[1-a, c]}{2\pi i} \int_{L_{-\infty}} \frac{\psi(1) - \psi(s)}{\Gamma[1-a+s, c-s]} (-z)^{-s} ds, \quad |z| < 1. \quad (5.17)$$

Формулу (5.17) несложно проверить и непосредственно, воспользовавшись теорией вычетов и свойством 19 из § 3.

2. Дифференциальное уравнение. В литературе большинство специальных функций обычно определяются как решения некоторых дифференциальных уравнений, часто встречающихся в прикладных вопросах. Таким уравнением для гипергеометрической функции Гаусса является некоторое обыкновенное линейное дифференциальное однородное уравнение второго порядка с тремя правильными особыми точками $z=0, 1$ и ∞ , называемое *гипергеометрическим уравнением*:

$$z(1-z) \frac{d^2 u}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{du}{dz} - abu = 0. \quad (5.18)$$

К этому каноническому виду путем замен переменных сводится широкий класс уравнений второго порядка с тремя произвольными правильными особыми точками.

Чтобы вывести уравнение (5.18), которому удовлетворяет сумма ряда (5.1), можно провести следующие рассуждения. Если ряд (5.1) почленно продифференцировать, то легко вывести представления производных в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz} \right)^n F(a, b; c; z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_{k+n} (b)_{k+n}}{(c)_{k+n} k!} z^k = \\ &= \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} F(a+n, b+n; c+n; z), \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Очевидно, что при $z=0$ справедливо равенство $cF' - abF = 0$, значит, комбинация $cF' - abF$ должна входить в уравнение. Коэффициентом при z^1 в этой комбинации будет выражение, равное $z^{-1}(cF' - abF)|_{z=0}$. Подключив вторую производную F'' , заметим, что при $z=0$ справедливо равенство $F'' + z^{-1}(cF' - abF) - (a+b+1)F' = 0$. Следующий такой шаг приведет к уравнению (5.18).

Если в это уравнение подставить разложения (5.19) функции $u=F$ и ее производных, то легко убедиться, что коэффициент при каждой степени $z^k, k=0, 1, 2, \dots$, будет обращаться в нуль. Так как функция $F(a, b; c; z)$ в круге $|z| < 1$ представима сходящимся рядом (5.1), то проведенные рассуждения доказывают, что эта функция представляет собой одно из решений уравнения (5.18). Другие решения содержатся в формулах (5.2), (5.5), (5.7) — (5.9), (5.12), (5.15).

Так как уравнение (5.18) имеет аналитические коэффициенты, то всякое его решение является функцией, аналитической всюду, кроме, может быть, точек $z=0, z=1$, в которых коэффициент $z(1-z)$ при старшей производной обращается в нуль (теорема Коши). Поскольку уравнение (5.18) имеет второй порядок, то всякие три его решения должны быть связаны конкретной линейной зависимостью. Эти свойства нашли отражение в указанных выше формулах.

В окрестности особой точки $z=0$ кроме ряда (5.1) имеется и другое независимое от него решение, что позволяет выписать формулу общего решения уравнения (5.18) для нецелых c в виде

$$u(z) = C_1 F(a, b; c; z) + C_2 z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1; 2-c; z), \quad (5.20)$$

где C_1, C_2 —const. Это решение станет однозначным, если выделить его ветвь, проведя разрез между особыми точками $z=0, 1, \infty$. Если c — це-

лое (например, $c=1$), то решения (5.20) перестают быть независимыми и нуждаются в доопределении по формуле типа (5.3). Тогда независимым от (5.1) является некоторое решение, содержащее логарифм ([2], гл. 2.3).

Ясно, что формулу общего решения можно изменить, составив линейную комбинацию $u = C_1 u_1 + C_2 u_2$ из любых двух названных выше частных независимых решений u_1, u_2 уравнения (5.18). В особых и логарифмических случаях эти решения u_1, u_2 могут непрерывно изменять свою форму (см., например, (5.3) и (5.40)).

Вообще говоря, частные решения уравнения (5.18) в окрестностях особых точек $z_0=0, 1, \infty$ могут быть представлены по формулам

$$u(z) = (z - z_0)^\mu \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k, \quad u(z) = z^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^{-k}, \quad (5.21)$$

где точке $z_0=0$ соответствуют *показатели* $\mu=0, 1-c$ (5.20), точке $z_0=1$ — показатели $\mu=0, c-a-b$ (5.12), точке $z_0=\infty$ — показатели $\mu=a, b$ (5.5), а коэффициенты d_k являются коэффициентами соответствующих гипергеометрических рядов. Такая структура решений характеризует правильность (регулярность) особой точки, то есть в особой точке такого типа допускается лишь ветвление степенного или степенно-логарифмического характера.

Чтобы линейное дифференциальное уравнение n -го порядка

$$\frac{d^n u}{dz^n} + f_1(z) \frac{d^{n-1} u}{dz^{n-1}} + \dots + f_{n-1}(z) \frac{du}{dz} + f_n(z) u = 0 \quad (5.22)$$

с дробно-рациональными коэффициентами $f_k(z)$, $k=1, 2, \dots, n$, имело лишь *правильные (регулярные)* особенности в конечных точках, необходимо и достаточно, чтобы все его коэффициенты допускали в этих точках полюсы порядка не выше k . Тогда порядки особенностей в этих точках, происходящие от коэффициентов $f_k(z)$ и производных $u^{(n-k)}$, суммарно уравниваются. В противном случае особая точка является *неправильной (иррегулярной, существенно особой)* и указанное равновесие отсутствует [6].

Из вида уравнения (5.18) легко заметить, что для коэффициентов

$$f_1(z) = \frac{c - (a + b + 1)z}{z(1-z)}, \quad f_2(z) = -\frac{ab}{z(1-z)} \quad (5.23)$$

условие правильности выполняется во всех конечных точках плоскости. Для проверки правильности точки $z_0=\infty$ в уравнениях (5.22), (5.18) следует вначале совершить замену $z=1/\zeta$, а затем рассмотреть точку $\zeta_0=0$. Если она правильная, то и точка $z_0=\infty$ для исходного уравнения будет правильной.

Примером неправильной особой точки является точка $z_0=0$ в уравнении $z^2 u' + u = 0$, общее решение которого имеет вид $u = C e^{1/z}$. Очевидно, что при $z=0$ такая функция u имеет существенную особенность (если $C \neq 0$).

В окрестности каждой правильной особой точки z_0 уравнение (5.22) имеет n частных решений вида (5.21), где показатели μ — корни некоторого многочлена степени n . Если все эти корни не отличаются на целые числа, то частные решения вида (5.21) независимы. В противном случае к независимым решениям вида (5.21) следует добавить еще решения, отличающиеся от (5.21), вообще говоря, логарифмическими

множителями типа $\ln(z-z_0)$, $\ln z$. Но в любом случае в окрестности всякой особой или неособой точки z_0 любые $n+1$ частных решений связаны линейной зависимостью. Независимыми могут быть только n частных решений, образующих фундаментальную систему решений (см., например, (5.20)).

Если точка $z=z_0$ неособая, то все решения в ее окрестности имеют вид (5.21), где $\mu \equiv 0$, то есть являются аналитическими функциями, представимыми рядами, радиус сходимости которых равен расстоянию от z_0 до ближайшей особой точки уравнения. В любом случае все решения уравнения (5.22) являются аналитическими функциями, поэтому ряды (5.21), их представляющие, допускают аналитические продолжения за пределы кругов их сходимости.

Все эти общие замечания были промоделированы на примере решений уравнения Гаусса (5.18). Они в полной мере переносятся и на общие функции гипергеометрического типа $\Sigma_A(z)$, $\Sigma_B(1/z)$ (§ 4). Для этих функций, как ранее отмечалось, соответствующее уравнение (5.22) имеет порядок $n = \max(A+D, B+C)$ и две (или три) особые точки в зависимости от величин A, B, C, D .

Например, рассматривая в § 4 функцию $u_0(z) = {}_B F_D((b); (d); -z)$ является одним из решений обобщенного гипергеометрического уравнения порядка $D+1$ ([2], § 4.2 (2)):

$$\left[\frac{d}{dz} \prod_{m=1}^D \left(z \frac{d}{dz} + d_m - 1 \right) + \prod_{k=1}^B \left(z \frac{d}{dz} + b_k \right) \right] u = 0. \quad (5.24)$$

Фундаментальная система решений этого уравнения в общем случае, когда ни одна из величин $d_k, b_k - b_j, d_k - d_j$ не является целым числом, состоит из функции $u_0(z)$ и D функций вида

$$u_m(z) = z^{1-d_m} {}_B F_D(1 + (b) - d_m; 2 - d_m, 1 + (d)' - d_m; -z), \quad (5.25)$$

$$m = 1, 2, \dots, D.$$

Если вернуться к уравнению (5.18) и его решениям, то можно обратить внимание, что замены типа $z = 1/\zeta$, $z = 1 - \zeta$ опять приводят к уравнению Гаусса, но с другими коэффициентами и с новой функцией $f(\zeta)$, где

$$u(z) = \zeta^\alpha (1 - \zeta)^\beta f(\zeta), \quad \alpha, \beta - \text{const.} \quad (5.26)$$

Эти замены осуществляют перестановки особых точек 0 и ∞ (0 и 1) местами.

Вообще, существует $6=3!$ возможностей расположения трех точек 0, 1, ∞ в трех местах. В соответствии с этим имеется шесть дробно-линейных подстановок:

$$z = \zeta, 1 - \zeta, \zeta^{-1}, (1 - \zeta)^{-1}, 1 - \zeta^{-1}, \zeta(\zeta - 1)^{-1}, \quad (5.27)$$

переводящих указанные точки друг в друга и образующих группу. Строение этой группы преобразований, связанной с гипергеометрическим уравнением, в 1856 г. изучил Риман, установивший, что существуют 24 частных решения уравнения (5.18), имеющих вид (5.26), где $f(\zeta)$ — функция Гаусса с некоторыми параметрами. Полный список этих решений был составлен Куммером в 1832 г. Восемь из них приведены выше, а остальные могут быть легко получены из этих восьми с помощью формул Больца и автотрансформации (5.8), (5.9).

3. Частные соотношения и случаи функции Гаусса. Помимо ра-

венств, связывающих частные решения уравнения (5.18), для функции Гаусса справедливы еще 15 соотношений, называемых *рекуррентными*, которые связывают функцию $F(a, b; c; z)$ с пятнадцатью парами функций, образованными из шести *смежных* с F функций: $F(a \pm 1, b; c; z)$, $F(a, b \pm 1; c; z)$, $F(a, b; c \pm 1; z)$. Примером такого соотношения является равенство ([2], гл. 2.8)

$$cF(a, b-1; c; z) + (a-b)zF(a, b; c+1; z) = cF(a-1, b; c; z). \quad (5.28)$$

Коэффициенты всех этих формул являются линейными функциями от z .

Если параметры a, b, c функции Гаусса связаны некоторыми линейными соотношениями, то для такой функции осуществимы специальные преобразования, называемые *квадратичными* ([2], § 2.11), например

$$F(a, 1-a; c; z) = (1-z)^{c-1} F((c-a)/2, (c+a-1)/2; c; 4z(1-z)). \quad (5.29)$$

В заключение приведем список основных частных случаев функции Гаусса и рассмотрим пример ее поведения в логарифмическом случае $c=a+b$:

$$(1-z)^{-a} = F(a, b; b; z), \quad (5.30)$$

$$e^z = \lim_{b \rightarrow \infty} F(1, b; 1; z/b), \quad (5.31)$$

$$\ln(1+z) = zF(1, 1; 2; -z), \quad (5.32)$$

$$\ln \frac{1+z}{1-z} = 2zF(1/2, 1; 3/2; z^2), \quad (5.33)$$

$$(1 + \sqrt{1-z})^{1-2a} = 2^{1-2a} F(a, a-1/2; 2a; z), \quad (5.34)$$

$$\arcsin z = zF(1/2, 1/2; 3/2; z^2), \quad (5.35)$$

$$\operatorname{arctg} z = zF(1/2, 1; 3/2; -z^2), \quad (5.36)$$

$$\cos(v \arcsin z) = F(v/2, -v/2; 1/2; z^2), \quad (5.37)$$

$$\sin(v \arcsin z) = vzF((1+v)/2, (1-v)/2; 3/2; z^2), \quad (5.38)$$

$$F(-n, b; c; z) = (1-z)^{c-b+n} z^{1-c} \frac{1}{(c)_n} \left(\frac{d}{dz} \right)^n [z^{n+c-1} (1-z)^{b-c}], \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} F(a, b; a+b; z) &= [B(a, b)]^{-1} \times \\ &\times \left\{ -\ln(1-z) \cdot F(a, b; 1; 1-z) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n k_n}{(1)_n n!} (1-z)^n \right\}_{z \rightarrow 1} = \\ &= -\frac{1}{B(a, b)} \ln(1-z) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\ln(1-z)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (5.40)$$

$$k_n = 2\psi(n+1) - \psi(a+n) - \psi(b+n), \quad |\arg(1-z)| < \pi,$$

$$a, b \neq 0, -1, -2, \dots$$

Доказательства первых трех формул были получены ранее (см. (4.4), (4.7) и замечание 2 на с. 50). Следующие также устанавливаются без особых затруднений, если использовать формулу Лежандра (3.17).

Рассмотрим лишь доказательство (5.40), так как логарифмические случаи часто встречаются в приложениях. Прежде всего отметим, что при $a=b=1$ выполняется свойство $k_n \equiv 0$ и формула (5.40) переходит в (5.32).

Покажем, что формула (5.40) непрерывно получается из (5.12) при $c=a+b+\varepsilon$, если $\varepsilon \rightarrow 0$. Для этого подставим $c=a+b+\varepsilon$ в формулу (5.12) и выделим главные члены правой части. Так как левая часть непрерывна при $\varepsilon \rightarrow 0$, то и правая будет непрерывной, а поэтому стоящая там неопределенность типа $\infty - \infty$ раскрывается. Поскольку $\Gamma(\varepsilon) \sim 1/\varepsilon$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, то для раскрытия неопределенности в числителе достаточно выделить лишь члены, содержащие ε , а члены порядка ε^2 можно отбросить (мы их обозначим через $+\dots$).

Из формул (2.32), (2.33), (3.28), (2.7), (4.6) легко найти, что

$$\begin{aligned}\Gamma(\varepsilon) &\sim 1/\varepsilon + \psi(1) + \dots, & \Gamma(a+\varepsilon) &= \Gamma(a)[1 + \psi(a)\varepsilon + \dots], \\ (a+\varepsilon)_k &= (a)_k[1 + \psi(a+k)\varepsilon - \psi(a)\varepsilon + \dots], \\ (1-z)^\varepsilon &= 1 + \varepsilon \ln(1-z) + \dots\end{aligned}\quad (5.41)$$

Записав правую часть (5.12) через ряды (5.1) и подставив туда эти разложения, получим выражение, имеющее структуру $(A/\varepsilon + B)(C + D\varepsilon) - (A/\varepsilon + B_1)(C + D_1\varepsilon) + \dots \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (B - B_1)C + A(D - D_1)$, а именно

$$\begin{aligned}F(a, b; a+b+\varepsilon; z) &= \left[\frac{1}{\varepsilon} + \psi(1) + \dots \right] \times \\ &\times \Gamma \left[\begin{matrix} a+b \\ a, b \end{matrix} \right] [1 + \psi(a+b)\varepsilon + \dots] [1 - \psi(b)\varepsilon + \dots] [1 - \psi(a)\varepsilon + \dots] \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(1)_n n!} (1-z)^n [1 + \psi(1+k)\varepsilon - \psi(1)\varepsilon + \dots] + \\ &+ \left[-\frac{1}{\varepsilon} + \psi(1) + \dots \right] \Gamma \left[\begin{matrix} a+b \\ a, b \end{matrix} \right] [1 + \psi(a+b)\varepsilon + \dots] \times \\ &\times [1 + \varepsilon \ln(1-z) + \dots] \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b)_n [1 + \psi(b+n)\varepsilon - \psi(b)\varepsilon + \dots] (a)_n [1 + \psi(a+n)\varepsilon - \psi(a)\varepsilon + \dots] (1-z)^n}{(1)_n [1 + \psi(1+n)\varepsilon - \psi(1)\varepsilon + \dots] n!}.\end{aligned}\quad (5.42)$$

После раскрытия скобок и перехода к пределу выводится доказываемое равенство (5.40).

При некоторых соотношениях между параметрами функция Гаусса содержит, в частности, функции и многочлены Лежандра $P_n^\mu(z)$, $Q_n^\mu(z)$, $P_n(z)$, многочлены Гегенбауэра $S_n^\lambda(z)$, Чебышева $T_n(z)$, $U_n(z)$, Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(z)$, полные эллиптические интегралы $K(k)$, $E(k)$, неполную бета-функцию $B_x(p, q)$ и другие важные специальные функции (см. § 11).

Таким образом, каждая формула для функции Гаусса позволяет получить множество соотношений для ее многочисленных частных случаев. Большинство формул § 10 относится к непосредственным частным случаям этой функции. Все они получаются с помощью базовых равенств (5.2), (5.14), формул, соответствующих образам $\mathcal{H}^*(s)$ типа $\begin{pmatrix} + + \\ + + \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} + - \\ + - \end{pmatrix}$, и раз-

личных перечисленных выше преобразований функции Гаусса. Большое число формул порождается квадратичными преобразованиями и соотношением Больца.

Практически все остальные формулы базовой таблицы относятся к различным частным случаям вырожденной гипергеометрической функции и к функциям Бесселя, которые сами являются конфлюентными частными случаями функции Гаусса.

§6. ВЫРОЖДЕННАЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ И ФУНКЦИИ ${}_0F_n$

1. Вырожденная гипергеометрическая функция обычно определяется как сумма ряда Куммера (1837 г.):

$${}_1F_1(a; c; z) \equiv \Phi(a, c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}. \quad (6.1)$$

Этот ряд, соответствующий случаю $p=q=1$ общего ряда (4.11), сходится при всех $|z| < \infty$, а на бесконечности имеет существенно особую точку (если он не обрывается в многочлен). Очевидно, что

$$e^z = {}_0F_0(z) = {}_1F_1(a; a; z). \quad (6.2)$$

Эта функция может быть получена из функции Гаусса (5.1) путем слияния двух особых точек последней, то есть с помощью конфлюенции (§ 4). Для этого заменой z на z/b в формуле (5.1) особенность из единицы смещается в точку $z=b$, а затем переходом к пределу при $b \rightarrow \infty$ эта особенность устранивается в бесконечность:

$${}_1F_1(a; c; z) = \lim_{b \rightarrow \infty} {}_2F_1(a, b; c; z/b). \quad (6.3)$$

Операция конфлюенции позволяет без затруднений переписать соответствующие формулы § 5 для случая функции Куммера. Так, уравнение (5.18) примет вид *вырожденного гипергеометрического уравнения Куммера*:

$$zu'' + (c - z)u' - au = 0, \quad (6.4)$$

формула (5.20) сведется к формуле его *общего решения* для нецелых c :

$$u(z) = C_1 {}_1F_1(a; c; z) + C_2 z^{1-c} {}_1F_1(a - c + 1; 2 - c; z), \quad (6.5)$$

формула Больца (5.8) перейдет в *формулу Куммера*:

$${}_1F_1(a; c; z) = e^z {}_1F_1(c - a; c; -z), \quad (6.6)$$

а интеграл Эйлера (5.7) — в *интеграл Лапласа*:

$${}_1F_1(a; c; z) = \Gamma \left[\begin{matrix} c \\ a, c - a \end{matrix} \right] \int_0^1 e^{z\tau} \tau^{a-1} (1 - \tau)^{c-a-1} d\tau, \quad (6.7)$$

$$\operatorname{Re} c > \operatorname{Re} a > 0.$$

Известно, что всякое однородное линейное дифференциальное уравнение с коэффициентами, линейными относительно независимой переменной, может быть проинтегрировано с помощью интеграла Лапласа

(6.7), то есть решения такого уравнения выражаются через вырожденную функцию Куммера.

В соответствии с теоремой Слейтер функцию Куммера, как и функцию Гаусса, можно эквивалентно определить через *интеграл Меллина—Бернса*

$$\Gamma \left[\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \right] {}_1F_1(a; c; z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} s, a-s \\ c-s \end{matrix} \right] (-z)^{-s} ds, \quad (6.8)$$

$$|\arg(-z)| < \pi/2, \quad a \neq 0, -1, -2, \dots,$$

где интегрирование ведется по пути, отделяющему левые полюсы*¹) $s=0, -1, -2, \dots$ от правых $s=a, a+1, \dots$, и допускается левая петля $L_{-\infty}$. Эта формула также получается из (5.2) с помощью конфлюенции. Условие на аргумент следует из (4.37) и может быть ослаблено лишь в случае интегрирования по левой петле. При $c=0, -1, -2, \dots$ левая часть (6.8) доопределяется по непрерывности таким же образом, как и в формуле (5.3).

Выражение $\Gamma \left[\begin{matrix} \end{matrix} \right]$ из формулы (6.8) относится к типу $(\pm^-)$. К функциям $\Sigma_A(z)$, содержащим функцию Куммера, можно прийти также, если найти прообразы типов $(++-)$, $(\pm^+)$ или $(\pm^-)$. Например, случаю $(++-)$ соответствует равенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1-c+s, a-s \\ a, a-c+1 \end{matrix} \right] z^{-s} ds = \Gamma \left[\begin{matrix} 1-c \\ a-c+1 \end{matrix} \right] {}_1F_1(a; c; z) + \\ + z^{1-c} \Gamma \left[\begin{matrix} c-1 \\ a \end{matrix} \right] {}_1F_1(a-c+1; 2-c; z) = \Psi(a, c; z), \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$|\arg z| < 3\pi/2, \quad a-c+1, \quad a \neq 0, -1, -2, \dots,$$

где интегрирование ведется по пути, отделяющему левые полюсы $s=-n, s=c-1-n$ от правых $s=a+n, n=0, 1, 2, \dots$, и допускается левая петля $L_{-\infty}$.

Полученная функция $\Psi(a, c; z)$ была введена Трикоми в 1927 г. Она, как и ${}_1F_1(a; c; z)$, в силу (6.5) является некоторым частным, независимым от ${}_1F_1(a; c; z)$ решением уравнения Куммера (6.4). Интегральное представление этого решения в виде *интеграла Трикоми*

$$\Psi(a, c; z) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-zt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt, \quad \operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} z > 0, \quad (6.10)$$

несложно вывести способом, примененным в § 5 при доказательстве формулы (5.7). В самом деле, разбив образ на произведение $(++-)==(+)(+-)$, в качестве прообразов множителей $\Gamma(s)$ и $\Gamma[1-c+s, a-s]$ возьмем функции

$$\mathcal{H}_1(\tau) = e^{-\tau}, \quad \mathcal{H}_2(\tau) = \Gamma(1+a-c) \tau^{1-c} (1+\tau)^{c-a-1}.$$

Если теперь составить интеграл (1.1) и заменить в нем t на $1/t$, а x на z , $\operatorname{Re} z > 0$, то получится формула (6.10).

Если $c=n+1, n=0, -1, -2, \dots$, то в формуле (6.9) наблюдается логарифмический случай, раскрываемый по непрерывности тем же методом, каким была выведена формула (5.40).

*¹) Предполагается, что $c \neq -n, c-a \neq -n$ ($n=0, 1, 2, \dots$).

Следует отметить, что, как установил Эрдейи (1939 г.), функция Трикоми может быть получена из функции Гаусса с помощью конфлюенции по знаменателю

$$\lim_{c \rightarrow \infty} F(a, b; c; 1 - c/z) = z^a \Psi(a, a - b + 1; z). \quad (6.11)$$

В соответствии с теоремами 18, 21 и равенствами (6.8), (6.9), (6.6) при $z \rightarrow 0$ или ∞ функции Куммера и Трикоми имеют следующее поведение: при $z \rightarrow 0$

$${}_1F_1(a; c; z) = O(1), \quad (6.12)$$

$$\Psi(a, c; z) = O(1) + O(|z|^{1-\operatorname{Re} c}), \quad c \neq 1, \quad \Psi(a, 1; z) = O(\ln|z|),$$

при $z \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} &{}_1F_1(a; c; z) = \\ &= \begin{cases} O((-z)^{-a}), & \operatorname{Re} z \rightarrow -\infty, \\ O(e^z z^{a-c}), & \operatorname{Re} z \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad \Psi(a, c; z) = O(z^{-a}), \quad |\arg z| < 3\pi/2. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Последние оценки можно уточнить, если воспользоваться формулой (4.43). В самом деле, образовав с помощью (6.8), (6.9) соответствующие суммы правых вычетов $\Sigma_B(1/z)$, которые приведут к расходящимся рядам типа ${}_2F_0$, в силу (4.43), (6.6) получим следующие *асимптотические соотношения* ([2], § 6.13):

$$\begin{aligned} &{}_1F_1(a; c; z) \sim \Gamma \left[\begin{matrix} c \\ c-a \end{matrix} \right] (e^{\pm \pi i z})^{-a} {}_2F_0(a, 1+a-c; -1/z) + \\ &+ \Gamma \left[\begin{matrix} c \\ a \end{matrix} \right] e^z z^{a-c} {}_2F_0(c-a, 1-a; 1/z), \quad |\arg z| < \pi, \quad \operatorname{Im} z \leq 0; \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\Psi(a, c; z) \sim z^{-a} {}_2F_0(a, 1+a-c; -1/z), \quad |\arg z| < 3\pi/2.$$

Если совершить конфлюенцию над формулой (5.15), то придем к следующему представлению функции Куммера в виде интеграла от образа, относящегося к типу $\left(\begin{matrix} + \\ + - \end{matrix} \right)$:

$${}_1F_1(a; c; z) = \frac{\Gamma[c, 1-a]}{2\pi i} \int_{L_{-\infty}} \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ 1-a+s, c-s \end{matrix} \right] z^{-s} ds, \quad |z| < \infty. \quad (6.15)$$

Здесь интегрирование ведется по петле $L_{-\infty}$, охватывающей полюсы $s = 0, -1, -2, \dots$ в положительном направлении. Эту формулу можно вывести и другим способом, воспользовавшись равенством (4.40).

Если в (6.15) перейти к пределу при $a \rightarrow 1$, то получим соотношение

$${}_1F_1(1; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{2\pi i} \int_{L_{-\infty}} \frac{\Psi(1) - \Psi(s)}{\Gamma(c-s)} z^{-s} ds, \quad (6.16)$$

связанное с (5.17) через конфлюенцию. В частности, при $c = 1$ из (6.8), (6.16) имеем следующие представления функции e^z :

$$e^z = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma(s) (-z)^{-s} ds, \quad \operatorname{Re} z < 0,$$

$$e^z = \frac{1}{2i \sin(\pi c)} \int_{L_{-\infty}} \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ 1-c+s, c-s \end{matrix} \right] z^{-s} ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{-\infty}} \frac{\psi(1) - \psi(s)}{\Gamma(1-s)} z^{-s} ds. \quad (6.17)$$

Через функции ${}_1F_1$ и Ψ выражаются функции Уиттекера:

$$M_{\kappa, \mu}(z) = e^{-z/2} z^{c/2} {}_1F_1(a; c; z), \quad a = \frac{1}{2} + \mu - \kappa, \quad c = 2\mu + 1, \quad (6.18)$$

$$W_{\kappa, \mu}(z) = e^{-z/2} z^{c/2} \Psi(a; c; z).$$

Частными случаями вырожденной гипергеометрической функции и функции Трикоми (с точностью до элементарных множителей) являются: e^z , функции Бесселя $J_\nu(z)$, $I_\nu(z)$, $H_\nu^{(j)}(z)$, $K_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, интегральные экспоненты и логарифм $Ei(z)$, $\bar{Ei}(z)$, $li(z)$, интегральные синус и косинус $Si(z)$, $si(z)$, $Ci(z)$, интегралы вероятности $Erf(z)$, $Erfc(z)$, интегралы Френеля $S(z)$, $C(z)$, $S(z, \alpha)$, $C(z, \alpha)$, неполные гамма-функции $\gamma(a, z)$, $\Gamma(a, z)$, функции параболического цилиндра $D_\nu(z)$, ортогональные многочлены Эрмита и Лагеррера $H_n(z)$, $L_n^\alpha(z)$ и некоторые другие функции. Соответствующие формулы приводятся в перечне обозначений (§ 11).

2. Функции Бесселя (цилиндрические функции) определяются на основе ряда

$${}_0F_1(c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(c)_k k!} = \lim_{a \rightarrow \infty} {}_1F_1(a; c; z/a), \quad (6.19)$$

представляющего собой целую функцию.

Этот ряд можно получить, воспользовавшись теоремой 18 в случае $A=D=1, B=C=0$:

$$\frac{1}{\Gamma(c)} {}_0F_1(c; -z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{-\infty}} \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ c-s \end{matrix} \right] z^{-s} ds. \quad (6.20)$$

Левую петлю $L_{-\infty}$, охватывающую левые полюсы $s=0, -1, -2, \dots$ (при $c \neq 0, -1, -2, \dots$), можно развернуть в контур $L_{i\infty}$, идущий от $\gamma - i\infty$ до $\gamma + i\infty$, лишь в случае, когда z действительно и $z=x>0$, а $2\gamma < \text{Res}c$, то есть выполняются условия теоремы 18, соответствующие случаю $A+B=C+D$. Если $\text{Res}c > 0$, то в качестве контура $L_{i\infty}$ можно брать прямую $\text{Res}c = \gamma$, где $0 < \gamma < \text{Res}c/2$.

Из теоремы 21 несложно установить *главный член асимптотического разложения функции (6.20) на бесконечности*:

$$[\Gamma(c)]^{-1} {}_0F_1(c; -z) \sim \pi^{-1/2} z^{1/4-c/2} \cos(2\sqrt{z} - \pi c/2 + \pi/4), \quad |\arg z| < 2\pi. \quad (6.21)$$

Формулы (6.20), (6.21) при $c=0, -1, -2, \dots$ следует понимать в предельном смысле, доопределив их левые части по непрерывности так, как это делалось в (5.3).

Функциями Бесселя комплексного порядка ν называются функции, определяемые формулами

$$J_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} = \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \times \\ \times \left(\frac{z}{2}\right)^\nu {}_0F_1\left(\nu+1; -\frac{z^2}{4}\right), \quad (6.22)$$

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\sin \pi \nu} [J_\nu(z) \cos \pi \nu - J_{-\nu}(z)], \quad (6.23)$$

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

$$H_\nu^{(j)}(z) = J_\nu(z) - (-1)^j i Y_\nu(z), \quad j = 1, 2, \quad (6.24)$$

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k! \Gamma(k+\nu+1)} = e^{-i\nu\pi/2} J_\nu(ze^{i\pi/2}), \quad (6.25)$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2 \sin \pi \nu} [I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)], \quad (6.26)$$

$$K_n(z) = \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(z) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Функцию $J_\nu(z)$ называют еще *функцией Бесселя первого рода*, функцию $Y_\nu(z)$ — *второго рода* или *функцией Неймана* и часто обозначают через $N_\nu(z)$; функции $H_\nu^{(j)}(z)$ называются *функциями Бесселя третьего рода* или *функциями Ганкеля*. Остальные две функции ($I_\nu(z)$, $K_\nu(z)$) называются *модифицированными функциями Бесселя*: $I_\nu(z)$ — *функцией первого рода* или *функцией Бесселя мнимого аргумента*, а $K_\nu(z)$ называют еще *функцией Макдональда*.

Для выделения однозначной ветви функций (6.22) — (6.26) обычно проводится разрез от $-\infty$ до 0 вдоль оси $y=0$, то есть полагается, что $|\arg z| < \pi$.

Все перечисленные функции определяются на основе ряда ${}_0F_1(c; z)$ и являются частными решениями двух *дифференциальных уравнений Бесселя: основного*

$$u'' + \frac{1}{z} u' + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0 \quad (6.27)$$

(его решениями являются функции $u(z)$, равные $J_{\pm\nu}(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(j)}(z)$) и *модифицированного*

$$u'' + \frac{1}{z} u' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0 \quad (6.28)$$

(его решениями являются функции $u(z)$, равные $I_{\pm\nu}(z)$, $K_\nu(z)$). Второе уравнение получается из первого после замены z на iz , осуществляющей поворот комплексной плоскости на прямой угол. Оба уравнения *четны* относительно ν и z и имеют по две особые точки: *правильную* при $z=0$ и *существенно особую* при $z=\infty$. Уравнение (6.27) может быть получено из уравнения Гаусса (5.18) путем двух конfluenceй по a и b с последующей заменой $c = \nu + 1$ и функции $u(z)$ на $\Gamma(\nu+1) i^{-\nu} z^{-\nu/2} u(2\sqrt{-z})$ или же

путем одной конfluenceции по b с последующей заменой $c = 2a = 2v + 1$ и функции $u(z)$ на $2^{2v} i^v \Gamma(v+1) z^{-v} e^{z/2} u(z/(2i))$.

Функции $J_{\pm v}(z)$, $Y_{\pm v}(z)$ и $I_{\pm v}(z)$ являются независимыми решениями соответствующих уравнений (6.27), (6.28) при всех v , за исключением целых, для которых справедливы равенства

$$\begin{aligned} J_{-n}(z) &= (-1)^n J_n(z), & Y_{-n}(z) &= (-1)^n Y_n(z), \\ I_{-n}(z) &= I_n(z) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Однако в этих логарифмических случаях независимыми от $J_v(z)$ ($I_v(z)$) решениями являются функции $Y_v(z)$ ($K_v(z)$), которые устроены так, что возникающие в (6.23), (6.26) при $v = n$ неопределенности могут быть раскрыты по непрерывности. Таким образом, общие решения уравнений (6.27), (6.28) имеют соответственно вид

$$u(z) = C_1 J_v(z) + C_2 Y_v(z) \quad (u(z) = C_1 I_v(z) + C_2 K_v(z)), \quad (6.30)$$

где C_1, C_2 — const. Причем вместо указанных функций в формулах (6.30) можно брать любые другие независимые частные решения.

Функции Бесселя — наиболее часто употребляемые и хорошо изученные высшие трансцендентные функции. Для них составлены различные таблицы, что в гораздо меньшей мере относится к более общим функциям Гаусса и Куммера. Благодаря широкому применению функций Бесселя при изучении уравнений математической физики в цилиндрических областях, эти функции часто называются цилиндрическими.

Как следует из формулы (4.10) для $\cos z$, аналогичной формулы для $\sin z$, формул Эйлера (2.9) и определений функций Бесселя, последние в случаях $v = \pm 1/2$ совпадают с элементарными:

$$\begin{aligned} J_{1/2}(z) &= Y_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z, \\ J_{-1/2}(z) &= -Y_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z, \\ I_{1/2}(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \operatorname{sh} z, \quad I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \operatorname{ch} z, \\ K_{1/2}(z) &= \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Воспользовавшись рекуррентной формулой

$$z J_{v+1}(z) = 2v J_v(z) - z J_{v-1}(z), \quad (6.32)$$

несложно показать, что все бесселевы функции с показателями $v = \pm n + 1/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, также представляют собой элементарные функции, получаемые на основе функций (6.31). Доказано, что при других значениях показателя v функции Бесселя элементарными не являются.

В соответствии с формулой (6.20) функция $J_v(z)$ может быть эквивалентно определена через интеграл Меллина—Бернса ([2], § 7.3.6 (34)):

$$J_v(z) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} (v+s)/2 \\ 1+(v-s)/2 \end{matrix} \right] \left(\frac{z}{2} \right)^{-s} ds,$$

$$z = x > 0, \quad -\operatorname{Re} v < \gamma < 1. \quad (6.33)$$

Причем ограничение на γ и условие вещественности z можно снять, если интегрирование вести по левой петле $L_{-\infty}$, охватывающей полюсы $s = -v - 2n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Аналогично функция $I_v(z)$ определяется интегралом

$$I_v(z) = \frac{1}{4i \sin(\pi c)} \int_{L_{-\infty}} \Gamma \left[\begin{matrix} (s+v)/2 \\ 1 + (v-s)/2, c + (v+s)/2, 1-c-(v+s)/2 \end{matrix} \right] \times \\ \times \left(\frac{z}{2} \right)^{-s} ds, \quad |z| < \infty, \quad (6.34)$$

где c произвольно, а левая петля $L_{-\infty}$, охватывающая полюсы $s = -v - 2n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, не может быть развернута в контур $L_{i\infty}$. В случаях, когда $c = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, правую часть (6.34) следует доопределять по непрерывности.

Подставив равенство (6.33) в определение (6.23) и воспользовавшись формулой дополнения (3.14), несложно вывести интеграл Меллина—Бернса для функции $Y_v(z)$:

$$Y_v(z) = -\frac{1}{4\pi i} \int_{L_{-\infty}} \Gamma \left[\begin{matrix} (v+s)/2, (s-v)/2 \\ (1-v+s)/2, (1+v-s)/2 \end{matrix} \right] \left(\frac{z}{2} \right)^{-s} ds, \quad (6.35)$$

где петля $L_{-\infty}$ охватывает полюсы $s = \pm v - 2n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

К функции $K_v(z)$ можно прийти, если искать прообраз образа $\mathcal{H}^*(s)$, относящегося к типу $(++)$. В самом деле, из теоремы 18 в случае $A=2$, $B=C=D=0$ вытекает, что при $|\arg z| < \pi$ справедливо следующее представление функции Макдональда через контурный интеграл:

$$K_v(2\sqrt{z}) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma[v/2 + s, -v/2 + s] z^{-s} ds, \quad \gamma > |\operatorname{Re} v|/2, \quad (6.36)$$

причем в качестве контура интегрирования можно брать также петлю $L_{-\infty}$, охватывающую полюсы $s = \pm v/2 - n$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Поведение функций Бесселя при $z \rightarrow 0$ легко установить из определяющих их формул

$$J_v(z) = O(z^v), \quad I_v(z) = O(|z|^{\operatorname{Re} v}); \quad Y_v(z) = O(|z|^{-|\operatorname{Re} v|}), \quad v \neq 0; \quad (6.37)$$

$$K_v(z) = O(|z|^{-|\operatorname{Re} v|}), \quad v \neq 0; \quad Y_0(z) = O(\ln |z|), \quad K_0(z) = O(\ln |z|).$$

Асимптотику этих функций на ∞ несложно вывести из формулы (6.21) или из теорем 19—21, применяемых непосредственно к соответствующим интегралам Меллина—Бернса:

$$J_v(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left[z - \frac{\pi}{4} (2v+1) \right], \\ Y_v(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin \left[z - \frac{\pi}{4} (2v+1) \right], \\ K_v(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad |\arg z| < 3\pi/2; \quad (6.38)$$

$$I_\nu(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z, \quad -\pi/2 < \arg z < 3\pi/2.$$

Последние формулы показывают, что $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ на бесконечности ведут себя как затухающие синусоиды и убывают как $x^{-1/2}$, а функции $K_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ при действительных $z=x \rightarrow +\infty$ имеют экспоненциальный порядок убывания и роста соответственно.

Для функций Бесселя можно вывести различные интегральные представления, аналогичные интегралам Эйлера, Лапласа и Трикоми. Например, $J_\nu(z)$ можно представить в виде *интеграла Мелера — Сонина* ([2], § 7.12 (12)):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) J_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty (\tau^2 - 1)^{-\nu-1/2} \sin(\tau z) d\tau, \quad |\operatorname{Re} \nu| < 1/2. \quad (6.39)$$

Для доказательства достаточно в формуле (1.18) положить $\nu=1/2$, $2/\sqrt{x}=z$, $t=\tau^2$ и $\mu=1/2-\nu$, воспользовавшись при этом свойством $\Gamma(0)=\infty$ и определением (6.22).

Аналогичным образом можно вывести представление $J_\nu(z)$ в виде *интеграла Пуассона* ([2], § 7.12 (8)):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right) J_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^1 (1 - \tau^2)^{\nu-1/2} \cos(\tau z) d\tau, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2, \quad (6.40)$$

представление $Y_\nu(z)$ в виде *интеграла Сонина* ([2], § 7.12 (13)):

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - \nu\right) Y_\nu(z) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_1^\infty (\tau^2 - 1)^{-\nu-1/2} \times \\ \times \cos(\tau z) d\tau, \quad |\operatorname{Re} \nu| < 1/2, \quad (6.41)$$

и определить *функцию Струве* $\mathbf{H}_\nu(z)$ через интеграл, симметричный последним трем ([2], § 7.5.4 (49)):

$$\Gamma(1/2 + \nu) \mathbf{H}_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^1 (1 - \tau^2)^{\nu-1/2} \times \\ \times \sin(\tau z) d\tau, \quad \operatorname{Re} \nu > -1/2. \quad (6.42)$$

Интеграл, определяющий $\mathbf{H}_\nu(z)$, был рассмотрен в § 1. Положив в (1.11), (1.15) $\nu=1/2$, $2/\sqrt{x}=z$, $t=\tau^2$, $\mu=\nu+1/2$ и воспользовавшись определением (6.42), легко получим следующее представление $\mathbf{H}_\nu(z)$ через ряд ${}_1F_2$ ([2], § 7.5.4 (55)):

$$\Gamma(\nu + 3/2) \mathbf{H}_\nu(z) = 2\sqrt{\pi} (z/2)^{\nu+1} {}_1F_2(1; \nu + 3/2, 3/2; -z^2/4). \quad (6.43)$$

Следует также отметить, что формулы (1.4), (1.10) можно трактовать как одно из интегральных представлений функции Макдональда $K_\nu(z)$, $z=2\sqrt{x}$ ([2], § 7.12 (23)).

С функциями Бесселя связаны некоторые специальные функции, выражающиеся через ряд ${}_1F_2(a; c_1, c_2; z)$ и обладающие схожими свойст-

вами: функции Ангера $J_\nu(z)$, Вебера $E_\nu(z)$, Струве $H_\nu(z)$, $L_\nu(z)$, Ломмеля $s_{\mu,\nu}(z)$, $S_{\mu,\nu}(z)$ и другие. Определения этих функций приведены в [2] (§ 7.5) и § 11.

3. Функции ${}_0F_n(c_1, c_2, \dots, c_n; z)$, $n=2, 3, \dots$, являются обобщениями ряда ${}_0F_1(c; z)$, через который определяются все функции Бесселя. Поэтому естественно, основываясь на рядах ${}_0F_n$, строить теорию более общих гипербесселевых функций. Такие функции еще недостаточно изучены и мало отражены в литературе [36]. Но так как через ряды ${}_0F_n$ выражаются значения многих интегралов, вычисляемых излагаемым здесь методом, то будет весьма полезным кратко остановиться на элементах теории этих рядов, которые следуют из § 4.

Функция ${}_0F_n$ определяется как сумма ряда (4.11) при $p=0$, $q=n$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(c_1)_k (c_2)_k \dots (c_n)_k} \frac{z^k}{k!} = {}_0F_n(c_1, c_2, \dots, c_n; z), \quad (6.44)$$

$$c_i \neq -l, \quad l=0, 1, 2, \dots, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

и представляет собой целую функцию переменной z . Ее можно также эквивалентно определить через интеграл Меллина—Бернса

$$\begin{aligned} \frac{{}_0F_n(c_1, c_2, \dots, c_n; -z)}{\Gamma[c_1, c_2, \dots, c_n]} &= \frac{1}{2\pi i} \times \\ &\times \int_{L_{-\infty}} \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ c_1 - s, c_2 - s, \dots, c_n - s \end{matrix} \right] z^{-s} ds, \end{aligned} \quad (6.45)$$

взятый по левой петле $L_{-\infty}$, охватывающей полюсы $s=0, -1, -2, \dots$

Главный член асимптотического разложения этой функции на бесконечности можно получить из теоремы 21 после несложных выкладок:

$$\begin{aligned} \frac{{}_0F_n(c_1, c_2, \dots, c_n; z)}{\Gamma[c_1, c_2, \dots, c_n]} &\sim \frac{1}{\sqrt{n+1} (2\pi)^{n/2}} \times \\ &\times \exp[(n+1)z^{1/(n+1)}] z^{\xi}, \quad \xi = (n/2 - \lambda)(n+1)^{-1}, \\ n \geq 0, |\arg z| < \pi, \lambda &= \sum_{i=1}^n c_i, |z| \rightarrow \infty; \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} \frac{{}_0F_n(c_1, c_2, \dots, c_n; -z)}{\Gamma[c_1, c_2, \dots, c_n]} &\sim \frac{2}{\sqrt{n+1} (2\pi)^{n/2}} \exp \left[(n+1)z^{1/(n+1)} \times \right. \\ &\times \left. \cos \frac{\pi}{n+1} \right] z^{\xi} \cos \{ \pi \xi + (n+1) \sin [\pi (n+1)^{-1}] z^{1/(n+1)} \}, \end{aligned}$$

$$n=2, 3, \dots, \arg z=0 \quad (\text{или } n=1, |\arg z| < 2\pi).$$

Из последней формулы следует, что функция ${}_0F_n(-x)$, $n>1$, при $x \rightarrow +\infty$ экспоненциально растет.

При $c_i = -l$, $l=0, 1, 2, \dots$, последние формулы следует понимать в предельном смысле, доопределив их по непрерывности, как это делалось в (5.3).

Дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция (6.45), можно получить из общего уравнения ([2], § 5.4 (1)) для G -

функции Мейера, положив там $y(z) = u_0(z) = G_{0,n+1}^{1,0}(z|0, 1-c_1, \dots, 1-c_n)$, или из уравнения (5.24) при $B=0, D=n, (d)=(c)$:

$$\frac{d}{dz} \prod_{i=1}^n \left(z \frac{d}{dz} + c_i - 1 \right) u + u = 0. \quad (6.47)$$

Это уравнение имеет две особые точки: правильную ($z=0$) и неправильную ($z=\infty$).

Фундаментальная система из $n+1$ линейно независимых решений этого уравнения в окрестности правильной точки $z=0$ включает функцию $u_0(z)$, равную (6.45), а также n функций вида

$$\begin{aligned} u_i(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{-\infty}} \Gamma \left[\begin{matrix} 1-c_i+s, c_i-s \\ 1-s, c_1-s, \dots, c_n-s \end{matrix} \right] z^{-s} ds = \\ &= z^{1-c_i} \frac{{}_0F_n(2-c_i, 1-c_i+(c)'; -z)}{\Gamma[2-c_i, 1-c_i+(c)']}, \quad i=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Если $n=0$, то уравнение (6.47) принимает форму $u'+u=0$ и имеет решение $u=Ce^{-z}$, $C=\text{const}$. При $n=1$ уравнение (6.47) записывается в виде

$$zu'' + cu' + u = 0, \quad (6.49)$$

а далее может быть преобразовано к уравнению Бесселя (6.27). Все решения (6.49) в случае $c \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ представимы формулой

$$u(z) = C_1 \frac{1}{\Gamma(c)} {}_0F_1(c; -z) + C_2 \frac{z^{1-c}}{\Gamma(2-c)} {}_0F_1(2-c; -z), \quad (6.50)$$

где $C_1, C_2 = \text{const}$. В особых логарифмических случаях, когда $c = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, независимым от $u_0(z) = J_{k-1}(2\sqrt{z}) z^{(1-k)/2}$, $c = k, k = 1, 2, 3, \dots$, решением будет функция

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(z) &= \lim_{c \rightarrow k} \frac{u_0(z) + (-1)^k u_1(z)}{c-k} = \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int_{L_{-\infty}} \Gamma[s, 1-k+s] \times \\ &\times \cos(\pi s) z^{-s} ds. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Способами, излагаемыми в §7, можно доказать, что при $k = 1, 2, 3, 4, \dots$

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1(z) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l z^l}{(k+l-1)! l!} [\ln z - \psi(k+l) - \psi(l+1)] - \\ &- \sum_{l=0}^{k-2} \frac{(k-l-2)!}{l!} z^{l+1-k} = \pi Y_{k-1}(2\sqrt{z}) z^{(1-k)/2}. \end{aligned} \quad (6.52)$$

Общее решение уравнения (6.49) при $c=k, k=1, 2, 3, \dots$, представляет собой линейную комбинацию функций $u_0(z)$ и $\tilde{u}_1(z)$.

§7. ХАРАКТЕРНЫЕ ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

В предыдущих параграфах было рассмотрено несколько примеров вычисления интегралов (1.4), (1.11), (1.18), (5.7), (6.10), которые дают возможность в общих чертах освоить настоящий метод вычисления интегралов. Другие подобные примеры содержатся в работе [21], где, в частности, подсчитано свыше полусотни интегралов, отсутствующих в справочниках [3, 7].

Однако на практике часто встречаются интегралы, относящиеся к логарифмическим случаям метода, интегралы от функций, содержащих аргументы со степенями, интегралы, к которым настоящий метод удобно применять в сочетании с другими приемами или повторно несколько раз, задачи, приводящие к интегралам Меллина—Бернса (7) общего вида, интегралы от функций, допускающих экспоненциальный рост, или от произведений нескольких функций гипергеометрического типа и другие особые типы интегралов. Поэтому совершенно необходимо подробнее остановиться на разборе наиболее типичных примеров вычисления таких особых случаев интегралов, требующих глубокого знания теории, чтобы читатель смог освоить различные нюансы практического использования рассматриваемого метода.

1. Логарифмические случаи возникают, если образ (4.17) вычисляемого интеграла (1.1) имеет кратные полюсы. Это может произойти, когда: 1) некоторые из параметров (a) (или (b)) образа (4.17) совпадают между собой или отличаются на целое число; 2) некоторые параметры числителя связаны условиями типа $a_j + b_k = 0, -1, -2, \dots$; 3) одновременно выполняются оба из указанных условий, как, например, у функции $\Gamma[s, -s, n+s]$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

В логарифмических случаях первого типа векторы $(a)' - a_j((b)' - b_k)$ из формул (4.15), (4.16) содержат отрицательные целые величины или нули, что приводит, вообще говоря, к неопределенностям, которые, как было доказано в § 4, всегда раскрываются. В такой ситуации для вычисления значения исходного интеграла допустимы два подхода: 1) после вычисления интеграла при значениях параметров, близких к «логарифмическим», совершается переход к пределу, когда параметры стремятся к «логарифмическим значениям»; 2) осуществляется непосредственное вычисление обратного преобразования Меллина (2.49) от функции $\mathcal{H}^*(s)$ с помощью теории вычетов по формуле типа (4.28), но с учетом наличия кратных полюсов.

Для детального разъяснения приемов вычислений в логарифмических случаях рассмотрим несколько примеров разной сложности.

Пример 1. Вычислим интеграл (1.4) при натуральных $\nu = n$, $n=0, 1, 2, \dots$ Воспользовавшись выкладками, соответствующими примеру 1 из § 1, легко получим образ этого интеграла:

$$\mathcal{H}^*(s) = \Gamma(s, s+n], \quad \text{Res} > 0. \quad (7.1)$$

В точках $s = 0, -1, \dots, 1-n$ функция $\mathcal{H}^*(s)$ имеет простые полюсы, а в точках $s = -n, -n-1, \dots$ — двукратные. Ее прообраз $\mathcal{H}(x)$ в соответствии с *первым подходом* можно искать как предел регулярного прообраза $\mathcal{H}(x) = 2x^{\nu/2} K_{\nu}(2\sqrt{x})$ из § 1 при $\nu \rightarrow n$. Вычислим этот предел.

Положив в формуле (1.9) $\nu = n + \epsilon$, перепишем ее в виде

$$\mathcal{H}(x) = \Gamma(n + \epsilon) {}_0F_1(1 - n - \epsilon; x) +$$

$$+ x^{n+\varepsilon} \Gamma(-n-\varepsilon) {}_0F_1(1+n+\varepsilon; x). \quad (7.2)$$

Правая часть этого равенства при $\varepsilon \rightarrow 0$ представляет собой неопределенность типа $\infty - \infty$. Для раскрытия такой неопределенности выделим ее главный член при $\varepsilon \rightarrow 0$. Так как n натуральное, то первые $n-1$ членов первого ряда (7.2) стремятся к конечному пределу. Оставшиеся члены этого ряда с номерами $k=n, n+1, \dots$ и члены второго ряда могут быть разложены с помощью формул (3.28), (5.41). При этом достаточно выделить лишь члены, содержащие ε^1 , а остальные можно отбросить, так как кратность соответствующих полюсов $s=-n, -n-1, \dots$ функции (7.1) равна двум:

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(n+\varepsilon)}{(1-n-\varepsilon)_k} &= \frac{\pi}{\Gamma(1-n+k-\varepsilon) \sin[\pi(n+\varepsilon)]} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \\ &\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{(-1)^n [1 - \varepsilon \psi(1+k-n) + \dots]^{-1}}{\varepsilon \Gamma(1+k-n)}, \\ x^{n+\varepsilon} &= x^n (1 + \varepsilon \ln x + \dots), \\ \frac{\Gamma(-n-\varepsilon)}{(1+n+\varepsilon)_k} &\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{(-1)^{n+1} [1 - \varepsilon \psi(1+n+k) + \dots]}{\varepsilon \Gamma(1+n+k)}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Подставив эти разложения в (7.2), получим в пределе искомое выражение для $2x^{n/2} K_n(2\sqrt{x})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x) &= \Gamma(n) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 + O(\varepsilon)}{(1-n)_k} \frac{x^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^n [1 + \varepsilon \psi(1-n+k) + \dots]}{\varepsilon \Gamma(1-n+k)} \times \\ &\times \frac{x^k}{k!} + x^n (1 + \varepsilon \ln x + \dots) \frac{(-1)^{n+1}}{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[1 - \varepsilon \psi(1+n+k) + \dots]}{\Gamma(1+n+k)} \times \\ &\times \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k (n-k-1)! x^k}{k!} - (-1)^n x^n \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k [\ln x - \psi(k+1) - \psi(k+n+1)]}{(n+k)! k!} = \\ &= 2x^{n/2} K_n(2\sqrt{x}) \end{aligned} \quad (7.4)$$

(до перехода к пределу индекс k во второй из сумм был заменен на $k+n$).

Это значение можно получить и непосредственно с помощью теории вычетов (*второй подход*). Для этого достаточно отметить (см. пример 2 ниже), что вычеты функции $\Gamma[s, s+n]x^{-s}$ в простых полюсах $s=-k$, $k=0, 1, \dots, n-1$, равны $(-1)^k/k! \Gamma(n-k)x^k$, а в двойных полюсах $s=-n-k$, $k=0, 1, 2, \dots$, они равны коэффициенту при $(s+n+k)^{-1} = \varepsilon^{-1}$ в выражении

$$\frac{(-1)^{n+k}}{\varepsilon(k+n)!} [1 + \varepsilon \psi(1+k+n)] - \frac{(-1)^k}{\varepsilon k!} [1 + \varepsilon \psi(1+k)] x^{n+k} (1 - \varepsilon \ln x).$$

Применив теорему о вычетах (2.18) к интегралу (2.49), где $\varphi^*(s) = \Gamma[s, s+n]$, $\tau = x$, без труда получим последнюю часть формулы (7.4).

Сопоставив описанные подходы, можно заметить, что второй значительно проще первого. Основная трудность при втором подходе состоит в точном нахождении вычетов подынтегрального выражения в кратных полюсах. В общем случае для отыскания таких вычетов используются весьма сложные формулы ([53], гл. 5). Поэтому здесь для большей наглядности этот вопрос освещается путем разбора трех примеров вычисления обратных преобразований Меллина от некоторых функций $\mathcal{H}^*(s)$, имеющих двух-, трех- и даже n -кратные полюсы, причем последний пример ввиду его особой важности для приложений вынесен в отдельный пункт.

Второй тип логарифмических случаев, когда некоторые параметры связаны равенствами $a_j + b_k = 0, -1, -2, \dots$, соответствует совпадению некоторых полюсов правой и левой серий. В этом случае обратное преобразование Меллина от $\mathcal{H}^*(s)$ следует находить с помощью теории вычетов, так как теорема Слейтер здесь неприменима.

Итак, остановимся на разборе трех упомянутых выше примеров вычисления обратных преобразований Меллина от функций $\mathcal{H}^*(s)$ (4.17), имеющих кратные полюсы, и попутно посчитаем некоторые соответствующие им интегралы.

Пример 2. Вычислим интеграл (см. (4.23))

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma[s, -n-s] z^{-s} ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.5)$$

где γ — некоторая действительная постоянная, причем $\gamma \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Как следует из замечания 2 на с. 50, при $n = 0, -1 < \gamma < 0$ интеграл принимает значение $\mathcal{H}(z) = -\ln(1+z)$, $|z| < 1$ (здесь $A = B = 1, C = D = 0$). Аналогично, если $0 < \gamma < 1, n = 0$, то интеграл (7.5) при $|z| > 1$ можно вычислять через сумму правых вычетов в точках $s = k$:

$$\mathcal{H}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \Gamma(k) (-1)^k z^{-k} / k! = -\ln(1+1/z). \text{ Этот же результат получа-}$$

ется, если интеграл по-прежнему рассматривать как сумму левых вычетов в точках $s = -k, k = 0, 1, 2, \dots$, но учесть, что точка $s = 0$ является двукратным полюсом с вычетом $\ln z$. Тогда $-\ln(1+z) + \ln z = -\ln(1+1/z)$.

Если при $n = 0$ выбрать $-l-1 < \gamma < -l, l = 0, 1, 2, \dots$, то в соответствии с замечанием 2 на с. 61 из функции $-\ln(1+z)$ следует вычесть l -й отрезок ряда Тейлора этой функции. Тогда интеграл (7.5) примет значение

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) = & -[\ln(1+z) - \sum_{k=1}^l (-1)^{k-1} z^k / k], \quad |z| < 1, \quad -l-1 < \\ & < \gamma < -l, \quad l = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.6)$$

Пусть $n = 0, 1, 2, \dots$ и выберем $-l-1 < \gamma < -l, l = -1, 0, 1, 2, \dots, n$. Тогда интеграл (7.5) можно рассматривать, с одной стороны, как сумму левых вычетов в двойных полюсах $s = -l-1, -l-2, \dots, -n$ и простых полюсах $s = -n-1, -n-2, \dots$, а с другой — как сумму правых вычетов в двойных полюсах $s = -l, -l+1, \dots, 0$ и простых полюсах $s = 1, 2, 3, \dots$. Причем обе суммы аналитически продолжают друг друга в силу теоремы 18.

Для нахождения этих значений интеграла посчитаем вычет функции

$\Gamma[s, -n-s]z^{-s}$ в некотором двойном полюсе $s=-k$, $k=0, 1, 2, \dots, n$. Воспользовавшись формулой (3.30), несложно найти, что при $s \rightarrow -k$

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &\sim \frac{(-1)^k}{k!(s+k)} [1 + (s+k)\psi(1+k)], \quad \Gamma(-n-s) \sim \\ &\sim \frac{(-1)^{n-k} [1 - (s+k)\psi(1+n-k)]}{(n-k)!(-s-k)}.\end{aligned}\quad (7.7)$$

Перемножив эти разложения с разложением

$$z^{-s} \sim z^k [1 - (s+k) \ln z + 1/2 (s+k)^2 \ln^2 z], \quad (7.8)$$

выделим коэффициент при $(s+k)^{-1}$, равный искомому вычету подынтегральной функции в двойном полюсе $s=-k$:

$$\begin{aligned}(-1)^{n-1} z^k [k!(n-k)!]^{-1} [\psi(1+k) - \psi(1+n-k) - \\ - \ln z], \quad k=0, 1, \dots, n.\end{aligned}\quad (7.9)$$

Вычеты подынтегральной функции в простых левых и правых полюсах находятся аналогично, но проще. Они соответственно равны

$$\begin{aligned}(-1)^k [k!]^{-1} \Gamma(k-n) z^k, \quad k=n+1, n+2, \dots, \\ (-1)^{n+k+1} [(n+k)!]^{-1} \Gamma(k) z^{-k}, \quad k=1, 2, 3, \dots\end{aligned}\quad (7.10)$$

Теперь для определения значений $\mathcal{H}(z)$ остается лишь просуммировать вычеты в соответствующих полюсах:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(z) &= (-1)^n \sum_{k=l+1}^n \frac{\ln z + \psi(1+n-k) - \psi(1+k)}{k!(n-k)!} z^k + \\ &+ (-z)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!(-z)^k}{(n+k+1)!}, \quad |z| < 1, \\ \mathcal{H}(z) &= (-1)^n \sum_{k=0}^l \frac{\psi(1+k) - \psi(1+n-k) - \ln z}{k!(n-k)!} z^k + (-1)^n \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!(-z)^{-k-1}}{(n+k+1)!}, \quad |z| > 1.\end{aligned}\quad (7.11)$$

Как вытекает из общей теории, полученные функции аналитически продолжают друг друга. Это можно непосредственно проверить при некоторых частных значениях n и l . В самом деле, положив, например, $n=1$, $l=-1$ и воспользовавшись свойствами функции $\psi(z)$ ([2], гл. 1.7.1), придем к следующим представлениям правых частей (7.11):

$$\begin{aligned}-\ln z - 1 - (\ln z - 1)z + z^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{(k+1)(k+2)}, \quad |z| < 1; \\ - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^{-k-1}}{(k+1)(k+2)}, \quad |z| > 1.\end{aligned}\quad (7.12)$$

Эти выражения являются разложениями в ряды одной функции $(1+z)\ln(1+1/z)-1$, но в окрестностях разных точек: $z=0$ и ∞ . Если взять $n=1, l=0$, то аналогично получим два разложения функции $(1+z)\ln(1+z)-z\ln z$, а если $n=l=1$, то разлагаемая функция равна $(1+z)\ln(1+z)-z$.

Если $n=0, 1, 2, \dots$, а $-n-p-1 < \gamma < -n-p$, $p=0, 1, 2, \dots$, то подобные рассуждения приводят к следующим представлениям значений $\mathcal{H}(z)$:

$$\mathcal{H}(z) = (-z)^{n+p+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+p)! (-z)^k}{(k+n+p+1)!}, \quad |z| < 1, \quad (7.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(z) = & (-z)^{n+1} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{k! (-z)^k}{(k+n+1)!} + (-1)^n \times \\ & \times \sum_{k=0}^n \frac{[\psi(1+k) - \psi(1+n-k) - \ln z]}{k!(n-k)!} z^k + \\ & + (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! (-z)^{-k-1}}{(n+k+1)!}, \quad |z| > 1. \end{aligned}$$

При $n=0, p=l$ первая из формул (7.13) совпадает с (7.6).

Таким же образом несложно получить и значения $\mathcal{H}(z)$ при $p < \gamma < -p+1$, $p=0, 1, 2, \dots$, которые для краткости здесь не приводятся.

Положив $\mathcal{H}_1^*(s) = \Gamma(-s-n)$, $\mathcal{H}_2^*(s) = \Gamma(s)$ и приняв во внимание формулу (3.11), несложно найти прообразы таких функций $\mathcal{H}_i^*(s)$ при $-l-1 < \gamma < -l$, $l=-1, 0, 1, \dots, n$:

$$\mathcal{H}_1(\tau) = \tau^n \left[e^{-1/\tau} - \sum_{k=0}^{n-l-1} (-\tau)^{-k}/k! \right], \quad (7.14)$$

$$\mathcal{H}_2(\tau) = e^{-\tau} - \sum_{k=0} (-\tau)^k/k!.$$

Значит, функции (7.11) при $z=x$ можно рассматривать как результат вычисления интеграла (1.1), где $\mathcal{H}_i(\tau)$ выражаются формулами (7.14). Сказанное в полной мере относится и к функциям (7.13) при $z=x$, если в формулах (7.14) положить $l=n+p \geq 0$ и считать сумму $\sum_{k=0}^{-p-1}$ равной нулю.

В частности, при $n=l=0$ ($n=1, l=0$) из формул (1.1), (7.14), (7.11) следуют значения интегралов

$$\int_0^{\infty} e^{-t/z} (e^{-t} - 1) t^{-1} dt = \int_0^1 (1 - \eta^2)(\ln \eta)^{-1} d\eta = -\ln(1+z), \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (7.15)$$

$$\int_0^{\infty} (e^{-t/z} - 1)(e^{-t} - 1) t^{-2} dt = (1+1/z) \ln(1+z) - \ln z, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (7.16)$$

Эти интегралы совпадают с частными значениями более общих интегралов 3.411 (19) и 3.42 (1) из [7].

З а м е ч а н и е. Положив в (5.2) $a=b=1$, $c=2$, несложно из правой части получить интеграл (7.5), где $n=\gamma=0$, а s заменена на $s-1$. Эта операция еще раз доказывает формулу (5.32).

П р и м е р 3. Вычислим интеграл

$$K(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma[s, s, -n-s] z^{-s} ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.17)$$

Подынтегральная функция имеет простые полюсы в точках $s = 1, 2, \dots$, двойные — в точках $s = -n-1, -n-2, \dots$ и тройные — в точках $s = 0, -1, \dots, -n$. Вычеты a_k (b_k) этой функции в простых (двойных) полюсах легко найти с помощью формул (3.30), (7.7), как в примере 2:

$$a_k(z) = (-1)^{n+k+1} \Gamma[k, k] [(n+k)!]^{-1} z^{-k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (7.18)$$

$$b_k(z) = \Gamma(k-n) (k!)^{-2} [2\psi(k+1) - \psi(k-n) - \\ - \ln z] z^k, \quad k = n+1, n+2, \dots$$

Чтобы найти вычеты в полюсах третьего порядка $s = 0, -1, -2, \dots, -n$, в числителе формулы (3.30) следует учесть члены, включающие не только $\varepsilon^0, \varepsilon^1$, но и ε^2 , где $\varepsilon = s+k$. Перемножив дополненные таким же образом разложения вида (7.7) с разложением (7.8) и отбросив остальные члены, содержащие $\varepsilon^{-3}, \varepsilon^{-2}, \varepsilon^0, \varepsilon^1$, получим следующее значение вычета $c_k(z)$ в тройном полюсе $s = -k, k = 0, 1, 2, \dots, n$:

$$c_k(z) = \frac{(-1)^{n-k-1} z^k}{(k!)^2 (n-k)!} \{ 1/2 \ln^2 z + \ln z [\psi(1+n-k) - 2\psi(1+k)] + \\ + 2 \psi^2(1+k) + 3\psi'(1) + 1/2 [\psi^2(1+n-k) - \psi'(1+n-k)] - \\ - \psi'(1+k) - 2\psi(1+n-k) \psi(1+k) \}. \quad (7.19)$$

Таким образом, величину интеграла (7.17) при $l < \gamma < l+1, l = 0, 1, 2, \dots$, можно вычислить по формуле

$$K(z) = \sum_{k=0}^n c_k(z) + \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k(z) + \sum_{k=1}^l a_k(z), \quad |z| < \infty, \\ |\arg z| < 3/2 \pi. \quad (7.20)$$

Если $l = -1, -2, \dots$, то из правой части (7.20) необходимо удалить последнюю сумму и слагаемые c_k, b_k с номерами $k = 0, 1, 2, \dots, -l-1$. Так как интеграл (7.17) вычисляется от образа $K^*(s)$, у которого $A+D = 2 > B+C = 1$, то в силу теоремы 18 его можно считать лишь через сумму левых вычетов.

Из формул (7.1), (7.4) (где $n = 0$) и (7.14), (1.1) вытекает, что при $l = 0, 1, 2, \dots$ справедливо равенство

$$2 \int_0^{\infty} (z/t)^n \left[e^{-t/z} - \sum_{k=0}^{n+l} (k!)^{-1} (-t/z)^k \right] K_0(2\sqrt{t}) t^{-1} dt = \\ = K(z), \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (7.21)$$

где $K'(z)$ выражается формулой (7.20). Если $l = -1, -2, \dots, -n-1$, то в формулу (7.21) вместо $2K_0(2\sqrt{t})$ следует подставить величину

$2K_0(2\sqrt{t}) - \sum_{k=0}^{-l-1} [2\psi(1+k) - \ln t] (k!)^{-2} t^k$, отличающуюся от прежней на отрезок вычетов (7.4) ($n=0$), а из (7.20) нужно удалить слагаемые с номерами $k=0, 1, 2, \dots, -l-1$. Причем сумма $\sum_{k=0}^{n+l}$ при $l=-n-1, -n-2, \dots$ полагается равной нулю.

Выбрав, в частности, $n=0, l=0$ ($l=-1$), получим значения двух отсутствующих в таблицах [3, 7] интегралов

$$\int_0^{\infty} (e^{-t/z} - 1) K_0(2\sqrt{t}) t^{-1} dt = \sum_{k=1}^{\infty} [2k!k]^{-1} [k^{-1} + \psi(k+1) - \ln z] z^k - 1/4 [\ln^2 z + 2\gamma \ln z + \gamma^2 + 3\psi'(1)], \operatorname{Re} z > 0, \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} e^{-t/z} [2K_0(2\sqrt{t}) + 2\gamma + \ln t] t^{-1} dt = \\ & = \sum_{k=1}^{\infty} (k!k)^{-1} [k^{-1} + \psi(k+1) - \ln z] z^k, \operatorname{Re} z > 0. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Здесь $\gamma = -\psi(1)$ означает постоянную Эйлера, которая может быть эквивалентно определена следующими равенствами ([2], § 1.1 (4), 1.7 (7)):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n 1/k \sim \ln n + \gamma, \quad n \rightarrow \infty; \\ & \gamma = - \int_0^{\infty} e^{-t} \ln t dt = -\psi(1) = 0,5772 \dots \end{aligned} \quad (7.24)$$

Необходимость вычисления интеграла (7.17) возникает, если рассматривать задачу о нахождении значения интеграла (1.1), у которого функции $\mathcal{H}_z(\tau)$ имеют образы $\Gamma(s)$ и $\Gamma[s, -n-s]$. Значения таких функций в зависимости от интервала изменения Res были приведены выше (см. формулы (7.14), (7.11), (7.13)). Так, например, при $n=0, -1 < \operatorname{Res} < 0$ ($0 < \operatorname{Res} < 1$) несложно получить величины еще двух отсутствующих в таблицах [3, 7] интегралов

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} (e^{-z/t} - 1) \ln(1+t) \frac{dt}{t} = \\ & = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[2\psi(k+1) - \psi(k) - \ln z]}{k!k} z^k, \operatorname{Re} z > 0, \end{aligned} \quad (7.25)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \ln(1+t/z) e^{-t} t^{-1} dt = - \sum_{k=1}^{\infty} (k!k)^{-1} [k^{-1} + \psi(k+1) - \ln z] z^k + \\ & + 1/2 [\ln^2 z + 2\gamma \ln z + \gamma^2 + 3\psi'(1)], \operatorname{Re} z > 0. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Следует еще отметить, что правую часть (7.23) в силу формул (6.9) и ([2], 6.7 (13)) можно рассматривать как конечную часть бесконечного предела $\lim_{a \rightarrow 0} a^{-2} \Psi(a, 1; z)$ при $a \rightarrow 0$.

З а м е ч а н и е. Интегралы, включающие логарифмы, часто можно вычислять с помощью дифференцирования по параметру похожих интегралов, значения которых известны. Так, например, если известно значение интеграла

$$\int_0^{\infty} \varphi(x) f^{\alpha}(x) dx = N(\alpha), \quad \text{то} \quad \int_0^{\infty} \varphi(x) \ln f(x) dx = N'(0).$$

Воспользовавшись этим замечанием, из интеграла Эйлера (1.6) и определения пси-функции (3.29) легко доказать вторую формулу (7.24) и можно вывести многие формулы из разделов 4.23—4.27 справочника [7].

2. Полилогарифмы произвольного порядка.

П р и м е р 4. Вычислим интеграл

$$L^n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\Gamma[s, -s]}{(-s)^{n-1}} (-z)^{-s} ds, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.27)$$

Подынтегральная функция имеет простые полюсы в точках $s = \mp k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, с вычетами $(-1)^k \Gamma(k) (-z)^k / [k! k^{n-1}]$, $\Gamma(k) (-1)^{k-1} \times \times (-z)^{-k} / [k! (-k)^{n-1}]$ и $(n+1)$ -кратный полюс в точке $s = 0$ с некоторым вычетом $r_n(z)$. Несложно убедиться, что образ $\mathcal{H}^*(s)$ из формулы (7.27) обладает свойствами $A + D = B + C = n$, $A + B - C - D = 2$. Поэтому из формул (4.40), (4.28) и теоремы 18 следует, что $L^n(z)$ является аналитической функцией, задаваемой в секторе $|\arg(-z)| < \pi$ при $|z| \leq 1$ различными выражениями, аналитически продолжающими друг друга через окружность $|z| = 1$.

Случай $n = 1$ был разобран в примере 2. Поступив таким же образом, при $-1 < \operatorname{Re} s = \gamma < 0$ получим следующие значения интеграла (7.27):

$$L^n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}, \quad |z| < 1; \quad L^n(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{(-k)^n} - r_n(z), \quad |z| > 1; \quad (7.28)$$

$$L^n(z) + (-1)^n L^n(1/z) = -r_n(z), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Первая из этих формул определяет функцию, называемую *полилогарифмом n -го порядка* [24, 38—41, 49, 63, 65], а вторая осуществляет аналитическое продолжение полилогарифма за пределы единичного круга. В частности, как было установлено в примере 2, при $n=1$ полилогарифм первого порядка совпадает с логарифмом $L^1(z) = -\ln(1-z)$, а $r_1(z) = \ln(-z)$.

Для нахождения вычета $r_n(z)$ в точке $s = 0$ представим подынтегральную функцию (7.27) в виде $(-1)^n s^{-n-1} \Gamma[1+s, 1-s] (-z)^{-s}$ и выделим коэффициент $r_n(z)$ при s^n из разложения функции $(-1)^n \Gamma[1+s, 1-s] \times \times (-z)^{-s}$ в ряд Тейлора. После перемножения трех составляющих рядов для $\Gamma(1+s)$, $\Gamma(1-s)$ и $(-z)^{-s}$ можно убедиться, что этот коэффициент имеет вид

$$r_n(z) = \sum_{l=0}^{[n/2]} c_l [(n-2l)!]^{-1} [\ln(-z)]^{n-2l}, \quad [2k/2] =$$

$$= [(2k+1)/2] = k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$c_l = \sum_{j=0}^{2l} (-1)^j [j! (2l-j)!]^{-1} \Gamma^{(j)}(1) \Gamma^{(2l-j)}(1), \quad c_0 = 1,$$

$$c_1 = \Gamma''(1) - [\Gamma'(1)]^2 = \Psi'(1) = \pi^2/6, \quad c_l = -2L^{2l}(-1),$$

$$l = 1, 2, \dots, n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.29)$$

В частности, при $n=2$ из формул (7.28), (7.29) ([7], 4.331, 4.335 (1)) следует соотношение ([2], 1.11.1 (23)) для *дилогарифма Эйлера* $L^2(z)$. При $n \geq 2$ полилогарифм непрерывен при переходе через окружность $|z|=1$, а при $n=1$ непрерывен всюду, кроме точки $z=1$.

Можно показать, что полилогарифмы связаны *рекуррентными соотношениями*

$$L^{n+1}(z) = \int_0^z t^{-1} L^n(t) dt, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (7.30)$$

Через полилогарифмы можно выразить некоторые определенные интегралы, например

$$\int_0^1 \ln^{n-2} \tau \cdot \ln(1 - \tau z) \tau^{-1} d\tau = (-1)^{n-1} (n-2)! L^n(z), \quad (7.31)$$

$$n = 2, 3, 4, \dots, \quad |\arg(1 - z)| < \pi,$$

$$\int_0^\infty e^{-t/z} \sum_{k=1}^\infty \frac{(-t)^k}{k! k^{n-1}} \frac{dt}{t} = L^n(-z), \quad n = 1, 2, \dots, \quad \operatorname{Re} z > 0. \quad (7.32)$$

В частности, при $z=1$ первая формула совпадает с формулами 4.315(3) из [7] и 1.12(4) из [2], а при $n=1$ вторая переходит в (7.15). Отметим, что из (7.31) несложно вывести выражение ([2], 1.11(3)) для функции $\Phi(z, s, v)$ при $s=n, v=1$.

Для доказательства (7.31) представим образ $\mathcal{H}^*(s)$ из равенства (7.27) в виде произведения $\mathcal{H}_1^*(s) = \Gamma[s, -s]$ и $\mathcal{H}_2^*(s) = (-s)^{1-n}$. Воспользовавшись теорией вычетов, легко найти прообразы этих функций, если $-1 < \gamma < 0$: $\mathcal{H}_1(\tau) = -\ln(1 + \tau)$, $0 < |\tau| < \infty$; $\mathcal{H}_2(\tau) \equiv 0$, $|\tau| < 1$; $(n-2)! \times \times \mathcal{H}_2(\tau) = (\ln \tau)^{n-2}$, $|\tau| > 1$.

Композиция (1.1) этих прообразов после замены $t = x\tau$ и x на $-z$ приводит к формуле (7.31), которую можно трактовать как *интегральное представление полилогарифма в комплексной плоскости*. Для доказательства (7.32) можно использовать аналогичный способ или же просто достаточно почленно проинтегрировать ряд (7.32).

Следует отметить, что формулы (7.27)–(7.32) могут быть обобщены на случай произвольных комплексных значений v параметра n . В самом деле, заменив там n на v , получим соотношения

$$L^v(z) = \sum_{k=1}^\infty \frac{z^k}{k^v} = -\frac{1}{\Gamma(v-1)} \int_0^1 \ln^{v-2} \frac{1}{\tau} \ln(1 - \tau z) \frac{d\tau}{\tau} =$$

$$= \frac{z}{\Gamma(v)} \int_0^\infty \frac{t^{v-1} dt}{e^t - z} = \frac{z}{\Gamma(v)} \int_1^\infty \frac{\ln^{v-1} \tau d\tau}{(\tau - z) \tau}, \quad (7.33)$$

$$|z| < 1 \text{ или } |\arg(1 - z)| < \pi, \quad \operatorname{Re} v > 1.$$

Функция $L^v(z)$ продолжает полилогарифм в комплексную плоскость v и является аналитической функцией двух переменных v и z . В рабо-

тах [2, 24, 38—41, 49, 63, 65] и других она обозначается различными символами: $L^v(z) \equiv S_v(z) \equiv L_v(z) \equiv \text{Li}_v(z) \equiv F(z, v)$ и называется *полилогарифмом комплексного порядка v , функцией Жонкье* (A. Jonqui re, 1889) или *Спенса* (W. Spence, 1819). Второй из интегралов (7.33), получающийся из (7.31) заменой $\ln \tau = -t$, n на v и интегрированием по частям, называется *интегралом Бозе—Эйнштейна* или *Ферми—Дирака* [38]. Он сходится, если $\text{Re } v > 0$, $z \in [1, \infty)$ или же если $\text{Re } v > 1$ и $z = 1$.

Ряд, стоящий в (7.33), сходится, если $|z| < 1$ или $|z| = 1$, $\text{Re } v > 1$ ($|z| = 1$, $z \neq 1$, $0 < \text{Re } v \leq 1$).

Очевидно, что при $z = 1$ функция $L^v(z)$ совпадает с ζ -функцией Римана ([2], § 1.12).

Выведем обобщение последней из формул (7.28). С этой целью рассмотрим аналогичный (7.27) интеграл

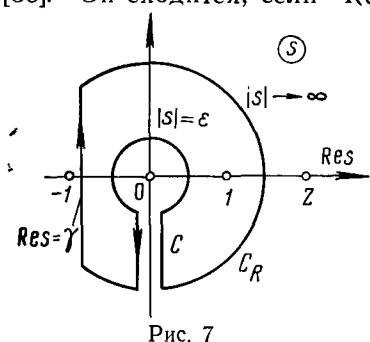


Рис. 7

$$A_v(z) = \frac{1}{2i} \int_C \frac{(-z)^{-s} ds}{(-s)^v \sin \pi s}, \quad (7.34)$$

взятый по контуру C , который изображен на рис. 7. При $|s| \rightarrow \infty$ модуль подынтегральной функции из интеграла (7.34) оценивается величиной

$$\exp \{ -\text{Re } s \ln |z| + i \text{Im } s \arg(-z) - \pi [\text{Im } s] \} |s|^{-\text{Re } v}. \quad (7.35)$$

Отсюда следует, что интеграл по круговому контуру $C_R \setminus \{|s| = R\}$ при $R \rightarrow \infty$ убывает, если $|z| > 1$ (или $|z| = 1$, $\text{Re } v > 1$) и $|\arg(-z)| < \pi$.

Применив к интегралу (7.34) теорему 5 о вычетах, приняв во внимание, что на малой окружности $-s = \epsilon e^{i\varphi}$, $-3\pi/2 < \varphi < \pi/2$, и перейдя к пределу при $R \rightarrow \infty$ и $|z| > 1$, получим равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{(-z)^{-s} ds}{(-s)^v \sin \pi s} + \frac{1}{2i} \int_{-3\pi/2}^{\pi/2} \frac{(-z)^{\epsilon e^{i\varphi}} \epsilon i e^{i\varphi} d\varphi}{(\epsilon e^{i\varphi})^v \sin(\pi \epsilon e^{i\varphi})} + \\ & + 1/2 (e^{-\pi v i/2} - e^{3\pi v i/2}) \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{(-z)^t dt}{t^v \sin(\pi t)} = \\ & = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{-k}}{(-k)^v} = -e^{\pi v i} L^v \left(\frac{1}{z} \right). \end{aligned} \quad (7.36)$$

Первый из интегралов (7.36) при $|z| < 1$ можно записать через ряд левых вычетов в точках $s = -k$, $k = 1, 2, 3, \dots$, так как в силу (7.35) его подынтегральная функция при $|z| < 1$ и $\text{Re } s \rightarrow -\infty$ экспоненциально убывает. Легко убедиться, что этот ряд равен $L^v(z)$ при $|z| < 1$. Ввиду оценки (7.35) функция $L^v(z)$ аналитически продолжима на всю плоскость z с разрезом $(1, \infty)$, и это продолжение осуществляется формулой (7.36), которую теперь можно записать в виде

$$L^v(z) + e^{\pi v i} L^v \left(\frac{1}{z} \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[e^{\pi v i/2} \sin \pi v \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{(-z)^t dt}{t^v \text{sh}(\pi t)} - \right.$$

$$-\frac{1}{2} \int_{-\frac{3}{2}2\pi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(-z)^{ee^{i\varphi}}(ee^{i\varphi})^{1-\nu} d\varphi}{\sin(\pi ee^{i\varphi})} \Big]. \quad (7.37)$$

Предел из правой части выражается через обобщенную ζ -функцию Римана ([2], 1.10 (3)), если $\operatorname{Re} \nu < 0$. Тогда из (7.37) получается соотношение Жонкье ([2], 1.11 (16)):

$$L^\nu(z) + e^{\pi\nu i} L^\nu\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{(2\pi)^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{\frac{\pi\nu i}{2}} \zeta\left(1-\nu, \frac{\ln z}{2\pi i}\right), \quad (7.38)$$

$$\operatorname{Re} \nu < 0, \quad 0 < \arg z < 2\pi.$$

В частности, если $\nu = -1, -2, -3, \dots$, то правая часть (7.38) обращается в нуль.

Если $\operatorname{Re} \nu \geq 0$, то предел (7.37) также существует и при $\nu = n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, он оказывается равным $-r_n(z)$.

При переходе через разрез $(1, \infty)$ полилогарифм (7.33) ведет себя как интеграл типа Коши [5, 18], то есть его предельные значения $L^\nu(x \pm i0) = L^{\nu\pm}(x)$, $x > 1$, связаны формулами Сохоцкого ([5], §4):

$$L^{\nu+}(x) - L^{\nu-}(x) = 2\pi i [\Gamma(\nu)]^{-1} \ln^{\nu-1} x, \quad 1 < x < \infty, \quad (7.39)$$

$$L^{\nu+}(x) + L^{\nu-}(x) = \frac{2x}{\Gamma(\nu)} \int_1^\infty \frac{\ln^{\nu-1} \tau}{(\tau - x) \tau} \frac{d\tau}{\tau} = 2L^\nu(x), \quad \operatorname{Re} \nu > 0.$$

Последнее равенство позволяет не только доопределить полилогарифм $L^\nu(z)$ на случай, когда его аргумент z находится на разрезе $(1, \infty)$, но и дает возможность вычислить ряд особых интегралов вида (7.39), например

$$x \int_1^\infty \frac{\ln \tau d\tau}{(\tau - x) \tau} = -L^2\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{2} \ln^2 x + \frac{\pi^2}{3}, \quad (7.40)$$

$$x \int_1^\infty \frac{\ln^2 \tau d\tau}{(\tau - x) \tau} = L^3\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{6} \ln^3 x + \frac{\pi^2}{3} \ln x, \quad x > 1.$$

Более подробную информацию о свойствах $L^\nu(z)$ можно найти в указанных выше источниках и справочнике [2].

3. Интегралы от функций, содержащих рациональные степени аргумента. Покажем, что справедлива следующая

Теорема 22. Если с помощью излагаемого здесь метода удастся вычислить интеграл вида (1.1) от функций $\mathcal{H}_i(\eta)$, $i=1, 2$, типа (4.20), то этот метод позволяет вычислить и любой интеграл вида

$$\int_0^\infty \mathcal{H}_1[(x/t)^{r/k}] \mathcal{H}_2(t^{p/q}) \frac{dt}{t} = \mathcal{H}_0(x), \quad (7.41)$$

где r, k, p, q — целые числа. Причем его значение $\mathcal{H}_0(x)$ снова может быть выражено через гипергеометрические функции типа $\Sigma_A(x)$, $\Sigma_B(1/x)$.

Доказательство. Пусть $pr \neq 0$ (так как в случае $pr=0$ утверждение теоремы вполне очевидно). Считая дроби r/k , p/q несократимыми, совершим в интеграле (7.41) замены $t^m = \tau$, $x^m = y$, $n = mk/r$, $l = mq/p$, где $m > 0$ — наименьшее общее кратное чисел r и p . Тогда получим соотношение

$$\mathcal{H}_0(y^{1/m}) = 1/m \int_0^\infty \mathcal{H}_1[(y/\tau)^{1/n}] \mathcal{H}_2(\tau^{1/l}) \tau^{-1} d\tau, \quad (7.42)$$

где n и l — целые числа. Совершив преобразование Меллина (1.3) над этим равенством, придем к формуле

$$m^2 |nl|^{-1} \mathcal{H}_0^*(ms) = \mathcal{H}_1^*(ns) \mathcal{H}_2^*(ls). \quad (7.43)$$

По условию теоремы образы $\mathcal{H}_i^*(s)$ выражаются формулами типа (4.17). Обозначим их соответствующие параметры через $(a)_i$, $(b)_i$, $(c)_i$, $(d)_i$, $A_i + D_i - B_i - C_i = \alpha_i$, $A_i + B_i - C_i - D_i = \beta_i$, $i = 1, 2$, а через v_i обозначим величины, задаваемые последней формулой (4.186). Тогда после применения к каждой из Γ -функций правой части (7.43) формулы умножения (3.16) равенство (7.43) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^*(ms) = MN^s \Gamma \left[\begin{array}{l} \Delta(|n|, (a)_1 + sn), \Delta(|l|, (a)_2 + sl), \\ \Delta(|n|, (c)_1 + sn), \Delta(|l|, (c)_2 + sl), \\ \Delta(|n|, (b)_1 + sn), \Delta(|l|, (b)_2 + sl) \\ \Delta(|n|, (d)_1 + sn), \Delta(|l|, (d)_2 + sl) \end{array} \right], \end{aligned} \quad (7.44)$$

где

$$\begin{aligned} M &= m^{-2} |n|^{1+v_1-1/2\beta_1} |l|^{1+v_2-1/2\beta_2} (2\pi)^{(1-|n|)\beta_1/2 + (1-|l|)\beta_2/2}, \\ N &= |n|^{n\alpha_1} |l|^{l\alpha_2}, \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$\Delta(n, x) = \frac{x}{n}, \frac{x+1}{n}, \dots, \frac{x+n-1}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

В силу обозначения (7.45) образ $\Gamma[]$ из правой части (7.44) имеет структуру (4.17) и зависит только от $\pm s$, а не от $\pm ns$ и $\pm ls$, как в формуле (7.43). Поэтому прообраз выражения $N^s \Gamma[]$ может быть найден с помощью теоремы Слейтер или в логарифмических случаях способами, описанными в начале этого параграфа. Легко показать, что если $Q(\tau)$ есть прообраз $\Gamma[] = Q^*(s)$, то функция $Q(\tau/N)$ есть прообраз $N^s \Gamma[]$. Вычислив прообраз (7.44), несложно найти значение интеграла (7.41):

$$\mathcal{H}_0(x) = MmQ(x^m/N). \quad (7.46)$$

Очевидно, что функция $\mathcal{H}_0(x)$, как и $Q(\tau)$, выражается через функции гипергеометрического типа $\Sigma_A(x)$, $\Sigma_B(1/x)$.

З а м е ч а н и е. Теорема 22 распространяется и на случай интегралов (7.41) с произвольными действительными показателями r/k , p/q . Но тогда их значения выражаются, вообще говоря, не через обобщенные гипергеометрические функции, а через более общие ряды с гамма-коэффициентами вида (7.69). Такие ряды изучались в работах [1, 34, 74, 75].

Рассмотрим пример использования теоремы 22 для вычисления интегралов.

Пример 5. Вычислим отсутствующий в таблицах [7] интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-t^3} \sin(at) t^{\lambda-1} dt = I(a). \quad (7.47)$$

1-й способ. Как следует из формул (6.31), (6.33), (6.17) (или же из строки 3.2 (1) § 10 и равенства (1.6)), справедливы соответствия

$$\sin 2\sqrt{x} \longleftrightarrow \sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2 \\ 1-s \end{matrix} \right], \quad |\operatorname{Re} s| < 1/2;$$

$$e^{-x} \longleftrightarrow \Gamma(s), \quad \operatorname{Re} s > 0. \quad (7.48)$$

Обозначив $\mathcal{H}_1(x) = \sin 2\sqrt{x}$, $\mathcal{H}_2(x) = x^\mu e^{-x}$, запишем формулу (7.47) в виде (7.41), где $r/k = -2$, $p/q = 3$, $x = 2/a$, $3\mu = \lambda$, $I(a) = \mathcal{H}_0(x)$. Ясно, что $m = 6$ (в принципе можно брать и $m = -6$), $n = -3$, $l = 2$, $\alpha_1 = 2$, $\beta_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\beta_2 = 1$, $\nu_1 = -1/2$, $\nu_2 = \mu$, и формулы (7.43), (7.44) принимают вид

$$6\mathcal{H}_0^*(6s) = \sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2 - 3s, 2s + \mu \\ 1 + 3s \end{matrix} \right] =$$

$$= \frac{2^{\mu-1}}{\sqrt{3}} (2^2 \cdot 3^{-6})^s \Gamma \left[\begin{matrix} s + \mu/2, s + (\mu+1)/2, 1/6 - s, 1/2 - s, 5/6 - s \\ s + 1/3, s + 2/3, s + 1 \end{matrix} \right]. \quad (7.49)$$

Образ $Q^*(s)$ из правой части (7.49) имеет характеристики $A + D = 2 < B + C = 6$. Поэтому, воспользовавшись теоремой Слейтер, при $-\operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < 1/6$, то есть $\operatorname{Re} \lambda > -1$, по формуле (4.16) получим соответствующее значение $Q(\tau) = \Sigma_B(1/\tau)$, а далее в силу (7.46) найдем

$$I(a) = \mathcal{H}_0(2/a) = 2^{\mu-1} \cdot 3^{-1/2} Q(2^4(3/a)^6). \quad (7.50)$$

Интеграл (7.47) выражается через комбинацию трех рядов ${}_2F_5$.

2-й способ. К вычислению интеграла (7.47) можно подойти и иначе с учетом структуры базовой таблицы. Заметив, что в строках 3.2 (8) и 3.1(2) § 10 указаны образы функций $\sin(6x^{-1/6})$ и $e^{-2\sqrt{x}}$, совершив в интеграле (7.47) замену $t = 2^{1/3}\tau^{1/6}$, $a2^{1/3} = 6x^{-1/6}$. Тогда этот интеграл примет вид (1.1), где

$$\mathcal{H}_1(x) = \sin(6x^{-1/6}), \quad \mathcal{H}_2(x) = x^{\lambda/6} e^{-2\sqrt{x}}, \quad \mathcal{H}(x) = 6 \cdot 2^{-\lambda/3} I(a).$$

Перемножив образы $\mathcal{H}_1^*(s)\mathcal{H}_2^*(s) = \mathcal{H}^*(s) = \sqrt{3}Q^*(s)$, получим указанное в (7.49) значение $Q^*(s)$. Взяв прообраз и совершив обратную замену, опять приходим к значению (7.50).

