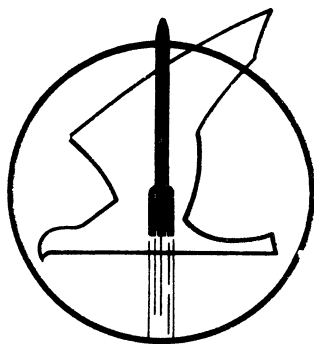


ОСНОВЫ
ТЕОРИИ
ПОЛЕТА
КОСМИЧЕСКИХ
АППАРАТОВ



ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОЛЕТА И ПРОЕКТИРОВАНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Под общей редакцией
д-ра физ.-мат. наук, проф. *Г. С. НАРИМАНОВА*

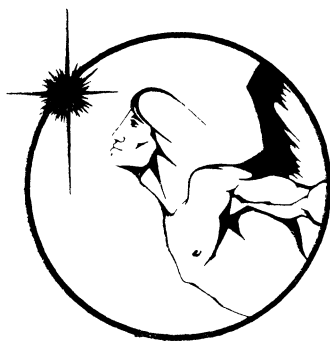


МАШИНОСТРОЕНИЕ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОЛЕТА КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Под редакцией

д-ра физ.-мат. наук, проф. *Г. С. НАРИМАНОВА*
и д-ра техн. наук, проф. *М. К. ТИХОНРАВОВА*



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«МАШИНОСТРОЕНИЕ»
Москва 1972

Основы теории полета космических аппаратов. Под ред. д-ра физ.-мат. наук Г. С. Нариманова и д-ра техн. наук М. К. Тихонравова. М., «Машиностроение», 1972, стр. 608 (Серия «Основы теории полета и проектирования космических аппаратов»).

В книге приведены основные сведения о космическом пространстве и планетах Солнечной системы, методы предварительного выбора траекторий полета космических аппаратов (КА), приближенные и точные методы расчета траекторий КА, методы расчета траекторий сближения двух КА, выполнения маневра и коррекции орбит. Перечислены основные системы координат. Рассмотрены задачи определения пространственно-временных характеристик видимости КА с пунктов наблюдения. Освещены вопросы спуска КА с орбиты на Землю, изложены элементы теории аэродинамического нагрева.

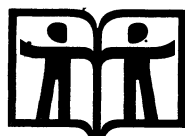
Книга предназначена для научных работников и инженеров — специалистов в области космической техники. Табл. 44, иллюстр. 335, библи. назв. 293.

Авторы

В. С. Авдусевский, Б. М. Антонов, Н. А. Анфимов, И. К. Бажинов, В. А. Бакланов, В. В. Белецкий, А. И. Беляков, В. С. Берсенов, В. С. Васильев, И. П. Вечканов, В. П. Ганов, И. Б. Голуб, О. В. Гурко, А. А. Дашков, Я. В. Дубровинский, В. А. Егоров, Б. Л. Жулин, Н. М. Иванов, В. В. Ивашкин, А. В. Кащиц, Р. М. Копяткевич, Б. В. Кугаенко, В. Н. Кубасов, Б. И. Лохин, В. А. Мащенко, А. И. Назаренко, Б. В. Обысов, И. Ф. Петрович, А. К. Платонов, Г. А. Полтавец, Ю. В. Полежаев, А. В. Птушенко, Д. П. Редько, В. Ф. Сидоров, В. Г. Соболевский, Б. И. Столповский, В. Г. Хорошавцев, Д. М. Цветков, А. В. Цепелев, Г. И. Чабров, А. А. Чинарев, Л. В. Шевченко, Б. Ф. Яник, В. Д. Ястребов, И. М. Яцунский

Научные редакторы

О. В. Гурко, А. А. Дашков, И. Ф. Петрович, В. Ф. Сидоров, Г. И. Чабров, И. М. Яцунский



МЕЖДУНАРОДНЫЙ
ГОД КНИГИ
1972

ПРЕДИСЛОВИЕ

Запуск первого советского спутника Земли 4 октября 1957 г. открыл в истории человечества космическую эру, начало которой характеризуется все нарастающими темпами проникновения человека в космос, необычайно обильным потоком новых сведений об околоземном и межпланетном космическом пространстве.

Практика освоения космического пространства выдвинула целый комплекс сложных теоретических задач, в решении которых принимают участие широкие круги специалистов из различных областей науки и техники.

В связи с бурным развитием космической техники, значительностью достигнутых с ее помощью результатов и грандиозностью выдвигаемых задач по дальнейшему освоению космического пространства назрела настоятельная необходимость систематизировать и обобщить результаты теоретических и экспериментальных исследований по теории космического полета и проектированию космических аппаратов (КА).

Издание «Основы теории полета космических аппаратов» представляет собой первую книгу из серии работ по теории полета, проектированию и применению космических летательных аппаратов.

В книге изложены основы теории полета искусственных спутников Земли, лунных и межпланетных космических аппаратов. В отличие от изданий по космонавтике, вышедших ранее в нашей стране, настоящая книга содержит значительно более обширные материалы по практическим задачам полета космических аппаратов, методам решения этих задач, подготовке необходимых для расчета исходных данных.

Точные методы анализа динамики космического полета дополнены различными приближенными методиками. Табличные данные и графические материалы иллюстрируют результаты конкретных расчетов.

Книга включает 19 глав.

В гл. I описывается строение Солнечной системы, приводятся сведения о Земле, планетах, спутниках планет и другие данные о Вселенной, используемые в теоретических расчетах.

Гл. II содержит описание основных систем координат, наиболее часто применяемых на практике; в ней же даны формулы перехода от одной системы к другой.

В гл. III и IV излагаются основы теории полета космического аппарата — уравнения невозмущенного (кеплеровского) движения и возмущенного движения под действием основных возмущающих сил, возникающих в результате влияния неравномерного распределения масс притягивающего тела, других небесных тел, атмосферы и давления солнечных лучей.

В гл. V, VI и VII приведены методики выбора межпланетных траекторий, траекторий достижения Луны и возвращения на Землю. Излагаются методы оптимизации орбит и приводится оценка влияния различного рода ошибок на полет космического аппарата.

Гл. VIII включает вопросы выбора орбит и времени старта искусственных спутников Земли с учетом ряда ограничений, обусловленных особенностями решаемых задач.

В гл. IX даны математические методы выбора оптимальных программ по углу тангажа и расхода топлива при выводе космического аппарата на орбиту с помощью ракет-носителей.

В гл. X, XI, XII помещены методики определения орбит по результатам измерений, теория прогнозирования движения и методы оценки точности орбиты летящего космического аппарата.

Гл. XIII посвящена вопросам движения космических аппаратов под действием двигателей малой тяги.

В гл. XIV и XV приводятся методики расчета коррекции траекторий и маневрирования межпланетных космических аппаратов и искусственных спутников Земли, излагаются вопросы оптимизации энергетических затрат с учетом обеспечения заданной точности полета.

В гл. XVI описаны методы сближения для стыковки космических аппаратов или отдельных блоков на орбите.

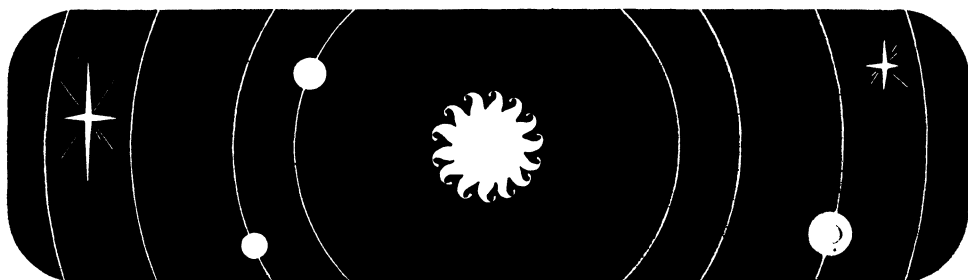
Гл. XVII посвящена анализу траекторий спуска и вопросам управления при посадке на поверхность Земли. Рассматриваются как баллистический, так и управляемый виды спуска.

В гл. XVIII освещены основы теории аэродинамического нагрева защитного материала и рассмотрены физические явления, возникающие при прохождении космическим аппаратом плотных слоев атмосферы. Эти сведения учитываются при оптимизации траекторий.

В гл. XIX помещены методы расчета трасс орбит в проекции на земную поверхность и описаны условия прохождения космического аппарата через зону видимости измерительного пункта.

Единицы физических величин (наименования и обозначения) приведены в книге в соответствии с проектом ГОСТа «Единицы физических величин» (см. приложение), рекомендованным Комитетом стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР для практического применения. В основу проекта этого ГОСТа положена Международная система единиц (СИ).

Условные обозначения и рекомендуемая литература даны отдельно для каждой главы.



ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВСЕЛЕННОЙ И СОЛНЕЧНОЙ СИСТЕМЕ

1.1. АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

1.1.1. Система астрономических постоянных 1964 г.

Система астрономических постоянных 1964 г. принята на XII Генеральной ассамблее Международного астрономического союза (МАС) взамен системы 1896 г. Она предназначена для астрономических исследований (вычисления эфемерид, редукции наблюдений) в течение многих десятилетий. В основу системы 1964 г. положен принцип строгого согласования постоянных с теоретическими зависимостями и данными наблюдений.

При решении конкретных задач динамики космического полета важна не только согласованность, но прежде всего высокая точность используемых постоянных и координат соответствующих небесных тел. Поэтому в разд. 1.1, кроме астрономических постоянных системы 1964 г. (табл. 1.1), приведены наиболее достоверные уточнения некоторых из них, полученные в последние годы.

1.1.2. Уточненные значения постоянных

$$A = \text{а. е.} = 149\,597\,900 \pm 130 \text{ км,}$$

$$GE = 398\,600,3 \cdot 10^9 \text{ м}^3/\text{с}^2,$$

$$GS = 132\,712,517 \cdot 10^{15} \text{ м}^3/\text{с}^2,$$

$$\mu^{-1} = 81,3004 \pm 0,0007,$$

$$\frac{S}{E} = 333\,430.$$

Уточненные отношения массы Солнца к массе планеты

Меркурий	6 110 000 ± 40 000	Сатурн	3498,6 ± 0,5
Венера	408 522,6 ± 0,6	Уран	22 930 ± 6
Земля + Луна	328915 ± 4	Нептун	19 070 ± 21
Марс	3 098 600 ± 600	Плутон	400 000 ± 40 000
Юпитер	1047,387 ± 0,004		

Массы Венеры и Марса определены по результатам траекторных измерений американских космических аппаратов «Маринер-5» и «Маринер-4» соответственно [4], [5], масса Юпитера — по данным наблюдений малой планеты 65 Cybele [6].

1.1.3. Единицы расстояний

Астрономическая единица (а. е.) — среднее расстояние от Земли до Солнца:

$$1 \text{ а. е.} = 149\,597\,900 \text{ км.}$$

Парсек (пс) — расстояние, соответствующее годичному параллаксу в 1". *Годичным параллаксом* называется угол, под которым виден средний радиус земной орбиты из точки, находящейся на перпендикуляре к плоскости орбиты, восстановленном из центра Солнца.

$$1 \text{ пс} = 206\,265 \text{ а. е.} = 30,8568 \cdot 10^{12} \text{ км.}$$

Световой год — расстояние, которое свет проходит за один год.

$$1 \text{ световой год} = 9,46053 \cdot 10^{12} \text{ км} = 63239,7 \text{ а. е.} = 0,306595 \text{ пс.}$$

Система астрономических постоянных 1964 г. Международного астрономического союза

№ по пор.	Название и размерность	Значение	Пределы, в которых заключено значение постоянной
<i>Определяющие постоянные</i>			
1	Число эфемеридных секунд в одном тропическом году (1900)	$s = 31\,556\,925,9747$	
2	Гауссова гравитационная постоянная, определяющая астрономическую единицу (а.е.), в (а.е.) ^{3/2} (сут) ⁻¹ (масса Солнца) ^{-1/2}	$k = 0,01720209895$	
<i>Основные постоянные</i>			
3	Мера длины (а.е.) в м	$A = 149\,600 \cdot 10^6$	$149\,597 \cdot 10^6 - 149\,601 \cdot 10^6$
4	Скорость света в м/с	$c = 299\,792,5 \cdot 10^3$	$299\,792 \cdot 10^3 - 299\,793 \cdot 10^3$
5	Экваториальный радиус Земли в м	$a_e = 6\,378\,160$	$6\,378\,080 - 6\,378\,240$
6	Динамический коэффициент формы Земли	$J_2 = 0,0010827$	$0,0010824 - 0,0010829$
7	Геоцентрическая гравитационная постоянная в м ³ /с ²	$GE = 398\,603 \cdot 10^9$	$398\,600 \cdot 10^9 - 398\,606 \cdot 10^9$
8	Отношение массы Луны к массе Земли	$\mu = 1 : 81,30$	$1:81,29 - 1:81,31$
9	Сидерическое среднее движение Луны (1900) в рад/с	$n_{\odot}^* = 2,66169949 \cdot 10^{-6}$	
10	Общая прецессия в долготе за тропическое столетие (1900)	$p = 5025,64''$	$5025,40'' - 5025,90''$
11	Наклон эклиптики (1900)	$\varepsilon = 23^{\circ}27'08,26''$	$23^{\circ}27'08,16'' - 23^{\circ}27'08,36''$
12	Постоянная нутации (1900)	$N = 9,210''$	$9,200'' - 9,210''$
<i>Вспомогательные постоянные и коэффициенты</i>			
	Гауссова постоянная, применяемая, когда за единицу времени принята 1 с	$k' = \frac{k}{86400} \approx 1,990983675 \cdot 10^{-7}$	—

	Число секунд дуги в одном радиане	$F_0=206264,806''$	—
	Коэффициент для постоянной аберрации	$F_1=1,000142$	—
	Коэффициент для среднего расстояния Луны	$F_2=0,999093142$	—
	Коэффициент для параллактического неравенства	$F_3=49853,2''$	—
<i>Производные постоянные</i>			
13	Параллакс Солнца	$F_0 \pi_{\odot} =$ $= F_0 \cdot \arcsin \frac{a}{A} = 8,79405''$	$8,79388'' - 8,79434''$
14	Световой промежуток для единичного расстояния (световое уравнение)	$\frac{A}{c} = \tau_A = 499,012^s$	$499,001^s - 499,016^s$
15	Постоянная аберрации	$F_0 F_1 k' \tau_A = \alpha = 20,4958''$	$20,4954 - 20,4960''$
16	Сжатие Земли	$f = 1:298,25 = 0,0033529$	$1 : 298,33 - 1 : 298,20$
17	Гелиоцентрическая гравитационная постоянная в $\text{м}^3/\text{с}^2$	$A^3 k'^2 = GS = 132718 \cdot 10^{15}$	$132\,710 \cdot 10^{15} - 132\,721 \cdot 10^{15}$
18	Отношение массы Солнца к массе Земли	$\frac{GS}{GE} = \frac{S}{E} = 332\,958$	$332\,935 - 332\,988$
19	Отношение массы Солнца к массе системы Земля+Луна	$\frac{S}{E} (1 + \mu)^{-1} = 328\,912$	$328\,890 - 328\,922$
20	Возмущенное среднее расстояние Луны в м	$a_{\odot} = F_2 \left[\frac{GE(1 + \mu)}{n_{\odot}^2} \right]^{1/3} = 384\,400 \cdot 10^3$	$384\,399 \cdot 10^3 - 384\,401 \cdot 10^3$
21	Постоянная синуса параллакса Луны	$F_0 \frac{a}{a_{\odot}} = F_0 \sin \pi_{\odot} = 3422,451''$	$3422,397 - 3422,502''$
22	Постоянная лунного неравенства	$F_0 \frac{\mu}{1 + \mu} \frac{a_{\odot}}{A} = L = 6,43987''$	$6,4390 - 6,4408''$

№ по пор.	Название и размерность	Значение	Пределы, в которых заключено значение постоянной
23	Постоянная параллактического неравенства	$F_3 \frac{1-\mu}{1+\mu} \frac{a_{\odot}}{A} = P_{\odot} = 124,986''$	124,984—124,989''
24	Отношения массы Солнца к массе планеты		
	Меркурий . . .	Сатурн . . .	3501,6
	Венера . . .	Уран . . .	22 869
	Земля + Луна . . .	Нептун . . .	19 314
	Марс . . .	Плутон . . .	360 000
	Юпитер . . .		1047,355

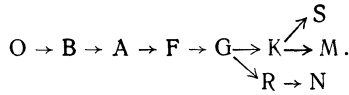
Пояснения к табл. 1.1

1. В таблице год «1900» относится или к фундаментальной эпохе эфемеридного времени, а именно 1900, январь 0, 12^н эфемеридного времени, или к 1900.0; значения постоянных пп. 20—23 относятся также к фундаментальной эпохе. Везде под термином «секунда» понимается «эфемеридная секунда» (принятая за единицу времени в системе СИ).
- 2 (к п.2). Значение гауссовой гравитационной постоянной k служит для определения а.е., если определены соответствующие единицы массы (масса Солнца) и времени (эфемеридные сутки).
- 3 (к п. 5). Термин «экваториальный радиус Земли» относится к экваториальному радиусу эллипсоида вращения, аппроксимирующего геонд.
- 4 (к п. 6). Термин «динамический коэффициент формы Земли» относится к коэффициенту второй гармоники в разложении внешнего гравитационного потенциала Земли.
- 5 (к п.15). С точностью до коэффициента F_1 постоянная аберрации равна отношению скорости некоторой фиктивной планеты пренебрежимо малой массы, движущейся по круговой орбите единичного радиуса, к скорости света. Коэффициент F_1 равен отношению средней скорости Земли к скорости фиктивной планеты.
- 6 (к п.16). Необходимые числовые значения: угловая скорость вращения Земли $\omega_3=0,000072921$ рад/с, относительная масса атмосферы $\mu_a=0,000001$.

- Зыряния для сжатия Земли и ускорения силы тяжести на экваторе с точностью до второго порядка имеют вид
- $$f = \frac{3}{2} J_2 + \frac{1}{2} m + \frac{9}{8} J_2^2 + \frac{15}{28} J_2 m - \frac{39}{56} m^2;$$
- $$g_e = \frac{GE}{a^2} \left(1 - \mu_a + \frac{3}{2} J_2 - m + \frac{27}{8} J_2^2 - \frac{6}{7} J_2 m + \frac{47}{56} m^2 \right),$$
- где $m=a^2\omega_3^2/g_e$ получается последовательными приближениями.
- 7 (к п.18—19). Производные значения масс Земли и системы Земля+Луна отличаются от общепринятых в настоящее время, но они не будут введены до тех пор, пока не будет пересмотрена вся система планетных масс в целом.
- 8 (к п. 20). Возмущенное среднее расстояние Луны равно большой полуоси вариационной орбиты Хилла.
- 9 (к п. 24). Система планетных масс принята в текущих эфемеридах, и значения обратных величин масс даны с учетом массы атмосфер и спутников. В планетной теории принятое отношение массы Земли к массе Луны равно 81,45 (тогда как в лунной теории 81,53) и отношение массы Солнца к массе одной только Земли равно 333 432.
- Более подробные пояснения приведены в работе [1].

1.2. ЗВЕЗДЫ

Согласно общепринятой гарвардской классификации, основанной на определении относительной интенсивности и вида спектральных линий (а не на распределении яркости в непрерывном спектре), звезды подразделяются на несколько *спектральных классов* (обозначаемых буквами), которые схематически можно расположить в порядке убывания температуры звезд следующим образом:



Наиболее горячие звезды относятся к классам О, В. В их спектре преобладают линии поглощения водорода и гелия. В спектре звезд классов А, F, G интенсивность линий поглощения водорода постепенно убывает, а металлов — возрастает.

К классам К и М относятся холодные звезды с интенсивными линиями поглощения металлов и полосами поглощения химических соединений. Звезды классов R и N характеризуются присутствием в их спектрах полос поглощения соединений углерода, а звезды класса S — полос поглощения окиси циркония.

Большинство звезд (до 99%) принадлежит к спектральным классам В; А, F, G К и М.

Интервалы между классами, в свою очередь, подразделяются на 10 частей, которые обозначаются цифрами от 0 до 9, например:

В0 — типичный спектр класса В;

В5 — спектр, средний между классами В0 и А0.

Дополнительные обозначения:

g — звезда-гигант;

d — звезда-карлик;

e — в спектре присутствуют эмиссионные линии;

c — линии в спектре особенно узки и резки;

p — особый спектр.

Буквы d, g и c ставятся впереди, а буквы e и p — после обычного обозначения спектра звезды, например: gG5, G2p.

Блеск звезды (т. е. освещенность, создаваемая лучами звезды) характеризуется *звездной величиной* (з.в.) m , определяемой по формуле

$$m = -2,5 \lg E + C,$$

где E — блеск звезды;

$C = -13,89$, если E измерять в люксах.

Звезда первой величины (обозначается 1^m) дает освещенность $1,11 \cdot 10^{-6}$ лк.

Интервалу в 5^m точно соответствует отношение блеска, равное 100, а интервалу в 1^m — отношение, равное $\sqrt[5]{100} = 2,5119$.

В зависимости от способа определения блеска применяются следующие системы звездных величин:

- *визуальные* (глаз);
- *фотографические* (фотографическая пластинка);
- *фотовизуальные* (ортохроматическая пластинка и желтый светофильтр);
- *фотоэлектрические* (фотоэлемент);
- *радиометрические* (термоэлемент).

Кроме того, употребляются *болометрические* звездные величины, получаемые в результате вычислений и характеризующие полное излучение звезды, достигающее до границы земной атмосферы, и *абсолютные*, т. е. звездные величины, которые имели бы звезды, если их наблюдать с расстояния, равного 10 пс.

Показателем цвета называется разность звездных величин «фотографическая минус визуальная». *Болометрической поправкой* называется разность «болометрическая минус визуальная (или фотовизуальная)».

Для составления звездных каталогов применяется экваториальная система координат. Средние квадратические ошибки положения опорных звезд, по данным фундаментального каталога FK3, содержащего 873 основных и 662 дополнительных звезды, расположенных по всему небу, достигают в экваториальной зоне $\pm (0,002^s \div 0,005^s)$ по прямому восхождению и $\pm (0,03'' \div 0,08'')$ по склонению соответственно для эпох 1900.0 и 1950.0 [8]. Ошибки в собственных движениях за столетие равны $\pm 0,010^s$ и $\pm 0,14''$.

Для большинства звезд координаты определены с меньшей точностью. Так, например, средняя квадратическая ошибка Иельских фотографических каталогов, содержащих 150 000 звезд, равна $\pm 0,15''$ [8].

Значительная часть звезд (до 50%) образует системы, состоящие из двух и большего числа компонентов, связанных силами тяготения.

К настоящему времени обнаружено и исследовано около 15 000 переменных звезд, видимый блеск которых подвержен колебаниям.

В табл. 1.2 приведены звездные величины, экваториальные координаты, спектраль-

Характеристики наиболее ярких звезд

Название		Звездная величина m		Спек- тральный класс	Парал- лакс	Экваториальные координаты		Годовое измене- ние		Собственное движение	
латинское	русское	визуаль- ная	фото- электри- ческая			α (1964.0)	δ (1964.0)	по α	по δ	μ_{α} 0,0001 ^s	μ_{δ} 0,001 ["]
α Canis Majoris	α Большого Пса (Сирнус)	$\left\{ \begin{array}{l} -1,58 \\ 8,0 \end{array} \right.$	-1,43	$\left\{ \begin{array}{l} A0 \\ F0 \end{array} \right.$	0,374"	$6^h43^m33,734^s$	-16°39'55,97"	+2,643 ^s	-5,00"	-375	-1210
α Carinae	α Киля (Канопус)	-0,86	-0,58	cF0	0,017	6 23 09,125	-52 40 31,00	+1,333	-1,99	+24	+25
α Lyrae	α Лиры (Вега)	0,14	0,04	A0	0,123	18 35 43,094	+38 44 56,82	+2,031	+3,38	+169	+283
α Aurigae	α Возничего (Ка- пелла)	0,21	0,89	G0	0,073	5 14 01,561	+45 57 48,70	+4,436	+3,57	+80	-423
α Bootis	α Волопаса (Арк- тур)	0,24	1,17	K0	0,090	14 14 01,076	+19 22 08,84	+2,737	-18,72	-773	-1999
β Orionis	β Ориона (Ри- гель)	$\left\{ \begin{array}{l} 0,34 \\ 6,66 \end{array} \right.$	0,11	$\left\{ \begin{array}{l} cB8p \\ B8 \end{array} \right.$	<0,015	5 12 48,378	-8 14 30,84	+2,884	+4,11	+2	0
α Canis Minoris	α Малого Пса (Процион)	$\left\{ \begin{array}{l} 0,48 \\ 10,8 \end{array} \right.$	0,78	F5	0,283	7 37 25,068	+5 19 06,90	+3,139	-9,28	-475	-1028
α Eridani	α Эридана (Ахернар)	0,60	0,37	B5	0,023	1 36 22,558	-57 25 08,69	+2,233	+18,28	+126	-23
β Centauri	β Центавра (Арена)	0,86	0,62	B1	<0,015	14 01 15,916	-60 12 00,70	+4,249	-17,32	-25	-20
α Aquilae	α Орла (Альтаир)	0,89	1,02	A5	0,191	19 49 01,552	+8 46 19,31	+2,936	+9,57	+359	+388
α Orionis	α Ориона (Бе- тельгейзе)	0,1 ÷ 1,2	2,60	cM0	<0,015	5 53 13,304	+7 24 06,92	+3,249	+0,60	+19	+11

Примечание. Фигурными скобками в таблице отмечены двойные звезды.

ные классы и параллаксы 11 наиболее ярких звезд, для которых визуальная звездная величина не превышает $1,0^m$.

На рис. 1.1 приведена карта звездного неба.

В табл. 1.3 даны средние, т. е. освобожденные от влияния аберрации и нутации, места 37 звезд ярче $2,0^m$ в эклиптической и в лунной экваториальной системах координат. Прямое восхождение α и склонение δ отсчитываются относительно восходящего узла среднего экватора Луны на эклиптике и среднего лунного экватора; они вычислены с использованием следующих постоянных [10]:

— средний наклон лунного экватора к эклиптике $I = 1^\circ 33' 30''$;

— средний наклон эклиптики к среднему земному экватору $\epsilon = 23^\circ 26' 38,28''$;

— средняя долгота восходящего узла лунной орбиты, отсчитанная от среднего равноденствия даты, $n = 101^\circ 24' 45,72''$.

В табл. 1.4—1.6 приведены характеристики звезд, расположенных вблизи характерных плоскостей и точек экваториальной, эклиптической и лунной экваториальной систем координат.

1.3. СОЛНЕЧНАЯ СИСТЕМА

В состав Солнечной системы (рис. 1.2) входят планеты со спутниками, астероиды, кометы, метеорные тела, межпланетная пыль и газ. К настоящему времени известно 9 больших планет с 32 спутниками, около 1700 астероидов и свыше 600 комет.

Реальные границы Солнечной системы определяются из условия устойчивого движения ее тел и простираются примерно до 60 000 а.е. [13].

Большие тела Солнечной системы подчиняются следующим основным закономерностям:

1. Все планеты обращаются вокруг Солнца по почти круговым орбитам.

2. Все планеты обращаются в одном направлении — против часовой стрелки (если смотреть со стороны северного полюса эклиптики). В том же направлении вращается Солнце.

3. Плоскости орбит всех планет почти совпадают друг с другом и расположены вблизи плоскости экватора Солнца.

4. Направление вращения планет относительно их центров масс совпадает с направлением их обращения вокруг Солнца (за исключением Венеры и Урана).

5. На долю планет приходится около 98% всего момента количества движения в Солнечной системе, а на долю Солнца примерно 2%.

6. Большие полуоси планетных орбит (за исключением орбиты Плутона) достаточно хорошо удовлетворяют эмпирическому правилу Боде — Тициуса

$$A_k = 0,4 + 0,3 \cdot 2^k,$$

где A_k — большая полуось планетной орбиты в а.е.;

k равно $-\infty$ для Меркурия, 0 для Венеры, 1 для Земли, 2 для Марса, 3 для пояса астероидов, 4 для Юпитера, 5 для Сатурна, 6 для Урана и 7 для Нептуна.

Между характеристиками орбитального движения планет и их вращения вокруг центра масс существует корреляция [12, 14].

1.3.1. Солнце

Солнце — центральное тело Солнечной системы, ближайшая к Земле звезда. Оно принадлежит к классу звезд dG2 («желтый карлик»). Его масса составляет 99,866% суммарной массы всех известных тел Солнечной системы.

Основные характеристики

Видимый с расстояния в 1 а.е. диск Солнца представляет собой круг с точностью до $\pm 0,01''$.

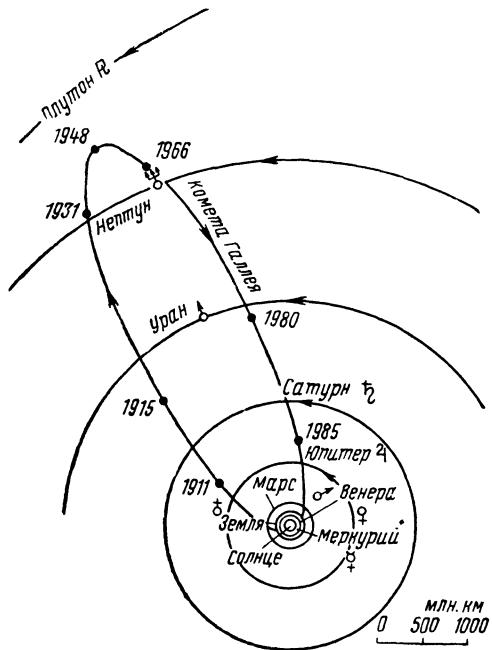
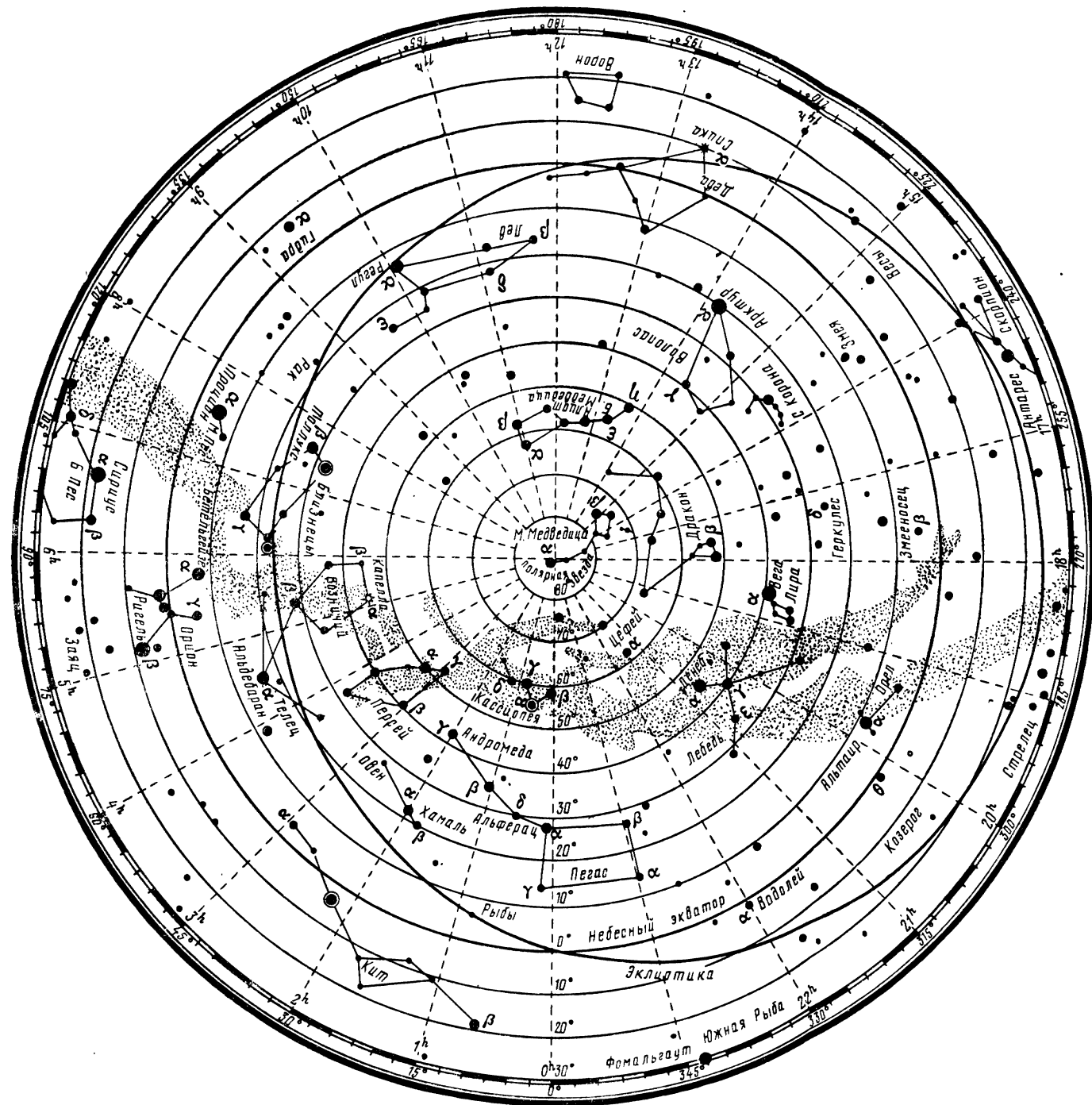
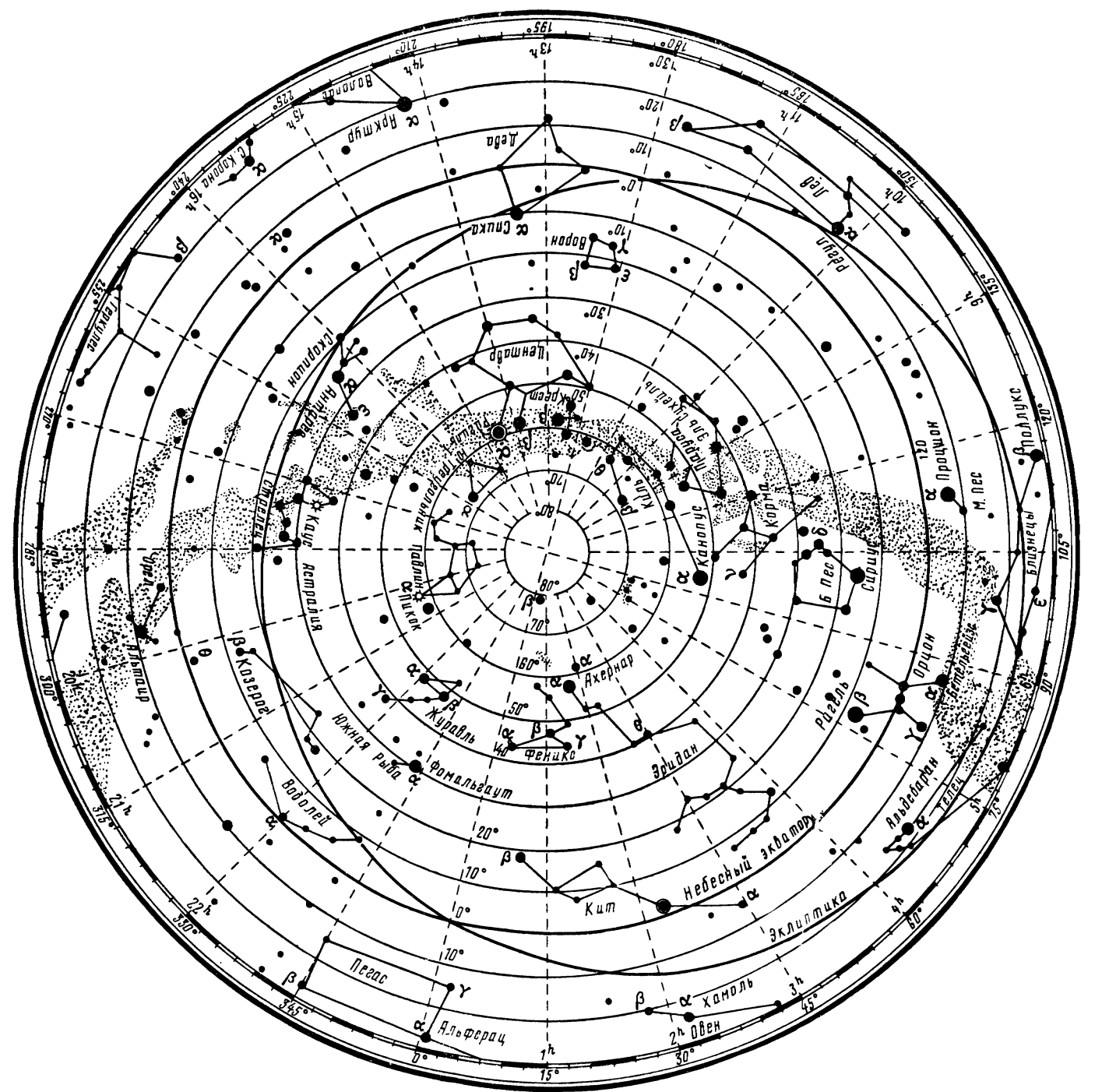


Рис. 1.2. План Солнечной системы

Северное полушарие



Южное полушарие



Вел. 0 1 2 3 4 пер.

Средние эклиптические и лунные экваториальные координаты ярких звезд

№ по Астрономи- ческому ежегоднику СССР	№ по каталогу FK3	Сокращен- ное название	Визуальная звездная величина	Эклиптические координаты		Лунные экваториальные координаты	
				λ (1964.0)	β (1964.0)	α (1964.0)	d (1964.0)
453	699	α Lyr	0,14 ^m	284°48'39"	+61°44'05"	0 ^h 25 ^m 06,9 ^s	+61°36'11"
482	745	α Aql	0,89	301 16 04	+29 18 17	1 22 40,0	28 45 54
702	867	α PsA	1,29	333 21 11	-21 07 52	3 26 13,3	-22 21 17
506	777	α Cyg	1,33	334 50 01	+59 54 32	3 39 49,2	58 38 38
592	54	α Eri	0,60	344 47 59	-59 22 35	4 08 35,6	-60 45 44
83	120	α Per	1,90	61 34 44	30 07 17	9 17 57,4	+29 06 58
119	168	α Tau	1,06	69 17 09	-5 28 12	9 52 02,1	-6 17 49
142	194	β Ori	0,34	76 19 35	-31 07 39	10 23 07,1	-31 46 39
143	193	α Aur	0,21	81 21 17	+22 51 50	10 37 20,1	+22 19 18
148	201	γ Ori	1,70	80 26 37	-16 49 15	10 37 54,9	-17 22 22
149	202	β Tau	1,78	82 04 19	+5 22 56	10 42 06,5	4 51 52
157	210	ϵ Ori	1,75	82 57 38	-24 30 40	10 48 55,4	-24 59 44
167	224	α Ori	0,1 ÷ 1,2	88 15 05	-16 01 54	11 09 07,2	-16 22 51
182	243	β CMa	1,99	96 41 11	-41 15 30	11 46 33,5	-41 22 06
186	251	γ Gem	1,93	98 36 05	-6 44 48	11 49 29,7	-6 49 14
190	257	α CMa	-1,58	103 35 08	-39 35 50	12 13 50,0	-39 31 14
608	245	α Car	-0,86	104 27 48	-75 49 43	12 36 36,7	-75 39 45

198	268	ϵ CMa	1,63	110 15 45	—51 21 52	12 43 02,9	—51 05 56
216	295	β Gem	1,21	112 43 07	6 40 54	12 44 29,4	+6 59 05
200	273	δ CMa	1,98	112 53 44	—48 27 26	12 52 45,8	—48 07 28
278	417	α UMa	1,95	134 41 28	+49 40 42	14 06 49,5	+50 30 56
261	380	α Leo	1,34	149 19 43	0 27 49	15 11 35,2	+1 37 12
316	483	ϵ UMa	1,68	158 25 22	54 19 00	15 43 07,1	55 36 53
617	315	ϵ Car	1,74	172 38 32	—72 40 48	16 50 50,0	—71 11 53
333	509	η UMa	1,91	176 25 30	+54 23 20	16 57 41,5	+55 53 32
326	498	α Vir	1,21	203 20 20	—2 03 07	18 47 40,5	—0 31 38
345	526	α Boo	0,24	203 43 52	+30 45 40	18 50 05,7	+32 16 59
622	348	β Car	1,80	211 28 57	—72 13 53	19 14 07,3	—70 45 38
638	468	γ Cru	1,61	216 03 13	—47 49 34	19 36 31,1	—46 24 28
642	481	β Cru	1,50	221 08 49	—48 38 05	19 55 33,2	—47 16 33
637	462	α Cru	1,58÷2,19	221 22 21	—52 52 29	19 55 53,1	—51 31 05
648	518	β Cen	0,86	233 17 31	—44 08 01	20 43 35,9	—42 57 50
653	538	α Cen	0,33—1,70	239 01 37	—42 34 59	21 06 20,2	—41 31 20
666	616	α Sco	1,22	249 15 34	—4 34 55	21 51 00,2	—3 44 05
668	625	α TrA	1,88	260 23 35	—46 08 47	22 29 57,3	—45 34 06
674	652	λ Sco	1,71	264 04 57	—13 47 00	22 49 14,8	—13 18 52
680	689	ϵ Sgr	1,95	274 34 33	—11 02 46	23 31 27,3	—10 51 23

Средние места характерных звезд в экваториальной системе координат

Название	Визуальная звездная величина	Спектральный класс	Параллакс	Экваториальные координаты		Годовое изменение		Собственное движение		Примечание
				α (1964.0)	δ (1964.0)	по α	по δ	μ_α 0,0001 ^s	μ_δ 0,001 ["]	
δ Ceti	4,04 ^m	B2	—	2 ^h 37 ^m 38,052 ^s	+0°10'27,24"	+3,077 ^s	+15,49"	+7	+3	Расположены вблизи плоскости экватора
ζ^2 Aquarii	4,42	F2	0,013"	22 26 58,761	—0 12 17,74	+3,089	+18,46	+136	+46	
10 Tauri	4,40	G5	0,058	3 35 01,979	+0 17 19,04	+3,063	+11,37	—156	—480	
δ Orionis	2,48	B0	—	5 30 09,944	—0 19 27,40	+3,066	+2,62	0	+1	
η Aquarii	4,13	B8	0,017	22 33 30,362	—0 18 12,77	+3,082	+18,58	+60	—50	Расположены вблизи северного полюса мира
ζ Virginis	3,44	A2	0,035	13 32 51,371	—0 24 45,11	+3,058	—18,38	—190	+35	
22 δ Monocerotis	4,09	A0	0,015	7 10 01,512	—0 25 54,26	+3,064	—6,02	—3	+6	
η Virginis	4,00	A0	0,010	12 18 03,741	—0 28 00,72	+3,070	—20,00	—42	—22	
ν Leonis	4,47	K0	0,012	11 35 06,264	—0 37 29,48	+3,072	—19,88	+2	+39	Расположены вблизи меридиана точки весны
η Aquilae	3,7—4,4	G0p	—	19 50 38,296	+0 54 43,14	+3,055	+9,30	+3	—4	
α Ursae Minoris	2,12	F8	—	1 58 38,84	+89 05 50,43	+45,23	+17,40	+190	—7	
λ Ursae Minoris	6,55	M3	—	18 03 12,41	+89 03 18,55	—78,04	+0,28	—114	—1	
2 Ceti	4,62	A0	—	0 01 53,762	—17 32 10,74	+3,072	+20,04	+16	—2	Расположены вблизи меридиана точки осени
ω Piscium	4,03	F5	0,012	23 57 27,637	+6 39 50,50	+3,082	+19,93	+101	—108	
π Virginis	4,57	A3	0,017	11 59 01,652	+6 48 54,15	+3,074	—20,07	—2	—33	
σ Virginis	4,24	G5	0,036	12 03 22,489	+8 55 58,51	+3,056	—19,99	—149	+45	
λ Aquarii	3,84	M0	0,012	22 50 44,181	—7 46 17,89	+3,128	+19,17	+5	+40	Расположены вблизи плоскости эклиптики
α Librae	2,90	A3	0,049	14 48 52,939	—15 53 35,75	+3,322	—14,91	—73	—71	
α Virginis	1,21	B2	0,019	13 23 17,580	—10 58 26,28	+3,163	—18,76	—26	—33	
α Leonis	1,34	B8	0,039	10 06 27,369	+12 08 37,88	+3,193	—17,63	—169	+3	
δ Geminorum	3,52	F0	0,059	7 17 58,420	+22 03 00,74	+3,582	—6,68	—19	—14	Расположены вблизи плоскости эклиптики
η Geminorum	3,2—4,2	M0	0,013	6 12 42,214	+22 31 08,11	+3,622	—1,13	—48	—13	

Таблица 1.5

Средние места характерных звезд в эклиптической системе
координат

№ по Астрономическому ежегоднику СССР	№ по каталогу FK3	Сокращенное название	Визуальная звездная величина	Эклиптические координаты		Примечание
				λ (1964.0)	β (1964.0)	
562	864	λ Aqr	3,84 ^m	341°04'21"	—0°23'09"	Расположены вблизи плоскости эклиптики
123	174	τ Tau	4,33	71 39 03	+0 42 34	
176	236	η Gem	3,2—4,2	92 56 02	—0 53 26	
181	241	μ Gem	3,19	94 47 54	—0 49 25	
205	279	δ Gem	3,51	108 01 00	—0 10 57	
229	326	δ Can	4,17	128 13 07	+0 04 33	
261	380	α Leo	1,34	149 19 43	+0 27 49	
270	396	ρ Leo	3,85	155 53 09	+0 08 54	
294	445	β Vir	3,80	176 39 11	+0 41 38	
655	548	α^2 Lib	2,90	224 34 49	+0 20 15	
444	685	36 Dra	5,03	304 45 50	+87 24 22	Расположены вблизи северного полюса эклиптики
425	664	ω Dra	4,87	131 44 56	+86 53 55	Расположены вблизи южного полюса эклиптики
—	212	β Dor	3,81	51 35 18	—85 02 54	Расположены вблизи меридиана точки весны
—	267	ι Vol	5,52	228 46 37	—83 36 33	
23	35	α Scl	4,39	359 59 11	—32 30 49	
6	9	i Cet	3,75	0 24 45	—10 01 18	

Таблица 1.6

Средние места характерных звезд в лунной экваториальной системе
* координат

№ по Астрономическому ежегоднику СССР	№ по каталогу FK3	Сокращенное название	Визуальная звездная величина	Лунные экваториальные координаты		Примечание
				α (1964.0)	d (1964.0)	
25	36	ϵ Psc	4,45 ^m	6 ^h 22 ^m 26,2 ^s	—0°27'34"	Расположены вблизи лунного экватора
123	174	τ Tau	4,33	10 00 55,3	—0 03 51	
205	279	δ Gem	3,51	12 26 25,5	—0 00 12	
229	326	δ Can	4,17	13 47 10,9	—0 46 43	
326	498	α Vir	1,21	18 47 40,5	—0 31 38	
664	594	δ Sco	2,54	21 22 29,8	—0 59 36	Расположены вблизи северного полюса лунного экватора
444	685	36 Dra	5,03	3 09 22,9	+86 29 03	
425	664	ω Dra	4,87	12 00 47,1	+87 19 24	
—	262	α Pic	3,30	8 06 36,0	—84 25 05	Расположены вблизи южного полюса лунного экватора
—	212	β Dor	3,81	9 40 26,1	—86 06 25	Расположены вблизи восходящего узла среднего лунного экватора на эклиптике
445	1477	χ Lyr	4,34	23 54 26,8	+59 26 44	
682	706	σ Sgr	2,14	0 01 30,0	—3 27 22	

Радиус $R_{\odot} = (6,9598 \pm 0,0007) \cdot 10^5$ км
 Масса $M_{\odot} = (1,989 \pm 0,002) \cdot 10^{27}$ т
 Скорость освобождения на поверхности . . . $V_{\odot \text{ осв}} = 617,7$ км/с

Облученность (энергетическая освещенность) некоторого элемента поверхности на расстоянии Δ от Солнца

$$E = E_c \frac{\cos i}{\Delta^2},$$

где E_c — *солнечная постоянная*, т. е. полное количество солнечной энергии, проходящей в единицу времени через площадку в 1 см^2 , расположенную под прямым углом к солнечным лучам вне земной атмосферы на расстоянии от Солнца в 1 а.е.;
 i — угол падения солнечных лучей на облучаемую поверхность.

По непосредственным измерениям с борта американских высотных самолетов и ракетоплана X-15 [19] $E_c = 136,1 \text{ мВт/см}^2 = 1,952 \text{ кал/(\text{см}^2 \cdot \text{мин})}$. Точность измерений $\pm 0,5\%$.

Распределение энергии в солнечном спектре в зависимости от длины волны показано на рис. 1.3—1.5. В видимой области спектра солнечная фотосфера излучает энергию практически как абсолютно черное тело. С уменьшением длины волны начинают проявляться вариации интенсивности излучения, вызываемые изменением солнечной активности (см. рис. 1.5).

Сила давления солнечного света на площадку, расположенную под прямым углом к солнечным лучам, при условии полного поглощения рассчитывается по формуле

$$f = \frac{\bar{q}_0}{\Delta^2},$$

где Δ — расстояние от Солнца в а.е.;

$$\bar{q}_0 = 4,4 \cdot 10^{-6} \text{ Па} (= 4,5 \cdot 10^{-7} \text{ кг/м}^2).$$

Положение деталей на солнечном диске задается в *гелиографической системе координат*. В этой системе отсчет широт производится от солнечного экватора, который образован плоскостью, проходящей через центр Солнца нормально к оси его вращения. Условно гелиографические меридианы жестко связаны с точками, лежащими на гелиографических широтах $\varphi = \pm 16^\circ$, а за начальный меридиан принят тот, который 1 января 1854 г. в 0^h по всемирному времени проходил через точку пересечения солнечного экватора с эклиптической.

Наклонение экватора Солнца к плоскости эклиптики $i_{\odot} = 7^\circ 15'$. Долгота восходящего узла солнечного экватора на эклиптике $\Omega_{\odot} = 74^\circ 22' + 84' T$, где T — интервал времени в столетиях от эпохи 1900 г. При наблюдении с Земли в первой половине года виден южный полюс Солнца, а во второй половине — северный.

Вращение Солнца прямое, т. е. совпадает по направлению с обращением планет вокруг Солнца (против часовой стрелки, если смотреть со стороны северного полюса мира). Угловая скорость вращения Солнца ω зависит от гелиографической широты φ и измеряется величиной угла поворота за сутки. Угловая скорость Солнца для сидерического вращения (относительно неподвижных звезд) и синодического вращения (относительно Земли) соответственно будет

$$\omega_{\text{сид}} = 14,38^\circ - 2,7^\circ \sin^2 \varphi; \quad \omega_{\text{син}} = 13,39^\circ - 2,7^\circ \sin^2 \varphi.$$

Разность этих величин равна угловой скорости движения Земли по орбите:

$$\omega_{\text{сид}} - \omega_{\text{син}} = 0,9856^\circ / \text{сут.}$$

Период синодического вращения

$$P_{\text{син}} = 26,90 + 5,2 \cdot \sin^2 \varphi \text{ сут.}$$

Сидерический и синодический периоды вращения для широты $\varphi = 16^\circ$ будут

$$P_{\text{сид}} = 25,38 \text{ сут}; \quad P_{\text{син}} = 27,28 \text{ сут.}$$

Видимое строение

Слой газа, в котором возникает видимое излучение, называется *фотосферой*. Яркость фотосферы к краю солнечного диска падает, что связано с уменьшением температуры в верхних ее слоях. Незначительной толщиной фотосферы (около 100 км) объясняется исключительная резкость краев солнечного диска. Фотосфера покрыта сплошной сетью ярких пятнышек неправильной формы, так называемыми *гранулами*, которые непрерывно появляются и через 3—10 мин. исчезают. Их размер не превышает 6000 км. Отдельные яркие образования на фотосфере, имеющие тонкую структуру и устойчивые на протяжении недель и месяцев, называются *факелами*.

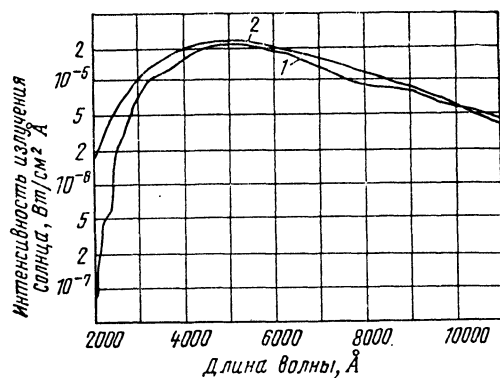


Рис. 1.3. Интенсивность ($\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{Å})$) излучения Солнца в видимой области спектра (1) и излучение абсолютно черного тела при 6000 К, помещенного на расстояние 1 а. е. (2)

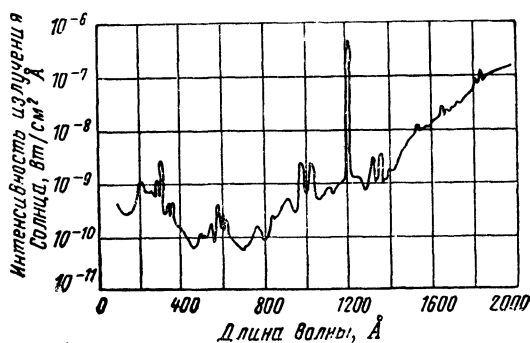


Рис. 1.4. Интенсивность ($\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{Å})$) излучения Солнца в ультрафиолетовой области спектра

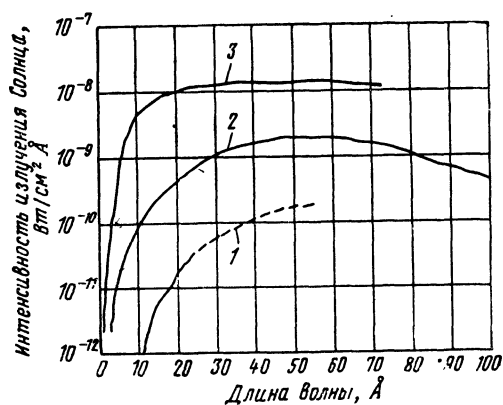


Рис. 1.5. Интенсивность ($\text{Вт}/(\text{см}^2 \cdot \text{Å})$) излучения Солнца в рентгеновской области спектра:

1—спокойное Солнце в минимуме активности; 2—спокойное Солнце в максимуме активности; 3—вспышка балла 2+

Темные области в фотосфере, имеющие вихревую структуру и размеры порядка поперечника Земли, называются *солнечными пятнами*. Темное ядро солнечного пятна называется тенью, а обрамляющая его кайма — *полутенью*. Пятна обычно возникают группами и существуют от нескольких дней до месяца. В начальной стадии своего развития солнечные пятна имеют вид крошечных *пор*.

Над фотосферой расположен *обращающий слой*, вызывающий большую часть линий поглощения, а над ним — *хромосфера* — слой газа толщиной 10 000—14 000 км, имеющий вид «травы, охваченной пламенем», с высотой отдельных языков до 10 000 км и более. Отдельные элементы травянистой структуры хромосферы называются *спикулами*. Яркие пятна в хромосфере, расположенные над фотосферными факелами, называются *флоккулами*. Над хромосферой до расстояний в несколько солнечных радиусов простирается *корона*, представляющая собой сильно разреженный и слабо светящийся газ. Наиболее яркую часть короны принято называть *внутренней короной*. Она удалена от солнечного диска не более чем на 0,5—1,0 его радиуса. Остальную часть короны, лежащую выше, называют *внешней короной*. В короне наблюдаются системы *лучей* и *корональные конденсации* — области уплотнения коронального вещества. Фотосфера, хромосфера и корона составляют *солнечную атмосферу*.

Облака газа в солнечной короне, достигающие высот в сотни тысяч километров и принимающие обычно причудливые формы, называются *протуберанцами* и подразделяются на несколько классов. Наиболее распространены *активные* протуберанцы, в которых отдельные узлы и струи движутся вдоль определенных траекторий к так называемым центрам притяжения, расположенным у основания хромосферы. Энергичный выброс газа в корону со скоростью до нескольких сот километров в секунду характерен для *эруптивных* протуберанцев.

Солнечная атмосфера состоит в основном из водорода (81,76%) и гелия (18,17%). Объемное содержание других элементов ничтожно: 0,03% кислорода, 0,02% магния, 0,01% азота и т. д. Самые интенсивные линии в видимом спектре Солнца принадлежат атомам ионизированного кальция, хотя его содержание в солнечной атмосфере составляет 0,0003%.

Температура слоя, расположенного вблизи видимой поверхности Солнца, минимальна и равна 4500 К. Выше и ниже этого слоя температура быстро возрастает. В центре Солнца она должна достигать примерно $13 \cdot 10^6$ К, в верхней хромосфере колеблется от 10^4 до $3 \cdot 10^4$ К, а в короне достигает 10^6 К. Температура солнечных пятен примерно на 1000 К ниже температуры окружающей фотосферы, а появляющиеся гранулы на 500 К горячее разделяющих их промежутков.

Магнитное поле является причиной образования активных областей (пятен, факелов, протуберанцев и т. п.). Напряженность магнитного поля Солнца на высоких широтах (начиная с 65° — 68°) составляет около 100 А/м (~ 1 э), а в активных областях увеличивается в сотни и тысячи раз. Магнитные поля охватывают Солнце под его поверхностью в виде системы трубок силовых линий. В каждом полушарии Солнца имеются две системы трубок с противоположным направлением поля. Солнечные пятна представляют собой места выхода и входа на поверхности этих трубок силовых линий. Распространением магнитных полей из активных областей в корону объясняется образование лучей, арок, участие этих деталей во вращении Солнца, наличие сгущений и различие в температуре соседних участков короны.

Солнечная активность

Солнечная активность условно характеризуется *числами Вольфа*

$$R = k(10g + s),$$

где g — число групп пятен;

s — общее число пятен;

k — коэффициент, зависящий от мощности применяемого инструмента.

Средняя продолжительность цикла пятнообразования 11,07 лет. После минимума солнечной активности пятна появляются на широтах около $\pm 30^\circ$, затем все ближе к экватору и в конце цикла возникновение пятен наблюдается на широтах $\pm 6^\circ$ — 8° . В эпоху максимума солнечной активности диаметр Солнца увеличивается на 0,00005 своего среднего значения (на $0,09''$ для расстояния в 1 а.е.). а в эпоху минимума уменьшается на ту же величину. Магнитная полярность пятен меняется с циклом.

Процессы на Солнце поддерживаются ядерными реакциями в его центральной области, превращающими водород в гелий. Выделяющаяся энергия в результате поглощения и переизлучения квантов передается к наружным слоям Солнца. Этот процесс осуществляется в зоне лучистого равновесия, лежащей на расстоянии примерно (0,3—0,8) $R_\odot$ от центра Солнца. Вблизи поверхности энергия переносится благодаря конвекции, т. е. восходящими потоками горячего и сильно ионизированного газа. Наблюдаемые гранулы являются конвективными ячейками. В верхней части конвективной зоны скорость потока достигает 1—2 км/с. Порождаемые конвективными потоками «звуковые волны» распространяются через хромосферу до основания короны и, затухая, нагревают их. Сильное магнитное поле подавляет конвективные движения, фотосфера частично охлаждается и возникают пятна. Слабое поле увеличивает скорость конвек-

нии, образуются факелы, повышается температура верхней хромосферы. При столкновении ударных волн, вызванных очень сильными магнитными полями, резко повышается температура и образуются хромосферные вспышки.

Солнечные (хромосферные) вспышки

Солнечные (хромосферные) вспышки представляют собой внезапное и кратковременное увеличение яркости участка хромосферы, видимое в монохроматическом излучении (в линиях H_{α} или КСа II). Подъем к максимуму яркости длится в среднем около 5 мин, а средняя продолжительность вспышки 1000 с. Вспышки обычно сопровождаются радиовсплесками. Спустя 2—3 мин с начала вспышки в окрестности Земли регистрируется повышение рентгеновского излучения, а через 10—100 мин — увеличение интенсивности космических лучей.

В окрестностях сложных групп пятен различной полярности вспышки возникают примерно в 2 раза чаще, чем в окрестностях групп пятен с одинаковой полярностью. В течение первой половины времени существования групп пятен частота появления вспышек примерно вдвое больше, чем во второй [18].

Солнечные вспышки оказывают определенное влияние на верхнюю атмосферу Земли. Возникают внезапные ионосферные возмущения, магнитные бури, полярные сияния, изменения плотности воздуха и другие явления.

Солнечный ветер

Солнечный ветер в отличие от спорадической компоненты солнечных космических лучей, возникающей при хромосферных вспышках, представляет собой непрерывное испускание протонов при гидродинамическом расширении солнечной короны. Средняя скорость солнечного ветра при невозмущенной короне составляет около 300 км/с.

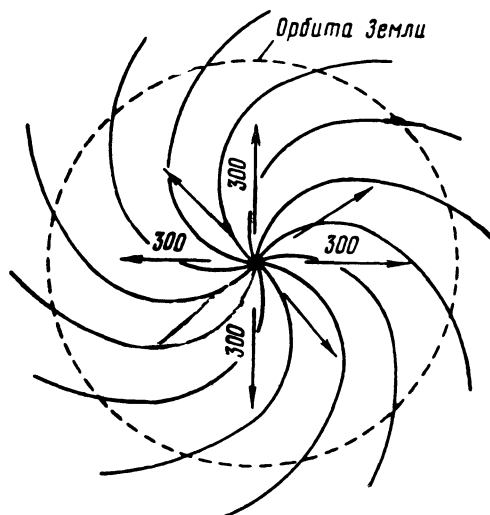


Рис. 1.6. Спиральное солнечно-межпланетное магнитное поле в плоскости экватора для спокойного Солнца

Плазма покидает солнечную корону в радиальном направлении и уносит в межпланетное пространство солнечное магнитное поле. Каждая силовая линия остается скрепленной одним концом с Солнцем и участвует в его вращении, благодаря чему солнечное магнитное поле приобретает спиральную структуру (рис. 1.6). Движущаяся плазма «выметает» из внутренней области Солнечной системы галактическое магнитное поле, а магнитные поля планет сжимает в магнитосферы, образуя в межпланетной среде магнитогидродинамические полости. Реальное спиральное межпланетное поле искажается значительными нерегулярностями (рис. 1.7).



Рис. 1.7. Возмущенное спиральное межпланетное магнитное поле

1.3.2. Общие сведения о планетах

Планеты — крупные тела Солнечной системы, обращающиеся вокруг Солнца. Их принято разделять:

— по размерам: на *большие* (Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун и Плутон — в порядке удаления планет от Солнца) и *малые*, или *астероиды*.

— по расположению относительно Земли: на *нижние* (Меркурий и Венера) и *верхние* (Марс, Юпитер и др.):

— по физическим особенностям: на *земную группу* (Меркурий, Венера, Марс и Плутон) и *юпитерову группу* (Юпитер, Сатурн, Уран и Нептун).

Основные понятия

Элонгация — угловое положение (расстояние) планеты от центра солнечного диска (относительно наблюдателя).

Фазовый угол, или *угол фазы* ψ , — угол между направлениями из центра планеты на центр Солнца и на наблюдателя.

Аспекты в положении планет (конфигурации) (рис. 1.8)

Соединение с Солнцем — положение планеты, при котором ее долгота (в эклиптической системе координат) равна долготе центра солнечного диска. Соединение может быть или *верхним* (знак $\odot$), или *нижним* (знак ζ). При $\odot$ расстояние от наблюдателя до планеты больше расстояния до Солнца (планета находится за Солнцем), при

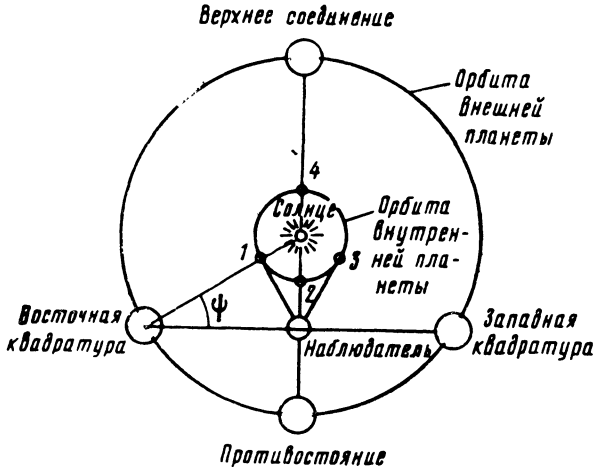


Рис. 1.8 Конфигурации внутренних и внешних планет:

1 — наибольшая восточная элонгация; 2 — нижнее соединение;
3 — наибольшая западная элонгация; 4 — верхнее соединение

$\odot$ — меньше (планета расположена между Солнцем и наблюдателем). При $\circ$ возможно *покрытие* планеты Солнцем, при $\oslash$ — *прохождение* планеты перед диском Солнца.

Противостояние, или *оппозиция* (знак $\odot$), — положение планеты, при котором ее долгота отличается от долготы Солнца на 180° (планета наблюдается в направлении, противоположном направлению на Солнце). *Великим* называется противостояние Марса относительно Земли, когда он находится около перигелия своей орбиты (т. е. на минимальном расстоянии от Земли, равном $\sim 56 \cdot 10^6$ км). Такие противостояния случаются один раз в 15 или 17 лет и приходятся на август.

Квадратура (знак $\square$) — положение планеты, при котором ее долгота отличается на 90° от долготы Солнца. При западной квадратуре долгота Солнца больше долготы планеты, при восточной квадратуре — меньше.

Наибольшая элонгация, или *наибольшее удаление*, — положение нижней планеты, при котором ее угловое расстояние до Солнца максимально. Наибольшая элонгация называется *западной*, если долгота Солнца больше долготы планеты, и *восточной* — если меньше.

Периоды обращения

Синодический период S — промежуток времени между двумя одинаковыми конфигурациями планеты относительно наблюдателя.

Сидерический, или звездный период P , — длительность истинного оборота планеты (относительно неподвижных звезд).

Синодическое уравнение

— для нижних планет

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{P} - \frac{1}{E};$$

— для верхних планет

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{E} - \frac{1}{P},$$

где E — *звездный период наблюдателя*, или *звездный год*, т. е. время полного обращения Земли вокруг Солнца, если наблюдатель находится на Земле.

Видимые фигуры планет

Диск — проекция планеты на небесную сферу.

Лимб — край диска.

Терминатор — граница между освещенной и неосвещенной частями диска.

Рога — освещенные участки вблизи точек пересечения лимба с терминатором.

Линия рогов — отрезок дуги большого круга, соединяющей рога.

Фаза Φ — отношение отрезка диаметра диска на освещенной его части, перпендикулярного к линии рогов, ко всей длине этого диаметра:

$$\Phi = \frac{1}{2} (1 + \cos \psi) = \cos^2 \frac{\psi}{2},$$

где ψ — фазовый угол.

Фаза планеты $\Phi = 0,5$ называется *дихотомией* (для Луны: первая и последняя четверти).

Оптика планетных атмосфер

Зона полутени — пояс на поверхности планеты, из каждой точки которого можно наблюдать только часть солнечного диска (без учета рефракции).

Рефракция — преломление лучей в атмосфере планеты; смещает терминатор в сторону ночного полушария (при этом образуется так называемый *рефракционный терминатор*).

Сумеречное освещение зоны ночного полушария, примыкающего к рефракционному терминатору, вызывается эффектом рассеивания солнечных лучей в атмосфере планеты. Характеризуется величиной *сумеречной дуги*.

Эквивалентный путь газа в атмосфере — количество газа, дающее при нормальных условиях такое же поглощение, как и наблюдаемое.

Фотометрические характеристики

Абсолютно черная поверхность — поверхность, полностью поглощающая всякое излучение.

Альbedo истинное A (*альbedo плоское, альbedo Ламберта, коэффициент диффузионного отражения* ρ) — отношение величины лучистого потока, рассеянного плоским элементом матовой поверхности во всех направлениях, к лучистому потоку, падающему на этот элемент.

Альbedo геометрическое A_r — отношение блеска планеты при фазовом угле 0° к блеску плоского абсолютно белого экрана, расположенного нормально к солнечным лучам в той же точке пространства и занимающего на небесной сфере тот же телесный угол, что и диск планеты.

Альbedo иллюстративное $A_{\text{ил}}$ — отношение действительного блеска планеты при фазовом угле 0° к блеску планеты при условии, если бы ее поверхность была абсолютно белой.

Альbedo сферическое $A_{\text{сф}}$ — отношение отраженного по всем направлениям потока солнечного излучения к падающему.

Температуры

Эффективная температура — температура абсолютно черного тела, имеющего те же размеры и дающего тот же полный поток излучения, что и рассматриваемое тело (объект).

Яркая температура — температура абсолютно черного тела, интенсивность излучения которого в определенной длине волны равна наблюдаемой в данном направлении.

Равновесная температура — установившаяся температура абсолютно черного тела, поверхность которого расположена нормально к падающим на нее лучам, когда расход поступающей энергии происходит только путем излучения.

Основные характеристики

Наименование	Обозначение	Единица измерения	Меркурий	Венера	Земля	
			♿	♀	♂, ⊕	
Среднее расстояние от Солнца	Δ	а. е.	0,387099	0,723332	1,000000	
Большая полуось орбиты	a	млн. км	57,909	108,209	149,598	
Эксцентриситет (1950.0)	e	—	0,205614	0,006821	0,016751	
— для времени T :	e_1	—	0,20561421	0,00682069	0,01675104	
$e_T=e_1+k_1T+k_2T^2$,	k_1	—	+2046·10 ⁻⁸	-4774·10 ⁻⁸	-4180·10 ⁻⁸	
где T в юлианских столетиях от гринвичского полдня 1900.0	k_2	—	-3,0·10 ⁻⁸	+9,1·10 ⁻⁸	-12,6·10 ⁻⁸	
Сидерический период обращения	P	троп. год сут	0,24085 87,969	0,61521 224,701	1,00004 365,256	
Средняя орбитальная скорость:						
— линейная	V	км/с	47,83	34,99	29,76	
— угловая	n	град/сут	4°05'32,42"	1°36'07,67"	59°08,19"	
Наклонение к эклиптике (1950.0)	i	град	7,004°	3,394°	—	
— для времени T :	i_1	град, мин, с	7°00'10,37"	3°23'37,07"	—	
$i_T=i_1+k_1T+k_2T^2$	k_1	угл. с	+6,699"	+3,621"	—	
	k_2	угл. с	-0,066"	-0,0035"	—	
Долгота восходящего узла (1950.0):	Ω	град	47,739°	76,230°	—	
— годовичное изменение	$\Delta\Omega$	угл. мин	+0,71'	+0,54'	—	
— для времени T :	Ω_1	град, мин, с	47°08'45,40"	75°46'46,73"	—	
$\Omega_T=\Omega_1+k_1T+k_2T^2+k_3T^3$	k_1	угл. с	+4266,75"	+3239,46"	—	
	k_2	угл. с	+0,626"	+1,476"	—	
	k_3	угл. с	—	—	—	
Долгота перигелия (1950.0)	π	град	76,677°	130,868°	102,080°	
— годовичное изменение	$\Delta\pi$	угл. мин	+0,93'	+0,84'	+1,03'	
— для времени T :	π_1	град, мин, с	75°53'58,91"	130°09'49,8"	101°13'15,0"	
$\pi_T=\pi_1+k_1T+k_2T^2+k_3T^3$	k_1	угл. с	+5599,76"	+5068,93"	+6189,03"	
	k_2	угл. с	+1,061"	-3,515"	+1,63"	
	k_3	угл. с	—	—	+0,012"	

В табл. 1.7 приведены основные геометрические и физические характеристики планет, а также элементы их орбит, а в табл. 1.8 — расчетные звездные величины планет при наблюдении их с орбиты Земли.

Таблица 1.7

планет и элементы их орбит

Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
δ	λ	λ	δ	φ, ψ	R
1,523688	6,202803	5,538843	19,190978	30,070672	39,517738
227,941	778,328	1426,99	2870,93	4498,51	5911,77
0,093313	0,048435	0,055682	0,047209	0,008575	0,24707
0,09331290	0,048335	0,055892	0,047044	0,008533	0,2486
+9206,4·10 ⁻⁸	+1,64·10 ⁻⁴	-3,45·10 ⁻⁴	+2,0·10 ⁻⁴	+0,4·10 ⁻⁴	—
-7,7·10 ⁻⁸	—	—	—	—	—
1,88089	11,86223	29,45772	84,01529	164,78829	247,696
686,980	4332,588	10759,21	30687	60184	90700
24,11	13,05	9,64	6,80	5,43	4,8
31°26,52"	4°55,13"	2°0,46"	42,23"	21,53"	14,3"
1,850°	1,306°	2,491°	0,773°	1,774°	17,144°
1°51'01,2"	1°18'31,4"	2°29'33,1"	0°46'20,9"	1°46'45,3"	17°08'44"
-2,430"	-20,5"	-14,0"	+2,3"	-34,3"	-20"
+0,0454"	—	—	—	—	—
49,172°	99,949°	113,227°	73,727°	131,231°	109,633°
+0,46'	+0,61'	+0,52'	+0,30'	+0,66'	+0,72'
48°47'11,19"	99°26'36"	112°47'25"	73°29'25"	130°40'44"	108°57'17"
2775,57"	+3638"	+3143"	+1795"	+3956"	+4889"
-0,005"	—	—	—	—	—
-0,0192"	—	—	—	—	—
335,139°	13,526°	92,077°	172,291°	47,440°	223,175°
+1,10'	+0,97'	+1,18'	+0,96'	+0,48'	+0,84'
334°13'05,53"	12°43'15"	91°05'54"	169°03'	43°51'	222°48'
6626,73"	+5796"	+7050"	+5800"	+2400"	+5000"
+0,4675"	—	—	—	—	—
-0,0043"	—	—	—	—	—

Наименование	Обозначение	Единица измерения	Меркурий	Венера	Земля
			♿	♀	♂, ⊕
Средняя долгота планеты (1950.0)	λ	град	31,122°	80,771°	99,096°
— для времени T :	λ_1	град, мин	178°10'44,68"	342°46'01,39"	99°41'48,04"
$\lambda_T = \lambda_1 + k_1 T + k_2 T^2$	k_1	угл. с	+538106654,80"	+210669162,88"	+129602768,13"
	k_2	угл. с	+1,084"	+1,1148"	+1,089"
Средний синодический период	S	сут	115,88	583,92	—
Наклон плоскости экватора планеты к плоскости орбиты	i	град, мин, с	7° (?)	178°	23°27'08,26"
Гравитационная постоянная	μ	км ³ /с ²	(2,16—2,19)·10 ⁴	(3,25327—3,25335)·10 ⁵	3,986003·10 ⁵
Радиус сферы действия	$Q_{с.д}$	тыс. км	90—136	612—621	913—944
Радиус сферы тяготения	$Q_{с.т}$	тыс. км	19—29	168—171	256—265
Период осевого вращения	$P_{ос}$	сут., ч, мин	58 ^d 16 ^h	243 ^d	23 ^h 56 ^m 04,09 ^s
Скорость освобождения (вторая космическая)	$V_{осв}$	км/с	4,2—4,3	10,37	11,19
Расстояние от Земли	—	млн. км	82—217	39—260	—
Видимый с Земли угловой поперечник	—	угл. с	4,7—12,9"	9,9—64,0"	—
Средний диаметр — относительно среднего земного	—	км	4840 0,380	12100 0,950	12742 1,00
Сжатие	a	—	0,00	0,00	0,003352
Масса — относительно земной	m	т	3,260·10 ²⁰ 0,0546	4,877·10 ²¹ 0,8162	5,975·10 ²¹ 1,000
Средняя плотность — относительно земной	ρ	г/см ³	5,49 1,00	5,258 0,95	5,516 1,00
Ускорение силы притяжения на поверхности (для не вращающейся планеты)	g_0	см/с ²	368—374	888	981,4
— относительно земного	—	—	0,38	0,905	1,0
Ускорение экваториальное центробежное	—	см/с ²	—0,00	—0,00	—3,39
Альбедо сферическое	$A_{сф}$	—	0,06	0,65	0,39

Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
♂	♃	♄	♅	♆, ♇	♇
144,061°	316,117°	158,286°	99,118°	194,395°	165,575°
293°44' 51,46"	—	—	243°21' 45"	85°01' 31"	352°31' 51"
+68910103,83"	—	—	—	—	—
+1,1184"	—	—	—	—	—
779,94	398,88	378,09	369,66	367,49	366,74
24°48'	3°06,9'	26°44,7'	98,0°	29°	?
(4,288— 4,290)·10 ⁴	(1,26891— 1,26894)·10 ⁸	(3,798— 3,799)·10 ⁷	(5,795— 5,798)·10 ⁶	(6,962— 6,977)·10 ⁶	(3,0— 3,7)·10 ⁵
524—631	45870—50540	51500—57580	49350—54250	86100—87590	26670—44170
117—142	22890—25220	22770—25460	18090—19880	32090—32650	7420—12290
24 ^h 37 ^m 22,62 ^s	9 ^h 50 ^m	10 ^h 14 ^m	10 ^h 47 ^m	8—15 ^h	?
5,03	60,4	36,4	20,8	23,7	14,8—16,4 (?)
56—400	591—965	1199—1653	2586—3153	4309—4682	4309—7527
3,5—25,1"	30,7—50,1"	15,0—20,7"	3,3—4,0"	2,2—2,5"	0,2' (?)
6780 0,532	139200 10,92	114800 9,01	53400 4,19	49700 3,90	5500 (?) 0,4 (?)
0,0052	0,062	0,096	0,06	0,025	?
6,429·10 ²⁰ 0,108	1,902·10 ²⁴ 318,3	5,694·10 ²³ 95,30	8,688·10 ²² 14,54	1,045·10 ²³ 17,5	4,98·10 ²¹ (?) 0,8 (?)
3,94	1,35	0,72	1,09	1,63	>10 (?)
0,71	0,24	0,13	0,20	0,29	>2 (?)
388	2620	1150	813	1130	>2000 (?)
0,395	2,67	1,17	0,83	1,15	>2 (?)
—1,71	—225	—176	—62	—28	?
0,15	0,44	0,76	0,66	0,52	0,16 (?)

Наименование	Обозначение	Единица измерения	Меркурий	Венера	Земля	
			♿	♀	♂, ⊕	
Условия солнечного облучения (для среднего расстояния):						
— угловой радиус Солнца	$\sigma_{\odot}$	угл. с	2480"	1327"	960"	
— солнечная постоянная	E_c	кВт/м ²	9,07	2,60	1,36	
— облучение относительно земного	—	—	6,68	1,91	1,00	
— световая освещенность	E	тыс. лк	901	258	135	
— отношение освещенности в перигелии и афелии	E_p/E_a	—	2,31	1,03	1,07	
— звездная величина Солнца	$m_{\odot}$	—	—28,8	—27,4	—26,7	

Таблица 1.8

Видимые звездные величины планет m_V

Планета	Изменение m_V по фазе	Звездная величина с Земли		Показатель цвета
		$(m_V)_{\min}$	$(m_V)_{\max}$	
Меркурий	$m_V = -0,21 + 5 \lg r \cdot \Delta + 3,82 \cdot 10^{-2} \psi - 3,37 \cdot 10^{-4} \psi^2 + 2,00 \cdot 10^{-6} \psi^3$	—1,0	+1,3	+0,9
Венера	$m_V = -4,14 + 5 \lg r \cdot \Delta + 0,09 \cdot 10^{-2} \psi + 2,39 \cdot 10^{-4} \psi^2 - 0,65 \cdot 10^{-6} \psi^3$	—4,1	—3,0	+0,8
Марс	$m_V = -1,45 + 5 \lg r \cdot \Delta + 0,0151 \psi$	—2,8	+1,6	+1,2
Юпитер	$m_V = -9,1 + 5 \lg r \cdot \Delta + 0,015 \psi$	—2,2	—1,9	+0,4
Сатурн	$m_V = -8,8 + 5 \lg r \cdot \Delta + 0,044L - 2,60 \times \times \sin B + 1,25 \sin^2 B$	—0,4	+1,5	+0,7
Уран	$m_V = -6,9 + 5 \lg r \cdot \Delta$	+5,4	+6,0	+0,4
Нептун	$m_V = -7,1 + 5 \lg r \cdot \Delta$	+7,6	+7,7	+0,6
Плутон	$m_V = -1,2 + 5 \lg r \cdot \Delta$	+14,0	+15,2	+0,7

В таблице обозначено:

- r и Δ — расстояние от Солнца до планеты и до наблюдателя соответственно в а.е.;
- ψ — угол фазы в град;
- B — сатурноцентрическая широта наблюдателя ($0^\circ < B < 27^\circ$) в град;
- L — сатурноцентрическая разность долгот Солнца и наблюдателя относительно плоскости кольца Сатурна ($0^\circ < L < 6^\circ$) в град.

Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун	Плутон
δ	ζ	η	δ	φ, ψ	R
630"	184"	101"	50"	32"	24"
0,587	0,0505	0,0150	0,0037	0,0015	0,0008
0,431	0,0370	0,0110	0,0027	0,0011	0,00064
58,2	4,99	1,48	0,366	0,149	0,087
1,45	1,21	1,25	1,21	1,04	2,77
-25,8	-23,1	-21,8	-20,3	-19,3	-18,7

1.3.3. Меркурий

Меркурий — ближайшая к Солнцу и наименьшая среди больших планет. По плотности близок к Земле. Спутники его не обнаружены. Максимальное угловое удаление от Солнца относительно Земли не превышает 28°.

Видимая поверхность ровная, с темными трудно различимыми пятнами. Данные фотометрических и поляризационных наблюдений показывают, что поверхность Меркурия изрыта примерно в той же мере, что и поверхность Луны [30]. Временное помутнение (вуалирование) участков поверхности, наблюдаемое в западном полушарии планеты чаще, чем в восточном [23], можно объяснить или атмосферными явлениями, или люминесцентным свечением поверхности, вызванным солнечным ветром. Вблизи рогов диска наблюдается максимальная поляризация.

Период осевого вращения, по новейшим определениям, основанным на изучении математических моделей движения планеты и подтвержденным данными радиолокационных наблюдений ($59^d \pm 5$ и $58^d,4 \pm 0,4$), составляет точно 2/3 периода обращения планеты вокруг Солнца, т. е. 58,65 земных суток [31, 32—35]. Направление вращения — прямое. Новое значение периода осевого вращения Меркурия не находится в противоречии с прежними оптическими наблюдениями, которые, как оказалось, допускают неоднозначное истолкование [36]. Отсюда следует, что на поверхности Меркурия должны существовать два диаметрально противоположных «горячих полюса», поочередно обращаящихся к Солнцу в моменты нахождения планеты в перигелии орбиты.

Температура в среднем для диска по радиометрическим измерениям составляет 690 К в подсолнечной точке и 500 К для фазового угла 120° [21]. По радиоастрономическим измерениям температура неосвещенного Солнцем полушария планеты равна примерно 150 К [28], т. е. поддерживается достаточно высокой, возможно, благодаря атмосферной циркуляции [29]. В зависимости от расстояния до Солнца температура планеты меняется примерно на 20% [30]. Длинноволновое излучение Меркурия должно исходить из подповерхностных слоев. Поэтому его яркостная температура тем меньше зависит от фазы, чем больше длина волны, на которой производятся измерения. При длине волны 10 см яркостная температура уже не зависит от освещенности Солнцем и примерно равна 300 К [28].

Атмосфера содержит CO₂ в пределах от 0,3 до 7 г/см² [29], относительная концентрация CO₂ может составлять от 10 до 100% [23]. Оценочные значения максимально возможной концентрации некоторых других газов приведены в работе [29]. Там же рассчитана модель атмосферы при условии содержания 10% CO₂ и 90% N₂. Плотность атмосферы на 2—3 порядка ниже, чем у атмосферы Земли.

1.3.4. Венера

Венера по размерам и массе незначительно уступает Земле, лишена спутников, периодически подходит к Земле на расстояние 39 млн. км, т. е. находится ближе к Земле, чем любая другая планета. Из окрестности Земли Венера наблюдается как самое яркое светило после Солнца и Луны. Угловое удаление Венеры от Солнца относительно Земли не превышает 48° . Орбита Венеры по сравнению с орбитами других планет наиболее близка к круговой.

Видимая поверхность имеет белую окраску, отражает 60% солнечного света, исключительно однородна и лишена каких-либо устойчивых образований. Все наблюдаемые на диске детали обычно туманны и изменчивы. Уверенно наблюдается только общее потемнение от светлого лимба к терминатору.

В желтых лучах наблюдается слабо выраженная система лучей, радиально расходящихся от подсолнечной точки [23]. Фотографирование в инфракрасных лучах не

выявило никаких деталей, но на снимках в ультрафиолетовых лучах заметны темные полосы и пятна, очертания которых изменяются изо дня в день. Их яркость примерно на 20% ниже яркости окружающего фона [66, 70]. Среди этих пятен некоторые наблюдатели отмечают сравнительно устойчивое образование, напоминающее букву У, положенную на бок: $\prec$. В конце 1964 г. на диске Венеры было замечено большое темное пятно площадью около 20 млн. км², имевшее красноватый цвет. На Астрономической обсерватории Харьковского государственного университета была получена серия спектрограмм этого пятна. Предполагают, что пятно могло явиться разрывом верхнего облачного слоя Венеры или облаком каких-то частиц [38].

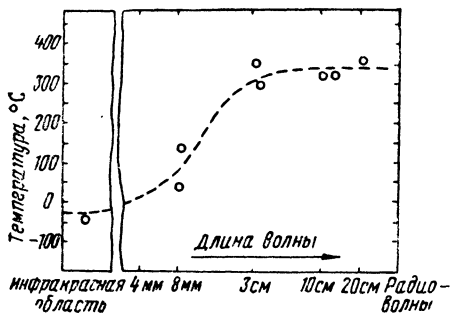


Рис. 1.9. Спектр радиоизлучения Венеры

Видимая поверхность обладает заметным свойством зеркального отражения.

Период осевого вращения $P_{ос}$, определенный из радиолокационных наблюдений, относится к твердой поверхности планеты и равен 243 сут. при обратном направлении вращения. В пределах точности определения этой величины находится значение $P_{ос} = 243,16$ сут, при котором Венера должна быть обращена к Земле одной и той же стороной в каждом нижнем соединении. Можно предположить, что осевое вращение Венеры синхронизировано в результате воздействия приливных сил со стороны Земли. Продолжительность средних солнечных суток на Венере составляет 116,8 земных сут. [53].

По снимкам в ультрафиолетовых лучах установлено, что $P_{ос} = 4,0 - 4,7$ сут. [59, 60, 74]. Направление вращения обратное. Этот период можно объяснить предположением о существовании постоянного ветра скоростью 100 м/с [72], господствующего на уровне облаков Венеры.

Данные визуальных и спектроскопических наблюдений крайне противоречивы [39, 51, 57, 71]. Однако в 1968 г. были спектрографически измерены лучевые скорости различных участков диска Венеры. В предположении, что ось вращения планеты перпендикулярна плоскости ее орбиты, получена средняя экваториальная скорость движения атмосферного слоя 103 ± 10 м/с, чему соответствует период вращения, равный $4,3 \pm 0,4$ сут (при обратном направлении вращения) [64].

Температура. По радиометрическим наблюдениям в инфракрасной области спектра в диапазоне волн 8—13 мкм средние для диска значения эффективной температуры, относящейся к облачному слою, составляют 225—240 К [68]. При этом температура дневного и ночного полушарий практически совпадает; наблюдается потемнение к краю диска, следующее закону $\sqrt{\cos z}$, где z — планетоцентрическое угловое расстояние от центра диска. Потемнение к краю означает, что температура в атмосфере с уменьшением высоты возрастает.

Усредненная по диску яркостная температура Венеры в диапазоне длин волн от 2 до 20 см практически не изменяется и равна примерно 600 К, а на участке от 0,1 мм до 2 см медленно возрастает (рис. 1.9). Отмечается зависимость температуры от фазы планеты. Температура минимальна вблизи нижнего соединения и максимальна вблизи верхнего. Было доказано, что радиоизлучение отсутствует уже на расстоянии 1,07 радиуса от центра диска и поэтому не может быть вызвано радиационными поясами Венеры [45].

Атмосфера была открыта М. В. Ломоносовым во время прохождения Венеры по диску Солнца в 1761 г. [47]. Он наблюдал «тонкое как волос сияние», окружающее часть диска планеты перед ее вступлением на солнечный диск, и возникновение выступа на краю Солнца. Ломоносов правильно объяснил это явление, как результат преломления солнечных лучей в плотной атмосфере Венеры.

Величина ее горизонтальной рефракции, по наземным наблюдениям «явления Ломоносова», колеблется от $15''$ до $20''$, что должно соответствовать весьма разреженной атмосфере; эта величина иногда аномально возрастает. В то же время сумеречные явления очень интенсивны, что, наоборот, свидетельствует о наличии плотной атмосферы. Для согласования этих данных В. В. Шаронов выдвинул гипотезу, согласно которой атмосфера Венеры разделена на верхнюю и нижнюю части сплошным тонким слоем «серебристых», или «перистых» облаков. Явление рефракции происходит в высоком и сравнительно разреженном слое газа, лежащем над этими облаками, а сумеречные явления создаются в основном за счет плотных слоев, расположенных под облаками. Разрывы в облачном слое или изменения его высоты вызывают увеличение горизонтальной рефракции. Поверхность планеты, вероятно, окутана вторым, более низким и плотным слоем облаков.

Исследования спектра поглощения Венеры показали, что в оптически просматриваемом слое ее атмосферы содержатся следующие соединения:

CO_2	1 км* [65]
H_2O	19—98 мкм [63, 77]
CO	4 см [73]

Было установлено, что во всей атмосфере содержится:

CO_2	2—3,2 км [67, 75]
H_2O	$< 22,2 \cdot 10^{-3}$ г/см ² [54]

Кроме того, были обнаружены линии поглощения O_2 [67], O^{13}O_2 , $\text{O}^{12}\text{O}^{18}\text{O}^{16}$ [101], $\text{C}^{12}\text{O}_2^{16}$, $\text{C}^{13}\text{O}_2^{16}$ [48, 50]. Отношения содержания изотопов $\text{C}^{13}/\text{C}^{12}$, $\text{O}^{18}/\text{O}^{16}$ и молекул $\text{C}^{12}\text{O}_2^{16}/\text{C}^{13}\text{O}_2^{16}$ для атмосфер Венеры и Земли практически одинаковы [48, 50, 67].

Записи спектра Венеры в области 1,7—3,4 мкм, полученные со стратостата, свидетельствовали о том, что облака Венеры состоят, вероятно, из кристалликов льда [58].

Модели атмосферы предназначены для объяснения сравнительно сильного радиоизлучения в области длин волн 2—20 см. Если его трактовать как тепловую радиацию планеты, то температура Венеры должна на 250—350 К превышать значение равновесной температуры (327 К) [54]. При помощи моделей атмосферы стремятся также объяснить постоянство болометрической, а отчасти радиоастрономической температуры для дневного и ночного полушарий и потемнение к краю диска в болометрическом диапазоне длин волн. Известны модели:

1. Парниковая модель [43] считается наиболее вероятной. Сущность парникового эффекта заключается в том, что видимое излучение Солнца с незначительным ослаблением проходит через атмосферу, нагревая поверхность планеты, но излучение от поверхности почти полностью поглощается нижними слоями атмосферы. Азот и кислород одинаково прозрачны для видимых и для инфракрасных лучей, но водяной пар в далекой инфракрасной части спектра дает глубокие полосы поглощения. Поэтому для достижения парникового эффекта требуется или большое количество воды, или высокое давление у поверхности планеты (от 0,5 до 5,0 МПа).

2. Циркулярная модель предложена Гуди и Робинсоном [96]. Согласно этой модели солнечное излучение поглощается в верхних слоях атмосферы на дневной стороне планеты и переносится вместе с газом на ее неосвещенную сторону.

3. Эолосферная модель (фрикционный разогрев) предложена Э. Эликом. Предполагается, что в средних слоях атмосферы солнечная энергия частично преобразуется в кинетическую энергию движения воздушных масс. В нижнем подоблачном (эолосферном) слое атмосферы толщиной примерно 25 км господствуют сильные ветры, которые перемещают большие массы минеральной пыли светлой окраски. За счет трения между частицами пыли кинетическая энергия ветров вновь превращается в тепло. В эолосферном слое градиент температуры близок к $10^\circ/\text{км}$, размеры частиц 5—10 мкм при концентрации около 200 частиц/см³. В этих условиях радиоизлучение поверхности планеты в области сантиметровых волн должно рассеиваться незначительно, а излучение в инфракрасной области спектра полностью поглощаться.

Эолосферная модель, так же как и теория вуланического разогрева планеты, во многом противоречит экспериментальным данным [22, 43, 66].

4. Ионосферная модель предложена в 1961 г. [41, 79]. Излучение на сантиметровых волнах объяснялось не высокой температурой поверхности планеты, а наличием в верхних слоях ее атмосферы ионизированного газа с электронной концентрацией, примерно в 1000 раз превышающей концентрацию в земной ионосфере. Измерения, выполненные АМС «Венера-4» (см. ниже), ионосферную модель атмосферы не подтвердили.

Исследования радиоизлучения и радиолокация. В 1964 г. было обнаружено, что излучение Венеры на волне 10,6 см поляризовано на краях видимого диска [46].

* Здесь и ниже содержание газа выражено через толщину однородного слоя при нормальных условиях (давление 760 мм рт. ст., температура 0°C), а содержание водяного пара — через толщину слоя «осажденной» влаги или в граммах над единицей площади поверхности.

Отсюда был сделан вывод о том, что излучение имеет тепловую природу и его источником является среда, имеющая резкую границу раздела, т. е. поверхность планеты. Истинная температура Венеры в противосолнечной точке, т. е. в местную полночь, оказалась равной 630 ± 70 К, а в околополярных областях 500 ± 100 К. Различия температур на освещенной и на неосвещенной Солнцем полушариях планеты не превышает 10%. На поверхности Венеры по данным радиолокации обнаружены области, обладающие повышенной отражательной способностью [53].

Разность высот на поверхности планеты, по-видимому, не превышает 5 км. Для 1/3 поверхности Венеры составлена карта ее рельефа. Оказалось, что большая часть северного полушария планеты гористая, а южное полушарие сравнительно ровное. Диэлектрическая постоянная поверхностного слоя Венеры $\epsilon = 3-4$ [46, 62]. Это означает, что на ней не должно быть больших открытых водоемов (для воды $\epsilon = 80$) и поверхность сложена из сухих пород с плотностью $\rho = 1,5-2$ г/см³ (песок, гранит, лимонит и т. п.). Средние квадратичные отклонения углов наклона на местности от касательной к шаровой поверхности составляют около 6°, т. е. поверхность Венеры более гладкая, чем Луны.

Исследования Венеры с помощью космических аппаратов были начаты в 1961 г., когда советская межпланетная станция «Венера-1», запущенная 12 февраля, прошла на расстоянии 10000 км от планеты. Американская космическая станция «Маринер-2», снабженная радиотелескопом, в конце 1962 г. пролетела вблизи Венеры и передала на Землю записи измерений на длине волн 13,5 и 19 мм, выполненные по светлой и темной частям диска, а также вдоль терминатора. Соответствующие максимальные значения радиояркостной температуры: 400; 460 и 570 К. Оказалось, что радиояркость к краям диска снижается, а истинная температура поверхности должна составлять примерно 700 К. 1 марта 1966 г. станция «Венера-3», стартовавшая 16 ноября 1965 г., впервые достигла планеты, доставив на ее поверхность вымпел с изображением Герба Советского Союза.

В 1967 г. с помощью магнитометра и четырех ловушек заряженных частиц, установленных на борту «Венеры-4», впервые было зарегистрировано резкое возрастание магнитного поля и потоков положительных ионов. По-видимому, это произошло в результате прохождения станции через фронт ударной волны, которая возникает при обтекании солнечной плазмой тела планеты. Концентрация положительных ионов на высоте нескольких сотен километров над поверхностью Венеры не превышала 10^3 см⁻³, что на несколько порядков меньше, чем в ночной ионосфере Земли на тех же высотах [40, 52].

Было установлено, что максимальный дипольный магнитный момент Венеры не превышает 0,003 (по данным станции «Маринер-2» не превышает 0,03) дипольного магнитного момента Земли [42, 76]. Спускаемый аппарат станции «Венера-4» 18 октября 1967 г. вошел в атмосферу Венеры и после аэродинамического торможения и торможения с помощью парашютной системы впервые произвел непосредственное измерение параметров атмосферы Венеры и передал эти данные на Землю.

В результате обработки полученных данных был определен следующий состав атмосферы: $90 \pm 10\%$ CO₂; 0,4—1,5% O₂; менее 7% N₂; 0,1—0,7% H₂O ($1-8$ г/м³). Давление и температура у поверхности Венеры оказались не ниже 1,8 МПа и 270°С соответственно. Эти данные подтвердили парниковую модель атмосферы. В верхней атмосфере Венеры нейтрального водорода содержится в 100 раз меньше, чем вблизи Земли, плотность заряженных частиц мала, атомарный кислород отсутствует. В условиях большого содержания CO₂, находящегося под большим давлением, наблюдается явление «сверхрефракции», когда кривизна лучей света превышает кривизну самой планеты.

Полученные данные о газовом составе атмосферы Венеры противоречат результатам спектроскопических наблюдений, которые, хотя и не дают представления о точном абсолютном содержании газов, все же позволяют с достаточной точностью найти относительное их содержание. Отношения O₂/CO₂ и H₂O/CO₂ в атмосфере Венеры по спектроскопическим наблюдениям намного меньше, чем по данным станции «Венера-4» [49].

С помощью спускаемого аппарата станции «Венера-4» был также осуществлен эксперимент по радиопросвечиванию атмосферы Венеры радиоволнами диапазона $\lambda = 0,3$ м [44]. На расстояниях 6000—100 км от поверхности Венеры изменений напряженности поля, обусловленных ее ионосферой, не наблюдалось. При движении спускаемого аппарата в тропосфере планеты средняя напряженность поля незначительно уменьшалась. Ослабление радиоволн, прошедших через тропосферу Венеры (относительно высоты последнего измерения), составляло $8 \pm 5\%$ по напряженности.

О точности определения баллистических параметров можно судить хотя бы по тому, что диаметр трубки траекторий у Венеры при полете станции «Венера-4», рассчитанный с учетом ошибок траекторных измерений, прогноза и коррекции, был примерно в 20 раз меньше диаметра планеты [52].

19 октября 1967 г. космический аппарат «Маринер-5» достиг минимального расстояния до центра Венеры, равного 10150 км. Примерно за 155 мин до сближения и спустя 20 мин после него аппарат прошел фронт ударной волны [61]. Измерения, проведенные с помощью УФ-фотометра с борта аппарата [56], показали, что в атмосфере Венеры содержится атомарный водород примерно в том же количестве, что и в атмосфере Земли, но протяженность водородной атмосферы меньше. Отсюда следует, что

на высоте нескольких сот километров температура атмосферы у Венеры ниже, чем у Земли. На ночной стороне планеты отмечено слабое УФ-свечение. Эмиссия атомарного кислорода отсутствует.

В результате наблюдения радиозатмения аппарата «Маринер-5» на частотах 49,8 и 423,3 МГц были получены «ночной» и «дневной» профили электронной концентрации [78]. Их главные максимумы приходятся на расстояния 6200 км и равны соответственно 10^4 см^{-3} и $\sim 5 \cdot 10^5 \text{ см}^{-3}$. Подтвердились данные о том, что атмосфера Венеры обладает свойством сверхпреломления: радиосигналы на критическом уровне огибают всю планету. Для максимального дипольного магнитного момента Венеры найдено, что он не превышает 0,01 земного [55].

Советские межпланетные станции «Венера-5» и «Венера-6», стартовавшие 5 и 10 января 1969 г., достигли Венеры соответственно 16 и 17 мая 1969 г. Фронт изменения потоков плазмы был пройден на расстоянии около 30000 км от центра планеты. После сокращения этого расстояния до 10000 км плотность водородной короны оказалась равной 100 атомам в кубическом сантиметре. Отделившиеся спускаемые аппараты станций, имеющие массу по 405 кг каждая, вошли в атмосферу Венеры с ночной ее стороны на удалении примерно 2700 км от линии терминатора и впервые в мире провели совместный эксперимент по глубокому зондированию ее атмосферы. Забор проб атмосферного газа для анализа на каждом спускаемом аппарате проводился дважды (табл. 1.9).

Таблица 1.9

Забор пробы	„Венера-5“		„Венера-6“	
	Давление, МПа	Температура, °C	Давление, МПа	Температура, °C
1	~0,06	~25	~0,1	~60
2	~0,5	~150	~1,0	~225

Был определен следующий состав атмосферы: 93—97% CO_2 , 2—5% N_2 (вместе с инертными газами), менее 0,4% O_2 . Содержание паров воды на уровне высот, соответствующих давлению 0,06 МПа (0,6 атм), составляет 4—11 г/м³. Для каждого спускаемого аппарата было получено свыше 70 измерений давления в интервале от 0,05 до 2,7 МПа (от 0,5 до 27 атм) и свыше 50 измерений температуры в интервале от 25 до 320° C. Измерения давления, температуры и плотности производились на участке протяженностью около 40 км с точностью до нескольких процентов. Зависимость температуры от высоты мало отличается от адиабатической. Высоты, соответствующие одинаковым значениям давления и температуры, по измерениям двух спускаемых аппаратов различаются на 12—16 км, что можно объяснить наличием в рельефе планеты значительных неровностей. Энергетическая освещенность атмосферы оказалась не выше порогового значения 0,5 Вт/м². Исключение представляет зарегистрированная спускаемым аппаратом станции «Венера-5» за 4 мин. до прекращения радиосвязи освещенность, равная 25 Вт/м².

На основании данных, полученных с помощью космических аппаратов, можно считать, что давление на поверхности Венеры достигает примерно 10 МПа (100 атм), а температура 500° C.

1.3.5. Земля и околоземное пространство

Гравитационное поле и фигура Земли

Гравитационным полем Земли называется поле сил тяжести, характеризуемое потенциалом сил тяжести W и ускорением g .

Потенциал сил тяжести

$$W = U + V,$$

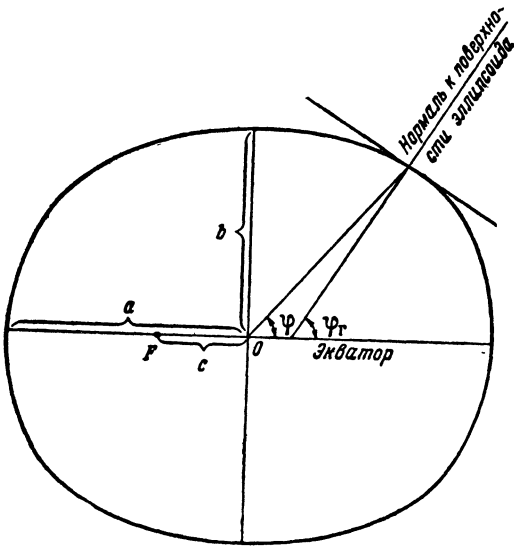
где U — потенциал сил притяжения;
 V — потенциал центробежных сил.

Центробежная сила возникает в результате вращения системы координат, жестко связанной с планетой.

Потенциал центробежной силы

$$V = \frac{1}{2} \omega^2 r^2 \cos^2 \varphi.$$

где ω_3 — угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси, равная $7,29211 \cdot 10^{-5}$ с $^{-1}$;
 r — расстояние от центра масс Земли до точки пространства, в которой рассчитывается потенциал;
 φ — широта этой точки.
 Потенциал сил притяжения для сферической модели Земли, когда плотность является функцией только расстояния от центра,



$$U = \frac{\mu}{r},$$

где $\mu = fM = a_{00} = 3,98602 \cdot 10^5$ км ^{3} /с ^{2} ;
 f — гравитационная постоянная;
 M — масса Земли.
 Ускорение силы притяжения в этом случае направлено к центру Земли, и его величина

$$g = \frac{\mu}{r^2}.$$

Следующим приближением к действительной форме Земли является эллипсоид вращения, называемый *земным эллипсоидом*.
 Для характеристики размеров и формы земного эллипсоида используются (см. рис. 1.10) большая полуось a , малая полуось b , сжатие α и эксцентриситет e , причем

$$\alpha = \frac{a - b}{a};$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{2\alpha - \alpha^2}.$$

Рис. 1.10. Основные характеристики земного эллипсоида

Расстояние от центра земного эллипсоида до его поверхности

$$r_{\text{э}} = a \sqrt{\frac{1 - e^2(2 - e^2) \sin^2 \varphi_{\text{г}}}{1 - e^2 \sin^2 \varphi_{\text{г}}}} = a \sqrt{\frac{1 - \alpha(2 - \alpha)(2 - 2\alpha + \alpha^2) \sin^2 \varphi_{\text{г}}}{1 - \alpha(2 - \alpha) \sin^2 \varphi_{\text{г}}}},$$

где $\varphi_{\text{г}}$ — геодезическая широта, связанная с геоцентрической широтой φ формулой

$$\text{tg } \varphi = (1 - e^2) \text{tg } \varphi_{\text{г}} = (1 - \alpha)^2 \text{tg } \varphi_{\text{г}}.$$

С ошибкой не более 80 м радиус $r_{\text{э}}$ и высота h над эллипсоидом имеют значения

$$r_{\text{э}} = a(1 - \alpha \sin^2 \varphi); \quad h = r - a(1 - \alpha \sin^2 \varphi).$$

Общий земной эллипсоид наиболее правильно представляет всю поверхность Земли.

Референц-эллипсоид — эллипсоид, наилучшим образом представляющий тот или иной район поверхности Земли.

В СССР в качестве референц-эллипсоида принят эллипсоид Ф. Н. Красовского.

Размеры общего земного эллипсоида и взаимная ориентация референц-эллипсоидов постоянно уточняются.

Характеристики некоторых референц-эллипсоидов приведены в табл. 1.10.

Таблица 1.10

Государство	Референц-эллипсоид	Большая полуось a в м	Сжатие α
СССР	Красовского*	6378245	1 : 298,3
Италия, Египет, Финляндия	Хайфорда	6378388	1 : 297,0
Египет	Гельмерта	6378200	1 : 298,3
США, Канада	Кларка 1	6378206	1 : 295,0
Норвегия, Югославия, Польша	Бесселя	6377397	1 : 299,15

* П. С. Закагов. Курс высшей геодезии. М., Геодезиздат, 1953.

В качестве следующего приближения к действительной форме Земли после двухосного эллипсоида иногда рассматривается *трехосный эллипсоид*. Однако определяется он неуверенно, поскольку трехосность имеет одинаковый порядок с другими аномалиями формы Земли.

Разность полуосей экваториального эллипса порядка 200 м, а большая полуось этого эллипса проходит в районе 38° в. д. $\div 25^\circ$ з. д.

Практического применения трехосный эллипсоид не получил вследствие значительного усложнения всех формул.

Потенциал уровненного эллипсоида вращения с точностью до величин порядка квадрата сжатия включительно

$$U = \frac{a_{00}}{r} + \frac{a_{20}}{r^3} P_{20}(\sin \varphi) + \frac{a_{40}}{r^5} P_{40}(\sin \varphi), \quad (1.1)$$

где a_{00} , a_{20} , a_{40} — некоторые константы;
 $P_{20}(\sin \varphi)$ и $P_{40}(\sin \varphi)$ — многочлены Лежандра, определяемые по формулам

$$P_{20}(\sin \varphi) = \frac{3}{2} \sin^2 \varphi - \frac{1}{2};$$

$$P_{40}(\sin \varphi) = \frac{35}{8} \sin^4 \varphi - \frac{15}{4} \sin^2 \varphi + \frac{3}{8}.$$

Для определения констант могут быть использованы выражения

$$a_{00} = fM = \gamma_e a^2 \left(1 - a + \frac{3}{2} m - \frac{15}{14} ma + \dots \right);$$

$$a_{20} = -\gamma_e a^4 \left(\frac{2}{3} a - a^2 - \frac{1}{3} m + \frac{10}{7} ma + \dots \right);$$

$$a_{40} = \frac{8}{35} \gamma_e a^6 \left(\frac{7}{2} a^2 - \frac{5}{2} ma + \dots \right), \quad m = \frac{\omega_3^2 a}{\gamma_e},$$

где ω_3 — угловая скорость вращения Земли;

γ_e — ускорение силы тяжести на экваторе;

a — большая полуось общего земного эллипсоида.

Численные значения констант по данным [97]:

$$a_{00} = 3,986 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2; \quad a_{20} = -1,756 \cdot 10^{10} \text{ км}^5/\text{с}^2; \quad a_{40} = 1,548 \cdot 10^{15} \text{ км}^7/\text{с}^2.$$

Выражение (1.1) называют *нормальным потенциалом Земли*. Так как член с коэффициентом a_{40} на три порядка меньше члена с a_{20} , то при некоторых расчетах движения космических объектов в качестве нормального потенциала принимают выражение

$$U = \frac{a_{00}}{r} + \frac{a_{20}}{r^3} P_{20}(\sin \varphi). \quad (1.2)$$

Радиальная g_r и меридиональная g_m составляющие ускорения силы притяжения (положительное направление отсчета g_r — к центру Земли, g_m — на юг в горизонтальной плоскости) определяются по формулам

$$g_r = \frac{a_{00}}{r^2} + 3 \frac{a_{20}}{r^4} P_{20}(\sin \varphi); \quad g_m = -\frac{a_{20}}{r^4} P_{21}(\sin \varphi),$$

где

$$P_{21}(\sin \varphi) = 3 \sin \varphi \cos \varphi.$$

При точном расчете параметров орбит спутников представление Земли в виде эллипсоида уже недостаточно. В таких случаях в качестве следующего приближения к действительной поверхности Земли принимают *геоид* — гипотетическую уровненную поверхность потенциала силы тяжести, совпадающую с уровнем спокойного океана*.

Потенциал притяжения геоида может быть представлен в виде разложения по сферическим функциям

$$U = \frac{a_{00}}{r} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n (a_{nm} \cos m L + b_{nm} \sin m L) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (1.3)$$

где a_{nm} , b_{nm} — коэффициенты, определяемые из гравиметрических данных, а также по наблюдениям за движением ИСЗ;

L — долгота;

$P_{nm}(\sin \varphi)$ — присоединенные функции Лежандра степени n и порядка m .

* П. Е. Эльясберг. Введение в теорию полета ИСЗ. М., «Наука», 1965.

При $m=0$ выражение $P_{n0}(\sin \varphi)$ — многочлен Лежандра степени n .
Сферической функцией степени n называется тригонометрический многочлен вида

$$S(\varphi, L) = a_{n0} P_{n0}(\sin \varphi) + \sum_{m=1}^n (a_{nm} \cos mL + b_{nm} \sin mL) P_{nm}(\sin \varphi).$$

Здесь $P_{n0}(\sin \varphi)$ — зональные сферические функции, или зональные гармоники;
 $\cos mL P_{nm}(\sin \varphi)$; $\sin mL P_{nm}(\sin \varphi)$ — тессеральные сферические функции, или тессеральные гармоники;
 $\cos nL P_{nn}(\sin \varphi)$; $\sin nL P_{nn}(\sin \varphi)$ — секториальные сферические функции, или секториальные гармоники.

Схемы изменения знаков на сфере, даваемые этими гармониками Y_{nm} , приведены на рис. 1.11.

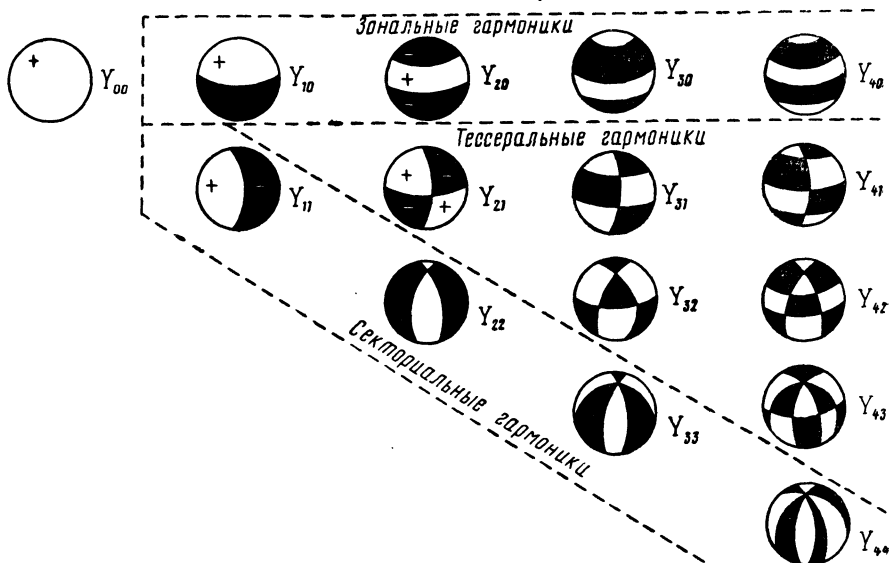


Рис. 1.11. Схемы изменения знаков на сфере, даваемые зональными, тессеральными и секториальными гармониками

Значения сферических функций до 8-го порядка даны в работе Жонголовича [87].
При расчетах на электронных вычислительных машинах эти функции удобно опеределять с использованием рекуррентных зависимостей:

$$P_{nm} = \frac{(2n-1) \sin \varphi P_{n-1,m} - (n+m+1) P_{n-2,m}}{n-m}, \quad \text{если } m < n, \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

$$P_{nm} = (2n-1) P_{n-1,n-1} \cos \varphi, \quad \text{если } n = m.$$

Для кратных тригонометрических функций

$$\left. \begin{array}{l} \sin mL = \sin L \cos(m-1)L + \cos L \sin(m-1)L; \\ \cos mL = \cos L \cos(m-1)L - \sin L \sin(m-1)L. \end{array} \right\} \quad (1.5)$$

Первые три зависимости, необходимые для начала расчета по формуле (1.4), имеют вид

$$P_{00} = 1; \quad P_{10} = \sin \varphi; \quad P_{11} = \cos \varphi. \quad (1.6)$$

В формулах (1.4) и (1.6) для краткости опущен аргумент $(\sin \varphi)$.

Аномальной частью гравитационного поля называется разность между величиной, даваемой выражением (1.3), и величиной, получаемой из формул (1.1) или (1.2).

Коэффициенты аномального поля регулярно уточняются по мере получения новых гравиметрических данных и обработки результатов наблюдений за ИСЗ. Однако современное распределение измерений силы тяжести по поверхности Земли и данных наблюдений за движением ИСЗ недостаточно, чтобы дать полную характеристику аномального гравитационного поля Земли, поэтому величины коэффициентов разложения в среднем лишь несколько больше, чем их погрешности. В связи с этим коэффициенты a_{20} и a_{40} в выражениях (1.1) и (1.2) нормального потенциала иногда не изменяют после уточнения поля, а разность относят к аномальной части потенциала.

Потенциал аномалий земного притяжения можно представить в виде

$$\Delta U = g_0 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} \sum_{m=0}^n (\alpha_{nm} \cos mL + \beta_{nm} \sin mL) P_{nm}(\sin \varphi), \quad (1.7)$$

где α_{nm}, β_{nm} — коэффициенты разложения;
 g_0 — среднее значение ускорения силы тяжести;
 R — средний радиус Земли.

Проекции ускорений на радиус-вектор r , нормаль к нему в плоскости меридиана по широте φ и нормаль к плоскости меридиана по долготе L определяются по формулам

$$\begin{aligned} \Delta g_r &= \frac{g_0}{R} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (\alpha_{nm} \cos mL + \beta_{nm} \sin mL) P_{nm}(\sin \varphi); \\ \Delta g_m &= \frac{g_0}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (\alpha_{nm} \cos mL + \beta_{nm} \sin mL) \times \\ &\quad \times \left[P_{n, m+1}(\sin \varphi) - \frac{m \sin \varphi}{\cos \varphi} P_{nm}(\sin \varphi) \right]; \\ \Delta g_L &= -\frac{g_0}{R \cos \varphi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (-\alpha_{nm} \sin mL + \beta_{nm} \cos mL) m P_{nm}(\sin \varphi). \end{aligned}$$

Потенциал притяжения Земли в различных работах записывают по-разному, в зависимости от принятой системы констант. Различная запись потенциала не приводит к существенным трудностям, поскольку элементарными преобразованиями одно выражение может быть сведено к другому, а коэффициенты разложения при этом требуют простого пересчета. Часто в советской литературе встречается запись потенциала притяжения в виде

$$U = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n (c_{nm} \cos mL + d_{nm} \sin mL) P_{nm}(\sin \varphi) \right]. \quad (1.8)$$

По данным работы [90]:

$r_0 = 0,63635530 \cdot 10^4$ км;	$d_{31} = -0,00000096$;	$d_{41} = -0,00000040$;
$c_{20} = -0,00109808$;	$c_{32} = 0,00000036$;	$c_{42} = 0,00000001$;
$c_{21} = 0,00000015$;	$d_{32} = -0,00000050$;	$d_{42} = 0,00000008$;
$d_{21} = 0,00000061$;	$c_{33} = 0,00000042$;	$c_{43} = 0,00000005$;
$c_{22} = 0,00000574$;	$d_{33} = 0,00000034$;	$d_{43} = -0,00000001$;
$d_{22} = -0,00000158$;	$c_{40} = 0,00000358$;	$c_{44} = 0,00000001$;
$c_{30} = 0,00000442$;	$c_{41} = -0,00000067$;	$d_{44} = 0,00000002$;
$c_{31} = 0,00000199$;		$c_{50} = 0,00000068$.

Отсутствующие коэффициенты принимаются равными нулю

Аномалии ускорения силы притяжения на поверхности Земли достигают 250 миллигал (1 гал = 1 см/с²).

По аналогии с гравитационным потенциалом фигура Земли — геоид — может быть представлена рядом сферических функций. Поверхность геоида характеризуется высотой Δh над общим земным эллипсоидом

$$\Delta h = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\alpha_{nm} \cos mL + \beta_{nm} \sin mL) P_{nm}(\sin \varphi).$$

Среднее квадратическое отклонение высот геоида составляет около 30 м, а отдельные отклонения геоида от общего земного эллипсоида достигают 160 м. Схема аномалий высот приведена на рис. 1.12 [87].

Атмосфера и ее свойства

Вертикальная протяженность атмосферы составляет ~20 000 км. Резкой верхней границы ее не существует. Атмосфера постепенно переходит в межпланетную среду.

В зависимости от распределения температуры атмосферу принято делить на 5 слоев:

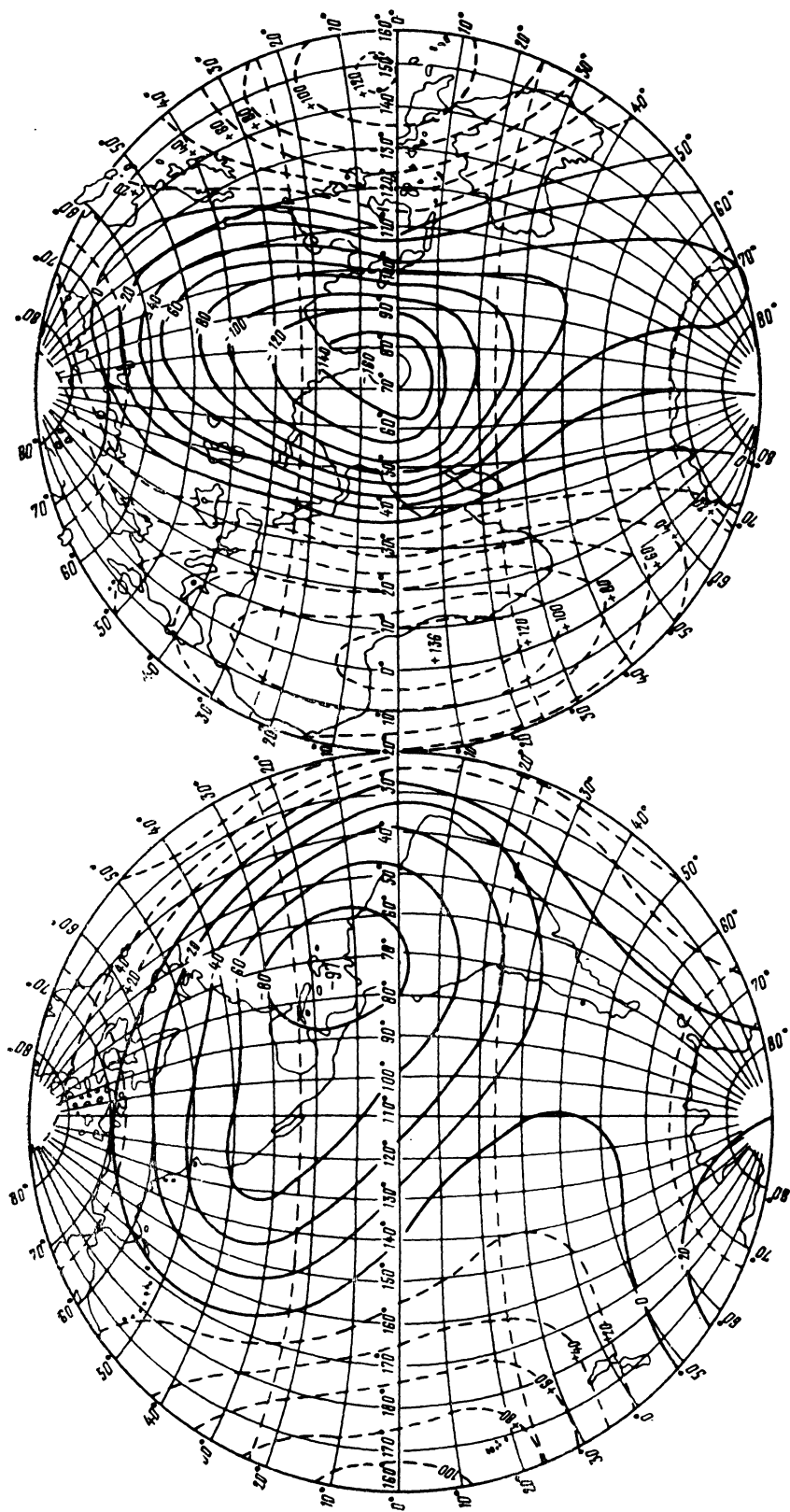


Рис. 1.12. Линии отклонения высот геоида от общего земного эллипсоида

тропосфера	от 0 до 11÷16 км
стратосфера	от 11÷16 до 50 км
мезосфера	от 50 до 80 км
термосфера	от 80 до 600÷800 км
экзосфера	выше 600÷800 км

По составу воздуха атмосфера делится на *гомосферу* (0—95 км), в которой относительный состав основных газов (N_2 , O_2 и Ar) и молекулярный вес воздуха практически не изменяются с высотой ($\mu = \mu_0 = 28,966$), и *гетеросферу*, где происходит уменьшение молекулярного веса (рис. 1.13) и наряду с молекулярным азотом и кислородом появляются атомарные азот и кислород. По этому же признаку в атмосфере выделяют *озоносферу* (20—55 км).

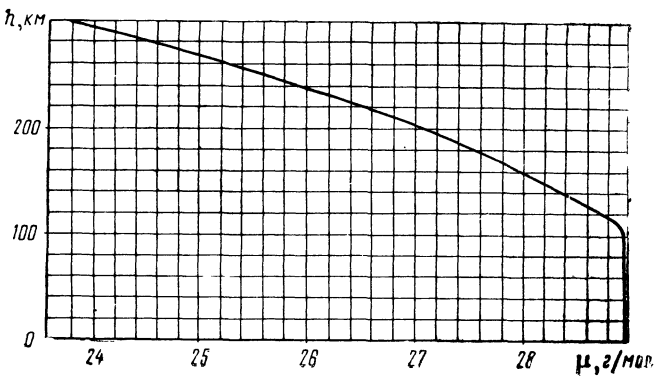


Рис. 1.13. Зависимость молекулярного веса μ от высоты h .

В табл. 1.11 приведен состав сухого воздуха вблизи поверхности Земли.

Таблица 1.11

Состав сухого воздуха вблизи поверхности Земли

Газ	Содержание, % по объему	Молекулярный вес, г/моль	Плотность по отношению к воздуху
Азот	$78,084 \pm 0,004$	28,016	0,967
Кислород	$20,946 \pm 0,002$	32,000	1,105
Аргон	$0,934 \pm 0,001$	39,944	1,379
Углекислый газ	$0,030 \pm 0,003$	44,010	1,529
Неон	$(1,821 \pm 0,004) \cdot 10^{-3}$	20,183	0,695
Гелий	$(5,239 \pm 0,005) \cdot 10^{-4}$	4,003	0,138
Криптон	$(1,14 \pm 0,01) \cdot 10^{-4}$	83,800	2,868
Водород	$5 \cdot 10^{-5}$	2,016	0,070
Ксенон	$(8,7 \pm 0,1) \cdot 10^{-6}$	131,300	4,524
Озон	$1 \cdot 10^{-6} - 1 \cdot 10^{-5}$	48,000	1,624
Сумма составляющих сухого воздуха	100	28,956	1,000

Изменение процентного содержания основных составляющих атмосферы в зависимости от высоты приведено на рис. 1.14.

Область атмосферы выше 60 км, где становится заметной концентрация ионизированных атомов и молекул, называют *ионосферой*. Она включает в себя несколько слоев (слой *D* на высоте 60 км, слой *E* на высоте 110—140 км, слой *F* — выше 220 км).

Средняя зависимость электронной концентрации от высоты и основные компоненты ионосферных областей представлены на рис. 1.15.

Температура. В тропосфере с увеличением высоты температура падает. Вертикальный градиент $\approx 0,0065$ К/м с возможными отклонениями до 0,003 К/м в ту или другую сторону. В стратосфере падение температуры в среднем замедляется, переходя в изотермию вплоть до высоты 20—25 км. Выше температура возрастает, достигая максимума около 273 ± 20 К на высоте 45—55 км (рис. 1.16).

В мезосфере температура падает и в области мезопаузы (80—90 км) достигает минимума летом около 183—193 К (-90° , -80° С), зимой в умеренных и высоких широтах — 233—223 К (-40 , -50° С). В этом слое происходит изменение фаз годовых колебаний температуры на противоположную: максимум температуры наблюдается зимой (рис. 1.17).

В термосфере и экзосфере температура монотонно возрастает.

Ветер. Преобладающее направление ветра в тропосфере — западное, хотя в приземном слое (до 1—1,5 км) вследствие влияния сил трения и различия притоков лучистой энергии Солнца в разных районах земного шара оно может быть различным.

В верхней тропосфере и нижней стратосфере часто наблюдаются струйные течения — сравнительно узкие и большой протяженности зоны сильных ветров (скорость более 100 км/ч). Иногда скорость ветра достигает 700 км/ч. Основные струйные течения наблюдаются на широтах 25° — 30° и 60° — 70° . Летом центры струй располагаются примерно на 10° ближе к полюсам, чем зимой. Сохраняя западное направление, скорость ветра убывает до высоты 22—27 км. Выше этого уровня она вновь возрастает с высотой (рис. 1.18).

Рис. 1.14. Изменение процентного содержания основных составляющих атмосферы (молекулярного O_2 , атомарного O кислорода и азота N_2) с высотой при условиях диффузионного равновесия выше 130 км

Прозрачность атмосферы. Прозрачность

всей атмосферы в вертикальном направлении достигает максимальных значений в зимнее время, минимальных — летом, в послеполуденные часы. Годовой ход коэффициента ослабления α для всей атмосферы представлен в табл. 1.12.

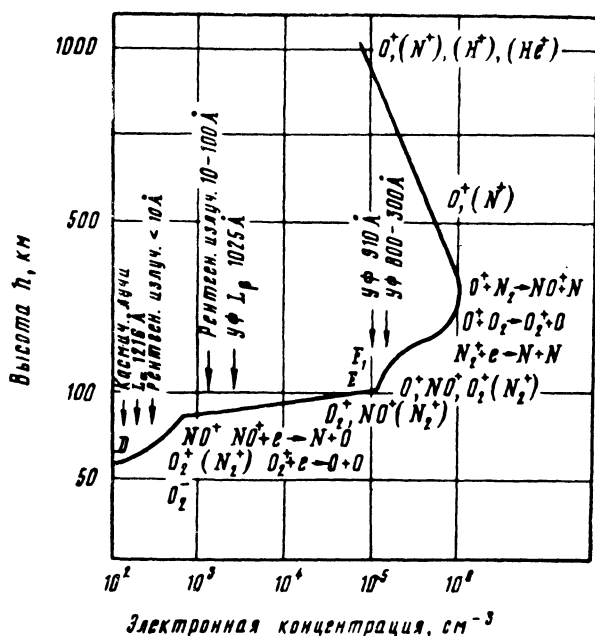


Рис. 1.15. Средняя зависимость электронной концентрации h и основные компоненты ионосферных областей. Вертикальные стрелки и надписи к ним показывают, под воздействием какого излучения возникают те или иные электроны

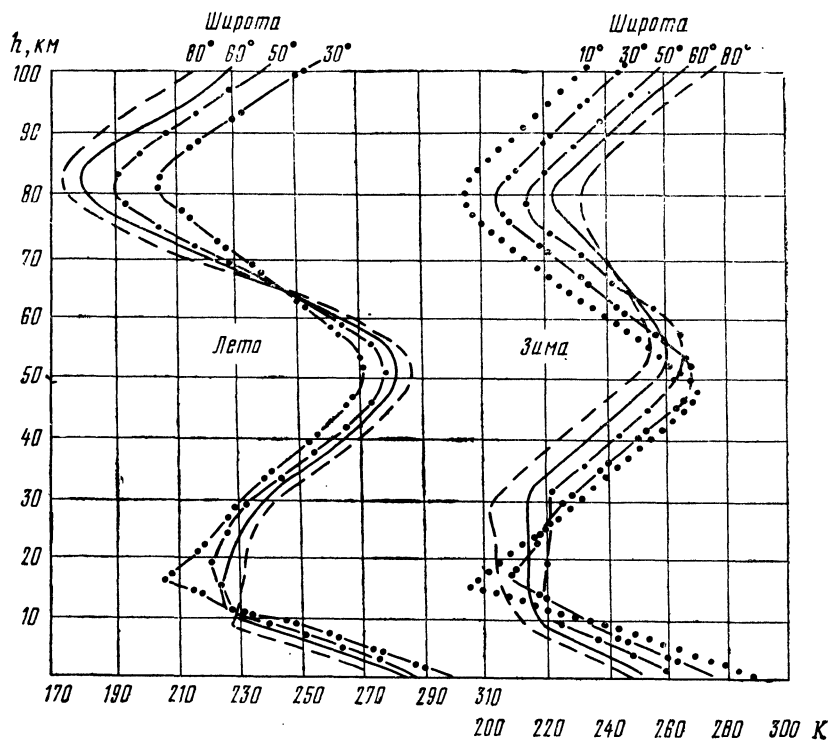


Рис. 1. 16. Распределение температуры воздуха T по высоте h летом и зимой на различных широтах

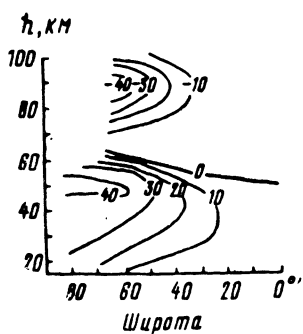


Рис. 1. 17. Амплитуда годового хода температуры воздуха (разность между летней и зимней температурами)

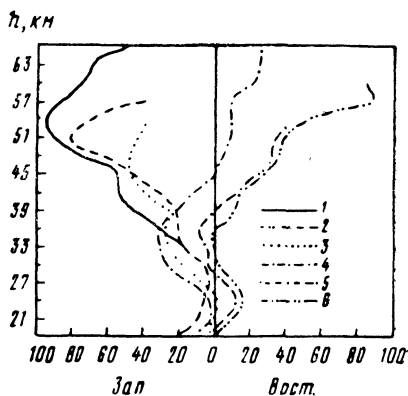


Рис. 1. 18. Средние значения зональной составляющей скорости ветра над Северной Америкой (скорость ветра — по оси абсцисс — в узлах; 1 узел = 0,515 м/с)
1—зима 1959—1960 г.; 2—1—31/III; 3—1—15/IV;
4—16—30/IV; 5—1—10/V; 6—11—31/V 1960

Таблица 1.12

Месяц	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
α	0,190	0,264	0,262	0,267	0,270	0,295	0,282	0,260	0,250	0,185	0,134	—

Давление и плотность воздуха. Плотность ρ и давление p уменьшаются с высотой по экспоненциальному закону, причем их вертикальный градиент с высотой в основном уменьшается. Начиная с высоты 180 км наблюдается значительный суточный ход. С увеличением высоты амплитуда колебания возрастает: на высоте 600—800 км дневные значения ρ примерно на порядок выше ночных (рис. 1.19), причем колебания в минимум солнечной активности больше, чем в максимум. Существует предположение, что выше 800 км амплитуда колебаний вновь уменьшается. Плотность достигает максимума около 14 ч местного времени (рис. 1.20).

Наблюдаются значительные флуктуации плотности верхней атмосферы, связанные с активностью Солнца (табл. 1.13).

Параметры стандартной атмосферы от 0 до 300 км представлены в табл. 1.14.

Таблица 1.13

**Ночные и дневные значения плотности в кг/м^3 для минимума
и максимума солнечной активности**

Высота h км	Минимум солнечной активности		Максимум солнечной активности	
	4 ч (ночь)	14 ч (день)	4 ч (ночь)	14 ч (день)
120	$2,49 \cdot 10^{-8}$	$2,49 \cdot 10^{-8}$	$2,49 \cdot 10^{-8}$	$2,49 \cdot 10^{-8}$
140	$4,2 \cdot 10^{-9}$	$4,08 \cdot 10^{-9}$	$3,84 \cdot 10^{-9}$	$3,71 \cdot 10^{-9}$
160	1,19	1,19	1,41	1,37
180	$4,19 \cdot 10^{-10}$	$4,69 \cdot 10^{-10}$	$6,81 \cdot 10^{-10}$	$6,82 \cdot 10^{-10}$
200	1,69	2,20	3,76	3,98
220	$7,57 \cdot 10^{-11}$	1,15	2,25	2,55
240	3,66	$6,46 \cdot 10^{-11}$	1,42	1,73
260	1,88	3,83	1,09	1,22
280	1,02	2,37	$6,28 \cdot 10^{-11}$	$8,89 \cdot 10^{-11}$
300	$5,72 \cdot 10^{-12}$	1,51	4,35	6,63
320	3,30	$9,89 \cdot 10^{-12}$	3,03	5,03
340	1,95	6,61	2,20	3,87
360	1,17	4,49	1,60	3,02
380	$7,17 \cdot 10^{-13}$	3,10	1,18	2,38
400	4,43	2,16	$8,80 \cdot 10^{-12}$	1,89
420	2,78	1,53	6,62	1,51
440	1,76	1,09	5,03	1,22
460	1,13	$7,77 \cdot 10^{-13}$	3,84	$9,91 \cdot 10^{-12}$
480	$7,35 \cdot 10^{-14}$	5,60	2,91	8,10
500	4,87	4,06	2,30	6,65
520	3,29	2,96	1,79	5,50
540	2,28	2,17	1,40	4,56
560	1,62	1,61	1,10	3,80
580	1,19	1,19	$8,70 \cdot 10^{-13}$	3,18
600	$8,98 \cdot 10^{-15}$	$8,91 \cdot 10^{-14}$	6,90	2,67
620	6,98	6,71	5,49	2,25
640	5,60	5,09	4,38	1,90
660	4,60	3,90	3,51	1,61
680	3,85	3,01	2,82	1,37
700	3,28	2,35	2,28	1,17
720	2,84	1,86	1,84	$9,98 \cdot 10^{-13}$
740	2,48	1,48	1,49	8,35
760	2,19	1,20	1,21	7,34
780	1,94	$9,86 \cdot 10^{-15}$	$9,91 \cdot 10^{-14}$	6,31
800	$1,74 \cdot 10^{-15}$	8,19	8,12	5,44

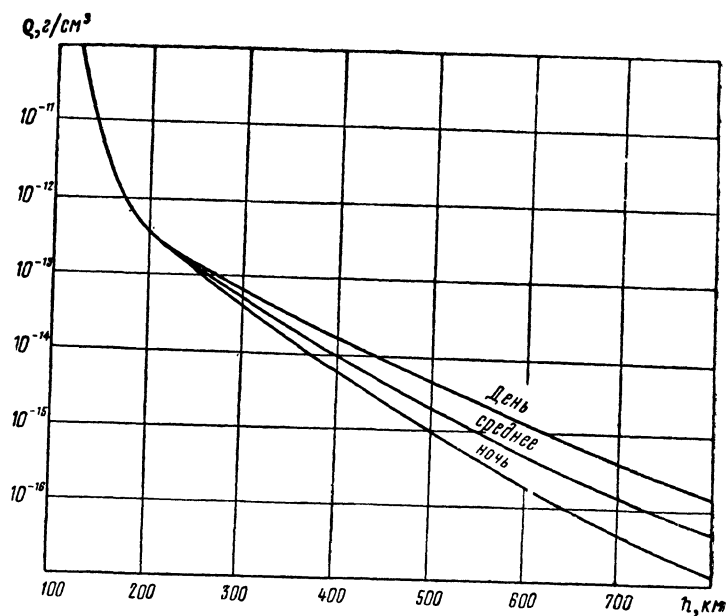


Рис. 1. 19. Распределение плотности ρ воздуха днем и ночью в слое атмосферы на высоте 100—800 км

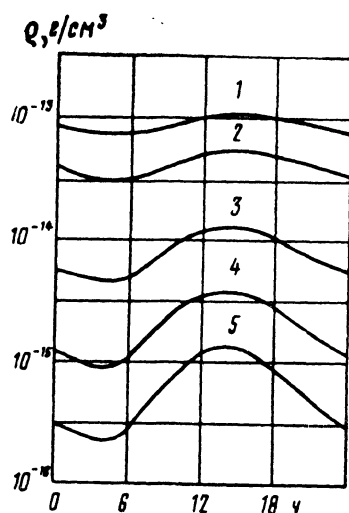


Рис. 1. 20. Суточные колебания плотности воздуха в слое 260—600 км (по В. В. Михневич):

1—260 км; 2—300 км; 3—400 км; 4—500 км;
5—600 км

Таблица стандартной атмосферы (от 0 до 300 км) (ГОСТ 4401—64)

Геометрическая высота м	Температура К	Давление Па (мм рт. ст.)	Плотность кг/м ³	Относи- тельная плотность ζ_h/ζ_0	Вязкость	
					динами- ческая кг·с/м ²	кинемати- ческая м ² /с
0	288,15	101324,72 (760,00)	1,2250	1,0000	1,8247·10 ⁻⁶	1,4607·10 ⁻⁵
500	284,90	95453,22 (715,96)	1,1672	9,5282·10 ⁻¹	1,8086	1,5196
1000	281,65	89875,03 (674,12)	1,1117	9,0751	1,7925	1,5812
1500	278,40	84566,14 (634,30)	1,0582	8,6484	1,7763	1,6461
2000	275,14	79497,24 (596,28)	1,0066	8,2171	1,7600	1,7146
2500	271,89	74692,32 (560,24)	9,5706·10 ⁻¹	7,8127	1,7436	1,7866
3000	268,64	70124,70 (525,98)	9,0941	7,4237	1,7271	1,8624
3500	265,38	65774,41 (493,35)	8,6345	7,0485	1,7104	1,9426
4000	262,13	61656,09 (462,46)	8,1942	6,6891	1,6938	2,0271
4500	258,88	57748,42 (433,15)	7,7714	6,3440	1,6770	2,1162
5000	255,63	54044,74 (405,37)	7,3654	6,0125	1,6601	2,2103
5500	252,38	50534,37 (379,04)	6,9758	5,6945	1,6432	2,3100
6000	249,13	47213,32 (354,13)	6,6022	5,3895	1,6261	2,4153
6500	245,88	44068,25 (330,54)	6,2441	5,0972	1,6089	2,5268
7000	242,63	41097,84 (308,26)	5,9010	4,8171	1,5917	2,6452
7500	239,38	38290,08 (287,20)	5,5725	4,5489	1,5743	2,7705
8000	236,14	35647,64 (267,38)	5,2591	4,2931	1,5568	2,9030
8500	232,89	33146,52 (248,62)	4,9585	4,0477	1,5393	3,0443
9000	229,64	30790,72 (230,95)	4,6712	3,8132	1,5216	3,1942
9500	226,40	28578,90 (214,36)	4,3977	3,5900	1,5038	3,3534
10000	223,15	26491,08 (198,70)	4,1357	3,3761	1,4858	3,5232
11000	216,66	22690,07 (170,19)	3,6485	2,9784	1,4497	3,8966
12000	216,66	19390,35 (145,44)	3,1180	2,5453	1,4497	4,5595
13000	216,66	16571,92 (124,30)	2,6648	2,1753	1,4497	5,3351
14000	216,66	14164,13 (106,24)	2,2776	1,8593	1,4497	5,2420
15000	216,66	12106,97 (90,810)	1,9467	1,5891	1,4497	7,3029
16000	216,66	10347,92 (77,616)	1,6640	1,3584	1,4496	8,5437
17000	216,66	8845,91 (66,350)	1,4224	1,1611	1,4497	9,9952
18000	216,66	7561,89 (56,719)	1,2159	9,9257·10 ⁻²	1,4497	1,1692·10 ⁻⁴
19000	216,66	6464,65 (48,489)	1,0395	8,4857	1,4497	1,3676
20000	216,66	5526,86 (41,455)	8,887·10 ⁻²	7,2547	1,4497	1,5997
21000	216,66	4725,33 (35,443)	7,5983	6,2027	1,4497	1,8710
22000	216,66	4040,32 (30,305)	6,4966	5,3033	1,4497	2,1883
23000	216,66	3454,64 (25,912)	5,5550	4,5347	1,4497	2,5593
24000	216,66	2954,15 (22,158)	4,7501	3,8776	1,4497	2,9929
25000	216,66	2526,18 (18,948)	4,0621	3,3160	1,4497	3,4998
26000	219,40	2162,35 (16,219)	3,4336	2,8030	1,4650	4,1842
27000	222,14	1854,51 (13,910)	2,9085	2,3743	1,4803	4,9911
28000	224,87	1594,40 (11,959)	2,4701	2,0164	1,4954	5,9370
29000	227,61	1372,55 (10,295)	2,1007	1,7149	1,5104	7,0510
30000	230,35	1183,59 (8,8777)	1,7901	1,4613	1,5254	8,3565
31000	233,08	1022,99 (7,6731)	1,5291	1,2482	1,5403	9,8788
32000	235,82	885,27 (6,6401)	1,3078	1,0676	1,5551	1,1661·10 ⁻³
33000	238,55	767,75 (5,7586)	1,1212	9,1527·10 ⁻³	1,5698	1,3730
34000	241,28	666,92 (5,0023)	9,6295·10 ⁻³	7,8608	1,5844	1,6135
35000	244,01	580,24 (4,3522)	8,2842	6,7626	1,5990	1,8929
36000	246,74	505,61 (3,7924)	7,1388	5,8276	1,6135	2,2165
37000	249,47	441,24 (3,3096)	6,1619	5,0301	1,6279	2,5908
38000	252,20	385,46 (2,8912)	5,3244	4,3465	1,6423	3,0248
39000	254,93	337,54 (2,5318)	4,6128	3,7656	1,6565	3,5216

Геометричес- кая высота м	Температура К	Давление Па (мм рт. ст.)	Плотность кг/м ³	Относи- тельная плотность ρ_h/ρ_0	Вязкость	
					динами- ческая кг·с/м ²	кинемати- ческая м ² /с
40000	257,66	295,85 (2,2191)	4,0003	3,2656	1,6707	4,0956
41000	260,38	259,80 (1,9487)	3,4762	2,8377	1,6848	4,7529
42000	263,11	228,50 (1,7128)	3,0236	2,4682	1,6988	5,5099
43000	265,83	201,06 (1,5081)	2,6350	2,1510	1,7929	6,3748
44000	268,56	177,18 (1,3290)	2,2984	1,8762	1,7267	7,3674
45000	271,28	156,41 (1,1732)	2,0086	1,6397	1,7405	8,4977
46000	274,00	138,25 (1,0370)	1,7577	1,4349	1,7542	9,7869
47000	274,00	122,26 (9,1703·10 ⁻¹)	1,5545	1,2690	1,7542	1,1067·10 ⁻²
48000	274,00	108,21 (8,1164)	1,3748	1,1223	1,7542	1,2513
49000	274,00	95,63 (7,1728)	1,2159	9,9258·10 ⁻⁴	1,7542	1,4148
50000	274,00	84,58 (6,3441)	1,0754·10 ⁻³	8,7788	1,7542	1,5997
55000	270,56	45,76 (3,4326)	5,8928·10 ⁻⁴	4,8105	1,7368	2,8903
60000	253,40	24,12 (1,8092)	3,3162	2,7071	1,6485	4,8749
65000	236,26	12,16 (9,1245·10 ⁻²)	1,7937	1,4642	1,5575	8,5151
70000	219,15	5,83 (4,3761)	9,2747·10 ⁻⁵	7,5712·10 ⁻⁵	1,4636	1,5475·10 ⁻¹
75000	202,06	2,64 (1,9790)	4,5490	3,7135	1,3667	2,9463
80000	185,00	1,11 (8,3564·10 ⁻³)	2,0979	1,7126	1,2655	5,9202
85000	185,00	0,45 (3,3976)	8,5303·10 ⁻⁶	6,9635·10 ⁻⁶	1,2665	1,4560·10 ⁻²
90000	185,00	1,844·10 ⁻¹ (1,3834)	3,4733	2,8354	1,2665	3,5759
95000	185,00	7,52·10 ⁻² (5,6408·10 ⁻⁴)	1,4170	1,1567	} Нет данных	
100000	209,22	3,241 (2,4310)	5,3993·10 ⁻⁷	4,4075·10 ⁻⁷		
105000	233,36	1,5337 (1,1504)	2,2900	1,8694		
110000	257,36	7,822·10 ⁻³ (5,8671·10 ⁻⁵)	1,0583	8,6391·10 ⁻⁸		
115000	294,97	4,308 (3,2314)	5,0674·10 ⁻⁸	4,1367		
120000	332,24	2,555 (1,9165)	2,6586	2,1703		
125000	442,64	1,674 (1,2555)	1,3025	1,0633		
130000	552,04	1,207 (9,0540·10 ⁻⁶)	7,5045·10 ⁻⁹	6,1261·10 ⁻⁹		
135000	660,51	9,2468·10 ⁻⁴ (6,9357)	4,7873	3,9080		
140000	768,00	7,3852 (5,5394)	3,2766	2,6748		
145000	874,48	6,0805 (4,5608)	2,3605	1,9269		
150000	980,05	5,1233 (3,8428)	1,7682	1,4434		
155000	1068,1	4,3912 (3,2937)	1,3855	1,1310		
160000	1155,3	3,8126 (2,8597)	1,1081	9,0457·10 ⁻¹⁰		
165000	1165,6	3,3325 (2,4996)	9,5683·10 ⁻¹⁰	7,8108		
170000	1175,0	2,9180 (2,1887)	8,2787	0,7581		
175000	1184,2	2,5598 (1,9200)	7,1767	5,8585	} Нет данных	
180000	1193,2	2,2494 (1,6872)	6,2332	5,0883		
185000	1202,0	1,9798 (1,4850)	5,4236	4,4274		
190000	1210,6	1,7456 (1,3093)	4,7276	3,8593		
195000	1218,9	1,5415 (1,1562)	4,1282	3,3700		
200000	1226,8	1,3634 (1,0226)	3,6109	2,9477		
205000	1236,0	1,2077 (9,0586·10 ⁻⁷)	3,1603	2,5798		
210000	1245,0	1,0716 (8,0379)	2,7709	2,2619		
215000	1253,7	9,5238·10 ⁻⁵ (7,1435)	2,4336	2,4816		
220000	1262,0	8,4773 (6,3585)	2,1412	1,7479		
225000	1269,9	7,5572 (5,6684)	1,8870	1,9242		
230000	1277,4	6,7469 (5,0606)	1,6656	1,3597		
235000	1284,4	6,0322 (4,5245)	1,4726	1,2021		
240000	1290,9	5,4006 (4,0508)	1,3039	1,0644		
245000	1297,0	4,8418 (3,6317)	1,1563	9,4395·10 ⁻¹¹		

Геометрическая высота м	Температура К	Давление Па (мм рт. ст.)	Плотность кг/м ³	Относительная плотность ρ_h/ρ_0	Вязкость	
					динамическая кг·с/м ²	кинематическая м ² /с
250000	1302,8	4,3468 (3,2604)	1,0270	8,3835	Нет данных	
255000	1309,5	3,9078 (2,9311)	9,1190·10 ⁻¹¹	7,4441		
260000	1316,2	3,5184 (2,6390)	8,1111	6,6213		
265000	1322,6	3,1723 (2,3794)	7,2256	5,8985		
270000	1328,8	2,8639 (2,1481)	6,4465	5,2624		
275000	1334,6	2,5900 (1,9427)	5,7605	4,7024		
280000	1340,0	2,3439 (1,7581)	5,1548	4,2080		
285000	1344,9	2,1246 (1,5936)	4,6195	3,7710		
290000	1349,5	1,9285 (1,4465)	4,1463	3,3848		
295000	1353,9	1,7521 (1,3142)	3,7253	3,0410		
300000	1358,0	1,5940 (1,1956)	3,3521	2,7367		

1.3.6. Марс

Во время великих противостояний Марс приближается к Земле на 56 млн. км, угол фазы относительно Земли не превышает 47°. Альbedo Марса на волнах от 3,8 до 70 см составляет 3—13%.

Поверхность при наблюдении с Земли выглядит сравнительно ровной. Отмечается сходство с поверхностью Луны в отношении фотометрического фазового закона [122]. На поверхности Марса различают области трех цветов:

1) оранжево-желтые, окружающие темные пятна и названные «материками» («континентами»);

2) темные области, получившие название «морей», «озер» и т. п.;

3) белые образования у полюсов планеты — «полярные шапки».

Очертания светлых и темных областей в общем устойчивы, что позволяет составлять карты поверхности Марса в ариографических (марсианских) координатах (рис. 1.21). При этом начальный меридиан проводится через «залив» Sabaeus Sinus. Открытые водоемы на Марсе не обнаружены [101]. (Водоем диаметром более 300 м давал бы заметные блики от Солнца). По-видимому, они не существовали и в прошлом, о чем говорят снимки, полученные при помощи космических аппаратов. Отсутствие водоемов и влажной почвы подтверждается низкими значениями (0,06—0,09) коэффициентов отражения поверхности, измеряемыми в диапазоне волн 12,5—70 см [106].

В работе [125] опубликовано большое количество лучших фотографий Марса, полученных за 55 лет наблюдений.

Измерения указывают на очень низкую теплопроводность верхнего слоя грунта планеты толщиной в несколько сантиметров.

Материки имеют постоянную светлую окраску; их альbedo примерно равно 0,30. Они занимают 5/6 площади поверхности планеты, по своим фотометрическим и поляризационным свойствам их вещество напоминает лимонит (гидрогетит $\text{Fe}_2\text{O}_3 \cdot n\text{H}_2\text{O}$, где $n < 1$) [107]. Данные радиолокационных наблюдений и исследований в инфракрасных лучах согласуются с предположением о том, что в состав вещества светлых областей в качестве основной компоненты входит очень тонкая и рыхлая кварцевая пыль, образующая покров, достигающий в некоторых районах глубины в несколько метров [106].

Темные области состоят из отдельных пятен и темных блоков, периодически меняют свою окраску со сменой марсианских времен года [100, 111]. Весной и летом они темнеют, приобретая более ясные очертания и зелено-голубой оттенок, причем темная окраска распространяется со стороны тающей полярной шапки преимущественно по определенным направлениям [104], а осенью и зимой блекнут, окрашиваются в желто-коричневые тона и границы их становятся расплывчатыми. Отдельные темные участки иногда на протяжении нескольких месяцев или лет изменяют свои очертания [102]. В 1954 г. к северо-востоку от Большого Сырта (Syrtis Major — наиболее четкое темное пятно на поверхности Марса) возникла новая темная область площадью около 580000 км² [24]. До недавнего времени предполагалось, что относительная устойчивость и сезонная изменчивость темных областей объясняется их растительной природой. Известны случаи, когда темные области резко уменьшали альbedo после прохождения над ними облаков, что можно объяснить или увлажнением поверхности, или реакцией растений на увеличение концентрации водяных паров. На снимках, полученных

ПЛАНЕТА МАРС

(КАРТА В ПРОЕКЦИИ МЕРКАТОРА)

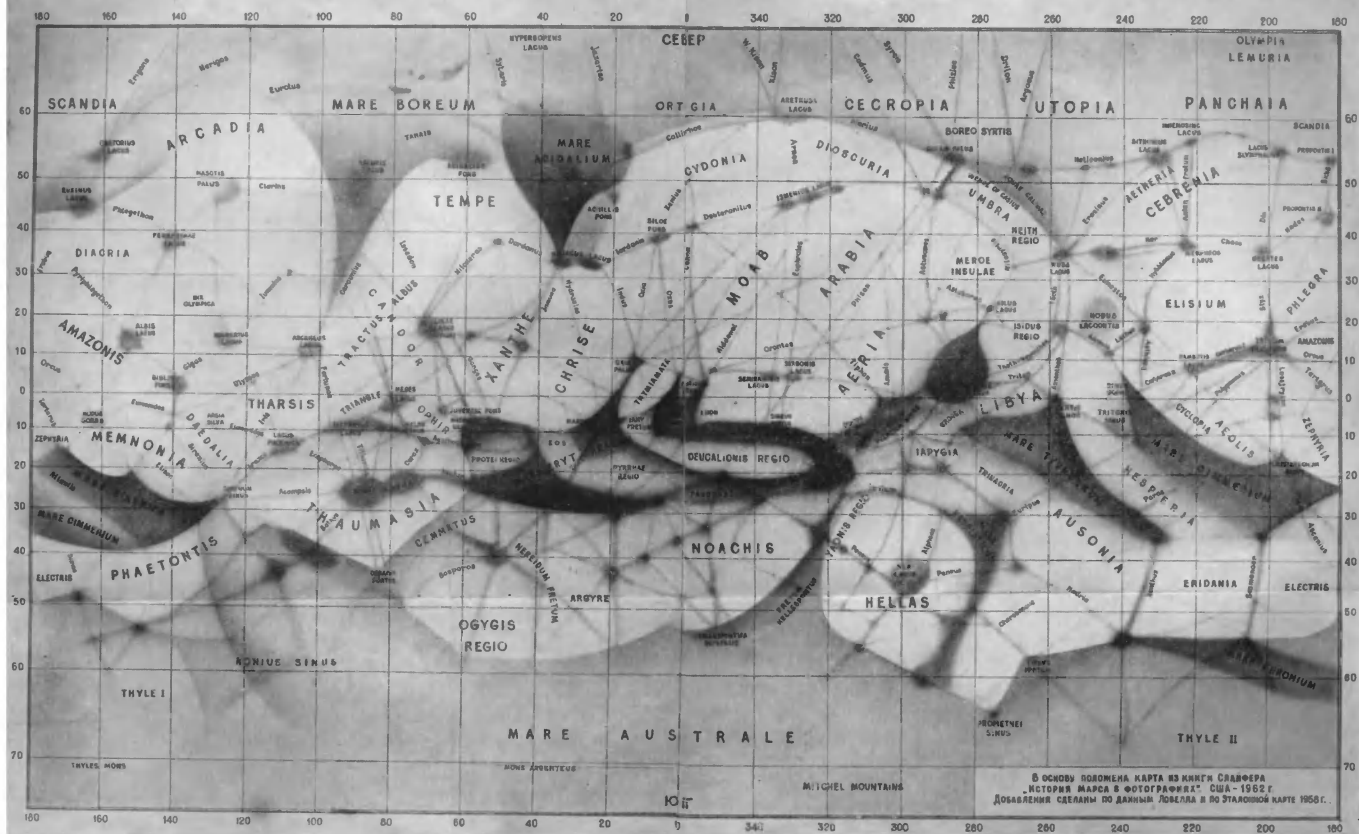


Рис. 1.21. Карта Марса

с помощью аппаратов серии «Маринер», не обнаружено следов жизни, но это нельзя рассматривать как доказательство того, что ее нет на Марсе [115].

Новейшие радиолокационные наблюдения дают основание считать, что темные области имеют большие средние высоты, чем светлые. Высота главных темных областей 10—20 км, средняя крутизна склонов — несколько градусов [123, 124]. Отражательная способность темных областей на радиоволнах соответствует земным скальным породам на силикатной основе с плотностью 2,5 г/см³ [106]. Эти данные подтверждают гипотезу о том, что темные области представляют собой выходы на поверхность коренных горных пород, а светлые области образованы из продуктов их разрушения, которые сдуваются ветрами. Значительную часть наблюдаемых на Марсе явлений можно объяснить переносом пыли ветрами.

Полярные шапки относятся к наиболее заметным деталям на поверхности планеты, их альbedo примерно равно 0,60. Средние ареографические координаты их центров [24]:

для северной шапки $\lambda=321^\circ$; $\beta=88,5^\circ$;
для южной шапки $\lambda=32^\circ$; $\beta=83,9^\circ$.

Белый покров в северном полушарии к концу зимы распространяется до широт 50° — 60° (иногда до 45°) и его диаметр достигает 4000—6000 км, а летом сокращается со скоростью 10—12 (иногда до 100) км за сутки до диаметра 700—1500 км. Южная шапка тает больше и в некоторые годы исчезает полностью [24], что объясняется эксцентричностью орбиты Марса. Таяние (или сублимация) происходит неравномерно: местами задерживается, а на некоторых участках белый покров сохраняется все лето (например, область Оуптриа вблизи Южного полюса). Вокруг тающей шапки образуется темная кайма, прилегающие к ней детали приобретают ясные очертания и эта «волна улучшения видимости» движется к экватору со средней скоростью 35 км за сутки и к концу лета заходит даже за экватор до 25° широты другого полушария. Изредка обе полярные шапки видны одновременно. Полярные шапки представляют собой, по-видимому, тонкий слой снега (инеев), состоящего из смеси H₂O и CO₂ и покрытого туманом или легкими облаками. Толщина этого слоя в среднем не превышает нескольких сантиметров [104]. Количество стаявшего в зоне каймы слоя снега по приблизительной оценке составляет 0,2 г/см² в сутки [108].

Каналы [117] при наблюдении с Земли представляют собой тонкие темные линии, протяженностью до нескольких тысяч километров. Все каналы берут начало и оканчиваются в «морях» и «озерах», а в местах их пересечения заметны темные пятнышки, получившие название «оазисов». Многие каналы следуют по дугам больших кругов. Каналы начинают темнеть и становятся видимыми в направлении от полюса к экватору спустя 10—15 дней с начала таяния шапки. В этот период у определенных каналов наблюдается раздвоение, когда вместо одного канала появляются два параллельных. Ширина каналов должна быть не меньше 20—50 км (иначе они были бы неразличимы), но ширина некоторых превышает 200 км. Как показали тщательные наблюдения, а также фотографии с космических аппаратов, каналы представляют собой цепочки темных пятен неправильной формы [111]. Наиболее полные карты Марса содержат свыше 800 каналов. На снимке № 11 (рис. 1.22), полученном с борта космического аппарата «Маринер-4», можно различить долинообразную структуру шириной около 50 км, которая, возможно, является каналом. Однако радиолокационные наблюдения дают основание считать, что каналы представляют собой хребты, склоны которых имеют наклон до 15° . Эффект раздвоения каналов объясняют наличием вблизи хребтов рифтовых долин [124].

15 июля 1965 г. космический аппарат «Маринер-4», запущенный 28 ноября 1964 г., прошел на расстоянии 9800 км от поверхности Марса. С борта этого аппарата, начавшего фотографировать Марс 15 июля, были получены снимки 22 участков, покрывающих около 1% всей поверхности планеты [103]. На 14 снимках заметны детали: обнаружено более 110 кратеров диаметром от 5 до 120 км, большинство из них имеет диаметр от 10 до 40 км. Позднее в результате специальной обработки снимков с помощью ЭВМ было обнаружено дополнительно около 200 кратеров. Плотность размещения кратеров примерно в 30 раз больше, чем на лунных морях, распределение их по диаметрам сходно с распределением для Луны. Валы кратеров возвышаются над окружающей местностью примерно на 100 м, отдельные валы покрыты белым веществом. Глубина кратеров составляет несколько сот метров. Угол наклона их стенок примерно равен 10° . Некоторые кратеры имеют центральную горку, у многих валы полуразрушены.

На рис. 1.22 изображен снимок № 11, сделанный с высоты 12500 км от поверхности Марса при зенитном расстоянии Солнца 47° . Север вверху. Усиление контраста $\times 4$. Размеры сфотографированной области 270 (север—юг) $\times$ 240 (восток—запад) км. Ее примерные координаты: 31° ю.ш., 197° в.д. У южного края снимка заметен объект прямоугольной формы. Это — дефект телепередачи. На снимках не обнаружено горных хребтов или глубоких впадин.

С борта космического аппарата «Маринер-6», запуск которого состоялся 25 февраля 1969 г., было получено в общей сложности 74 снимка Марса, из них 24 снимка были сделаны 31 июля 1969 г. с минимального расстояния до Марса (~ 3500 км) при полете над его экваториальной областью.

С борта «Маринер-7», запущенного 27 марта 1969 г., был получен 91 снимок, из них 33 снимка были сделаны с минимального расстояния (~ 3500 км), на котором аппарат находился 5 августа 1969 г. при пролете над южной шапкой Марса.

Как показали полученные снимки, поверхность Марса испещрена кратерами диаметром от 0,5 до сотен километров и напоминает поверхность Луны. Однако марсианские кратеры не так глубоки, как лунные, и на них заметны следы эрозии. Часто на дне и склонах больших кратеров видны более мелкие.



Рис. 1.22 Снимок № 11 поверхности Марса, полученный с борта космического аппарата «Маринер-4»

Таинственное пятно переменной яркости Nix Olympica оказалось кратером диаметром около 500 км. Местность южного полюса по сравнению со всеми сфотографированными участками Марса является наиболее пересеченной: на снимках видны глубокие «долины», высокий горный хребт, а также образования, напоминающие земные ледники и оползни.

Координаты северного полюса Марса, т. е. координаты следа оси вращения планеты на небесной сфере, вычисляются на заданный год t по формулам

$$\alpha = 21^{\text{h}}10^{\text{m}}00^{\text{s}} + 1,565^{\text{s}}(t - 1905.0);$$

$$\delta = +54^{\circ}30'00'' + 12,60''(t - 1905.0).$$

Температура поверхности на экваторе к моменту восхода Солнца составляет примерно -60°C , спустя 30 мин после полудня поднимается до $+20^{\circ}\text{C}$ и к моменту захода Солнца снижается до -50°C . В зависимости от положения Марса на орбите его температура в местный полдень на экваторе изменяется на величину до 27°C [104]. Примерный ход температуры для северного полушария в середине зимы и для южного полушария в середине лета в зависимости от широты показан на рис. 1.23.

Средняя полуденная температура морей на $10-15^{\circ}\text{C}$ выше температуры материков. Лето в южном полушарии короче, но теплее, чем в северном, так как во время прохождения Марса через перигелий орбиты его южный полюс наклонен в сторону Солнца. Для октября 1926 г., когда в южном полушарии Марса было лето, получены следующие значения полуденных температур [112]:

Широта в град	+55	+15	—15	—45	—80
Температура в °С	—25	+10	+25	+20	+10

Более подробные данные о температуре Марса содержатся в работах [104, 113].
Атмосфера. Во время противостояния 1963 г. в атмосфере Марса были впервые обнаружены следы водяных паров (14 ± 7 мкм осажденной воды), было установлено обилие CO_2 в количестве около 50 м-атм* в вертикальном столбе и оценочно определено полное давление у поверхности, которое оказалось примерно равным 2 кПа (20 мбар). Прежде считалось, что полное давление равно 6—10 кПа (60—100 мбар) [105, 114].

По данным, полученным с помощью «Маринер-4», высота однородной атмосферы 8—10 км [116], давление и плотность у поверхности 0,4—1,0 кПа (4—10 мбар) и $(1,4 \div 2) \cdot 10^{-5}$ г/см³ соответственно. Атмосфера почти полностью состоит из CO_2 . Прежние исследования показали, что CO_2 содержится в количестве 4,4 м-атм [27].

Если принять гипотезу о том, что темные области Марса являются возвышенностями, а светлые — низинами, то давление атмосферы над светлыми областями должно в 2—3 раза превышать значения, полученные «Маринер-4» над темными областями. По данным измерений с борта космических аппаратов «Маринер-6» и «Маринер-7», давление атмосферы у поверхности Марса меняется от 0,5 до 0,9 кПа и в среднем составляет 0,65 кПа (6,5 мбар). Молекулярного или атомарного азота, так же как и двуокиси серы, в атмосфере Марса обнаружить не удалось. Эти факты уменьшают вероятность существования на Марсе как органической жизни, так и действующих вулканов. В то же время при помощи ультрафиолетового спектрометра в верхних слоях атмосферы Марса был обнаружен атомарный водород и атомарный кислород.

CO_2 является единственным активным компонентом в атмосфере, обуславливающим процессы испарения и конденсации, поглощения радиации и ее излучения.

Если энергетический баланс земной поверхности сильно зависит от атмосферы, то для Марса такая зависимость почти полностью отсутствует. Атмосфера Земли поглощает большую часть инфракрасной радиации, атмосфера Марса поглощает примерно только 20%, остальная часть радиации достигает поверхности планеты.

В табл. 1.16—1.18 приведены вероятные модели атмосферы Марса [22], рассчитанные по исходным данным, указанным в табл. 1.15. Другие модели приведены в работах [121, 126] (для давлений у поверхности 10, 25, 40 мбар и 4, 8, 10 мбар соответственно).

Облака обычно имеют от 300 до 2000 км в поперечнике, наблюдаются сравнительно редко (в среднем 2—4 раза в год) и разделяются по цвету на желтые, синие и белые.

Желтые облака и помутнения можно наблюдать в видимом и инфракрасном диапазонах спектра по всему диску. Они появляются в нижних слоях атмосферы, на высоте примерно 5 км и ниже [104], чаще всего вблизи экватора спустя 2—3 месяца (земных) после прохождения Марсом перигелия орбиты и спустя 1 месяц после прохождения точек равноденствия. Облака состоят, по-видимому, из мелкой пыли, например, из частиц гидрата окиси железа размером в несколько микрон. Особенно сильные помутнения наблюдались во время великого противостояния в 1956 г., когда коэффициент прозрачности атмосферы уменьшился в 3 раза [109] и было отмечено даже полное исчезновение южной полярной шапки на период с 15 августа по 15 сентября. Средняя скорость движения желтых облаков 8—10 м/с [22].

Синие облака, видимые в фиолетовых и ультрафиолетовых лучах, возникают в высоких слоях атмосферы во время понижения ее температуры и поэтому наблюдаются вблизи линии терминатора. Эти облака обычно трактуются как местные уплотнения

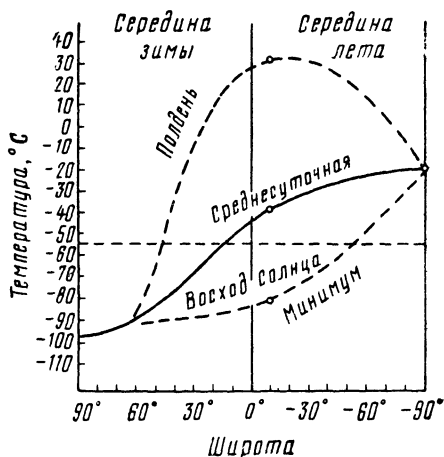


Рис. 1. 23. Среднесуточная и экстремальные температуры поверхности Марса в зависимости от широты

* Единица «атмосферо-метр» (м-атм) используется в астрономии для измерения толщины однородного слоя газа, в котором при нормальных условиях ($p = 101325$ Па, $T = 20^\circ \text{C}$) содержится столько же молекул, сколько в атмосфере исследуемой планеты.

фиолетового слоя (фиолетовой дымки), лежащего на тех же высотах и состоящего, вероятно, из мелких кристалликов льда H_2O . Этот слой не пропускает коротковолнового излучения, но иногда в нем происходят кратковременные прояснения и тогда поверхность Марса можно наблюдать в синих лучах. Такое явление наблюдалось, например, в 1963 г.

Таблица 1.15

Исходные данные для построения моделей атмосферы Марса

Параметр	Минимальная модель	Средняя модель	Максимальная модель
Давление у поверхности в Па	500	1000	2000
Химический состав	100% CO_2	50% CO_2 25% N_2 25% Ar	10% CO_2 90% N_2
Эффективная температура поверхности в К	225	250	270
Средний молекулярный вес ниже уровня диссоциации CO_2	44	39	29,6
Средний молекулярный вес выше уровня диссоциации CO_2	22	27	26
Градиент температуры над уровнем диссоциации в К/км	0	2	1

Белые облака наблюдаются в видимых и инфракрасных лучах, имеют, по-видимому, ту же природу, что и синие облака, но состоят из более крупных кристалликов льда диаметром примерно 1 мкм [104]. Эти облака нередко располагаются над светлыми районами вблизи их границ с темными районами. Максимумы количества белых облаков приходятся приблизительно на моменты прохождения планеты через гелиоцентрические долготы 270° для северного полушария и 30° для южного, что связано с интенсивностью перехода вещества полярных шапок в атмосферу.

Таблица 1.16

Атмосфера Марса (минимальная модель)

Высота км	Температура К	Давление Па	Численная концентрация см ⁻³	Плотность г·см ⁻³	Локальная шкала высот для давления км	Примечание
0	225	500	$1,7 \cdot 10^{17}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	11	Поверхность Тропауза
5	200	270	$1,1 \cdot 10^{17}$	$8 \cdot 10^{-6}$	10	
10	180	180	$7 \cdot 10^{16}$	$5,2 \cdot 10^{-6}$	9	
15	160	100	$4,7 \cdot 10^{16}$	$3,5 \cdot 10^{-6}$	8	
20	145	60	$3,0 \cdot 10^{16}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$	7	
30	130	13	$7 \cdot 10^{15}$	$5,2 \cdot 10^{-7}$	7	Диссоциация CO_2
40	125	3,1	$1,6 \cdot 10^{15}$	$1,2 \cdot 10^{-7}$	7	
50	120	0,7	$3,8 \cdot 10^{14}$	$2,8 \cdot 10^{-8}$	6	
60	120	0,15	$7,5 \cdot 10^{13}$	$5,5 \cdot 10^{-9}$	6	
70	120	0,03	$1,5 \cdot 10^{13}$	$1,1 \cdot 10^{-9}$	6	
80	120	0,005	$2,5 \cdot 10^{12}$	$1,8 \cdot 10^{-10}$	6	
90	120	0,001	$5 \cdot 10^{11}$	$4 \cdot 10^{-11}$	6	
100	120	0,0002	$1 \cdot 10^{11}$	$7 \cdot 10^{-12}$	6	

В циркуляции атмосферы преобладают ламинарные течения, имеющие скорость 30—40 км/ч, изредка нарушаемые небольшими пертурбациями. Весной направление движения облаков преимущественно западное, а летом — восточное. Смена направления ветров обычно происходит при ареоцентрической долготе Солнца 20° — 45° и нередко сопровождается появлением в атмосфере глобальной мглы [119]. Весной образование облаков связано с таянием полярной шапки, летом — с процессами в темных областях [120]. Часто наблюдаются утренние и вечерние туманы небольшой плотности.