Разобранный пример показывает, что второй способ более эффективен, так как он требует меньше замен. Однако эти замены более специфичны и преследуют цель выделить в интеграле функции, указанные в базовой таблице, которая составлена так, чтобы при переходе от (7.42) к (7.44) не появлялся множитель N^s . Научиться замечать необходимые замены при втором способе вычисления значительно труднее, чем при первом. Одной из основных трудностей здесь является отыскание в таблице подходящих функций $\mathcal{H}_i(x)$ и приведение встретившегося интеграла к виду (1.1). Разберем дополнительные примеры, поясняющие эту сторону вычислений.

Пример 6. Рассмотрим интеграл

$$L = \int_0^{\infty} e^{-a\tau} I_{\nu}(b\tau) \tau^{\lambda-1} d\tau. \quad (7.51)$$

В базовой таблице нет функции $I_{\nu}(x)$, так как при $x \rightarrow +\infty$ эта функция экспоненциально растет (§ 6). Однако там в строке 9.12(1) имеется функция $e^{-x/2} I_{\nu}(x/2)$. Введя обозначения

$$t = 2b\tau, \quad x = 2b/(a-b), \quad \mathcal{H}_1(\tau) = e^{-1/\tau} \tau^{-\lambda}, \quad \mathcal{H}_2(\tau) = e^{-\tau/2} I_{\nu}(\tau/2), \\ \mathcal{H}(x) = x^{-\lambda} (2b)^{\lambda} L, \quad (7.52)$$

преобразуем интеграл (7.51) к каноническому виду (1.1). Перемножив образы $\mathcal{H}_i^*(s)$, $i = 1, 2$, придем к значению

$$\mathcal{H}^*(s) = \frac{1}{V\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s + \nu, 1/2 - s, \lambda - s \\ \nu + 1 - s \end{matrix} \right], \\ -\operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} s < 1/2, \operatorname{Re} \lambda. \quad (7.53)$$

Вычислив прообраз $\mathcal{H}(x)$ по теореме Слейтер или по формуле (5.2), после обратной замены (7.52) получим искомое значение интеграла (7.51):

$$L = \frac{(2b)^{\nu}}{V\pi} (a-b)^{-\lambda-\nu} \Gamma \left[\begin{matrix} \nu + 1/2, \lambda + \nu \\ 2\nu + 1 \end{matrix} \right] F(\nu + 1/2, \lambda + \\ + \nu; 2\nu + 1; 2b/(b-a)), \\ \operatorname{Re}(\lambda + \nu) > 0, \operatorname{Re} a > |\operatorname{Re} b| > 0 \quad (7.54)$$

(условие $\operatorname{Re} \nu > -1/2$ здесь можно отбросить). Это значение при $\lambda = 1$ совпадает с формулами 6.611 (4), 6.621 (1) из [7], с точностью до постоянного множителя оно совпадает с 6.628 (6) и совсем не согласуется с 6.628 (4) из [7] (в двух последних формулах имеются ошибки).

Пример 7. Вычислим интеграл

$$M = \int_0^{\infty} \tau^{\lambda-1} K_{\mu}(a\tau) I_{\nu}(b\tau) d\tau. \quad (7.55)$$

В этом случае даже прием, использованный в предыдущем примере, применить нельзя: в базовой таблице нет подходящих функций. Поступим иначе: воспользовавшись формулой (6.25), преобразуем функцию I_{ν} в J_{ν} , которая отражена в таблице:

$$M = (-i)^{\nu} \int_0^{\infty} \tau^{\lambda-1} K_{\mu}(a\tau) J_{\nu}(bi\tau) d\tau. \quad (7.56)$$

Совершив в этом интеграле замены

$$\tau = 2\sqrt{t}/(bi), \quad x = -b^2/a^2, \quad \mathcal{H}_1(\eta) = K_{\mu}(2/\sqrt{\eta}) \eta^{-\lambda/2}, \\ \mathcal{H}_2(\eta) = J_{\nu}(2\sqrt{\eta}), \quad M = (-i)^{\nu} a^{-\lambda} 2^{\lambda-1} \mathcal{H}(x), \quad (7.57)$$

получим равенство (1.1). Образы соответствующих функций можно найти из строк 9.3(5), 9.2(1) § 10. Перемножив их, получим

$$\mathcal{H}^*(s) = 1/2\Gamma \left[\begin{matrix} (\mu + \lambda)/2 - s, (\lambda - \mu)/2 - s, \nu/2 + s \\ \nu/2 + 1 - s \end{matrix} \right],$$

$$-\operatorname{Rev}/2 < \operatorname{Re} s < 3/4, \operatorname{Re}(\lambda \pm \mu)/2. \quad (7.58)$$

Теперь, воспользовавшись теоремой Слейтер, несложно найти прообраз $\mathcal{K}(x)$, а затем и значение интеграла (7.55):

$$M = 2^{\lambda-2} a^{-\lambda-\nu} b^{\nu} \Gamma \left[\begin{matrix} (\mu + \lambda + \nu)/2, (\lambda + \nu - \mu)/2 \\ \nu + 1 \end{matrix} \right] \times \\ \times F((\mu + \lambda + \nu)/2, (\lambda + \nu - \mu)/2; \nu + 1; b^2/a^2), \quad (7.59) \\ \operatorname{Re}(\lambda + \nu \pm \mu) > 0, \operatorname{Re}(a \pm b) > 0.$$

Это значение полностью совпадает с приведенным в формулах 6.576 (3, 5) из [7]. Положив здесь $\mu=1/2$, заменив λ на $\lambda+1/2$ и воспользовавшись (6.31) и формулой 2.11 (17) из [2], можно получить равенство (7.51), (7.54).

4. Использование настоящего метода в сочетании с другими. Возможности излагаемого здесь метода можно существенно расширить, если использовать его в сочетании с другими операциями, которые широко применяются при вычислении интегралов. К таким операциям относятся разложение в ряд, интегрирование и дифференцирование по параметрам. Разберем пример вычисления важного в приложениях интеграла от функции вероятности $\operatorname{Erf}(x)$. Особенности этого примера являются необходимость разложения подынтегральной функции в ряд, почленное интегрирование этого ряда по бесконечному интервалу и форма результата вычислений, которая содержит вырожденную гипергеометрическую функцию двух переменных.

Пример 8. Вычислим интеграл

$$N_{\lambda}(b, p) = \int_0^{\infty} \operatorname{Erf}(a\tau) e^{-b^2\tau^2 - p\tau} \tau^{\lambda-1} d\tau. \quad (7.60)$$

Обратившись к таблице § 10, можно заметить, что в ней отражены функции, позволяющие вычислить интеграл (7.60) лишь в частных случаях, когда $p=0$ или $b=0$. Допустим, что значение $N_{\lambda}(b, 0)$ найдено. Тогда несложно написать и значение всего интеграла $N_{\lambda}(b, p)$, если учесть, что функцию $e^{-p\tau}$ можно разложить в ряд по степеням $-p\tau$, и допустить возможность почленного интегрирования этого ряда:

$$N_{\lambda}(b, p) = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1} (-p)^k N_{\lambda+k}(b, 0). \quad (7.61)$$

Для осуществления такой схемы вычислений совершим в интеграле $N_{\lambda}(b, 0)$ замены

$$b\tau = \sqrt{t}, \quad a\sqrt{x} = b, \quad \mathcal{K}_1(\tau) = \operatorname{Erf}(1/\sqrt{\tau}), \\ \mathcal{K}_2(\tau) = e^{-\tau} \tau^{\lambda/2}, \quad \mathcal{K}(x) = 2b^{\lambda} N_{\lambda}(b, 0), \quad (7.62)$$

после которых получим равенство (1.1). Обратившись к строкам 8.11(6), 3.1(1) § 10, найдем произведение $\mathcal{K}^*(s) = \mathcal{K}_1^*(s) \mathcal{K}_2^*(s)$ образов указанных функций $\mathcal{K}_i(\tau)$:

$$\mathcal{K}^*(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s + \lambda/2, 1/2 - s \\ s + 1 \end{matrix} \right], \quad -\operatorname{Re}\lambda/2, 0 < \operatorname{Re} s < 1/2. \quad (7.63)$$

Прообраз $\mathcal{H}(x)$ этого выражения несложно записать по теореме Слейтер. Совершив обратную замену (7.62), определим значение

$$N_{\lambda}(b, 0) = \pi^{-1/2} ab^{-\lambda-1} \Gamma[(\lambda+1)/2] {}_2F_1(1/2, (\lambda+1)/2; 3/2; -a^2/b^2), \operatorname{Re} \lambda > -1. \quad (7.64)$$

Поменяв в этом равенстве λ на $\lambda+k$, составим и вычислим ряд (7.61), разбив его на два ряда с четными и нечетными индексами k :

$$\begin{aligned} N_{\lambda}(b, p) &= \frac{ab^{-\lambda-1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k,m=0}^{\infty} \left(-\frac{p}{b}\right)^k \times \\ &\times \frac{\Gamma[(\lambda+k+1)/2+m] (1/2)_m}{k! (3/2)_m m!} \left(-\frac{a^2}{b^2}\right)^m = \frac{ab^{-\lambda-1}}{\sqrt{\pi}} \times \\ &\times \sum_{n,m=0}^{\infty} \left[\left(-\frac{p}{b}\right)^{2n} \frac{\Gamma[(\lambda+1)/2+n+m]}{(2n)!} + \right. \\ &+ \left. \left(-\frac{p}{b}\right)^{2n+1} \frac{\Gamma(\lambda/2+1+n+m)}{(2n+1)!} \right] \frac{(1/2)_m (-a^2/b^2)^m}{(3/2)_m m!} = \\ &= \pi^{-1/2} ab^{-\lambda-1} \Gamma[(\lambda+1)/2] \Psi_1((\lambda+1)/2, 1/2, 3/2, 1/2, -a^2/b^2, p^2/(4b^2)) - \\ &- \pi^{-1/2} apb^{-\lambda-2} \Gamma(\lambda/2+1) \Psi_1(\lambda/2+1, 1/2, 3/2, 3/2, \\ &-a^2/b^2, p^2/(4b^2)). \end{aligned} \quad (7.65)$$

Для получения последней части этого равенства были использованы формула удвоения Лежандра (3.17) и обозначение ([2], § 5.7 (23)) для соответствующей вырожденной функции Горна двух переменных:

$$\Psi_1(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{m+n} (\beta)_m x^m y^n}{(\gamma)_m (\gamma')_n m! n!}, |x| < 1. \quad (7.66)$$

Функция $\Psi_1(\alpha, \beta, \gamma, \gamma', x, y)$, задаваемая в полосе $|x| < 1, |y| < \infty$ рядом (7.66), может быть аналитически продолжена за пределы этой полосы. Поэтому интеграл (7.60) (если он сходится) равен правой части (7.65) не только при $|a| < |b|$, где функция Ψ_1 представима рядом, но и при всех таких значениях параметров a, b, p, λ , при которых этот интеграл сходится. Если принять во внимание представление 49 из § 11 функции $\operatorname{Erf}(x)$ через функцию ${}_1F_1$ и асимптотические свойства (6.13), то несложно установить, что для сходимости интеграла (7.60) на ∞ достаточно выполнения одной из следующих групп условий:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \lambda > -1, \operatorname{Re}(b^2) > \max(0, -\operatorname{Re}(a^2)); \\ &\operatorname{Re} \lambda > -1, \operatorname{Re}(b^2) = \max(0, -\operatorname{Re}(a^2)), \operatorname{Re} p > 0; \\ &\operatorname{Re}(b^2) = \max(0, -\operatorname{Re}(a^2)), \operatorname{Re} p = 0 \text{ и } \operatorname{Re}(a^2) < 0, |\operatorname{Re} \lambda| < 1 \text{ или} \\ &\operatorname{Re}(a^2) \geq 0, -1 < \operatorname{Re} \lambda < 0. \end{aligned} \quad (7.67)$$

При этих условиях допустимо проведенное выше почленное интегрирование ряда по интервалу $(0, \infty)$, а интеграл (7.60) принимает значе-

ние (7.65). Операции, осуществленные в равенствах (7.65), допустимы, так как стоящие там ряды абсолютно сходятся.

Следует отметить, что в случаях $\lambda=2$, $p=0$ и $a=0$ найденные соотношения совпадают с формулами 6.287 (1), 3.462 (1) из [7].

5. Интегралы Меллина—Бернса общего вида. Рассмотрим примеры вычисления контурных интегралов типа (4.25), но с коэффициентами при s , отличными от единицы.

Пример 9. Вычислим интеграл

$$J(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{-\infty}} \Gamma \left[\begin{matrix} a_1 + \alpha_1 s, a_2 + \alpha_2 s, b - \beta s \\ c + \lambda s, d - \delta s \end{matrix} \right] z^{-s} ds, \quad (7.68)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \beta, \lambda, \delta$ — положительные, а a_1, a_2, b, c, d — комплексные величины такие, что полюсы функций $\Gamma(a_i + \alpha_i s)$, $\Gamma(b - \beta s)$ не совпадают между собой. Пусть $L_{-\infty}$ является левой бесконечной петлей, охватывающей в положительном направлении все левые полюсы $s = -(a_i + k)/\alpha_i$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2, \dots$, так, что правые полюсы $s = (b + k)/\beta$, $k = 0, 1, 2, \dots$, остаются с противоположной стороны. Приняв во внимание, что вычет функции $\Gamma(a_i + \alpha_i s)$ в k -м левом полюсе $s = -(a_i + k)/\alpha_i$ равен $(-1)^k/(k!\alpha_i)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и заменив в оставшейся части подынтегрального выражения s на $-(a_i + k)/\alpha_i$, по теореме о вычетах (2.18) формально получим значение интеграла (7.68):

$$J(z) = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} a_j - \alpha_j(a_i + k)/\alpha_i, b + \beta(a_i + k)/\alpha_i \\ c - \lambda(a_i + k)/\alpha_i, d + \delta(a_i + k)/\alpha_i \end{matrix} \right] \times \\ \times \frac{(-1)^k}{k!\alpha_i} z^{(a_i + k)/\alpha_i}, \quad j \neq i, \quad j = 1, 2. \quad (7.69)$$

Проведя рассуждения, аналогичные предшествующим теореме 18, можно установить ([53]; [2], § 1.19), что интеграл (7.68) абсолютно сходится на ∞ и определяет при всех $z \neq 0$ (или $0 < |z| < \beta^{-\beta} \lambda^{-\lambda} \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \delta^{\delta}$) аналитическую функцию вида (7.69), если выполняются условия

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \delta - \beta - \lambda > 0 \quad (= 0), \quad (7.70)$$

являющиеся аналогами ограничений $A + D > B + C$ (и $A + D - B - C = 0$).

Петлю $L_{-\infty}$ можно развернуть в прямую $L_{i\infty}(\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$, если, вообще говоря,

$$-\operatorname{Re} a_1/\alpha_1, -\operatorname{Re} a_2/\alpha_2 < \operatorname{Re} s = \gamma < \operatorname{Re} b/\beta \quad (7.71)$$

и выполняются дополнительные условия, сохраняющие сходимость интеграла (7.68) на мнимой бесконечности. Эти условия также обобщают соответствующие требования, налагаемые теоремой 18. Так, если

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta > \lambda + \delta, \quad (7.72)$$

то интеграл (7.68) по $L_{i\infty}$ абсолютно сходится в секторе $|\arg z| < 1/2\pi(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta - \lambda - \delta)$ и определяет там аналитическую функцию, представимую в виде (7.69). Если еще, в частности, выполняется равенство (7.70), то

функцию (7.69) можно аналитически продолжить в область $|z| > \beta^{-\beta} \lambda^{-\lambda} \times \alpha_1^{\alpha_1} \alpha_2^{\alpha_2} \delta^{\delta}$, $|\arg z| < 1/2\pi(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta - \lambda - \delta)$ формулой

$$J(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} a_1 + \alpha_1(b+k)/\beta, a_2 + \alpha_2(b+k)/\beta \\ c + \lambda(b+k)/\beta, d - \delta(b+k)/\beta \end{matrix} \right] \times \\ \times \frac{(-1)^k}{k! \beta} z^{-(b+k)/\beta}. \quad (7.73)$$

Эта формула получается, если интеграл посчитать через сумму правых вычетов. Ряды вида (7.73) исследовались в работах [1, 34, 74, 75].

Наконец, если $\alpha_1 + \alpha_2 + \beta = \lambda + \delta$, то z нужно брать действительным положительным, а интегрирование следует вести по прямой $\text{Res} = \gamma$, где

$$\gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \delta - \beta - \lambda) + \nu + 1 + (1 + 1 - 2 - 1)/2 < 0, \\ \nu = a_1 + a_2 + b - c - d. \quad (7.74)$$

Тогда интеграл (7.68) по контуру $L_{i\infty}$ сходится абсолютно.

Интеграл (7.68) является частным случаем так называемой H -функции Фокса [42, 53], которая естественным образом обобщает G -функцию Мейера (4.53). Из хода доказательства теоремы 22 следует, что интегралы вида (7.68) с рациональными множителями $\alpha_i, \beta_j, \lambda_k, \delta_l$ могут быть сведены к интегралу (4.53), определяющему G -функцию Мейера.

Пример 10. Вычислим интеграл

$$N(a) = \int_0^{\infty} t^{\lambda-1} e^{-[a+\cos(\pi\beta)]t} \sin[t \sin(\pi\beta)] dt, \\ \text{Im } \beta = 0, \text{ Re } a > -\cos(\pi\beta). \quad (7.75)$$

Совершив здесь замены

$$x = 1/a, \mathcal{H}_1(\tau) = e^{-1/\tau} \tau^{-\lambda}, \mathcal{H}_2(\tau) = e^{-\tau \cos(\pi\beta)} \sin[\tau \sin(\pi\beta)], \\ N(a) = x^{\lambda} \mathcal{H}(x), \quad (7.76)$$

получим равенство вида (1.1). Преобразования Меллина указанных функций $\mathcal{H}_i(\tau)$ можно найти из строк 3.1 (6), 3.8 (1) § 10. Перемножив их, придем к следующему значению образа функции $\mathcal{H}(x)$:

$$\mathcal{H}^*(s) = \pi \Gamma \left[\begin{matrix} \lambda - s, s \\ s\beta, 1 - s\beta \end{matrix} \right], \quad -1 < \text{Re } s < \text{Re } \lambda, |\beta| < 1/2. \quad (7.77)$$

Для нахождения $\mathcal{H}(x)$ заметим, что интеграл (7.68) выразит значение $\mathcal{H}(z)$, если в нем опустить множитель $\Gamma(a_2 + \alpha_2 s)$ и положить $a_1 = c = 0$, $\alpha_1 = \beta = d = 1$, $b = \lambda$, $\delta = \lambda = \beta$. Применив теорему о вычетах, получим при $\text{Re } \lambda > -1$, $|\beta| < 1/2$ искомые значения

$$\mathcal{H}(z) = \Gamma(\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \sin(\pi\beta k) (\lambda)_k (-z)^k / k!, \quad |z| < 1, \quad (7.78)$$

$$\mathcal{H}(z) = \Gamma(\lambda) z^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \sin[\pi\beta(\lambda + k)] (\lambda)_k (-z)^{-k} / k!, \quad |z| > 1.$$

Эти функции аналитически продолжают друг друга в секторе $|\arg z| < \pi(1-\beta)$ и соответствуют функциям (7.69), (7.73).

Положив в (7.78) $z=x$ и совершив замену (7.76), легко найдем искомое значение интеграла (7.75).

6. Функция типа Миттаг—Леффлера.

Пример 11. Рассмотрим интеграл

$$E_\rho(z; \mu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1-s \\ \mu - sp^{-1} \end{matrix} \right] (-z)^{-s} ds, \quad (7.79)$$

где μ, ρ — некоторые параметры, а интегрирование ведется по левой петле L_∞ , охватывающей все левые полюсы*) $s=0, -1, -2, \dots$ подынтегральной функции в положительном направлении. Можно показать, что интеграл (7.79) при $\rho > 0$ абсолютно сходится и определяет некоторую целую аналитическую функцию от z . Условие $\rho > 0$ соответствует неравенству (7.70) для интеграла (7.68).

По теореме о вычетах интеграл (7.79) несложно записать в виде степенного ряда

$$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})}, \quad \rho > 0. \quad (7.80)$$

Функция $E_\rho(z; \mu)$ называется *функцией типа Миттаг—Леффлера* [2, 8, 44]. Теория этой функции и области ее применения излагаются в монографии [8] и других работах М. М. Джрбашяна. Однако там эта функция определяется на основе ряда (7.80), а представление (7.79) отсутствует. Очевидно, что в частных случаях

$$E_1(z; 1) = e^z, \quad E_{1/2}(z; 1) = \operatorname{ch} \sqrt{z}, \quad E_{1/2}(z; 2) = z^{-1/2} \operatorname{sh} \sqrt{z}. \quad (7.81)$$

Можно показать, что допустима замена петли L_∞ на прямую $L_{i\infty} = (\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$, $0 < \gamma = \operatorname{Re} s < 1$, если еще выполняются дополнительные условия $\rho > 1/2$, $|\arg(-z)| < \pi[1 - (2\rho)^{-1}]$, обеспечивающие абсолютную сходимость интеграла (7.79) на $\pm i\infty$ в указанном секторе изменения z . Если же $\rho = 1/2$, но $0 < \gamma < \operatorname{Re} \mu/2 - 3/4$, 1 , $\operatorname{Im} z = 0$, $z < 0$, то интеграл (7.79) также сохраняет абсолютную сходимость на прямой $L_{i\infty}$.

Из формул (7.79), (3.16) несложно установить следующее представление функции (7.79) при $\rho = m/n$, $m, n = 1, 2, \dots$, через обобщенные гипергеометрические функции:

$$E_{m/n}(z; \mu) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + kn/m)} {}_1F_n(1; \Delta(n, \mu + kn/m); n^{-n} z^m). \quad (7.82)$$

Воспользовавшись излагаемым здесь методом вычисления интегралов, можно убедиться в справедливости двух равенств, которые выражают значения интегралов, содержащих функцию $E_\rho(z; \mu)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1} \sin(k\pi/n) t^{k/n}}{1 + (-1)^n t} E_{\rho/n} \left(-\frac{x}{t}; \mu \right) \frac{dt}{t} = \\ = E_\rho \left(-\sqrt[n]{x}; \mu \right), \end{aligned} \quad (7.83)$$

*) При $\rho(k+\mu)=0, -1, -2, \dots$ для некоторых $k=0, 1, 2, \dots$ полюсы числителя могут устраняться нулями от знаменателя.

$$n = 2, 3, 4, \dots, \rho > 1/2, x > 0;$$

$$\int_0^{\infty} e^{-t} E_{\rho}(z \sqrt[n]{t}; \mu) t^{\mu-1} dt = (1-z)^{-1}, \operatorname{Re} \mu > 0, \rho > 0, |z| < 1. \quad (7.84)$$

Прежде чем доказывать первое равенство, отметим, что оба интеграла сходятся. В самом деле, первый интеграл в точке $t = \infty$ сходится, так как подынтегральная функция имеет порядок $t^{(n-1)/n-2}$ (функция $E_{\rho}(\theta; \mu)$ при $\theta \rightarrow 0$ ограничена). В точке $t = 0$ функция $E_{\rho/n}(-x/t; \mu)$ при $\rho > n/2$ оценивается величиной $M t/x$, $M = \text{const}$, $x > 0$ ([8], с. 136, (2.32)), и поэтому вся подынтегральная функция обращается в нуль порядка $t^{1/n}$, что обеспечивает интегрируемость при $t = 0$. Во втором интеграле при $t \rightarrow 0$ функция $e^{-t} E_{\rho}(z \sqrt[n]{t}; \mu)$ ограничена, а $t^{\mu-1}$ интегрируема, если $\operatorname{Re} \mu > 0$. Если же $t \rightarrow \infty$, то в силу асимптотической оценки ([8], с. 136, (2.31)) получаем неравенство

$$|E_{\rho}(z \sqrt[n]{t}; \mu)| \leq M_1 t^{1-\operatorname{Re} \mu} e^{t \operatorname{Re} z^{\rho}}. \quad (7.85)$$

Отсюда следует, что интеграл (7.84) сходится, если $|z| < 1$. Равенство (7.84) можно рассматривать как интегральное представление ядра Коши через функцию E_{ρ} .

Приступим к выводу первого соотношения. Для этого, совершив преобразование Меллина над правой частью (7.83), применим далее формулу умножения для гамма-функции (3.16):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} E_{\rho}(-\sqrt[n]{x}; \mu) x^{s-1} dx &= n \Gamma \left[\begin{matrix} sn, 1 - sn \\ \mu - sn \rho^{-1} \end{matrix} \right] = \mathcal{K}^*(s) = \\ &= \mathcal{K}_1^*(s) \mathcal{K}_2^*(s) = \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1 - s \\ \mu - sn \rho^{-1} \end{matrix} \right] n (2\pi)^{1-n} \Gamma[s + 1/n, s + \\ &+ 2/n, \dots, s + (n-1)/n, 1/n - s, 2/n - s, \dots, (n-1)/n - s], \quad (7.86) \\ &0 < \operatorname{Re} s < 1/n. \end{aligned}$$

Прообразы выделенных множителей $\mathcal{K}_i^*(s)$ легко найти с помощью теоремы Слейтер и формулы (7.79):

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1(\tau) &= E_{\rho/n}(\tau; \mu), \\ \mathcal{K}_2(\tau) &= n (2\pi)^{1-n} \sum_{k=1}^{n-1} \tau^{k/n} \Gamma[(a)' - k/n, (a) + k/n] {}_1F_0(1; \\ &(-1)^{n-1} \tau), \quad 0 < \tau < 1; \\ \mathcal{K}_2(\tau) &= n (2\pi)^{1-n} \sum_{k=1}^{n-1} \tau^{-k/n} \Gamma[(a)' - k/n, (a) + \\ &+ k/n] {}_1F_0(1; (-1)^{n-1} \tau), \quad \tau > 1, \end{aligned} \quad (7.87)$$

где вектор $(a) = 1/n, 2/n, \dots, (n-1)/n$. Для вычисления последнего гамма-множителя снова воспользуемся теоремой умножения (3.16), причем для удобства будем вначале считать k нецелым, а отсутствующий

множитель обозначим через $(l-k)/n$. Тогда при $l=1, 2, 3, \dots, n-1$ получим

$$\begin{aligned} \Gamma[(a)' - k/n, (a) + k/n] &= \Gamma \left[\begin{matrix} -k, k \\ -k/n, k/n, (l-k)/n \end{matrix} \right] n(2\pi)^{n-1} = \\ &= (2\pi)^{n-1} \frac{\sin(\pi k/n)}{\sin[\pi(k-l+l)]\Gamma[(l-k)/n]} \xrightarrow{k \rightarrow l} \\ &\xrightarrow{k \rightarrow l} \frac{(2\pi)^{n-1} (-1)^{l-1}}{\pi n} \sin(\pi l/n). \end{aligned} \quad (7.88)$$

Заменив во второй сумме индекс суммирования $k=n-l$ и воспользовавшись формулой (4.12), окончательно установим равенство

$$\mathcal{H}_2(\tau) = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(-1)^{m-1} \sin(\pi m/n)}{1 + (-1)^n \tau} \tau^{m/n}. \quad (7.89)$$

Составив из найденных выражений $\mathcal{H}_i(\tau)$, $i=1, 2$, интеграл (1.1), получим доказываемое соотношение (7.83). Условие $\rho > n/2$ можно ослабить до $\rho > 1/2$.

Второе равенство устанавливается аналогично. После замены $z = -x^{-1/\rho}$ и преобразования Меллина над обеими частями (7.84) легко получается тождество

$$\rho \Gamma \left[\begin{matrix} -s\rho, 1 + s\rho \\ \mu + s \end{matrix} \right] \Gamma(s + \mu) = \rho \Gamma[-s\rho, 1 + s\rho], \quad (7.90)$$

которое и подтверждает равенство (7.84).

7. Интегралы от функций, допускающих экспоненциальный рост. После приведения интеграла к каноническому виду свертки Меллина (1.1) может случиться так, что, например, функция $\mathcal{H}_2(t)$ при $t \rightarrow \infty$ экспоненциально растет, а $\mathcal{H}_1(x/t)$ при $t \rightarrow \infty$ экспоненциально убывает, компенсируя рост первой и обеспечивая сходимость интеграла (см. примеры 6, 7). В таком случае преобразование Меллина от свертки (1.1) не равно произведению образов, так как интеграл $\mathcal{H}_2^*(s)$ расходится. Чтобы не вычислять преобразование Меллина от каждого из множителей $\mathcal{H}_i(\tau)$ и в полной мере использовать теорему 18 для случаев, когда интегрирование ведется по петлям $L_{\mp\infty}$, докажем обобщенное равенство Парсеваля

$$\int_0^\infty \mathcal{H}_1\left(\frac{x}{t}\right) \mathcal{H}_2(t) \frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathcal{H}_1^*(s) \mathcal{H}_2^*(s) x^{-s} ds \quad (7.91)$$

при специальных ограничениях на входящие в него функции.

Теорема 23. Пусть выполняются следующие условия:

1) при некоторых $x > 0$ и γ сходятся интегралы

$$\int_0^\infty \mathcal{H}_1(x/t) \mathcal{H}_2(t) t^{-1} dt, \quad \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathcal{H}_1^*(s) \mathcal{H}_2^*(s) x^{-s} ds;$$

2) в полуплоскости $\text{Re } s < \gamma$ (или $\text{Re } s > \gamma$) существует преобразование Меллина $\mathcal{H}_1^*(s)$ функции $\mathcal{H}_1(\tau)$, то есть $\mathcal{H}_1^*(s)$ является аналитической функцией от s , не имеющей особенностей при $\text{Re } s < \gamma$ (или $\text{Re } s > \gamma$);

3) функция $\mathcal{H}_2(t)$ является функцией гипергеометрического типа, точнее, существует функция $\mathcal{H}_2^*(s)$, имеющая вид (4.17), такая, что справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{\mp\infty}} \mathcal{H}_2^*(s) t^{-s} ds = \mathcal{H}_2(t). \quad (7.92)$$

Здесь интегрирование ведется по соответствующей петле $L_{-\infty}$ (или $L_{+\infty}$), лежащей в области аналитичности $\text{Res} \leq \gamma$ (или $\text{Res} \geq \gamma$), причем предполагается, что размерности A, B, C, D параметров функции $\mathcal{H}_2^*(s)$ удовлетворяют условиям $A+D > B+C$, $A > C$ (или $A+D < B+C$, $B > D$). В обоих случаях под $L_{\mp\infty}$ понимается контур, проходящий от $\mp\infty - iy$, $y > 0$, до точки $\gamma - iy$, а далее по отрезку прямой $\text{Res} = \gamma$, $|\text{Im } s| < y$, и оканчивающийся на $\mp\infty + iy$, где $y > \max(|\text{Im } a_j|, |\text{Im } b_k|)$, $j=1, 2, \dots, A$, $k=1, 2, \dots, B$, а на начальном и конечном участках контуров $L_{\mp\infty}$ выполняется условие $|\text{Im } s| \geq y$.

Тогда справедливо равенство (7.91).

Доказательство. Рассмотрим, например, случай $A+D > B+C$, $A > C$. Из $A > C$ вытекает, что $\mathcal{H}_2(t) \neq 0$. Выберем такие s , чтобы выполнялись ограничения 3) для контура $L_{-\infty}$. Тогда из условий 1), 3) будет следовать первое соотношение

$$\begin{aligned} 2\pi i \int_0^\infty \mathcal{H}_1(x/t) \mathcal{H}_2(t) t^{-1} dt &= \int_0^\infty \mathcal{H}_1(x/t) t^{-1} dt \int_{L_{-\infty}} \mathcal{H}_2^*(s) t^{-s} ds = \\ &= \int_{L_{-\infty}} \mathcal{H}_2^*(s) \left(\int_0^\infty \mathcal{H}_1(x/t) t^{-s-1} dt \right) ds = \int_{L_{-\infty}} \mathcal{H}_2^*(s) x^{-s} ds \times \\ &\times \int_0^\infty \mathcal{H}_1(\tau) \tau^{s-1} d\tau = \int_{L_{-\infty}} \mathcal{H}_2^*(s) \mathcal{H}_1^*(s) x^{-s} ds = \\ &= \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathcal{H}_1^*(s) \mathcal{H}_2^*(s) x^{-s} ds. \end{aligned} \quad (7.93)$$

Второе — четвертое из равенств (7.93) справедливы, так как интеграл (7.92) абсолютно сходится и выполняются условия 1), 2) теоремы. Последнее равенство возможно, так как получающийся интеграл по прямой $L_{i\infty} = (\gamma - i\infty, \gamma + i\infty)$ сходится. При этом условия, накладываемые теоремой на y , исключают добавление некоторых полюсов функции $\mathcal{H}_2^*(s)$ в левую от контура $L_{-\infty}$ часть плоскости (s) при замене $L_{-\infty}$ на $L_{i\infty}$.

Замечание. Как следует из теоремы 11, условие 2) настоящей теоремы заведомо выполнится, если предположить, что функция $\mathcal{H}_1(\tau)$ экспоненциально убывает в нуле: $\mathcal{H}_1(\tau) = O(e^{-\tau^\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, $\tau \rightarrow +0$ (или на ∞ : $\mathcal{H}_1(\tau) = O(e^{-\tau^\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, $\tau \rightarrow \infty$), а выражение $\mathcal{H}_1(\tau) \tau^{\nu-1} \in L(0, \infty)$.

Теорему 23 можно эффективно использовать для вычисления интегралов (1.1) в тех случаях, когда одна из функций, например $\mathcal{H}_2^*(s)$, имеет в числителе меньше гамма-функций, чем в знаменателе, но произведение $\mathcal{H}_1^*(s) \times \mathcal{H}_2^*(s)$ удовлетворяет условиям теоремы Слейтер.

Пример 12. Вычислим интеграл

$$P(a) = \int_0^\infty e^{-at} {}_0F_2(b, c; -t) t^{\lambda-1} dt. \quad (7.94)$$

Для преобразования его к виду (1.1) совершим замены

$$a = 1/x, \mathcal{K}_1(\tau) = e^{-1/\tau} \tau^{-\lambda}, \mathcal{K}_2(\tau) = {}_0F_2(b, c; -\tau),$$

$$\mathcal{K}(x) = a^\lambda P(a). \quad (7.95)$$

В силу равенств (1.6), (6.45) оригиналам $\mathcal{K}_i(\tau)$ соответствуют функции

$$\mathcal{K}_1^*(s) = \Gamma(\lambda - s), \operatorname{Re}(s - \lambda) < 0;$$

$$\mathcal{K}_2^*(s) = \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ b-s, c-s \end{matrix} \right] \Gamma[b, c], \gamma > 0, \quad (7.96)$$

причем лишь первая получается как значение сходящегося интеграла (1.3).

Воспользовавшись равенством (7.91) и теоремой Слейтер при $A + D = 3 > B + C = 1$, несложно найти значение интеграла (7.94):

$$P(a) = a^{-\lambda} \Gamma(\lambda) {}_1F_2(\lambda; b, c; -1/a), \operatorname{Re} \lambda > 0. \quad (7.97)$$

(Возникающее из замечания 2 к теореме 17 условие $\operatorname{Re}(b + c - \lambda) > -1/2$ является условием вывода равенств (7.94), (7.97) и на сходимость интеграла (7.94) не влияет, поэтому его можно опустить.) Как следует из теоремы 21, интеграл (7.94) остается сходящимся при $\operatorname{Re} a > 0$.

Теорему 23 удобно использовать в случаях, когда размерности параметров функций $\mathcal{K}_1^*(s)$ ($\mathcal{K}_2^*(s)$) удовлетворяют соответственно условиям $A = 0$, $B > C + D$ ($A > C$, $A + B < C + D$), а для произведения $\mathcal{K}_1^*(s) \mathcal{K}_2^*(s)$ выполняются все условия теоремы Слейтер.

8. Использование кратных преобразований Меллина. Наряду с интегралами вида (1.1) в приложениях часто встречаются интегралы, которые после сведения к канонической форме интеграла типа свертки Меллина приобретают вид

$$\int_0^\infty \mathcal{K}_1(t) \prod_{j=2}^{n+1} \mathcal{K}_j(x_{j-1}/t) t^{-1} dt = \mathcal{K}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad n = 2, 3, \dots \quad (7.98)$$

К такой форме можно привести всякий интеграл вида

$$\int_a^b \mathcal{K}_1(\tau) \prod_{j=2}^m \mathcal{K}_j(c_j \tau) d\tau, \quad 0 < a < b < \infty, \quad (7.99)$$

если в произведение добавить два множителя $\mathcal{K}_{m+1}(\tau/b)$ и $\mathcal{K}_{m+2}(\tau/a)$, получаемые из функции Хевисайда $H(x)$ (§ 11): $\mathcal{K}_{m+1}(\tau/b) = H(1 - \tau/b)$, $\mathcal{K}_{m+2}(\tau/a) = H(\tau/a - 1)$.

Для вычисления интеграла (7.98), где $\mathcal{K}_j$ ($j = 1, 2, \dots, n+1$) — произвольные функции из § 10, можно использовать *кратное преобразование Меллина*, определяемое через n -кратный интеграл:

$$\mathcal{K}^*(s_1, \dots, s_n) = \int_0^\infty \dots \int_0^\infty \mathcal{K}(x_1, \dots, x_n) x_1^{s_1-1} \dots$$

$$\dots x_n^{s_n-1} dx_1 \dots dx_n. \quad (7.100)$$

Совершив над (7.98) это преобразование, легко получим равенство

$$\mathcal{K}^*(s_1, \dots, s_n) = \mathcal{K}_1^*(s_1 + s_2 + \dots + s_n) \prod_{j=2}^{n+1} \mathcal{K}_j^*(s_{j-1}). \quad (7.101)$$

Установлено [64], что при определенных условиях *кратное обратное преобразование Меллина* имеет вид

$$\mathcal{H}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \dots \int_{\gamma_n - i\infty}^{\gamma_n + i\infty} \mathcal{H}^*(s_1, \dots, s_n) x_1^{-s_1} \dots x_n^{-s_n} ds_1 \dots ds_n, \quad (7.102)$$

$$\gamma_k = \operatorname{Re} s_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Если все $\mathcal{H}_j(x)$ являются функциями из § 10, то в правой части (7.101) стоит произведение отношений гамма-функций на постоянную. Для отыскания значения $\mathcal{H}$ интеграла (7.98) в этом случае необходимо уметь вычислять *кратные интегралы Меллина—Бернса* вида (7.102). В общем случае такая задача не разработана. Особые трудности здесь представляют вопросы сходимости кратных интегралов Меллина—Бернса на бесконечности и установление аналогов теорем 17, 18. Результаты вычислений n -кратных интегралов Меллина—Бернса, вообще говоря, выражаются через n -кратные обобщенные гипергеометрические ряды, частными случаями которых являются ряды Горна и Лауричелла [2]. Эти ряды и их аналитические продолжения имеют сложную структуру и практически не изучены.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим

Пример 13. Вычислим интеграл

$$Q = \int_x^\infty \tau^{\alpha-1} (\tau^2 - x^2)^{\beta-1} \sin(c\tau) J_\nu(d\tau) d\tau. \quad (7.103)$$

После замен $\tau = tx$ и

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(\tau) &= \tau^{\alpha/2} (\tau - 1)_+^{\beta-1}, \quad \mathcal{H}_2(\tau) = \sin(\tau^{-1/2}), \\ \mathcal{H}_3(\tau) &= J_\nu(\tau^{-1/2}), \quad Q = 1/2 x^{\alpha+2\beta-2} \mathcal{H}(x_1, x_2), \\ (cx)^{-2} &= x_1, \quad (dx)^{-2} = x_2 \end{aligned} \quad (7.104)$$

легко получим равенство (7.98), где $n = 2$. Из строк 2.2(4), 3.2(6), 9.2(5) § 10 несложно установить, что

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^*(s_1 + s_2) &= \Gamma(\beta) \Gamma \left[\begin{matrix} 1 - \alpha/2 - \beta - s_1 - s_2 \\ 1 - \alpha/2 - s_1 - s_2 \end{matrix} \right], \\ \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re}(s_1 + s_2) &< 1 - \operatorname{Re}(\alpha/2 + \beta); \\ \mathcal{H}_2^*(s_1) &= \sqrt{\pi} 2^{-2s_1} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2 - s_1 \\ 1 + s_1 \end{matrix} \right], \quad |\operatorname{Re} s_1| < 1/2; \\ \mathcal{H}_3^*(s_2) &= 2^{-2s_2} \Gamma \left[\begin{matrix} \nu/2 - s_2 \\ \nu/2 + 1 + s_2 \end{matrix} \right], \quad -3/4 < \operatorname{Re} s_2 < \operatorname{Re} \nu/2. \end{aligned} \quad (7.105)$$

Таким образом, задача вычисления интеграла Q свелась к проблеме нахождения значения *двойного интеграла Меллина—Бернса*:

$$\mathcal{H}(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(\beta)}{(2\pi i)^2} \int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} (4x_2)^{-s_2} ds_2 \times$$

$$\times \int_{\gamma_1 - i\infty}^{\gamma_1 + i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2 - s_1, \nu/2 - s_2, 1 - \alpha/2 - \beta - s_1 - s_2 \\ 1 + s_1, 1 + \nu/2 + s_2, 1 - \alpha/2 - s_1 - s_2 \end{matrix} \right] (4x_1)^{-s_1} ds_1. \quad (7.106)$$

Осуществим формальное вычисление этого интеграла, не останавливаясь на вопросах обоснования операций, которые требуют специальных исследований. Если зафиксировать значение s_2 , то полюсами подынтегрального выражения из (7.106) на комплексной плоскости s_1 в общем случае являются точки $s_1 = 1/2 + k$, $s_1 = 1 - \alpha/2 - \beta - s_2 + k$, $k = 0, 1, 2, \dots$ Расписав этот двойной интеграл через повторный, по теории вычетов в плоскости s_1 получим

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x_1, x_2) = & \frac{V\pi\Gamma(\beta)}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left\{ (4x_1)^{-1/2-k} \times \right. \\ & \times \int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} \nu/2 - s_2, (1 - \alpha)/2 - \beta - k - s_2 \\ 3/2 + k, 1 + \nu/2 + s_2, (1 - \alpha)/2 - k - s_2 \end{matrix} \right] (4x_2)^{-s_2} ds_2 + \\ & + (4x_1)^{\alpha/2 + \beta - 1 - k} \int_{\gamma_2 - i\infty}^{\gamma_2 + i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} (\alpha - 1)/2 + \beta - k + s_2, \nu/2 - s_2 \\ 2 - \alpha/2 - \beta + k - s_2, 1 + \nu/2 + s_2, \beta - k \end{matrix} \right] \times \\ & \times \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{-s_2} ds_2 \left. \right\}. \quad (7.107) \end{aligned}$$

Приняв во внимание, что точки $s_2 = \nu/2 + l$, $s_2 = (1 - \alpha)/2 - \beta \mp (k - l)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, вообще говоря, являются простыми полюсами подынтегральных функций из формулы (7.107), опять по теории вычетов, но в плоскости s_2 найдем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x_1, x_2) = & V\pi\Gamma(\beta) \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+l}}{k!l!} \left\{ (4x_1)^{-1/2-k} (4x_2)^{-\nu/2-l} \times \right. \\ & \times \Gamma \left[\begin{matrix} (1 - \alpha - \nu)/2 - \beta - k - l \\ 3/2 + k, 1 + \nu + l, (1 - \alpha - \nu)/2 - k - l \end{matrix} \right] + \\ & + 2(4x_1)^{-1/2-k} (4x_2)^{(\alpha-1)/2 + \beta + k - l} \Gamma \left[\begin{matrix} (\nu + \alpha - 1)/2 + \beta + k - l \\ 3/2 + k, (3 - \alpha + \nu)/2 - \beta - k + l, \beta - l \end{matrix} \right] + \\ & + (4x_1)^{\alpha/2 + \beta - 1 - k} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{-\nu/2-l} \times \\ & \times \Gamma \left[\begin{matrix} (\alpha - 1 + \nu)/2 + \beta + l - k \\ 2 - (\alpha + \nu)/2 - \beta + k - l, 1 + \nu + l, \beta - k \end{matrix} \right] \left. \right\} \quad (7.108) \end{aligned}$$

(два одинаковых слагаемых с индексами $k-l$ и $l-k$ здесь объединены во второе слагаемое правой части).

Если ввести обозначение

$$\mathfrak{F}(\alpha, \beta; \gamma, \delta, \eta, \eta'; x, y) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{l+m} (\beta)_l}{(\gamma)_{l+m} (\delta)_l (\eta)_l (\eta')_m} \frac{x^l y^m}{l!m!} \quad (7.109)$$

для двойного ряда, составленного из функций типа ${}_2F_3$ и ${}_1F_2$, то после замены индекса $k-l=\mp m$ с помощью формул (4.29), (2.32) из (7.108) можно найти искомое значение интеграла (7.103):

$$\begin{aligned} Q = & 2^{-v-1} c d^v x^{\alpha+2\beta+v-1} [\Gamma(v+1)]^{-1} B(\beta, (1-\alpha-v)/2-\beta) \times \\ & \times \mathfrak{F}((1+v+\alpha)/2, \delta; \\ & (1+\alpha+v)/2+\beta, \delta, v+1, 3/2; -d^2 x^2/4, -c^2 x^2/4) + \\ & + \sqrt{\pi} 2^{\alpha+2\beta-3} c^{2-2\beta-\alpha} d^v x^v \Gamma \left[\begin{matrix} (\alpha+v-1)/2+\beta \\ 2-(\alpha+v)/2-\beta, 1+v \end{matrix} \right] \mathfrak{F}(1-\beta, 1; 1, \\ & (3-\alpha-v)/2-\beta, 2-(\alpha+v)/2-\beta, 1+v; -c^2 x^2/4, -d^2 x^2/4) + \\ & + 2^{\alpha+2\beta} c d^{1-\alpha-2\beta} \Gamma \left[\begin{matrix} (v+\alpha-1)/2+\beta \\ (3-\alpha+v)/2-\beta \end{matrix} \right] \mathfrak{F}(1-\beta, 1; 1, (3-\alpha-v)/2-\beta, \\ & (3-\alpha+v)/2-\beta, 3/2; -d^2 x^2/4, -c^2 x^2/4). \quad (7.110) \end{aligned}$$

В частности, при $v=d=0$, $\text{Re}(\alpha+2\beta) < 1$ отсюда получается равенство (1.18). Интеграл (7.102) сходится, если $\text{Re}(\alpha+2\beta) < 5/2$, $\text{Re} \beta > 0$, $c > 0$, $d > 0$.

Следует отметить, что при вычислении интеграла (7.60) также удобно использовать двойное преобразование Меллина, которое снова приведет к формуле (7.65), выражающей значение этого интеграла.

9. Левый факториал Курепы. В заключение рассмотрим некоторые основные свойства функции, которую ввел Курепа [48], назвав ее *левой факториальной функцией*, или просто *левым факториалом*. По определению

$$!n = 0! + 1! + 2! + \dots + (n-1)!, \quad !0 = 0, \quad !1 = 1, \quad !2 = 2, \dots \quad (7.111)$$

Воспользовавшись формулой $k! = \Gamma(k+1)$, легко вывести интегральное представление для этой функции, позволяющее продолжить ее на случай комплексных значений аргумента:

$$!n = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\infty} e^{-t} t^k dt = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^n - 1}{t - 1} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.112)$$

Заменив здесь n на z , получим интеграл

$$!z = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^z - 1}{t - 1} dt, \quad \text{Re } z > -1. \quad (7.113)$$

Несложно убедиться, что функция $!z$ связана с гамма-функцией соотношением

$$!(z+1) - !z = \Gamma(z+1), \quad (7.114)$$

которое дает возможность продолжить левый факториал $!z$ на полуплоскость $\text{Re } z \leq -1$ и показывает, что в точках $z = -n$, $n=1, 2, 3, \dots$, функция $!z$ имеет простые полюсы с вычетами $\sum_{k=1}^n (-1)^k / (k-1)!$.

Если воспользоваться излагаемым здесь методом вычисления интегралов, то функция (7.113) может быть представлена в виде

$$!z = -\pi e^{-1} \text{ctg}(\pi z) + \Gamma(z) {}_1F_1(1; 1-z; -1) - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (k!)^{-1} \psi(k+1) =$$

$$= -\frac{\pi}{e} \operatorname{ctg} \pi z + \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma(z-k) + \frac{1}{e} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot k!} + \gamma \right), \quad (7.115)$$

где γ — постоянная Эйлера (7.24).

Вторая из этих формул была выведена в работе [68], поэтому остановимся на доказательстве первой. Вычислим интеграл (1.1), положив в нем $\mathcal{H}_1(\tau) = \tau^{-z-1} e^{-1/\tau}$, $\mathcal{H}_2(\tau) = (1-\tau)^{-1}$, $x=1$. После применения основной теоремы без затруднений получим его значение:

$$A(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^z (1-t)^{-1} dt = \pi e^{-1} \operatorname{ctg} \pi z - \Gamma(z) {}_1F_1(1; 1-z; -1). \quad (7.116)$$

Устремив здесь $z \rightarrow 0$ и раскрыв неопределенность в правой части, найдем значение $A(0)$. Разность $A(0) - A(z) = !z$ приведет к доказываемой формуле из (7.115).

З а м е ч а н и е. Вторая из этих формул легко выводится из первой, если принять во внимание равенство $A(0)e = \bar{E}\bar{I}(1)$ и воспользоваться обозначением 49 из § 11 для интегральной экспоненты.

§8. ОБЩИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ФОРМУЛЫ ИХ ОБРАЩЕНИЯ

В приложениях часто используются различные интегральные преобразования, обобщающие преобразование Фурье ([3, 8, 9, 11, 19, 20, 23, 26] и др.). Из них можно условно выделить *два основных класса: преобразования сверточного типа* (Лапласа, Меллина, Ганкеля, Мейсера, Стильтеса, Гильберта, Римана—Лиувилля, Вейля, Гаусса, Нараина и др.) и *преобразования по индексу* (Конторовича—Лебедева, Мелера—Фока, Лебедева, Олевского, Уимпа). Самыми общими из этих преобразований являются преобразования Нараина [54—56] и Уимпа [73], содержащие в ядрах G -функцию Мейера. Остальные получаются из них при весьма частных значениях параметров. Обзор свыше 800 работ по интегральным преобразованиям приведен в [11].

Остановимся на выводе формул обращения общих интегральных преобразований, относящихся к названным классам.

1. Обобщение преобразования Ганкеля. Рассмотрим интегральное уравнение первого рода

$$J_{\nu, \lambda}^{\mu} f(\eta) = \int_0^{\infty} \sqrt{\eta\tau} J_{\nu, \lambda}^{\mu}(\eta\tau) f(\tau) d\tau = g(\eta), \quad \eta > 0, \quad (8.1)$$

где $J_{\nu, \lambda}^{\mu}(z)$ — обобщенная функция Бесселя—Мейтленда [61, 62]:

$$J_{\nu, \lambda}^{\mu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{2k}}{\Gamma[1+\lambda+k, 1+\lambda+\nu+\mu k]}, \quad \mu > 0. \quad (8.2)$$

В частности, она содержит функцию Бесселя $J_{\nu}(z)$ (при $\mu=1$, $\lambda=0$), функцию Ломмеля $s_{\alpha, \nu}(z)$ (при $\mu=1$) и функцию Бесселя—Мейтленда $J_{\nu}^{\mu}(z)$ (при $\lambda=0$), точнее, справедливы соотношения

$$J_{\nu,0}^1(z) = J_{\nu}(z); \quad J_{\nu,\lambda}^1(z) = \frac{2^{1-\alpha}}{\Gamma[\lambda, \lambda + \nu]} s_{\alpha,\nu}(z), \quad \alpha = 2\lambda + \nu - 1; \quad (8.3)$$

$$J_{\nu,0}^{\mu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} J_{\nu}^{\mu}\left(\frac{z^2}{4}\right), \quad J_{\nu}^{\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k! \Gamma(1 + \nu + \mu k)}.$$

Преобразование (8.1), совершаемое над функцией $f(\tau)$, называется $J_{\nu,\lambda}^{\mu}$ -преобразованием от f . Очевидно, что при $\mu=1$, $\lambda=0$ $J_{\nu,\lambda}^{\mu}$ -преобразование переходит в известное интегральное преобразование Ганкеля [3, 8, 9] (см. (8.20)), которое при $\nu = \mp 1/2$ в силу (6.31) принимает вид косинус- и синус-преобразований Фурье (2.44), (2.45). При $\mu=1$ $J_{\nu,\lambda}^{\mu}$ -преобразование превращается в преобразование Ломмеля, рассмотренное в [43], а при $\lambda=0$ $J_{\nu,\lambda}^{\mu}$ -преобразование сводится к преобразованию Мейтленда с функцией $J_{\nu}^{\mu}(z)$ в ядре, которое было изучено в работах [32, 66, 69].

В общем случае для вывода формулы обращения (8.1) удобно воспользоваться следующим представлением функции $J_{\nu,\lambda}^{\mu}(z)$ через интеграл Меллина — Бернса:

$$J_{\nu,\lambda}^{\mu}(2\sqrt{z}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{-\infty}} \Gamma \left[\begin{matrix} \nu/2 + \lambda + s, & 1 - \nu/2 - \lambda - s \\ & 1 - \nu/2 - s, & d - \mu s \end{matrix} \right] z^{-s} ds, \quad (8.4)$$

$$d = 1 + \lambda + \nu - \mu(\lambda + \nu/2),$$

где левая петля $L_{-\infty}$ охватывает только левые полюсы $s = -\nu/2 - \lambda - k$, $k=0, 1, 2, \dots$, подынтегрального выражения*). Это представление несложно получить с помощью теории вычетов так, как это делалось ранее. Следует отметить, что условие $\mu > 0$ исключает возможность интегрирования по правой петле $L_{+\infty}$.

В соответствии с примером 9 из § 7 если выполняется эквивалент $\mu < 1$ условия $A+B > C+D$, то интегрирование можно вести по прямой $\text{Res} = \gamma$, где $-\text{Re}(\nu/2 + \lambda) < \gamma < 1 - \text{Re}(\nu/2 + \lambda)$, и функция (8.4) будет аналитической в секторе $|\arg z| < 1/2\pi(1 - \mu)$. Если же $\mu=1$, то петлю $L_{-\infty}$ можно развернуть в соответствующий контур $L_{i\infty}$ при условии, что z — действительное положительное ($\arg z = 0$) и выполняется дополнительное ограничение $\lim_{s \rightarrow \infty} \text{Res} < 1/2$, $s \in L_{i\infty}$ (теорема 18).

Чтобы было удобно пользоваться представлением (8.4), совершим в равенстве (8.1) замены

$$\tau = 2\sqrt{t}, \quad \eta = 1/\sqrt{x}, \quad J_{\nu,\lambda}^{\mu}(2/\sqrt{\xi}) = \mathcal{K}_1(\xi),$$

$$t^{3/4} f(\tau) = \mathcal{K}_2(t), \quad g(\eta) = \sqrt{2\eta} \mathcal{K}(x), \quad (8.5)$$

которые сведут его к канонической форме (1.1). Обозначим еще $\mathcal{K}_3^*(s) = 1/\mathcal{K}_1^*(s)$. Ясно, что в соответствии с (8.4) и (7.69)

$$\mathcal{K}_1^*(s) = \Gamma \left[\begin{matrix} 1 - \nu/2 - \lambda + s, & \nu/2 + \lambda - s \\ & 1 - \nu/2 + s, & d + \mu s \end{matrix} \right], \quad (8.6)$$

*) Указанные точки являются полюсами при условиях $\lambda \neq -1, -2, -3, \dots, \lambda + \nu + 1 \neq -(k + \mu l)$ ($k, l = 0, 1, 2, \dots$), которые исключают возможность погашения особенностей нулями от знаменателя.

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_3(z) = & -\pi^{-1} \sin(\pi\lambda) z^{1-\nu/2} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma[\nu + (1+\lambda)(1-\mu) - k\mu] z^k/k! + \\ & + (\pi\mu)^{-1} z^{d/\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \Gamma[(1+\lambda)(1-1/\mu) - (\nu+k)/\mu] \times \\ & \times \sin[(\lambda + \nu + k + 1)\pi/\mu] (-\sqrt[\mu]{z})^k/k!. \quad (8.7)\end{aligned}$$

Предположим вначале, что выполняются следующие два условия: 1) $\mu > 1$, то есть не существует преобразование Меллина от $\mathcal{K}_1(\tau)$ (интеграл (1.3) расходится), однако интеграл от $\mathcal{K}_1^*(s)$ по соответствующей правой петле $L_{+\infty}$ существует и определяет функцию $\mathcal{K}_1(\tau)$; 2) функция $\mathcal{K}_2^*(s)$ аналитична в некоторой правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > \gamma_0$.

Несложно установить, что тогда для функции $\mathcal{K}_3^*(s)$ выполняются условия, обеспечивающие существование следующего интеграла по некоторой прямой $\operatorname{Re} s = \gamma$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathcal{K}_3^*(s) z^{-s} ds = \mathcal{K}_3(z), \quad \gamma > \gamma_1 = \max(\operatorname{Re} \nu/2 - 1, -\operatorname{Re} d/\mu), \quad (8.8)$$

то есть преобразование Меллина от $\mathcal{K}_3(z)$ (8.7) при указанных s существует и совпадает со значением $\mathcal{K}_3^*(s) = [\mathcal{K}_1^*(s)]^{-1}$.

Воспользовавшись условием аналитичности $\mathcal{K}_2^*(s)$, запишем цепочку равенств по некоторой достаточно широкой петле $L_{+\infty}$ из полуплоскости $\operatorname{Re} s > \gamma_0$, полагая, что на этой петле $\operatorname{Re} s \geq \gamma > \gamma_0, \gamma_1$:

$$\begin{aligned}2\pi i \mathcal{K}_2(t) &= \int_{L_{+\infty}} \mathcal{K}_2^*(s) t^{-s} ds = \int_{L_{+\infty}} \left(\int_0^{\infty} \mathcal{K}_3(\theta) \theta^{s-1} d\theta \right) \mathcal{K}_1^*(s) \mathcal{K}_2^*(s) t^{-s} ds = \\ &= \int_0^{\infty} \mathcal{K}_3(\theta) \theta^{-1} d\theta \int_{L_{+\infty}} \mathcal{K}_1^*(s) \mathcal{K}_2^*(s) (t/\theta)^{-s} ds. \quad (8.9)\end{aligned}$$

Допустим, что интеграл (8.1) сходится, тогда сходится и соответствующий интеграл (1.1). Поэтому выполняются условия теоремы 23, позволяющие записать последний интеграл в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{+\infty}} \mathcal{K}_1^*(s) \mathcal{K}_2^*(s) (t/\theta)^{-s} ds = \int_0^{\infty} \mathcal{K}_1\left(\frac{t}{\theta y}\right) \mathcal{K}_2(y) \frac{dy}{y} = \mathcal{K}(t/\theta).$$

Отсюда следует формула решения соответствующего уравнения (1.1):

$$\mathcal{K}_2(t) = \int_0^{\infty} \mathcal{K}(t/\theta) \mathcal{K}_3(\theta) \theta^{-1} d\theta. \quad (8.10)$$

Совершив в ней обратную замену (8.5), придем к *решению уравнения (8.1)*:

$$f(\tau) = \int_0^{\infty} \sqrt{p\tau} \tilde{\mathcal{K}}(p\tau) g(p) dp, \quad \tilde{\mathcal{K}}(q) = 4/q^2 \mathcal{K}_3(q^2/4). \quad (8.11)$$

В частности, при $\lambda=0$, $\mu=1$ функция $\tilde{\mathcal{H}}(q) = J_\nu(q)$ и соотношение (8.11) переходит в формулу обращения преобразования Ганкеля, для которого имеет место

Теорема 24 [9, 15]. Пусть $f(x) \in L^c(0, \infty)$ и является кусочно-дифференцируемой функцией, а $\nu \geq -1/2$. Тогда преобразование Ганкеля (8.1) ($\mu=1$, $\lambda=0$) существует и во всех точках $x=\tau$, где $f(x)$ непрерывна, справедлива формула обращения (8.11), где $\tilde{\mathcal{H}}(q) = J_\nu(q)$.

В общем случае ограничения, при которых была выведена формула (8.11), можно ослабить, сохранив условия существования интегралов (8.11), (8.1), условия на $g(\eta)$, обеспечивающие возможность представить $g(\eta)$ в виде (8.1), и некоторые ограничения на параметры μ , ν , λ . Так как детальное исследование этих вопросов в различных классах функций f и g потребует много места, то укажем лишь достаточные условия, при которых сходятся интегралы (8.1) и (8.11).

В соответствии с формулами (4.56), (4.57) и (8.2) справедливы следующие оценки [34, 61, 62]:

$$\begin{aligned} J_{\nu, \lambda}^{\mu}(x) &\sim [\pi(1+\mu)]^{-1/2} \mu^{\lambda-\rho(\nu+2\lambda+1/2)} 2^{(2\rho-1)(\nu+2\lambda+1/2)+1} x^{(\nu+2\lambda)(1-2\rho)-\rho} \times \\ &\times \exp[(\mu x^2/4)^{\rho} (\mu\rho)^{-1} \cos(\pi\rho)] \cos[(\mu x^2/4)^{\rho} (\mu\rho)^{-1} \sin(\pi\rho) - \\ &- \pi\rho(\nu+2\lambda+1/2)] \{1+O(x^{-2\rho})\} + H(1-\mu)(x/2)^{\nu+2\lambda-2} \times \\ &\times \{\Gamma[\lambda, 1+\lambda+\nu-\mu]^{-1} \{1+O(x^{-2})\}, \quad \rho=(1+\mu)^{-1}, \quad \mu>0, \quad x \rightarrow +\infty, \\ J_{\nu, \lambda}^{\mu}(x) &\sim (x/2)^{\nu+2\lambda} \{\Gamma[1+\lambda, 1+\lambda+\nu]\}^{-1}, \quad x \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (8.12)$$

где $H(x)$ — функция Хевисайда (§ 11), причем $H(0)=1$.

Первая оценка показывает, что интеграл (8.1), где $\mu>1$, на ∞ сходится лишь при условии, что $f(\tau)$ на ∞ экспоненциально убывает, но так, что это убывание компенсирует быстрый рост функции $J_{\nu, \lambda}^{\mu}(\eta\tau)$ при $\eta\tau \rightarrow \infty$, когда $\mu>1$. Поэтому, приняв во внимание замечание на с. 104, можно заключить, что если интеграл (8.1) при $\mu>1$ сходится, то функция $\mathcal{H}_2^*(s)$ аналитична в некоторой правой полуплоскости, то есть выполняется второе из условий на с. 111, использованное при выводе формулы (8.11).

Пусть $0 < \mu \leq 1$, а $f(\tau) = O(\tau^{\alpha})$ при $\tau \rightarrow 0$ и $f(\tau) = O(\tau^{\beta})$ при $\tau \rightarrow \infty$. Тогда интеграл (8.1) сходится, если $\operatorname{Re}(\nu+2\lambda+\alpha) > -3/2$, а в случае $\mu=1$ выполняются еще дополнительные условия $\operatorname{Re}(\nu+2\lambda+\beta) < 1/2$, $\operatorname{Re}\beta < -1$.

Аналогичная ситуация возникает при рассмотрении интеграла (8.11). В соответствии с теоремами 19, 20 и формулой (8.7) справедливы оценки

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_3(x) &= O\{x^{\rho(\nu-1/2)-\nu/2+1} \exp[-(\mu x^2/4)^{\rho} (\mu\rho)^{-1} \cos(\pi\rho)]\}, \quad 0 < \mu \neq 1, \quad x \rightarrow \infty; \\ \mathcal{H}_3(x) &\sim \pi^{-1/2} x^{3/4} \cos[2\sqrt{x} - (\nu+2\lambda+1/2)\pi/2] \{1+O(x^{-1/2})\}, \\ &\mu=1, \quad x \rightarrow \infty; \\ \mathcal{H}_3(x) &= O(x^{1-\nu/2}) + O(x^{d/\mu}), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Они показывают, что для сходимости на ∞ интеграла (8.11) в случае $\mu < 1$ от функции $g(p)$ следует потребовать соответствующее экспоненциальное убывание, а в случае $\mu > 1$ эта функция может даже экспоненциально расти.

Если $g(p) = O(p^{\alpha_1})$, когда $p \rightarrow 0$ и $g(p) = O(p^{\beta_1})$, $p \rightarrow \infty$, то при $\mu > 1$ интеграл (8.11) сходится для любого β_1 и $\alpha_1 > \max(\operatorname{Re}\nu - 3/2, 1/2 - 2\operatorname{Re}d/\mu)$.

Следует отметить, что решение (8.11), (8.7) уравнения (8.1) при $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ может быть записано в виде [61]

$$f(\tau) = (-1)^\lambda \mu^{-1} \sqrt{2} \int_0^\infty (p\tau/2)^{2(1+\lambda+\nu)/\mu-\nu-2\lambda-3/2} J_{(1+\lambda+\nu)/\mu-\lambda-1}^{1/\mu} \times \\ \times ((p\tau/2)^{2/\mu}) g(p) dp. \quad (8.14)$$

Если, в частности, $\lambda = 0$, то из формул (8.1), (8.14) следуют взаимнообратные равенства, установленные в работе [32].

В заключение приведем в качестве примера значение одного интеграла, содержащего функцию $J_{\nu,\lambda}^\mu(z)$:

$$\int_0^1 (1-t^2)^{\alpha-1} J_{\nu,\lambda}^\mu(at) t^{1-\nu} dt = 1/2 \Gamma(\alpha) (2/a)^\alpha J_{\nu-\alpha,\lambda+\alpha}^\mu(a), \quad (8.15) \\ \operatorname{Re} \lambda > -1, \operatorname{Re} \alpha > 0, a > 0.$$

При $\mu=1, \lambda=0$ это равенство переходит в формулу 6.567 (3) из [7].

Доказательство соотношения (8.15) проводится с помощью преобразования Меллина и затруднений не вызывает.

2. Гипергеометрическое преобразование Гаусса. Рассмотрим структуру и выведем формулу обращения гипергеометрического преобразования Гаусса [50, 71]:

$$\mathcal{F}_c^{ab} f(x) = \Gamma \left[\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \right] \frac{1}{x} \int_0^\infty F \left(a, b; c; -\frac{t}{x} \right) f(t) dt = g(x), \quad x > 0. \quad (8.16)$$

Это преобразование при частных значениях параметров сводится к обобщенному преобразованию Стильеса (когда $c=b$):

$$\mathfrak{S}_a f(x) = \frac{x^{1-a}}{\Gamma(a)} \mathcal{F}_b^{ab} f(x) = \int_0^\infty \frac{f(t) dt}{(t+x)^a}, \quad (8.17)$$

${}_1F_1$ -преобразованию:

$$\mathcal{F}_c^a f(p) = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b}{p\Gamma(b)} \mathcal{F}_c^{ab} f \left(\frac{b}{p} \right) = \Gamma \left[\begin{matrix} a \\ c \end{matrix} \right] \int_0^\infty {}_1F_1(a; c; -tp) f(t) dt \quad (8.18)$$

(при $px=b \rightarrow \infty$), преобразованию Лапласа:

$$\mathfrak{L}f(p) = \mathcal{F}_a^a f(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t) dt \quad (8.19)$$

(при $a=c, px=b \rightarrow \infty$) и преобразованию Ганкеля:

$$\mathfrak{H}_\nu \varphi(s) = 2^{\nu+1} s^{-\nu-3/2} \lim_{a,b \rightarrow \infty} \frac{ab}{\Gamma[a, b]} \mathcal{F}_{\nu+1}^{ab} f \left(\frac{4ab}{s^2} \right) = \\ = \int_0^\infty \sqrt{s\tau} J_\nu(s\tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (8.20)$$

(при $xs^2=4ab, a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty, c=\nu+1, \tau^{\nu+1/2} f(\tau^2)=\varphi(\tau)$).

Из свойства (5.6) функции Гаусса следует, что интеграл (8.16) существует, если при любых $0 < \varepsilon < E < \infty$ существуют интегралы $\int_0^E f(t) dt$, $\int_\varepsilon^\infty t^{-a} f(t) dt$, $\int_\varepsilon^\infty t^{-b} f(t) dt$ ($a \neq b$).

Предположив, что функция $f(t)$ удовлетворяет этим условиям, совершим над равенством (8.16) преобразование Меллина, которое в силу (5.2) приведет к формуле

$$(\mathcal{F}_c^{ab} f)^*(s) = \Gamma \left[\begin{matrix} s+a-1, s+b-1, 1-s \\ s+c-1 \end{matrix} \right] f^*(s) = g^*(s). \quad (8.21)$$

Эта формула справедлива при условии абсолютной интегрируемости функции $f(t)t^{s-1}$ по лучу $(0, \infty)$ и при условии $\max(1-\operatorname{Re} a, 1-\operatorname{Re} b) < \operatorname{Re} s < 1$, которое обеспечивает существование преобразования Меллина от гипергеометрического ядра. Последние ограничения будем считать выполненными. Несложно установить, что из них следуют указанные выше условия на функцию $f(t)$.

Разложив функцию $\Gamma[\]$ из правой части (8.21) на три множителя и приняв во внимание свойство (2.51) свертки, легко получим следующее представление оператора (8.16) в виде суперпозиции трех более простых операторов Лапласа $\mathcal{L}$ и Вейля I_- (§ 11):

$$\mathcal{F}_c^{ab} f(x) = x^{a-1} \mathcal{L} x^{a-1} \mathcal{L} x^{b-1} I_-^{c-b} x^{1-c} f(x) = g(x). \quad (8.22)$$

Для справедливости этого равенства необходимо предположить, что каждый приведенный в суперпозиции оператор существует.

Теперь для решения интегрального уравнения (8.16) достаточно последовательно применить к равенству (8.16) операторы, обратные к входящим в (8.22), и исследовать законность проводимых операций, то есть выявить класс функций f и g , в котором все эти операции осуществимы. Таким образом, при некоторых условиях на f , g и параметры решение уравнения (8.16) может быть представлено в виде

$$f(x) = x^{c-1} I_-^{b-c} x^{1-b} \mathcal{L}^{-1} x^{1-a} \mathcal{L}^{-1} x^{1-a} g(x), \quad (8.23)$$

где $\mathcal{L}^{-1}$ означает оператор обратного преобразования Лапласа ([15], гл. 8.2). Ограничения на f и g можно установить, если воспользоваться условиями обратимости операторов $\mathcal{L}$ и I_-^a в некоторых весовых классах, приведенными в работе [21], где рассматривались уравнения такого рода.

Наряду с отмеченным к уравнению (8.16) можно применить и другой способ решения. Поделив равенство (8.21) на Γ -множители и взяв обратное преобразование Меллина (2.52) от обеих частей полученного соотношения, придем к следующему представлению решения уравнения (8.16):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-i\sigma}^{\gamma+i\sigma} \frac{\Gamma(s+c-1) g^*(s)}{\Gamma[s+a-1, s+b-1, 1-s]} t^{-s} ds. \quad (8.24)$$

Из всего сказанного и теоремы 12 вытекает следующая

Теорема 25 [71]. Если существуют интегралы $f^*(s)$, $g^*(s)$, функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема и непрерывна при $x \geq 0$, $f(x) = O(x^n)$,

$\eta > 0$, $x \rightarrow 0$; $\hat{f}(x) = O[\exp(-x^\varepsilon)]$, $\operatorname{Re} \varepsilon > 0$, для больших x и выполняются условия $\max(1 - \operatorname{Re} a, 1 - \operatorname{Re} b) < \operatorname{Re} s = \gamma < 1$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$, то решение уравнения (8.16) единственно и может быть представлено в виде (8.24).

Докажем еще одно важное свойство оператора (8.16).

Теорема 26. Если существуют значения $\mathcal{F}_c^{ab} f_i(x) = g_i(x)$, $i=1, 2$, и абсолютно сходится один из приведенных ниже интегралов, то справедливо равенство

$$\int_0^\infty f_1(t) \mathcal{F}_c^{ab} f_2(1/t) t^{-1} dt = \int_0^\infty f_2(t) \mathcal{F}_c^{ab} f_1(1/t) t^{-1} dt. \quad (8.25)$$

Доказательство. Совершим преобразование Меллина

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} \left\{ \int_0^\infty f_1(t) g_2(x/t) t^{-1} dt; s \right\} &= f_1^*(s) g_2^*(s) = \\ &= f_1^*(s) f_2^*(s) \Gamma \left[\begin{matrix} s+a-1, s+b-1, 1-s \\ s+c-1 \end{matrix} \right] = \\ &= \mathfrak{M} \left\{ \int_0^\infty f_2(t) g_1 \left(\frac{x}{t} \right) \frac{dt}{t}; s \right\}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Так как преобразования Меллина сверток совпадают и сами преобразуемые функции непрерывны (в силу аналитичности функции Гаусса), то эти свертки равны. Положив, в частности, $x=1$, получим равенство (8.25).

Из доказанных теорем можно вывести соответствующие результаты, относящиеся к преобразованиям (8.17) — (8.20).

Теорема 27. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям, указанным в теореме 25. Тогда если существует интеграл $(\mathfrak{S}_a f)^*(s+a-1)$ и $1 - \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} s < 1$, то оператор (8.17) обобщенного преобразования Стильеса обратим по формуле

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-i\sigma}^{\gamma+i\sigma} \frac{\Gamma(a) t^{-s}}{\Gamma[s+a-1, 1-s]} (\mathfrak{S}_a f)^*(s+a-1) ds. \quad (8.27)$$

Если существует интеграл $(\mathcal{F}_c^a f)^*(1-s)$ и $1 - \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} s < 1$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$, то оператор (8.18) ${}_1F_1$ -преобразования обратим по формуле

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-i\sigma}^{\gamma+i\sigma} \Gamma \left[\begin{matrix} s+c-1 \\ s+a-1, 1-s \end{matrix} \right] (\mathcal{F}_c^a f)^*(1-s) t^{-s} ds. \quad (8.28)$$

Если существует интеграл $(\mathcal{Q} f)^*(1-s)$ и $\operatorname{Re} s < 1$, то оператор (8.19) преобразования Лапласа обратим по формуле

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \int_{\gamma-i\sigma}^{\gamma+i\sigma} \frac{t^{-s}}{\Gamma(1-s)} (\mathcal{Q} f)^*(1-s) ds. \quad (8.29)$$

Следует отметить, что в работе [50] был получен другой вид формулы обращения преобразования (8.16) и установлены необходимые, а также достаточные условия обратимости (8.16) в некоторых классах функций. Выведенная там формула обращения содержит производные дробного порядка и предел в среднем квадратичном.

3. Преобразование типа свертки с G -функцией Мейера в ядре. В теории интегральных преобразований важное место занимает вопрос об условиях, при которых справедлива формула

$$f(x) = \int_0^\infty h(xu) \int_0^\infty k(ut) f(t) dt du. \quad (8.30)$$

Если, в частности, $h(x) \equiv k(x)$, то такая функция $k(x)$ называется *симметричным ядром Фурье* (см. (2.37)). Например, как показано выше, преобразование Ганкеля (8.20) имеет симметричное ядро $k(x) = \sqrt{x} J_\nu(x)$.

В приложениях широко используются преобразования вида

$$\int_0^\infty k(ut) f(t) dt = g(u), \quad f(x) = \int_0^\infty h(xu) g(u) du \quad (8.31)$$

с *несимметричными ядрами Фурье*, для которых $h(x) \neq k(x)$. Простейшими примерами таких преобразований являются взаимобратные Y - и H -преобразования [3], для которых $k(x) = \sqrt{x} Y_\nu(x)$ и $h(x) = \sqrt{x} H_\nu(x)$.

Если к равенству (8.30) применить преобразование Меллина (1.3), то несложно установить *необходимое условие*

$$h^*(s) k^*(1-s) = 1, \quad (8.32)$$

которому должны удовлетворять ядра Фурье $k(x)$ и $h(x)$.

Теория G -функции Мейера (4.53) и H -функции Фокса [42, 53] дает возможность указать весьма общий класс ядер Фурье. Так, несложно убедиться, что при определенных условиях функции

$$k(x) = 2\gamma x^{\gamma-1/2} G_{p+q, m+n}^{mp} \left(x^{2\gamma} \left| \begin{matrix} a_p, & b_q \\ c_m, & d_n \end{matrix} \right. \right), \quad (8.33)$$

$$h(x) = 2\gamma x^{\gamma-1/2} G_{p+q, m+n}^{nq} \left(x^{2\gamma} \left| \begin{matrix} -b_q, & -a_p \\ -d_n, & -c_m \end{matrix} \right. \right) \quad (8.34)$$

удовлетворяют требованию (8.32) и являются ядрами Фурье. Если $p=q$, $m=n$, $a_j + b_j = 0$, $j=1, 2, \dots, p$, $c_k + d_k = 0$, $k=1, 2, \dots, m$, то $k(x) = h(x)$ и преобразование (8.31), (8.33) симметрично. Такое преобразование рассматривали Фокс [42] и Нараин [54–56], которые вывели достаточные условия существования формул (8.31) — (8.34) для симметрического и общего случаев в классах L и L_2 . Похожее преобразование изучалось в работе [47], а более общее — в [45, 46]. Приведем здесь основную теорему из работы [55].

Теорема 28. Пусть выполняются следующие условия: 1) $\gamma > 0$, $0 < n - p = m - q = \eta/2$, 2) $\sum_{j=1}^p a_j + \sum_{j=1}^q b_j = \sum_{j=1}^m c_j + \sum_{j=1}^n d_j$, 3) $1/2 - \operatorname{Re} a_j > 1/(2\eta)$, $1/2 - \operatorname{Re} b_j > 1/(2\eta)$, $1/2 + \operatorname{Re} c_j \geq 1/(2\eta)$, $1/2 - \operatorname{Re} d_j \geq 1/(2\eta)$ для всех $j=1, 2, 3, \dots$, 4) функция $f(\xi)$ кусочно-дифференцируема и $\xi^{\gamma/\eta-1/2} f(\xi) \in L^C(0, \infty)$. Тогда во всех точках $\xi = x > 0$, где $f(\xi)$ непрерывна, справедлива формула (8.30), где $k(x)$ и $h(x)$ имеют вид (8.33),

(8.34), а в точках разрыва значение $f(x)$ из равенства (8.30) следует заменить на $1/2 [f(x-0) + f(x+0)]$.

Замечание. Из этой теоремы при $m=n=1$, $p=q=0$, $2c_1=v$, $\gamma=1/2$ получается теорема 24. Если же положить $m=2$, $p=q=1$, $n=0$, $\gamma=1/2$, $a_1=0$, $b_1=c-1$, $c_1=a-1$, $c_2=b-1$, а $f(t)$ заменить на $t^{-1}f(1/t)$, то первая из формул (8.31) примет вид преобразования Гаусса (8.16), к которому, однако, теорема 28 неприменима, но применима более общая теорема обращения из работы [46].

Укажем, как вывести достаточные условия на функцию $f(\tau)$, которые обеспечат сходимость первого из интегралов (8.31). Легко заметить, что простые замены переменной в интеграле (4.53) приводят к следующим общим свойствам G -функции Мейера ([2], гл. 5.3):

$$z^\sigma G_{pq}^{mn} \left(z \left| \begin{matrix} \alpha_p \\ \beta_q \end{matrix} \right. \right) = G_{pq}^{mn} \left(z \left| \begin{matrix} \alpha_p + \sigma \\ \beta_q + \sigma \end{matrix} \right. \right), \quad (8.35)$$

$$G_{pq}^{mn} \left(z^{-1} \left| \begin{matrix} \alpha_p \\ \beta_q \end{matrix} \right. \right) = G_{qp}^{nm} \left(z \left| \begin{matrix} 1 - \beta_q \\ 1 - \alpha_p \end{matrix} \right. \right). \quad (8.36)$$

Второе свойство дает возможность преобразовать G -функцию, для которой $p > q$, в G -функцию, где $p < q$. Поэтому, не теряя общности, можно считать, что $p \leq q$. Тогда, как вытекает из теорем 18—20, при $1 \leq n \leq p \leq q$, $1 \leq m \leq q$, $2(m+n) \geq p+q$ справедливы следующие оценки для G -функции действительного аргумента:

$$G_{pq}^{mn} \left(x \left| \begin{matrix} \alpha_p \\ \beta_q \end{matrix} \right. \right) = \begin{cases} O(|x|^\beta), & x \rightarrow 0, \quad \beta = \min_{1 \leq k \leq m} \operatorname{Re} \beta_k, \\ O(|x|^{\alpha-1}) + \varepsilon x^\rho \cos[(q-p)x^{1/(q-p)} + \delta], & x \rightarrow +\infty, \end{cases} \quad (8.37)$$

$$\alpha = \max_{1 \leq k \leq n} \operatorname{Re} \alpha_k, \quad \varepsilon = 0, \quad \delta = \text{const} \quad (\varepsilon \neq 0, \quad q \geq p+2, \quad 2(m+n) = p+q),$$

$$(q-p)\rho = (1+p-q)/2 + \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^q \beta_j - \sum_{j=1}^p \alpha_j \right), \quad q \neq p.$$

Если, в частности, $p=q=m+n$, то функция $G_{pp}^{mn}(z)$ имеет еще одну особую точку $z=1$, которая, как и точки $z=0$, $z=\infty$, является в этом случае правильной. Эта функция интегрируема в окрестности точки $z=1$, если еще выполняется дополнительное условие $\operatorname{Re} \sum_{j=1}^p (\alpha_j - \beta_j) > 0$.

Если $n=0$, $q > p$, $2m > p+q$, то $G_{pq}^{mn}(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ экспоненциально убывает (см. (4.47)). Эта функция экспоненциально растет на $+\infty$, если $2(m+n) < p+q$, $p < m+n$, $n \geq 0$ (см. (4.51)), причем справедлива оценка

$$G_{pq}^{mn} \left(x \left| \begin{matrix} \alpha_p \\ \beta_q \end{matrix} \right. \right) \sim A x^\rho \exp \left[-(q-p) x^{1/\rho} \cos \frac{q-m-n}{q-p} \pi \right] \times \\ \times \cos \left[(q-p) x^{1/(q-p)} \sin \frac{q-m-n}{q-p} \pi + B \right], \quad A, B = \text{const}, \quad x \rightarrow +\infty. \quad (8.38)$$

Полученные свойства несложно перенести на случай функции $k(x)$ (8.33). Ясно, что для сходимости первого интеграла (8.31) в 0 и на ∞ необходимо, чтобы функция $f(\tau)$ определенным образом компенсировала рост функции $k(i\tau)$ в случае его наличия.

4. Несверточное преобразование с G -функцией Мейера в ядре. Рассмотрим еще одно общее интегральное преобразование, содержащее в ядре G -функцию Мейера (4.53), введенное Уимпом в работе [73]:

$$\int_0^{\infty} G_{p+2,q}^{m,n+2} \left(t \middle| \begin{matrix} 1-\nu+ix, 1-\nu-ix, \alpha_p \\ \beta_q \end{matrix} \right) f(t) dt = g(x). \quad (8.39)$$

Особенностями этого преобразования являются те обстоятельства, что оно *несверточное* и что интеграл зависит от переменной x , входящей в параметры, а не в аргумент G -функции. Как показывается ниже, в формуле обращения преобразования Уимпа интегрирование следует вести по параметрам, а не по аргументу, что имело место в предыдущих примерах.

Преобразование Уимпа и формула его обращения, построенная в [73], существенно обобщают пару двойственных формул известного преобразования Конторовича—Лебедева [19]:

$$2\pi^{-2}x \operatorname{sh} \pi x \int_0^{\infty} K_{ix}(t) f(t) t^{-1} dt = g(x), \quad (8.40)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} K_{it}(x) g(t) dt \quad (8.41)$$

и пару двойственных формул обобщенного преобразования Мелера—Фока [11]:

$$x\pi^{-1} \operatorname{sh} \pi x \Gamma[1/2-k+ix, 1/2-k-ix] \int_1^{\infty} P_{ix-1/2}^k(t) f(t) dt = g(x), \quad (8.42)$$

$$f(x) = \int_0^{\infty} P_{it-1/2}^k(x) g(t) dt. \quad (8.43)$$

Здесь $K_{\nu}(t)$ означает функцию Макдональда (6.26), а $P_{\nu}^k(t)$ — присоединенную функцию Лежандра 1-го рода (§ 11).

Отметим, что если в последних формулах положить $k = \pm 1/2$, то после замены x на $\operatorname{ch} x$, $f(\operatorname{ch} x) \sqrt{\operatorname{sh} x}$ на $f_1(x)$ несложно получить формулы (2.44)—(2.47) косинус- и синус-преобразований Фурье.

Покажем, что формула обращения преобразования (8.39) формально может быть записана в виде

$$f(x) = i\pi^{-1} \int_0^{\infty} t e^{-\nu t} \{ e^{\pi i} \Lambda(x e^{\pi i} | \nu + it, \nu - it) - e^{-\pi i} \Lambda(x e^{\pi i} | \nu - it, \nu + it) \} g(t) dt, \quad (8.44)$$

где

$$\Lambda(z | \alpha, \beta) = G_{p+2,q}^{q-m,p-n+1} \times \\ \times \left(z \middle| \begin{matrix} -\alpha_{n+1}, -\alpha_{n+2}, \dots, -\alpha_p, \alpha, -\alpha_1, -\alpha_2, \dots, -\alpha_n, \beta \\ -\beta_{m+1}, -\beta_{m+2}, \dots, -\beta_q, -\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_m \end{matrix} \right). \quad (8.45)$$

Чтобы вывести эту формулу, в соответствии с [73] вначале преобразуем уравнение (8.39) к уравнению типа свертки Меллина (1.1). Для этого в равенстве (8.39) заменим x на $-iu$, умножим его на $x^{-u} du$ и

пронтегрируем по прямой $(-i\infty, i\infty)$. Несложно убедиться, что справедливо соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} x^{-u} G_{p+2,q}^{m,n+2} \left(t \left| \begin{matrix} 1-v+u, 1-v-u, \alpha_p \\ \beta_q \end{matrix} \right. \right) du = \\ & = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_L \Gamma \left[\begin{matrix} (\beta_-) + s, \\ (\alpha_+) + s, \end{matrix} \right. \\ & \left. \begin{matrix} 1-(\alpha_-)-s \\ 1-(\beta_+)-s \end{matrix} \right] t^{-s} ds \int_{-i\infty}^{i\infty} \Gamma[v-u-s, v+u-s] x^{-u} du = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_L \Gamma \left[\begin{matrix} 1-v, 1/2-v, \alpha_p \\ \beta_q \end{matrix} \right] t^{-s} \left[\frac{x}{(1+x)^2} \right]^{v-s} \Gamma(2v-2s) ds = \\ & = \frac{\tilde{x}^v}{2\sqrt{\pi}} G_{p+2,q}^{m,n+2} \left(\tilde{x} t \left| \begin{matrix} 1-v, 1/2-v, \alpha_p \\ \beta_q \end{matrix} \right. \right), \quad \tilde{x} = \frac{4x}{(1+x)^2}, \quad (8.46) \end{aligned}$$

где под L понимается контур $L_{i\infty}$ или $L_{-\infty}$ ($\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} v$, $s \in L$), охватывающий только левые полюсы $s = -\beta_j - k$, $j = 1, 2, \dots, m$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $(\beta_-) = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, $(\beta_+) = (\beta_{m+1}, \dots, \beta_q)$, причем в случае $L = L_{i\infty}$ выполняется одно из следующих дополнительных условий сходимости: 1) $\arg t = 0$, $2(m+n+1) > p+q$; 2) $2(m+n+1) = p+q$, $\arg t = 0$, $\lim_{s \rightarrow \infty, s \in L} \operatorname{Re} s \times$

$\times (q-p-2) < 1 + (q-p)/2 + \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^p \alpha_j - \sum_{j=1}^q \beta_j - 2v \right)$; 3) $m+n=p$, $p+2 = q \geq 2$, $\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^p \alpha_j - \sum_{j=1}^q \beta_j - 2v \right) + 3/2 > 0$, а в случае $L = L_{-\infty}$: $q > p+2$ или $q = p+2$ при $|\tilde{x}t| < 1$ и предполагается, что все левые полюсы контуром L отделены от правых.

Введя обозначения

$$\mathcal{H}_1(\tau) = G_{p+2,q}^{m,n+2} \left(\tau \left| \begin{matrix} 1-v, 1/2-v, \alpha_p \\ \beta_q \end{matrix} \right. \right), \quad \mathcal{H}_2(\tau) = \tau^{-1} f(1/\tau), \quad (8.47)$$

$$\mathcal{H}(\tilde{x}) = \tilde{x}^{-v} (i\sqrt{\pi})^{-1} \int_{-i\infty}^{i\infty} x^{-u} g(-iu) du,$$

запишем полученное из (8.39) равенство в виде свертки:

$$\int_0^\infty \mathcal{H}_1(\tilde{x}/t) \mathcal{H}_2(t) t^{-1} dt = \mathcal{H}(\tilde{x}). \quad (8.48)$$

При решении этого интегрального уравнения можно применять технику, использованную ранее. Тогда несложно формально вывести равенство

$$\mathcal{H}_2(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\mathcal{H}_1^*(s)}{\mathcal{H}_2^*(s)} \tau^{-s} ds. \quad (8.49)$$

Вычислим преобразование $\mathcal{H}^*(s)$. Пусть вначале $\operatorname{Re} u = c < 0$, $\operatorname{Re} v + c < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} v$. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^*(s) &= \mathcal{H}_c^*(s) = (i \sqrt{\pi})^{-1} \int_0^\infty \tilde{x}^{s-v-1} d\tilde{x} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-u} g(-iu) du = \\ &= 4^{s-v} (i \sqrt{\pi})^{-1} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(-iu) du \int_0^1 x^{s-v-u-1} (1-x)(1+x)^{2v-2s-1} dx = \\ &= \frac{4^{s-v} e^{\pi i(s-v)}}{i \sqrt{\pi}} \Gamma(2v-2s) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} g(-iu) e^{-\pi i u} (-2u) \Gamma \left[\frac{s-v-u}{1+v-s-u} \right] du.\end{aligned}\quad (8.50)$$

Преобразование Меллина функции $\mathcal{H}_1(\tau)$ при соответствующих условиях имеет вид

$$\mathcal{H}_1^*(s) = \Gamma \left[\begin{matrix} (\beta_-) + s, 1 - (\alpha_-) - s \\ (\alpha_+) + s, 1 - (\beta_+) - s \end{matrix} \right] \Gamma[v-s, v+1/2-s]. \quad (8.51)$$

Эта формула получается из определения G -функции (4.53) при дополнительных условиях того случая, когда в качестве контура L допустима прямая $\operatorname{Re} s = \gamma$: $-\min_{1 \leq j \leq m} \beta_j < \gamma < 1 - \max_{1 \leq j \leq n} \alpha_j$. Если же преобразование Меллина от $\mathcal{H}_1(\tau)$ не существует, но интеграл Меллина—Бернса от правой части (8.51) сходится и равен $\mathcal{H}_1(\tau)$, то и в этом случае под $\mathcal{H}_1^*(s)$ будем понимать значение (8.51).