Таблица 1.17

Атмосфера Марса (средняя модель)

Высота км	Темпе- ратура К	Давление Па	Численная концентра- ция см ⁻³	Плотность г·см ⁻³	Локальная шкала высот для давления км	Примечание
0	250	1000	$2,9 \cdot 10^{17}$	$1,8 \cdot 10^{-5}$	13	Поверхность Тропопауза
5	225	650	$2,0 \cdot 10^{17}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	12,5	
10	205	400	$1,5 \cdot 10^{17}$	$9 \cdot 10^{-6}$	11,5	
15	185	250	$1,0 \cdot 10^{17}$	$6 \cdot 10^{-6}$	11	
20	170	150	$6 \cdot 10^{16}$	$3,7 \cdot 10^{-6}$	9,5	
30	150	60	$2,7 \cdot 10^{16}$	$1,7 \cdot 10^{-6}$	9	Диссоциация CO ₂
40	140	20	$1,0 \cdot 10^{16}$	$6,0 \cdot 10^{-7}$	8	
50	130	6	$3,5 \cdot 10^{15}$	$2,2 \cdot 10^{-7}$	7,5	
60	120	1,6	$1,0 \cdot 10^{15}$	$6,0 \cdot 10^{-8}$	7	
70	120	0,35	$2,0 \cdot 10^{14}$	$1,2 \cdot 10^{-8}$	7	
80	120	0,08	$4,7 \cdot 10^{13}$	$2,9 \cdot 10^{-9}$	7	
90	120	0,02	$1,2 \cdot 10^{13}$	$8 \cdot 10^{-10}$	7	
100	130	0,006	$4 \cdot 10^{12}$	$3 \cdot 10^{-10}$	12,5	
110	140	0,002	$1,5 \cdot 10^{12}$	$1 \cdot 10^{-10}$	14,5	
120	150	0,001	$6 \cdot 10^{11}$	$4 \cdot 10^{-11}$	15	
130	160	0,0006	$3 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{-11}$	16	
140	170	0,00035	$1,5 \cdot 10^{11}$	$1 \cdot 10^{-11}$	18,5	

Таблица 1.18

Атмосфера Марса (максимальная модель)

Высота км	Темпе- ратура К	Давление Па	Численная концентра- ция см ⁻³	Плотность г·см ⁻³	Локальная шкала высот для давления км	Примечание
0	270	2000	$5,4 \cdot 10^{17}$	$2,7 \cdot 10^{-5}$	20	Поверхность Тропопауза
5	245	1550	$4,5 \cdot 10^{17}$	$2,2 \cdot 10^{-5}$	18	
10	230	1140	$3,6 \cdot 10^{17}$	$3,6 \cdot 10^{-5}$	17	
15	215	870	$2,9 \cdot 10^{17}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	16	
20	200	620	$2,2 \cdot 10^{17}$	$1,1 \cdot 10^{-5}$	15	
30	175	300	$1,2 \cdot 10^{17}$	$6 \cdot 10^{-6}$	13	Диссоциация CO ₂
40	155	130	$6,3 \cdot 10^{16}$	$3,2 \cdot 10^{-6}$	12	
50	140	50	$2,7 \cdot 10^{16}$	$1,4 \cdot 10^{-6}$	10	
60	130	20	$1,0 \cdot 10^{16}$	$5 \cdot 10^{-7}$	10	
70	130	7	$3,8 \cdot 10^{15}$	$1,9 \cdot 10^{-7}$	10	
80	130	2	$1,4 \cdot 10^{15}$	$7 \cdot 10^{-8}$	10	
90	120	1	$5 \cdot 10^{14}$	$2,5 \cdot 10^{-8}$	9	
100	120	0,3	$2 \cdot 10^{14}$	$1,1 \cdot 10^{-8}$	9	
110	140	0,1	$7 \cdot 10^{13}$	$4 \cdot 10^{-9}$	11	
120	160	0,06	$3 \cdot 10^{13}$	$2 \cdot 10^{-9}$	13,5	
130	180	0,03	$1,2 \cdot 10^{13}$	$6 \cdot 10^{-10}$	14	
140	200	0,015	$5 \cdot 10^{12}$	$3 \cdot 10^{-10}$	16	
150	220	0,009	$3 \cdot 10^{12}$	$1,5 \cdot 10^{-10}$	18	
160	240	0,005	$1,5 \cdot 10^{12}$	$8 \cdot 10^{-11}$	20	
170	260	0,0025	$7 \cdot 10^{11}$	$4 \cdot 10^{-11}$	21	
180	280	0,0012	$3 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{-11}$	22	

С помощью аппарата «Маринер-4» в верхней атмосфере Марса обнаружен пик электронной плотности, равный 10^5 см^{-3} , который отнесен к высоте 125 км [118].

Радиационные пояса у Марса не обнаружены, момент магнитного диполя планеты не больше 10^{-3} земного [110].

Микрометеоритное вещество в окрестностях планеты не характеризуется повышенной плотностью.

1.3.7. Юпитер

Юпитер — самая крупная планета, имеет 12 спутников (больше, чем у любой другой планеты), отличается также наименьшим среди планет периодом осевого вращения ($9^h 50^m$) и большим сжатием (0,062).

Видимая поверхность покрыта чередующимися светлыми и темными поясами, параллельными экватору. Темные пояса принято называть *полосами*, а светлые — *зонами*. В экваториальном поясе лежит *экваториальная зона* — наиболее яркая деталь диска. К северу и к югу от экваториальной зоны расположены *северная* и *южная тропические (экваториальные) полосы*, далее к полюсам лежат *северная* и *южная тропические*

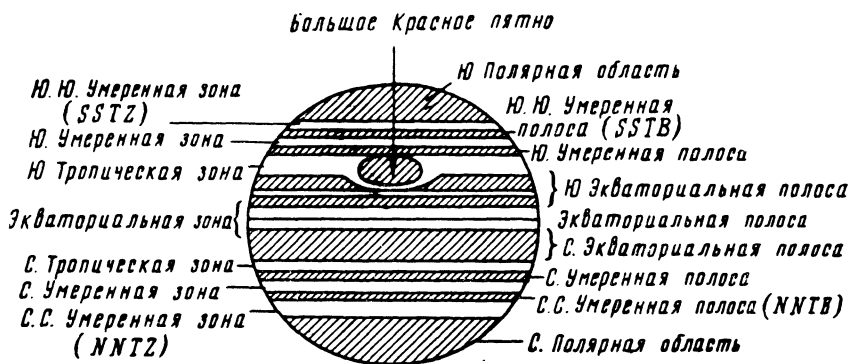


Рис. 1.24. Обозначение полос и зон на Юпитере

зоны, за ними — менее широкие *северная* и *южная умеренные полосы*, *северные* и *южные умеренные зоны* (рис. 1.24). Кроме того, полосы часто распадаются на две компоненты; наблюдаются промежуточные полосы, светлые и очень темные пятна, выступы и углубления на границах полос, мостики, соединяющие по две полосы, и т. п. Обычно такие образования сравнительно неустойчивы и существуют от нескольких дней до нескольких месяцев. Все темные детали отличаются, как правило, красноватым оттенком. Полярные области имеют сероватую окраску и лишены деталей. Два объекта на поверхности Юпитера, лежащие в южной тропической зоне, наиболее стабильны. Это *Красное Пятно* и *Южное Тропическое Возмущение*.

Красное Пятно было открыто в 1878 г., когда оно приобрело интенсивную кирпично-красную окраску, но в виде бледного образования, по-видимому, наблюдалось еще в 1660 г. [134]. Пятно имеет форму овала с линейными размерами $50000 \times 11000 \text{ км}$, его центр лежит на широте $\sim -23^\circ$, а долгота от года к году меняется. Это свидетельствует о том, что Пятно плавает в атмосфере и не связано с твердой поверхностью планеты (существование такой поверхности предполагается). Высота пятна практически не отличается от высоты окружающей облачной поверхности [132]. По-видимому, это газовое образование, содержащее аэрозоли [131].

Южное Тропическое Возмущение наблюдается с 1901 г. Оно представляет собой темную вуаль протяженностью около 70000 км по долготе, расположенную между южной тропической и южной умеренной полосами. Оно движется быстрее Красного Пятна и соединяется с ним в среднем каждые 2 года. Во время сближения Красное Пятно несколько увеличивает скорость движения, сохраняя свой вид, а Возмущение огибает его с севера и с юга.

Период осевого вращения зависит от широты. На экваторе он равен $9^h 50,5^m$, на средних широтах $9^h 55^m 29,70^s \pm 0,5^s$. Этим значениям периода соответствуют две принятые системы отсчета долгот: I (на экваторе) и II. Система II построена относительно средней скорости вращения Красного Пятна.

Температура верхнего слоя облаков по измерениям на длинах волн $\sim 10 \text{ мкм}$ составляет $175\text{--}200 \text{ К}$, что несколько выше температуры, соответствующей равновесию с излучением Солнца ($\sim 125 \text{ К}$) [140].

Яркостная температура по измерениям на длине волны $\lambda = 3 \text{ см}$ примерно равна 150 К , но с увеличением длин волн быстро растет (рис. 1.25) и при $\lambda = 68 \text{ см}$ составляет 50000 К , что свидетельствует о нетепловой природе радионизлучения планеты [129, 138].

Атмосфера характеризуется чрезвычайно плотным облачным покровом. В надоблачном слое атмосферы обнаружены аммиак NH_3 , метан CH_4 и молекулярный водород H_2 . Их эквивалентные пути соответствуют 7,150 и 5500 м-атм [130, 143, 144].

Вероятное количество гелия в атмосфере Юпитера сравнимо с количеством водорода. В темных полосах Юпитера содержится значительно меньше метана, чем в других его областях, что, по-видимому, объясняется различием в высоте облачного покрова. Оценки верхних пределов содержания других соединений приведены в работе [139]. Облака состоят, вероятно, из кристаллов аммиака. Полное давление над облачным слоем составляет 0,1—0,2 МПа (1—2 атм).

В 1961 г. в атмосфере Юпитера наблюдались необычно активные процессы. В южной тропической зоне появились яркие пятна и темные полосы. В экваториальной зоне образовался широкий, очень темный пояс. В сентябре 1962 г. он имел ясный красновато-коричневый цвет, а Красное Пятно усилило яркость и имело красно-розовую окраску. Пятно деформировалось, а светлые облака частично его экранировали. С 10 по 31 октября 1962 г. его долгота увеличилась на $5,1^\circ$ [141]. Аналогичная вспышка активности наблюдалась на Юпитере с 1874 по 1880 гг.

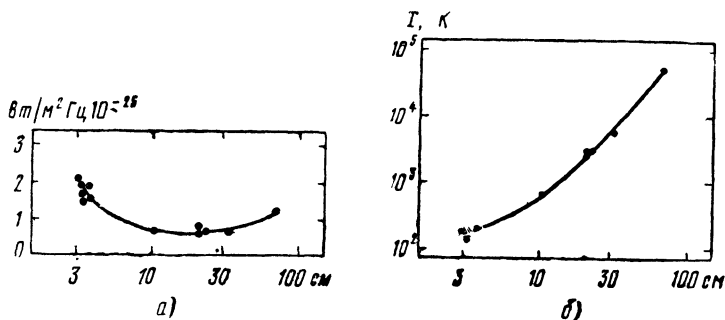


Рис. 1.25. Спектр радиоизлучения Юпитера в сантиметровом диапазоне в $10^{-26} \cdot \text{Вт/м}^2 \cdot \text{Гц}$:

а—поток радиоизлучения; б—яркостная температура

Радиоизлучение Юпитера в диапазоне 8 мм — 68 см «спокойное», его интенсивность во времени меняется медленно. Так, например, за период с 1963 по 1967 г. интенсивность радиоизлучения Юпитера на волне $\lambda=11$ см не изменилась более чем на 15% при средней полной плотности потока излучения $(7,3 \pm 0,1) \cdot 10^{-26} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{Гц}$ (для расстояния 4,04 а.е.) [137].

В декаметровом диапазоне (длины волн >10 м) радиоизлучение Юпитера имеет спорадический характер: обнаруживаются мощные всплески излучения с периодом $9^{\text{h}}55^{\text{m}}29,4^{\text{s}}$, вероятно, связанные с процессами, происходящими на твердой поверхности планеты. Всплески декаметрового радиоизлучения Юпитера подобны по форме, возникают через 20—30 мс и не обнаруживают влияния неоднородностей межпланетной плазмы, связанных с воздействием солнечного ветра [142]. Размер источника декаметрового излучения на Юпитере не превышает 1000 км [135]. На частотах выше 35 МГц ($\lambda=9$ м) спорадического излучения не наблюдается.

Другие всплески обнаруживают зависимость от положения спутников Юпитера Ио и Европы на орбите.

Радиоизлучение Юпитера поляризовано, направление поляризации непрерывно изменяется [136].

В результате исследования излучения Юпитера в дециметровом диапазоне радиоспектра (на волнах от 3 до 168 см) выяснилось, что радиоволны излучаются электронами высокой энергии, локализованными в радиационных поясах планеты. Получены следующие данные о поясе радиации Юпитера и его магнитном поле [133].

Пояс радиации содержит до 10^{28} электронов с энергией $16 \cdot 10^{-13}$ Дж (10 МэВ) и плотностью 10^{-3} см^3 . Общая энергия электронов 10^{16} — 10^{17} Дж (10^{23} — 10^{24} эрг.). Полярные размеры пояса радиации примерно равны диаметру планеты, а экваториальные превышают диаметр приблизительно в 3 раза.

Магнитное поле асимметрично относительно плоскости экватора, наклон магнитной оси к оси вращения $\sim 10^\circ$, напряженность поля на полюсах у диска $\sim 5 \cdot 10^3 \text{ А/м}$ ($\sim 60 \text{ Гс}$), а на расстоянии трех радиусов планеты $\sim 80 \text{ А/м}$ ($\sim 1 \text{ Гс}$).

Радиолокационные исследования Юпитера впервые были осуществлены в Советском Союзе. Было установлено, что радиоволны практически полностью затухают в его атмосфере.

1.3.8. Сатурн

Сатурн по размерам и массе уступает только Юпитеру, отличается от других планет наибольшим сжатием (1/10), наименьшей средней плотностью, а также наличием колец.

Видимая поверхность напоминает поверхность Юпитера, но бедна деталями. Обычно различают светлую экваториальную зону и тропические полосы. Полярные области имеют темную окраску, пятна — темную и светлую, но наблюдаются редко [149]. Некоторые пятна обладают собственным движением по долготе. Интенсивность излучения деталей поверхности со временем изменяется. Так, например, в период с 1947 по 1964 г. экваториальная зона была наиболее светлой в 1952 и 1964 гг., наиболее тусклой — в 1958—1960 гг. [147]. Отмечается также смещение полос по широтам [148].

Период осевого вращения зависит от широты. На экваторе он составляет $10^{\text{h}}12^{\text{m}}—10^{\text{h}}16^{\text{m}}$, а на широтах $\pm 57^\circ$ он равен $11^{\text{h}}00^{\text{m}}—11^{\text{h}}15^{\text{m}}$ [24].

Координаты северного полюса, спроектированного по оси вращения планеты на небесную сферу, $\alpha=36^\circ12,0'$; $\delta=83^\circ2,7'$ [24].

Температура верхнего слоя облаков по данным радиометрических измерений составляет $90—110\text{ K}$ [24, 140]. Суточный ход температуры по диску крайне незначителен.

Атмосфера в основном состоит, по-видимому, из водорода, а облачный слой — из кристаллов метана CH_4 [130, 140]. В надоблачном слое атмосферы обнаружены метан CH_4 и аммиак NH_3 . Их эквивалентные пути соответствуют 350 и 2 м.атм [24].

Радиационные пояса у Сатурна должны присутствовать. Это можно предположить по высокой степени линейной поляризации его радиоизлучения на волне 10 см.

Кольца концентричны телу планеты и лежат в плоскости его экватора. Они распадаются на три основных зоны (на три кольца, вложенные одно в другое) [24, 145].

— зона А (внешнее кольцо);

— зона В (среднее кольцо) самая яркая;

— зона С (внутреннее, или креповое кольцо) полупрозрачная; разрежаясь, простирается до видимой поверхности планеты.

Кольца А и В разделены темным промежутком (пустой зоной), так называемой «щелью Кассини». Имеется ряд менее заметных промежутков, например «деление Энке» и др. Расстояния от центра планеты до промежутков соответствуют таким периодам обращения, которые соизмеримы с периодом обращения близких к кольцу спутников Сатурна.

Размеры колец следующие:

внешний диаметр кольца А . . .	278 600 км
диаметр середины «щели Кассини» . . .	239 400 »
внутренний диаметр кольца В . . .	178 500 »
внутренний диаметр кольца С . . .	144 000 »

Толщина колец не превышает 100 км, но, по-видимому, она значительно меньше. Наиболее правдоподобно, что кольца состоят из глыб льда H_2O поперечником в среднем около 1 м [130].

1.3.9. Уран, Нептун, Плутон

Уран имеет вид звезды 6-й величины. Сведения о деталях на поверхности противоречивы. Одни наблюдатели различают отдельные пятна, другие — темные полосы.

Ось вращения лежит почти в плоскости орбиты планеты, направление вращения — обратное. Координаты северного полюса (спроектированного по оси вращения планеты на небесную сферу):

$$\alpha=4^{\text{h}}21^{\text{m}}; \delta=24,8^\circ.$$

Период осевого вращения составляет $10^{\text{h}}45^{\text{m}}—10^{\text{h}}49^{\text{m}}$ [151, 158].

Яркая температура видимой поверхности на волне $\lambda=20\text{ мкм}$ равна примерно 65 K, на волне $\lambda=3,75\text{ см}$ составляет $159\pm16\text{ K}$, а на волне $\lambda=1,9\text{ см}$ равна $220\pm35\text{ K}$ [157]. Эффективная температура на волне $\lambda=11\text{ см}$ равна $130\pm40\text{ K}$, что превышает расчетное значение равновесной температуры. Из этих данных следует, что температура верхнего слоя атмосферы, по-видимому, увеличивается с глубиной.

Эквивалентный путь метана в атмосфере Урана составляет оценочно 150 км.атм.

Нептун имеет вид звезды 8-й величины. Детали на диске не наблюдаются. Координаты северного полюса (спроектированного по оси вращения планеты на небесную сферу относительно эпохи 1900.0) [24]: $\alpha=295,2^\circ$; $\delta=41,3^\circ$.

Период осевого вращения определен в пределах от 8^{h} до 15^{h} [24, 154].

Температура видимой поверхности радиометрически не измерена, теоретически она не должна превышать 70 K. Измеренное значение яркостной температуры на волне 1,9 см составляет $180\pm40\text{ K}$, что превышает расчетное значение равновесной температуры [157].

Эквивалентный путь CH_4 в атмосфере составляет оценочно 250 км.атм.

Плутон — девятая по порядку и самая удаленная от Солнца планета. Наблюдается, как звезда, блеск которой меняется от $13,6^{\text{m}}$ до $15,9^{\text{m}}$. Ее диск едва различим. Поверхность, по-видимому, твердая и покрыта пятнами, о чем свидетельствуют коле-

бания блеска с синодическим периодом $6^{\text{д}}9^{\text{ч}}16^{\text{м}}54^{\text{с}} \pm 26^{\text{с}}$ [155]. Кривой изменения блеска Плутона одинаково хорошо удовлетворяют два периода: 6,390 и 1,182 суток [150].

Для объяснения несоответствия между значительной (порядка земной) массой и небольшими размерами Плутона (диаметр равен ~ 5500 км), которое приводило к неприемлемо высокой плотности планеты, предполагалось, что его поверхность обладает квазизеркальным свойством отражения солнечных лучей. Однако в последнее время его объясняют неточным определением массы Плутона из теории возмущений, что, возможно, связано с влиянием более далекой и еще не открытой планеты [152].

1.3.10. Спутники планет

Спутники планет — тела Солнечной системы, обращающиеся вокруг большинства планет. У Меркурия, Венеры и Плутона спутники не обнаружены. Луна, как ближайшее к Земле и наиболее изученное небесное тело, будет рассмотрена подробно. Спутники Марса чрезвычайно малы и поэтому практически не исследованы. Системы спутников больших планет (в особенности Сатурна) обнаруживают сходство с Солнечной системой в механических параметрах. Они разделяются на подсистемы близких (внутренних) и далеких (внешних) спутников, причем эксцентриситеты орбит внешних спутников, как правило, значительно больше, чем внутренних. Элементы орбит и основные физические характеристики спутников приведены в табл. 1.19 и 1.20.

Таблица 1.19

Элементы орбит спутников планет

Планета	Спутник	Среднее расстояние от планеты		Сидерический период обращения сут.	Эксцентриситет	Наклон плоскости орбиты спутника к плоскости орбиты планеты
		в экв. радиусах планеты	в тыс. км			
Земля	Луна	60,27	384,402	27,32166 ^d	0,05490	5°09'
Марс	I Фобос	2,77	9,38	0,31891	0,019	25 11
	II Деймос	6,96	23,50	1,26244	0,0031	24 16
Юпитер	V Амальтея	2,56	181	0,49818	0,0028	3 07
	I Ио	5,94	421,8	1,76914	0,0000	3 07
	II Европа	9,44	671,4	3,55118	0,0003	3 06
	III Ганимед	15,04	1071	7,15455	0,0015	3 02
	IV Каллисто	26,47	1884	16,68902	0,0075	2 43
	VI	160,4	11500	250,621	0,1550	28 45
	VII	165,1	11750	259,7	0,2073	27 58
	X	165,4	11750	260,5	0,1405	28 24
	XII	296	21000	625	0,1346	147 18
	XI	316,7	22500	696	0,2068	163 37
Сатурн	VIII	330,7	23500	738,9	0,378	148 04
	IX	338	23700	755,0	0,275	156
	X Янус*					
	I Мимас	3,10	185,6	0,94242	0,0190	26 44
	II Энцелад	3,97	238,1	1,37022	0,0046	26 44
	III Тефия	4,92	294,8	1,88780	0,0000	26 44
	IV Диона	6,30	377,5	2,736692	0,0020	26 44
	V Рея	8,79	527,2	4,51750	0,0009	26 42
	VI Титан	20,38	1222,0	15,94545	0,0289	26 07
Уран	VII Гиперион	24,70	1481,0	21,27666	0,119	26 00
	VIII Япет	59,41	3562,0	79,33082	0,0284	16 18
	IX Феба	216,2	12961	550,45	0,1659	174 42
	V Миранда	5,11	130,4	1,414	—	—
	I Ариэль	7,52	191,9	2,52038	0,007	97 59
Нептун	II Умбриэль	10,48	267,3	4,14418	0,008	97 59
	III Титания	17,21	439,2	8,70588	0,0023	97 59
	IV Оберон	23,01	587,0	13,46326	0,0010	97 59
	I Тритон	12,9	353,7	5,87683	0,0000	139 49
	II Нереида	200	5570	359,4	0,76	6 31

* Открыт недавно (см. в тексте).

Основные характеристики спутников планет

Планета	Спутник	Масса		Диаметр км	Средняя плотность г/см ³	Ускорение силы тяжести на по- верхности ($\oplus=1$)	Скорость освобождения (на по- верхности) км/с	Температура в подсолнеч- ной точке °C	Альbedo
		в ед. массы Луны	в Γ						
Земля	Луна	1	$(7,343 \pm 0,002) \cdot 10^{25}$	3476 ± 1	$3,34 \pm 0,01$	0,165	2,39	+118	0,072
	I Фобос	$3 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{18}$	11	3	—	—	—	—
Марс	II Деймос	$0,5 \cdot 10^{-8}$	$4 \cdot 10^{17}$	6	3	—	—	—	—
Юпитер	V Амальтея	$6 \cdot 10^{-5}$	$4,2 \cdot 10^{21}$	160	2	—	—	—	—
	I Ио	0,95	$(6,98 \pm 0,72) \cdot 10^{25}$	3470 ± 50	$3,19 \pm 0,36$	0,158	2,34	-133	0,57
	II Европа	0,64	$(4,68 \pm 0,09) \cdot 10^{25}$	3100 ± 60	$3,03 \pm 0,19$	0,134	2,03	-136	0,60
	III Ганимед	2,09	$(15,36 \pm 0,09) \cdot 10^{25}$	5000 ± 75	$2,35 \pm 0,10$	0,167	2,92	-117	0,34
	IV Каллисто	1,18	$(8,70 \pm 0,34) \cdot 10^{25}$	4700 ± 75	$1,59 \pm 0,10$	0,106	2,24	-107	0,15
	V1	$2 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{21}$	120	2	—	—	—	—
	VII	$9 \cdot 10^{-7}$	$6,6 \cdot 10^{19}$	40	2	—	—	—	—
	X	$3 \cdot 10^{-8}$	$1,9 \cdot 10^{18}$	12	2	—	—	—	—
	XII	$2 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{18}$	11	2	—	—	—	—
	XI	$5 \cdot 10^{-8}$	$3,8 \cdot 10^{18}$	15	2	—	—	—	—
Сатурн	VIII	$2 \cdot 10^{-8}$	$1,3 \cdot 10^{18}$	11	2	—	—	—	—
	IX	$4 \cdot 10^{-8}$	$2,8 \cdot 10^{18}$	14	2	—	—	—	—
	I Мимас	$5,14 \cdot 10^{-4}$	$(3,77 \pm 0,01) \cdot 10^{22}$	500 ± 50	$0,6 \pm 0,2$	0,004	0,14	-188	0,8(?)
	II Энцелад	$1,14 \cdot 10^{-3}$	$(8,4 \pm 2,7) \cdot 10^{22}$	570 ± 30	$0,87 \pm 0,30$	0,007	0,20	-188	0,8(?)
	III Тефия	$8,65 \cdot 10^{-3}$	$(6,35 \pm 0,08) \cdot 10^{23}$	800 ± 50	$1,66 \pm 0,28$	0,021	0,44	-188	0,8
	IV Диона	0,015	$(1,10 \pm 0,03) \cdot 10^{24}$	850 ± 20	$3,43 \pm 0,26$	0,041	0,59	-188	0,8(?)
	V Рея	$3,1 \cdot 10^{-3}$	$2,3 \cdot 10^{23}$	1400 ± 75	?	—	—	-188	0,8
	VI Титан	1,89	$(1,385 \pm 0,01) \cdot 10^{26}$	4850 ± 50	$2,32 \pm 0,07$	0,160	2,79	-155	0,27
	VII Гиперион	$6 \cdot 10^{-4}$	$4,5 \cdot 10^{22}$	350	2	—	—	—	—
	VIII Япет	0,025	$(1,82 \pm 0,42) \cdot 10^{24}$	1330	1,48	0,028	0,61	—	Перем. 0,2(?)
Уран	IX Феба	$4 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{22}$	300	2	—	—	-205	—
	V Миранда	0,002	$1,3 \cdot 10^{23}$	500	2	—	—	—	—
	I Ариэль	0,03	$2,4 \cdot 10^{24}$	1330	2	—	—	—	—
	II Умбриэль	0,009	$7 \cdot 10^{23}$	880	2	—	—	—	—
	III Титания	0,06	$4,3 \cdot 10^{24}$	1600	2	—	—	—	—
Нептун	IV Оберон	0,04	$3,3 \cdot 10^{24}$	1460	2	—	—	—	—
	I Тритон	1,88	$1,38 \cdot 10^{26}$	3770	4,9	0,264	3,2	—	—
	II Нереида	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{22}$	300	2,4	0,01	0,2	—	—

На рис. 1.26 воспроизведена схема расположения орбит спутников Юпитера в том виде, как ее построил С. В. Никольсон, которому принадлежит открытие четырех самых слабых спутников этой планеты.

Спутники I—IV («галилеевские») движутся в плоскости экватора Юпитера, обращены к нему одной стороной, и их плотность уменьшается с увеличением расстояния до планеты. Между сидерическими периодами обращения спутников I—III T_1 , T_2 и T_3 и их средними долготами на орбите L_1 , L_2 и L_3 существуют зависимости [169]

$$\frac{1}{T_1} - \frac{3}{T_2} + \frac{2}{T_3} = 0; \quad L_1 - 3L_2 + 2L_3 = 180^\circ$$

На поверхности Ио различают темные полярные зоны, а между параллелями $+60^\circ$ и -60° — светлые пятна, сливающиеся в сплошной пояс. Особенно темные пятна лежат в диапазоне широт от 30° до 60° .

Европа, в противоположность Ио, имеет светлые полярные области, а между параллелями $+15^\circ$ и -15° лежит цепь темных пятен.

Ганимед напоминает планету Марс, наблюдаемую при небольшом увеличении. Светлые полярные шапки резко ограничены, а между параллелями $+40^\circ$ и -40° лежит сложная сеть серых полос и темных пятен. Есть сообщения о светлых образованиях, появляющихся вблизи утеренного терминатора и не участвующих во вращении спутника. Поэтому можно предположить, что у Ганимеда есть какая-то атмосфера.

Детали на диске Каллисто различаются с трудом. Заметны отдельные пятна и темный экваториальный пояс.

Фотометрические наблюдения показали, что Ио и Европа сразу же после выхода из тени Юпитера отличаются повышенным блеском. Возможно, они имеют атмосферу, состоящую из N_2 или CH_4 и оседающую в виде инея на поверхность спутника во время затмения [173, 174]. Записи спектров Европы и Ганимеда показали детали, характерные для спектра отражения снежного покрова, который мог сохраниться со времен образования этих спутников при условии, если они имеют атмосферу [167].

Расчетная температура Ио и Европы составляет 145 и 148 К, а по данным астрономических измерений она равна 135 и 140 К соответственно. Такое расхождение температур согласуется с предположением о присутствии на этих спутниках атмосферы. Это предположение подтвердилось после открытия новых линий в спектрах галилеевских спутников [165].

Расчетные температуры на поверхности Ганимеда и Каллисто составляют 156 и 168 К соответственно, что совпадает с результатами измерений [183].

В моменты восхода и захода Ио наблюдаются всплески дециметрового радиоизлучения Юпитера [177].

Спутники Сатурна

Из-за отдаленности они изучены очень слабо. Только на Титане удастся рассмотреть потемнение к краю и характерную деталь, имеющую вид расплывчатой полосы, наклоненной к предполагаемому экватору. В атмосфере Титана обнаружен метан, эквивалентный путь которого равен 200 м-атм [24].

Япет периодически в зависимости от элонгации изменяет свой блеск на $1,8^m$. Отсюда следует, что он обращен к планете всегда одной стороной и его полушария имеют различную окраску [24, 180].

В работе [184] сообщено об открытии десятого спутника Сатурна, который движется с периодом $17^h 58,5^m$ почти в плоскости его колец по почти круговой орбите. Спутник назван Янусом. Его диаметр составляет примерно 350 км [176].

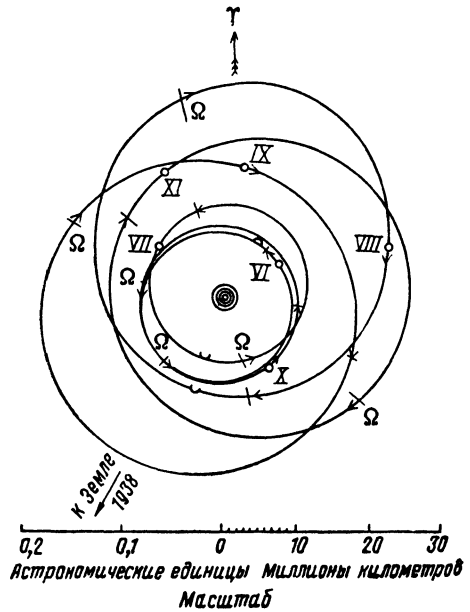


Рис. 1. 26 Орбиты спутников Юпитера. Дугами малых кругов отмечены места пересечения орбит с плоскостью эклиптики

Луна

Форма

Фигура Луны незначительно отличается от сферы. Ее вытянутость в направлении на Землю, по-видимому, не превышает 0,4 км. В работе [175] произведена оценка гармоник гравитационного потенциала Луны до восьмого порядка.

Расстояния и движение

Среднее расстояние Луны от Земли $384402 \pm 1,5$ км, или $0,002570$ а.е., или $60,2673$ экваториальных радиусов Земли.

Среднее наклонение орбиты к эклиптике $5^{\circ}8,33'$.

Лунный экватор наклонен к плоскости лунной орбиты на $6^{\circ}41'$, а к эклиптике — на $6^{\circ}41' - 5^{\circ}9' = 1^{\circ}32'$. Плоскости эклиптики, лунной орбиты и лунного экватора пересекаются по одной линии.

Сидерический (звездный) месяц (период обращения по отношению к звездам) $27,32166140 + 0,00000016 \cdot T$ эфемер. суток, где T — эпоха от 1900.0 (выражена в столетиях).

Среднее суточное (сидерическое) движение $47434,889871'' - 0,000284'' \cdot T$ эфемер. суток.

Синодический месяц (период полной смены фаз) $29,5305882 + 0,00000016 \cdot T$ эфемер. суток.

Тропический месяц (промежуток времени между двумя последовательными прохождениями точки весеннего равноденствия) $27,32158214 + 0,00000013 \cdot T$ эфемер. суток.

Средние лунные сутки (промежуток времени между двумя последовательными прохождениями Луны через меридиан) $24^{\text{h}}50,47^{\text{m}}$.

Основные неравенства в движении Луны

1. *Регрессия линии узлов.* Линия узлов вращается («регрессирует») в плоскости эклиптики в направлении, обратном движению Луны по орбите.

Драконический месяц (промежуток времени между двумя последовательными прохождениями Луны через восходящий узел орбиты) $27,212220$ суток.

Период нутации (период движения узлов лунной орбиты) $18,6123$ тропических лет.

2. *Прямое движение линии апсид.* Эллипс лунной орбиты вращается в своей плоскости в направлении движения Луны, совершая полный оборот за $8,8503$ года.

Аномалистический месяц (промежуток времени между двумя последовательными прохождениями Луны через перигей) $27,5545505 - 0,0000004 \cdot T$ эфемер. суток.

3. *Периодические колебания наклона плоскости орбиты к эклиптике.* Совершаются с периодом в $18,6123$ года. Пределы изменения: от $4^{\circ}59'$ до $5^{\circ}18'$.

4. *Периодические колебания эксцентриситета.* Совершаются с периодом $8,8503$ года. Пределы изменения: от $0,0435$ до $0,0715$. Среднее значение: $0,05490$.

Относительно наблюдателя, находящегося на Земле, Луна обращена к ней всегда одной стороной и совершает периодические колебания около своего центра. Это так называемые *либрации* Луны; они объясняются неравномерностью движения Луны по орбите (при равномерном вращении вокруг оси) и наклоном лунного экватора к эклиптике. Вследствие либрации центр видимого диска Луны перемещается в пределах $\pm 7^{\circ}51'$ по лунному экватору (либрация по долготе) и в пределах $\pm 6^{\circ}50'$ вдоль меридиана (либрация по широте). Параллактическая либрация, вызываемая перемещением наблюдателя за счет вращения Земли, достигает $57'$. Благодаря либрации площадь видимой с Земли поверхности Луны по отношению ко всей ее поверхности $\sim 59\%$.

Фотометрические характеристики

Геометрическое альbedo $A_g = 0,105$

Сферическое альbedo $A_c = 0,073$

Освещенность от полной Луны на
границе земной атмосферы $0,342 \pm 0,011$ лк

Данные радиолокации

Коэффициент отражения 6%

Диэлектрическая постоянная $\epsilon \approx 2,7$

Атмосфера

Считается, что плотность лунной «атмосферы» составляет $\sim 2 \cdot 10^{-13}$ плотности земной атмосферы на уровне моря, что соответствует давлению $\sim 2,7 \cdot 10^{-8}$ Па (2×10^{-10} мм рт. ст.).

Температура

Температура поверхностного слоя на экваторе колеблется от $+110 \div +130^\circ\text{C}$ в подсолнечной точке до $-140 \div -150^\circ\text{C}$ во время лунной ночи. Прогрев почвы распространяется до глубины 1—1,5 м, ниже температура постоянна и равна примерно $T_0 = 230\text{ K}$ на экваторе, а с увеличением широты ψ «глубинная» температура уменьшается согласно закону

$$T(\psi) = T_0 \sqrt[4]{\cos \psi}$$

(к полярным районам Луны формула неприменима).

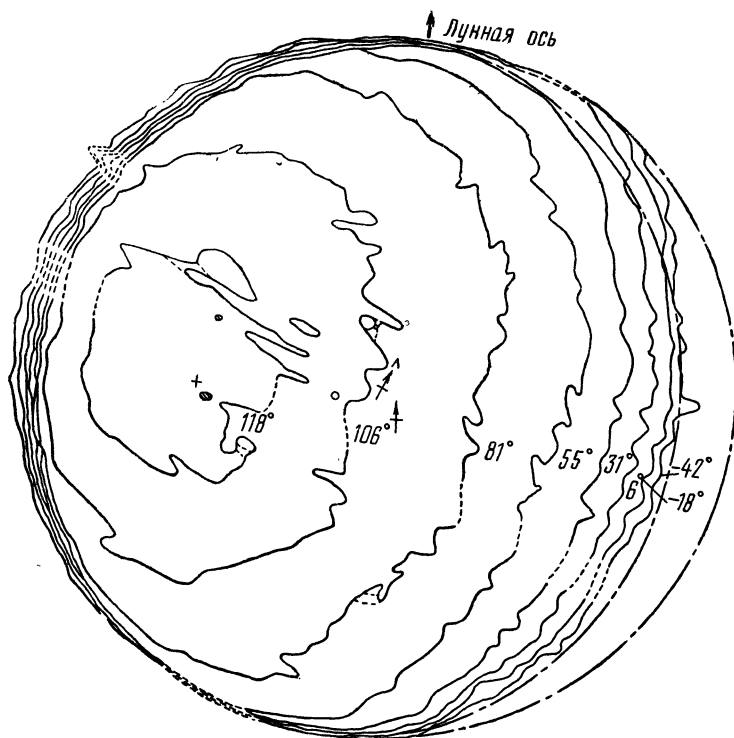


Рис. 1.27. Распределение инфракрасной яркостной температуры по лунной поверхности. Освещено 0,92 диска

На рис. 1.27 изображены изотермы инфракрасного излучения видимой стороны Луны [159], а на рис. 1.28 — характерная кривая изменения температуры во время солнечного затмения.

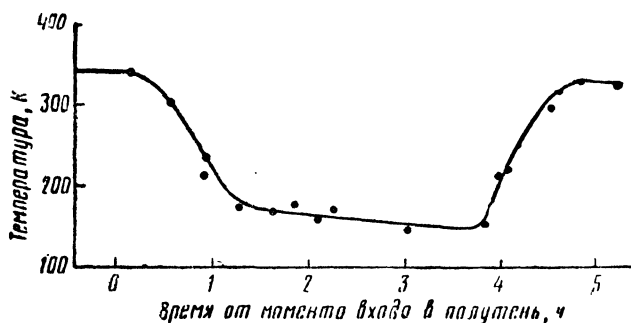


Рис. 1.28. Изменение температуры лунной поверхности во время затмения

Магнитное поле Луны близко к однородному. Его напряженность равна 0,02—0,03 А/м (20—30γ).

Радиационные пояса у Луны не обнаружены.

Поверхность

Как было установлено с помощью аппаратов «Рейнджер» [178, 164], изображения лунной поверхности, полученные в различных масштабах, схожи между собой.

Все формы лунного рельефа в дециметровом и метровом масштабе округлы и пологи. Преобладают кратеры, ложбины, а возвышенности встречаются сравнительно редко. Широко распространены оползни и проседания поверхностных слоев.

Поверхность Луны в миллиметровом и сантиметровом масштабе, по данным станции «Луна-9», впервые совершившей 3 февраля 1966 г. мягкую посадку на лунную поверхность, очень неровная и покрыта гранулированным материалом с различным размером зерен [172, 185].

Плотность поверхностного слоя в районах морей на глубине в несколько сантиметров составляет 0,6—0,7 г/см³ (чему соответствует пористость 70—80%). С увеличением глубины до 10—20 см плотность возрастает до 1 г/см³, а на глубине 1—10 м достигает 2—3 г/см³. Для опоры диаметром 25 см несущая способность поверхностного слоя ~4·10⁴ Па (4·10⁵ дин/см²). Сила смятия находится в пределах 1·10⁴—1·10⁵ Па (10²—10⁵ дин/см²). Угол внутреннего трения ~55°, а коэффициент внутреннего трения ~1,5 [179]. Таким образом, механические свойства лунного грунта до глубины 20—30 см близки к свойствам влажной мелко гранулированной земной почвы средней плотности.

Общий уровень гамма-излучения лунных пород, как было установлено [160, 161] в апреле 1966 г. с помощью АМС «Луна-10», близок к аналогичным показателям земных пород основного состава (типа базальтов).

Анализ образцов, доставленных в июле 1969 г. на Землю экипажем КК «Аполлон-11», показал, что лунные камни представляют собой изверженные кристаллические породы и брекчии сложного происхождения. В лунном веществе больше, чем в земных породах, элементов с высокой температурой плавления (титана, хрома, иттрия, циркония) и значительно меньше элементов с низкой температурой плавления (натрия, калия, свинца, висмута). Отсутствуют благородные металлы, вода и органические соединения. Обнаружено большое количество (~0,01% по весу в пыли) мелких (диаметром от 0,02 до нескольких миллиметров) разноцветных (от светло-желтых до темно-коричневых) стеклянных шариков. Обнаружены также инертные газы и водород, которые могли образоваться в результате воздействия солнечного ветра. С увеличением глубины залегания образцов количество газа резко уменьшается.

В табл. 1.21 приведен элементарный состав лунного грунта, доставленного экипажем КК «Аполлон-11» с Моря Спокойствия.

Таблица 1.21

Образец	Химический состав в % по весу									
	Si	Fe	Ca	Al	Mg	Ti	Na	Cr	Mn	K
Кристаллические камни	20	14	7	6	5	6	0,4	0,4	0,3	0,2
Пыль и брекчии	20	12	8	6	5	5	0,4	0,3	0,2	0,1

Определение координат объектов на поверхности Луны

В системе положений 9 опорных точек, которые были установлены немецким астрономом Юлиусом Францем, определялись координаты всех объектов видимого диска Луны. В табл. 1.22 приведены селеноцентрические координаты этих точек, а также улучшенные их значения, полученные проф. Шрутка-Рехтенштаммом. Он по наблюдениям Юл. Франца в предположении, что центр фигуры лунного диска совпадает с проекцией центра масс, составил каталог горизонтальных и вертикальных координат 150 точек лунной поверхности, который и в настоящее время не потерял своего значения [168].

После того как в 1960 г. кратер Мёстинг А был выбран в качестве исходного пункта триангуляции I класса, которую предстоит проложить на Луне, для его координат было найдено [181]

$$\lambda = -5^{\circ}9'50'' \pm 4,5''; \beta = -3^{\circ}10'47'' + 4,4''; \Delta h = +0,40'' + 0,19'',$$

где Δh — высота относительно уровня Луны по Ньюкомбу.

Таблица 1.22

Название объекта	Франц		Шрутка-Рехтенштамм	
	λ	β	λ	β
Мёстинг А	$-5^{\circ}10,32'$	$-3^{\circ}11,40'$	$-5^{\circ}9,78'$	$-3^{\circ}10,78'$
Прокл	$+46\ 57,27$	$+16\ 4,78$	$+46\ 51,0$	$+16\ 3,0$
Макробий А	$+40\ 21,94$	$+19\ 32,69$	$+40\ 23,4$	$+19\ 33,6$
Шарп А	$-42\ 33,24$	$+47\ 31,78$	$-43\ 8,4$	$+47\ 55,2$
Аристарх	$-47\ 32,43$	$+23\ 42,23$	$-47\ 42,0$	$+23\ 47,4$
Гассенди Z	$-42\ 52,19$	$-16\ 27,43$	$-42\ 57,6$	$-16\ 27,6$
Бюрг А	$-63\ 48,23$	$-24\ 33,47$	$-63\ 45,6$	$-24\ 30,6$
Николан А	$+23\ 38,92$	$-42\ 26,97$	$+23\ 37,8$	$-42\ 27,0$
Фабриций К	$+42\ 14,63$	$-46\ 4,17$	$+42\ 19,8$	$-46\ 8,4$

На основании тщательной ревизии прежних каталогов составлен и опубликован каталог прямоугольных селенографических координат для 4510 объектов Луны [171], а в 1966 г. в Киеве на астрономической обсерватории АН УССР составлен каталог 500 опорных точек видимого полушария Луны. Эти точки использовались при построении советских карт видимой и обратной сторон Луны.

Для перехода от прямоугольных координат внешней перспективной проекции (на фотографии) к селенографическим координатам точек лунной поверхности могут использоваться формулы, полученные в работе [166]. Точность вычисления селенографических координат по этим формулам:

$$\Delta\lambda = \pm 4'; \Delta\beta = \pm (1 \div 2').$$

Для определения местоположения космонавтов на поверхности Луны в работе [170] даны эфемериды Солнца, Юпитера и ярких звезд, а также приведены необходимые формулы и таблицы. Кроме того, изложены основы лунной практической астрономии и описаны методы определения селенографической долготы, широты и поправки часов (см. также [162]). В работе [163] выведены формулы для перехода от средних геоэваториальных координат звезд равноденствия каталога к видимым экваториальным селенографическим координатам на заданный момент. Точность этого перехода $\pm (1' \div 3')$ в связи с неточностью знания параметра вынужденной физической либрации и угла наклона экватора Луны к эклиптике. Подробный анализ навигационных условий на Луне содержится в работе [182].

1.3.11. Астероиды

Астероиды (малые планеты, планетоиды) — малые тела Солнечной системы, обращающиеся вокруг Солнца. Они имеют поперечники от нескольких сот километров до 1 км и меньше. Лишены атмосферы. К настоящему времени закаталогизировано около 1700 астероидов. Их химический состав, по-видимому, такой же, как у метеоритов. Фазовый коэффициент для астероидов составляет 0,03 зв. величины на градус, т. е. такой же, как для Луны и Меркурия [11].

В работе [188] выдвинуто обоснованное предположение, что вещество, покрывающее поверхность Луны, распространено и на астероидах.

В табл. 1.23 приведены элементы орбит всех известных астероидов, звездная величина которых M (вычисленная при условии, что астероид находится на расстоянии 1 а.е. от Земли и от Солнца) меньше $7,5^m$.

В табл. 1.24 приведены элементы орбит наиболее близких к Земле астероидов, для которых выполняется условие $a(1-e) < 1,5$ а.е.

В табл. 1.25 для четырех наиболее крупных астероидов приведены значения альбедо, а также диаметры, измеренные Э. Барнардом (Ликская обсерватория), значения которых наиболее достоверны. Однако такие угловые измерения могут содержать ошибку до 10%. Примерно с такой точностью получены значения диаметров наиболее крупных астероидов другими авторами [189]. Диски других астероидов даже в сильные телескопы неразличимы. Чем меньше размеры астероидов, тем больше их количество. Общее число астероидов, которые могут быть открыты с помощью самых больших телескопов, оценочно составляет 50 000. Однако их суммарная масса по крайней мере в 3000 раз меньше массы Земли. Почти все известные астероиды (до 99,8% от их числа) образуют кольца, лежащие между орбитами Марса и Юпитера в диапазоне расстояний $(2,3 \div 7,8) \cdot 10^8$ км от Солнца.

Астероиды, для которых звездная величина $\bar{M} < 7,5^m$

Номер астероида	Название	$\bar{M}$	Эпоха 0 ^h эфемеридного времени			Средняя аномалия M	Аргумент перигелия ω	Долгота восходящего узла Ω	Наклонение i	φ^*	Среднее суточное движение μ	Большая полуось a а. е.
			год	м-ц	число							
1	Ceres	4,0 ^m	1957	06	11	279,880°	71,853°	80,514°	10,607°	4,353°	770,695"	2,7675
2	Pallas	5,1	1957	06	11	271,815	309,759	172,975	34,798	13,534	768,884	2,7718
3	Juno	6,3	1957	06	11	329,336	246,133	170,438	12,993	14,980	814,046	2,6683
4	Vesta	4,2	1957	06	11	79,667	149,134	103,693	7,132	5,099	977,645	2,3617
6	Hebe	6,6	1951	12	20	148,196	238,119	138,821	14,756	11,693	939,063	2,4259
7	Iris	6,7	1936	08	20	345,246	143,891	260,056	5,501	13,284	962,782	2,3859
8	Flora	7,4	1951	12	20	332,586	284,299	110,848	5,894	9,029	1086,170	2,2016
9	Metis	7,2	1957	06	11	356,506	4,708	68,790	5,581	7,006	962,562	2,3863
10	Hygiea	6,4	1948	07	28	257,334	310,264	285,376	3,813	5,717	634,408	3,1508
14	Irene	7,3	1949	12	30	291,357	95,659	86,561	9,129	9,464	852,339	2,5878
15	Eunomia	6,2	1951	12	20	45,003	95,796	293,643	11,717	10,736	826,009	2,6425
16	Psyche	6,8	1951	12	20	118,536	225,364	150,424	3,088	7,776	710,073	2,9228
20	Massalia	7,4	1956	11	23	227,258	255,323	206,298	0,698	8,241	949,089	2,4088
22	Kalliope	7,4	1947	01	15	356,711	353,863	66,507	13,724	5,913	715,086	2,9092
29	Amphitrite	7,2	1951	12	20	105,894	62,680	356,409	6,085	4,221	869,110	2,5544
39	Laetitia	7,3	1957	06	11	149,018	206,875	157,257	10,377	6,431	769,561	2,7702
52	Europa	7,4	1951	12	20	111,482	340,321	129,149	7,455	6,351	651,471	3,0956
349	Dembowska	7,2	1947	01	15	342,609	345,541	32,815	8,270	5,153	709,505	2,9244
511	Davida	7,0	1947	01	15	72,468	327,803	108,718	15,745	10,085	624,505	3,1841

* Эксцентриситет орбиты e выражается через угол φ по формуле $e = \sin \varphi$.

Астероиды, для которых $a(1-e) < 1,5$ а. е.

Номер астероида	Название	Эпоха 0 ^h эфемеридного времени			Средняя аномалия M	Аргумент перигелия ω	Долгота восходящего узла Ω	Наклонение i	φ^*	Среднее суточное движение μ	Большая полуось a а. е.
		год	м-ц	число							
эклиптика и равноденствие 1950.0											
433	Eros	1931	01	18	0,586°	177,930°	304,071°	10,831°	12,879°	2015,293''	1,4581
719	Albert	1911	10	02	7,929	151,940	186,094	10,825	32,722	853,665	2,5852
887	Alinda	1942	01	31	358,049	348,119	111,029	9,024	32,670	886,351	2,5212
944	Hidalgo	1948	02	29	335,824	57,506	21,273	42,529	40,975	254,384	5,7944
1009	Sirene	1954	01	18	32,187	184,565	229,619	15,839	27,309	837,875	2,6175
1036	Ganymend	1950	06	28	332,289	131,075	216,262	26,298	32,854	818,600	2,6584
1134	Kepler	1953	01	23	118,502	330,448	6,676	15,027	27,777	807,467	2,6828
1139	Atami	1941	06	19	96,784	205,517	213,215	13,102	14,782	1305,814	1,9472
1198	Atlantis	1938	12	08	56,938	81,982	260,726	2,722	19,544	1052,847	2,2478
1221	Amor	1948	06	28	31,348	25,498	171,241	11,926	25,836	1331,329	1,9223
1474	Beira	1941	01	06	37,798	82,352	324,878	26,799	29,345	785,353	2,7329
1566	Icarus	1958	09	24	149,826	30,949	87,700	22,965	55,745	3171,528	1,0777
1580	Betulia	1963	05	31	100,995	158,877	61,856	52,026	29,497	1091,116	2,1949
1620	Geographos	1961	12	07	199,165	276,263	336,927	13,326	19,591	2556,729	1,2442
1627	Ivar	1957	07	01	353,558	166,963	132,851	8,430	23,370	1394,004	1,8642

* Экцентриситет орбиты e выражается через угол φ по формуле $e = \sin \varphi$.

Наиболее крупные астероиды

Астероид	Сферическое альbedo	Диаметр в км	Астероид	Сферическое альbedo	Диаметр в км
Церера (Ceres)	0,06	768	Юнона (Juno)	0,12	193
Паллада (Pallas)	0,07	483	Веста (Vesta)	0,26	385

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. I

Астрономические постоянные

1. Абалакин В. К., Фурсенко М. А. Новая система астрономических постоянных МАС. — «Бюллетень Ин-та теоретической астрономии», т. 11, № 8, 1968, 481—499.
2. Аллен К. У. Астрофизические величины, пер. с англ. под ред. Д. Я. Мартынова, М., ИЛ, 1960.
3. Куликов К. А. Система астрономических постоянных. — «Астрономический журнал», т. 42, № 3, 1965, 666—668.
4. Anderson J. D. и др. Celestial mechanics experiment «Science», 158, No. 3809, 1967, 1689—1690.
5. Null G. W. A solution for the Sun-Mars mass ratio using Mariner IV Doppler tracking data. «Astron. J.», vol. 72, No. 10, 1967, 1292—1298.
6. O'Hadley D. A. Determination of the mass of Jupiter from the motion of 65 Cebele. «Astron. J.», vol. 73, No. 2, Part 2, 1968, 29.

Звезды

7. Астрономический ежегодник СССР, изд-во АН СССР, 1964.
8. Подобед В. В. Фундаментальная астрометрия, М., Физматгиз, 1962.
9. Справочник по космонавтике. Под общей ред. Н. Я. Кондратьева и В. А. Одинова, М., Воениздат, 1966.
10. Яковкин А. А., Деменко И. М., Мизь Л. Н. Формулы и эфемериды для полевых наблюдений на Луне. Киев, «Наукова думка», 1964.

Солнечная система

11. Брандт Д., Ходж П. Астрофизика солнечной системы, пер. с англ. под ред. Г. А. Лейкина, М., «Мир», 1967.
12. Голобородько Т. А. Эмпирическая зависимость между вращательными и орбитальными моментами количеств движения у больших планет. — «Астрономический журнал», т. 39, № 4, 1962, 761—763.
13. Чеботарев Г. А. О движении комет во внешней области солнечной системы. — «Астрономический журнал», т. 43, № 2, 1966, 435—440.
14. Шмидт О. Ю. Возникновение планет и их спутников. Изд-во АН СССР, 1950.

Солнце

15. Витинский Ю. И. Морфология солнечной активности. М., «Наука», 1966.
16. Космическая физика.—Сб. статей под ред. Д. П. Ле Гэлли и А. Розена, пер. с англ. под ред. И. А. Жулина, М., «Мир», 1966.
17. Мензел Д. Г. Наше Солнце, пер. с англ. М., Физматгиз, 1963.
18. Bell B., Glazer H. Some Sunspot and Flare Statistics, Smithsonian Contributions to Astrophysics, vol. 3, 1959.
19. Laue E. G., Drummond A. J. Solar constant: first direct measurements «Science», vol. 161, No. 3844, 1968, 888—891.
20. Witte B. A. Contribution to the Study of the Relation between Solar Flares and Sunspot Groups. HAO Solar Research Memorandum, 1951.

21. Мартынов Д. Я. Курс общей астрофизики. М., «Наука», 1965.
22. Мороз В. И. Физика планет. М., «Наука», 1967.
23. Саган К. и Келлог У. Планеты земной группы.— «Успехи физических наук», т. 83, № 2, 1964, 259—287.
24. Шаронов В. В. Природа планет. М., Физматгиз, 1958.
25. Dollfus A. L'eau sur Vénus et Mars. «Astronomie», t. 78, 1964, 41—56.
26. Kuiper G. P. The Atmospheres of the Earth and the Planets, 2nd ed., Univ. of Chicago Press, Chicago, 1952.
27. Kuiper G. P. Summary of infra-red observations on stars and planets, Trans. Internat. Astron. Union., vol. 7, 1950.

Меркурий

28. Кузьмин А. Д. Результаты радионаблюдений Меркурия, Венеры и Марса.— «Успехи физических наук», т. 90, № 2, 1966, 303—314.
29. Мороз В. И. Инфракрасный спектр Меркурия ($\lambda=1,0-3,9\mu$) — «Астрономический журнал», т. 41, № 6, 1964, 1108—1117.
30. Планеты и спутники, пер. с англ. под ред. В. И. Мороза. М., ИЛ, 1963.
31. Colombo G., Shapiro I. I. The rotation of the planet Mercury, Spec. Rept. Smithsonian Instn. Astrophys. Observ., No. 188 R, 1965, 25.
32. Jefferys W. H. Rotation of the planet Mercury, «Science», vol. 152, No. 3719, 1966, 201—202.
33. Liu Han-Shou, O'Keefe John A. Theory of rotation for the planet Mercury. «Science», vol. 150, No. 3704, 1965, 1717.
34. Mercury rotation rate confirmed as 58,6 days. «Sci. News Letter», vol. 89, No. 3, 1966, 37.
35. Mumford G. S. News notes. «Sky and Telescope», vol. 31, No. 4, 1966, 213—214.
36. Rasool S. I., Gross S. H., Mc Govern W. E. NASA Report, Jan. 1966.

Венера

37. Астрономический календарь. Ежегодник. Переменная часть. Вып. 71 на 1968 г. М., «Наука», 1967.
38. Барабашов Н. П. Спектрофотометрия большого темного пятна на Венере.— «Астрономический циркуляр», № 363, янв. 23, 1966, 1—2.
39. Белопольский А. А. Предварительные результаты исследования вращения планеты Венеры около оси.— «Изв. имп. Акад. наук», V сер. (физ.-матем. кл.) т. 18, 1903, с. XVIII—XIX.
40. Грингауз К. И. и др. Плазменные измерения, проведенные вблизи Венеры на космическом аппарате «Венера-4». — «Космические исследования», т. 6, № 3, 1968, 411—419.
41. Данилов А. Д. Радиоастрономические исследования и современные представления об атмосфере Венеры.— «Космические исследования», т. 2, 1964, № 1, 121—135.
42. Долгинов Ш. Ш., Ерошенко Е. Г., Жузгов Л. Н. Исследование магнитного поля с межпланетной станции «Венера-4». — «Космические исследования», т. 6, № 4, 1968, 561—575.
43. Келлог У., Саган К. Атмосферы Марса и Венеры, пер. с англ. М., ИЛ, 1962.
44. Колосов М. А., Яковлев О. И., Ефимов А. И. Исследование пространства дециметровых радиоволн в атмосфере Венеры с помощью автоматической межпланетной станции «Венера-4», ДАН СССР, т. 182, № 1, 1968, 93—94.
45. Корольков Д. В. и др. Радиоастрономические наблюдения Венеры с высокой разрешающей способностью. ДАН СССР, т. 149, № 1, 1963, 65—67.
46. Кузьмин А. Д., Кларк Б. Дж. Измерения поляризации и распределения яркостной температуры Венеры на волне 10,6 см.— «Астрономический журнал», т. 42, № 3, 1965, 595—617.
47. Ломоносов М. В. Явление Венеры на Солнце, наблюденное в Санкт-Петербургской императорской Академии наук мая 26 дня 1761 года, Санкт-Петербург, 1761 года. Полн. собр. соч., Изд-во АН СССР, т. 4, 1955, 361—376.
48. Мороз В. И. Инфракрасный спектр Венеры (1—2,5 μ). — «Астрономический журнал», т. 40, № 1, 1963, 144—153.

49. Мороз В. И., Курт В. Г. Атмосфера Венеры (сопоставление результатов астрономических наблюдений и прямого эксперимента).—«Космические исследования», т. 6, № 4, 1968, 576—585.
50. Мороз В. И. Новые наблюдения инфракрасного спектра Венеры ($\lambda=1,2-3,8\mu$).—«Астрономический циркуляр», 1963, № 262, 6—7; «Астрономический журнал», т. 41, № 4, 1964, 711—719.
51. Мур П. Планета Венера, пер. с англ. под ред. М. С. Боброва. М., ИЛ, 1961.
52. Раушенбах Б. В. Система управления межпланетной автоматической станции «Венера».—«Космические исследования», т. 6, № 4, 1968, 551—560.
53. Ржига О. Н. Результаты радиолокации планет.—«Космические исследования», т. 7, № 1, 1969, 84—91.
54. Шаронов В. В. Планета Венера. М., «Наука», 1965.
55. Allen J. A. Vapier др. Venus: an upper limit an intrinsic magnetic dipole moment based on obsence of a radiation belt. «Science», vol. 158, No. 3809, 1967, 1673—1675.
56. Barth C. A. и др. Ultraviolet emissions observed near Venus from Mariner V. «Science», vol. 158, No. 3809, 1967, 1675—1678.
57. Belopolsky A. Über die Rotation von Venus. Obs. Centr. Poulkovo (отдельн. издание), 1911.
58. Bottema M. и др. Composition of the clouds of Venus, «Astrophys J.», vol. 140, No. 4, 1964, 1640—1641.
59. Boyer Ch., Camichel H. Observations photographiques de la planète Venus, «Ann. astrophys», t. 24, No. 6, 1961, 531—535.
60. Boyer Ch. Recherches sur la rotation de Venus, «Astronomie», t. 79, 1965, 223—228.
61. Bridge H. S. и др. Mariner V: plasma and magnetic fields observed near Venus, «Science», vol. 158, No. 3809, 1967, 1669—1673.
62. Carpenter R. L. Study of Venus by CW-radar. «Astron. J.», vol. 69, No. 1, 1964, 2—11; vol. 70, No. 2, 1965, 134.
63. Ewing A. Water vapor on Venus. «Sci. News Letter», vol. 85, No. 17, 1964, 261.
64. Guinot B., Fessel M. Mesure spectrographique de mouvents dans l'atmosphère de Vénus, «J. observateurs», t. 51, No. 1, 1968, 13—20.
65. Herzberg G., Herzberg L. J. «Opt. Soc. Amer.», vol. 43, 1953, 1037—1044.
66. Kuiper G. P. Determination of the pole of rotation of Venus. «Astrophys. J.», vol. 120, 1954, 603—605.
67. Kuiper G. P. Infrared spectra of stars and planets. I. Photomeetry of the infrared spectrum of Venus, 1—2.5 microns, Communications of Lunar and Planet. Lab., vol. 1, No. 14—16, 1962, 83—117.
68. Pettit E. S., Nicholson S. B. Temperatures of the bright and dark sides of Venus. «Publ. Astron. Soc. Pacif.», vol. 67, 1955, 293—303.
69. Pluss G. H., Stull V. R. «J. Geophys. Res.», vol. 68, No. 5, 1963, 1355.
70. Richardson R. S. Observations of Venus made at Maunt Wilson in the winter of 1954—1955, «Publ. Astron. Soc. Pacif.», vol. 67, No. 398, 1955, 304—314.
71. Richardson R. S. Spectroscopic observations of Venus rotation made at Maunt Wilson in 1956. «Publ. Astron. Soc. Pacif.», vol. 70, No. 414, 1958, 251—260; «J. Brit. Interplanet. Soc.», vol. 16, No. 9, 1958, 517—526.
72. Shapiro I. Rotation of Venus. Discussion on the paper: «Rotation of Venus: continuing contradictions» by B. A. Smith. «Science», vol. 159, No. 3819, 1968, 1124.
73. Sinton W. M., Infrared observations of Venus. «Mém. Soc. Roy. Sci. Liège», vol. 7, No. 1, 1963, 300—313, 364—368.
74. Smith B. A. Rotation of Venus: continuing contradictions. «Science», vol. 158, No. 3797, 1967, 114—116.
75. Spinrad H. Spectroscopic temperature and pressure measurements in the Venus atmosphere. «Publ. Astron. Soc. Pacif.», vol. 74, No. 438, 1962, 187—201.
76. Spreiter John R. On the maximum magnetic moment of Venus. «J. Geophys. Res.», vol. 70, No. 17, 1965, 4399—4400.
77. Strong J., Ross M. D., Moore C. B. «J. Geophys. Res.», vol. 65, 1960, 2526.
78. Venus: ionosphere and atmosphere as measured by dual — frequency radio occultation of Mariner V. «Science», vol. 158, No. 3809, 1967, 1678—1683.
79. Walker R. G., Sagan C. The ionospheric model of the Venus microwave emission: an obituary, preprint, 1965.
80. Water vapor on Venus. «Sky and Telescope», vol. 27, No. 6, 1964, 331, 348.

Земля и околоземное пространство

81. Адам Н. В. и др. Синтез геомагнитного поля по коэффициентам сферического анализа.—«Геомагнетизм и аэрономия», «Наука», т. 4, № 1, 1964.

82. Адам Н. В. и др. Сферический гармонический анализ мировых магнитных карт эпохи 1960 г.— «Геомagnetизм и аэрономия», т. 4, № 6, 1964.
83. Бенькова Н. П. Магнитное поле Земли на больших высотах.— Труды третьего совещания по вопросам космогонии 14—15 мая 1953 г. Происхождение космических лучей. Изд-во АН СССР, 1954.
84. Вопросы атмосферной оптики и актинометрии.— «Труды Главной геофизической обсерватории», Л., 1965, № 168.
85. Грушинский Н. П. Теория фигуры Земли. М., Физматгиз, 1963.
86. Долгинов Ш. Ш., Пушков Н. В., Исследование магнитного поля в космическом пространстве.— «Космические исследования», т. 1, 1963, № 1.
87. Жонголович И. Д. Внешнее гравитационное поле Земли и фундаментальные постоянные, связанные с ним.— «Труды ин-та теоретической астрономии». № 3, Изд-во АН СССР, 1952.
88. Кондратьев К. Я., Филиппович О. П. Тепловой режим верхних слоев атмосферы. М., Гидрометеиздат, 1960.
89. Космонавтика. Маленькая энциклопедия. М., «Советская энциклопедия», 1968.
90. Кочина Н. Г. Влияние гравитационных аномалий Земли на движение искусственных спутников.— «Труды института теоретической астрономии». № 9, Изд-во АН СССР, 1962.
91. Матвеев Л. Т. Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. Л., Гидрометеиздат, 1965.
92. Николе М. Аэрономия, пер. с англ. М., «Мир», 1964.
93. Пэшуой К. Сферический анализ геомагнитного поля эпохи 1955,0.— «Геомagnetизм и аэрономия», т. 2, вып. 1, 1962.
94. Фесенков В. Г. К вопросу об исследовании атмосферного озона путем фотометрии лунных затмений.— «Астрономический журн.», т. 36, 1959, № 4.
95. Шевнин А. Д. Об измерении X-, Y-, Z-составляющих геомагнитного поля на спутниках и ракетах.— «Космические исследования», т. 3, № 2, 1965.
96. Шевнин А. Д. О возмущающем моменте спутника, движущегося в магнитном поле Земли.— «Космические исследования», т. 3, № 5, 1965.
97. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М., «Наука», 1965.
98. Handbook of Astronautical Engn., New-York — Toronto — London, by H. N. Kelle, editor — in Chief, 1965.
99. Yates G. K. «J. Geophys. Res.», vol. 69, No. 15, 1964.

М а р с

100. Барабашев Н. П. Об изменении цвета «морей» Марса.— «Астрономический журнал», т. 24, № 3, 1947.
101. Барабашев Н. П. О возможности увидеть отражение Солнца (блик) в «морях» Марса, «Циркуляр астр. obs. Харьк. ун-та», т. 10, 1952.
102. Барабашев Н. П. О некоторых изменениях на Марсе по наблюдениям в 1920, 1924, 1926, 1930, 1931, 1935, 1939, 1941 и 1950 гг.— «Циркуляр астр. obs. Харьк. ун-та», т. 7, 1951.
103. Бронштэн В. А. Предварительные результаты изучения снимков Марса, полученные «Маринером-4». — «Астрономический журнал», т. 43, № 6, 1966, 1261—1266.
104. Вакулер Ж. Физика планеты Марс, пер. с франц. М., ИЛ, 1956.
105. Мороз В. И. Рецензия на марсианский выпуск «Сообщений Лаборатории Луны и планет». — «Астрономический журнал», т. 43, № 6, 1966.
106. Ржига О. Н. Оценка физических свойств поверхности Марса по результатам радиоастрономических и инфракрасных наблюдений.— «Астрономический журнал», т. 44, № 1, 1967.
107. Страхов Н. М. К вопросу о возможностях образования гидроокисей железа на поверхности Марса.— «Астрономический журнал», т. 43, № 6, 1966.
108. Суслов А. К. Новая оценка количества воды на Марсе.— «Астрономический журнал», т. 43, № 6, 1966.
109. Сытинская Н. Н. Результаты наблюдений Марса во время великого противостояния 1956 г. в СССР. Изд-во АН СССР, 1959.
110. Allen J. A. Van et al., Absence of martian radiation belts and implications the reof., «Science», 149, No. 3689, 1965, 1228—1233.
111. Antoniadis E. M. La Planète Mars, Paris, Hermann and Cie, 1930.
112. Coblentz W., Lampland C., Menzel D. Temperatures of Mars, 1926; «Publ. Astron. Soc. Pacific», vol. 39, 1927, 26—34; «Pop. Astr.», vol. 35, 1927, 145; «Scient. pap. Bureau of Standards», vol. 22, No. 553, 1927, 237.
113. Gifford F. The surface temperature climate of Mars, «Astrophys. Journ.», vol. 123, 1956, 154—161.
114. Kaplan L. D., Münch G., Spinrad H. An analysis of the spectrum of Mars. «Astrophys. J.», vol. 139, No. 1, 1964, 1—15.
115. Kilston S. D., Drummond R. R., Sagan C. A search for life on Earth at kilometer resolution, «Icarus», vol. 5, No. 1, 1966, 79—98.

116. Kliore A. и др. Occultation experiment: results of the first direct measurement of Mars's atmosphere and ionosphere, «Science», vol. 149, No. 3689, 1965, 1243—1248.
117. Lowell P. Mars and its canals, New York, 1906.
118. McElroy M. B. The upper atmosphere of Mars. «Astrophys. J.» vol. 150, No. 3, Part. 1, 1967, 1125—1138.
119. Miyamoto S. Martian atmosphere and crust., «Icarus», vol. 5, No. 4, 1966, 360—374.
120. Miyamoto S. Meteorological observations of Mars during the 1965 opposition. «Contribs Inst. Astrophys. and Kwasan Observ. Univ. Kyoto», No. 141, 1965, 45.
121. NASA engineering models of the Mars atmosphere for entry vehicle design. Eds Levin George M., Evans Dallas E., Stevens Victor. NASA Techn. Note ND — 2525, Washington, D. C., 1964, 47.
122. Opik E. J. The martian surface, «Science», vol. 153, No. 3733, 1966, 255—265.
123. Sagan C., Pollack J. B. Elevation differences on Mars. «Spec. Rept. Smithsonian Astrophys. Observ.», No. 224, 1966.
124. Sagan C., Pollack J. B. On the nature of the canals of Mars, «Nature» (Engl.), vol. 212, No. 5058, 1966, 117—121.
125. Slipher E. C. A Photographic History of Mars, 1905—1961, Lowell Obs., Flagstaff, Ariz., 1962.
126. West G. S., Jr. Roberts W. T. The atmosphere of Mars: a derivation of parameters for engineering and design applications. «Inst. Environm. Sci. Annual Techn. Meet. Proc., Washington, D. C., 1967», 121—125.

Юпитер

127. Всехсвятский С. К. О природе изменений на поверхности Юпитера.— «Астрономический журнал», т. 42, № 3, 1965.
128. Гурко О. В. Интересное явление на Юпитере.— «Бюллетень ВАГО», № 29 (36), 1961.
129. Кротиков В. Д., Троицкий В. С. и Цейтлин Н. М. Температура радиоизлучения Луны и Юпитера на волне 70,16 см.— «Астрономический журнал», т. 41, № 5, 1964, 951—954.
130. Мороз В. И. Спектры Юпитера и Сатурна в области 1—2,5 м.— «Астрономический журнал», т. 43, № 3, 1966, 579—592.
131. Тейфель В. Г. К вопросу о фотометрических свойствах Красного Пятна на Юпитере.— «Астрономический журнал», т. 41, № 3, 1964.
132. Тейфель В. Г. О высоте верхней границы Красного Пятна на Юпитере. «Астрономический циркуляр», № 232, 1962.
133. Berge G. L. An interferometric study of Jupiter's decimeter radio emission, «Astrophys. J.», vol. 146, No. 3, 1966, 767—798.
134. Chapman C. R. The discovery of Jupiter's Red Spot. «Sky and Telescope», vol. 35, No. 5, 1968, 276—278.
135. Dulk G., Rayhrer B., Lawrence R. The size of Jupiter's decametric radio source, «Astrophys. J.», vol. 150, No. 2, Part. 2, 1967, 117—120.
136. Franklin K. L. Radio waves from Jupiter, «Scient. Amer.», vol. 211, No. 1, 1964, 35—42.
137. Komesaroff M. M., McCulloch P. M. The radio rotation period of Jupiter, «Astrophys. Letters», vol. 1, No. 2, 1967, 39—41.
138. New Scientist, 29, No. 487, 1966, 702.
139. Owen T. «Publ. Astron. Soc. Pacific.», vol. 75, 1964, 324.
140. Owen T., Walsh T. Radiation balance of Jupiter and Saturn. «Nature» (Engl.), vol. 208, No. 5009, 1965, 476—477.
141. Peek B. M. Sudden changes in the motion of Jupiter's Great Red Spot during 1962, «Monthly Notices Roy. Astron. Soc.», vol. 130, No. 5—6, 1965, 423—427.
142. Slee O. B., Gent H. Dekametric radio emission from Jupiter. «Nature» (Engl.), vol. 216, No. 5112, 1967, 235—238.
143. Slipher V. The spectra of the major planets, «Lowell. Obs. Bull.», No. 42, 1909.
144. Wildt R. Photochemistry of planetary atmospheres. «Astrophys. Journ.», vol. 86, 1937, 324—325.

Сатурн

145. Бобров М. С. К вопросу о толщине колец Сатурна.— «Астрономический журнал», т. 33, № 2, 1956.
146. Alexander A. F. O'D. The planet Saturn. A history of observation, theory and discovery, London, Faber and Faber, 1962, 474.
147. Lenham A. P. An analysis of Saturn intensity observations III. «J. Brit. Astron. Assoc.», vol. 76, No. 4, 1966, 258—260.
148. Lenham A. P. The latitudes of Saturn's belts. «J. Brit. Astron. Assoc.», vol. 76, No. 3, 1966, 186—187.

149. Moore P. Recent observations of Saturn, «J. Brit. Astron. Assoc.», vol. 75, No. 4, 1965, 215—216.

Уран, Нептун, Плутон

150. Киладзе Р. И. К вопросу о периоде вращения Плутона.— «Бюллетень Абастуманск. астрофиз. обсерв.», № 34, 1966.

151. Паренаго П. П. О вращении Урана вокруг оси.— «Астрономический журнал», т. 11, № 5, 1934, 487—496.

152. Рубашевский А. А. Метод определения диаметра Плутона из наблюдений покрытия звезд. Замечания к работе Холидея.— «Астрономический журнал», т. 43, № 1, 1966.

153. Alexander A. F. O'D. The planet Uranus. A history of observation, theory and discovery. London, Faber and Faber, 1965, 316.

154. Günter Ö. Der Rotationslichtwechsel des Neptun, «Astron. Nachr.», Bd. 282, 1—14, 1955, 247—251.

155. Hardie R. A re-examination of the light variation of Pluto, «Astron. J.», vol. 70, No. 2, 1965, 140.

156. Herrmann J. Porträt eines fernen Planeten: Pluto, «Sterne und Weltraum», Bd. 5, No. 6, 1966, 132—137.

157. Kellerman K. I., Pauliny-Toth I. I. K. The detection of the thermal radio emission from Uranus and Neptune at 1,9 cm., «Astron. J.», vol. 71, No. 6, 1966, 390.

158. Lowell P. Spectroscopic discovery of the rotation period of Uranus. «Lowell Obs. Bull.», vol. 2, No. 53 (3), 1912, 17—78.

Спутники планет

159. Бакулин П. И. и др. Курс общей астрономии. М., «Наука», 1966.

160. Виноградов А. П. и др. Измерение гамма-излучения лунной поверхности на космической станции «Луна-10».— «Геохимия», 1966, № 8.

161. Виноградов А. П. и др. Исследование интенсивности и спектрального состава гамма-излучения Луны на автоматической станции «Луна-10». ДАН СССР, т. 170, № 3, 1966.

162. Гуревич В. Б. Астрономическое определение местоположения на Луне.— «Астрономический журнал», т. 44, № 1, 1967.

163. Гуревич В. Б. О вычислении и точности селеноцентрических экваториальных координат звезд.— «Астрономический журнал», т. 42, 1965, № 2, 437—451.

164. Гурштейн А. А. О программах «Рейнджер» и «Сервейор».— «Земля и вселенная», 1966, № 6, 30—37.

165. Калинин А. А. Данные о спектрах галилеевских спутников Юпитера.— «Астрономический журнал», т. 42, № 5, 1965.

166. Лисина Л. Р., Шевченко В. В. Определение селенографических координат точек лунной поверхности и расстояний между ними при фотометрическом способе исследования углов наклона.— В сб.: «Фигура и движение Луны», отв. ред. А. А. Яковкин. Киев, «Наукова думка», 1965, 80—91.

167. Мороз В. И. Опыт инфракрасной спектрофотометрии спутников: Луна и галилеевские спутники Юпитера.— «Астрономический журнал», т. 42, № 6, 1965.

168. Новое о Луне. Доклады и сообщения на Международном симпозиуме по исследованию Луны, 6—10 дек. 1960. Пулково, под ред. А. А. Михайлова и др. АН СССР, 1963.

169. Эрик К. Космический полет, т. 1. М., Физматгиз, 1963.

170. Яковкин А. А. и др. Формулы и эфемериды для полевых наблюдений на Луне. Киев, «Наукова думка», 1964.

171. Arthur D. W. G. Consolidated catalog of selenographic positions, «Communs Lunar and Planetary Lab.», vol. 1, No. 11, 1962, 47—49.

172. Berg S. Le bilan de masse de la Lune est négatif ont estimé d'éminets savants à la reunion du COSPAR, «Air et cosmos», t. 4, No. 156, 1966, 21—23.

173. Binder A. B., Cruikshank D. P. Evidence for an atmosphere on Io. «Icarus», 3, No. 4, 1964, 299—305.

174. Binder A. B., Cruikshank D. P. Photometrik search for atmospheres on Europa and Ganymede, «Icarus», vol. 5, No. 1, 1966, 7—9.

175. Bray T. A., Goudas C. L., Kopal Z. Estimates of the zonal gravity harmonics of the Moon, «Icarus», vol. 7, No. 1, 1967, 76—84.

176. Dollfus A. Un nouveau satellite de Saturne, «C. r. Acad. sci.», t. 264, No. 10, 1967, B. 822—B. 824.

177. Duncan R. A. Modulation of Jupiter decametric emission by the satellite Io, «Planet and Space Sci.», vol. 13, No. 10, 1965, 997—1001.

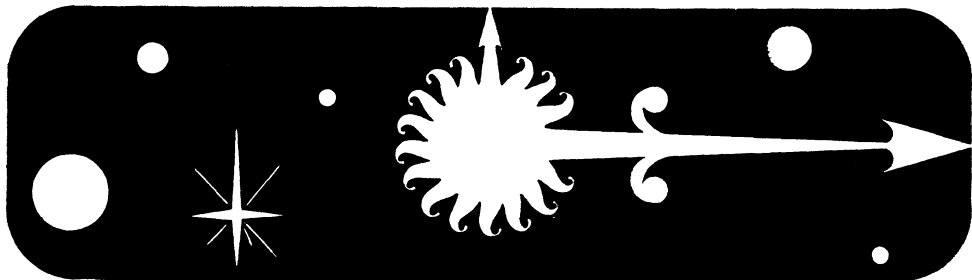
178. Halliday I. Recent studies of the Moon. «J. Roy Astron. Soc. Canada», vol. 59, No. 4, 1965, 174—176.

179. Jaffe L. D. Surface structure and mechanical properties of the lunar maria. «J. Geophys. Res.», vol. 72, No. 6, 1967, 1727—1731.

180. Japet, «Bulletin docum. observ. Stat. astropys., Forcalquier», vol. 12, No. 7, 1962, 4.
181. Koziel K. Krater Mösting A as the first-order point of triangulation on the Moon, «Life Sci. and Space Res.», vol. 2, Amsterdam, 1964, 140—144.
182. McCartney E. J. Navigational Environment of the Moon, «Navigation», vol. 10, No. 2, 1963, 154—160.
183. «Science News», vol. 94, No. 25, 1968, 622.
184. «Sky and Teleskope», vol. 33, No. 3, 1967, 159—160.
185. Surveying the Moon: first results, «Flight Internat.», vol. 91, No. 2994, 1966, 145—148.

Астероиды

186. Левин Б. Ю. О размерах астероидов, «Астрономический циркуляр», № 141, 1953.
 187. Рийвес В. Г. Коэффициент фазы как показатель степени изрытости поверхности астероидов.— «Публ. астрон. обсерв. Тарту», т. 32, № 2, 1952.
 188. Сытинская Н. Н. Опыт колориметрического сравнения астероидов и земных горных пород.— «Астрономический журнал», т. 42, № 1, 1965.
 189. Widorn T. Zur photometrischen Bestimmung der Durchmesser der kleinen Planeten. «Ann. Univ.—Sternwarte Wien», Bd. 27, Nr. 2—4, 1967.
-



ГЛАВА II

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ВРЕМЯ

2.1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

При изучении движения космических аппаратов (КА) и небесных тел применяются *прямоугольные, криволинейные и оскулирующие* системы координат. Криволинейными координатами являются цилиндрические, сферические, эллипсоидальные, параболоидальные координаты.

В зависимости от места положения начала координат системы делятся на:

- гелиоцентрические — с началом координат в центре масс Солнца;
- геоцентрические — с началом координат в центре масс Земли;
- топоцентрические — начало координат в пункте наблюдения на поверхности Земли;

- барицентрические — с началом координат в центре масс КА;
- планетоцентрические — с началом координат в центре масс планет: Венеры, Марса, Юпитера и др.;
- селеноцентрические — с началом координат в центре масс Луны.

В зависимости от выбора основной плоскости системы делятся на экваториальные, эклиптические и др. В зависимости от выбора направления осей систем по отношению к пространственным ориентирам системы делятся на вращающиеся и невращающиеся (инерциальные).

Для геоцентрических (эклиптических, экваториальных) и гелиоцентрических систем координат необходимо указать момент времени (эпоху), к которому отнесена принятая система координат.

Эпоха — момент времени, для которого дается значение каких-либо величин, изменяющихся со временем и определяющих ориентировку координатной системы (или определяющих положение небесного светила).

В настоящей главе приводятся наиболее употребительные системы координат.

2.1.1. Гелиоцентрические прямоугольные системы координат

а. *Эклиптическая система координат $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$* (рис. 2.1). Начало — в центре масс Солнца. Ось $\tilde{X}$ направлена в точку весеннего равноденствия Υ , ось $\tilde{Z}$ — по нормали к плоскости эклиптики, в сторону Северного полюса Солнца, а ось $\tilde{Y}$ дополняет систему до правой.

б. *Экваториальная система координат $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$* (рис. 2.2). Начало — в центре масс Солнца. Ось $\tilde{x}$ направлена в точку весеннего равноденствия Υ , ось $\tilde{z}$ — по нормали к плоскости земного экватора, в сторону Северного полюса, а ось $\tilde{y}$ дополняет систему до правой.

2.1.2. Геоцентрические прямоугольные системы координат

а. *Эклиптическая система координат $\xi\eta\zeta$* (рис. 2.3). Начало — в центре масс Земли O . Ось ξ направлена в точку весеннего равноденствия Υ , ось ζ — по нормали к плоскости эклиптики P' и направлена в сторону Северного полюса Земли, а ось η дополняет систему до правой.

б. *Экваториальная (абсолютная, звездная) система координат XYZ* (рис. 2.4). Начало — в центре масс Земли O . Ось X направлена в точку весеннего равноденствия Υ , ось Z совпадает с осью вращения Земли и направлена на Северный полюс Земли P , а ось Y дополняет систему до правой.

в. *Гринвичская система координат xyz* (рис. 2.5). Начало — в центре масс Земли O . Сама система связана с вращающейся Землей. Ось x направлена в точку пере-

сечения гринвичского меридиана с экватором, ось z совпадает с осью вращения Земли и направлена на Северный полюс Земли, а ось y дополняет систему до правой.

г. Лунногеоцентрическая система координат $X^L Y^L Z^L$ (рис. 2.6). Начало — в центре масс Земли O . Ось Y^L направлена в нисходящий относительно земного экватора узел лунной орбиты $П^L$, ось Z^L нормальна плоскости орбиты Луны и

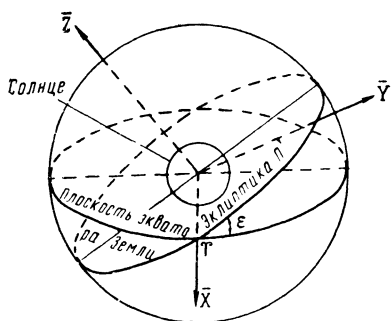


Рис. 2. 1. Гелиоцентрическая эклиптическая прямоугольная система координат

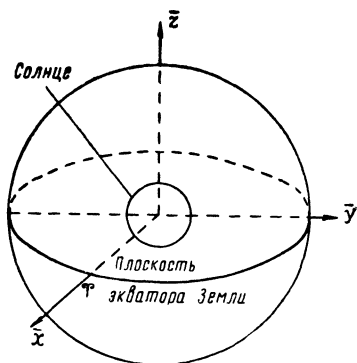


Рис. 2. 2. Гелиоцентрическая экваториальная прямоугольная система координат

расположена в Северном полушарии Земли, а ось X^L дополняет систему до правой

д. Лунноэкваториальная система координат $X_0 Y_0 Z_0$ (рис. 2.7). Начало — в центре масс Земли O . Ось Y_0 совпадает с направлением оси Y^L , ось Z_0 — направлена по оси вращения Земли в сторону Северного полюса Земли P , а ось X_0 дополняет систему до правой.

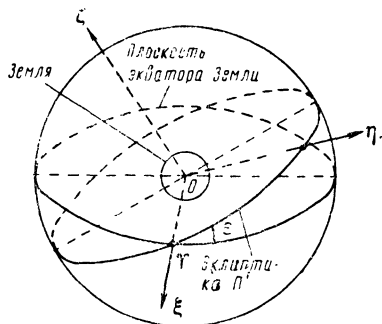


Рис. 2. 3. Геоцентрическая эклиптическая прямоугольная система координат

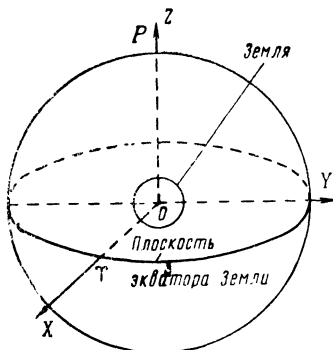


Рис. 2. 4. Геоцентрическая экваториальная (абсолютная, звездная) прямоугольная система координат

е. Орбитальная система координат $\xi\eta\zeta$ (рис. 2.8). Начало — в центре масс Земли O . Ось ξ направлена в перигецентр орбиты $П$ (или в точку восходящего узла орбиты Ω), ось ζ — по нормали к плоскости орбиты КА в сторону вектора кинетического момента движения КА, а ось η дополняет систему до правой.

2.1.3. Геоцентрические криволинейные системы координат

а. Цилиндрическая система координат $r\varphi z$ (рис. 2.9). Начало — в центре масс Земли O . Ось z совпадает с осью ξ орбитальной системы координат; r — радиус-вектор КА, расстояние от центра масс Земли до центра масс рассматриваемого КА; φ — угол в плоскости орбиты, отсчитываемый от направления на восходящий узел орбиты Ω (или угол θ от направления на перигецентр $П$) до направления на КА.

б. Эклиптическая сферическая система координат $\rho\lambda\beta$ (рис. 2.10). Начало — в центре масс Земли O , λ — астрономическая долгота, угловое расстояние по эклип-

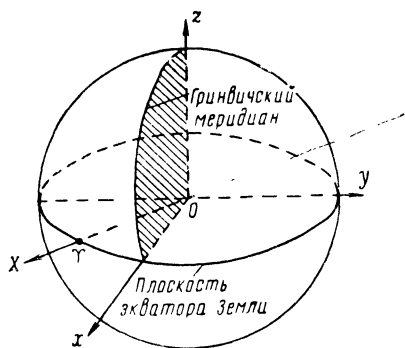


Рис. 2.5. Геоцентрическая гринвичская прямоугольная система координат

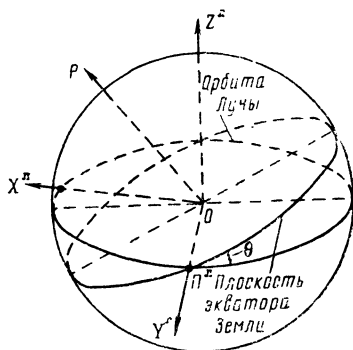


Рис. 2.6. Лунногеоцентрическая прямоугольная система координат

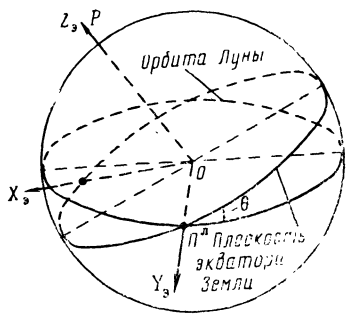


Рис. 2.7. Лунноэкваториальная прямоугольная система координат

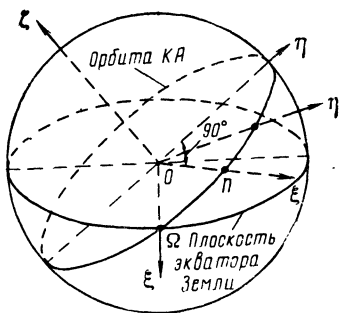


Рис. 2.8. Геоцентрическая орбитальная прямоугольная система координат

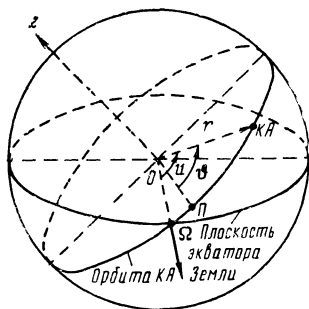


Рис. 2.9. Геоцентрическая цилиндрическая система координат

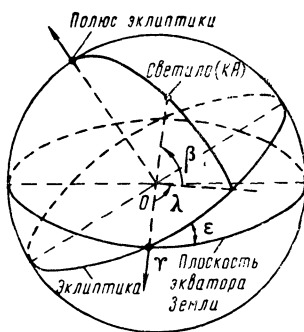


Рис. 2.10. Геоцентрическая эклиптическая сферическая система координат

тике от точки весеннего равноденствия Υ до меридиана светила (КА); отсчитывается в сторону, противоположную суточному вращению небесной сферы; β — астрономическая широта, угловое расстояние по небесному меридиану от эклиптики до светила (КА); ρ — радиус-вектор светила, расстояние от центра масс Земли до светила (КА).

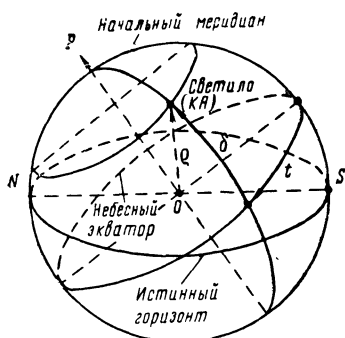


Рис. 2.11. Первая экваториальная сферическая система координат

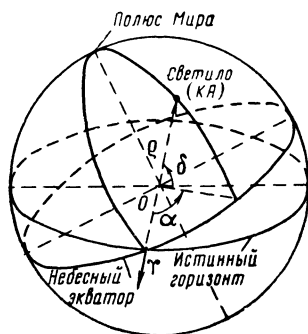


Рис. 2.12. Вторая экваториальная сферическая система координат

в. Первая экваториальная сферическая система координат $\rho t \delta$ (рис. 2.11). Начало в центре масс Земли O , t — часовой угол светила (КА), определяемый дугой небесного экватора между начальным меридианом и кругом склонения светила (КА); δ — склонение, угловое расстояние от небесного экватора до проекции небесного тела (КА) на небесную сферу; ρ — радиус-вектор светила (КА).

г. Вторая экваториальная сферическая система координат $\rho \alpha \delta$ (рис. 2.12). Начало — в центре масс Земли O , α — прямое восхождение светила (КА), угловое расстояние по небесному экватору от точки весеннего равноденствия Υ до меридиана светила (КА); δ — склонение, угловое расстояние по меридиану от небесного экватора до светила; ρ — радиус-вектор светила (КА).

2.1.4. Геоцентрические сферические системы координат, определяющие положение точки на земной поверхности

а. Геоцентрическая система координат $\rho_0 \varphi_{\text{ц}} \lambda$ (рис. 2.13). ρ_0 — радиус-вектор пункта наблюдения, расстояние от центра масс Земли до пункта наблюдения; $\varphi_{\text{ц}}$ — геоцентрическая широта, угол между радиусом-вектором и плоскостью земного экватора; λ — геоцентрическая долгота, угол между гринвичским меридианом и меридианом

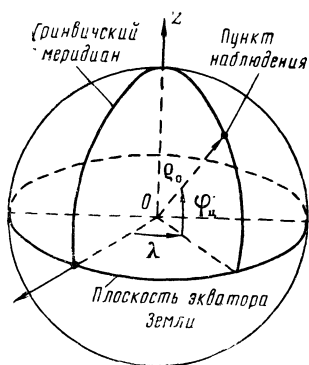


Рис. 2.13. Геоцентрическая сферическая система координат

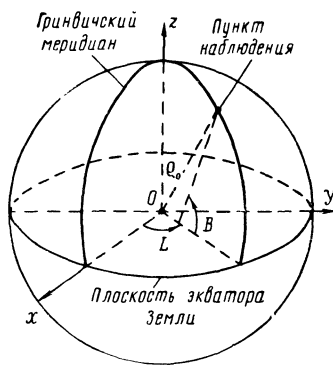


Рис. 2.14. Геодезическая сферическая система координат

ном пункта наблюдения; положительное направление отсчитывается от гринвичского меридиана на Восток.

б. Геодезическая система координат $\rho_0 B L$ (рис. 2.14). ρ_0 — радиус-вектор пункта наблюдения; B — геодезическая широта, угол между нормалью к поверхности референц-эллипсоида и плоскостью земного экватора; L — долгота, угол между гринвичским меридианом и меридианом пункта наблюдения.

в. Географическая (астрономическая) система координат $\rho_0 \varphi_r \lambda$ (рис. 2.15). ρ_0 — радиус-вектор пункта наблюдения; φ_r — географическая широта, угол между направлением силы тяжести (линии отвеса) в пункте наблюдения и плоскостью экватора; λ — долгота, угол между гринвичским меридианом и меридианом пункта наблюдения.

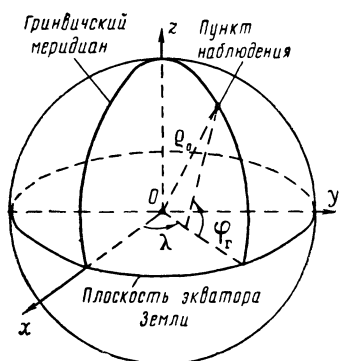


Рис. 2.15. Географическая сферическая система координат

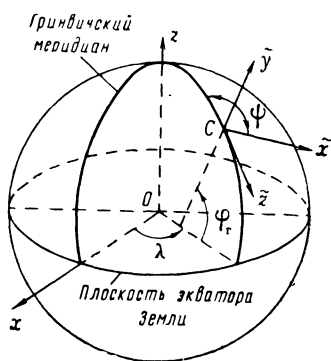


Рис. 2.16. Топоцентрическая стартовая прямоугольная система координат

2.1.5. Топоцентрические прямоугольные системы координат

а. Стартовая система координат $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ (рис. 2.16). Начало — на поверхности Земли в точке старта C , определяемой географической широтой φ_r и долготой λ . Ось $\tilde{x}$ лежит в горизонтальной плоскости и задается азимутом запуска ψ , отсчитываемого по часовой стрелке от направления на Северный полюс Земли до плоскости траектории запуска КА, ось $\tilde{y}$ направлена вверх прямо противоположно направлению силы тяжести (линии отвеса), а ось $\tilde{z}$ дополняет систему до правой.

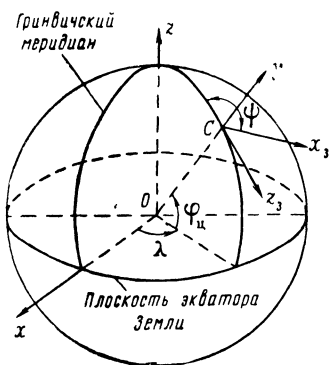


Рис. 2.17. Топоцентрическая земная прямоугольная система координат

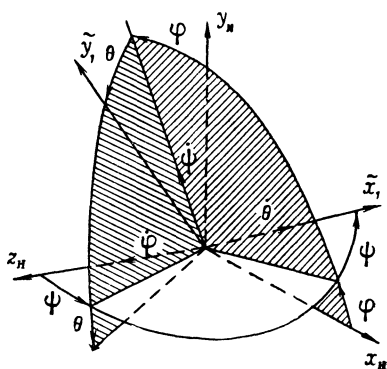


Рис. 2.18. Топоцентрическая стартовая начальная система координат

б. Земная система координат $x_3 y_3 z_3$ (рис. 2.17). Начало — в точке старта C . Ось x_3 задается азимутом запуска ψ , ось y_3 направлена вверх по прямой, проходящей через центр масс Земли и точку старта, а ось z_3 дополняет систему до правой.

в. Стартовая начальная система координат $x_n y_n z_n$ (рис. 2.18). Начало системы совпадает с началом стартовой системы координат. Координатные оси в момент старта совпадают с осями стартовой системы координат и в дальнейшем не меняют своего положения относительно вращающейся Земли.

г. Стартовая «замороженная» система координат $x' y' z'$ (рис. 2.19). Начало системы совпадает с началом стартовой системы координат. Координатные оси в момент старта совпадают с осями стартовой системы координат и в дальнейшем не

меняют своего положения относительно геоцентрической экваториальной прямоугольной системы координат XYZ .

д. Пунктовая система координат $\xi_n \eta_n \zeta_n$ (рис. 2.20). Начало — в точке расположения пункта наблюдения (НП), определяемой геодезической широтой B и дол-

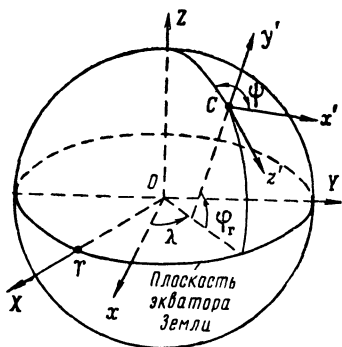


Рис. 2.19. Топоцентрическая стартовая замороженная прямоугольная система координат

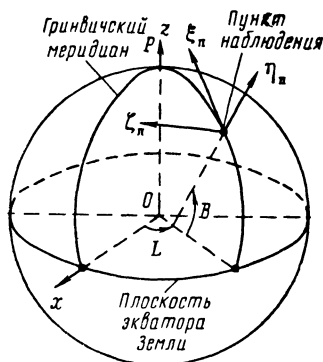


Рис. 2.20. Топоцентрическая пунктовая прямоугольная система координат

готой L . Ось ξ_n направлена на Северный полюс Земли P по касательной к меридиану пункта наблюдения; ось η_n — по внешней нормали к земному эллипсоиду, а ось ζ_n дополняет систему до правой.

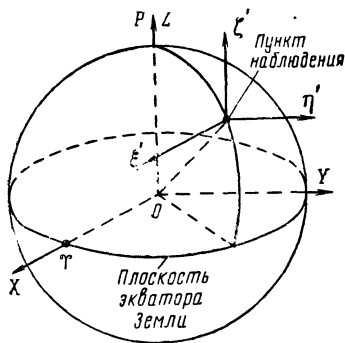


Рис. 2.21. Топоцентрическая экваториальная прямоугольная система координат

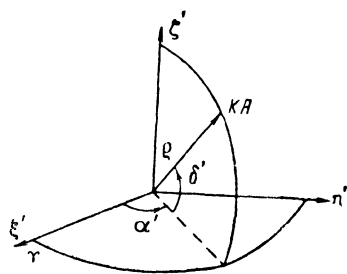


Рис. 2.22. Топоцентрическая сферическая система координат

е. Экваториальная система координат $\xi' \eta' \zeta'$ (рис. 2.21). Начало — в точке расположения пункта наблюдения НП. Ось ξ' направлена в точку весеннего равноденствия Υ ; ось ζ' направлена параллельно оси вращения Земли в сторону Северного полюса P ; ось η' дополняет систему до правой. Основная плоскость $\xi' \eta'$ системы параллельна плоскости экватора Земли.

2.1.6. Топоцентрическая сферическая система координат

Сферическая система координат $\rho \alpha' \delta'$ (рис. 2.22). Начало — в точке расположения пункта наблюдения НП, основная плоскость системы координат параллельна земному экватору; ρ — радиус-вектор наблюдаемого КА, расстояние от пункта наблюдения до центра масс КА; α' — прямое восхождение КА, угол между направлением на точку весеннего равноденствия Υ и проекцией радиуса-вектора КА на основную плоскость; δ' — склонение КА, угол между радиусом-вектором КА и основной плоскостью (отсчет углов α' и δ' показан на рис. 2.22).

2.1.7. Барицентрические прямоугольные системы координат

а. Орбитальная система координат $t \bar{b} n$ (рис. 2.23). Начало — в центре масс КА. Ось $\bar{b}$ нормальна плоскости орбиты КА и коллинеарна вектору $\bar{C}$ кинетическо-

го момента движения КА (вектор интеграла площадей); ось n направлена по радиусу-вектору КА в сторону его возрастания, ось τ дополняет систему до правой.

б. Скоростная система координат $\tilde{\xi}\tilde{\eta}\tilde{\zeta}$ (рис. 2.24). Начало — в центре масс КА. Ось $\tilde{\xi}$ совпадает с вектором скорости $\vec{V}$ КА; ось $\tilde{\eta}$ нормальна плоскости орбиты КА и коллинеарна вектору $\vec{C}$ кинетического момента движения КА, а ось $\tilde{\zeta}$ дополняет систему до правой.

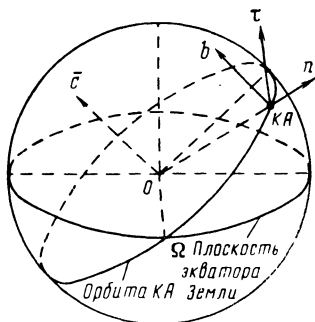


Рис. 2.23. Бариецентрическая орбитальная прямоугольная система координат

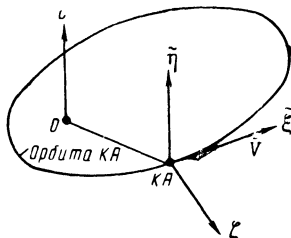


Рис. 2.24. Бариецентрическая скоростная прямоугольная система координат

в. Горизонтальная система координат $\tau'b'n'$ (рис. 2.25). Ось τ' лежит в плоскости орбиты и местного горизонта и направлена в сторону движения КА, ось n' направлена в Зенит, а ось b' дополняет систему до правой.

г. Связанная система координат $x_1y_1z_1$ (рис. 2.26). Начало — в центре тяжести ракеты-носителя КА. Ось x_1 коллинеарна продольной оси ракеты-носителя КА, направлена в сторону вектора тяги и в момент $t=0$ коллинеарна оси y стартовой системы; ось y_1 в момент $t=0$ направлена противоположно оси x стартовой системы, а ось z_1 дополняет систему до правой.

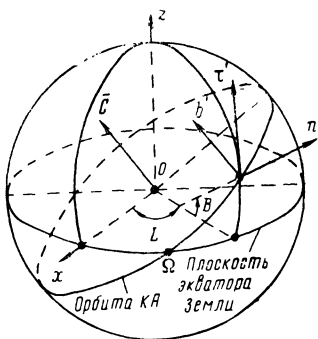


Рис. 2.25. Бариецентрическая горизонтальная прямоугольная система координат

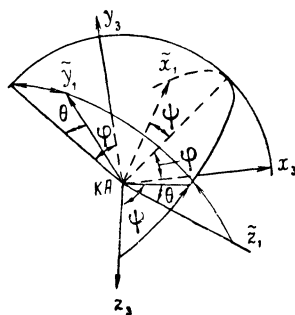


Рис. 2.26 Бариецентрическая связанная прямоугольная система координат

д. Скоростная связанная система координат $\xi_c\eta_c\zeta_c$ (рис. 2.27). Начало системы совпадает с началом связанной с КА системы координат. Ось ξ_c направлена по вектору $\vec{V}$ скорости КА, ось η_c — в сторону вектора ускорения силы тяжести $\vec{g}$, а ось ζ_c дополняет систему до правой.

2.1.8. Планетоцентрические прямоугольные системы координат

а. Невращающаяся система координат $\xi\eta\zeta$ (рис. 2.28). Начало — в центре масс планеты, основная плоскость совпадает с плоскостью невозмущенной орбиты планеты. Ось ξ направлена в центр масс Земли; ось ζ нормальна плоскости орбиты планеты и коллинеарна вектору $\vec{C}$ кинетического момента движения планеты, а ось η дополняет систему до правой.

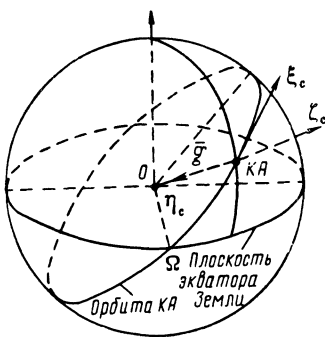


Рис. 2.27. Барицентрическая скоростная связанная прямоугольная система координат

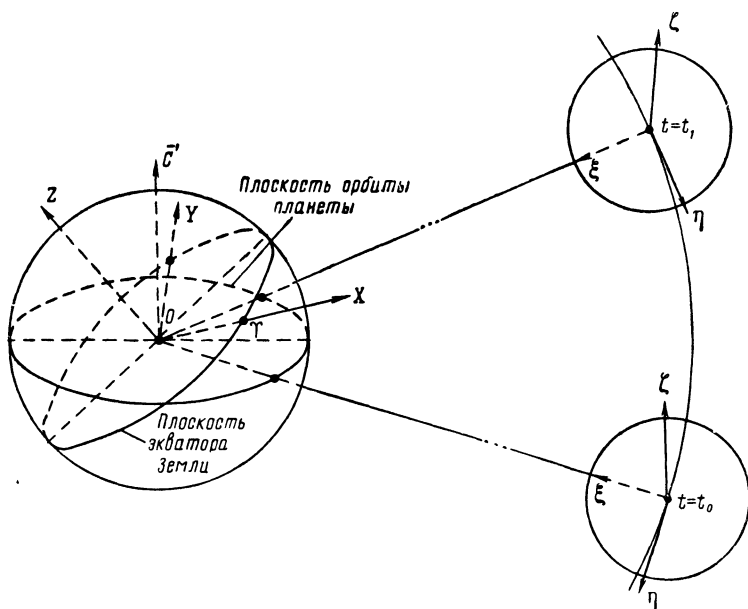


Рис. 2.28. Планетоцентрическая невращающаяся прямоугольная система координат

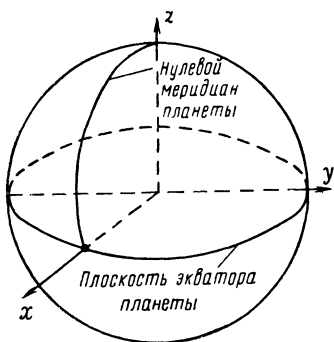


Рис. 2.29. Планетоцентрическая вращающаяся прямоугольная система координат

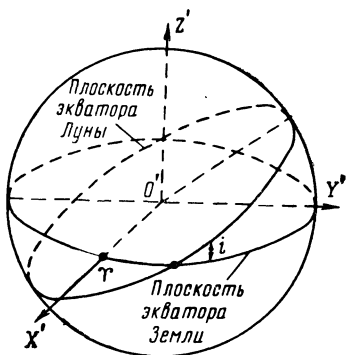


Рис. 2.30. Селеноцентрическая абсолютная прямоугольная система координат

6. Вращающаяся система координат xuz (рис. 2.29). Начало — в центре масс планеты, основная плоскость xu совпадает с плоскостью планетного экватора. Ось x направлена в нулевой меридиан, от которого ведется счет долгот поверхности планеты, ось z — по оси вращения планеты, а ось u дополняет систему до правой.

2.1.9. Селеноцентрические прямоугольные системы координат

а. Селеноцентрическая абсолютная система координат $X'Y'Z'$ (рис. 2.30). Начало — в центре масс Луны O' . Оси системы параллельны осям геоцентрической экваториальной прямоугольной системы координат XZY .

б. Селеноцентрическая экваториальная вращающаяся система координат $x'y'z'$ (рис. 2.31). Начало — в центре масс Луны O' . Ось x' лежит в плоскости среднего экватора Луны и направлена в нулевой меридиан, определяемый углом φ ; ось z' направлена по вектору кинетического момента вращения Луны $\vec{P}'$, а ось y' дополняет систему до правой.

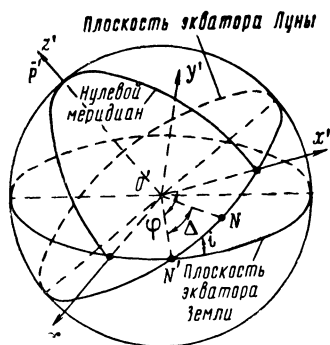


Рис. 2.31. Селеноцентрическая экваториальная вращающаяся прямоугольная система координат

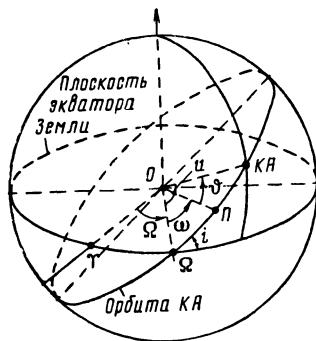


Рис. 2.32. Оскулирующая система координат

2.1.10. Оскулирующая система координат

На основе законов механики полета КА можно ввести специальную так называемую оскулирующую систему координат.

Оскулирующая система координат полностью характеризует орбиту КА, т. е. в любой момент времени система позволяет найти значения координат и составляющих вектора скорости центра масс КА. Элементами системы являются (рис. 2.32):

- наклонение орбиты i ;
- долгота восходящего узла орбиты Ω ;
- аргумент перигея ω ;
- большая полуось a ;
- эксцентриситет e ;
- время прохождения КА через перигей τ .

Величины i и Ω характеризуют положение плоскости орбиты в пространстве, а величины a и e — размер и форму орбиты КА. Величина ω представляет угловое расстояние от восходящего узла Ω до перигея орбиты, т. е. характеризует положение эллипса в пространстве.

2.2. ФОРМУЛЫ ПЕРЕХОДА ОТ ОДНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ К ДРУГОЙ

1. От гелиоцентрической эклиптической прямоугольной системы координат $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ к гелиоцентрической экваториальной прямоугольной системе xuz :

$$\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} = [\epsilon_{ij}] \begin{bmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \\ \tilde{Z} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_{\tilde{x}} \\ V_{\tilde{y}} \\ V_{\tilde{z}} \end{bmatrix} = [\epsilon_{ij}] \begin{bmatrix} V_{\tilde{X}} \\ V_{\tilde{Y}} \\ V_{\tilde{Z}} \end{bmatrix};$$

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon & -\sin \epsilon \\ 0 & \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{bmatrix},$$

где ϵ — наклонение эклиптики.

Здесь и в дальнейшем при обратном переходе от системы к системе используется обратная матрица, равная транспонированной (исходная матрица ортогонального преобразования).

2. От геоцентрических сферических систем координат к геоцентрической экваториальной прямоугольной системе XYZ :

а) от первой геоцентрической экваториальной сферической системы $q\delta$ к геоцентрической экваториальной прямоугольной системе XYZ :

$$\begin{aligned} X &= q \cos \delta \cos S; & Y &= q \cos \delta \sin S; & Z &= q \sin \delta; \\ \operatorname{tg} S &= \frac{Y}{X}; & \operatorname{tg} \delta &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}; & q &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}; \\ \operatorname{sign} \sin S &= \operatorname{sign} Y; & \operatorname{sign} \sin \delta &= \operatorname{sign} Z, \end{aligned}$$

где $S = \alpha + t$; α — прямое восхождение светила (КА);

б) от второй геоцентрической экваториальной сферической системы $q\alpha\delta$ к системе XYZ :

$$\begin{aligned} X &= q \cos \delta \cos \alpha; & Y &= q \cos \delta \sin \alpha; & Z &= q \sin \delta; \\ \operatorname{tg} \alpha &= \frac{Y}{X}; & \operatorname{tg} \delta &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, & q &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \end{aligned}$$

3. От геоцентрической эклиптической сферической системы координат $q\lambda\beta$ к геоцентрической эклиптической прямоугольной системе $\xi\eta\zeta$:

$$\begin{aligned} \xi &= q \cos \beta \cos \lambda; & \eta &= q \cos \beta \sin \lambda; & \zeta &= q \sin \beta; \\ \operatorname{tg} \lambda &= \frac{\eta}{\xi}; & \operatorname{tg} \beta &= \frac{\zeta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}; & q &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \end{aligned}$$

4. От второй геоцентрической экваториальной сферической системы координат $q\alpha\delta$ к геоцентрической эклиптической сферической системе $\rho\lambda\beta$:

$$\begin{aligned} \cos \delta \cos \alpha &= \cos \beta \cos \lambda; \\ \cos \delta \sin \alpha &= \cos \epsilon \cos \beta \sin \lambda - \sin \epsilon \sin \beta; \\ \sin \delta &= \sin \epsilon \cos \beta \sin \lambda + \cos \epsilon \sin \beta; \\ \cos \beta \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha; \\ \cos \beta \sin \lambda &= \cos \epsilon \cos \delta \sin \alpha + \sin \epsilon \sin \delta; \\ \sin \beta &= -\sin \epsilon \cos \delta \sin \alpha + \cos \epsilon \sin \delta, \end{aligned}$$

где ϵ — наклонение эклиптики.

5. От геоцентрической эклиптической сферической системы координат $\rho\lambda\beta$ к геоцентрической эклиптической прямоугольной системе $\xi\eta\zeta$:

$$\begin{aligned} \xi &= q \cos \beta \cos \lambda - q^* \cos \beta^* \cos \lambda^*; \\ \eta &= q \cos \beta \sin \lambda - q^* \cos \beta^* \sin \lambda^*; \\ \zeta &= q \sin \beta - q^* \sin \beta^*; \end{aligned}$$

где ρ^* , β^* , λ^* — сферические эклиптические координаты Солнца.

6. От геоцентрической экваториальной прямоугольной системы координат XYZ к геоцентрической эклиптической системе $\xi\eta\zeta$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} &= [\varepsilon_{ij}] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}; & \begin{bmatrix} V_\xi \\ V_\eta \\ V_\zeta \end{bmatrix} &= [\varepsilon_{ij}] \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix}; \\ [\varepsilon_{ij}] &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varepsilon & \sin \varepsilon \\ 0 & -\sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7. От геоцентрической эклиптической прямоугольной системы координат $\xi\eta\zeta$ к гелиоцентрической эклиптической прямоугольной системе $\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$:

$$\tilde{X} = \xi - \xi_\odot; \quad \tilde{Y} = \eta - \eta_\odot; \quad \tilde{Z} = \zeta - \zeta_\odot,$$

где $\xi_\odot$, $\eta_\odot$, $\zeta_\odot$ — геоцентрические эклиптические координаты Солнца.

8. От геоцентрической экваториальной прямоугольной системы координат XYZ к гелиоцентрической экваториальной прямоугольной системе $x\tilde{y}\tilde{z}$:

$$\tilde{x} = X - X_{\odot};$$

$$\tilde{y} = Y - Y_{\odot};$$

$$\tilde{z} = Z - Z_{\odot},$$

где $X_{\odot}$, $Y_{\odot}$, $Z_{\odot}$ — геоцентрические экваториальные координаты Солнца, значения которых приводятся в Астрономическом ежегоднике.

9. От гринвичской прямоугольной системы координат $x\tilde{y}\tilde{z}$ к геоцентрической экваториальной прямоугольной системе XYZ :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [\gamma_{ij}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} = [\gamma_{ij}] \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} + \omega_3 \begin{bmatrix} -Y \\ X \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [\gamma_{ij}^{-1}] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = [\gamma_{ij}^{-1}] \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} + \omega_3 \begin{bmatrix} y \\ -x \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$[\gamma_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где

$$\gamma = S_0 + \omega_3(t - t_0).$$

В том случае, когда необходимо учесть нутацию и прецессию вращения Земли, используют формулы вида

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [\gamma_{ij}^*] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} = [\gamma_{ij}^*] \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} - \omega_3 [\alpha^*] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [\gamma_{ij}^{*-1}] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = [\gamma_{ij}^{*-1}] \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} + \omega_3 [\alpha^*] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix};$$

$$[\gamma_{ij}^*] = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & g \cos (G + \gamma) \\ \sin \gamma & \cos \gamma & -g \sin (G + \gamma) \\ -g \cos (G + \gamma) & g \sin (G + \gamma) & 1 \end{bmatrix};$$

$$[\alpha^*] = \begin{bmatrix} -\sin \gamma & \cos \gamma & g \sin (G + \gamma) \\ -\cos \gamma & -\sin \gamma & g \cos (G + \gamma) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\gamma = S_0 + (t - t_0)(1 + \mu'); \quad \mu' = 0,0027378119;$$

где ω_3 — абсолютная угловая скорость вращения Земли;

S_0 — звездное время в среднюю гринвичскую полночь для заданной даты;

t и t_0 — среднее солнечное время, $t=0$, если текущее время гринвичское; $t=3^h$, если t — московское;

g и G — редукционные величины, с помощью которых учитываются нутация и прецессия вращения земной оси; через g обозначается угол между земной осью данной эпохи и земной осью для заданной даты, а G — угол между плоскостью XOZ и плоскостью, содержащей угол g .

10. От геоцентрической орбитальной прямоугольной системы координат $\xi\eta\zeta$ к геоцентрической экваториальной прямоугольной системе XYZ :

а) при направлении оси ξ в перигецентр P орбиты:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [a_{mn}] \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} = [a_{mn}] \begin{bmatrix} V_{\xi} \\ V_{\eta} \\ V_{\zeta} \end{bmatrix};$$

$$[a_{mn}] = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos \omega - \sin \Omega \sin \omega \cos i & -\sin \omega \cos \Omega - \sin \Omega \cos \omega \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos \omega + \cos \Omega \sin \omega \cos i & \cos \omega \cos \Omega \cos i - \sin \Omega \sin \omega & -\cos \Omega \sin i \\ \sin \omega \sin i & \cos \omega \sin i & \cos i \end{bmatrix};$$

б) при направлении оси ξ в точку восходящего узла орбиты Ω матрица a_{mn} имеет вид:

$$[a_{mn}] = \begin{bmatrix} \cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i & -\sin \Omega \sin u - \sin \Omega \cos u \cos i & \sin \Omega \sin i \\ \sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i & -\sin \Omega \sin u + \cos \Omega \cos u \cos i & -\cos \Omega \sin i \\ \sin u \sin i & \cos u \sin i & \cos i \end{bmatrix}.$$

11. От геоцентрической цилиндрической системы координат ruz к орбитальной прямоугольной системе $\xi\eta\zeta$:

а) при направлении оси ξ в точку восходящего узла орбиты Ω :

$$\xi = r \cos u; \quad \eta = r \sin u; \quad \zeta = z; \quad \operatorname{tg} u = \frac{\eta}{\xi}; \quad r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}; \quad z = \zeta;$$

б) при направлении оси ξ в перигеи P орбиты:

$$\begin{aligned} \xi &= r \cos \vartheta; & \vartheta &= u - \omega; & r &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2}; \\ \eta &= r \sin \vartheta; & \operatorname{tg} \vartheta &= \frac{\eta}{\xi}; & z &= \zeta. \\ \zeta &= z; \end{aligned}$$

12. От оскулирующей системы координат к геоцентрической экваториальной прямоугольной системе XYZ :

$$X = r (\cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i);$$

$$Y = r (\sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i);$$

$$Z = r \sin u \sin i;$$

$$V_X = V_r (\cos \Omega \cos u - \sin \Omega \sin u \cos i) - V_u (\cos \Omega \sin u + \sin \Omega \cos u \cos i);$$

$$V_Y = V_r (\sin \Omega \cos u + \cos \Omega \sin u \cos i) - V_u (\sin \Omega \sin u - \cos \Omega \cos u \cos i);$$

$$V_Z = V_r \sin u \sin i + V_u \cos u \sin i,$$

где

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} = a(1 - e \cos E);$$

$$u = \omega + \vartheta; \quad p = a(1 - e^2);$$

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta;$$

$$V_u = \sqrt{\frac{\mu p}{r}} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta);$$

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2};$$

ω — аргумент перигея;

a — большая полуось орбиты;

p — фокальный параметр;

ϑ — истинная аномалия;

E — эксцентрическая аномалия.

13. От геоцентрической цилиндрической системы координат ruz к геоцентрической экваториальной прямоугольной системе XYZ :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} = [a_{mn}] \begin{bmatrix} V_r \\ V_u \\ V_z \end{bmatrix};$$

$$r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}; \quad u = \operatorname{Arctg} \frac{ZC}{YC_1 - XC_2};$$

$$z = Z \cdot \cos i,$$

где

$$C = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}; \quad C_2 = ZV_X - XV_Z; \quad n_Y = \frac{C_2}{C};$$

$$C_1 = YV_Z - ZV_Y; \quad C_3 = XV_Y - YV_X; \quad n_X = \frac{C_1}{C}; \quad n_Z = \frac{C_3}{C};$$

α_{m1}, α_{m3} ($m=1, 2, 3$) — элементы матрицы $[\alpha_{mn}]$, определяемые по формулам п. 10, 6 настоящего параграфа.

14. От геоцентрической экваториальной оскулирующей системы координат Ω, i, ω к геоцентрической эклиптической оскулирующей системе $\tilde{\Omega}, \tilde{i}, \tilde{\omega}$:

$$\begin{aligned}\sin \tilde{i} \sin \tilde{\Omega} &= \sin i \sin \Omega; \\ \sin i \cos \tilde{\Omega} &= \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \Omega \cos \varepsilon; \\ \cos \tilde{i} &= \cos i \cos \varepsilon - \sin i \cos \Omega \sin \varepsilon; \\ \sin \tilde{i} \sin (\tilde{\omega} - \omega) &= \sin \Omega \sin \varepsilon; \\ \sin \tilde{i} \cos (\tilde{\omega} - \omega) &= \sin i \cos \varepsilon + \cos i \cos \Omega \sin \varepsilon; \\ \sin i \sin \Omega &= \sin \tilde{i} \sin \tilde{\Omega}; \\ \sin i \cos \Omega &= -\cos \tilde{i} \sin \varepsilon + \sin \tilde{i} \cos \tilde{\Omega} \cos \varepsilon; \\ \cos i &= \cos \tilde{i} \cos \varepsilon + \sin \tilde{i} \cos \tilde{\Omega} \sin \varepsilon; \\ \sin i \sin (\tilde{\omega} - \omega) &= \sin \tilde{\Omega} \sin \varepsilon; \\ \sin i \cos (\tilde{\omega} - \omega) &= \sin \tilde{i} \cos \varepsilon - \cos \tilde{i} \cos \tilde{\Omega} \sin \varepsilon,\end{aligned}$$

где ε — наклонение эклиптики.

15. От барицентрической орбитальной прямоугольной системы координат $\tau b n$ к геоцентрической экваториальной прямоугольной системе XYZ :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + [C_{ij}] \begin{bmatrix} \tau \\ b \\ n \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{X_0} \\ V_{Y_0} \\ V_{Z_0} \end{bmatrix} + [C_{ij}] \begin{bmatrix} V_\tau \\ V_b \\ V_n \end{bmatrix} + \omega_0 \begin{bmatrix} n \\ 0 \\ -\tau \end{bmatrix},$$

при обратном переходе

$$\begin{bmatrix} \tau \\ b \\ n \end{bmatrix} = [C_{ij}^{-1}] \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_\tau \\ V_b \\ V_n \end{bmatrix} = [C_{ij}^{-1}] \begin{bmatrix} V_X - V_{X_0} \\ V_Y - V_{Y_0} \\ V_Z - V_{Z_0} \end{bmatrix} + [C_{ij}^{-1}] \cdot N,$$

где

$$\begin{aligned}N &= \begin{bmatrix} \omega_Z Y' - \omega_Y Z' \\ \omega_X Z' - \omega_Z X' \\ \omega_Y X' - \omega_X Y' \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix}; \\ [C_{ij}] &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{CR_0} (C_2 Z_0 - C_3 Y_0) & \frac{C_1}{C} \frac{X_0}{R_0} \\ \frac{1}{CR_0} (C_3 X_0 - C_1 Z_0) & \frac{C_2}{C} \frac{Y_0}{R_0} \\ -\frac{1}{CR_0} (C_1 Y_0 - C_2 X_0) & \frac{C_3}{C} \frac{Z_0}{R_0} \end{bmatrix};\end{aligned}$$

$R_0 = \{X_0, Y_0, Z_0\}$; $V_0 = \{V_{X_0}, V_{Y_0}, V_{Z_0}\}$ — составляющие положения и скорости КА, с которым связана система координат $\tau b n$;

$\omega_0 = \{\omega_X, \omega_Y, \omega_Z\}$ — абсолютная угловая скорость (и ее составляющие на оси координат XYZ) вращения системы $\tau b n$ относительно системы XYZ , определяемая по формулам

$$\omega_0 = \frac{C}{R_0^2}; \quad \omega_X = \frac{C_1}{R_0^2}; \quad \omega_Y = \frac{C_2}{R_0^2}; \quad \omega_Z = \frac{C_3}{R_0^2};$$

$C = \{C_1, C_2, C_3\}$ — векторная константа (и ее составляющие на оси системы XYZ) интеграла площадей, определяемая по формулам п. 13 настоящего раздела.

В том случае, когда параметры движения КА, с которыми связана система $\tau b n$, известны в оскулирующей системе координат, матрица C_{ij} примет вид

$$[C_{ij}] = \begin{bmatrix} -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i & \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i & \sin i \sin \Omega \\ -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i & \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i & -\sin i \cos \Omega \\ \cos u \sin i & \sin u \sin i & \cos i \end{bmatrix}.$$

16. От барицентрической горизонтальной прямоугольной системы координат $\tau' b' n'$ к геоцентрической экваториальной прямоугольной системе XYZ :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + [\mu_{ij}] \begin{bmatrix} \tau' \\ b' \\ n' \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{X_0} \\ V_{Y_0} \\ V_{Z_0} \end{bmatrix} + [\mu_{ij}] \begin{bmatrix} V_{\tau'} \\ V_{b'} \\ V_{n'} \end{bmatrix} + \omega_0 \begin{bmatrix} n' \\ 0 \\ -\tau' \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \tau' \\ b' \\ n' \end{bmatrix} = [\mu_{ij}^{-1}] \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_{\tau'} \\ V_{b'} \\ V_{n'} \end{bmatrix} = [\mu_{ij}^{-1}] \begin{bmatrix} V_X - V_{X_0} \\ V_Y - V_{Y_0} \\ V_Z - V_{Z_0} \end{bmatrix} + [\mu_{ij}^{-1}] N;$$

$$[\mu_{ij}] = \begin{bmatrix} \mu_{11} = \mu_{32}\mu_{23} - \mu_{22}\mu_{33} & \mu_{12} = \frac{V_{Y_0}\mu_{33} - V_{Z_0}\mu_{23}}{A} & \mu_{13} = \cos B \cos(L + \gamma) \\ \mu_{21} = \mu_{12}\mu_{33} - \mu_{32}\mu_{13} & \mu_{22} = \frac{V_{Z_0}\mu_{13} - V_{X_0}\mu_{33}}{A} & \mu_{23} = \cos B \sin(L + \gamma) \\ \mu_{31} = \mu_{22}\mu_{13} - \mu_{12}\mu_{23} & \mu_{32} = \frac{V_{X_0}\mu_{23} - V_{Y_0}\mu_{13}}{A} & \mu_{33} = \sin B \end{bmatrix},$$

где N — матрица, элементы которой определяются по формулам п. 15;

$$A = \sqrt{(V_{Y_0}\mu_{33} - V_{Z_0}\mu_{23})^2 + (V_{Z_0}\mu_{13} - V_{X_0}\mu_{33})^2 + (V_{X_0}\mu_{23} - V_{Y_0}\mu_{13})^2};$$

$$\gamma = S_0 + \omega_3(t - t_0);$$

B, L — геодезические координаты КА.

17. От барицентрической скоростной прямоугольной системы координат $\tilde{\xi} \tilde{\eta} \tilde{\zeta}$ к геоцентрической экваториальной прямоугольной системе XYZ :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{bmatrix} + [a_{ij}] \begin{bmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\zeta} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{X_0} \\ V_{Y_0} \\ V_{Z_0} \end{bmatrix} + [a_{ij}] \begin{bmatrix} V_{\tilde{\xi}} \\ V_{\tilde{\eta}} \\ V_{\tilde{\zeta}} \end{bmatrix} + \omega_0 \begin{bmatrix} \tilde{\zeta} \\ 0 \\ -\tilde{\xi} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\xi} \\ \tilde{\eta} \\ \tilde{\zeta} \end{bmatrix} = [a_{ij}^{-1}] \begin{bmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_{\tilde{\xi}} \\ V_{\tilde{\eta}} \\ V_{\tilde{\zeta}} \end{bmatrix} = [a_{ij}^{-1}] \begin{bmatrix} V_X - V_{X_0} \\ V_Y - V_{Y_0} \\ V_Z - V_{Z_0} \end{bmatrix} + [a_{ij}^{-1}] N;$$

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{V_{X_0}}{V_0} & \frac{C_1}{C} & \frac{V_{Y_0}C_3 - V_{Z_0}C_2}{V_0 \cdot C} \\ \frac{V_{Y_0}}{V} & \frac{C_2}{C} & \frac{V_{Z_0}C_1 - V_{X_0}C_3}{V_0 \cdot C} \\ \frac{V_{Z_0}}{V} & \frac{C_3}{C} & \frac{V_{X_0}C_2 - V_{Y_0}C_1}{V_0 \cdot C} \end{bmatrix},$$

где N — матрица, определяемая по формулам п. 15.

18. От геоцентрической гринвичской прямоугольной системы координат $x y z$ к топоцентрической пунктовой системе $\xi_{\Pi} \eta_{\Pi} \zeta_{\Pi}$:

$$\begin{bmatrix} \xi_{\Pi} \\ \eta_{\Pi} \\ \zeta_{\Pi} \end{bmatrix} = [\Delta_{ij}] \begin{bmatrix} x - x_N \\ y - y_N \\ z - z_N \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_{\xi_{\Pi}} \\ V_{\eta_{\Pi}} \\ V_{\zeta_{\Pi}} \end{bmatrix} = [\Delta_{ij}] \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix};$$

$$[\Delta_{ij}] = \begin{bmatrix} -\sin B_N \cos L_N & -\sin B_N \sin L_N & \cos B_N \\ \cos B_N \cos L_N & \cos B_N \sin L_N & \sin L_N \\ -\sin L_N & \cos L_N & 0 \end{bmatrix},$$

где x_N, y_N, z_N — координаты пункта наблюдения, определяемые по формулам

$$x_N = \left(\frac{R_9}{A_N} + H_N \right) \cos B_N \cos L_N;$$

$$y_N = \left(\frac{R_9}{A_N} + H_N \right) \cos B_N \sin L_N;$$

$$z_N = \left(\frac{R_9(1 - \tilde{\alpha})}{A_N} + H_N \right) \sin B_N;$$

$$A_N = \sqrt{1 - \tilde{\alpha}(2 - \tilde{\alpha}) \sin^2 B_N} = \sqrt{\cos^2 B_N + (1 - \tilde{\alpha})^2 \sin^2 B_N};$$

$R_9 = 6\,378\,131$ м — радиус Земли на экваторе;

$\tilde{\alpha}$ — коэффициент сжатия Земли;

B_N, L_N — геодезические сферические координаты пункта наблюдения;

N — номер пункта наблюдения;

H_N — высота пункта наблюдения над поверхностью референц-эллипсоида Земли, определяемая по формуле

$$H_N = R_N - R_9 \left(1 - \tilde{\alpha} \frac{z_N^2}{R_N^2} \right);$$

здесь R_N — радиус Земли для широты пункта наблюдения;

$$R_N = \sqrt{x_N^2 + y_N^2 + z_N^2}.$$

19. От геоцентрической гринвичской системы координат $x y z$ к геодезической сферической системе HBL :

$$\cos B = \frac{(1 - \tilde{\alpha})^2 r_1}{\sqrt{[(1 - \tilde{\alpha})^2 r_1]^2 + z^2}}; \quad \cos L = \frac{x}{r_1};$$

$$\sin B = \frac{z}{\sqrt{[(1 - \tilde{\alpha})^2 r_1]^2 + z^2}}; \quad \sin L = \frac{y}{r_1};$$

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2},$$

или по формулам

$$B = \varphi_{\Pi} + \epsilon;$$

$$L = \arctg \frac{y}{x},$$

где

$$\varphi_{\Pi} = \arcsin \frac{z}{r};$$

$$\epsilon = \frac{R_e \delta'}{r}; \quad R_e = \frac{\tilde{\alpha} \sqrt{1 - \tilde{e}^2}}{\sqrt{1 - \tilde{e}^2 \cos^2 \varphi_{\Pi}}};$$

$$\delta' = \frac{\tilde{e}^2 \sin \varphi_{\Pi} \cos \varphi_{\Pi}}{1 - \tilde{e}^2 \cos^2 \varphi_{\Pi}}; \quad \tilde{e}^2 = 2\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}^2;$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Высота над поверхностью референц-эллипсоида Земли определяется по формуле

$$H = (r - R_e) \left(1 - \frac{\varepsilon \cdot \delta'}{2} \right),$$

где $\tilde{\alpha} = \frac{\tilde{a} - \tilde{b}}{\tilde{a}}$ — коэффициент сжатия Земли;

$\tilde{a}$, $\tilde{b}$ — большая и малая полуоси референц-эллипсоида Земли.

20. От топоцентрической пунктовой прямоугольной системы координат $\xi_{\Pi} \eta_{\Pi} \zeta_{\Pi}$ к геоцентрической экваториальной прямоугольной системе XYZ :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_N \\ Y_N \\ Z_N \end{bmatrix} + [\lambda_{ij}] \begin{bmatrix} \xi_{\Pi} \\ \eta_{\Pi} \\ \zeta_{\Pi} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} = [\lambda_{ij}] \begin{bmatrix} V_{\xi_{\Pi}} \\ V_{\eta_{\Pi}} \\ V_{\zeta_{\Pi}} \end{bmatrix} + \omega_3 \begin{bmatrix} -Y \\ X \\ 0 \end{bmatrix},$$

где

$$[\lambda_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^3 \gamma_{ik} \Delta_{kj} \right];$$

X_N , Y_N , Z_N — координаты N -го пункта наблюдения, определяемые по формулам пп. 9 и 18.

21. От геоцентрической сферической системы координат $\rho_0 \varphi_{\Pi} \lambda'$, определяющей положение точки на земной поверхности, к гринвичской прямоугольной системе $x y z$:

$$\begin{aligned} x &= \rho_0 \cos \varphi_{\Pi} \cos \lambda', & \sin \varphi_{\Pi} &= \frac{z}{\rho_0}; & \sin \lambda' &= \frac{y}{\rho_0 \cos \varphi_{\Pi}}; \\ z &= \rho_0 \cos \varphi_{\Pi} \sin \lambda'; \\ z &= \rho_0 \sin \varphi_{\Pi}; & \cos \varphi_{\Pi} &= \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\rho_0}; & \cos \lambda' &= \frac{x}{\rho_0 \sin \varphi_{\Pi}}; \\ \rho_0 &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned}$$

22. От геодезической сферической системы координат $\rho B L$ к геоцентрической сферической системе $\rho \varphi_{\Pi} \lambda$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{\Pi} &= [1 - (2\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}^2)] \operatorname{tg} B = (1 - \tilde{e}^2) \operatorname{tg} B; \\ \lambda &= L, \end{aligned}$$

где

$$\tilde{e}^2 = 2\tilde{\alpha} - \tilde{\alpha}^2 = \frac{\tilde{a}^2 - \tilde{b}^2}{\tilde{a}^2}; \quad \tilde{\alpha} = \frac{\tilde{a} - \tilde{b}}{\tilde{a}}.$$

23. От топоцентрической сферической системы координат $\rho' \alpha' \delta'$ к топоцентрической экваториальной прямоугольной системе $\xi' \eta' \zeta'$:

$$\begin{aligned} \xi' &= \rho' \cos \delta' \cos \alpha'; & \operatorname{tg} \alpha' &= \frac{\eta'}{\xi'}; \\ \eta' &= \rho' \cos \delta' \sin \alpha'; \\ \zeta' &= \rho' \sin \delta'; & \operatorname{tg} \delta' &= \frac{\zeta'}{\sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}}; \\ \rho' &= \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}. \end{aligned}$$

24. От топоцентрической экваториальной прямоугольной системы координат $\xi' \eta' \zeta'$ к геоцентрической экваториальной прямоугольной системе XYZ :

$$\begin{aligned} X &= \xi' + X_N; & X_N &= \rho_0 \cos \varphi_{\Pi} \cos \gamma; \\ Y &= \eta' + Y_N; & Y_N &= \rho_0 \cos \varphi_{\Pi} \sin \gamma; \\ Z &= \zeta' + Z_N; & Z_N &= \rho_0 \sin \varphi_{\Pi}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma = S_0 + \omega_3(t - t_0);$$

γ — гринвичское звездное время наблюдения;

S_0 — звездное время в среднюю гринвичскую полночь для заданной даты;

t и t_0 — среднее солнечное время; $t_0=0$, если t — гринвичское время, и $t_0=3^h$, если t — московское;

φ_{Π} — геоцентрическая широта N -го пункта наблюдения.

25. От топоцентрической стартовой прямоугольной системы координат $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ к геоцентрической экваториальной прямоугольной системе XYZ :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [v_{ij}] \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix} + Q_0 \begin{bmatrix} \alpha_{14} \\ \alpha_{24} \\ \alpha_{34} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} = [v_{ij}] \begin{bmatrix} V_{\tilde{x}} \\ V_{\tilde{y}} \\ V_{\tilde{z}} \end{bmatrix} + \omega_3 \begin{bmatrix} -Y \\ X \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$[v_{ij}] = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_{\Gamma} \cos \psi \cos \gamma' - \sin \psi \sin \gamma' & \sin \varphi_{\Gamma} \cos \gamma' & \sin \varphi_{\Gamma} \sin \psi \cos \gamma' - \cos \psi \sin \gamma' \\ -\sin \varphi_{\Gamma} \cos \psi \sin \gamma' + \sin \psi \cos \gamma' & \cos \varphi_{\Gamma} \sin \gamma' & \sin \varphi_{\Gamma} \sin \psi \sin \gamma' + \cos \psi \cos \gamma' \\ \cos \varphi_{\Gamma} \cos \psi & \sin \varphi_{\Gamma} & -\cos \varphi_{\Gamma} \sin \psi \end{bmatrix},$$

где

$$\alpha_{14} = \cos \varphi_{\Pi} \cos \gamma'; \quad \gamma' = \gamma_M \omega_{3B};$$

$$\alpha_{24} = \cos \varphi_{\Pi} \sin \gamma';$$

$$\alpha_{34} = \sin \varphi_{\Pi}; \quad \omega_{3B} = \frac{\omega_3}{1 + \mu'};$$

γ_M — местное звездное время в точке старта в момент выхода КА на орбиту, определяемое из выражения

$$\gamma_M = S_0 - \lambda + (t_K - N - 1)(1 + \mu'); \quad t_K = t_d + \tau_K;$$

ω_{3B} — угол, на который поворачивается Земля за 1 с звездного времени;

ω_3 — угловая скорость вращения Земли;

S_0 — звездное время в среднюю гринвичскую полночь для даты старта;

t_d — декретное время для точки старта, соответствующее моменту старта;

τ_K — продолжительность полета с момента старта до момента выхода КА на орбиту;

N — номер часового пояса точки старта;

ρ_0 — расстояние от центра Земли до точки старта;

φ_{Γ} — географическая широта точки старта;

φ_{Π} — геоцентрическая широта точки старта;

μ' — поправка на разницу звездного и среднего солнечного времени.

26. От топоцентрической земной прямоугольной системы координат $x_3y_3z_3$ к геоцентрической экваториальной прямоугольной системе XYZ :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [\beta_{ij}] \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 + Q_0 \\ z_3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} = [\beta_{ij}] \begin{bmatrix} V_{x_3} \\ V_{y_3} \\ V_{z_3} \end{bmatrix} + \omega_3 \begin{bmatrix} -Y \\ X \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$[\beta_{ij}] = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_{\Pi} \cos \psi \cos \gamma' - \sin \psi \sin \gamma' & \cos \varphi_{\Pi} \cos \gamma' & \sin \varphi_{\Pi} \sin \psi \cos \gamma' - \cos \psi \sin \gamma' \\ -\sin \varphi_{\Pi} \cos \psi \sin \gamma' + \sin \psi \cos \gamma' & \cos \varphi_{\Pi} \sin \gamma' & \sin \varphi_{\Pi} \sin \psi \sin \gamma' + \cos \psi \cos \gamma' \\ \cos \varphi_{\Pi} \cos \psi & \sin \varphi_{\Pi} & -\cos \varphi_{\Pi} \sin \psi \end{bmatrix},$$

где $\gamma' = \gamma_m \cdot \omega_{3B}$;

ψ — азимут запуска КА.

27. От топоцентрической земной прямоугольной системы координат $x_3y_3z_3$ к барицентрической связанной прямоугольной системе $x_1y_1z_1$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = [b_{ij}] \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_{x_1} \\ V_{y_1} \\ V_{z_1} \end{bmatrix} = [b_{ij}] \begin{bmatrix} V_{x_3} \\ V_{y_3} \\ V_{z_3} \end{bmatrix};$$

$$[b_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \cos \psi & -\sin \psi \\ -\sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \psi \sin \theta & \cos \varphi \cos \theta + \sin \varphi \sin \psi \sin \theta & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta & -\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta \end{bmatrix},$$

где φ , ψ , θ — углы Эйлера, характеризующие соответственно отклонения КА по тангажу, рысканью и крену.

28. От топоцентрической стартовой начальной прямоугольной системы координат $x_H y_H z_H$ к барицентрической связанной прямоугольной системе $x_1 y_1 z_1$:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = [b_{ij}] \begin{bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_{x_1} \\ V_{y_1} \\ V_{z_1} \end{bmatrix} = [b_{ij}] \begin{bmatrix} V_{x_H} \\ V_{y_H} \\ V_{z_H} \end{bmatrix},$$

где $[b_{ij}]$ — матрица, элементы которой приведены в п. 27.

29. От топоцентрической стартовой начальной прямоугольной системы координат $\tilde{x} \tilde{y} \tilde{z}$ к стартовой начальной системе $x_H y_H z_H$:

$$\begin{bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{bmatrix} = [\gamma_{ij}] \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_{x_H} \\ V_{y_H} \\ V_{z_H} \end{bmatrix} = [\gamma_{ij}] \begin{bmatrix} V_{\tilde{x}} \\ V_{\tilde{y}} \\ V_{\tilde{z}} \end{bmatrix} + [\dot{\gamma}_{ij}] \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix},$$

где элементы матриц γ_{ij} и $\dot{\gamma}_{ij}$ ($i, j=1, 2, 3$) рассчитываются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \cos^2 \varphi_r \cos^2 \psi (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha; \\ \gamma_{12} &= \cos \varphi_r [\sin \varphi_r \cos \psi (1 - \cos \alpha) + \sin \psi \sin \alpha]; \\ \gamma_{13} &= \sin \varphi_r \sin \alpha - \cos^2 \varphi_r \sin \psi \cos \psi (1 - \cos \alpha); \\ \gamma_{21} &= \cos \varphi_r [\sin \varphi_r \cos \psi (1 - \cos \alpha) - \sin \psi \sin \alpha]; \\ \gamma_{22} &= \sin^2 \varphi_r (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha; \\ \gamma_{23} &= \cos \varphi_r [-\sin \varphi_r \sin \psi (1 - \cos \alpha) - \cos \psi \sin \alpha]; \\ \gamma_{31} &= -\cos^2 \varphi_r \sin \psi \cos \psi (1 - \cos \alpha) - \sin \varphi_r \sin \alpha; \\ \gamma_{32} &= \cos \varphi_r [-\sin \varphi_r \sin \psi (1 - \cos \alpha) + \cos \psi \sin \alpha]; \\ \gamma_{33} &= \cos^2 \varphi_r \sin^2 \psi (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha; \\ \dot{\gamma}_{11} &= \omega_3 \sin \alpha (\cos^2 \varphi_r \cos^2 \psi - 1); \\ \dot{\gamma}_{12} &= \omega_3 \cos \varphi_r (\sin \varphi_r \cos \psi \sin \alpha + \sin \psi \cos \alpha); \\ \dot{\gamma}_{13} &= -\omega_3 (\cos^2 \varphi_r \sin \psi \cos \psi \sin \alpha - \sin \varphi_r \cos \alpha); \\ \dot{\gamma}_{21} &= \omega_3 \cos \varphi_r (\sin \varphi_r \cos \psi \sin \alpha - \sin \psi \cos \alpha); \\ \dot{\gamma}_{22} &= -\omega_3 \cos^2 \varphi_r \sin \alpha; \\ \dot{\gamma}_{23} &= -\omega_3 \cos \varphi_r (\sin \varphi_r \sin \psi \sin \alpha + \cos \psi \cos \alpha); \\ \dot{\gamma}_{31} &= -\omega_3 (\cos^2 \varphi_r \sin \psi \cos \psi \sin \alpha + \sin \varphi_r \cos \alpha); \\ \dot{\gamma}_{32} &= -\omega_3 \cos \varphi_r (\sin \varphi_r \sin \psi \sin \alpha - \cos \psi \cos \alpha); \\ \dot{\gamma}_{33} &= \omega_3 \sin \alpha (\cos^2 \varphi_r \sin^2 \psi - 1); \end{aligned}$$

$$\alpha = \omega_3 t_K; \quad t_K = t - t_0;$$

ω_3 — угловая скорость вращения Земли;

t, t_0 — текущее и начальное время.

30. От топоцентрической стартовой начальной прямоугольной системы координат $x_H y_H z_H$ к геоцентрической экваториальной прямоугольной системе XYZ :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [\delta_{ij}] \begin{bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{bmatrix} + Q_0 \begin{bmatrix} \alpha_{14} \\ \alpha_{24} \\ \alpha_{34} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} = [\delta_{ij}] \begin{bmatrix} V_{x_H} \\ V_{y_H} \\ V_{z_H} \end{bmatrix} + Q_0 \omega_3 \begin{bmatrix} -\alpha_{24} \\ \alpha_{14} \\ 0 \end{bmatrix},$$

где

$$[\delta_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^3 v_{ik} \gamma_{jk} \right]; \quad \delta_{ij} = 0; \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$\alpha_{14} = \cos \varphi_H \cos \gamma';$$

$$\alpha_{24} = \cos \varphi_H \sin \gamma';$$

$$\alpha_{34} = \sin \varphi_H;$$

v_{ik} — элементы матрицы v_{ij} , определяемые по формулам, приведенным в п. 25

31. От топоцентрической стартовой прямоугольной системы координат $\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}$ к геоцентрической земной прямоугольной системе $x_3y_3z_3$:

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = [\gamma'_{ij}] \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_{x_3} \\ V_{y_3} \\ V_{z_3} \end{bmatrix} = [\gamma'_{ij}] \begin{bmatrix} V_{\tilde{x}} \\ V_{\tilde{y}} \\ V_{\tilde{z}} \end{bmatrix};$$

$$[\gamma'_{ij}] = \begin{bmatrix} \sin^2 \psi + \cos^2 \psi \cos \gamma_1 & \sin \gamma_1 \cos \psi & \sin \psi \cos \psi (1 - \cos \gamma_1) \\ -\cos \psi \sin \gamma_1 & \cos \gamma_1 & \sin \psi \sin \gamma_1 \\ (1 - \cos \gamma_1) \sin \psi \cos \psi & -\sin \psi \sin \gamma_1 & \cos^2 \psi + \sin^2 \psi \cos \gamma_1 \end{bmatrix},$$

где $\gamma_1 = \varphi_r - \varphi_n$ — угол, определяющий разницу между географической φ_r и геоцентрической φ_n широтами в точке старта;
 ψ — азимут запуска КА.

32. От топоцентрической земной прямоугольной системы координат $x_3y_3z_3$ к топоцентрической стартовой «замороженной» системе $x'y'z'$:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [\sigma_{ij}] \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 + \zeta_0 \\ z_3 \end{bmatrix} - \zeta_0 \cdot \begin{bmatrix} \gamma'_{12} \\ \gamma'_{22} \\ \gamma'_{32} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{bmatrix} = [\sigma_{ij}] \begin{bmatrix} V_{x_3} \\ V_{y_3} \\ V_{z_3} \end{bmatrix} + [\dot{\sigma}_{ij}] \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 + \zeta_0 \\ z_3 \end{bmatrix},$$

где

$$[\sigma_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^3 \gamma'_{ik} \gamma_{kj} \right]; \quad [\dot{\sigma}_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^3 \dot{\gamma}'_{ik} \gamma_{kj} \right];$$

γ'_{ik} — элементы матрицы γ'_{ij} , определяемые по формулам п. 31;

γ_{kj} — элементы матрицы γ_{ij} , определяемые по формулам п. 29.

33. От барицентрической связанной прямоугольной системы координат $\tilde{x}_1\tilde{y}_1\tilde{z}_1$ к барицентрической скоростной, связанной с КА, прямоугольной системе $\xi_c\eta_c\zeta_c$:

$$\begin{bmatrix} \xi_c \\ \eta_c \\ \zeta_c \end{bmatrix} = [x_{ij}] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \\ \tilde{z}_1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_{\xi_c} \\ V_{\eta_c} \\ V_{\zeta_c} \end{bmatrix} = [x_{ij}] \begin{bmatrix} V_{\tilde{x}_1} \\ V_{\tilde{y}_1} \\ V_{\tilde{z}_1} \end{bmatrix};$$

$$[x_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \psi & -\sin \varphi \cos \psi & \sin \psi \\ \sin \varphi \cos \theta + \cos \varphi \sin \psi \cos \theta & \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \psi \sin \theta & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \sin \psi \cos \theta & \cos \psi \cos \theta \end{bmatrix},$$

где φ, ψ, θ — углы Эйлера, характеризующие соответственно отклонения КА на угол атаки, угол скльзения и угол вращения.

34. От геоцентрической экваториальной сферической системы координат одной эпохи к той же системе координат другой эпохи:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_0 + M + N \sin \alpha_m \operatorname{tg} \delta_m, & \alpha_m &= \frac{1}{2} (\alpha + \alpha_0), \\ \delta &= \delta_0 + N \cos \alpha_m, \\ \alpha_0 &= \alpha - M - N \sin \alpha_m \operatorname{tg} \delta_m, & \delta_m &= \frac{1}{2} (\delta + \delta_0), \\ \delta_0 &= \delta - N \cos \alpha_m, \end{aligned}$$

где α_0, δ_0 — координаты второй геоцентрической экваториальной сферической системы координат, отнесенные к эпохе T_0 ;

α, δ — координаты той же системы произвольной эпохи T ;

M, N — даются для различных эпох в Астрономическом ежегоднике.

Примечание. Уравнения преобразования п. 34 решаются методом последовательных приближений; в первом приближении

$$\alpha_m = \alpha_0; \quad \delta_m = \delta_0.$$

35. От оскулирующей системы координат заданной эпохи T_0 к той же системе произвольной эпохи T :

$$\begin{aligned}\Omega &= \Omega_0 + a - b \sin(\Omega_0 + c') \operatorname{ctg} i_0; \\ i &= i_0 + b \cos(\Omega_0 + c'); \\ \omega &= \omega_0 + b \sin(\Omega_0 + c') \operatorname{cosec} i_0.\end{aligned}$$

Формулы обратного перехода:

$$\begin{aligned}\Omega_0 &= \Omega - a + b \sin(\Omega + c) \operatorname{ctg} i; \\ i_0 &= i - b \cos(\Omega + c); \\ \omega_0 &= \omega - b \sin(\Omega + c) \operatorname{cosec} i,\end{aligned}$$

где величины $a, b, c, c' = a + c$ для различных эпох берутся из Астрономического ежегодника.

36. От селеноцентрической экваториальной прямоугольной системы координат $x'_0 y'_0 z'_0$ эпохи T_0 к той же системе координат произвольной эпохи T :

$$\begin{aligned}x' &= x'_0 \cos \omega_{\text{Л}}(T - T_0) + y'_0 \sin \omega_{\text{Л}}(T - T_0); \\ y' &= x'_0 \sin \omega_{\text{Л}}(T - T_0) + y'_0 \cos \omega_{\text{Л}}(T - T_0); \\ z' &= z'_0,\end{aligned}$$

где $\omega_{\text{Л}}$ — средняя угловая скорость вращения Луны вокруг своей оси, рассчитываемая по формуле

$$\omega_{\text{Л}} = \frac{2\pi}{27^d, 3216609}.$$

37. От геоцентрической экваториальной прямоугольной системы координат XYZ к селеноцентрической экваториальной прямоугольной системе $x'y'z'$:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= [\Delta_{ij}] \begin{bmatrix} X - X_{\text{Л}} \\ Y - Y_{\text{Л}} \\ Z - Z_{\text{Л}} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_{x'} \\ V_{y'} \\ V_{z'} \end{bmatrix} = [\Delta_{ij}] \begin{bmatrix} V_X - V_{X_{\text{Л}}} \\ V_Y - V_{Y_{\text{Л}}} \\ V_Z - V_{Z_{\text{Л}}} \end{bmatrix} + \omega_{\text{Л}} \begin{bmatrix} -y' \\ x' \\ 0 \end{bmatrix}; \\ [\Delta_{ij}] &= \begin{bmatrix} \cos \varphi \cos \Omega' - \sin \varphi \sin \Omega' \cos i & \cos \varphi \sin \Omega' + \sin \varphi \cos \Omega' \cos i & \sin \varphi \sin i \\ -\sin \varphi \cos \Omega' - \cos \varphi \sin \Omega' \cos i & -\cos \varphi \sin \Omega' + \cos \varphi \cos \Omega' \cos i & \cos \varphi \sin i \\ \sin \Omega' \sin i & -\cos \Omega' \sin i & \cos i \end{bmatrix},\end{aligned}$$

где $\varphi = \zeta - \Omega + \Delta$ — угол между восходящим узлом среднего лунного экватора на среднем экваторе Земли и осью x' , отсчитываемой в положительном направлении от восходящего узла;

Ω' — угловое расстояние от точки весеннего равноденствия до восходящего узла среднего лунного экватора на среднем экваторе Земли, считаемое по последнему;

Ω — средняя долгота восходящего узла лунной орбиты;

ζ — средняя долгота Луны;

Δ — угловое расстояние от восходящего узла среднего лунного экватора на среднем экваторе Земли до восходящего узла среднего лунного экватора на эклиптике;

i — наклонение среднего лунного экватора к среднему земному экватору;

$X_{\text{Л}}, Y_{\text{Л}}, \dots, V_{Z_{\text{Л}}}$ — координаты Луны в геоцентрической экваториальной системе XYZ .

38. От лунногеоцентрической прямоугольной системы координат $X^{\text{Л}} Y^{\text{Л}} Z^{\text{Л}}$ к геоцентрической лунноэкваториальной прямоугольной системе $X_{\text{э}} Y_{\text{э}} Z_{\text{э}}$:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} X_{\text{э}} \\ Y_{\text{э}} \\ Z_{\text{э}} \end{bmatrix} &= [\theta_{ij}] \begin{bmatrix} X^{\text{Л}} \\ Y^{\text{Л}} \\ Z^{\text{Л}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} V_{X_{\text{э}}} \\ V_{Y_{\text{э}}} \\ V_{Z_{\text{э}}} \end{bmatrix} = [\theta_{ij}] \begin{bmatrix} V_{X^{\text{Л}}} \\ V_{Y^{\text{Л}}} \\ V_{Z^{\text{Л}}} \end{bmatrix} + \omega_3 \cdot \begin{bmatrix} Y_{\text{э}} \\ -X_{\text{э}} \\ 0 \end{bmatrix}, \\ [\theta_{ij}] &= \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},\end{aligned}$$

где θ — угол между плоскостями экватора Земли и орбиты Луны.

39. От лунногеоцентрической прямоугольной системы координат $X^Л Y^Л Z^Л$ к селеноцентрической невращающейся прямоугольной системе $\xi\eta\zeta$:

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} = [\varphi_{ij}] \begin{bmatrix} X_0^Л - X^Л \\ Y_0^Л - Y^Л \\ Z_0^Л - Z^Л \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} V_\xi \\ V_\eta \\ V_\zeta \end{bmatrix} = [\varphi_{ij}] \begin{bmatrix} V_{X_0^Л} - V_{X^Л} \\ V_{Y_0^Л} - V_{Y^Л} \\ V_{Z_0^Л} - V_{Z^Л} \end{bmatrix},$$

$$[\varphi_{ij}] = \begin{bmatrix} \cos \varphi_Л & \sin \varphi_Л & 0 \\ -\sin \varphi_Л & \cos \varphi_Л & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где $\varphi_Л$ — угол между радиусом-вектором центра Луны и осью $X^Л$, определяемый по формулам:

$$\cos \varphi_Л = \frac{X^Л}{r^Л}, \quad \sin \varphi_Л = \frac{Y^Л}{r^Л}, \quad r^Л = \sqrt{(X^Л)^2 + (Y^Л)^2};$$

$X_0^Л, Y_0^Л, Z_0^Л, V_{X_0^Л}, V_{Y_0^Л}, V_{Z_0^Л}$ — параметры Луны в лунногеоцентрической системе координат.

2.3. ВРЕМЯ

Для измерения времени пользуются естественными или искусственно создаваемыми периодическими процессами с достаточно постоянным периодом повторения. Вращение небесного свода и периодическое движение по нему Солнца, являющиеся отражением вращения Земли вокруг своей оси и обращения ее вокруг Солнца, позволяют установить соответственно две основные единицы измерения времени — сутки и год.

Искусственно создаваемыми для измерения времени процессами могут быть: колебания маятника, резонансные колебания кварцевой пластинки (кварцевые часы), колебательные процессы в атомах и молекулах (атомные часы, молекулярные часы с использованием молекулярных генераторов колебаний) и др.

Сутками называют промежуток времени между двумя последовательными одноименными (или верхними, или нижними) кульминациями на данном меридиане некоторой точки небесной сферы.

В соответствии с этим системы измерения времени имеют двойное название: по тому меридиану, на котором измеряется время, и по той точке небесной сферы, которую используют для измерения. В качестве такой точки небесной сферы берут точку весеннего равноденствия, центр истинного Солнца, или так называемое среднее Солнце.

Точка весеннего равноденствия Υ — это точка, в которой центр Солнца пересекает небесный экватор, переходя из южного полушария небесной сферы в северное (рис. 2.33).

Линии и точки на небесной сфере: P_c — северный полюс мира; P_y — южный полюс мира; $P_c P_y$ — ось мира; Z — зенит; N' — надир; N — точка Севера; W — точка Запада; S — точка Юга; E — точка Востока; $NWSEN$ — линия горизонта; NS — полуденная линия; NP_cS — меридиан; $RWQER$ — небесный экватор; M — светило; $L'DKMCL'$ — точная параллель светила; D — точка восхода светила; K — точка верхней кульминации его; C — точка захода светила; L' — точка нижней кульминации; ZMF — круг высоты светила (иначе — вертикаль светила); ZM — зенитное расстояние светила Z ; FM — высота светила h ; SF — азимут светила A ; $P_c M$ — полярное расстояние P ; QH — часовой угол светила t ; Υ — точка весеннего равноденствия; ΥN — прямое восхождение α ; ΥQ — величина звездного времени S ; $P_c N = \varphi$ (высота полюса равна широте места φ).

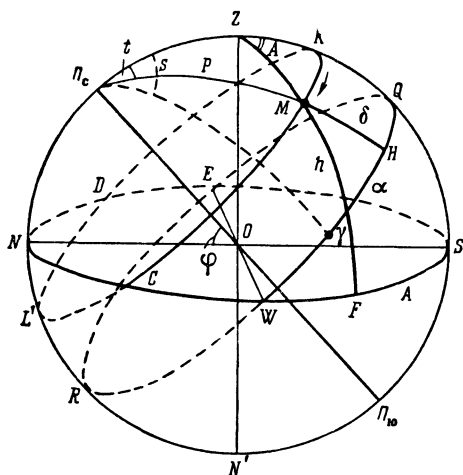


Рис. 2.33. Линии и точки на небесной сфере

Единицы измерения времени

Звездные сутки — промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями точки весеннего равноденствия на одном и том же меридиане. Звездные сутки начинаются в момент верхней кульминации точки весеннего равноденствия.

Звездное время — время, отсчитываемое от момента верхней кульминации точки весеннего равноденствия до любого другого ее положения и выраженное в долях звездных суток.

Звездное время s на данном меридиане в любой момент численно равно часовому углу точки весеннего равноденствия t_{γ} , выраженному в часовой мере, т. е. $s = t_{\gamma}^h$. Звездное время есть сумма часового угла t любого светила и прямого восхождения α этого же светила, т. е.

$$s = t + \alpha.$$

В момент верхней кульминации светила его часовой угол равен 0° (360°); в момент нижней кульминации он равен 180° , т. е. для верхней кульминации звездное время численно равно прямому восхождению светила, а для нижней кульминации $s = 180^\circ + \alpha_{\text{светила}}$.

Истинные солнечные сутки — промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями центра видимого диска Солнца (так называемого истинного Солнца) на одном и том же меридиане. За начало истинных солнечных суток принимается момент верхней кульминации центра видимого Солнца, называемый истинным полуднем.

Истинные солнечные сутки в среднем (длительность их не постоянна) на 4^m длиннее звездных, они короче летом и длиннее зимой, причем расхождение доходит до 51^s в сутки.

Истинное солнечное время — время, отсчитываемое от момента нижней кульминации истинного Солнца до любого другого ее положения и выраженное в долях истинных солнечных суток. Истинное солнечное время $m_{\odot}$ на данном меридиане в любой момент численно равно часовому углу истинного Солнца $t_{\odot}$, выраженному в часовой мере, плюс 12^h , т. е.

$$m_{\odot} = t_{\odot}^h + 12^h.$$

Среднее экваториальное Солнце — воображаемая точка небесной сферы, движущаяся равномерно по небесному экватору так, что в каждый момент T ее прямое восхождение α равно средней долготе истинного Солнца L .

Средняя долгота истинного Солнца для любого момента T вычисляется по формуле

$$L = \alpha = L_0 + n(T - T_0),$$

где L_0 — средняя долгота для момента T_0 , а n — среднее увеличение долготы Солнца. Согласно С. Ньюкому

$$\alpha = 18^h 38^m 45^s,836 + 8640184^s,542T + 0^s,093T^2,$$

где T — число юлианских столетий (см. ниже) от момента 1900 г., январь, $0,12^h$ среднего солнечного времени в Гринвиче (средний гринвичский полдень), или

$$\alpha = 18^h 38^m 45^s,836 + 8640184^s,542T + 0^s,093T^2,$$

где d — число средних суток, протекших с 1900 г., январь $0,12^h$ (средний гринвичский полдень).

Средние солнечные сутки — промежуток времени между двумя последовательными одноименными кульминациями среднего экваториального Солнца на одном и том же меридиане.

Среднее солнечное время — время, протекшее от момента нижней кульминации среднего экваториального Солнца до любого другого его положения и выраженное в долях средних солнечных суток.

Среднее солнечное время m на данном меридиане в любой момент численно равно часовому углу среднего экваториального Солнца t_{cp} , выраженному в часовой мере, плюс 12^h , т. е.

$$m = t_{cp}^h + 12^h.$$

Уравнение времени E — разность часовых углов среднего экваториального Солнца t_{cp} и истинного Солнца $t_{\odot}$:

$$E = t_{cp} - t_{\odot}.$$

Среднее солнечное время m на данном меридиане выражается через истинное солнечное время $m_{\odot}$ на этом же меридиане по формуле

$$m = m_{\odot} + E.$$

В Астрономических ежегодниках даются значения уравнения времени в полдень на меридиане Гринвича для каждого дня. С достаточной точностью можно определить его из рис. 2.34. Характерная кривая уравнения времени (рис. 2.35) складывается из двух почти синусоидальных кривых: первая (зависящая от неравномерности движения Земли по орбите) имеет годичный период, а вторая (отражающая влияние наклона эклиптики) имеет полугодовой период. Уравнение времени обращается в нуль четыре раза в году: 15 апреля, 14 июня, 1 сентября и 24 декабря; достигает максимальных отрицательных значений: 12 февраля — 14^m24^s , 27 июля — 8^m20^s ; максимальных положительных значений: 15 мая + 3^m49^s и 3 ноября + 16^m21^s .

Относительная продолжительность средних солнечных и звездных суток:

$$1 \text{ средние солн. сутки} = \frac{366,2422}{365,2422}$$

звезд. суток = $\mu = 1,0027379093$;

$$1 \text{ звездные сутки} = \frac{365,2422}{366,2422}$$

$$\text{средн. солн. суток} = \mu' = \frac{1}{\mu}.$$

Если промежуток времени в средних солнечных единицах есть m , а в звездных единицах s , то

$$m\mu = s; \quad s\mu' = m.$$

Связь среднего солнечного времени со звездным временем определяется формулами

$$s = s_0 - \frac{\lambda^h}{24^h} \cdot 3^m56^s,5554 + m\mu;$$

$$m = \left[s - \left(s_0 - \frac{\lambda^h}{24^h} \cdot 3^m56^s,5554 \right) \right] \mu,$$

где m — среднее солнечное время в некоторый момент соответствующей календарной даты на каком-нибудь меридиане с восточной долготой от Гринвича λ ;

s — звездное время в тот же момент;

s_0 — звездное время в среднюю гринвичскую полночь соответствующей календарной даты, которое можно вычислить по формуле для L .

Для приближенных расчетов, с точностью до 5 мин, m и s определяются по формулам

$$s = s_0 + m; \quad m = s - s_0.$$

Системы счета времени

Местное звездное время, местное истинное и местное среднее солнечное время меридиана — это соответственно звездное время s , истинное солнечное $m_{\odot}$ и среднее солнечное время m этого меридиана.

Точки, лежащие на одном географическом меридиане, в один и тот же момент имеют одинаковое местное время.

Мировое, или всемирное время T_0 — это местное среднее солнечное время гринвичского меридиана.

Местное среднее солнечное время какого-либо пункта на Земле определяется по формуле

$$m = T_0 + \lambda^h,$$

где λ^h — географическая долгота пункта, выраженная в часовой мере и считаемая положительной к востоку от Гринвича.

Поясное время T_{II} — это местное среднее солнечное время основного географического меридиана того часового пояса, в котором расположен данный пункт.

Часовые пояса — 24 участка вдоль меридианов, ширина которых примерно равна 15° и на которые условно разделена вся поверхность Земли.

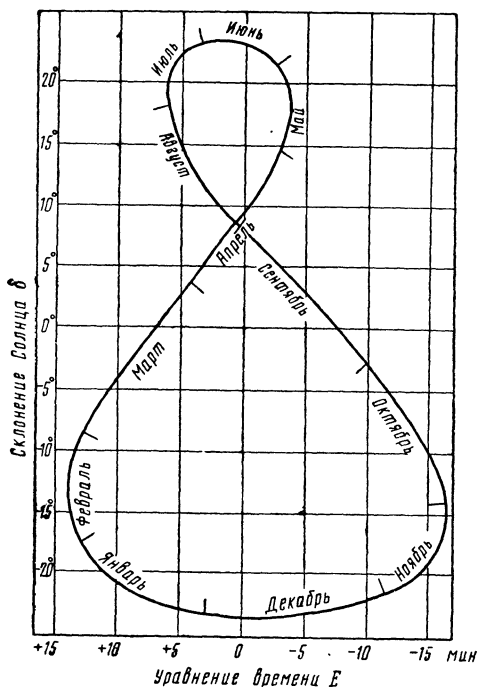


Рис. 2.34. Номограмма для определения склонения Солнца и уравнения времени

Основные меридианы часовых поясов — географические меридианы, проходящие приблизительно по середине часовых поясов и отстоящие точно на 15° по долготе друг от друга.

Разность поясных времен двух пунктов равна разности номеров их часовых поясов, т. е.

$$T_{п2} - T_{п1} = N_2^h - N_1^h.$$

Поясное время какого-либо пункта с восточной долготой λ^h определяется по формуле

$$T_{п} = m + N^h - \lambda^h.$$

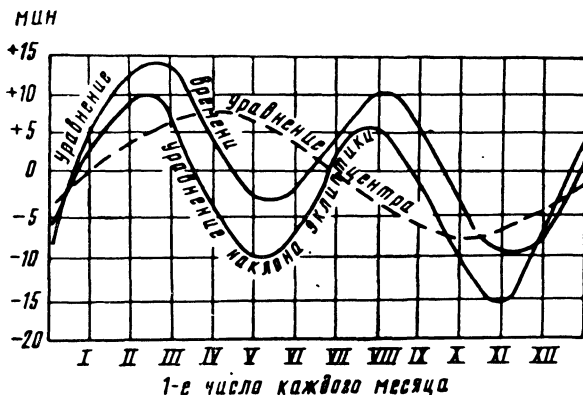


Рис. 2. 35. Уравнение времени и его составляющие

Декретное время — время, установленное декретом Совнаркома СССР от 16 июня 1930 г. Согласно этому декрету стрелки всех часов были передвинуты вперед относительно поясного времени на 1 час. Следовательно, декретное время будет

$$T_d = T_{п} + 1^h = m + N^h - \lambda^h + 1^h.$$

В Западной Европе, в США стрелки часов переводятся на 1 час вперед относительно поясного времени только на время летних месяцев. Это время носит название *летнего времени*.

Московское время — время, равное всемирному $+3^h$, т. е.

$$T_m = T_0 + 3^h.$$

Эфемеридное время $T_{эф}$ — время, текущее совершенно равномерно. Оно применяется для теоретического изучения движений небесных тел и предвычисления их положений (вычисления эфемерид). Вследствие неравномерности вращения Земли наблюдаемые координаты не совпадают с вычисленными, т. е. величина $\Delta T = T_{эф} - T_0$ изменяется с течением времени. Точное значение величины ΔT может быть получено только на основании наблюдений Луны путем сравнения эфемеридных положений Луны, отнесенных к ее эфемеридному времени, с ее наблюдаемыми положениями, которые фиксируются по всемирному времени. В тех случаях, когда средняя солнечная секунда неудовлетворительна как единица времени ввиду ее изменчивости, за единицу времени принимают 1 эф. сек. $= 1/31556925,9747$ части тропического года на момент фундаментальной эпохи таблиц движения Солнца Ньюкома. Эфемеридное время считается от того момента вблизи начала календарного года 1900, когда геометрическая средняя долгота Солнца, отнесенная к среднему равноденствию даты, была $L = 279^\circ 41' 48,04''$, т. е. момента, когда по эфемеридному времени было точно 1900, янв., $0,12^h$ (фундаментальная эпоха таблиц движения Солнца).

С 1960 г. в таблицах Астрономических ежегодников термин «всемирное время» заменен на «эфемеридное время», за исключением таких разделов ежегодников, как покрытия и затмения.