Подставив (8.50), (8.51) в формулу (8.49), после сокращения $\Gamma(2v-2s)$ получим равенство

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_2(\tau) &= -\frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} u g(-iu) e^{-\pi i(v+u)} \times \\ &\times \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \Gamma \left[\begin{matrix} (\alpha_+) + s, 1 - (\beta_+) - s, s-v-u \\ (\beta_-) + s, 1 - (\alpha_-) - s, 1+v-u-s \end{matrix} \right] (e^{-\pi i \tau})^{-s} ds du = \\ &= -\frac{1}{\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} u g(-iu) e^{-\pi i(v+u)} G_{q,p+2}^{p-n+1,q-m} \times \\ &\times \left(e^{-\pi i \tau} \left| \begin{matrix} \beta_{m+1}, \dots, \beta_q, \beta_1, \dots, \beta_m \\ \alpha_{n+1}, \dots, \alpha_p, -u-v, \alpha_1, \dots, \alpha_n, u-v \end{matrix} \right. \right) du.\end{aligned}\quad (8.52)$$

Если в последнем равенстве совершить замены (8.47), $\tau x = 1$, $\mp iu = t$, воспользоваться свойствами (8.35), (8.36), $g(x) = g(-x)$ и положить $c=0$, то несложно получить формулы (8.44), (8.45).

Частные случаи общих формул (8.39), (8.44), (8.45) приводят к преобразованиям Конторовича—Лебедева, Мелера—Фока, Олевского, Лебедева и к ряду других двойственных формул. С помощью определения G -функции Мейера можно убедиться в следующем:

1) если положить $m=n=p=q=0$, то после замены $t \operatorname{sh}(it) g(t/2)$ на $g(t)$ и $2\pi^2(x^2/4)^{v-1} f(4/x^2)$ на $f(x)$ выводятся формулы (8.40), (8.41) преобразования Конторовича—Лебедева;

2) если $n=p=0$, $m=q=1$, то после замены β_1 на $1/2-v-k$, t на t^{-1} , x на x^{-1} , $e^{i/2} t^{v-5/2} f(t^{-1})$ на $f(t)$ получается пара двойственных формул с функцией Уиттекера:

$$\Gamma[1/2-k-ix, 1/2-k+ix] \int_0^\infty W_{k,ix}(t) f(t) dt = g(x), \quad (8.53)$$

$$f(x) = (\pi x)^{-2} \int_0^\infty t \operatorname{sh}(2\pi t) W_{k,it}(x) g(t) dt, \quad (8.54)$$

которая при $k=0$ переходит в пару (8.40), (8.41);

3) если $n=p=0$, $m=1$, $q=2$, то после подстановки $\beta_1=\xi$, $\beta_2=\sigma$ выводятся формулы

$$\Gamma \left[\begin{matrix} \xi-ix, \xi+ix \\ 1+\xi-\sigma \end{matrix} \right] \int_0^\infty t^\xi {}_2F_1(\xi-ix, \xi+ix; 1+\xi-\sigma; -t) f(t) dt = g(x), \quad (8.55)$$

$$f(x) = \frac{x^{-\sigma}}{\Gamma(1+\xi-\sigma)} \times \\ \times \int_0^\infty \frac{t \operatorname{sh}(2\pi t) {}_2F_1(1-\sigma-it, 1-\sigma+it; 1+\xi-\sigma; -x)}{\Gamma[\sigma-it, \sigma+it](\operatorname{ch}^2 \pi t - \cos^2 \pi \sigma)} g(t) dt, \quad (8.56)$$

которые простой заменой отличаются от формул преобразования М. Н. Олевского [23];

4) если в последних равенствах положить $\sigma=1/2$, $k=1/2-\xi$ и заменить $(t+1)^{k/2} t^{(1-k)/2} f(t)$ на $f(2t+1)$, а $2x \operatorname{sh}(\pi x) g(x)$ на $\pi g(x)$, то легко получить формулы Мелера—Фока (8.42), (8.43);

5) если $m=p=q=1$, $n=0$, $\alpha_1=1-v$, $\beta_1=1/2-v$, то после замены $2\sqrt{\pi} t^{2v-3} f(t^{-2})$ на $f(t)$ и $\operatorname{ch}(\pi x) g(x)$ на $g(x)$ выводятся формулы, установленные Н. Н. Лебедевым [20]:

$$\int_0^\infty [I_{ix}(t) + I_{-ix}(t)] K_{ix}(t) f(t) dt = g(x), \quad (8.57)$$

$$f(x) = -\frac{4}{\pi^2} \frac{d}{dx} \int_0^\infty t \operatorname{sh}(\pi t) K_{it}^2(x) g(t) dt; \quad (8.58)$$

6) если $m=0$, $p=q=n=1$, $\alpha_1=1-v$, $\beta_1=1/2-v$, то после замены $2t^{2v-3} f(t^{-2})$ на $f(t)$ получаются формулы

$$2\pi^{-1/2} \int_0^\infty K_{ix}^2(t) f(t) dt = g(x), \quad (8.59)$$

$$f(x) = \frac{i}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{d}{dx} I_u^2(x) t g(t) dt. \quad (8.60)$$

Насколько известно автору, условия, при которых формулы (8.39) и (8.44) являются двойственными, в общем случае не установлены. Поэтому ограничимся лишь изложением достаточных условий обратимо-

сти, относящихся к частным случаям. Справедливы следующие результаты.

Теорема 29 [19]. Пусть $f(t)$ — кусочно-дифференцируемая на интервале $(0, \infty)$ функция, причем $t^{-1}f(t) \ln t \in L^C(0, \varepsilon)$, $t^{-1/2}f(t) \in L^C(\varepsilon, \infty)$, $\varepsilon < 1$. Тогда существует интеграл (8.40) и во всех точках $t=x$, где $f(t)$ непрерывна, справедлива формула обращения (8.41).

Теорема 30 [19]. Пусть $f(t)$ — кусочно-дифференцируемая на интервале $(1, \infty)$ функция, причем $f(t) \in L^C(1, E)$, $t^{-1/2}f(t) \ln t \in L^C(E, \infty)$, $E > 1$. Тогда существует интеграл (8.42) при $k=0$ и в тех точках $t=x$, где $f(t)$ непрерывна, справедлива формула его обращения (8.43) при $k=0$.

Эти теоремы остаются в силе и для случая, когда $f(t)$ является функцией ограниченной вариации [15]. В таком более широком классе они приведены в работе [19].

Следует отметить, что все полученные выше пары двойственных формул могут быть использованы для вычисления ряда интегралов, взятых по индексу специальной функции, входящей в интеграл. Например, если в равенстве (7.56) положить $\mu = ix$, $a=1$, $b=-ip$, $f(t) = = t^\lambda J_\nu(pt)$, $\pi g(x) = 2i^\nu x M \operatorname{sh}(\pi x)$, то оно сведется к форме (8.40). Воспользовавшись теоремой 29, соответствующее равенство (8.41) несложно записать в виде

$$\int_0^\infty t \operatorname{sh}(\pi t) K_{it}(x) \Gamma[1/2(\lambda + \nu + it), 1/2(\lambda + \nu - it)] {}_2F_1(1/2(\lambda + \nu + it), 1/2(\lambda + \nu - it); \nu + 1; -p^2) dt = 2^{1-\lambda} \pi^2 \Gamma(\nu + 1) p^{-\nu} x^\lambda J_\nu(px), \\ -\operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} \lambda < 1. \quad (8.61)$$

Этот интеграл отсутствует в таблицах [3, 7].

§9. СТРОЕНИЕ БАЗОВОЙ ТАБЛИЦЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МЕЛЛИНА И ПРАВИЛА ПОЛЬЗОВАНИЯ ЕЮ

Базовая таблица (§ 10) — это таблица интегральных преобразований Меллина тех функций $\mathcal{H}(x)$, образы которых $\mathcal{H}^*(s)$ (3) являются произведениями отношений гамма-функций от s на некоторые постоянные, то есть имеют структуру вида (5). Эта таблица содержит около 1200 соответствий между функциями $\mathcal{H}_i(x)$ и их преобразованиями Меллина $\mathcal{H}_i^*(s)$ (1.3), причем оригиналы $\mathcal{H}_i(x)$ расположены в левой части «строк», а их образы $\mathcal{H}_i^*(s)$ — в правой. Для обозначения встречающихся функций используются символы, которые можно расшифровать через перечень обозначений функций (§ 11). В правых частях строк базовой таблицы также указаны условия на $\operatorname{Re} s$ и параметры оригиналов $\mathcal{H}_i(x)$, при которых преобразование Меллина $\mathcal{H}_i^*(s)$ существует, то есть интеграл (1.3) сходится. Эти условия близки к необходимым или являются необходимыми.

Функции $\mathcal{H}_i(x)$ в целом по таблице располагаются в порядке возрастания их сложности. Поэтому в конце таблицы содержатся наиболее общие функции: Уиттекера, Гаусса, Мейера и др., а в первых разделах приводятся главным образом их многочисленные частные случаи (см. окончания § 5, 6).

Из всех соответствий между $\mathcal{H}_i(x)$ и $\mathcal{H}_i^*(s)$ четвертую часть составляют так называемые ключевые соответствия: их около 340. Каждое из этих соотношений может являться основой для вывода широкого множества родственных соответствий по трем направлениям, указанным в замечании 2 на с. 10. В таблице после каждого ключевого соответствия между функцией $\mathcal{H}(x)$, отраженной в указателе ключевых формул (§ 12), и ее образом $\mathcal{H}^*(s)$ приводятся еще несколько (до 9) родственных соответствий между этой же функцией, но с аргументом $a_n x^{1/n}$ вместо x : $\mathcal{H}(a_n x^{1/n})$, $n = -1, \pm 2, \pm 3, \dots, a_n = \text{const}$, и ее преобразованием Меллина вида (5). Эти соответствия получаются с помощью формулы умножения для гамма-функции (см. теорему 22) и общих свойств преобразования Меллина (начало § 10). В определенной мере они дублируют ключевые формулы и поэтому в указателе не отражены, но в таблицу введены по следующим причинам: наличие этих формул позволяет наиболее полно реализовать принцип «каждые две строки таблицы служат основой для вычисления сверточного интеграла вида (1.1) от функций $\mathcal{H}_i(x)$, расположенных в этих строках слева», при переходе от $\mathcal{H}(x)$ к $\mathcal{H}(a_n x^{1/n})$ постоянный множитель при образе $\mathcal{H}^*(s)$, вообще говоря, меняется по некоторому, довольно сложному правилу и, наке-

нец, дублирование формул увеличивает возможности контроля над табличными результатами при их использовании.

Таким образом, базовая таблица состоит из блоков родственных соответствий, которые выводятся из ключевых путем указанных выше операций. Родственные соответствия, дополняющие таблицу в первых двух направлениях (см. замечание 2 на с. 10), могут быть получены читателями самостоятельно после внимательного изучения теории метода и разбора примеров. Для пояснения рассмотрим два примера вывода родственных соответствий на основе ключевых.

Пример 1. В строке 3.1(1) § 10 указано ключевое соответствие $e^{-x} \leftrightarrow \leftrightarrow \Gamma(s)$, а за ним еще ряд родственных соответствий между функциями $e^{-\ln x} x^{1/n}$, $n=2, k, -1, -k$, и их образами. Поясним, почему приведены функции $e^{-\ln x} x^{1/n}$, а не $e^{-x^{1/n}}$. Если в оригинале e^{-x} переменную x заменить на $x^{1/n}$, $n=2, 3, \dots$, то, приняв во внимание общее свойство преобразования Меллина (строка 1.5 из § 10), получим соотношение $e^{-x^{1/n}} \leftrightarrow \leftrightarrow n\Gamma(ns)$, $\text{Re } s > 0$. Для сведения $\Gamma(ns)$ к виду (5) применим формулу умножения (3.16):

$$e^{-\sqrt[n]{x}} \leftrightarrow \leftrightarrow n^{ns} \sqrt[n]{n} (2\pi)^{(1-n)/2} \Gamma[\Delta(n, ns)], \quad \text{Re } s > 0. \quad (9.1)$$

Чтобы избавиться от множителя n^{ns} , отсутствующего в (5), аргумент x заменим на $n^x x$. Так получаются все соответствия 3.1 § 10, которые играют важную роль при составлении таблицы преобразований Лапласа [3, 59].

Если читателя интересует прообраз $\Gamma(s)$ при $-n-1 < \text{Re } s < -n$, $n=0, 1, 2, \dots$, то его можно найти из функции e^{-x} вычитанием n -го отрезка ее ряда Тейлора:

$$e^{-x} - \sum_{k=0}^n (-x)^k / k! \leftrightarrow \leftrightarrow \Gamma(s), \quad -n-1 < \text{Re } s < -n, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (9.2)$$

(см. формулу (3.11) или замечание 2 на с. 61).

Пример 2. В строке 2.2 (1) указано ключевое соотношение

$$(1-x)_{+}^{\alpha-1} \leftrightarrow \leftrightarrow \Gamma(\alpha) \Gamma\left[\begin{matrix} s \\ s+\alpha \end{matrix}\right], \quad \text{Re } s > 0, \quad \text{Re } \alpha > 0. \quad (9.3)$$

Если здесь x заменить на $1/x$, то получим родственное соответствие

$$x^{1-\alpha} (x-1)_{+}^{\alpha-1} \leftrightarrow \leftrightarrow \Gamma(\alpha) \Gamma\left[\begin{matrix} -s \\ \alpha-s \end{matrix}\right], \quad \text{Re } s < 0, \quad \text{Re } \alpha > 0. \quad (9.4)$$

Множитель $x^{1-\alpha}$ можно убрать, совершив в правой части (9.4) замену s на $s+\alpha-1$ (свойство 1.4 § 10). Так выводится более удобное для использования соотношение 2.2 (4):

$$(x-1)_{+}^{\alpha-1} \leftrightarrow \leftrightarrow \Gamma(\alpha) \Gamma\left[\begin{matrix} 1-\alpha-s \\ 1-s \end{matrix}\right], \quad \text{Re } s-1 < -\text{Re } \alpha < 0. \quad (9.5)$$

Если $-n-1 < \text{Re } s < -n$, $n=0, 1, 2, \dots$, то прообразы $\Sigma_1(x) = (1-x)^{\alpha-1}$ и $\Sigma_0(1/x) = 0$ следует заменить на $\Sigma_{1+}(x) - \Sigma_{0-}(1/x)$ и $\Sigma_{0+} \times (1/x) - \Sigma_{1-}(x)$, где $\Sigma_0(1/x) = \Sigma_{0\pm}(1/x) = 0$, $x > 1$, а $\Sigma_{1-}(x)$ является n -м отрезком ряда Тейлора функции $\Sigma_1(x) = (1-x)^{\alpha-1}$, $0 < x < 1$ (см. заме-

чение 2 на с. 61) . Таким способом получается формула

$$\mathcal{H}(x) = \begin{cases} (1-x)^{\alpha-1} - \sum_{k=0}^n (1-\alpha)_k x^k/k!, & 0 < x < 1, \\ - \sum_{k=0}^n (1-\alpha)_k x^k/k!, & x > 1, \end{cases} \quad \longleftrightarrow$$

$$\longleftrightarrow \Gamma(\alpha) \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ s + \alpha \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} \alpha > 0, \quad (9.6)$$

$$-n-1 < \operatorname{Re} s < -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Замена в (9.3), (9.5) x на $\sqrt[k]{x}$ приводит к соотношениям, расположенным в строках 2.2 (3), (6).

Отметим, что интегралы вида (1.1) от произведений функций (9.3), (9.5) на остальные функции $\mathcal{H}_2(x)$ базовой таблицы являются интегралами Вейля или Римана—Лиувилля [3] произвольного порядка α от функций $\mathcal{H}_2(x)$ (см. п. 1 § 10).

Как указывалось в конце § 5, большинство функций $\mathcal{H}_i(x)$ из § 10 представляет собой разного рода частные случаи гипергеометрической функции Гаусса, которая возникает, если в теореме Слейтер положить $A+D=B+C=2$. Исследование такой ситуации дает возможность вывести соответствия, расположенные в строках 12.11—12.29 § 10. Если в этих формулах и их аналитических продолжениях параметры a, b, c связать дополнительными условиями, то можно получить большую часть ключевых формул, относящихся к функциям (5.30)—(5.39), функциям Лежандра, многочленам Якоби, Гегенбауэра, Чебышева, Лежандра, полным эллиптическим интегралам и другим специальным функциям, приведенным в § 11. Многие из ключевых формул отражены в справочниках [2, 3, 7, 10, 57—60], причем в некоторых случаях с опечатками. Свыше сотни ключевых формул, выведенных путем изучения частных случаев теоремы Слейтер, когда $A+B+C+D \leq 4$, в указанных источниках отсутствуют.

Особые требования к точности ключевых формул, каждая из которых может служить основой для вычисления большого числа новых интегралов, привели к необходимости тщательной перекрестной проверки этих формул. Такая проверка для многих из них проводилась неоднократно, что позволяет надеяться на малую вероятность ошибок в формулах базовой таблицы.

Ввиду большой важности каждой новой ключевой формулы для вычисления интегралов особое внимание при составлении таблицы было уделено вопросу ее полноты. Автор стремился кроме более общих ключевых формул отразить в таблице и их всевозможные частные случаи, которые имеют ценность в приложениях. Степень полноты составленной таблицы характеризует тот факт, что лишь около половины приведенных в ней ключевых формул можно получить с помощью списков частных случаев G -функции Мейера, содержащихся в работах [2, 51, 53].

Методика вычисления определенных интегралов от функций, отраженных в базовой таблице, подробно изложена в § 1, 5—7, где наряду с теорией разобрано большое число всевозможных конкретных примеров. Поэтому здесь достаточно остановиться лишь на общих аспектах работы с базовой таблицей.

Как следует из разобранных в § 7 примеров, при вычислении интегралов излагаемым в книге методом основные трудности возникают на

двух этапах: начальном, когда интеграл сводится к канонической форме (1.1) и одновременно требуется отыскать в базовой таблице подходящие функции $\mathcal{H}_i(x)$, $i=1, 2$, и заключительном, особенно в логарифмических случаях, когда полюсы сливаются и приходится непосредственно применять теорию вычетов при нахождении оригинала $\mathcal{H}(x)$ по его образу $\mathcal{H}^*(s)$. О заключительном этапе вычислений речь шла в § 1, 4—7. Затруднения начального этапа носят в основном психологический характер: нужно суметь заметить, что вычисляемый интеграл *по сути своей* относится к тому классу интегралов, который подчиняется настоящему методу, или же к этому интегралу требуется какой-то иной подход. Задача классификации интегралов и отыскания в таблице подходящих функций $\mathcal{H}_i(x)$ является, вообще говоря, далеко не тривиальной (см. примеры 6—8 из § 7), ее решение требует известных навыков.

На всех этапах вычислительной работы не исключены ошибки или описки, которые могут привести к ошибочным результатам. *Для получения правильных результатов, вообще говоря, недостаточно провести выкладки один раз. Как бы тщательно они ни проводились, гарантировать точность полученного результата можно только после применения к нему различных средств контроля.* К таким средствам можно отнести следующие: 1) повторные вычисления, но уже несколькими способами; 2) «привязывание» результата к его уже известным частным или более общим случаям; 3) рассмотрение симметрии полученного результата; 4) перепроверку чужих результатов, которые пришлось использовать в вычислениях без доказательства их справедливости (это относится и к формулам базовой таблицы). *Особая аккуратность требуется при работе с логарифмическими случаями*, где выкладки могут быть весьма громоздкими, а перекрестные проверки затруднительны.

Следует отметить, что число интегралов, вычисляемых настоящим методом, можно существенно расширить, если использовать еще приемы дифференцирования или интегрирования по параметрам, входящим в подынтегральную функцию, разложения в ряды и другие операции (см., например, с. 90, 97). Повторным применением преобразования Меллина по разным переменным можно вычислять интегралы от произведений нескольких функций $\mathcal{H}_i(x)$ из § 10 (см. п. 8 § 7).

Чтобы сделать книгу более компактной и удобной для читателей, интересующихся теоретической частью, в базовой таблице были осуществлены следующие сокращения:

1. Почти в каждом блоке опущены родственные соответствия с номерами 3 и 5 (или 4), а иногда и с другими номерами. При необходимости они могут быть восстановлены читателем по оставшимся соответствиям с номерами 1, 2, 4, 6 (или 1—3) (способ указан ниже).

2. В пунктах 10, 11 опущено свыше 150 «почти ключевых» соответствий с их следствиями, которые можно восстановить, если воспользоваться «четностью» ортогональных многочленов и «симметрией по индексам» функций Лежандра [2]:

$$P_n(-z) = (-1)^n P_n(z), \quad T_n(-z) = (-1)^n T_n(z),$$

$$U_n(-z) = (-1)^n U_n(z),$$

$$C_n^\lambda(-z) = (-1)^n C_n^\lambda(z), \quad P_n^{(\alpha, \beta)}(-z) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(z), \quad (9.7)$$

$$P_v^\mu(z) = P_{-v-1}^\mu(z),$$

$$P_v^{-m}(z) = \alpha_m \Gamma \left[\frac{v-m+1}{v+m+1} \right] P_v^m(z), \quad m = 1, 2, 3, \dots,$$

$$Q_v^{-\mu}(z) = \alpha_\mu e^{-2\pi i \mu} \Gamma \left[\frac{v-\mu+1}{v+\mu+1} \right] Q_v^\mu(z), \quad (9.8)$$

где $\alpha_m = \alpha_\mu = 1$, если $z \in [-1, 1]$; $\alpha_m = (-1)^m$, если $-1 < z = x < 1$.

3. Опущены функции Лежандра с нулевым индексом μ :

$$Q_v(z) = Q_v^0(z), \quad P_v(z) = P_v^0(z), \quad Q_n(z) = Q_v(z), \quad v=n, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (9.9)$$

функции Якоби 2-го рода $Q_n^{(\alpha, \beta)}(z)$ и неполные бета-функции $B_x(p, q)$. При работе с этими функциями следует обращаться к пункту 11 и полагать там $\mu=0$ или же, выразив функции $Q_n^{(\alpha, \beta)}(z)$, $B_x(p, q)$ через гипергеометрическую (§ 11), использовать соответствующие формулы из пункта 12. Следует также учитывать, что функции $Q_n(z)$, $P_v^{\pm 1/2}(z)$, $Q_v^{\pm 1/2}(z)$, $Q_0^\mu(z)$, $Q_{-1}^\mu(z)$, $P_v^\mu(z)$ представляют собой комбинации элементарных функций ([2], формулы 3.6 (24), (12), (13), 3.3 (13), 3.2 (3)).

4. В некоторых случаях, когда функции $\mathcal{H}_i(x)$ могут быть доопределены по непрерывности при отдельных значениях параметров, приводящих к устранимым особенностям, условия на параметры, исключающие эти значения, опускались (см. абзац после формулы (5.3)).

Базовая таблица состоит из блоков родственных соответствий, которые получаются из ключевых путем указанных выше операций. Для восстановления пропущенных соответствий следует использовать внутреннюю симметрию формул из каждого блока, характер которой легко замечается после анализа соответствий из полных блоков 2.2, 3.1 — 3.3. Так, если в блоке из 6 соответствий приведены лишь 4, то пропущенные соответствия с номерами 3 и 5 выписываются следующим образом. Оригинал для соответствия 3 (5) находится из оригинала $\mathcal{H}(x)$ соответствия 1 (4) заменой там x на $\sqrt[3]{x}$ или $3\sqrt[3]{x}$ (x на $\sqrt{x}$ или $2\sqrt{x}$). Коэффициент при $\Gamma[s]$ для соответствия 3 (5) равен коэффициенту при $\Gamma[\]$ в соответствии 6 (2). Выражение $\Gamma[s]$ и условия на Res для соответствия 3 (5) получаются из выражения $\Gamma[\]$ и условий на Res в соответствии 1 (4) путем замены $\Gamma[\]$ на $\Gamma_3[\]$ ($\Gamma_2[\]$) и s на $3s$ ($2s$). Аналогично с помощью соответствий 2 и 3 восстанавливается формула 4 из блока, в котором должно быть 4 соответствия, а приведены 3.

Для пояснения сказанного рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Из формул 2.8 (1), (2), (4) вытекает соответствие 2.8 (3):

$$(1 + \sqrt{1+x^{1/3}})^v \leftrightarrow - \frac{v}{8\pi^{5/2} \sqrt{3}} \Gamma_3 \left[\frac{3s, -v/2+3s, (1-v)/2-3s}{1-v+3s} \right], \quad (9.10)$$

$$0 < \text{Re } s < -\text{Re } v/6,$$

и соответствие 2.8(5), указанное под номером (9.16).

Пример 2. Из строки 11.1(1), где представлена функция $P_v^\mu(2x-1) \times (1-x)_+^{-\mu/2}$, путем замены μ на $-m$ можно легко получить строку, содержащую в левой части функцию $P_v^m(2x-1)(1-x)_+^{m/2}$. Из строки 11.7 (1), где стоит функция $P_v^\mu \left(\frac{1-x}{1+x} \right) (1+x)^v$, после замены v на $-v-1$

выводится строка с функцией $P_v^\mu \left(\frac{1-x}{1+x} \right) (1+x)^{-v-1}$. Положив в этих функциях $\mu = m = 0$, $v = n$ и обратившись к строкам 10.1 (1), 10.3 (1), не сложно заметить, что из последних с помощью (9.7) можно образовать строки, содержащие функции $P_n(1-2x)H(1-x)$, $P_n \left(\frac{x-1}{x+1} \right) (x+1)^{-n-1}$.

Пример 3. Требуется вычислить интеграл

$$A(a) = \int_0^\infty (x + \sqrt{a^2 + x^2})^v e^{-x} dx. \quad (9.11)$$

Обратимся к пунктам 2, 3 указателя из § 12. В строках 2.8 (1), 3.1 (1) не сложно обнаружить функции $(1 + \sqrt{1+x})^v$, e^{-x} , похожие на те, что входят в интеграл. Составим из них интеграл вида (1.1), внося еще множитель x^λ с некоторым параметром λ :

$$\mathcal{H}_0(x) = \int_0^\infty (1 + \sqrt{1+x/t})^v e^{-t} t^\lambda t^{-1} dt. \quad (9.12)$$

Если здесь t заменить на τ^2 , то легко получить интеграл

$$\mathcal{H}_0(x) = 2 \int_0^\infty (\tau + \sqrt{\tau^2 + x})^v \tau^{2\lambda-v-1} e^{-\tau^2} d\tau,$$

принципиально отличающийся от (9.11) лишь присутствием $e^{-\tau^2}$ вместо $e^{-\tau}$. Чтобы ликвидировать это различие, за исходную возьмем функцию $e^{-2\sqrt{x}}$ из строки 3.1 (2). Эта функция не отражена в указателе, но имеется в таблице. Таким образом выведем равенство

$$\mathcal{H}(x) = 2 \int_0^\infty (\tau + \sqrt{\tau^2 + x})^v \tau^{2\lambda-v-1} e^{-2\tau} d\tau \big|_{2\lambda=v+1} = 2^{-v} A(2\sqrt{x}), \quad (9.13)$$

сводящее интеграл (9.11) к канонической форме (1.1). Дальнейшие операции осуществляются, как описано в основной теореме (§ 1), и приводят к значению $A(a)$ через функцию $\Sigma_3(a^2/4)$, содержащую три ряда ${}_2F_3$.

Пример 4. Рассмотрим интеграл

$$B(a) = \int_0^\infty (\sqrt{a} + \sqrt{a+x})^v e^{-x^2} dx. \quad (9.14)$$

Аналогичные рассуждения позволяют установить формулы

$$\begin{aligned} B(a) &= \mathcal{H}(a^2)/2, \quad \mathcal{H}_1(x) = (\sqrt[4]{x} + \sqrt{\sqrt{x}+1})^v, \\ \mathcal{H}_2(x) &= x^\lambda e^{-x}, \quad 4\lambda = v + 2, \end{aligned} \quad (9.15)$$

где $\mathcal{H}(x)$ имеет вид (1.1). Функция $\mathcal{H}_1(x)$ не отражена в указателе и опущена в базовой таблице, где должна была находиться в строке 2.8 (5). Эту строку легко восстановить из оставшихся строк блока 2.8:

$$(\sqrt[4]{x} + \sqrt{\sqrt{x}+1})^v \longleftrightarrow -\frac{v2^{-5/2}}{\pi^{3/2}} \times$$

$$\times \Gamma \left[s, s+1/2, s+1/4, s+3/4, -v/4-s, 1/2-v/4-s \right], \quad (9.16)$$

$$0 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} v/4.$$

С помощью основной теоремы несложно выписать итоговое значение интеграла (9.14) через функцию $\Sigma_5(a^2)$, содержащую ряды ${}_4F_4$.

Пример 5. Рассмотрим интеграл

$$C(x) = \int_1^x P_n(1-2t^{-1/3}) C_n^\lambda \left(\frac{t-2x}{2\sqrt{x(x-t)}} \right) (x-t)^{-\lambda-n/2} t^{v-1} dt. \quad (9.17)$$

В указателе нет функций, входящих в (9.17), однако при внимательном изучении пункта 10 § 12 можно заметить, что в строках 10.1, 10.56 находятся чем-то похожие функции

$$P_n(2x-1)H(1-x), \quad C_n^\lambda \left(\frac{2-x}{2\sqrt{1-x}} \right) (1-x)_+^{-\lambda-n/2}. \quad (9.18)$$

Приняв во внимание свойства четности (9.7), интеграл (9.17) можно преобразовать к форме (1.1), где

$$C(x) = \mathcal{H}(x), \quad \mathcal{H}_1(x) = C_n^\lambda \left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x(x-1)}} \right) (x-1)_+^{-\lambda-n/2},$$

$$\mathcal{H}_2(x) = P_n(2x^{-1/3}-1)x^{v-\lambda-n/2}H(x-1). \quad (9.19)$$

Последние функции содержатся в строках 10.1 (6), 10.56 (4) базовой таблицы. Дальнейшие операции по вычислению (9.17) проводятся, как описано выше.

§ 10. БАЗОВАЯ ТАБЛИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЙ МЕЛЛИНА

(таблица преобразований Меллина тех функций, образы которых являются произведениями отношений гамма-функций на постоянные)

1. Общие формулы

№ блока (формулы)	$\mathcal{H}(x)$	$\mathcal{H}^*(s) = \int_0^\infty \mathcal{H}(x) x^{s-1} dx$
1	2	3
1	$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathcal{H}^*(s) x^{-s} ds$	$\mathcal{H}^*(s)$
2	$\int_0^\infty \mathcal{H}_1\left(\frac{x}{t}\right) \mathcal{H}_2(t) \frac{dt}{t}$	$\mathcal{H}_1^*(s) \mathcal{H}_2^*(s)$

1	2	3
13(1)	$\begin{aligned} & \mathbf{K} \left(\sqrt{2(1-x+\sqrt{x^2-x})} \right) \times \\ & \times \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} \times \\ & \times H(x-1) \end{aligned}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/4-s, 1/4-s \\ 1-s, 1/2-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < 1/4$
13(2)	$\begin{aligned} & \mathbf{K} \left(\sqrt{2(1-\sqrt{x}+\sqrt{x-1})} \right) \times \\ & \times \sqrt[4]{x}-\sqrt{\sqrt{x}-1} \times \\ & \times H(x-1) \end{aligned}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/8-s, 1/8-s, 5/8-s, 5/8-s \\ 1/2-s, 1-s, 1/4-s, 3/4-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < 1/8$
13(3)	$\begin{aligned} & \mathbf{K} \left(\sqrt{2/x} \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x} \right) \times \\ & \times H(1-x) \end{aligned}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, s+1/2 \\ s+5/4, s+3/4 \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s > -1/2$
14(1)	$\begin{aligned} & \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}} \right) \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}} \end{aligned}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}\Gamma^2(1/4)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/4-s, 1/4-s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4$
14(2)	$\begin{aligned} & \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^{1/2}}-1}{\sqrt{1+x^{1/2}}+1}} \right) \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1+x^{1/2}}+1}} \end{aligned}$	$\frac{1}{8\Gamma^2(1/4)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/8-s, 1/8-s, \\ 1/2-s, 1-s, \\ 5/8-s, 5/8-s \end{matrix} \right], 0 < \operatorname{Re} s < 1/8$
14(3)	$\begin{aligned} & \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}} \right) \times \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}} \end{aligned}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}\Gamma^2(1/4)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s, 1/4-s \\ s+3/4 \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4$
15(1)	$\begin{aligned} & \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}} \right) \times \\ & \times \frac{(x+1)^{-1/2}}{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}} \end{aligned}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}\Gamma^2(3/4)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 3/4-s, 3/4-s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 3/4$
15(2)	$\begin{aligned} & \mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+x^{1/2}}-1}{\sqrt{1+x^{1/2}}+1}} \right) \times \\ & \times \frac{(\sqrt{x}+1)^{-1/2}}{\sqrt{\sqrt{1+x^{1/2}}+1}} \end{aligned}$	$\frac{1}{4\Gamma^2(3/4)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 3/8-s, \\ 1/2-s, 1-s, \\ 3/8-s, 7/8-s, 7/8-s \end{matrix} \right], 0 < \operatorname{Re} s < 3/8$

1	2	3
15(3)	$K \left(\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}} \right) \times \frac{(x+1)^{-1/2}}{\sqrt{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}\Gamma^2(3/4)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s, 3/4-s \\ s+1/4 \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 3/4$
16(1)	$K(x^{1/4} \sqrt{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}) \times \sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$	$\frac{\pi}{2\Gamma^2(1/4)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/4-s, 1/4-s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4$
16(2)	$K(x^{1/8} \sqrt{2(\sqrt{\sqrt{x+1}-x^{1/4}})}) \times \sqrt{\sqrt{\sqrt{x+1}-x^{1/4}}}$	$\frac{1}{4\sqrt{2}\Gamma^2(1/4)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/8-s, \\ 1/2-s, 1-s, \\ 1/8-s, 5/8-s, 5/8-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/8$
16(3)	$K \left(\sqrt{\frac{2}{x}} \sqrt{\sqrt{x+1}-1} \right) \times \sqrt{\sqrt{x+1}-1}$	$\frac{\pi}{2\Gamma^2(1/4)} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, s+1/2, -1/4-s \\ s+5/4 \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < -1/4$
17(1)	$K(x^{1/4} \sqrt{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}) \times \frac{\sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$	$\frac{\pi}{2\Gamma^2(3/4)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 3/4-s, 3/4-s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 3/4$
17(2)	$K(x^{1/8} \sqrt{2(\sqrt{\sqrt{x+1}-x^{1/4}})}) \times \frac{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x+1}-x^{1/4}}}}{\sqrt{\sqrt{x+1}}}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}\Gamma^2(3/4)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 3/8-s, \\ 1/2-s, 1-s, \\ 3/8-s, 7/8-s, 7/8-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 3/8$
17(3)	$K \left(\sqrt{\frac{2}{x}} \sqrt{\sqrt{x+1}-1} \right) \times \frac{\sqrt{\sqrt{x+1}-1}}{\sqrt{x+1}}$	$\frac{\pi}{2\Gamma^2(3/4)} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, s+1/2, 1/4-s \\ s+3/4 \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < 1/4$
18(1)	$K \left(\frac{2\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} \right) \frac{1}{1+\sqrt{x}}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/2-s \\ s+1/2, 1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
18(2)	$K \left(\frac{2x^{1/8}}{1+x^{1/4}} \right) \frac{1}{1+x^{1/4}}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/4-s, 3/4-s \\ s+1/4, s+3/4, 1/2-s, 1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4$

1	2	3
19(1)	$\mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt[4]{x^2-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}} \right) \times \frac{H(x-1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2-s, 1/2-s \\ 1-s, 1-s \end{matrix} \right], \quad \text{Re } s < 1/2$
19(2)	$\mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt[4]{x-\sqrt{x}}}{x^{1/4}+\sqrt{\sqrt{x}-1}} \right) \times \frac{H(x-1)}{x^{1/4}+\sqrt{\sqrt{x}-1}}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/4-s, 1/4-s, 3/4-s, 3/4-s \\ 1/2-s, 1-s, 1/2-s, 1-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s < 1/4$
19(3)	$\mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt[4]{1-x}}{\sqrt{1-x}+1} \right) \times \frac{H(1-x)}{\sqrt{1-x}+1}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s \\ s+1/2, s+1/2 \end{matrix} \right], \quad \text{Re } s > 0$
20(1)	$\mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt[4]{x^2+x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} \right) \times (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$	$\frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/2-s, 1/2-s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Re } s < 1/2$
20(2)	$\mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt[4]{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{\sqrt{x}+1}+x^{1/4}} \right) \times (\sqrt{\sqrt{x}+1}-x^{1/4})$	$\frac{1}{4\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/4-s, 1/4-s, \\ 1/2-s, 1-s \\ 3/4-s, 3/4-s \end{matrix} \right], \quad 0 < \text{Re } s < 1/4$
20(3)	$\mathbf{K} \left(\frac{2\sqrt[4]{1+x}}{\sqrt{1+x}+1} \right) \times (\sqrt{1+x}-1)$	$\frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1, s+1, -1/2-s \\ s+3/2 \end{matrix} \right],$ $-1 < \text{Re } s < -1/2$
21(1)	$\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}} \right) \times (1+x)^{-1/4}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/4-s \\ s+3/4 \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Re } s < 1/4$
21(2)	$\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{\sqrt{x}+1}-x^{1/4}}{2\sqrt{\sqrt{x}+1}}} \right) \times (1+\sqrt{x})^{-1/4}$	$\frac{1}{4\pi\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+1/4, s+3/4, \\ s+3/8, s+7/8 \\ 1/8-s, 5/8-s \end{matrix} \right], \quad 0 < \text{Re } s < 1/8$
21(3)	$\mathbf{K} \left(\sqrt{\frac{\sqrt{1+x}-1}{2\sqrt{1+x}}} \right) \times (1+x)^{-1/4}$	$\frac{1}{2\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/4-s, 3/4-s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Re } s < 1/4$

1	2	3
22(1)	$\mathbf{K}\left(\frac{ 1-\sqrt[4]{x} }{\sqrt{2(1+\sqrt{x})}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$	$(4\pi)^{-1} \Gamma[s, s+1/4, 1/4-s, 1/2-s],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4$
22(2)	$\mathbf{K}\left(\frac{ 1-\sqrt[8]{x} }{\sqrt{2(1+x^{1/4})}}\right) \times \frac{1}{\sqrt{1+x^{1/4}}}$	$(16\pi^3)^{-1} \Gamma[s, s+1/2, s+1/8, s+5/8,$ $-s+1/8, 5/8-s, 1/4-s, 3/4-s],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/8$
23(1)	$\mathbf{E}(\sqrt{1-x}) H(1-x)$	$\frac{\pi}{2} \Gamma\left[s, s+1\right]_{s+1/2, s+3/2}, \operatorname{Re} s > 0$
23(2)	$\mathbf{E}(\sqrt{1-\sqrt{x}}) H(1-x)$	$\frac{\pi}{2} \Gamma\left[s, s+1/2, s+1/2, s+1\right]_{s+1/4, s+3/4, s+3/4, s+5/4},$ $\operatorname{Re} s > 0$
23(3)	$\mathbf{E}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right) H(x-1)$	$\frac{\pi}{2} \Gamma\left[-s, 1-s\right]_{1/2-s, 3/2-s}, \operatorname{Re} s < 0$
24(1)	$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) \frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$\Gamma\left[s, s+1, 1/2-s\right]_{s+1/2}, 0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
24(2)	$\mathbf{E}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}\right) \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$	$\frac{1}{\pi} \Gamma\left[s, s+1/2, s+1/2, s+1, 1/4-s, 3/4-s\right]_{s+1/4, s+3/4},$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4$
24(3)	$\mathbf{E}\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) \frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$\Gamma\left[s, 1/2-s, 3/2-s\right]_{1-s}, 0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
25(1)	$\mathbf{E}\left(\sqrt{2\sqrt{1-x}(1-\sqrt{1-x})}\right) \times x^{-1/2} \frac{H(1-x)}{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma\left[s-1/2, s+1/2\right]_{s+3/4, s+1/4}, \operatorname{Re} s > 1/2$
25(2)	$\mathbf{E}\left(\sqrt{2\sqrt{1-\sqrt{x}}}\right) \leftarrow \left(1-\sqrt{1-\sqrt{x}}\right) x^{-1/4} \times \frac{H(1-x)}{\sqrt{1-\sqrt{1-\sqrt{x}}}}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma\left[s-1/4, s+1/4, s+1/4, s+3/4\right]_{s+3/8, s+7/8, s+1/8, s+5/8},$ $\operatorname{Re} s > 1/4$

1	2	3
25(3)	$\mathbf{E} \left(\sqrt{2\sqrt{x-1}} \rightarrow \right.$ $\left. \leftarrow (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) \right) \times$ $\times \frac{H(x-1)}{\sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} 3/4-s, & -1/4-s \\ 1-s, & 1/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < -1/4$
26(1)	$\mathbf{E} \left(\sqrt{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})} \right) \times$ $\times \frac{(1+x)^{-1/2}}{\sqrt{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}}$	$\frac{2\pi}{\Gamma^2(1/4)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, & 5/4-s, & 1/4-s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < 1/4$
26(2)	$\mathbf{E} \left(\sqrt{2x^{1/4}(\sqrt{\sqrt{x}+1} - \right.$ $\left. - x^{1/4}) \right) \times$ $\times \frac{(1+\sqrt{x})^{-1/2}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}+1} - x^{1/4}}}$	$\frac{\sqrt{2}}{\Gamma^2(1/4)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, & s+1/2, & 5/8-s, & 9/8-s, \\ 1/2-s, & 1-s & 1/8-s, & 5/8-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < 1/8$
26(3)	$\mathbf{E} \left(\sqrt{\frac{2}{x}(\sqrt{1+x}-1)} \right) \times$ $\times \frac{(1+x)^{-1/2}}{\sqrt{\sqrt{1+x}-1}}$	$\frac{2\pi}{\Gamma^2(1/4)} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, & s-1/2, & 3/4-s \\ s+1/4 \end{matrix} \right],$ $1/2 < \text{Res} < 3/4$
27(1)	$\mathbf{E} \left(\frac{2\sqrt[4]{x(x-1)}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} \right) \times$ $\times \frac{H(x-1)}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} 3/2-s, & -1/2-s \\ 1-s, & 1-s \end{matrix} \right], \text{Res} < -1/2$
27(2)	$\mathbf{E} \left(\frac{2x^{1/8}\sqrt[4]{\sqrt{x}-1}}{x^{1/4} + \sqrt{\sqrt{x}-1}} \right) \times$ $\times \frac{H(x-1)}{x^{1/4} - \sqrt{\sqrt{x}-1}}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} 3/4-s, & 5/4-s, & -1/4-s, & 1/4-s \\ 1/2-s, & 1/2-s, & 1-s, & 1-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < -1/4$
27(3)	$\mathbf{E} \left(\frac{2\sqrt[4]{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}} \right) \times$ $\times \frac{H(1-x)}{1 - \sqrt{1-x}}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1, & s-1 \\ s+1/2, & s+1/2 \end{matrix} \right], \text{Res} > 1$

1	2	3
---	---	---

8. Интегральные экспоненты, синус и косинус, интегралы вероятности и Френеля, неполные гамма-функции и функции параболического цилиндра

1(1)	$\text{Ei}(-x)$	$-\Gamma\left[\begin{smallmatrix} s, s \\ s+1 \end{smallmatrix}\right], \text{Re } s > 0$
1(2)	$\text{Ei}(-k\sqrt[k]{x})$	$(2\pi)^{(1-k)/2} k^{-1/2} \Gamma\left[\begin{smallmatrix} \Delta(k, ks), -s \\ 1-s \end{smallmatrix}\right],$ $\text{Re } s > 0, k = 1, 2, 3, \dots$
1(3)	$\text{Ei}\left(-\frac{1}{x}\right)$	$\Gamma\left[\begin{smallmatrix} s, -s \\ 1+s \end{smallmatrix}\right], \text{Re } s < 0$
1(4)	$\text{Ei}(-kx^{-1/k})$	$(2\pi)^{(1-k)/2} k^{-1/2} \Gamma\left[\begin{smallmatrix} s, \Delta(k, -ks) \\ 1+s \end{smallmatrix}\right],$ $\text{Re } s < 0, k = 1, 2, 3, \dots$
2(1)	$e^x \text{Ei}(-x)$	$-\Gamma[s, s, 1-s], 0 < \text{Re } s < 1$
2(2)	$e^{2\sqrt{x}} \text{Ei}(-2\sqrt{x})$	$-1/2\pi^{-3/2} \Gamma[s, s+1/2, s, s+1/2,$ $1/2-s, 1-s], 0 < \text{Re } s < 1/2$
2(4)	$e^{1/x} \text{Ei}\left(-\frac{1}{x}\right)$	$-\Gamma[1+s, -s, -s], -1 < \text{Re } s < 0$
2(6)	$e^{3x^{-1/3}} \text{Ei}(-3x^{-1/3})$	$-\sqrt[3]{3}(2\pi)^{-3} \Gamma_3[3s+1, -3s, -3s],$ $-1/3 < \text{Re } s < 0$
3(1)	$e^{-x} \bar{\text{Ei}}(x)$	$-\pi \Gamma\left[\begin{smallmatrix} s, s, 1-s \\ 1/2+s, 1/2-s \end{smallmatrix}\right], 0 < \text{Re } s < 1$
3(2)	$e^{-2\sqrt{x}} \bar{\text{Ei}}(2\sqrt{x})$	$-\sqrt[3]{\pi} \Gamma\left[\begin{smallmatrix} s, s+1/2, s, s+1/2, 1/2-s, \\ 1/4+s, 3/4+s, 1/4-s, \\ 1-s \\ 3/4-s \end{smallmatrix}\right], 0 < \text{Re } s < 1/2$
3(3)	$e^{-1/x} \bar{\text{Ei}}\left(\frac{1}{x}\right)$	$-\pi \Gamma\left[\begin{smallmatrix} s+1, -s, -s \\ 1/2+s, 1/2-s \end{smallmatrix}\right], -1 < \text{Re } s < 0$
4(1)	$\text{Ei}(-2\sqrt{x}) \bar{\text{Ei}}(2\sqrt{x})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left[\begin{smallmatrix} s, s, s, 1-s \\ s+1, 1/2-s \end{smallmatrix}\right], 0 < \text{Re } s < 1$
4(2)	$\text{Ei}(-4\sqrt[4]{x}) \bar{\text{Ei}}(4\sqrt[4]{x})$	$\frac{1}{4\sqrt[4]{2\pi}} \Gamma\left[\begin{smallmatrix} s, s, s+1/2, s, s+1/2, \\ s+1, 1/4-s, 3/4-s \\ 1/2-s, 1-s \end{smallmatrix}\right], 0 < \text{Re } s < 1/2$

1	2	3
4(3)	$\text{Ei}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right) \bar{\text{Ei}}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left[\begin{matrix} s+1, -s, -s, -s \\ 1/2+s, 1-s \end{matrix}\right],$ $-1 < \text{Re } s < 0$
5(1)	$\text{Si}(2\sqrt{x})$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s+1, 1-s \end{matrix}\right], -1/2 < \text{Re } s < 0$
5(2)	$\text{Si}(2k\sqrt[2k]{x})$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[k]{k}} \Gamma\left[\begin{matrix} s, \Delta(k, ks+1/2) \\ s+1, \Delta(k, 1-ks) \end{matrix}\right],$ $-(2k)^{-1} < \text{Re } s < 0, \quad k=1, 2, \dots$
5(3)	$\text{Si}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left[\begin{matrix} s, 1/2-s \\ s+1, 1+s \end{matrix}\right], \quad 0 < \text{Re } s < 1/2$
5(4)	$\text{Si}(2kx^{-(2k)^{-1}})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[k]{k}} \Gamma\left[\begin{matrix} s, \Delta(k, 1/2-ks) \\ s+1, \Delta(k, ks+1) \end{matrix}\right],$ $0 < \text{Re } s < (2k)^{-1}, \quad k=1, 2, \dots$
6(1)	$\text{si}(2\sqrt{x})$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s+1, 1-s \end{matrix}\right], \quad 0 < \text{Re } s < 1$
6(2)	$\text{si}(2k\sqrt[2k]{x})$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[k]{k}} \Gamma\left[\begin{matrix} s, \Delta(k, ks+1/2) \\ s+1, \Delta(k, 1-ks) \end{matrix}\right],$ $0 < \text{Re } s < 1/k, \quad k=1, 2, 3, \dots$
6(3)	$\text{si}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left[\begin{matrix} s, 1/2-s \\ s+1, s+1 \end{matrix}\right], \quad -1 < \text{Re } s < 0$
6(4)	$\text{si}(2kx^{-(2k)^{-1}})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[k]{k}} \Gamma\left[\begin{matrix} s, \Delta(k, 1/2-ks) \\ s+1, \Delta(k, 1+ks) \end{matrix}\right],$ $-k^{-1} < \text{Re } s < 0, \quad k=1, 2, 3, \dots$
7(1)	$\text{Ci}(2\sqrt{x})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left[\begin{matrix} s, -s \\ 1-s, 1/2-s \end{matrix}\right], \quad 0 < \text{Re } s < 1$
7(2)	$\text{Ci}(2k\sqrt[2k]{x})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[k]{k}} \Gamma\left[\begin{matrix} \Delta(k, ks), -s \\ 1-s, \Delta(k, 1/2-ks) \end{matrix}\right],$ $0 < \text{Re } s < 1/k, \quad k=1, 2, 3, \dots$
7(3)	$\text{Ci}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left[\begin{matrix} s, -s \\ s+1, s+1/2 \end{matrix}\right], \quad -1 < \text{Re } s < 0$
7(4)	$\text{Ci}(2kx^{-(2k)^{-1}})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[k]{k}} \Gamma\left[\begin{matrix} s, \Delta(k, -ks) \\ s+1, \Delta(k, 1/2+ks) \end{matrix}\right],$ $-1/k < \text{Re } s < 0, \quad k=1, 2, 3, \dots$

1	2	3
8(1)	$\text{Ci}(2\sqrt{x}) \sin(2\sqrt{x}) -$ $-\text{si}(2\sqrt{x}) \cos(2\sqrt{x})$	$(2\sqrt{\pi})^{-1} \Gamma[s, s+1/2, s+1/2, 1/2-s],$ $0 < \text{Re } s < 1/2$
8(2)	$\text{Ci}(4\sqrt[4]{x}) \sin(4\sqrt[4]{x}) -$ $-\text{si}(4\sqrt[4]{x}) \cos(4\sqrt[4]{x})$	$(2\pi)^{-5/2} \Gamma[s, s+1/2, s+1/4, s+3/4,$ $s+1/4, s+3/4, 1/4-s, 3/4-s],$ $0 < \text{Re } s < 1/4$
8(3)	$\text{Ci}(2/\sqrt{x}) \sin(2/\sqrt{x}) -$ $-\text{si}(2/\sqrt{x}) \cos(2/\sqrt{x})$	$(2\sqrt{\pi})^{-1} \Gamma[s+1/2, -s, 1/2-s, 1/2-s],$ $-1/2 < \text{Re } s < 0$
9(1)	$\text{Ci}(2\sqrt{x}) \cos(2\sqrt{x}) +$ $+\text{si}(2\sqrt{x}) \sin(2\sqrt{x})$	$-(2\sqrt{\pi})^{-1} \Gamma[s, s, s+1/2, 1-s],$ $0 < \text{Re } s < 1/2$
9(2)	$\text{Ci}(4\sqrt[4]{x}) \cos(4\sqrt[4]{x}) +$ $+\text{si}(4\sqrt[4]{x}) \sin(4\sqrt[4]{x})$	$-(2\pi)^{-5/2} \Gamma[s, s+1/2, s, s+1/2,$ $s+1/4, s+3/4, 1/2-s, 1-s],$ $0 < \text{Re } s < 1/4$
9(3)	$\text{Ci}(2/\sqrt{x}) \cos(2/\sqrt{x}) +$ $+\text{si}(2/\sqrt{x}) \sin(2/\sqrt{x})$	$-(2\sqrt{\pi})^{-1} \Gamma[1+s, -s, -s,$ $1/2-s], \quad -1/2 < \text{Re } s < 0$
10(1)	$[\text{Ci}(2\sqrt{x})]^2 + [\text{si}(2\sqrt{x})]^2$	$-(2\sqrt{\pi})^{-1} \Gamma[s, s, s+1/2, -s],$ $0 < \text{Re } s < 1$
10(2)	$[\text{Ci}(4\sqrt[4]{x})]^2 + [\text{si}(4\sqrt[4]{x})]^2$	$-2^{-7/2} \pi^{-5/2} \Gamma[s, s+1/2, s, s+1/2,$ $s+1/4, s+3/4, -s, 1/2-s],$ $0 < \text{Re } s < 1/2$
10(3)	$[\text{Ci}(2/\sqrt{x})]^2 + [\text{si}(2/\sqrt{x})]^2$	$-(2\sqrt{\pi})^{-1} \Gamma[s, -s, -s, 1/2-s],$ $-1 < \text{Re } s < 0$
11(1)	$\text{Erf}(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, -s \\ 1-s \end{matrix} \right], \quad -1/2 < \text{Re } s < 0$
11(2)	$\text{Erf}(\sqrt{k} x^{(2k)^{-1}})$	$\frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^{k/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} \Delta(k, ks+1/2), -s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $-(2k)^{-1} < \text{Re } s < 0, \quad k=1, 2, 3, \dots$
11(3)	$\text{Erf} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/2-s \\ s+1 \end{matrix} \right], \quad 0 < \text{Re } s < 1/2$
11(4)	$\text{Erf}(\sqrt{k} x^{-(2k)^{-1}})$	$\frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^{k/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} \Delta(k, 1/2-ks), s \\ 1+s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Re } s < (2k)^{-1}, \quad k=1, 2, 3, \dots$

1	2	3
12(1)	$e^{-x} \operatorname{Erf}(i\sqrt{x})$	$i\Gamma\left[\begin{matrix} 1/2+s, 1/2-s \\ 1-s \end{matrix}\right], \quad \operatorname{Res} < 1/2$
12(2)	$e^{-2\sqrt{x}} \operatorname{Erf}(i\sqrt{2}^4\sqrt{x})$	$\frac{i}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left[\begin{matrix} 1/4+s, 3/4+s, 1/4-s, 3/4-s \\ 1/2-s, 1-s \end{matrix}\right],$ $ \operatorname{Res} < 1/4$
12(4)	$e^{-1/x} \operatorname{Erf}\left(\frac{i}{\sqrt{x}}\right)$	$i\Gamma\left[\begin{matrix} 1/2+s, 1/2-s \\ 1+s \end{matrix}\right], \quad \operatorname{Res} < 1/2$
12(6)	$e^{-3x^{-1/3}} \operatorname{Erf}(i\sqrt[3]{3}x^{-1/6})$	$\frac{\sqrt[3]{3}i}{2\pi} \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s+1/2, 1/2-3s \\ 3s+1 \end{matrix}\right],$ $ \operatorname{Res} < 1/6$
13(1)	$\operatorname{Erfc}(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s+1 \end{matrix}\right], \quad \operatorname{Res} > 0$
13(2)	$\operatorname{Erfc}(\sqrt{k}x^{(2k)^{-1}})$	$\frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^{k/2}} \Gamma\left[\begin{matrix} s, \Delta(k, ks+1/2) \\ s+1 \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Res} > 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$
13(3)	$\operatorname{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left[\begin{matrix} -s, 1/2-s \\ 1-s \end{matrix}\right], \quad \operatorname{Res} < 0$
13(4)	$\operatorname{Erfc}(\sqrt{k}x^{-(2k)^{-1}})$	$\frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^{k/2}} \Gamma\left[\begin{matrix} -s, \Delta(k, 1/2-ks) \\ 1-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Res} < 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$
14(1)	$e^x \operatorname{Erfc}(\sqrt{x})$	$\pi^{-1} \Gamma[s, s+1/2, 1/2-s], \quad 0 < \operatorname{Res} < 1/2$
14(2)	$e^{2\sqrt{x}} \operatorname{Erfc}(\sqrt{2}^4\sqrt{x})$	$1/2\pi^{-2} \Gamma[s, s+1/2, s+1/4, s+3/4,$ $-s+1/4, 3/4-s], \quad 0 < \operatorname{Res} < 1/4$
14(4)	$e^{1/x} \operatorname{Erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$\pi^{-1} \Gamma[s+1/2, -s, 1/2-s],$ $-1/2 < \operatorname{Res} < 0$
14(6)	$e^{3x^{-1/3}} \operatorname{Erfc}(\sqrt[3]{3}x^{-1/6})$	$2^{-2}\pi^{-3} \sqrt[3]{3} \Gamma[s+1/6, s+1/2, s+5/6,$ $-s, 1/3-s, 2/3-s, 1/6-s, 1/2-s,$ $5/6-s], \quad -1/6 < \operatorname{Res} < 0$
15(1)	$\operatorname{Erf}(i\sqrt{2}^4\sqrt{x}) \times$ $\times \operatorname{Erfc}(\sqrt{2}^4\sqrt{x})$	$\frac{i}{\pi\sqrt{2}} \Gamma\left[\begin{matrix} 1/4+s, 1/2+s, 3/4+s, \\ 1+s, 1-s \\ 1/2-s \end{matrix}\right], \quad -1/4 < \operatorname{Res} < 1/2$

1	2	3
15(2)	$\operatorname{Erf}(i2^{\frac{8}{3}}\sqrt{x}) \operatorname{Erfc}(2^{\frac{8}{3}}\sqrt{x})$	$\frac{i}{2\sqrt{2}\pi^2} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/8 + s, 5/8 + s, 1/4 + s, \\ 1/2 + s, 1 + s, 1/2 - s, 1 - s, \\ 3/4 + s, 3/8 + s, 7/8 + s, 1/4 - s, 3/4 - s \end{matrix} \right],$ $-1/8 < \operatorname{Res} < 1/4$
15(3)	$\operatorname{Erf}(i\sqrt{2}x^{-1/4}) \times$ $\times \operatorname{Erfc}(\sqrt{2}x^{-1/4})$	$\frac{i}{\pi\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2 + s, 1/4 - s, 1/2 - s, \\ 1 + s, 1 - s, \\ 3/4 - s \end{matrix} \right], \quad -1/2 < \operatorname{Res} < 1/4$
16(1)	$S(2\sqrt{x})$	$-\frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s + 3/4, s \\ s + 1, 3/4 - s \end{matrix} \right], \quad -3/4 < \operatorname{Res} < 0$
16(2)	$S(2k^{\frac{2k}{3}}\sqrt{x})$	$-\frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} \Delta(k, ks + 3/4), s \\ s + 1, \Delta(k, 3/4 - ks) \end{matrix} \right],$ $-\frac{3}{4k} < \operatorname{Res} < 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$
16(3)	$S\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 3/4 - s \\ s + 1, 3/4 + s \end{matrix} \right], \quad 0 < \operatorname{Res} < 3/4$
16(4)	$S(2kx^{-(2k)^{-1}})$	$\frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, \Delta(k, 3/4 - ks) \\ s + 1, \Delta(k, 3/4 + ks) \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Res} < 3/(4k), \quad k = 1, 2, 3, \dots$
17(1)	$C(2\sqrt{x})$	$-\frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s + 1/4 \\ s + 1, 1/4 - s \end{matrix} \right], \quad -1/4 < \operatorname{Res} < 0$
17(2)	$C(2k^{\frac{2k}{3}}\sqrt{x})$	$-\frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, \Delta(k, 1/4 + ks) \\ s + 1, \Delta(k, 1/4 - ks) \end{matrix} \right],$ $-\frac{1}{4k} < \operatorname{Res} < 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots$
17(3)	$C\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/4 - s \\ s + 1, 1/4 + s \end{matrix} \right], \quad 0 < \operatorname{Res} < 1/4$
17(4)	$C(2kx^{-(2k)^{-1}})$	$\frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, \Delta(k, 1/4 - ks) \\ s + 1, \Delta(k, 1/4 + ks) \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Res} < 1/(4k), \quad k = 1, 2, 3, \dots$
18(1)	$1/2 - S(2\sqrt{x})$	$\frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s + 3/4 \\ s + 1, 3/4 - s \end{matrix} \right], \quad 0 < \operatorname{Res} < 3/4$

1	2	3
18(2)	$1/2 - S(2k \sqrt[2k]{x})$	$\frac{1}{2} \Gamma \left[s, \Delta(k, ks + 3/4) \right],$ $0 < \text{Re } s < 3/(4k), k = 1, 2, 3, \dots$
18(3)	$1/2 - S\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$-\frac{1}{2} \Gamma \left[s, 3/4 - s \right], -3/4 < \text{Re } s < 0$
19(1)	$1/2 - C(2\sqrt{x})$	$\frac{1}{2} \Gamma \left[s, s + 1/4 \right], 0 < \text{Re } s < 3/4$
19(2)	$1/2 - C(2k \sqrt[2k]{x})$	$\frac{1}{2} \Gamma \left[s, \Delta(k, 1/4 + ks) \right],$ $0 < \text{Re } s < 3/(4k), k = 1, 2, 3, \dots$
19(3)	$\frac{1}{2} - C\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$-\frac{1}{2} \Gamma \left[s, 1/4 - s \right], -3/4 < \text{Re } s < 0$
20(1)	$\cos(2\sqrt{x})C(2\sqrt{x}) +$ $+\sin(2\sqrt{x})S(2\sqrt{x})$	$\frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} \Gamma \left[1/4 + s, 3/4 - s \right],$ $-1/4 < \text{Re } s < 1/2$
20(2)	$\cos(4\sqrt[4]{x})C(4\sqrt[4]{x}) +$ $+\sin(4\sqrt[4]{x})S(4\sqrt[4]{x})$	$\pi^{3/2} \Gamma \left[1/8 + s, 5/8 + s, 3/8 - s, 7/8 - s \right],$ $-1/8 < \text{Re } s < 1/4$
20(3)	$\cos(2/\sqrt{x})C(2/\sqrt{x}) +$ $+\sin\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)S\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} \Gamma \left[3/4 + s, 1/4 - s \right],$ $-1/2 < \text{Re } s < 1/4$
21(1)	$\sin(2\sqrt{x})C(2\sqrt{x}) -$ $-\cos(2\sqrt{x})S(2\sqrt{x})$	$\frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} \Gamma \left[s + 3/4, 1/4 - s \right],$ $-3/4 < \text{Re } s < 1/4$
21(2)	$\sin(4\sqrt[4]{x})C(4\sqrt[4]{x}) -$ $-\cos(4\sqrt[4]{x})S(4\sqrt[4]{x})$	$\pi^{3/2} \Gamma \left[s + 3/8, s + 7/8, 1/8 - s, 5/8 - s \right],$ $-3/8 < \text{Re } s < 1/8$
21(3)	$\sin(2/\sqrt{x})C(2/\sqrt{x}) -$ $-\cos(2/\sqrt{x})S(2/\sqrt{x})$	$\frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} \Gamma \left[s + 1/4, 3/4 - s \right],$ $-1/4 < \text{Re } s < 3/4$
22(1)	$(1/2 - C(2\sqrt{x}))\cos(2\sqrt{x}) +$ $+(1/2 - S(2\sqrt{x}))\sin(2\sqrt{x})$	$(2\pi)^{-3/2} \Gamma[s, s + 1/4, s + 1/2, 3/4 - s],$ $0 < \text{Re } s < 3/4$
22(2)	$(1/2 - C(4\sqrt[4]{x}))\cos(4\sqrt[4]{x}) +$ $+(1/2 - S(4\sqrt[4]{x}))\sin(4\sqrt[4]{x})$	$8^{-1}\pi^{-7/2} \Gamma[s, s + 1/2, s + 1/8, s + 5/4,$ $s + 1/4, s + 3/4, 3/8 - s, 7/8 - s],$ $0 < \text{Re } s < 3/8$

1	2	3
22(3)	$(1/2 - C(2/\sqrt{x})) \times$ $\times \cos(2/\sqrt{x}) +$ $+ (1/2 - S(2/\sqrt{x})) \times$ $\times \sin(2/\sqrt{x})$	$(2\pi)^{-3/2} \Gamma[s + 3/4, -s, 1/4 - s, 1/2 - s],$ $-3/4 < \operatorname{Re} s < 0$
23(1)	$(1/2 - S(2\sqrt{x})) \cos(2\sqrt{x}) -$ $-(1/2 - C(2\sqrt{x})) \sin(2\sqrt{x})$	$(2\pi)^{-3/2} \Gamma[s, s + 1/2, s + 3/4, 1/4 - s],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4$
23(2)	$(1/2 - S(4\sqrt[4]{x})) \cos(4\sqrt[4]{x}) -$ $-(1/2 - C(4\sqrt[4]{x})) \sin(4\sqrt[4]{x})$	$8^{-1} \pi^{-7/2} \Gamma[s, s + 1/2, s + 1/4, s + 3/4,$ $s + 3/8, s + 7/8, 1/8 - s, 5/8 - s],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/8$
23(3)	$(1/2 - S(2/\sqrt{x})) \cos(2/\sqrt{x}) -$ $-(1/2 - C(2/\sqrt{x})) \sin(2/\sqrt{x})$	$(2\pi)^{-3/2} \Gamma[s + 1/4, -s, 1/2 - s, 3/4 - s],$ $-1/4 < \operatorname{Re} s < 0$
24(1)	$[1/2 - C(2\sqrt{x})]^2 +$ $+ [1/2 - S(2\sqrt{x})]^2$	$\frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s + 1/4, s + 3/4, s + 1/2, \\ s + 1 \end{matrix} \right. , 1/2 - s \left. \right], 0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
24(2)	$[1/2 - C(4\sqrt[4]{x})]^2 +$ $+ [1/2 - S(4\sqrt[4]{x})]^2$	$\frac{\sqrt{2}}{16\pi^4} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s + 1/8, s + 5/8, s + 3/8, \\ s + 1 \end{matrix} \right. , s + 7/8, s + 1/4, s + 3/4, 1/4 - s, 3/4 - s \left. \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4$
24(3)	$\left[\frac{1}{2} - C\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) \right]^2 +$ $+ \left[\frac{1}{2} - S\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) \right]^2$	$\frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1/2, -s, 1/4 - s, 1/2 - s, \\ 1 - s \end{matrix} \right. , 3/4 - s \left. \right], -1/2 < \operatorname{Re} s < 0$
25(1)	$S(2\sqrt{x}, \alpha)$	$2\alpha^{-1} \sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s + (\alpha + 1)/2 \\ s + 1, 1 - \alpha/2 - s \end{matrix} \right],$ $0, -(\operatorname{Re} \alpha + 1)/2 < \operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re} \alpha/2$
25(2)	$S(2k\sqrt[2k]{x}, \alpha)$	$(2k)^{\alpha-1} \sqrt{k\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, \Delta(k, sk + (\alpha + 1)/2) \\ s + 1, \Delta(k, 1 - \alpha/2 - ks) \end{matrix} \right],$ $0, -\operatorname{Re} \alpha - 1 < 2k \operatorname{Re} s < 2 - \operatorname{Re} \alpha,$ $k = 1, 2, 3, \dots$

1	2	3
25(3)	$S\left(\frac{2}{\sqrt{x}}, \alpha\right)$	$-2^{\alpha-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left[\begin{matrix}s, (\alpha+1)/2-s \\ s+1, s+1-\alpha/2\end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}\alpha/2-1 < \operatorname{Re}s < 0, (\operatorname{Re}\alpha+1)/2$
26(1)	$C(2\sqrt{x}, \alpha)$	$2^{\alpha-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left[\begin{matrix}s, s+\alpha/2 \\ s+1, (1-\alpha)/2-s\end{matrix}\right],$ $0, -\operatorname{Re}\alpha/2 < \operatorname{Re}s < 1-\operatorname{Re}\alpha/2$
26(2)	$C(2k^{\frac{2k}{2}}\sqrt{x}, \alpha)$	$(2k)^{\alpha-1}\sqrt{k\pi}\Gamma\left[\begin{matrix}s, \Delta(k, ks+\alpha/2) \\ s+1, \Delta(k, (1-\alpha)/2-ks)\end{matrix}\right],$ $0, -\operatorname{Re}\alpha < 2k\operatorname{Re}s < 2-\operatorname{Re}\alpha,$ $k=1, 2, 3, \dots$
26(3)	$C\left(\frac{2}{\sqrt{x}}, \alpha\right)$	$-2^{\alpha-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left[\begin{matrix}s, \alpha/2-s \\ s+1, s+(1-\alpha)/2\end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}\alpha-2 < 2\operatorname{Re}s < 0, \operatorname{Re}\alpha$
27(1)	$\gamma(a, x)$	$\Gamma\left[\begin{matrix}s+a, -s \\ 1-s\end{matrix}\right], \quad -\operatorname{Re}a < \operatorname{Re}s < 0$
27(2)	$\gamma(a, k^{\frac{k}{2}}\sqrt{x})$	$(2\pi)^{(1-k)/2}k^{a-1/2}\Gamma\left[\begin{matrix}\Delta(k, ks+a), -s \\ 1-s\end{matrix}\right],$ $-\operatorname{Re}a/k < \operatorname{Re}s < 0, \quad k=1, 2, 3, \dots$
27(3)	$\gamma\left(a, \frac{1}{x}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix}s, a-s \\ s+1\end{matrix}\right], \quad 0 < \operatorname{Re}s < \operatorname{Re}a$
28(1)	$\Gamma(a, x)$	$\Gamma\left[\begin{matrix}s+a, s \\ s+1\end{matrix}\right], \quad \operatorname{Re}s > 0, -\operatorname{Re}a$
28(2)	$\Gamma(a, k^{\frac{k}{2}}\sqrt{x})$	$\frac{k^{a-1/2}}{(2\pi)^{(k-1)/2}}\Gamma\left[\begin{matrix}\Delta(k, ks+a), s \\ s+1\end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}s > -\operatorname{Re}a/k, \quad 0, \quad k=1, 2, 3, \dots$
28(3)	$\Gamma\left(a, \frac{1}{x}\right)$	$-\Gamma\left[\begin{matrix}s, a-s \\ s+1\end{matrix}\right], \quad \operatorname{Re}s < 0, \operatorname{Re}a$
29(1)	$e^x\Gamma(a, x)$	$[\Gamma(1-a)]^{-1}\Gamma[s, s+a, 1-a-s],$ $\operatorname{Re}s > 0, 0 < \operatorname{Re}(s+a) < 1$
29(2)	$e^{2\sqrt{x}}\Gamma(a, 2\sqrt{x})$	$\pi^{-3/2}[2\Gamma(1-a)]^{-1}\Gamma[s, s+1/2, s+a/2,$ $s+(a+1)/2, (1-a)/2-s, 1-a/2-s,$ $\operatorname{Re}s > 0, 0 < \operatorname{Re}(s+a/2) < 1/2$
29(4)	$e^{1/x}\Gamma\left(a, \frac{1}{x}\right)$	$[\Gamma(1-a)]^{-1}\Gamma[s+1-a, -s, a-s],$ $\operatorname{Re}a-1 < \operatorname{Re}s < 0, \operatorname{Re}a$

1	2	3
29(6)	$e^{3x^{-1/3}} \Gamma(a, 3x^{-1/3})$	$\sqrt{3}(2\pi)^{-3} [\Gamma(1-a)]^{-1} \Gamma_3[3s+1-a, -3s, a-3s], (\operatorname{Re} a-1)/3 < \operatorname{Re} s < 0, \operatorname{Re} a/3$
30(1)	$e^{-x/2} D_v(\sqrt{2x})$	$2^{v/2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s+(1-v)/2 \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s > 0$
30(2)	$e^{-\sqrt{x}} D_v(2\sqrt[4]{x})$	$\frac{2^v}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+1/4, s+3/4 \\ s+(1-v)/4, s+(3-v)/4 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0$
30(4)	$e^{-(2x)^{-1}} D_v \left(\sqrt[4]{\frac{2}{x}} \right)$	$2^{v/2} \Gamma \left[\begin{matrix} -s, 1/2-s \\ (1-v)/2-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < 0$
30(6)	$e^{-3/2x^{-1/3}} D_v(\sqrt[6]{6}x^{-1/6})$	$\frac{6^{v/2} \sqrt{3}}{2\pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} -3s, 1/2-3s \\ (1-v)/2-3s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < 0$
31(1)	$e^{x/2} D_v(\sqrt{2x})$	$[2^{v/2+1} \sqrt{\pi} \Gamma(-v)]^{-1} \Gamma[s, s+1/2, -v/2-s],$ $0 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} v/2$
31(2)	$e^{\sqrt{x}} D_v(2\sqrt[4]{x})$	$[2^{v+5/2} \pi^2 \Gamma(-v)]^{-1} \Gamma[s, s+1/2, s+1/4, s+3/4, -v/4-s, (2-v)/4-s],$ $0 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} v/4$
31(4)	$e^{(2x)^{-1}} D_v \left(\sqrt[4]{\frac{2}{x}} \right)$	$[2^{v/2+1} \sqrt{\pi} \Gamma(-v)]^{-1} \Gamma[s-v/2, -s, 1/2-s], \operatorname{Re} v/2 < \operatorname{Re} s < 0$
31(6)	$e^{3/2x^{-1/3}} D_v(\sqrt[6]{6}x^{-1/6})$	$[6^{v/2} 16\pi^{7/2} \Gamma(-v)]^{-1} \Gamma_3[3s-v/2, -3s, 1/2-3s], \operatorname{Re} v/6 < \operatorname{Re} s < 0$
32(1)	$D_v(2\sqrt[4]{i}x^{1/4}) \times$ $\times D_v(2\sqrt[4]{-i}x^{1/4})$	$\frac{2^{-3/2}}{\pi \Gamma(-v)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/4, s+1/2, s+3/4, \\ s+(1-v)/2 \\ -v/2-s \end{matrix} \right], 0 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} v/2$
32(2)	$D_v(2\sqrt[4]{i}x^{-1/4}) \times$ $\times D_v(2\sqrt[4]{-i}x^{-1/4})$	$\frac{2^{-3/2}}{\pi \Gamma(-v)} \Gamma \left[\begin{matrix} s-v/2, -s, 1/4-s, \\ (1-v)/2-s \\ 1/2-s, 3/4-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} v/2 < \operatorname{Re} s < 0$
33(1)	$D_v(2x^{1/4}) D_{-v-1}(2x^{1/4})$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/4, s+1/2, s+3/4 \\ s+1+v/2, s+(1-v)/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0$

1	2	3
33(2)	$D_{\nu}(2\sqrt{2}x^{1/8}) \times$ $\times D_{-\nu-1}(2\sqrt{2}x^{1/8})$	$\frac{1}{4\pi^{3/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+1/8, s+5/8, \\ s+(2+\nu)/4, s+1+\nu/4, \\ s+1/4, s+3/4, s+3/8, s+7/8 \\ s+(1-\nu)/4, s+(3-\nu)/4 \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s > 0$
33(3)	$D_{\nu}(2x^{-1/4}) D_{-\nu-1}(2x^{-1/4})$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} -s, 1/4-s, 1/2-s, 3/4-s \\ 1+\nu/2-s, (1-\nu)/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s < 0$

9. Функции Бесселя и родственные им функции

1(1)	${}_0F_1(c; -x)$	$\Gamma(c) \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ c-s \end{matrix} \right], \quad 0 < \text{Re } s < 1/4 + \text{Re } c/2$
1(2)	${}_0F_1(c; -k^2 \sqrt[k]{x})$	$k^{1-c} \Gamma(c) \Gamma \left[\begin{matrix} \Delta(k, ks) \\ \Delta(k, c-ks) \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Re } s < 1/(4k) + \text{Re } c/(2k),$ $k = 1, 2, 3, \dots$
1(3)	${}_0F_1(c; -1/x)$	$\Gamma(c) \Gamma \left[\begin{matrix} -s \\ s+c \end{matrix} \right],$ $-1/4 - \text{Re } c/2 < \text{Re } s < 0$
1(4)	${}_0F_1(c; -k^2 x^{-1/k})$	$k^{1-c} \Gamma(c) \Gamma \left[\begin{matrix} \Delta(k, -ks) \\ \Delta(k, ks+c) \end{matrix} \right],$ $-1/4 - \text{Re } c/2 < k \text{Re } s < 0,$ $k = 1, 2, 3, \dots$
2(1)	$J_{\nu}(2\sqrt{x})$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s+\nu/2 \\ \nu/2+1-s \end{matrix} \right], \quad -\text{Re } \nu/2 < \text{Re } s < 3/4$
2(2)	$J_{\nu}(4\sqrt[4]{x})$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s+\nu/4, s+(\nu+2)/4 \\ (\nu+2)/4-s, \nu/4+1-s \end{matrix} \right],$ $-\text{Re } \nu/4 < \text{Re } s < 3/8$
2(3)	$J_{\nu}(2k\sqrt[k]{x})$	$\Gamma \left[\begin{matrix} \Delta(k, ks+\nu/2) \\ \Delta(k, \nu/2+1-ks) \end{matrix} \right],$ $-\text{Re } \nu/(2k) < \text{Re } s < 3/(4k),$ $k = 1, 2, 3, \dots$
2(4)	$J_{\nu}(2/\sqrt{x})$	$\Gamma \left[\begin{matrix} \nu/2-s \\ s+\nu/2+1 \end{matrix} \right], \quad -3/4 < \text{Re } s < \text{Re } \nu/2$

1	2	3
2(5)	$J_\nu(2kx^{-(2k)^{-1}})$	$\Gamma \left[\begin{matrix} \Delta(k, \nu/2 - ks) \\ \Delta(k, ks + \nu/2 + 1) \end{matrix} \right],$ $-3/(4k) < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \nu/(2k),$ $k = 1, 2, 3, \dots$
3(1)	$K_\nu(2\sqrt{x})$	$1/2 \Gamma[\nu/2 + s, -\nu/2 + s], \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \nu /2$
3(2)	$K_\nu(4\sqrt[4]{x})$	$(4\pi)^{-1} \Gamma[\nu/4 + s, (\nu+2)/4 + s, -\nu/4 + s,$ $(2 - \nu)/4 + s], \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \nu /4$
3(3)	$K_\nu(2k\sqrt[2k]{x})$	$\pi (2\pi)^{-k} \Gamma_k[ks + \nu/2, ks - \nu/2],$ $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \nu /(2k), \quad k = 1, 2, 3, \dots$
3(4)	$K_\nu\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$1/2 \Gamma[\nu/2 - s, -\nu/2 - s], \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} \nu /2$
3(5)	$K_\nu(2kx^{-(2k)^{-1}})$	$\pi (2\pi)^{-k} \Gamma_k[\nu/2 - ks, -\nu/2 - ks],$ $\operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} \nu /(2k), \quad k = 1, 2, 3, \dots$
4(1)	$Y_\nu(2\sqrt{x})$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s + \nu/2, s - \nu/2 \\ s - (\nu+1)/2, (3+\nu)/2 - s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} \nu /2 < \operatorname{Re} s < 3/4$
4(2)	$Y_\nu(4\sqrt[4]{x})$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s + \nu/4, s + (\nu+2)/4, s - \nu/4, \\ s - (\nu+1)/4, s + (1-\nu)/4, \\ s + (2-\nu)/4 \\ (3+\nu)/4 - s, (5+\nu)/4 - s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} \nu /4 < \operatorname{Re} s < 3/8$
4(3)	$Y_\nu\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} \nu/2 - s, -\nu/2 - s \\ s + (3+\nu)/2, -s - (\nu+1)/2 \end{matrix} \right],$ $-3/4 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} \nu /2$
5(1)	$H_\nu(2\sqrt{x})$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s + (1+\nu)/2, (1-\nu)/2 - s \\ 1 + \nu/2 - s, 1 - \nu/2 - s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < 3/4, \quad -1/2 < \operatorname{Re}(s + \nu/2) < 1/2$
5(2)	$H_\nu(4\sqrt[4]{x})$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s + (1+\nu)/4, s + (3+\nu)/4, (1-\nu)/4 - s, \\ (2+\nu)/4 - s, 1 + \nu/4 - s, (2-\nu)/4 - s, \\ (3-\nu)/4 - s \\ 1 - \nu/4 - s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < 3/8,$ $ \operatorname{Re}(s + \nu/4) < 1/4$

1	2	3
5(3)	$H_v \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s + (1-v)/2, (1+v)/2 - s \\ 1 + v/2 + s, 1 - v/2 + s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > -3/4, \operatorname{Re}(s - v/2) < 1/2$
6(1)	$s_{\mu, v}(2\sqrt{x})$	$2^{\mu-1} \Gamma \left[\frac{\mu - v + 1}{2}, \frac{\mu + v + 1}{2} \right] \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\mu + 1)/2, (1 - \mu)/2 - s \\ 1 - v/2 - s, 1 + v/2 - s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re}(s + \mu/2) < 1/2, \operatorname{Re} s < 3/4$
6(2)	$s_{\mu, v}(4\sqrt[4]{x})$	$2^{\mu-1} \Gamma \left[\frac{\mu - v + 1}{2}, \frac{\mu + v + 1}{2} \right] \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\mu + 1)/4, s + (\mu + 3)/4, \\ (2 - v)/4 - s, 1 - v/4 - s, \\ (1 - \mu)/4 - s, (3 - \mu)/4 - s \\ (2 + v)/4 - s, 1 + v/4 - s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re}(s + \mu/4) < 1/4, \operatorname{Re} s < 3/8$
6(3)	$s_{\mu, v}(2\sqrt{x})$	$2^{\mu-1} \Gamma \left[\frac{\mu - v + 1}{2}, \frac{\mu + v + 1}{2} \right] \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s + (1 - \mu)/2, (\mu + 1)/2 - s \\ s + 1 - v/2, s + 1 + v/2 \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re}(s - \mu/2) < 1/2, \operatorname{Re} s > -3/4$
7(1)	$S_{\mu, v}(2\sqrt{x})$	$\frac{2^{\mu-1}}{\Gamma[(1 - \mu - v)/2, (1 - \mu + v)/2]} \times$ $\times \Gamma[s + (1 + \mu)/2, s + v/2, s - v/2,$ $(1 - \mu)/2 - s], \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} v /2,$ $ \operatorname{Re}(s + \mu/2) < 1/2$
7(2)	$S_{\mu, v}(4\sqrt[4]{x})$	$\frac{2^{\mu-3}}{\pi^2 \Gamma[(1 - \mu - v)/2, (1 - \mu + v)/2]} \times$ $\times \Gamma[s + (1 + \mu)/4, s + (3 + \mu)/4, s + v/4,$ $s + (v + 2)/4, s - v/4, s + (2 - v)/4,$ $(1 - \mu)/4 - s, (3 - \mu)/4 - s],$ $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} v /4, \operatorname{Re}(s + \mu/4) < 1/4$
7(3)	$S_{\mu, v}(2\sqrt{x})$	$\frac{2^{\mu-1}}{\Gamma[(1 - \mu - v)/2, (1 - \mu + v)/2]} \times$ $\times \Gamma[s + (1 - \mu)/2, (1 + \mu)/2 - s, v/2 - s,$ $-v/2 - s], \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} v /2,$ $ \operatorname{Re}(s - \mu/2) < 1/2$

1	2	3
8(1)	$J_v(2\sqrt{x})$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1-s, 1/2-s \\ s+(1-v)/2, 1+v/2-s, 1-v/2-s, \\ (1+v)/2-s \end{matrix} \right], \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
8(2)	$J_v \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, s+1, 1/2-s, -s \\ s+v/2+1, s-v/2+1, \\ s+(1+v)/2, (1-v)/2-s \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < 0$
9(1)	$J_v^\mu(2\sqrt{x})$	$2^\mu \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1+\mu/2-s, \\ s+(1-v)/2, 1+(\mu+v)/2-s, \\ (1+\mu)/2-s \\ 1+(\mu-v)/2-s, (1+v)/2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 3/4, (\operatorname{Re} \mu + 1)/2$
9(2)	$J_v^\mu \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right)$	$2^\mu \Gamma \left[\begin{matrix} (1+\mu)/2+s, s+\mu/2+1, 1/2-s, \\ s+(\mu+v)/2+1, s+(\mu-v)/2+1, \\ -s \\ s+(1+v)/2, (1-v)/2-s \end{matrix} \right],$ $-3/4, -(\operatorname{Re} \mu + 1)/2 < \operatorname{Re} s < 0$
10(1)	$E_v(2\sqrt{x})$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1-s, 1/2-s \\ s+1-v/2, 1+v/2-s, 1-v/2-s, \\ v/2-s \end{matrix} \right], \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
10(2)	$E_v \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, s+1, 1/2-s, -s \\ s+v/2+1, s-v/2+1, s+v/2, \\ 1-v/2-s \end{matrix} \right], \quad -1/2 < \operatorname{Re} s < 0$
11(1)	$E_v^\mu(2\sqrt{x})$	$2^\mu \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \mu/2+1-s, (\mu+1)/2-s \\ s+1-v/2, 1+(\mu+v)/2-s, \\ 1+(\mu-v)/2-s, v/2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 3/4, (\operatorname{Re} \mu + 1)/2$

1	2	3
11(2)	$E_v^\mu \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right)$	$2^\mu \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\mu + 1)/2, s + \mu/2 + 1, \\ s + (\mu + \nu)/2 + 1, s + (\mu - \nu)/2 + 1, \\ 1/2 - s, -s \\ s + \nu/2, 1 - \nu/2 - s \end{matrix} \right],$ $-3/4, -(\operatorname{Re} \mu + 1)/2 < \operatorname{Re} s < 0$
12(1)	$e^{-x/2} I_\nu(x/2)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + \nu, 1/2 - s \\ \nu + 1 - s \end{matrix} \right],$ $-\operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} s < 1/2$
12(2)	$e^{-\sqrt{x}} I_\nu(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\pi \sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + \nu/2, s + (\nu + 1)/2, 1/4 - s, \\ (\nu + 1)/2 - s, \nu/2 + 1 - s \\ 3/4 - s \end{matrix} \right], -\operatorname{Re} \nu/2 < \operatorname{Re} s < 1/4$
12(4)	$e^{-(2x)^{-1}} I_\nu \left(\frac{1}{2x} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1/2, \nu - s \\ s + \nu + 1 \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \nu$
12(6)	$e^{-3/2x^{-1/3}} I_\nu \left(\frac{3}{2} x^{-1/3} \right)$	$\frac{1}{2\pi \sqrt{\pi}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s + 1/2, \nu - 3s \\ 3s + \nu + 1 \end{matrix} \right],$ $-1/6 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \nu/3$
13(1)	$e^{-x/2} K_\nu \left(\frac{x}{2} \right)$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s + \nu, s - \nu \\ s + 1/2 \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \nu $
13(2)	$e^{-\sqrt{x}} K_\nu(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + \nu/2, s + (\nu + 1)/2, s - \nu/2, \\ s + 1/4, s + 3/4 \\ s - (\nu - 1)/2 \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \nu /2$
13(4)	$e^{-(2x)^{-1}} K_\nu \left(\frac{1}{2x} \right)$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} \nu - s, -\nu - s \\ 1/2 - s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} \nu $
13(6)	$e^{-3/2x^{-1/3}} K_\nu \left(\frac{3}{2} x^{-1/3} \right)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} \nu - 3s, -\nu - 3s \\ 1/2 - 3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} \nu /3$
14(1)	$e^{x/2} K_\nu \left(\frac{x}{2} \right)$	$\pi^{-1/2} \cos(\pi \nu) \Gamma[s + \nu, s - \nu, 1/2 - s],$ $ \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} s < 1/2$
14(2)	$e^{\sqrt{x}} K_\nu(\sqrt{x})$	$[2\sqrt{2} \pi^2]^{-1} \cos(\pi \nu) \Gamma[s + \nu/2, s + (\nu + 1)/2,$ $s - \nu/2, s + (1 - \nu)/2, 1/4 - s, 3/4 - s],$ $ \operatorname{Re} \nu /2 < \operatorname{Re} s < 1/4$

1	2	3
14(4)	$e^{(2x)^{-1}} K_v \left(\frac{1}{2x} \right)$	$\pi^{-1/2} \cos(\pi v) \Gamma[s + 1/2, v - s, -v - s],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} v $
14(6)	$e^{3/2x^{-1/3}} K_v \left(\frac{3}{2} x^{-1/3} \right)$	$(2\pi)^{-3} \pi^{-1/2} \cos(\pi v) \Gamma_3[3s + 1/2, v - 3s,$ $-v - 3s], -1/6 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} v /3$
15(1)	$\sin \sqrt{x} J_v(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + (v+1)/2, 1/4 - s, 3/4 - s \\ (1+v)/2 - s, 1 - v/2 - s, \\ 1 + v/2 - s \end{matrix} \right], - (1 + \operatorname{Re} v)/2 < \operatorname{Re} s < 1/4$
15(2)	$\sin(2\sqrt[4]{x}) J_v(2\sqrt[4]{x})$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + (v+1)/4, s + (v+3)/4, \\ (1+v)/4 - s, (3+v)/4 - s, \\ 1/8 - s, 5/8 - s, 3/8 - s, 7/8 - s \\ (2-v)/4 - s, 1 - v/4 - s, (2+v)/4 - s, \\ 1 + v/4 - s \end{matrix} \right], - (1 + \operatorname{Re} v)/4 < \operatorname{Re} s < 1/8$
15(3)	$\sin \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) J_v \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1/4, s + 3/4, (v+1)/2 - s \\ s + (1+v)/2, s + 1 - v/2, \\ s + 1 + v/2 \end{matrix} \right], -1/4 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re} v)/2$
16(1)	$\cos \sqrt{x} J_v(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + v/2, 1/4 - s, 3/4 - s \\ 1 + v/2 - s, (1 - v)/2 - s, \\ (1 + v)/2 - s \end{matrix} \right], -\operatorname{Re} v/2 < \operatorname{Re} s < 1/4$
16(2)	$\cos(2\sqrt[4]{x}) J_v(2\sqrt[4]{x})$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + v/4, s + (v+2)/4, 1/8 - s, \\ (2+v)/4 - s, 1 + v/4 - s, \\ 5/8 - s, 3/8 - s, 7/8 - s \\ (1-v)/4 - s, (3-v)/4 - s, (1+v)/4 - s, \\ (3+v)/4 - s \end{matrix} \right], -\operatorname{Re} v/4 < \operatorname{Re} s < 1/8$
16(3)	$\cos \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) J_v \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/4 + s, 3/4 + s, v/2 - s \\ s + 1 + v/2, s + (1 - v)/2, \\ s + (1 + v)/2 \end{matrix} \right], -1/4 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} v/2$

1	2	3
17(1)	$\sin \sqrt{x} Y_v(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + (v+1)/2, s + (1-v)/2, \\ s - v/2, 1 + v/2 - s, 1 + v/2 - s, \\ 1/4 - s, 3/4 - s \\ 1 - v/2 - s \end{matrix} \right],$ $(\operatorname{Re} v - 1)/2 < \operatorname{Re} s < 1/4$
17(2)	$\sin \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) Y_v \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1/4, s + 3/4, (v+1)/2 - s, \\ s + 1 + v/2, s + 1 + v/2, \\ (1-v)/2 - s \\ s + 1 - v/2, -v/2 - s \end{matrix} \right],$ $-1/4 < \operatorname{Re} s < (1 - \operatorname{Re} v)/2$
18(1)	$\cos \sqrt{x} Y_v(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + v/2, s - v/2, 1/4 - s, \\ s - (v+1)/2, (3+v)/2 - s \\ 3/4 - s \\ (1-v)/2 - s, (1+v)/2 - s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} v /2 < \operatorname{Re} s < 1/4$
18(2)	$\cos (1/\sqrt{x}) Y_v(1/\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1/4, s + 3/4, v/2 - s, \\ s + (3+v)/2, s + (1-v)/2, \\ -v/2 - s \\ s + (1+v)/2, -(v+1)/2 - s \end{matrix} \right],$ $-1/4 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} v /2$
19(1)	$[J_v(\sqrt{x})]^2$	$\frac{1}{v \pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s + v, 1/2 - s \\ 1 + v - s, 1 - s \end{matrix} \right],$ $-\operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 1/2$
19(2)	$[J_v(2^{1/4} \sqrt{x})]^2$	$\frac{1}{\sqrt{2} \pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s + v/2, s + (v+1)/2, 1/4 - s, \\ (1+v)/2 - s, 1 + v/2 - s, \\ 3/4 - s \\ 1/2 - s, 1 - s \end{matrix} \right],$ $-\operatorname{Re} v/2 < \operatorname{Re} s < 1/4$
19(4)	$[J_v(1/\sqrt{x})]^2$	$\frac{1}{v \pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1/2, v - s \\ s + 1, s + v + 1 \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} v$
19(6)	$[J_v(3x^{-1/6})]^2$	$\frac{1}{\sqrt{3} \pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s + 1/2, v - 3s \\ 3s + 1, 3s + v + 1 \end{matrix} \right],$ $-1/6 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} v/3$
20(1)	$J_v(\sqrt{x}) J_{v+1}(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + v + 1/2, 1 - s \\ 3/2 - s, v + 3/2 - s \end{matrix} \right],$ $-1/2 - \operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 1$