Календарь

Календарь — система исчисления больших промежутков времени. В основе современного календаря лежит *тропический год* — промежуток времени между двумя последовательными прохождением среднего Солнца через точку весеннего равноденствия. Тропический год содержит 365,2422 средних солнечных суток, или 366,2422 звездных суток. Трудность создания календаря возникла еще в древности в связи с тем, что тропический год и солнечные сутки несоизмеримы, так как календарный год, естественно, должен содержать целое число суток.

Юлианский календарь введен Юлием Цезарем в 46 г. до н. э. Продолжительность календарного года принимается равной 365 средних солнечных суток, за исключением годов, называемых високосными, номера которых делятся на 4 без остатка (високосный год равен 366 суткам).

Счет времени юлианскими годами за 128 лет даст расхождение со счетом тропическими годами приблизительно в одни сутки. Юлианское столетие — промежуток времени в 365,25 средних солнечных суток.

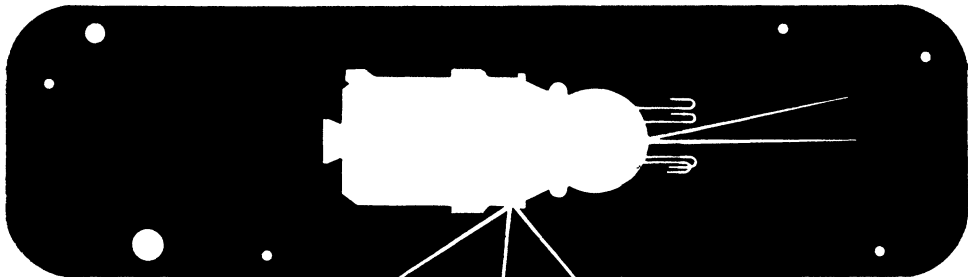
Григорианский календарь. К концу XVI в. отступление календаря от астрономических явлений достигло 10 дней. В 1582 г. по реформе папы Григория XIII был принят григорианский календарь. После 4 октября 1582 г. стали считать сразу 15-е октября. Этим устранялось расхождение в 10 суток со счетом тропическими годами.

Високосным годом стали считать каждый четвертый, за исключением годов с целым числом столетий (1600, 1800 и т. д.), при этом год с целым числом столетий стали считать високосным только тогда, когда число сотен делится на 4 без остатка. В СССР новый стиль введен Декретом Совета Народных Комиссаров РСФСР в 1918 г., при этом вместо 1 февраля старого стиля считалось 14 февраля нового стиля.

Юлианские дни — дни, которые непрерывно считаются через годы, столетия и тысячелетия, от 1 января 4713 г. до н. э. При этом начало каждого юлианского дня считается в средний гринвичский полдень. Юлианские дни удобно использовать при расчетах числа средних солнечных суток, протекших между двумя датами, далеко отстоящими друг от друга.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. II

1. Балк М. Б. Элементы динамики космического полета. М., «Наука», 1965.
 2. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
 3. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Физматгиз, 1963.
 4. Дубяго А. Д. Определение орбит. М., Гостехтеоретиздат, 1949.
 5. Красавцев Б. И. Мореходная астрономия. М., «Морской транспорт», 1960.
 6. Куликовский П. Г. Справочник любителя астрономии. М., Физматгиз, 1961.
 7. Чеботарев Г. А. Аналитические и численные методы небесной механики. М., «Наука», 1965.
 8. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М., «Наука», 1965.
 9. Астрономический календарь. Постоянная часть, изд. 5-е, М., Физматгиз, 1962.
 10. Искусственные спутники Земли, вып. 16. М., «Наука», 1964.
 11. Проблемы движения искусственных небесных тел. Доклады на конференции по общим и прикладным вопросам теоретической астрономии. Изд-во АН СССР, 1963.
 12. Управление полетом космических аппаратов. М., ИЛ, 1963.
-



ГЛАВА III

НЕВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a — большая полуось орбиты.
 $\vec{c}$ — вектор кинетического момента, c_1, c_2, c_3 — его компоненты по осям X, Y, Z .
 E — эксцентрисическая аномалия.
 e — эксцентриситет.
 $\vec{f}$ — вектор Лапласа; f_1, f_2, f_3 — его компоненты по осям X, Y, Z .
 H — вспомогательная переменная, соответствующая E в гиперболическом движении.
 h — постоянная энергии.
 i — наклонение плоскости орбиты к плоскости экватора.
 M_0 — средняя аномалия эпохи.
 m — масса планеты в единицах массы возмущающего тела.
 n — среднее движение.
 p — параметр орбиты.
 g — расстояние от центра притяжения до перигея.
 R — радиус сферы действия планеты.
 $\vec{r}$ — радиус-вектор КА (от притягивающего центра до КА).
 T — период обращения КА.
 t — время.
 V — скорость КА.
 V_r, V_n — радиальная и нормальная составляющие скорости.
 X, Y, Z — прямоугольные координаты КА в инерциальной системе координат с началом в центре притяжения.
 z, ϱ, u — цилиндрические координаты КА (z — по оси системы).
 ϱ — проекция радиуса-вектора на плоскость, ортогональную оси
 z ; u — угол, образуемый проекцией ϱ с фиксированным направлением в указанной плоскости.
 α, δ — прямое восхождение и склонение.
 ϑ — истинная аномалия.
 λ — долгота КА.
 μ — произведение гравитационной постоянной на массу притягивающего тела.
 $\pi = \Omega + \omega$ — долгота перигея.
 τ — время прохождения КА через перигей.
 φ — широта КА; угол эксцентриситета и угол между направлениями из центра планеты на КА и на Солнце.
 Ω — долгота восходящего узла орбиты.
 ω — угловое расстояние перигея орбиты от его восходящего узла.
Невозмущенным движением КА называется его движение под действием сил одного притягивающего центра.

3.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

А. Уравнение движения КА в векторной форме

$$\ddot{\vec{r}} - \frac{\mu \vec{r}}{r^3} = 0,$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор (от притягивающего центра до КА);
 μ — гравитационная постоянная.

Б. Уравнения движения в скалярной форме

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} + \frac{\mu X}{r^3} &= 0; \\ \ddot{Y} + \frac{\mu Y}{r^3} &= 0; \\ \ddot{Z} + \frac{\mu Z}{r^3} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

Здесь $r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$;

X, Y, Z — координаты КА в декартовой невращающейся системе координат с началом в центре притяжения.

В. Уравнения движения КА в полярной системе координат

Уравнения движения в цилиндрических полярных координатах:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\varrho} - \varrho \dot{u}^2 &= -\frac{\mu \varrho}{r^3}; \\ \frac{d}{dt}(\varrho^2 \dot{u}) &= 0; \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где z — ось цилиндрической системы координат;

ϱ — проекция радиуса-вектора на плоскость, ортогональную оси z ;

u — угол, образуемый проекцией ϱ с фиксированным направлением в указанной плоскости.

Г. Уравнения движения в сферических координатах

$$\left. \begin{aligned} \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2 - r \dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi &= -\frac{\mu}{r^2}; \\ \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\varphi}) + r^2 \dot{\lambda} \sin \varphi \cos \varphi &= 0; \\ \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\lambda} \cos^2 \varphi) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

где φ — широта;

λ — долгота;

r — расстояние до центра притяжения.

3.2. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Уравнения пп. А, Б, В, Г имеют следующие первые интегралы.

1. *Интеграл энергии* (скалярный интеграл). Полная энергия движущегося тела относительно притягивающего центра постоянна:

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = h = \text{const}, \quad (3.4)$$

где V — скорость тела,

h — постоянная энергии, зависящая от вида движения.

2. Интеграл площадей. Площадь, ометаемая радиусом-вектором в единицу времени, величина постоянная:

$$\bar{r} \times \bar{V} = \bar{c} = \text{const.}$$

Плоскость, в которой совершается движение, определяется уравнением

$$Xc_1 + Yc_2 + Zc_3 = 0,$$

где X, Y, Z — компоненты радиуса-вектора $\bar{r}$;

c_1, c_2, c_3 — компоненты вектора $\bar{c}$.

Для двух положений тела можно записать следующие соотношения:

$$c_1 = Y_1 \dot{Z}_1 - Z_1 \dot{Y}_1 = Y_2 \dot{Z}_2 - Z_2 \dot{Y}_2;$$

$$c_2 = Z_1 \dot{X}_1 - X_1 \dot{Z}_1 = Z_2 \dot{X}_2 - X_2 \dot{Z}_2;$$

$$c_3 = X_1 \dot{Y}_1 - Y_1 \dot{X}_1 = X_2 \dot{Y}_2 - Y_2 \dot{X}_2.$$

Интеграл площадей можно записать в виде

$$c = r^2 \dot{\vartheta}, \quad (3.5)$$

где $\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt}$ — угловая скорость движения тела.

3. Интеграл Лапласа. Между векторами $\bar{r}$, $\bar{V}$ и $\bar{c}$ имеет место следующее соотношение (интеграл Лапласа):

$$-\frac{\mu \bar{r}}{r} + (\bar{V} \times \bar{c}) = \bar{f} = \text{const.},$$

где $\bar{f}$ — вектор Лапласа.

В скалярной форме интеграл Лапласа запишется в виде

$$XV^2 - \frac{\mu X}{r} - r\dot{r}X = f_1;$$

$$YV^2 - \frac{\mu Y}{r} - r\dot{r}Y = f_2;$$

$$ZV^2 - \frac{\mu Z}{r} - r\dot{r}Z = f_3,$$

где f_1, f_2, f_3 — компоненты вектора $\bar{f}$.

Существует всего семь скалярных первых интегралов: интеграл энергии, три скалярных интеграла площадей и три скалярных интеграла Лапласа.

Между этими интегралами имеется связь, и два из них оказываются зависимыми. Связь между ними определяется следующим соотношением:

1. $\bar{f} \times \bar{c} = 0$ или $f_1 c_1 + f_2 c_2 + f_3 c_3 = 0$, т. е. вектор Лапласа $\bar{f}$ и вектор $\bar{c}$ взаимно ортогональны и определяют неизменную плоскость Лапласа.

2. $f^2 = \mu^2 + c^2 h$, соотношение, связывающее энергию движения, константу площадей, гравитационную постоянную с модулем вектора Лапласа.

3.3. ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА

Уравнения невозмущенного движения КА интегрируются до конца. Эта задача называется ограниченной задачей двух тел (ограниченной, так как влиянием движения КА на планету можно пренебречь).

В плоскости движения КА имеет место в результате интегрирования следующее соотношение, определяющее орбиту:

$$r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \frac{f}{\mu} \cos \vartheta},$$

где ϑ — угол между векторами $\bar{r}$ и $\bar{f}$ (истинная аномалия).

Это соотношение соответствует движению тела по коническому сечению, уравнение которого в полярной системе координат

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}. \quad (3.6)$$

Здесь

$p = \frac{c^2}{\mu}$ — параметр орбиты;

$e = \frac{f}{\mu}$ — эксцентриситет орбиты, который определяет вид конического сечения:

$e = 0$ — окружность;

$0 < e < 1$ — эллипс;

$e = 1$ — парабола или орбита, проходящая через притягивающий центр ($p = 0$); $e > 1$ — гипербола.

Большая полуось конического сечения определяется из соотношения

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad (3.7)$$

$a > 0$ при $e < 1$; $a < 0$ при $e > 1$.

Интеграл энергии (3.4) можно записать так:

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} = -\frac{\mu}{a}. \quad (3.8)$$

Скорость КА выражается через истинную аномалию ϑ следующим образом:

$$V^2 = \frac{\mu}{p} e^2 + \frac{\mu}{p} + 2 \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \cos \vartheta. \quad (3.9)$$

Для двух положений тела имеет место соотношение

$$V_1^2 - 2 \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \cos \vartheta_1 = V_2^2 - 2 \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \cos \vartheta_2.$$

3.4. СВЯЗЬ МЕЖДУ ВРЕМЕНЕМ ДВИЖЕНИЯ И ЭЛЕМЕНТАМИ ОРБИТЫ. УРАВНЕНИЕ КЕПЛЕРА

В результате интегрирования уравнений движения, приведенных в разд. 3.1, получается выражение для определения времени движения t от момента τ — прохождения через перигеи орбиты (уравнение Кеплера):

$$\int_{\tau}^t dt = t - \tau = \frac{1}{c} \int_0^{\vartheta} r^2 d\vartheta,$$

или

$$t - \tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^2}.$$

Для эллиптической орбиты

$$t - \tau = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [E - e \sin E], \quad (3.10)$$

где E — эксцентрическая аномалия, определяемая через

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}. \quad (3.11)$$

Для гиперболической орбиты

$$t - \tau = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [e \operatorname{sh} H - H], \quad (3.12)$$

где H — вспомогательная переменная для случая движения по гиперболической орбите, определяемая через

$$\operatorname{th} \frac{H}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \quad (3.13)$$

или в виде

$$t - \tau = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{H}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{tg} H \right]. \quad (3.14)$$

Соотношения между истинной и эксцентрической аномалиями в эллиптическом движении:

$$\left. \begin{aligned} r \cos \vartheta &= a (\cos E - e); \\ r &= a (1 - e \cos E); \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \sin E &= \frac{\cos \varphi \cdot \sin \vartheta}{1 + \sin \varphi \cos \vartheta}; & \sin \vartheta &= \frac{\cos \varphi \cdot \sin E}{1 - \sin \varphi \cos E}; \\ \cos E &= \frac{\cos \vartheta + \sin \varphi}{1 + \sin \varphi \cos \vartheta}; & \cos \vartheta &= \frac{\cos E - \sin \varphi}{1 - \sin \varphi \cos E}, \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

где $\sin \varphi = e$ — эксцентриситет орбиты;

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - e^2}.$$

3.5. ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТ

Величины, полностью определяющие положение и скорость точки, движущейся по кеплеровой орбите на заданный момент времени, называются *элементами орбиты*.

Ниже даны формульные зависимости для основных элементов орбиты.

Большая полуось орбиты:

$$a = \frac{\mu r}{2\mu - rV^2},$$

где

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}; \\ V &= \sqrt{\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Эксцентриситет орбиты:

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}, \quad (3.18)$$

где

$$p = \frac{c^2}{\mu} = \frac{(X\dot{Y} - Y\dot{X})^2 + (Y\dot{Z} - Z\dot{Y})^2 + (X\dot{Z} - Z\dot{X})^2}{\mu}. \quad (3.19)$$

Наклонение плоскости орбиты:

$$i = \arccos \frac{X\dot{Y} - Y\dot{X}}{\sqrt{\mu p}}, \quad 0 \leq i \leq \pi. \quad (3.20)$$

Долгота восходящего узла орбиты:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \arcsin \frac{\dot{Y}Z - \dot{Z}Y}{\sin i \sqrt{\mu p}} \\ |k| \cos \Omega &= X\dot{Z} - Z\dot{X} \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq \Omega \leq 2\pi. \quad (3.21)$$

Угловое расстояние от узла до перицентра орбиты:

$$\omega = u - \vartheta,$$

где

$$\left. \begin{aligned} u &= \arcsin \frac{Y \cos \Omega - X \sin \Omega}{r \cos i} \\ |k| \cos u &= X \cos \Omega + Y \sin \Omega \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq u \leq 2\pi; \quad (3.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \vartheta &= \arcsin \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{X\dot{X} + Y\dot{Y} + Z\dot{Z}}{er} \\ |k| \cos \vartheta &= p - r \end{aligned} \right\} \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi. \quad (3.23)$$

Время прохождения через перицентр τ :

— для эллиптического движения

$$\tau = t - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [E - e \sin E];$$

— для гиперболического движения

$$\tau = t - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [e \operatorname{sh} H - H].$$

Кроме основных элементов орбиты, рассматриваются вспомогательные элементы:

— долгота перицентра орбиты $\pi = \Omega + \omega$,

где ω — угловое расстояние перицентра орбиты от ее узла;

— угол эксцентриситета φ ; $\sin \varphi = e$;

$$\text{— среднее движение } n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}; \quad (3.24)$$

$$T = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} 2\pi \text{ (для эллиптических орбит);} \quad (3.25)$$

— параметр орбиты $p = a(1 - e^2)$;

— средняя аномалия эпохи

$$M_0 = k(t_0 - \tau); \quad (3.26)$$

— средняя долгота

$$\varepsilon = \Omega + \omega + M_0 = \pi + M_0.$$

Элементы, определяющие эллиптическое движение:

Основные элементы	$\Omega, i, \omega, a, e, \tau$
Дополнительные элементы	π, p, φ, M_0 T, ε

Элементы, определяющие гиперболическое движение:

Основные элементы	$\Omega, i, \omega, a, e, \tau$
Дополнительные элементы	π, p q

Здесь $q = a(e - 1)$ — расстояние от центра притяжения до перицентра.

3.6. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ НЕВОЗМУЩЕННОГО КЕПЛЕРОВОГО ДВИЖЕНИЯ

Предельными случаями невозмущенного движения является круговое, параболическое и прямолинейное.

Круговое движение. Величина вектора Лапласа $\bar{f} = 0$; направление неопределенно; $e = 0$.

Круговое движение является предельным для эллиптического движения. Круговая орбита определяется четырьмя элементами: Ω, i, a, M_0 (M_0 — угол, образуемый начальным радиусом-вектором с направлением на восходящий узел орбиты).

Для круговой орбиты

$$r = p = a = r_0; \quad u = \vartheta = E = M = n(t - t_0) + M_0;$$

$$V^2 = V_0^2 = \frac{\mu}{a},$$

— круговая скорость из интеграла энергии

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{a}}. \quad (3.27)$$

Параболическое движение. Энергия $h = 0$ или $e = 1$.

Параболическое движение является предельным справа для эллиптического движения и слева для гиперболического.

Элементами параболической орбиты являются пять величин: Ω , i , ω , q , τ , которые полностью определяют движение.

Уравнение орбиты

$$r = \frac{p}{1 + \cos \vartheta} = q \sec^2 \frac{\vartheta}{2},$$

где q — расстояние от фокуса параболы до перигентра;

ϑ — истинная аномалия.

Время движения

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{3\vartheta}{2} = n(t - \tau);$$

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2} q^{3/2}}.$$

Параболическая скорость из интеграла энергии

$$V = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}. \quad (3.28)$$

Прямолинейное движение. Постоянная площадей $\bar{c}=0$. В этом случае $\bar{f} \neq 0$; h может принимать любое значение; $p=0$; $e=1$.

Время движения в прямолинейном движении:

— с параболической скоростью

$$\pm (t - t_0) = \frac{\sqrt{\mu}}{3 \sqrt{2}} (r^{3/2} - r_0^{3/2});$$

— с гиперболической скоростью

$$\pm (t - t_0) = \left[\frac{2 \sqrt{r}}{h} - \frac{2 \sqrt{2\mu}}{h \sqrt{h}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{hr}{2\mu}} \right]_{r_0}^r;$$

— с эллиптической скоростью

$$\pm (t - t_0) = \left[\frac{2 \sqrt{r}}{h} - \frac{2 \sqrt{2\mu}}{h \sqrt{-h}} \ln \frac{2\mu - hr + 2 \sqrt{-2\mu h}}{\sqrt{2\mu + hr}} \right]_{r_0}^r.$$

3.7. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЧЕРЕЗ ЭЛЕМЕНТЫ ОРБИТЫ

В любой заданный момент времени положение тела на орбите и его движение определяются в принятой системе координат радиусом-вектором $\vec{r}(x, y, z)$ и вектором скорости $\dot{\vec{r}}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. Величины $\vec{r}$ и $\dot{\vec{r}}$ можно определить через элементы орбиты.

По уравнению Кеплера определяется ϑ , а затем величины

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta};$$

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta \text{ — радиальная составляющая скорости;}$$

$$V_n = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta) \text{ — нормальная составляющая скорости}$$

и далее

$$\left. \begin{aligned} X &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i); \\ Y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i); \\ Z &= r \sin u \sin i; \\ \dot{X} &= V_r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) - \\ &\quad - V_n (\sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega \cos i); \\ \dot{Y} &= V_r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) - \\ &\quad - V_n (\sin u \sin \Omega - \cos u \cos \Omega \cos i); \\ \dot{Z} &= V_r \sin u \sin i + V_n \cos u \sin i. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Положение тела на орбите в полярной системе координат характеризуется расстоянием до тела r и двумя углами:

α и δ — прямое восхождение и склонение в экваториальной системе координат или

λ и φ — долгота и широта в эклиптической системе координат;

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\lambda) &= \arctg \frac{Y}{X} \\ |k| \cos \alpha(\lambda) &= X \end{aligned} \right\} 0 \leq \alpha(\lambda) \leq 2\pi;$$

$$\delta(\varphi) = \arcsin \frac{Z}{r}; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \delta(\varphi) \leq \frac{\pi}{2}.$$

3.8. СФЕРА ДЕЙСТВИЯ ПЛАНЕТЫ

Около каждой планеты (или ее спутника) имеется область, называемая *сферой действия*, внутри которой ее силы притяжения являются преобладающими по сравнению с силами притяжения (возмущающими силами) других, более тяжелых притягивающих тел, поэтому при расчетах орбит КА во многих случаях можно применять теорию невозмущенного движения.

Сфера действия ограничена поверхностью, в каждой точке которой отношение ускорения от возмущающего тела к ускорению от данной планеты становится равным отношению ускорения от планеты к ускорению от возмущающего тела, когда последнее принимается за центральное.

Понятие сферы действия Лапласом при изучении движения комет.

Уравнение поверхности, ограничивающей сферу действия радиуса R ,

$$R = r \left(\frac{m^2}{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}} \right)^{1/5}, \quad (3.30)$$

где r — расстояние между планетой и возмущающим телом;

φ — угол между направлениями из центра планеты на КА и на возмущающее тело;

m — масса планеты в единицах массы притягивающего тела.

Поверхность сферы действия мало отличается от геометрической сферы, при этом малая ось направлена из центра планеты к возмущающему телу. За средний радиус сферы действия принимают величину

$$R = r m^{2/5}. \quad (3.31)$$

3.9. ГОДОГРАФ СКОРОСТИ В КЕПЛЕРОВОМ ДВИЖЕНИИ

Для решения ряда задач, связанных с маневром КА, используется понятие *годографа вектора скорости* — геометрическое место концов векторов скорости, проведенных из полюса годографа O .

Годографом скорости в кеплеровом движении является окружность радиуса

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}} \text{ с центром на оси } \dot{y}, \text{ отстоящим от оси } \dot{x} \text{ на расстояние } e \sqrt{\frac{\mu}{p}}.$$

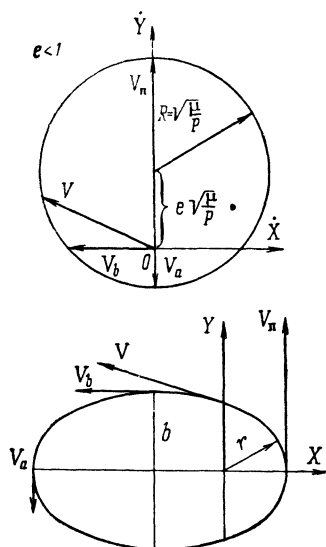
На рис. 3.1, 3.2, 3.3 изображены годографы скорости для эллиптического, параболического и гиперболического движения.

1. При движении точки по эллиптической орбите ее вектор скорости в течение одного оборота изменяет положение от 0 до 2π . Причем если заданы два вектора $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$, то переход между ними можно совершить, двигаясь по часовой и против часовой стрелки.

2. При движении точки по гиперболической орбите из перигея до $r = \infty$ ее скорость поворачивается на угол $\gamma = \arcsin \frac{1}{e}$. В гиперболическом движении от скорости $\bar{V}_1$ к скорости $\bar{V}_2$ можно перейти единственным образом, так как годограф является незамкнутым (оставшаяся часть окружности годографа есть годограф для отталкивающего центра).

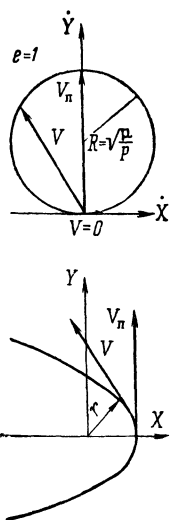
3. Движение точки по параболической орбите является предельным для гиперболических и эллиптических годографов при $e \rightarrow 1$. При этом скорость может занимать любое положение от 0 до 2π (как в эллиптическом движении), но от $\bar{V}_1$ к $\bar{V}_2$ можно перейти единственным образом (как в гиперболическом случае).

Пользуясь свойствами годографа в кеплеровом движении при задании $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$ в двух точках и времени движения КА между ними, можно определить вид движения и большую полуось орбиты.



Эллипс

Рис. 3.1. Годограф векторов скорости для эллиптического движения



Парабола

Рис. 3.2. Годограф векторов скорости для параболического движения

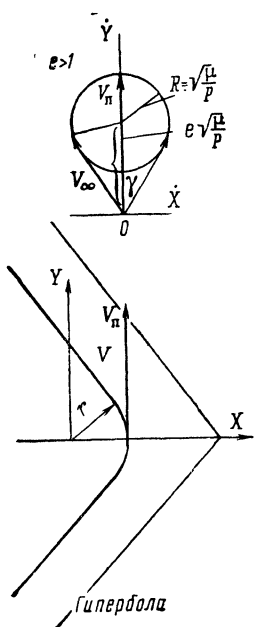


Рис. 3.3. Годограф векторов скорости для гиперболического движения

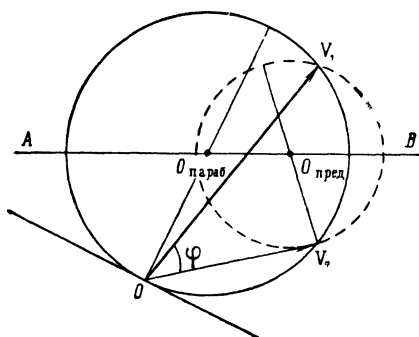


Рис. 3.4. Возможные годографы скоростей при заданных значениях вектора скорости $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$

Если заданы $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$, $\bar{V}_1 \neq \bar{V}_2$, то движение может быть эллиптическим, параболическим и гиперболическим в зависимости от времени движения между точкой 1 со скоростью $\bar{V}_1$ и точкой 2 со скоростью $\bar{V}_2$ (рис. 3.4).

На рис. 3.4 обозначено: $O_{\text{параб}}$ — центр окружности, проходящей через начало и концы векторов скоростей $\bar{V}_1$ и $\bar{V}_2$; $O_{\text{пред}}$ — предельный центр окружности, касающейся меньшей из двух скоростей, например $\bar{V}_2$.

Предельное движение, для которого имеются такие векторы скорости, является гиперболическим со скоростью на бесконечно большом удалении $\bar{V}_\infty = \bar{V}_2$ с центром годографа в точке $O_{\text{пред}}$.

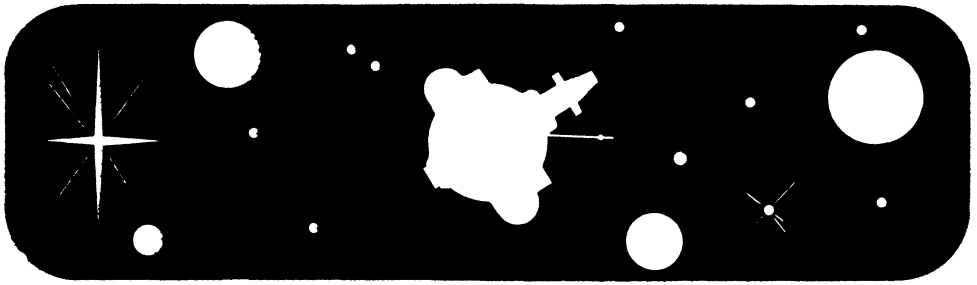
При параболическом движении начало векторов должно лежать на окружности годографа с центром в $O_{\text{параб}}$. На прямой AB , между $O_{\text{параб}}$ и $O_{\text{пред}}$, лежат центры окружностей годографа скорости при гиперболическом движении. Слева от $O_{\text{параб}}$ лежат центры годографов скорости в эллиптическом движении.

Отсюда для эллиптического движения заданным $\bar{V}_1$, $\bar{V}_2$ можно поставить в соответствие любое значение большой полуоси a в интервале $[0, \infty]$, для гиперболического движения любое значение a в интервале $\left[-\frac{\mu}{V_\infty^2}, \infty \right]$.

Если известно также время и направление движения между точками, то a определяется однозначно.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. III

1. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., Физматгиз, 1963.
2. Stumpff K., «Hummelsmechanik», band 1, Berlin, 1959.



ГЛАВА IV

ВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $\bar{a}$ — большая полуось общего земного эллипсоида.
 $\bar{a}, \bar{\kappa}, \bar{h}_0$ — постоянные коэффициенты в упрощенной модели атмосферы.
 b — баллистический коэффициент.
 c_x — коэффициент аэродинамического сопротивления.
 E — эксцентрическая аномалия.
 e — эксцентриситет.
 e — основание натуральных логарифмов.
 F — вектор силы тяготения.
 F_x, F_y, F_z — компоненты возмущающих сил по соответствующим осям.
 f — гравитационная постоянная.
 h — высота над уровнем земного эллипсоида.
 h_a, h_n — высота КА в апоцентре и в перигеи орбиты.
 i — наклонение плоскости орбиты к экватору.
 M — средняя аномалия.
 m_0 — масса центрального тела.
 $m_{ка}$ — масса КА.
 n — число витков КА вокруг планеты.
 P — период обращения спутника по почти круговой орбите.
 P_x, P_y, P_z — проекции ускорения от реактивных сил, которые могут быть приложены к КА.
 p_k — обобщенные импульсы.
 q_k — обобщенные координаты.
 R — радиус земного эллипсоида в данной точке; потенциал возмущающих сил от планет и Солнца.
 R_x — сила лобового сопротивления, которое испытывает КА при движении в атмосфере планеты.
 $\underline{r}$ — расстояние от центрального тела до КА.
 $\vec{r}$ — радиус-вектор произвольной точки.
 r_n, r_a — расстояние в перигее и в апогее орбиты от центра Земли.
 S, T, W — проекции ускорения от возмущающей силы на орбитальные оси.
 S_m — площадь миделевого сечения, определяемая как проекция КА на плоскость, перпендикулярную скорости полета.
 T — кинетическая энергия; период обращения КА вокруг центрального тела.
 t — время.
 $U(X, Y, Z)$ — гравитационный потенциал Земли; потенциал или силовая функция центрального поля сил тяготения.
 U' — часть гравитационного потенциала Земли, учитывающая отличие «эллипсоидального» поля тяготения от центрального.
 $\bar{u}$ — приращение возмущенного аргумента широты относительно его невозмущенного значения.

- $\underline{v}$ — скорость полета относительно атмосферы Земли.
 $\underline{\dot{v}}$ — скорость движения спутника по круговой орбите.
 v_r, v_u — проекции скорости на оси цилиндрической системы координат.
 X, Y, Z — координаты КА в абсолютной системе координат.
 x, y, z — координаты КА в гринвичской системе.
 α — сжатие общего земного эллипсоида.
 α, δ — прямое восхождение и склонение небесного тела (в частности, КА).
 γ_e — ускорение силы тяжести на экваторе.
 γ_m — среднее ускорение силы тяжести для земного эллипсоида.
 Δq_r — проекция возмущающего ускорения от аномалий сил тяжести на направление, обратное направлению радиуса-вектора точки.
 $\Delta q_r^\wedge$ — проекция возмущающего ускорения от аномалий в направлении на восток.
 Δq_r^φ — проекция возмущающего ускорения от аномалий на направление меридиана к северу.
 $\Delta r, \Delta v_r, r\Delta u, \Delta v_u, \Delta z, \Delta v_z$ — малые возмущения круговой орбиты в цилиндрической системе координат, по радиусу-вектору, вдоль орбиты и по нормали к ее плоскости, соответственно.
 ΔU — потенциал аномалий силы тяготения планеты.
 δ — угол между плоскостью, содержащей КА, центр притяжения и возмущающее тело, и плоскостью орбиты; азимут орбиты; склонение небесного тела.
 ϑ — истинная аномалия.
 $\lambda_1 = e \sin \omega, \lambda_2 = e \cos \omega$ — элементы орбиты Лапласа.
 μ — коэффициент притяжения Земли
 $\mu_0 = a_{00}$ — коэффициент притяжения центрального тела.
 ρ — плотность атмосферы в данной точке.
 ρ_n — плотность атмосферы в перигее орбиты.
 φ — геоцентрическая широта; центральный угол в плоскости невозмущенной круговой орбиты, угол с вершиной в центре притяжения между КА и возмущающим телом.
 ψ — угол поворота плоскости почти круговой орбиты под действием возмущающего ускорения W .
 ω — аргумент перигея.
 ω_3 — угловая скорость вращения Земли.

Возмущенным движением космического аппарата называется его движение под влиянием, помимо центральной силы, также сил, малых по сравнению с силой притяжения основного (центрального) тела.

4.1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Дифференциальные уравнения возмущенного движения КА в абсолютной прямоугольной системе координат имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X} &= -\mu_0 \frac{X - X_0}{r^3} + \frac{F_x}{m_{к.а}}; \\ \ddot{Y} &= -\mu_0 \frac{Y - Y_0}{r^3} + \frac{F_y}{m_{к.а}}; \\ \ddot{Z} &= -\mu_0 \frac{Z - Z_0}{r^3} + \frac{F_z}{m_{к.а}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

где X_0, Y_0 и Z_0 — координаты центра тяжести основного притягивающего тела.

Первый член в правой части каждого уравнения является проекцией на координатную ось ускорения от центральной силы притяжения основного тела, второй член — от возмущающих сил.

Конкретные выражения для входящих в уравнения компонентов возмущающих сил будут зависеть от того, какие силы учитываются.

Основные возмущающие силы для искусственных спутников планет и других космических аппаратов вызываются следующими причинами:

— нецентральностью поля тяготения, обусловленной сплюснутостью планеты и неравномерным распределением масс внутри нее (аномалии силы тяжести);
 — сопротивлением атмосферы (если она у планеты имеется);
 — влиянием соседних планет и Солнца;
 — давлением солнечного света (для КА малой плотности).
Возмущающая часть гравитационного потенциала Земли (см. гл. I, разд. 1.3.5)

$$U - \frac{f m_0}{r} = U' + \Delta U',$$

где потенциал U' учитывает отличие «эллипсоидального» поля тяготения от центрального;

$\Delta U'$ — потенциал аномалий силы тяготения Земли.

Часто используемое разложение потенциала U' в ряд по полиномам Лежандра имеет вид (при включении всех зональных гармоник)

$$U' = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_{n0}}{r^{n+1}} P_{n0}(\sin \varphi),$$

где a_{n0} — постоянные коэффициенты;
 $P_{n0}(\sin \varphi)$ — полиномы Лежандра;
 φ — геоцентрическая широта.

Для учета в уравнениях движения в практических расчетах достаточно одного, максимум двух-трех членов разложения.

Производные от U' по координатам X, Y, Z дают ускорения, действующие по этим осям. За начало координат принимается центр масс Земли.

Вследствие вращения Земли вокруг своей оси в данной точке пространства возмущающая гравитационная сила будет переменной во времени, поэтому удобно использовать систему прямоугольных осей, жестко связанных с Землей (гринвичская система координат). При этом к потенциалу U' добавляется потенциал центробежных сил V .

Если ограничиться первым членом в выражении для U' и учесть потенциал центробежных сил, то в гринвичской системе координат система уравнений движения КА принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -a_{00} \frac{x}{r^3} - 3a_{20} \frac{x}{r^5} P_{20} + \omega_3^2 x - a_{20} \frac{xz}{r^5 r_1} P_{21} + \\ &\quad + 2\omega_3 \dot{y} + \frac{F'_x}{m_{\text{к.а}}} + p_x; \\ \ddot{y} &= -a_{00} \frac{y}{r^3} - 3a_{20} \frac{y}{r^5} P_{20} + \omega_3^2 y - a_{20} \frac{zy}{r^5 r_1} P_{21} - \\ &\quad - 2\omega_3 \dot{x} + \frac{F'_y}{m_{\text{к.а}}} + p_y; \\ \ddot{z} &= -a_{00} \frac{z}{r^3} - 3a_{20} \frac{z}{r^5} P_{20} + a_{20} \frac{r_1}{r^5} P_{21} + \frac{F'_z}{m_{\text{к.а}}} + p_z. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Здесь $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$;

$P_{21}(\sin \varphi)$ — присоединенная сферическая функция;

F'_x, F'_y, F'_z — проекции возмущающих сил (притяжения небесных тел, сопротивления воздуха, давления солнечного света и др.);

p_x, p_y, p_z — проекции реактивных сил, отнесенных к единице массы КА, которые могут быть к нему приложены;

$\omega_3^2 x, \omega_3^2 y$ — центробежные ускорения;

$2\omega_3 \dot{y}, -2\omega_3 \dot{x}$ — кориолисовы ускорения по осям x и y .

Конкретные выражения для членов, учитывающих влияние других планет и Солнца, а также сопротивление воздуха, рассматриваются ниже в соответствующих разделах.

Конкретные выражения проекций p_x, p_y, p_z зависят от характера приложенных реактивных сил.

Давление солнечного света и отраженного света от поверхности планеты, которые имеет смысл учитывать для КА малой плотности (надувных) или имеющих развитые поверхности, вводится как некоторый добавок к постоянной тяготения Солнца (или планеты).

Уравнения движения на практике редко включают в себя все возмущающие силы одновременно. Для близких к Земле спутников, как правило, учитывается нецентральность поля сил и сопротивление воздуха. Для КА, совершающих межпланетный полет,— влияние притяжения планет и их спутников.

В табл. 4.2 и 4.3 (см. разд. 4.4) показано влияние *притяжений Луны и Солнца* на движение *спутников Земли* в зависимости от высоты полета. Можно видеть, что эти влияния при точных расчетах имеет смысл учитывать уже начиная с высот 1—2 тыс. км, если рассматриваются длительные промежутки времени (более месяца).

Для *межпланетных траекторий КА* в уравнения движения могут включаться силы притяжения от ближайших космических тел. Эти силы особенно существенны при приближении к сфере действия планеты.

В уравнениях движения (4.2) члены $F'_x/m_{к.а}$, $F'_y/m_{к.а}$, $F'_z/m_{к.а}$ принимают вид

$$\begin{aligned}\frac{F'_x}{m_{к.а}} &= \sum_{i=1}^n x_{i0} - \sum_{i=1}^n x_{i3}; \\ \frac{F'_y}{m_{к.а}} &= \sum_{i=1}^n y_{i0} - \sum_{i=1}^n y_{i3}; \\ \frac{F'_z}{m_{к.а}} &= \sum_{i=1}^n z_{i0} - \sum_{i=1}^n z_{i3}, \quad (i = 1, 2, 4, 6 \dots n)\end{aligned}$$

где x_{i0} , y_{i0} , z_{i0} — проекции возмущающего ускорения от i -го небесного тела;
 x_{i3} , y_{i3} , z_{i3} — проекции ускорения Земли от i -го тела в соответствии с обозначениями, принятыми в гл. X и XII.

Уравнения (4.2) интегрируются численно. При этом неизбежно накопление ошибок уже на сравнительно коротком интервале времени. Чтобы уменьшить ошибки интегрирования и получить приближенные формулы, применяют систему уравнений в оскулирующих элементах, т. е. в орбитальных элементах (см. гл. III), принимаемых за переменные:

$$\left. \begin{aligned}\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i} W; \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r}{V \mu p} W \cos u; \\ \frac{dp}{dt} &= 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} r T; \\ \frac{d\lambda_1}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-S \cos u + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{p} (\lambda_1 T - \lambda_2 W \operatorname{ctg} i \sin u) \right]; \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[S \sin u + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{p} (\lambda_2 T + \lambda_1 W \operatorname{ctg} i \sin u) \right]; \\ \frac{d\bar{u}}{dt} &= \frac{V \mu p}{r^2} \left(1 - \frac{r^3}{\mu p} \operatorname{ctg} i \sin u \cdot W - \frac{r^2}{(r)^2} \sqrt{\frac{(p)}{p}} \right), \\ r &= \frac{p}{1 + \lambda_1 \sin u + \lambda_2 \cos u}.\end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

Здесь в левых частях уравнений стоят производные от шести выбранных элементов: Ω , i , p , λ_1 , λ_2 и $\bar{u}=u-(u)$, где (u) — значение аргумента широты для невозмущенной орбиты; в правых частях — проекции S , T , W возмущающей силы, отнесенной к массе

КА, на орбитальные оси r, b, n (см. гл. II). Для орбит, не близких к круговым, λ_1, λ_2 часто заменяют на e, ω :

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[S \sin \vartheta + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \vartheta + T \frac{er}{p} \right];$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-S \frac{\cos \vartheta}{e} + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \vartheta}{e} - W \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \right].$$

Система уравнений может быть проинтегрирована *численно* для любых начальных значений оскулирующих элементов, в том числе для гиперболических и круговых орбит. Значения элементов орбиты для любого момента времени рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + \delta\Omega; & p &= p_0 + \delta p; & \lambda_2 &= \lambda_{20} + \delta\lambda_2; \\ i &= i_0 + \delta i; & \lambda_1 &= \lambda_{10} + \delta\lambda_1; & \bar{u} &= \bar{u}_0 + \delta\bar{u}, \end{aligned}$$

где $\Omega_0, i_0, p_0, \lambda_{10}, \lambda_{20}, \bar{u}_0$ — значения оскулирующих элементов в начальный момент времени, $\delta\Omega, \delta i, \delta p, \delta\lambda_1, \delta\lambda_2, \delta\bar{u}$ — изменения этих элементов, вычисленные путем интегрирования системы (4.3).

Система уравнений (4.3) может быть решена также методом *последовательных приближений*, для чего она представляется в интегральной форме:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \Omega_0 + \int_{t_0}^t \frac{r}{\sqrt{\mu p}} \frac{\sin u}{\sin i} W dt; \\ i &= i_0 + \int_{t_0}^t \frac{r}{\sqrt{\mu p}} W \cos u dt; \\ p &= p_0 + \int_{t_0}^t 2 \sqrt{\frac{p}{\mu}} r T dt; \\ \lambda_1 &= \lambda_{10} + \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-S \cos u + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{p} (\lambda_1 T - \lambda_2 W \operatorname{ctg} i \sin u) \right] dt; \\ \lambda_2 &= \lambda_{20} + \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[S \sin u + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos u + \right. \\ &\quad \left. + \frac{r}{p} (\lambda_2 T + \lambda_1 W \operatorname{ctg} i \sin u) \right] dt; \\ \bar{u} &= \bar{u}_0 + \int_{t_0}^t \frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} \left[1 - \frac{r^3}{\mu p} \operatorname{ctg} i \sin u \cdot W - \frac{r^2}{(r)^2} \sqrt{\frac{(p)}{p}} \right] dt. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Полагая на некотором интервале времени $t-t_0$ величины $p, i, \lambda_1, \lambda_2$ постоянными и равными их невозмущенным значениям, получим после вычисления квадратур значения оскулирующих элементов на каждом шаге расчета квадратур. Это позволяет второе приближение ($n=2$) вычислять с использованием полученных в первом приближении ($n=1$) величин $p_1, i_1, \Omega_1, \lambda_{11}, \lambda_{21}, \bar{u}_1$. Процесс итераций прекращается, когда разности $\Delta p_n = p_n - p_{n-1}, \Delta i_n = i_n - i_{n-1}, \dots$ достигают значений, меньше заданных.

В большинстве случаев для расчета орбит достаточно ограничиться первым приближением. Для получения *первого приближения* в виде конечных формул целесообразно перейти к независимой переменной u или ϑ . При этом уравнения движения в оскулирующих элементах принимают вид:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{d\Omega}{du} &= \frac{r^3 \gamma}{\mu p} \frac{\sin u}{\sin i} W; \\
 \frac{di}{du} &= \frac{r^3 \gamma}{\mu p} W \cos u; \\
 \frac{dp}{du} &= \frac{2\gamma}{\mu} r^3 T; \\
 \frac{d\lambda_1}{du} &= \frac{r^2 \gamma}{\mu} \left[-S \cos u + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin u + \frac{r}{p} (\lambda_1 T - \lambda_2 W \operatorname{ctg} i \sin u) \right]; \\
 \frac{d\lambda_2}{du} &= \frac{r^2 \gamma}{\mu} \left[S \sin u + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos u + \frac{r}{p} (\lambda_2 T + \lambda_1 W \operatorname{ctg} i \sin u) \right]; \\
 \frac{d\bar{u}}{du} &= 1 - \frac{r^2 \gamma}{\sqrt{p}} \frac{\sqrt{(p)}}{(r)^2}; \\
 \gamma &= \frac{1}{1 - \frac{r^3}{\mu p} W \operatorname{ctg} i \sin u}.
 \end{aligned} \right\} (4.5)$$

При непосредственном вычислении эксцентриситета e и аргумента перигея ω вместо уравнений для λ_1 и λ_2 применяются следующие:

$$\begin{aligned}
 \frac{de}{du} &= \frac{r^2 \gamma}{\mu} \left[S \sin \vartheta + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta + T \frac{e}{p} r \right]; \\
 \frac{d\omega}{du} &= \frac{r^2 \gamma}{\mu} \left[-S \frac{\cos \vartheta}{e} + T \left(1 + \frac{r}{p} \right) \frac{\sin \vartheta}{e} - W \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \right].
 \end{aligned}$$

В случае использования ϑ вместо u имеем

$$\gamma = \frac{1}{1 + \frac{r^2}{\mu e} S \cos \vartheta - T \frac{r^2}{\mu e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta}.$$

Полагая в правых частях элементы постоянными и равными их невозмущенным значениям, считая $\gamma=1$ в первых пяти уравнениях, а также зная выражения для проекций возмущающих сил S , T , W , можно путем интегрирования каждого уравнения в отдельности получить в первом приближении формулы для расчета изменений оскулирующих элементов. Так, для учета влияния нецентральности поля сил земного тяготения, обусловленного эллипсоидальностью Земли, имеем

$$S = \frac{\varepsilon}{r^4} (3 \sin^2 i \sin^2 u - 1);$$

$$T = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin^2 i \sin 2u;$$

$$W = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2i \sin u,$$

$$\text{где } \varepsilon = \mu \bar{a}^2 \left(\bar{a} - \frac{\omega_3^2 \bar{a}}{2\gamma_e} \right).$$

Выражения для S , T , W получены после дифференцирования потенциала возмущающих сил, в котором удержан лишь один член

$$V' = \frac{a_{20}}{r^3} p_{20} (\sin \varphi) = -\frac{\varepsilon}{r^3} \left(\sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right),$$

где φ — геоцентрическая широта и $\sin \varphi = \sin i \sin u$.

После подстановки значений S , T , W в правые части уравнений (4.5) и интегрирования в пределах от u_0 до u при постоянных невозмущенных значениях i , p , λ_1 , λ_2 , равных $i=(i)=i_0-\delta i_0, \dots$

получаем

$$\left. \begin{aligned}
 \delta\Omega &= -\frac{\varepsilon \cos i}{\mu p^2} \left[u - \frac{1}{2} \sin 2u + \lambda_1 \left(-\frac{3}{2} \cos u + \frac{1}{6} \cos 3u \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_2 \left(\frac{1}{2} \sin u - \frac{1}{6} \sin 3u \right) \right]; \\
 \delta i &= \frac{\varepsilon \sin 2i}{4\mu p^2} \left[\cos 2u + \lambda_1 \left(-\sin u + \frac{1}{3} \sin 3u \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_2 \left(\cos u + \frac{1}{3} \cos 3u \right) \right]; \\
 \delta p &= \frac{\varepsilon k}{\mu p} \left[\cos 2u + \lambda_1 \left(-\sin u + \frac{1}{3} \sin 3u \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_2 \left(\cos u + \frac{1}{3} \cos 3u \right) \right]; \\
 \delta\lambda_1 &= \frac{\varepsilon}{\mu p^2} \left\{ \left[1 - \frac{7}{4} k + \lambda_1^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{9}{8} k \right) + \lambda_2^2 \left(\frac{5}{4} - \frac{9}{8} k \right) \right] \sin u + \right. \\
 &\quad + \left[\frac{7}{12} k + \lambda_1^2 \left(-\frac{1}{12} + \frac{23}{48} k \right) + \lambda_2^2 \left(-\frac{1}{12} + \frac{13}{48} k \right) \right] \sin 3u + \\
 &\quad + \lambda_1 \left[\left(-\frac{1}{2} + 2k \right) \cos 2u - \frac{3}{8} k \cos 4u \right] + \lambda_2 \left[\left(2 - \frac{5}{2} k \right) u + \right. \\
 &\quad + \frac{1}{2} k \sin 2u + \frac{3}{8} k \sin 4u \left. \right] + \frac{1}{16} k (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \sin 5u + \\
 &\quad \left. + \lambda_1 \lambda_2 \left[\left(-2 + \frac{13}{4} k \right) \cos u + \frac{5}{24} k \cos 3u - \frac{1}{8} k \cos 5u \right] \right\}, \\
 \delta\lambda_2 &= \frac{\varepsilon}{\mu p^2} \left\{ \left[1 - \frac{5}{4} k + \lambda_1^2 \left(\frac{9}{4} - \frac{25}{8} k \right) + \lambda_2^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{8} k \right) \right] \cos u + \right. \\
 &\quad + \left[\frac{17}{12} k + \lambda_1^2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{25}{28} k \right) + \lambda_2^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{11}{48} k \right) \right] \cos 3u + \\
 &\quad + \lambda_1 \left[-\left(2 - \frac{5}{2} k \right) u + (1 - 2k) \sin 2u + \frac{3}{8} k \sin 4u \right] + \\
 &\quad + \lambda_2 \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} k \right) \cos 2u + \frac{3}{8} k \cos 4u \right] + \frac{1}{16} k (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) \cos 5u + \\
 &\quad \left. + \lambda_1 \lambda_2 \left[-\left(1 - \frac{1}{4} k \right) \sin u + \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{24} k \right) \sin 3u + \frac{1}{8} k \sin 5u \right] \right\},
 \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

где $k = \sin^2 i$.

Элементы орбиты имеют *вековые* (кроме i и p) и *периодические* изменения с периодами для $\delta\Omega$, δi , δp , равными π (без членов, зависящих от эксцентриситета) и для $\delta\lambda_1$, $\delta\lambda_2$, равными 2π и $\frac{2}{3}\pi$ (без членов, зависящих от эксцентриситета).

Поправка к времени полета вычисляется по формуле (для эллиптического движения)

$$\begin{aligned}
 \delta t &= \frac{2\varepsilon}{\mu \sqrt{\mu p}} \left\{ (1 - e^2)^{-\frac{5}{2}} \left[-\left(A_1 + \frac{3}{2} A_1 e^2 + \frac{9}{16} k e^2 \cos 2\omega \right) E + \right. \right. \\
 &\quad \left. + (A_2 + A_3 \cos 2\omega) \sin E + (A_4 + A_5 \cos 2\omega) \sin 2E \right] + \\
 &\quad + (1 - e^2)^{-2} \left[-\left(1 - \frac{5}{4} k \right) u + \frac{1}{4} \sin 2\omega \left(\frac{13}{12} k - 1 - \frac{k}{e^2} + \frac{2}{3e^2} \right) \right] (1 - e^2 \cos E)^2 + \\
 &\quad \left. + \frac{k}{6e^2} \sin 2\omega (1 - e \cos E) + \frac{1 - k}{3e} \sin(u + \omega) \right\}_{u_0}^u, \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

где

$$A_1 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} k;$$

$$A_2 = -ke + \frac{1}{2} e + \frac{7}{6} e^3 - \frac{3}{2} k e^3;$$

$$A_3 = \frac{19}{24} k e^3 - \frac{1}{2} e^3 - \frac{3}{8} k e + \frac{2}{3} e - \frac{1}{3e} + \frac{k}{3e};$$

$$A_4 = \left(\frac{5}{24} - \frac{3}{16} k - \frac{5}{12} e^2 + \frac{1}{2} k e^2 \right) e^2;$$

$$A_5 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4} k - \frac{1}{3} e^2 + \frac{19}{48} k e^2 + \frac{1}{6} e^4 - \frac{1}{3} k e^4 \right).$$

$$e = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}, \quad \omega = \text{Arctg} \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Время t в возмущенном движении будет

$$t = \bar{t} + \delta t,$$

где $\bar{t}$ — время для невозмущенного движения.

В случае небольших эксцентриситетов поправка ко времени находится по формуле

$$\delta t = \frac{\varepsilon}{\mu \sqrt{\mu p}} \left\{ (1 - 4 \cos^2 i) u + \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{12} k \right) \sin 2u + e \left[\frac{1}{8} k \sin (u + \omega) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{5}{12} k - \frac{1}{2} \right) \sin (3u - \omega) + \left(2 - \frac{7}{2} k + \frac{3}{4} \cos 2\omega \right) \sin \vartheta - \right. \right. \\ \left. \left. - (1 - 5 \cos^2 i) u \cos \vartheta - \frac{3}{8} k \sin (u - 3\omega) \right] \right\}_{u_0}^u. \quad (4.8)$$

Из формулы (4.7) при $u_0 = 0$ и $u = 2\pi$ получим выражение для драконического периода (с учетом периода невозмущенного движения)

$$T_\pi = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2} + \frac{2\pi\varepsilon}{\mu \sqrt{\mu a} (1 - e^2)^3} \left[\left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \left(\frac{3}{2} k - 1 \right) - \right. \\ \left. - \frac{9}{8} e^2 k \cos 2\omega + (1 - e^2)^{1/2} \left(\frac{5}{2} k - 2 \right) (1 - e \cos E_0)^2 \right],$$

где E_0 соответствует u_0 ; a — полуось невозмущенной орбиты.

За невозмущенную орбиту принята орбита, для которой эллиптические элементы имеют следующие значения, обеспечивающие максимальную точность расчета по формулам (4.6) — (4.8):

$$(\Omega) = \Omega_0 - \delta\Omega_0; \quad (\lambda_1) = \lambda_{10} - \delta\lambda_{10}; \quad (p) = p_0 - \delta p_0,$$

$$(i) = i_0 - \delta i_0; \quad (\lambda_2) = \lambda_{20} - \delta\lambda_{20},$$

т. е. начальные оскулирующие параметры уменьшаются на поправки, являющиеся результатом подстановки в формулы (4.6) значения u_0 .

В общем случае возмущенного движения для расчета времени полета используется интеграл

$$t - t_0 = \int_{u_0}^u \frac{r^2 du}{\sqrt{\mu p} \left(1 - \frac{r^3}{\mu p} \text{ctg} i \sin u \cdot W \right)}.$$

Приведенные формулы позволяют рассчитывать влияние сплюснутости земного эллипсоида при указанном выборе элементов невозмущенной орбиты с ошибкой на витке не более 500 м, т. е. 0,5 с (по положению вдоль орбиты), и 50—100 м в боковом направлении, что соответствует ошибкам в Ω , i примерно 2—3'' и 150—200 м по высоте. Формулы перехода от оскулирующих элементов к прямоугольной системе координат приведены в гл. II.

Формулы первого приближения (4.6) показывают, что элементы Ω , λ_1 , λ_2 испытывают вековые возмущения. За один оборот спутника вокруг Земли они составляют:

$$\delta\Omega_B = - \frac{2\pi\varepsilon}{\mu p^2} \cos i \text{ (прецессия узлов),}$$

$$\delta\lambda_{1B} = \pi\lambda_2 (4 - 5 \sin^2 i) \frac{\varepsilon}{\mu p^2};$$

$$\delta\lambda_{2B} = - \pi\lambda_1 (4 - 5 \sin^2 i) \frac{\varepsilon}{\mu p^2}.$$

Для круговой орбиты последние два равенства обращаются в нуль. Для эллиптических и гиперболических орбит соответствующее вековое смещение перигея (линии апсид) равно:

$$\delta\omega_B = \frac{\pi\varepsilon}{\mu p^2} (4 - 5 \sin^2 i).$$

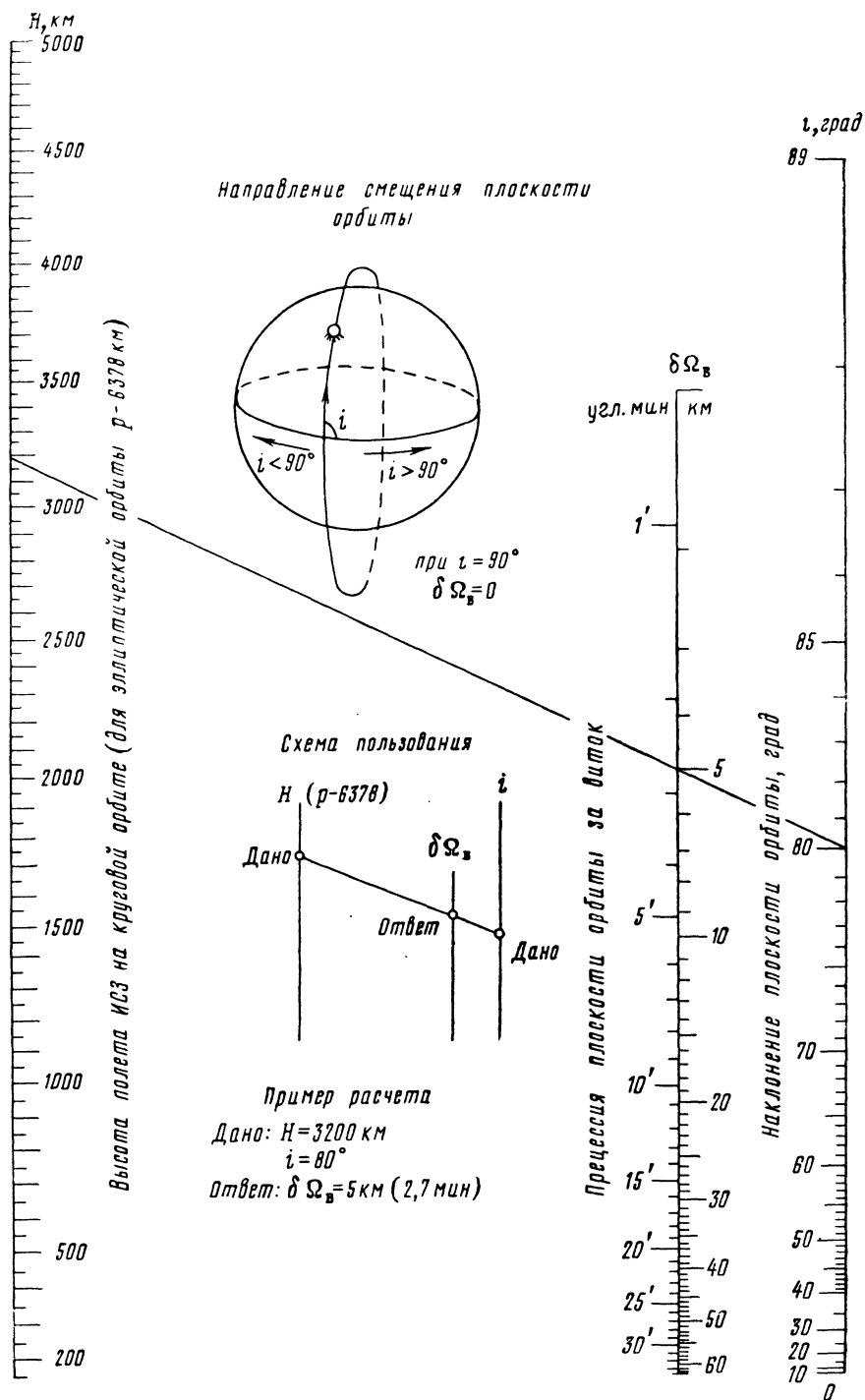


Рис. 4.1. Смещение узла орбиты (прецессия) за один виток

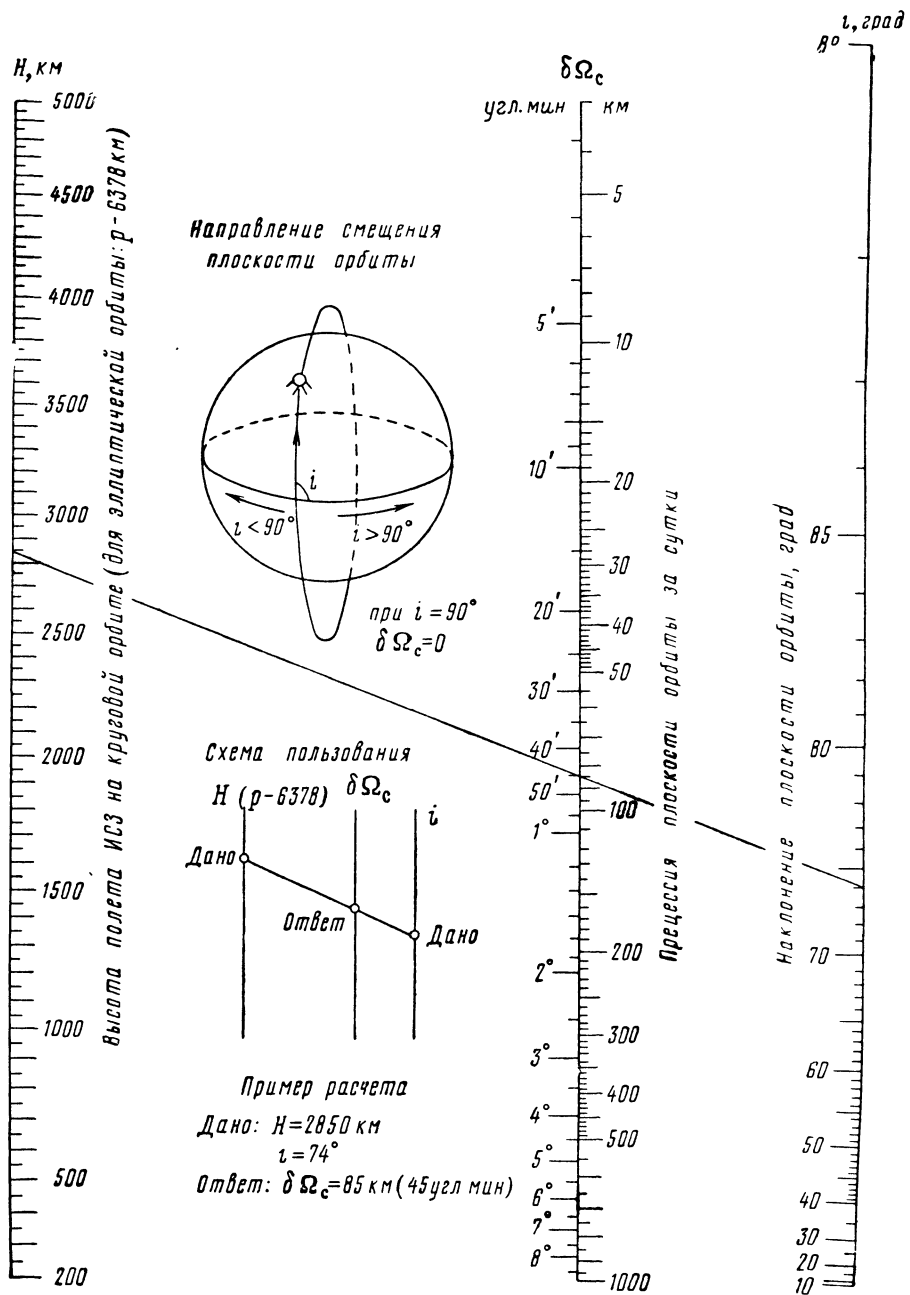


Рис. 4.2. Смещение узла орбиты (прецессия) за сутки

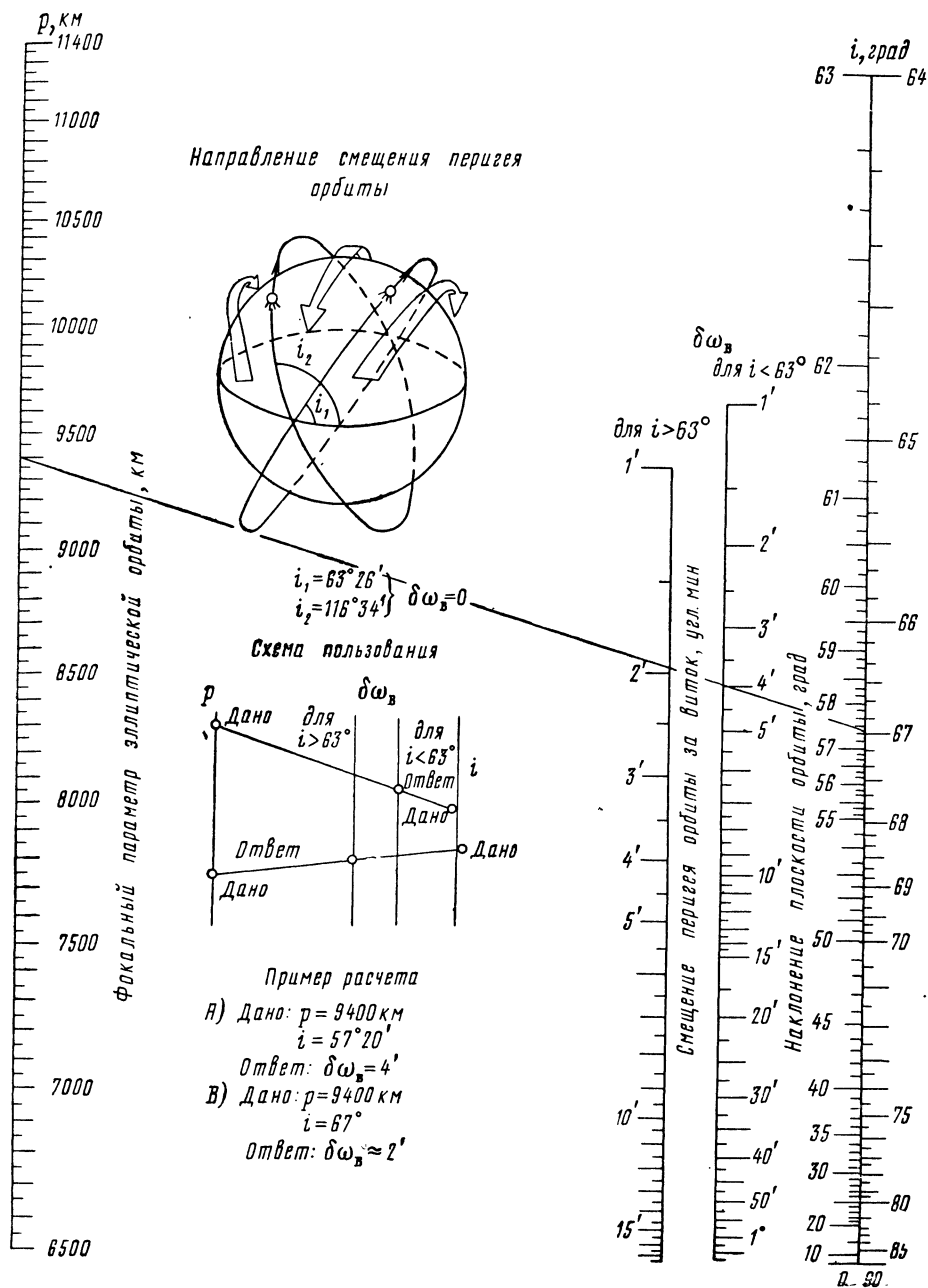


Рис. 4.3. Смещение перигея орбиты за один виток

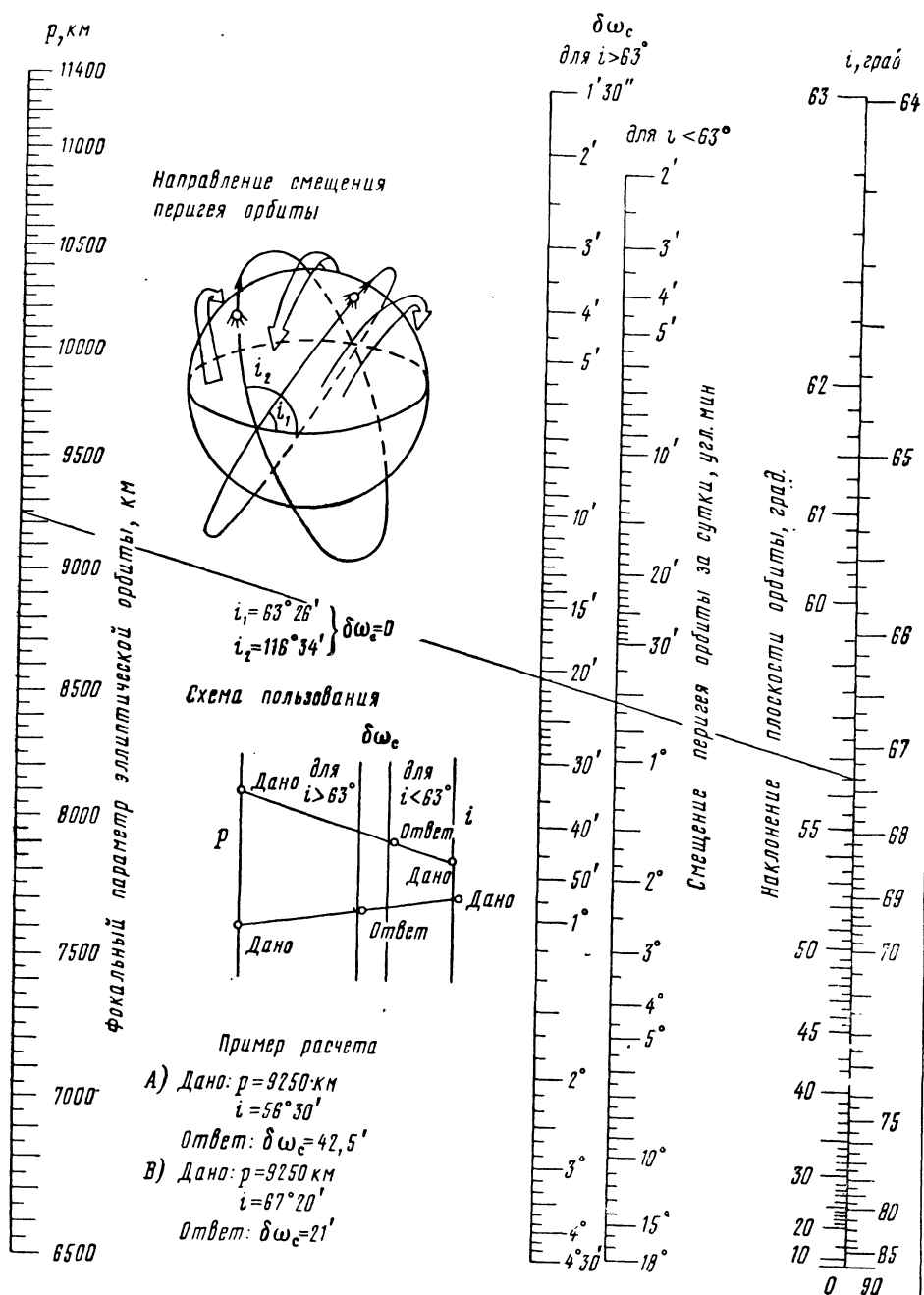


Рис. 4.4. Смещение перигея орбиты за сутки

Эксцентриситет и наклонение в первом приближении вековых возмущений не имеют. На рис. 4.1—4.4 приведены номограммы для расчета изменений оскулирующих элементов ИСЗ Ω и ω за виток и за сутки.

Для получения в произвольной системе координат уравнений движения в поле сил, имеющих потенциал, используются уравнения Лагранжа и Гамильтона.

Вводятся так называемые обобщенные координаты q_k ($k=1, 2, 3$). При этом правые части формул преобразования

$$X = X(q_k, t); \quad Y = Y(q_k, t); \quad Z = Z(q_k, t)$$

являются однозначными и непрерывными функциями указанных переменных.

Уравнения Лагранжа (2-го рода) в общем случае голономной системы имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k,$$

где

$$T = \frac{1}{2} m_{k.a} (\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2) - \text{кинетическая энергия КА};$$

$$Q_k = m_{k.a} \left(\ddot{X} \frac{\partial X}{\partial q_k} + \ddot{Y} \frac{\partial Y}{\partial q_k} + \ddot{Z} \frac{\partial Z}{\partial q_k} \right) - \text{обобщенные силы, выраженные через } t, q_k, \dot{q}_k.$$

Если действующие силы обладают потенциалом U , то уравнение Лагранжа записывается в более простом виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0,$$

где L — функция Лагранжа, или кинетический потенциал, $L = T - V$;

V — потенциальная энергия, связанная с потенциалом (силовой функцией) U соотношением $V = -U$.

Величины $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ называют обобщенными импульсами. Учитывая, что $\partial V / \partial \dot{q}_k = 0$,

уравнения Лагранжа можно представить в другом виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = 0.$$

Значение уравнений Лагранжа состоит в том, что они позволяют легко перейти от абсолютных прямоугольных координат к каким угодно другим переменным. Для такого перехода достаточно выразить через новые переменные живую силу системы T и потенциальную энергию V .

Пример. Пусть требуется составить уравнения движения спутника Земли в сферических экваториальных координатах rad . Выразим через заданные переменные кинетическую энергию спутника с массой $m_{k.a}$:

$$X = r \cos \delta \cdot \cos \alpha;$$

$$Y = r \cos \delta \cdot \sin \alpha;$$

$$Z = r \sin \delta;$$

$$\dot{X} = \dot{r} \cos \delta \cos \alpha - r \sin \delta \cdot \cos \alpha \cdot \dot{\delta} - r \cos \delta \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\alpha};$$

$$\dot{Y} = \dot{r} \cos \delta \sin \alpha - r \sin \delta \cdot \sin \alpha \cdot \dot{\delta} + r \cos \delta \cdot \cos \alpha \cdot \dot{\alpha};$$

$$\dot{Z} = \dot{r} \sin \delta + r \cdot \cos \delta \cdot \dot{\delta};$$

$$T = \frac{m_{k.a}}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\delta}^2 + r^2 \cos^2 \delta \cdot \dot{\alpha}^2).$$

Вводим обобщенные координаты и скорости:

$$q_1 = r; \quad q_2 = \delta, \quad q_3 = \alpha, \quad \dot{q}_1 = \dot{r}; \quad \dot{q}_2 = \dot{\delta}, \quad \dot{q}_3 = \dot{\alpha}.$$

Для первой координаты

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_{k.a} r \dot{\delta}^2 + m_{k.a} r \cos^2 \delta \cdot \dot{\alpha}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_{k.a} \dot{r}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = m_{k.a} \ddot{r}.$$

Первое уравнение

$$\ddot{r} - r \dot{\delta}^2 - r \cos^2 \delta \cdot \dot{\alpha}^2 + \frac{\partial V}{m_{k.a} \partial r} = 0.$$

Для второй координаты

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = -m_{\kappa.a} r^2 \cos \delta \sin \delta \cdot \dot{\alpha};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_{\kappa.a} r^2 \dot{\delta}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = 2m_{\kappa.a} r \dot{\delta} \dot{r} + m_{\kappa.a} r^2 \ddot{\delta}.$$

Второе уравнение

$$2r\dot{r}\dot{\delta} + r^2\ddot{\delta} + r^2 \cos \delta \cdot \sin \delta \cdot \dot{\alpha}^2 = 0.$$

Для третьей координаты

$$\frac{\partial T}{\partial q_3} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = m_{\kappa.a} r^2 \cos^2 \delta \cdot \dot{\alpha},$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} \right) = 2m_{\kappa.a} r \dot{r} \cos^2 \delta \cdot \dot{\alpha} -$$

$$- 2m_{\kappa.a} r^2 \cos \delta \sin \delta \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\delta} + m_{\kappa.a} r^2 \cos^2 \delta \cdot \ddot{\alpha}.$$

Третье уравнение

$$2r\dot{r} \cos^2 \delta \cdot \dot{\alpha} - 2r^2 \cos \delta \sin \delta \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\delta} + r^2 \cos^2 \delta \cdot \ddot{\alpha} = 0.$$

Канонические уравнения Гамильтона имеют вид

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k}; \quad \dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},$$

где p_k — обобщенные импульсы, а H — функция Гамильтона; она представляет собой полную механическую энергию системы. Так как V зависит только от координат,

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}, \quad H = T + V.$$

Таким образом, в уравнениях Лагранжа используются координаты q_k и скорости $\dot{q}_k$, а в уравнениях Гамильтона — координаты q_k и импульсы p_k . При этом уравнения Лагранжа с использованием обобщенных импульсов записываются в следующем виде:

$$\dot{p}_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}.$$

Указанные зависимости позволяют преобразовать S обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка Лагранжа к системе $2S$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка Гамильтона.

Пример. Используя результаты предыдущего примера, составим систему уравнений Гамильтона, описывающих движение спутника в сферических координатах:

$$p_r = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_{\kappa.a} \dot{r}; \quad \dot{r}^2 = \frac{p_r^2}{m_{\kappa.a}^2}; \quad p_\delta = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_{\kappa.a} r^2 \dot{\delta}; \quad r^2 \dot{\delta}^2 = \frac{p_\delta^2}{m_{\kappa.a}^2 r^2};$$

$$p_\alpha = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = m_{\kappa.a} r^2 \cos^2 \delta \cdot \dot{\alpha}; \quad r^2 \cos^2 \delta \cdot \dot{\alpha}^2 = \frac{p_\alpha^2}{m_{\kappa.a}^2 r^2 \cos^2 \delta}.$$

Получаем функцию Гамильтона

$$H = \frac{1}{2m_{\kappa.a}} \left(p_r^2 + \frac{p_\delta^2}{r^2} + \frac{p_\alpha^2}{r^2 \cos^2 \delta} \right) - \frac{\mu}{r} m_{\kappa.a}$$

и уравнения движения спутника:

$$\frac{\partial H}{\partial p_r} = \dot{r} = \frac{p_r}{m_{\kappa.a}};$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\delta} = \dot{\delta} = \frac{p_\delta}{m_{\kappa.a} r^2},$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_\alpha} = \dot{\alpha} = \frac{p_\alpha}{m_{\kappa.a} r^2 \cos^2 \delta};$$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial H}{\partial r} &= \dot{p}_r = \frac{p_\delta^2}{m_{\kappa.a} r^3} + \frac{p_\alpha^2}{m_{\kappa.a} r^3 \cos^2 \delta} - \frac{\mu}{r^2} m_{\kappa.a}; \\
-\frac{\partial H}{\partial \delta} &= \dot{p}_\delta = -\frac{p_\alpha^2 \sin \delta}{m_{\kappa.a} r^2 \cos^3 \delta}; \\
-\frac{\partial H}{\partial \alpha} &= \dot{p}_\alpha = 0.
\end{aligned}$$

4.2. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО КРУГОВЫМ И ПОЧТИ КРУГОВЫМ ОРБИТАМ

4.2.1. Малые начальные возмущения круговой орбиты

Будем исходить из следующих уравнений движения спутника в цилиндрической системе координат (см. гл. II, рис. 2.9):

$$\begin{aligned}
\dot{v}_r &= S - \frac{\mu}{r^2} + \frac{v_u^2}{r}; \\
\dot{v}_u &= T - \frac{v_r v_u}{r}; \\
\dot{v}_z &= W - \frac{\mu z}{r^3},
\end{aligned}$$

где

$$v_r = \dot{r}; \quad v_u = \dot{r}u.$$

Полагая $S=T=W=0$ и обозначая через Δr , Δv_r , Δu , Δv_u , z и v_z разности между значениями соответствующих величин для возмущенной и невозмущенной орбит, зависимости, выражающие влияние малых начальных возмущений Δr_0 , Δv_{r_0} , Δu_0 , Δv_{u_0} , z_0 и v_{z_0} , можно записать в следующей безразмерной форме [12]:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta r}{r_0} &= k_{11} \frac{\Delta r_0}{r_0} + k_{12} \frac{\Delta v_{r_0}}{\bar{v}} + k_{13} \frac{\Delta v_{u_0}}{\bar{v}}; \\
\frac{\Delta v_r}{\bar{v}} &= k_{21} \frac{\Delta r_0}{r_0} + k_{22} \frac{\Delta v_{r_0}}{\bar{v}} + k_{23} \frac{\Delta v_{u_0}}{\bar{v}}; \\
\frac{\Delta v_u}{\bar{v}} &= k_{31} \frac{\Delta r_0}{r_0} + k_{32} \frac{\Delta v_{r_0}}{\bar{v}} + k_{33} \frac{\Delta v_{u_0}}{\bar{v}}; \\
\Delta u &= k_{41} \frac{\Delta r_0}{r_0} + k_{42} \frac{\Delta v_{r_0}}{\bar{v}} + k_{43} \frac{\Delta v_{u_0}}{\bar{v}} + k_{44} \Delta u_0; \\
\frac{z}{r_0} &= k_{55} \frac{z_0}{r_0} + k_{56} \frac{v_{z_0}}{\bar{v}}; \\
\frac{v_z}{\bar{v}} &= k_{65} \frac{z_0}{r_0} + k_{66} \frac{v_{z_0}}{\bar{v}},
\end{aligned}$$

где $\bar{v}$ — скорость движения спутника по круговой орбите;
 k_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) — безразмерные коэффициенты, определяемые из выражений:

$$\begin{aligned}
k_{11} &= 2 - \cos \varphi; & k_{12} &= \sin \varphi; & k_{13} &= 2(1 - \cos \varphi); \\
k_{21} &= \sin \varphi; & k_{22} &= \cos \varphi; & k_{23} &= 2 \sin \varphi; \\
k_{31} &= -(1 - \cos \varphi); & k_{32} &= -\sin \varphi; & k_{33} &= -(1 - 2 \cos \varphi); \\
k_{41} &= -(3\varphi - 2 \sin \varphi); & k_{42} &= -2(1 - \cos \varphi); & k_{43} &= -(3\varphi - 4 \sin \varphi); \\
k_{55} &= \cos \varphi; & k_{56} &= \sin \varphi; & k_{44} &= 1; \\
k_{65} &= -\sin \varphi; & k_{66} &= \cos \varphi;
\end{aligned}$$

$\varphi = \frac{\bar{v}}{r_0} t$ — невозмущенное значение угла u .

В качестве примера рассмотрим случай, когда начальный радиус-вектор спутника r_0 получает приращение $\Delta r_0 > 0$. Тогда для перигея ($\varphi=0$) и апогея ($\varphi=\pi$) коэффициенты k_{i1} соответственно будут равны:

$$k_{11} = 1; \quad k_{21} = k_{31} = k_{41} = 0 \quad (\varphi = 0);$$

$$k_{11} = 3, \quad k_{21} = 0, \quad k_{31} = -2, \quad k_{41} = -3\pi \quad (\varphi = \pi).$$

Следовательно, в перигее изменится только высота полета спутника на величину начального возмущения Δr_0 , а в апогее высота полета увеличится на $3\Delta r_0$, радиальная скорость v_r останется прежней, продольная скорость изменится на величину

$$\Delta v_u = -2\bar{v} \frac{\Delta r_0}{r_0},$$

и, кроме того, спутник сместится вдоль орбиты на угол

$$\Delta u = -3\pi \frac{\Delta r_0}{r_0}.$$

Нетрудно вычислить возмущения для промежуточных значений угла φ . Как видно из выражений для k_{i1} , все рассматриваемые возмущения носят периодический характер, за исключением возмущения Δu , которое имеет вековую составляющую.

4.2.2. Постоянные и периодические возмущения круговых и почти круговых орбит

Предполагается, что начальные возмущения отсутствуют, т. е.

$$\Delta r_0 = \Delta v_{r_0} = \Delta u_0 = \Delta v_{u_0} = z_0 = v_{z_0} = 0.$$

В случае *почти круговой орбиты* вводится средний ее радиус r_{cp} , удовлетворяющий выражению

$$P = \frac{2\pi r_{cp}}{\bar{v}},$$

где $\bar{v}$ — линейная скорость полета спутника по круговой орбите радиуса r_{cp} .

С л у ч а й 1. Возмущающие ускорения постоянны, т. е. $S=S_0$, $T=T_0$, $W=W_0$. Влияние этих ускорений выражается следующими зависимостями:

$$\Delta r(\varphi) = P_1^2 [S_0(1 - \cos \varphi) + 2T_0(\varphi - \sin \varphi)];$$

$$\Delta v_r(\varphi) = P_1 [S_0 \sin \varphi + 2T_0(1 - \cos \varphi)];$$

$$\Delta u(\varphi) = -\frac{P_1^2}{r_{cp}} \left\{ 2S_0(\varphi - \sin \varphi) + T_0 \left[\frac{3}{2} \varphi^2 - 4(1 - \cos \varphi) \right] \right\};$$

$$\Delta v_u(\varphi) = -P_1 [S_0(1 - \cos \varphi) + T_0(\varphi - 2 \sin \varphi)];$$

$$\Delta z(\varphi) = P_1^2 W_0(1 - \cos \varphi);$$

$$\Delta v_z(\varphi) = P_1 W_0 \sin \varphi,$$

где

$$P_1 = \frac{P}{2\pi} = \frac{r_{cp}^{3/2}}{\sqrt{\mu}}.$$

Анализ этих зависимостей, в частности, показывает, что под воздействием постоянного возмущающего ускорения T_0 спутник сначала несколько смещается по направлению его действия, а затем движется по спирали, которая разворачивается, если возмущающее ускорение T_0 направлено в сторону полета спутника, или сворачивается, если действие T_0 противоположно.