1	2	3
20(2)	$J_v(2\sqrt[4]{x})J_{v+1}(2\sqrt[4]{x})$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + v/2 + 1/4, & s + v/2 + 3/4, \\ 3/4 - s, & 5/4 - s, & v/2 + 3/4 - s, \\ & 1/2 - s, & 1 - s \\ & v/2 + 5/4 - s \end{matrix} \right],$ $-1/4 - 1/2 \operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 1/2$
20(4)	$J_v \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) J_{v+1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1, & v + 1/2 - s \\ s + 3/2, & s + v + 3/2 \end{matrix} \right],$ $-1 < \operatorname{Re} s < 1/2 + \operatorname{Re} v$
20(6)	$J_v(3x^{-1/6})J_{v+1}(3x^{-1/6})$	$\frac{1}{\sqrt{3\pi}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s + 1, & v + 1/2 - 3s \\ 3s + 3/2, & 3s + v + 3/2 \end{matrix} \right],$ $-1/3 < \operatorname{Re} s < 1/6 + 1/3 \operatorname{Re} v$
21(1)	$J_v(\sqrt{x})J_{-v}(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, & 1/2 - s \\ 1 + v - s, & 1 - v - s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
21(2)	$J_v(2\sqrt[4]{x})J_{-v}(2\sqrt[4]{x})$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, & s + 1/2, & 1/4 - s, & 3/4 - s \\ (1 + v)/2 - s, & 1 + v/2 - s, \\ & (1 - v)/2 - s, & 1 - v/2 - s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4$
21(4)	$J_v(1/\sqrt{x})J_{-v}(1/\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1/2, & -s \\ s + v + 1, & s - v + 1 \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < 0$
21(6)	$J_v(3x^{-1/6})J_{-v}(3x^{-1/6})$	$\frac{1}{\sqrt{3\pi}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s + 1/2, & -3s \\ 3s + v + 1, & 3s - v + 1 \end{matrix} \right],$ $-1/6 < \operatorname{Re} s < 0$
22(1)	$J_v(\sqrt{x})J_\mu(\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\mu + v)/2, & 1/2 - s, & 1 - s \\ 1 + (\mu + v)/2 - s, & 1 + (v - \mu)/2 - s, \\ & 1 + (\mu - v)/2 - s \end{matrix} \right],$ $-\operatorname{Re}(\mu + v)/2 < \operatorname{Re} s < 1/2$

1	2	3
22(2)	$J_\nu(2\sqrt[4]{x}) J_\mu(2\sqrt[4]{x})$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+(\mu+\nu)/4, s+(\mu+\nu+2)/4, \\ (2+\mu+\nu)/4-s, \\ 1/4-s, 3/4-s, 1/2-s, 1-s \\ 1+(\mu+\nu)/4-s, (2+\nu-\mu)/4-s, \\ 1+(\nu-\mu)/4-s, (2+\mu-\nu)/4-s, \\ 1+(\mu-\nu)/4-s \end{matrix} \right],$ $-\operatorname{Re}(\mu+\nu)/4 < \operatorname{Re} s < 1/4$
22(3)	$J_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) J_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, s+1, -s+(\mu+\nu)/2 \\ s+(\mu+\nu)/2+1, s+(\nu-\mu)/2+1, \\ s+(\mu-\nu)/2+1 \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(\mu+\nu)/2$
23(1)	$J_\nu(\sqrt{x}) Y_\nu(\sqrt{x})$	$-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+\nu \\ s+1/2, 1+\nu-s \end{matrix} \right],$ $0, -\operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} s < 1$
23(2)	$J_\nu(2\sqrt[4]{x}) Y_\nu(2\sqrt[4]{x})$	$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+\nu/2, s+(\nu+1)/2, s, \\ s+1/4, s+3/4, (1+\nu)/2-s, \\ s+1/2 \\ 1+\nu/2-s \end{matrix} \right],$ $0 - \operatorname{Re} \nu/2 < \operatorname{Re} s < 1/2$
23(4)	$J_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) Y_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} -s, \nu-s \\ s+\nu+1, 1/2-s \end{matrix} \right],$ $-1 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \nu, 0$
23(6)	$J_\nu(3x^{-1/6}) Y_\nu(3x^{-1/6})$	$-\frac{1}{\sqrt{3\pi}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} -3s, \nu-3s \\ 3s+\nu+1, 1/2-3s \end{matrix} \right],$ $-1/3 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \nu/3, 0$
24(1)	$J_\nu(\sqrt{x}) Y_{\nu-1}(\sqrt{x})$	$-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+\nu-1/2, s-1/2 \\ s, \nu+1/2-s \end{matrix} \right],$ $-1/2, 1/2 - \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} s < 1/2$
24(2)	$J_\nu(2\sqrt[4]{x}) Y_{\nu-1}(2\sqrt[4]{x})$	$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+\nu/2-1/4, s+\nu/2+1/4, \\ s, s+1/2, \nu/2+1/4-s, \\ s-1/4, s+1/4 \\ \nu/2+3/4-s \end{matrix} \right],$ $-1/4, 1/4 - \operatorname{Re} \nu/2 < \operatorname{Re} s < 1/4$

1	2	3
24(4)	$J_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) Y_{\nu-1} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} \nu-1/2-s, -1/2-s \\ s+\nu+1/2, -s \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < 1/2, \operatorname{Re} \nu-1/2$
24(6)	$J_\nu (3x^{-1/6}) Y_{\nu-1} (3x^{-1/6})$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{\pi}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} \nu-1/2-3s, -1/2-3s \\ 3s+\nu+1/2, -3s \end{matrix} \right],$ $-1/6 < \operatorname{Re} s < 1/6, \operatorname{Re} \nu/3-1/6$
25(1)	$J_\nu (\sqrt{x}) Y_{\nu-2} (\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+\nu-1, s+1, 1-s \\ s+1/2, \nu-s, 2-s \end{matrix} \right],$ $1-\operatorname{Re} \nu, -1 < \operatorname{Re} s < 1$
25(2)	$J_\nu (2^4 \sqrt{x}) Y_{\nu-2} (2^4 \sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+(\nu-1)/2, s+\nu/2, s+1/2, \\ s+1/4, s+3/4, \nu/2-s, \\ s+1, 1/2-s \\ (\nu+1)/2-s, 3/2-s \end{matrix} \right],$ $(1-\operatorname{Re} \nu)/2, -1/2 < \operatorname{Re} s < 1/2$
25(3)	$J_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) Y_{\nu-2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1, 1-s, \nu-1-s \\ s+2, s+\nu, 1/2-s \end{matrix} \right],$ $-1 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \nu-1, 1$
26(1)	$J_\nu (\sqrt{x}) Y_{-\nu} (\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+\nu, 1/2-s \\ s+\nu-1/2, 1+\nu-s, 3/2-\nu-s \end{matrix} \right],$ $0, -\operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} s < 1/2$
26(2)	$J_\nu (2^4 \sqrt{x}) Y_{-\nu} (2^4 \sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+\nu/2, s+(\nu+1)/2, \\ s+\nu/2-1/4, s+\nu/2+1/4, \\ 1/4-s, 3/4-s \\ (1+\nu)/2-s, 1+\nu/2-s, 3/4-\nu/2-s, \\ 5/4-\nu/2-s \end{matrix} \right], 0, -\operatorname{Re} \nu/2 < \operatorname{Re} s < 1/4$
26(3)	$J_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) Y_{-\nu} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, -s, \nu-s \\ s+3/2-\nu, s+\nu+1, \\ \nu-1/2-s \end{matrix} \right], -1/2 < \operatorname{Re} s < 0, \operatorname{Re} \nu$
27(1)	$J_\nu (\sqrt{x}) Y_\mu (\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+(\mu+\nu)/2, s+(\nu-\mu)/2, \\ s+(\nu-\mu-1)/2, (3+\mu-\nu)/2-s, \\ 1/2-s, 1-s \\ 1+(\mu+\nu)/2-s, 1+(\nu-\mu)/2-s \end{matrix} \right],$ $-\operatorname{Re} (\nu \pm \mu)/2 < \operatorname{Re} s < 1/2$

1	2	3
27(2)	$J_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) Y_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, s+1, (\nu+\mu)/2-s, \\ s+(3+\mu-\nu)/2, s+(\nu+\mu)/2+1, \\ (\nu-\mu)/2-s \\ s+(\nu-\mu)/2+1, (\nu-\mu-1)/2-s \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(\nu \pm \mu)/2$
28(1)	$[Y_\nu(\sqrt{x})]^2$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+\nu, s-\nu \\ s+1/2, s+1/2-\nu, 1/2+\nu-s \end{matrix} \right] +$ $+\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+\nu, 1/2-s \\ 1+\nu-s, 1-s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} s < 1/2$
28(2)	$[Y_\nu(2^4\sqrt{x})]^2$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+\nu/2, s+(\nu+1)/2, \\ s+1/4, s+3/4, s+1/4-\nu/2, \\ s-\nu/2, s+(1-\nu)/2 \\ s+3/4-\nu/2, 1/4+\nu/2-s, \\ 3/4+\nu/2-s \end{matrix} \right] +$ $+\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+\nu/2, s+(\nu+1)/2, 1/4-s, \\ (1+\nu)/2-s, 1+\nu/2-s, \\ 3/4-s \\ 1/2-s, 1-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \nu /2 < \operatorname{Re} s < 1/4$
28(3)	$\left[Y_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right]^2$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} -s, \nu-s, -\nu-s \\ s+\nu+1/2, 1/2-\nu-s, 1/2-s \end{matrix} \right] +$ $+\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, \nu-s \\ s+1, s+\nu+1 \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} \nu $
29(1)	$Y_\nu(\sqrt{x}) Y_{-\nu}(\sqrt{x})$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+\nu, s-\nu \\ s+1/2, s+1/2, 1/2-s \end{matrix} \right] +$ $+\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/2-s \\ 1-\nu-s, 1+\nu-s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} s < 1/2$
29(2)	$Y_\nu(2^4\sqrt{x}) Y_{-\nu}(2^4\sqrt{x})$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+\nu/2, s+(\nu+1)/2, \\ s+1/4, s+3/4, s+1/4, \\ s-\nu/2, s+(1-\nu)/2 \\ s+3/4, 1/4-s, 3/4-s \end{matrix} \right] +$ $+\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/4-s, 3/4-s \\ (1-\nu)/2-s, 1-\nu/2-s, \\ (1+\nu)/2-s, 1+\nu/2-s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} \nu /2 < \operatorname{Re} s < 1/4$

1	2	3
29(3)	$Y_v \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) Y_{-v} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} -s, v-s, -v-s \\ 1/2+s, 1/2-s, 1/2-s \end{matrix} \right] +$ $+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, -s \\ s+1-v, s+1+v \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} v $
30(1)	$Y_v(\sqrt{x}) Y_{1/2-v}(\sqrt{x})$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s-1/4, s+1/4-v, s+v-1/4 \\ s, s+1/2, 3/4-s \end{matrix} \right] +$ $+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/4, 1/2-s, 1-s \\ 5/4-s, 5/4-v-s, 3/4+v-s \end{matrix} \right],$ $1/4, 1/4 - \operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 1/2$
30(2)	$Y_v(2^4 \sqrt{x}) Y_{1/2-v}(2^4 \sqrt{x})$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s-1/8, s+3/8, s+1/8-v/2, \\ s, s+1/2, s+1/4, s+3/4, \\ s+5/8-v/2, s+v/2+3/8, s+v/2-1/8 \end{matrix} \right] +$ $3/8-s, 7/8-s$ $+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/8, s+5/8, 1/4-s, \\ 5/8-s, 9/8-s, 5/8-v/2-s, \\ 3/4-s, 1/2-s, 1-s \\ 9/8-v/2-s, 3/8+v/2-s, 7/8+v/2-s \end{matrix} \right],$ $1/8, 1/8 - \operatorname{Re} v/2 < \operatorname{Re} s < 1/4$
30(3)	$Y_v \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) Y_{1/2-v} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} -1/4-s, 1/4-v-s, \\ s+3/4, -s, 1/2-s \\ v-1/4-s \end{matrix} \right] +$ $+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, s+1, 1/4-s \\ s+5/4, s+5/4-v, \\ s+3/4+v \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < -1/4, - 1/4 - \operatorname{Re} v $
31(1)	$Y_v(\sqrt{x}) Y_\mu(\sqrt{x})$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+(\mu+v)/2, s+(\mu-v)/2, \\ s, s+1/2, s+(1-\mu-v)/2, \\ s+(v-\mu)/2, s-(\mu+v)/2 \end{matrix} \right] +$ $(1+\mu+v)/2-s$ $+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+(\mu+v)/2, 1/2-s, 1-s \\ 1+(\mu+v)/2-s, \\ 1+(\mu-v)/2-s, 1+(v-\mu)/2-s \end{matrix} \right],$ $(\operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} v)/2 < \operatorname{Re} s < 1/2$

1	2	3
31(2)	$Y_v \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) Y_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} (\mu + v)/2 - s, (\mu - v) - s, \\ s + (\mu + v + 1)/2, -s, 1/2 - s, \\ (v - \mu)/2 - s, -(\mu + v)/2 - s \end{matrix} \right] +$ $+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1/2, s + 1, (\mu + v)/2 - s \\ s + 1 + (\mu + v)/2, \\ s + 1 + (\mu - v)/2, s + 1 + (v - \mu)/2 \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \text{Re } s < -(\text{Re } \mu + \text{Re } v)/2$
32(1)	$H_v^{(1)}(\sqrt{x}) H_v^{(2)}(\sqrt{x}) =$ $= [J_v(\sqrt{x})]^2 + [Y_v(\sqrt{x})]^2$	$2\pi^{-5/2} \cos(\pi v) \Gamma[s, s + v, s - v, 1/2 - s],$ $ \text{Re } v < \text{Re } s < 1/2$
32(2)	$H_v^{(1)}(2\sqrt[4]{x}) H_v^{(2)}(2\sqrt[4]{x})$	$2^{-3/2} \pi^{-9/2} \cos(\pi v) \Gamma[s, s + 1/2, s + v/2,$ $s + (v + 1)/2, s - v/2, s + (1 - v)/2,$ $1/4 - s, 3/4 - s], \text{Re } v /2 < \text{Re } s < 1/4$
32(4)	$H_v^{(1)} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) H_v^{(2)} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$2\pi^{-5/2} \cos(\pi v) \Gamma[s + 1/2, -s, v - s,$ $-v - s], -1/2 < \text{Re } s < - \text{Re } v $
32(6)	$H_v^{(1)}(3x^{-1/6}) H_v^{(2)}(3x^{-1/6})$	$8^{-13} 3^{-1/2} \pi^{-13/2} \cos(\pi v) \Gamma_3[3s + 1/2, -3s,$ $v - 3s, -v - 3s],$ $-1/6 < \text{Re } s < - \text{Re } v /3$
33(1)	$J_v(2\sqrt{2} x^{1/4}) K_v(2\sqrt{2} x^{1/4})$	$\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s + 1/2, s + v/2 \\ v/2 + 1 - s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s > 0, -\text{Re } v/2$
33(2)	$J_v(4\sqrt{2} x^{1/8}) K_v(4\sqrt{2} x^{1/8})$	$\frac{1}{8\pi\sqrt{2}\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s + 1/2, s + 1/4, s + 3/4, \\ (v + 2)/4 - s, v/4 + 1 - s \\ s + v/4, s + (v + 2)/4 \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s > 0, -\text{Re } v/4$
33(4)	$J_v(2\sqrt{2} x^{-1/4}) \times$ $\times K_v(2\sqrt{2} x^{-1/4})$	$\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} -s, 1/2 - s, v/2 - s \\ s + v/2 + 1 \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s < 0, \text{Re } v/2$
33(6)	$J_v(6\sqrt{2} x^{-1/12}) \times$ $\times K_v(6\sqrt{2} x^{-1/12})$	$\frac{1}{16\pi^2\sqrt{3}\pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} -3s, 1/2 - 3s, v/2 - 3s \\ 3s + v/2 + 1 \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s < 0, \text{Re } v/6$

1	2	3
34(1)	$Y_v(2\sqrt{2}x^{1/4})K_v(2\sqrt{2}x^{1/4})$	$-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma\left[s, s+1/2, s+v/2, s-v/2\right]_{s+(1-v)/2, (1+v)/2-s},$ $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} v /2$
34(2)	$Y_v(4\sqrt{2}x^{1/8})K_v(4\sqrt{2}x^{1/8})$	$-\frac{1}{8\pi\sqrt{2\pi}}\Gamma\left[s, s+1/2, s+1/4, s+3/4, s+v/4, s+(v+2)/4, s-v/4, s+(3-v)/4, (1+v)/4-s, (3+v)/4-s, s+(2-v)/4\right],$ $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} v /4$
34(3)	$Y_v(2\sqrt{2}x^{-1/4}) \times$ $\times K_v(2\sqrt{2}x^{-1/4})$	$-\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\Gamma\left[-s, 1/2-s, v/2-s, s+(1+v)/2, (1-v)/2-s, -v/2-s\right],$ $\operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} v /2$
35(1)	$I_v(\sqrt{x})K_v(\sqrt{x})$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left[s, s+v, 1/2-s\right]_{1+v-s},$ $-\operatorname{Re} v, 0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
35(2)	$I_v(2^4\sqrt{x})K_v(2^4\sqrt{x})$	$\frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}}\Gamma\left[s, s+1/2, s+v/2, (1+v)/2-s, 1+v/2-s, s+(v+1)/2, 1/4-s, 3/4-s\right],$ $0, -\operatorname{Re} v/2 < \operatorname{Re} s < 1/4$
35(4)	$I_v\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)K_v\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left[s+1/2, -s, v-s\right]_{s+v+1},$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} v, 0$
35(6)	$I_v(3x^{-1/6})K_v(3x^{-1/6})$	$\frac{1}{8\pi^2\sqrt{3\pi}}\Gamma_3\left[3s+1/2, -3s, v-3s\right]_{3s+v+1},$ $-1/6 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} v/3, 0$
36(1)	$I_v(\sqrt{x})K_\mu(\sqrt{x})$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left[s+(v+\mu)/2, s+(v-\mu)/2, 1/2-s, 1-s, 1+(\mu+v)/2-s\right],$ $ \operatorname{Re} \mu - \operatorname{Re} v < 2\operatorname{Re} s < 1$

1	2	3
36(2)	$I_v(2\sqrt[4]{x})K_\mu(2\sqrt[4]{x})$	$\frac{1}{4\pi\sqrt{2\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}s+(v+\mu)/4, s+(v+\mu+2)/4, \\ (2+v-\mu)/4-s, \\ s+(v-\mu)/4, s+(v-\mu+2)/4, 1/4-s, \\ 1+(v-\mu)/4-s, (2+\mu+v)/4-s, \\ 3/4-s, 1/2-s, 1-s \\ 1+(\mu+v)/4-s\end{matrix}\right],$ $ \operatorname{Re}\mu -\operatorname{Re}v<4\operatorname{Re}s<1$
36(3)	$I_v\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)K_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}s+1/2, s+1, (v+\mu)/2-s, \\ s+(v-\mu)/2+1, \\ (v-\mu)/2-s \\ s+(v+\mu)/2+1\end{matrix}\right],$ $-1<2\operatorname{Re}s<\operatorname{Re}v- \operatorname{Re}\mu $
37(1)	$[K_v(\sqrt{x})]^2$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left[\begin{matrix}s+v, s-v, s \\ s+1/2\end{matrix}\right], \operatorname{Re}s> \operatorname{Re}v $
37(2)	$[K_v(2\sqrt[4]{x})]^2$	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}s+v/2, s+(v+1)/2, s-v/2, \\ s+1/4, s+3/4 \\ s+(1-v)/2, s, s+1/2\end{matrix}\right], \operatorname{Re}s> \operatorname{Re}v /2$
37(4)	$\left[K_v\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^2$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left[\begin{matrix}v-s, -v-s, -s \\ 1/2-s\end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}s<- \operatorname{Re}v $
37(6)	$[K_v(3x^{-1/6})]^2$	$\frac{1}{8\pi\sqrt{3\pi}}\Gamma_3\left[\begin{matrix}v-3s, -v-3s, -3s \\ 1/2-3s\end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}s<- \operatorname{Re}v /3$
38(1)	$K_v(V\bar{x})K_{v+1}(V\bar{x})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left[\begin{matrix}s+v+1/2, s-1/2-v, s-1/2 \\ s\end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}s>1/2, 1/2+\operatorname{Re}v $
38(2)	$K_v(2\sqrt[4]{x})K_{v+1}(2\sqrt[4]{x})$	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}s+v/2+1/4, s+v/2+3/4, \\ s, s+1/2 \\ s-1/4-v/2, s+1/4-v/2, s-1/4, s+1/4\end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}s>1/4, 1/4+\operatorname{Re}v/2 $
38(4)	$K_v\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)K_{v+1}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\Gamma\left[\begin{matrix}v+1/2-s, -1/2-v-s, \\ -s \\ -1/2-s\end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}s<-1/2, - 1/2+\operatorname{Re}v $

1	2	3
38(6)	$K_v(3x^{-1/6}) K_{v+1}(3x^{-1/6})$	$\frac{1}{8\pi\sqrt{3\pi}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} v+1/2-3s, & -v-1/2-3s, \\ -3s & -1/2-3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < -1/6, - 1/6 + \operatorname{Re} v/3 $
39(1)	$K_v(\sqrt{x}) K_\mu(\sqrt{x})$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} (\mu+v)/2 + s, & s + (\mu-v)/2, \\ s, & s+1/2 \\ s + (v-\mu)/2, & s - (v+\mu)/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > (\operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} v)/2$
39(2)	$K_v(2^4\sqrt{x}) K_\mu(2^4\sqrt{x})$	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} (\mu+v)/4 + s, & s + (\mu+v+2)/4, \\ s, & s+1/2, & s+1/4, & s+3/4 \\ s + (\mu-v)/4, & s + (\mu-v+2)/4, & s + (v-\mu)/4, \\ s + (v-\mu+2)/4, & s - (v+\mu)/4, \\ s + (2-v-\mu)/4 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > (\operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} v)/4$
39(3)	$K_v\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) K_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} -s + (\mu+v)/2, & (\mu-v)/2 - s, \\ -s, & 1/2 - s \\ (v-\mu)/2 - s, & -(v+\mu)/2 - s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < -(\operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} v)/2$
40(1)	$[J_v(\sqrt{x})]^2 - [J_{-v}(\sqrt{x})]^2$	$-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin \pi v \Gamma \left[\begin{matrix} s+v, & s-v \\ s+1/2, & 1-s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 1$
40(2)	$[J_v(2^4\sqrt{x})]^2 - [J_{-v}(2^4\sqrt{x})]^2$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \pi v \Gamma \left[\begin{matrix} s+v/2, & s+(v+1)/2, \\ s+1/4, & s+3/4, \\ s-v/2, & s-(v-1)/2 \\ 1/2-s, & 1-s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} v /2 < \operatorname{Re} s < 1/2$
40(3)	$\left[J_v\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right]^2 -$ $-\left[J_{-v}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \right]^2$	$-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin \pi v \Gamma \left[\begin{matrix} v-s, & -v-s \\ 1/2-s, & s+1 \end{matrix} \right],$ $-1 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} v $

1	2	3
41(1)	$J_\mu(\sqrt{x})J_\nu(\sqrt{x}) -$ $-J_{-\mu}(\sqrt{x})J_{-\nu}(\sqrt{x})$	$-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{\mu+\nu}{2} \pi \Gamma \left[\begin{matrix} (\mu+\nu)/2+s, \\ s+1/2, \\ s-(\mu+\nu)/2, 1-s \\ 1+(\mu-\nu)/2-s, 1+(\nu-\mu)/2-s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re}(\mu+\nu) /2 < \operatorname{Re} s < 1$
41(2)	$J_\mu(2\sqrt[4]{x})J_\nu(2\sqrt[4]{x}) -$ $-J_{-\mu}(2\sqrt[4]{x})J_{-\nu}(2\sqrt[4]{x})$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \frac{\mu+\nu}{2} \pi \Gamma \left[\begin{matrix} (\mu+\nu)/4+s, \\ s+1/4, s+3/4, \\ (\mu+\nu+2)/4+s, s-(\mu+\nu)/4, \\ (2+\mu-\nu)/4-s, 1+(\mu-\nu)/4-s \\ s+(2-\mu-\nu)/4, 1/2-s, 1-s \\ (2+\nu-\mu)/4-s, 1+(\nu-\mu)/4-s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re}(\mu+\nu) /4 < \operatorname{Re} s < 1/2$
41(3)	$J_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)J_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) -$ $-J_{-\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)J_{-\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{\mu+\nu}{2} \pi \Gamma \left[\begin{matrix} (\mu+\nu)/2-s, \\ s+(\mu-\nu)/2+1, \\ -(\mu+\nu)/2-s, s+1 \\ s+(\nu-\mu)/2+1, 1/2-s \end{matrix} \right],$ $-1 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re}(\mu+\nu) /2$
42(1)	$J_\mu(\sqrt{x})J_\nu(\sqrt{x}) +$ $+J_{-\mu}(\sqrt{x})J_{-\nu}(\sqrt{x})$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\mu+\nu}{2} \pi \Gamma \left[\begin{matrix} s+(\mu+\nu)/2, \\ s, 1+(\mu-\nu)/2-s, \\ s-(\mu+\nu)/2, 1/2-s \\ 1+(\nu-\mu)/2-s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re}(\mu+\nu) /2 < \operatorname{Re} s < 1/2$
42(2)	$J_\mu(2\sqrt[4]{x})J_\nu(2\sqrt[4]{x}) +$ $+J_{-\mu}(2\sqrt[4]{x})J_{-\nu}(2\sqrt[4]{x})$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \frac{\mu+\nu}{2} \pi \Gamma \left[\begin{matrix} s+(\mu+\nu)/4, \\ s, s+1/2, \\ s+(\mu+\nu+2)/4, s-(\mu+\nu)/4, \\ (2+\mu-\nu)/4-s, 1+(\mu-\nu)/4-s, \\ s+(2-\mu-\nu)/4, 1/4-s, 3/4-s \\ (2+\nu-\mu)/4-s, 1+(\nu-\mu)/4-s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re}(\mu+\nu) /4 < \operatorname{Re} s < 1/4$
42(3)	$J_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)J_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) +$ $+J_{-\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)J_{-\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{\mu+\nu}{2} \pi \Gamma \left[\begin{matrix} -s+(\mu+\nu)/2, \\ -s, 1+(\mu-\nu)/2+s, \\ -s-(\mu+\nu)/2, 1/2+s \\ 1+(\nu-\mu)/2+s \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re}(\mu+\nu) /2$

1	2	3
43(1)	$J_v(\sqrt{x}) Y_\mu(\sqrt{x}) -$ $-J_\mu(\sqrt{x}) Y_v(\sqrt{x})$	$\frac{\sin \pi(v-\mu)}{\pi^{5/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\mu + v)/2, \\ 1 + (\mu + v)/2 - s \end{matrix} \right.$ $\left. s + (\mu - v)/2, s + (v - \mu)/2, 1/2 - s, 1 - s \right],$ $\operatorname{Re}(\mu - v)/2, (\operatorname{Re} v - \operatorname{Re} \mu)/2 < \operatorname{Re} s < 1/2$
43(2)	$J_v(2\sqrt[4]{x}) Y_\mu(2\sqrt[4]{x}) -$ $-J_\mu(2\sqrt[4]{x}) Y_v(2\sqrt[4]{x})$	$\frac{\sin(v-\mu)\pi}{4\sqrt[4]{2}\pi^{9/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\mu + v)/4, \\ (2 + \mu + v)/4 - s, \end{matrix} \right.$ $s + (\mu + v + 2)/4, s + (\mu - v)/4,$ $1 + (\mu + v)/4 - s$ $s + (\mu - v + 2)/4, s + (v - \mu)/4,$ $s + (v - \mu + 2)/4, 1/4 - s, 3/4 - s,$ $1/2 - s, 1 - s \left. \right], \operatorname{Re}(\mu - v)/4,$ $(\operatorname{Re} v - \operatorname{Re} \mu)/4 < \operatorname{Re} s < 1/4$
43(3)	$J_v\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) Y_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) -$ $-J_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) Y_v\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{\sin \pi(v-\mu)}{\pi^{5/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1/2, s + 1, \\ s + (\mu + v)/2 + 1 \end{matrix} \right.$ $\left. (\mu + v)/2 - s, (\mu - v)/2 - s, (v - \mu)/2 - s \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(v - \mu)/2, (\operatorname{Re} \mu - \operatorname{Re} v)/2$
44(1)	$J_v(\sqrt{x}) Y_\mu(\sqrt{x}) +$ $+J_\mu(\sqrt{x}) Y_v(\sqrt{x})$	$-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\mu + v)/2, s + (\mu - v)/2, \\ s, s + 1/2, 1 + (\mu + v)/2 - s \end{matrix} \right.$ $\left. s + (v - \mu)/2 \right], (\operatorname{Re} v - \operatorname{Re} \mu)/2,$ $\operatorname{Re}(\mu - v)/2 < \operatorname{Re} s < 1$
44(2)	$J_v(2\sqrt[4]{x}) Y_\mu(2\sqrt[4]{x}) +$ $+J_\mu(2\sqrt[4]{x}) Y_v(2\sqrt[4]{x})$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\mu + v)/4, s + (\mu + v + 2)/4, \\ s, s + 1/2, s + 1/4, s + 3/4, \end{matrix} \right.$ $s + (\mu - v)/4, s + (\mu - v + 2)/4, s + (v - \mu)/4,$ $(2 + \mu + v)/4 - s, 1 + (\mu + v)/4 - s$ $s + (v - \mu + 2)/4 \left. \right],$ $(\operatorname{Re} v - \operatorname{Re} \mu)/4, \operatorname{Re}(\mu - v)/4 < \operatorname{Re} s < 1/2$

1	2	3
44(3)	$J_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)Y_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) + J_\mu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)Y_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}(\mu+\nu)/2-s, & (\mu-\nu)/2-s, \\ s+(\mu+\nu)/2+1, & -s, & 1/2-s \\ & (\nu-\mu)/2-s\end{matrix}\right],$ $-1 < \operatorname{Re} s < (\operatorname{Re} \mu - \operatorname{Re} \nu)/2,$ $\operatorname{Re}(\nu - \mu)/2$
45(1)	$[J_\nu(\sqrt{x})]^2 - [Y_\nu(\sqrt{x})]^2$	$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}s, s+\nu, s-\nu \\ s+1/2, s+1/2-\nu, \\ 1/2+\nu-s\end{matrix}\right], \quad \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} s < 1$
45(2)	$[J_\nu(2\sqrt[4]{x})]^2 - [Y_\nu(2\sqrt[4]{x})]^2$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}s, s+1/2, s+\nu/2, \\ s+1/4, s+3/4, s+1/4-\nu/2, \\ s+(\nu+1)/2, s-\nu/2, s+(1-\nu)/2 \\ s+3/4-\nu/2, -s+1/4+\nu/2, \\ 3/4+\nu/2-s\end{matrix}\right], \quad \operatorname{Re} \nu /2 < \operatorname{Re} s < 1/2$
45(3)	$\left[J_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^2 - \left[Y_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]^2$	$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}-s, \nu-s, -\nu-s \\ s+\nu+1/2, 1/2-s, \\ 1/2-\nu-s\end{matrix}\right], \quad -1 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} \nu $
46(1)	$J_\nu(\sqrt{x})J_{-\nu}(\sqrt{x}) - Y_\nu(\sqrt{x})Y_{-\nu}(\sqrt{x})$	$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}s, s-\nu, s+\nu \\ s+1/2, s+1/2, 1/2-s\end{matrix}\right],$ $ \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} s < 1$
46(2)	$J_\nu(2\sqrt[4]{x})J_{-\nu}(2\sqrt[4]{x}) - Y_\nu(2\sqrt[4]{x})Y_{-\nu}(2\sqrt[4]{x})$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}s, s+1/2, s-\nu/2, \\ s+1/4, s+1/4, s+3/4, \\ s+(1-\nu)/2, s+\nu/2, s+(1+\nu)/2 \\ s+3/4, 1/4-s, 3/4-s\end{matrix}\right],$ $ \operatorname{Re} \nu /2 < \operatorname{Re} s < 1/2$
46(3)	$J_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)J_{-\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - Y_\nu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)Y_{-\nu}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}-s, \nu-s, -\nu-s \\ s+1/2, 1/2-s, 1/2-s\end{matrix}\right],$ $-1 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} \nu $
47(1)	$J_\nu(\sqrt{x})J_\mu(\sqrt{x}) - Y_\nu(\sqrt{x})Y_\mu(\sqrt{x})$	$-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left[\begin{matrix}s+(\mu+\nu)/2, s+(\mu-\nu)/2, \\ s, s+1/2, s+(1-\mu-\nu)/2, \\ s+(\nu-\mu)/2, s-(\mu+\nu)/2 \\ (1+\mu+\nu)/2-s\end{matrix}\right],$ $(\operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} \nu)/2 < \operatorname{Re} s < 1$

1	2	3
47(2)	$J_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) J_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) -$ $- Y_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) Y_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$-\frac{2}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} (\mu + \nu)/2 - s, & (\mu - \nu)/2 - s, \\ s + (1 + \mu + \nu)/2, & -s, \\ (\nu - \mu)/2 - s, & -(\mu + \nu)/2 - s \\ 1/2 - s, & (1 - \mu - \nu)/2 - s \end{matrix} \right],$ $-1 < \operatorname{Re} s < -(\operatorname{Re} \nu + \operatorname{Re} \mu)/2$
48(1)	$J_\nu(\sqrt{x}) J_\mu(\sqrt{x}) +$ $+ Y_\nu(\sqrt{x}) Y_\mu(\sqrt{x})$	$\pi^{-5/2} \Gamma [s + (\mu + \nu)/2, s - (\mu + \nu)/2,$ $1/2 - s, 1 - s] \left\{ \cos \pi \nu \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\nu - \mu)/2 \\ 1 + (\nu - \mu)/2 - s \end{matrix} \right] + \right.$ $\left. + \cos \mu \pi \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\mu - \nu)/2 \\ 1 + (\mu - \nu)/2 - s \end{matrix} \right] \right\},$ $(\operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} \nu)/2 < \operatorname{Re} s < 1/2$
48(2)	$J_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) J_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) +$ $+ Y_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) Y_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\pi^{-5/2} \Gamma [s + 1/2, s + 1, (\mu + \nu)/2 - s,$ $-(\mu + \nu)/2 - s] \left\{ \cos \pi \nu \times \right.$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} (\nu - \mu)/2 - s \\ s + 1 + (\nu - \mu)/2 \end{matrix} \right] +$ $\left. + \cos \mu \pi \Gamma \left[\begin{matrix} (\mu - \nu)/2 - s \\ s + 1 + (\mu - \nu)/2 \end{matrix} \right] \right\},$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < -(\operatorname{Re} \mu + \operatorname{Re} \nu)/2$
49(1)	$I_\mu(\sqrt{x}) I_\nu(\sqrt{x}) -$ $- I_{-\mu}(\sqrt{x}) I_{-\nu}(\sqrt{x})$	$-\frac{\sin \pi (\mu + \nu)}{\pi \sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\mu + \nu)/2, \\ 1 + (\mu - \nu)/2 - s, \\ s - (\mu + \nu)/2, 1/2 - s, 1 - s \\ 1 + (\nu - \mu)/2 - s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re}(\mu + \nu) /2 < \operatorname{Re} s < 1/2$
49(2)	$I_\mu(2\sqrt[4]{x}) I_\nu(2\sqrt[4]{x}) -$ $- I_{-\mu}(2\sqrt[4]{x}) I_{-\nu}(2\sqrt[4]{x})$	$-\frac{\sin \pi (\mu + \nu)}{2\pi^2 \sqrt[4]{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\mu + \nu)/4, \\ (2 + \mu - \nu)/4 - s, \\ s + (\mu + \nu + 2)/4, s - (\mu + \nu)/4, \\ 1 + (\mu - \nu)/4 - s, (2 + \nu - \mu)/4 - s \\ s + (2 - \mu - \nu)/4, 1/4 - s, 3/4 - s, 1/2 - s, \\ 1 + (\nu - \mu)/4 - s \\ 1 - s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re}(\mu + \nu) /4 < \operatorname{Re} s < 1/4$
49(3)	$I_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) I_\nu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) -$ $- I_{-\mu} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) I_{-\nu} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$-\frac{\sin (\mu + \nu) \pi}{\pi \sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1/2, s + 1, \\ s + 1 + (\mu - \nu)/2, \\ (\mu + \nu)/2 - s, -(\mu + \nu)/2 - s \\ s + 1 + (\nu - \mu)/2 \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re}(\mu + \nu) /2$

1	2	3
50(1)	$K_v(2\sqrt[4]{4x}) [J_v(2\sqrt[4]{4x}) - J_{-v}(2\sqrt[4]{4x})]$	$-\frac{\sin(\pi v/2)}{2\sqrt[4]{\pi}} \Gamma\left[s, s+v/2, s-v/2\right]_{1/2-s},$ $\text{Res} > 1/2 \text{Re } v $
50(2)	$K_v(4\sqrt[8]{16x}) [J_v(4\sqrt[8]{16x}) - J_{-v}(4\sqrt[8]{16x})]$	$-\frac{\sin(\pi v/2)}{4\pi\sqrt[8]{2\pi}} \Gamma\left[s, s+1/2, s+v/4, 1/4-s, 3/4-s, s+(v+2)/4, s-v/4, s+(2-v)/4\right],$ $\text{Res} > \text{Re } v /4$
50(4)	$K_v(2\sqrt{2x^{-1/4}}) \times [J_v(2\sqrt{2x^{-1/4}}) - J_{-v}(2\sqrt{2x^{-1/4}})]$	$-\frac{\sin(\pi v/2)}{2\sqrt[4]{\pi}} \Gamma\left[-s, v/2-s, -v/2-s\right]_{s+1/2},$ $\text{Res} < -1/2 \text{Re } v $
50(6)	$K_v(6\sqrt{2x^{-1/12}}) \times [J_v(6\sqrt{2x^{-1/12}}) - J_{-v}(6\sqrt{2x^{-1/12}})]$	$-\frac{\sin(\pi v/2)}{8\pi^2\sqrt[3]{3\pi}} \Gamma_3\left[-3s, v/2-3s, 3s+1/2, -v/2-3s\right], \text{Res} < - \text{Re } v /6$
51(1)	$K_v(2\sqrt[4]{4x}) [J_v(2\sqrt[4]{4x}) + J_{-v}(2\sqrt[4]{4x})]$	$\frac{\cos(\pi v/2)}{2\sqrt[4]{\pi}} \Gamma\left[s+1/2, s+v/2, s-v/2\right]_{1-s},$ $\text{Res} > \text{Re } v /2$
51(2)	$K_v(4\sqrt[8]{2x^{1/8}}) \times [J_v(4\sqrt[8]{2x^{1/8}}) + J_{-v}(4\sqrt[8]{2x^{1/8}})]$	$\frac{\cos(\pi v/2)}{4\pi\sqrt[8]{2\pi}} \Gamma\left[s+1/4, s+3/4, s+v/4, 1/2-s, 1-s, s+(v+2)/4, s-v/4, s+(2-v)/4\right],$ $\text{Res} > \text{Re } v /4$
51(4)	$K_v(2\sqrt{2x^{-1/4}}) \times [J_v(2\sqrt{2x^{-1/4}}) + J_{-v}(2\sqrt{2x^{-1/4}})]$	$\frac{\cos(\pi v/2)}{2\sqrt[4]{\pi}} \Gamma\left[1/2-s, v/2-s, -v/2-s\right]_{s+1},$ $\text{Res} < - \text{Re } v /2$
51(6)	$K_v(6\sqrt{2x^{-1/12}}) \times [J_v(6\sqrt{2x^{-1/12}}) + J_{-v}(6\sqrt{2x^{-1/12}})]$	$\frac{\cos(\pi v/2)}{8\pi^2\sqrt[3]{3\pi}} \Gamma_3\left[1/2-3s, v/2-3s, 3s+1, -v/2-3s\right], \text{Res} < - \text{Re } v /6$
52(1)	$K_v(2\sqrt{2x^{1/4}}) [\cos(\pi v/2) \times J_v(2\sqrt{2x^{1/4}}) - \sin(\pi v/2) Y_v(2\sqrt{2x^{1/4}})]$	$\frac{1}{4\sqrt[4]{\pi}} \Gamma\left[s+1/2, s+v/2, s-v/2\right]_{1-s},$ $\text{Res} > \text{Re } v /2$

1	2	3
52(2)	$K_v(2\sqrt{2x^{1/4}}) [\sin(\pi v/2) \times$ $\times J_v(2\sqrt{2x^{1/4}}) +$ $+ \cos(\pi v/2) Y_v(2\sqrt{2x^{1/4}})]$	$-\frac{1}{4\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+v/2, s-v/2 \\ 1/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s > \text{Re } v /2$
53(1)	$\frac{2}{\pi} K_0(4\sqrt[4]{x}) - Y_0(4\sqrt[4]{x})$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s, s \\ 1/2-s, 1/2-s \end{matrix} \right], \quad 0 < \text{Re } s < 3/8$
53(2)	$\frac{2}{\pi} K_0(8\sqrt[8]{x}) - Y_0(8\sqrt[8]{x})$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s, s+1/2 \\ 1/4-s, 3/4-s, 1/4-s, 3/4-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Re } s < 3/16$
53(3)	$\frac{2}{\pi} [K_0(4x^{-1/4}) -$ $- Y_0(4x^{-1/4})]$	$\Gamma \left[\begin{matrix} -s, -s \\ s+1/2, s+1/2 \end{matrix} \right], \quad -3/8 < \text{Re } s < 0$
54(1)	$K_\mu(\sqrt{x}) I_v(\sqrt{x}) -$ $- K_v(\sqrt{x}) I_\mu(\sqrt{x})$	$\pi^{-1/2} \sin \frac{\mu-v}{2} \pi \Gamma \left[\begin{matrix} s+(\mu+v)/2, \\ s+1/2, \\ s+(v-\mu)/2, s+(\mu-v)/2, 1-s \\ 1+(\mu+v)/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re}(\mu-v)/2, (\text{Re } v - \text{Re } \mu)/2 < \text{Re } s < 1$
54(2)	$K_\mu(2\sqrt[4]{x}) I_v(2\sqrt[4]{x}) -$ $- K_v(2\sqrt[4]{x}) I_\mu(2\sqrt[4]{x})$	$(2\pi)^{-3/2} \sin \frac{\mu-v}{2} \pi \Gamma \left[\begin{matrix} s+(\mu+v)/4, \\ s+1/4, s+3/4, \\ s+(\mu+v+2)/4, s+(v-\mu)/4, \\ (2+\mu+v)/4-s, 1+(\mu+v)/4-s \\ s+(v-\mu+2)/4, s+(\mu-v)/4, \\ s+(\mu-v+2)/4, 1/2-s, 1-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re}(\mu-v)/4, (\text{Re } v - \text{Re } \mu)/4 < \text{Re } s < 1/2$
54(3)	$K_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) I_v \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) -$ $- K_v \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) I_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\pi^{-1/2} \sin \frac{\mu-v}{2} \pi \Gamma \left[\begin{matrix} (\mu+v)/2-s, \\ s+1+(\mu+v)/2, \\ (v-\mu)/2-s, (\mu-v)/2-s, s+1 \\ 1/2-s \end{matrix} \right],$ $-1 < \text{Re } s < \text{Re}(v-\mu)/2,$ $(\text{Re } \mu - \text{Re } v)/2$
55(1)	$K_v(\sqrt{x}) [I_v(\sqrt{x}) +$ $+ I_{-v}(\sqrt{x})]$	$\frac{\cos \pi v}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+v, s-v, 1/2-s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $ \text{Re } v < \text{Re } s < 1/2$

1	2	3
55(2)	$K_v(2\sqrt[4]{x}) [I_v(2\sqrt[4]{x}) + I_{-v}(2\sqrt[4]{x})]$	$\frac{\cos \pi v}{2\pi\sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + v/2, s + (v+1)/2, \\ 1/2 - s, 1 - s \\ s - v/2, s + (1-v)/2, 1/4 - s, 3/4 - s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} v / 2 < \operatorname{Re} s < 1/4$
55(4)	$K_v \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left[I_v \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) + I_{-v} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right]$	$\frac{\cos \pi v}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1/2, -v - s, v - s \\ s + 1 \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} v $
55(6)	$K_v(3x^{-1/6}) [I_v(3x^{-1/6}) + I_{-v}(3x^{-1/6})]$	$\frac{\cos \pi v}{4\pi^2\sqrt{3\pi}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+1/2, -v-3s, v-3s \\ 3s+1 \end{matrix} \right],$ $-1/6 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} v / 3$
56(1)	$K_\mu(\sqrt{x}) I_v(\sqrt{x}) + K_v(\sqrt{x}) I_\mu(\sqrt{x})$	$\pi^{-1/2} \cos \frac{\mu-v}{2} \pi \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\mu+v)/2, \\ s, 1 + (\mu+v)/2 - s \\ s + (\mu-v)/2, s + (v-\mu)/2, 1/2 - s \end{matrix} \right],$ $(\operatorname{Re} v - \operatorname{Re} \mu) / 2,$ $\operatorname{Re}(\mu - v) / 2 < \operatorname{Re} s < 1/2$
56(2)	$K_\mu(2\sqrt[4]{x}) I_v(2\sqrt[4]{x}) + K_v(2\sqrt[4]{x}) I_\mu(2\sqrt[4]{x})$	$(2\pi)^{-3/2} \cos \frac{\mu-v}{2} \pi \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\mu+v)/4, \\ s, s + 1/2, \\ s + (\mu+v+2)/4, s + (\mu-v)/4, \\ (2 + \mu + v)/4 - s, 1 + (\mu+v)/4 - s, \\ s + (\mu-v+2)/4, s + (v-\mu)/4, \\ s + (v-\mu+2)/4, 1/4 - s, 3/4 - s \end{matrix} \right],$ $(\operatorname{Re} v - \operatorname{Re} \mu) / 4, \operatorname{Re}(\mu - v) / 4 < \operatorname{Re} s < 1/4$
56(3)	$K_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) I_v \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) + K_v \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) I_\mu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\pi^{-1/2} \cos \frac{\mu-v}{2} \pi \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1/2, \\ s + (\mu+v)/2 + 1, \\ (\mu+v)/2 - s, (\mu-v)/2 - s, (v-\mu)/2 - s \\ -s \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(v - \mu) / 2,$ $(\operatorname{Re} \mu - \operatorname{Re} v) / 2$

1	2	3
57(1)	$\ker_v^2(2\sqrt[4]{2}\sqrt[4]{x} + \operatorname{kei}_v^2(2\sqrt[4]{2}x^{1/4}))$	$(8\sqrt[4]{\pi})^{-1}\Gamma[s, s+1/2, s+v/2, s-v/2],$ $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} v /2$
57(2)	$\ker_v^2(4\sqrt[4]{2}x^{1/8} + \operatorname{kei}_v^2(4\sqrt[4]{2}x^{1/8}))$	$2^{-11/2}\pi^{-5/2}\Gamma[s, s+1/4, s+1/2, s+3/4,$ $s+v/4, s+(v+2)/4, s-v/4, s+(2-v)/4],$ $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} v /4$
57(3)	$\ker_v^2(2\sqrt[4]{2}x^{-1/4} + \operatorname{kei}_v^2(2\sqrt[4]{2}x^{-1/4}))$	$(8\sqrt[4]{\pi})^{-1}\Gamma[-s, 1/2-s, v/2-s,$ $-v/2-s], \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} v /2$
58(1)	$J_v(2\sqrt{x}) - J_v(2\sqrt{x})$	$\frac{\sin \pi v}{2\pi^2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+v/2, 1-s, \\ 1+v/2-s \\ 1/2-s \end{matrix} \right], \quad -\operatorname{Re} v/2, 0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
58(2)	$J_v\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) - J_v\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{\sin \pi v}{2\pi^2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1, s+1/2, -s, \\ s+v/2+1 \\ 1/2-s, v/2-s \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < 0, \operatorname{Re} v/2$
59(1)	$J_v(2\sqrt{x}) + J_{-v}(2\sqrt{x})$	$2 \cos(\pi v/2) \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1-s \\ 1+v/2-s, 1-v/2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 3/4$
59(2)	$J_v(4\sqrt[4]{x}) + J_{-v}(4\sqrt[4]{x})$	$2 \cos(\pi v/2) \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/2-s, 1-s \\ 1+v/4-s, (2+v)/4-s, \\ (2-v)/4-s, 1-v/4-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 3/8$
59(3)	$J_v\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) + J_{-v}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$2 \cos(\pi v/2) \Gamma \left[\begin{matrix} s+1, -s \\ s+v/2+1, s-v/2+1 \end{matrix} \right],$ $-3/4 < \operatorname{Re} s < 0$
60(1)	$J_v(2\sqrt{x}) - J_{-v}(2\sqrt{x})$	$2 \sin(\pi v/2) \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, 1/2-s \\ 1-v/2-s, 1+v/2-s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} s < 1/2$

1	2	3
60(2)	$J_\nu(4\sqrt[4]{x}) - J_{-\nu}(4\sqrt[4]{x})$	$2 \sin(\pi\nu/2) \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/4, s+3/4, 1/4-s, \\ (2-\nu)/4-s, 1-\nu/4-s, \\ 3/4-s \\ (2+\nu)/4-s, 1+\nu/4-s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} s < 1/4$
60(3)	$J_\nu\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) - J_{-\nu}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$2 \sin(\pi\nu/2) \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, 1/2-s \\ s+1-\nu/2, s+1+\nu/2 \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} s < 1/2$
61(1)	$I_\nu(2\sqrt{x}) - L_\nu(2\sqrt{x})$	$\frac{1}{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s+(\nu+1)/2, s+\nu/2, (1-\nu)/2-s \\ 1+\nu/2-s \end{matrix} \right],$ $-\operatorname{Re} \nu/2 < \operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} \nu)/2$
61(2)	$I_\nu(4\sqrt[4]{x}) - L_\nu(4\sqrt[4]{x})$	$\frac{1}{2\pi^2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+(\nu+1)/4, s+(\nu+3)/4, \\ (2+\nu)/4-s, 1+\nu/4-s \\ s+\nu/4, s+(\nu+2)/4, (1-\nu)/4-s, \\ (3-\nu)/4-s \end{matrix} \right],$ $-\operatorname{Re} \nu/4 < \operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} \nu)/4$
61(3)	$I_\nu\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) - L_\nu\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{1}{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s+(1-\nu)/2, \nu/2-s, (\nu+1)/2-s \\ s+\nu/2+1 \end{matrix} \right],$ $(\operatorname{Re} \nu - 1)/2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \nu/2$
62(1)	$I_{-\nu}(2\sqrt{x}) - L_\nu(2\sqrt{x})$	$\frac{\cos \pi\nu}{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s+(\nu+1)/2, s-\nu/2, \\ 1-\nu/2-s \\ (1-\nu)/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \nu/2, -(1+\operatorname{Re} \nu)/2 < \operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} \nu)/2$
62(2)	$I_{-\nu}(4\sqrt[4]{x}) - L_\nu(4\sqrt[4]{x})$	$\frac{\cos \pi\nu}{2\pi^2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+(\nu+1)/4, s+(\nu+3)/4, \\ (2-\nu)/4-s, 1-\nu/4-s \\ s-\nu/4, s+(2-\nu)/4, (1-\nu)/4-s, \\ (3-\nu)/4-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \nu/4,$ $-(1+\operatorname{Re} \nu)/4 < \operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} \nu)/4$

1	2	3
62(3)	$I_{-\nu} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right) - L_{\nu} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right)$	$\frac{\cos \pi \nu}{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s + (1-\nu)/2, -\nu/2 - s, \\ s - \nu/2 + 1 \end{matrix} \right. \\ \left. (\nu+1)/2 - s \right],$ $(\operatorname{Re} \nu - 1)/2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} \nu/2, (1 + \operatorname{Re} \nu)/2$
63(1)	$H_{\nu}(2\sqrt{x}) - Y_{\nu}(2\sqrt{x})$	$\pi^{-2} \cos \pi \nu \Gamma [s + (\nu+1)/2, s + \nu/2, s - \nu/2, \\ (1-\nu)/2 - s],$ $ \operatorname{Re} \nu /2 < \operatorname{Re} s < (1 - \operatorname{Re} \nu)/2$
63(2)	$H_{\nu}(4\sqrt[4]{x}) - Y_{\nu}(4\sqrt[4]{x})$	$(4\pi^4)^{-1} \cos \pi \nu \Gamma [s + (\nu+1)/4, s + (\nu+3)/4, \\ s + \nu/4, s + (\nu+2)/4, s - \nu/4, \\ s + (2-\nu)/4, (1-\nu)/4 - s, (3-\nu)/4 - s],$ $ \operatorname{Re} \nu /4 < \operatorname{Re} s < (1 - \operatorname{Re} \nu)/4$
63(3)	$H_{\nu} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right) - Y_{\nu} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right)$	$\pi^{-2} \cos \pi \nu \Gamma [s + (1-\nu)/2, -\nu/2 - s, \\ \nu/2 - s, (\nu+1)/2 - s],$ $(\operatorname{Re} \nu - 1)/2 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} \nu /2$

10. Ортогональные многочлены

1(1)	$P_n(2x-1) H(1-x)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s, s \\ s+n+1, s-n \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0, n=0, 1, 2, \dots$
1(2)	$P_n(2\sqrt{x}-1) H(1-x)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s, s, s+1/2, s+1/2 \\ s+(n+1)/2, s+n/2+1, s-n/2, \\ s+(1-n)/2 \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s > 0, n=0, 1, 2, \dots$
1(4)	$P_n \left(\frac{2}{x} - 1 \right) H(x-1)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} -s, -s \\ n+1-s, -n-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < 0, n=0, 1, 2, \dots$
1(6)	$P_n \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right) H(x-1)$	$\Gamma_3 \left[\begin{matrix} -3s, -3s \\ -3s+n+1, -3s-n \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < 0,$ $n=0, 1, 2, \dots$
2(1)	$P_n(2x-1) H(x-1)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} -n-s, 1+n-s \\ 1-s, 1-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < -n, n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
2(2)	$P_n(2\sqrt{x}-1)H(x-1)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} -n/2-s, (1-n)/2-s, (1+n)/2-s, \\ 1/2-s, 1/2-s, 1-s, 1-s \\ 1+n/2-s \end{matrix}\right], \text{Res} < -n/2,$ $n=0, 1, 2, \dots$
2(4)	$P_n\left(\frac{2}{x}-1\right)H(1-x)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} s-n, s+n+1 \\ s+1, s+1 \end{matrix}\right], \text{Res} > n,$ $n=0, 1, 2, \dots$
2(6)	$P_n\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}-1\right)H(1-x)$	$\Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s-n, 3s+n+1 \\ 3s+1, 3s+1 \end{matrix}\right],$ $\text{Res} > n/3, n=0, 1, 2, \dots$
3(1)	$P_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)(1+x)^{-n-1}$	$\frac{1}{(n!)^2} \Gamma\left[\begin{matrix} s, n+1-s, n+1-s \\ 1-s \end{matrix}\right],$ $0 < \text{Res} < n+1, n=0, 1, 2, \dots$
3(2)	$P_n\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)(1+\sqrt{x})^{-n-1}$	$\frac{2^{2n}}{\pi(n!)^2} \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2, (n+1)/2-s, \\ 1/2-s, 1-s \\ 1+n/2-s, (n+1)/2-s, 1+n/2-s \end{matrix}\right],$ $0 < \text{Res} < (n+1)/2, n=0, 1, 2, \dots$
3(3)	$P_n\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right) \times$ $\times (1+\sqrt[3]{x})^{-n-1}$	$\frac{3^{2n+1}}{4\pi^2(n!)^2} \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s, n+1-3s, n+1-3s \\ 1+3s \end{matrix}\right],$ $0 < \text{Res} < (n+1)/3, n=0, 1, 2, \dots$
4(1)	$P_n(\sqrt{x})H(1-x)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s+(1-n)/2, s+1+n/2 \end{matrix}\right],$ $\text{Res} > 0, n=0, 1, 2, \dots$
4(2)	$P_n(\sqrt[4]{x})H(1-x)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+1/4, s+3/4 \\ s+(1-n)/4, s+(3-n)/4, \\ s+(2+n)/4, s+1+n/4 \end{matrix}\right],$ $\text{Res} > 0, n=0, 1, 2, \dots$
4(4)	$P_n(1/\sqrt{x})H(x-1)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} -s, 1/2-s \\ (1-n)/2-s, 1+n/2-s \end{matrix}\right],$ $\text{Res} < 0, n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
4(6)	$P_n(x^{-1/6}) H(x-1)$	$\Gamma_3 \left[\begin{matrix} -3s, 1/2-3s \\ (1-n)/2-3s, 1+n/2-3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < 0, n = 0, 1, 2, \dots$
4(7)	$P_{2n}(\sqrt{x}) H(1-x)$	$(-1)^n \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/2+n-s \\ s+n+1, 1/2-s \end{matrix} \right] =$ $= -\Gamma \left[\begin{matrix} -n-s, 1/2+n-s \\ 1-s, 1/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0, n = 0, 1, 2, \dots$
4(8)	$P_{2n+1}(\sqrt{x}) H(1-x)$	$(-1)^n \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, 1+n-s \\ s+n+3/2, 1-s \end{matrix} \right] =$ $= -\Gamma \left[\begin{matrix} 1+n-s, -1/2-n-s \\ 1/2-s, 1-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > -1/2, n = 0, 1, 2, \dots$
5(1)	$P_n(\sqrt{x}) H(x-1)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} (1+n)/2-s, -n/2-s \\ 1-s, 1/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < -n/2, n = 0, 1, 2, \dots$
5(2)	$P_n(\sqrt[4]{x}) H(x-1)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} (1+n)/4-s, (3+n)/4-s, -n/4-s, \\ 1/2-s, 1-s, 1/4-s, 3/4-s \\ (2-n)/4-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < -n/4, n = 0, 1, 2, \dots$
5(4)	$P_n \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) H(1-x)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s+(1+n)/2, s-n/2 \\ s+1, s+1/2 \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s > n/2,$ $n = 0, 1, 2, \dots$
5(6)	$P_n(x^{-1/6}) H(1-x)$	$\Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+(1+n)/2, 3s-n/2 \\ 3s+1, 3s+1/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > n/6, n = 0, 1, 2, \dots$
5(7)	$P_{2n}(\sqrt{x}) H(x-1)$	$(-1)^n \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, -n-s \\ s+1/2-n, 1-s \end{matrix} \right] =$ $= -\Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s+n+1, s+1/2-n \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < -n, n = 0, 1, 2, \dots$

1	2	3
5(8)	$P_{2n+1}(\sqrt{x}) H(x-1)$	$(-1)^{n+1} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, 1+n-s \\ s+n+3/2, 1-s \end{matrix} \right] =$ $= -\Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s-n, s+n+3/2 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < -n-1/2, n=0, 1, 2, \dots$
6(1)	$P_{2n}(\sqrt{1-x}) (1-x)_+^{-1/2}$	$\frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(n+1/2) \Gamma \left[\begin{matrix} s, s \\ s+n+1/2, s-n \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 0, n=0, 1, 2, \dots$
6(2)	$P_{2n}(\sqrt{1-\sqrt{x}}) \times$ $\times (1-\sqrt{x})_+^{-1/2}$	$\frac{(-1)^n \sqrt{2}}{n!} \Gamma(n+1/2) \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ s+n/2+1/4, \\ s, s+1/2 \\ s+n/2+3/4, s-n/2, s+(1-n)/2 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 0, n=0, 1, 2, \dots$
6(4)	$P_{2n} \left(\sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) (x-1)_+^{-1/2}$	$\frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(n+1/2) \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2-s, 1/2-s \\ 1+n-s, \\ 1/2-n-s \end{matrix} \right], \text{Res} < 1/2, n=0, 1, 2, \dots$
6(6)	$P_{2n} \left(\sqrt{\frac{x^{1/3}-1}{x^{1/3}}} \right) \times$ $\times (\sqrt[3]{x}-1)_+^{-1/2}$	$\frac{(-1)^n \sqrt{3}}{n!} \Gamma(n+1/2) \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 1/2-3s, \\ 1+n-3s, \\ 1/2-3s \\ 1/2-n-3s \end{matrix} \right], \text{Res} < 1/6, n=0, 1, 2, \dots$
7(1)	$P_{2n}(i\sqrt{x-1}) (x-1)_+^{-1/2}$	$\frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(n+1/2) \Gamma \left[\begin{matrix} 1+n-s, \\ 1-s, 1-s \\ 1/2-n-s \end{matrix} \right], \text{Res} < 1/2-n,$ $n=0, 1, 2, \dots$
7(2)	$P_{2n}(i\sqrt{\sqrt{x}-1}) \times$ $\times (\sqrt{x}-1)_+^{-1/2}$	$\frac{(-1)^n \sqrt{2}}{n!} \Gamma(n+1/2) \Gamma \left[\begin{matrix} (1+n)/2-s, \\ 1/2-s, 1/2-s, \\ 1+n/2-s, 1/4-n/2-s, 3/4-n/2-s \\ 1-s, 1-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/4-n/2, n=0, 1, 2, \dots$
7(4)	$P_{2n} \left(i \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) \times$ $\times (1-x)_+^{-1/2}$	$\frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(n+1/2) \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2+n, s-n \\ s+1/2, s+1/2 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > n, n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
7(6)	$P_{2n} \left(i \frac{\sqrt{1-x^{1/3}}}{x^{1/6}} \right) \times$ $\times (1 - \sqrt[3]{x})_+^{-1/2}$	$\frac{(-1)^n \sqrt{3}}{n!} \Gamma(n+1/2) \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+1/2+n, \\ 3s-n \\ 3s+1/2 \end{matrix} \right], \text{ Res} > n/3, n=0, 1, 2, \dots$
8(1)	$P_{2n+1}(\sqrt{1-x}) H(1-x)$	$\frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(n+3/2) \Gamma \left[\begin{matrix} s, s \\ s+n+3/2, s-n \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 0, n=0, 1, 2, \dots$
8(2)	$P_{2n+1}(\sqrt{1-\sqrt{x}}) H(1-x)$	$\frac{(-1)^n}{n! \sqrt{2}} \Gamma(n+3/2) \Gamma \left[\begin{matrix} s, s, s+1/2, \\ s+n/2+3/4, \\ s+1/2 \\ s+n/2+5/4, s-n/2, s+1-n/2 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 0, n=0, 1, 2, \dots$
8(4)	$P_{2n+1} \left(\sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) H(x-1)$	$\frac{(-1)^n}{n!} \Gamma(n+3/2) \Gamma \left[\begin{matrix} -s, -s \\ n+3/2-s, -n-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 0, n=0, 1, 2, \dots$
8(6)	$P_{2n+1} \left(\sqrt{\frac{x^{1/3}-1}{x^{1/6}}} \right) \times$ $\times H(x-1)$	$\frac{(-1)^n}{n! \sqrt{3}} \Gamma(n+3/2) \Gamma_3 \left[\begin{matrix} -3s, -3s \\ n+3/2-3s, \\ -n-3s \end{matrix} \right], \text{ Res} < 0, n=0, 1, 2, \dots$
9(1)	$P_{2n+1}(i\sqrt{x-1}) H(x-1)$	$\frac{i(-1)^n}{n!} \Gamma(n+3/2) \Gamma \left[\begin{matrix} -1/2-n-s, \\ 1-s, 1-s \\ 1+n-s \end{matrix} \right], \text{ Res} < -1/2-n, n=0, 1, 2, \dots$
9(2)	$P_{2n+1} \left(i \sqrt{\sqrt{x}-1} \right) \times$ $\times H(x-1)$	$\frac{i(-1)^n}{n! \sqrt{2}} \Gamma(n+3/2) \Gamma \left[\begin{matrix} -1/4-n/2-s, \\ 1/2-s, 1/2-s, \\ 1/4-n/2-s, (1+n)/2-s, 1+n/2-s \\ 1-s, 1-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < -1/4-n/2, n=0, 1, 2, \dots$
9(4)	$P_{2n+1} \left(i \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) \times$ $\times H(1-x)$	$\frac{i(-1)^n}{n!} \Gamma(n+3/2) \Gamma \left[\begin{matrix} s-1/2-n, \\ s+1, s+1 \\ s+n+1 \end{matrix} \right], \text{ Res} > n+1/2,$ $n=0, 1, 2, \dots$
9(6)	$P_{2n+1} \left(i \frac{\sqrt{1-x^{1/3}}}{x^{1/6}} \right) \times$ $\times H(1-x)$	$\frac{i(-1)^n}{n! \sqrt{3}} \Gamma(n+3/2) \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-1/2-n, \\ 3s+1, 3s+1 \\ 3s+n+1 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > n/3+1/6, n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
10(1)	$P_n \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) \times$ $\times (1+x)^{-(n+1)/2}$	$\frac{2^n}{n! \sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, (n+1)/2-s, 1+n/2-s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < (n+1)/2, n = 0, 1, 2, \dots$
10(2)	$P_n \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \right) \times$ $\times (1+\sqrt{x})^{-(n+1)/2}$	$\frac{2^{2n-1/2}}{n! \pi^{3/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, (n+1)/4-s, \\ 1/2-s, 1-s \\ (n+3)/4-s, (2+n)/4-s, 1+n/4-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < (n+1)/4, n = 0, 1, 2, \dots$
10(4)	$P_n \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} \right) \times$ $\times (x+1)^{-(n+1)/2}$	$\frac{2^n}{n! \sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, (n+1)/2-s \\ s+(1-n)/2 \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < (n+1)/2, n = 0, 1, 2, \dots$
10(6)	$P_n \left(\frac{x^{1/6}}{\sqrt{1+x^{1/3}}} \right) \times$ $\times (1+\sqrt[3]{x})^{-(n+1)/2}$	$\frac{2^{n-2} 3^{n+1/2}}{n! \pi^{5/2}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s, 3s+1/2, (n+1)/2-3s \\ 3s+(1-n)/2 \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < (n+1)/6, n = 0, 1, 2, \dots$
11(1)	$P_n \left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}} \right) H(1-x)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s-n/2, s+(n+1)/2 \\ s+(1-n)/2, s+1+n/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > n/2, n = 0, 1, 2, \dots$
11(2)	$P_n \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2x^{1/4}} \right) H(1-x)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s-n/4, s+(2-n)/4, s+(n+1)/4, \\ s+(1-n)/4, s+(3-n)/4, \\ s+(n+3)/4 \\ s+(2+n)/4, s+1+n/4 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > n/4, n = 0, 1, 2, \dots$
11(4)	$P_n \left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}} \right) H(x-1)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} -n/2-s, (n+1)/2-s \\ (1-n)/2-s, 1+n/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < -n/2, n = 0, 1, 2, \dots$
11(6)	$P_n \left(\frac{1+\sqrt[3]{x}}{2x^{1/6}} \right) H(x-1)$	$\Gamma_3 \left[\begin{matrix} -n/2-3s, (n+1)/2-3s \\ (1-n)/2-3s, (2+n)/2-3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < -n/6, n = 0, 1, 2, \dots$
12(1)	$P_n \left(\frac{2+x}{2\sqrt{1+x}} \right) \times$ $\times (1+x)^{-(n+1)/2}$	$\frac{1}{n! \sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/2-s, 1+n-s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2, n = 0, 1, 2, \dots$

1	2	3
12(2)	$P_n \left(\frac{2 + \sqrt{x}}{2 \sqrt{1 + \sqrt{x}}} \right) \times$ $\times (1 + \sqrt{x})^{-(n+1)/2}$	$\frac{2^{n-1/2}}{n! \pi^{3/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/4-s, 3/4-s, \\ 1/2-s, 1-s \\ (1+n)/2-s, 1+n/2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4, n = 0, 1, 2, \dots$
12(4)	$P_n \left(\frac{1 + 2x}{2 \sqrt{x(1+x)}} \right) \times$ $\times (1+x)^{-(n+1)/2}$	$\frac{1}{n! \sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s-n/2, s+(n+1)/2, \\ s+(1-n)/2 \\ (n+1)/2-s \end{matrix} \right], n/2 < \operatorname{Re} s < (n+1)/2,$ $n = 0, 1, 2, \dots$
12(6)	$P_n \left(\frac{1 + 2 \sqrt[3]{x}}{2 x^{1/6} \sqrt{1+x^{1/3}}} \right) \times$ $\times (1 + \sqrt[3]{x})^{-(n+1)/2}$	$\frac{3^{n+1/2}}{4n! \pi^{5/2}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-n/2, 3s+(n+1)/2, \\ 3s+(1-n)/2 \\ (n+1)/2-3s \end{matrix} \right],$ $n/6 < \operatorname{Re} s < (n+1)/6, n = 0, 1, 2, \dots$
13(1)	$P_n(\sqrt{1+x}) Q_n(\sqrt{1+x})$	$\frac{1}{2 \sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s, 1/2-s, 1+n-s \\ s+n+1, 1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2, n = 0, 1, 2, \dots$
13(2)	$P_n(\sqrt{1+\sqrt{x}}) \times$ $\times Q_n(\sqrt{1+\sqrt{x}})$	$\frac{1}{4\pi \sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s, s+1/2, \\ s+(n+1)/2, s+1+n/2, \\ 1/4-s, 3/4-s, (1+n)/2-s, 1+n/2-s \\ 1/2-s, 1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4, n = 0, 1, 2, \dots$
13(3)	$P_n \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) \times$ $\times Q_n \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} \right)$	$\frac{1}{2 \sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, s+n+1, -s, -s \\ s+1, n+1-s \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < 0, n = 0, 1, 2, \dots$
14(1)	$(1-x)_+^{-1/2} T_n(2x-1)$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s+1/2-n, s+1/2+n \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0, n = 0, 1, 2, \dots$
14(2)	$(1-\sqrt{x})_+^{-1/2} T_n(2\sqrt{x}-1)$	$\sqrt{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+1/4, s+3/4 \\ s+1/4-n/2, s+3/4-n/2, \\ s+1/4+n/2, s+3/4+n/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0, n = 0, 1, 2, \dots$

1	2	3
14(4)	$(x-1)_+^{-1/2} T_n(2/x-1)$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2-s, 1-s \\ 1-n-s, 1+n-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/2, n=0, 1, 2, \dots$
14(6)	$(\sqrt[3]{x}-1)_+^{-1/2} \times$ $\times T_n(2/\sqrt[3]{x}-1)$	$\sqrt{3\pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 1/2-3s, 1-3s \\ 1-n-3s, 1+n-3s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/6, n=0, 1, 2, \dots$
15(1)	$(x-1)_+^{-1/2} T_n(2x-1)$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2+n-s, 1/2-n-s \\ 1-s, 1/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/2-n, n=0, 1, 2, \dots$
15(2)	$(\sqrt{x}-1)_+^{-1/2} T_n(2\sqrt{x}-1)$	$\sqrt{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/4+n/2-s, 3/4+n/2-s, \\ 1/2-s, 1-s, 1/4-s, 3/4-s \\ 1/4-n/2-s, 3/4-n/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/4-n/2, n=0, 1, 2, \dots$
15(4)	$(1-x)_+^{-1/2} T_n\left(\frac{2}{x}-1\right)$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s+n, s-n \\ s+1/2, s \end{matrix} \right], \text{Res} > n,$ $n=0, 1, 2, \dots$
15(6)	$(1-\sqrt[3]{x})_+^{-1/2} \times$ $\times T_n(2/\sqrt[3]{x}-1)$	$\sqrt{3\pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+n, 3s-n \\ 3s, 3s+1/2 \end{matrix} \right], \text{Res} > n/3,$ $n=0, 1, 2, \dots$
16(1)	$(1+x)^{-n} T_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$	$\frac{2^{2n-1}}{(2n-1)!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, n-s, n+1/2-s \\ 1/2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < n, n=1, 2, 3, \dots$
16(2)	$(1+\sqrt{x})^{-n} T_n\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$	$\frac{2^{4n-2}}{\pi (2n-1)!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, n/2-s, \\ 1/4-s, 3/4-s \\ (n+1)/2-s, n/2+1/4-s, \\ n/2+3/4-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < n/2, n=1, 2, 3, \dots$
16(3)	$(1+\sqrt[3]{x})^{-n} \times$ $\times T_n\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right)$	$\frac{6^{2n}}{8\pi^2 (2n-1)!} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s, n-3s, \\ 1/2-3s \\ n+1/2-3s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < n/3, n=1, 2, 3, \dots$

1	2	3
17(1)	$(x-1)_+^{-1/2} T_n(8x^2-8x+1)$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2-2n-s, 1/2+2n-s \\ 1-s, 1/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/2-2n, \quad n=0, 1, 2, \dots$
17(2)	$(\sqrt{x}-1)_+^{-1/2} T_n(8x-8\sqrt{x}+1)$	$\sqrt{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/4-n-s, 3/4-n-s, \\ 1/2-s, 1-s, 1/4-s, 3/4-s \\ 1/4+n-s, 3/4+n-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/4-n, \quad n=0, 1, 2, \dots$
17(4)	$(1-x)_+^{-1/2} T_n \left(\frac{x^2-8x+8}{x^2} \right)$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s-2n, s+2n \\ s, s+1/2 \end{matrix} \right], \quad \text{Res} > 2n,$ $n=0, 1, 2, \dots$
17(6)	$(1-\sqrt[3]{x})_+^{-1/2} \times$ $\times T_n(1-8x^{-1/3}+8x^{-2/3})$	$\sqrt{3\pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-2n, 3s+2n \\ 3s, 3s+1/2 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 2/3n, \quad n=0, 1, 2, \dots$
18(1)	$(1-x)_+^{-1/2} T_n(\sqrt{x})$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s+(n+1)/2, s+(1-n)/2 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$
18(2)	$(1-\sqrt{x})_+^{-1/2} T_n(\sqrt[4]{x})$	$\sqrt{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+1/4, s+3/4 \\ s+(1+n)/4, s+(3+n)/4, \\ s+(1-n)/4, s+(3-n)/4 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$
18(4)	$(x-1)_+^{-1/2} T_n(1/\sqrt{x})$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2-s, 1-s \\ 1+n/2-s, 1-n/2-s \end{matrix} \right],$ $ \text{Res} < 1/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
18(6)	$(\sqrt[3]{x}-1)_+^{-1/2} T_n(x^{-1/6})$	$\sqrt{3\pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 1/2-3s, 1-3s \\ 1+n/2-3s, 1-n/2-3s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/6, \quad n=0, 1, 2, \dots$
19(1)	$(x-1)_+^{-1/2} T_n(\sqrt{x})$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} (1+n)/2-s, (1-n)/2-s \\ 1/2-s, 1-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < (1-n)/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
19(2)	$(\sqrt{x}-1)_+^{-1/2} T_n(\sqrt[4]{x})$	$\sqrt{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} (1+n)/4-s, (3+n)/4-s, \\ 1/4-s, 3/4-s, 1/2-s, \\ (1-n)/4-s, (3-n)/4-s \end{matrix} \right],$ $\frac{1-s}{\text{Res}} < (1-n)/4, \quad n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
19(4)	$(1-x)_+^{-1/2} T_n \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s+n/2, s-n/2 \\ s, s+1/2 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > n/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
19(6)	$(1-\sqrt[3]{x})_+^{-1/2} T_n (x^{-1/6})$	$\sqrt{3\pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+n/2, 3s-n/2 \\ 3s, 3s+1/2 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > n/6, \quad n=0, 1, 2, \dots$
20(1)	$(1-x)_+^{-1/2} T_{2m} (\sqrt{1-x})$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/2+m-s \\ s+m+1/2, 1/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 0, \quad m=0, 1, 2, \dots$
20(2)	$(1-\sqrt{x})_+^{-1/2} \times$ $\times T_{2m} (\sqrt{1-\sqrt{x}})$	$\sqrt{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/4+m/2-s, \\ s+m/2+1/4, s+m/2+3/4, \\ 3/4+m/2-s \end{matrix} \right], \quad \text{Res} > 0, \quad m=0, 1, 2, \dots$ $1/4-s, 3/4-s$
20(4)	$(x-1)_+^{-1/2} T_{2m} \left(\sqrt{\frac{x-1}{x}} \right)$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s+m, 1/2-s \\ s, -s+m+1 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/2, \quad m=0, 1, 2, \dots$
20(6)	$T_{2m} \left(\frac{\sqrt{x^{1/3}-1}}{x^{1/6}} \right) \times$ $\times (\sqrt[3]{x}-1)_+^{-1/2}$	$\sqrt{3\pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+m, 1/2-3s \\ 3s, m+1-3s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/6, \quad m=0, 1, 2, \dots$
21(1)	$T_{2m} (i \sqrt{x-1}) (x-1)_+^{-1/2}$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, 1/2-m-s \\ s+1/2-m, 1-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/2-m, \quad m=0, 1, 2, \dots$
21(2)	$T_{2m} (i \sqrt{\sqrt{x}-1}) \times$ $\times (\sqrt{x}-1)_+^{-1/2}$	$\sqrt{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/4, s+3/4, 1/4-m/2-s, \\ s+1/4-m/2, s+3/4-m/2, \\ 3/4-m/2-s \end{matrix} \right], \quad \text{Res} < 1/4-m/2,$ $1/2-s, 1-s$ $m=0, 1, 2, \dots$
21(4)	$T_{2m} \left(i \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) \times$ $\times (1-x)_+^{-1/2}$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s-m, 1-s \\ s+1/2, 1-m-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > m, \quad m=0, 1, 2, \dots$
21(6)	$T_{2m} \left(i \frac{\sqrt{1-x^{1/3}}}{x^{1/6}} \right) \times$ $\times (1-\sqrt[3]{x})_+^{-1/2}$	$\sqrt{3\pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-m, 1-3s \\ 3s+1/2, 1-m-3s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > m/3, \quad m=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
22(1)	$T_{2m+1}(\sqrt{1-x})H(1-x)$	$\sqrt{\pi}(m+1/2)\Gamma\left[\begin{matrix}s, 1/2+m-s \\ s+m+3/2, 1/2-s\end{matrix}\right],$ $\text{Res} > 0, \quad m=0, 1, 2, \dots$
22(2)	$T_{2m+1}(\sqrt{1-\sqrt{x}})H(1-x)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}(m+1/2)\Gamma\left[\begin{matrix}s, s+1/2, \\ s+m/2+3/4, \\ 1/4+m/2-s, 3/4+m/2-s \\ s+m/2+5/4, 1/4-s, 3/4-s\end{matrix}\right],$ $\text{Res} > 0, \quad m=0, 1, 2, \dots$
22(4)	$T_{2m+1}\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)H(x-1)$	$\sqrt{\pi}(m+1/2)\Gamma\left[\begin{matrix}s+m+1/2, -s \\ s+1/2, m+3/2-s\end{matrix}\right],$ $\text{Res} < 0, \quad m=0, 1, 2, \dots$
22(6)	$T_{2m+1}\left(\frac{\sqrt{x^{1/3}-1}}{x^{1/6}}\right) \times$ $\times H(x-1)$	$\sqrt{\frac{\pi}{3}}(m+1/2)\Gamma_3\left[\begin{matrix}3s+m+1/2, \\ 3s+1/2, \\ -3s \\ m+3/2-3s\end{matrix}\right], \quad \text{Res} < 0, \quad m=0, 1, 2, \dots$
23(1)	$T_{2m+1}(i\sqrt{x-1})H(x-1)$	$i\sqrt{\pi}(m+1/2)\Gamma\left[\begin{matrix}s+1/2, -1/2-m-s \\ s+1/2-m, 1-s\end{matrix}\right],$ $\text{Res} < -1/2-m, \quad m=0, 1, 2, \dots$
23(2)	$T_{2m+1}(i\sqrt{\sqrt{x}-1}) \times$ $\times H(x-1)$	$i\sqrt{\frac{\pi}{2}}(m+1/2)\Gamma\left[\begin{matrix}s+1/4, s+3/4, \\ s+1/4-m/2, \\ -1/4-m/2-s, 1/4-m/2-s \\ s+3/4-m/2, 1/2-s, 1-s\end{matrix}\right],$ $\text{Res} < -1/4-m/2, \quad m=0, 1, 2, \dots$
23(4)	$T_{2m+1}\left(i\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) \times$ $\times H(1-x)$	$i\sqrt{\pi}(m+1/2)\Gamma\left[\begin{matrix}s-1/2-m, 1/2-s \\ s+1, 1/2-m-s\end{matrix}\right],$ $\text{Res} > m+1/2, \quad m=0, 1, 2, \dots$
23(6)	$T_{2m+1}\left(i\frac{\sqrt{1-x^{1/3}}}{x^{1/6}}\right) \times$ $\times H(1-x)$	$i\sqrt{\frac{\pi}{3}}(m+1/2)\Gamma_3\left[\begin{matrix}3s-1/2-m, \\ 3s+1, \\ 1/2-3s \\ 1/2-m-3s\end{matrix}\right], \quad \text{Res} > m/3+1/6,$ $m=0, 1, 2, \dots$
24(1)	$T_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)(1+x)^{-n/2}$	$\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\Gamma\left[\begin{matrix}s, n/2-s, (n+1)/2-s \\ 1/2-s\end{matrix}\right],$ $0 < \text{Res} < n/2, \quad n=1, 2, 3, \dots$

1	2	3
24(2)	$T_n \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \right) \times$ $\times (1+\sqrt{x})^{-n/2}$	$\frac{2^{2n-2}}{\pi(n-1)!} \Gamma \left[s, s+1/2, n/4-s, \right.$ $\left. 1/4-s, 3/4-s \right.$ $\left. (n+2)/4-s, (n+1)/4-s, (n+3)/4-s \right],$ $0 < \text{Res} < n/4, n=1, 2, 3, \dots$
24(4)	$T_n \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} \right) (1+x)^{-n/2}$	$\frac{2^{n-1}}{(n-1)!} \Gamma \left[s, s+1/2, n/2-s \right],$ $0 < \text{Res} < n/2, n=1, 2, 3, \dots$
24(6)	$T_n \left(\frac{x^{1/6}}{\sqrt{1+x^{1/3}}} \right) \times$ $\times (1+\sqrt[3]{x})^{-n/2}$	$\frac{6^n}{8\pi^2(n-1)!} \Gamma_3 \left[3s, 3s+1/2, n/2-3s \right],$ $0 < \text{Res} < n/6, n=1, 2, 3, \dots$
25(1)	$U_n(2x-1)(1-x)_+^{1/2}$	$\sqrt{\pi} \frac{n+1}{2} \Gamma \left[s, s-1/2 \right.$ $\left. s+3/2+n, s-1/2-n \right],$ $\text{Res} > 0, n=0, 1, 2, \dots$
25(2)	$U_n(2\sqrt{x}-1)(1-\sqrt{x})_+^{1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{n+1}{2} \Gamma \left[s, s+1/2, s-1/4, \right.$ $s+1/4$ $s+5/4+n/2, s-1/4-n/2,$ $s+1/4-n/2 \left. \right], \text{Res} > 0, n=0, 1, 2, \dots$
25(4)	$U_n \left(\frac{2}{x} - 1 \right) (x-1)_+^{1/2}$	$\sqrt{\pi} \frac{n+1}{2} \Gamma \left[-1/2-s, -1-s \right.$ $\left. 1+n-s, -1-n-s \right],$ $\text{Res} < -1/2, n=0, 1, 2, \dots$
25(6)	$U_n(2x^{-1/3}-1) \times$ $\times (\sqrt[3]{x}-1)_+^{1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{n+1}{2} \Gamma_3 \left[-1/2-3s, -1-3s \right.$ $\left. 1+n-3s, \right.$ $\left. -1-n-3s \right], \text{Res} < -1/6,$ $n=0, 1, 2, \dots$
26(1)	$U_n(2x-1)(x-1)_+^{1/2}$	$\sqrt{\pi} \frac{n+1}{2} \Gamma \left[3/2+n-s, -1/2-n-s \right.$ $\left. 1-s, 3/2-s \right],$ $\text{Res} < -1/2-n, n=0, 1, 2, \dots$
26(2)	$U_n(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1)_+^{1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{n+1}{2} \Gamma \left[3/4+n/2-s, \right.$ $1/2-s, 1-s, 3/4-s,$ $5/4+n/2-s, -1/4-n/2-s, 1/4-n/2-s \left. \right],$ $5/4-s$ $\text{Res} < -1/4-n/2, n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
26(4)	$U_n \left(\frac{2}{x} - 1 \right) (1-x)_+^{1/2}$	$\sqrt{\pi} \frac{n+1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+n+2, & s-n \\ s+3/2, & s+2 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > n, \quad n=0, 1, 2, \dots$
26(6)	$U_n (2x^{-1/3} - 1)(1 - \sqrt[3]{x})_+^{1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{n+1}{2} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+n+2, & 3s-n \\ 3s+3/2, & 3s+2 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > n/3, \quad n=0, 1, 2, \dots$
27(1)	$U_n \left(\frac{1-x}{1+x} \right) (1+x)^{-n-2}$	$\frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, & n+2-s, & n+3/2-s \\ 3/2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < n+2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
27(2)	$U_n \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right) \times$ $\times (1+\sqrt{x})^{-n-2}$	$\frac{2^{4n+1}}{\pi (2n+1)!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, & s+1/2, & 1+n/2-s, \\ 3/4-s, & 5/4-s \\ (3+n)/2-s, & n/2+3/4-s, & n/2+5/4-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < n/2+1, \quad n=0, 1, 2, \dots$
27(4)	$U_n \left(\frac{x-1}{x+1} \right) (1+x)^{-n-2}$	$\frac{2^{2n}}{(2n+1)!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, & s-1/2, & n+2-s \\ -n-1/2+s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < n+2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
27(6)	$U_n \left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1} \right) \times$ $\times (1+\sqrt[3]{x})^{-n-2}$	$\frac{9 \cdot 6^{2n}}{4\pi^2 (2n+1)!} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s, & 3s-1/2, & n+2-3s \\ 3s-n-1/2 \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < (n+2)/3, \quad n=0, 1, 2, \dots$
28(1)	$U_n (8x^2 - 8x + 1)(2x-1) \times$ $\times (x-1)_+^{1/2}$	$\sqrt{\pi} \frac{n+1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} 2n+5/2-s, \\ 1-s, & 3/2-s \\ -2n-3/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < -2n-3/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
28(2)	$U_n (8x - 8\sqrt{x} + 1) \times$ $\times (2\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 1)_+^{1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{n+1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} n+5/4-s, & n+7/4-s, \\ 1/2-s, & 1-s, & 3/4-s, \\ -n-3/4-s, & -n-1/4-s \\ 5/4-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < -n-3/4, \quad n=0, 1, 2, \dots$
28(4)	$U_n [(x^2 - 8x + 8)/x^2] \times$ $\times (2-x)(1-x)_+^{1/2}$	$\sqrt{\pi} \frac{n+1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+2n+4, & s-2n \\ s+5/2, & s+3 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 2n, \quad n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
28(6)	$U_n(1-8x^{-1/3}+8x^{-2/3}) \times$ $\times (2-\sqrt[3]{x})(1-\sqrt[3]{x})_+^{1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{n+1}{2} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+2n+4, 3s-2n \\ 3s+5/2, 3s+3 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 2n/3, \quad n=0, 1, 2, \dots$
29(1)	$U_n \left(\frac{x^2+1}{2x} \right) (1-x^2)_+$	$2(n+1) \Gamma \left[\begin{matrix} s+n+2, s-n \\ s+n+3, s+1-n \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > n, \quad n=0, 1, 2, \dots$
29(2)	$U_n \left(\frac{x^{2/k}+1}{2x^{1/k}} \right) (1-x^{2/k})_+$	$\frac{2}{k} (n+1) \Gamma \left[\begin{matrix} s+(n+2)/k, s-n/k \\ s+(n+2)/k+1, s+1-n/k \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > n/k, \quad n=0, 1, 2, \dots$ $k=1, 2, 3, \dots$
29(3)	$U_n \left(\frac{x^2+1}{2x} \right) (x^2-1)_+$	$2(n+1) \Gamma \left[\begin{matrix} n-s, -2-n-s \\ n+1-s, -1-n-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < -2-n, \quad n=0, 1, 2, \dots$
29(4)	$U_n \left(\frac{x^{2/k}+1}{2x^{1/k}} \right) (x^{2/k}-1)_+$	$\frac{2}{k} (n+1) \Gamma \left[\begin{matrix} n/k-s, -(n+2)/k-s \\ 1+n/k-s, 1-(n+2)/k-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < -(2+n)/k,$ $n=0, 1, 2, \dots, \quad k=1, 2, 3, \dots$
30(1)	$U_n \left(\frac{x^2+2x+2}{2(x+1)} \right) \times$ $\times \frac{x+2}{(x+1)^{n+2}}$	$\frac{1}{(2n+1)!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1-s, 3+2n-s \\ 2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < 1, \quad n=0, 1, 2, \dots$
30(2)	$U_n \left(\frac{x+2\sqrt{x}+2}{2(\sqrt{x}+1)} \right) \times$ $\times \frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^{n+2}}$	$\frac{2^{2n+1}}{\pi (2n+1)!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/2-s, \\ 3/2-s \\ 3/2+n-s, 2+n-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < 1/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
30(4)	$U_n \left(\frac{2x^2+2x+1}{2x(x+1)} \right) \times$ $\times \frac{2x+1}{(x+1)^{n+2}}$	$\frac{1}{(2n+1)!} \Gamma \left[\begin{matrix} s-n, s+n+2, n+1-s \\ s+1-n \end{matrix} \right],$ $n < \text{Res} < n+1, \quad n=0, 1, 2, \dots$
30(6)	$U_n \left(\frac{2x^{2/3}+2x^{1/3}+1}{2x^{1/3}(x^{1/3}+1)} \right) \times$ $\times \frac{2x^{1/3}+1}{(x^{1/3}+1)^{n+2}}$	$\frac{3^{2n+2}}{4\pi^2 (2n+1)!} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-n, 3s+n+2, \\ 3s+1-n \\ n+1-3s \end{matrix} \right], \quad n/3 < \text{Res} < (n+1)/3$ $n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
31(1)	$U_n(\sqrt{x}) (1-x)_+^{1/2}$	$\sqrt{\pi} \frac{n+1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s+(n+3)/2, s+(1-n)/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$
31(2)	$U_n(\sqrt[4]{x}) (1-\sqrt{x})_+^{1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{n+1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+1/4, \\ s+(n+3)/4, \\ s+3/4 \\ s+(n+5)/4, s+(1-n)/4, s+(3-n)/4 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$
31(4)	$U_n \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) (x-1)_+^{1/2}$	$\sqrt{\pi} \frac{n+1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} -s, -1/2-s \\ 1+n/2-s, -n/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < -1/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
31(6)	$U_n(x^{-1/6}) (\sqrt[3]{x}-1)_+^{1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{n+1}{2} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} -3s, -1/2-3s \\ 1+n/2-3s, -n/2-3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < -1/6, \quad n=0, 1, 2, \dots$
32(1)	$U_n(\sqrt{x}) (x-1)_+^{1/2}$	$\sqrt{\pi} \frac{n+1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} -(n+1)/2-s, \\ 1/2-s, 1-s \\ (n+1)/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < -(n+1)/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
32(2)	$U_n(\sqrt[4]{x}) (\sqrt{x}-1)_+^{1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{n+1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} -(n+1)/4-s, \\ 1/4-s, 3/4-s, 1/2-s, \\ (1-n)/4-s, (n+1)/4-s, (n+3)/4-s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < -(n+1)/4, \quad n=0, 1, 2, \dots$
32(4)	$U_n \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) (1-x)_+^{1/2}$	$\sqrt{\pi} \frac{n+1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s-n/2, 1+n/2+s \\ s+1, s+3/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > n/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
32(6)	$U_n(x^{-1/6}) (1-\sqrt[3]{x})_+^{1/2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{3}} \frac{n+1}{2} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-n/2, 1+n/2+3s \\ 3s+1, 3s+3/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > n/6, \quad n=0, 1, 2, \dots$
33(1)	$U_{2m}(\sqrt{1-x}) (1-x)_+^{-1/2}$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 3/2+m-s \\ s+1/2+m, 3/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0, \quad m=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
33(2)	$U_{2m} \left(\sqrt{1 - \sqrt{x}} \right) \times$ $\times (1 - \sqrt{x})_+^{-1/2}$	$\sqrt{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s + 1/2, 3/4 + m/2 - s, \\ s + 1/4 + m/2, s + 3/4 + m/2, \\ 5/4 + m/2 - s \\ 3/4 - s, 5/4 - s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$
33(4)	$U_{2m} \left(\sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) (x-1)_+^{-1/2}$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s + m + 1, 1/2 - s \\ s + 1, 1 + m - s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/2, \quad m = 0, 1, 2, \dots$
33(6)	$U_{2m} \left(\frac{\sqrt{x^{1/3} - 1}}{x^{1/6}} \right) \times$ $\times (\sqrt[3]{x} - 1)_+^{-1/2}$	$\sqrt{3\pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s + m + 1, 1/2 - 3s \\ 3s + 1, 1 + m - 3s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/6, \quad m = 0, 1, 2, \dots$
34(1)	$U_{2m} (i \sqrt{x-1}) (x-1)_+^{-1/2}$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s - 1/2, 1/2 - m - s \\ s - 1/2 - m, 1 - s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/2 - m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$
34(2)	$U_{2m} (i \sqrt{\sqrt{x} - 1}) \times$ $\times (\sqrt{x} - 1)_+^{-1/2}$	$\sqrt{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s - 1/4, s + 1/4, 1/4 - m/2 - s, \\ s - 1/4 - m/2, s + 1/4 - m/2, \\ 3/4 - m/2 - s \\ 1/2 - s, 1 - s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/4 - m/2, \quad m = 0, 1, 2, \dots$
34(4)	$U_{2m} \left(i \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) \times$ $\times (1-x)_+^{-1/2}$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s - m, -s \\ s + 1/2, -m - s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > m, \quad m = 0, 1, 2, \dots$
34(6)	$U_{2m} \left(i \frac{\sqrt{1 - x^{1/3}}}{x^{1/6}} \right) \times$ $\times (1 - \sqrt[3]{x})_+^{-1/2}$	$\sqrt{3\pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s - m, -3s \\ 3s + 1/2, -m - 3s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > m/3, \quad m = 0, 1, 2, \dots$
35(1)	$U_{2m+1} (\sqrt{1-x}) H(1-x)$	$\sqrt{\pi} (m+1) \Gamma \left[\begin{matrix} s, 3/2 + m - s \\ s + 3/2 + m, 3/2 - s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$
35(2)	$U_{2m+1} (\sqrt{1 - \sqrt{x}}) H(1-x)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} (m+1) \Gamma \left[\begin{matrix} s, s + 1/2, \\ s + 3/4 + m/2, \\ 3/4 + m/2 - s, 5/4 + m/2 - s \\ s + 5/4 + m/2, 3/4 - s, 5/4 - s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots$