С л у ч а й 2. Возмущающие ускорения изменяются с частотой обращения спутника

$$S_1 = S_1(\varphi); \quad T_1 = T_1(\varphi); \quad W_1 = W_1(\varphi).$$

В данном случае пользуются следующими зависимостями:

$$\Delta r(\varphi) = P_1^2 \left\{ \frac{S_1}{2} [\sin \varphi \cdot \cos \varphi_{S_1} - \varphi \cos(\varphi - \varphi_{S_1})] + \right.$$

$$\left. + T_1 [2 \cos \varphi_{T_1} (1 - \cos \varphi) - \sin \varphi \cdot \sin \varphi_{T_1} - \varphi \sin(\varphi - \varphi_{T_1})] \right\};$$

$$\Delta v_r(\varphi) = P_1 \left\{ \frac{S_1}{2} [\varphi \cdot \sin(\varphi - \varphi_{S_1}) - \sin \varphi \cdot \sin \varphi_{S_1}] + \right.$$

$$\left. + T_1 [\sin \varphi \cdot \cos \varphi_{T_1} - \varphi \cdot \cos(\varphi - \varphi_{T_1})] \right\};$$

$$\Delta u(\varphi) = -\frac{P_1^2}{r_{cp}} \{ S_1 [2 \cos \varphi_{S_1} (1 - \cos \varphi) - \sin \varphi \cdot \sin \varphi_{S_1} - \varphi \cdot \sin(\varphi - \varphi_{S_1})] +$$

$$+ T_1 [3\varphi \cdot \cos \varphi_{T_1} - 3 \sin (\varphi - \varphi_{T_1}) - 3 \sin \varphi_{T_1} + 2\varphi \cdot \cos (\varphi - \varphi_{T_1}) - 2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi_{T_1}];$$

$$\Delta v_u(\varphi) = -P_1 \left\{ \frac{S_1}{2} [\sin \varphi \cdot \cos \varphi_{S_1} - \varphi \cos (\varphi - \varphi_{S_1})] + \right. \\ \left. + T_1 [\cos \varphi_{T_1} (1 - \cos \varphi) - \varphi \cdot \sin (\varphi - \varphi_{T_1})] \right\},$$

$$\Delta z(\varphi) = \frac{1}{2} P_1^2 \cdot W_1 [\sin \varphi \cdot \cos \varphi_{W_1} - \varphi \cos (\varphi - \varphi_{W_1})],$$

$$\Delta v_z(\varphi) = \frac{1}{2} P_1 \cdot W_1 [\varphi \cdot \sin (\varphi - \varphi_{W_1}) - \sin \varphi \cdot \sin \varphi_{W_1}],$$

где φ_{S_1} , φ_{T_1} и φ_{W_1} — начальные фазы соответствующих возмущений.

Из этих зависимостей, в частности, следует, что периодическое возмущающее ускорение W_1 (направленное по нормали к плоскости орбиты) вызывает вековое вращение плоскости орбиты со скоростью

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{P_1 W_1}{2r_{cp}}$$

вокруг оси, направление которой определяется углом

$$\varphi_0 = \varphi_{W_1} + \frac{\pi}{2}.$$

4.3. ВЛИЯНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ ВОЗДУХА НА ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

При прохождении вблизи планеты, обладающей атмосферой, КА испытывает сопротивление, определяемое формулой

$$R_x = c_x \frac{\rho v^2}{2} S_m,$$

где c_x — коэффициент аэродинамического сопротивления (безразмерный);

ρ — плотность атмосферы в рассматриваемой точке орбиты;

v — скорость полета относительно атмосферы;

S_m — площадь миделевого сечения, определенная как проекция КА на плоскость, перпендикулярную направлению скорости полета.

Для расчета движения КА в атмосфере необходимо знать величину силы сопротивления R_x в зависимости от времени полета. Для нахождения этой зависимости используются известные функции плотности ρ от высоты полета (основное влияние), а также от географической широты, освещенности атмосферы Солнцем и других факторов.

Ввиду сложного характера зависимостей и необходимости одновременно учитывать другие возмущающие силы, для расчета орбит обычно используются методы численного интегрирования полных уравнений движения. При этом величина S_m для КА, ориентация которого в пространстве известна, вычисляется, как указано выше; для неориентированного КА расчет ведется по приближенной формуле

$$S_m = \frac{1}{4} S_{\text{полн}},$$

где $S_{\text{полн}}$ — полная поверхность КА.

Ускорение силы сопротивления воздуха

$$j_b = \frac{R_x}{m_{k.a}},$$

проекция которого на оси системы координат входят в уравнения движения, может быть записано также в виде

$$j_b = b \frac{\rho v^2}{2}.$$

Здесь $b = \frac{c_x S_m}{m_{k.a}}$ — баллистический коэффициент, который может быть определен опытным путем.

Недостатки численного интегрирования (падение точности при больших временах полета, большие затраты машинного времени) могут быть устранены при замене полной

модели плотности атмосферы упрощенной моделью. При этом остается только зависимость $\rho(h)$. Влияние разогрева атмосферы Солнцем вследствие солнечной активности не учитывается.

Такой подход оправдывает себя для спутников с низким перигеем ($h_p = 200 \div 300$ км), когда неучитываемые эффекты малы ($5 \div 10\%$). Космические аппараты, летающие по более высоким орбитам, испытывают относительно большие воздействия, связанные с вариациями плотности атмосферы. По абсолютной величине, однако, эти силы малы и плохо изучены. Поэтому целесообразно использовать упрощенную модель атмосферы во всем диапазоне высот, а все изменения в силе сопротивления учитывать путем изменения баллистического коэффициента.

Опытное значение баллистического коэффициента определяется из расхождений опытного времени полета по отношению к расчетному по формуле

$$b_{\text{оп}} = b_{\text{расч}} \frac{nT - t_{\text{оп}}}{nT - t_{\text{расч}}},$$

где n — число витков, соответствующее рассмотренному времени полета;

T — период обращения на первом витке;

$t_{\text{оп}}$ — опытное время полета;

$t_{\text{расч}}$ — расчетное время полета при значении баллистического коэффициента $b_{\text{расч}}$.

Для упрощенной модели плотности атмосферы в качестве аппроксимирующей функции для $\ln \rho$ выберем квадратную параболу с вершиной в области низких высот

$$\ln \rho = \bar{a}_0 - \bar{x} \sqrt{h - \bar{h}_0},$$

где $\bar{a}_0$, $\bar{x}$, $\bar{h}_0$ — постоянные коэффициенты для данной модели атмосферы;

h — высота над уровнем Мирового океана.

Примеры аппроксимации для различных моделей атмосферы приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Модель М-1	Высота h км	$\Delta \rho$ %	Модель ВСА-60	Высота h км	$\Delta \rho$ %	Модель ABDC-59	Высота h км	$\Delta \rho$ %
$\bar{a}_0 = -17,748$	130	-3,5	$\bar{a}_0 = -15,658$	140	-5,6	$\bar{a}_0 = -16,720$	140	-14
$\bar{h}_0 = 125700$	150	4,5	$\bar{h}_0 = 103030$	155	3	$\bar{h}_0 = 104000$	150	0
$\bar{x} = 0,01449$	200	3,5	$\bar{x} = 0,018844$	180	1	$\bar{x} = 0,01594$	200	4,5
	250	4		200	-1		250	4
	300	5					300	-3
	350	-1,5					400	2,5
	400	0,5					500	6,5
							700	5

В табл. 4.1 величина $\Delta \rho$ — ошибка аппроксимирующей функции в процентах по отношению к табличному значению плотности.

Как видно из таблицы, соответствующим выбором трех параметров $\bar{a}_0$, $\bar{h}_0$, $\bar{x}$ (в СИ) модели атмосферы, заданные таблицей, можно заменить аппроксимирующей функцией с погрешностью 3—4%. Метод расчета сводится к интегрированию системы двух дифференциальных уравнений (по числу витков):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dn} &= -2\pi b p a \left\{ \rho_n e^{-\alpha_1} (1 - e^2)^{\frac{1}{2}} I_0 + A_1 [B_1 (I_1 - I_0) + B_2 (I_2 - I_0) + \dots] \right\}; \\ \frac{de}{dn} &= -2\pi b p \left\{ \rho_n e^{-\alpha_1} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)^{\frac{1}{2}} I_0 + A_1 [D_1 (I_1 - I_0) + D_2 (I_2 - I_0) + \dots] \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

где ρ_n — плотность воздуха в перигее;

p — параметр орбиты;

a — большая полуось орбиты;

$R = \bar{a}(1 - \bar{a} \sin^2 i \sin^2 \omega)$ — радиус Земли в точке под перигеем орбиты КА;

$\bar{a}$ — большая полуось общего земного эллипсона;

$\bar{\alpha}$ — его сжатие;

$$A_1 = A \exp\left(-\frac{ca_0}{2}\right);$$

$$\frac{1}{2} a_0 = 1 - \frac{z^2}{24} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{210} z^4 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{214} z^6 - \dots;$$

$$c = \kappa \sqrt{a - R - \bar{h}_0};$$

$A = \exp(a_0)$ — значение плотности воздуха на опорной высоте $\bar{h}_0$;

$$z = \frac{ae}{a - R - \bar{h}_0};$$

$I_0(\alpha_1), I_1(\alpha_1), I_2(\alpha_1)$ — бesselевы функции мнимого аргумента;

$$\alpha_1 = -ca_1;$$

$$a_1 = -\frac{z}{2} \left(1 + \frac{3}{25} z^2 + \frac{1 \cdot 5 \cdot 7}{210} z^4 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11}{216} z^6 + \dots \right);$$

$$B_0 = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{e^2}{4} - \dots \right) b_0 - \left(\frac{e^2}{4} + \dots \right) b_2 - \dots \right];$$

$$B_1 = \frac{1}{2} \left[2 \left(1 - \frac{e^2}{4} - \dots \right) b_1 - \left(\frac{e^2}{4} + \dots \right) b_1 - \left(\frac{e^2}{4} + \dots \right) b_3 - \dots \right];$$

$$B_2 = \frac{1}{2} \left[2 \left(1 - \frac{e^2}{4} - \dots \right) b_2 - \left(\frac{e^2}{4} + \dots \right) b_0 - \left(\frac{e^2}{4} + \dots \right) b_4 - \dots \right];$$

$$B_3 = \frac{1}{2} \left[2 \left(1 - \frac{e^2}{4} - \dots \right) b_3 - \left(\frac{e^2}{4} + \dots \right) b_1 - \left(\frac{e^2}{4} + \dots \right) b_5 - \dots \right];$$

$$\dots$$

$$D_0 = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{3}{8} e^2 + \dots \right) b_1 + \left(\frac{e}{2} + \frac{3e^3}{16} + \dots \right) b_0 + \left(\frac{e}{2} + \frac{e^3}{4} + \dots \right) b_2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{e^2}{8} + \dots \right) b_3 + \left(\frac{e^3}{16} + \dots \right) b_4 + \dots \right];$$

$$D_1 = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{3}{8} e^2 + \dots \right) b_0 + \left(1 + \frac{1}{2} e^2 + \dots \right) b_2 + \left(\frac{3}{2} e + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{5}{8} e^3 + \dots \right) b_1 + \left(\frac{e}{2} + \frac{5}{16} e^3 + \dots \right) b_3 + \left(\frac{e^2}{8} + \dots \right) b_4 + \dots \right];$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{3}{8} e^2 + \dots \right) b_3 + \left(1 + \frac{1}{2} e^2 + \dots \right) b_1 + \left(e + \frac{7}{16} e^3 + \dots \right) b_2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{e}{2} + \frac{e^3}{4} + \dots \right) b_0 + \left(\frac{e}{2} + \frac{e^3}{4} + \dots \right) b_4 + \left(\frac{e^2}{8} + \dots \right) b_5 + \dots \right];$$

$$D_3 = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{3}{8} e^2 + \dots \right) b_4 + \left(1 + \frac{3}{8} e^2 + \dots \right) b_2 + \left(e + \frac{3}{8} e^3 + \dots \right) b_3 + \right. \\ \left. + \left(\frac{e}{2} + \frac{e^3}{4} + \dots \right) b_5 + \left(\frac{e^2}{8} + \dots \right) b_0 + \left(\frac{e}{2} + \frac{5}{16} e^3 + \dots \right) b_1 + \right. \\ \left. + \left(\frac{e^2}{8} + \dots \right) b_6 + \dots \right];$$

$$\dots$$

$$\frac{1}{2} b_0 = 1 + c^2 \frac{z^4}{210} \left(1 + \frac{11}{24} z^2 + \frac{61}{27} z^4 \right) + 5c^3 \frac{z^8}{221} \left(1 + \frac{1}{10} c \right);$$

$$b_1 = c^2 \frac{z^5}{211} \left(1 + \frac{15}{24} z^2 + \frac{85}{27} z^4 \right) + c^3 \frac{z^7}{217} \left(1 + \frac{75}{26} z^2 \right);$$

$$b_2 = c \frac{z^2}{24} \left(1 + \frac{5}{24} z^2 + \frac{79}{29} z^4 \right) + c^2 \frac{z^6}{215} (5 + c) \left(1 + \frac{9}{8} z^2 \right);$$

$$b_3 = c \frac{z^3}{26} \left(1 + \frac{35}{26} z^2 + \frac{87}{28} z^4 \right) + c^3 \frac{z^7}{216} \left(1 + \frac{75}{26} z^2 \right);$$

$$b_4 = 5c \frac{z^4}{210} \left(1 + \frac{7}{9} z^2\right) + c^2 \frac{z^4}{210} \left(1 + \frac{5}{23} z^2\right) + 5c^3 \frac{z^8}{220};$$

$$b_5 = 7c \frac{z^5}{212} (1 + z^2) + c^2 \frac{z^5}{211} \left(1 + \frac{55}{26} z^2 + \frac{85}{27} z^4\right);$$

$$b_6 = c \frac{z^6}{215} (1 + z^2) \left(21 + 7c + \frac{1}{3} c^2\right);$$

$$b_7 = 3c^2 \frac{z^7}{215} \left(1 + \frac{4}{3} z^2\right) + c^3 \frac{z^7}{217} \left(1 + \frac{75}{26} z^2\right);$$

$$A_1 (B_0 + B_1 + B_2 + \dots) = Q_\pi e^{-\alpha_1} (1 - e^2)^{\frac{1}{2}};$$

$$A_1 (D_0 + D_1 + D_2 + \dots) = Q_\pi e^{-\alpha_1} \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Для вычисления других элементов орбиты, зависящих только от p и e , которые в процессе полета убывают, используются формулы:

$$\Delta a = \frac{p}{1-e^2} \left(\frac{\Delta p}{p} + \frac{2e}{1-e^2} \Delta e \right);$$

$$\Delta T = \frac{3\pi}{\sqrt{\mu}} a^{1/2} \Delta a;$$

$$\Delta r_n = \frac{p}{1+e} \left(\frac{\Delta p}{p} - \frac{\Delta e}{1+e} \right);$$

$$\Delta r_a = \frac{p}{1-e} \left(\frac{\Delta p}{p} + \frac{\Delta e}{1-e} \right),$$

где r_n — высота перигея;

r_a — высота апогея относительно центра Земли.

Приведенные формулы позволяют проводить расчеты изменения параметров орбиты Δp , Δe при начальном эксцентриситете до значений $e=0,15 \div 0,2$. Для больших значений эксцентриситета орбит в выражениях коэффициентов b_i должны быть учтены дополнительные члены разложения или использована система уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dn} &= -\frac{\sqrt{\pi} b A}{2 \sqrt{\gamma}} p a e^{-c \sqrt{1-z}} (1-e^2)^{\frac{1}{2}}; \\ \frac{de}{dn} &= -\frac{\sqrt{\pi} b A}{2 \sqrt{\gamma}} p e^{-c \sqrt{1-z}} \left(\frac{1+e}{1-e}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{4\gamma}\right), \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

где

$$\gamma = \frac{cz}{4 \sqrt{1-z}}.$$

Интегрирование последней системы с некоторым снижением точности можно проводить до $e=0,03 \div 0,02$. Для сохранения точности целесообразно после достижения $e=0,05 \div 0,04$ переходить на первый метод, система уравнений которого в этом случае может быть представлена в упрощенном виде (пригодна до $e=0,1$):

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp}{dn} &= -2\pi b A_1 p^2 \left[\frac{b_0}{2} I_0 + \sum_{i=1}^7 b_i I_i \right]; \\ \frac{de}{dn} &= -2\pi b A_1 p \left\{ \left[\frac{b_0}{2} I_1 + \sum_{i=1}^7 \frac{b_i}{2} (I_{i-1} + I_{i+1}) \right] + \frac{e}{2} \left[\frac{b_0}{2} (I_0 + I_2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i=1}^7 \frac{b_i}{2} (I_{|i-2|} + 2I_i + I_{i+2}) \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9')$$

Здесь отброшены члены с e^2 .

При интегрировании систем уравнений для элементов p, e по n нужно учитывать зависимость высоты перигея от числа витков, являющуюся следствием движения линии апсид в плоскости орбиты, т. е. влияния гармоника $P_{20}(\varphi)$ нормального поля земного сфероида.

Высота полета в перигее и радиус Земли могут быть получены по формулам

$$\begin{aligned}h_n &= r_n - R; \\r_n &= a(1 - e); \\R &= \bar{a}(1 - \bar{a} \sin^2 i \cdot \sin^2 \omega); \\\omega &= \omega_0 + \Delta\omega = \omega_0 + \frac{\pi e}{\mu p^2} (5 \cos^2 i - 1) n,\end{aligned}$$

где n — число витков, которое сделал КА при движении вокруг Земли начиная с момента t_0 .

Бесселевы функции мнимого аргумента удобно вычислять с помощью асимптотических разложений (для $\alpha_1 > 2$):

$$I_n(\alpha_1) = \frac{e^{\alpha_1}}{\sqrt{2\pi\alpha_1}} \left[1 - \frac{4n^2 - 1}{8\alpha_1} - \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2! (8\alpha_1)^2} - \dots \right].$$

Для вытянутых орбит (при $e > 0,1$) изменения параметра и эксцентриситета почти не зависят от выбора модели атмосферы и баллистического коэффициента. Каждому новому значению p соответствует определенная величина e . Эта связь дается формулой

$$p = p_0 \frac{1 + e}{1 + e_0} \left(\frac{1 + e}{1 + e_0} \right)^{\frac{1}{4\bar{\gamma} - 1}},$$

или для полуоси орбиты

$$\begin{aligned}a &= a_0 \left(\frac{1 - e_0}{1 - e} \right) \left(\frac{1 + e}{1 + e_0} \right)^{\frac{1}{4\bar{\gamma} - 1}}; \\4\bar{\gamma} &= \frac{\frac{1}{2} \alpha (a_0 + a) (e_0 + e)}{\sqrt{2(a_0 + a) - 2(R_0 - R) - (a_0 + a)(e_0 + e) - \bar{h}_0}},\end{aligned}$$

т. е. уменьшению полуоси орбиты вследствие сопротивления воздуха соответствует и уменьшение эксцентриситета — орбита приближается к круговой. Для расчета величины p или a используется метод последовательных приближений. Высоты перигея и апогея находятся затем по известным формулам.

На рис. 4.5 приведены времена существования ИСЗ, рассчитанные для баллистического коэффициента $b = 0,0034$ м²/кг и для наклоения $i = 63^\circ 26'$, для которого перигей неподвижен. Пересчет на другое значение баллистического коэффициента производится с использованием закона обратной пропорциональности между временем существования и баллистическим коэффициентом.

Таким образом, при уменьшении баллистического коэффициента в два раза время существования спутника увеличится вдвое, и наоборот.

На рис. 4.6 даны времена существования ИСЗ для орбит с наклоением $i = 55^\circ$ и начальным значением аргумента перигея $\omega_0 = 83^\circ$. Так как в процессе полета положение перигея меняется, то времена существования ИСЗ на рис. 4.6 не совпадают с временами существования на рис. 4.5 для одинаковых значений баллистического коэффициента и одинаковых значений элементов орбит ω, p, e .

На рис. 4.7—4.11 показана зависимость времени $t_{\text{сущ}}$ существования ИСЗ от начального значения аргумента перигея ω_0 для орбит с различными наклоениями i при баллистическом коэффициенте спутника $b = 0,002$ м²/кг.

4.4. ВОЗМУЩАЮЩЕЕ ВЛИЯНИЕ ПЛАНЕТ, СОЛНЦА И ДАВЛЕНИЯ СОЛНЕЧНОГО СВЕТА

Полет космического аппарата внутри сферы действия основного притягивающего тела сопровождается возмущающим воздействием на его траекторию других тел. В частности, на искусственный спутник Земли оказывают влияние Луна и Солнце. Ввиду удаленности возмущающих тел их можно рассматривать как точечные массы, притягивающие КА по закону всемирного тяготения. При этом из ускорения, сообщаемого Солнцем, в общем случае следует вычесть ускорение, приобретаемое КА за счет давления солнечных лучей.

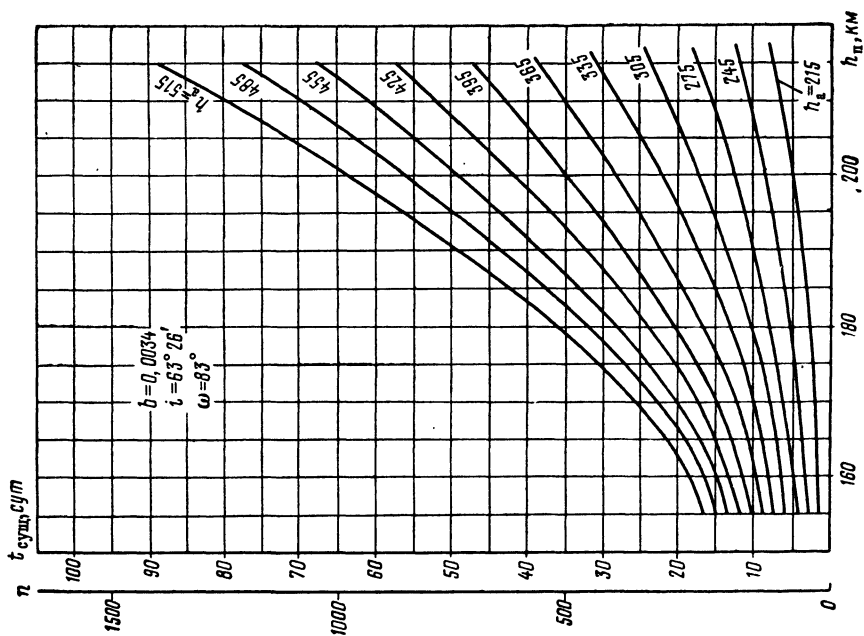


Рис. 4. 5. Времена существования $t_{\text{сущ}}$ ИСЗ для орбит с наклонением $i = 63^\circ 26'$

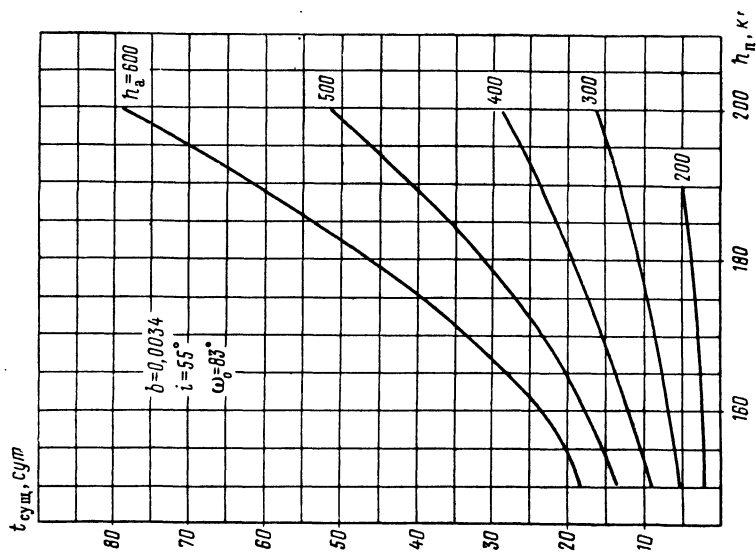


Рис. 4. 6. Времена существования $t_{\text{сущ}}$ ИСЗ для орбит с наклонением $i = 55^\circ$

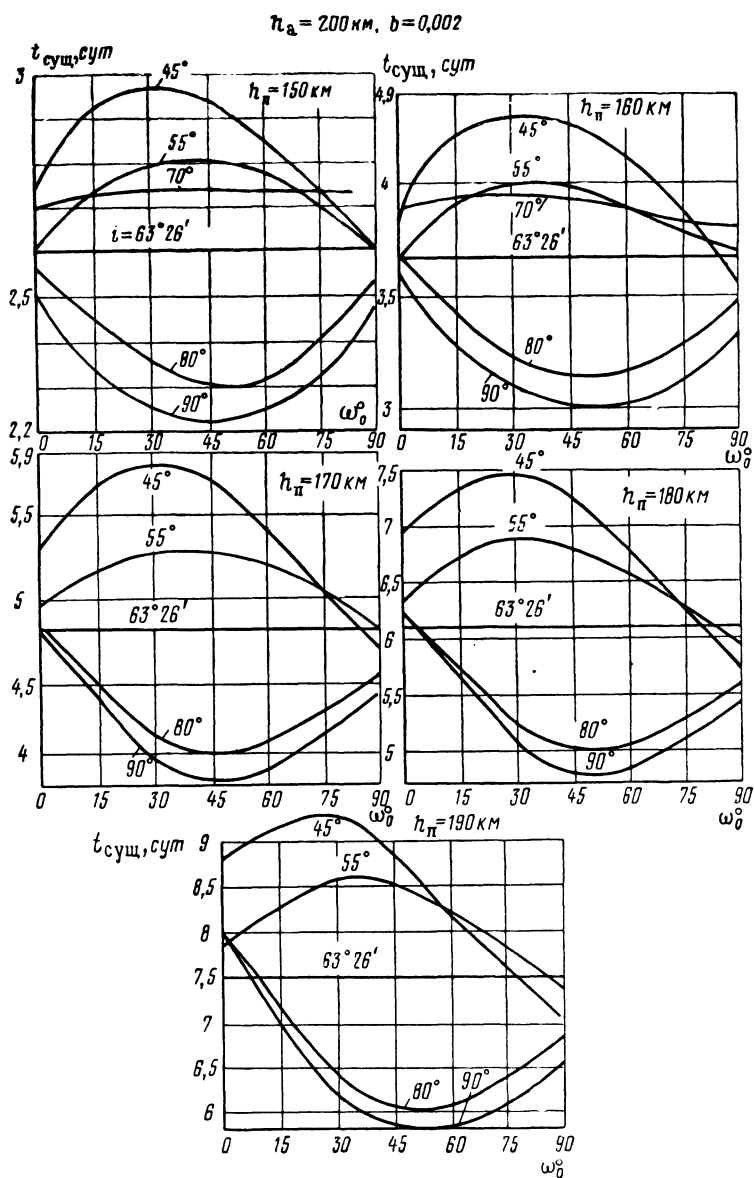


Рис. 4.7. Времена существования $t_{\text{сущ}}$ ИСЗ для начальных высот апогея $h_a = 200 \text{ км}$ и перигея $h_{\text{п}} = 150 \div 190 \text{ км}$

$h_a = 300 \text{ км}, b = 0,002$

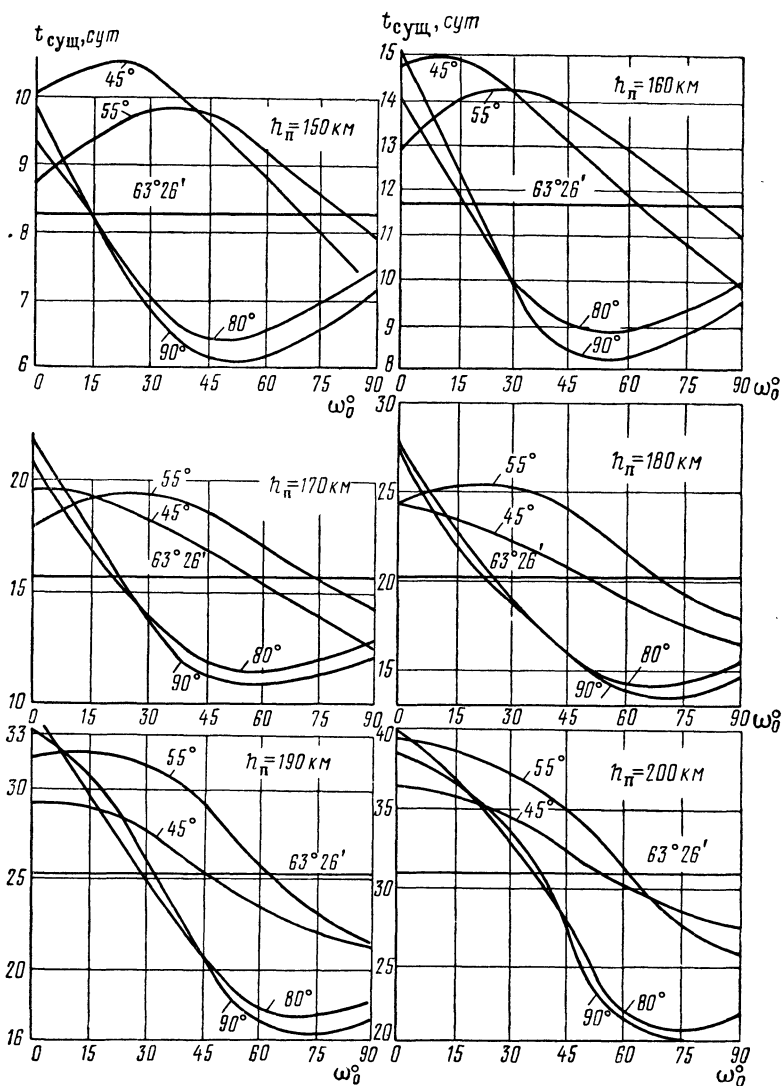


Рис. 4.8. Времена существования $t_{\text{сущ}}$ ИСЗ для начальных высот апогея $h_a = 300 \text{ км}$ и перигея $h_n = 150 \div 200 \text{ км}$

$h_a = 400 \text{ км}, b = 0,002$

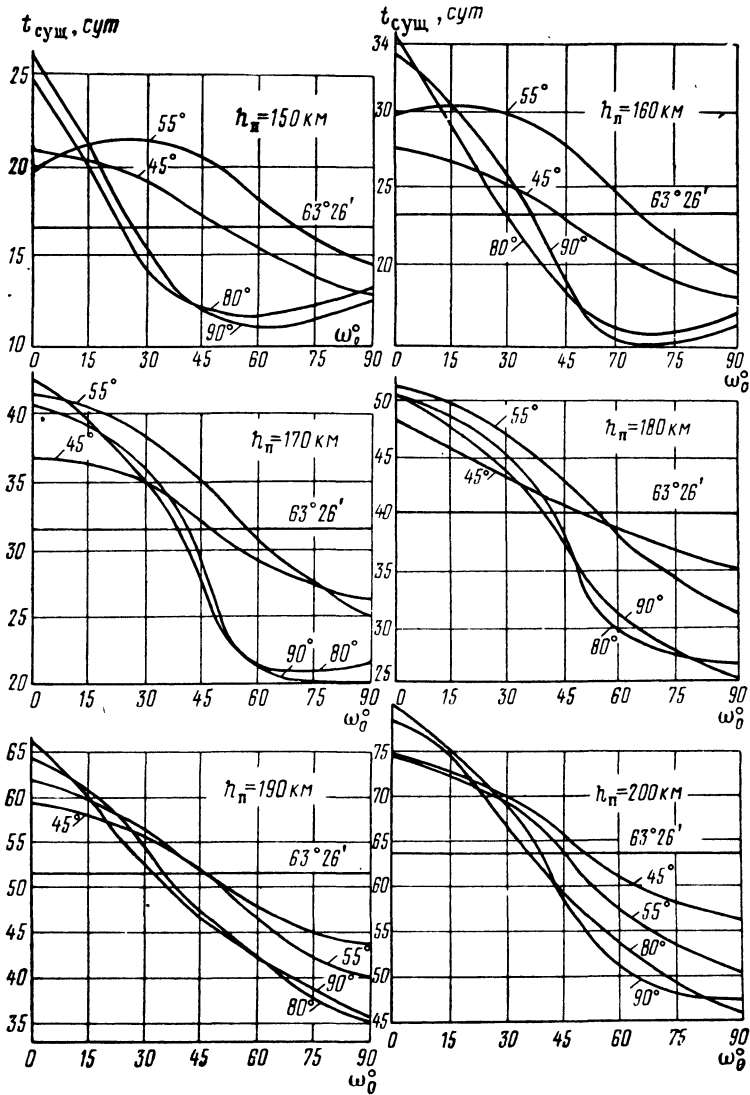


Рис. 4.9. Времена существования $t_{\text{сущ}}$ ИСЗ для начальных высот апогея $h_a = 400 \text{ км}$ и перигея $h_n = 150 \div 200 \text{ км}$

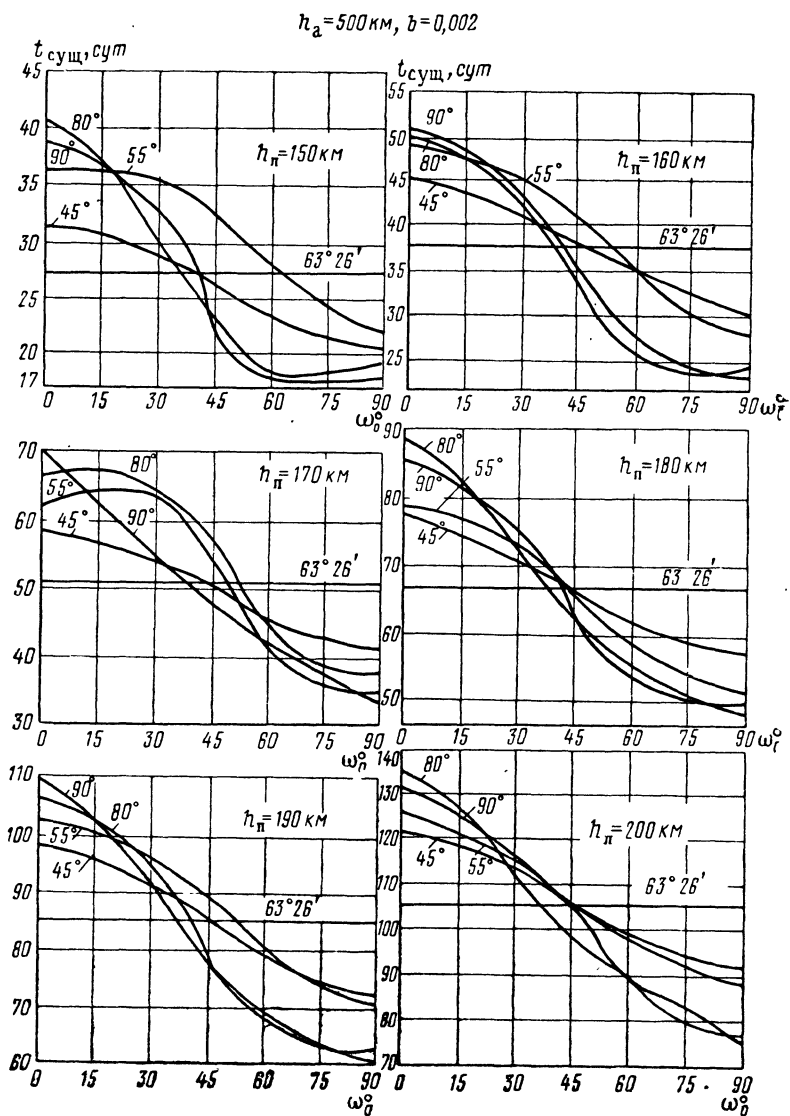


Рис. 4.10. Времена существования $t_{\text{сущ}}$ ИСЗ для начальных высот апогея $h_a = 500 \text{ км}$ и перигея $h_n = 150 \div 200 \text{ км}$

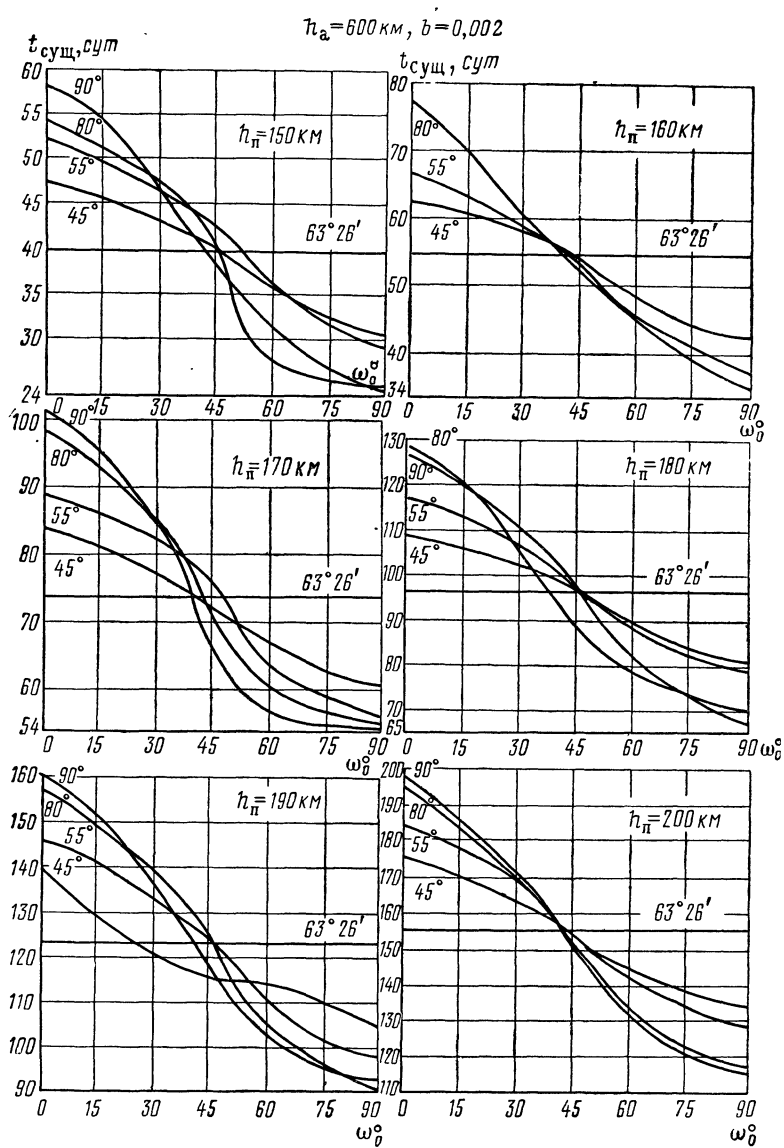


Рис. 4.11. Времена существования $t_{\text{сущ}}$ ИСЗ для начальных высот апогея $h_a = 600 \text{ км}$ и перигея $h_{\text{п}} = 150 \div 200 \text{ км}$

Потенциал возмущающих сил от Солнца и планет, а также их спутников, в том числе Луны, можно представить в следующем виде:

$$R = \sum_{i=1}^{n_1} \left(\frac{\bar{\mu}_i}{\Delta_i} - \mu_i \frac{XX_i + YY_i + ZZ_i}{r_i^3} \right), \quad (4.11)$$

где Δ_i — расстояние между i -м возмущающим телом и КА;

i — номер возмущающего тела;

n_1 — количество тел;

μ_i — коэффициент притяжения i -го тела.

Черта над μ_i в первом слагаемом указывает, что для Солнца коэффициент уменьшается:

$$\mu_{\odot} = \bar{\mu}_{\odot} + \Delta\mu_{\odot},$$

где $\Delta\mu_{\odot}$ — учитывает отталкивающее влияние солнечных лучей, характерное для данного КА с малой массой m и площадью миделевого сечения S_m , перпендикулярного направлению солнечных лучей.

В формуле для потенциала возмущающих сил использована система прямоугольных координат. Начало ее помещено в центре масс основного притягивающего тела, в сфере действия которого пролетает КА, а оси имеют произвольные направления, но не вращаются.

Расстояние Δ_i между i -м возмущающим телом и космическим кораблем с координатами X, Y, Z определяется по формуле

$$\Delta_i^2 = (X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2.$$

Соответственно для расстояния между притягивающим центром и возмущающим телом с координатами X_i, Y_i, Z_i

$$r_i^2 = X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2.$$

Приведем формулы для расчета изменений элементов орбиты. Точность этих формул в большинстве случаев вполне достаточна для практики.

Заменим равенство (4.11) эквивалентным выражением:

при $r < r_i$,

$$R = \sum_{i=1}^{n_1} \left[\frac{\bar{\mu}_i}{r_i} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_i} \right)^n P_n(\cos \varphi_i) - \mu_i \frac{r \cos \varphi_i}{r_i^2} \right]; \quad (4.12)$$

при $r > r_i$

$$R = \sum_{i=1}^{n_1} \left[\frac{\bar{\mu}_i}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_i}{r} \right)^n P_n(\cos \varphi_i) - \mu_i \frac{r \cos \varphi_i}{r_i^2} \right]. \quad (4.13)$$

Здесь $r^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ — квадрат расстояния от основного притягивающего центра до КА;

$\cos \varphi_i = \frac{XX_i + YY_i + ZZ_i}{rr_i}$ — косинус угла между направлениями из начала координат

на i -е возмущающее тело и КА;

$P_n(\cos \varphi_i)$ — полиномы Лежандра.

Ограничимся случаем (4.12), т. е. когда возмущающее тело находится за пределами орбиты КА или, точнее, на большем расстоянии от центрального тела, чем КА.

Выражение (4.12) заменяется следующим:

$$R = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\bar{\mu}_i}{r_i} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_i} \right)^n P_n(\cos \varphi_i) - \Delta\mu_{\odot} \frac{r \cos \varphi_{\odot}}{r_{\odot}^2},$$

где $r_{\odot}^2$ — квадрат расстояния от начала координат до Солнца;

$\varphi_{\odot}$ — угол между направлениями на КА и на Солнце.

Первый член формулы учитывает гравитационное влияние космических тел и Солнца, второй — давление солнечных лучей.

Величину $\Delta\mu_{\odot}$ можно вычислить по формуле

$$\Delta\mu_{\odot} = \frac{pS_m}{m_{ка}} A^2,$$

где p — давление солнечного света на расстоянии в одну астрономическую единицу A .

Величина p в каждом конкретном случае должна определяться экспериментальным путем (порядок этой величины 0,5 мг/м²).

Расчет солнечного давления путем уменьшения $\mu_{\odot}$ не является полным, так как не учитывает возможности появления тангенциальных сил, равнодействующая которых будет зависеть от угла падения лучей и от состояния поверхности. Для сферических или плоских тел с плоскостью, перпендикулярной направлению на Солнце, при полностью зеркальном или диффузном отражении тангенциальная составляющая равна нулю. На практике для реальных объектов ее величина и направление должны определяться экспериментально на моделях. В уравнения движения соответствующие составляющие могут быть введены после проектирования экспериментально найденной тангенциальной силы на выбранные оси координат X, Y, Z .

Продифференцировав потенциалы возмущающих сил R по координатам орбитальной системы координат, получим

$$S = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial R}{\partial r} = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\mu_i}{r_i^2} \sum_{n=2}^{\infty} n \left(\frac{r}{r_i} \right)^{n-1} P_n(\cos \varphi_i) - \Delta \mu_{\odot} \frac{\cos \varphi_{\odot}}{r_{\odot}^2};$$

$$T = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial R}{r \partial \varphi_i} \cos \delta_i = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\mu_i}{r_i^2} \cos \delta_i \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_i} \right)^{n-1} P'_n(\cos \varphi_i) + \Delta \mu_{\odot} \frac{\sin \varphi_{\odot}}{r_{\odot}^2} \cos \delta_{\odot};$$

$$W = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\partial R}{r \partial \varphi_i} \sin \delta_i = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{\mu_i}{r_i^2} \sin \delta_i \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_i} \right)^{n-1} P'_n(\cos \varphi_i) + \Delta \mu_{\odot} \frac{\sin \varphi_{\odot}}{r_{\odot}^2} \sin \delta_{\odot}.$$

Здесь S, T, W — составляющие возмущающей силы (на единицу массы КА) от n_1 космических тел по осям орбитальной системы координат;

δ_i — угол между плоскостью, содержащей КА, центр притяжения и i -е возмущающее тело, и плоскостью орбиты КА (см. рис. 4.12);

$P'_n(\cos \varphi_i)$ — производная от полинома Лежандра по углу φ_i .

Для одного (условно — первого) космического тела составляющие возмущающих сил могут быть записаны в следующем виде:

$$S = \mu_1^* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n-1)!} \frac{r^{n-1}}{r_1^{n+1}} \sum_{i=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^i \frac{(2n-2i)!}{(n-2i)!} \binom{n}{i} (\cos \eta \cos u + \sin \eta \sin u \cos i)^{n-2i};$$

$$T = -\mu_1^* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} \frac{r^{n-1}}{r_1^{n+1}} \sum_{i=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^i \frac{(2n-2i)!}{(n-2i-1)!} \binom{n}{i} (\cos \eta \sin u - \sin \eta \cos u \cos i) (\cos \eta \cos u + \sin \eta \sin u \cos i)^{n-2i-1};$$

$$W = -\mu_1^* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin i}{2^n n!} \frac{r^{n-1}}{r_1^{n+1}} \sum_{i=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} (-1)^i \frac{(2n-2i)!}{(n-2i-1)!} \binom{n}{i} (\cos \eta \cos u + \sin \eta \sin u \cos i)^{n-2i-1} \sin \eta.$$

Звездочка над μ_1 означает, что при $n=1$ для Солнца величина μ_1 заменяется на $-\Delta \mu_{\odot}$ (учет давления света). Для всех остальных тел сумма вычисляется начиная с $n=2$.

После подстановки полученных S, T, W в уравнения движения (4.5) при независимой переменной ϑ и интегрирования каждого уравнения в отдельности в пределах от ϑ_1

до ϑ_2 получим следующие формулы для изменений элементов орбиты (за основную плоскость системы координат выбрана плоскость орбиты возмущающего тела):

$$\begin{aligned}
 \Delta Q_n &= \frac{\mu_1 p^{n+1} \sin \eta}{\mu r_1^{n+1} 2^n n!} \sum_{i=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sum_{m=0}^{n-2i-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \frac{(2n-2i)!}{(n-2i-1)!} \binom{n-2i-1}{m} \times \\
 &\quad \times \cos^\sigma \varphi_1 \cos^m \varphi_2 \sum_{k=0}^1 \sin^{1-k} \omega \cos^k \omega \sum_{j=0}^{\frac{m+k}{2}} \sum_{v=0}^{\sigma+1-k+2j} (-1)^{\sigma+1-k+3j+v} \times \\
 &\quad \times e^{-\sigma-1+k-2j} \left(\frac{m+k}{2}\right)_j \binom{\sigma+1-k+2j}{v} I_{n+2-v} \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} + \delta Q_{nt}; \\
 \Delta \omega_n &= \frac{\mu_1 p^{n+1} e^{-1}}{\mu r_1^{n+1} 2^n n!} \left[n \sum_{l=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{m=0}^{n-2l} (-1)^{l+1} \frac{(2n-2l)!}{(n-2l)!} \binom{n}{l} \binom{n-2l}{m} \times \right. \\
 &\quad \times \cos^{\sigma+1} \varphi_1 \cos^m \varphi_2 \sum_{j=0}^{\frac{m}{2}} \sum_{v=0}^{\sigma+2j+2} (-1)^{\sigma+3j+v} \left(\frac{m}{2}\right)_j \binom{\sigma+2j+2}{v} \times \\
 &\quad \times e^{-\sigma-2j-2} I_{n+1-v} + \sum_{i=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sum_{m=0}^{n-2i-1} (-1)^{i+1} \frac{(2n-2i)!}{(n-2i-1)!} \binom{n}{i} \times \\
 &\quad \times \binom{n-2i-1}{m} \cos^{\sigma+1} \varphi_1 \cos^m \varphi_2 \sum_{k=1, l=0}^{2,1} \sum_{j=0}^{\frac{m+2-l}{2}} \sum_{v=0}^{\sigma+2j+l} (-1)^{\sigma+3j+v} \times \\
 &\quad \times \left(\frac{m+2-l}{2}\right)_j \binom{\sigma+2j+l}{v} e^{-\sigma-2j-l} \left(\frac{\cos \varphi_2}{\cos \varphi_1}\right)^l I_{n+k-v} \Big]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} - \\
 &\quad - \Delta Q_n \cos i + \delta \omega_{nt}; \\
 \Delta p_n &= \frac{\mu_1 p^{n+2}}{\mu r_1^{n+1} 2^{n-1} n!} \sum_{i=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sum_{m=0}^{n-2i-1} (-1)^{i+1} \frac{(2n-2i)!}{(n-2i-1)!} \binom{n}{i} \times \\
 &\quad \times \binom{n-2i-1}{m} \sum_{k=0}^1 \cos^{\sigma+1-k} \varphi_1 \cos^{m+k} \varphi_2 \sum_{j=0}^{\frac{m+1-k}{2}} \sum_{v=0}^{\sigma+k+2j} (-1)^{\sigma+3j+v} \times \\
 &\quad \times \left(\frac{m+1-k}{2}\right)_j \binom{\sigma+2j+k}{v} \times e^{-\sigma-2j-k} I_{n+2-v} \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} + \delta p_{nt}; \\
 \Delta a_n &= \frac{\mu_1 a p^{n+1}}{\mu (1-e^2) r_1^{n+1} 2^{n-1} n!} \left[n e \sum_{l=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{m=0}^{n-2l} (-1)^l \frac{(2n-2l)!}{(n-2l)!} \binom{n}{l} \binom{n-2l}{m} \times \right.
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
& \times \cos^{n-2i-m} \varphi_1 \cos^m \varphi_2 \sum_{j=0}^{\frac{m+1}{2}} \sum_{v=0}^{\sigma+1+2j} (-1)^{\sigma+1+3j+v} \binom{m+1}{j} \binom{\sigma+1+2j}{v} \times \\
& \times e^{-\sigma-1-2j} I_{n+1-v} + \sum_{i=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \sum_{m=0}^{n-2i-1} (-1)^{i+1} \frac{(2n-2i)!}{(n-2i-1)!} \binom{n}{i} \times \\
& \times \binom{n-2i-1}{m} \sum_{k=0}^1 \cos^{\sigma+1-k} \varphi_1 \cos^{m+k} \varphi_2 \sum_{j=0}^{\frac{m+1-k}{2}} \sum_{v=0}^{\sigma+k+2j} (-1)^{\sigma+3j+v} \times \\
& \times \left(\frac{m+1-k}{2} \binom{\sigma+k+2j}{v} e^{-\sigma-k-2j} I_{n-v} \right) \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} + \delta a_{nt}.
\end{aligned} \quad (4.14)$$

Здесь $\Delta\Omega_n$, $\Delta\omega_n$, Δp_n , Δa_n — изменения элементов орбиты КА в течение произвольно выбранного промежутка времени вследствие влияния только *одного космического тела* и только при учете в разложении потенциала R одной n -й гармоники. Полное изменение элемента за счет всех членов разложения до n -го включительно получим как сумму соответствующих возмущений, начиная с $n=2$. Полагая $n=1$ и $\mu_1 = -\Delta\mu_{\odot}$, найдем по тем же формулам возмущение элемента орбиты, обусловленное влиянием давления солнечного света на корпус КА.

Изменение наклона орбиты Δi_n определяется по первой формуле для $\Delta\Omega_n$ после замены $\sin \omega$ на $\cos \omega$ и $\cos \omega$ на $-\sin \omega$ и умножения всего выражения на $\sin i$.

Изменение эксцентриситета Δe_n получим, используя связь (см. гл. III)

$$p = a(1 - e^2),$$

на основании которой

$$\Delta e_n = \frac{1}{2ae} [(1 - e^2) \Delta a_n - \Delta p_n]. \quad (4.15)$$

В формулах (4.14) поправки $\delta\Omega_{nt}$, $\delta\omega_{nt}$, δp_{nt} , δa_{nt} учитывают движение возмущающего тела вокруг центрального (см. ниже).

Если необходимо учесть *одновременное влияние нескольких космических тел* (например, Луны и Солнца), то формулы (4.14) используются последовательно и после приведения элементов Ω , ω , i к единой системе координат результаты складываются.

Обозначения в формулах (4.14):

$$\binom{n}{i} = c_n^i \text{ — число сочетаний из } n \text{ по } i;$$

$$\sigma = n - 2i - 1 - m;$$

e — эксцентриситет;

μ_1 — коэффициент притяжения возмущающего тела;

r_1 — радиус-вектор возмущающего тела, средний для участка $[\vartheta_1, \vartheta_2]$;

η , φ_1 , φ_2 — углы, показанные на рис. 4.12;

$$\cos \varphi_1 = \cos \eta \cos \omega + \sin \eta \sin \omega \cos i;$$

$$\cos \varphi_2 = -\cos \eta \sin \omega + \sin \eta \cos \omega \cos i.$$

Величина I_{n+k-v} является интегралом вида

$$\begin{aligned}
I_{n+1} = & \int \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^{n+1}} = \frac{1}{n(1 - e^2)} \left[-\frac{e \sin \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^n} + \right. \\
& \left. + (2n - 1) \int \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^n} - (n - 1) \int \frac{d\vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^{n-1}} \right].
\end{aligned} \quad (4.16)$$

Рекуррентная формула позволяет последовательными вычислениями свести интеграл I_{n+k-v} к интегралу

$$I_1 = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d\vartheta}{1 + e \cos \vartheta} = \frac{2}{\sqrt{1 - e^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}}{1 + e} \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \quad (4.17)$$

при $e < 1$, и $-\pi < \vartheta < \pi$

или

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \ln \left| \frac{\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} + 1 + e}{\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} - 1 - e} \right|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \quad (4.18)$$

при $e > 1$ и $-\vartheta_\infty < \vartheta < \vartheta_\infty$,

где угол ϑ_∞ для гиперболических орбит может быть определен из соотношения

$$\vartheta_{\infty} = \arccos \left(-\frac{1}{e} \right).$$

Приведенные выражения для интегралов I_{n+k} справедливы при недробных индексах сумм или сочетаний $\left[\text{например, } \left(\frac{m+1}{2} \right)_i \right]$, которые только в этом случае имеют

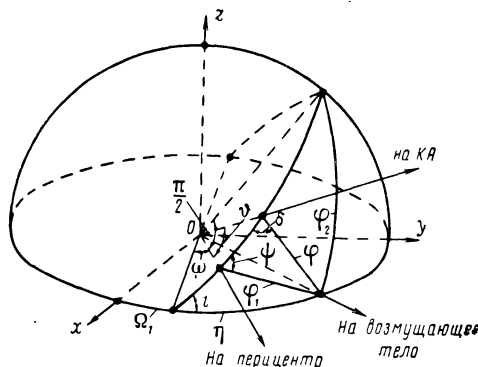


Рис. 4.12. Орбита КА в системе координат, основной плоскостью которой является плоскость орбиты возмущающего тела

смысл. Если указанные величины получаются дробными, то величина m , входящая в них, уменьшается на единицу, а интегралы принимают вид

$$I_{n+k-v} = - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{d \cos \vartheta}{(1 + e \cos \vartheta)^{n+k-v}} = \frac{1}{e(1+e \cos \vartheta)^{n+k-v-1}(n+k-v-1)} \Big|_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}. \quad (4.19)$$

Если элементы орбиты меняются быстро, то, выбрав соответствующий шаг по истинной аномалии $\Delta\theta$, можно проводить вычисления последовательно, по участкам. При этом при переходе к новому участку легко учесть смещение возмущающего тела, вычислив его положение для следующего момента времени.

Для случая *сильно меняющихся элементов орбиты* целесообразно ввести множитель γ из формул (4.5), принятый выше за единицу. При этом расчет изменений элементов орбиты можно проводить по формуле

$$\Delta q = \gamma_2 \Delta q'_2 - \gamma_1 \Delta q'_1 - \overline{\Delta q}' (\gamma_2 - \gamma_1), \quad (4.20)$$

где Δq — изменение элемента;

$\gamma_2, \Delta q_2$ — соответственно множитель γ и изменение элемента, вычисленного по формулам (4.14), для конца интервала;

 $\gamma_1, \Delta q'_1$ — то же для начала интервала;

$\overline{\Delta q'}$ — среднее значение изменения элемента на рассматриваемом интервале движения КА.

Поправки $\delta\Omega_{nt}$, $\delta\omega_{nt}$, $\delta\rho_{nt}$, δa_{nt} , появляющиеся вследствие движения возмущающего тела на интервале ϑ_1 , ϑ_2 , можно найти по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\delta\Omega_{2t} = & -\frac{3}{4} \times \left\{ \left[\frac{5}{2} e^2 E' + (E - \bar{M}) \left(5e \cos E - (1 + e^2) \cos 2E + \right. \right. \right. \\
& + \frac{e}{3} \cos 3E \left. - (6e + e^3) \sin E + \frac{1}{2} (1 - e^2) \sin 2E + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} e + \right. \right. \\
& + e^3 \left. \right) \sin 3E - \frac{e^2}{8} \sin 4E \left. \right] \cos 2\Phi_1 + \frac{\sin \omega}{\sqrt{1 - e^2}} \cos \psi_1 \left[(1 + 4e^2) (E^2 - \right. \\
& - 2\bar{M}E) - (E - \bar{M}) \left((11e + 4e^3) \sin E - (1 + 2e^2) \sin 2E + \frac{e}{3} \sin 3E \right) + \\
& + 2(-5e + e^3) \cos E + \frac{1}{2} (1 - 3e^2 - 2e^4) \cos 2E + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} e + \right. \\
& + 2e^3 \left. \right) \cos 3E - \frac{e^2}{8} \cos 4E \left. \right] + \sqrt{1 - e^2} \cos \omega \cos \psi_2 \left[E^2 - 2\bar{M}E - \right. \\
& - (E - \bar{M}) \left(e \sin E + \sin 2E - \frac{e}{3} \sin 3E \right) + 2e \cos E - \frac{1}{2} (1 + e^2) \times \\
& \times \cos 2E - \frac{2}{9} e \cos 3E + \frac{e^2}{8} \cos 4E \left. \right] \Bigg\}_{E_1}^{E_2}; \\
\delta\omega_{2t} = & 3\pi e^{-1} \left\{ -2 L_1 L_3 \sqrt{1 - e^2} \left[-\frac{3}{4} e E^2 + \frac{3}{2} \bar{M} e E + (E - \bar{M}) \times \right. \right. \\
& \times \left((1 + e^2) \sin E - \frac{e}{4} \sin 2E \right) + \left(1 - \frac{e^2}{4} \right) \cos E + \frac{1}{4} \left(\frac{e}{2} + e^3 \right) \times \\
& \times \cos 2E - \frac{e^2}{12} \cos 3E \left. \right] + (L_1 L_4 + L_2 L_3) \left[\frac{1}{4} \left(3e - \frac{11}{2} e^3 \right) E + \right. \\
& + (E - \bar{M}) \left(\left(\frac{3}{2} - \frac{11}{4} e^2 \right) \cos E + \frac{1}{4} (e + e^3) \cos 2E - \frac{1}{6} \left(1 - \right. \right. \\
& - \frac{e^2}{2} \left. \right) \cos 3E \left. \right) + \left(-\frac{3}{2} + 3e^2 + \frac{1}{4} e^4 \right) \sin E + \frac{5}{8} (-e + e^3) \sin 2E + \\
& + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} - \frac{e^2}{3} - \frac{e^4}{4} \right) \sin 3E + \frac{1}{16} \left(e - \frac{e^3}{2} \right) \sin 4E \left. \right] + 2(L_1 L_3 - \\
& - L_2 L_4) \sqrt{1 - e^2} \left[\frac{e}{4} E^2 - \frac{e}{2} \bar{M} E - \frac{1}{4} (E - \bar{M}) \left(\sin E + e \sin 2E - \right. \right. \\
& - \frac{1}{3} \sin 3E \left. \right) - \frac{1}{4} (1 - 3e^2) \cos E - \frac{e}{4} \cos 2E \left(\frac{1}{36} - \frac{e^2}{18} \right) \cos 3E + \\
& + \frac{e}{32} \cos 4E \left. \right] \Bigg\}_{E_1}^{E_2} - \delta\Omega_{2t} \cos i; \\
\delta p_{2t} = & -6 \times p \left\{ (L_1 L_3 - L_2 L_4) \left[\frac{5}{4} e^2 E + \frac{1}{2} (E - \bar{M}) \left(5e \cos E - (1 + e^2) \times \right. \right. \right. \\
& \times \cos 2E + \frac{e}{3} \cos 3E \left. \right) - \left(3e + \frac{e^3}{2} \right) \sin E + \frac{1}{4} (1 - e^2) \sin 2E + \\
& + \frac{1}{3} \left(\frac{e}{3} + \frac{e^3}{2} \right) \sin 3E - \frac{e^2}{16} \sin 4E \left. \right] + \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}} (L_1 L_4 + L_2 L_3) \times \\
& \times \left\{ -\frac{5}{4} e^2 E^2 + \frac{5}{2} \bar{M} e^2 E + (E - \bar{M}) \left(\left(\frac{5}{2} e + \frac{5}{4} e^3 \right) \sin E - \right. \right. \\
& - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) \sin 2E + \frac{1}{6} \left(e - \frac{e^3}{2} \right) \sin 3E \left. \right) + (3e - e^3) \cos E - \\
& - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{3}{2} e^2 - \frac{3}{2} e^4 \right) \cos 2E - \frac{1}{9} (e + e^3) \cos 3E + \\
& + \frac{1}{16} \left(e^2 - \frac{e^4}{2} \right) \cos 4E \left. \right\} \Bigg\}_{E_1}^{E_2};
\end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\delta a_{2t} = 6\gamma a \left\{ (L_1 L_4 + L_2 L_3) \sqrt{1-e^2} \left[(E - \bar{M}) \left(-e \sin E + \frac{1}{2} \sin 2E \right) - \right. \right. \\ \left. - \frac{3}{2} e \cos E + \frac{1}{4} (1-e^2) \cos 2E + \frac{e}{6} \cos 3E \right] - \left[e^2 E + (E - \right. \\ \left. - \bar{M}) \left(2e \cos E - \frac{1}{2} \cos 2E \right) - \frac{5}{2} e \sin E + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - e^2 \right) \sin 2E + \right. \\ \left. + \frac{e}{6} \sin 3E \right] L_1 L_3 - \left[\frac{e}{2} \sin E - \frac{1}{4} \sin 2E - \frac{e}{6} \sin 3E + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (E - \bar{M}) \cos 2E \right] (1-e^2) L_2 L_4 \Big\}_{E_1}^{E_2}. \quad (4.21)$$

Изменения наклонения i орбиты КА и эксцентриситета e , возникающие вследствие перемещения возмущающего тела по своей орбите, находятся по правилам, аналогичным изложенным выше для основной части возмущений [см. (4.14)].

Однако дополнительно для наклонения величина $\cos 2\Phi_1$ заменяется величиной $\cos 2\Phi_2$ (см. ниже).

В формулах (4.21) учтена только вторая гармоника ($n=2$), однако при выборе достаточно малого шага по истинной аномалии (или соответственно эксцентрической аномалии) в расчетах для любой орбиты можно получить заданную точность.

Входящие в формулы (4.21) величины χ , $\bar{M}$, $\cos 2\Phi_1$, $\cos 2\Phi_2$, $\cos \psi_1$, $\cos \psi_2$, L_1 , L_2 , L_3 , L_4 имеют следующие значения:

$$\chi = \frac{\mu_1 \bar{T}^3}{\mu \bar{T}_1^3} \sqrt{\frac{p_1}{r_1}},$$

где $\bar{T}$ — средний период обращения КА;

$\bar{T}_1$ — период обращения возмущающего тела $\left(\bar{T}_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} r_1^{3/2} \right)$;

p_1 — параметр орбиты возмущающего тела;

$\bar{M} = \bar{E} - e \sin \bar{E}$ — средняя аномалия на средний момент времени $\bar{t}$ для данного расчетного интервала;

$$\cos 2\Phi_1 = \cos 2\eta \cos 2\omega + \sin 2\eta \sin 2\omega \cos i;$$

$$\cos 2\Phi_2 = -\cos 2\eta \sin 2\omega + \sin 2\eta \cos 2\omega \cos i;$$

$$\cos \psi_1 = L_1 \cos \eta + L_3 \sin \eta;$$

$$\cos \psi_2 = L_2 \cos \eta + L_4 \sin \eta;$$

$$L_1 = \cos \varphi_1;$$

$$L_2 = \cos \varphi_2;$$

$$L_3 = \cos \varphi_3 = -\cos \omega \sin \eta + \sin \omega \cos \eta \cos i;$$

$$L_4 = \cos \varphi_4 = \sin \omega \sin \eta + \cos \omega \cos \eta \cos i.$$

Из анализа зависимостей (4.6) для возмущений орбиты КА следует, что величина возмущения любого элемента (для n -ой гармоники) на интервале полета Φ_1 , Φ_2 прямо пропорциональна отношению коэффициента притяжения μ_1 возмущающего тела к коэффициенту притяжения μ центрального тела и $(n+1)$ -й степени отношения фокального параметра p возмущаемой орбиты к величине среднего радиуса-вектора возмущающего тела на рассматриваемом интервале. Кроме того, изменение положения узла орбиты Ω для всех наклонений пропорционально синусу угла между направлениями на узел и на возмущающее тело, а изменение наклонения к плоскости орбиты тела еще дополнительно — синусу наклонения.

Возмущение положения перицентра ω в общем случае также обратно пропорционально величине эксцентриситета e , а для большой полуоси a и фокального параметра p прямая пропорциональность величины возмущения величине $\left(\frac{p}{r_1} \right)^{n+1}$ справед-

лива для отношений $\frac{\Delta a_n}{a}$ и $\frac{\Delta p_1}{p}$. Остальная часть формул содержит более сложные связи

величин возмущений с положением перицентра орбиты КА, эксцентриситетом и значениями истинной аномалии θ на концах выбранного интервала.

Во все выражения для возмущений входят косинусы углов φ_1 и φ_2 , характеризующих положения двух характерных точек орбиты КА — перицентра и точки, удаленной от него на угол $\frac{\pi}{2}$, относительно направления на возмущающее тело.

Зависимости (4.21) для расчета изменений в элементах орбиты, появляющихся вследствие движения возмущающего тела, даны для *эллиптических* орбит.

Применив известную подстановку, можно те же формулы использовать для *гиперболических* орбит:

$$\left. \begin{aligned} E &= -jH; \quad \sin nE = -j \operatorname{sh} nH; \\ \cos nE &= \operatorname{ch} nH, \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

где E — эксцентрисическая аномалия в формулах (4.21);

H — функция в гиперболическом движении, аналогичная эксцентрисической аномалии в эллиптическом (см. гл. III);

$$j = \sqrt{-1}; \quad n — \text{любое число.}$$

Кроме того, в гиперболическом движении период обращения является мнимым, а большая полуось отрицательной ($\alpha = -a$). Малая полуось β также мнимая.

Учитывая сделанные замечания, для перевода зависимостей (4.21) к гиперболическим функциям (при $e > 1$) необходимо, кроме замены тригонометрических функций $\sin nE$ и $\cos nE$ гиперболическими, заменить также в коэффициенте k отношение перио-

дов на $\left(\frac{-aj\sqrt{a}}{a_1 \sqrt{a_1}} \right)$, где a_1 — большая полуось орбиты возмущающего тела, и величину $\sqrt{1-e^2}$ заменить на $\frac{1}{j}\sqrt{e^2-1}$.

Постоянная $\bar{M}$ для гиперболических орбит приобретает значение

$$\bar{M} = e \operatorname{sh} \bar{H} - \bar{H}.$$

Пределы интегрирования H_1 и H_2 , заменяющие E_1 и E_2 , определяются через соответствующие значения истинной аномалии Φ , так как

$$\operatorname{sh} H = \frac{\sqrt{e^2-1} \sin \Phi}{e \cos \Phi + 1}; \quad \operatorname{ch} H = \frac{\cos \Phi + e}{e \cos \Phi + 1}.$$

При переходе КА из сферы действия центрального тела в сферу действия возмущающего приведенные формулы остаются справедливыми, если $r < r_1$, однако орбита сильно меняется, что требует уменьшения шага вычислений. После перехода в сферу действия второго тела оно уже становится центральным. Для продолжения расчета движения КА необходимо перейти от системы координат, связанной с первым телом, к системе координат второго тела (см. гл. II). Может оказаться, что относительно второго тела КА движется с гиперболической скоростью, тогда эксцентриситет $e > 1$ и для вычисления интегралов I_{n+k} используется формула (4.18).

Во всех случаях расчет *времени полета* можно выполнять по формуле

$$t_2 - t_1 = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} \frac{p^2 \gamma d\Phi}{\sqrt{\mu p} (1 + e \cos \Phi)^2}, \quad (4.23)$$

где

$$\gamma = \left[1 + \frac{r^2}{\mu e} S \cos \Phi - \frac{r^2}{\mu e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) T \sin \Phi \right]^{-1}.$$

Драконический период спутника, учитывающий *давление солнечного света*,

$$\begin{aligned} T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{\frac{3}{2}} & \left\{ 1 + \frac{3\Delta\mu_{\odot} a^2}{2\mu r_1^2} \left[\left(\frac{1}{e} + 2e \right) \cos \varphi_1 + \right. \right. \\ & + \frac{\sin E_0}{\sqrt{1-e^2}} (2 - e^2 - e \cos E_0) \cos \varphi_2 - \left(\frac{1}{e} \cos \varphi_1 + \frac{e}{1-e^2} \cos \varphi_5 \right) (1 - \\ & \left. \left. - e \cos E_0)^2 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где

$$\cos \varphi_5 = \sin \eta \sin \omega \cos i,$$

$a = (a)$, $e = (e)$, $\omega = (\omega)$, $i = (i)$, $\Omega = (\Omega)$ — невозмущенные значения элементов орбиты,

E_0 соответствует $u=0$, $(a) = a_0 - \Delta a_0$, ..., причем $\Delta a_0, \dots$ — результат подстановки в формулы (4.14) значения нижнего предела Φ_1 , соответствующего $u=0$ ($\Phi_1 = -\omega_0$).

Для большинства спутников Земли с удалением до 100000 км влияние небесных тел — Луны и Солнца — сравнительно невелико, поэтому можно производить осреднение за один и даже несколько оборотов спутника.

При интегрировании уравнений движения по ϑ в пределах от 0 до 2π формулы (4.14) упрощаются. Все слагаемые, содержащие интеграл типа (4.19), становятся равными нулю, а интеграл типа (4.16) превращается в

$$I_{n+1} = \frac{2\pi}{(1-e^2)^{\frac{n+1}{2}}} P_n \left(\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \right);$$

Особый интерес представляет осреднение изменений элементов эллиптической орбиты, вычисленное с учетом движения возмущающего тела за целый его оборот вокруг центрального тела. В этом случае формулы получаются наиболее простыми и в то же время практически важными, так как позволяют легко получить возмущения от действия Луны и Солнца для большого класса околоземных спутников.

На основании формул (4.14) и (4.21) приведем значения *возмущений* для *первого приближения*.

За один оборот спутника вокруг центрального тела:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Omega_2(T) &= -3\pi \frac{\mu_1}{\mu} \left(\frac{a}{r_1} \right)^3 (1-e^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \sin^2 \eta \cos i + e^2 \left[\frac{5}{4} \sin 2\eta \sin 2\omega + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (5 \sin^2 \omega - 1) \sin^2 \eta \cos i \right] \right\} + \delta \Omega_{2t}(T); \\ \Delta i_2(T) &= -3\pi \frac{\mu_1}{\mu} \left(\frac{a}{r_1} \right)^3 (1-e^2)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\eta \sin i + e^2 \sin \eta \sin i \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{5}{2} \sin \eta \sin 2\omega \cos i + (5 \cos^2 \omega - 1) \cos \eta \right] \right\} + \delta i_{2t}(T); \\ \Delta \omega_2(T) &= 3\pi \frac{\mu_1}{\mu} \left(\frac{a}{r_1} \right)^3 (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \left[4 (\cos^2 \eta \cos^2 \omega + \frac{1}{2} \sin 2\eta \sin 2\omega \cos i + \right. \\ &\quad \left. + \sin^2 \eta \sin^2 \omega \cos^2 i) - (\sin^2 \eta \cos^2 \omega \cos^2 i - \frac{1}{2} \sin 2\eta \sin 2\omega \cos i + \right. \\ &\quad \left. + \cos^2 \eta \sin^2 \omega) - 1 \right] - \Delta \Omega_2(T) \cos i + \delta \omega_{2t}(T); \\ \Delta p_2(T) &= -15\pi \frac{\mu_1}{\mu} \frac{a^4}{r_1^3} e^2 \sqrt{1-e^2} (\cos^2 \eta \sin 2\omega - \sin^2 \eta \sin 2\omega \cos^2 i - \\ &\quad - \sin 2\eta \cos 2\omega \cos i) + \delta p_{2t}(T); \Delta a_2(T) = \delta a_{2t}(T), \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

где

$$\begin{aligned} \delta \Omega_{2t}(T) &= \frac{3}{2} \pi \kappa \left(1 + \frac{16}{3} e - \frac{3}{2} e^2 \right) \cos 2\Phi_1; \\ \delta i_{2t}(T) &= \frac{3}{2} \pi \kappa \left(1 + \frac{16}{3} e - \frac{3}{2} e^2 \right) \sin i \cos 2\Phi_2; \\ \delta \omega_{2t}(T) &= 6\pi \kappa \left(-\frac{4}{3} + e + \frac{8}{3} e^2 - \frac{9}{8} e^3 \right) (L_1 L_4 + L_2 L_3); \\ \delta p_{2t}(T) &= 6\pi p \kappa \left(1 + \frac{16}{3} e - \frac{3}{2} e^2 \right) (L_1 L_3 - L_2 L_4); \\ \delta a_{2t}(T) &= 6\pi a \kappa [(1 + 4e - 2e^2) L_1 L_3 - (1 - e^2) L_2 L_4]; \\ \delta e_{2t}(T) &= 6\pi \kappa (1 - e^2) \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{e}{4} \right) L_2 L_4 - \left(\frac{2}{3} + \frac{e}{4} \right) L_1 L_3 \right]. \end{aligned}$$

За один оборот возмущающего тела:

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Omega_2(T_1) &= -\frac{15}{2} \pi \frac{T_1}{T} \frac{\mu_1}{\mu} \left(\frac{a}{p_1} \right)^3 (1-e_1^2)^{\frac{3}{2}} \frac{\cos i}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \left[e^2 \sin^2 \omega + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} (1-e^2) \right], \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

$$\left. \begin{aligned}
\Delta i_2(T_1) &= -\frac{15}{4} \pi \frac{T_1}{T} \frac{\mu_1}{\mu} \left(\frac{a}{p_1}\right)^3 (1-e_1^2)^{\frac{3}{2}} \frac{e^2}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \sin i \cos i \sin 2\omega, \\
\Delta \omega_2(T_1) &= \frac{15}{2} \pi \frac{T_1}{T} \frac{\mu_1}{\mu} \left(\frac{a}{p_1}\right)^3 (1-e_1^2)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}} \left[(e^2 - \sin^2 i) \sin 2\omega + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{5} (1-e^2) \right], \\
\Delta e_2(T_1) &= \frac{15}{4} \pi \frac{T_1}{T} \frac{\mu_1}{\mu} \left(\frac{a}{p_1}\right)^3 (1-e_1^2)^{\frac{3}{2}} e (1-e^2)^{\frac{1}{2}} \sin^2 i \sin 2\omega, \\
\Delta a_2(T_1) &= 0.
\end{aligned} \right\} (4.26)$$

Пример. Рассмотрим орбиту ИСЗ с параметрами:

$$a = 7350 \text{ км}; \quad e = 0,1; \quad \frac{T_{\text{Луны}}}{T_{\text{сп}}} = 410; \quad \frac{T_{\text{Солн}}}{T_{\text{сп}}} = 5000.$$

Результаты расчетов влияния Луны и Солнца на движение спутника сведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2

Название элемента	Изменение за один оборот спутника		Изменение за один оборот возмущающего тела	
	влияние Луны	влияние Солнца	влияние Луны	влияние Солнца
Долгота узла Ω	$<0,17''$	$<0,08''$	$<34''$	$<3,2'$
Угловое расстояние перигея от узла ω	$<0,29''$	$<0,14''$	$<2'$	$<11,3'$
Наклонение орбиты i	$<0,17''$	$<0,08''$	$<0,43''$	$<2,4''$
Эксцентриситет орбиты e	$<2 \cdot 10^{-7}$	$<0,93 \cdot 10^{-7}$	$<0,41 \cdot 10^{-4}$	$<2,31 \cdot 10^{-4}$
Перигейное расстояние орбиты спутника $r_{\text{п}}$	$<1,5 \text{ м}$	$<0,6 \text{ м}$	$<0,3 \text{ км}$	$<1,7 \text{ км}$
	Суммарное воздействие $<2,1 \text{ м}$		Суммарное воздействие за 1 год $<5,1 \text{ км}$	

Из табл. 4.2 видно, что, несмотря на незначительное влияние Луны и Солнца при малых промежутках времени (один оборот спутника), при больших временах полета (начиная с месяца), — в точных расчетах орбит уже необходимо учитывать их воздействие на орбиту КА.

В табл. 4.3 приведены вызываемые притяжением Луны максимальные возмущения в периоде T обращения спутника Земли и в его положении для круговых орбит различной высоты (по данным работы [12]).

В табл. 4.3 обозначено:

δl — максимальное смещение спутника вдоль орбиты за один оборот вокруг Земли;

δz — максимальное боковое смещение за то же время;

$\delta\psi = \frac{\delta z}{r}$ — соответствующий угол поворота плоскости орбиты.

Максимальные значения изменения высоты перигея $|\delta h_{\text{п}}|_{\text{max}}$ орбиты ИСЗ за один виток, вызванные притяжением Луны, для орбит с различными высотами в перигее $h_{\text{п}}$ и апогее $h_{\text{а}}$ приведены в табл. 4.4. Для получения возмущений, вызванных притяжением Солнца, необходимо величины, приведенные в табл. 4.3 и 4.4, уменьшить примерно в 2,2 раза.

В табл. 4.5 приведены возмущения элементов орбит фиктивных спутников Луны типа «Эхо-1», для которых отношение поверхности к массе составляет $S/m \approx 100 \text{ см}^2/\text{г}$. Эти результаты были получены методом численного интегрирования с учетом несферичности фигуры Луны, возмущений со стороны Земли и Солнца, а также светового дав-

ления [8, 1]. При этом за фигуру Луны принят равномерно вращающийся однородный трехосный эллипсоид, для которого

$$\frac{C-B}{A}=0,00046; \quad \frac{C-A}{B}=0,00062; \quad \frac{B-A}{C}=0,00016,$$

Таблица 4.3

Высота круговой орбиты h , км	Максимальные возмущения			
	δT , с	δl , м	δz , м	$\delta \psi$, угл. с
0	$9,1 \cdot 10^{-4}$	7,3	1,7	0,05
2000	$3,2 \cdot 10^{-3}$	21	5	0,12
10000	$6,3 \cdot 10^{-2}$	310	72	0,9
20000	0,55	$2,1 \cdot 10^3$	490	3,8
50000	16	$49 \cdot 10^3$	$10 \cdot 10^3$	38,0
100000	290	$570 \cdot 10^3$	$130 \cdot 10^3$	250,0

Таблица 4.4

Высота апогея h_a , км	Изменение высоты перигея для различных h_n в км				
	200	2000	10000	20000	50000
2000	2,5 м	0	—	—	—
10000	34 м	37 м	0	—	—
20000	181 м	206 м	243 м	—	—
50000	2,4 км	2,8 км	4,1 км	5,1 км	0
100000	21,5 км	24,6 км	36,2 км	47,7 км	65,5 км

где A, B, C — моменты инерции Луны относительно главных осей эллипсоида. Полуоси расчетных орбит отнесены к «среднему радиусу Луны» $\rho=1736,6371$ км. Величина $\Omega=171,340^\circ$ определена из условия перпендикулярности линии узлов орбиты спутника к направлению на Солнце, а начальные значения a и e рассчитаны по следующим исходным данным:

- для орбит с малым эксцентриситетом $h_n=500$ км; $h_a=1500$ км;
 - для орбит с большим эксцентриситетом $h_n=500$ км; $h_a=10000$ км,
- где h_n и h_a — высота перицентра и апоцентра спутника над поверхностью Луны в начальный момент времени (на 24,0 октября 1960 г.).

Из приведенных данных видно, что движение спутников устойчиво в рассматриваемом интервале времени.

Третья советская космическая ракета была выведена на орбиту с большой полуосью $a=264600$ км и эксцентриситетом $e=0,822$. В табл. 4.6 приведены полученные численным интегрированием [2] максимальные изменения элементов орбиты третьей космической ракеты за период с 19 октября 1959 г. по 21 января 1960 г. отдельно для лунных и солнечных возмущений, а в табл. 4.7 — элементы ее орбиты до и после сближения с Луной 24 января 1960 г. с учетом только лунных возмущений.

Из этих данных видно, что возмущающее влияние Луны и Солнца было примерно одного порядка, а при тесном сближении с Луной элементы орбиты ракеты существенно изменились.

Для иллюстрации возможного изменения формы орбиты в результате тесных сближений с планетами на рис. 4.13 изображены три орбиты кометы Лекселя [5]:

- орбита I — до первого сближения с Юпитером в 1767 г.;
- орбита II — после первого сближения в 1767 г.;
- орбита III — после второго сближения в 1779 г., когда кратчайшее расстояние до Юпитера составило 0,00489 ае.

Орбиты I, II и III рассчитаны по данным наблюдений в 1770 г.

Таблица 4.5

Изменение орбит ИСЛ за 40 оборотов

Тип орбиты	Начальное значение элементов	Возмущения от фигуры Луны	Возмущения от Земли и Солнца	Суммарные возмущения	Возмущения от светового давления
Полярная орбита с малым эксцентриситетом	$a=1,5758$ $e=0,18271$ $T=0,1487$ $\omega=0$ $\Omega=171,340^\circ$ $\pi=171,340^\circ$ $i=90^\circ$	$-0,0002$ $-10 \cdot 10^{-5}$ 0 $-0,705^\circ$ $+0,003^\circ$ $-0,702^\circ$ $+0,026^\circ$	$-0,0004$ $+14 \cdot 10^{-5}$ 0 $+1,593^\circ$ $+0,011^\circ$ $+1,604^\circ$ $+0,014^\circ$	$-0,0006$ $+4 \cdot 10^{-5}$ 0 $+0,888^\circ$ $+0,014^\circ$ $+0,902^\circ$ $+0,040^\circ$	0 $-2 \cdot 10^{-5}$ 0 $+0,022^\circ$ 0 $+0,022^\circ$ $+0,002^\circ$
Полярная орбита с большим эксцентриситетом	$a=4,0231$ $e=0,67987$ $T=0,6068$ $\omega=0$ $\Omega=171,340^\circ$ $\pi=171,340^\circ$ $i=90^\circ$	$-0,0028$ $-21 \cdot 10^{-5}$ $-0,0006$ $-0,491^\circ$ 0 $-0,491^\circ$ $-0,014^\circ$	$+0,0044$ $+70 \cdot 10^{-5}$ $0,0010$ $+8,905^\circ$ $-0,283^\circ$ $+8,622^\circ$ $-1,822^\circ$	$+0,0016$ $+49 \cdot 10^{-5}$ $+0,0004$ $+8,414^\circ$ $-0,283^\circ$ $+8,131^\circ$ $-1,836^\circ$	0 $+5 \cdot 10^{-5}$ 0 $+0,011^\circ$ $-0,002^\circ$ $+0,009^\circ$ $+0,009^\circ$
Экваториальная орбита с малым эксцентриситетом	$a=1,5758$ $e=0,18271$ $T=0,1487$ $\pi=171,340^\circ$ $i=0$	$+0,0001$ $-3 \cdot 10^{-5}$ $+0,0001$ $+2,052^\circ$ 0	0 $+57 \cdot 10^{-5}$ 0 $+1,559^\circ$ $+0,060^\circ$	$+0,0001$ $+54 \cdot 10^{-5}$ $+0,0001$ $+3,611^\circ$ $+0,060^\circ$	0 $+20 \cdot 10^{-5}$ 0 $+0,031^\circ$ $-0,001^\circ$
Экваториальная орбита с большим эксцентриситетом	$a=4,0231$ $e=0,67987$ $T=0,6068$ $\pi=171,340^\circ$ $i=0$	$-0,0007$ $-6 \cdot 10^{-5}$ $-0,0002$ $+1,004^\circ$ 0	$+0,0041$ $-2346 \cdot 10^{-5}$ $+0,001$ $+6,240^\circ$ $1,539^\circ$	$+0,0034$ $-2352 \cdot 10^{-5}$ $+0,0008$ $+7,244^\circ$ $+1,539^\circ$	0 $+16 \cdot 10^{-5}$ 0 $+0,012^\circ$ 0

- Примечания. 1. В данной таблице $\pi=\Omega+\omega$.
2. Период T —в долях суток.

Таблица 4.6

Изменения элементов орбиты 3-й космической ракеты

Возмущающее тело	$\Delta \Omega$	$\Delta \pi$	Δi	Δe	Δa , км
Луна	$1,34^\circ$	$3,25^\circ$	$2,59^\circ$	$0,043$	8715
Солнце	$1,03^\circ$	$3,78^\circ$	$9,06^\circ$	$0,076$	1515

Таблица 4.7

Элементы орбиты 3-й космической ракеты

Дата	Ω	π	ω	i	a , км	e
21,3 января 1960 г.	$250,9^\circ$	$71,4^\circ$	$180,5^\circ$	$78,8^\circ$	266000	$0,866$
27,3 января 1960 г.	$255,9^\circ$	$176,9^\circ$	$280,9^\circ$	$59,4^\circ$	770000	$0,606$

Из рис. 4.13 видно, что размеры орбиты кометы Лекселя после первого сближения с Юпитером сократились, а после второго сближения — существенно увеличились. Использование тесных сближений с планетами открывает возможность

для маневра космических аппаратов при межпланетных полетах без затраты топлива (не считая затрат на коррекцию).