1	2	3
35(4)	$U_{2m+1} \left(\sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) \times$ $\times H(x-1)$	$\sqrt{\pi} (m+1) \Gamma \left[\begin{matrix} s+m+3/2, -s \\ s+3/2, 3/2+m-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 0, \quad m=0, 1, 2, \dots$
35(6)	$U_{2m+1} \left(\frac{\sqrt{x^{1/3}-1}}{x^{1/6}} \right) \times$ $\times H(x-1)$	$\sqrt{\frac{\pi}{3}} (m+1) \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+m+3/2, -3s \\ 3s+3/2, 3/2+m-3s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 0, \quad m=0, 1, 2, \dots$
36(1)	$U_{2m+1} (i \sqrt{x-1}) \times$ $\times H(x-1)$	$i \sqrt{\pi} (m+1) \Gamma \left[\begin{matrix} s-1/2, -1/2-m-s \\ s-1/2-m, 1-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < -1/2-m, \quad m=0, 1, 2, \dots$
36(2)	$U_{2m+1} (i \sqrt{\sqrt{x}-1}) \times$ $\times H(x-1)$	$i \sqrt{\frac{\pi}{2}} (m+1) \Gamma \left[\begin{matrix} s-1/4, s+1/4, \\ s-1/4-m/2, \\ -1/4-m/2-s, 1/4-m/2-s \\ s+1/4-m/2, 1/2-s, 1-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < -1/4-m/2, \quad m=0, 1, 2, \dots$
36(4)	$U_{2m+1} \left(i \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) \times$ $\times H(1-x)$	$i \sqrt{\pi} (m+1) \Gamma \left[\begin{matrix} s-1/2-m, -1/2-s \\ s+1, -1/2-m-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 1/2+m, \quad m=0, 1, 2, \dots$
36(6)	$U_{2m+1} \left(i \frac{\sqrt{1-x^{1/3}}}{x^{1/6}} \right) \times$ $\times H(1-x)$	$i \sqrt{\frac{\pi}{3}} (m+1) \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-1/2-m, \\ 3s+1, \\ -1/2-3s \\ -1/2-m-3s \end{matrix} \right], \quad \text{Res} > 1/6+m/3,$ $m=0, 1, 2, \dots$
37(1)	$U_n \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) \times$ $\times (1+x)^{-1-n/2}$	$\frac{2^n}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1+n/2-s, (3+n)/2-s \\ 3/2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < 1+n/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
37(2)	$U_n \left(\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \right) \times$ $\times (1+\sqrt{x})^{-1-n/2}$	$\frac{2^{2n}}{\pi n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, (2+n)/4-s, \\ 3/4-s, 5/4-s \\ 1+n/4-s, (3+n)/4-s, (5+n)/4-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < (2+n)/4, \quad n=0, 1, 2, \dots$
37(4)	$U_n \left(\sqrt{\frac{x}{1+x}} \right) \times$ $\times (1+x)^{-1-n/2}$	$\frac{2^n}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1+n/2-s \\ s+(1-n)/2 \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < 1+n/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
37(6)	$U_n \left(\frac{x^{1/6}}{\sqrt{1+x^{1/3}}} \right) \times$ $\times (1+\sqrt[3]{x})^{-1-n/2}$	$\frac{3^{n+1} 2^{n-2}}{\pi^2 n!} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s, 3s+1/2, 1+n/2-3s \\ 3s+(1-n)/2 \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < (n+2)/6, \quad n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
38(1)	$U_n \left(\frac{x+2}{2\sqrt{x+1}} \right) \times$ $\times (x+1)^{-1-n/2}$	$\frac{1}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1-s, 2+n-s \\ 2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1, n=0, 1, 2, \dots$
38(2)	$U_n \left(\frac{\sqrt{x}+2}{2\sqrt{\sqrt{x}+1}} \times \right.$ $\left. \times (\sqrt{x}+1)^{-1-n/2} \right)$	$\frac{2^n}{\pi n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/2-s, 1+n/2-s, \\ 3/2-s \end{matrix} \right],$ $(3+n)/2-s$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2, n=0, 1, 2, \dots$
38(4)	$U_n \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x(1+x)}} \right) \times$ $\times (x+1)^{-1-n/2}$	$\frac{1}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s-n/2, s+1+n/2, 1+n/2-s \\ s+1-n/2 \end{matrix} \right],$ $n/2 < \operatorname{Re} s < 1+n/2, n=0, 1, 2, \dots$
38(6)	$U_n \left(\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{2x^{1/6}\sqrt{x^{1/3}+1}} \right) \times$ $\times (\sqrt[3]{x}+1)^{-1-n/2}$	$\frac{3^{n+1}}{4\pi^2 n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s-n/6, \Delta(3, 3s+1+n/2), \\ s+1-n/6 \end{matrix} \right],$ $\Delta(3, 1+n/2-3s)$ $n/6 < \operatorname{Re} s < (2+n)/6, n=0, 1, 2, \dots$
39(1)	$H_n(\sqrt{x}) e^{-x}$	$2^n \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s+(1-n)/2 \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s > 0,$ $n=0, 1, 2, \dots$
39(2)	$H_n(\sqrt{2} x^{1/4}) e^{-2\sqrt{x}}$	$\frac{2^{3n/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+1/4, s+3/4 \\ s+(1-n)/4, s+(3-n)/4 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0, n=0, 1, 2, \dots$
39(4)	$H_n(2x^{1/8}) e^{-4\sqrt[4]{x}}$	$\frac{2^{2n}}{\pi \sqrt{2\pi}} \Gamma_4 \left[\begin{matrix} 4s, 4s+1/2 \\ 4s+(1-n)/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0, n=0, 1, 2, \dots$
39(5)	$H_n \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) e^{-1/x}$	$2^n \Gamma \left[\begin{matrix} -s, 1/2-s \\ (1-n)/2-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < 0,$ $n=0, 1, 2, \dots$
39(7)	$H_n(\sqrt{3} x^{-1/6}) e^{-3x^{-1/3}}$	$\frac{2^{n-1} 3^{(n+1)/2}}{\pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} -3s, 1/2-3s \\ (1-n)/2-3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < 0, n=0, 1, 2, \dots$
39(9)	$H_{2n}(\sqrt{x}) e^{-x}$	$(-4)^n \Gamma \left[\begin{matrix} s, n+1/2-s \\ 1/2-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s > 0,$ $n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
39(10)	$H_{2n+1}(\sqrt{x}) e^{-x}$	$2(-4)^n \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, n+1-s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > -1/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
40(1)	$L_n^\alpha(x) e^{-x}$	$\frac{1}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1+n+\alpha-s \\ 1+\alpha-s \end{matrix} \right], \quad \text{Res} > 0,$ $n=0, 1, 2, \dots$
40(2)	$L_n^\alpha(2\sqrt{x}) e^{-2\sqrt{x}}$	$\frac{2^n}{\sqrt{\pi} n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, (1+n+\alpha)/2-s, \\ (1+\alpha)/2-s, 1+\alpha/2-s \\ 1+(n+\alpha)/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$
40(4)	$L_n^\alpha(4\sqrt[4]{x}) e^{-4\sqrt[4]{x}}$	$\frac{4^n}{\pi n! \sqrt{2\pi}} \Gamma_4 \left[\begin{matrix} 4s, 1+n+\alpha-4s \\ 1+\alpha-4s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$
40(5)	$L_n^\alpha\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x}$	$\frac{1}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s+\alpha+n+1, -s \\ s+\alpha+1 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$
40(7)	$L_n^\alpha\left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right) e^{-3x^{-1/3}}$	$\frac{3^{n+1/2}}{2\pi n!} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+\alpha+n+1, -3s \\ 3s+\alpha+1 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$
41(1)	$C_n^\lambda(2x-1) (1-x)_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n}{n!} \Gamma(\lambda+1/2) \Gamma \left[\begin{matrix} s, s-\lambda+1/2 \\ s+\lambda+n+1/2, \\ s+1/2-\lambda-n \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 0, \quad \text{Re} \lambda > -1/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
41(2)	$C_n^\lambda(2\sqrt{x}-1) \times$ $\times (1-\sqrt{x})_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda+1/2)}{n! 2^{\lambda-1/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ s+(\lambda+n)/2+1/4, \\ s-\lambda/2+1/4, s-\lambda/2+3/4 \\ s+(\lambda+n)/2+3/4, s-(\lambda+n)/2+1/4, \\ s-(\lambda+n)/2+3/4 \end{matrix} \right], \quad \text{Res} > 0,$ $\text{Re} \lambda > -1/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
41(4)	$C_n^\lambda \left(\frac{2}{x} - 1 \right) (x-1)_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda+1/2)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2-\lambda-s, \\ 1+n-s, \\ 1-2\lambda-s \\ 1-2\lambda-n-s \end{matrix} \right], \quad \text{Re } s < 1/2 - \text{Re } \lambda, \\ \text{Re } \lambda > -1/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
41(6)	$C_n^\lambda \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right) \times \\ \times (x^{1/3} - 1)_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda+1/2)}{n! 3^{\lambda-1/2}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 1/2-\lambda-3s, \\ 1+n-3s, \\ 1-2\lambda-3s \\ 1-n-2\lambda-3s \end{matrix} \right], \quad \text{Re } s < 1/6 - \text{Re } \lambda/3, \\ \text{Re } \lambda > -1/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
42(1)	$C_n^\lambda (2x-1) (x-1)_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda+1/2)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2-n-\lambda-s, \\ 1-s, 1/2+\lambda-s \\ 1/2+n+\lambda-s \end{matrix} \right], \quad \text{Re } s < 1/2 - n - \text{Re } \lambda, \\ \text{Re } \lambda > -1/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
42(2)	$C_n^\lambda (2\sqrt{x}-1) \times \\ \times (\sqrt{x}-1)_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda+1/2)}{n! 2^{\lambda-1/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/4-(n+\lambda)/2-s, \\ 1/2-s, 1-s, \\ 3/4-(n+\lambda)/2-s, 1/4+(n+\lambda)/2-s, \\ 1/4+\lambda/2-s, 3/4+\lambda/2-s \\ 3/4+(n+\lambda)/2-s \end{matrix} \right], \\ \text{Re } s < 1/4 - (n + \text{Re } \lambda)/2, \\ \text{Re } \lambda > -1/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
42(4)	$C_n^\lambda \left(\frac{2}{x} - 1 \right) (1-x)_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda+1/2)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s-n, s+n+2\lambda \\ s+\lambda+1/2, s+2\lambda \end{matrix} \right], \\ \text{Re } s > n, \quad \text{Re } \lambda > -1/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
42(6)	$C_n^\lambda \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right) \times \\ \times (1 - \sqrt[3]{x})_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda+1/2)}{n! 3^{\lambda-1/2}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-n, 3s+n+2\lambda \\ 3s+\lambda+1/2, 3s+2\lambda \end{matrix} \right], \\ \text{Re } s > n/3, \quad \text{Re } \lambda > -1/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
43(1)	$C_n^\lambda (2x+1) (1+x)^{\lambda-1/2}$	$\frac{(-1)^n (2\lambda)_n}{n! \Gamma(1/2-\lambda)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/2+\lambda+n-s, \\ 1/2+\lambda-s \\ 1/2-\lambda-n-s \end{matrix} \right], \\ 0 < \text{Re } s < 1/2 - n - \text{Re } \lambda, \\ \lambda + 1/2 \neq 0, -1, -2, \dots, \quad n=0, 1, 2, \dots$

1	2	1
43(2)	$C_n^\lambda (2\sqrt{x}+1) \times$ $\times (1+\sqrt{x})^{\lambda-1/2}$	$\frac{(-1)^n (2\lambda)_n}{n! \pi 2^{\lambda+1/2} \Gamma(1/2-\lambda)} \Gamma \left[s, s+1/2, \right.$ $1/4+\lambda/2-s, 1/4+(\lambda+n)/2-s, 3/4+(\lambda+n)/2-s,$ $3/4+\lambda/2-s$ $\left. 1/4-(\lambda+n)/2-s, 3/4-(\lambda+n)/2-s \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4-(n+\operatorname{Re} \lambda)/2,$ $\lambda+1/2 \neq 0, -1, -2, \dots$
43(4)	$C_n^\lambda \left(\frac{2}{x} + 1 \right) \times$ $\times (1+x)^{\lambda-1/2}$	$\frac{(-1)^n (2\lambda)_n}{n! \Gamma(1/2-\lambda)} \Gamma \left[\begin{matrix} s+2\lambda+n, & s-n, \\ s+2\lambda & \end{matrix} \right.$ $\left. 1/2-\lambda-s \right], \quad n < \operatorname{Re} s < 1/2-\operatorname{Re} \lambda,$ $n=0, 1, 2, \dots, \lambda+1/2 \neq 0, -1, -2, \dots$
43(6)	$C_n^\lambda \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 1 \right) \times$ $\times (1+\sqrt[3]{x})^{\lambda-1/2}$	$\frac{(-1)^n (2\lambda)_n 3^{1/2-\lambda}}{4\pi^2 n! \Gamma(1/2-\lambda)} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+2\lambda+n, \\ 3s+2\lambda \\ 3s-n, & 1/2-\lambda-3s \end{matrix} \right],$ $n/3 < \operatorname{Re} s < 1/6-\operatorname{Re} \lambda/3,$ $n=0, 1, 2, \dots, \lambda+1/2 \neq 0, -1, -2, \dots$
44(1)	$C_n^\lambda \left(\frac{1-x}{1+x} \right) (1+x)^{-n-2\lambda}$	$\frac{1}{n! (\lambda+1/2)_n \Gamma(2\lambda)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, & n+2\lambda-s, \\ \lambda+1/2-s & \end{matrix} \right.$ $\left. n+\lambda+1/2-s \right], \quad 0 < \operatorname{Re} s < n+2\operatorname{Re} \lambda,$ $n=0, 1, 2, \dots, \lambda+1/2 \neq 0, -1, -2, \dots$
44(2)	$C_n^\lambda \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right) \times$ $\times (1+\sqrt{x})^{-n-2\lambda}$	$\frac{2^{2n+2\lambda-1}}{n! \pi (\lambda+1/2)_n \Gamma(2\lambda)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, & s+1/2, \\ \lambda/2+1/4-s, & \end{matrix} \right.$ $n/2+\lambda-s, (n+1)/2+\lambda-s,$ $\lambda/2+3/4-s$ $\left. (n+\lambda)/2+1/4-s, (n+\lambda)/2+3/4-s \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < n/2+\operatorname{Re} \lambda,$ $n=0, 1, 2, \dots, \lambda+1/2 \neq 0, -1, -2, \dots$

1	2	3
44(3)	$C_n^\lambda \left(\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \right) \times$ $\times (1 + \sqrt[3]{x})^{-n-2\lambda}$	$\frac{3^{2n+2\lambda}}{4\pi^2 n! (\lambda + 1/2)_n \Gamma(2\lambda)} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s, n+2\lambda-3s, \\ \lambda + 1/2 - 3s \\ n + \lambda + 1/2 - 3s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < n/3 + 2/3 \operatorname{Re} \lambda,$ $n = 0, 1, 2, \dots, \lambda + 1/2 \neq 0, -1, -2, \dots$
45(1)	$C_n^\lambda \left(\frac{1+x}{1-x} \right) (1-x)_+^{-n-2\lambda}$	$\frac{\Gamma(1-2\lambda)}{n! (\lambda + 1/2)_n} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2-\lambda \\ s+1-n-2\lambda, \\ s+1/2-\lambda-n \end{matrix} \right], \quad n + \operatorname{Re} \lambda < 1/2,$ $\operatorname{Re} s > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
45(2)	$C_n^\lambda \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right) \times$ $\times (1 - \sqrt{x})_+^{-n-2\lambda}$	$\frac{2^{2n+2\lambda} \Gamma(1-2\lambda)}{n! (\lambda + 1/2)_n} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ s + (1-n)/2 - \lambda, \\ s+1/4-\lambda/2, s+3/4-\lambda/2 \\ s+1-\lambda-n/2, s+1/4-(\lambda+n)/2, \\ s+3/4-(\lambda+n)/2 \end{matrix} \right], \quad n + \operatorname{Re} \lambda < 1/2,$ $\operatorname{Re} s > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
45(4)	$C_n^\lambda \left(\frac{x+1}{x-1} \right) (x-1)_+^{-n-2\lambda}$	$\frac{\Gamma(1-2\lambda)}{n! (\lambda + 1/2)_n} \Gamma \left[\begin{matrix} n+2\lambda-s, \\ 1-s, \lambda+1/2-s \\ n + \lambda + 1/2 - s \end{matrix} \right], \quad n + \operatorname{Re} \lambda < 1/2,$ $\operatorname{Re} s < n + 2 \operatorname{Re} \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
45(6)	$C_n^\lambda \left(\frac{\sqrt[3]{x} + 1}{\sqrt[3]{x} - 1} \right) \times$ $\times (\sqrt[3]{x} - 1)_+^{-n-2\lambda}$	$\frac{3^{2n+2\lambda} \Gamma(1-2\lambda)}{n! (\lambda + 1/2)_n} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} n+2\lambda-3s, \\ 1-3s, \lambda+1/2-3s \\ n + \lambda + 1/2 - 3s \end{matrix} \right], \quad n + \operatorname{Re} \lambda < 1/2,$ $\operatorname{Re} s < (n + 2 \operatorname{Re} \lambda)/3, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
46(1)	$C_n^\lambda \left(\frac{1+x}{ x-1 } \right) 1-x ^{-n-2\lambda}$	$\frac{(-1)^n \sqrt{\pi} \Gamma(1/2-\lambda)}{2^{2\lambda-1} n! \Gamma(\lambda) (\lambda + 1/2)_n} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 2\lambda+n-s \\ -\lambda+1/2-n+s, \\ \lambda+1/2-s \end{matrix} \right], \quad n + \operatorname{Re} \lambda < 1/2,$ $0 < \operatorname{Re} s < n + 2 \operatorname{Re} \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

1	2	3
46(2)	$C_n^\lambda \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{ 1 - \sqrt{x} } \right) \times$ $\times 1 - \sqrt{x} ^{-n-2\lambda}$	$\frac{(-1)^n 2^{2n+1} \sqrt{\pi} \Gamma(1/2 - \lambda)}{n! \Gamma(\lambda) (\lambda + 1/2)_n} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \lambda + n/2 - s, \\ 1/4 - (\lambda + n)/2 + s, s+3/4 - (\lambda + n)/2, \\ \lambda + (n+1)/2 - s \\ \lambda/2 + 1/4 - s, \lambda/2 + 3/4 - s \end{matrix} \right],$ $n + \operatorname{Re} \lambda < 1/2, 0 < \operatorname{Re} s < n/2 + \operatorname{Re} \lambda,$ $n = 0, 1, 2, \dots$
46(3)	$C_n^\lambda \left(\frac{1 + \sqrt[3]{x}}{ 1 - \sqrt[3]{x} } \right) \times$ $\times 1 - \sqrt[3]{x} ^{-n-2\lambda}$	$\frac{(-1)^n \sqrt{\pi} \Gamma(1/2 - \lambda) 3^{2\lambda+2n}}{2^{2\lambda-1} n! \Gamma(\lambda) (\lambda + 1/2)_n} \times$ $\times \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s, 2\lambda + n - 3s \\ 1/2 - \lambda - n + 3s, \lambda + 1/2 - 3s \end{matrix} \right],$ $n + \operatorname{Re} \lambda < 1/2, 0 < \operatorname{Re} s < (n + 2\operatorname{Re} \lambda)/3,$ $n = 0, 1, 2, \dots$
47(1)	$C_n^\lambda (\sqrt{x}) (1-x)_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda + 1/2)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s + \lambda + (n+1)/2, \\ s + (1-n)/2 \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} \lambda > -1/2,$ $\operatorname{Re} s > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
47(2)	$C_n^\lambda (\sqrt[4]{x}) (1 - \sqrt[4]{x})_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda + 1/2)}{2^{\lambda-1/2} n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+1/4, \\ s + \lambda/2 + (n+1)/4, \\ s+3/4 \\ s + \lambda/2 + (n+3)/4, s + (1-n)/4, s + (3-n)/4 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \lambda > -1/2, \operatorname{Re} s > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
47(4)	$C_n^\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) (x-1)_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda + 1/2)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2 - \lambda - s, 1 - \lambda - s \\ 1 + n/2 - s, \\ 1 - \lambda - n/2 - s \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} \lambda > -1/2,$ $\operatorname{Re} s < 1/2 - \operatorname{Re} \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
47(6)	$C_n^\lambda (x^{-1/6}) (\sqrt[3]{x} - 1)_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda + 1/2)}{3^{\lambda-1/2} n!} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 1/2 - \lambda - 3s, \\ 1 + n/2 - 3s, \\ 1 - \lambda - 3s \\ 1 - \lambda - n/2 - 3s \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} \lambda > -1/2,$ $3\operatorname{Re} s < 1/2 - \operatorname{Re} \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

1	2	3
48(1)	$C_n^\lambda(\sqrt{x})(x-1)_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda+1/2)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} (1-n)/2-\lambda-s, \\ 1/2-s, 1-s \\ (1+n)/2-s \end{matrix} \right], \quad \text{Re } \lambda > -1/2,$ $\text{Res} < (1-n)/2 - \text{Re } \lambda, \quad n=0, 1, 2, \dots$
48(2)	$C_n^\lambda(\sqrt[4]{x})(\sqrt{x}-1)_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda+1/2)}{2^{\lambda-1/2} n!} \Gamma \left[\begin{matrix} (1-n)/4-\lambda/2-s, \\ 1/4-s, 3/4-s, \\ (3-n)/4-\lambda/2-s, (1+n)/4-s, \\ 1/2-s, 1-s \\ (3+n)/4-s \end{matrix} \right], \quad \text{Re } \lambda > -1/2,$ $\text{Res} < (1-n)/4 - \text{Re } \lambda/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
48(4)	$C_n^\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) (1-x)_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda+1/2)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s-n/2, s+\lambda+n/2 \\ s+\lambda, s+\lambda+1/2 \end{matrix} \right],$ $\text{Re } \lambda > -1/2, \quad \text{Re } s > n/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$
48(6)	$C_n^\lambda(x^{-1/6})(1-\sqrt[3]{x})_+^{\lambda-1/2}$	$\frac{(2\lambda)_n \Gamma(\lambda+1/2)}{3^{\lambda-1/2} n!} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-n/2, \\ 3s+\lambda, 3s+\lambda+1/2 \\ 3s+\lambda+n/2 \end{matrix} \right],$ $\text{Re } \lambda > -1/2, \quad \text{Re } s > n/6, \quad n=0, 1, 2, \dots$
49(1)	$C_{2m}^\lambda(\sqrt{1-x})(1-x)_+^{-1/2}$	$\frac{(\lambda)_m \sqrt{\pi}}{m!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/2+\lambda+m-s \\ s+m+1/2, 1/2+\lambda-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s > 0, \quad m=0, 1, 2, \dots$
49(2)	$C_{2m}^\lambda(\sqrt{1-\sqrt{x}}) \times (1-\sqrt{x})_+^{-1/2}$	$\frac{(\lambda)_m \sqrt{2\pi}}{m!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ s+m/2+1/4, \\ 1/4+(\lambda+m)/2-s, 3/4+(\lambda+m)/2-s \\ s+m/2+3/4, 1/4+\lambda/2-s, 3/4+\lambda/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s > 0, \quad m=0, 1, 2, \dots$
49(4)	$C_{2m}^\lambda \left(\sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) \times (x-1)_+^{-1/2}$	$\frac{(\lambda)_m \sqrt{\pi}}{m!} \Gamma \left[\begin{matrix} s+\lambda+m, 1/2-s \\ s+\lambda, 1+m-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s < 1/2, \quad m=0, 1, 2, \dots$
49(6)	$C_{2m}^\lambda \left(\frac{\sqrt{x^{1/3}-1}}{x^{1/6}} \right) \times (\sqrt[3]{x}-1)_+^{-1/2}$	$\frac{(\lambda)_m \sqrt{3\pi}}{m!} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+\lambda+m, 1/2-3s \\ 3s+\lambda, 1+m-3s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s < 1/6, \quad m=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
50(1)	$C_{2m}^\lambda (i\sqrt{x-1}) (x-1)_+^{-1/2}$	$\frac{(\lambda)_m V\pi}{m!} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2-\lambda, 1/2-m-s \\ s+1/2-\lambda-m, 1-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s < 1/2-m, m=0, 1, 2, \dots$
50(2)	$C_{2m}^\lambda (i\sqrt{\sqrt{x}-1}) \times$ $\times (\sqrt{x}-1)_+^{-1/2}$	$\frac{(\lambda)_m V2\pi}{m!} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/4-\lambda/2, s+3/4-\lambda/2, \\ s+1/4-(\lambda+m)/2, \\ 1/4-m/2-s, 3/4-m/2-s \\ s+3/4-(\lambda+m)/2, 1/2-s, 1-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s < 1/4-m/2, m=0, 1, 2, \dots$
50(4)	$C_{2m}^\lambda \left(i\sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) \times$ $\times (1-x)_+^{-1/2}$	$\frac{(\lambda)_m V\pi}{m!} \Gamma \left[\begin{matrix} s-m, 1-\lambda-s \\ s+1/2, 1-\lambda-m-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s > m, m=0, 1, 2, \dots$
50(6)	$C_{2m}^\lambda \left(i\frac{\sqrt{1-x^{1/3}}}{x^{1/6}} \right) \times$ $\times (1-\sqrt[3]{x})_+^{-1/2}$	$\frac{(\lambda)_m V3\pi}{m!} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-m, 1-\lambda-3s \\ 3s+1/2, 1-\lambda-m-3s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s > m/3, m=0, 1, 2, \dots$
51(1)	$C_{2m+1}^\lambda (\sqrt{1-x}) H(1-x)$	$\frac{(\lambda)_{m+1} V\pi}{m!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, \lambda+m+1/2-s \\ s+m+3/2, \lambda+1/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s > 0, m=0, 1, 2, \dots$
51(2)	$C_{2m+1}^\lambda (\sqrt{1-\sqrt{x}}) \times$ $\times H(1-x)$	$\frac{(\lambda)_{m+1}}{m!} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ s+m/2+3/4, \\ (\lambda+m)/2+1/4-s, (\lambda+m)/2+3/4-s \\ s+m/2+5/4, \lambda/2+1/4-s, \\ \lambda/2+3/4-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s > 0, m=0, 1, 2, \dots$
51(4)	$C_{2m+1}^\lambda \left(\sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) \times$ $\times H(x-1)$	$\frac{(\lambda)_{m+1} V\pi}{m!} \Gamma \left[\begin{matrix} s+\lambda+m+1/2, -s \\ s+\lambda+1/2, m+3/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s < 0, m=0, 1, 2, \dots$
51(6)	$C_{2m+1}^\lambda \left(\frac{\sqrt{x^{1/3}-1}}{x^{1/6}} \right) \times$ $\times H(x-1)$	$\frac{(\lambda)_{m+1}}{m!} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+\lambda+m+1/2, \\ 3s+\lambda+1/2, \\ -3s \\ m+3/2-3s \end{matrix} \right], \text{Re } s < 0, m=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
52(1)	$C_{2m+1}^{\lambda} (i \sqrt{x-1}) H(x-1)$	$\frac{i(\lambda)_{m+1}}{m!} \sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2-\lambda, \\ s-m+1/2-\lambda, \\ -1/2-m-s \\ 1-s \end{matrix} \right], \quad \text{Re } s < -1/2-m, \\ m=0, 1, 2, \dots$
52(2)	$C_{2m+1}^{\lambda} (i \sqrt{Vx-1}) \times H(x-1)$	$\frac{i(\lambda)_{m+1}}{m!} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/4-\lambda/2, \\ s+1/4-(m+\lambda)/2, \\ s+3/4-\lambda/2, -1/4-m/2-s, \\ s+3/4-(m+\lambda)/2, 1/2-s, \\ 1/4-m/2-s \\ 1-s \end{matrix} \right], \\ \text{Re } s < -1/4-m/2, \quad m=0, 1, 2, \dots$
52(4)	$C_{2m+1}^{\lambda} \left(i \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) \times H(1-x)$	$\frac{i(\lambda)_{m+1}}{m!} \sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s-1/2-m, 1/2-\lambda-s \\ s+1, 1/2-\lambda-m-s \end{matrix} \right], \\ \text{Re } s > 1/2+m, \quad m=0, 1, 2, \dots$
52(6)	$C_{2m+1}^{\lambda} \left(i \frac{V \sqrt{1-x^{1/3}}}{x^{1/6}} \right) \times H(1-x)$	$\frac{i(\lambda)_{m+1}}{m!} \sqrt{\frac{\pi}{3}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-m-1/2, \\ 3s+1, 1/2-\lambda-m-3s \\ 1/2-\lambda-3s \end{matrix} \right], \quad \text{Re } s > 1/6+m/3, \\ m=0, 1, 2, \dots$
53(1)	$C_n^{\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} \right) \times (1-x)_+^{-\lambda-n/2}$	$\frac{(-2)^n \Gamma(1-\lambda)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2-\lambda \\ s+(1-n)/2-\lambda, \\ s+1-\lambda-n/2 \end{matrix} \right], \quad \text{Re } s > 0, \\ n+\text{Re } \lambda < 1, \quad n=0, 1, 2, \dots$
53(2)	$C_n^{\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{1-Vx}} \right) \times (1-Vx)_+^{-\lambda-n/2}$	$\frac{(-1)^n 2^{2n+\lambda} \Gamma(1-\lambda)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ s+(1-n)/4-\lambda/2, \\ s+1/4-\lambda/2, s+3/4-\lambda/2 \\ s+(3-n)/4-\lambda/2, s+(1-\lambda)/2-n/4, \\ s+1-\lambda/2-n/4 \end{matrix} \right], \quad \text{Re } s > 0, \\ n+\text{Re } \lambda < 1, \quad n=0, 1, 2, \dots$
53(4)	$C_n^{\lambda} \left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} \right) \times (x-1)_+^{-\lambda-n/2}$	$\frac{(-2)^n \Gamma(1-\lambda)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} \lambda+n/2-s, \\ 1/2-s, 1-s \\ (n+1)/2-s \end{matrix} \right], \quad \text{Re } s < n/2+\text{Re } \lambda, \\ n+\text{Re } \lambda < 1, \quad n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
53(6)	$C_n^\lambda \left(\frac{x^{1/6}}{\sqrt{x^{1/3}-1}} \right) \times$ $\times (\sqrt[3]{x}-1)_+^{-\lambda-n/2}$	$\frac{(-2)^n 3^{n+\lambda} \Gamma(1-\lambda)}{n!} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} \lambda+n/2-3s, \\ 1/2-3s, \\ (n+1)/2-3s \end{matrix} \right], \text{ Re } s < n/6 + \text{Re } \lambda/3,$ $n + \text{Re } \lambda < 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
54(1)	$C_n^\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) (1+x)^{-\lambda-n/2}$	$\frac{2^n}{n! \Gamma(\lambda)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, \lambda+n/2-s, \\ \lambda+1/2-s \end{matrix} \right], \quad 0 < \text{Re } s < n/2 + \text{Re } \lambda,$ $n = 0, 1, 2, \dots$
54(2)	$C_n^\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) \times$ $\times (\sqrt{x}+1)^{-\lambda-n/2}$	$\frac{2^{2n+\lambda-1}}{\pi n! \Gamma(\lambda)} \Gamma_2 \left[\begin{matrix} 2s, \lambda+n/2-2s, \\ \lambda+1/2-2s \end{matrix} \right],$ $\lambda + (n+1)/2 - 2s$ $0 < \text{Re } s < n/4 + \text{Re } \lambda/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
54(4)	$C_n^\lambda \left(\sqrt{\frac{x}{x+1}} \right) \times$ $\times (1+x)^{-\lambda-n/2}$	$\frac{2^n}{n! \Gamma(\lambda)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \lambda+n/2-s \\ s+(1-n)/2 \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Re } s < n/2 + \text{Re } \lambda, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
54(6)	$C_n^\lambda \left(\frac{x^{1/6}}{\sqrt{x^{1/3}+1}} \right) \times$ $\times (\sqrt[3]{x}+1)^{-\lambda-n/2}$	$\frac{3^{\lambda+n} 2^{n-2}}{n! \pi^2 \Gamma(\lambda)} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s, 3s+1/2, \lambda+n/2-3s \\ 3s+(1-n)/2 \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Re } s < n/6 + \text{Re } \lambda/3, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
55(1)	$C_n^\lambda \left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}} \right) (1-x)_+^{2\lambda-1}$	$\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s-n/2, s+\lambda+n/2 \\ s+2\lambda+n/2, s+\lambda-n/2 \end{matrix} \right],$ $\text{Re } \lambda > 0, \quad \text{Re } s > n/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$
55(2)	$C_n^\lambda \left(\frac{\sqrt{x}+1}{2x^{1/4}} \right) \times$ $\times (1-\sqrt{x})_+^{2\lambda-1}$	$\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{2^{2\lambda-1} n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s-n/4, s+(2-n)/4, \\ s+\lambda+n/4, \\ s+\lambda/2+n/4, s+(\lambda+1)/2+n/4 \\ s+\lambda+(n+2)/4, s+(\lambda+1)/2-n/4, \\ s+\lambda/2-n/4 \end{matrix} \right], \quad \text{Re } \lambda > 0,$ $\text{Re } s > n/4, \quad n = 0, 1, 2, \dots$

1	2	3
55(4)	$C_n^\lambda \left(\frac{x+1}{2\sqrt{x}} \right) (x-1)_+^{2\lambda-1}$	$\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} 1-2\lambda-n/2-s, \\ 1+n/2-s, \\ 1-\lambda+n/2-s \end{matrix} \right], \text{ Re } \lambda > 0,$ $\text{Res} < 1-n/2-2\text{Re } \lambda, \quad n=0, 1, 2, \dots$
55(6)	$C_n^\lambda \left(\frac{\sqrt[3]{x}+1}{2x^{1/6}} \right) \times$ $\times (\sqrt[3]{x}-1)_+^{2\lambda-1}$	$\frac{\Gamma(2\lambda+n)}{3^{2\lambda-1} n!} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 1-2\lambda-n/2-3s, \\ 1+n/2-3s, \\ 1-\lambda+n/2-3s \end{matrix} \right], \text{ Re } \lambda > 0,$ $\text{Res} < (1-2\text{Re } \lambda)/3-n/6, \quad n=0, 1, 2, \dots$
56(1)	$C_n^\lambda \left(\frac{2-x}{2\sqrt{1-x}} \right) \times$ $\times (1-x)_+^{-\lambda-n/2}$	$\frac{\Gamma(1-\lambda)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 2\lambda+n-s \\ s+1-\lambda, 2\lambda-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 0, \text{ Re } \lambda < 1-n, \quad n=0, 1, 2, \dots$
56(2)	$C_n^\lambda \left(\frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{1-\sqrt{x}}} \right) \times$ $\times (1-\sqrt{x})_+^{-\lambda-n/2}$	$\frac{\Gamma(1-\lambda)2^{n+\lambda}}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \lambda+n/2-s, \\ s+(1-\lambda)/2, s+1-\lambda/2, \\ \lambda+(n+1)/2-s \end{matrix} \right], \text{ Res} > 0,$ $\lambda-s, \lambda+1/2-s \Big], \text{ Re } \lambda < 1-n, \quad n=0, 1, 2, \dots$
56(4)	$C_n^\lambda \left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x(x-1)}} \right) \times$ $\times (x-1)_+^{-\lambda-n/2}$	$\frac{\Gamma(1-\lambda)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s+\lambda+n/2, \lambda+n/2-s \\ s+\lambda-n/2, 1+n/2-s \end{matrix} \right],$ $ \text{Res} < n/2+\text{Re } \lambda, \quad \text{Re } \lambda < 1-n,$ $n=0, 1, 2, \dots$
56(6)	$C_n^\lambda \left(\frac{2x^{1/3}-1}{2x^{1/6}\sqrt{x^{1/3}-1}} \right) \times$ $\times (x^{1/3}-1)_+^{-\lambda-n/2}$	$\frac{\Gamma(1-\lambda)3^{n+\lambda}}{n!} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+\lambda+n/2, \\ 3s+\lambda-n/2, \\ \lambda+n/2-3s \end{matrix} \right], \text{ Res} < n/6+\text{Re } \lambda/3,$ $1+n/2-3s \Big], \text{ Re } \lambda < 1-n, \quad n=0, 1, 2, \dots$
57(1)	$C_n^\lambda \left(\frac{2+x}{2\sqrt{1+x}} \right) \times$ $\times (1+x)^{-\lambda-n/2}$	$\frac{1}{n!\Gamma(\lambda)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, \lambda-s, 2\lambda+n-s \\ 2\lambda-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < \text{Re } \lambda, \quad n=0, 1, 2, \dots$
57(2)	$C_n^\lambda \left(\frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} \right) \times$ $\times (1+\sqrt{x})^{-\lambda-n/2}$	$\frac{2^{n+\lambda-1}}{\pi n!\Gamma(\lambda)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \lambda/2-s, \\ \lambda-s, \lambda+1/2-s \\ (\lambda+1)/2-s, \lambda+n/2-s, \lambda+(n+1)/2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Res} < \text{Re } \lambda/2, \quad n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
57(4)	$C_n^\lambda \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}} \right) \times$ $\times (1+x)^{-\lambda-n/2}.$	$\frac{1}{n! \Gamma(\lambda)} \Gamma \left[\begin{matrix} s+\lambda+n/2, s-n/2, \\ \lambda-n/2+s \\ \lambda+n/2-s \end{matrix} \right], \quad n/2 < \text{Res} < n/2 + \text{Re} \lambda,$ $n = 0, 1, 2, \dots$
57(6)	$C_n^\lambda \left(\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{2x^{1/6}\sqrt{x^{1/3}+1}} \right) \times$ $\times (1+\sqrt[3]{x})^{-\lambda-n/2}$	$\frac{3^{\lambda+n}}{4\pi^2 n! \Gamma(\lambda)} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+\lambda+n/2, \\ \lambda-n/2+3s \\ 3s-n/2, \lambda+n/2-3s \end{matrix} \right],$ $n/6 < \text{Res} < n/6 + \text{Re} \lambda/3, \quad n=0, 1, 2, \dots$
58(1)	$P_n^{(\alpha, \beta)} (2x-1) (1-x)_+^\alpha$	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s-\beta \\ s+\alpha+n+1, s-\beta-n \end{matrix} \right],$ $\text{Re} \alpha > -1, \quad \text{Res} > 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$
58(2)	$P_n^{(\alpha, \beta)} (2\sqrt{x}-1) \times$ $\times (1-\sqrt{x})_+^\alpha$	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n! 2^\alpha} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s-\beta/2, \\ s+(\alpha+n+1)/2, \\ s+(1-\beta)/2 \\ s+(\alpha+n)/2+1, \quad s-(\beta+n)/2, \\ s+(1-\beta-n)/2 \end{matrix} \right], \quad \text{Re} \alpha > -1,$ $\text{Res} > 0, \quad n=0, 1, 2, \dots$
58(4)	$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{2}{x} - 1 \right) (x-1)_+^\alpha$	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} -\alpha-s, -\alpha-\beta-s \\ n+1-s, \\ -\alpha-\beta-n-s \end{matrix} \right], \quad \text{Re} \alpha > -1,$ $\text{Res} < -\text{Re} \alpha, \quad n=0, 1, 2, \dots$
58(6)	$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right) \times$ $\times (\sqrt[3]{x}-1)_+^\alpha$	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n! 3^\alpha} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} -\alpha-3s, -\alpha-\beta-3s \\ n+1-3s, \\ -\alpha-\beta-n-3s \end{matrix} \right], \quad \text{Re} \alpha > -1,$ $\text{Res} < -\text{Re} \alpha/3, \quad n=0, 1, 2, \dots$
59(1)	$P_n^{(\alpha, \beta)} (2x-1) (x-1)_+^\alpha$	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} 1+n+\beta-s, \\ 1+\beta-s, 1-s \\ -\alpha-n-s \end{matrix} \right], \quad \text{Re} \alpha > -1,$ $\text{Res} < -n - \text{Re} \alpha, \quad n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
59(2)	$P_n^{(\alpha, \beta)} (2\sqrt{x} - 1) \times$ $\times (\sqrt{x} - 1)_+^\alpha$	$\frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! 2^\alpha} \Gamma \left[\begin{matrix} (1 + n + \beta)/2 - s, \\ (1 + \beta)/2 - s, \\ 1 + (n + \beta)/2 - s, -(\alpha + n)/2 - s, \\ 1 + \beta/2 - s, 1/2 - s, 1 - s \\ (1 - \alpha - n)/2 - s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} s < -(n + \operatorname{Re} \alpha)/2,$ $n = 0, 1, 2, \dots$
59(4)	$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{2}{x} - 1 \right) (1 - x)_+^\alpha$	$\frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s + \alpha + \beta + n + 1, \\ s + \alpha + \beta + 1, s + \alpha + 1 \\ s - n \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \alpha > -1,$ $\operatorname{Re} s > n, n = 0, 1, 2, \dots$
59(6)	$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right) \times$ $\times (1 - \sqrt[3]{x})_+^\alpha$	$\frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{n! 3^\alpha} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s + \alpha + \beta + n + 1, \\ 3s + \alpha + \beta + 1, \\ 3s - n \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \alpha > -1, \operatorname{Re} s > n/3,$ $n = 0, 1, 2, \dots$
60(1)	$P_n^{(\alpha, \beta)} (2x + 1) (1 + x)^\beta$	$\frac{1}{n! \Gamma(-n - \beta)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, -n - \beta - s, \\ 1 + \alpha - s \\ 1 + \alpha + n - s \end{matrix} \right], 0 < \operatorname{Re} s < -n - \operatorname{Re} \beta,$ $n = 0, 1, 2, \dots$
60(2)	$P_n^{(\alpha, \beta)} (2\sqrt{x} + 1) (\sqrt{x} + 1)^\beta$	$\frac{1}{\pi n! 2^{\beta+1} \Gamma(-n - \beta)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s + 1/2, \\ (1 + \alpha)/2 - s, \\ -(n + \beta)/2 - s, (1 - n - \beta)/2 - s, \\ 1 + \alpha/2 - s \\ (1 + \alpha + n)/2 - s, 1 + (\alpha + n)/2 - s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < -(n + \operatorname{Re} \beta)/2,$ $n = 0, 1, 2, \dots$
60(4)	$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{2}{x} + 1 \right) (1 + x)^\beta$	$\frac{1}{n! \Gamma(-n - \beta)} \Gamma \left[\begin{matrix} s - n, \\ s + \alpha + \beta + 1 \\ s + \alpha + \beta + n + 1, -\beta - s \end{matrix} \right],$ $n < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} \beta, n = 0, 1, 2, \dots$

1	2	3
60(6)	$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 1 \right) \times$ $\times (1 + \sqrt[3]{x})^\beta$	$\frac{3^{-\beta}}{4\pi^2 n! \Gamma(-n-\beta)} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-n, \\ 3s+\alpha+\beta+1 \\ 3s+\alpha+\beta+n+1, \quad -\beta-3s \end{matrix} \right],$ $n/3 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} \beta/3, \quad n=0, 1, 2, \dots$
61(1)	$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \times$ $\times (1+x)^{-n-\alpha-\beta-1}$	$\frac{1}{n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, \\ \alpha+1-s \\ n+\alpha+\beta+1-s, \quad \alpha+n+1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < n+1+\operatorname{Re}(\alpha+\beta),$ $n=0, 1, 2, \dots$
61(2)	$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right) \times$ $\times (1+\sqrt{x})^{-n-\alpha-\beta-1}$	$\frac{2^{2n+\alpha+\beta}}{n! \pi \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ (\alpha+1)/2-s, \\ (n+\alpha+\beta+1)/2-s, \\ 1+\alpha/2-s \\ 1+(n+\alpha+\beta)/2-s, (n+\alpha+1)/2-s, \\ 1+(n+\alpha)/2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < (n+1+\operatorname{Re}(\alpha+\beta))/2,$ $n=0, 1, 2, \dots$
61(3)	$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}} \right) \times$ $\times (1+\sqrt[3]{x})^{-n-\alpha-\beta-1}$	$\frac{3^{2n+\alpha+\beta+1}}{4\pi^2 n! \Gamma(n+\alpha+\beta+1)} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s, \\ \alpha+1-3s \\ n+\alpha+\beta+1-3s, \quad \alpha+n+1-3s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < (n+1+\operatorname{Re}(\alpha+\beta))/3,$ $n=0, 1, 2, \dots$
62(1)	$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \times$ $\times (1-x)^{-n-\alpha-\beta-1}$	$\frac{\Gamma(-n-\alpha-\beta)}{n!} \Gamma \left[\begin{matrix} s, \alpha+n+1-s \\ s-n-\alpha-\beta, \\ \alpha+1-s \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} s > 0,$ $\operatorname{Re}(\alpha+\beta) < -2n, \quad n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
62(2)	$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} \right) \times$ $\times (1 - \sqrt{x})_+^{-n-\alpha-\beta-1}$	$\frac{\Gamma(-n-\alpha-\beta)}{n! 2^{-2n-\alpha-\beta-1}} \Gamma \left[s, s+1/2, \right.$ $(\alpha+n+1)/2-s, 1+(\alpha+n)/2-s$ $s+(1-n-\alpha-\beta)/2, (\alpha+1)/2-s,$ $\left. 1+\alpha/2-s \right], \text{ Re } s > 0,$ $\text{Re } (\alpha + \beta) < -2n, \quad n=0, 1, 2, \dots$
62(4)	$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{x+1}{x-1} \right) \times$ $\times (x-1)_+^{-n-\alpha-\beta-1}$	$\frac{\Gamma(-n-\alpha-\beta)}{n!} \Gamma \left[s-\beta, \right.$ $s-n-\beta, 1-s$ $\left. n+\alpha+\beta+1-s \right],$ $\text{Re } s < n+1+\text{Re } (\alpha + \beta),$ $\text{Re } (\alpha + \beta) < -2n, \quad n=0, 1, 2, \dots$
62(6)	$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{x^{1/3}+1}{x^{1/3}-1} \right) \times$ $\times (\sqrt[3]{x}-1)_+^{-n-\alpha-\beta-1}$	$\frac{\Gamma(-n-\alpha-\beta)}{n! 3^{-2n-\alpha-\beta-1}} \Gamma_3 \left[3s-\beta, \right.$ $3s-n-\beta, 1-3s$ $\left. n+\alpha+\beta+1-3s \right],$ $\text{Re } s < (n+1+\text{Re } (\alpha + \beta))/3,$ $\text{Re } (\alpha + \beta) < -2n, \quad n=0, 1, 2, \dots$

11. Функции Лежандра

1(1)	$(1-x)_+^{-\mu/2} P_v^\mu(2x-1)$	$\Gamma \left[s+\mu/2, s-\mu/2 \right.$ $\left. s+v+1-\mu/2, s-v-\mu/2 \right],$ $\text{Re } \mu < 1, \text{ Re } s > \text{Re } \mu /2$
1(2)	$(1-\sqrt{x})_+^{-\mu/2} P_v^\mu(2\sqrt{x}-1)$	$2^\mu \Gamma \left[s+\mu/4, s+(\mu+2)/4, s-\mu/4, \right.$ $s+(v+1)/2-\mu/4, s+1+v/2-\mu/4,$ $s+(2-\mu)/4,$ $s-v/2-\mu/4, s+(1-v)/2-\mu/4 \left. \right],$ $\text{Re } \mu < 1, \text{ Re } s > \text{Re } \mu /4$
1(4)	$(x-1)_+^{-\mu/2} P_v^\mu \left(\frac{2}{x} - 1 \right)$	$\Gamma \left[-s, -\mu-s \right.$ $\left. v+1-\mu-s, -v-\mu-s \right],$ $\text{Re } \mu < 1, \text{ Re } s < 0, -\text{Re } \mu$
1(6)	$(\sqrt[3]{x}-1)_+^{-\mu/2} \times$ $\times P_v^\mu \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right)$	$3^\mu \Gamma_3 \left[-3s, -\mu-3s \right.$ $\left. v+1-\mu-3s, -v-\mu-3s \right],$ $\text{Re } \mu < 1, \text{ Re } s < 0, -\text{Re } \mu/3$

1	2	3
2(1)	$(x-1)_+^{-\mu/2} P_v^\mu (2x-1)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} \mu/2 - v - s, \mu/2 + 1 + v - s \\ 1 - \mu/2 - s, 1 + \mu/2 - s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re} s < 1 + \operatorname{Re} \mu/2 + \operatorname{Re} v,$ $\operatorname{Re} \mu/2 - \operatorname{Re} v$
2(2)	$(\sqrt{x}-1)_+^{-\mu/2} P_v^\mu (2\sqrt{x}-1)$	$2^\mu \Gamma \left[\begin{matrix} \mu/4 - v/2 - s, \mu/4 + (1-v)/2 - s, \\ (2-\mu)/4 - s, 1 - \mu/4 - s, \\ \mu/4 + (1+v)/2 - s, 1 + \mu/4 + v/2 - s \\ (2+\mu)/4 - s, 1 + \mu/4 - s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re} v)/2 + \operatorname{Re} \mu/4,$ $\operatorname{Re} (\mu - 2v)/4$
2(4)	$(1-x)_+^{-\mu/2} P_v^\mu \left(\frac{2}{x} - 1 \right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s - v, s + 1 + v \\ 1 - \mu + s, s + 1 \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \mu < 1,$ $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} v, -1 - \operatorname{Re} v$
2(6)	$(1 - \sqrt[3]{x})_+^{-\mu/2} \times$ $\times P_v^\mu \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right)$	$3^\mu \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s - v, 3s + 1 + v \\ 1 - \mu + 3s, 3s + 1 \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \mu < 1,$ $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} v/3, -(1 + \operatorname{Re} v)/3$
3(1)	$ 1-x ^{\mu/2} P_v^\mu (2x-1)$	$-\frac{\sin \pi v}{\pi \Gamma(1+v-\mu, -v-\mu)} \Gamma[s + \mu/2,$ $s - \mu/2, 1 + v - \mu/2 - s, -v - \mu/2 - s],$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < 1 + \operatorname{Re} (2v - \mu)/2,$ $-\operatorname{Re} (2v + \mu)/2$
3(2)	$ 1 - \sqrt{x} ^{\mu/2} P_v^\mu (2\sqrt{x}-1)$	$-\frac{2^{-\mu-2} \sin \pi v}{\pi^3 \Gamma(1+v-\mu, -v-\mu)} \Gamma[s + \mu/4,$ $s + (\mu + 2)/4, s - \mu/4, s + (2 - \mu)/4,$ $(1 + v)/2 - \mu/4 - s, 1 + v/2 - \mu/4 - s,$ $-v/2 - \mu/4 - s, (1 - v)/2 - \mu/4 - s],$ $ \operatorname{Re} \mu /4 < \operatorname{Re} s < 1/2 + \operatorname{Re} (2v - \mu)/4,$ $-\operatorname{Re} (2v + \mu)/4$
3(4)	$ 1-x ^{\mu/2} P_v^\mu \left(\frac{2}{x} - 1 \right)$	$-\frac{\sin \pi v}{\pi \Gamma(1+v-\mu, -v-\mu)} \Gamma[s + 1 + v,$ $s - v, -s, -\mu - s],$ $\operatorname{Re} v, -1 - \operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 0, -\operatorname{Re} \mu$

1	2	3
3(6)	$ 1 - \sqrt[3]{x} ^{\mu/2} P_v^\mu \left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1 \right)$	$-\frac{3^{-\mu} \sin \pi v}{16\pi^5 \Gamma(1+v-\mu, -v-\mu)} \times$ $\times \Gamma_3[3s+1+v, 3s-v,$ $-3s, -\mu-3s], \operatorname{Re} v/3,$ $-(1+\operatorname{Re} v)/3 < \operatorname{Re} s < 0, -\operatorname{Re} \mu/3$
4(1)	$ 1-x ^{-\mu/2} P_v^\mu(2x-1)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu/2, s-\mu/2 \\ s+1+v-\mu/2, s-v-\mu/2 \end{matrix} \right] +$ $+ \Gamma \left[\begin{matrix} \mu/2-v-s, 1+v+\mu/2-s \\ 1-\mu/2-s, 1+\mu/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < 1+\operatorname{Re}(\mu+2v)/2,$ $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(\mu-2v)/2$
4(2)	$ 1-\sqrt{x} ^{-\mu/2} P_v^\mu(2\sqrt{x}-1)$	$2^\mu \Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu/4, s+(2+\mu)/4, s-\mu/4, \\ s+(1+v)/2-\mu/4, s+1+v/2-\mu/4, \\ s+(2-\mu)/4 \\ s-v/2-\mu/4, s+(1-v)/2-\mu/4 \end{matrix} \right] +$ $+ 2^\mu \Gamma \left[\begin{matrix} \mu/4-v/2-s, \mu/4+(1-v)/2-s, \\ (2-\mu)/4-s, 1-\mu/4-s, \\ (1+v)/2+\mu/4-s, 1+v/2+\mu/4-s \\ (2+\mu)/4-s, 1+\mu/4-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < 1,$ $ \operatorname{Re} \mu /4 < \operatorname{Re} s < 1/2 + \operatorname{Re}(\mu+2v)/4,$ $\operatorname{Re}(\mu-2v)/4$
4(3)	$ 1-x ^{-\mu/2} P_v^\mu \left(\frac{2}{x} - 1 \right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s+v+1, s-v \\ s+1, s+1-\mu \end{matrix} \right] +$ $+ \Gamma \left[\begin{matrix} \mu-s, -s \\ 1+v-s, -v-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re} v, -1-\operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 0, \operatorname{Re} \mu$
5(1)	$(1+x)^{\mu/2} P_v^\mu(1+2x)$	$\frac{1}{\Gamma(1+v-\mu, -v-\mu)} \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/2, \\ 1-\mu/2-s \\ 1+v-\mu/2-s, -v-\mu/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < 1+\operatorname{Re}(v-\mu/2),$ $-\operatorname{Re}(v+\mu/2),$

1	2	3
5(2)	$(1 + \sqrt{x})^{\mu/2} P_v^\mu (1 + 2\sqrt{x})$	$\frac{2^{-\mu-1}}{\pi \Gamma(1 + v - \mu, -v - \mu)} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s - \mu/4, s + (2 - \mu)/4, \\ (2 - \mu)/4 - s, 1 - \mu/4 - s \\ (1 + v)/2 - \mu/4 - s, 1 + v/2 - \mu/4 - s, \\ -v/2 - \mu/4 - s, (1 - v)/2 - \mu/4 - s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/4 < \operatorname{Re} s < 1/2 + \operatorname{Re} (2v - \mu)/4,$ $- \operatorname{Re} (2v + \mu)/4$
5(4)	$(1 + x)^{\mu/2} P_v^\mu \left(1 + \frac{2}{x} \right)$	$\frac{1}{\Gamma(1 + v - \mu, -v - \mu)} \Gamma \left[\begin{matrix} s + v + 1, \\ s + 1 \\ s - v, -\mu - s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v, -1 - \operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} \mu$
5(6)	$(1 + \sqrt[3]{x})^{\mu/2} P_v^\mu \left(1 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right)$	$\frac{3^{-\mu}}{4\pi^2 \Gamma(1 + v - \mu, -v - \mu)} \times$ $\times \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s + v + 1, 3s - v, -\mu - 3s \\ 3s + 1 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v/3, -(1 + \operatorname{Re} v)/3 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} \mu/3$
6(1)	$(1 + x)^{-\mu/2} P_v^\mu (1 + 2x)$	$- \frac{\sin \pi v}{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s - \mu/2, \mu/2 - v - s, \\ 1 - \mu/2 - s \\ 1 + v + \mu/2 - s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} (\mu/2 - v),$ $1 + \operatorname{Re} (v + \mu/2)$
6(2)	$(1 + \sqrt{x})^{-\mu/2} P_v^\mu (1 + 2\sqrt{x})$	$- \frac{\sin \pi v}{\pi^2 2^{1-\mu}} \Gamma \left[\begin{matrix} s - \mu/4, s + (2 - \mu)/4, \\ (2 - \mu)/4 - s, \\ \mu/4 - v/2 - s, \mu/4 + (1 - v)/2 - s, \\ 1 - \mu/4 - s \\ (1 + v)/2 + \mu/4 - s, 1 + v/2 + \mu/4 - s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/4 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} (\mu - 2v)/4,$ $1/2 + \operatorname{Re} (\mu + 2v)/4$

1	2	3
6(4)	$(1+x)^{-\mu/2} P_v^\mu \left(1 + \frac{2}{x}\right)$	$-\frac{\sin \pi v}{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s-v, s+v+1, -s \\ s+1-\mu \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v, -1-\operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 0$
6(6)	$(1+\sqrt[3]{x})^{-\mu/2} P_v^\mu \left(1 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)$	$-\frac{\sin \pi v}{3^{-\mu} 4\pi^3} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-v, 3s+v+1, -3s \\ 3s+1-\mu \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v/3, -(1+\operatorname{Re} v)/3 < \operatorname{Re} s < 0$
7(1)	$(1+x)^v P_v^\mu \left(\frac{1-x}{1+x}\right)$	$\frac{1}{\Gamma(-v, -v-\mu)} \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/2, \\ 1-\mu/2-s \\ -v+\mu/2-s, -v-\mu/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} (\mu/2-v),$ $-\operatorname{Re} (\mu/2+v)$
7(2)	$(1+\sqrt[3]{x})^v P_v^\mu \left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right)$	$\frac{2^{-2v-2}}{\pi \Gamma(-v, -v-\mu)} \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/4, \\ (2-\mu)/4-s, \\ s+(2-\mu)/4, -v/2+\mu/4-s, \\ 1-\mu/4-s \\ (1-v)/2+\mu/4-s, -v/2-\mu/4-s, \\ (1-v)/2-\mu/4-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/4 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} (\mu-2v)/4,$ $-\operatorname{Re} (\mu+2v)/4$
7(4)	$(1+x)^v P_v^\mu \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$	$\frac{1}{\Gamma(-v, -v-\mu)} \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/2, s+\mu/2, \\ s+1+v-\mu/2 \\ -\mu/2-v-s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} (\mu/2+v)$
7(6)	$(1+\sqrt[3]{x})^v P_v^\mu \left(\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\right)$	$\frac{3^{-2v-1}}{4\pi^2 \Gamma(-v, -v-\mu)} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-\mu/2, \\ 3s+\mu/2, -\mu/2-v-3s \\ 3s+1+v-\mu/2 \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} \mu /6 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} (\mu+2v)/6$

1	2	3
8(1)	$ 1-x ^v P_v^\mu \left(\frac{1+x}{ 1-x } \right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} v+1 \\ -v-\mu \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/2, -v-\mu/2-s \\ s+v+1-\mu/2, \end{matrix} \right. \\ \left. \begin{matrix} 1-\mu/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} (v+\mu/2),$ $\operatorname{Re} v > -1$
8(2)	$ 1-\sqrt{x} ^v P_v^\mu \left(\frac{1+\sqrt{x}}{ 1-\sqrt{x} } \right)$	$2^{-2v-1} \Gamma \left[\begin{matrix} v+1 \\ -v-\mu \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/4, \\ s+(2-\mu)/4, -v/2-\mu/4-s, \\ s+(v+1)/2-\mu/4, s+1+v/2-\mu/4, \\ (1-v)/2-\mu/4-s \end{matrix} \right. \\ \left. \begin{matrix} 1/2-\mu/4-s, 1-\mu/4-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} v > -1,$ $\operatorname{Re} \mu/4 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} (2v+\mu)/4$
8(3)	$ 1-\sqrt[3]{x} ^v P_v^\mu \left(\frac{1+\sqrt[3]{x}}{ 1-\sqrt[3]{x} } \right)$	$3^{-2v-1} \Gamma \left[\begin{matrix} v+1 \\ -v-\mu \end{matrix} \right] \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-\mu/2, \\ -v-\mu/2-3s \end{matrix} \right. \\ \left. \begin{matrix} 3s+v+1-\mu/2, 1-\mu/2-3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v > -1,$ $\operatorname{Re} \mu/6 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} (2v+\mu)/6$
9(1)	$\frac{ 1-x ^\mu}{\sqrt[3]{1+x}} \times$ $\times P_{-1/4}^\mu \left(\frac{1-6x+x^2}{(1+x)^2} \right)$	$2^{-\mu-1} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2+\mu \\ 1/2-2\mu \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/2, \\ s+(1+\mu)/2, \\ (1-3\mu)/2-s \end{matrix} \right. \\ \left. \begin{matrix} 1-\mu/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < (1-3\operatorname{Re} \mu)/2,$ $\operatorname{Re} \mu > -1/2$
9(2)	$\frac{ 1-\sqrt{x} ^\mu}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \times$ $\times P_{-1/4}^\mu \left(\frac{1-6\sqrt{x}+x}{(1+\sqrt{x})^2} \right)$	$2^{-3\mu-1} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2+\mu \\ 1/2-2\mu \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/4, \\ s+(1+\mu)/4, \\ s+(2-\mu)/4, (1-3\mu)/4-s, \\ s+(3+\mu)/4, (2-\mu)/4-s, \\ (3-3\mu)/4-s \end{matrix} \right. \\ \left. \begin{matrix} 1-\mu/4-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/4 < \operatorname{Re} s < (1-3\operatorname{Re} \mu)/4, \operatorname{Re} \mu > -1/2$

1	2	3
9(3)	$\frac{ 1 - \sqrt[3]{x} ^\mu}{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}} \times$ $\times P_{-1/4}^\mu \left(\frac{1 - 6x^{1/3} + x^{2/3}}{(1 + x^{1/3})^2} \right)$	$2^{-\mu-1} 3^{-2\mu} \Gamma \left[\frac{1}{2} + \mu \right] \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s - \mu/2, \\ 1/2 - 2\mu \end{matrix} \right] \Gamma_3 \left[\begin{matrix} (1-3\mu)/2 - 3s \\ 3s + (1+\mu)/2, 1 - \mu/2 - 3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/6 < \operatorname{Re} s < (1 - 3\operatorname{Re} \mu)/6$
10(1)	$\frac{ 1 - x ^\mu}{\sqrt[3]{1 + x}} \times$ $\times P_{-1/4}^\mu \left(\frac{6x - 1 - x^2}{(1 + x)^2} \right)$	$2^{-\mu-1/2} \frac{\cos \pi \mu}{\pi^2} \Gamma \left[\frac{1}{2} + \mu \right] \Gamma [s + \mu/2,$ $s - \mu/2, (1 - \mu)/2 - s, (1 - 3\mu)/2 - s],$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < (1 - \operatorname{Re} \mu)/2,$ $(1 - 3\operatorname{Re} \mu)/2$
10(2)	$\frac{ 1 - \sqrt{x} ^\mu}{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}} \times$ $\times P_{-1/4}^\mu \left(\frac{6\sqrt{x} - 1 - x}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} \right)$	$\frac{\cos \pi \mu}{\pi^2 2^{3\mu+5/2}} \Gamma \left[\frac{1}{2} + \mu \right] \Gamma [s + \mu/4,$ $s + (2 + \mu)/4, s - \mu/4, s + (2 - \mu)/4,$ $(1 - \mu)/4 - s, (3 - \mu)/4 - s, (1 - 3\mu)/4 - s,$ $(3 - 3\mu)/4 - s],$ $ \operatorname{Re} \mu /4 < \operatorname{Re} s < (1 - \operatorname{Re} \mu)/4,$ $(1 - 3\operatorname{Re} \mu)/4$
10(3)	$\frac{ 1 - \sqrt[3]{x} ^\mu}{\sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{x}}} \times$ $\times P_{-1/4}^\mu \left(\frac{6\sqrt[3]{x} - 1 - \sqrt[3]{x^2}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} \right)$	$\frac{\cos \pi \mu}{\pi^6 2^{\mu+9/2} 3^{2\mu}} \Gamma \left[\frac{1}{2} + \mu \right] \times$ $\times \Gamma_3 [3s + \mu/2, 3s - \mu/2, (1 - \mu)/2 - 3s,$ $(1 - 3\mu)/2 - 3s],$ $ \operatorname{Re} \mu /6 < \operatorname{Re} s < (1 - \operatorname{Re} \mu)/6,$ $(1 - 3\operatorname{Re} \mu)/6$
11(1)	$\frac{ 1 - x ^{-\mu}}{\sqrt[3]{1 + x}} \times$ $\times P_{-1/4}^\mu \left(\frac{1 - 6x + x^2}{(1 + x)^2} \right)$	$\frac{\Gamma(1/2 - \mu)}{2^\mu \sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s - \mu/2, (1 + \mu)/2 - s \\ s + (1 - 3\mu)/2, \end{matrix} \right],$ $1 - \mu/2 - s],$ $\operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re} \mu)/2, \operatorname{Re} \mu < 1/2$
11(2)	$\frac{ 1 - \sqrt{x} ^{-\mu}}{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}}} \times$ $\times P_{-1/4}^\mu \left(\frac{1 - 6\sqrt{x} + x}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} \right)$	$\frac{\Gamma(1/2 - \mu)}{2^{-\mu} \sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s - \mu/4, s + (2 - \mu)/4, \\ s + (1 - 3\mu)/4, \end{matrix} \right]$ $(1 + \mu)/4 - s, (3 + \mu)/4 - s],$ $s + (3 - 3\mu)/4, (2 - \mu)/4 - s, 1 - \mu/4 - s],$ $\operatorname{Re} \mu < 1/2, \operatorname{Re} \mu/4 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re} \mu)/4$

1	2	3
11(3)	$\frac{ 1 - \sqrt[3]{x} ^{-\mu}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}} \times$ $\times P_{-1/4}^{\mu} \left(\frac{1 - 6x^{1/3} + x^{2/3}}{(1 + x^{1/3})^2} \right)$	$\frac{\Gamma(1/2 - \mu)}{2^{\mu} 3^{-2\mu} \sqrt{\pi}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s - \mu/2, \\ 3s + (1 - 3\mu)/2, \\ (1 + \mu)/2 - 3s \\ 1 - \mu/2 - 3s \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} \mu < 1/2,$ $\operatorname{Re} \mu/6 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re} \mu)/6$
12(1)	$\frac{ 1 - x ^{-\mu}}{\sqrt{1 + x}} \times$ $\times P_{-1/4}^{\mu} \left(\frac{6x - 1 - x^2}{(1 + x)^2} \right)$	$\frac{2^{-\mu-1/2} \Gamma(1/2 - \mu)}{\sqrt{\pi} \sin \pi \mu} \left\{ \Gamma \left[\begin{matrix} s - \mu/2, \\ s + (1 - 3\mu)/2, \\ (1 + \mu)/2 - s \\ 1 - \mu/2 - s \end{matrix} \right] - \cos(2\pi\mu) \Gamma \left[\begin{matrix} s + \mu/2, \\ (1 + 3\mu)/2 - s \\ s + (1 - \mu)/2, 1 + \mu/2 - s \end{matrix} \right] \right\}, \quad \operatorname{Re} \mu < 1/2,$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re} \mu)/2,$ $(1 + 3\operatorname{Re} \mu)/2$
12(2)	$\frac{ 1 - \sqrt[3]{x} ^{-\mu}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}} \times$ $\times P_{-1/4}^{\mu} \left(\frac{6\sqrt[3]{x} - 1 - x}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} \right)$	$\frac{2^{\mu-1/2} \Gamma(1/2 - \mu)}{\sqrt{\pi} \sin \pi \mu} \left\{ \Gamma \left[\begin{matrix} s - \mu/4, \\ s + (1 - 3\mu)/4, \\ s + (2 - \mu)/4, (1 + \mu)/4 - s, (3 + \mu)/4 - s \\ s + (3 - 3\mu)/4, (2 - \mu)/4 - s, \\ 1 - \mu/4 - s \end{matrix} \right] - \cos(2\pi\mu) \Gamma \left[\begin{matrix} s + \mu/4, \\ s + (1 - \mu)/4, \\ s + (2 + \mu)/4, (1 + 3\mu)/4 - s, \\ s + (3 - \mu)/4, (2 + \mu)/4 - s, \\ (3 + 3\mu)/4 - s \\ 1 + \mu/4 - s \end{matrix} \right] \right\}, \quad \operatorname{Re} \mu < 1/2,$ $ \operatorname{Re} \mu /4 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re} \mu)/4,$ $(1 + 3\operatorname{Re} \mu)/4$
12(3)	$\frac{ 1 - \sqrt[3]{x} ^{-\mu}}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}} \times$ $\times P_{-1/4}^{\mu} \left(\frac{6x^{1/3} - 1 - x^{2/3}}{(1 + x^{1/3})^2} \right)$	$\frac{2^{-\mu-1/2} 3^{2\mu} \Gamma(1/2 - \mu)}{\sqrt{\pi} \sin \pi \mu} \times$ $\times \left\{ \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s - \mu/2, (1 + \mu)/2 - 3s \\ 3s + (1 - 3\mu)/2, 1 - \mu/2 - 3s \end{matrix} \right] - \right.$ $\left. - \cos(2\pi\mu) \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s + \mu/2, \\ 3s + (1 - \mu)/2, \\ (1 + 3\mu)/2 - 3s \\ 1 + \mu/2 - 3s \end{matrix} \right] \right\}, \quad \operatorname{Re} \mu < 1/2,$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < 3\operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re} \mu)/2,$ $(1 + 3\operatorname{Re} \mu)/2$

1	2	3
13(1)	$(1-x)_{+}^{-\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(\sqrt{x})$	$2^{\mu} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s+(1-\mu-\nu)/2, s+1+(\nu-\mu)/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re} s > 0$
13(2)	$(1-\sqrt{x})_{+}^{-\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(\sqrt[4]{x})$	$2^{2\mu} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+1/4, s+3/4 \\ s+(1-\mu-\nu)/4, s+(3-\mu-\nu)/4, \\ s+(2+\nu-\mu)/4, s+1+(\nu-\mu)/4 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re} s > 0$
13(4)	$(x-1)_{+}^{-\mu/2} P_{\nu}^{\mu} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$2^{\mu} \Gamma \left[\begin{matrix} \mu/2-s, (\mu+1)/2-s \\ (1-\nu)/2-s, 1+\nu/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \mu/2$
13(6)	$(\sqrt[3]{x}-1)_{+}^{-\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(x^{-1/6})$	$6^{\mu} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} \mu/2-3s, (\mu+1)/2-3s \\ (1-\nu)/2-3s, 1+\nu/2-3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \mu/6$
14(1)	$(x-1)_{+}^{-\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(\sqrt{x})$	$2^{\mu} \Gamma \left[\begin{matrix} (1+\mu+\nu)/2-s, (\mu-\nu)/2-s \\ 1-s, 1/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re} s < (1+\operatorname{Re}(\mu+\nu))/2,$ $\operatorname{Re}(\mu-\nu)/2$
14(2)	$(\sqrt{x}-1)_{+}^{-\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(\sqrt[4]{x})$	$4^{\mu} \Gamma \left[\begin{matrix} (1+\mu+\nu)/4-s, (3+\mu+\nu)/4-s, \\ 1/2-s, 1-s, 1/4-s, 3/4-s \\ (\mu-\nu)/4-s, 1/2+(\mu-\nu)/4-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re} s < (1+\operatorname{Re}(\mu+\nu))/4,$ $\operatorname{Re}(\mu-\nu)/4$
14(4)	$(1-x)_{+}^{-\mu/2} P_{\nu}^{\mu} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$2^{\mu} \Gamma \left[\begin{matrix} s+(1+\nu)/2, s-\nu/2 \\ s+1-\mu/2, s+(1-\mu)/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \nu/2, -(1+\operatorname{Re} \nu)/2$
14(6)	$(1-\sqrt[3]{x})_{+}^{-\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(x^{-1/6})$	$6^{\mu} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+(1+\nu)/2, 3s-\nu/2 \\ 3s+1-\mu/2, 3s+(1-\mu)/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \nu/6, -(1+\operatorname{Re} \nu)/6$
15(1)	$ 1-x ^{\mu/2} P_{\nu}^{\mu}(\sqrt{x})$	$\frac{2^{-\mu-1}}{\pi \Gamma[1+\nu-\mu, -\nu-\mu]} \Gamma[s, s+1/2,$ $(1+\nu-\mu)/2-s, -(\nu+\mu)/2-s],$ $0 < \operatorname{Re} s < (1+\operatorname{Re}(\nu-\mu))/2,$ $-\operatorname{Re}(\nu+\mu)/2$

1	2	3
15(2)	$ 1 - \sqrt{x} ^{\mu/2} P_v^\mu(\sqrt[4]{x})$	$\frac{2^{-2\mu-3}}{\pi^3 \Gamma[1+v-\mu, -v-\mu]} \Gamma[s, s+1/2,$ $s+1/4, s+3/4, (1+v-\mu)/4-s,$ $(3+v-\mu)/4-s, (2-v-\mu)/4-s,$ $1-(v+\mu)/4-s],$ $0 < \operatorname{Re} s < (1+\operatorname{Re}(v-\mu))/4,$ $-\operatorname{Re}(v+\mu)/4$
15(4)	$ 1-x ^{\mu/2} P_v^\mu\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{2^{-\mu-1}}{\pi \Gamma[1+v-\mu, -v-\mu]} \Gamma[s+(1+v)/2,$ $s-v/2, -\mu/2-s, (1-\mu)/2-s],$ $\operatorname{Re} v/2, -(1+\operatorname{Re} v)/2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} \mu/2$
15(6)	$ 1-\sqrt[3]{x} ^{\mu/2} P_v^\mu(x^{-1/6})$	$\frac{6^{-\mu-2}}{8\pi^5 \Gamma[1+v-\mu, -v-\mu]} \times$ $\times \Gamma_3[3s+(1+v)/2, 3s-v/2,$ $-\mu/2-3s, (1-\mu)/2-3s], \operatorname{Re} v/6,$ $-(1+\operatorname{Re} v)/6 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} \mu/6$
16(1)	$ 1-x ^{-\mu/2} P_v^\mu(\sqrt{x})$	$2^\mu \Gamma\left[s, s+1/2\right.$ $\left. s+(1-\mu-v)/2, s+1+(v-\mu)/2\right] +$ $+ 2^\mu \Gamma\left[(1+\mu+v)/2-s, (\mu-v)/2-s\right],$ $0 < \operatorname{Re} s < (1+\operatorname{Re}(\mu+v))/2,$ $\operatorname{Re}(\mu-v)/2, \operatorname{Re} \mu < 1$
16(2)	$ 1-\sqrt{x} ^{-\mu/2} P_v^\mu(\sqrt[4]{x})$	$4^\mu \Gamma\left[s, s+1/2, s+1/4, s+3/4\right.$ $\left. s+(1-\mu-v)/4, s+(3-\mu-v)/4,\right.$ $\left. s+(2+v-\mu)/4, s+1+(v-\mu)/4\right] +$ $+ 4^\mu \Gamma\left[(1+\mu+v)/4-s, (3+\mu+v)/4-s,\right.$ $\left. 1/2-s, 1-s, 1/4-s, 3/4-s\right.$ $\left. (\mu-v)/4-s, (2+\mu-v)/4-s\right],$ $0 < \operatorname{Re} s < (1+\operatorname{Re}(\mu+v))/4,$ $\operatorname{Re}(\mu-v)/4, \operatorname{Re} \mu < 1$

1	2	3
16(3)	$ 1-x ^{-\mu/2} P_v^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$2^\mu \Gamma \left[\frac{\mu/2-s, (\mu+1)/2-s}{(1-v)/2-s, 1+v/2-s} \right] +$ $+ 2^\mu \Gamma \left[\frac{s+(1+v)/2, s-v/2}{1-\mu/2+s, s+(1-\mu)/2} \right],$ $\operatorname{Re} v/2, -(1+\operatorname{Re} v)/2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \mu/2,$ $\operatorname{Re} \mu < 1$
17(1)	$P_v^\mu (\sqrt{1+x})$	$\frac{2^\mu}{\Gamma[(1+v-\mu)/2, -(v+\mu)/2]} \times$ $\times \Gamma \left[\frac{s-\mu/2, (1+v)/2-s, -v/2-s}{1-\mu/2-s} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < (1+\operatorname{Re} v)/2, -\operatorname{Re} v/2$
17(2)	$P_v^\mu (\sqrt{1+v x})$	$\frac{2^{\mu-3/2}}{\pi \Gamma[(1+v-\mu)/2, -(v+\mu)/2]} \times$ $\times \Gamma \left[\frac{s-\mu/4, s+(2-\mu)/4, (1+v)/4-s,}{(2-\mu)/4-s, 1-\mu/4-s, (3+v)/4-s, -v/4-s, (2-v)/4-s} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/4 < \operatorname{Re} s < (1+\operatorname{Re} v)/4, -\operatorname{Re} v/4$
17(4)	$P_v^\mu \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} \right)$	$\frac{2^\mu}{\Gamma[(1+v-\mu)/2, -(v+\mu)/2]} \times$ $\times \Gamma \left[\frac{s-v/2, s+(1+v)/2, -\mu/2-s}{s+1-\mu/2} \right],$ $\operatorname{Re} v/2, -(1+\operatorname{Re} v)/2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} \mu/2$
17(6)	$P_v^\mu (\sqrt{1+x^{-1/3}})$	$\frac{2^{\mu-2}}{\pi^2 \sqrt{3} \Gamma[(1+v-\mu)/2, -(v+\mu)/2]} \times$ $\times \Gamma_3 \left[\frac{3s-v/2, 3s+(1+v)/2, -\mu/2-3s}{3s+1-\mu/2} \right],$ $\operatorname{Re} v/6, -(1+\operatorname{Re} v)/6 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} \mu/6$
18(1)	$(1+x)^{-1/2} P_v^\mu (\sqrt{1+x})$	$\frac{2^\mu}{\Gamma[(1-v-\mu)/2, 1+(v-\mu)/2]} \times$ $\times \Gamma \left[\frac{s-\mu/2, 1+v/2-s, (1-v)/2-s}{1-\mu/2-s} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < 1+\operatorname{Re} v/2, (1-\operatorname{Re} v)/2$

1	2	3
18(2)	$(1 + \sqrt{x})^{-1/2} \times$ $\times P_v^\mu \left(\sqrt{1 + \sqrt{x}} \right)$	$\frac{2^{\mu-1/2}}{\pi \Gamma [(1-v-\mu)/2, 1+(v-\mu)/2]} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/4, s+(2-\mu)/4, (2+v)/4-s, \\ (2-\mu)/4-s, 1-\mu/4-s \\ 1+v/4-s, (1-v)/4-s, (3-v)/4-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/4 < \operatorname{Re} s < 1/2 + \operatorname{Re} v/4, (1-\operatorname{Re} v)/4$
18(4)	$(1+x)^{-1/2} P_v^\mu \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} \right)$	$\frac{2^\mu}{\Gamma [(1-v-\mu)/2, 1+(v-\mu)/2]} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s+(1+v)/2, s-v/2, (1-\mu)/2-s \\ s+(1-\mu)/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v/2, -(1+\operatorname{Re} v)/2 < \operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} \mu)/2$
18(6)	$(1 + \sqrt[3]{x})^{-1/2} \times$ $\times P_v^\mu \left(\sqrt[3]{1 + x^{-1/3}} \right)$	$\frac{2^{\mu-2} \sqrt[3]{3}}{\pi^2 \Gamma [(1-v-\mu)/2, 1+(v-\mu)/2]} \times$ $\times \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+(1+v)/2, 3s-v/2, \\ 3s+(1-\mu)/2 \\ (1-\mu)/2-3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v/6, -(1+\operatorname{Re} v)/6 < \operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} \mu)/6$
19(1)	$(1+x)^{v/2} P_v^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} \right)$	$\frac{2^{-v-1}}{\sqrt{\pi} \Gamma (-\mu-v)} \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/2, -v/2-s, \\ 1-\mu/2-s \\ (1-v)/2-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} v/2$
19(2)	$(1 + \sqrt{x})^{v/2} \times$ $\times P_v^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} \right)$	$\frac{2^{-2v-5/2}}{\pi^{3/2} \Gamma (-\mu-v)} \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/4, s+(2-\mu)/4, \\ (2-\mu)/4-s, \\ -v/4-s, (2-v)/4-s, (1-v)/4-s, \\ 1-\mu/4-s \\ (3-v)/4-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \mu/4 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} v/4$
19(4)	$(1+x)^{v/2} P_v^\mu \left(\sqrt{\frac{x}{1+x}} \right)$	$\frac{2^{-v-1}}{\sqrt{\pi} \Gamma (-\mu-v)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ s+1+(v-\mu)/2 \\ -s-(v+\mu)/2 \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} (v+\mu)/2$

1	2	3
19(6)	$(1+\sqrt[3]{x})^{v/2} \times$ $\times P_v^\mu \left(\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{1+x^{1/3}}} \right)$	$\frac{2^{-v-3} 3^{-v-1/2} \pi^{-5/2}}{\Gamma(-\mu-v)} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s, 3s+1/2, \\ 3s+1+(v-\mu)/2 \\ -3s-(v+\mu)/2 \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re}(v+\mu)/6$
20(1)	$(1-x)_+^{-\mu} P_v^\mu \left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}} \right)$	$\frac{\Gamma(1/2-\mu)}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s-v/2, s+(1+v)/2 \\ s+v/2+1-\mu, \\ s+(1-v)/2-\mu \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \mu < 1/2,$ $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} v/2, -(1+\operatorname{Re} v)/2$
20(2)	$(1-\sqrt{x})_+^{-\mu} P_v^\mu \left(\frac{1+\sqrt{x}}{2x^{1/4}} \right)$	$\frac{\Gamma(1/2-\mu)}{2^{-2\mu} \sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s-v/4, s+(2-v)/4, \\ s+v/4+(1-\mu)/2, \\ s+(1+v)/4, s+(3+v)/4 \\ s+v/4+1-\mu/2, s+(1-v)/4-\mu/2, \\ s+(3-v)/4-\mu/2 \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \mu < 1/2,$ $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} v/4, -(1+\operatorname{Re} v)/4$
20(4)	$(x-1)_+^{-\mu} P_v^\mu \left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}} \right)$	$\frac{\Gamma(1/2-\mu)}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} \mu-v/2-s, \\ 1+v/2-s, (1-v)/2-s \\ \mu+(1+v)/2-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \mu < 1/2,$ $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(\mu-v/2), \operatorname{Re}(\mu+v/2)+1/2$
20(6)	$(\sqrt[3]{x}-1)_+^{-\mu} P_v^\mu \left(\frac{1+\sqrt[3]{x}}{2x^{1/6}} \right)$	$\frac{\Gamma(1/2-\mu)}{3^{-2\mu} \sqrt{\pi}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} \mu-v/2-3s, \\ 1+v/2-3s, \\ \mu+(1+v)/2-3s \\ (1-v)/2-3s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \mu < 1/2,$ $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(2\mu-v)/6, (1+\operatorname{Re}(2\mu+v))/6$
21(1)	$ 1-x ^\mu P_v^\mu \left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}} \right)$	$\frac{\cos(\pi\mu)}{\pi^{3/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} \mu+1/2 \\ -v-\mu, 1+v-\mu \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma[s+(v+1)/2, s-v/2, -\mu-v/2-s, \\ (1+v)/2-\mu-s], \operatorname{Re} v/2,$ $-(1+\operatorname{Re} v)/2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re}(\mu+v/2),$ $1/2+\operatorname{Re}(v/2-\mu)$

1	2	3
21(2)	$ 1 - \sqrt{x} ^\mu P_v^\mu \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{2x^{1/4}} \right)$	$\frac{\cos(\pi\mu)}{\pi^{7/2} 2^{2\mu+2}} \Gamma \left[\begin{matrix} \mu + 1/2 \\ -v - \mu, 1 + v - \mu \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma[s + (v+1)/4, s + (v+3)/4, s - v/4, s + (2-v)/4, -\mu/2 - v/4 - s, (1-\mu)/2 - v/4 - s, (1+v)/4 - \mu/2 - s, (3+v)/4 - \mu/2 - s], \operatorname{Re} v/4,$ $-(1 + \operatorname{Re} v)/4 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re}(2\mu + v)/4, (1 + \operatorname{Re}(v - 2\mu))/4$
21(3)	$ 1 - \sqrt[3]{x} ^\mu P_v^\mu \left(\frac{1 + \sqrt[3]{x}}{2x^{1/6}} \right)$	$\frac{\cos(\pi\mu)}{3^{2\mu} 16\pi^5 \sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} \mu + 1/2 \\ -v - \mu, 1 + v - \mu \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma_3[3s + (v+1)/2, 3s - v/2, -\mu - v/2 - 3s, (1+v)/2 - \mu - 3s], \operatorname{Re} v/6,$ $-(1 + \operatorname{Re} v)/6 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re}(2\mu + v)/6, (1 + \operatorname{Re}(v - 2\mu))/6$
22(1)	$ 1 - x ^{-\mu} P_v^\mu \left(\frac{1 + x}{2\sqrt{x}} \right)$	$\frac{\Gamma(1/2 - \mu)}{\sqrt{\pi} \cos \pi v} \left\{ \sin \pi(\mu - v) \times \right.$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s - v/2, \mu - v/2 - s \\ s + (1-v)/2 - \mu, (1-v)/2 - s \end{matrix} \right] +$ $+ \sin \pi(\mu + v) \Gamma \left[\begin{matrix} s + (1+v)/2, \\ s + 1 + v/2 - \mu, \\ (1+v)/2 + \mu - s \end{matrix} \right] \left. \right\}, \operatorname{Re} \mu < 1/2,$ $\operatorname{Re} v/2,$ $-(1 + \operatorname{Re} v)/2 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re}(v + 2\mu))/2, \operatorname{Re}(\mu - v/2)$
22(2)	$ 1 - \sqrt{x} ^{-\mu} P_v^\mu \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{2x^{1/4}} \right)$	$\frac{2^{2\mu} \Gamma(1/2 - \mu)}{\sqrt{\pi} \cos \pi v} \left\{ \sin \pi(\mu - v) \times \right.$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s - v/4, s + (2-v)/4, \mu/2 - v/4 - s, \\ s + (1-v)/4 - \mu/2, \\ (1+\mu)/2 - v/4 - s \\ s + (3-v)/4 - \mu/2, (1-v)/4 - s, \\ (3-v)/4 - s \end{matrix} \right] + \sin \pi(\mu + v) \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s + (1+v)/4, s + (3+v)/4, \\ s + (1-\mu)/2 + v/4, s + 1 - \mu/2 + v/4, \end{matrix} \right]$

1	2	3
		$\left. \begin{aligned} & (1+v)/4+\mu/2-s, (3+v)/4+\mu/4-s \Big] \Big\}, \\ & (2+v)/4-s, 1+v/4-s \end{aligned} \right\},$ $\begin{aligned} & \operatorname{Re} \mu < 1/2; \operatorname{Re} v/4, \\ & -(1+\operatorname{Re} v)/4 < \operatorname{Re} s < (1+\operatorname{Re}(v+2\mu))/4, \\ & \operatorname{Re}(\mu/2-v/4) \end{aligned}$
22(3)	$ 1-\sqrt[3]{x} ^{-\mu} P_v^\mu \left(\frac{1+\sqrt[3]{x}}{2x^{1/6}} \right)$	$\frac{3^{2\mu} \Gamma(1/2-\mu)}{\sqrt{\pi} \cos \pi v} \left\{ \sin \pi(\mu-v) \times \right.$ $\times \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s-v/2, \mu-v/2-3s \\ 3s+(1-v)/2-\mu, (1-v)/2-3s \end{matrix} \right] +$ $+ \sin \pi(\mu+v) \Gamma \left[\begin{matrix} 3s+(1+v)/2, \\ 3s+1+v/2-\mu, \\ (1+v)/2+\mu-3s \end{matrix} \right] \Big\}, \quad \operatorname{Re} \mu < 1/2,$ $1+v/2-3s$ $\begin{aligned} & \operatorname{Re} v/6, \\ & -(1+\operatorname{Re} v)/6 < \operatorname{Re} s < (1+\operatorname{Re}(v+2\mu))/6, \\ & \operatorname{Re}(2\mu-v)/6 \end{aligned}$
23(1)	$(1+x)^{v/2} P_v^\mu \left(\frac{2+x}{2\sqrt{1+x}} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(-\mu-v)} \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu, -v-s, \\ 1-\mu-s \\ 1/2-s \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} s < 1/2, -\operatorname{Re} v$
23(2)	$(1+\sqrt{x})^{v/2} \times$ $\times P_v^\mu \left(\frac{2+\sqrt{x}}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} \right)$	$\frac{2^{-v-3/2}}{\pi^{3/2} \Gamma(-\mu-v)} \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/2, s+(1-\mu)/2, \\ (1-\mu)/2-s, \\ -v/2-s, (1-v)/2-s, 1/4-s, 3/4-s \\ 1-\mu/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < 1/4, -\operatorname{Re} v/2$
23(4)	$(1+x)^{v/2} \times$ $\times P_v^\mu \left(\frac{1+2x}{2\sqrt{x(1+x)}} \right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(-\mu-v)} \Gamma \left[\begin{matrix} s+(1+v)/2, s-v/2, \\ s+1+v/2-\mu \\ -v/2-\mu-s \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} v/2,$ $-(1+\operatorname{Re} v)/2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re}(v/2+\mu)$
23(6)	$(1+\sqrt[3]{x})^{v/2} \times$ $\times P_v^\mu \left(\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{2x^{1/6}\sqrt{1+x^{1/3}}} \right)$	$\frac{3^{-v-1/2} \pi^{-5/2}}{4 \Gamma(-\mu-v)} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+(1+v)/2, \\ 3s+1+v/2-\mu \\ 3s-v/2, -v/2-\mu-3s \end{matrix} \right],$ $\begin{aligned} & \operatorname{Re} v/6, \\ & -(1+\operatorname{Re} v)/6 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re}(v+2\mu)/6 \end{aligned}$

1	2	3
24(1)	$\frac{ 1 \pm \sqrt{x} }{ 1-x ^{-2\nu}} \times$ $\times P_{\nu}^{2\nu+1} \left(\frac{1 \pm 6\sqrt{x} + x}{(1 \mp \sqrt{x})^2} \right)$	$\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(3/2 + 2\nu)}{\Gamma[-1 - 3\nu, -\nu]} \Gamma \left[\begin{matrix} s - 1/4 - \nu/2, \\ s + 5/4 + 3\nu/2, \\ -5\nu/2 - 3/4 - s \\ 3/4 - \nu/2 - s \end{matrix} \right],$ $1/4 + \operatorname{Re} \nu/2 < \operatorname{Re} s < -3/4 - 5 \operatorname{Re} \nu/2,$ $\operatorname{Re} \nu > -3/4$
24(2)	$\frac{ 1 \pm \sqrt{x} }{ 1-x ^{-2\nu}} \times$ $\times P_{\nu}^{2\nu+1} \left(\frac{-1 \mp 6\sqrt{x} - x}{(1 \mp \sqrt{x})^2} \right)$	$-\frac{\cos 2\pi\nu}{2\pi^{3/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} 2\nu + 3/2 \\ -\nu, -1 - 3\nu \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma[s + \nu/2 + 1/4, s - \nu/2 - 1/4, \\ -1/4 - 3\nu/2 - s, -3/4 - 5\nu/2 - s],$ $\operatorname{Re} \nu < -1/3; -1/4 - \operatorname{Re} \nu/2,$ $1/4 + \operatorname{Re} \nu/2 < \operatorname{Re} s < -1/4 - 3 \operatorname{Re} \nu/2,$ $-3/4 - 5 \operatorname{Re} \nu/2$
25(1)	$\frac{ 1 \pm \sqrt{x} }{ 1-x ^{-2\nu}} \times$ $\times P_{\nu}^{2\nu-1} \left(\frac{1 \pm 6\sqrt{x} + x}{(1 \mp \sqrt{x})^2} \right)$	$-\frac{\sin \pi\nu}{\sqrt{\pi}} \Gamma(2\nu + 3/2) \Gamma \left[\begin{matrix} s + \nu/2 + 1/4, \\ s + 5\nu/2 + 7/4, \\ -1/4 - 3\nu/2 - s \\ 5/4 + \nu/2 - s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \nu > -3/4,$ $-1/4 - \operatorname{Re} \nu/2 < \operatorname{Re} s < -1/4 - 3 \operatorname{Re} \nu/2$
25(2)	$\frac{ 1 \pm \sqrt{x} }{ 1-x ^{-2\nu}} \times$ $\times P_{\nu}^{2\nu-1} \left(\frac{-1 \mp 6\sqrt{x} - x}{(1 \mp \sqrt{x})^2} \right)$	$\frac{\Gamma(2\nu + 3/2)}{2\pi^{5/2} \cos \pi\nu} \left\{ \sin 3\pi\nu \Gamma \left[\begin{matrix} s - \nu/2 - 1/4, \\ s + 3\nu/2 + 5/4, \\ -3/4 - 5\nu/2 - s \\ 3/4 - \nu/2 - s \end{matrix} \right] + \sin \pi\nu \Gamma \left[\begin{matrix} s + \nu/2 + 1/4, \\ s + 5\nu/2 + 7/4, \\ -3\nu/2 - 1/4 - s \\ 5/4 + \nu/2 - s \end{matrix} \right] \right\},$ $-3/4 < \operatorname{Re} \nu < -1/3, \operatorname{Re} \nu/2 + 1/4,$ $- \operatorname{Re} \nu/2 - 1/4 < \operatorname{Re} s < -1/4 - 3 \operatorname{Re} \nu/2,$ $-3/4 - 5 \operatorname{Re} \nu/2$
26(1)	$\frac{ 1-x ^{\nu+1/2}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \times$ $\times P_{\nu}^{\nu+1/2} \left(\frac{2\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} \right)$	$-\frac{\sin \pi\nu}{\pi^2 2^{\nu+3/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} \nu + 1 \\ -2\nu - 1/2 \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma[s, s + 1/4, -\nu - 1/4 - s, -\nu - s],$ $0 < \operatorname{Re} s < -1/4 - \operatorname{Re} \nu$

1	2	3
26(2)	$\frac{ 1-x ^{v+1/2}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \times$ $\times P_v^{-v-1/2} \left(\frac{2\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} \right)$	$-\frac{\Gamma(v+1)}{2^{v+1/2}\sqrt{\pi}} \left\{ \sin(v+1/4)\pi \times \right.$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s, -1/4-v-s \\ s+v+1, 3/4-s \end{matrix} \right] +$ $+ \cos(v+1/4)\pi \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/4, -v-s \\ s+v+5/4, 1-s \end{matrix} \right] \left. \vphantom{\frac{\Gamma(v+1)}{2^{v+1/2}\sqrt{\pi}}} \right\},$ $-1 < \operatorname{Re} v < -1/4, 0 < \operatorname{Re} s < -1/4 - \operatorname{Re} v$
27(1)	$[P_v^\mu(\sqrt{1-x}) +$ $+ P_v^\mu(-\sqrt{1-x})] \times$ $\times (1-x)_+^{-1/2}$	$\frac{2^{\mu+1}\pi}{\Gamma[1+(v-\mu)/2, (1-\mu-v)/2]} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu/2, s-\mu/2 \\ s+(1+v)/2, s-v/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \mu /2$
27(2)	$\left[P_v^\mu(\sqrt{1-\sqrt{x}}) + \right.$ $+ P_v^\mu(-\sqrt{1-\sqrt{x}}) \left. \right] \times$ $\times (1-\sqrt{x})_+^{-1/2}$	$\frac{2^{\mu+3/2}\pi}{\Gamma[1+(v-\mu)/2, (1-\mu-v)/2]} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu/4, s+(2+\mu)/4, s-\mu/4, \\ s+(1+v)/4, s+(3+v)/4, s-v/4, \\ s+(2-\mu)/4 \\ s+(2-v)/4 \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \mu /4$
27(3)	$\left[P_v^\mu \left(\sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) + \right.$ $+ P_v^\mu \left(-\sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) \left. \right] \times$ $\times (x-1)_+^{-1/2}$	$\frac{2^{\mu+1}\pi}{\Gamma[1+(v-\mu)/2, (1-\mu-v)/2]} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} (1+\mu)/2-s, (1-\mu)/2-s \\ 1+v/2-s, (1-v)/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < (1- \operatorname{Re} \mu)/2$
28(1)	$[P_v^\mu(\sqrt{1+x})]^2$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma[1+v-\mu, -v-\mu]} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu, 1+v-s, 1/2-s, -v-s \\ 1-s, 1-\mu-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} v, 1+\operatorname{Re} v, 1/2$
28(2)	$[P_v^\mu(\sqrt{1+\sqrt{x}})]^2$	$\frac{(2\pi)^{-3/2}}{\Gamma[1+v-\mu, -v-\mu]} \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/2, \\ 1/2-s, \\ s+(1-\mu)/2, (1+v)/2-s, 1+v/2-s, \\ 1-s, (1-\mu)/2-s, 1-\mu/2-s \\ -v/2-s, (1-v)/2-s, 1/4-s, 3/4-3 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} v/2,$ $(1+\operatorname{Re} v)/2, 1/4$

1	2	3
28(3)	$\left[P_v^\mu \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) \right]^2$	$\frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma[1+v-\mu, -v-\mu]} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1+v, \\ s+1, \\ s-v, s+1/2, -\mu-s \end{matrix} \right], \quad -1-\operatorname{Re} v, \\ s+1-\mu$ $\operatorname{Re} v, -1/2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} \mu$
29(1)	$\frac{P_v^\mu(\sqrt{1+x}) P_{-v}^\mu(\sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma[1+v-\mu, 1-v-\mu]} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu, 1/2-s, 1+v-s, 1-v-s \\ 1-s, 1-\mu-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} s < 1+\operatorname{Re} v, 1-\operatorname{Re} v, 1/2$
29(2)	$\left[P_{-v}^\mu(\sqrt{1+\sqrt{x}}) \times \right.$ $\times P_{-v}^\mu(\sqrt{1+\sqrt{x}}) \left. \right] \times$ $\times [\sqrt{1+\sqrt{x}}]^{-1}$	$\frac{1}{\pi^{3/2} \sqrt{2} \Gamma[1+v-\mu, 1-v-\mu]} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/2, s+(1-\mu)/2, 1/4-s, \\ 1/2-s, 1-s, (1-\mu)/2-s, \\ 3/4-s, (1+v)/2-s, 1+v/2-s, \\ 1-\mu/2-s \end{matrix} \right],$ $(1-v)/2-s, 1-v/2-s \left. \right],$ $\operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < (1+\operatorname{Re} v)/2, (1-\operatorname{Re} v)/2,$ $1/4$
29(3)	$\left[P_v^\mu \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) \times \right.$ $\times P_{-v}^\mu \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} \right) \left. \right] \times$ $\times [\sqrt{1+x}]^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma[1+v-\mu, 1-v-\mu]} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/2+v+s, s+1/2-v, \\ s+1/2, s+1/2-\mu \\ 1/2-\mu-s \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} v-1/2,$ $-\operatorname{Re} v-1/2, 0 < \operatorname{Re} s < 1/2-\operatorname{Re} \mu$
30(1)	$P_v^\mu(\sqrt{1+x}) \times$ $\times P_{\mu-1/2}^{v+1/2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} \right)$	$\frac{1}{\pi \sqrt{2} \Gamma(-v-\mu)} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/4, s+1/4-\mu, \\ s+1/4-v, \\ 1/4-s, -v-1/4-s \end{matrix} \right],$ $3/4-\mu-s$ $-1/4, -1/4+\operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} s < 1/4,$ $-1/4-\operatorname{Re} v$

1	2	3
30(2)	$P_v^\mu \left(\sqrt{1 + \sqrt{x}} \right) \times$ $\times P_{\mu-1/2}^{v+1/2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \right)$	$\frac{1}{4\pi^2 \Gamma(-v-\mu)} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/8, s+5/8, \\ s+1/8-v/2, \\ s+1/8-\mu/2, s+5/8-\mu/2, 1/8-s, \\ s+5/8-v/2, 3/8-\mu/2-s, \\ 5/8-s, -v/2-1/8-s, -v/2+3/8-s, \\ 7/8-\mu/2-s \end{matrix} \right],$ $-1/8, \operatorname{Re} \mu/2 - 1/8 < \operatorname{Re} s < 1/8,$ $-1/8 - \operatorname{Re} v/2$
30(3)	$P_v^\mu \left(\sqrt{1 + x^{1/3}} \right) \times$ $\times P_{\mu-1/2}^{v+1/2} \left(\sqrt{1 + x^{-1/3}} \right)$	$\frac{1}{4 \sqrt[3]{6} \pi^3 \Gamma(-v-\mu)} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+1/4, \\ 3s+1/4-v, \\ 3s+1/4-\mu, 1/4-3s, -v-1/4-3s, \\ 3/4-\mu-3s \end{matrix} \right],$ $-1/12, \operatorname{Re} \mu/3 - 1/12 < \operatorname{Re} s < 1/12,$ $-1/12 - \operatorname{Re} v/3$
31(1)	$(1+x)^{-\mu/2} Q_v^\mu (1+2x)$	$\frac{e^{\pi \mu i}}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu/2, s-\mu/2, v+1+\mu/2-s, \\ s+v+1-\mu/2 \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < 1 + \operatorname{Re} (v + \mu/2)$
31(2)	$(1+\sqrt{x})^{-\mu/2} Q_v^\mu (1+2\sqrt{x})$	$\frac{e^{\pi \mu i}}{\pi^{2-\mu}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu/4, s+(\mu+2)/4, \\ s+(v+1)/2-\mu/4, \\ s-\mu/4, s+(2-\mu)/4, (v+1)/2+\mu/4-s, \\ s+1+v/2-\mu/4 \end{matrix} \right],$ $1+v/2+\mu/4-s$ $ \operatorname{Re} \mu /4 < \operatorname{Re} s < 1/2 + \operatorname{Re} (v/2 + \mu/4)$
31(4)	$(1+x)^{-\mu/2} Q_v^\mu \left(1 + \frac{2}{x} \right)$	$\frac{e^{\pi \mu i}}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+v+1, \mu-s, -s, \\ v+1-s \end{matrix} \right],$ $-1 - \operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \mu, 0$
31(6)	$(1+\sqrt[3]{x})^{-\mu/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(1 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \right)$	$\frac{e^{\pi \mu i} 3^\mu}{8\pi^2} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+v+1, \mu-3s, -3s, \\ v+1-3s \end{matrix} \right],$ $-(1 + \operatorname{Re} v)/3 < \operatorname{Re} s < 0, \operatorname{Re} \mu/3$

1	2	3
32(1)	$e^{-\mu i \pi} (x-1)_+^{-\mu/2} \times$ $\times Q_v^\mu (2x-1) +$ $+ (1-x)_+^{-\mu/2} Q_v^\mu (2x-1)$	$\frac{\sin \pi v \sin \pi (\mu - v)}{2\pi \sin \pi \mu} \Gamma [s - \mu/2, s + \mu/2,$ $\mu/2 - v - s, \mu/2 + v + 1 - s] -$ $- \frac{\pi}{2 \sin \pi \mu} \Gamma \left[\begin{matrix} -s - v + \mu/2, \\ -s + \mu/2 + 1, \\ 1 + v + \mu/2 - s \end{matrix} \right] - \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \pi \mu \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s - \mu/2, s + \mu/2 \\ s - v - \mu/2, s + v + 1 - \mu/2 \end{matrix} \right],$ $\mu \neq -1, -2, \dots, \operatorname{Re} \mu < 1,$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} (\mu/2 - v),$ $1 + \operatorname{Re} (\mu/2 + v)$
32(2)	$e^{-\mu i \pi} (1-x)_+^{-\mu/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{2}{x} - 1 \right) +$ $+ (x-1)_+^{-\mu/2} Q_v^\mu \left(\frac{2}{x} - 1 \right)$	$\frac{\sin \pi v \sin \pi (\mu - v)}{2\pi \sin \pi \mu} \Gamma [s - v, s + v + 1,$ $-s, \mu - s] - \frac{\pi}{2 \sin \pi \mu} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s - v, s + v + 1 \\ s + 1, s + 1 - \mu \end{matrix} \right] -$ $- \frac{\pi}{2} \operatorname{ctg} \pi \mu \Gamma \left[\begin{matrix} -s, \mu - s \\ -v - s, 1 + v - s \end{matrix} \right],$ $\mu \neq -1, -2, \dots, \operatorname{Re} \mu < 1,$ $\operatorname{Re} v, -1 - \operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 0, \operatorname{Re} \mu$
33(1)	$(1-x)_+^v Q_v^\mu \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$	$\frac{e^{\pi \mu i}}{2} \Gamma [1 + \mu + v, v + 1] \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s + \mu/2, s - \mu/2 \\ s + v + 1 + \mu/2, s + v + 1 - \mu/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v > -1, \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \mu /2$
33(2)	$(1-\sqrt{x})_+^v Q_v^\mu \left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right)$	$\frac{e^{\pi \mu i}}{2^{2v+2}} \Gamma [1 + \mu + v, v + 1] \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s + \mu/4, s + (2 + \mu)/4, \\ s + (v + 1)/2 + \mu/4, \\ s + (2 - \mu)/4, s - \mu/4 \\ s + 1 + v/2 + \mu/4, s + (v + 1)/2 - \mu/4, \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v > -1, \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \mu /4$

1	2	3
33(4)	$(x-1)_+^{\nu} Q_{\nu}^{\mu} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)$	$\frac{e^{\pi\mu i}}{2} \Gamma[1+\nu+\mu, 1+\nu] \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} \mu/2-\nu-s, & -\mu/2-\nu-s \\ 1+\mu/2-s, & 1-\mu/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} (\mu/2-\nu),$ $-\operatorname{Re} (\mu/2+\nu)$
33(6)	$(\sqrt[3]{x}-1)_+^{\nu} Q_{\nu}^{\mu} \left(\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}-1} \right)$	$\frac{e^{\pi\mu i}}{2 \cdot 3^{2\nu+1}} \Gamma[1+\nu+\mu, 1+\nu] \times$ $\times \Gamma_3 \left[\begin{matrix} \mu/2-\nu-3s, & -\mu/2-\nu-3s \\ 1+\mu/2-3s, & 1-\mu/2-3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \nu > -1, \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} (\mu-2\nu)/6,$ $-\operatorname{Re} (\mu+2\nu)/6$
34(1)	$ 1-x ^{\nu} Q_{\nu}^{\mu} \left(\frac{1+x}{ 1-x } \right)$	$\frac{e^{\pi\mu i}}{2} \Gamma[1+\nu+\mu, 1+\nu] \times$ $\times \left\{ \Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu/2, & s-\mu/2 \\ s+\nu+1+\mu/2, & s+\nu+1-\mu/2 \end{matrix} \right] + \right.$ $\left. + \Gamma \left[\begin{matrix} \mu/2-\nu-s, & -\mu/2-\nu-s \\ 1+\mu/2-s, & 1-\mu/2-s \end{matrix} \right] \right\},$ $\operatorname{Re} \nu > -1,$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} (\mu/2-\nu),$ $-\operatorname{Re} (\mu/2+\nu)$
34(2)	$ 1-\sqrt{x} ^{\nu} Q_{\nu}^{\mu} \left(\frac{1+\sqrt{x}}{ 1-\sqrt{x} } \right)$	$\frac{e^{\pi\mu i}}{2^{2\nu+2}} \Gamma[1+\nu+\mu, 1+\nu] \times$ $\times \left\{ \Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu/4+1/2, & s+\mu/4, & s-\mu/4, \\ s+(\nu+1)/2+\mu/4, & s+1+\nu/2+\mu/4, & \\ s+1/2-\mu/4 & & \\ s+(\nu+1)/2-\mu/4, & s+\nu/2+1-\mu/4 \end{matrix} \right] + \right.$ $\left. + \Gamma \left[\begin{matrix} \mu/4-\nu/2-s, & \mu/4+(1-\nu)/2-s, \\ (2+\mu)/4-s, & 1+\mu/4-s, \\ -\mu/4-\nu/2-s, & (1-\nu)/2-\mu/4-s \end{matrix} \right] \right\},$ $(2-\mu)/4-s, 1-\mu/4-s$ $\operatorname{Re} \nu > -1,$ $ \operatorname{Re} \mu /4 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} (\mu-2\nu)/4,$ $-\operatorname{Re} (\mu+2\nu)/4$

1	2	3
35(1)	$ 1-x ^{-v-1} Q_v^\mu \left(\frac{1+x}{ 1-x } \right)$	$\frac{e^{\pi\mu i}}{2\Gamma[1+v, 1+v-\mu]} \Gamma[s+\mu/2, s-\mu/2,$ $1+v+\mu/2-s, 1+v-\mu/2-s],$ $2v \neq -2, -3, -4, \dots,$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < 1 + \operatorname{Re} (v \pm \mu/2)$
35(2)	$ 1-\sqrt{x} ^{-v-1} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{1+\sqrt{x}}{ 1-\sqrt{x} } \right)$	$\frac{e^{\pi\mu i} 2^{2v-2}}{\pi^2 \Gamma[1+v, 1+v-\mu]} \Gamma[s+\mu/4,$ $s+1/2+\mu/4, s-\mu/4, s+1/2-\mu/4,$ $(1+v)/2+\mu/4-s, 1+v/2+\mu/4-s,$ $(1+v)/2-\mu/4-s, 1+v/2-\mu/4-s],$ $ \operatorname{Re} \mu /4 < \operatorname{Re} s < 1/2 + \operatorname{Re} (2v \pm \mu)/4,$ $2v \neq -2, -3, -4, \dots$
35(3)	$ 1-\sqrt[3]{x} ^{-v-1} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{1+\sqrt[3]{x}}{ 1-\sqrt[3]{x} } \right)$	$\frac{e^{\pi\mu i} 3^{2v+1}}{32\pi^4 \Gamma[1+v, 1+v-\mu]} \times$ $\times \Gamma_3[3s+\mu/2, 3s-\mu/2, 1+v+\mu/2-3s,$ $1+v-\mu/2-3s],$ $ \operatorname{Re} \mu /6 < \operatorname{Re} s < 1/3 + \operatorname{Re} (2v \pm \mu)/6$
36(1)	$(1+x)^v Q_v^\mu \left(\frac{1-x}{1+x} \right)$	$\frac{\pi (\sin \pi \mu)^{-1}}{2\Gamma[-v, -\mu-v]} \left\{ \frac{\sin \pi (\mu-v)}{\sin \pi (\mu+v)} \times \right.$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu/2, -v-\mu/2-s, \mu/2-v-s \\ 1+\mu/2-s \end{matrix} \right] +$ $+ \cos \pi \mu \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/2, -v+\mu/2-s, \\ 1-\mu/2-s \end{matrix} \right]$ $\left. -v-\mu/2-s \right\}, \quad \mu=0, \pm 1, \pm 2, \dots,$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} (-v \pm \mu/2)$
36(2)	$(1+\sqrt{x})^v Q_v^\mu \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} \right)$	$\frac{2^{-2v-3}}{\sin \pi \mu \Gamma[-v, -\mu-v]} \left\{ \frac{\sin \pi (\mu-v)}{\sin \pi (\mu+v)} \times \right.$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu/4, s+\mu/4+1/2, \\ (2+\mu)/4-s, 1+\mu/4-s, \\ -v/2-\mu/4-s, (1-v)/2-\mu/4-s, \\ \mu/4-v/2-s, \mu/4+(1-v)/2-s \end{matrix} \right] +$ $+ \cos \pi \mu \Gamma \left[\begin{matrix} s-\mu/4, s-\mu/4+1/2, \\ (2-\mu)/4-s, 1-\mu/4-s \end{matrix} \right]$

1	2	3
		$\left. \begin{aligned} & -v/2 + \mu/4 - s, (1-v)/2 + \mu/4 - s, \\ & -v/2 - \mu/4 - s, (1-v)/2 - \mu/4 - s \end{aligned} \right\},$ $\mu \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots,$ $ \operatorname{Re} \mu /4 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} (-v/2 \pm \mu/4)$
36(4)	$(1 + \sqrt{x})^v Q_v^\mu \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} \right)$	$\frac{2^{-2v-3}}{\sin \pi \mu \Gamma[-v, -\mu - v]} \Gamma[s - \mu/4,$ $s + 1/2 - \mu/4, s + \mu/4, s + 1/2 + \mu/4] \times$ $\times \left\{ \frac{\sin \pi (\mu - v)}{\sin \pi (\mu + v)} \Gamma \left[\frac{\mu/4 - v/2 - s}{s + (1+v)/2 + \mu/4}, \right.$ $\left. \frac{\mu/4 + (1-v)/2 - s}{s + 1 + v/2 + \mu/4} \right] + \cos \pi \mu \times$ $\times \Gamma \left[\frac{-\mu/4 - v/2 - s}{(1+v)/2 - \mu/4 + s}, \frac{-\mu/4 + (1-v)/2 - s}{s + 1 + v/2 - \mu/4} \right] \Big\}, \quad \mu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$ $ \operatorname{Re} \mu /4 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} (-2v \pm \mu/4)$
36(6)	$(1 + \sqrt[3]{x})^v Q_v^\mu \left(\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{1 + \sqrt[3]{x}} \right)$	$\frac{3^{-2v-1} (8\pi \sin \pi \mu)^{-1}}{\Gamma[-v, -\mu - v]} \Gamma_3[-v - \mu/2 - 3s,$ $\mu/2 - v - 3s] \left\{ \frac{\sin \pi (\mu - v)}{\sin \pi (\mu + v)} \times \right.$ $\times \Gamma_3 \left[\frac{3s + \mu/2}{1 + \mu/2 - 3s} \right] +$ $\left. + \cos \pi \mu \Gamma_3 \left[\frac{3s - \mu/2}{1 - \mu/2 - 3s} \right] \right\},$ $\mu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$ $ \operatorname{Re} \mu /6 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} (2v \pm \mu/6)$
37(1)	$(1 + x)^{-v-1} Q_v^\mu \left(\frac{1 - x}{1 + x} \right)$	$\frac{\pi (2 \sin \pi \mu)^{-1}}{\Gamma[1 + v, 1 + v - \mu]} \Gamma[1 + v - \mu/2 - s,$ $1 + v + \mu/2 - s] \left\{ \cos \pi \mu \Gamma \left[\frac{s - \mu/2}{1 - \mu/2 - s} \right] - \right.$ $\left. - \Gamma \left[\frac{s + \mu/2}{1 + \mu/2 - s} \right] \right\},$ $\mu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < 1 + \operatorname{Re} (v \pm \mu/2)$

1	2	3
37(2)	$(1 + \sqrt{x})^{-v-1} Q_v^\mu \left(\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \right)$	$\frac{2^{2v-1} (\sin \pi \mu)^{-1}}{\Gamma[1+v, 1+v-\mu]} \times$ $\times \Gamma[(1+v)/2 - \mu/4 - s, 1 + v/2 - \mu/4 - s,$ $(1+v)/2 + \mu/4 - s, 1 + v/2 + \mu/4 - s] \times$ $\times \left\{ \cos \pi \mu \Gamma \left[\frac{s - \mu/4, s + (2 - \mu)/4}{(2 - \mu)/4 - s, 1 - \mu/4 - s} \right] - \right.$ $\left. - \Gamma \left[\frac{s + \mu/4, s + 1/2 + \mu/4}{(2 + \mu)/4 - s, 1 + \mu/4 - s} \right] \right\},$ $\mu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$ $ \operatorname{Re} \mu /4 < \operatorname{Re} s < 1/2 + \operatorname{Re} (2v \pm \mu)/4$
37(4)	$(1+x)^{-v-1} Q_v^\mu \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$	$\frac{\pi (2 \sin \pi \mu)^{-1}}{\Gamma[1+v, 1+v-\mu]} \Gamma[s - \mu/2,$ $s + \mu/2] \left\{ \cos \pi \mu \Gamma \left[\frac{1+v - \mu/2 - s}{-\mu/2 - v + s} \right] - \right.$ $\left. - \Gamma \left[\frac{1+v + \mu/2 - s}{\mu/2 - v + s} \right] \right\},$ $\mu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < 1 + \operatorname{Re} (v \pm \mu/2)$
37(6)	$(1 + \sqrt[3]{x})^{-v-1} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} \right)$	$\frac{3^{2v+1} (8\pi \sin \pi \mu)^{-1}}{\Gamma[1+v, 1+v-\mu]} \Gamma_3[3s - \mu/2,$ $3s + \mu/2] \left\{ \cos \pi \mu \Gamma_3 \left[\frac{1+v - \mu/2 - 3s}{-\mu/2 - v + 3s} \right] - \right.$ $\left. - \Gamma_3 \left[\frac{1+v + \mu/2 - 3s}{\mu/2 - v + 3s} \right] \right\},$ $\mu \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$ $ \operatorname{Re} \mu /6 < \operatorname{Re} s < 1/3 + \operatorname{Re} (2v \pm \mu)/6$
38(1)	$\frac{ 1-x ^\mu}{\sqrt{1+x}} \times$ $\times Q_{-1/4}^\mu \left(\frac{1-6x+x^2}{(1+x)^2} \right)$	$\frac{2^{-\mu-3/2} \pi}{\sin \pi \mu} \Gamma \left[\frac{\mu + 1/2}{1/2 - 2\mu} \right] \times$ $\times \left\{ \frac{1}{\sin(\mu - 1/4) \pi} \times \right.$ $\times \Gamma \left[\frac{s + \mu/2, (1-\mu)/2 - s}{1 + \mu/2 - s, (1+3\mu)/2 + s} \right] +$ $+ \sqrt{2} \cos \pi \mu \Gamma \left[\frac{s - \mu/2,}{(1+\mu)/2 + s,} \right.$ $(1-3\mu)/2 - s \left. \right\}, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \mu < 1/4,$ $1 - \mu/2 - s \left. \right\}, \quad \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < (1 - \operatorname{Re} \mu)/2,$ $(1 - 3\operatorname{Re} \mu)/2$

1	2	3
38(2)	$\frac{ 1-x ^\mu}{\sqrt{1+x}} \times$ $\times Q_{-1/4}^\mu \left(\frac{-1+6x-x^2}{(1+x)^2} \right)$	$-\frac{2^{-\mu-3/2} \pi}{\sin \pi \mu} \Gamma \left[\frac{\mu+1/2}{1/2-2\mu} \right] \times$ $\times \left\{ \operatorname{ctg}(\mu-1/4) \pi \Gamma \left[\frac{s+\mu/2,}{(1+3\mu)/2+s}, \right. \right.$ $\left. \frac{(1-\mu)/2-s}{1+\mu/2-s} \right] + \Gamma \left[\frac{s-\mu/2,}{s+(1+\mu)/2,} \right.$ $\left. \frac{(1-3\mu)/2-s}{1-\mu/2-s} \right] \Bigg\}, \quad -1/2 < \operatorname{Re} \mu < 1/4,$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} \mu)/2,$ $(1-3\operatorname{Re} \mu)/2$
39(1)	$\frac{ 1-x ^\mu}{\sqrt{1+x}} \times$ $\times Q_{3/4}^\mu \left(\frac{1-6x+x^2}{(1+x)^2} \right)$	$\frac{2^{-\mu-3/2} \pi}{\sin \pi \mu} \Gamma \left[\frac{\mu+1/2}{1/2-2\mu} \right] \times$ $\times \left\{ \frac{1}{\cos(\mu+3/4) \pi} \Gamma \left[\frac{s+\mu/2,}{s+(1+3\mu)/2,} \right. \right.$ $\left. \frac{(1-\mu)/2-s}{1+\mu/2-s} \right] + \sqrt{2} \cos \pi \mu \times$ $\times \Gamma \left[\frac{s-\mu/2, (1-3\mu)/2-s}{s+(\mu+1)/2, 1-\mu/2-s} \right] \Bigg\},$ $-1/2 < \operatorname{Re} \mu < 1/4,$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} \mu)/2,$ $(1-3\operatorname{Re} \mu)/2$
39(2)	$\frac{ 1-x ^\mu}{\sqrt{1+x}} \times$ $\times Q_{-3/4}^\mu \left(\frac{-1+6x-x^2}{(1+x)^2} \right)$	$\frac{2^{-\mu-3/2} \pi}{\sin \pi \mu} \Gamma \left[\frac{\mu+1/2}{1/2-2\mu} \right] \left\{ \operatorname{ctg}(3/4-\mu) \pi \times \right.$ $\times \Gamma \left[\frac{s+\mu/2, (1-\mu)/2-s}{s+(1+3\mu)/2, 1+\mu/2-s} \right] +$ $\left. + \Gamma \left[\frac{s-\mu/2, (1-3\mu)/2-s}{s+(1+\mu)/2, 1-\mu/2-s} \right] \right\},$ $-1/2 < \operatorname{Re} \mu < 1/4,$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} \mu)/2,$ $(1-3\operatorname{Re} \mu)/2$

1	2	3
40(1)	$(x-1)_+^{-\mu/2} Q_v^\mu(\sqrt{x}) e^{-\mu i\pi} +$ $+ (1-x)_+^{-\mu/2} Q_v^\mu(\sqrt{x})$	$\frac{2^{\mu-2} \sin \pi (v-\mu)}{\pi \sin \pi \mu} \Gamma[s, s+1/2,$ $(\mu+v+1)/2-s, (\mu-v)/2-s] +$ $+ \frac{2^{\mu-1} \pi}{\sin \pi \mu} \left\{ \Gamma \left[\begin{matrix} (\mu+v+1)/2-s, \\ 1-s, 1/2-s \end{matrix} \right. \right.$ $(\mu-v)/2-s \left. \right] + \cos \pi \mu \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s+(1-v-\mu)/2, s+1+(v-\mu)/2 \end{matrix} \right] \Big\},$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \quad \mu \neq 0, -1, -2, \dots,$ $0 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re}(\mu+v))/2,$ $\operatorname{Re}(\mu-v)/2$
40(2)	$(\sqrt{x}-1)_+^{-\mu/2} \times$ $\times Q_v^\mu(\sqrt[4]{x}) e^{-\mu i\pi} +$ $+ (1-\sqrt{x})_+^{-\mu/2} Q_v^\mu(\sqrt[4]{x})$	$\frac{2^{2\mu-4} \sin \pi (v-\mu)}{\pi^3 \sin \pi \mu} \Gamma[s, s+1/2, s+1/4,$ $s+3/4, (\mu+v+1)/4-s,$ $(\mu+v+3)/4-s, (\mu-v)/4-s,$ $(\mu-v+2)/4-s] + \frac{2^{2\mu-1} \pi}{\sin \pi \mu} \times$ $\times \left\{ \Gamma \left[\begin{matrix} (\mu+v+1)/4-s, (\mu+v+3)/4-s, \\ 1/2-s, 1-s, 1/4-s, 3/4-s \end{matrix} \right. \right.$ $(\mu-v)/4-s, (2+\mu-v)/4-s \left. \right] +$ $+ \cos \pi \mu \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+1/4, s+3/4 \\ s+(1-v-\mu)/4, \end{matrix} \right.$ $s+(3-v-\mu)/4, s+(2+v-\mu)/4,$ $s+1+(v-\mu)/4 \left. \right] \Big\}, \quad \operatorname{Re} \mu < 1,$ $\mu \neq 0, -1, -2, \dots,$ $0 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re}(\mu+v))/4,$ $\operatorname{Re}(\mu-v)/4$

1	2	3
40(3)	$(1-x)_+^{-\mu/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right) e^{-\mu i \pi} +$ $+ (x-1)_+^{-\mu/2} Q_v^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\frac{2^{\mu-2} \sin \pi (\nu - \mu)}{\pi \sin \pi \mu} \Gamma[s + (\nu + 1)/2, s - \nu/2,$ $\mu/2 - s, (\mu + 1)/2 - s] + \frac{2^{\mu-1} \pi}{\sin \pi \mu} \times$ $\times \left\{ \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\nu + 1)/2, s - \nu/2 \\ s + 1 - \mu/2, s + (1 - \mu)/2 \end{matrix} \right] + \right.$ $\left. + \cos \pi \mu \Gamma \left[\begin{matrix} \mu/2 - s, (1 + \mu)/2 - s \\ (1 - \nu)/2 - s, 1 + \nu/2 - s \end{matrix} \right] \right\},$ $\operatorname{Re} \mu < 1, \mu \neq 0, -1, -2, \dots,$ $-(1 + \operatorname{Re} \nu)/2, \operatorname{Re} \nu/2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \mu/2$
41(1)	$Q_v^\mu (\sqrt{1+x})$	$e^{\mu i \pi} 2^{\mu-1} \Gamma \left[\begin{matrix} 1 + (\mu + \nu)/2 \\ (1 + \nu - \mu)/2 \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s + \mu/2, \\ s + 1 + \nu/2 \\ s - \mu/2, (\nu + 1)/2 - s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re} \nu)/2$
41(2)	$Q_v^\mu (\sqrt{1+\sqrt{x}})$	$\frac{e^{\mu i \pi} 2^{\mu-5/2}}{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 1 + (\mu + \nu)/2 \\ (1 + \nu - \mu)/2 \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s + \mu/4, s + (2 + \mu)/4, s - \mu/4, \\ s + (2 + \nu)/4, s + 1 + \nu/4 \\ s + (2 - \mu)/4, (\nu + 1)/4 - s, (\nu + 3)/4 - s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} \mu /4 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re} \nu)/4$
41(4)	$Q_v^\mu \left(\sqrt{\frac{1+x}{x}} \right)$	$e^{\mu i \pi} 2^{\mu-1} \Gamma \left[\begin{matrix} 1 + (\mu + \nu)/2 \\ (1 + \nu - \mu)/2 \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s + (\nu + 1)/2, \mu/2 - s, -\mu/2 - s \\ 1 + \nu/2 - s \end{matrix} \right],$ $-(1 + \operatorname{Re} \nu)/2 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} \mu /2$
41(6)	$Q_v^\mu \left(\frac{\sqrt{1+x^{1/3}}}{x^{1/6}} \right)$	$e^{\mu i \pi} \frac{2^{\mu-3}}{\pi^2 \sqrt[3]{3}} \Gamma \left[\begin{matrix} 1 + (\mu + \nu)/2 \\ (1 + \nu - \mu)/2 \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s + (\nu + 1)/2, \mu/2 - 3s, \\ 1 + \nu/2 - 3s \\ -\mu/2 - 3s \end{matrix} \right],$ $-(1 + \operatorname{Re} \nu)/6 < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} \mu /6$

1	2	3
42(1)	$\frac{1}{V\overline{1+x}} Q_v^\mu(V\overline{1+x})$	$e^{\mu i\pi} 2^{\mu-1} \Gamma\left[\frac{(\mu+v+1)/2}{(1+v-\mu)/2}\right] \Gamma\left[\frac{s+\mu/2, s-\mu/2, 1+v/2-s}{s+(v+1)/2}\right],$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < 1 + \operatorname{Re} v/2$
42(2)	$\frac{1}{V\overline{1+Vx}} Q_v^\mu(V\overline{1+Vx})$	$e^{\mu i\pi} 2^{\mu-3/2} \frac{1}{\pi} \Gamma\left[\frac{(\mu+v+1)/2}{(1+v-\mu)/2}\right] \times$ $\times \Gamma\left[\frac{s+\mu/4, s+(2+\mu)/4, s-\mu/4, s+(v+1)/4, s+(v+3)/4}{s+(2-\mu)/4, (2+v)/4-s, 1+v/4-s}\right],$ $ \operatorname{Re} \mu /4 < \operatorname{Re} s < 1/2 + \operatorname{Re} v/4$
42(4)	$\frac{1}{V\overline{1+x}} Q_v^\mu\left(V\sqrt{\frac{1+x}{x}}\right)$	$e^{\mu i\pi} 2^{\mu-1} \Gamma\left[\frac{(\mu+v+1)/2}{(1+v-\mu)/2}\right] \times$ $\times \Gamma\left[\frac{s+(1+v)/2, (1+\mu)/2-s, (1-\mu)/2-s}{1+v/2-s}\right],$ $-(1+\operatorname{Re} v)/2 < \operatorname{Re} s < (1- \operatorname{Re} \mu)/2$
42(6)	$\frac{1}{V\overline{1+x^{1/3}}} Q_v^\mu\left(\frac{V\overline{1+x^{1/3}}}{x^{1/6}}\right)$	$e^{\mu i\pi} 2^{\mu-3} \frac{V\overline{3}}{\pi^2} \Gamma\left[\frac{(\mu+v+1)/2}{(1+v-\mu)/2}\right] \times$ $\times \Gamma_3\left[\frac{3s+(1+v)/2, (1+\mu)/2-3s, (1-\mu)/2-3s}{1+v/2-3s}\right],$ $-(1+\operatorname{Re} v)/6 < \operatorname{Re} s < (1- \operatorname{Re} \mu)/6$
43(1)	$(1+x)^{v/2} Q_v^\mu\left(\frac{1}{V\overline{1+x}}\right)$	$-2^{-v-2} \frac{\Gamma(\mu+v+1)}{V\overline{\pi}} \times$ $\times \left\{ \Gamma\left[\frac{s+\mu/2, s-\mu/2, -v/2-s, s+v-\mu/2, 1-v+\mu/2-s, (1-v)/2-s}{(1-v)/2-s}\right] + \cos \pi(\mu+v) \times \right.$ $\times \left. \Gamma\left[\frac{s-\mu/2, -v/2-s, (1-v)/2-s}{1-\mu/2-s}\right] \right\},$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} v/2$

1	2	3
3	$\mathcal{H}(ax), \quad a > 0$	$a^{-s} \mathcal{H}^*(s)$
4	$x^\alpha \mathcal{H}(x)$	$\mathcal{H}^*(s + \alpha)$
5	$\mathcal{H}(x^p), \quad p \neq 0$	$\frac{1}{ p } \mathcal{H}^*(s/p)$
6	$\mathcal{H}\left(\frac{1}{x}\right)$	$\mathcal{H}^*(-s)$
7	$\mathcal{H}^{(n)}(x)$ при $\lim_{x \rightarrow 0} x^{s-j-1} \times$ $\times \mathcal{H}^{(j)}(x) = 0,$ $j = 0, 1, 2, \dots, n-1$	$\Gamma\left[\begin{matrix} n+1-s \\ 1-s \end{matrix}\right] \mathcal{H}^*(s-n)$
8	$\left(x \frac{d}{dx}\right)^n \mathcal{H}(x)$	$(-s)^n \mathcal{H}^*(s)$
9	$\left(\frac{d}{dx} x\right)^n \mathcal{H}(x)$	$(1-s)^n \mathcal{H}^*(s)$
10	$I_{0+}^\alpha f(x)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} 1-\alpha-s \\ 1-s \end{matrix}\right] f^*(s+\alpha)$
11	$I_-^\alpha f(x)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} s \\ s+\alpha \end{matrix}\right] f^*(s+\alpha)$
12	$\int_0^\infty e^{-xt} f(t) dt$	$\Gamma(s) f^*(1-s), \quad \text{Res} > 0$

2. Алгебраические функции и степени с произвольным показателем

1(1)	$H(1-x) x^\nu$	$\Gamma\left[\begin{matrix} s+\nu \\ s+\nu+1 \end{matrix}\right], \quad \text{Re}(s+\nu) > 0$
1(2)	$H(x-1) x^\nu$	$\Gamma\left[\begin{matrix} -\nu-s \\ 1-\nu-s \end{matrix}\right], \quad \text{Re}(s+\nu) < 0$
2(1)*	$(1-x)_+^{\alpha-1}$	$\Gamma(\alpha) \Gamma\left[\begin{matrix} s \\ s+\alpha \end{matrix}\right], \quad \text{Re} \alpha > 0, \text{Re} s > 0$
2(2)	$(1-\sqrt{x})_+^{\alpha-1}$	$\Gamma(\alpha) 2^{1-\alpha} \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s+\alpha/2, s+(\alpha+1)/2 \end{matrix}\right],$ $\text{Re} s > 0, \text{Re} \alpha > 0$
2(3)	$(1-\sqrt[k]{x})_+^{\alpha-1}$	$\Gamma(\alpha) k^{1-\alpha} \Gamma_k\left[\begin{matrix} ks \\ ks+\alpha \end{matrix}\right],$ $\text{Re} s > 0, \text{Re} \alpha > 0, k = 1, 2, 3, \dots$

1	2	3
2(4)	$(x-1)_+^{\alpha-1}$	$\Gamma(\alpha) \Gamma \left[\begin{matrix} 1-\alpha-s \\ 1-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \alpha > 0,$ $\operatorname{Re}(\alpha+s) < 1$
2(5)	$(\sqrt{x}-1)_+^{\alpha-1}$	$\Gamma(\alpha) 2^{1-\alpha} \Gamma \left[\begin{matrix} (1-\alpha)/2-s, 1-\alpha/2-s \\ 1/2-s, 1-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \alpha > 0, \operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} \alpha)/2$
2(6)	$(\sqrt[k]{x}-1)_+^{\alpha-1}$	$\Gamma(\alpha) k^{1-\alpha} \Gamma_k \left[\begin{matrix} 1-\alpha-ks \\ 1-ks \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \alpha > 0,$ $k \operatorname{Re} s < 1-\operatorname{Re} \alpha, k=1, 2, 3, \dots$
3(1)	$(1+x)^{-\rho}$	$\frac{1}{\Gamma(\rho)} \Gamma[s, \rho-s], 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \rho$
3(2)	$(1+\sqrt{x})^{-\rho}$	$\frac{2^{\rho-1}}{\pi \Gamma(\rho)} \Gamma[s, s+1/2, \rho/2-s, (\rho+1)/2-s],$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \rho/2$
3(3)	$(1+\sqrt[k]{x})^{-\rho}$	$\frac{k^{\rho}(2\pi)^{1-k}}{\Gamma(\rho)} \Gamma_k[ks, \rho-ks],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/k \operatorname{Re} \rho, k=1, 2, 3, \dots$
4(1)	$\frac{1}{1-x}$	$\pi \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1-s \\ s+1/2, 1/2-s \end{matrix} \right], 0 < \operatorname{Re} s < 1$
4(2)	$\frac{1}{1-\sqrt{x}}$	$2\pi \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, -s+1/2, 1-s \\ s+1/4, s+3/4, 1/4-s, 3/4-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
4(3)	$\frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}$	$3\pi \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s, 1-3s \\ 3s+1/2, 1/2-3s \end{matrix} \right], 0 < \operatorname{Re} s < 1/3$
5(1)	$ 1-x ^{-\rho}$	$\frac{\pi}{\Gamma(\rho) \cos(\pi\rho/2)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, \rho-s \\ (1-\rho)/2+s, (1+\rho)/2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \rho < 1$
5(2)	$ 1-\sqrt{x} ^{-\rho}$	$\frac{\pi 2^{\rho}}{\Gamma(\rho) \cos(\pi\rho/2)} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \rho/2-s, (\rho+1)/2-s \\ s+(1-\rho)/4, s+(3-\rho)/4, \\ (1+\rho)/4-s, (3+\rho)/4-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \rho < 1, 0 < \operatorname{Re} s < 1/2 \operatorname{Re} \rho$
5(3)	$ 1-\sqrt[3]{x} ^{-\rho}$	$\frac{\pi 3^{\rho}}{\Gamma(\rho) \cos(\pi\rho/2)} \times$ $\times \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s, \rho-3s \\ 3s+(1-\rho)/2, (1+\rho)/2-3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \rho < 1, 0 < \operatorname{Re} s < 1/3 \operatorname{Re} \rho$

1	2	3
6(1)	$(1-x)_{+}^{-\alpha} +$ $+ (x-1)_{+}^{-\alpha} \frac{\sin(c-\alpha)\pi}{\sin c\pi}$	$\frac{\pi}{\sin c\pi\Gamma(\alpha)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, \alpha-s \\ s+1-c, c-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \alpha < 1$
6(2)	$(1-\sqrt{x})_{+}^{-\alpha} +$ $+ (\sqrt{x}-1)_{+}^{-\alpha} \frac{\sin(c-\alpha)\pi}{\sin c\pi}$	$\frac{2^{\alpha}\pi}{\sin c\pi\Gamma(\alpha)} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \alpha/2-s, (\alpha+1)/2-s \\ s+(1-c)/2, s+1-c/2, c/2-s, \\ (c+1)/2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2 \operatorname{Re} \alpha < 1/2$
6(4)	$(x-1)_{+}^{-\alpha} +$ $+ (1-x)_{+}^{-\alpha} \frac{\sin(c-\alpha)\pi}{\sin c\pi}$	$\frac{\pi}{\sin c\pi\Gamma(\alpha)} \Gamma \left[\begin{matrix} s, \alpha-s \\ s+c-\alpha, 1+\alpha-c-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \alpha < 1$
6(6)	$(\sqrt[3]{x}-1)_{+}^{-\alpha} +$ $+ (1-\sqrt[3]{x})_{+}^{-\alpha} \frac{\sin(c-\alpha)\pi}{\sin c\pi}$	$\frac{3^{\alpha}\pi}{\sin c\pi\Gamma(\alpha)} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s, \alpha-3s \\ 3s+c-\alpha, 1+\alpha-c-3s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/3 \operatorname{Re} \alpha < 1/3$
7(1)	$\frac{x^{\alpha}-1}{x-1}$	$\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \Gamma[s, s+\alpha, 1-s, 1-\alpha-s],$ $ \operatorname{Re} \alpha < 1, 0, -\operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} s < 1, 1-\operatorname{Re} \alpha$
7(2)	$\frac{x^{\alpha}-1}{\sqrt{x}-1}$	$\frac{\sin(2\pi\alpha)}{2\pi^3} \Gamma[s, s+1/2, s+\alpha, s+\alpha+1/2,$ $1/2-s, 1-s, 1/2-\alpha-s, 1-\alpha-s],$ $ \operatorname{Re} \alpha < 1/2, 0 < \operatorname{Re} s < 1/2,$ $-\operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} s < 1/2 - \operatorname{Re} \alpha$
7(3)	$\frac{x^{\alpha}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$	$\frac{3 \sin(3\pi\alpha)}{16\pi^5} \Gamma_3[3s, 3s+3\alpha, 1-3s,$ $1-3\alpha-3s],$ $ \operatorname{Re} \alpha < 1/3, 0, -\operatorname{Re} \alpha < \operatorname{Re} s < 1/3,$ $1/3 - \operatorname{Re} \alpha$
8(1)	$(1 + \sqrt{1+x})^{\nu}$	$-\frac{\nu}{2\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, -\nu/2-s, (1-\nu)/2-s \\ 1-\nu-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < -1/2 \operatorname{Re} \nu$

1	2	3
8(2)	$(1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}})^v$	$-\frac{v2^{-5/2}}{\pi^{3/2}} \Gamma \left[s, s + 1/2, -v/4 - s, \right. \\ \left. (1-v)/2 - s, 1 - v/2 - s \right. \\ \left. -v/4 + 1/2 - s, (1-v)/4 - s, (3-v)/4 - s \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < -1/4 \operatorname{Re} v$
8(4)	$(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})^v$	$-\frac{v}{2\sqrt{\pi}} \Gamma \left[s, 1/2 + s, -v/2 - s \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < -1/2 \operatorname{Re} v$
8(6)	$(\sqrt[6]{x} + \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}})^v$	$-\frac{v}{8\sqrt[3]{3\pi^{5/2}}} \Gamma_3 \left[3s, 3s + 1/2, -v/2 - 3s \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < -1/6 \operatorname{Re} v$
9(1)	$\frac{(1 + \sqrt{1+x})^v}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[s, (1-v)/2 - s, 1 - v/2 - s \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2 (1 - \operatorname{Re} v)$
9(2)	$\frac{(1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}})^v}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}$	$\frac{1}{\pi \sqrt{2\pi}} \Gamma \left[s, s + 1/2, (1-v)/4 - s, \right. \\ \left. (1-v)/2 - s, 1 - v/2 - s \right. \\ \left. (3-v)/4 - s, 1/2 - v/4 - s, 1 - v/4 - s \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4 (1 - \operatorname{Re} v)$
9(4)	$\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})^v}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[s, s + 1/2, (1-v)/2 - s \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2 (1 - \operatorname{Re} v)$
9(6)	$\frac{(\sqrt[6]{x} + \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}})^v}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}}$	$\frac{\sqrt[3]{3}}{4\pi^{5/2}} \Gamma_3 \left[3s, 3s + 1/2, (1-v)/2 - 3s \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/6 (1 - \operatorname{Re} v)$
10(1)	$(1-x)_+^{-1/2} [(1 + \sqrt{1-x})^v + (1 - \sqrt{1-x})^v]$	$2\sqrt{\pi} \Gamma \left[s, s + v \right. \\ \left. s + v/2, s + (v+1)/2 \right],$ $\operatorname{Re} s > 0, \operatorname{Re}(s+v) > 0$
10(2)	$(1 - \sqrt{x})_+^{-1/2} \left[(1 + \sqrt{1 - \sqrt{x}})^v + (1 - \sqrt{1 - \sqrt{x}})^v \right]$	$2\sqrt{2\pi} \Gamma \left[s, s + 1/2, v/2 + s, (v+1)/2 + s \right. \\ \left. v/4 + s, v/4 + 1/2 + s, \right. \\ \left. (v+1)/4 + s, (v+3)/4 + s \right],$ $\operatorname{Re} s > 0, \operatorname{Re}(s+v/2) > 0$

1	2	3
10(4)	$(x-1)_+^{-1/2}[(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^v + (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^v]$	$2\sqrt{\pi}\Gamma\left[\begin{matrix} (1+v)/2-s, (1-v)/2-s \\ 1-s, 1/2-s \end{matrix}\right],$ $2\text{Re } s < 1 - \text{Re } v $
10(6)	$(\sqrt[3]{x}-1)_+^{-1/2}[(\sqrt[6]{x} + \sqrt{x^{1/3}-1})^v + (\sqrt[6]{x} - \sqrt{x^{1/3}-1})^v]$	$2\sqrt[3]{\pi}\Gamma_3\left[\begin{matrix} (1+v)/2-3s, (1-v)/2-3s \\ 1-3s, 1/2-3s \end{matrix}\right],$ $\text{Re } s < 1/6 - 1/6 \text{Re } v $
11(1)	$(1+\sqrt{x})^{-\alpha} + 1-\sqrt{x} ^{-\alpha}$	$2\sqrt{\pi}\Gamma\left[\begin{matrix} (1-\alpha)/2 \\ \alpha/2 \end{matrix}\right]\Gamma\left[\begin{matrix} s, \alpha/2-s \\ s+(1-\alpha)/2, \\ 1/2-s \end{matrix}\right],$ $0 < \text{Re } s < 1/2, \text{Re } \alpha < 1/2$
11(2)	$(1+\sqrt[4]{x})^{-\alpha} + 1-\sqrt[4]{x} ^{-\alpha}$	$2^{\alpha+1}\sqrt{\pi}\Gamma\left[\begin{matrix} (1-\alpha)/2 \\ \alpha/2 \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2, \alpha/4-s, (\alpha+2)/4-s \\ s+(1-\alpha)/4, s+(3-\alpha)/4, \\ 1/4-s, 3/4-s \end{matrix}\right],$ $0 < \text{Re } s < 1/4, \text{Re } \alpha < 1/4$
11(3)	$(1+\sqrt[6]{x})^{-\alpha} + 1-\sqrt[6]{x} ^{-\alpha}$	$3^\alpha \cdot 2\sqrt{\pi}\Gamma\left[\begin{matrix} (1-\alpha)/2 \\ \alpha/2 \end{matrix}\right]\Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s, \alpha/2-3s \\ 3s+(1-\alpha)/2, \\ 1/2-3s \end{matrix}\right],$ $0 < \text{Re } s < 1/6, \text{Re } \alpha < 1/6$
12(1)	$(1+\sqrt{1-x})^{-1/2}H(1-x) + x^{-1/2} \times (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^{-1/2}H(x-1)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{3/2}}\Gamma\left[\begin{matrix} s, 1/4-s \\ s+1/4, 3/2-s \end{matrix}\right],$ $0 < \text{Re } s < 1/4$
12(2)	$(1+\sqrt{1-\sqrt{x}})^{-1/2} \times H(1-x) + (1+\sqrt{1-1/\sqrt{x}})^{1/2} \times H(x-1)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{4}\Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/8-s, 5/8-s \\ s+1/8, s+5/8, 3/4-s, 5/4-s \end{matrix}\right],$ $0 < \text{Re } s < 1/8$
12(3)	$(1+\sqrt{1-x})^{1/2}H(1-x) + (1+\sqrt{1-1/x})^{-1/2}H(x-1)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{3/2}}\Gamma\left[\begin{matrix} s+1/4, -s \\ s+3/2, 1/4-s \end{matrix}\right],$ $-1/4 < \text{Re } s < 0$

1	2	3
13(1)	$\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x}} H(1-x) +$ $+ \sqrt{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-1}} H(x-1)$	$\sqrt{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/4-s \\ s+1/4, 1/2-s \end{matrix} \right], 0 < \operatorname{Re} s < 1/4$
13(2)	$\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}}} \times$ $\times H(1-x) +$ $+ \sqrt{\frac{x^{1/4}+\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}-1}} \times$ $\times H(x-1)$	$2\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, -s+1/8, 5/8-s \\ s+1/8, s+5/8, 1/4-s, 3/4-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/8$
14(1)	$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x}}{1-x}} H(1-x) -$ $- \sqrt{\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}{x-1}} \times$ $\times H(x-1)$	$-\sqrt{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, 1/4-s \\ s+1/4, 1-s \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < 1/4$
14(2)	$\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sqrt{x}}}{1-\sqrt{x}}} \times$ $\times H(1-x) -$ $- \sqrt{\frac{x^{1/4}+\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x}-1}} \times$ $\times H(x-1)$	$-2\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/4, s+3/4, 1/8-s \\ s+1/8, s+5/8, 1/2-s, \\ 5/8-s \\ 1-s \end{matrix} \right], -1/4 < \operatorname{Re} s < 1/8$
14(3)	$\sqrt{\frac{1+\sqrt{1-x}}{1-x}} H(1-x) -$ $- \sqrt{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{x-1}} \times$ $\times H(x-1)$	$\sqrt{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 3/4-s \\ s+3/4, 1/2-s \end{matrix} \right], 0 < \operatorname{Re} s < 3/4$
15(1)	$(x^2 + 2x \cos \pi\beta + 1)^{-1}$	$-\frac{\pi}{\sin \pi\beta} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1-s \\ s\beta - \beta, 1 + \beta - s\beta \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 2, \beta < 1$
15(2)	$(x + 2\sqrt{x} \cos \pi\beta + 1)^{-1}$	$-\frac{2\pi}{\sin \pi\beta} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/2-s, 1-s \\ s\beta - \beta/2, s\beta + (1-\beta)/2, \\ (1+\beta)/2 - s\beta, 1 + \beta/2 - s\beta \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1, \beta < 1$

1	2	3
5(4)	$\cos\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \beta\pi\right)$	$\sqrt{\pi}\Gamma\left[\begin{matrix} -s, 1/2-s \\ 1/2-\beta+s, 1/2+\beta-s \end{matrix}\right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < 0$
5(6)	$\cos(6x^{-1/6} + \beta\pi)$	$\sqrt{3\pi}\Gamma_3\left[\begin{matrix} -3s, 1/2-3s \\ 3s+1/2-\beta, 1/2+\beta-3s \end{matrix}\right],$ $-1/6 < \operatorname{Re} s < 0$
6(1)	$\sin^{2n-1}\sqrt{x}$	$4^{s-n+1}\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k-1}\frac{(2n-1)!}{k!(2n-k-1)!}\times$ $\times(2n-2k-1)^{-2s}\Gamma\left[\begin{matrix} s+1/2 \\ 1-s \end{matrix}\right],$ $ \operatorname{Re} s < 1/2, n=1, 2, \dots$
6(2)	$\sin^{2n-1}\frac{1}{\sqrt{x}}$	$4^{1-n-s}\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k-1}\frac{(2n-1)!}{k!(2n-k-1)!}\times$ $\times(2n-2k-1)^{2s}\Gamma\left[\begin{matrix} 1/2-s \\ s+1 \end{matrix}\right],$ $ \operatorname{Re} s < 1/2, n=1, 2, \dots$
6(3)	$\sin^{2n}\sqrt{x}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}(n-k)^{-2s}\times$ $\times\Gamma\left[\begin{matrix} s \\ 1/2-s \end{matrix}\right], -1 < \operatorname{Re} s < 0, n=1, 2, \dots$
6(4)	$\sin^{2n}\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n+k}\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}(n-k)^{2s}\times$ $\times\Gamma\left[\begin{matrix} -s \\ s+1/2 \end{matrix}\right], 0 < \operatorname{Re} s < 1, n=1, 2, \dots$
7(1)	$\cos^{2n-1}\sqrt{x}$	$4^{s-n+1}\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2n-1)!}{k!(2n-k-1)!}\times$ $\times(2n-2k-1)^{-2s}\Gamma\left[\begin{matrix} s \\ 1/2-s \end{matrix}\right], 0 < \operatorname{Re} s < 1/2,$ $n=1, 2, \dots$

1	2	3
2(5)	$\sin(2kx^{-(2k)^{-1}})$	$V\overline{k\pi}\Gamma_k\left[\frac{1/2-ks}{ks+1}\right], \quad \operatorname{Re} s < \frac{1}{2k},$ $k = 1, 2, 3, \dots$
3(1)	$\cos 2\sqrt{x}$	$V\overline{\pi}\Gamma\left[\frac{s}{1/2-s}\right], \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
3(2)	$\cos 4\sqrt[4]{x}$	$V\overline{2\pi}\Gamma\left[\frac{s, s+1/2}{1/4-s, 3/4-s}\right], \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1/4$
3(3)	$\cos(2k\sqrt[2k]{x})$	$V\overline{k\pi}\Gamma_k\left[\frac{ks}{1/2-ks}\right], \quad 0 < \operatorname{Re} s < \frac{1}{2k},$ $k = 1, 2, \dots$
3(4)	$\cos \frac{2}{\sqrt{x}}$	$V\overline{\pi}\Gamma\left[\frac{-s}{1/2+s}\right], \quad -1/2 < \operatorname{Re} s < 0$
3(5)	$\cos(2kx^{-(2k)^{-1}})$	$V\overline{k\pi}\Gamma_k\left[\frac{-ks}{ks+1/2}\right], \quad -\frac{1}{2k} < \operatorname{Re} s < 0,$ $k = 1, 2, \dots$
4(1)	$\sin(2\sqrt{x} + \beta\pi)$	$V\overline{\pi}\Gamma\left[\frac{s, s+1/2}{s+\beta, 1-\beta-s}\right], \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
4(2)	$\sin(4\sqrt[4]{x} + \beta\pi)$	$V\overline{2\pi}\Gamma\left[\frac{s, s+1/2, s+1/4, s+3/4}{s+\beta/2, s+(\beta+1)/2, (1-\beta)/2-s, 1-\beta/2-s}\right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4$
4(4)	$\sin\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \beta\pi\right)$	$V\overline{\pi}\Gamma\left[\frac{-s, 1/2-s}{1-\beta+s, \beta-s}\right], \quad -1/2 < \operatorname{Re} s < 0$
4(6)	$\sin(6x^{-1/6} + \beta\pi)$	$V\overline{3\pi}\Gamma_3\left[\frac{-3s, 1/2-3s}{3s+1-\beta, \beta-3s}\right],$ $-1/6 < \operatorname{Re} s < 0$
5(1)	$\cos(2\sqrt{x} + \beta\pi)$	$V\overline{\pi}\Gamma\left[\frac{s, s+1/2}{s+\beta+1/2, 1/2-\beta-s}\right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
5(2)	$\cos(4\sqrt[4]{x} + \beta\pi)$	$V\overline{2\pi}\Gamma\left[\frac{s, s+1/2, s+1/4, s+3/4}{s+\beta/2+1/4, s+\beta/2+3/4, 1/4-\beta/2-s, 3/4-\beta/2-s}\right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4$

1	2	3
15(3)	$(x^{2/3} + x^{1/3} + 1)^{-1}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \Gamma \left[\Delta(3, 3s), \Delta(3, 1-3s) \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 2/3$
15(4)	$(\sqrt{x} + \sqrt[4]{2} \sqrt[4]{x} + 1)^{-1}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}\pi^2} \Gamma \left[\Delta(4, 4s), \Delta(4, 1-4s) \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
16	$\frac{1 + x \cos \beta\pi}{x^2 + 2x \cos \beta\pi + 1}$	$\pi \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1-s \\ 1/2 + \beta s, 1/2 - \beta s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1, \beta < 1$
17	$(x^2 + 2x \cos \beta\pi + 1)^{-2}$	$-\frac{\pi}{2 \sin^2 \beta\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 2-s \\ 1/2 - 2\beta + \beta s, \\ 1/2 + 2\beta - \beta s \end{matrix} \right] -$ $-\frac{\pi}{2 \sin^3 \beta\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1-s \\ \beta s - \beta, 1 + \beta - \beta s \end{matrix} \right],$ $ \beta < 1, 0 < \operatorname{Re} s < 4$

3. Показательная и тригонометрические функции

1(1)	e^{-x}	$\Gamma(s), \operatorname{Re} s > 0$
1(2)	$e^{-2\sqrt{x}}$	$\pi^{-1/2} \Gamma[s, s+1/2], \operatorname{Re} s > 0$
1(3)	$e^{-k\sqrt{x}}$	$\sqrt{k}(2\pi)^{(1-k)/2} \Gamma_k[ks], \operatorname{Re} s > 0, k=1, 2, \dots$
1(4)	$e^{-1/x}$	$\Gamma(-s), \operatorname{Re} s < 0$
1(5)	$e^{-kx^{-1/k}}$	$\sqrt{k}(2\pi)^{(1-k)/2} \Gamma_k[-ks], \operatorname{Re} s < 0,$ $k=1, 2, \dots$
2(1)	$\sin 2\sqrt{x}$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2 + s \\ 1-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < 1/2$
2(2)	$\sin 4\sqrt[4]{x}$	$\sqrt[4]{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/4 + s, 3/4 + s \\ 1/2 - s, 1-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < 1/4$
2(3)	$\sin(2kx^{(2k)^{-1}})$	$\sqrt{k\pi} \Gamma_k \left[\begin{matrix} ks + 1/2 \\ 1-ks \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < \frac{1}{2k},$ $k=1, 2, 3, \dots$
2(4)	$\sin \frac{2}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2 - s \\ 1+s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < 1/2$

1	2	3
7(2)	$\cos^{2n-1} x^{-1/2}$	$4^{1-s-n} \sqrt{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n-1)!}{k! (2n-k-1)!} \times$ $\times (2n-2k-1)^{2s} \Gamma \left[\begin{matrix} -s \\ s+1/2 \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \text{Re } s < 0, n=1, 2, \dots$
7(3)	$\cos^{2n} \sqrt{x} - 1$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n)!}{k! (2n-k)!} (n-k)^{-2s} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ 1/2-s \end{matrix} \right], \quad -1 < \text{Re } s < 0, n=1, 2, \dots$
7(4)	$\cos^{2n} x^{-1/2} - 1$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n)!}{k! (2n-k)!} (n-k)^{2s} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} -s \\ s+1/2 \end{matrix} \right], \quad 0 < \text{Re } s < 1, n=1, 2, \dots$
7(5)	$\cos^{2n} \sqrt{x} - 2^{-2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n)!}{k! (2n-k)!} (n-k)^{-2s} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ 1/2-s \end{matrix} \right], \quad 0 < \text{Re } s < 1/2, n=1, 2, \dots$
7(6)	$\cos^{2n} x^{-1/2} - 2^{-2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2n)!}{k! (2n-k)!} (n-k)^{2s} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} -s \\ s+1/2 \end{matrix} \right], \quad -1/2 < \text{Re } s < 0,$ $n=1, 2, \dots$
8(1)	$e^{-x \cos \pi \beta} \sin(x \sin \pi \beta)$	$\pi \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ \beta s, 1-\beta s \end{matrix} \right], \quad \beta < 1/2, \text{Re } s > -1$
8(2)	$e^{-3/2 \sqrt[3]{x}} \sin(3/2 \sqrt[3]{x})$	$\frac{\sqrt[3]{3}}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/3, s+2/3 \\ 1-s \end{matrix} \right], \quad \text{Re } s > -1/3$
8(4)	$e^{-3 \sqrt[3]{x}} \sin(3 \sqrt[3]{x})$	$\frac{\sqrt[3]{3}}{4\pi^{3/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/6, s+1/3, s+1/2, \\ 1-s, s+2/3, s+5/6 \end{matrix} \right], \quad \text{Re } s > -1/6$
8(5)	$e^{-\frac{\cos \pi \beta}{x}} \sin \left(\frac{\sin \pi \beta}{x} \right)$	$\pi \Gamma \left[\begin{matrix} -s \\ 1+\beta s, -\beta s \end{matrix} \right], \quad \beta < 1/2, \text{Re } s < 1$

1	2	3
8(7)	$e^{-2\sqrt{2}x^{-1/4}} \sin(2\sqrt{2}x^{-1/4})$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/4-s, 1/2-s, 3/4-s \\ 1+s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/4$
9(1)	$e^{-x \cos \pi\beta} \cos(x \sin \pi\beta)$	$\pi \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ 1/2-\beta s, 1/2+\beta s \end{matrix} \right], \beta < 1/2,$ $\text{Res} > 0$
9(2)	$e^{-3/2 \sqrt[3]{x}} \cos(3/2 \sqrt[3]{x})$	$\frac{\sqrt{3}}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/3, s+2/3 \\ 1/2+s, 1/2-s \end{matrix} \right], \text{Res} > 0$
9(4)	$e^{-3\sqrt[3]{x}} \cos(3\sqrt[3]{x})$	$\frac{\sqrt{3}}{4\pi^{3/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/6, s+1/3, \\ 1/2-s, s+2/3, s+5/6 \end{matrix} \right], \text{Res} > 0$
9(5)	$e^{-\frac{\cos \pi\beta}{x}} \cos\left(\frac{\sin \pi\beta}{x}\right)$	$\pi \Gamma \left[\begin{matrix} -s \\ 1/2+\beta s, 1/2-\beta s \end{matrix} \right], \beta < 1/2,$ $\text{Res} < 0$
9(7)	$e^{-2\sqrt{2}x^{-1/4}} \cos(2\sqrt{2}x^{-1/4})$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} -s, 1/4-s, 3/4-s \\ 1/2+s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 0$
10(1)	$\sin(-\alpha \ln x) H(1-x)$	$\alpha \Gamma \left[\begin{matrix} s+i\alpha, s-i\alpha \\ s+i\alpha+1, s-i\alpha+1 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < - \text{Im} \alpha $
10(2)	$\sin(\alpha \ln x) H(x-1)$	$\alpha \Gamma \left[\begin{matrix} s+i\alpha, s-i\alpha \\ s+i\alpha+1, s-i\alpha+1 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < - \text{Im} \alpha $

4. Логарифмические функции, полилогарифмы

1(1)	$\ln x H(1-x)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s, -s \\ 1+s, 1-s \end{matrix} \right], \text{Res} > 0$
1(2)	$\ln x H(x-1)$	$-\Gamma \left[\begin{matrix} s, -s \\ 1+s, 1-s \end{matrix} \right], \text{Res} < 0$
2(1)	$\ln(1+x)$	$-\Gamma[s, -s], -1 < \text{Res} < 0$
2(2)	$\ln(1+\sqrt[k]{x})$	$-(2\pi)^{1-k} \Gamma_k[ks, -ks], -1/k < \text{Res} < 0,$ $k = 1, 2, \dots$
2(3)	$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$	$-\Gamma[s, -s], 0 < \text{Res} < 1$
2(4)	$\ln(1+x^{-1/k})$	$-(2\pi)^{1-k} \Gamma_k[ks, -ks], 0 < \text{Res} < 1/k,$ $k = 1, 2, 3, \dots$

1	2	3
3(1)	$\ln 1-x $	$-\pi\Gamma\left[s, -s\right]_{s+1/2, 1/2-s}, -1 < \operatorname{Re} s < 0$
3(2)	$\ln 1-\sqrt{x} $	$-\pi\Gamma\left[s, s+1/2, -s, 1/2-s\right]_{s+1/4, s+3/4, 1/4-s, 3/4-s},$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < 0$
3(4)	$\ln \frac{ 1-x }{x}$	$-\pi\Gamma\left[s, -s\right]_{s+1/2, 1/2-s}, 0 < \operatorname{Re} s < 1$
3(6)	$\ln \left 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right $	$-\pi\Gamma_3\left[3s, -3s\right]_{3s+1/2, 1/2-3s}, 0 < \operatorname{Re} s < 1/3$
4(1)	$\frac{\ln x}{x-1}$	$\Gamma[s, s, 1-s, 1-s], 0 < \operatorname{Re} s < 1$
4(2)	$\frac{\ln x}{\sqrt{x}-1}$	$\frac{1}{\pi^2} \Gamma[s, s, s+1/2, s+1/2, 1/2-s,$ $1/2-s, 1-s, 1-s], 0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
4(3)	$\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}-1}$	$\frac{9}{16\pi^4} \Gamma_3[3s, 3s, 1-3s, 1-3s],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/3$
4(4)	$\frac{\ln x}{x-a}$	$a^{s-1} \Gamma[s, 1-s] \times$ $\times \left\{ \Gamma[s, 1-s] - \frac{\pi \ln a}{\Gamma[s+1/2, 1/2-s]} \right\},$ $a > 0, 0 < \operatorname{Re} s < 1$
4(5)	$\frac{\ln x}{\sqrt{x}-a}$	$\frac{a^{s-1}}{\pi^2} \Gamma[s, s+1/2, 1/2-s, 1-s] \times$ $\times \left\{ \Gamma[s, s+1/2, 1/2-s, 1-s] - \right.$ $\left. - \frac{4\pi^3 \ln a}{\Gamma[s+1/4, s+3/4, 1/4-s, 3/4-s]} \right\},$ $a > 0, 0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
5(1)	$\frac{\ln x}{x+1}$	$-\pi\Gamma\left[s, s, 1-s, 1-s\right]_{s+1/2, 1/2-s}, 0 < \operatorname{Re} s < 1$
5(2)	$\frac{\ln x}{\sqrt{x}+1}$	$-2\Gamma_2\left[2s, 2s, 1-2s, 1-2s\right]_{2s+1/2, 1/2-2s},$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
5(3)	$\frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}+1}$	$-\frac{9}{4\pi} \Gamma_3\left[3s, 3s, 1-3s, 1-3s\right]_{3s+1/2, 1/2-3s},$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/3$

1	2	3
5(4)	$\frac{\ln x}{x+a}$	$a^{s-1} \Gamma[s, 1-s] \times$ $\times \left\{ \ln a - \pi \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1-s \\ s+1/2, 1/2-s \end{matrix} \right] \right\},$ $0 < \operatorname{Re} s < 1, a > 0$
5(5)	$\frac{\ln x}{\sqrt{x+a}}$	$\frac{2a^{s-1}}{\pi} \Gamma[s, s+1/2, 1/2-s, 1-s] \times$ $\times \left\{ \ln a - \pi \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/2-s, 1-s \\ s+1/4, s+3/4, 1/4-s, \\ 3/4-s \end{matrix} \right] \right\},$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2, a > 0$
6(1)	$\frac{\ln x}{(x+a)^2}$	$a^{s-2} \Gamma[s, 2-s] \left\{ \ln a + \Gamma \left[\begin{matrix} s-1 \\ s \end{matrix} \right] - \right.$ $\left. - \pi \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1-s \\ s+1/2, 1/2-s \end{matrix} \right] \right\}, a > 0,$ $0 < \operatorname{Re} s < 2$
6(2)	$\frac{\ln x}{(\sqrt{x}+a)^2}$	$\frac{4}{\pi} a^{s-2} \Gamma[s, s+1/2, 1-s, 3/2-s] \times$ $\times \left\{ \ln a + \Gamma \left[\begin{matrix} s-1/2, s \\ s, s+1/2 \end{matrix} \right] - \right.$ $\left. - \pi \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/2-s, 1-s \\ 1/4+s, 3/4+s, 1/4-s, 3/4-s \end{matrix} \right] \right\},$ $0 < \operatorname{Re} s < 1, a > 0$
7(1)	$\frac{\ln^2 x}{x+1}$	$2\Gamma[s, s, s, 1-s, 1-s, 1-s] - \pi^2 \Gamma[s, 1-s],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1$
7(2)	$\frac{\ln^2 x}{\sqrt{x}+1}$	$2\pi^{-3} \Gamma[s, s+1/2, s, s+1/2, s, s+1/2,$ $1/2-s, 1-s, 1/2-s, 1-s, 1/2-s,$ $1-s] - 4\pi \Gamma[s, s+1/2, 1/2-s, 1-s],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
8(1)	$\ln(1+2x \cos \pi\beta + x^2)$	$-2\pi \Gamma \left[\begin{matrix} s, -s \\ 1/2+\beta s, 1/2-\beta s \end{matrix} \right],$ $-1 < \operatorname{Re} s < 0, \beta < 1$
8(2)	$\ln(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2})$	$-(2\pi)^{-1} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/3, s+2/3, -s, \\ 1/2+s, 1/2-s \\ 1/3-s, 2/3-s \end{matrix} \right],$ $-1/3 < \operatorname{Re} s < 0$

1	2	3
8(4)	$\ln(1 + \sqrt[3]{x}^{1/6} + x^{1/3})$	$-(2\pi)^{-4} \Gamma[s, s+1/6, s+1/3, s+2/3, s+5/6, -s, 1/6-s, 1/3-s, 2/3-s, 5/6-s], -1/6 < \operatorname{Re} s < 0$
8(5)	$\ln \frac{1+2x \cos \pi\beta + x^2}{x^2}$	$-2\pi \Gamma \left[\begin{matrix} s, -s \\ 1/2 + \beta s, 1/2 - \beta s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1, \beta < 1$
8(7)	$\ln(1 + \sqrt[4]{2x}^{-1/4} + x^{-1/2})$	$-(2\pi)^{-2} \Gamma[s, 1/4+s, 3/4+s, -s, 1/4-s, 3/4-s], 0 < \operatorname{Re} s < 1/4$
9(1)	$\ln \left \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right $	$\pi \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, 1/2-s \\ 1+s, 1-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < 1/2$
9(2)	$\ln \left \frac{1+\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt[4]{x}} \right $	$\pi \Gamma \left[\begin{matrix} 1/4+s, 3/4+s, 1/4-s, 3/4-s \\ 1/2+s, 1+s, 1/2-s, 1-s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} s < 1/4$
9(3)	$\ln \left \frac{1+x^{1/6}}{1-x^{1/6}} \right $	$\pi \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+1/2, 1/2-3s \\ 3s+1, 1-3s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < 1/6$
10(1)	$\ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})$	$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, -s \\ 1+s \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < 0$
10(2)	$\ln(x^{1/4} + \sqrt{1+\sqrt{x}})$	$-\frac{1}{\pi^{3/2} 2^{5/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/4, s+3/4, -s, \\ s+1 \\ 1/2-s \end{matrix} \right], -1/4 < \operatorname{Re} s < 0$
10(4)	$\ln(x^{1/8} + \sqrt{1+\sqrt[4]{x}})$	$-\frac{1}{32\pi^{7/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/8, s+3/8, s+5/8, \\ 1+s \\ s+7/8, -s, 1/4-s, 1/2-s, 3/4-s \end{matrix} \right],$ $-1/8 < \operatorname{Re} s < 0$
10(5)	$\ln \frac{1+\sqrt{1+x}}{\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, -s, 1/2-s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
10(7)	$\ln \frac{1+\sqrt{1+x^{1/3}}}{x^{1/6}}$	$-\frac{1}{8\sqrt[3]{3}\pi^{5/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/3+s, 2/3+s, -s, \\ 1-s \\ 1/6-s, 1/2-s, 5/6-s \end{matrix} \right], 0 < \operatorname{Re} s < 1/6$

1	2	3
11(1)	$\frac{\ln(\sqrt{1+x}-\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}} = -\frac{\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{x})}{\sqrt{1+x}}$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left[\begin{matrix} s+1/2, 1/2-s, 1/2-s \\ 1-s \end{matrix}\right],$ $ \operatorname{Res} < 1/2$
11(2)	$\frac{\ln(\sqrt{1+\sqrt{x}}-\sqrt[4]{x})}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$	$-\frac{1}{2\sqrt{2}\pi} \Gamma\left[\begin{matrix} s+1/4, s+3/4, 1/4-s, \\ s+1/2, s+1 \\ 3/4-s, 1/4-s, 3/4-s \end{matrix}\right],$ $ \operatorname{Res} < 1/4$
11(4)	$(1+x)^{-1/2} \ln \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{x}}$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left[\begin{matrix} s, s, 1-s \\ s+1/2 \end{matrix}\right], \quad 0 < \operatorname{Res} < 1$
11(6)	$(1+\sqrt[3]{x})^{-1/2} \times$ $\times \ln \frac{\sqrt{1+x^{1/3}}-1}{x^{1/6}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{8\pi^{3/2}} \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s, 3s, 1-3s \\ 3s+1/2 \end{matrix}\right],$ $0 < \operatorname{Res} < 1/3$
12(1)	$\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}) H(x-1)$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left[\begin{matrix} s, -s \\ s+1, 1/2-s \end{matrix}\right], \quad \operatorname{Res} < 0$
12(2)	$\ln(\sqrt[4]{x}+\sqrt{\sqrt{x}-1}) \times$ $\times H(x-1)$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \Gamma\left[\begin{matrix} s, -s, 1/2-s \\ s+1, 1/4-s, 3/4-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Res} < 0$
12(4)	$\ln(\sqrt[8]{x}+\sqrt{\sqrt[4]{x}-1}) \times$ $\times H(x-1)$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{4} \Gamma\left[\begin{matrix} s, \Delta(4, -4s) \\ s+1, \Delta(4, 1/2-4s) \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Res} < 0$
12(5)	$\ln \frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} H(1-x)$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left[\begin{matrix} s, -s \\ s+1/2, 1-s \end{matrix}\right], \quad \operatorname{Res} > 0$
12(7)	$\ln \frac{1+\sqrt{1-x^{1/3}}}{x^{1/6}} H(1-x)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{3}} \Gamma\left[\begin{matrix} s, s, s+1/3, s+2/3 \\ s+1, s+1/6, s+1/2, s+5/6 \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Res} > 0$
13(1)	$L^n(-x)$	$(-s)^{1-n} \Gamma[s, -s], \quad -1 < \operatorname{Res} < 0$
13(2)	$L^n(-\sqrt{x})$	$2^{-n} \pi^{-1} (-s)^{1-n} \Gamma[s, s+1/2, -s, 1/2-s],$ $-1/2 < \operatorname{Res} < 0$
13(3)	$L^n\left(-\frac{1}{x}\right)$	$s^{1-n} \Gamma[s, -s], \quad 0 < \operatorname{Res} < 1$
14(1)	$\lambda^n(-i\sqrt{x})$	$-i(-2)^{-n} s^{-n} \Gamma[s+1/2, 1/2-s],$ $-1/2 < \operatorname{Res} < 0$

1	2	3
14(2)	$\lambda^n (-i \sqrt[4]{x})$	$(-1)^{n+1} i \pi^{-1} (4s)^{-n} \Gamma[s+1/4, s+3/4,$ $1/4-s, 3/4-s], \quad -1/4 < \operatorname{Re} s < 0$
14(3)	$\lambda^n \left(-\frac{i}{\sqrt{x}} \right)$	$-i 2^{-n} s^{-n} \Gamma[s+1/2, 1/2-s],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2$

5. Гиперболические и обратные гиперболические функции

1(1)	$\operatorname{sh}(v \operatorname{Arsh} \sqrt{x})$	$\frac{v \cos(\pi v/2)}{2 \sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, v/2-s, -v/2-s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < -1/2 \operatorname{Re} v $
1(2)	$\operatorname{sh}(v \operatorname{Arsh} \sqrt[4]{x})$	$\frac{v \cos(\pi v/2)}{4\pi \sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/4, s+3/4, v/4-s, \\ 1/2-s, 1-s \\ (v+2)/4-s, -v/4-s, (2-v)/4-s \end{matrix} \right],$ $-1/4 < \operatorname{Re} s < -1/4 \operatorname{Re} v $
1(4)	$\operatorname{sh} \left(v \operatorname{Arsh} \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	$\frac{v \cos(\pi v/2)}{2 \sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+v/2, s-v/2, 1/2-s \\ s+1 \end{matrix} \right],$ $1/2 \operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 1/2$
1(6)	$\operatorname{sh}(v \operatorname{Arsh} x^{-1/6})$	$\frac{v \cos(\pi v/2)}{8\pi^2 \sqrt[3]{3\pi}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+v/2, 3s-v/2, \\ 3s+1 \\ 1/2-3s \end{matrix} \right], \quad 1/6 \operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 1/6$
2(1)	$\frac{\operatorname{sh}(v \operatorname{Arsh} \sqrt{x})}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{\sin(\pi v/2)}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, (v+1)/2-s, \\ 1-s \\ (1-v)/2-s \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < 1/2 (1- \operatorname{Re} v)$
2(2)	$\frac{\operatorname{sh}(v \operatorname{Arsh} \sqrt[4]{x})}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$	$\frac{\sin(\pi v/2)}{\pi \sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/4, s+3/4, (v+1)/4-s, \\ 1/2-s, 1-s \\ (v+3)/4-s, (1-v)/4-s, (3-v)/4-s \end{matrix} \right],$ $-1/4 < \operatorname{Re} s < 1/4 (1- \operatorname{Re} v)$
2(4)	$\frac{\operatorname{sh}(v \operatorname{Arsh} x^{-1/2})}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{\sin(\pi v/2)}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} 1-s, s+v/2, s-v/2 \\ 1/2+s \end{matrix} \right],$ $1/2 \operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 1$
2(6)	$\frac{\operatorname{sh}(v \operatorname{Arsh} x^{-1/6})}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$	$\frac{\sqrt[3]{3} \sin(\pi v/2)}{4\pi^{5/2}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+v/2, 3s-v/2, \\ 3s+1/2 \\ 1-3s \end{matrix} \right], \quad 1/6 \operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 1/3$

1	2	3
3(1)	$\frac{\text{ch}(\nu \text{Arsh} \sqrt{x})}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{\cos(\pi\nu/2)}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, (1+\nu)/2-s, \\ 1/2-s \\ (1-\nu)/2-s \end{matrix} \right], 0 < \text{Re } s < 1/2(1- \text{Re } \nu)$
3(2)	$\frac{\text{ch}(\nu \text{Arsh} \sqrt[4]{x})}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$	$\frac{\cos(\pi\nu/2)}{\pi \sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, (1+\nu)/4-s, \\ 1/4-s, 3/4-s \\ (3+\nu)/4-s, (1-\nu)/4-s, (3-\nu)/4-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Re } s < 1/4(1- \text{Re } \nu)$
3(4)	$\frac{\text{ch}(\nu \text{Arsh} x^{-1/2})}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{\cos(\pi\nu/2)}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2-s, s+\nu/2, s-\nu/2 \\ s \end{matrix} \right],$ $1/2 \text{Re } \nu < \text{Re } s < 1/2$
3(6)	$\frac{\text{ch}(\nu \text{Arsh} x^{-1/6})}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}$	$\frac{\sqrt{3} \cos(\pi\nu/2)}{4\pi^{5/2}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+\nu/2, 3s-\nu/2, \\ 3s \\ 1/2-3s \end{matrix} \right], 1/6 \text{Re } \nu < \text{Re } s < 1/6$
4(1)	$\text{sh}[\nu \text{Arth} \sqrt{(1-x)_+}]$	$\frac{\nu \sqrt{\pi}}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+\nu/2, s-\nu/2 \\ s+1, s+1/2 \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s > 1/2 \text{Re } \nu $
4(2)	$\text{sh}[\nu \text{Arth} \sqrt{(1-\sqrt{x})_+}]$	$\frac{\nu \sqrt{\pi}}{2^{3/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+\nu/4, s+\nu/4+1/2, s-\nu/4, \\ s+1/2, s+1, s+1/4, s+3/4 \\ s-\nu/4+1/2 \end{matrix} \right], \text{Re } s > 1/4 \text{Re } \nu $
4(4)	$\text{sh} \left[\nu \text{Arth} \sqrt{\frac{(x-1)_+}{x}} \right]$	$\frac{\nu \sqrt{\pi}}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} \nu/2-s, -\nu/2-s \\ 1-s, 1/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s < -1/2 \text{Re } \nu $
4(6)	$\text{sh} \left[\nu \text{Arth} \frac{\sqrt{(\sqrt[3]{x}-1)_+}}{x^{1/6}} \right]$	$\frac{\nu \sqrt{\pi}}{2 \sqrt[3]{3}} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} \nu/2-3s, -\nu/2-3s \\ 1-3s, 1/2-3s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s < -1/6 \text{Re } \nu $
5(1)	$\text{sh} \left[\nu \text{Arth} \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \right] 1-x ^\nu$	$-\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} \nu+1/2 \\ -\nu \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, 1/2-\nu-s \\ 1+\nu+s, 1-s \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \text{Re } s < 1/2 - \text{Re } \nu, \text{Re } \nu > -1/2$
5(2)	$\text{sh} \left[\nu \text{Arth} \frac{2\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} \right] 1-\sqrt{x} ^\nu$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\nu}} \Gamma \left[\begin{matrix} \nu+1/2 \\ -\nu \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/4, s+3/4, \\ (1+\nu)/2+s, \\ -s+1/4-\nu/2, 3/4-\nu/2-s \end{matrix} \right],$ $1+\nu/2+s, 1/2-s, 1-s$ $-1/4 < \text{Re } s < 1/4 - 1/2 \text{Re } \nu,$ $\text{Re } \nu > -1/2$

1	2	3
5(3)	$\text{sh} \left[v \text{Arth} \frac{2x^{1/6}}{1+x^{1/3}} \right] \times$ $\times 1-x^{1/3} ^v$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{3^{2v}} \Gamma \left[\begin{matrix} v+1/2 \\ -v \end{matrix} \right] \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+1/2, \\ 3s+1+v, \\ 1/2-v-3s \\ 1-3s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } v > -1/2, -1/6 < \text{Re } s < 1/6 - \text{Re } v/3$
6(1)	$\text{ch} \left[v \text{Arth} \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \right] 1-x ^v$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} v+1/2 \\ -v \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s, -v-s \\ 1/2+v+s, 1/2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Re } s < -\text{Re } v, \text{Re } v > -1/2$
6(2)	$\text{ch} \left[v \text{Arth} \frac{2\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} \right] \times$ $\times 1-\sqrt{x} ^v$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2v}} \Gamma \left[\begin{matrix} v+1/2 \\ -v \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, -v/2-s, \\ s+1/4+v/2, \\ (1-v)/2-s \\ s+3/4+v/2, 1/4-s, 3/4-s \end{matrix} \right],$ $0 < \text{Re } s < -\text{Re } v/2, \text{Re } v > -1/2$
6(3)	$\text{ch} \left[v \text{Arth} \frac{2x^{1/6}}{1+x^{1/3}} \right] \times$ $\times 1-\sqrt[3]{x} ^v$	$\frac{\sqrt{\pi}}{3^{2v}} \Gamma \left[\begin{matrix} v+1/2 \\ -v \end{matrix} \right] \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s, -v-3s \\ 3s+v+1/2, \\ 1/2-3s \end{matrix} \right], \text{Re } v > -1/2, 0 < \text{Re } s < -\text{Re } v/3$
7(1)	$\text{ch} [v \text{Arth} \sqrt{1-x}] (1-x)_+^{-1/2}$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s-v/2, s+v/2 \\ s, s+1/2 \end{matrix} \right], \text{Re } s > \text{Re } v /2$
7(2)	$\text{ch} [v \text{Arth} \sqrt{1-\sqrt{x}}] \times$ $\times (1-\sqrt{x})_+^{-1/2}$	$\sqrt{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s-v/4, s+(2-v)/4, s+v/4, \\ s, s+1/2, s+1/4, s+3/4 \\ s+(2+v)/4 \end{matrix} \right], \text{Re } s > \text{Re } v /4$
7(4)	$\text{ch} [v \text{Arth} \sqrt{1-x^{-1}}] \times$ $\times (x-1)_+^{-1/2}$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} (1-v)/2-s, (1+v)/2-s \\ 1-s, 1/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s < 1/2(1- \text{Re } v)$
7(6)	$\text{ch} [v \text{Arth} \sqrt{1-x^{-1/3}}] \times$ $\times (\sqrt[3]{x}-1)_+^{-1/2}$	$\sqrt{3\pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} (1-v)/2-3s, (1+v)/2-3s \\ 1-3s, 1/2-3s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } s < 1/6(1- \text{Re } v)$