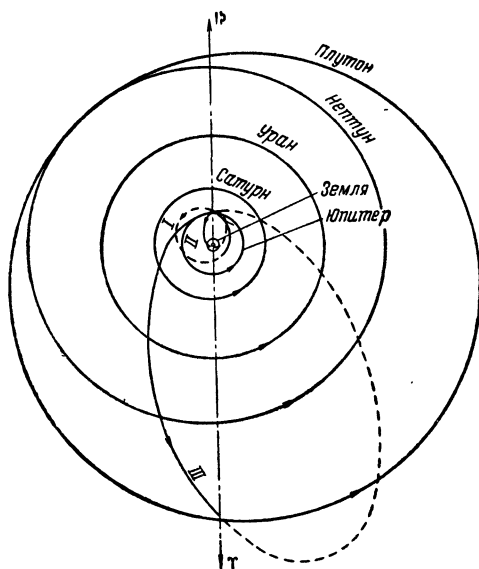


Рис. 4.13. Эволюции орбиты кометы Лекселя

4.5. ВЛИЯНИЕ АНОМАЛИЙ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Несмотря на весьма малую величину этих сил, они (как и другие гравитационные силы), кроме периодических, вызывают заметные вековые возмущения элементов орбит. Слабая изученность аномалий не позволяет надежно выделять эти наиболее существенные возмущения.

В некоторых особо точных расчетах могут представлять интерес и периодические члены, дающие смещения в координатах близкого к Земле спутника несколько десятков и даже сотен метров. Поле аномалий силы тяжести представляется в виде разложения потенциала ΔU по сферическим функциям. В настоящее время из измерений силы тяжести на поверхности Земли и по данным изменений орбит спутников известно некоторое количество первых коэффициентов с большой погрешностью (от 15 до 50%). Эти данные, однако, непрерывно уточняются. Приведем один из методов расчета возмущений за счет влияния аномалий.

Потенциал и ускорения

$$\Delta U = \gamma_m \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r} \right)^{n+1} (\alpha_{nm} \cos m\lambda + \beta_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi);$$

$$S = -\Delta g_r;$$

$$T = \Delta g_r^{\varphi} \cos \delta + \Delta g_r^{\lambda} \sin \delta;$$

$$W = -\Delta g_r^{\lambda} \cos \delta + \Delta g_r^{\varphi} \sin \delta;$$

$$\Delta g_r = \frac{\gamma_m}{R} \sum_{n=2}^{\infty} (n+1) \left(\frac{R}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (\alpha_{nm} \cos m\lambda + \beta_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \varphi);$$

$$\Delta g_r^{\varphi} = \frac{\gamma_m}{R} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (\alpha_{nm} \cos m\lambda + \beta_{nm} \sin m\lambda) P'_{nm}(\sin \varphi);$$

$$\Delta g_r^{\lambda} = \frac{\gamma_m}{R \cos \varphi} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r} \right)^{n+2} \sum_{m=0}^n (-\alpha_{nm} \sin m\lambda + \beta_{nm} \cos m\lambda) m P_{nm}(\sin \varphi).$$

$$\begin{aligned}\Delta\Omega &= \Omega - \Omega_0 = \int_{t_0}^t \frac{r}{V\mu p} \frac{\sin u}{\sin i} (-\Delta g_r^\lambda \cos \delta + \Delta g_r^\varphi \sin \delta) dt; \\ \Delta p &= p - p_0 = 2 \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{p}{\mu}} r (\Delta g_r^\varphi \cos \delta + \Delta g_r^\lambda \sin \delta) dt; \\ \Delta i &= i - i_0 = \int_{t_0}^t \frac{r}{V\mu p} \cos u (-\Delta g_r^\lambda \cos \delta + \Delta g_r^\varphi \sin \delta) dt; \\ \Delta e &= e - e_0 = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -\sin \delta \Delta g_r + \left[\cos \delta + \frac{r}{p} (\cos \delta + e) \right] (\Delta g_r^\varphi \cos \delta + \right. \\ &\quad \left. + \Delta g_r^\lambda \sin \delta) \right\} dt; \\ \Delta \omega &= \omega - \omega_0 = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\frac{1}{e} \cos \delta \Delta g_r + \frac{1}{e} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \delta (\Delta g_r^\varphi \cos \delta + \right. \\ &\quad \left. + \Delta g_r^\lambda \sin \delta) - \frac{r}{p} \operatorname{ctg} i \sin u \left(-\Delta g_r^\lambda \cos \delta + \Delta g_r^\varphi \sin \delta \right) \right] dt; \\ \Delta \bar{u} &= \bar{u} - \bar{u}_0 = \int_{t_0}^t \frac{V\mu p}{r^2} \left[1 - \frac{r^2}{(r)^2} \sqrt{\frac{(p)}{p}} - \frac{r^3}{\mu p} \operatorname{ctg} i \cdot \sin u \times \right. \\ &\quad \left. \times (-\Delta g_r^\lambda \cos \delta + \Delta g_r^\varphi \sin \delta) \right] dt.\end{aligned}$$

Связь времени с углом u

$$t = t_0 + \int_{u_0}^u \frac{r^2 \left[1 + \frac{r^3}{\mu p} \operatorname{ctg} i \sin u (\Delta g_r^\lambda \cos \delta - \Delta g_r^\varphi \sin \delta) \right]^{-1}}{V\mu p} du,$$

$$\cos \delta = \sin i \frac{\cos u}{\cos \varphi}; \quad \sin \delta = \frac{\cos i}{\cos \varphi}.$$

В приведенных формулах:

r — расстояние от центра Земли до спутника;

R — средний радиус Земли;

Δg_r , Δg_r^φ и Δg_r^λ — проекции возмущающей силы в точке пространства с координатами:

широтой φ , долготой λ и радиусом-вектором $\bar{r}$ на радиус-вектор (с минусом), на направление меридиана — к северу и по λ — к востоку;

γ_m — среднее ускорение силы тяжести для поверхности земного эллипсоида;

δ — азимут орбиты в рассматриваемой точке;

$P_{nm}(\sin \varphi)$ — сферическая функция;

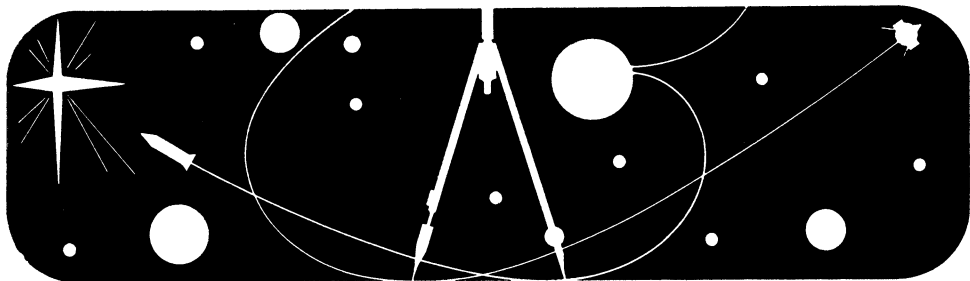
$P'_{nm}(\sin \varphi)$ — ее производная по φ .

Возмущения эллиптических элементов рассчитываются после подстановки выражений для Δg_r , Δg_r^φ , Δg_r^λ в уравнения оскулирующих элементов с помощью квадратур при фиксированных значениях элементов орбиты в правых частях уравнений.

Точность такого метода расчета зависит от величины ошибок в коэффициентах разложения и количества учитываемых членов.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. IV

1. Брумберг В. А., Кирпичников С. Н., Чеботарев Г. А. О движении искусственных спутников Луны.— «Астрономический журнал», т. 38, вып. 1, Изд-во АН СССР, 1961.
 2. Гонтковская В. Т. и Чеботарев Г. А. Лунные и солнечные возмущения в движении третьей советской космической ракеты.— «Астрономический журнал», т. 38, вып. 5. Изд-во АН СССР, 1961.
 3. Дубошин Г. Н. Введение в небесную механику. М., ОНТИ, 1938.
 4. Дубошин Г. Н. и Охоцимский Д. Е. Некоторые проблемы астеродинамики и небесной механики.— «Космические исследования», т. 1, вып. 2. Изд-во АН СССР, 1963.
 5. Казимирчак-Полонская Е. И. Основные задачи исследования сближений комет с большими планетами.— Труды ин-та теорет. астрономии, вып. 7. Изд-во АН СССР, 1961.
 6. Лидов М. Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел.— «Искусственные спутники Земли», вып. 8. Изд-во АН СССР, 1961.
 7. Нумеров Б. В. Новый метод определения орбит и вычисления эфемерид с учетом возмущений.— Труды Гл. Российской астрофиз. обсерватории, I, II, Петроград, 1923.
 8. Поляхова Е. Н. Световое давление и движение искусственных спутников Луны.— Бюлл. института теорет. астрономии, т. 9, № 6 (109). Изд-во АН СССР, 1964.
 9. Субботин М. Ф. Курс небесной механики, т. 3, М., Гостехиздат, 1949.
 10. Тихонравов М. К. и др. Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли. М., «Машиностроение», 1967.
 11. Чеботарев Г. А. Гравитационные сферы больших планет, Луны и Солнца.— «Астрономический журнал», т. X, вып. 5. Изд-во АН СССР, 1963.
 12. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М., «Наука», 1965.
 13. Эрике К. Космический полет, пер. с англ., т. 1. М., Физматгиз, 1963.
-



ГЛАВА V

ВЫБОР МЕЖПЛАНЕТНЫХ ТРАЕКТОРИЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

При выборе межпланетных траекторий космических аппаратов руководствуются, как правило, следующими требованиями:

1. Выведение космических аппаратов на межпланетные траектории должно осуществляться с минимально возможными затратами энергии на разгон, маневры и коррекции траекторий.

2. Время перелета от одной планеты до другой должно обеспечивать выполнение задачи в кратчайшие сроки с максимальной надежностью.

3. Траектории полета должны обеспечивать определенные условия для наблюдения за полетом космических аппаратов, проведение ориентации аппарата в пространстве при коррекции, в сеансах связи, во время проведения научных экспериментов.

4. При полете КА вблизи планеты должны выполняться условия, обеспечивающие посадку на планету, фотографирование ее поверхности или проведение научных экспериментов.

Для выбора межпланетных орбит необходимо проведение расчетов большого числа траекторий.

Массовые расчеты по выбору межпланетных траекторий проводятся по приближенным методикам с использованием кеплеровых орбит. Поскольку активные участки траекторий по времени малы по сравнению с участками свободного полета, влияние их учитывается импульсным приближением.

Траекторию полета к планете можно разбить на *гелиоцентрический* участок, на котором движение КА определяется гравитационным полем Солнца, и *планетоцентрические* участки, на которых движение определяется гравитационными полями планет [1].

Межпланетные траектории удобно разделить на следующие три класса:

1. Траектории полета к планетам без возвращения аппаратов к Земле.

2. Траектории облета планеты и возвращения к Земле без задержки у планеты.

3. Траектории для полетов к планетам и обратно с задержкой у планеты (на ее поверхности или на орбите спутника).

5.1. МЕТОДИКА РАСЧЕТОВ И ВЫБОР ТРАЕКТОРИЙ НА ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКОМ УЧАСТКЕ ПОЛЕТА

5.1.1. Схема приближенных расчетов и принятые допущения

Гелиоцентрический участок траекторий определяет энергетические затраты на выведение на межпланетные траектории, продолжительность полета и даты старта.

При определении гелиоцентрической траектории КА предполагается, что сферы действия планет стянуты в точки, а их гравитационные поля отсутствуют.

В качестве двух независимых параметров принимаются момент старта $t_{ст}$ и время полета $t_{п}$.

При известном положении планет на момент $t_{ст}$ и момент прилета к планете $t_{пр} = t_{ст} + t_{п}$ определение орбиты сводится к известной задаче теоретической астрономии: по двум положениям КА в моменты $t_{ст}$ и $t_{пр}$ определить его орбиту — задача Эйлера — Ламберта.

Положение космического аппарата или планеты в пространстве в любой момент времени можно определить, если известны шесть элементов:

- долгота восходящего узла орбиты Ω ;
- наклонение орбиты к плоскости эклиптики i ;
- долгота перицентра π ;

- большая полуось орбиты a ;
- эксцентриситет орбиты e ;
- время прохождения через перигей τ_π .

Элементы Ω и i определяют положение плоскости орбиты в пространстве относительно выбранной системы координат. Элемент π определяет положение в плоскости орбиты фокальной оси. Элементы a и e характеризуют энергетику орбиты и ее форму. Элемент τ_π позволяет определить положение КА или планеты на орбите в любой момент времени.

Для расчетов можно принять гелиоцентрическую эклиптическую систему координат, ось x которой направлена в точку весеннего равноденствия. Средние элементы орбит планет рассчитываются на определенную эпоху.

5.1.2. Определение координат и компонент скоростей планет и космического аппарата для заданного момента времени по элементам орбиты

Пусть известны элементы орбиты Ω , i , π , a , e , τ_π . Тогда для любого заданного момента времени t , решая уравнение Кеплера

$$t - \tau_\pi = \frac{T}{2\pi} (E - e \sin E),$$

(T — период обращения)

можно найти эксцентрическую аномалию E .

Далее находят ϑ , r , V_r , V_n в результате решения уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}; \\ r &= \frac{p}{1+e \cos \vartheta} = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos \vartheta}; \\ V_r &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta; \\ V_n &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1+e \cos \vartheta), \end{aligned}$$

где ϑ — истинная аномалия планеты;

r — расстояние от планеты до Солнца;

p — параметр орбиты;

V_r — радиальная составляющая скорости;

V_n — тангенциальная составляющая скорости.

Затем, имея в виду, что $u = \omega + \vartheta$ и $\omega = \pi - \Omega$, получим координаты и компоненты скоростей планеты:

$$\begin{aligned} x &= r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i); \\ y &= r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i); \\ z &= r \sin u \sin i; \end{aligned}$$

$$V_x = V_r (\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i) - V_n (\sin u \cos \Omega + \cos u \sin \Omega \cos i);$$

$$V_y = V_r (\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i) - V_n (\sin u \sin \Omega - \cos u \cos \Omega \cos i);$$

$$V_z = V_r \sin u \sin i + V_n \cos u \sin i.$$

После подстановки в правые части элементов соответствующих орбит можно найти координаты x , y , z и компоненты вектора скорости $V_x V_y V_z$ для заданного момента времени.

5.1.3. Определение диапазонов дат старта и времени полета

Даты старта и времена полета к планетам, близкие к оптимальным в отношении энергетических затрат на выведение, можно приближенно определить из простых соотношений для оптимального эллипса перелета с одной орбиты на другую при минимальных затратах энергии — эллипса Хоманна.

Поскольку плоскости орбит планет имеют малый наклон к эклиптике и незначительные эксцентриситеты, то можно принять, что планеты движутся по круговым орбитам в плоскости эклиптики. При этом угловая дальность перелета $2f$ и большая полуось эллипса перелета a определяются по формулам

$$2f = \pi \quad \text{и} \quad a = \frac{r_A + r_B}{2},$$

где r_A и r_B — радиусы круговых орбит, на которых находятся точка старта A и точка прилета B .

Время полета t_n по такой траектории от точки старта до точки прилета составит полупериод

$$t_n = \frac{\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}},$$

где μ — гравитационная постоянная Солнца.

Приближенно периодичность циклов межпланетных перелетов можно определить следующим образом. Пусть начальные положения планет характеризуются гелиоцентрическими долготами планеты отправления l_1 и планеты назначения l_2 для опорного момента t_0 (рис. 5.1). Начальное положение КА в момент старта

$$l_A = l_1 + \omega_1 t_{\text{ст}},$$

а в момент прилета

$$l_B = l_2 + \omega_2 (t_{\text{ст}} + t_n),$$

где ω_1 и ω_2 — средние угловые движения планет;

$t_{\text{ст}}$ — время старта, отсчитываемое от t_0 .

Тогда

$$t_{\text{ст}} = \frac{l_2 + l_1 + \omega_2 t_n + \pi(2n - 1)}{|\omega_1 - \omega_2|},$$

где n — число витков.

В этом случае периодичность оптимальных дат старта соответствует синодическому обращению планеты назначения.

Таким способом дату старта можно определить лишь приближенно. В дальнейшем учитывается движение планет по эллиптическим орбитам, наклоненным к плоскости эклиптики. Для проведения расчетов необходимо задать вблизи полученных значений определенный диапазон времени полета и дат старта, в котором и проводятся исследования траекторий. Обычно эти диапазоны составляют один-два месяца.

5.1.4. Определение геометрических характеристик орбиты космического аппарата

Пусть моменту времени $t_{\text{ст}}$ соответствует радиус-вектор $\vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$, а моменту времени $t_{\text{пр}}$ — радиус-вектор $\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 5.2). Поскольку r_1 и r_2 лежат в плоскости орбиты КА, то можно легко определить ее элементы i и Ω .

Плоскость орбиты КА определяется векторным произведением $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$. Составляющие его по осям координат:

$$c_x = y_1 z_2 - z_1 y_2;$$

$$c_y = z_1 x_2 - x_1 z_2;$$

$$c_z = x_1 y_2 - y_1 x_2,$$

а модуль векторного произведения

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}.$$

Угол наклона i плоскости орбиты определится как угол между вектором $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$ и осью z из уравнения

$$\cos i = \frac{c_z}{c}, \quad 0 \leq i \leq \pi.$$

Долгота восходящего узла орбиты Ω находится из уравнений

$$\sin \Omega = \frac{c_x}{c \sin i}; \quad \cos \Omega = -\frac{c_y}{c \sin i}, \quad 0 \leq \Omega \leq 2\pi.$$

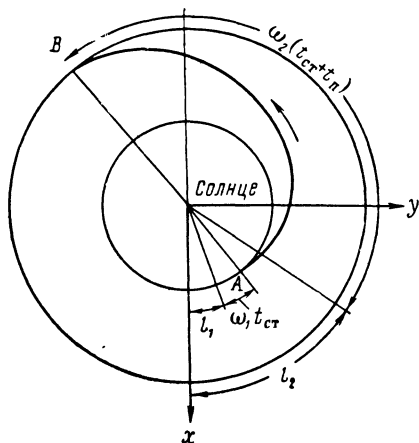


Рис. 5.1.

Угловая дальность полета $2f$ находится из уравнений:

$$\sin 2f = \frac{c}{r_1 r_2};$$

$$\cos 2f = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2}, \quad 0 \leq 2f \leq 2\pi,$$

где $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$; $r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$.

По долготе восходящего узла орбиты Ω и радиусу-вектору любой j -й точки на орбите $r_j(x_j, y_j, z_j)$ определяется аргумент широты этой точки:

$$\sin u_j = \frac{y_j \cos \Omega - x_j \sin \Omega}{r_j \cos i};$$

$$\cos u_j = \frac{x_j \cos \Omega + y_j \sin \Omega}{r_j \cos i}, \quad 0 \leq u_j \leq 2\pi.$$

5.1.5. Определение большой полуоси орбиты космического аппарата

Большую полуось орбиты можно найти из уравнения Эйлера—Ламберта [3]

$$t_2 - t_1 = t_n =$$

$$= \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [\varepsilon - \delta - (\sin \varepsilon - \sin \delta) + 2\pi n].$$

Рис. 5.2.

Здесь n — число полных оборотов, совершаемых КА по орбите с момента старта до встречи с планетой назначения;

$$\varepsilon = \arccos \left[1 - \frac{r_1 + r_2 + \sigma}{2a} \right];$$

$$\delta = \arccos \left[1 - \frac{r_1 + r_2 - \sigma}{2a} \right],$$

где $\sigma = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2f}$.

В качестве первого приближенного значения a принимается

$$a_{\min} = \frac{r_1 + r_2 + \sigma}{2}.$$

Особые трудности возникают при определении углов ε и δ из-за неоднозначности решений уравнения Ламберта. На рис. 5.3 представлены все возможные случаи перелета. На нем обозначено:

A — точка старта КА;

B — точка прилета КА;

F — фокус эллиптической орбиты, в котором находится центр притяжения;

F' — свободный фокус.

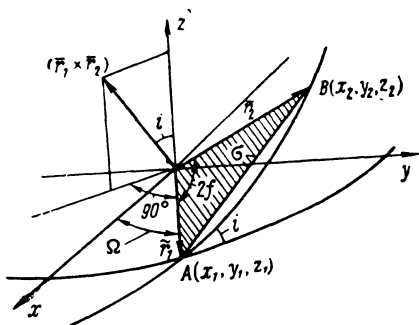
В приведенных на рис. 5.3 случаях 2 и 5 движение КА происходит по эллиптическим орбитам с минимально возможным $a = a_{\min}$.

Случаи 1, 2, 3 соответствуют встрече с планетой назначения на первом полувитке межпланетной орбиты, а случаи 4, 5, 6 — встрече на втором полувитке. Для орбит перелета при встрече с планетой на первом полувитке $0 < \delta < \pi$, $-\pi < \delta < 0$. Случаям 1 и 4 (свободный фокус орбиты лежит за пределами сегмента, ограниченного хордой σ и дугой AB) соответствует $0 < \varepsilon < \pi$, случаям 3 и 6 (свободный фокус орбиты лежит внутри этого сегмента) $\pi < \varepsilon < 2\pi$.

При встрече с планетой назначения на первом полувитке и времени полета $t < t^*$ (где t^* соответствует полету с $a = a_{\min}$) в случае $2f < \pi$ необходимо принимать $0 < \varepsilon < \pi$ и $0 < \delta < \pi/2$, а в случаях $2f > \pi$ принимать $0 < \varepsilon < \pi$ и $3/2\pi < \delta < 2\pi$.

При временах полета $t > t^*$ в случае $2f < \pi$ необходимо принимать $\pi < \varepsilon < 2\pi$ и $0 < \delta < \pi/2$, а в случае $2f > \pi$ принимать $\pi < \varepsilon < 2\pi$ и $3/2\pi < \delta < 2\pi$.

При встрече с планетой назначения на втором и последующих витках число решений увеличивается. Так, при встрече на втором витке одним и тем же значениям t_1 , r_1 , r_2 , $\sigma(2f)$ будут соответствовать четыре эллиптические орбиты, отличающиеся величинами больших полуосей, причем две из них будут соответствовать встрече на третьем полувитке и две — на четвертом полувитке.



После подсчета t^* можно определить диапазоны значений ε и δ из следующей таблицы:

Значение $2f$	$t > t^*$		$t < t^*$	
	ε	δ	ε	δ
$2f < \pi$	$\pi < \varepsilon < 2\pi$	$0 < \delta < \pi/2$	$0 < \varepsilon < \pi$	$0 < \delta < \pi/2$
$2f > \pi$	$\pi < \varepsilon < 2\pi$	$3/2\pi < \delta < 2\pi$	$0 < \varepsilon < \pi$	$3/2\pi < \delta < 2\pi$

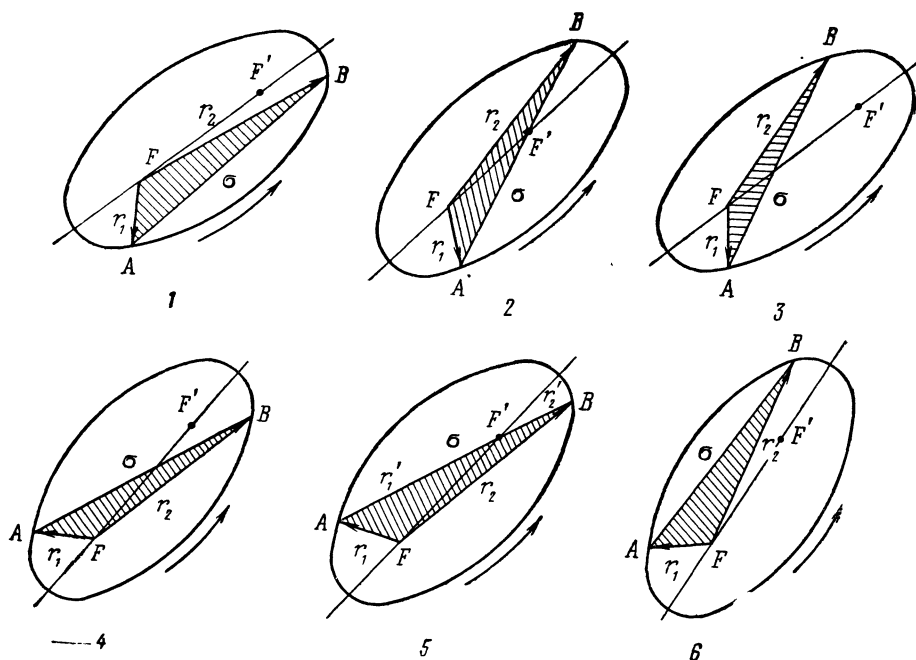


Рис. 5.3.

Проводя последовательные приближения, можно определить a с любой наперед заданной точностью.

5.1.6. Определение параметра, эксцентриситета и истинной аномалии орбиты КА

Для определения параметра p можно воспользоваться формулой, связывающей p с характерными углами f и g , а также с r_1, r_2 ; она получается при выводе уравнений Ламберта [3] и имеет вид

$$p = \frac{r_1 r_2 \sin^2 f}{a \sin^2 g},$$

где $g = \frac{\varepsilon - \delta}{2}$ (углы ε и δ должны соответствовать значению полученной большой полуоси a).

Эксцентриситет орбиты находится по соотношению

$$e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}.$$

Значения истинных аномалий ϑ_1 и ϑ_2 , соответствующих старту и прилету КА, определяются из соотношений

$$\cos \vartheta_1 = \frac{p - r_1}{r_1 e};$$

$$\cos \vartheta_2 = \frac{p - r_2}{r_2 e}.$$

Так как $\sin \vartheta_1 = \frac{\cos 2f \cos \vartheta_1 - \cos \vartheta_2}{\sin 2f}$; $\vartheta_2 = \vartheta_1 + 2f$, то

$$\omega = u_1 - \vartheta_1 = u_2 - \vartheta_2.$$

Долгота перицентра $\pi = \Omega + \omega$.

Время прохождения через перицентр τ_π определяется из уравнения Кеплера при $t = t_{ст}$ и $\vartheta = \vartheta_1$.

Таким образом, по двум положениям КА в момент старта и в момент прилета найдены все шесть элементов орбиты КА на гелиоцентрическом участке полета: $\Omega, i, \pi, a, e, \tau_\pi$.

5.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ПЛАНЕТОЦЕНТРИЧЕСКИХ УЧАСТКОВ ТРАЕКТОРИИ

5.2.1. Определение составляющих вектора относительной скорости КА у планет

По формулам, приведенным в разд. 5.1.2, для заданных моментов времени старта $t_{ст}$ и времени прилета $t_{пр}$ определяются значения векторов орбитальных скоростей планет $\bar{V}_A, \bar{V}_B$ и космического аппарата $\bar{V}_{ан}$.

Векторы скоростей аппарата относительно планет в моменты старта и прилета получаются как разности векторов орбитальных скоростей планеты и КА:

$$\bar{V}_{1отн} = \bar{V}_{1ан} - \bar{V}_A; \quad \bar{V}_{2отн} = \bar{V}_{2ан} - \bar{V}_B.$$

Полученные скорости принимаются за планетоцентрические скорости аппарата, определенные на «бесконечности»:

$$\bar{V}_{1отн} = \bar{V}_{1\infty}; \quad \bar{V}_{2отн} = \bar{V}_{2\infty}.$$

Величины скоростей $\bar{V}_{1\infty}$ и $\bar{V}_{2\infty}$ определяют энергию гиперболических траекторий КА на планетоцентрических участках:

$$E_1 = \frac{V_{1\infty}^2}{2}; \quad E_2 = \frac{V_{2\infty}^2}{2}.$$

5.2.2. Определение параметров траектории КА на геоцентрическом участке полета

Для того чтобы обеспечить необходимый вектор скорости $\bar{V}_{1\infty}$ при отлете от Земли и выполнить требования, определяемые условиями старта, а также условиями наблюдения за КА в полете, необходимо учитывать следующее:

1. Выведение КА на межпланетные траектории в общем случае производится в два этапа. На первом этапе последняя ступень ракеты-носителя вместе с КА выводится на орбиту искусственного спутника Земли. Затем последняя ступень обеспечивает выведение КА с этой орбиты на гиперболическую геоцентрическую траекторию.

2. После выведения КА на гиперболическую траекторию должна быть обеспечена радиовидимость на начальном участке полета с пунктов связи.

Все расчеты, связанные с определением параметров траектории, удобно производить в геоцентрической экваториальной системе координат с осью x , направленной в точку весеннего равноденствия.

Определение параметров траектории производится следующим образом. Вектор относительной скорости $\bar{V}_{1\infty}$ переводится из эклиптической системы координат в экваториальную

$$\bar{V}'_{1\infty} = l \bar{V}_{1\infty},$$

где $\bar{V}'_{1\infty}$ — вектор скорости в экваториальной системе координат;
 l — матрица ортогонального преобразования,

$$l = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \epsilon - \sin \epsilon \\ 0 & \sin \epsilon & \cos \epsilon \end{vmatrix}.$$

Угол ϵ определяет наклон плоскости эклиптики к экватору.

По компонентам вектора скорости $\bar{V}'_{1\infty}$ определяется его склонение δ_∞ и прямое восхождение α_∞ на «бесконечности» из соотношений

$$\sin \delta_{\infty} = \frac{V'_z}{|\bar{V}'_{1\infty}|}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \delta \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\operatorname{tg} \alpha_{\infty} = \frac{V'_{1y}}{V'_{1x}};$$

$$\cos \alpha_{\infty} = \frac{V'_{1x}}{\sqrt{V'^2_{1x} + V'^2_{1y}}}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

Из сферической тригонометрии

$$\sin u_{\infty} = \frac{\sin \delta_{\infty}}{\sin i}.$$

Для выполнения условий выведения необходимо принять

$$u_{\infty} = \pi - \arcsin \sin u_{\infty}.$$

Из уравнения энергии определяем полуось a орбиты и величину скорости $V_{1\kappa}$ на высоте h_{κ} (в конце активного участка)

$$a = -\frac{\mu}{V_{1\infty}^2}; \quad V_{1\kappa} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_{\kappa}} - \frac{1}{a} \right)}; \quad r_{\kappa} = R + h_{\kappa},$$

где R — радиус Земли, и далее эксцентриситет e и фокальный параметр p орбиты:

$$e = \sqrt{1 + \frac{r_{\kappa}^2 V_{1\kappa}^2 \cos^2 \theta_{\kappa}}{a\mu}};$$

$$p = a(1 - e^2),$$

где θ_{κ} — угол между вектором скорости $\bar{V}_{1\kappa}$ и местным горизонтом в начале пассивного участка полета.

По формуле

$$\cos \vartheta = \frac{p - r}{re} = \frac{p}{re} - \frac{1}{e}$$

определяется истинная аномалия в начале свободного участка траектории полета при $r = r_{\kappa}$, $\vartheta = \vartheta_{\kappa}$ и при $r = \infty$, $\vartheta = \vartheta_{\infty}$, где $0 \leq \vartheta \leq \pi$. Затем находятся долгота перигея орбиты

$$\omega = u_{\infty} - \vartheta_{\infty}$$

и аргумент широты точки конца активного участка полета

$$u_{\kappa} = \omega + \vartheta_{\kappa}.$$

Долгота восходящего узла орбиты определяется из соотношений

$$\sin \Omega = V_1 \frac{V_{y1} \cos u_{\infty} - V_{x1} \sin u_{\infty} \cos i}{V_{x1}^2 + V_{y1}^2};$$

$$\cos \Omega = V_1 \frac{V_{x1} \cos u_{\infty} + V_{y1} \sin u_{\infty} \cos i}{V_{x1}^2 + V_{y1}^2};$$

$$0 \leq \Omega \leq 2\pi.$$

Широту конца активного участка полета φ_{κ} , которая определяет условия наблюдения за КА, можно определить по формуле

$$\sin \varphi_{\kappa} = \sin u_{\kappa} \sin i; \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi_{\kappa} \leq \frac{\pi}{2}.$$

5.2.3. Определение параметров планетоцентрической траектории на участке полета у планеты назначения

Планетоцентрическую траекторию КА следует выбирать таким образом, чтобы можно было обеспечить, например, фотографирование планеты при пролете около нее (для пролетного варианта) или осуществить посадку в заданный район на ее поверхности (для падающего варианта).

Движение КА около планеты удобно рассматривать в планетоцентрической системе координат $O\xi\eta\zeta$, выбранной следующим образом. Ось ζ направлена в сторону век-

тора относительной скорости $\bar{V}_2$ и параллельна ему. Направление осей η и ξ определяется векторными произведениями:

$$\bar{\eta} = \frac{\bar{r}_c \times \bar{V}_2}{|\bar{r}_c \times \bar{V}_2|}, \quad \bar{\xi} = \frac{\bar{\eta} \times \bar{V}_2}{|\bar{\eta} \times \bar{V}_2|},$$

где $\bar{r}_c$ — радиус-вектор планеты в момент прилета КА.

Ось ζ определяет положение в пространстве так называемой «картинной плоскости». Если не учитывать притяжение планеты, т. е. рассматривать гелиоцентрический участок полета, то координаты ξ и η КА в картинной плоскости характеризуют отклонения траектории от попадающей в центр планеты.

Параметры планетоцентрической траектории определяются следующим образом. Положение плоскости орбиты в пространстве относительно координат $O\xi\eta\zeta$ определяется формулами:

$$i = \frac{\pi}{2}; \quad \sin \Omega = \frac{\eta}{b};$$

$$\cos \Omega = \frac{\xi}{b},$$

где $b = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ — прицельная дальность.

Аргумент широты радиуса-вектора на бесконечности u_∞ равен:

$$u_\infty = -\frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi.$$

Большая полуось орбиты a и эксцентриситет e находятся из соотношений

$$a = -\frac{\mu}{V_2^2}; \quad e = \frac{1}{\sin \gamma};$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a}{b}.$$

Истинная аномалия ϑ_∞ определяется из соотношения

$$\cos \vartheta_\infty = \frac{1}{e}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \vartheta_\infty \leq \pi.$$

Долгота перицентра орбиты

$$\omega = u_\infty - \vartheta_\infty.$$

Для пролетного варианта с целью увеличения продолжительности фотографирования необходимо, чтобы КА пролетал над освещенной частью планеты в течение максимально возможного времени. Это условие может быть выполнено в том случае, если плоскость орбиты нормальна терминатору планеты, т. е. плоскость орбиты должна совпадать с плоскостью $\xi O \zeta$. В этом случае при заданном минимальном расстоянии полета в периге r_π можно записать соотношения

$$\sin \gamma = \frac{1}{1 + \frac{2\mu}{a}}; \quad \xi = b = \frac{a}{\operatorname{tg} \gamma}; \quad \eta = 0,$$

которые позволяют определить положение аппарата в картинной плоскости, соответствующее траектории при фотографировании планеты. Условия прохождения аппарата через заданную точку в картинной плоскости могут быть обеспечены коррекцией траектории.

Для того чтобы обеспечить наивыгоднейшие условия радиосвязи с КА после посадки на планету для попадающего варианта, необходимо, чтобы угол λ между направлением на Землю и местной вертикалью в точке посадки был минимальным. В картинной плоскости траектории, обеспечивающей указанное условие, будет соответствовать точка с координатами ξ' и η' . Положение плоскости такой траектории определяется как

$$\bar{\eta}' = \frac{\bar{r}_3 \times \bar{V}_2}{|\bar{r}_3 \times \bar{V}_2|},$$

где $\bar{r}_3$ — радиус-вектор Земля — планета, а линия пересечения ее с картинной плоскостью как

$$\bar{\xi}' = \frac{\bar{\eta}' \times \bar{V}_2}{|\bar{\eta}' \times \bar{V}_2|}.$$

Значение прицельной дальности b можно определить, решая совместно систему уравнений

$$R_{пл} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\vartheta_\infty - \vartheta)};$$

$$\sin \gamma = \cos \vartheta_\infty \quad \text{при} \quad \frac{3}{2} \pi \leq \vartheta_\infty \leq 2\pi;$$

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg} \gamma}.$$

где γ — угол между вектором скорости и радиусом-вектором Земля — планета;

$R_{пл}$ — радиус планеты назначения.

По значению b и положению плоскости орбиты определяются координаты ξ' и η' .

Неточностью определения фактической траектории после коррекции в картинной плоскости определяется область возможных траекторий. Поэтому при изучении свойств траекторий вблизи планеты рассматриваются несколько наиболее характерных траекторий на границе и в центре этой области.

5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОЦЕНТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ, ХАРАКТЕРИЗУЮЩИХ ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

5.3.1. Параметры, характеризующие полет на геоцентрическом участке

При движении КА на геоцентрическом участке траектории наиболее важными являются данные, которые определяют условия ориентации, наблюдения за его полетом, радиосвязи с наземными измерительными пунктами (НИП), а также данные, которые влияют на работу бортовых систем.

Поскольку полет КА на приземном участке (до расстояний 100—150 тыс. километров) продолжается несколько часов, можно принять, что движение КА происходит относительно Земли, положение которой на орбите фиксировано на момент старта.

Решая уравнение Кеплера для гиперболической орбиты и определяя координаты КА, можно вычислить на любой момент времени расстояние КА — Земля. При небольшом удалении КА от Земли можно принять, что гелиоцентрические радиусы-векторы КА и Земли параллельны друг другу. Тогда угол Солнце — КА — Земля можно определить из скалярного произведения радиусов-векторов $\vec{r}_{01}$ и $\vec{r}_1$

$$\cos \alpha = - \frac{x_{01}x_1 + y_{01}y_1 + z_{01}z_1}{|\vec{r}_{01}| |\vec{r}_1|},$$

где $\vec{r}_{01}$ — гелиоцентрический радиус-вектор КА;

$\vec{r}_1$ — гелиоцентрический радиус-вектор Земли, определенный на момент старта.

Фазовый угол Земли в этом случае будет

$$\Phi = \pi - \alpha.$$

При определении расстояний $Q_{и.п}$ от измерительного пункта (ИП) до КА, углов места $\psi_{и.п}$ относительно пункта, а также углов Солнце — КА — пункт можно пользоваться следующими зависимостями:

$$Q_{и.п} = \sqrt{(x_{01} - x_{и.п})^2 + (y_{01} - y_{и.п})^2 + (z_{01} - z_{и.п})^2};$$

$$\cos \left(\psi_{и.п} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{x_{и.п}(x_{01} - x_{и.п}) + y_{и.п}(y_{01} - y_{и.п}) + z_{и.п}(z_{01} - z_{и.п})}{|\vec{R}_{и.п}| Q_{и.п}};$$

$$\cos \alpha_{и.п} = \frac{x_1(x_0 - x_{и.п}) + y_1(y_0 - y_{и.п}) + z_1(z_0 - z_{и.п})}{Q_{и.п} |\vec{r}_1|},$$

где $R_{и.п}(x_{и.п}, y_{и.п}, z_{и.п})$ — текущие координаты пункта.

Координаты измерительных пунктов в геоцентрической экваториальной системе можно рассчитать следующим образом. На начало даты старта определяется звездное время $t_{зв}$, которое соответствует угловому положению гринвичского меридиана от направления в точку весеннего равноденствия, и часовое изменение звездного времени $\Delta t_{зв}$. Зная географические широту $\varphi_{и.п}$ и долготу $\beta_{и.п}$ и время старта $\tau_{ст}$ для любого момента времени $t_{п}$, можно записать:

$$x_{и.п} = R \cos \varphi_{и.п} \cos [t_{зв} + (\Delta t_{зв} + \omega)(\tau_{ст} + t_{п}) + \beta_{и.п}];$$

$$y_{и.п} = R \cos \varphi_{и.п} \sin [t_{зв} + (\Delta t_{зв} + \omega)(\tau_{ст} + t_{п}) + \beta_{и.п}];$$

$$z_{и.п} = R \sin \varphi_{и.п}.$$

5.3.2. Параметры, характеризующие полет на гелиоцентрическом участке

Для обеспечения наилучших условий радиосвязи с КА, а также для составления программы сеансов связи в случае полета нескольких космических аппаратов необходимо знать условия их радиовидимости из пункта связи. Эти условия характеризуются продолжительностью интервала радиовидимости и положением этого интервала в течение каждых суток полета. Положение интервала видимости зависит от кульминации КА относительно пункта связи.

Для упрощения расчетов можно сделать следующие допущения, не приводящие к существенной потере точности:

— положения Земли и КА на орбитах, определенные в выбранный момент времени, считаются фиксированными в течение суток;

— плоскость гринвичского меридиана в 0 часов Всемирного времени параллельна радиусу-вектору Земли.

Тогда верхняя кульминация t_k космического аппарата определяется следующим образом.

Для заданного момента определяются координаты Земли и КА. Затем, осуществив переход от эклиптической системы координат к экваториальной и найдя положение КА относительно Земли, можно воспользоваться следующим соотношением:

$$t_k = \alpha_0 - \alpha_1 - \beta_{и.п.},$$

где t_k — верхняя кульминация КА для пункта связи по Всемирному времени;

α_1 — прямое восхождение Земли;

α_0 — прямое восхождение КА относительно Земли;

$\beta_{и.п.}$ — географическая широта измерительного пункта.

Значения α_1 и α_0 определяются из формул:

$$\cos \alpha_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}; \quad \cos \alpha_0 = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}};$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}; \quad \sin \alpha_0 = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}};$$

$$0 \leq \alpha_1 \leq 2\pi;$$

$$0 \leq \alpha_0 \leq 2\pi,$$

где x_1, y_1, z_1 — координаты Земли в экваториальной системе координат;

x_0, y_0, z_0 — координаты КА относительно Земли в экваториальной системе координат.

Продолжительность радиовидимости t_v КА можно определить из выражения

$$\cos \frac{t_v}{2} \omega_3 = \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} - \Delta\psi \right) - \sin \delta_0 \sin \varphi_{и.п.}}{\cos \delta_0 \sin \varphi_{и.п.}},$$

где ω_3 — угловая скорость вращения Земли;

$\varphi_{и.п.}$ — географическая широта измерительного пункта;

δ_0 — склонение КА относительно Земли;

$\Delta\psi$ — угол места, соответствующий началу и концу радиовидимости.

Значение δ_0 определяется из выражения

$$\sin \delta_0 = \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}.$$

Зная t_k и t_v , можно найти момент начала $t_{н.в}$ и конца $t_{к.в}$ радиовидимости КА:

$$t_{н.в} = t_k - \frac{t_v}{2}; \quad t_{к.в} = t_k + \frac{t_v}{2}.$$

При определении параметров радиолинии борт КА — Земля необходимо располагать данными об изменении значений угла Солнце — КА — Земля, а также расстояний в течение всего времени полета. Кроме того, для определения условий ориентации КА как во время радиосвязи с Землей, так и при проведении коррекции траектории необходимо знать углы Солнце — КА — звезда (планета) γ_i , фазовые углы планет Φ_i и звездные величины звезд и планет m_i (с космического аппарата). Определяя координаты КА и планет для различных моментов времени и зная средние места наиболее ярких звезд, для планет можно вычислить значения γ_i, Φ_i из следующих соотношений:

$$\cos \gamma_i = \frac{(x_1 - x_0)x_0 + (y_1 - y_0)y_0 + (z_1 - z_0)z_0}{r_0 r_{i0}};$$

$$\cos \Phi_i = \frac{(x_1 - x_0)x_i + (y_1 - y_0)y_i + (z_1 - z_0)z_i}{r_i r_{i0}};$$

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2};$$

$$r_{i0} = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2};$$

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2},$$

где x_i, y_i, z_i — координаты i -й планеты в экваториальной системе координат.

При определении углов Солнце — КА — звезда в связи с большими расстояниями до звезд можно пользоваться формулой

$$\cos \gamma_i = \frac{l_i x_0 + m_i y_0 + n_i z_0}{r_0},$$

где l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы вектора — направления на звезду.

Звездные величины планет (Венеры, Земли, Марса и Юпитера) можно рассчитать по следующим формулам:

$$m_B = -4,14 + 5 \lg r_B r_{B0} + 0,09 \frac{\Phi_B}{100} + 2,39 \left(\frac{\Phi_B}{100} \right)^2 - 0,05 \left(\frac{\Phi_B}{100} \right)^3;$$

$$m_3 = -3,87 + 5 \lg r_3 r_{30} + 1,3 \frac{\Phi_3}{100} + 0,19 \left(\frac{\Phi_3}{100} \right)^2 + 0,48 \left(\frac{\Phi_3}{100} \right)^3;$$

$$m_M = -1,52 + 5 \lg r_M r_{M0} + 2,8 \frac{\Phi_M}{100} - 1,6 \left(\frac{\Phi_M}{100} \right)^2 + 1,3 \left(\frac{\Phi_M}{100} \right)^3;$$

$$m_{Ю} = -9,1 + 5 \lg r_{Ю} r_{Ю0} + 0,015 \Phi_{Ю},$$

где $\Phi_B, \Phi_3, \Phi_M, \Phi_{Ю}$ — фазовые углы Венеры, Земли, Марса, Юпитера (с КА);

$r_{B0}, r_{30}, r_{M0}, r_{Ю0}$ — расстояние от КА соответственно до Венеры, Земли, Марса, Юпитера;

$r_B, r_3, r_M, r_{Ю}$ — расстояние от Солнца соответственно до Венеры, Земли, Марса, Юпитера.

5.3.3. Параметры, характеризующие полет космического аппарата на планетоцентрическом участке траектории вблизи планет назначения

По известным элементам планетоцентрической траектории можно определить параметры, характеризующие условия для фотографирования планеты или условия посадки на ее поверхность.

При выборе программы сеанса фотографирования основными параметрами, определяющими схему ориентации КА, начало и продолжительность сеанса фотографирования, являются расстояния КА — планета, положение аппарата относительно планеты и ее фазовый угол (с борта КА). Как и в случае полета на гелиоцентрическом участке, положение планеты на своей орбите можно считать фиксированным на момент, соответствующий пролету КА на минимальном удалении от планеты.

Движение КА по планетоцентрической траектории удобно рассматривать в системе координат $O\xi\eta\zeta$. При этом необходимо рассматривать центральную и крайние траектории трубки радиусом $\Delta\varrho$, величина которого зависит от точности определения действительной траектории.

Решая уравнение Кеплера для заданных моментов времени и находя ϑ и r , а также учитывая, что $u = \vartheta + \omega$, можно определить координаты КА из следующих соотношений:

$$\xi_0 = r \cos u \cos \varrho;$$

$$\eta_0 = r \cos u \sin \varrho;$$

$$\zeta_0 = r \sin u.$$

Значение угла Солнце — планета — КА (угол фазы планеты) находится из выражения

$$\cos \beta = \frac{\xi_C \xi_0 + \eta_C \eta_0 + \zeta_C \zeta_0}{\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2} \cdot \sqrt{\xi_C^2 + \eta_C^2 + \zeta_C^2}},$$

где ξ_C, η_C, ζ_C — координаты Солнца в планетоцентрической системе координат.

Приняв за начальный момент время прохождения космическим аппаратом сферы действия планеты, можно построить траектории движения и отметить на них положения КА на различные моменты времени. Кроме того, для тех же моментов времени можно построить значения углов Солнце — планета — КА.

Для определения условий посадки КА на поверхность планеты и составления программы подлетного сеанса необходимо, как и в случае пролетного варианта, знать расстояние КА — планета и положение КА относительно планеты для различных моментов времени. Кроме того, для расчета атмосферного участка полета необходимо иметь значение скорости входа $V_{вх}$ и угла входа $\theta_{вх}$ в плотные слои атмосферы, которые можно найти из соотношений

$$V_{вх} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{R+H} - \frac{1}{a} \right)};$$

$$\cos \theta_{вх} = \frac{r\mu}{(R+H)V}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_{вх} \leq 0,$$

где H — высота входа в плотные слои атмосферы.

Угол λ , необходимый для расчета радиолинии Земля — КА, после посадки на планету определяется следующим образом. Для любой траектории, попадающей в планету, значение угла λ можно определить из скалярного произведения двух векторов: радиуса-вектора планета — Земля и радиуса-вектора КА в момент посадки при условии, что атмосферный участок полета не учитывается:

$$\cos \lambda = \frac{\xi_3 \xi_0 + \eta_3 \eta_0 + \zeta_3 \zeta_0}{\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2 + \zeta_0^2} \sqrt{\xi_3^2 + \eta_3^2 + \zeta_3^2}},$$

где ξ_3, η_3, ζ_3 — координаты Земли в планетоцентрической системе координат.

Чтобы упростить расчеты, можно рассматривать только те траектории, которые лежат в плоскости $\xi O \zeta$, так как для всех других траекторий при одинаковых отклонениях от попадающей в центр планеты углы λ будут иметь меньшие значения. Считая положительными углы, отсчитываемые от направления планета — Земля против часовой стрелки, если смотреть с конца η , для углов λ , лежащих по обе стороны от этого направления, можно записать

$$\lambda = \gamma \pm (\vartheta_{\infty} - \vartheta),$$

где γ — угол между вектором скорости и направлением Земля — планета;

ϑ_{∞} — истинная аномалия на бесконечности;

ϑ — истинная аномалия в точке встречи с поверхностью планеты.

5.4. ПОРЯДОК РАСЧЕТОВ И АНАЛИЗ ХАРАКТЕРНЫХ ПАРАМЕТРОВ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

Ниже приводится анализ выбора характерных параметров траекторий для межпланетных полетов. Для примера рассматриваются траектории полета к Венере

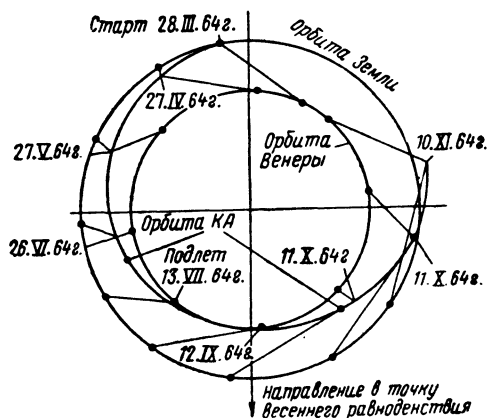


Рис. 5.4. Схема полета к Венере

(рис. 5.4) с оптимальной датой старта 28 марта 1964 г. и к Марсу с оптимальной датой 21 ноября 1964 г. (рис. 5.5)

При рассмотрении других циклов полета к этим планетам большинство основных характеристик меняется в незначительных пределах. Однако следует заметить, что некоторые из них, например склонение вектора скорости $\bar{V}_1$ у Земли, могут изменяться довольно сильно, что существенно сказывается на выборе опорных траекторий.

При полетах к другим планетам исследование свойств траекторий и выбор параметров можно вести аналогичным путем.

5.4.1. Выбор опорных траекторий полета КА

В результате расчетов межпланетных траекторий для выбранного по приближенной методике диапазона дат старта и времен полета можно получить потребные скорости отлета у Земли V_1 , которые определяются в виде зависимости $V_1 = f(t_{\text{ст}})$ при $t_{\text{ст}} = \text{const}$. При этом следует отметить, что построенная совокупность кривых распадается на два семейства. Первое семейство характеризуется траекториями полета, для которых встреча с планетой происходит на первом полувитке, т. е. $2f < \pi$, второе семейство — траекториями второго полу-

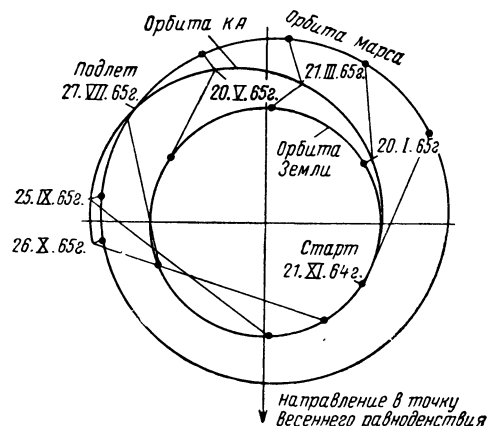


Рис. 5.5. Схема полета к Марсу

витка $2f > \pi$. Время полета по траекториям первого полувитка меньше, чем время полета по траекториям второго полувитка, следовательно, предпочтительнее использовать траектории со встречей на первом полувитке (рис. 5.6 и 5.7).

Для анализа межпланетных траекторий удобнее пользоваться зависимостями, построенными в виде изолиний скоростей $V_1 = \text{const}$ для различных дат старта и дат прилета (рис. 5.8—5.10). На кривые $V_1 = \text{const}$ можно нанести изолинии широт конца активного участка полета $\varphi_k = \text{const}$ и скоростей подлета к планете $V_2 = \text{const}$, а также изолинии углов между вектором скорости $\bar{V}_2$ и направлениями Солнце — планета и Земля — планета. Полученные суммарные зависимости позволяют провести анализ траекторий с учетом ограничений, накладываемых условиями отлета от Земли и подлета к планете.

На рис. 5.8—5.11 приведены изолинии указанных выше параметров, характеризующих траектории полета к Венере и Марсу при встрече с планетами на первом полувитке. Из приведенных зависимостей видно, что имеется траектория, обеспечивающая минимум скорости V_1 и, следовательно, энергии. Эта траектория соответствует оптимальной дате старта. При отходе от оптимальной даты старта величина потребной скорости увеличивается. Для каждой даты старта существует множество траекторий, обеспечивающих сближение с планетой и характеризующихся различными значениями скоростей отлета и времен полета.

Из совокупности траекторий, обеспечивающих полет КА к планете назначения, для каждой даты старта должна быть выбрана такая траектория, которая наилучшим образом удовлетворяет поставленным перед ней требованиям, изложенным выше.

Диапазон возможных дат старта определяется из соотношения

$$E_{\text{н}} \leq E_{\text{р}},$$

где $E_{\text{н}} = \frac{V_1^2}{2}$ — потребная энергия выведения КА на межпланетную траекторию;

$E_{\text{р}}$ — располагаемая энергия выведения ракеты-носителя при выбранном весе КА.

Соотношение $E_{\text{н}} \leq E_{\text{р}}$ определяет на рис. 5.8—5.11 области, в которых можно варьировать характерные параметры. Ограничения на величины φ_k , V_k и др., связанные с особенностями работы КА, могут, в свою очередь, привести к сужению области возможных траекторий. Так, например, ограничения по широте начала пассивного участка траекторий φ_k при полете к Венере, например $\varphi_k \geq 40^\circ$, приводят к тому, что траектории с малым временем полета выпадают из рассмотрения. Аналогичные ограничения могут быть и по другим параметрам.

Следует отметить, что в пределах рассматриваемых областей параметры, характеризующие полет КА, меняются плавно от одной даты старта к другой. Поэтому достаточно проанализировать только наиболее характерные опорные траектории, выбранные в диапазоне возможных дат старта с учетом всех требований и ограничений и обеспечивающие выполнение поставленных перед космическим аппаратом задач. В качестве опорных дат старта для последующего исследования особенностей прогнозирования и коррекции межпланетных траекторий выбираются, как правило, оптимальная дата,

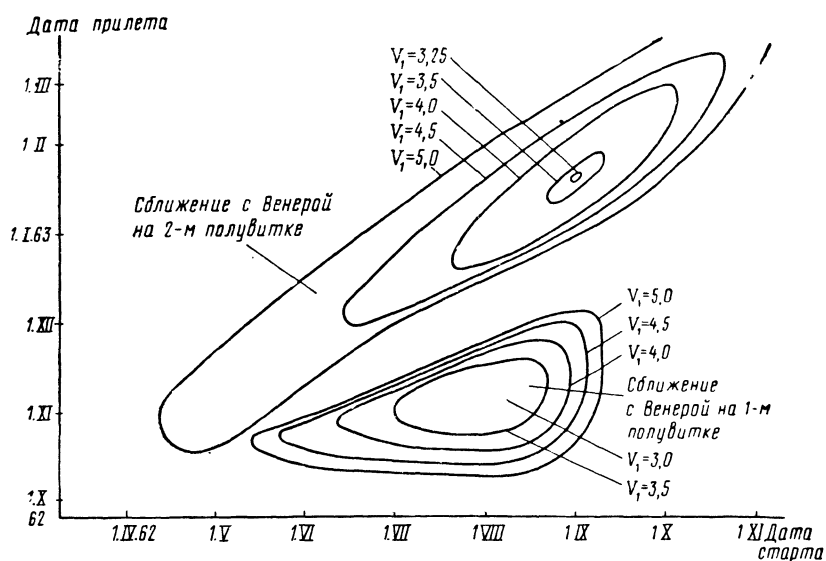


Рис. 5.6. Зависимости скорости отлета от Земли V_1 (км/с) от дат старта и дат прилета к Венере

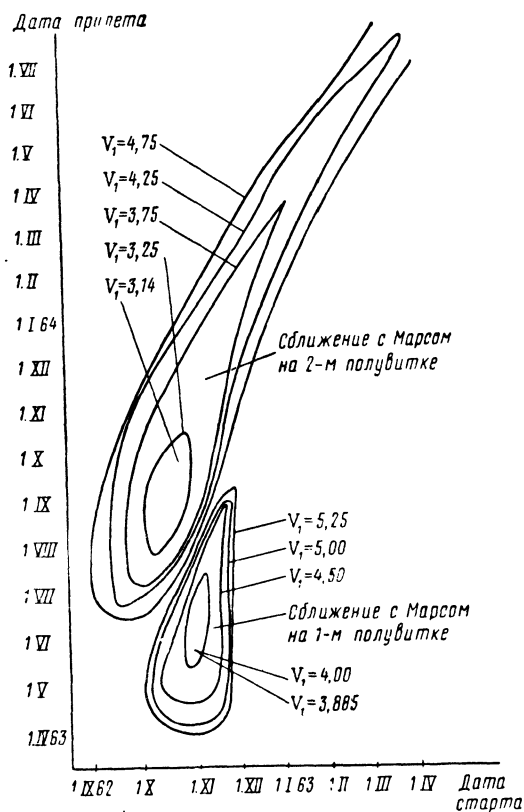


Рис. 5.7. Зависимость скорости отлета от Земли V_1 (км/с) от дат старта и дат прилета к Марсу

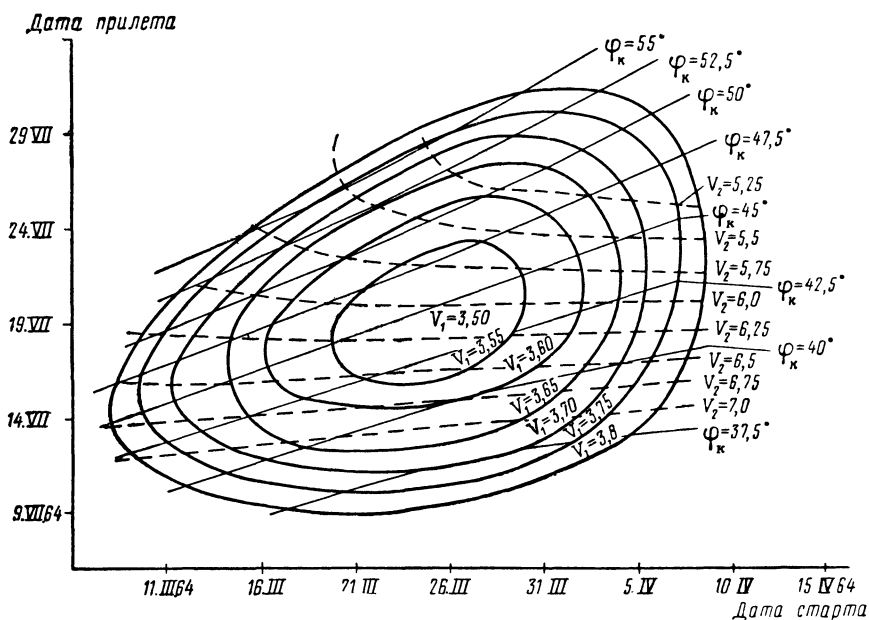


Рис. 5.8. Зависимость скорости отлета от Земли V_1 (км/с), скорости подлета V_2 (км/с) и широты φ_k начала пассивного полета от дат старта и дат прилета к Венере

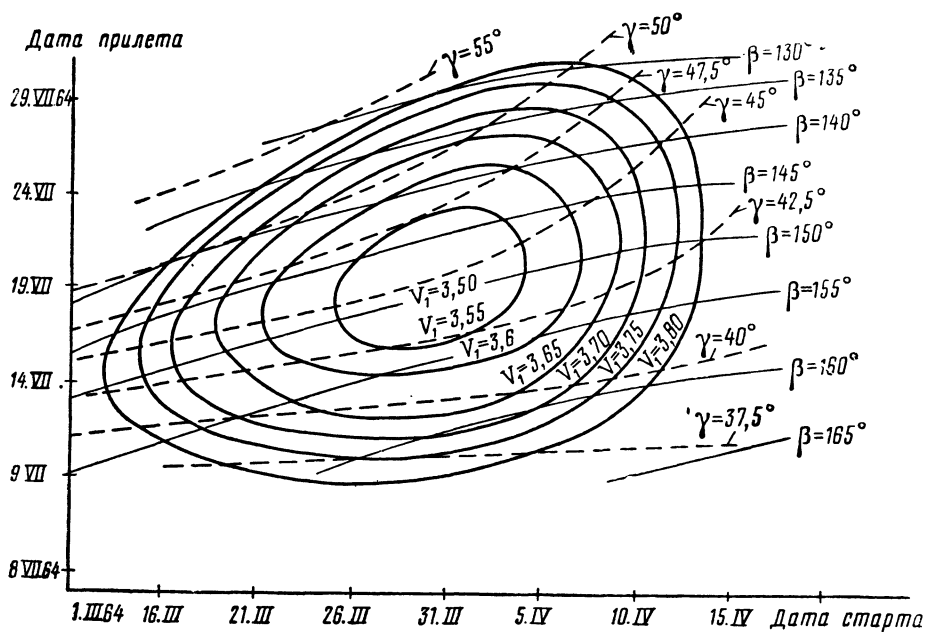


Рис. 5.9. Зависимость скорости отлета от Земли V_1 (км/с) и углов между вектором скорости V_2 и направлениями Солнце—Венера (β) и Земля—Венера (γ) от дат старта и дат прилета к Венере

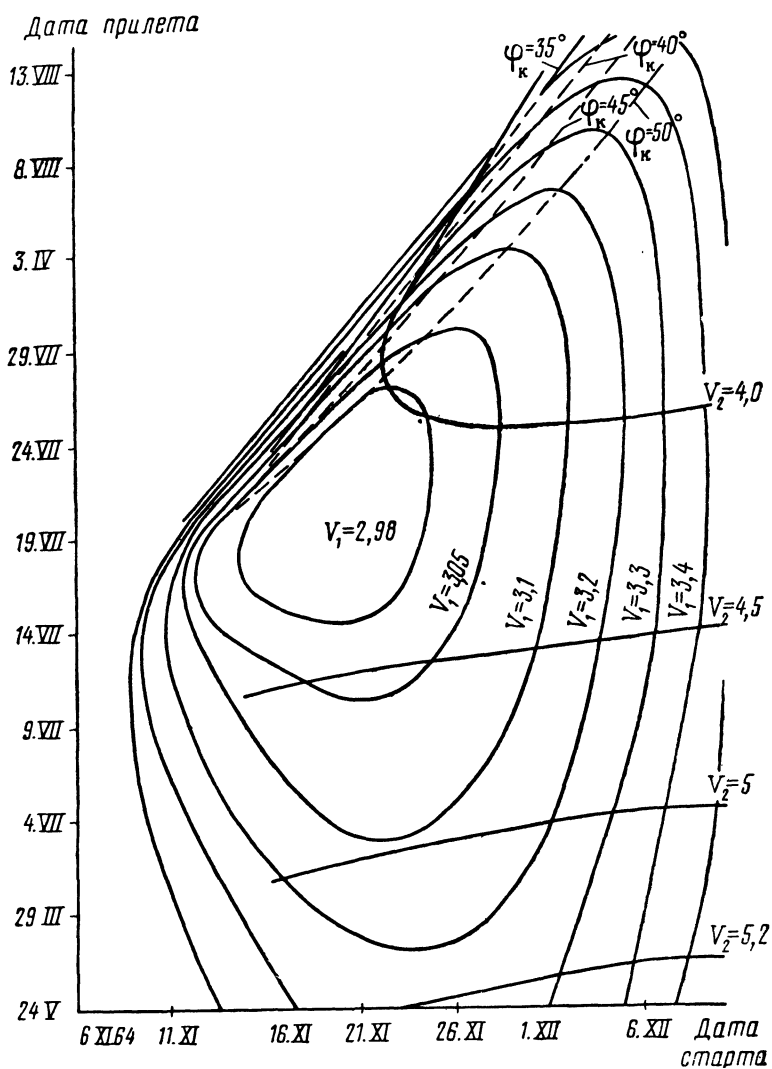


Рис. 5. 10. Зависимости скорости отлета от Земли V_1 (км/с), скорости подлета V_2 (км/с) и широты φ_k начала пассивного полета от дат старта и дат прилета к Марсу

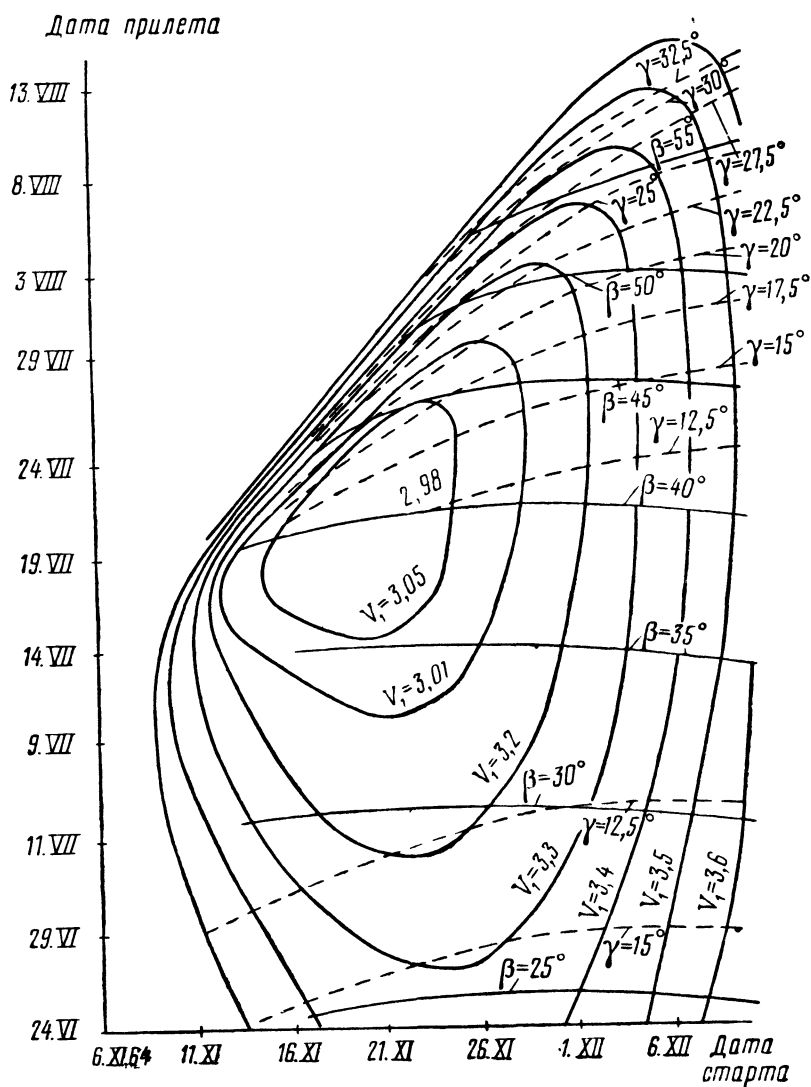


Рис. 5.11. Зависимости скорости отлета от Земли V_1 (км/с) и углов между вектором скорости V , и направлениями Солнце—Марс (β) и Земля—Марс (γ) от дат старта и дат прилета к Марсу

даты, соответствующие началу и концу выбранного диапазона и в случае необходимости в середине интервалов между крайними и оптимальной датами.

5.4.2. Исследование траекторий движения на геоцентрическом участке

Полет на геоцентрическом участке траектории имеет ряд особенностей, связанных с большей скоростью КА относительно Земли.

Проекция траектории КА на вращающуюся Землю (трасса) представляет собой петлю. Движение относительно поверхности Земли по ее восходящей ветви происхо-

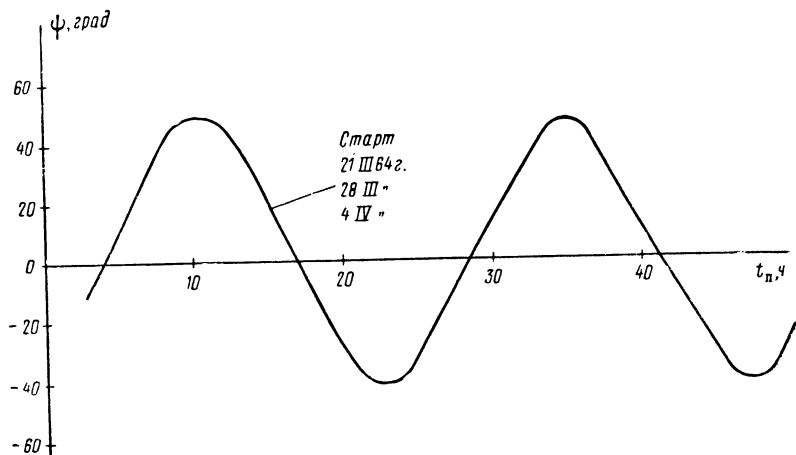


Рис. 5.12. Зависимость угла места ψ от времени полета t_n на приземном участке полета к Венере для опорных дат старта

дит на восток, а движение по нисходящей ветви — на запад. Это объясняется тем, что вначале КА имеет угловую скорость, большую скорости вращения Земли, затем его угловое перемещение замедляется, он удаляется почти по радиусу-вектору и его трас-

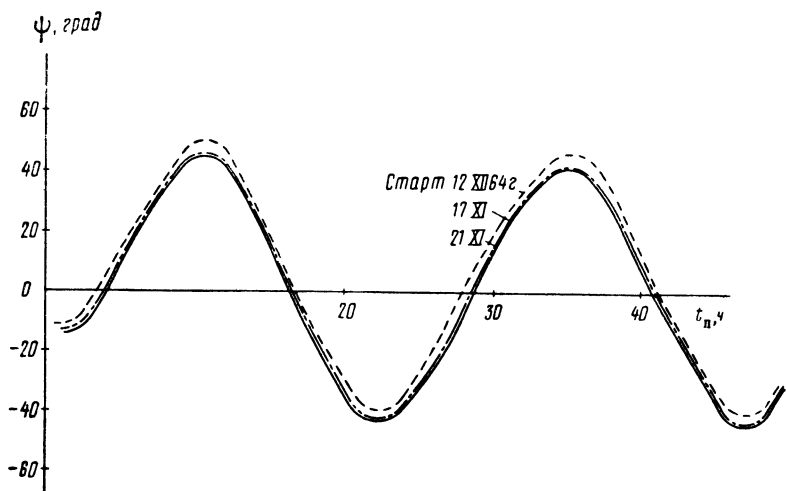


Рис. 5.13. Зависимость угла места ψ от времени полета t_n на приземном участке полета к Марсу для опорных дат старта

са в основном определяется скоростью вращения Земли и склонением вектора скорости КА. При отрицательных склонениях трасса проходит по южному полушарию Земли, при положительных — по северному. Это обстоятельство определяет условия и продолжительность видимости КА из измерительных пунктов.

В начале пассивного участка полета проводится «приземный» сеанс связи с КА. В течение этого сеанса осуществляются траекторные измерения, а также контролируется работа бортовых систем. Обычно в приземном сеансе принимает участие ряд изме-

рительных пунктов, расположенных вдоль трассы и вступающих в связь с КА по мере того, как он входит в зону их видимости. Программа работы наземных измерительных пунктов определяется в результате расчетов углов места для различных пунктов по времени полета КА. Связь с ним может обеспечиваться по команде с Земли, а также путем включения сеанса от бортового программно-временного устройства

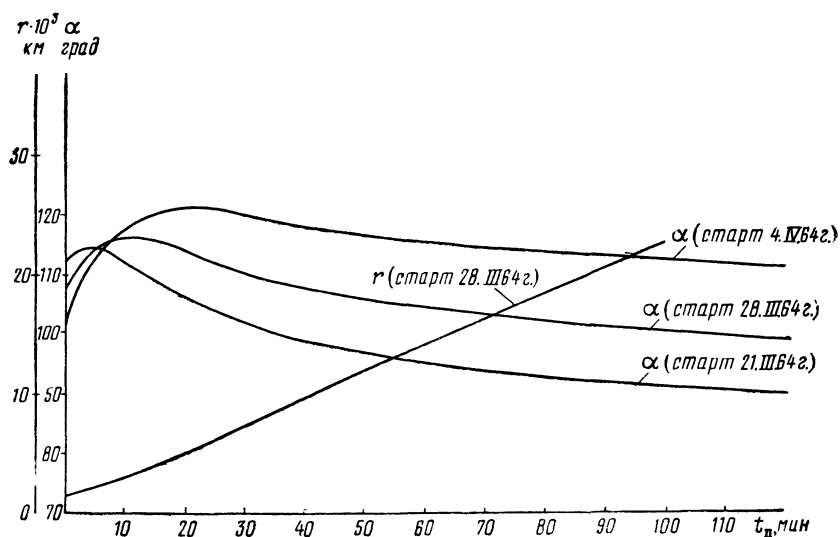


Рис. 5.14. Зависимость угла α Солнце—КА—Земля и расстояния r КА—Земля от времени полета на приземном участке полета к Венере для опорных дат старта

(автономные сеансы). В последнем случае на борту КА закладывается программа включения автономных сеансов, при составлении которой необходимо учитывать следующее:

— сеансы связи должны проводиться в то время, когда КА находится в зоне видимости наземного пункта связи;

— в случае полета одновременно нескольких КА сеансы связи должны быть разнесены по времени в интервале видимости с учетом продолжительности сеансов и величин промежутков между ними.

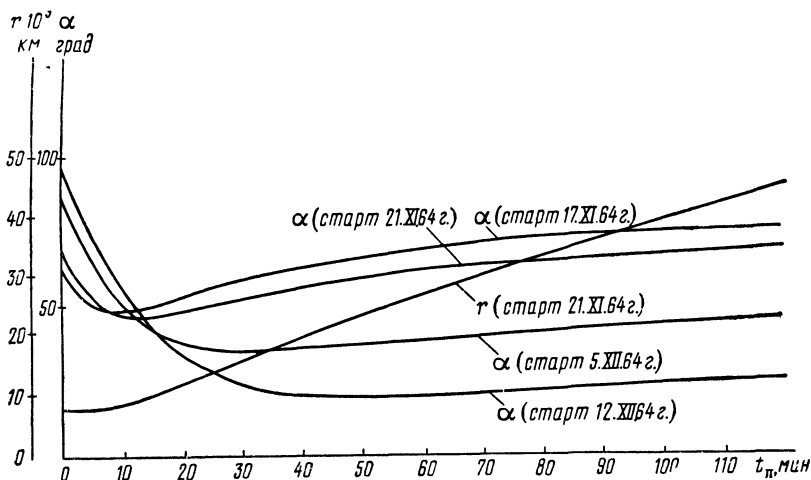


Рис. 5.15. Зависимость угла α Солнце—КА—Земля и расстояния r КА—Земля от времени полета t_n на приземном участке полета к Марсу для опорных дат старта

На рис. 5.12 и 5.13 изображены расчетные кривые изменения угла места ψ по времени полета, отсчитываемому от момента начала пассивного участка траектории, для

района Крымской астрофизической обсерватории. Очевидно, что наиболее благоприятные условия для радиосвязи будут в том случае, когда КА находится вблизи верхней кульминации относительно измерительного пункта.

Для обеспечения нормальной работы солнечных батарей необходимо, чтобы их плоскость имела постоянную ориентацию на Солнце, осуществляемую с помощью солнечного датчика и управляющих сопел. Однако на приземном участке полета яркость Земли настолько велика, что возможна ложная ориентация солнечного датчика на Землю. В этом случае момент возможного начала постоянной ориентации на Солнце выбирается после расчетов звездной величины Земли. На рис. 5.14 и 5.15 приведены кривые изменения расстояний r Земля—КА и угла Солнце—КА—Земля по времени полета t_n , которые используются при расчетах звездной величины Земли.

5.4.3. Исследование траекторий движения на гелиоцентрическом участке полета

После определения параметров гелиоцентрических траекторий для выбранных опорных дат старта проводятся расчеты наиболее важных характеристик движения КА. На рис. 5.4 и 5.5 приведены проекции орбит планет и КА на плоскость эклиптики; там же нанесены положения КА, Земли и планет назначения для различных моментов времени. Указанные рисунки дают наглядное представление о траекториях движения КА.

Для указанных выше опорных траекторий, как и в случае полета на гелиоцентрическом участке, проводятся расчеты наиболее важных параметров движения. Например, рассматриваются параметры, которые характеризуют условия радиосвязи, в частности условия радиовидимости КА.

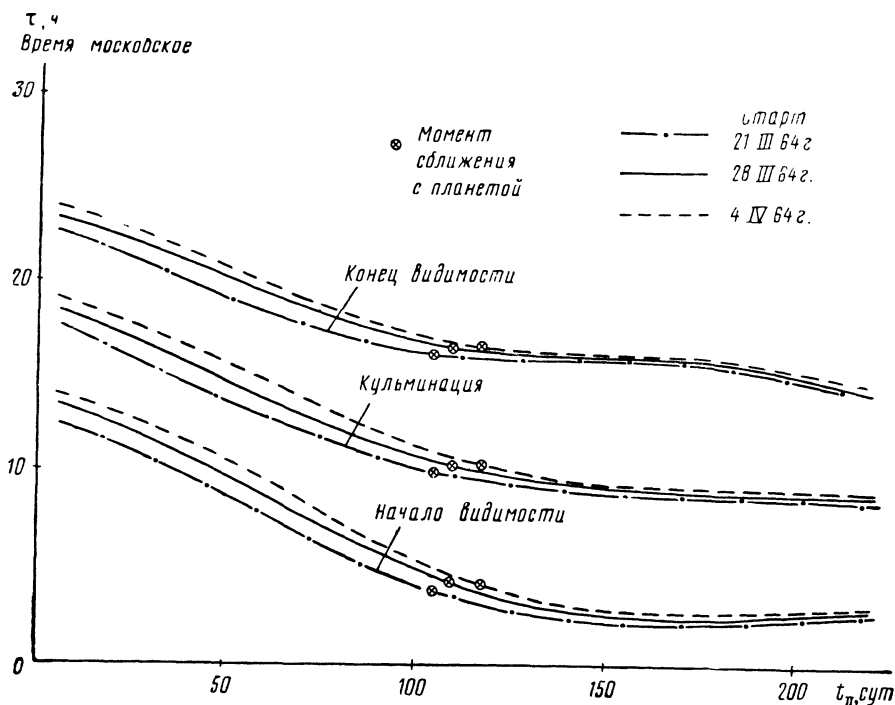


Рис. 5.16. Изменение начала видимости, кульминации и конца видимости по времени полета t_n для опорных дат старта к Венере

В течение полета продолжительность видимости и положение интервала видимости меняются. Для того чтобы команды на начало автономных сеансов выдавались с учетом радиовидимости, суточный цикл программно-временного устройства (бортовое время) должен быть выбран так, чтобы начало автономных сеансов не выходило за пределы интервала видимости в течение всего времени полета.

На рис. 5.16 и 5.17 изображены кривые изменения верхней кульминации, а также начала и конца радиовидимости КА для района Крымской астрофизической обсерватории. При полете к Марсу суточный цикл бортового времени можно принять равным 23^h57^m , а при полете к Венере 23^h56^m . В этом случае автономное проведение сеансов связи возможно в течение всего времени полета КА.

Для получения наибольшей эффективности радиолинии КА — Земля необходимо, чтобы бортовые антенны на КА были расположены наивыгоднейшим образом. При этом энергетические характеристики и диаграммы направленности бортовых антенн зависят от возможных расстояний от КА до Земли и от значения углов Солнце — КА —

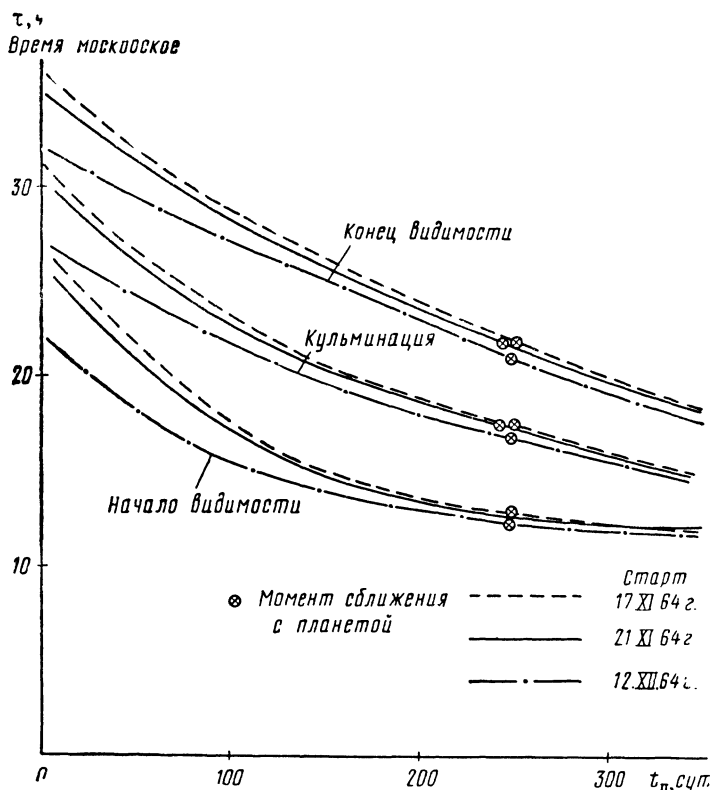


Рис. 5.17. Изменение начала видимости, кульминации и конца видимости по времени полета t_n для опорных дат старта к Марсу

Земля (для КА, постоянно ориентированного на Солнце). Значения этих углов и расстояний приведены на рис. 5.18 и 5.19 для траекторий полета к Венере и Марсу. При полете к Марсу угол Солнца — КА — Земля изменяется в пределах от 10° до 110° , а для полета к Венере — от 5° до 160° , а расстояния при полете к Марсу — до

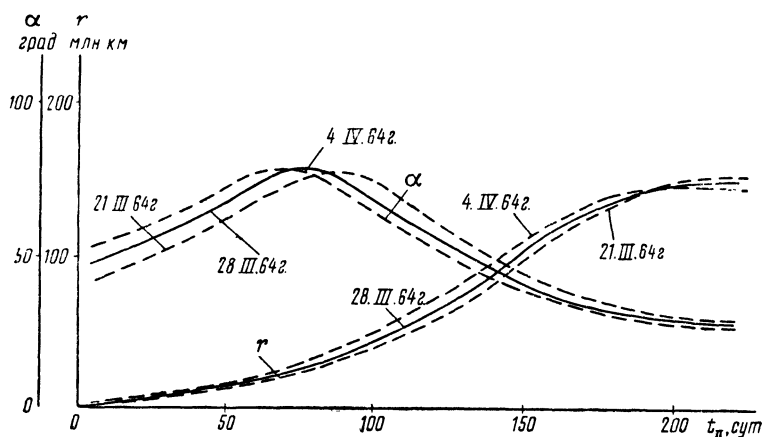


Рис. 5.18. Изменение угла α Солнце—КА—Земля и расстояния r Земля—КА по времени полета t_n для опорных дат старта к Венере

300 млн. км и при полете к Венере — до 100 млн. км. В соответствии с этим выбираются диаграммы направленности и положение на КА антенных систем.

Значения угла Солнце — КА — Земля необходимы также при определении условий ориентации узконаправленных антенн КА на Землю в сеансах связи по высокоинформативной радиолинии. Если используется оптический солнечно-земной датчик ориентации, то оптическая ось земной трубки этого датчика должна быть параллельна оси узконаправленной антенны. Задание угла Солнце — КА — Земля может осуществляться по командной линии с Земли или специальным прибором, установленным на борту. Характеристики этого прибора выбираются таким образом, чтобы с учетом поля зрения датчика он был бы пригоден для работы при пусках в течение нескольких дат старта.

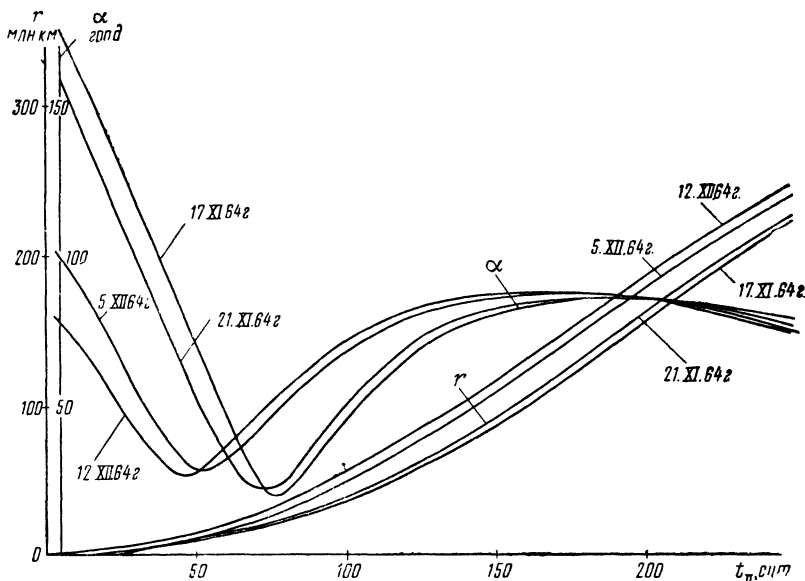


Рис. 5.19. Изменение угла α Солнце—КА—Земля и расстояния r Земля—КА по времени полета $t_{\text{п}}$ для опорных дат старта к Марсу

Так как кривые значений угла Солнце — КА — Земля по времени полета меняются плавно, а характер изменения кривых для соседних дат одинаков, то, производя сдвиг кривых и осреднение значений углов, можно рассчитать зависимости, определяющие программу бортового прибора. Настройка прибора перед пуском в диапазоне дат старта, для которых может быть использована одна программа, сводится к сдвигу начала отсчета времени в приборе.

При работе солнечно-земного датчика в течение полета яркость Земли, характеризующая ее звездной величиной, может меняться в пределах $12^m \div 2^m$. Для выбора диапазонов чувствительности датчика и определения момента переключения диапазонов используются зависимости изменения звездной величины m Земли (КА) по времени полета, которые приведены на рис. 5.20 и 5.21. Выбранные диапазоны чувствительности и моменты переключения должны быть пригодны для пусков КА в любую дату старта выбранного диапазона.