1	2	3
---	---	---

6. Обратные тригонометрические функции

1(1)	$H(1-x) \arcsin \sqrt{x}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ s+1 \end{matrix} \right] + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, -s \\ s+1, 1-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > -1/2$
1(2)	$H(1-x) \arcsin x^{(2k)^{-1}}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ s+1 \end{matrix} \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} \Delta(k, sk+1/2), -s \\ \Delta(k, sk+1), 1-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > -(2k)^{-1}, k=1, 2, 3, \dots$
1(3)	$H(x-1) \arcsin \frac{1}{\sqrt{x}}$	$-\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ s+1 \end{matrix} \right] + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/2-s \\ s+1, 1-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < 1/2$
1(4)	$H(x-1) \arcsin x^{-(2k)^{-1}}$	$-\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s \\ s+1 \end{matrix} \right] + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s, \Delta(k, 1/2-ks) \\ s+1, \Delta(k, 1-ks) \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < (2k)^{-1}, k=1, 2, 3, \dots$
2(1)	$H(1-x) \arccos \sqrt{x}$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2+s, -s \\ 1+s, 1-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s > 0$
2(2)	$H(1-x) \arccos x^{(2k)^{-1}}$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}} \Gamma \left[\begin{matrix} \Delta(k, 1/2+ks), -s \\ \Delta(k, 1+ks), 1-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0, k=1, 2, \dots$
2(3)	$H(x-1) \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/2-s \\ 1+s, 1-s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} s < 0$
2(4)	$H(x-1) \arccos x^{-(2k)^{-1}}$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{k}} \Gamma \left[\begin{matrix} \Delta(k, 1/2-ks), s \\ \Delta(k, 1-ks), 1+s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < 0, k=1, 2, \dots$
3(1)	$\operatorname{arctg} \sqrt{x} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x}}$	$\frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2+s, 1/2-s, -s \\ 1-s \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < 0$
3(2)	$\operatorname{arctg} x^{(2k)^{-1}}$	$\frac{1}{2^k \pi^{k-1}} \Gamma \left[\begin{matrix} \Delta(k, 1/2+ks), \\ \Delta(k, 1/2-ks), -s \\ 1-s \end{matrix} \right], - (2k)^{-1} < \operatorname{Re} s < 0,$ $k=1, 2, 3, \dots$

1	2	3
3(3)	$\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/2 + s, 1/2 - s \\ 1 + s \end{matrix} \right], 0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
3(4)	$\operatorname{arctg} x^{-(2k)^{-1}}$	$-\frac{1}{2^k \pi^{k-1}} \Gamma \left[\begin{matrix} \Delta(k, 1/2 + ks), \\ \Delta(k, 1/2 - ks), -s \end{matrix} \right], 0 < \operatorname{Re} s < (2k)^{-1},$ $k = 1, 2, 3, \dots$
4(1)	$\sin(v \arcsin \sqrt{(1-x)_+}) =$ $= \sin(v \arccos \sqrt{x}) H(1-x)$	$\frac{v \sqrt{\pi}}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s + 1/2 \\ s + 1 + v/2, s + 1 - v/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0$
4(2)	$\sin(v \arcsin \sqrt{(1-x^{1/k})_+})$	$\frac{v}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \Gamma_k \left[\begin{matrix} ks, ks + 1/2 \\ ks + 1 + v/2, ks + 1 - v/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0, k = 1, 2, \dots$
4(3)	$\sin \left(v \arcsin \sqrt{\frac{(x-1)_+}{x}} \right)$	$\frac{v}{2} \sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} -s, 1/2 - s \\ 1 + v/2 - s, 1 - v/2 - s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < 0$
4(4)	$\sin \left(v \arcsin \sqrt{\frac{(x^{1/k}-1)_+}{x^{1/k}}} \right)$	$\frac{v}{2} \sqrt{\frac{\pi}{k}} \Gamma_k \left[\begin{matrix} -ks, 1/2 - ks \\ 1 + v/2 - ks, 1 - v/2 - ks \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < 0, k = 1, 2, 3, \dots$
5(1)	$\cos(v \arccos \sqrt{x})(1-x)_+^{-1/2} =$ $= \cos(v \arcsin \sqrt{1-x}) \times$ $\times (1-x)_+^{-1/2}$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s + 1/2 \\ s + (1+v)/2, s + (1-v)/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0$
5(2)	$\cos(v \arccos x^{(2k)^{-1}}) \times$ $\times (1-x^{1/k})_+^{-1/2}$	$\sqrt{\pi k} \Gamma_k \left[\begin{matrix} ks, ks + 1/2 \\ ks + (v+1)/2, ks + (1-v)/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > 0, k = 1, 2, \dots$
5(3)	$\cos \left(v \arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \times$ $\times (x-1)_+^{-1/2}$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2 - s, 1 - s \\ 1 + v/2 - s, 1 - v/2 - s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < 1/2$
5(4)	$\cos(v \arccos x^{-(2k)^{-1}}) \times$ $\times (\sqrt[k]{x} - 1)_+^{-1/2}$	$\sqrt{k\pi} \Gamma_k \left[\begin{matrix} 1/2 - ks, 1 - ks \\ 1 + v/2 - ks, 1 - v/2 - ks \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < (2k)^{-1}, k = 1, 2, \dots$
6(1)	$\sin(v \operatorname{arctg} \sqrt{x})(1+x)^{v/2}$	$-\frac{2^{-v-1}}{\Gamma(-v)} \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1/2, -v/2 - s, \\ (1-v)/2 - s \end{matrix} \right], -1/2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} v/2$

1	2	3
6(2)	$\sin(v \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x})(1+\sqrt{x})^{v/2}$	$-\frac{2^{-2v-2}}{\pi\Gamma(-v)} \Gamma\left[\begin{matrix} s+1/4, s+3/4, -v/4-s \\ 1/2-s, 1-s \\ (2-v)/4-s, (1-v)/4-s, (3-v)/4-s \end{matrix}\right],$ $-1/4 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} v/4$
6(4)	$\sin\left(v \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}\right)(1+x)^{v/2}$	$-\frac{2^{-v-1}}{\Gamma(-v)} \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2, (1-v)/2-s \\ s+v/2+1 \end{matrix}\right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2(1-\operatorname{Re} v)$
6(6)	$\sin(v \operatorname{arctg} x^{-1/6})(1+\sqrt[3]{x})^{v/2}$	$-\frac{6^{-v}}{8\pi^2\Gamma(-v)} \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s, 3s+1/2, \\ 3s+v/2+1 \\ (1-v)/2-3s \end{matrix}\right], 0 < \operatorname{Re} s < 1/6(1-\operatorname{Re} v)$
7(1)	$\cos(v \operatorname{arctg} \sqrt{x})(1+x)^{v/2}$	$\frac{2^{-v-1}}{\Gamma(-v)} \Gamma\left[\begin{matrix} s, -v/2-s, (1-v)/2-s \\ 1/2-s \end{matrix}\right],$ $0 < \operatorname{Re} s < -1/2 \operatorname{Re} v$
7(2)	$\cos(v \operatorname{arctg} \sqrt[4]{x})(1+\sqrt{x})^{v/2}$	$\frac{2^{-2v-2}}{\pi\Gamma(-v)} \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2, -v/4-s, \\ 1/4-s, 3/4-s \\ 1/2-v/4-s, (1-v)/4-s, (3-v)/4-s \end{matrix}\right],$ $0 < \operatorname{Re} s < -1/4 \operatorname{Re} v$
7(4)	$\cos\left(v \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \times$ $\times (1+x)^{v/2}$	$\frac{2^{-v-1}}{\Gamma(-v)} \Gamma\left[\begin{matrix} s, 1/2+s, -s-v/2 \\ (1+v)/2+s \end{matrix}\right],$ $0 < \operatorname{Re} s < -1/2 \operatorname{Re} v$
7(6)	$\cos(v \operatorname{arctg} x^{-1/6}) \times$ $\times (1+\sqrt[3]{x})^{v/2}$	$\frac{6^{-v}}{8\pi^2\Gamma(-v)} \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s, 3s+1/2, -v/2-3s \\ 3s+(1+v)/2 \end{matrix}\right],$ $0 < \operatorname{Re} s < -1/6 \operatorname{Re} v$
8(1)	$(1-x)_+^{-1/2}(1+\sqrt{1-x})^v \times$ $\times \sin(\pi v/2) + (x-1)_+^{-1/2} \times$ $\times x^{v/2} \cos(v \arcsin x^{-1/2})$	$\sqrt{\pi}\Gamma\left[\begin{matrix} s, (1-v)/2-s \\ s+v/2, 1-v-s \end{matrix}\right],$ $0 < \operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} v)/2$
8(2)	$(1-\sqrt{x})_+^{-1/2}(1+$ $+ \sqrt{1-\sqrt{x}})^v \sin(\pi v/2) +$ $+ (\sqrt{x}-1)_+^{-1/2} x^{v/4} \times$ $\times \cos(v \arcsin x^{-1/4})$	$\sqrt{2\pi}\Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2, (1-v)/4-s, \\ s+v/4, s+(v+2)/4, (1-v)/2-s, \\ (3-v)/4-s \end{matrix}\right], 0 < \operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} v)/4$ $1-v/2-s$

1	2	3
8(3)	$(1-x)_+^{-1/2} \cos(\nu \arcsin \sqrt{x}) +$ $+(x-1)_+^{-1/2} (\sqrt{x} +$ $+\sqrt{x-1})^\nu \sin(\pi\nu/2)$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, (1-\nu)/2 - s \\ s + (1-\nu)/2, 1/2 - s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < (1 - \operatorname{Re} \nu)/2$
9(1)	$(1-x)_+^{-1/2} (1 + \sqrt{1-x})^\nu \times$ $\times \cos(\pi\nu/2) - (x-1)_+^{-1/2} \times$ $\times x^{\nu/2} \sin(\nu \arcsin x^{-1/2})$	$\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1-\nu/2 - s \\ s + (\nu+1)/2, 1-\nu-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re} \nu/2$
9(2)	$(1-\sqrt{x})_+^{-1/2} (1 +$ $+\sqrt{1-\sqrt{x}})^\nu \cos(\pi\nu/2) -$ $-(\sqrt{x}-1)_+^{-1/2} x^{\nu/4} \times$ $\times \sin(\nu \arcsin x^{-1/4})$	$\sqrt{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, (2-\nu)/4 - s \\ (\nu+1)/4 + s, (\nu+3)/4 + s, \\ 1-\nu/4 - s, \\ (1-\nu)/2 - s, 1-\nu/2 - s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < (2 - \operatorname{Re} \nu)/4$
9(3)	$(1-x)_+^{-1/2} \sin(\nu \arcsin \sqrt{x}) -$ $-(x-1)_+^{-1/2} (\sqrt{x} +$ $+\sqrt{x-1})^\nu \cos(\pi\nu/2)$	$-\sqrt{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, (1-\nu)/2 - s \\ s + (1-\nu)/2, 1-s \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < (1 - \operatorname{Re} \nu)/2$
10(1)	$\sin(\nu \arcsin \sqrt{x}) H(1-x) +$ $+(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^\nu \times$ $\times \sin(\pi\nu/2) H(x-1)$	$\frac{\nu \sqrt{\pi}}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, -\nu/2 - s \\ s+1-\nu/2, 1-s \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} \nu/2$
10(2)	$\sin(\nu \arcsin x^{1/4}) H(1-x) +$ $+(\sqrt[4]{x} + \sqrt{\sqrt{x}-1})^\nu \times$ $\times \sin(\pi\nu/2) H(x-1)$	$\frac{\nu \sqrt{\pi}}{2^{3/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/4, s+3/4, -\nu/4 - s, \\ s+(2-\nu)/4, s+1-\nu/4, \\ (2-\nu)/4 - s \end{matrix} \right],$ $-1/4 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} \nu/4$
10(3)	$(1 + \sqrt{1-x})^\nu \sin(\pi\nu/2) \times$ $\times {}_2F_1(1-x) + x^{\nu/2} \times$ $\times \sin(\nu \arcsin x^{-1/2}) H(x-1)$	$\frac{\nu \sqrt{\pi}}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, (1-\nu)/2 - s \\ s+1+\nu/2, 1-\nu-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < (1 - \operatorname{Re} \nu)/2$
11(1)	$\cos(\nu \arcsin \sqrt{x}) H(1-x) +$ $+(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^\nu \times$ $\times \cos(\pi\nu/2) H(x-1)$	$-\frac{\nu \sqrt{\pi}}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, -\nu/2 - s \\ s+1-\nu/2, 1/2 - s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < -1/2 \operatorname{Re} \nu$
11(2)	$\cos(\nu \arcsin \sqrt[4]{x}) H(1-x) +$ $+(\sqrt[4]{x} + \sqrt{\sqrt{x}-1})^\nu \times$ $\times \cos(\pi\nu/2) H(x-1)$	$-\frac{\nu \sqrt{\pi}}{2^{3/2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, -\nu/4 - s, \\ s+(2-\nu)/4, s+1-\nu/4, \\ (2-\nu)/4 - s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < -1/4 \operatorname{Re} \nu$

1	2	3
11(3)	$(1 + \sqrt{1-x})^v \cos(\pi v/2) \times$ $\times H(1-x) + x^{v/2} \times$ $\times \cos(v \arcsin x^{-1/2}) H(x-1)$	$-\frac{v\sqrt{\pi}}{2} \Gamma \left[s, -v/2-s \right.$ $\left. s+(1+v)/2, 1-v-s \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < -1/2 \operatorname{Re} v$
12(1)	$2^{-1} [(1 + \sqrt{1-x})^v -$ $-(1 - \sqrt{1-x})^v] (1-x)_+^{-1/2} +$ $+ x^{v/2} \sin(v \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}) \times$ $\times (x-1)_+^{-1/2}$	$\frac{\sin \pi v}{2\pi^{3/2}} \Gamma[s, s+v, (1-v)/2-s, 1-v/2-s],$ $ \operatorname{Re} v < 1, 0, -\operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} v)/2$
12(2)	$2^{-1} \left[(1 + \sqrt{1-\sqrt{x}})^v - \right.$ $\left. - (1 - \sqrt{1-\sqrt{x}})^v \right] \times$ $\times (1 - \sqrt{x})_+^{-1/2} + x^{v/4} \times$ $\times \sin(v \operatorname{arctg} \sqrt{\sqrt{x}-1}) \times$ $\times (\sqrt{x}-1)_+^{-1/2}$	$\frac{\sin \pi v}{4\pi^3 \sqrt{2\pi}} \Gamma[s, s+1/2, s+v/2, s+(v+1)/2,$ $(1-v)/4-s, (3-v)/4-s, (2-v)/4-s,$ $1-v/4-s], \operatorname{Re} v < 1,$ $0, -1/2 \operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} v)/4$
12(3)	$\sin \left(v \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}} \right) \times$ $\times (1-x)_+^{-1/2} +$ $+ 2^{-1} [(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^v -$ $-(\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^v] \times$ $\times (x-1)_+^{-1/2}$	$\frac{\sin \pi v}{2\pi^{3/2}} \Gamma[s, s+1/2, (1-v)/2-s,$ $(1+v)/2-s], \operatorname{Re} v < 1,$ $0 < \operatorname{Re} s < (1- \operatorname{Re} v)/2$
13(1)	$\arcsin \sqrt{1-x} (1-x)_+^{-1/2} +$ $+ \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) \times$ $\times (x-1)_+^{-1/2}$	$(2\sqrt{\pi})^{-1} \Gamma[s, s+1/2, 1/2-s, 1/2-s],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
13(2)	$\arcsin \sqrt{1-\sqrt{x}} \times$ $\times (1-\sqrt{x})_+^{-1/2} +$ $+ \ln(\sqrt[4]{x} + \sqrt{\sqrt{x}-1}) \times$ $\times (\sqrt{x}-1)_+^{-1/2}$	$(2\pi)^{-5/2} \Gamma[s, s+1/2, s+1/4, s+3/4,$ $1/4-s, 1/4-s, 3/4-s, 3/4-s],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4$
13(3)	$\ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \right) (1-x)_+^{-1/2} +$ $+ \arcsin \sqrt{\frac{x-1}{x}} (x-1)_+^{-1/2}$	$(2\sqrt{\pi})^{-1} \Gamma[s, s, 1-s, 1/2-s],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/2$

1	2	3
14(1)	$\sin(\nu \arccos \sqrt{x})(1-x)_+^{-1/2} +$ $+ \operatorname{sh}(\nu \operatorname{Arch} \sqrt{x})(x-1)_+^{-1/2}$	$2^{-1} \pi^{-3/2} \sin \nu \pi \Gamma[s, s+1/2, (1+\nu)/2-s,$ $(1-\nu)/2-s], \operatorname{Re} \nu < 1,$ $0 < \operatorname{Re} s < (1- \operatorname{Re} \nu)/2$
14(2)	$\sin(\nu \arccos \sqrt[4]{x}) \times$ $\times (1-\sqrt{x})_+^{-1/2} +$ $+ \operatorname{sh}(\nu \operatorname{Arch} \sqrt[4]{x}) \times$ $\times (\sqrt{x}-1)_+^{-1/2}$	$(2\pi)^{-5/2} \pi^{-1} \sin \nu \pi \Gamma[s, s+1/2, s+1/4,$ $s+3/4, (1+\nu)/4-s, (3+\nu)/4-s,$ $(1-\nu)/4-s, (3-\nu)/4-s],$ $ \operatorname{Re} \nu < 1, 0 < \operatorname{Re} s < (1- \operatorname{Re} \nu)/4$
14(3)	$\operatorname{sh}(\nu \operatorname{Arch} x^{-1/2})(1-x)_+^{-1/2} +$ $+ \sin(\nu \arccos x^{-1/2}) \times$ $\times (x-1)_+^{-1/2}$	$2^{-1} \pi^{-3/2} \sin \nu \pi \Gamma[s+\nu/2, s-\nu/2, 1/2-s,$ $1-s], \operatorname{Re} \nu < 1,$ $ \operatorname{Re} \nu /2 < \operatorname{Re} s < 1/2$

7. Полные эллиптические интегралы

1(1)	$K(\sqrt{x})$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/2-s \\ s+1/2, 1-s \end{matrix} \right], \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
1(2)	$K(\sqrt[4]{x})$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/4-s, 3/4-s \\ s+1/4, s+3/4, 1/2-s, 1-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 1/4$
1(3)	$K\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, -s \\ s+1, 1/2-s \end{matrix} \right], \quad -1/2 < \operatorname{Re} s < 0$
2(1)	$K(i\sqrt{x}), \quad i = \sqrt{-1}$	$\frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, 1/2-s, 1/2-s \\ 1-s \end{matrix} \right], \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1/2$
2(2)	$K(i\sqrt[4]{x})$	$\frac{1}{4\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/4-s, 1/4-s, \\ 1/2-s, 1-s \\ 3/4-s, 3/4-s \end{matrix} \right], \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1/4$
2(3)	$K\left(\frac{i}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{1}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/2, s+1/2, -s \\ s+1 \end{matrix} \right],$ $-1/2 < \operatorname{Re} s < 0$
3(1)	$K(\sqrt{1-x}) H(1-x)$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s \\ s+1/2, s+1/2 \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} s > 0$
3(2)	$K(\sqrt{1-\sqrt{x}}) H(1-x)$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s, s+1/2, s+1/2 \\ s+1/4, s+1/4, s+3/4, s+3/4 \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} s > 0,$
3(3)	$K\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right) H(x-1)$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} -s, -s \\ 1/2-s, 1/2-s \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} s < 0$

1	2	3
4(1)	$K\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)(x+1)^{-1/2}$	$\frac{1}{2} \Gamma\left[\begin{matrix} s, s, 1/2-s \\ 1/2+s \end{matrix}\right], 0 < \text{Res} < 1/2$
4(2)	$K\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}\right) \times$ $\times (\sqrt{x}+1)^{-1/2}$	$\frac{1}{4\pi} \Gamma\left[\begin{matrix} s, s, s+1/2, s+1/2, 1/4-s, \\ 1/4+s, s+3/4 \\ 3/4-s \end{matrix}\right], 0 < \text{Res} < 1/4$
4(3)	$K\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right)(x+1)^{-1/2}$	$\frac{1}{2} \Gamma\left[\begin{matrix} s, 1/2-s, 1/2-s \\ 1-s \end{matrix}\right],$ $0 < \text{Res} < 1/2$
5(1)	$K\left(\frac{1 \pm \sqrt{x}}{1 \mp \sqrt{x}}\right) \frac{H(1-x)}{1 \mp \sqrt{x}}$	$\frac{\pi}{4} \Gamma\left[\begin{matrix} s, s \\ s+1/2, s+1/2 \end{matrix}\right], \text{Res} > 0$
5(2)	$K\left(\frac{1 \pm \sqrt[4]{x}}{1 \mp \sqrt[4]{x}}\right) \frac{H(1-x)}{1 \mp \sqrt[4]{x}}$	$\frac{\pi}{4} \Gamma\left[\begin{matrix} s, s, s+1/2, s+1/2 \\ s+1/4, s+1/4, s+3/4, s+3/4 \end{matrix}\right],$ $\text{Res} > 0$
5(3)	$K\left(\frac{1 \pm \sqrt{x} \pm 1}{\sqrt{x} \mp 1}\right) \frac{H(x-1)}{\sqrt{x} \mp 1}$	$\frac{\pi}{4} \Gamma\left[\begin{matrix} 1/2-s, 1/2-s \\ 1-s, 1-s \end{matrix}\right], \text{Res} < 1/2$
6(1)	$K\left(\left \frac{1 \pm \sqrt{x}}{1 \mp \sqrt{x}}\right \right) \frac{1}{ 1 \mp \sqrt{x} }$	$\frac{1}{4\pi} \Gamma[s, s, 1/2-s, 1/2-s],$ $0 < \text{Res} < 1/2$
6(2)	$K\left(\left \frac{1 \pm \sqrt[4]{x}}{1 \mp \sqrt[4]{x}}\right \right) \frac{1}{ 1 \mp \sqrt[4]{x} }$	$\frac{1}{16\pi^3} \Gamma[s, s, s+1/2, s+1/2, 1/4-s,$ $1/4-s, 3/4-s, 3/4-s], 0 < \text{Res} < 1/4$
7(1)	$K\left(\sqrt{\frac{ 1-x +(1+x)}{2 1-x }}\right) \times$ $\times 1-x ^{-1/2}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma\left[\begin{matrix} s, 1/2-s \\ s+1/2, 1-s \end{matrix}\right], 0 < \text{Res} < 1/2$
7(2)	$K\left(\sqrt{\frac{ 1-\sqrt{x} +(1+\sqrt{x})}{2 1-\sqrt{x} }}\right) \times$ $\times 1-\sqrt{x} ^{-1/2}$	$\frac{\pi}{2} \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2, 1/4-s, 3/4-s \\ s+1/4, s+3/4, 1/2-s, 1-s \end{matrix}\right],$ $0 < \text{Res} < 1/4$
8(1)	$K\left(\frac{2+x \pm 2\sqrt{x+1}}{x}\right) \times$ $\times (1 \pm \sqrt{x+1})$	$-\frac{1}{4} \Gamma\left[\begin{matrix} s+1, -1/2-s, -1/2-s \\ -s \end{matrix}\right],$ $-1 < \text{Res} < -1/2$
8(2)	$K\left(\frac{2+\sqrt{x} \pm 2\sqrt{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}}\right) \times$ $\times (1 \pm \sqrt{\sqrt{x}+1})$	$-\frac{1}{8\pi} \Gamma\left[\begin{matrix} s+1/2, s+1, -1/4-s, \\ -s, 1/2-s \\ 1/4-s, -1/4-s, 1/4-s \end{matrix}\right],$ $-1/2 < \text{Res} < -1/4$

1	2	3
8(3)	$K(2x+1 \pm 2\sqrt{x^2+x}) \times (\sqrt{x} \pm \sqrt{x+1})$	$-\frac{1}{4} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s, 1/2-s \\ 1/2+s \end{matrix} \right], 0 < \text{Res} < 1/2$
9(1)	$K \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{x}}{2}} \right) H(x-1)$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/4-s, 1/4-s \\ 1-s, 1/2-s \end{matrix} \right], \text{Res} < 1/4$
9(2)	$K \left(\sqrt{\frac{1+x^{1/4}}{2}} \right) H(x-1)$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/8-s, 1/8-s, 5/8-s, 5/8-s \\ 1/2-s, 1-s, 1/4-s, 3/4-s \end{matrix} \right],$ $\text{Res} < 1/8$
9(3)	$K \left(\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{2}x^{1/4}} \right) H(1-x)$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/4, s+1/4 \\ s+1, s+1/2 \end{matrix} \right], \text{Res} > -1/4$
10(1)	$K \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{2}} \right) H(1-x)$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2 \\ s+3/4, s+3/4 \end{matrix} \right], \text{Res} > 0$
10(2)	$K \left(\sqrt{\frac{1-x^{1/4}}{2}} \right) H(1-x)$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+1/4, s+3/4 \\ s+3/8, s+3/8, s+7/8, s+7/8 \end{matrix} \right],$ $\text{Res} > 0$
10(3)	$K \left(\sqrt{\frac{\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}} \right) H(x-1)$	$\frac{\pi}{2} \Gamma \left[\begin{matrix} -s, 1/2-s \\ 3/4-s, 3/4-s \end{matrix} \right], \text{Res} < 0$
11(1)	$K \left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{x} \operatorname{sgn}(x-1)}{2}} \right)$	$(4\pi)^{-1} \Gamma[s, s+1/2, 1/4-s, 1/4-s],$ $0 < \text{Res} < 1/4$
11(2)	$K \left(\sqrt{\frac{1+x^{1/4} \operatorname{sgn}(x-1)}{2}} \right)$	$(16\pi^3)^{-1} \Gamma[s, s+1/2, s+1/4, s+3/4,$ $1/8-s, 1/8-s, 5/8-s, 5/8-s],$ $0 < \text{Res} < 1/8$
11(3)	$K \left(\frac{\sqrt{\sqrt{x} + \operatorname{sgn}(x-1)}}{\sqrt{2}x^{1/4}} \right)$	$(4\pi)^{-1} \Gamma[s+1/4, s+1/4, -s, 1/2-s],$ $-1/4 < \text{Res} < 0$
12(1)	$K \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}} \right) \frac{H(x-1)}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/4-s, 1/4-s \\ 1-s, 1/2-s \end{matrix} \right], \text{Res} < 1/4$
12(2)	$K \left(\sqrt{\frac{x^{1/4}-1}{x^{1/4}+1}} \right) \frac{H(x-1)}{\sqrt{x^{1/4}-1}}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/8-s, 1/8-s, 5/8-s, \\ 1/2-s, 1-s, 1/4-s, 3/4-s, \\ 5/8-s \end{matrix} \right], \text{Res} < 1/8$
12(3)	$K \left(\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}} \right) \frac{H(1-x)}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s \\ s+3/4, s+1/4 \end{matrix} \right], \text{Res} > 0$

1	2	3
43(2)	$(1 + \sqrt{x})^{v/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} \right)$	$-2^{-2v-7/2} \frac{\Gamma(\mu + v + 1)}{\pi^{3/2}} \times$ $\times \left\{ \Gamma \left[\begin{matrix} s + \mu/4, s + (2 + \mu)/4, s - \mu/4, \\ s + v/2 - \mu/4, s + (v + 1)/2 - \mu/4, \\ s + (2 - \mu)/4, -s - v/4, (2 - v)/4 - s, \\ (1 - v)/2 + \mu/4 - s, 1 - v/2 + \mu/4 - s \\ (1 - v)/4 - s, (3 - v)/4 - s \end{matrix} \right] + \right.$ $+ \cos \pi \mu \Gamma \left[\begin{matrix} s - \mu/4, s + (2 - \mu)/4, \\ (2 - \mu)/4 - s, 1 - \mu/4 - s \\ -v/4 - s, (2 - v)/4 - s, (1 - v)/4 - s, \\ (3 - v)/4 - s \end{matrix} \right] \Big\},$ $ \operatorname{Re} \mu /4 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} v/4$
43(3)	$(1 + x)^{v/2} Q_v^\mu \left(\sqrt{\frac{x}{1 + x}} \right)$	$-2^{-v-2} \frac{\Gamma(\mu + v + 1)}{\sqrt{\pi}} \times$ $\times \left\{ \Gamma \left[\begin{matrix} s, s + 1/2, (\mu - v)/2 - s, \\ s + 1 + (\mu - v)/2, (v - \mu)/2 - s \\ -(\mu + v)/2 - s \end{matrix} \right] + \cos \pi (\mu + v) \times \right.$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1/2, s, (-\mu - v)/2 - s \\ s + 1 + (v - \mu)/2 \end{matrix} \right] \Big\},$ $0 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} (v \pm \mu)/2$
44(1)	$(1 + x)^{-(v+1)/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{1 + x}} \right)$	$\frac{\sqrt{\pi} 2^{v-1}}{\Gamma(1 + v - \mu)} \Gamma \left[\begin{matrix} s + \mu/2, s - \mu/2, \\ (1 + \mu)/2 + s, \\ (1 + v)/2 - s, 1 + v/2 - s \\ (1 - \mu)/2 - s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re} v)/2$
44(2)	$(1 + \sqrt{x})^{-(v+1)/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{x}}} \right)$	$\frac{2^{2v-3/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(1 + v - \mu)} \Gamma \left[\begin{matrix} s + \mu/4, \\ (1 + \mu)/4 + s, \\ s + (2 + \mu)/4, s - \mu/4, s + (2 - \mu)/4, \\ s + (3 + \mu)/4, (1 - \mu)/4 - s, \\ (1 + v)/4 - s, (3 + v)/4 - s, (2 + v)/4 - s, \\ (3 - \mu)/4 - s \\ 1 + v/4 - s \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} \mu /4 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re} v)/4$

1	2	3
44(3)	$(1+x)^{-(v+1)/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\sqrt{\frac{x}{1+x}} \right)$	$\frac{\sqrt{\pi} 2^{v-1}}{\Gamma(1+v-\mu)} \Gamma \left[s, s+1/2, \right.$ $\left. (1+v+\mu)/2-s, (1+v-\mu)/2-s \right],$ $1+(\mu+v)/2-s$ $0 < \operatorname{Re} s < (1+\operatorname{Re}(v \pm \mu))/2$
45(1)	$(1-x)_+^{v/2} Q_v^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{1-x}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i} \sqrt{\pi} \Gamma(\mu+v+1)}{2^{v+1}} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu/2, s-\mu/2 \\ s+(1+v)/2, s+1+v/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v > -3/2, \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \mu /2$
45(2)	$(1-\sqrt{x})_+^{v/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{x}}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i} \sqrt{\pi}}{2^{2v+3/2}} \Gamma(\mu+v+1) \Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu/4, \\ s+(1+v)/4, \\ s+(2+\mu)/4, s-\mu/4, s+(2-\mu)/4 \end{matrix} \right],$ $s+(3+v)/4, s+(2+v)/4, s+1+v/4$ $\operatorname{Re} v > -3/2, \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \mu /4$
45(4)	$(x-1)_+^{v/2} Q_v^\mu \left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i} \sqrt{\pi}}{2^{v+1}} \Gamma(\mu+v+1) \Gamma \left[\begin{matrix} (\mu-v)/2-s, \\ 1/2-s, 1-s \\ -(\mu+v)/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v > -3/2,$ $\operatorname{Re} s < -\operatorname{Re}(v \pm \mu)/2$
45(6)	$(\sqrt[3]{x}-1)_+^{v/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{x^{1/6}}{\sqrt[3]{x^{1/3}-1}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i} \sqrt{\pi}}{6^{v+1/2} \sqrt{2}} \Gamma(\mu+v+1) \times$ $\times \Gamma_3 \left[\begin{matrix} (\mu-v)/2-3s, -(\mu+v)/2-3s \\ 1/2-3s, 1-3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v > -3/2, \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re}(v \pm \mu)/6$
46(1)	$ 1-x ^{-\mu} Q_v^\mu \left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}} \right)$	$e^{\mu\pi i} \sqrt{\pi} \Gamma(1/2-\mu) \Gamma \left[\begin{matrix} s+(v+1)/2, \\ s+1-\mu+v/2, \\ \mu+(v+1)/2-s \end{matrix} \right],$ $1+v/2-s$ $-(1+\operatorname{Re} v)/2 < \operatorname{Re} s < 1/2 + \operatorname{Re}(\mu+v)/2$

1	2	3
46(2)	$ 1 - \sqrt{x} ^{-\mu} Q_v^\mu \left(\frac{1 + \sqrt{x}}{2x^{1/4}} \right)$	$e^{\mu\pi i} \sqrt{\pi} 2^{2\mu} \Gamma(1/2 - \mu) \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s + (v+1)/4, s + (v+3)/4, \\ s + (1-\mu)/2 + v/4, s + 1 - \mu/2 + v/4, \\ \mu/2 + (v+1)/4 - s, \\ (2+v)/4 - s, 1 + v/4 - s \\ \mu/2 + (v+3)/4 - s \end{matrix} \right], \operatorname{Re} \mu < 1/2,$ $-(1 + \operatorname{Re} v)/4 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re}(v+2\mu))/4$
46(3)	$ 1 - \sqrt[3]{x} ^{-\mu} Q_v^\mu \left(\frac{1 + \sqrt[3]{x}}{2x^{1/6}} \right)$	$e^{\mu\pi i} \sqrt{\pi} 3^{2\mu} \Gamma(1/2 - \mu) \times$ $\times \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s + (v+1)/2, \mu + (v+1)/2 - 3s \\ 3s + 1 - \mu + v/2, 1 + v/2 - 3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} \mu < 1/2,$ $-(1 + \operatorname{Re} v)/6 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re}(v+2\mu))/6$
47(1)	$(1+x)^{v/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x(x+1)}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i}}{\sqrt{\pi}} \cos \mu\pi \Gamma(\mu + v + 1) \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s + (v+1)/2, \mu - v/2 - s, \\ v/2 + 1 - s \\ -\mu - v/2 - s \end{matrix} \right],$ $-(1 + \operatorname{Re} v)/2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re}(v/2 \pm \mu)$
47(2)	$(1 + \sqrt{x})^{v/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{2\sqrt{x} + 1}{2x^{1/4} \sqrt{\sqrt{x} + 1}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i} \cos \mu\pi}{2^{v+3/2} \pi^{3/2}} \Gamma(\mu + v + 1) \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s + (v+1)/4, s + (v+3)/4, \\ v/4 + 1 - s, (v+2)/4 - s \\ \mu/2 - v/4 - s, (1+\mu)/2 - v/4 - s, \\ -\mu/2 - v/4 - s, (1-\mu)/2 - v/4 - s \end{matrix} \right],$ $-(1 + \operatorname{Re} v)/4 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re}(v \pm 2\mu)/4$
47(4)	$(1+x)^{v/2} Q_v^\mu \left(\frac{2+x}{2\sqrt{1+x}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i}}{\sqrt{\pi}} \cos \mu\pi \Gamma(\mu + v + 1) \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s + \mu, s - \mu, 1/2 - s \\ s + 1 + v \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} s < 1/2$

1	2	3
47(6)	$(1 + \sqrt[3]{x})^{v/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{2 + \sqrt[3]{x}}{2 \sqrt[3]{1+x^{1/3}}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i} \cos \mu\pi}{4\pi^{5/2} 3^{v+1/2}} \Gamma(\mu + v + 1) \times$ $\times \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s + \mu, 3s - \mu, 1/2 - 3s \\ 3s + 1 + v \end{matrix} \right],$ $1/3 \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} s < 1/6$
48(1)	$(1 + x)^{-(v+1)/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{2x + 1}{2 \sqrt{x(x+1)}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i} \sqrt{\pi}}{\Gamma(v - \mu + 1)} \Gamma \left[\begin{matrix} s + (v + 1)/2, \\ v/2 + 1 - s \\ (v + 1)/2 + \mu - s, (v + 1)/2 - \mu - s \end{matrix} \right],$ $-(1 + \operatorname{Re} v)/2 < \operatorname{Re} s < 1/2 + \operatorname{Re}(v/2 \pm \mu)$
48(2)	$(1 + \sqrt{x})^{-(v+1)/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{2 \sqrt{x} + 1}{2x^{1/4} \sqrt{1 + \sqrt{x}}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i} 2^{v-1/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma(v - \mu + 1)} \Gamma \left[\begin{matrix} s + (v + 1)/4, \\ v/4 + 1/2 - s, \\ s + (v + 3)/4, (v + 1)/4 + \mu/2 - s, \\ 1 + v/4 - s \\ (v + 3)/4 + \mu/2 - s, (v + 1)/4 - \mu/2 - s, \\ (v + 3)/4 - \mu/2 - s \end{matrix} \right],$ $-(1 + \operatorname{Re} v)/4 < \operatorname{Re} s < 1/4 + \operatorname{Re}(v \pm 2\mu)/4$
48(4)	$(1 + x)^{-(v+1)/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{2 + x}{2 \sqrt{1+x}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i} \sqrt{\pi}}{\Gamma(v - \mu + 1)} \Gamma \left[\begin{matrix} s + \mu, s - \mu, v + 1 - s \\ s + 1/2 \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} s < 1 + \operatorname{Re} v$
48(6)	$(1 + \sqrt[3]{x})^{-(v+1)/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{2 + \sqrt[3]{x}}{2 \sqrt[3]{1+x^{1/3}}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i} 3^{v+1/2}}{4\pi^{3/2} \Gamma(v - \mu + 1)} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s + \mu, 3s - \mu, \\ 3s + 1/2 \\ v + 1 - 3s \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} \mu / 3 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re} v) / 3$
49(1)	$(1 - x)_+^{v/2} Q_v^\mu \left(\frac{2 - x}{2 \sqrt[3]{1-x}} \right)$	$e^{\mu\pi i} \sqrt{\pi} \Gamma(\mu + v + 1) \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s + \mu, s - \mu \\ s + 1/2, s + v + 1 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v > -3/2, \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \mu $
49(2)	$(1 - \sqrt{x})_+^{v/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{2 - \sqrt{x}}{2 \sqrt{1 - \sqrt{x}}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i} \sqrt{\pi}}{2^{v+1/2}} \Gamma(\mu + v + 1) \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s + \mu/2, s + (1 + \mu)/2, \\ s + 1/4, \\ s + (1 - \mu)/2, s - \mu/2 \\ s + 3/4, s + (v + 1)/2, s + 1 + v/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v > -3/2, \operatorname{Re} s > \operatorname{Re} \mu / 2$

1	2	3
49(4)	$(x-1)_+^{v/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{2x-1}{2\sqrt{x(x-1)}} \right)$	$e^{\mu\pi i} \sqrt{\pi} \Gamma(\mu+v+1) \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} \mu-v/2-s, -\mu-v/2-s \\ (1-v)/2-s, 1+v/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v > -3/2, \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re}(v/2 \pm \mu)$
49(6)	$(\sqrt[3]{x}-1)_+^{v/2} \times$ $\times Q_v^\mu \left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{2x^{1/6}\sqrt{x^{1/3}-1}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i} \sqrt{\pi}}{3^{v+1/2}} \Gamma(\mu+v+1) \times$ $\times \Gamma_3 \left[\begin{matrix} \mu-v/2-3s, -\mu-v/2-3s \\ (1-v)/2-3s, 1+v/2-3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} v > -3/2, \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re}(v \pm 2\mu)/6$
50(1)	$\frac{ 1-x ^{-2v-1}}{1+\sqrt{x}} \times$ $\times Q_v^{2v+1} \left(\frac{-1+6\sqrt{x}-x}{(1+\sqrt{x})^2} \right)$	$-\frac{\sqrt{\pi}}{4} \Gamma(-1/2-2v) \left\{ \frac{\cos 3v\pi}{\cos \pi v} \times \right.$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s+v/2+1/4, 5v/2+7/4-s \\ s-3v/2-1/4, v/2+5/4-s \end{matrix} \right] +$ $\left. + \Gamma \left[\begin{matrix} s-v/2-1/4, 3v/2+5/4-s \\ s-5v/2-3/4, 3/4-v/2-s \end{matrix} \right] \right\},$ $-2/3 < \operatorname{Re} v < -1/4,$ $ 1/4 + \operatorname{Re} v/2 < \operatorname{Re} s < 7/4 + 5\operatorname{Re} v/2,$ $5/4 + 3\operatorname{Re} v/2$
50(2)	$\frac{ 1-x ^{-2v-1}}{1+\sqrt{x}} \times$ $\times Q_v^{2v+1} \left(\frac{1-6\sqrt{x}+x}{(1+\sqrt{x})^2} \right)$	$\frac{\sqrt{\pi} \Gamma(-2v-1/2)}{4 \cos \pi v} \left\{ \Gamma \left[\begin{matrix} s+v/2+1/4, \\ s-3v/2-1/4, \\ 5v/2+7/4-s \\ v/2+5/4-s \end{matrix} \right] + \right.$ $\left. + \cos 2\pi v \Gamma \left[\begin{matrix} s-v/2-1/4, 3v/2+5/4-s \\ s-5v/2-3/4, 3/4-v/2-s \end{matrix} \right] \right\},$ $-2/3 < \operatorname{Re} v < -1/4,$ $ 1/4 - \operatorname{Re} v/2 < \operatorname{Re} s < 7/4 + 5\operatorname{Re} v/2,$ $5/4 + 3\operatorname{Re} v/2$
51(1)	$\frac{ 1-x ^{-2v-1}}{ 1-\sqrt{x} } \times$ $\times Q_v^{2v+1} \left(\frac{1+6\sqrt{x}+x}{(1-\sqrt{x})^2} \right)$	$\frac{e^{2v\pi i} \cos 2v\pi}{4\pi^{3/2}} \Gamma(-2v-1/2) \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s+v/2+1/4, s-v/2-1/4, \\ 5v/2+7/4-s, 3v/2+5/4-s \end{matrix} \right],$ $-2/3 < \operatorname{Re} v < -1/4,$ $ 1/4 + \operatorname{Re} v/2 < \operatorname{Re} s < 7/4 + 5\operatorname{Re} v/2,$ $5/4 + 3\operatorname{Re} v/2$

1	2	3
52(1)	$\frac{ 1-x ^{-2\mu}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \times$ $\times Q_{2\mu-1/2}^{\mu} \left(\frac{1+6\sqrt{x}+x}{4x^{1/4}(1+\sqrt{x})} \right)$	$e^{\mu\pi i} \pi \sqrt{2} \Gamma \left[\begin{matrix} 1/2-2\mu \\ \mu+1/2 \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu/2+1/8, 5/2\mu+3/8-s \\ s-3\mu/2+5/8, \mu/2+7/8-s \end{matrix} \right],$ $-1/6 < \operatorname{Re} \mu < 1/4,$ $-1/8 - \operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < 3/8 + 5 \operatorname{Re} \mu/2$
53(1)	$\frac{ 1-x ^{2\mu}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \times$ $\times Q_{2\mu-1/2}^{\mu} \left(\frac{1+6\sqrt{x}+x}{4x^{1/4}(1+\sqrt{x})} \right)$	$e^{\mu\pi i} \sqrt{2} \cos \mu \pi \Gamma (2\mu+1/2) \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu/2+1/8, 3/8-3\mu/2-s \\ s+5\mu/2+5/8, 7/8+\mu/2-s \end{matrix} \right],$ $-1/4 < \operatorname{Re} \mu < 1/2,$ $-1/8 - \operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < 3/8 - 3 \operatorname{Re} \mu/2$
54(1)	$[Q_v^{\mu} (\sqrt{1+x})]^2$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{2\pi\mu i} \Gamma \left[\begin{matrix} 1+v+\mu \\ 1+v-\mu \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+\mu, s-\mu, 1+v-s \\ s+1/2, s+v+1 \end{matrix} \right],$ $ \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} s < 1 + \operatorname{Re} v$
54(2)	$\left[Q_v^{\mu} (\sqrt{1+\sqrt{x}}) \right]^2$	$\frac{e^{2\pi\mu i}}{4\sqrt{2}\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 1+v+\mu \\ 1+v-\mu \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ s+\mu/2, s+(\mu+1)/2, s-\mu/2, \\ s+3/4, s+(v+1)/2, \\ s+(1-\mu)/2, (1+v)/2-s, 1+v/2-s \end{matrix} \right],$ $s+v/2+1$ $ \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < (1 + \operatorname{Re} v)/2$
54(3)	$\left[Q_v^{\mu} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) \right]^2$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{2\pi\mu i} \Gamma \left[\begin{matrix} 1+v+\mu \\ 1+v-\mu \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s+v+1, -s, \mu-s, -\mu-s \\ 1/2-s, 1+v-s \end{matrix} \right],$ $-1 - \operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < - \operatorname{Re} \mu $
55(1)	$\frac{\bar{Q}_v^{\mu} (\sqrt{1+x}) Q_v^{\mu+1} (\sqrt{1+x})}{\sqrt{1+x}}$	$- \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{2\pi\mu i} \Gamma \left[\begin{matrix} 1+v+\mu \\ 1+v-\mu \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s-1/2, s-1/2-\mu, s+1/2+\mu, \\ s, s+1/2+v \end{matrix} \right],$ $3/2+v-s$ $1/2, 1/2 + \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} s < 3/2 + \operatorname{Re} v$

1	2	3
55(2)	$\left[Q_v^\mu (\sqrt{1+\sqrt{x}}) \times \right. \\ \left. \times Q_v^{\mu+1} (\sqrt{1+\sqrt{x}}) \right] \times \\ \left. \times [\sqrt{1+\sqrt{x}}]^{-1} \right.$	$- \frac{e^{2\pi\mu i}}{2\sqrt{2\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} 1+v+\mu \\ 1+v-\mu \end{matrix} \right] \times \\ \times \Gamma \left[\begin{matrix} s-1/4, s+1/4, s-1/4-\mu/2, \\ s, s+1/2, s+1/4+v/2, \\ s+1/4-\mu/2, s+1/4+\mu/2, s+3/4+\mu/2, \\ s+3/4+v/2 \\ 3/4+v/2-s, 5/4+v/2-s \end{matrix} \right], \\ 1/4, 1+2\operatorname{Re}\mu /4 < \operatorname{Re}s < (3+2\operatorname{Re}v)/4$
55(3)	$\left[Q_v^\mu (\sqrt{1+x^{-1}}) \times \right. \\ \left. \times Q_v^{\mu+1} (\sqrt{1+x^{-1}}) \right] \times \\ \left. \times [\sqrt{1+x}]^{-1} \right.$	$- \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{2\pi\mu i} \Gamma \left[\begin{matrix} 1+v+\mu \\ 1+v-\mu \end{matrix} \right] \times \\ \times \Gamma \left[\begin{matrix} s+v+1, -s, -\mu-s, 1+\mu-s \\ 1/2-s, 1+v-s \end{matrix} \right], \\ -1-\operatorname{Re}v < \operatorname{Re}s < 0, 1+\operatorname{Re}\mu, -\operatorname{Re}\mu$
56(1)	$Q_v^\mu (\sqrt{1+x}) \times \\ \times Q_{\mu-1/2}^{v+1/2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} \right)$	$\frac{e^{\pi i(\mu+v+1/2)}}{2\sqrt{2}} \Gamma(\mu+v+1) \times \\ \times \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/4, s+\mu+1/4, 1/4-s, \\ s+v+5/4, 3/4+\mu-s \\ 3/4+v-s \end{matrix} \right], -1/4, \\ -\operatorname{Re}\mu-1/4 < \operatorname{Re}s < 1/4, 3/4+\operatorname{Re}v$
56(2)	$Q_v^\mu (\sqrt{1+\sqrt{x}}) \times \\ \times Q_{\mu-1/2}^{v+1/2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \right)$	$\frac{e^{\pi i(\mu+v+1/2)}}{8\pi} \Gamma(\mu+v+1) \times \\ \times \Gamma \left[\begin{matrix} s+1/8, s+5/8, s+\mu/2+1/8, \\ s+v/2+5/8, s+v/2+9/8, \\ s+\mu/2+5/8, 1/8-s, 5/8-s, 3/8+v/2-s, \\ 3/8+\mu/2-s, 7/8+\mu/2-s \\ 7/8+v/2-s \end{matrix} \right], -1/8, \\ -\operatorname{Re}\mu/2-1/8 < \operatorname{Re}s < 1/8, 3/8+\operatorname{Re}v/2$
57(1)	$Q_v^\mu (\sqrt{1+x}) \times \\ \times P_v^{-\mu} (\sqrt{1+x})$	$\frac{e^{\mu\pi i}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+\mu, 1/2-s, 1+v-s \\ s+v+1, 1+\mu-s \end{matrix} \right], \\ 0, -\operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}s < 1/2, 1+\operatorname{Re}v$

1	2	3
57(2)	$Q_v^\mu (\sqrt{1+Vx}) \times$ $\times P_v^{-\mu} (\sqrt{1+Vx})$	$\frac{e^{\mu\pi i}}{4\pi\sqrt{2\pi}} \Gamma \left[s, s+1/2, s+\mu/2, \right.$ $s+(v+1)/2, s+1+v/2,$ $s+(\mu+1)/2, 1/4-s, 3/4-s, (1+v)/2-s$ $(1+\mu)/2-s, 1+\mu/2-s$ $\left. 1+v/2-s \right], \quad 0, -\operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < 1/4,$ $(1+\operatorname{Re} v)/2$
57(3)	$Q_v^\mu \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} \right) \times$ $\times P_v^{-\mu} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i}}{2\sqrt{\pi}} \Gamma \left[s+1/2, s+v+1, -s, \mu-s \right],$ $-1/2, -1-\operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 0, \operatorname{Re} \mu$
58(1)	$Q_v^\mu (\sqrt{1+x}) \times$ $\times P_{-\mu-1/2}^{-v-1/2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i}}{\sqrt{2}\Gamma(1+v-\mu)} \Gamma \left[s+1/4, s+1/4+\mu, \right.$ $s+5/4+v, s+3/4$ $s+1/4-\mu, v+3/4-s \left. \right],$ $-1/4, -1/4 \pm \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} v+3/4$
58(2)	$Q_v^\mu (\sqrt{1+Vx}) \times$ $\times P_{-\mu-1/2}^{-v-1/2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{Vx}} \right)$	$\frac{e^{\mu\pi i}}{4\pi\Gamma(1+v-\mu)} \Gamma \left[s+1/8, s+5/8, \right.$ $s+5/8+v/2,$ $s+1/8+\mu/2, s+5/8+\mu/2, s+1/8-\mu/2,$ $s+9/8+v/2, s+3/8, s+7/8$ $s+5/8-\mu/2, v/2+3/8-s, v/2+7/8-s \left. \right],$ $-1/8, -1/8 \pm \operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} v/2+3/8$
58(3)	$Q_v^\mu \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} \right) \times$ $\times P_{-\mu-1/2}^{-v-1/2} (\sqrt{1+x})$	$\frac{e^{\mu\pi i}}{\sqrt{2}\Gamma(1+v-\mu)} \Gamma \left[s+v+3/4, 1/4-s, \right.$ $3/4-s, 5/4+v-s$ $1/4+\mu-s, 1/4-\mu-s \left. \right],$ $-3/4-\operatorname{Re} v < \operatorname{Re} s < 1/4, 1/4- \operatorname{Re} \mu $
59(1)	$\left[Q_v^\mu (\sqrt{1+x}) \times \right.$ $\times P_{\mu+1/2}^{-v-1/2} \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} \right) \left. \right] \times$ $\times [V1+x]^{-1}$	$\frac{e^{\mu\pi i}}{\sqrt{2}(1+\mu+v)\Gamma(1+v-\mu)} \times$ $\times \Gamma \left[s-1/4, s+\mu+3/4, s-\mu-1/4, \right.$ $s+1/4, s+v+3/4$ $5/4+v-s \left. \right], \quad 1/4, -\operatorname{Re} \mu-3/4,$ $\operatorname{Re} \mu+1/4 < \operatorname{Re} s < 5/4+\operatorname{Re} v$

1	2	3
59(2)	$\left[Q_v^\mu \left(\sqrt{1 + \sqrt{x}} \right) \times \right. \\ \left. \times P_{\mu+1/2}^{-\nu-1/2} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} \right) \right] \times \\ \left. \times \left[\sqrt{1 + \sqrt{x}} \right]^{-1} \right.$	$\frac{e^{\mu\pi i}}{2\pi(1+\mu+\nu)\Gamma(1+\nu-\mu)} \times \\ \times \Gamma \left[\begin{matrix} s-1/8, s+3/8, s+\mu/2+3/8, \\ s+1/8, s+5/8, s+\nu/2+3/8, \\ s+\mu/2+7/8, s-\mu/2-1/8, s-\mu/2+3/8, \\ s+\nu/2+7/8 \end{matrix} \right], \\ 5/8 + \nu/2 - s, 9/8 + \nu/2 - s \Big], \\ -1/8, -\operatorname{Re} \mu/2 - 3/8, \\ \operatorname{Re} \mu/2 + 1/8 < \operatorname{Re} s < 5/8 + \operatorname{Re} \nu/2$
59(3)	$\left[Q_v^\mu \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} \right) \times \right. \\ \left. \times P_{\mu+1/2}^{-\nu-1/2} \left(\sqrt{1+x} \right) \right] \times \\ \left. \times \left[\sqrt{1+x} \right]^{-1} \right.$	$\frac{e^{\mu\pi i}}{\sqrt{2}\Gamma(1+\nu-\mu)(1+\mu+\nu)} \times \\ \times \Gamma \left[\begin{matrix} s+3/4+\nu, 1/4-s, 5/4+\mu-s, \\ 3/4-s, 5/4+\nu-s \\ 1/4-\mu-s \end{matrix} \right], \quad -3/4 - \operatorname{Re} \nu < \operatorname{Re} s < 1/4, \\ 5/4 - \operatorname{Re} \mu, 1/4 - \operatorname{Re} \mu$

12. Функции Уиттекера, гипергеометрические функции

1(1)	${}_1F_1(a; c; -x)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} c \\ a \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} a-s, s \\ c-s \end{matrix} \right], \quad 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a, \\ c \neq 0, -1, -2, \dots$
1(2)	${}_1F_1(a; c; -2\sqrt{x})$	$\frac{2^{a-c}}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} c \\ a \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, a/2-s, \\ c/2-s, (c+1)/2-s \\ (a+1)/2-s \end{matrix} \right], \quad 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a/2, \\ c \neq 0, -1, -2, \dots$
1(4)	${}_1F_1 \left(a; c; -\frac{1}{x} \right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} c \\ a \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s+a, -s \\ s+c \end{matrix} \right], \\ -\operatorname{Re} a < \operatorname{Re} s < 0, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots$
1(6)	${}_1F_1 \left(a; c; -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right)$	$\frac{3^{a-c+1/2}}{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} c \\ a \end{matrix} \right] \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+a, -3s \\ 3s+c \end{matrix} \right], \\ -\operatorname{Re} a/3 < \operatorname{Re} s < 0, \quad c \neq 0, -1, -2, \dots$

1	2	3
2(1)	$e^{-x} {}_1F_1(a; c; x)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} c \\ c-a \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s, c-a-s \\ c-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(c-a),$ $c \neq 0, -1, -2, \dots$
2(2)	$e^{-2\sqrt{x}} {}_1F_1(a; c; 2\sqrt{x})$	$\frac{2-a}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} c \\ c-a \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ (c-a)/2-s, (c-a+1)/2-s \\ (c+1)/2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(c-a)/2,$ $c \neq 0, -1, -2, \dots$
2(4)	$e^{-1/x} {}_1F_1\left(a; c; \frac{1}{x}\right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} c \\ c-a \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s+c-a, -s \\ s+c \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re}(a-c) < \operatorname{Re} s < 0,$ $c \neq 0, -1, -2, \dots$
2(6)	$e^{-3x^{-1/3}} {}_1F_1\left(a; c; \frac{3}{\sqrt[3]{x}}\right)$	$\frac{3^{1/2-a}}{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} c \\ c-a \end{matrix} \right] \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+c-a, -3s \\ 3s+c \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re}(a-c)/3 < \operatorname{Re} s < 0,$ $c \neq 0, -1, -2, \dots$
3(1)	$\Psi(a, c; x)$	$\frac{1}{\Gamma[a, 1+a-c]} \Gamma[s, s+1-c, a-s],$ $0, \operatorname{Re} c - 1 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a$
3(2)	$\Psi(a, c; 2\sqrt{x})$	$\frac{2^{a-c-1} \pi^{-3/2}}{\Gamma[a, 1+a-c]} \Gamma[s, s+1/2,$ $s+(1-c)/2, s+1-c/2, a/2-s,$ $(a+1)/2-s],$ $0, (\operatorname{Re} c - 1)/2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a/2$
3(4)	$\Psi\left(a, c; \frac{1}{x}\right)$	$\frac{1}{\Gamma[a, 1+a-c]} \Gamma[s+a, -s,$ $1-c-s], \quad -\operatorname{Re} a < \operatorname{Re} s < 0,$ $1 - \operatorname{Re} c$
3(6)	$\Psi(a, c; 3\sqrt[3]{x})$	$\frac{3^{a-c+1/2}}{8\pi^3 \Gamma[a, 1+a-c]} \Gamma_3[3s+a, -3s,$ $1-c-3s], \quad -\operatorname{Re} a/3 < \operatorname{Re} s < 0,$ $(1 - \operatorname{Re} c)/3$

1	2	3
4(1)	$e^{-x} \Psi(a, c; x)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1-c \\ s+a+1-c \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} s > 0, \operatorname{Re} c - 1$
4(2)	$e^{-2\sqrt{x}} \Psi(a, c; 2\sqrt{x})$	$\frac{2^{-a}}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+(1-c)/2, \\ s+(a+1-c)/2, \\ s+1-c/2 \\ s+1+(a-c)/2 \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} s > 0, (\operatorname{Re} c - 1)/2$
4(4)	$e^{-1/x} \Psi \left(a, c; \frac{1}{x} \right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} -s, 1-c-s \\ a+1-c-s \end{matrix} \right], \quad \operatorname{Re} s < 0, 1 - \operatorname{Re} c$
4(6)	$e^{-3x^{-1/3}} \Psi \left(a, c; \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right)$	$\frac{3^{-a+1/2}}{2\pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} -3s, 1-c-3s \\ a+1-c-3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < 0, (1 - \operatorname{Re} c)/3$
5(1)	$e^{-x/2} M_{\kappa, \mu}(x)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} 2\mu+1 \\ \kappa+\mu+1/2 \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu+1/2, \kappa-s \\ \mu+1/2-s \end{matrix} \right],$ $-1/2 - \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \kappa,$ $2\mu \neq -1, -2, -3, \dots$
5(2)	$e^{-\sqrt{x}} M_{\kappa, \mu}(2\sqrt{x})$	$\frac{2^\kappa}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} 2\mu+1 \\ \kappa+\mu+1/2 \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu/2+1/4, \\ \mu/2+1/4-s, \\ s+\mu/2+3/4, \kappa/2-s, (\kappa+1)/2-s \\ \mu/2+3/4-s \end{matrix} \right],$ $2\mu \neq -1, -2, -3, \dots,$ $-1/4 - \operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} \kappa/2$
5(4)	$e^{-(2x)^{-1}} M_{\kappa, \mu} \left(\frac{1}{x} \right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} 2\mu+1 \\ \kappa+\mu+1/2 \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s+\kappa, \mu+1/2-s \\ s+\mu+1/2 \end{matrix} \right],$ $-\operatorname{Re} \kappa < \operatorname{Re} s < 1/2 + \operatorname{Re} \mu,$ $2\mu \neq -1, -2, -3, \dots$
5(6)	$e^{-3x^{-1/3}} M_{\kappa, \mu} \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right)$	$\frac{3^{\kappa+1/2}}{2\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} 2\mu+1 \\ \kappa+\mu+1/2 \end{matrix} \right] \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+\kappa, \\ 3s+\mu+1/2 \\ \mu+1/2-3s \end{matrix} \right],$ $-\operatorname{Re} \kappa/3 < \operatorname{Re} s < 1/6 + \operatorname{Re} \mu/3,$ $2\mu \neq -1, -2, -3, \dots$
6(1)	$e^{-x/2} W_{\kappa, \mu}(x)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s+\mu+1/2, s+1/2-\mu \\ s+1-\kappa \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > -1/2 + \operatorname{Re} \mu $

1	2	3
6(2)	$e^{-\sqrt{x}} W_{\kappa, \mu}(2\sqrt{x})$	$\frac{2^{\kappa}}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} s + \mu/2 + 1/4, s + \mu/2 + 3/4, \\ s + (1 - \kappa)/2, s + 1 - \kappa/2 \\ s + 1/4 - \mu/2, s + 3/4 - \mu/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s > -1/4 + \operatorname{Re} \mu /2$
6(4)	$e^{-(2x)^{-1}} W_{\kappa, \mu} \left(\frac{1}{x} \right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} \mu + 1/2 - s, 1/2 - \mu - s \\ 1 - \kappa - s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < 1/2 - \operatorname{Re} \mu $
6(6)	$e^{-3x^{-1/3/2}} W_{\kappa, \mu} \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right)$	$\frac{3^{\kappa+1/2}}{2\pi} \Gamma_3 \left[\begin{matrix} \mu + 1/2 - 3s, 1/2 - \mu - 3s \\ 1 - \kappa - 3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} s < 1/6 - \operatorname{Re} \mu /3$
7(1)	$e^{x/2} W_{\kappa, \mu}(x)$	$\frac{1}{\Gamma[1/2 - \mu - \kappa, 1/2 + \mu - \kappa]} \times$ $\times \Gamma[s + 1/2 - \mu, s + 1/2 + \mu, -\kappa - s],$ $-1/2 + \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} \kappa$
7(2)	$e^{\sqrt{x}} W_{\kappa, \mu}(2\sqrt{x})$	$\frac{2^{-\kappa-1} \pi^{-3/2}}{\Gamma[1/2 - \mu - \kappa, 1/2 + \mu - \kappa]} \times$ $\times \Gamma[s + 1/4 - \mu/2, s + 3/4 - \mu/2,$ $s + 1/4 + \mu/2, s + 3/4 + \mu/2, -\kappa/2 - s,$ $(1 - \kappa)/2 - s],$ $-1/4 + \operatorname{Re} \mu /2 < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} \kappa/2$
7(4)	$e^{(2x)^{-1}} W_{\kappa, \mu} \left(\frac{1}{x} \right)$	$\frac{1}{\Gamma[1/2 - \mu - \kappa, 1/2 + \mu - \kappa]} \times$ $\times \Gamma[s - \kappa, 1/2 - \mu - s, 1/2 + \mu - s],$ $\operatorname{Re} \kappa < \operatorname{Re} s < 1/2 - \operatorname{Re} \mu $
7(6)	$e^{3x^{-1/3/2}} W_{\kappa, \mu} \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right)$	$\frac{3^{-\kappa+1/2}}{8\pi^3 \Gamma[1/2 - \mu - \kappa, 1/2 + \mu - \kappa]} \times$ $\times \Gamma_3[3s - \kappa, 1/2 - \mu - 3s, 1/2 + \mu - 3s],$ $\operatorname{Re} \kappa/3 < \operatorname{Re} s < 1/6 - \operatorname{Re} \mu /3$
8(1)	$W_{\kappa, \mu}(2\sqrt{x}) M_{-\kappa, \mu}(2\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma \left[\begin{matrix} 2\mu + 1 \\ 1/2 + \mu - \kappa \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s + 1/2, s + 1, \\ s + 1 - \kappa, \\ s + 1/2 + \mu, -\kappa - s \\ 1/2 + \mu - s \end{matrix} \right],$ $-1/2, -1/2 - \operatorname{Re} \mu < \operatorname{Re} s < -\operatorname{Re} \kappa$

1	2	3
8(2)	$W_{\kappa, \mu}(4\sqrt[4]{x}) M_{-\kappa, \mu}(4\sqrt[4]{x})$	$\frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \Gamma\left[\frac{2\mu+1}{1/2+\mu-\kappa}\right] \Gamma\left[s+1/4, s+3/4, s+1/2, s+1, s+1/4+\mu/2, s+(1-\kappa)/2, s+1-\kappa/2, 1/4+\mu/2-s, s+3/4+\mu/2, -\kappa/2-s, (1-\kappa)/2-s\right],$ $3/4+\mu/2-s$ $-1/4, -1/4-\operatorname{Re}\mu/2 < \operatorname{Re}s < -\operatorname{Re}\kappa/2$
8(3)	$W_{\kappa, \mu}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) \times$ $\times M_{-\kappa, \mu}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left[\frac{2\mu+1}{1/2+\mu-\kappa}\right] \Gamma\left[s-\kappa, 1/2-s, s+\mu+1/2, 1-s, 1/2+\mu-s, 1-\kappa-s\right],$ $\operatorname{Re}\kappa < \operatorname{Re}s < 1/2, 1/2+\operatorname{Re}\mu$
9(1)	$W_{\kappa, \mu}(2\sqrt{x}) W_{-\kappa, \mu}(2\sqrt{x})$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left[s+1/2, s+1, s+1/2+\mu, s+1+\kappa, s+1-\kappa, s+1/2-\mu\right],$ $\operatorname{Re}s > -1/2, -1/2+ \operatorname{Re}\mu $
9(2)	$W_{\kappa, \mu}(4\sqrt[4]{x}) W_{-\kappa, \mu}(4\sqrt[4]{x})$	$\frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \Gamma\left[s+1/4, s+3/4, s+1/2, s+(1+\kappa)/2, s+1+\kappa/2, s+1, s+1/4+\mu/2, s+3/4+\mu/2, s+(1-\kappa)/2, s+1-\kappa/2, s+1/4-\mu/2, s+3/4-\mu/2\right],$ $\operatorname{Re}s > -1/4, -1/4+ \operatorname{Re}\mu /2$
9(3)	$W_{\kappa, \mu}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) \times$ $\times W_{-\kappa, \mu}\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left[1/2-s, 1-s, 1/2+\mu-s, 1+\kappa-s, 1-\kappa-s, 1/2-\mu-s\right],$ $\operatorname{Re}s < 1/2, 1/2- \operatorname{Re}\mu $
10(1)	${}_1F_2(a; c, \gamma; -x)$	$\Gamma\left[\frac{c}{a}, \gamma\right] \Gamma\left[\frac{s, a-s}{c-s, \gamma-s}\right],$ $0 < \operatorname{Re}s < \operatorname{Re}a, 1/4+\operatorname{Re}(c+\gamma-a)/2,$ $c, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$

1	2	3
10(2)	${}_1F_2(a; c, \gamma; -4\sqrt{x})$	$2^{a-c-\gamma+1} \Gamma \left[\begin{matrix} c, \gamma \\ a \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, a/2-s \\ c/2-s, (c+1)/2-s, \\ (a+1)/2-s \\ \gamma/2-s, (\gamma+1)/2-s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a/2, 1/8 + \operatorname{Re}(c+\gamma-a)/4,$ $c, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$
10(4)	${}_1F_2\left(a; c, \gamma; -\frac{1}{x}\right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} c, \gamma \\ a \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s+a, -s \\ s+c, s+\gamma \end{matrix} \right],$ $-\operatorname{Re} a, -1/4 + \operatorname{Re}(a-c-\gamma)/2 < \operatorname{Re} s < 0,$ $c, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$
10(6)	${}_1F_2\left(a; c, \gamma; -\frac{9}{\sqrt[3]{x}}\right)$	$3^{a-c-\gamma+1} \Gamma \left[\begin{matrix} c, \gamma \\ a \end{matrix} \right] \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+a, -3s \\ 3s+c, 3s+\gamma \end{matrix} \right],$ $-\operatorname{Re} a/3, \operatorname{Re}(a-c-\gamma)/6 - 1/12 < \operatorname{Re} s < 0,$ $c, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$
11(1)	$(1-x)_+^{c-1} F(a, b; c; 1-x)$	$\Gamma(c) \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+c-a-b \\ s+c-a, s+c-b \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} s > 0, \operatorname{Re}(a+b-c)$
11(2)	$(1-\sqrt{x})_+^{c-1} F(a, b; c; 1-\sqrt{x})$	$2^{1-c} \Gamma(c) \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, s+(c-a-b)/2, \\ s+(c-a)/2, s+(c-a+1)/2, \\ s+(c-a-b+1)/2 \\ s+(c-b)/2, s+(c-b+1)/2 \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} s > 0, \operatorname{Re}(a+b-c)/2$
11(4)	$(x-1)_+^{c-1} \times$ $\times F\left(a, b; c; 1-\frac{1}{x}\right)$	$\Gamma(c) \Gamma \left[\begin{matrix} 1-c-s, 1-a-b-s \\ 1-a-s, 1-b-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} s < 1-\operatorname{Re} c, 1-\operatorname{Re}(a+b)$
11(6)	$(\sqrt[3]{x}-1)_+^{c-1} \times$ $\times F\left(a, b; c; 1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$	$3^{1-c} \Gamma(c) \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 1-c-3s, 1-a-b-3s \\ 1-a-3s, 1-b-3s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} c > 0,$ $\operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} c)/3, (1-\operatorname{Re}(a+b))/3$
12(1)	$(x-1)_+^{c-1} F(a, b; c; 1-x)$	$\Gamma(c) \Gamma \left[\begin{matrix} 1+a-c-s, 1+b-c-s \\ 1-s, 1+a+b-c-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} s < 1+\operatorname{Re}(a-c),$ $1+\operatorname{Re}(b-c)$

1	2	3
12(2)	$(\sqrt{x}-1)_+^{c-1} F(a, b; c; 1-\sqrt{x})$	$2^{1-c} \Gamma(c) \Gamma \left[\begin{matrix} (1+a-c)/2-s, \\ 1/2-s, 1-s, \\ 1+(a-c)/2-s, (1+b-c)/2-s, \\ (1+a+b-c)/2-s, \\ 1+(b-c)/2-s \\ 1+(a+b-c)/2-s \end{matrix} \right], \quad \text{Re } c > 0,$ $\text{Re } s < (1+\text{Re}(a-c))/2, \\ (1+\text{Re}(b-c))/2$
12(4)	$(1-x)_+^{c-1} \times$ $\times F\left(a, b; c; 1-\frac{1}{x}\right)$	$\Gamma(c) \Gamma \left[\begin{matrix} s+a, s+b \\ s+c, a+b+s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } c > 0, \text{Re } s > -\text{Re } a, -\text{Re } b$
12(6)	$(1-\sqrt[3]{x})_+^{c-1} \times$ $\times F\left(a, b; c; 1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$	$3^{1-c} \Gamma(c) \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+a, 3s+b \\ 3s+c, a+b+3s \end{matrix} \right],$ $\text{Re } c > 0, \text{Re } s > -\text{Re } a/3, -\text{Re } b/3$
13(1)	$(1-x)_+^{-c+b-n} \times$ $\times F(-n, b; c; x)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} c, 1+b-c \\ c+n \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s, -s+c+n \\ -c+1+b+s, c-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re}(b-c) > n-1, \quad n=0, 1, 2, \dots,$ $\text{Re } s > 0$
13(2)	$(1-\sqrt{x})_+^{-c+b-n} \times$ $\times F(-n, b; c; \sqrt{x})$	$2^{c+n-b} \Gamma \left[\begin{matrix} c, 1+b-c \\ c+n \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, (c+n)/2-s, \\ s+(1+b-c)/2, s+1+(b-c)/2, \\ (c+n+1)/2-s \\ c/2-s, (c+1)/2-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re}(b-c) > n-1, \quad n=0, 1, 2, \dots,$ $\text{Re } s > 0$
13(4)	$(x-1)_+^{-c+b-n} \times$ $\times F\left(-n, b; c; \frac{1}{x}\right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} c, 1+b-c \\ c+n \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s+2c-b, \\ s+2c-b-n, \\ b+n-c-s \\ 1+2b+n-2c-s \end{matrix} \right],$ $\text{Re}(b-c) > n-1, \text{Re } s < n+\text{Re}(b-c),$ $n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
13(6)	$(\sqrt[3]{x}-1)_+^{b-c-n} \times$ $\times F\left(-n, b; c; \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$	$3^{c+n-b} \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1+b-c \\ c+n \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s+2c-b, b+n-c-3s \\ 3s+2c-b-n, 1+2b+n-2c-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}(b-c) > n-1,$ $\operatorname{Res} < n/3 + \operatorname{Re}(b-c)/3, n=0, 1, 2, \dots$
14(1)	$(x-1)_+^{b-c-n} F(-n, b; c; x)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} c, 1+b-c \\ n+c \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s+1-c, c-b-s \\ s+1-c-n, 1-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}(b-c) > n-1, \operatorname{Res} < \operatorname{Re}(c-b),$ $n=0, 1, 2, \dots$
14(2)	$(\sqrt{x}-1)_+^{b-c-n} \times$ $\times F(-n, b; c; \sqrt{x})$	$2^{c-b+n} \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1+b-c \\ n+c \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s+(1-c)/2, \\ s+(1-c-n)/2, \\ s+1-c/2, (c-b)/2-s, (c-b+1)/2-s \end{matrix}\right],$ $s+1-(c+n)/2, 1/2-s, 1-s$ $\operatorname{Re}(b-c) > n-1,$ $\operatorname{Res} < \operatorname{Re}(c-b)/2, n=0, 1, 2, \dots$
14(4)	$(1-x)_+^{b-c-n} \times$ $\times F\left(-n, b; c; \frac{1}{x}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} c, 1+b-c \\ n+c \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s-n, n+1-b-s \\ s+1+b-c-n, \\ 1-b-s \end{matrix}\right], \operatorname{Re}(b-c) > n-1,$ $\operatorname{Res} > n, n=0, 1, 2, \dots$
14(6)	$(1-\sqrt[3]{x})_+^{b-c-n} \times$ $\times F\left(-n, b; c; \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$	$3^{c+n-b} \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1+b-c \\ n+c \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s-n, n+1-b-3s \\ 3s+1+b-c-n, 1-b-3s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}(b-c) > n-1, \operatorname{Res} > n/3,$ $n=0, 1, 2, \dots$
15(1)	$H(1-x) F(a, c+n; c; x)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} c, 1-a \\ c+n \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s, c+n-s \\ s+1-a, c-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Res} > 0, \operatorname{Re} a < 1-n, n=0, 1, 2, \dots$
15(2)	$H(1-x) F(a, c+n;$ $c; \sqrt{x})$	$2^{a+n} \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1-a \\ c+n \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ s+(1-a)/2, \\ (c+n)/2-s, (c+n+1)/2-s \end{matrix}\right],$ $s+1-a/2, c/2-s, (c+1)/2-s$ $\operatorname{Res} > 0, \operatorname{Re} a < 1-n, n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
15(4)	$H(x-1) \times$ $\times F\left(a, c+n; c; \frac{1}{x}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} c, 1-a \\ c+n \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s+c+n, -s \\ s+c, 1-a-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re} s < 0, \operatorname{Re} a < 1-n, n=0, 1, 2, \dots$
15(6)	$H(x-1) \times$ $\times F\left(a, c+n; c; \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$	$3^{a+n} \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1-a \\ c+n \end{matrix}\right] \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s+c+n, -3s \\ 3s+c, 1-a-3s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re} s < 0, \operatorname{Re} a < 1-n, n=0, 1, 2, \dots$
16(1)	$(1-x)_+^{-c-n} \times$ $\times F\left(a, c+n; c; \frac{x}{x-1}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} c, 1+a-c \\ c+n \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s, c+n-s \\ s+1+a-c, c-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re} s > 0, \operatorname{Re}(a-c) > n-1,$ $n=0, 1, 2, \dots$
16(2)	$(1-\sqrt{x})_+^{-c-n} \times$ $\times F\left(a, c+n; c; \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$	$2^{c+n-a} \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1+a-c \\ c+n \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ s+(1+a-c)/2, \\ (c+n)/2-s, (c+n+1)/2-s \\ s+1+(a-c)/2, c/2-s, (c+1)/2-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re} s > 0, \operatorname{Re}(a-c) > n-1,$ $n=0, 1, 2, \dots$
16(4)	$(x-1)_+^{-c-n} \times$ $\times F\left(a, c+n; c; \frac{1}{1-x}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} c, 1+a-c \\ c+n \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s, c+n-s \\ s-n, 1+a+n-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re} s < n+\operatorname{Re} c, \operatorname{Re}(a-c) > n-1,$ $n=0, 1, 2, \dots$
16(6)	$(\sqrt[3]{x}-1)_+^{-c-n} \times$ $\times F\left(a, c+n; c; \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$	$3^{c+n-a} \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1+a-c \\ c+n \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s, c+n-3s \\ 3s-n, 1+a+n-3s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re} s < (n+\operatorname{Re} c)/3, \operatorname{Re}(a-c) > n-1,$ $n=0, 1, 2, \dots$
17(1)	$(1-x)_+^{-b} \times$ $\times F\left(-n, b; c; \frac{x}{x-1}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} c, 1-b \\ c+n \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s, c+n-s \\ s+1-b, c-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re} s > 0, \operatorname{Re} b < 1-n, n=0, 1, 2, \dots$
17(2)	$(1-\sqrt{x})_+^{-b} \times$ $\times F\left(-n, b; c; \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$	$2^{b+n} \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1-b \\ c+n \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ s+(1-b)/2, \\ (c+n)/2-s, (c+n+1)/2-s \\ s+1-b/2, c/2-s, \\ (c+1)/2-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re} s > 0,$ $\operatorname{Re} b < 1-n, n=0, 1, 2, \dots$

1	2	3
17(4)	$(x-1)_+^{-b} \times$ $\times F\left(-n, b; c; \frac{1}{1-x}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} c, 1-b \\ c+n \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s+c+n+b, -b-s \\ s+c+b, 1-2b-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Res} < -\operatorname{Re} b, \operatorname{Re} b < 1-n,$ $n=0, 1, 2, \dots$
17(6)	$(\sqrt[3]{x}-1)_+^{-b} \times$ $\times F\left(-n, b; c; \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$	$3^{b+n} \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1-b \\ c+n \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s+c+b+n, -b-3s \\ 3s+c+b, 1-2b-3s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Res} < -\operatorname{Re} b/3, \operatorname{Re} b < 1-n,$ $n=0, 1, 2, \dots$
18(1)	$(x-1)_+^{-b} \times$ $\times F\left(-n, b; c; \frac{x}{x-1}\right)$	$(-1)^n \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1-b \\ n+c \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s+1-c, b-s \\ s+1-c-n, 1-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re} b < 1-n, \operatorname{Res} < \operatorname{Re} b,$ $n=0, 1, 2, \dots$
18(2)	$(\sqrt{x}-1)_+^{-b} \times$ $\times F\left(-n, b; c; \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)$	$(-1)^n 2^{b+n} \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1-b \\ n+c \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s+(1-c)/2, \\ s+1-c/2, b/2-s, (b+1)/2-s \\ s+1-(c+n)/2, 1/2-s, 1-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re} b < 1-n, \operatorname{Res} < \operatorname{Re} b/2,$ $n=0, 1, 2, \dots$
18(4)	$(1-x)_+^{-b} \times$ $\times F\left(-n, b; c; \frac{1}{1-x}\right)$	$(-1)^n \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1-b \\ n+c \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma\left[\begin{matrix} s, 1+b-c-s \\ s+1-b, 1+b-c-n-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re} b < 1-n, \operatorname{Res} > 0, n=0, 1, 2, \dots$
18(6)	$(1-\sqrt[3]{x})_+^{-b} \times$ $\times F\left(-n, b; c; \frac{1}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$	$(-1)^n 3^{b+n} \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1-b \\ n+c \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s, 1+b-c-3s \\ 3s+1-b, 1+b-c-n-3s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re} b < 1-n, \operatorname{Res} > 0, n=0, 1, 2, \dots$
19(1)	$F(a, b; c; -x)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} c \\ a, b \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} a-s, b-s, s \\ c-s \end{matrix}\right],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $0 < \operatorname{Res} < \operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b$

1	2	3
19(2)	$F(a, b; c; -\sqrt{x})$	$\frac{2^{a+b-c-1}}{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} c \\ a, b \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} a/2-s, \\ c/2-s, \\ (a+1)/2-s, b/2-s, (b+1)/2-s, \\ (c+1)/2-s \\ s, s+1/2 \end{matrix} \right], \quad c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a/2, \operatorname{Re} b/2$
19(4)	$F\left(a, b; c; -\frac{1}{x}\right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} c \\ a, b \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s+a, s+b, -s \\ s+c \end{matrix} \right],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $-\operatorname{Re} a, -\operatorname{Re} b < \operatorname{Re} s < 0$
19(6)	$F\left(a, b; c; -\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$	$\frac{3^{a+b-c}}{4\pi^2} \Gamma \left[\begin{matrix} c \\ a, b \end{matrix} \right] \Gamma_3 \left[\begin{matrix} 3s+a, 3s+b, -3s \\ 3s+c \end{matrix} \right],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $-\operatorname{Re} a/3, -\operatorname{Re} b/3 < \operatorname{Re} s < 0$
20(1)	$(1+x)^{a+b-c} F(a, b; c; -x)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} c \\ c-a, c-b \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s, c-a-s, c-b-s \\ c-s \end{matrix} \right],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(c-a), \operatorname{Re}(c-b)$
20(2)	$(1+\sqrt{x})^{a+b-c} F(a, b; c; -\sqrt{x})$	$\frac{2^{c-a-b-1}}{\pi} \Gamma \left[\begin{matrix} c \\ c-a, c-b \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ (c+1)/2-s, \\ (c-a)/2-s, (c-a+1)/2-s, \\ c/2-s \\ (c-b)/2-s, (c-b+1)/2-s \end{matrix} \right],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(c-a)/2, \operatorname{Re}(c-b)/2$
20(4)	$(1+x)^{a+b-c} \times$ $\times F\left(a, b; c; -\frac{1}{x}\right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} c \\ c-a, c-b \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} s+a, s+b, c-a-b-s \\ s+a+b \end{matrix} \right],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $-\operatorname{Re} a, -\operatorname{Re} b < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(c-a-b)$

1	2	3
20(6)	$(1 + \sqrt[3]{x})^{a+b-c} \times$ $\times F\left(a, b; c; -\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$	$\frac{3^{c-a-b}}{4\pi^2} \Gamma\left[\begin{matrix} c \\ c-a, c-b \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s+a, 3s+b, c-a-b-3s \\ 3s+a+b \end{matrix}\right],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $-\operatorname{Re} a/3, -\operatorname{Re} b/3 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} (c-a-b)/3$
21(1)	$(1+x)^{-a} F\left(a, b; c; \frac{x}{1+x}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} c \\ a, c-b \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s, a-s, c-b-s \\ c-s \end{matrix}\right],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a, \operatorname{Re} (c-b)$
21(2)	$(1 + \sqrt{x})^{-a} \times$ $\times F\left(a, b; c; \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}}\right)$	$\frac{2^{a-b-1}}{\pi} \Gamma\left[\begin{matrix} c \\ a, c-b \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ c/2-s, \\ a/2-s, (a+1)/2-s, (c-b)/2-s, \\ (c+1)/2-s \\ (c-b+1)/2-s \end{matrix}\right],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a/2, \operatorname{Re} (c-b)/2$
21(4)	$(1+x)^{-a} \times$ $\times F\left(a, b; c; \frac{1}{1+x}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} c \\ a, c-b \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+c-a-b, a-s \\ s+c-a \end{matrix}\right],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $0, \operatorname{Re} (a+b-c) < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a$
21(6)	$(1 + \sqrt[3]{x})^{-a} \times$ $\times F\left(a, b; c; \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}}\right)$	$\frac{3^{a-b}}{4\pi^2} \Gamma\left[\begin{matrix} c \\ a, c-b \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s, 3s+c-a-b, a-3s \\ 3s+c-a \end{matrix}\right],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $\operatorname{Re} (a+b-c)/3, 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a/3$
22(1)	$F(a, b; c; 1-x)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} c \\ a, b, c-a, c-b \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma[s, s+c-a-b, a-s, b-s],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $\operatorname{Re} (a+b-c), 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b$

1	2	3
22(2)	$F(a, b; c; 1 - \sqrt{x})$	$\frac{2^{c-3}}{\pi^2} \Gamma \left[\begin{matrix} c \\ a, b, c-a, c-b \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma[s, s+1/2, s+(c-a-b)/2,$ $s+(c-a-b+1)/2, a/2-s,$ $(a+1)/2-s, b/2-s, (b+1)/2-s],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $\operatorname{Re}(a+b-c)/2, 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a/2,$ $\operatorname{Re} b/2$
22(4)	$F\left(a, b; c; 1 - \frac{1}{x}\right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} c \\ a, b, c-a, c-b \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma[s, a, s+b, -s, c-a-b-s],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $-\operatorname{Re} a, -\operatorname{Re} b < \operatorname{Re} s < 0, \operatorname{Re}(c-a-b)$
22(6)	$F\left(a, b; c; 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)$	$\frac{3^{c-1}}{16\pi^4} \Gamma \left[\begin{matrix} c \\ a, b, c-a, c-b \end{matrix} \right] \times$ $\times \Gamma_3[3s+a, 3s+b, -3s, c-a-b-3s],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $-\operatorname{Re} a/3, -\operatorname{Re} b/3 < \operatorname{Re} s < 0,$ $\operatorname{Re}(c-a-b)/3$
23(1)	$F(a, b; c; x) H(1-x) +$ $x^{-a} \Gamma \left[\begin{matrix} c, 1-b \\ c-a, 1-b+a \end{matrix} \right] \times$ $\times F\left(a, 1+a-c;$ $1+a-b; \frac{1}{x}\right) H(x-1)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} c, 1-b \\ a \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s, a-s \\ 1-b+s, c-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re}(c-a-b) > -1, 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a,$ $1-b, c \neq 0, -1, -2, \dots$
23(2)	$F(a, b; c; \sqrt{x}) H(1-x) +$ $x^{-a/2} \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} c, 1-b \\ c-a, 1-b+a \end{matrix} \right] \times$ $\times F\left(a, 1+a-c;$ $1+a-b; \frac{1}{\sqrt{x}}\right) H(x-1)$	$2^{a+b-c} \Gamma \left[\begin{matrix} c, 1-b \\ a \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ s+(1-b)/2, \\ a/2-s, (a+1)/2-s \\ s+1-b/2, c/2-s, (c+1)/2-s \end{matrix} \right],$ $\operatorname{Re}(c-a-b) > -1, 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a/2,$ $1-b, c \neq 0, -1, -2, \dots$

1	2	3
23(3)	$F\left(a, b; c; \frac{1}{x}\right) H(x-1) \cdot$ $\cdot x^a \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1-b \\ c-a, 1-b+a \end{matrix}\right] \times$ $\times F\left(a, 1+a-c; 1+a-b; x\right) H(1-x)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} c, 1-b \\ a \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s+a, -s \\ s+c, 1-b-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}(c-a-b) > -1, -\operatorname{Re} a < \operatorname{Re} s < 0,$ $1-b, c \neq 0, -1, -2, \dots$
24(1)	$(1+x)^{-2a} F\left(a, a+\frac{1}{2}; c; \frac{4x}{(1+x)^2}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} c, c-2a \\ 2a \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s, 2a-s \\ s+c-2a, c-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}(c-2a) > 0, 0 < \operatorname{Re} s < 2\operatorname{Re} a,$ $c \neq 0, -1, -2, \dots$
24(2)	$(1+\sqrt{x})^{-2a} F\left(a, a+\frac{1}{2}; c; \frac{4\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}\right)$	$2^{4a-2c+1} \Gamma\left[\begin{matrix} c, c-2a \\ 2a \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2, \\ s+c/2-a \\ a-s, a+1/2-s \\ s+(c+1)/2-a, c/2-s, (c+1)/2-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}(c-2a) > 0, 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a,$ $c \neq 0, -1, -2, \dots$
24(3)	$(1+\sqrt[3]{x})^{-2a} F\left(a, a+\frac{1}{2}; c; \frac{4\sqrt[3]{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\right)$	$3^{4a-2c+1} \Gamma\left[\begin{matrix} c, c-2a \\ 2a \end{matrix}\right] \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s, 2a-3s \\ 3s+c-2a, c-3s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}(c-2a) > 0, 0 < \operatorname{Re} s < 2\operatorname{Re} a/3,$ $c \neq 0, -1, -2, \dots$
25(1)	$\frac{ 1-x ^{4a-2c+1}}{(1+x)^{2a}} \times$ $\times F\left(a, a+\frac{1}{2}; c; \frac{4x}{(1+x)^2}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} c, 1+2a-c \\ 2c-2a-1 \end{matrix}\right] \Gamma\left[\begin{matrix} s, 2c-2a-1-s \\ s+1+2a-c, c-s \end{matrix}\right],$ $c \neq 0, -1, -2, \dots,$ $\operatorname{Re}(2a-c) > -1,$ $0 < \operatorname{Re} s < 2\operatorname{Re}(c-a)-1$
25(2)	$\frac{ 1-\sqrt{x} ^{4a-2c+1}}{(1+\sqrt{x})^{2a}} \times$ $\times F\left(a, a+\frac{1}{2}; c; \frac{4\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})^2}\right)$	$2^{2c-4a-1} \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1+2a-c \\ 2c-2a-1 \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2, c-a-1/2-s, \\ s+(1-c)/2+a, s+1+a-c/2, \\ c-a-s \\ c/2-s, (c+1)/2-s \end{matrix}\right], \operatorname{Re}(2a-c) > -1,$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(c-a)-1/2,$ $c \neq 0, -1, -2, \dots$

1	2	3
25(3)	$\frac{ 1 - \sqrt[3]{x} ^{4a-2c+1}}{(1 + \sqrt[3]{x})^{2a}} \times$ $\times F\left(a, a + \frac{1}{2}; c; \frac{4\sqrt[3]{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2}\right)$	$3^{2c-4a-1} \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1+2a-c \\ 2c-2a-1 \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s, 2c-2a-1-3s \\ 3s+1+2a-c, c-3s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}(2a-c) > -1,$ $0 < \operatorname{Re} s < (2\operatorname{Re}(c-a)-1)/3,$ $c \neq 0, -1, -2, \dots$
26(1)	$ 1-x ^{-2a} F\left(a, b; a+b+\frac{1}{2}; -\frac{4x}{(1-x)^2}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} a+b+1/2, b-a+1/2 \\ 2a \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma\left[\begin{matrix} s, 2a-s \\ b-a+1/2+s, a+b+1/2-s \end{matrix}\right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 2\operatorname{Re} a,$ $a+b+1/2 \neq 0, -1, -2, \dots,$ $\operatorname{Re}(b-a) > -1/2$
26(2)	$ 1-\sqrt{x} ^{-2a} F\left(a, b; a+b+\frac{1}{2}; -\frac{4\sqrt{x}}{(1-\sqrt{x})^2}\right)$	$2^{2a-2b} \Gamma\left[\begin{matrix} a+b+1/2, b-a+1/2 \\ 2a \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma\left[\begin{matrix} s, s+1/2, a-s, a+1/2-s \\ s+(b-a)/2+1/4, \end{matrix}\right]$ $s+(b-a)/2+3/4, (a+b)/2+1/4-s,$ $(a+b)/2+3/4-s], \quad 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a,$ $\operatorname{Re}(b-a) > -1/2,$ $a+b+1/2 \neq 0, -1, -2, \dots$
26(3)	$ 1-\sqrt[3]{x} ^{-2a} \times$ $\times F\left(a, b; a+b+\frac{1}{2}; -\frac{4\sqrt[3]{x}}{(1-\sqrt[3]{x})^2}\right)$	$3^{2a-2b} \Gamma\left[\begin{matrix} a+b+1/2, b-a+1/2 \\ 2a \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s, 2a-3s \\ b-a+1/2+3s, a+b+1/2-3s \end{matrix}\right],$ $0 < \operatorname{Re} s < 2/3 \operatorname{Re} a, \operatorname{Re}(b-a) > -1/2,$ $a+b+1/2 \neq 0, -1, -2, \dots$
27(1)	$\frac{1+x}{ 1-x ^{2a}} F\left(a, b; a+b-\frac{1}{2}; -\frac{4x}{(1-x)^2}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} a+b-1/2, b+1/2-a \\ 2a-1 \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma\left[\begin{matrix} s, 2a-1-s \\ b-a+1/2+s, a+b-1/2-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}(b-a) > -1/2,$ $0 < \operatorname{Re} s < 2\operatorname{Re} a-1,$ $a+b-1/2 \neq 0, -1, -2, \dots$

1	2	3
27(2)	$\frac{1 + \sqrt{x}}{ 1 - \sqrt{x} ^{2a}} F\left(a, b; a + b - \frac{1}{2}; -\frac{4\sqrt{x}}{(1 - \sqrt{x})^2}\right)$	$2^{2a-2b} \Gamma\left[\begin{matrix} a + b - 1/2, & b + 1/2 - a \\ 2a - 1 \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma\left[\begin{matrix} s, & s + 1/2, & a - 1/2 - s, & a - s \\ (b - a)/2 + 1/4 + s, & (b - a)/2 + 3/4 + s, \\ (a + b)/2 - 1/4 - s, & (a + b)/2 + 1/4 - s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}(b - a) > -1/2,$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a - 1/2,$ $a + b - 1/2 \neq 0, -1, -2, \dots$
27(3)	$\frac{1 + \sqrt[3]{x}}{ 1 - \sqrt[3]{x} ^{2a}} F\left(a, b; a + b - \frac{1}{2}; -\frac{4\sqrt[3]{x}}{(1 - \sqrt[3]{x})^2}\right)$	$3^{2a-2b} \Gamma\left[\begin{matrix} a + b - 1/2, & b + 1/2 - a \\ 2a - 1 \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s, & 2a - 1 - 3s \\ 3s + b - a + 1/2, & a + b - 1/2 - 3s \end{matrix}\right],$ $a + b - 1/2 \neq 0, -1, -2, \dots,$ $\operatorname{Re}(b - a) > -1/2,$ $0 < \operatorname{Re} s < (2 \operatorname{Re} a - 1)/3$
28(1)	$ 1 \pm \sqrt{x} ^{-2a} F\left(a, b; 2b; \frac{\pm 4\sqrt{x}}{(1 \pm \sqrt{x})^2}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} b + 1/2, & b - a + 1/2 \\ a \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma\left[\begin{matrix} s, & a - s \\ s + b - a + 1/2, & b + 1/2 - s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}(b - a) > -1/2,$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a, \quad b + 1/2 \neq 0, -1, -2, \dots$
28(2)	$ 1 \pm \sqrt[4]{x} ^{-2a} F\left(a, b; 2b; \frac{\pm 4\sqrt[4]{x}}{(1 \pm \sqrt[4]{x})^2}\right)$	$2^{2a-2b} \Gamma\left[\begin{matrix} b + 1/2, & b - a + 1/2 \\ a \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma\left[\begin{matrix} s, & s + 1/2, & a/2 - s, & (1 + a)/2 - s \\ s + (b - a)/2 + 1/4, & s + (b - a)/2 + 3/4, \\ b/2 + 1/4 - s, & b/2 + 3/4 - s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}(b - a) > -1/2,$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a/2,$ $b + 1/2 \neq 0, -1, -2, \dots$
28(3)	$ 1 \pm x^{1/6} ^{-2a} F\left(a, b; 2b; \frac{\pm 4x^{1/6}}{(1 \pm \sqrt[3]{x})^2}\right)$	$3^{2a-2b} \Gamma\left[\begin{matrix} b + 1/2, & b - a + 1/2 \\ a \end{matrix}\right] \times$ $\times \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s, & a - 3s \\ 3s + b - a + 1/2, & b + 1/2 - 3s \end{matrix}\right],$ $b + 1/2 \neq 0, -1, -2, \dots,$ $\operatorname{Re}(b - a) > -1/2, \quad 0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a/3$

1	2	3
29(1)	$\frac{ 1 \mp \sqrt{x} ^{2a}}{ 1-x ^{2b}} F\left(a, b; 2b; \frac{\pm 4\sqrt{x}}{(1 \pm \sqrt{x})^2}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} b+1/2, & 1/2+a-b \\ 2b-a \end{matrix}\right] \times \\ \times \Gamma\left[\begin{matrix} s, & 2b-a-s \\ s+a-b+1/2, & b+1/2-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}(a-b) > -1/2,$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(2b-a),$ $b+1/2 \neq 0, -1, -2, \dots$
29(2)	$\frac{ 1 \mp \sqrt[4]{x} ^{2a}}{ 1-\sqrt{x} ^{2b}} F\left(a, b; 2b; \frac{\pm 4\sqrt[4]{x}}{(1 \pm \sqrt[4]{x})^2}\right)$	$2^{2b-2a} \Gamma\left[\begin{matrix} b+1/2, & 1/2+a-b \\ 2b-a \end{matrix}\right] \times \\ \times \Gamma\left[\begin{matrix} s, & s+1/2, & b-a/2-s, \\ s+(a-b)/2+1/4, & s+(a-b)/2+3/4, \\ b+(1-a)/2-s \\ b/2+1/4-s, & b/2+3/4-s \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re}(a-b) > -1/2,$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(b-a/2),$ $b+1/2 \neq 0, -1, -2, \dots$
29(3)	$\frac{ 1 \mp x^{1/6} ^{2a}}{ 1-\sqrt[3]{x} ^{2b}} F\left(a, b; 2b; \frac{\pm 4x^{1/6}}{(1 \pm x^{1/6})^2}\right)$	$3^{2b-2a} \Gamma\left[\begin{matrix} b+1/2, & 1/2+a-b \\ 2b-a \end{matrix}\right] \times \\ \times \Gamma_3\left[\begin{matrix} 3s, & 2b-a-3s \\ 3s+a-b+1/2, & b+1/2-3s \end{matrix}\right],$ $b+1/2 \neq 0, -1, -2, \dots,$ $\operatorname{Re}(a-b) > -1/2,$ $0 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(2b-a)/3$
30(1)	$(1-x)_+^{c-1} F_3\left(a, a', b, b'; c; 1-x, 1-\frac{1}{x}\right)$	$\Gamma(c) \Gamma\left[\begin{matrix} s+a', & s+b', & s+c-a-b \\ s+a'+b', & s+c-a, & s+c-b \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re} c > 0, \operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} a',$ $-\operatorname{Re} b', \operatorname{Re}(a+b-c)$
30(2)	$(1-\sqrt{x})_+^{c-1} F_3\left(a, a', b, b'; c; 1-\sqrt{x}, 1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$	$2^{1-c} \Gamma(c) \Gamma\left[\begin{matrix} s+a'/2, & s+(a'+1)/2, \\ s+(a'+b')/2, & s+(a'+b'+1)/2, \\ s+b'/2, & s+(b'+1)/2, & s+(c-a-b)/2, \\ s+(c-a)/2, & s+(c-a+1)/2, \\ s+(c-a-b+1)/2 \\ s+(c-b)/2, & s+(c-b+1)/2 \end{matrix}\right],$ $\operatorname{Re} s > -\operatorname{Re} a'/2, -\operatorname{Re} b'/2,$ $\operatorname{Re}(a+b-c)/2, \operatorname{Re} c > 0$

1	2	3
30(3)	$(x-1)_{+}^{c-1} F_3\left(a, a', b, b', c; 1-x, 1-\frac{1}{x}\right)$	$\Gamma(c) \Gamma\left[\begin{matrix} 1-a'-b'-s, 1+a-c-s, \\ 1-a'-s, 1-b'-s, \\ 1+b-c-s \\ 1+a+b-c-s \end{matrix}\right], \operatorname{Re} c > 0,$ $\operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re}(a' + b'), \quad 1 + \operatorname{Re}(a-c),$ $1 + \operatorname{Re}(b-c)$
31(1)	$J_v^\mu(x)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} s \\ 1+v-\mu s \end{matrix}\right], \quad \operatorname{Re} s > 0, \mu < 1;$ $\mu = 1, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 3/4 + \operatorname{Re} v/2$
31(2)	$J_v^\mu(k^{1+\mu} \sqrt{x})$	$k^{-v} \Gamma_h\left[\begin{matrix} ks \\ 1+v-\mu ks \end{matrix}\right], \mu < 1, \operatorname{Re} s > 0;$ $\mu = 1, \quad 0 < \operatorname{Re} s < (3+2 \operatorname{Re} v) (4k)^{-1},$ $k = 1, 2, 3, \dots$
31(3)	$J_v^\mu\left(\frac{1}{x}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} -s \\ 1+v+\mu s \end{matrix}\right], \quad \operatorname{Re} s < 0, \mu < 1,$ $\mu = 1, \quad -3/4 - \operatorname{Re} v/2 < \operatorname{Re} s < 0$
32(1)	$H_v^\mu(2\sqrt{x})$	$\Gamma\left[\begin{matrix} s+(v+1)/2, (1-v)/2-s \\ 1-v/2-s, 3/2+v-\mu(1+v)/2-\mu s \end{matrix}\right],$ $ \mu < 1,$ $-(\operatorname{Re} v+1)/2 < \operatorname{Re} s < (1-\operatorname{Re} v)/2;$ $\mu = 1, \quad -(\operatorname{Re} v+1)/2 < \operatorname{Re} s < 3/4,$ $(1-\operatorname{Re} v)/2$
32(2)	$H_v^\mu\left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)$	$\Gamma\left[\begin{matrix} s+(1-v)/2, (1+v)/2-s \\ s+1-v/2, 3/2+v-\mu(1+v)/2+\mu s \end{matrix}\right],$ $ \mu < 1, (\operatorname{Re} v-1)/2 < \operatorname{Re} s < (\operatorname{Re} v+1)/2;$ $\mu = 1,$ $-3/4, (\operatorname{Re} v-1)/2 < \operatorname{Re} s < (\operatorname{Re} v+1)/2$
33(1)	$J_{v,\lambda}^\mu(2\sqrt{x})$	$\Gamma\left[\begin{matrix} v/2+\lambda+s, 1-v/2-\lambda-s \\ 1-v/2-s, 1+\lambda+v-\mu(\lambda+v/2)-\mu s \end{matrix}\right],$ $ \mu < 1,$ $-\operatorname{Re}(v/2+\lambda) < \operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re}(v/2+\lambda);$ $\mu = 1, \quad -\operatorname{Re}(v/2+\lambda) < \operatorname{Re} s < 3/4,$ $1 - \operatorname{Re}(v/2+\lambda)$

1	2	3
33(2)	$J_{\nu, \lambda}^{\mu} (2k^{(1+\mu)/2} x^{(2k)^{-1}})$	$k^{(\lambda+\nu/2)(\mu-1)} \Gamma_k \left[\begin{matrix} \nu/2 + \lambda + ks, \\ 1 - \nu/2 - ks, \\ 1 - \nu/2 - \lambda - ks \\ 1 + \lambda + \nu - \mu (\lambda + \nu/2) - \mu ks \end{matrix} \right],$ $k = 1, 2, 3, \dots, \quad \mu < 1,$ $-\operatorname{Re}(\nu/2 + \lambda) < k \operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re}(\nu/2 + \lambda);$ $\mu = 1,$ $-\operatorname{Re}(\nu/2 + \lambda) < k \operatorname{Re} s < 1 - \operatorname{Re}(\nu/2 + \lambda),$ $3/4$
33(3)	$J_{\nu, \lambda}^{\mu} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} \right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s+1-\nu/2-\lambda, \nu/2+\lambda-s \\ s+1-\nu/2, \\ 1+\lambda+\nu-\mu(\lambda+\nu/2)+\mu s \end{matrix} \right],$ $ \mu < 1,$ $\operatorname{Re}(\nu/2 + \lambda) - 1 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(\nu/2 + \lambda),$ $\mu = 1,$ $-3/4, \operatorname{Re}(\nu/2 + \lambda) - 1 < \operatorname{Re} s < \operatorname{Re}(\nu/2 + \lambda)$
34(1)	$E_{\rho}(-x; \mu)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s, 1-s \\ \mu - s\rho^{-1} \end{matrix} \right],$ $\rho > 1/2, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1;$ $\rho = 1/2, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1, \operatorname{Re} \mu/2$
34(2)	$E_{\rho}(-\frac{\rho}{\sqrt{k}} x^{1/k}; \mu)$	$(2\pi)^{(1-k)/2} k^{3/2-\mu} \Gamma_k \left[\begin{matrix} ks, 1-ks \\ \mu - k\rho^{-1}s \end{matrix} \right],$ $\rho > 1/2, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1/k;$ $\rho = 1/2, \quad 0 < \operatorname{Re} s < 1/k, \operatorname{Re} \mu/(2k),$ $k = 1, 2, 3, \dots$
34(3)	$E_{\rho} \left(-\frac{1}{x}; \mu \right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s+1, -s \\ \mu + s\rho^{-1} \end{matrix} \right], \quad \rho > 1/2, \quad -1 < \operatorname{Re} s < 0,$ $\rho = 1/2, \quad -1, \quad -\operatorname{Re} \mu/2 < \operatorname{Re} s < 0$
35(1)	${}_p F_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; -x)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} b_1, \dots, b_q \\ a_1, \dots, a_p \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s, a_1-s, a_2-s, \dots, \\ b_1-s, b_2-s, \dots, \\ a_p-s \\ b_q-s \end{matrix} \right], \quad q = p, \quad q = p+1,$

1	2	3
		$0 < \operatorname{Re} s < \min_{1 \leq j \leq p} \operatorname{Re} a_j,$ $b_k \neq 0, -1, -2, \dots,$ $k=1, 2, \dots, q \left(\text{если } q = p+1, \text{ то еще} \right.$ $\text{следует добавить условие } \operatorname{Re} s < \frac{1}{4} -$ $- \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^p a_j - \sum_{k=1}^q b_k \right) \Bigg)$
35(2)	${}_pF_q \left(a_1, a_2, \dots, a_p; \right.$ $b_1, \dots, b_q; -\frac{1}{x} \Bigg)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} b_1, \dots, b_q \\ a_1, \dots, a_p \end{matrix} \right] \Gamma \left[\begin{matrix} s + a_1, \dots, \\ s + a_p, -s \\ s + b_q \end{matrix} \right], \quad q = p, \quad q = p+1,$ $- \min_{1 \leq j \leq p} \operatorname{Re} a_j < \operatorname{Re} s < 0,$ $b_k \neq 0, -1, -2, \dots \left(\text{если } q = p+1, \right.$ $\text{то следует добавить еще условие}$ $\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^p a_j - \sum_{k=1}^q b_k \right) - \frac{1}{4} < \operatorname{Re} s \Bigg)$
36(1)	$E(p; a_r; q; b_h; x)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s + a_1, \dots, s + a_p, -s \\ s + b_1, \dots, s + b_q \end{matrix} \right],$ $- \min_{1 \leq r \leq p} \operatorname{Re} a_r < \operatorname{Re} s < 0, \quad p+1 > q \geq 0$ $\left(\text{если } q = p+1, \text{ то следует добавить} \right.$ $\text{еще условие } \operatorname{Re} s > -\frac{1}{4} +$ $+ \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{r=1}^p a_r - \sum_{k=1}^q b_k \right) \Bigg)$
36(2)	$E \left(p; a_r; q; b_h; \frac{1}{x} \right)$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s, a_1 - s, \dots, a_p - s \\ b_1 - s, \dots, b_q - s \end{matrix} \right],$ $0 < \operatorname{Re} s < \min_{1 \leq r \leq p} \operatorname{Re} a_r, \quad p+1 > q \geq 0$

1	2	3
37	$G_{pq}^{mn} \left(x \left \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right)$	(если $q = p + 1 \geq 0$, то следует добавить еще условие $\operatorname{Re} s < \frac{1}{4} -$ $-\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{r=1}^p a_r - \sum_{k=1}^q b_k \right)$ $\Gamma \left[\begin{matrix} s + b_1, \dots, s + b_m, 1 - a_1 - s, \dots, \\ s + a_{n+1}, \dots, s + a_p, 1 - b_{m+1} - s, \dots, \\ 1 - a_n - s, \\ 1 - b_q - s \end{matrix} \right],$ $-\min_{1 \leq k \leq m} \operatorname{Re} b_k < \operatorname{Re} s < 1 - \max_{1 \leq j \leq n} \operatorname{Re} a_j$ и либо 1) $0 \leq n \leq p, \quad 0 \leq m \leq q, \quad 2(m+n) > p+q$, либо 2) $0 \leq n \leq p \leq q-2$ (или $0 \leq m \leq q \leq p-2$), $2(m+n) = p+q$, $\operatorname{Re} s(q-p) < 1/2(q+1-p) +$ $+ \operatorname{Re} \left\{ \sum_{j=1}^p a_j - \sum_{k=1}^q b_k \right\}$, либо 3) $p = q \geq 1, \quad m+n = p, \sum_{j=1}^p (a_j - b_j) > 0$
38	Теорема Слейтер $\Sigma_A(x) (A+D > B+C)$ $\Sigma_A(x) H(1-x) +$ $+ \Sigma_B(1/x) H(x-1)$ $(A+D = B+C)$ $\Sigma_B(1/x) (A+D < B+C),$ $A, B, C, D = 0, 1, 2, \dots$	$\Gamma \left[\begin{matrix} s + a_1, s + a_2, \dots, s + a_A, b_1 - s, \\ s + c_1, s + c_2, \dots, s + c_C, d_1 - s, \\ b_2 - s, \dots, b_B - s \\ d_2 - s, \dots, d_D - s \end{matrix} \right],$ $-\min_{1 \leq j \leq A} \operatorname{Re} a_j < \operatorname{Re} s < \min_{1 \leq k \leq B} \operatorname{Re} b_k,$ $A+B > C+D$ (если $A+B = C+D$, то должно выполняться еще условие $\operatorname{Re} s(A+D-B-C) < -\operatorname{Re} v$, где $v = \sum_{j=1}^A a_j + \sum_{k=1}^B b_k - \sum_{l=1}^C c_l - \sum_{m=1}^D d_m,$ при $A+D-B-C > 1, A+B = C+D$ вместо последнего достаточно условия $\operatorname{Re} s(A+D-B-C) < 1/2 - \operatorname{Re} v$)

Здесь

$$\Sigma_A(x) = \sum_{j=1}^A x^{a_j} \Gamma \left[\begin{matrix} (a)' - a_j, (b) + a_j \\ (c) - a_j, (d) + a_j \end{matrix} \right] \times \\ \times {}_{B+C}F_{A+D-1} \left(\begin{matrix} (b) + a_j, 1 + a_j - (c); (-1)^{A-C} x \\ 1 + a_j - (a)', (d) + a_j \end{matrix} \right),$$

$$\sum_B (1/x) = \sum_{k=1}^B x^{-b_k} \Gamma \left[\begin{matrix} (b)' - b_k, (a) + b_k \\ (d) - b_k, (c) + b_k \end{matrix} \right] \times \\ \times {}_{A+D}F_{B+C-1} \left(\begin{matrix} (a) + b_k, 1 + b_k - (d); \\ 1 + b_k - (b)', (c) + b_k \end{matrix} ; \frac{(-1)^{B-D}}{x} \right),$$

$$(a) + b_k \equiv a_1 + b_k, a_2 + b_k, \dots, a_A + b_k,$$

$$(a)' - a_j = a_1 - a_j, \dots, a_{j-1} - a_j, a_{j+1} - a_j, \dots, a_A - a_j.$$

§ 11. ПЕРЕЧЕНЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

1. Часто встречающиеся символы

№	Обозначение	Ссылка	Наименование
1	2	3	4
1	$(a), (a) + s, (a)' - a_j, (a) = a_1, a_2, \dots, a_A$	с. 47	Векторы
2	$(a)_k = a(a+1) \dots (a+k-1), k=1, 2, 3, \dots,$ $(a)_0=1, (1)_k=k!, \Gamma(a+k) = (a)_k \Gamma(a)$	с. 27	Символ Похгаммера, факториальная функция
3	$e^z = \exp z = {}_0F_0(z),$ $e = 2,71828 \dots$	§ 1	Показательная функция (экспонента) от z
4	${}_A F_B((a); (b); z) \equiv {}_A F_B \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_A; z \\ b_1, \dots, b_B \end{matrix} \right)$	с. 45	Обобщенная гипергеометрическая функция
5	$F(a, b; c; z) \equiv {}_2F_1(a, b; c; z)$	§ 5	Гипергеометрическая функция Гаусса
6	${}_1F_1(a; c; z) \equiv \Phi(a, c; z)$	§ 6	Вырожденная гипергеометрическая функция (функция Куммера)
7	$G_{pq}^{mn}(z) = G_{pq}^{mn} \left(z \left \begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \right. \right)$	с. 59	G-функция Мейера
8	$\sum_A(z), \sum_B(1/z), \sum_{A\pm}(z), \sum_{B\pm}(1/z)$	с. 47, 61	Функции гипергеометрического типа, усеченные функции
9	$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$		Функция Хевисайда
10	$x_+^\alpha = \begin{cases} x^\alpha, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad x_-^\alpha = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ (-x)^\alpha, & x < 0 \end{cases}$	с. 11	Усеченные степенные функции
11	$\mathcal{H}^*(s) = \int_0^\infty \mathcal{H}(x) x^{s-1} dx$	§ 2	Преобразование Меллина функции $\mathcal{H}(x), \mathcal{H}^*(s)$ — образ, $\mathcal{H}(x)$ — прообраз

1	2	3	4
12	$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \mathcal{H}^*(s) x^{-s} ds, \quad x > 0$	§ 2	Обратное преобразование Меллина образа $\mathcal{H}^*(s)$, $\mathcal{H}(x)$ — оригинал
13	$L_{\pm\infty}, L_{i\infty}$	§ 4	Правая (левая) петли, специальные контуры
14	$ z , \arg z, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \bar{z}, \quad z = x+iy, \quad i = \sqrt{-1}$	с. 14	Модуль, аргумент, действительная и мнимая части комплексного числа z , $\bar{z}$ — сопряженное число
15	$B(a, b) = \int_0^1 (1-x)^{a-1} x^{b-1} dx,$ $\operatorname{Re} a > 0, \operatorname{Re} b > 0$	с. 33	Бета-функция Эйлера
16	$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx, \quad \operatorname{Re} s > 0$	§ 3	Гамма-функция Эйлера
17	$\Gamma \left[\begin{smallmatrix} a_1, a_2, \dots, a_A \\ b_1, b_2, \dots, b_B \end{smallmatrix} \right], \quad \Gamma \left[\begin{smallmatrix} (a) \pm s \\ (b) \pm s \end{smallmatrix} \right]$	с. 47	Отношение произведений гамма-функций
18	$\Gamma_k \left[\begin{smallmatrix} (a) \\ (b) \end{smallmatrix} \right] \equiv \Gamma \left[\begin{smallmatrix} \Delta(k, a_1), \dots, \Delta(k, a_A) \\ \Delta(k, b_1), \dots, \Delta(k, b_B) \end{smallmatrix} \right],$ $\Gamma_3 \left[\begin{smallmatrix} a+3s \\ b-3s \end{smallmatrix} \right] = \Gamma \left[\begin{smallmatrix} a/3+s, (a+1)/3+s, (a+2)/3+s \\ b/3-s, (b+1)/3-s, (b+2)/3-s \end{smallmatrix} \right]$	с. 127	
19	$\Delta(k, a) = \frac{a}{k}, \frac{a+1}{k}, \frac{a+2}{k}, \dots,$ $\frac{a+k-1}{k}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$	[53]	Специальный k -мерный вектор
20	$\Psi(z) = (\ln \Gamma(z))'$ $\Psi(n+1) = -\gamma + 1 + 1/2 + \dots + 1/n,$ $n = 1, 2, 3, \dots$	с. 42	Пси-функция или логарифмическая производная гамма-функции
21	$\Psi_m(z) = \Psi^{(m)}(z), \quad m = 1, 2, 3, \dots$	[2], гл. 1	Полигамма-функция
22	$\Psi(a, c; z)$	с. 74	Функция Трикоми
23	$\mathcal{H}(x) \longleftrightarrow \mathcal{H}^*(s)$		Символ соответствия
24	$f(x) = O(g(x)), \quad x \rightarrow x_0$ $(f(x) = o(g(x)), \quad x \rightarrow x_0)$	с. 24	$\frac{f(x)}{g(x)}$ ограничена (стремится к нулю) при $x \rightarrow x_0$
25	$f(z) \sim g(z) + O(z^{-n}), \quad z \rightarrow \infty$	§ 4	$f(z) - g(z) = O(z^{-n})$ (символ эквивалентности)

1	2	3	4
26	$\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b$	с. 11	$\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} a$ и $\operatorname{Re} s < \operatorname{Re} b$
27	$a/bc \equiv \frac{a}{b} c, \quad a/(bc) \equiv \frac{a}{bc}, \quad a+b/c+d \equiv a +$ $+ \frac{b}{c} + d, \quad a + b/(c+d) \equiv a + \frac{b}{c+d}$	с. 10	Запись деления че- рез косяк

2. Специальные функции

28	$\operatorname{Arch} z = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}) = -\ln(z -$ $-\sqrt{z^2 - 1}) = i\sqrt{1 - z^2} F(1/2, 1/2;$ $3/2; 1 - z^2)$		Обратная гипербо- лическая функция
29	$\operatorname{Arsh} z = \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) =$ $= -\ln(\sqrt{z^2 + 1} - z) = zF(1/2, 1/2; 3/2; -z^2)$		То же
30	$\operatorname{Arth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} = zF\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right)$		»
31	$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2} \ln \frac{z+1}{z-1}$		»
32	$\arccos z = -i \operatorname{Arch} z$		Обратная тригоно- метрическая функ- ция
33	$\arcsin z = -i \operatorname{Arsh}(iz)$		То же
34	$\operatorname{arctg} z = -i \operatorname{Arth}(iz)$		»
35	$\operatorname{arccotg} z = i \operatorname{Arcth}(iz)$		»
36	$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt,$ $\frac{1}{2} - C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$	[2], § 6.9.2	Косинус-интеграл Френеля
37	$\operatorname{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$	[2], § 6.9.2, 9.8	Интегральный ко- синус
38	$C(x, \alpha) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} \cos t dt, \quad \operatorname{Re} \alpha < 1$	[2], § 9.10	Обобщенный коси- нус-интеграл Фре- неля
39	$C_n^\lambda(z) = \frac{(2\lambda)_n}{n!} F\left(-n, n+2\lambda;$ $\lambda + \frac{1}{2}; \frac{1-z}{2}\right), \quad n=0, 1, 2, \dots$	[2], § 10.9	Многочлены Геген- бауэра

1	2	3	4
40	$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = {}_0F_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{z^2}{4} \right)$		Гиперболический косинус
41	$\cos z = \operatorname{ch}(iz) = {}_0F_1(1/2; -z^2/4)$		Косинус
42	$\operatorname{cth} z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$		Гиперболический котангенс
43	$\operatorname{ctg} z = i \operatorname{cth}(iz) = \frac{\cos z}{\sin z}$		Котангенс
44	$D_v(z) = 2^{v/2} e^{-z^2/4} \Psi \left(-\frac{v}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2} \right)$	[2], § 6.9, 8.2	Функции параболического цилиндра (функция Вебера)
45	$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \pi/2 F(-1/2, 1/2; 1; k^2), \quad k < 1$	[2], § 13.8	Полный эллиптический интеграл 2-го рода
46	$E_v(z) = 1/\pi \int_0^\pi \sin(v\varphi - z \sin \varphi) d\varphi =$ $= 2(\pi v)^{-1} \sin^2(\pi v/2) {}_1F_2(1; 1 + v/2, 1 - v/2; -z^2/4) - 2z [\pi(1 - v^2)]^{-1} \cos^2(\pi v/2) \times$ $\times {}_1F_2(1; (3 + v)/2, (3 - v)/2; -z^2/4)$	[2], § 7.5.3	Функция Вебера
47	$E_v^\mu(z) = 1/\pi \int_0^\pi (2 \sin \varphi)^\mu \sin(v\varphi - z \sin \varphi) d\varphi =$ $= \sin(\pi v/2) \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} \mu + 1 \\ 1 + (\mu + v)/2, 1 + (\mu - v)/2 \end{matrix} \right] \times$ $\times {}_2F_3 \left(\begin{matrix} (\mu + 1)/2, 1 + \mu/2 \\ 1/2, 1 + (\mu + v)/2, 1 + (\mu - v)/2 \end{matrix}; -z^2/4 \right) -$ $- 1/2 \cos(\pi v/2) z \times$ $\times \Gamma \left[\begin{matrix} \mu + 2 \\ (3 + \mu + v)/2, (3 + \mu - v)/2 \end{matrix} \right] \times$ $\times {}_2F_3 \left(\begin{matrix} \mu/2 + 1, (\mu + 3)/2 \\ 3/2, (3 + \mu + v)/2, (3 + \mu - v)/2 \end{matrix}; -z^2/4 \right)$	[72]	Обобщенная функция Вебера
48	$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt = -e^x \Psi(1, 1; -x), \quad x < 0$	[2], § 6.9.2	Интегральная показательная функция
49	$\bar{E}i(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt = 1/2 [Ei(x + i0) + Ei(x - i0)] = \gamma + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!}, \quad x > 0$	[60]	Действительная часть $Ei(x)$

1	2	3	4
50	$\operatorname{Erf}(x) \equiv \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt =$ $= 2x\pi^{-1/2} {}_1F_1(1/2; 3/2; -x^2)$	[2], § 6.9	Интеграл вероятности
51	$\operatorname{Erfc}(x) = 1 - \operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt =$ $= \pi^{-1/2} e^{-x^2} \Psi(1/2, 1/2; x^2)$	[2], § 6.9	То же
52	$E(p; a_r : q; b_s : z) =$ $= G_{q+1, p}^p \left(z \middle \begin{matrix} 1, b_1, \dots, b_q \\ a_1, \dots, a_p \end{matrix} \right)$	[2], § 5.2	E-функция Мак-Роберта
53	$E_\rho(z; \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})}, \quad \rho > 0$	[8, 2]	Функция типа Миттаг—Леффлера
54	$F_3(a, a', b, b', c; x, y)$	[2], § 5.7 (8)	Функция Аппеля
55	$\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu+1} \frac{1}{\Gamma(\nu + 3/2)} \times$ $\times {}_1F_2(1; 3/2, \nu + 3/2; -z^2/4)$	[2], § 7.5.4	Функция Струве
56	$\mathbf{H}_\nu^\mu(z) = J_{\nu, 1/2}^\mu(z), \quad \mathbf{H}_\nu^1(z) = \mathbf{H}_\nu(z)$		Обобщенная функция Струве
57	$H_\nu^{(1)}(z), \quad H_\nu^{(2)}(z)$	с. 77	Функции Бесселя 3-го рода (функции Ганкеля 1-го и 2-го рода)
58	$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2} =$ $-2n z \Psi((1-n)/2, 3/2; z^2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$	[2] § 6.9	Многочлены Эрмита
59	$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu + 1)} {}_0F_1 \left(\nu + 1; \frac{z^2}{4} \right)$	с. 77	Модифицированная функция Бесселя (функция Бесселя мнимого аргумента)
60	$I_{0+}^\alpha f(x) = \int_0^x f(t) \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $(I_{0+}^\alpha f(x) = (I_{0+}^{-\alpha})^{-1} f(x), \quad \operatorname{Re} \alpha < 0),$ $I_{0+}^0 f(x) = \frac{d}{dx} I_{0+}^{1+i0} f(x), \quad \operatorname{Re} \alpha = 0,$ $\operatorname{Im} \alpha = \theta$	[2, 8, 21]	Интеграл (производная) Римана — Лиувилля порядка α ($-\alpha$)
61	$I_-^\alpha f(x) = \int_x^\infty f(t) \frac{(t-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt, \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$ $(I_-^\alpha f(x) = (I_-^{-\alpha})^{-1} f(x), \quad \operatorname{Re} \alpha < 0),$ $I_-^0 f(x) = -\frac{d}{dx} I_-^{1+i0} f(x), \quad \operatorname{Re} \alpha = 0, \quad \operatorname{Im} \alpha = \theta$	[2, 8, 21]	Интеграл (производная) Вейля порядка α ($-\alpha$)

1	2	3	4
62	$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1\left(\nu+1; -\frac{z^2}{4}\right)$	с. 77	Функция Бесселя 1-го рода
63	$J_\nu^\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k! \Gamma(1+\nu+\mu k)} , \quad \mu > -1$ $J_{\beta-1}^{-\alpha}(z) = \Phi(\beta, -\alpha; -z), \quad 0 < \alpha < 1$	[32, 35, 66, 63]	Функция Бесселя— Мейтленда
64	$J_{\nu,\lambda}^\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (z/2)^{\nu+2\lambda+2k}}{\Gamma[1+\lambda+k, 1+\lambda+\nu+\mu k]}$, $\mu > 0, J_{\nu,0}^\mu(z) = {}_\mu J_\nu(z) = (z/2)^\nu J_\nu^\mu(z^2/4),$ $J_{\nu,0}^1(z) = J_\nu(z)$	[70]	Функция Райта
65	$J_\nu(z) = \pi^{-1} \int_0^\pi \cos(\nu\varphi - z \sin \varphi) d\varphi =$ $= (\pi\nu)^{-1} \sin(\pi\nu) {}_1F_2(1; 1+\nu/2, 1-\nu/2;$ $-z^2/4) + [\pi(1-\nu^2)]^{-1} \sin(\pi\nu) {}_1F_2(1; (3+\nu)/2,$ $(3-\nu)/2; -z^2/4)$	[2], §7.5.3	Функция Ангера
66	$J_\nu^\mu(z) = \pi^{-1} \int_0^\pi (2 \sin \varphi)^\mu \cos(\nu\varphi - z \sin \varphi) d\varphi =$ $= \cos(\pi\nu/2) \Gamma\left[\frac{\mu+1}{(\mu+\nu)/2+1, (\mu-\nu)/2+1}\right] \times$ $\times {}_2F_3\left(\frac{(\mu+1)/2, \mu/2+1; -z^2/4}{1/2, (\mu+\nu)/2+1, (\mu-\nu)/2+1}\right) +$ $+ 2^{-1} z \sin(\pi\nu/2) \Gamma\left[\frac{\mu+2}{(\mu+\nu+3)/2, (\mu-\nu+3)/2}\right] {}_2F_3\left(\frac{\mu/2+1, (\mu+3)/2; -z^2/4}{3/2, (\mu+\nu+3)/2, (\mu-\nu+3)/2}\right)$		Обобщенная функ- ция Ангера
67	$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} = \pi/2 F(1/2, 1/2;$ $1; k^2), \quad k < 1$	[2], § 13.8	Эллиптический интеграл 1-го рода
68	$K_\nu(z) = 1/2 (z/2)^\nu \Gamma(-\nu) {}_0F_1(1+\nu; z^2/4) +$ $+ 1/2 (z/2)^{-\nu} \Gamma(\nu) {}_0F_1(1-\nu; z^2/4)$	с. 11, 77	Функция Макдо- нальда (функция Кельвина)
69	$\ker_\nu(z), \quad \ker_\nu(z)$ $\ker_\nu(z) \pm i \ker_\nu(z) = e^{\mp i\pi\nu/2} K_\nu(ze^{\pm \pi i/4})$	[2], § 7.2.3	Функции Томсона

1	2	3	4
70	$L_v(z) = \frac{2^{-v} z^{v+1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(v+3/2)} {}_1F_2\left(1; \frac{3}{2}, \frac{3}{2} + v; \frac{z^2}{4}\right)$	[2], § 7.5.4	Модифицированная функция Струве
71	$L_n^\alpha(z) = \frac{e^z z^{-\alpha}}{n!} \frac{d^n}{dz^n} [e^{-z} z^{n+\alpha}] =$ $= (\alpha+1)_n (n!)^{-1} {}_1F_1(-n; \alpha+1; z),$ $n=0, 1, 2, \dots, L_n(z) = L_n^0(z)$	[2], § 10.12	Многочлены Лагерра
72	$L^n(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{z^h}{k^n}, \quad z < 1, \quad n=1, 2, \dots$	с. 90	Полилогарифмы
73	$L^v(z) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{z^h}{k^v}, \quad z < 1,$ $L^v(z) = \frac{z}{\Gamma(v)} \int_0^{\infty} \frac{t^{v-1} dt}{e^t - z}, \quad \operatorname{Re} v > 0,$ $ \arg(1-z) < \pi$	[2, 24, 38— 41, 49, 63, 65]	Полилогарифм произвольного порядка v , интеграл Бозе—Эйнштейна (Ферми—Дирака)
74	$\operatorname{li} z = \operatorname{Ei}(\ln z)$	[2], § 6.8	Интегральный логарифм
75	$\ln z = \ln z + i \arg z, \quad z = z e^{i(\arg z + 2\pi k)},$ $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$	с. 22	Натуральный логарифм
76	$M_{\kappa, \mu}(z) = e^{-z/2} z^{c/2} {}_1F_1(a; c; z),$ $a=1/2 - \kappa + \mu, \quad c=2\mu+1$	с. 76	Выврожденная гипергеометрическая функция Уиттекера
77	$P_n(z) = \frac{2^{-n}}{n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2-1)^n =$ $= F\left(-n, 1+n; 1; \frac{1-z}{2}\right), \quad n=0, 1, 2, \dots$	[2], § 10.10	Многочлены Лежандра
78	$P_v^\mu(z) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\mu/2} \times$ $\times F\left(-v, 1+v; 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right),$ $ \arg(z \pm 1) < \pi$	[2], гл. 3	Присоединенная функция Лежандра 1-го рода
79	$P_v^\mu(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\mu/2} \times$ $\times F\left(-v, 1+v; 1-\mu; \frac{1-x}{2}\right), \quad -1 < x < 1$	[2], гл. 3	То же
80	$P_v(z) = P_v^0(z)$	[2], гл. 3	Функция Лежандра 1-го рода

1	2	3	4
81	$P_n^{(\alpha, \beta)}(z) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!} F\left(-n, n+\alpha+\beta+1; 1+\alpha; \frac{1-z}{2}\right), \quad n=0, 1, 2, \dots$	[2], § 10.8	Многочлены Якоби
82	$Q_n(z) = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} z^{-n-1} F\left(\frac{1+n}{2}, 1+n/2; 3/2+n; z^{-2}\right), \quad n=0, 1, 2, \dots,$ $ \arg(z^2-1) < \pi$	[2], § 10.10	Функция Лежандра 2-го рода
83	$Q_v^\mu(z) = \frac{2^{-v-1}}{\Gamma(v+3/2)} \Gamma(\mu+v+1) e^{i\mu\pi} \sqrt{\pi} \times$ $\times z^{-\mu-v-1} (z^2-1)^{\mu/2} F((\mu+v+1)/2, (\mu+v+2)/2; v+3/2; z^{-2}), \quad \arg(z \pm 1) < \pi, \quad \arg z < \pi$	[2], § 3.2	Присоединенная функция Лежандра 2-го рода
84	$Q_v^\mu(x) = 1/2e^{-i\mu\pi} [e^{-i\mu\pi/2} Q_v^\mu(x+i0) + e^{i\mu\pi/2} Q_v^\mu(x-i0)], \quad -1 < x < 1$	[2], § 3.4	То же
85	$Q_v(z) = Q_v^0(z)$	[2], гл. 3	Функция Лежандра 2-го рода
86	$Q_n^{(\alpha, \beta)}(z) = 2^{n+\alpha+\beta} \Gamma\left[\frac{n+\alpha+1}{2}, \frac{n+\beta+1}{2}\right] \times$ $\times (z-1)^{-n-\alpha-1} (z+1)^\beta F\left(n+1, n+\alpha+1; 2n+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1-z}\right), \quad \arg(z \pm 1) < \pi$	[2], § 10.8	Функция Якоби 2-го рода
87	$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt,$ $\frac{1}{2} - S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$	[2], § 6.9.2	Синус-интеграл Френеля
88	$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$	[2], § 6.9.2, 9.8	Интегральный синус
89	$\text{si}(x) = \text{Si}(x) - \frac{\pi}{2} = - \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$	[2], § 6.9.2	То же
90	$S(x, \alpha) = \int_x^\infty t^{\alpha-1} \sin t dt, \quad \text{Re } \alpha < 1$	[2], § 9.10	Обобщенный синус-интеграл Френеля
91	$s_{\mu, \nu}(z) = \frac{z^{\mu+1}}{(\mu-\nu+1)(\mu+\nu+1)} \times$ $\times {}_1F_2(1; (\mu-\nu+3)/2, (\mu+\nu+3)/2; -z^2/4)$	[2], § 7.5.5	Функция Ломмеля

1	2	3	4
92	$S_{\mu, \nu}(z) = s_{\mu, \nu}(z) + 2^{\mu-1} \Gamma \left[\frac{\nu, (\mu+\nu+1)/2}{(1+\nu-\mu)/2} \right] \times$ $\times (z/2)^{-\nu} {}_0F_1(1-\nu; -z^2/4) +$ $+ 2^{\mu-1} \Gamma \left[\frac{-\nu, (1+\mu-\nu)/2}{(1-\mu-\nu)/2} \right] \times$ $\times (z/2)^{\nu} {}_0F_1(1+\nu; -z^2/4)$	[2], § 7.5.5	Функция Ломмеля
93	$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z {}_0F_1 \left(\frac{3}{2}; \frac{z^2}{4} \right)$		Гиперболический синус
94	$\sin z = -i \operatorname{sh} iz = z {}_0F_1(3/2; -z^2/4)$		Синус
95	$T_n(z) = \cos(n \arccos z) = F(-n, n; 1/2; (1-z)/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$	[2], § 10.11	Многочлены Чебышева 1-го рода
96	$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$		Гиперболический тангенс
97	$\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th}(iz) = \frac{\sin z}{\cos z}$		Тангенс
98	$U_n(z) = \frac{\sin[(n+1) \arccos z]}{\sqrt{1-z^2}} =$ $= (n+1) F(-n, n+2; 3/2; (1-z)/2),$ $n = 0, 1, 2, \dots$	[2], § 10.11	Многочлены Чебышева 2-го рода (исправлена опечатка: вместо $n+1$ надо $n+2$)
99	$W_{\kappa, \mu}(z) = e^{-z/2} z^{c/2} \Psi(a, c; z),$ $a = 1/2 - \kappa + \mu, \quad c = 2\mu + 1$	с. 76	Вырожденная гипергеометрическая функция Уиттекера
100	$[x] = n, \quad n \leq x < n+1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$		Целая часть x (антье от x)
101	$Y_{\nu}(z) \equiv N_{\nu}(z) =$ $= -1/\pi [\Gamma(\nu) (z/2)^{-\nu} {}_0F_1(1-\nu; -z^2/4) +$ $+ \cos \pi \nu \Gamma(-\nu) (z/2)^{\nu} {}_0F_1(1+\nu; -z^2/4)]$	с. 77	Функция Бесселя 2-го рода (функция Неймана)
102	$!z = K(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{t^z - 1}{t - 1} dt, \quad \operatorname{Re} z > -1,$ $!n = K(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k!, \quad n = 1, 2, \dots$	с. 108 [48, 68]	Левый факториал Курепы
103	$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt = x^{p/p} F(p,$ $1-q; p+1; x)$	[2], § 2.5	Неполная бета-функция
104	$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt = e^{-x} \Psi(1-a,$ $1-a; x)$	[2], § 6.9.2	Неполная гамма-функция

1	2	3	4
105	$\gamma(a, x) = \Gamma(a) - \Gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt =$ $= x^a/a {}_1F_1(a; a+1; -x), \quad \operatorname{Re} a > 0$	§ [2], § 6.9.2	Неполная гамма-функция
106	$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right] = -\psi(1) =$ $= -\Gamma'(1) = 0,5772 \dots$	§ [2], § 1.1, 1.7	Постоянная Эйлера — Маскерони
107	$\zeta(s) = L^s(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1$	§ [2], § 1.12	Дзета-функция Римана
108	$\zeta(s, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(v+k)^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1,$ $v \neq 0, -1, -2, \dots$	§ [2], § 1.10	Обобщенная дзета-функция Гурвица
109	$\lambda^v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)^v}, \quad z < 1,$ $\lambda^v(z) = \frac{z}{\Gamma(v) 2^v} \int_0^{\infty} \frac{t^{v-1} e^{t/2}}{e^t - z^2} dt =$ $= L^v(z) - 2^{-v} L^v(z^2), \quad \operatorname{Re} v > 0,$ $ \arg(1 - z^2) < \pi, \quad \lambda^1(z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z}$		Малый нечетный полилогарифм порядка v

§12. УКАЗАТЕЛЬ КЛЮЧЕВЫХ ФОРМУЛ БАЗОВОЙ ТАБЛИЦЫ

В указателе перечислены те функции $\mathcal{H}(x)$, преобразования Меллина $\mathcal{H}^*(s)$ которых являются произведениями отношений гамма-функций (5) на постоянные. Пары соответствий $\mathcal{H}(x) \longleftrightarrow \mathcal{H}^*(s)$ расположены в базовой таблице (§ 10) в блоках, позицию и номера которых можно найти с помощью указателя. Каждый блок содержит несколько (до 9) родственных соответствий для функций $\mathcal{H}(a_n \sqrt[n]{x})$, $a_n = \text{const}$, $n = -1, \pm 2, \pm 3, \dots$, порождаемых ключевым соответствием $\mathcal{H}(x) \longleftrightarrow \mathcal{H}^*(s)$, расположенным в первой строке блока и отраженным в указателе. Некоторые из родственных соответствий (обычно из строк 3 и 5 или 4 каждого блока) в базовой таблице опущены, так как их несложно восстановить из строк 1, 2, 4, 6 или 1—3 блока (см. § 9).

Например, как следует из указателя, в блоке 2.8, расположенном на с. 132, должно быть 6 строк. В первой строке находится ключевое соответствие для функции $\mathcal{H}(x) = (1 + \sqrt{1+x})^v$. Родственные соответствия для функций $(1 + \sqrt{1+\sqrt{x}})^v$, $(1 + \sqrt{1+x^{1/3}})^v$, $(\sqrt{x} + \sqrt{1+x})^v$, $(\sqrt[4]{x} + \sqrt{1+\sqrt{x}})^v$, $(\sqrt[6]{x} + \sqrt{1+x^{1/3}})^v$ можно найти из следующих строк 2.8 (2)—2.8 (6), хотя строки 2.8 (3), 2.8 (5) опущены и могут быть восстановлены по оставшимся. Цифры 2.8 (1) означают: 2—номер пункта, 8—номер блока, (1) — номер формулы.

1. Общие формулы—с. 129—(12)

2. Алгебраические функции и степени с произвольным показателем

№ блока	Функция	Страница (кол-во строк)
1	2	3
1	$x^{\nu} H(1-x)$	130 (2)
2	$(1-x)_{+}^{\alpha-1}$	130 (6)
3	$(1+x)^{-\rho}$	131 (2)
4	$(1-x)^{-1}$	131 (3)
5	$1-x ^{-\rho}$	131 (3)
6	$(1-x)_{+}^{-\alpha} + (x-1)_{+}^{-\alpha} \frac{\sin(c-\alpha)\pi}{\sin c\pi}$	132 (6)
7	$\frac{x^{\alpha}-1}{x-1}$	132 (3)
8	$(1+\sqrt{1+x})^{\nu}$	132 (6)
9	$\frac{(1+\sqrt{1+x})^{\nu}}{\sqrt{1+x}}$	133 (6)
10	$[(1+\sqrt{1-x})^{\nu} + (1-\sqrt{1-x})^{\nu}](1-x)_{+}^{-1/2}$	133 (6)
11	$(1+\sqrt{x})^{-\alpha} + 1-\sqrt{x} ^{-\alpha}$	134 (3)
12	$(1+\sqrt{1-x})^{-1/2} H(1-x) + x^{-1/2} (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})^{-1/2} H(x-1)$	134 (4)
13, 14	$(1 \pm \sqrt{1-x})^{1/2} (1-x)_{+}^{-1/2} \pm (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^{1/2} \times$ $\times (x-1)_{+}^{-1/2}$	135 (2+4)
15	$(x^2 + 2x \cos \beta\pi + 1)^{-1}, \beta < 1, \beta = 1/3, 1/4$	135 (4)
16	$(1+x \cos \beta\pi)/(x^2 + 2x \cos \beta\pi + 1)$	136 (1)
17	$(x^2 + 2x \cos \beta\pi + 1)^{-2}$	136 (1)

3. Показательная и тригонометрические функции

1	e^{-x}	136 (5)
2	$\sin 2\sqrt{x}$	136 (5)
3	$\cos 2\sqrt{x}$	137 (5)
4	$\sin(2\sqrt{x} + \beta\pi)$	137 (6)
5	$\cos(2\sqrt{x} + \beta\pi)$	137 (6)
6	$\sin^n \sqrt{x}$	138 (4)
7	$\cos^n \sqrt{x} - C, C=0, 1, 2^{-2n} (2n)! (n!)^{-2}$	138 (6)
8	$e^{-x \cos \beta\pi} \sin(x \sin \beta\pi), \beta < 1, \beta = 1/3, 1/4, 1/6$	139 (8)

1	2	3
9	$e^{-x \cos \beta \pi} \cos (x \sin \beta \pi), \beta < 1, \beta = 1/3, 1/4, 1/6$	140 (8)
10	$\sin (-\alpha \ln x) H(1-x)$	140 (2)

4. Логарифмические функции, полилогарифмы

1	$\ln x H(1-x)$	140 (2)
2	$\ln (1+x)$	140 (4)
3	$\ln 1-x $	141 (6)
4, 5	$\frac{\ln x}{x \mp a}, a = 1, a > 0$	141 (5+5)
6	$\frac{\ln x}{(x+a)^2}, a > 0$	142 (2)
7	$\frac{\ln^2 x}{x+1}$	142 (2)
8	$\ln (1+2x \cos \pi \beta + x^2), \beta < 1, \beta = 1/3, 1/4, 1/6$	142 (8)
9	$\ln \frac{1+\sqrt{x}}{ 1-\sqrt{x} }$	143 (3)
10	$\ln (\sqrt{x} + \sqrt{1+x})$	143 (8)
11	$\ln (\sqrt{1+x} \pm \sqrt{x}) (1+x)^{-1/2}$	144 (6)
12	$\ln (\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) H(x-1)$	144 (8)
13	$L^n(-x)$	144 (4)
14	$\lambda^n(-i \sqrt{x})$	144 (4)

5. Гиперболические и обратные гиперболические функции

1	$\operatorname{sh} (v \operatorname{Arsh} \sqrt{x})$	145 (6)
2	$\operatorname{sh} (v \operatorname{Arsh} \sqrt{x}) (1+x)^{-1/2}$	145 (6)
3	$\operatorname{ch} (v \operatorname{Arsh} \sqrt{x}) (1+x)^{-1/2}$	146 (6)
4	$\operatorname{sh} (v \operatorname{Arth} \sqrt{(1-x)_+})$	146 (6)
5	$\operatorname{sh} \left(v \operatorname{Arth} \frac{2 \sqrt{x}}{1+x} \right) 1-x ^v$	146 (3)
6	$\operatorname{ch} \left(v \operatorname{Arth} \frac{2 \sqrt{x}}{1+x} \right) 1-x ^v$	147 (3)
7	$\operatorname{ch} (v \operatorname{Arth} \sqrt{1-x}) (1-x)_+^{-1/2}$	147 (6)

6. Обратные тригонометрические функции

1	$\arcsin \sqrt{x} H(1-x)$	148 (4)
2	$\arccos \sqrt{x} H(1-x)$	143 (4)

1	2	3
3	$\operatorname{arctg} \sqrt{x} = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x}}$	148 (4)
4	$\sin [v \arcsin \sqrt{(1-x)_+}] = \sin [v \arccos \sqrt{x}] H(1-x)$	149 (4)
5	$\cos [v \arccos \sqrt{x}] (1-x)_+^{-1/2} = \cos [v \arcsin \sqrt{1-x}] \times$ $\times (1-x)_+^{-1/2}$	149 (4)
6	$\sin [v \operatorname{arctg} \sqrt{x}] (1+x)^{v/2}$	149 (6)
7	$\cos [v \operatorname{arctg} \sqrt{x}] (1+x)^{v/2}$	150 (6)
8	$(1-x)_+^{-1/2} (1+\sqrt{1-x})^v \sin (\pi v/2) +$ $+(x-1)_+^{-1/2} x^{v/2} \cos [v \arcsin x^{-1/2}]$	150 (4)
9	$(1-x)_+^{-1/2} (1+\sqrt{1-x})^v \cos (\pi v/2) -$ $-(x-1)_+^{-1/2} x^{v/2} \sin [v \arcsin x^{-1/2}]$	151 (4)
10	$\sin [v \arcsin \sqrt{x}] H(1-x) + [\sqrt{x} + \sqrt{x-1}]^v \times$ $\times \sin (\pi v/2) H(x-1)$	151 (4)
11	$\cos [v \arcsin \sqrt{x}] H(1-x) + [\sqrt{x} + \sqrt{x-1}]^v \times$ $\times \cos (\pi v/2) H(x-1)$	151 (4)
12	$2^{-1} [(1+\sqrt{1-x})^v - (1-\sqrt{1-x})^v] (1-x)_+^{-1/2} +$ $+\sin [v \operatorname{arctg} \sqrt{x-1}] x^{v/2} (x-1)_+^{-1/2}$	152 (4)
13	$\arcsin \sqrt{1-x} (1-x)_+^{-1/2} + \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) \times$	152 (4)
14	$> (x-1)_+^{-1/2}$ $\sin [v \arccos \sqrt{x}] (1-x)_+^{-1/2} + \operatorname{sh} [v \operatorname{Arch} \sqrt{x}] \times$ $\times (x-1)_+^{-1/2}$	153 (4)

7. Полные эллиптические интегралы

1	$K(\sqrt{x})$	153 (4)
2	$K(i\sqrt{x})$	153 (4)
3	$K(\sqrt{1-x}) H(1-x)$	153 (4)
4	$K\left(-\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) (1+x)^{-1/2}$	154 (4)
5	$K\left(\frac{1 \pm \sqrt{x}}{1 \mp \sqrt{x}}\right) \frac{H(1-x)}{1 \mp \sqrt{x}}$	154 (4)
6	$K\left(\left \frac{1 \pm \sqrt{x}}{1 \mp \sqrt{x}}\right \right) \frac{1}{ 1 \mp \sqrt{x} }$	154 (2)
7	$K\left(\sqrt{\frac{1-x}{2 1-x }}\right) 1-x ^{-1/2}$	154 (2)

1	2	3
8	$K(1+2/x \pm 2\sqrt{x+1}/x)(1 \pm \sqrt{x+1})$	154 (4)
9	$K(2^{-1/2} \sqrt{1+\sqrt{x}}) H(x-1)$	155 (4)
10	$K(2^{-1/2} \sqrt{1-\sqrt{x}}) H(1-x)$	155 (4)
11	$K(\sqrt{(1+\operatorname{sgn}(x-1)\sqrt{x})/2})$	155 (4)
12	$K\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}}\right) \frac{H(x-1)}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}$	155 (4)
13	$K(\sqrt{2(1-x)+\sqrt{x^2-x}}) \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} H(x-1)$	156 (4)
14	$K\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}}\right) \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}}$	156 (4)
15	$K\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}}\right) \frac{(x+1)^{-1/2}}{\sqrt{\sqrt{x+1}+1}}$	156 (4)
16	$K(x^{1/4} \sqrt{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}) \sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$	157 (4)
17	$K(x^{1/4} \sqrt{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}) \frac{\sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}}{\sqrt{x+1}}$	157 (4)
18	$K\left(\frac{2\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}}\right) \frac{1}{1+\sqrt{x}}$	157 (2)
19	$K\left(\frac{2\sqrt[4]{x^2-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\right) \frac{H(x-1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}$	158 (4)
20	$K\left(\frac{2\sqrt[4]{x^2+x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\right) (\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$	158 (4)
21	$K\left(\sqrt{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}}\right) (x+1)^{-1/4}$	158 (4)
22	$K\left(\frac{ 1-\sqrt[4]{x} }{\sqrt{2(1+\sqrt{x})}}\right) \frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$	159 (2)
23	$E(\sqrt{1-x}) H(1-x)$	159 (4)
24	$E\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) \frac{1}{\sqrt{1+x}}$	159 (4)
25	$E(\sqrt{2\sqrt{1-x}}(1-\sqrt{1-x})^{x-1/2}) \frac{H(1-x)}{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}$	159 (4)
26	$E(x^{1/4} \sqrt{2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}) \frac{(1+x)^{-1/2}}{\sqrt{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}}$	160 (4)
27	$E\left(\frac{2\sqrt[4]{x^2-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\right) \frac{H(x-1)}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}$	160 (4)

8. Интегральные экспоненты, синус и косинус, интегралы вероятности и Френеля, неполные гамма-функции и функции параболического цилиндра

1	2	3
1	$\text{Ei}(-x)$	161 (4)
2	$e^x \text{Ei}(-x)$	161 (6)
3	$e^{-x} \bar{\text{Ei}}(x)$	161 (4)
4	$\text{Ei}(-2\sqrt{x}) \bar{\text{Ei}}(2\sqrt{x})$	161 (4)
5	$\text{Si}(2\sqrt{x})$	162 (4)
6	$\text{si}(2\sqrt{x})$	162 (4)
7	$\text{Ci}(2\sqrt{x})$	162 (4)
8, 9	$\text{Ci}(2\sqrt{x}) \frac{\sin}{\cos}(2\sqrt{x}) \mp \text{si}(2\sqrt{x}) \frac{\cos}{\sin}(2\sqrt{x})$	163 (4+4)
10	$[\text{Ci}(2\sqrt{x})]^2 + [\text{si}(2\sqrt{x})]^2$	163 (4)
11	$\text{Erf}(\sqrt{x})$	163 (4)
12	$e^{-x} \text{Erf}(i\sqrt{x})$	164 (6)
13	$\text{Erfc}(\sqrt{x})$	164 (4)
14	$e^x \text{Erfc}(\sqrt{x})$	164 (6)
15	$\text{Erf}(i\sqrt{2} x^{1/4}) \text{Erfc}(\sqrt{2} x^{1/4})$	164 (4)
16	$S(2\sqrt{x})$	165 (4)
17	$C(2\sqrt{x})$	165 (4)
18	$1/2 - S(2\sqrt{x})$	165 (4)
19	$1/2 - C(2\sqrt{x})$	166 (4)
20, 21	$C(2\sqrt{x}) \frac{\cos}{\sin}(2\sqrt{x}) \pm S(2\sqrt{x}) \frac{\sin}{\cos}(2\sqrt{x})$	166 (4+4)
22, 23	$\left[\frac{1}{2} - C(2\sqrt{x}) \right] \frac{\cos}{\sin}(2\sqrt{x}) \pm \left[\frac{1}{2} - S(2\sqrt{x}) \right] \times$ $\times \frac{\sin}{\cos}(2\sqrt{x})$	166 (4+4)
24	$[1/2 - C(2\sqrt{x})]^2 + [1/2 - S(2\sqrt{x})]^2$	167 (4)
25	$S(2\sqrt{x}, \alpha)$	167 (4)
26	$C(2\sqrt{x}, \alpha)$	168 (4)
27	$\gamma(a, x)$	168 (4)
28	$\Gamma(a, x)$	168 (4)
29	$e^x \Gamma(a, x)$	168 (6)
30, 31	$e^{\mp x/2} D_v(\sqrt{2x})$	169 (6+6)

1	2	3
32	$D_v (2 \sqrt{-i} x^{1/4}) D_v (2 \sqrt{-i} x^{1/4})$	169 (2)
33	$D_v (2 \sqrt[4]{x}) D_{-v-1} (2 \sqrt[4]{x})$	169 (4)

9. Функции Бесселя и родственные им функции

1	${}_0F_1 (c; -x)$	170 (4)
2	$J_v (2 \sqrt{x})$	170 (5)
3	$K_v (2 \sqrt{x})$	171 (5)
4	$Y_v (2 \sqrt{x})$	171 (4)
5	$H_v (2 \sqrt{x})$	171 (4)
6	$s_{\mu, v} (2 \sqrt{x})$	172 (4)
7	$S_{\mu, v} (2 \sqrt{x})$	172 (4)
8	$J_v (2 \sqrt{x})$	173 (2)
9	$J_v^\mu (2 \sqrt{x})$	173 (2)
10	$E_v (2 \sqrt{x})$	173 (2)
11	$E_v^\mu (2 \sqrt{x})$	173 (2)
12	$e^{-x/2} I_v (x/2)$	174 (6)
13, 14	$e^{\mp x/2} K_v (x/2)$	174 (6+6)
15	$\sin \sqrt{x} J_v (\sqrt{x})$	175 (4)
16	$\cos \sqrt{x} J_v (\sqrt{x})$	175 (4)
17	$\sin \sqrt{x} Y_v (\sqrt{x})$	176 (2)
18	$\cos \sqrt{x} Y_v (\sqrt{x})$	176 (2)
19	$[J_v (\sqrt{x})]^2$	176 (6)
20—22	$J_v (\sqrt{x}) J_\mu (\sqrt{x}), \mu = v \pm 1, -v, \mu$	176(6+6+4)
23—27	$J_v (\sqrt{x}) Y_\mu (\sqrt{x}), \mu = v, v-1, v-2, -v, \mu$	178 (6+6+4+4+ +2)
28—31	$Y_v (\sqrt{x}) Y_\mu (\sqrt{x}), \mu = v, -v, 1/2-v, \mu$	180 (4+4+4+2)
32	$H_v^{(1)} (\sqrt{x}) H_v^{(2)} (\sqrt{x})$	182 (6)
33	$J_v (2 \sqrt{2} x^{1/4}) K_v (2 \sqrt{2} x^{1/4})$	182 (6)
34	$Y_v (2 \sqrt{2} x^{1/4}) K_v (2 \sqrt{2} x^{1/4})$	183 (4)
35, 36	$I_v (\sqrt{x}) K_\mu (\sqrt{x}), \mu = v, \mu$	183 (6+4)
37—39	$K_v (\sqrt{x}) K_\mu (\sqrt{x}), \mu = v, v+1, \mu$	184 (6+6+4)

1	2	3
40—42	$J_\nu(\sqrt{x}) J_\mu(\sqrt{x}) \mp J_{-\nu}(\sqrt{x}) J_{-\mu}(\sqrt{x}), \quad \mu = \nu, \mu$	185 (4+4+4)
43, 44	$J_\nu(\sqrt{x}) Y_\mu(\sqrt{x}) \mp J_\mu(\sqrt{x}) Y_\nu(\sqrt{x})$	187 (4+4)
45—48	$J_\nu(\sqrt{x}) J_\mu(\sqrt{x}) \cdot Y_\nu(\sqrt{x}) Y_\mu(\sqrt{x}), \quad \mu = \nu, -\nu, \mu$	188 (4+4+2+2)
49	$I_\nu(\sqrt{x}) I_\mu(\sqrt{x}) - I_{-\nu}(\sqrt{x}) I_{-\mu}(\sqrt{x}), \quad \mu = \nu, \mu$	189 (4)
50, 51	$K_\nu(2\sqrt{2} x^{1/4}) [J_\nu(2\sqrt{2} x^{1/4}) \mp J_{-\nu}(2\sqrt{2} x^{1/4})]$	190 (6+6)
52	$K_\nu(2\sqrt{2} x^{1/4}) [\cos(\pi\nu/2) J_\nu(2\sqrt{2} x^{1/4}) -$ $-\sin(\pi\nu/2) Y_\nu(2\sqrt{2} x^{1/4})]$	190 (2)
53	$\frac{2}{\pi} K_0(4x^{1/4}) - Y_0(4x^{1/4})$	191 (4)
54—56	$K_\nu(\sqrt{x}) I_\mu(\sqrt{x}) \mp K_\mu(\sqrt{x}) I_\nu(\sqrt{x}), \quad \mu = -\nu, \mu$	191 (4+6+4)
57	$\ker_\nu^2(2\sqrt{2} x^{1/4}) + \ker_\nu^2(2\sqrt{2} x^{1/4})$	193 (4)
58	$J_\nu(2\sqrt{x}) - J_\nu(2\sqrt{x})$	193 (2)
59, 60	$J_\nu(2\sqrt{x}) \pm J_{-\nu}(2\sqrt{x})$	193 (4+4)
61, 62	$I_{\pm\nu}(2\sqrt{x}) - L_\nu(2\sqrt{x})$	194 (4+4)
63	$H_\nu(2\sqrt{x}) - Y_\nu(2\sqrt{x})$	195 (4)

10. Ортогональные многочлены

1, 2	$P_n(2x-1) H[\pm(1-x)]$	195 (6+6)
3	$P_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right) (1+x)^{-n-1}$	195 (3)
4, 5	$P_n(\sqrt{x}) H[\pm(1-x)]$	196 (8+8)
6, 7	$P_{2n}(\sqrt{1-x}) (1-x)^{-1/2}_{\pm}$	198 (6+6)
8, 9	$P_{2n+1}(\sqrt{1-x}) H[\pm(1-x)]$	199 (6+6)
10	$P_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right) (1+x)^{-(n+1)/2}$	200 (6)
11	$P_n\left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}}\right) H(1-x)$	200 (6)
12	$P_n\left(\frac{2+x}{2\sqrt{1+x}}\right) (1+x)^{-(n+1)/2}$	200 (6)
13	$P_n(\sqrt{1+x}) Q_n(\sqrt{1+x})$	201 (4)
14, 15	$T_n(2x-1) (1-x)^{-1/2}_{\pm}$	201 (6+6)
16	$T_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right) (1+x)^{-n}$	202 (3)
17	$T_n(8x^2-8x+1) (x-1)^{-1/2}_{\pm}$	203 (6)

1	2	3
18, 19	$T_n(\sqrt{x})(1-x)_{\pm}^{-1/2}$	203 (6+6)
20, 21	$T_{2n}(\sqrt{1-x})(1-x)_{\pm}^{-1/2}$	204 (6+6)
22, 23	$T_{2n+1}(\sqrt{1-x})H[\pm(1-x)]$	205 (6+6)
24	$T_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)(1+x)^{-n/2}$	206 (6)
25, 26	$U_n(2x-1)(1-x)_{\pm}^{1/2}$	206 (6+6)
27	$U_n\left(\frac{1-x}{1+x}\right)(1+x)^{-n-2}$	207 (6)
28	$U_n(8x^2-8x+1)(2x-1)(x-1)_{+}^{1/2}$	207 (6)
29	$U_n\left(\frac{1+x^2}{2x}\right)(1-x^2)_{+}$	208 (4)
30	$U_n\left(\frac{x^2+2x+2}{2(x+1)}\right)\frac{x+2}{(x+1)^{n+2}}$	208 (6)
31, 32	$U_n(\sqrt{x})(1-x)_{\pm}^{1/2}$	209 (6+6)
33, 34	$U_{2n}(\sqrt{1-x})(1-x)_{\pm}^{-1/2}$	209 (6+6)
35, 36	$U_{2n+1}(\sqrt{1-x})H[\pm(1-x)]$	210 (6+6)
37	$U_n\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)(1+x)^{-1-n/2}$	211 (6)
38	$U_n\left(\frac{2+x}{2\sqrt{1+x}}\right)(1+x)^{-1-n/2}$	212 (6)
39	$H_n(\sqrt{x})e^{-x}$	212 (10)
40	$L_n^{\alpha}(x)e^{-x}$	213 (8)
41, 42	$C_n^{\lambda}(2x-1)(1-x)_{\pm}^{\lambda-1/2}$	213 (6+6)
43	$C_n^{\lambda}(2x+1)(1+x)^{\lambda-1/2}$	214 (6)
44	$C_n^{\lambda}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)(1+x)^{-n-2\lambda}$	215 (3)
45	$C_n^{\lambda}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)(1-x)_{+}^{-n-2\lambda}$	216 (6)
46	$C_n^{\lambda}\left(\frac{1+x}{ 1-x }\right) 1-x ^{-n-2\lambda}$	216 (3)
47, 48	$C_n^{\lambda}(\sqrt{x})(1-x)_{\pm}^{\lambda-1/2}$	217 (6+6)
49, 50	$C_{2n}^{\lambda}(\sqrt{1-x})(1-x)_{\pm}^{-1/2}$	218 (6+6)
51, 52	$C_{2n+1}^{\lambda}(\sqrt{1-x})H[\pm(1-x)]$	219 (6+6)
53	$C_n^{\lambda}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right)(1-x)_{+}^{-\lambda-n/2}$	220 (6)

1	2	3
54	$C_n^\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) (1+x)^{-\lambda-n/2}$	221 (6)
55	$C_n^\lambda \left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}} \right) (1-x)_+^{2\lambda-1}$	221 (6)
56	$C_n^\lambda \left(\frac{2-x}{2\sqrt{1-x}} \right) (1-x)_+^{-\lambda-n/2}$	222 (6)
57	$C_n^\lambda \left(\frac{2+x}{2\sqrt{1+x}} \right) (1+x)^{-\lambda-n/2}$	222 (6)
58, 59	$P_n^{(\alpha, \beta)} (2x-1) (1-x)_\pm^\alpha$	223 (6+6)
60	$P_n^{(\alpha, \beta)} (2x+1) (1+x)^\beta$	224 (6)
61	$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{1-x}{1+x} \right) (1+x)^{-n-\alpha-\beta-1}$	225 (3)
62	$P_n^{(\alpha, \beta)} \left(\frac{1+x}{1-x} \right) (1-x)_+^{-n-\alpha-\beta-1}$	225 (6)

11. Функции Лежандра

1, 2	$P_v^\mu (2x-1) (1-x)_\pm^{-\mu/2}$	226 (6+6)
3—6	$P_v^\mu [\pm (2x-1)] 1-x ^{\pm\mu/2}$	227 (6+4+6+6)
7	$P_v^\mu \left(\frac{1-x}{1+x} \right) (1+x)^v$	230 (6)
8	$P_v^\mu \left(\frac{1+x}{ 1-x } \right) 1-x ^v$	231 (3)
9—12	$P_{-1/4}^\mu \left(\pm \frac{1-6x+x^2}{(1+x)^2} \right) \frac{ 1-x ^{\pm\mu}}{\sqrt{1+x}}$	231 (3+3+3+3)
13, 14	$P_v^\mu (\sqrt{x}) (1-x)_\pm^{-\mu/2}$	234 (6+6)
15, 16	$P_v^\mu (\sqrt{x}) 1-x ^{\pm\mu/2}$	234 (6+4)
17	$P_v^\mu (\sqrt{1+x})$	236 (6)
18	$P_v^\mu (\sqrt{1+x}) (1+x)^{-1/2}$	236 (6)
19	$P_v^\mu \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} \right) (1+x)^{v/2}$	237 (6)
20	$P_v^\mu \left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}} \right) (1-x)_+^{-\mu}$	238 (6)
21, 22	$P_v^\mu \left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}} \right) 1-x ^{\pm\mu}$	238 (3+3)

1	2	3
23	$P_v^\mu \left(\frac{2+x}{2\sqrt{1+x}} \right) (1+x)^{v/2}$	240 (6)
24, 25	$P_v^{\pm(2v+1)} \left(\frac{1 \pm 6\sqrt{x} + x}{(1 \mp \sqrt{x})^2} \right) \frac{ 1 \pm \sqrt{x} }{ 1-x ^{-2v}}$	241 (1+1+1+1)
26	$P_v^{\pm(v+1/2)} \left(\frac{2\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} \right) \frac{ 1-x ^{v+1/2}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$	241 (1+1)
27	$[P_v^\mu(\sqrt{1-x}) + P_v^\mu(-\sqrt{1-x})] (1-x)_+^{-1/2}$	242 (4)
28	$[P_v^\mu(\sqrt{1-x})]^2$	242 (4)
29	$P_v^\mu(\sqrt{1+x}) P_{-v}^\mu(\sqrt{1+x}) (1+x)^{-1/2}$	243 (4)
30	$P_v^\mu(\sqrt{1+x}) P_{\mu-1/2}^{v+1/2}(\sqrt{1+x})$	243 (3)
31	$Q_v^\mu(1+2x) (1+x)^{-\mu/2}$	244 (6)
32	$e^{-\mu i \pi} (x-1)_+^{-\mu/2} Q_v^\mu(2x-1) + (1-x)_+^{-\mu/2} Q_v^\mu(2x-1)$	245 (2)
33	$Q_v^\mu \left(\frac{1+x}{1-x} \right) (1-x)_+^v$	245 (6)
34	$Q_v^\mu \left(\frac{1+x}{ 1-x } \right) 1-x ^v$	246 (2)
35	$Q_v^\mu \left(\frac{1+x}{ 1-x } \right) 1-x ^{-v-1}$	247 (3)
36	$Q_v^\mu \left(\frac{1-x}{1+x} \right) (1+x)^v$	247 (6)
37	$Q_v^\mu \left(\frac{1-x}{1+x} \right) (1+x)^{-v-1}$	248 (6)
38, 39	$Q_v^\mu \left(\pm \frac{1-6x+x^2}{(1+x)^2} \right) \frac{ 1-x ^\mu}{\sqrt{1+x}}, \quad v = -1/4, -3/4$	249 (2+2)
40	$(x-1)_+^{-\mu/2} Q_v^\mu(\sqrt{x}) e^{-\mu i \pi} + (1-x)_+^{-\mu/2} Q_v^\mu(\sqrt{x})$	251 (4)
41	$Q_v^\mu(\sqrt{1-x})$	252 (6)
42	$Q_v^\mu(\sqrt{1+x}) 1/\sqrt{1+x}$	253 (6)
43	$Q_v^\mu(1/\sqrt{1+x}) (1+x)^{v/2}$	253 (4)

1	2	3
44	$Q_v^\mu (1/\sqrt{1+x}) (1+x)^{-(v+1)/2}$	254 (4)
45	$Q_v^\mu (1/\sqrt{1-x}) (1-x)_{+}^{v/2}$	255 (6)
46	$Q_v^\mu \left(\frac{1+x}{2\sqrt{x}} \right) 1-x ^{-\mu}$	255 (3)
47	$Q_v^\mu \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \right) (1+x)^{v/2}$	256 (6)
48	$Q_v^\mu \left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} \right) (1+x)^{-(v+1)/2}$	257 (6)
49	$Q_v^\mu \left(\frac{2-x}{2\sqrt{1-x}} \right) (1-x)_{+}^{v/2}$	257 (6)
50, 51	$Q_v^{2v+1} \left(\mp \frac{1 \pm 6\sqrt{x} + x}{(1 \pm \sqrt{x})^2} \right) \frac{ 1-x ^{-2v-1}}{ 1 \pm \sqrt{x} }$	258 (1+1+1)
52, 53	$Q_{2\mu-1/2}^\mu \left(\frac{1+6\sqrt{x}+x}{4x^{1/4}(1+\sqrt{x})} \right) \frac{ 1-x ^{\mp 2\mu}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$	259 (1+1)
54	$[Q_v^\mu (\sqrt{1+x})]^2$	259 (4)
55	$Q_v^\mu (\sqrt{1+x}) Q_v^{\mu+1} (\sqrt{1+x}) (1+x)^{-1/2}$	259 (4)
56	$Q_v^\mu (\sqrt{1+x}) Q_{\mu-1/2}^{v+1/2} (\sqrt{1+1/x})$	260 (2)
57	$Q_v^\mu (\sqrt{1+x}) P_v^{-\mu} (\sqrt{1+x})$	260 (4)
58	$Q_v^\mu (\sqrt{1+x}) P_{-\mu-1/2}^{-v-1/2} (\sqrt{1+1/x})$	261 (4)
59	$Q_v^\mu (\sqrt{1+x}) P_{\mu+1/2}^{-v-1/2} (\sqrt{1+1/x}) (1+x)^{-1/2}$	261 (4)

12. Функции Уинтекера, гипергеометрические функции

1	${}_1F_1(a; c; -x)$	262 (6)
2	${}_1F_1(a; c; x) e^{-x}$	263 (6)
3	$\Psi(a, c; x)$	263 (6)
4	$\Psi(a, c; x) e^{-x}$	264 (6)

1	2	3
5	$M_{\kappa, \mu}(x) e^{-x/2}$	264 (6)
6, 7	$W_{\kappa, \mu}(x) e^{\mp x/2}$	264 (6+6)
8	$W_{\kappa, \mu}(2\sqrt{x}) M_{-\kappa, \mu}(2\sqrt{x})$	265 (4)
9	$W_{\kappa, \mu}(2\sqrt{x}) W_{-\kappa, \mu}(2\sqrt{x})$	266 (4)
10	${}_1F_2(a; c, \gamma; -x)$	266 (6)
11, 12	$F(a, b; c; 1-x) (1-x)_{\pm}^{c-1}$	267 (6+6)
13, 14	$F(-n, b; c; x) (1-x)_{\pm}^{b-c-n}$	268 (6+6)
15	$F(a, c+n; c; x) H(1-x)$	269 (6)
16	$F\left(a, c+n; c; \frac{x}{x-1}\right) (1-x)_{+}^{-c-n}$	270 (6)
17, 18	$F\left(-n, b; c; \frac{x}{x-1}\right) (1-x)_{\pm}^{-b}$	270 (6+6)
19	$F(a, b; c; -x)$	271 (6)
20	$F(a, b; c; -x) (1+x)^{a+b-c}$	272 (6)
21	$F\left(a, b; c; \frac{x}{x+1}\right) (1+x)^{-a}$	273 (6)
22	$F(a, b; c; 1-x)$	273 (6)
23	$F(a, b; c; x) H(1-x) + x^a \Gamma\left[\begin{matrix} c, 1-b \\ c-a, 1+a-b \end{matrix}\right] \times$ $\times F\left(a, 1+a-c; 1+a-b; \frac{1}{x}\right) H(x-1)$	274 (4)
24	$F\left(a, a+\frac{1}{2}; c; \frac{4x}{(1+x)^2}\right) (1+x)^{-2a}$	275 (3)
25	$F\left(a, a+\frac{1}{2}; c; \frac{4x}{(1+x)^2}\right) \frac{ 1-x ^{4a-2c+1}}{(1+x)^{2a}}$	275 (3)
26	$F\left(a, b; a+b+\frac{1}{2}; -\frac{4x}{(1-x)^2}\right) 1-x ^{-2a}$	276 (3)
27	$F\left(a, b; a+b-\frac{1}{2}; -\frac{4x}{(1-x)^2}\right) 1-x ^{-2a} (1+x)$	276 (3)

1	2	3
28	$F\left(a, b; 2b; \frac{\pm 4\sqrt{x}}{(1 \pm \sqrt{x})^2}\right) 1 \pm \sqrt{x} ^{-2a}$	277 (3)
29	$F\left(a, b; 2b; \frac{\pm 4\sqrt{x}}{(1 \pm \sqrt{x})^2}\right) \frac{ 1 \pm \sqrt{x} ^{2a}}{ 1-x ^{2b}}$	278 (3)
30	$F_3(a, a', b, b', c, 1-x, 1-x^{-1}) (1-x)_{+}^{c-1}$	278 (4)
31	$J_{\nu}^{\mu}(x)$	279 (4)
32	$H_{\nu}^{\mu}(2\sqrt{x})$	279 (2)
33	$J_{\nu}^{\mu}, \lambda(2\sqrt{x})$	279 (4)
34	$E_p(-x; \mu)$	280 (4)
35	${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q, -x), \quad q = p, p+1$	280 (2)
36	$E(p; a_r; q; b_s; x)$	281 (2)
37	$G_{pq}^{mn}\left(x \begin{vmatrix} a_r \\ b_s \end{vmatrix}\right)$	282 (1)
38	$\Sigma_A(x), \Sigma_B(1/x)$ (теорема Слейтер)	282

ЛИТЕРАТУРА

1. Акопян С. А. Интегральные преобразования с ядрами, являющимися обобщенными гипергеометрическими функциями и обобщенными функциями типа Вольтерра. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. н., 1962, 15, № 1, 13—36.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М., «Наука», т. 1, 1965; т. 2, 1966; т. 3, 1967.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Таблицы интегральных преобразований. М., «Наука», т. 1, 1969; т. 2, 1970.
4. Бицадзе А. В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. Изд. 2-е. М., «Наука», 1972.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Изд. 3-е. М., «Наука», 1977.
6. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. Изд. 2-е. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 5-е. М., «Наука», 1971.
8. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., «Наука», 1966.
9. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. Изд. 2-е. М., «Наука», 1974.
10. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.
11. Диткин В. А., Прудников А. П. Интегральные преобразования. В кн.: «Итоги науки. Математический анализ. 1966». М., ВИНТИ АН СССР, 1967, 7—82.
12. Евграфов М. А. Аналитические функции. М., «Наука», 1965.
13. Кампе де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т. Функции математической физики. М., Физматгиз, 1963.
14. Князев П. Н. Интегральные преобразования. Минск, «Высшая школа», 1969.
15. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М., «Наука», 1968.
16. Кратцер А., Франц В. Трансцендентные функции. М., ИЛ, 1963.
17. Кузнецов Д. С. Специальные функции. Изд. 2-е. М., «Высшая школа», 1965.
18. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 3-е. М., «Наука», 1965.
19. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Изд. 2-е. М.—Л., Физматгиз, 1963.
20. Лебедев Н. Н. О разложении произвольной функции в интеграл по квадратам функций Макдональда с минным знаком. Сибирск. матем. ж., 1962, 3, № 2, 213—222.
21. Маричев О. И. Некоторые интегральные уравнения типа свертки Меллина, содержащие в ядрах специальные функции. ВИНТИ, № 1640-76 Деп., 1976.
22. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Изд. 2-е. Т. 1—2. М., «Наука», 1967—1968.
23. Олевский М. Н. О представлении произвольной функции в виде интеграла с ядром, являющимся гипергеометрической функцией. ДАН СССР, 1949, 69, № 1, 11—14.
24. Пыхтеев Г. Н., Мелешко И. Н. Полилогарифмы, их свойства и методы вычисления. Минск, Изд-во БГУ, 1976.
25. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 1—4. М., «Наука», 1974.
26. Тричмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.—Л., Гостехиздат, 1948.
27. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М., ИЛ, 1957.
28. Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. Изд. 2-е. М., Физматгиз, т. 1, 1962; т. 2, 1963.

29. **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 1—3. М., «Наука», 1966.
30. **Фукс Б. А., Шабат Б. В.** Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. Изд. 3-е. М., «Наука», 1964.
31. **Abramowitz M., Stegun I. A.** (eds.). Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables. Washington, GPO, 1971.
32. **Agarwal R. P.** Sur une généralisation de la transformation de Hankel. Ann. soc. sci. Bruxelles, 1950, ser. 1, **64**, 164—168.
33. **Anastassiadis J.** Definition des fonctions eulériennes par des équations fonctionnelles. Paris, Gauthier-Villars, 1964.
34. **Boersma J.** On a function, which is a special case of Meijer's G -functions. Compositio math., 1961, **15**, N 1, 34—63.
35. **Dahiya R. S.** On generalized Hankel transform. Bull. math. soc. sci. math. et phys. RPR, 1964, **8**, N 1—2, 23—27.
36. **Delerue P.** Sur le calcul symbolique à n variables et les fonctions hyperbesséliennes. Deuxième partie. Ann. soc. sci. Bruxelles, 1953, ser. 1, **67**, N 3, 229—274.
37. **Dinghas A.** Zur definition der gammafunktion durch die Eulersche funktionalgleichung. An. stiint. univ. «Al. I. Cuza». Iasi. Sec. I-A, Mat., 1973, **19**, N 1, 31—35.
38. **Dingle R. B.** The Fermi—Dirac integrals $\mathcal{F}_p(\eta) = (p!)^{-1} \int_0^\infty \varepsilon^p (e^{\varepsilon - \eta} + 1)^{-1} d\varepsilon$. Appl. Sci. Res., 1957, B 6, N 4, 225—239.
39. **Dingle R. B.** Asymptotic Expansions: Their Derivation and Interpretation. New York—London, Acad. Press, 1973.
40. **Eastham M. S. P.** On polylogarithms. Proc. Glasgow Math. Assoc., 1964, **6**, N 4, 169—171.
41. **Fornberg B., Kölbig K. S.** Complex Zeros of the Jonquièreor Polylogarithm Function. Math. Comput., 1975, **29**, N 130, 582—599.
42. **Fox C.** The G and H functions as symmetrical Fourier kernels. Trans. Amer. Math. Soc., 1961, **98**, N 3, 395—429.
43. **Hardy G. H.** Some formulae in the theory of Bessel function. Proc. London Math. Soc., 1925, ser. 2, **23**, LXI—LXIII.
44. **Humbert P., Agarwal R. P.** Sur la fonction de Mittag—Lefiler et quelquesunes de ses généralisations. Bull. sci. math., 1953, **77**, N 10, 180—185.
45. **Kapoor V. K.** On a generalized Stieltjes transform. Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. and Phys. Sci., 1968, **64**, p. 2, 407—412.
46. **Kapoor V. K., Masood S.** On a generalized L — H transform. Proc. Cambridge Philos. Soc. Math. and Phys. Sci., 1968, **64**, p. 2, 399—406.
47. **Kesarwani R. N.** On an integral transform involving G -functions. SIAM J. Appl. Math., 1971, **20**, N 1, 93—98.
48. **Kurepa Duro.** Left factorial function in complex domain. Math. Balkan, 1973, **3**, 297—307.
49. **Lewin L.** Dilogarithms and Associated Functions. London, Macdonald, 1958.
50. **Love E. R.** A hypergeometric integral equation. Lect. Notes Math., 1975, **457**, 272—288.
51. **Luke Y. L.** The Special Functions and Their Approximations. Vol. 1, New York—London, Acad. Press, 1969.
52. **Magnus W., Oberhettinger F., Soni R. P.** Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics. 3 ed. New York—Berlin, Springer—Verlag, 1966.
53. **Mathai A. M., Saxena R. K.** Generalized Hypergeometric Functions with Applications in Statistics and Physical Sciences. Lect. Notes Math., 1973, **348**.
54. **Narain R.** The G -functions as unsymmetrical Fourier kernels. I. Proc. Amer. Math. Soc., 1962, **13**, N 6, 950—959.
55. **Narain R.** The G -functions as unsymmetrical Fourier kernels. II. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, N 1, 18—28.
56. **Narain R.** The G -functions as unsymmetrical Fourier kernels. III. Proc. Amer. Math. Soc., 1963, **14**, N 2, 271—277.
57. **Oberhettinger F.** Tabellen zur Fourier Transformation. Berlin, Springer—Verlag, 1957.
58. **Oberhettinger F.** Tables of Bessel Transforms. Berlin—Heidelberg—New York, Springer—Verlag, 1972.
59. **Oberhettinger F., Badii Larry.** Tables of Laplace Transforms. Berlin—Heidelberg—New York, Springer—Verlag, 1973.
60. **Oberhettinger F.** Tables of Mellin Transforms. New York—Heidelberg—Berlin, Springer—Verlag, 1974.
61. **Pathak R. S.** An inversion formula for a generalization of Lommel and Maitland transforms. J. Scient. Res. Banaras Hindu Univ., 1966—1967, **17**, N 1, 65—69.
62. **Pathak R. S.** Certain convergence theorems and asymptotic properties of a generaliza-

- tion of Lommel and Maitland transforms. *Proc. Nat. Acad. Sci. India*, 1966, **A36**, N 1, 81—86.
63. **Pickard W. F.** On polylogarithms. *Publs Math.*, 1968, **15**, N 1—4, 33—43.
 64. **Reed I. S.** The Mellin type double integral. *Duke Math. J.*, 1944, **11**, 565—572.
 65. **Ruscheweyh S.** Einige neue Darstellungen des Di- und Trilogarithmus. *Math. Nachr.*, 1973, **57**, N 1—6, 237—244.
 66. **Singh S. P.** On the generalised Hankel transforms. *Proc. Nat. Acad. Sci. India*, 1963, **A33**, N 3, 327—332.
 67. **Slater Luce Joan.** Generalized Hypergeometric Functions. London—New York, Cambridge Univ. Press, 1966.
 68. **Slavić D. V.** On the left factorial function of the complex argument. *Math. Balkan*, 1973, **3**, 472—477.
 69. **Srivastava H. M.** On reciprocal functions. *Indian J. Pure and Appl. Math.*, 1972, **3**, N 5, 704—713.
 70. **Stanković B.** On the function of E. M. Wright. *Publs Inst. Math. Beograd*, 1970, **10**, N 24, 113—124.
 71. **Swaroop R.** On a generalization of the Laplace and the Stieltjes transformations. *Ann. soc. sci. Bruxelles*, 1964, ser. 1, **78**, N 1—2, 105—112.
 72. **Verma T. N.** On a generalized Weber transform. *J. Scient. Res. Banaras Hindu Univ.*, 1966—1967, **17**, N 1, 23—39.
 73. **Wimp Jet.** A class of integral transforms. *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 1964, **14**, N 1, 33—40.
 74. **Wright E. M.** The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. *J. London Math. Soc.*, 1935, **10**, 4, 286—293.
 75. **Wright E. M.** The asymptotic expansion of the generalized hypergeometric function. *Proc. London Math. Soc.*, 1940, **46**, 5—6, 389—408.

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора	3
Предисловие	5

ОСНОВЫ ТЕОРИИ

§ 1. Основная теорема. Простейшие примеры	9
§ 2. Вспомогательные сведения	14
1. Аналитические функции (14). 2. Преобразование Фурье (28). 3. Преобразование Меллина (31)	
§ 3. Гамма-функция и ее свойства	35
§ 4. Функции гипергеометрического типа и интегралы Меллина—Бернса	43
1. Обобщенные гипергеометрические функции (43). 2. Теорема Слейтер (47). 3. Теорема о представлении интегралов Меллина—Бернса через функции гипергеометрического типа $\Sigma_A(z)$ и $\Sigma_B(1/z)$. Асимптотика $\Sigma_A(z)$ (55)	
§ 5. Гипергеометрическая функция Гаусса	61
1. Основные свойства и представления (61). 2. Дифференциальное уравнение (68). 3. Частные соотношения и случаи функции Гаусса (70)	
§ 6. Вырожденная гипергеометрическая функция. Функции Бесселя и функции ${}_0F_n$	73
1. Вырожденная гипергеометрическая функция (73). 2. Функции Бесселя (76). 3. Функции ${}_0F_n(c_1, c_2, \dots, c_n; z)$ (81)	
§ 7. Характерные примеры вычисления интегралов	83
1. Логарифмические случаи (83). 2. Полилогарифмы произвольного порядка (90). 3. Интегралы от функций, содержащих рациональные степени аргумента (93). 4. Использование настоящего метода в сочетании с другими (97). 5. Интегралы Меллина—Бернса общего вида (99). 6. Функция типа Миттаг—Леффлера (101). 7. Интегралы от функций, допускающих экспоненциальный рост (103). 8. Использование кратных преобразований Меллина (105). 9. Левый факториал Курепы (108)	
§ 8. Общие интегральные преобразования и формулы их обращения	109
1. Обобщение преобразования Ганкеля (109). 2. Гипергеометрическое преобразование Гаусса (113). 3. Преобразование типа свертки с G -функцией Мейера в ядре (116). 4. Несверточное преобразование с G -функцией Мейера в ядре (118)	

ТАБЛИЦЫ ФОРМУЛ

§ 9. Строение базовой таблицы преобразований Меллина и правила пользования ею	123
§ 10. Базовая таблица преобразований Меллина (таблица преобразований Меллина тех функций, образы которых являются произведениями отношений гамма-функций на постоянные)	129
1. Общие формулы (129). 2. Алгебраические функции и степени с произвольным показателем (130). 3. Показательная и тригонометрические функции (136). 4. Логарифмические функции, полилогарифмы (140). 5. Гиперболические и обратные гиперболические функции (145). 6. Обратные тригонометрические функции (148). 7. Полные эллиптические интегралы (153). 8. Интегральные экспоненты, синус и косинус, интегралы вероятности и Френеля, неполные гамма-функции и функции параболического цилиндра (161). 9. Функции Бесселя и родственные им функции (170). 10. Ортогональные многочлены (195). 11. Функции Лежандра (226). 12. Функции Уиттекера, гипергеометрические функции (262)	
§ 11. Перечень обозначений специальных функций	283
1. Часто встречающиеся символы (283). 2. Специальные функции (285).	
§ 12. Указатель ключевых формул базовой таблицы	292
Литература	306

ОЛЕГ ИГОРЕВИЧ МАРИЧЕВ
МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ
ОТ СПЕЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ
(теории и таблицы формул)

Редактор Е. Г. Волкинд
Обложка А. А. Беспалого
Художественный редактор В. В. Савченко
Технический редактор И. В. Волоханович
Корректор В. П. Сарванова

ИБ № 508

Сдано в набор 08.02.78. Подписано в печать
13.09.78. АТ 11618. Формат $70 \times 100^{1/16}$. Бум. тип.
№ 1. Гарнитура литературная. Печать высокая.
Печ. л. 19,5. Усл. печ. л. 25,15. Уч.-изд. 18,8. Ти-
раж 5300 экз. Зак. № 216. Цена 2 р. 10 к.

Издательство «Наука и техника». Минск, Ленин-
ский проспект, 68. Типография им. Франциска
(Георгия) Скорины издательства «Наука и техни-
ка» АН БССР и Государственного комитета
БССР по делам издательств, полиграфии и книж-
ной торговли. Минск, Ленинский проспект, 68.