Действительная траектория полета КА может отличаться от расчетной в связи с ошибками, возникающими при выведении. Поэтому в течение полета предусмотрена возможность проведения коррекций, т. е. ликвидации отклонений фактической траектории от расчетной. Коррекция осуществляется подачей импульса скорости с помощью корректирующей двигательной установки. В общем случае корректирующий импульс может иметь любое направление в пространстве.

Ориентация КА при коррекции осуществляется с помощью солнечно-звездного датчика. При такой ориентации необходимо знать углы Солнце — КА — звезда. Однако в звездную трубку датчика в некоторых случаях вместо основной звезды, используемой при ориентации, возможно попадание других звезд и планет, по яркости близких к основной звезде. В этом случае возможна ложная ориентация, в результате чего может быть выдан ошибочный корректирующий импульс. Для выявления таких случаев проводятся расчеты углов Солнце — КА — звезда (планета) в зависимости от времени полета для наиболее ярких звезд и крупных планет. Моменты, когда вместо основной звезды в поле зрения звездной трубки может попасть посторонняя звезда или планета, будут запретными для проведения коррекции.

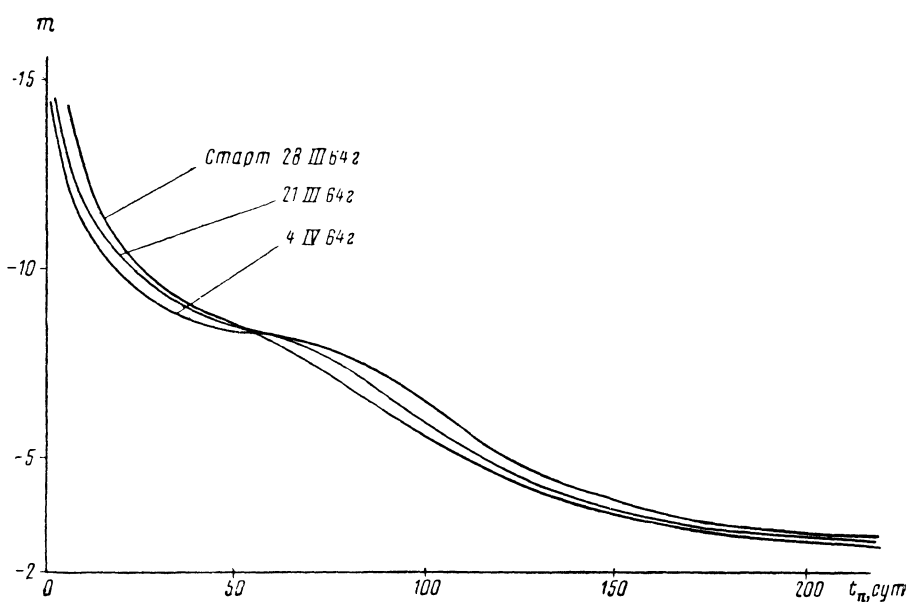


Рис. 5. 20. Изменение звездной величины m Земли (с КА) по времени полета t_n для опорных дат старта к Венере

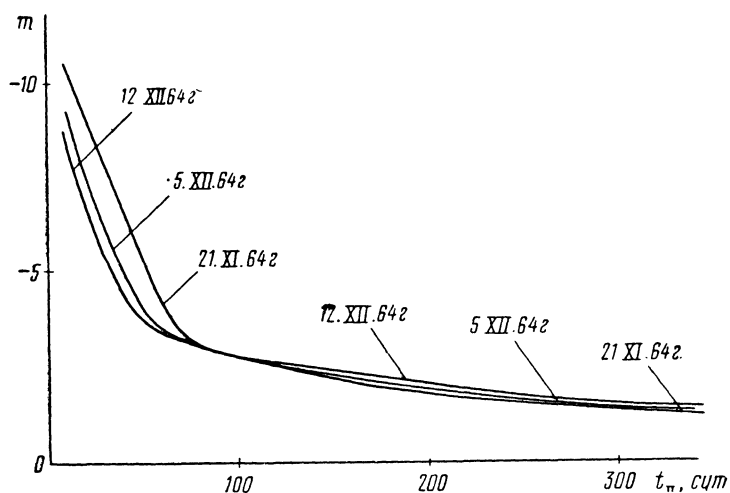


Рис. 5. 21. Изменение звездной величины m Земли (с КА) по времени полета t_n для опорных дат старта к Марсу

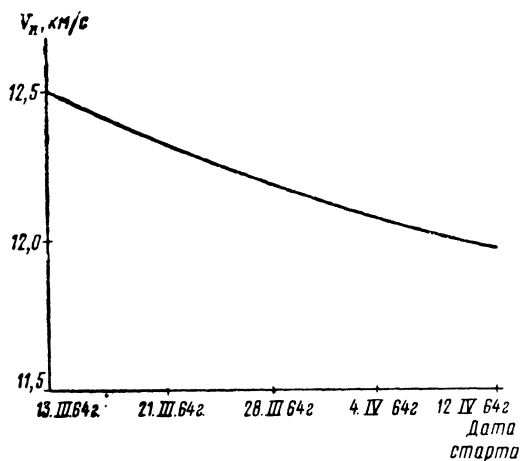


Рис. 5.22. Зависимость скорости V_H входа КА в атмосферу Венеры на высоте $H=100$ км от дат старта

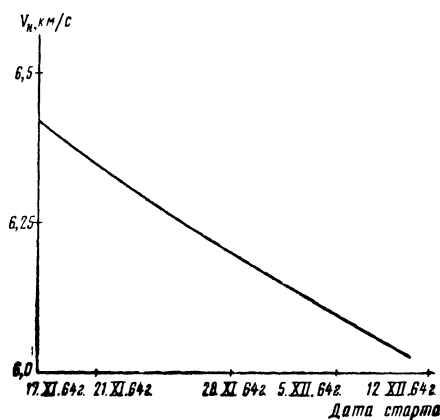


Рис. 5.23. Зависимость скорости V_H входа в атмосферу Марса на высоте $H=200$ км от дат старта

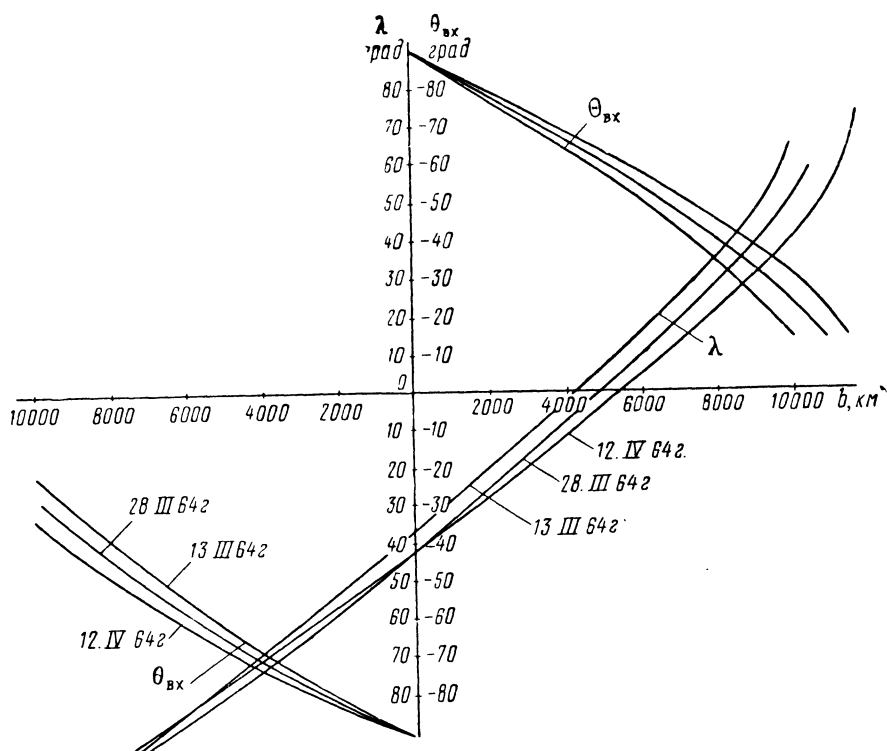


Рис. 5.24. Зависимости угла входа $\theta_{вх}$ и угла λ между местной вертикалью и направлением на Землю ст прицельной дальности b при полете к Венере

5.4.4. Исследование траекторий на планетоцентрическом участке полета у планеты назначения

На участок полета у планеты назначения в зависимости от задач, поставленных перед КА, необходимо рассматривать или траектории, попадающие в планету, или траектории, проходящие на заданном расстоянии от ее поверхности.

Для попадающих вариантов космических аппаратов конструктивные параметры отсека, спускаемого на планету, должны обеспечивать нормальное функционирование аппаратуры, расположенной внутри его при полете в плотных слоях атмосферы и после

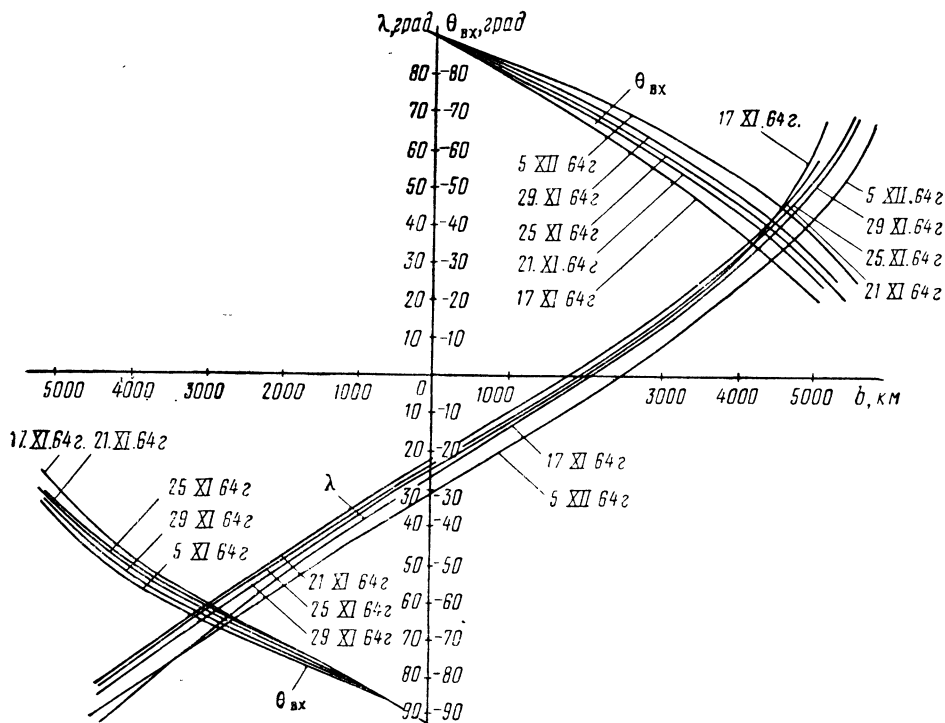


Рис. 5.25. Зависимости угла $\theta_{вх}$ входа и угла λ между местной вертикалью и направлением на Землю от прицельной дальности b при полете к Марсу

посадки. При определении параметров, характеризующих движение и тепловой режим отсека в плотных слоях атмосферы, в качестве исходных данных используются значения скорости и угла входа в атмосферу. На рис. 5.22 и 5.23 приведены зависимости скорости V_H входа от дат старта для заданных высот начала плотных слоев атмосферы.

На рис. 5.24 и 5.25 приведены кривые углов $\theta_{вх}$ входа в атмосферу в зависимости от прицельной дальности планетоцентрической траектории. На этих рисунках нанесены также кривые углов λ между местной вертикалью в точке посадки и направлением на Землю. При заданных априорных точностях знания действительной траектории с помощью приведенных на рисунках зависимостей можно предварительно определить возможные диапазоны значений параметров входа и выбрать точку прицеливания таким образом, чтобы наряду с условиями входа удовлетворялись требования, предъявляемые к траектории в отношении проведения радиосвязи со спускаемым аппаратом после посадки, которые характеризуются значениями углов λ .

Планетоцентрические траектории, с которых возможно фотографирование поверхности планет, должны рассматриваться с учетом неточности определения фактических параметров траектории. При этом учитываются ошибки по времени прилета к планете. На рис. 5.26 и 5.27 изображены схемы полета КА около планет назначения.

Начинать фотографирование Венеры следует в момент, когда КА пролетает вблизи планеты, а само фотографирование должно производиться на отлете. Это объясняется тем, что КА подлетает к планете со стороны, наименее освещенной Солнцем, и ориентация на планету становится возможной только вблизи планеты.

К Марсу космический аппарат подлетает со стороны планеты, освещенной Солнцем, поэтому ориентация на планету возможна на подлете к планете. Фотографирование поверхности Марса возможно до тех пор, пока КА не пересечет терминатор планеты.

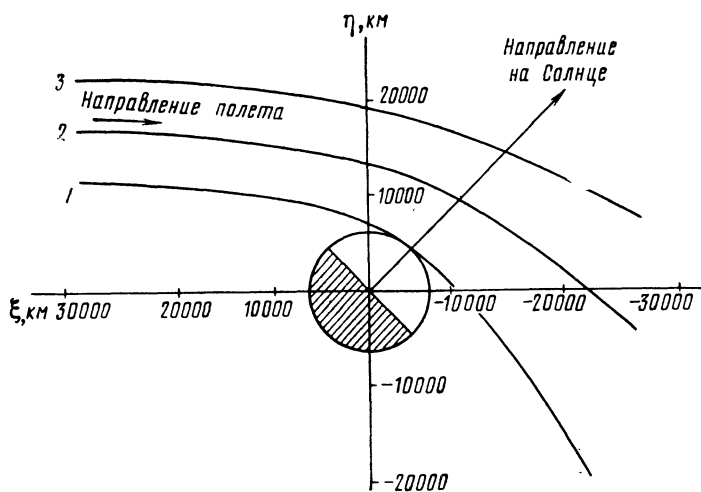


Рис. 5.26. Схема полета вблизи Венеры:
1, 3—крайние траектории; 2—номинальная траектория

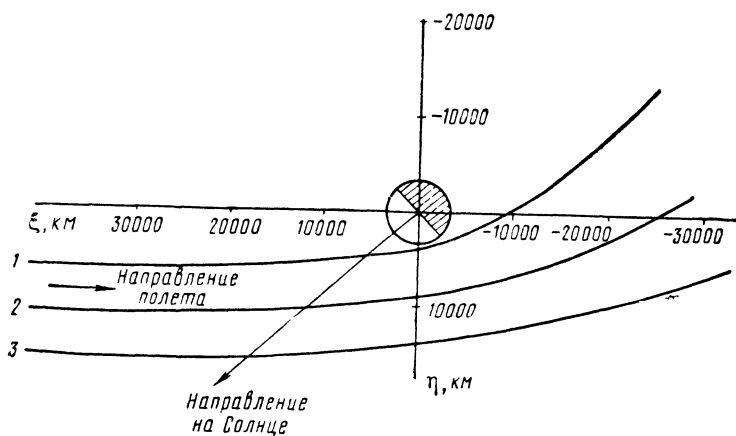
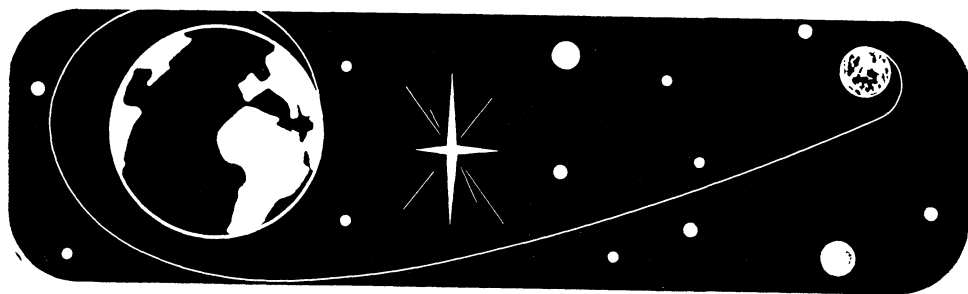


Рис. 5.27. Схема полета вблизи Марса:
1, 3—крайние траектории; 2—номинальная траектория



ГЛАВА VI ДИНАМИКА ПОЛЕТА К ЛУНЕ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- hls — прямоугольная система координат, начало которой совпадает с началом пассивного участка траектории.
- $m_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ — невращающаяся геоцентрическая система координат.
- $m_2\xi_2\eta_2\zeta_2$ — невращающаяся селеноцентрическая система координат.
- $\xi\eta\zeta$ — вращающаяся система координат с началом в середине отрезка Луна — Земля.
- xyz — вращающаяся барицентрическая система координат во введении и невращающаяся геоцентрическая — в дальнейшем; xy — плоскость орбиты Луны.
- XYZ — система, повернутая относительно системы xyz на 90° вокруг оси z так, что $X=y$, $Y=-x$.
- $X_3Y_3Z_3$ — геоэкваториальная система координат.
- a — среднее расстояние между центрами Земли и Луны.
- a_1 — азимут вектора начальной геоцентрической скорости (абсолютной скорости) в точке выхода на пассивный участок траектории.
- d — расстояние от центра Луны до касательной к селеноцентрической траектории в точке входа в сферу действия Луны.
- f — постоянная тяготения.
- H_1 — высота начала пассивного участка траектории полета; начальная высота.
- h_0 — момент прохождения Луной точки с минимальным склонением.
- i — наклонение плоскости лунной орбиты к плоскости эклиптики.
- i_3 — наклонение плоскости траектории полета к плоскости экватора.
- i_1 — наклонение плоскости траектории полета к плоскости орбиты Луны.
- m_1 — центр Земли.
- m_2 — центр Луны.
- R — радиус верхнего слоя атмосферы.
- r — геоцентрическое расстояние, т. е. расстояние от КА до центра Земли.
- r_0 — радиус Земли.
- r_1 — начальный геоцентрический радиус, т. е. геоцентрический радиус начальной точки пассивного участка траектории полета.
- r_2 — входной геоцентрический радиус, т. е. радиус точки входа в сферу действия Луны или радиус точки встречи КА с центром Луны.
- r_2' — входной селеноцентрический радиус.
- r_3 — выходной геоцентрический радиус, т. е. геоцентрический радиус точки выхода КА из сферы действия Луны.
- r_3' — выходной селеноцентрический радиус.
- s_1, s_1', s_1'' — поверхности нулевой скорости при энергии, равной первой критической.
- S_1, S_1', S_1'' — их сечения плоскостью xy .
- T_0 — оптимальное время полета на пассивном участке траектории.
- $T_{1,2}$ — время полета от начальной точки до точки встречи КА со сферой действия или с nepřитягивающей Луной.
- $T_{2,3}$ — время полета от входа в сферу действия до выхода из нее.
- t_1 — момент начала пассивного участка.
- t_2 — момент входа КА в сферу действия Луны.
- t_3 — момент выхода КА из сферы действия Луны.
- U — модуль вектора входной и выходной селеноцентрических скоростей КА на границе сферы действия Луны.

- U_{Π} — модуль вектора скорости КА в момент соударения с Луной.
 U_x — характеристическая скорость.
 u_{Π} — аргумент широты точки конца пассивного участка.
 u_0 — аргумент широты точки старта.
 u_1 — аргумент широты точки начала пассивного участка траектории полета.
 V — скорость КА в барицентрической системе координат *xuz*.
 $V_{\text{Л}}$ — геоцентрическая скорость Луны.
 V_{Π} — местная геоцентрическая параболическая скорость КА.
 V_r — радиальная компонента абсолютной геоцентрической скорости КА.
 V_{τ} — тангенциальная компонента абсолютной геоцентрической скорости КА.
 ΔV_{ψ} — скоростная прибавка (прибавка к скорости КА относительной земной поверхности), обусловленная вращением Земли.
 V_0 — начальная скорость в системе координат $m\xi\eta\zeta$.
 V_1 — начальная геоцентрическая скорость КА.
 V_2 — входная геоцентрическая скорость КА.
 V_3 — выходная геоцентрическая скорость КА.
 V'_{Π} — селеноцентрическая параболическая скорость на границе сферы действия Луны.
 V'_2 — входная селеноцентрическая скорость КА.
 V'_3 — выходная селеноцентрическая скорость КА.
 ΔV_1 — избыток начальной геоцентрической скорости над местной параболической скоростью.
 ϑ_{Π} — истинная аномалия точки соударения.
 α — угол между направлениями входной и выходной селеноцентрических скоростей (т. е. угол поворота селеноцентрической скорости в сфере действия Луны).
 α_1 — угол между направлением начальной скорости КА и начальным геоцентрическим радиусом.
 α_2 — угол между направлением входной геоцентрической скорости и входным геоцентрическим радиусом.
 α'_2 — угол между направлением входной селеноцентрической скорости и селеноцентрическим радиусом точки входа в сферу действия Луны.
 γ_0 — угловой радиус окружности на поверхности Земли, из точек которой КА виден на горизонте.
 δ — склонение КА.
 E — плоскость экватора.
 ε — угол возвышения вектора пункт — КА над горизонтом пункта наблюдения.
 ε_0 — наклонение эклиптики к небесному экватору.
 Θ — угол между плоскостью экватора и плоскостью орбиты Луны.
 θ_1 — угол наклона вектора начальной скорости КА к местному горизонту.
 λ — угол между начальным геоцентрическим радиусом и начальным направлением Луна — Земля в плоской задаче достижения Луны.
 λ_r — географическая долгота КА.
 λ_0 — географическая долгота точки старта.
 λ_{Π} — географическая долгота пункта наблюдения.
 $\Delta\lambda_{мс}$ — межстартовый интервал.
 $\Delta\lambda_c$ — стартовый интервал.
 μ_1 — гравитационный параметр Земли.
 μ_2 — гравитационный параметр Луны.
 Π — плоскость эклиптики.
 Π' — плоскость лунной орбиты.
 ϱ — селеноцентрическое расстояние, т. е. расстояние от КА до центра Луны.
 $\varrho_{\text{Л}}$ — радиус Луны.
 q_{min} — минимальное расстояние траектории полета от центра Луны.
 ϱ_* — радиус сферы действия Луны.
 Φ — полная угловая дальность траектории, т. е. угол между геоцентрическими радиусами начальной и конечной точек траектории.
 Φ' — селеноцентрический угол поворота селеноцентрического радиуса-вектора в сфере действия Луны.
 Φ_a — угловая дальность активного участка траектории.
 Φ_1 — угловая дальность пассивного участка траектории.
 Φ_2 — угол между геоцентрическими радиусами Луны и точки входа.
 ψ_r — географическая широта КА.
 ψ_{Π} — географическая широта пункта наблюдения.
 ψ_0 — географическая широта точки старта.
 ψ_1 — географическая широта начала пассивного участка траектории.

- ω_3 — угловая скорость суточного вращения Земли.
 ω — угловая скорость обращения Луны.
 ω_r — геоцентрическая угловая скорость КА.
 ω_1 — долгота перигея геоцентрического участка траектории полета.
 Υ — точка весеннего равноденствия.
 Ω — долгота восходящего узла лунной орбиты.
 Ω_1 — долгота восходящего узла геоцентрического участка траектории.
 Ω_y — долгота упрежденной точки на лунной орбите.

ВВЕДЕНИЕ

В плоской задаче достижения Луны траектории с горизонтальным направлением начальной скорости энергетически выгоднее других траекторий, лежащих в плоскости лунной орбиты. Влияние разброса начальных данных для этих траекторий таково, что при начальной скорости, несколько большей параболической, ошибки в величине скорости порядка 30 м/с или в ее направлении порядка $0^\circ,5$ еще не приводят к промаху мимо Луны, но уже близки к критическим [1]. Полет в плоскости лунной орбиты (энергетически наиболее выгодный) возможен лишь из точек старта с широтами, не превышающими наклона лунной орбиты к плоскости экватора, которое не может превосходить $28^\circ 36'$. Траектории достижения Луны с территории СССР начинаются с больших широт и потому не лежат в плоскости лунной орбиты. Для них наиболее важно знать, каковы оптимальные начальные данные, каково влияние ошибок начальных данных. Эти вопросы рассмотрены в настоящей главе.

Основным способом приближенного изучения траекторий полета к Луне является рассмотрение движения без учета влияния Луны вне ее сферы действия и без учета влияния Земли внутри сферы действия Луны. Определение сферы действия дано в гл. III.

На границе сферы действия Луны по параметрам движения относительно Земли с помощью простых формул могут быть определены параметры движения относительно Луны (и наоборот).

Применимость приближенного метода весьма широка, как показано в работе [32], где разрабатывается система диаграмм, которые позволяют довольно просто рассчитывать различные маневры, такие как полет к Луне с возвращением, переход с гиперболической орбиты на орбиту спутника и пр. Этот метод может успешно конкурировать с методом использования картинной плоскости [8, 25].

При определении энергетических затрат и влияния ошибок начальных данных достаточно учесть лишь главные, основные силы, определяющие движение.

Можно считать, что траектория полета начинается вне атмосферы на высоте порядка сотен километров и целиком находится внутри сферы действия Земли по отношению к Солнцу. Радиус этой сферы составляет около 1 млн. км, что примерно в 2,5 раза превышает среднее расстояние от Земли до Луны.

Отношение величины $\Delta F'$ возмущения от Солнца к притяжению F Земли максимально на границе сферы действия и не превосходит 0,138. С убыванием расстояния r от Земли $\Delta F'/F$ убывает как r^3 . На расстоянии орбиты Луны имеем $\Delta F'/F < 0,01$, а при меньших расстояниях от Земли отношение возмущения от действия Солнца к притяжению Земли еще меньше. Можно предполагать, что КА не уходит далеко за пределы орбиты Луны, и влияние Солнца и планет в рассматриваемой задаче не учитывать.

Возмущающее действие массы m_2 Луны для основной части рассматриваемого пространства по сравнению с притяжением массы m_1 Земли ничтожно, однако в сфере действия Луны оно играет основную роль, и его нельзя не учитывать, тем более, что интересны как раз траектории, проходящие через сферу действия Луны.

Поскольку сжатие Земли и Луны изменяет силу тяготения меньше чем на 1%, им можно пренебречь.

Можно пренебречь также силами, возникающими от эллиптичности лунной орбиты. в уравнениях движения, написанных в барицентрической системе координат x, y, z , вращающейся вместе с прямой $m_1 m_2$ (эти силы составляют долю порядка эксцентриситета от центробежной и кориолисовой сил, т. е. лишь несколько процентов). Поэтому имеем здесь *ограниченную* * *круговую* задачу трех тел. Ее уравнения во *вращающейся* барицентрической системе координат x, y, z [10, 34] таковы:

$$\ddot{x} = 2\dot{y} + \frac{\partial J}{\partial x}; \quad \ddot{y} = -2\dot{x} + \frac{\partial J}{\partial y}; \quad \ddot{z} = \frac{\partial J}{\partial z}. \quad (6.1)$$

Здесь точками обозначено дифференцирование по времени,

$$J = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + \frac{f m_1}{r} + \frac{f m_2}{\rho}, \quad (6.2)$$

* Ограниченность понимается в том смысле, что влиянием притяжения одного из тел (КА) на движение остальных (Земли, Луны) можно пренебречь.

где f — постоянная тяготения; r и q — расстояния КА от m_1 и m_2 соответственно; ось x постоянно проходит от m_2 к m_1 , а ось y проходит через центр тяжести системы $m_1 m_2$ в плоскости орбиты Луны. За единицы приняты: для длин — расстояние a между центрами Земли и Луны и для времени — $T/2\pi$, где T — сидерический месяц. По третьему закону Кеплера в этих единицах

$$f(m_1 + m_2) = a^3 (T/2\pi)^{-2} = 1.$$

Уравнения движения КА в геоцентрической *невращающейся* системе координат $m_1 \xi_1 \eta_1 \zeta_1$, начало которой находится в центре Земли, плоскость $\xi_1 \eta_1$ совпадает с плоскостью орбиты Луны, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\xi}_1 &= -\frac{\mu_1 \xi_1}{r^3} + \frac{\mu_2}{q^3} (\xi_L - \xi_1) - \frac{\mu_2 \dot{\xi}_L}{a^3}; \\ \ddot{\eta}_1 &= -\frac{\mu_1 \eta_1}{r^3} + \frac{\mu_2}{q^3} (\eta_L - \eta_1) - \frac{\mu_2 \dot{\eta}_L}{a^3}; \\ \ddot{\zeta}_1 &= -\frac{\mu_1 \zeta_1}{r^3} - \frac{\mu_2 \dot{\zeta}_1}{q^3}; \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{\xi_1 \dot{\xi}_1 + \eta_1 \dot{\eta}_1 + \zeta_1 \dot{\zeta}_1}{r}; \\ \frac{dq}{dt} &= \frac{1}{q} [(\xi_L - \xi_1)(\dot{\xi}_L - \dot{\xi}_1) + (\eta_L - \eta_1)(\dot{\eta}_L - \dot{\eta}_1) + (\zeta_L - \zeta_1)(\dot{\zeta}_L - \dot{\zeta}_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

Здесь $\mu_1 = fm_1$; $\mu_2 = fm_2$, а буквой L отмечены координаты и проекции скорости Луны. Приведенные уравнения позволяют определить (например, с помощью численного интегрирования) траекторию полета с любыми начальными данными.

Для анализа решений при различных начальных скоростях используется энергетический подход (аналогичный примененному Хиллом [22]) с использованием вращающейся системы координат xyz . В ней уравнения (6.1) имеют известный интеграл Якоби [10]

$$\frac{1}{2} V^2 = J + h, \quad (6.4)$$

где V — скорость КА в системе координат xyz ; $h = \text{const}$. Движение при фиксированном значении h ограничено поверхностями S нулевой скорости (поверхностями Хилла):

$$J = -h. \quad (6.5)$$

Пусть пассивный участок траектории начинается на геоцентрических расстояниях, много меньших расстояния до Луны. Тогда при малых значениях начальной скорости V_0 полет может происходить только внутри поверхности S' , близкой к малой геоцентрической сфере. Несмотря на возможность движения при том же значении h еще внутри поверхности S'' , близкой к малой селеноцентрической сфере, и вне поверхности S , близкой к большой геоцентрической сфере, КА не может перейти в эти области из S' , и сближение с Луной невозможно.

С увеличением начальной скорости V_0 величина h растет, поверхности S' и S'' расширяются, сближаясь. При некотором значении $V_0 = V_0^{(1)}$ величина h достигает такого значения $h = h_1$, что поверхности S' и S'' соединяются в точке L_1 . Пусть s_1, s'_1, s''_1 — положения поверхностей S, S', S'' при $h = h_1$. Для малых $h - h_1 > 0$ становится возможным в малой окрестности точки L_1 проникновение траектории, начавшейся вблизи тела m_1 , в область вокруг тела m_2 , т. е. становится возможным сближение КА с Луной. На рис. 6.1 представлена половина сечения плоскостью xy поверхностей s_1, s'_1, s''_1 — кривые S_1, S'_1, S''_1 . Другая половина симметрична.

При дальнейшем росте начальной скорости до значения $V_0 = V_0^{(2)}$ достигается критическое значение $h_2 > h_1$, такое, что становится возможным уход КА от Земли в бесконечность через окрестность точки L_2 , где соединяются поверхности S и S'' . Половину их сечения плоскостью xy — кривую S_2 — см. на рис. 6.1. Таким образом, минимальная скорость, необходимая для достижения Луны, равна $V_0^{(1)}$, а минимальная скорость, необходимая для удаления КА в бесконечность, равна $V_0^{(2)}$.

Кроме критических значений h_1 и h_2 , существуют еще критические значения $h_3 > h_2$ и $h_4 > h_3$. Значение h_3 соответствует возможности ухода КА в бесконечность через окрестность точки L_3 . Значение h_4 отрицательно и отвечает исчезновению кривых нулевой скорости на плоскости xy в симметричных относительно оси x точках L_4 и L_5 (точка

L_5 на рис. 6.1 не показана). Возникает возможность ухода КА в бесконечность по любому направлению в плоскости xy . Исчезновение поверхностей, ограничивающих пространственное движение, происходит при $h=0$.

Точки L_i (так называемые *точки либрации*) расположены в плоскости орбиты Луны и находятся как особые точки поверхностей (6.5); значения h_i находятся из интеграла Якоби (6.4) при $V=0$ по координатам точек L_i , а соответствующие начальные скорости V_0^i находятся из того же интеграла при $h=h_i$ по координатам заданной начальной точки.

Величина каждой критической начальной скорости V_0^i не зависит от ее направления, хотя она изменяется от точки к точке. Однако на сфере, соответствующей высоте 200 км над Землей, скорости V_0^i практически не зависят от положения начальной точки.

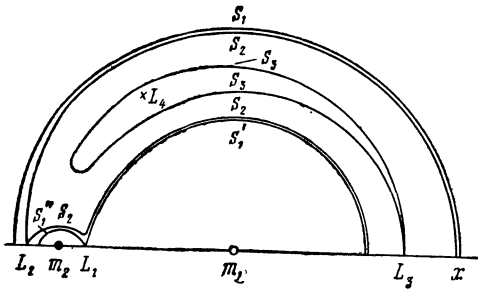


Рис. 6.1. Сечение критических поверхностей нулевой скорости для системы Земля—Луна плоскостью лунной орбиты xy . При скоростях, несколько больших минимальной, проникновение КА к Луне возможно лишь через горловину у точки L_1

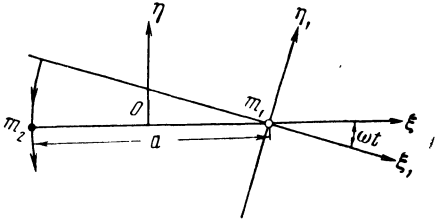


Рис. 6.2. Связь геоцентрических координат ξ_1, η_1 с вращающимися координатами ξ, η . Начальное направление оси ξ_1 — от m_2 к m_1

Расстояния r_i и q_i точек либрации соответственно от Земли и Луны, критические энергии h_i и критические скорости V_0^i приведены в табл. 6.1. Высота начальной точки траектории принята равной 200 км. Рассчитанные для нее траектории действительны и для больших начальных высот.

Таблица 6.1

Критические точки, энергии и скорости

Точка либрации	r_i	q_i	h_i	V_0^i ед. $2\pi a/T$	V_0^i , км/с
L_1	0,8491539	0,1508461	—1,594067	10,60335	10,84890
L_2	1,1677237	0,1677237	—1,585991	10,60411	10,84968
L_3	0,9929263	1,9929263	—1,506062	10,61165	10,85738
L_4	0	1	—1,494001	10,61278	10,85854

Расстояния точек L_1 и L_2 от Луны равны соответственно 58 000 и 65 000 км, т. е. обе точки находятся внутри сферы действия Луны довольно близко от ее границы.

Ниже приведены траектории полета с критическими начальными скоростями в невращающейся системе координат $m_1\xi_1\eta_1\xi_2$ и во вращающейся $\xi\eta\zeta$, ось ξ которой постоянно проходит от m_2 к m_1 , ось η проходит через середину отрезка, соединяющего m_1 и m_2 . При этом (рис. 6.2)

$$\xi = c_1 + 2x; \quad \eta = 2y; \quad \zeta = 2z, \tag{6.6}$$

где

$$c_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 0,9757478. \tag{6.7}$$

На рис. 6.3 во вращающейся системе координат $\xi\eta\zeta$ представлены первые 5 оборотов траектории полета с первой критической начальной скоростью $V_0=V_0^{(1)}$, направ-

ленной перпендикулярно начальному геоцентрическому радиусу r_1 в сторону вращения Луны в плоскости ее орбиты. Траектория начинается на высоте 200 км. (Время полета здесь и далее отмечено вдоль кривых в сутках.)

В невращающейся геоцентрической системе координат $m_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ (ось ξ_1 направлена по оси ξ в момент $t=0$, см. рис. 6.2) виткам типа «восьмерка» (см. рис. 6.3) соответствуют кривые, обходящие Землю в том же направлении, что и Луна, и лежащие почти на один и тот же эллипс с фокусом в центре Земли (см. рис. 6.4). Рост апогейного расстояния от витка к витку мал. Таким образом, для

достижения Луны с первой критической скоростью $\vec{V}_0^{(1)}$ необходимо накопление возмущений в течение сотен оборотов.

На рис. 6.5 представлены также траектории II—IV, отличающиеся от рассмотренного на рис. 6.3 витка I направлением начальной скорости в плоскости лунной орбиты. Апогейное расстояние тем больше, чем больше величина

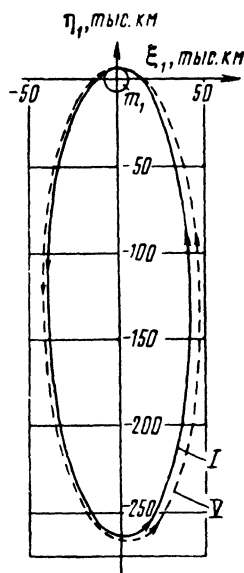
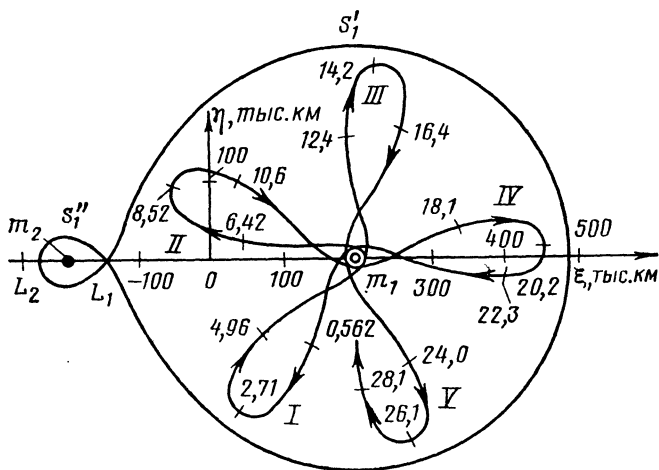


Рис. 6.4. Траектория, приведенная на рис. 6.3, в геоцентрических координатах.

Витки II—IV проходят между показанными витками I и V. Заметно увеличение орбиты под действием лунных возмущений

Рис. 6.3. Траектория полета КА с минимальной критической начальной скоростью, вычисленная во вращающихся координатах. Критическая кривая s'_1 не достигается в течение месяца

начальной скорости в невращающейся системе координат $m_1\xi_1\eta_1\zeta_1$. Однако критическая поверхность S' на первом обороте траектории вокруг Земли не достигается.

Из того факта, что в системе координат $m_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ траектория полета с первой критической скоростью близка к геоцентрическим эллипсам (см. рис. 6.4), следует, что для таких траекторий влияние Луны мало существенно. Для достижения Луны на первом обороте траектории полета существенна начальная скорость $\vec{V}_1$ в невращающейся системе координат $m_1\xi_1\eta_1\zeta_1$. Минимальная геоцентрическая начальная скорость в случае непритягивающей Луны определяется условием достижения заданного апогейного радиуса [23]

$$r_a = a \quad (6.8)$$

на соответствующем эллипсе (см. рис. 6.6, кривая I) и находится с помощью геоцентрического интеграла энергии

$$V_1^2 = r_1 V_n^2(r_1) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{2a_3} \right), \quad (6.9)$$

где $V_n^2(r_1) = 2\mu_1/r_1$ (V_n — местная параболическая скорость), a_3 — большая полуось эллипса. Для высоты 200 км и вертикального направления начальной скорости величина минимальной начальной скорости $V_1 = 10,90525$ км/с. Эта величина примерно на 60—50 м/с превышает геоцентрические скорости, отвечающие соответственно первой — четвертой критическим скоростям (см. табл. 6.1).

С изменением направления начальной скорости от вертикального до горизонтального, т. е. при изменении значения угла α_1 начальной скорости с радиусом от 0 до 90°, величина начальной скорости монотонно растет.

Условие (6.8), не учитывающее влияния Луны, дает минимальную скорость, необходимую для достижения Луны, достаточно точно.

Соответствующая траектория, найденная с учетом влияния Луны (см. рис. 6.6, кривая II), проходит через Луну и при изменении V_1 на ничтожную величину $\sim 0,02$ м/с проходит через центр Луны. Из рис. 6.6 видно, что начальные данные для попадания в Луну можно рассчитывать, полностью пренебрегая влиянием Луны.

Следует отметить, что для попадания в Луну недостаточно достигнуть удаления, на котором притяжения Земли и Луны равны (соответствующее значение $\Delta V_1 = V_1 - V_{\pi} = -0,107$ км/с). Это видно из рис. 6.7.

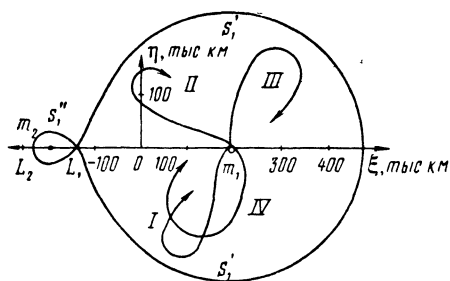


Рис. 6.5. Влияние изменения направления начальной скорости на траекторию (во вращающихся координатах ξ, η).

6.1. АНАЛИЗ УСЛОВИЙ ПОЛЕТА К ЛУНЕ

6.1.1. Общая характеристика траекторий сближения с Луной

Траекториями сближения называются траектории, начинающиеся у Земли и на первом обороте вокруг нее входящие в сферу действия Луны. При анализе траекторий сближения можно пренебрегать влиянием Луны вне ее сферы действия и влиянием Земли внутри сферы действия Луны и считать, что движение по траектории сближения вне сферы действия Луны происходит по геоцентрическому коническому сечению, а внутри сферы действия — по селеноцентрическому коническому сечению. В результате получается следующая приближенная методика расчета траекторий сближения по участкам.

По начальному положению радиуса-вектора $\vec{r}_1$ КА и скорости $\vec{V}_1$ с помощью геоцентрических интегралов энергии и площадей рассчитывается участок движения к сфере действия Луны.

В точке входа в сферу действия геоцентрические радиус r_2 и скорость V_2 (геоцентрические входные данные) пересчитываются в селеноцентрическую систему координат и получаются селеноцентрические координаты и скорость

$$\vec{V}'_2 = \vec{V}_2 - \vec{V}_L(t_2),$$

где $\vec{V}_L(t_2)$ — скорость Луны в момент t_2 входа КА в сферу ее действия.

При эллиптической начальной скорости, большей минимальной, вход КА в сферу действия возможен как на восходящей ветви геоцентрической траектории, так и на нисходящей ее ветви, а при параболической и гиперболических скоростях возможен только на восходящей ветви. Движение внутри сферы действия всегда происходит по гиперболе, независимо от начальных данных [2, 13, 14].

Участок движения в сфере действия Луны определяется селеноцентрическими интегралами энергии и площадей, аналогичными геоцентрическим. В точке выхода из сферы действия по селеноцентрическим координатам и скорости $\vec{V}_3(t_3)$ определяются геоцентрические выходные координаты и скорость

$$\vec{V}_3 = \vec{V}'_3 + \vec{V}_L(t_3),$$

где t_3 — момент выхода из сферы действия. Участок движения от сферы действия Луны опять рассчитывается с помощью геоцентрических интегралов энергии и площадей с новыми значениями постоянных.

Скалярная разность

$$\Delta V_1 = V_1 - V_{\pi},$$

где $V_{\pi} = \sqrt{2\mu_1/r_1}$ — геоцентрическая параболическая скорость КА на расстоянии r_1 от центра Земли, называется *избытком начальной геоцентрической скорости над местной параболической* и является основным параметром, определяющим характеристики траекторий сближения.

Начальная высота H_1 над земной поверхностью и геоцентрический радиус r_2 точки входа в сферу действия Луны, наоборот, являются мало существенными параметрами. Характеристики множества траекторий сближения, полученные для значения $H_1 = 200$ км и для среднего значения входного геоцентрического радиуса $r_2 = a$, представлены на рис. 6.8 как функции ΔV_1 [1].

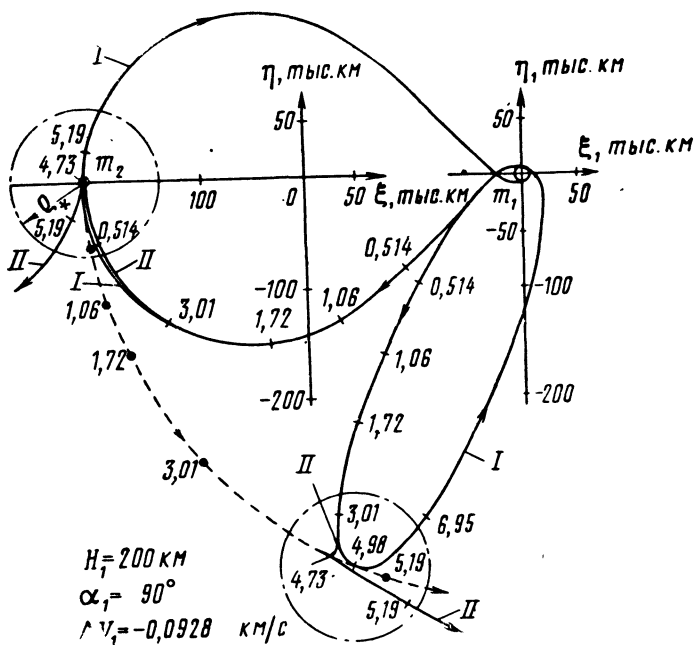


Рис. 6. 6. Отличие попадающей траектории II от соответствующего эллипса I при минимальной начальной скорости во вращающейся $O\xi\eta\zeta$ и не вращающейся $m_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ системах координат

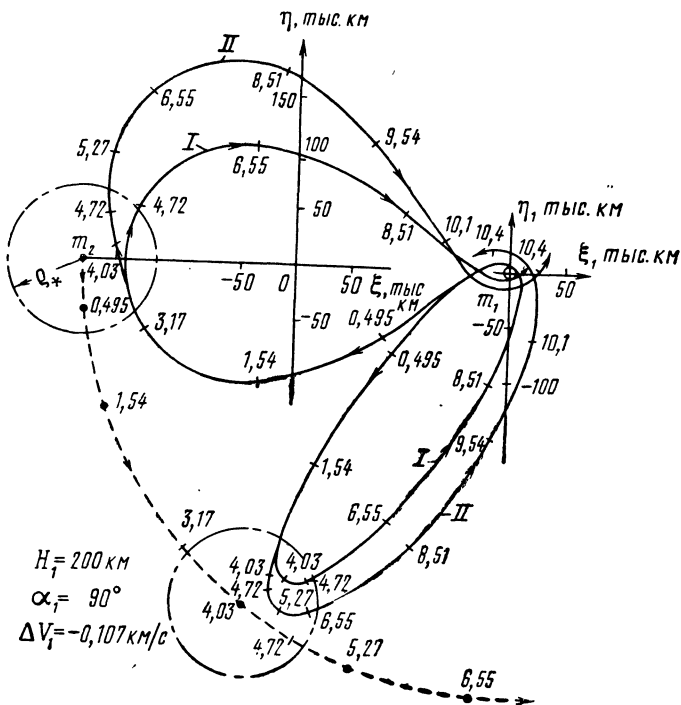


Рис. 6. 7. Возмущение Луной эллипса I, достигающего точки равенства притяжения Земли и Луны, дает траекторию II, не достигающую Луны на первом витке вокруг Земли

Величина V_2 входной геоцентрической скорости не зависит от угла α_1 между направлением начальной скорости и начальным радиусом. Угол α_2 между вектором $\vec{V}_2$ входной геоцентрической скорости и входным геоцентрическим радиусом r_2 зависит от угла α_1 . На рис. 6.8 функция $\alpha_2(\Delta V_1)$ приведена для значения $\alpha_1=90^\circ$. При меньших значениях α_1 соответствующая кривая начинается там же и проходит всюду под приведенной на рис. 6.8 кривой $\alpha_2(\Delta V_1)$. При $\alpha_1 \rightarrow 0$ она должна приближаться к сторонам угла, образованного вертикальной прямой $\Delta V_1 = \Delta V_{1\min}$ и осью абсцисс. Здесь $\Delta V_{1\min}$ — минимальное значение избытка ΔV_1 . При меньших значениях ΔV_1 апогейный (наибольший) радиус траектории оказывается меньше радиуса лунной орбиты, так что на траектории не существует точки с радиусом $r_2 = a$.

Кривые $\tilde{V}_2(\Delta V_1)$, $\hat{\alpha}_2(\Delta V_1)$ и $\check{V}_2(\Delta V_1)$, $\check{\alpha}_2(\Delta V_1)$ отвечают соответственно значениям $r_2 = a + q_*$ и $r_2 = a - q_*$ (где q_* — радиус сферы действия Луны). Для начальных

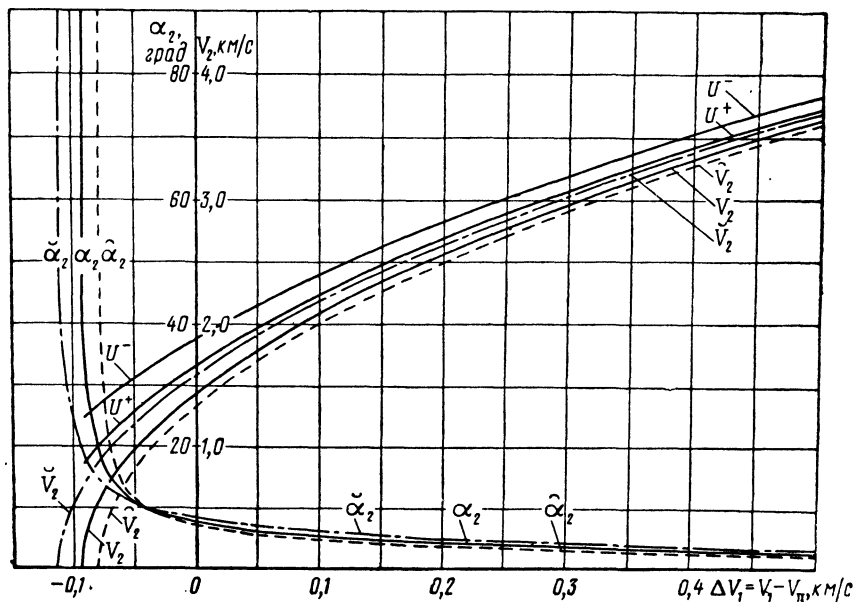


Рис. 6.8. Изменение траекторных характеристик в точке входа в сферу действия Луны в зависимости от изменения избытка ΔV_1 начальной скорости над местной параболической: $\tilde{V}_2$, $\hat{V}_2$ и $\check{\alpha}_2$, $\hat{\alpha}_2$ — крайние значения входной геоцентрической скорости V_2 и ее угла α_2 со входным геоцентрическим радиусом; U^+ и U^- — значения входной селеноцентрической скорости для углов $\alpha_1=90^\circ$ и наклонений $i_1=0^\circ$ и $i_1=180^\circ$

скоростей, не близких к минимальным, изменения вектора входной геоцентрической скорости внутри интервала $|r_2 - a| < q_*$ малы. Поэтому для таких начальных скоростей полета и фиксированных величин r_1 , V_1 , α_1 и наклонения i_1 плоскости траектории полета к плоскости орбиты Луны приближенно можно считать, что величина и направление входной геоцентрической скорости не зависят от величины геоцентрического радиуса-вектора точки входа и имеют средние значения

$$V_2(r_2) = V_2(a); \quad \alpha_2(r_2) \equiv \alpha_2(a). \quad (6.10)$$

При этом положение точки входа полностью определяется величинами долготы восходящего узла Ω_1 и долготы перигея ω_1 геоцентрического участка траектории.

Скорость Луны $\vec{V}_L(t_2)$ образует с входным геоцентрическим радиусом $\vec{r}_2$ угол, близкий к прямому. В приближенном рассмотрении этот угол можно считать прямым, а сам радиус r_2 можно заменять его средним значением — вектором, идущим от центра Земли до центра Луны. Тогда величина и направление входной селеноцентрической скорости $\vec{V}_2$ будут примерно одними и теми же для всех рассматриваемых траекторий сближения, независимо от значений Ω_1 и ω_1 . Для начальных скоростей, не близких к минимальным, начальные участки селеноцентрических траекторий близки к параллельным прямым, а вид этих траекторий в любой селеноцентрической плоскости, содержащей направление $\vec{V}_2$, близок к изображенному на рис. 6.9. При этом точки входа занимают около половины сферы действия Луны.

Угол α между входной $\vec{V}_2'$ и выходной $\vec{V}_3'$ селеноцентрическими скоростями с общим фиксированным модулем U является монотонно убывающей функцией *прицельного расстояния* d (расстояния от центра Луны до касательной к селеноцентрической траектории в точке входа в сферу действия Луны). Функция $\alpha(d)$ для различных значений U представлена на рис. 6.10. Величину d называют иногда *прицельной дальностью*.

Для малых d расстояние $q_{\min}$ траекторий от центра Луны является малой порядка d^2 , причем при любых селеноцентрических скоростях на границе сферы действия. Для попадания в Луну это весьма важно.

Характеристики траекторий сближения, касающихся поверхности Луны, приведены на рис. 6.11. Для этих траекторий угол α , расстояние d и селеноцентрический угол Φ' , на который поворачивается селеноцентрический радиус-вектор КА за время движения внутри сферы действия Луны, являются убывающими функциями скорости U . Значения прицельной дальности

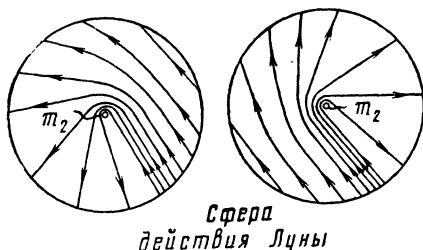


Рис. 6.9. Селеноцентрические траектории в сфере действия Луны в одной из плоскостей, параллельных вектору входной селеноцентрической скорости и проходящих через центр Луны. Точки входа занимают примерно половину сферы действия

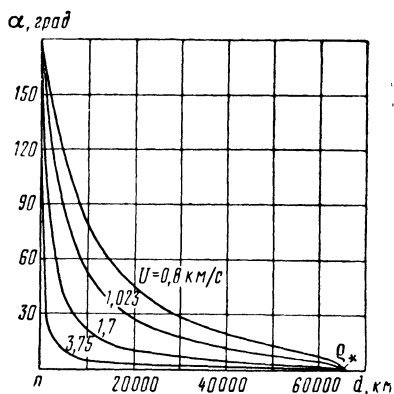


Рис. 6.10. Угол между касательными к гиперболе во входной и выходной точках сферы действия Луны как функция расстояния d от центра Луны до касательной к селеноцентрической траектории в точке входа

сти, отвечающие касанию поверхности Луны, малы по сравнению с q_* (менее 5400 км). Величина угла α поворота направления движения Луной превышает 90° лишь для скоростей U , близких к минимальным, и с ростом U стремится к нулю.

С помощью геоцентрического интеграла площадей

$$r_2 V_2 \sin \alpha_2 = r_1 V_1 \sin \alpha_1 \quad (6.11)$$

находится выражение величины $U = |\vec{V}_2'|$ через начальные данные r_1, V_1, i_1, α_1 (рис. 6.12):

$$U^2 = V_1^2 + V_2^2 - 2 \frac{r_1}{r_2} V_1 V_2 \cos i_1 \sin \alpha_1, \quad (6.12)$$

где V_2 не зависит от α_1 .

Значения U^+ и U^- , отвечающие углу $\alpha_1 = \pm 90^\circ$ и соответственно наклонениям $i_1 = 0^\circ$ и $i_1 = 180^\circ$, ограничивают снизу и сверху диапазон возможных значений $U(i_1, \alpha_1)$. Функции $U^+(\Delta V_1)$ и $U^-(\Delta V_1)$ приведены на рис. 6.8, из которого видно, что разность $U^- - U^+$ невелика и быстро убывает с ростом ΔV_1 .

Для траекторий сближения имеет место малость трансверсальной компоненты входной геоцентрической скорости

$$|V_{2\tau}| \leq \frac{r_1}{r_2} V_1 \approx 0,2 \text{ км/с}$$

при $\Delta V_1 < 0,5$ км/с. Пучок входных селеноцентрических скоростей (рис. 6.12) для любых траекторий сближения заключен в довольно узком конусе (синус угла $\angle OA_2'O_1$ образующей конуса с осью конуса не превышает 0,2).

Время полета до орбиты Луны $T_{1,2} = t_2 - t_1$ представлено кривыми на рис. 6.13, вычисленными для начальной высоты 200 км. Продолжительность полета быстро убывает с увеличением начальной скорости от ее минимального значения.

Приведенные на рис. 6.13 продолжительности $T_{1,2}$ полета имеют место при сближении на восходящей ветви траектории. При $\Delta V_1 < 0$ сближение возможно и на нисходящей ветви. Тогда соответствующие продолжительности полета до орбиты Луны с до-

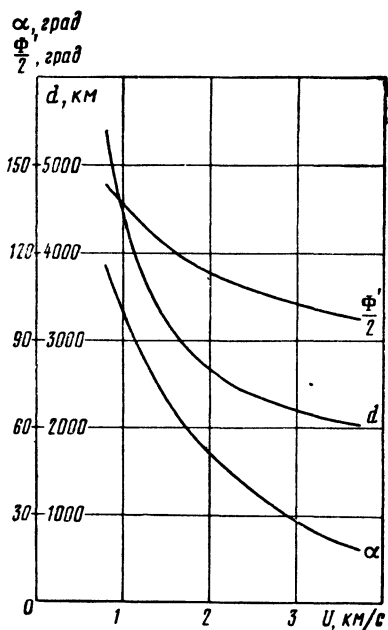


Рис. 6.11. Характеристики траекторий, проходящих у поверхности Луны:

Φ' —селеноцентрический угол, проходимый радиусом-вектором КА внутри сферы действия; α —угол между направлениями входной и выходной селеноцентрических скоростей; U —величина каждой из этих скоростей; d —расстояние от центра Луны до касательной к селеноцентрической траектории в точке входа

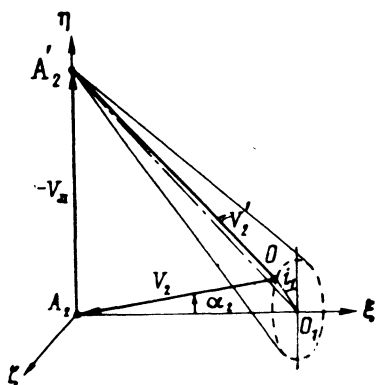


Рис. 6.12. Связь геоцентрической $\vec{V}_2$ и селеноцентрической $\vec{V}_2'$ входных скоростей в пространственной задаче.

При изменении углов α_1 , i_1 получается конус входных селеноцентрических скоростей

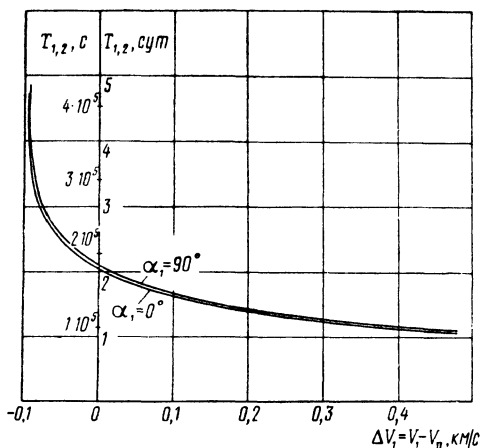


Рис. 6.13. Время $T_{1,2}$ полета до орбиты Луны в зависимости от ΔV_1 . Для вертикального направления ($\alpha_1=0$) начальной скорости оно наименьшее, для горизонтального

ного ($\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$) — наибольшее.

статочной точностью получаются вычитанием рассмотренных выше значений $T_{1,2}$ из периода

$$T_0 = 2\pi a_3^{3/2} / \sqrt{\mu_1},$$

где $a_3 = \frac{r_1}{2} \left[-\frac{\Delta V_1}{V_n} \left(2 + \frac{\Delta V_1}{V_n} \right) \right]^{-1}$ — большая полуось эллипса.

Времена полета внутри сферы действия $T_{2,3} = t_3 - t_2$ как функции d для фиксированных значений селеноцентрической скорости на границе сферы действия представлены на рис. 6.14. Приближенно можно считать $T_{2,3}$ постоянным и зависящим только от U для траекторий тесного сближения с Луной.

Возможность сближения с Луной либо на восходящей, либо на нисходящей ветви траектории порождает два класса решений.

Наибольший интерес представляет класс траекторий сближения на *восходящей ветви*. Этому классу соответствует меньшее влияние разброса начальных данных (особенно по скорости) и меньшее время полета. В дальнейшем рассматривается только этот класс.

Учет влияния Луны мало существен при определении начальных данных траекторий попадания на восходящей ветви и далее при выделении множества номинальных траекторий попадания (т. е. траекторий, проходящих через центр Луны) притяжением Луны пренебрегается.

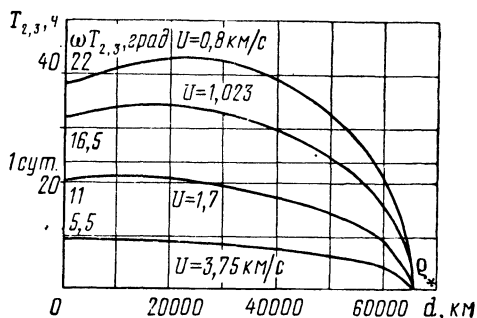


Рис. 6.14. Времена полета в сфере действия Луны.

Заметно быстрое убывание времени полета с ростом величины U селеноцентрической скорости

6.1.2. Некоторые особенности пространственной задачи о попадании в Луну

Относительное расположение Луны и точки старта непрерывно меняется с течением времени.

Плоскость P' лунной орбиты образует с плоскостью P эклиптики (рис. 6.15) постоянный угол $i \approx 5^\circ 9'$, а линия пересечения этих плоскостей (линия *узлов*) вращается в плоскости эклиптики по ходу часовой стрелки (если смотреть с северного полюса), совершая полный оборот за 18,6 года. Определить угол Θ между плоскостями экватора E и орбиты Луны P' можно по формуле

$$\cos \Theta = \cos \epsilon_0 \cos i - \sin \epsilon_0 \sin i \cos \Omega, \quad (6.13)$$

где Ω — долгота восходящего узла лунной орбиты, отсчитываемая от направления на точку весеннего равноденствия γ ; $\epsilon_0 \approx 23^\circ 27'$ — наклонение эклиптики к экватору E .

Величина угла $\Theta(\Omega)$ колеблется с периодом 18,6 года между минимумом $\Theta(180^\circ) = \epsilon_0 - i = 18^\circ 18'$ и максимумом $\Theta(0^\circ) = \epsilon_0 + i = 28^\circ 36'$. Так как угол Θ изменяется медленно, можно пренебрегать его переменностью за время полета по рассматриваемым траекториям. Для расчетов здесь принято $\Theta = 18^\circ 20'$.

Таким образом, Луна движется в плоскости, наклоненной к экватору на постоянный угол Θ , совершая полный оборот за 27,32 суток, а в это время начальная точка пассивного участка ракеты при полете *без доразгона* движется параллельно экватору на широте ψ_0 .

Угол между геоцентрическим радиусом начальной точки и плоскостью орбиты Луны при этом изменяется в пределах от $\alpha_0 = \psi_0 - \Theta$ до $\beta_0 = \psi_0 + \Theta$.

В дальнейшем считается $\alpha_0 > 0$. Для расчетов здесь используется широта и долгота космодрома Байконур*:

$$\psi_0 = 47^\circ, \quad \lambda_0 = 65^\circ.$$

* Сообщение ТАСС.— «Правда», № 128 (11068), 1961, 1 июня.

При запуске КА к Луне с использованием *промежуточной орбиты* ИСЗ, т. е. с *доразгоном*, ракета-носитель ИСЗ стартует в тот момент, когда плоскость траектории выведения, вращаясь вместе с Землей, проходит через заранее выбранную (так называемую *упрежденную*) точку встречи на орбите Луны. В результате плоскость орбиты ИСЗ будет содержать *упрежденную точку*, и доразгон с орбиты ИСЗ производится в этой плоскости до такой скорости, чтобы КА и Луна одновременно приходили в упрежденную точку. Это условие всегда можно удовлетворить в течение полного оборота ИСЗ, а число полных оборотов можно выбрать так, чтобы энергетические затраты были близки к минимальным. С такими энергетическими затратами можно обеспечить встречу с Луной в любой точке ее орбиты, если наклонение орбиты ИСЗ не меньше θ . Соответствующая траектория близка к эллипсу Хоманна. Величина вектора начальной скорости близка к минимальной, а его направление близко к горизонтальному. (Обычно начальную скорость несколько увеличивают сверх минимальной, чтобы уменьшить влияние разброса начальных данных.)

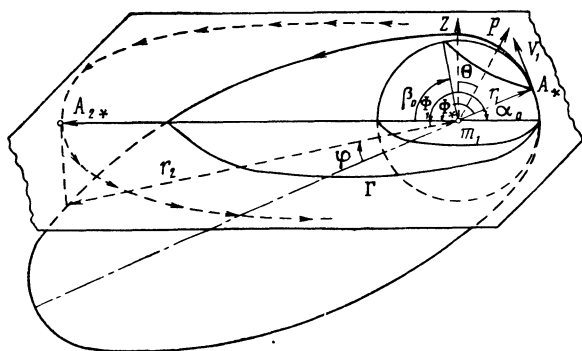


Рис. 6. 16. Положение совокупности эллиптических траекторий различных азимутов относительно лунной орбиты.

Начальная геоцентрическая скорость V_1 — одна и та же по величине и горизонтальна

При запуске КА к Луне *без доразгона* из начальной точки с широтой $\psi_0 > \alpha_0$ энергетические затраты, вообще говоря, превосходят минимальные, а вектор начальной скорости должен возвышаться над горизонтом.

Пусть пассивный участок полета КА начинается под углом θ_1 к горизонту с начальной скоростью V_1 на высоте H_1 ($\theta_1 = 90^\circ - \alpha_1$). Длина активного участка здесь считается равной нулю.

Траектории с эллипти-

ческими начальными скоро-

стями, направленными под углом $\theta_1 = 0$, т. е. параллельно плоскости горизонта в точке

старта (рис. 6. 16), в случае, когда V_1 близка V_n , будут сильно вытянуты вдоль геоцент-

рического радиуса точки встречи. Для этих траекторий угол ϕ между большой осью

и радиусом r_2 , равным расстоянию до Луны, составляет не более 15° .

Минимальный угол между направлением начального геоцентрического радиуса и

плоскостью орбиты Луны не может быть меньше α_0 (см. рис. 6.16); примерно по этому

радиусу направлена большая ось конического сечения. При эллиптических начальных

скоростях горизонтального направления КА пересекает плоскость орбиты Луны раньше,

чем удаляется на расстояние Земля — Луна, и попадание в Луну оказывается невоз-

можным.

Причина этого обстоятельства заключается в том, что при малых значениях

ΔV_1 и малых углах θ_1 наклона вектора начальной скорости к местному горизонту траек-

тория КА слишком сильно искривляется в результате притяжения Земли.

Уменьшить искривление траектории, т. е. уменьшить угол Φ_1 между начальным

радиусом r_1 и радиусом $|r_2| = a$, можно либо увеличением начальной скорости, либо

увеличением угла θ_1 наклона вектора начальной скорости к местному горизонту. Оба

эти пути связаны с дополнительными энергетическими потерями.

Пусть орбита Луны начинает достигаться при угле $\Phi_1 = \Phi_*$. С увеличением значе-

ний V_1 и θ_1 , т. е. с убыванием угла Φ_1 от значения Φ_* на орбите Луны появляется

(см. рис. 6. 16) все возрастающий интервал с серединой в точке A_2^* , на котором Луна

может быть достигнута. Назовем этот интервал *достижимым*. Когда угловая величина

этого интервала достигает значения геоцентрического угла, проходимого Луной за од-

ни сутки (около $13^\circ, 2'$), то в каждом сидерическом месяце появляются по крайней мере

одни сутки, в которые возможен запуск КА по траектории попадания в Луну.

С дальнейшим увеличением значений V_1 , θ_1 , т. е. с убыванием угла Φ_1 до значе-

ния угла $\Phi^* = \pi - \beta_0$, достижимый интервал возрастает до полного круга и старт к

Луне становится возможным в любые сутки месяца.

Угол Φ_1 между начальным и конечным геоцентрическими радиусами пассивного

участка по аналогии со случаем наземной стрельбы называется *пассивной угловой*

дальностью полета.

Пассивная угловая дальность Φ_1 полета зависит не только от скорости V_1 и угла

θ_1 , но и от высоты H_1 конца активного участка. Однако это влияние невелико. Ниже

в расчетах используются значения высоты $H_1 = 300$ и 1000 км в предположении, что

$-0,1 \text{ км/с} \leq \Delta V_1 \leq 0,5 \text{ км/с}$ [1].

Для восходящих ветвей при любых начальных скоростях угол Φ_1 по известным величинам ΔV_1 , θ_1 , r_1 и r_2 находится однозначно. Положим

$$\Delta\beta_1 = \frac{\Delta V_1}{V_n} \left(2 + \frac{\Delta V_1}{V_n} \right); \quad \beta_1 = 1 + \Delta\beta_1 = \left(\frac{V_1}{V_n} \right)^2. \quad (6.14)$$

Из теории конических сечений имеем

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= 2r_1\beta_1 \cos^2 \theta_1; \quad a_1 = -\frac{r_1}{2\Delta\beta_1}; \quad e_1^2 = 1 - \frac{p_1}{a_1}, \\ \cos \vartheta_1 &= \frac{1}{e_1} \left(\frac{p}{r_1} - 1 \right); \quad \cos \vartheta_2 = \frac{1}{e_1} \left(\frac{p}{r_2} - 1 \right); \quad \Phi_1 = \vartheta_2 - \vartheta_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.15)$$

Здесь $V_1 = V_n + \Delta V_1$ — начальная скорость; p_1 , a_1 , e_1 — соответственно параметр, большая полуось и эксцентриситет конического сечения; ϑ_1 и ϑ_2 — истинные аномалии начала и конца траектории.

Зависимость $\Phi_1(\Delta V_1)$ представлена на рис. 6.17 в виде сплошных кривых для $H_1=300$ км и пунктирных — для $H_1=1000$ км при фиксированных углах $\theta_1=0^\circ, 5^\circ, \dots, 40^\circ$.

Зависимость величины $\beta_1 = (V_1/V_n)^2$ от угла θ_1 при постоянных значениях угловой дальности Φ_1 можно получить, пользуясь аналитической формулой

$$\left. \begin{aligned} \Delta\beta_1 &= \frac{\cos^2 \left(\frac{\Phi_1}{2} + \theta_1 \right) - v \cos^2 \theta_1}{v \cos^2 \theta_1 - \cos(\Phi_1 + \theta_1) \cos \theta_1}, \\ \beta_1 &= 1 + \Delta\beta_1, \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

где $v = r_1/r_2 \approx 0,018$ (малая величина) — отношение начального радиуса к конечному.

Задаваясь фиксированными значениями угла Φ_1 , найдем функции

$$\bar{v}^2 = V_1^2/V_n^2 = \beta_1(\theta_1, \Phi_1)$$

и построим кривые $\Phi_1(\beta_1, \theta_1) = \text{const}$, которые представлены для начальной высоты $H_1=1000$ км на рис. 6.18; значения угла Φ_1 отмечены у кривых цифрами. Для высоты $H_1=300$ км кривые получаются из представленных соответствующим сдвигом их по оси ординат.

Формулы, позволяющие для разных углов θ_1 определить величины *минимальных* начальных скоростей, необходимых для получения заданных апогейных радиусов $r_2 = |F_0 A_2|$ (равных расстоянию от Земли до Луны, рис. 6.19), имеют вид

$$a = \frac{1}{2} \frac{r_2^2 - r_1^2 \sin^2 \alpha_1}{r_2 - r_1 \sin^2 \alpha_1}; \quad (6.17)$$

$$\Delta\beta_{1\min} = \beta_{1\min} - 1 = -\frac{r_1}{2a}.$$

$$\Delta\beta_{1\min} = -v \frac{1 - v \sin^2 \alpha_1}{1 - v^2 \sin^2 \alpha_1}; \quad v = \frac{r_1}{r_2}; \quad (6.18)$$

$$\sin \frac{\Phi_{\max}}{2} = \frac{(1 - v) \sin \alpha_1}{\sqrt{1 - v(2 - v) \sin^2 \alpha_1}}. \quad (6.19)$$

Здесь $2a = |F_0 F|$ — большая ось эллипса;

$\Phi_{\max}$ — максимальный угол Φ_1 , достижимый при заданном угле θ_1 .

Величина $\Delta V_{1\min}(\theta_1)$ есть малая того же порядка, что и величина $\frac{V_n}{2} v$, и ее относительное изменение есть также величина малая, одного порядка с величиной $v \cos^2 \theta_1$.

Имеет место неравенство:

$$\sin \frac{\Phi_{\max}}{2} \leq \sin \alpha_1 \quad \text{при} \quad 0 \leq \alpha_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\pi}{2} > \theta_1 \geq 0.$$

Для неминимальной скорости заданный радиус r_2 конического сечения будет достигаться при угле $\Phi_1 < \Phi_{\max}$ (угол $\Phi_{\max}$ соответствует минимальной скорости). Поэтому всегда справедливо неравенство

$$\sin \frac{\Phi_1}{2} \leq \sin \alpha_1. \quad (6.20)$$

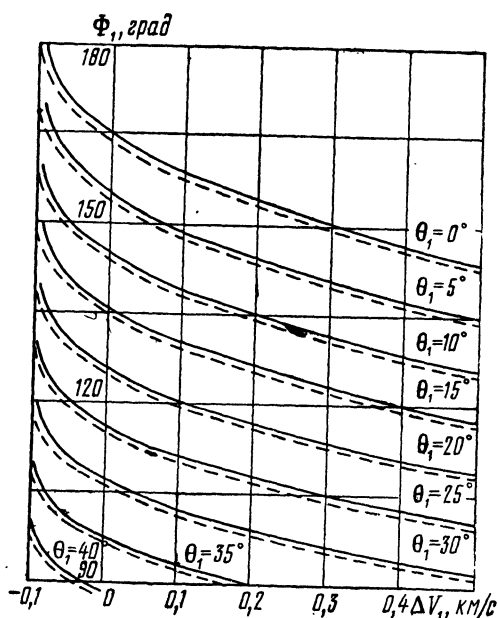


Рис. 6.17. Зависимость пассивной угловой дальности Φ_1 полета к Луне от избытка ΔV_1 начальной скорости над местной параболической при различных значениях угла возвышения θ_1

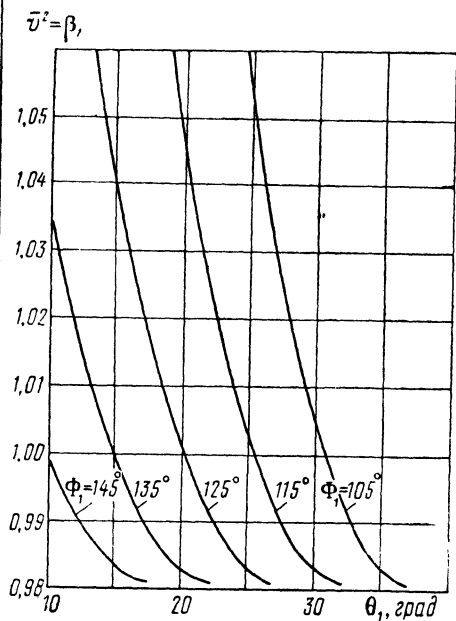


Рис. 6.18. Зависимость квадрата $\bar{v}^2 = \beta^2$ отношения начальной скорости к местной параболической от начального угла θ_1 возвышения при различных фиксированных угловых дальностях Φ_1 пассивного участка траектории полета к Луне

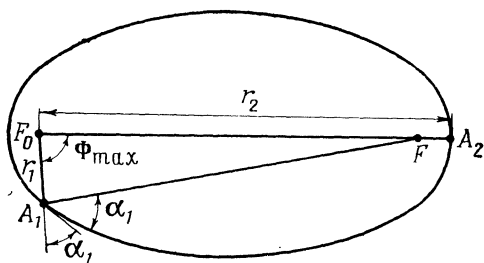


Рис. 6.19. Траектория минимальной энергии, необходимой для достижения заданного радиуса r_2 при заданных r_1 и α_1

Знак равенства для минимальных скоростей имеет место при $\alpha_1=0$ и $\alpha_1=\pi/2$, а для больших скоростей — только при $\alpha_1=0$ ($\theta_1=\pi/2$). Неравенство (6.20) можно применять для оценки максимально достижимых углов Φ_1 .

Коническое сечение с фиксированными значениями r_1 , r_2 , ΔV_1 и θ_1 , т. е. с фиксированной угловой дальностью Φ_1 , встречает Луну не в точке A_2^0 , где Луна находилась в момент старта (рис. 6.20), а в упрежденной точке A_2 , в которую Луна переместится за время полета КА по траектории A_1A_2 . Время полета $T_{1,2}$ указанными выше данными r_1 , r_2 , ΔV_1 , θ_1 определяется однозначно. При фиксированных значениях этих данных упрежденная точка движется с постоянной скоростью впереди Луны на угловом расстоянии $\omega T_{1,2}$ от нее, где ω — угловая скорость обращения Луны.

Геометрическое место точек, из которых возможно попадание в Луну с данными r_1 , r_2 , ΔV_1 , θ_1 , составляет окружность радиуса $r_1 \sin \Phi_1$, являющуюся линией пересечения геоцентрической сферы радиуса r_1 с прямым круговым конусом, ось которого постоянно соединяет центр Земли m_1 с упрежденной точкой A_2 , а образующие составляют с этой осью угол Φ_1 .

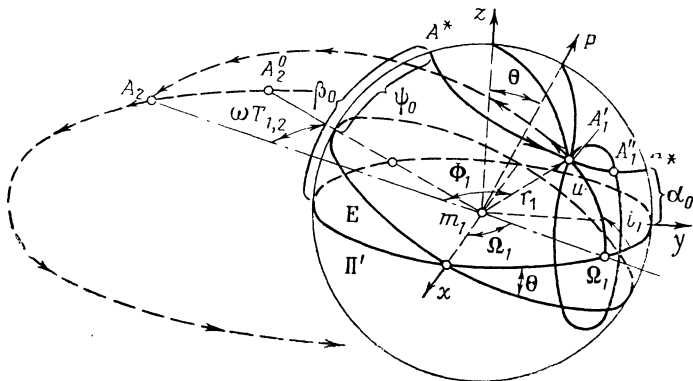


Рис. 6.20. Геоцентрические траектории движения точки старта, КА и Луны

Плоскости всех траекторий с заданными значениями величин r_1 , r_2 , ΔV_1 , θ_1 проходят через начальную точку A_1 , упрежденную точку A_2 и центр Земли m_1 и пересекаются с плоскостью орбиты Луны по прямой m_1A_2 . Примем плоскость орбиты Луны за основную при определении кеплеровых элементов траекторий полета к Луне. Тогда прямая m_1A_2 будет являться линией узлов для всех попадающих траекторий, а положение ее можно определять долготой Ω_1 узла, противоположного упрежденной точке. При этом долготу узла будем отсчитывать от того направления x линии пересечения плоскости лунной орбиты с экватором, где Луна переходит из южного полушария в северное. Согласно определению угла Ω_1 наклонение i_1 плоскости траектории к основной плоскости будем считать изменяющимся в диапазоне от -180° до $+180^\circ$.

Пусть u — аргумент широты начальной точки. Из рис. 6.20 $u=180^\circ-\Phi_1$. Окружность начальных точек траекторий с угловой дальностью Φ_1 будем кратко называть *и-кругом*.

Начальные точки попадающих траекторий, определяемых параметрами r_1 , ΔV_1 , θ_1 , ψ_0 , должны быть общими точками для *и-круга* и ψ_0 -параллели. Таких точек может быть две (пересечение кругов), одна (касание кругов) и ни одной (круги не имеют общих точек).

С течением времени благодаря месячному движению Луны центр *и-круга* равномерно движется на сфере по большому кругу основной плоскости, а параллель точки старта не меняет своего положения в абсолютном пространстве (см. рис. 6.20). При $u < \alpha_0$, где $\alpha_0 = \psi_0 - \theta$, т. е. при достаточно больших углах Φ_1 , ψ_0 -параллель и *и-круг* не имеют общих точек, а когда аргумент широты u заключен в интервале $\alpha_0 < u < \beta_0$, где $\beta_0 = \psi_0 + \theta$, то на ψ_0 -параллели появляется целый интервал, внутри которого при различных углах Ω_1 , достаточно близких к 90° , всюду могут находиться точки пересечения ψ_0 -параллели с *и-кругом*. Назовем этот интервал *стартовым* интервалом. При $u \rightarrow \alpha_0$ этот интервал стягивается к точке A_* , а при $u \rightarrow \beta_0$ он увеличивается до полной ψ_0 -параллели, так что концы его сходятся к точке A^* , противоположной точке A_* (см. рис. 6.20).

6.1.3. Характеристики траекторий попадания в Луну с заданной широты

Попадание в Луну с заданной широты ψ_0 при $u > \alpha$ практически возможно лишь тогда, когда достижимый интервал на орбите Луны настолько велик, что упрежденная точка проходит его по крайней мере за одни звездные сутки. В этом случае в сидерическом месяце всегда найдутся такие сутки, в течение которых точка старта в суточном движении пройдет через одну или две общие точки ψ_0 -параллели и *и-круга*, и будет возможно попадание с заданными начальными данными r_1 , V_1 , θ_1 . Если же упрежденная точка проходит достижимый интервал на орбите Луны за двое суток, то в каждые из этих суток найдется момент, в который точка старта проходит через общую точку ψ_0 -параллели и *и-круга* и возможно попадание и т. д.

Наконец, при $\Phi_1 \rightarrow \pi - \beta_0$ достижимый и стартовый интервалы составляют 360° каждый и попадание возможно каждые сутки. Из схемы на рис. 6.21 видно, как при значениях $\alpha_0 < u < \beta_0$ на неподвижном в пространстве xuz стартовом интервале, принадлежащем ψ_0 -параллели, при изменении угла Ω_1 возникают и движутся точки A' и A'' , общие с u -кругом. Крайние точки стартового интервала A'_k и A''_k являются точками пересечения ψ_0 -параллели с малым кругом, параллельным основной плоскости и постоянно касающимся u -круга.

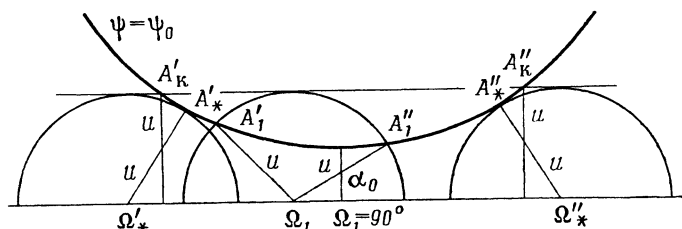


Рис. 6.21. Схема крайних и промежуточных положений u -круга равных угловых дальностей полета относительно ψ_0 -параллели

Для расчета движения точек A' и A'' при увеличении угла Ω_1 имеем следующие формулы (рис. 6.22):

$$\left. \begin{aligned} \sin \lambda_{\Omega} &= -\frac{\cos \Omega_1}{\sin m}; \\ \cos \lambda_{\Omega} &= \frac{\sin \Omega_1 - \sin \theta \cos m}{\cos \theta \sin m}; \end{aligned} \right\} \quad (6.21)$$

$$\cos m = \sin \theta \sin \Omega_1; \quad (6.22)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \sigma &= \frac{\cos u - \cos m \sin \psi_0}{\sin m \cos \psi_0}; \\ \lambda' &= \lambda_{\Omega} - \sigma, \quad \lambda'' = \lambda_{\Omega} + \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (6.23)$$

где λ_{Ω} — угловое расстояние между меридианами оси y и линии узла Ω_1 . Величина $\Delta \lambda_{mc} = \lambda'' - \lambda' = 2\sigma$ есть угловое расстояние между меридианами точек A'_1 и A''_1 .

Зависимости λ' и λ'' от Ω_1 для случая, когда $\Phi_1 = 150^\circ$, т. е. $u = 30^\circ$, представлены на рис. 6.23 кривыми $M_1 N_1$. По величине $\Delta \lambda_{mc}(\Omega_1)$ можно получить представление о *межстартовом времени*, т. е. о времени, в течение которого точка старта A_c проходит в суточном движении интервал $A'_1 A''_1$.

Для получения межстартового времени в часах достаточно разделить $\Delta \lambda_{mc}$ на 15° (пренебрегая изменением Ω_1 со временем). Учет зависимости $\Omega_1(t)$ изменит межстартовое время на величину отношения суток к месяцу, т. е. на 4% для значений Ω_1 , не близких к Ω'_* и Ω''_* (вблизи этих значений изменения могут быть больше, см. рис. 6.21).

Диапазон (Ω'_*, Ω''_*) есть величина *поражаемого интервала*, а диапазон $(\lambda'_k, \lambda''_k)$ между ординатами точек M_2 и N_2 , т. е. между экстремальными значениями функций $\lambda'(\Omega_1)$ и $\lambda''(\Omega_1)$, — величина *стартового интервала*. Интервал между ординатами точек M_1 и N_1 составляет основную часть стартового интервала. Внутри этого интервала точки A'_1 и A''_1 с изменением Ω_1 движутся в одном направлении, а вне его — в разных направлениях.

Для расчета поражаемого интервала при различных угловых дальностях полета Φ_1 из условия касания найдем (см. рис. 6.22)

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 0; \quad u = \pi - \Phi_1; \quad m = 90^\circ - \psi_0 + u; \\ \sin \Omega_{1\text{кас}} &= \frac{\sin(\psi_0 - u)}{\sin \theta}; \\ \Delta \Omega_1 &= 2 \left(\frac{\pi}{2} - \Omega_{1\text{кас}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (6.24)$$

где $\Delta \Omega_1$ — величина поражаемого интервала.

Для расчета величины стартового интервала $\Delta\lambda_c$ как функции Φ_1 имеем формулы (см. рис. 6.22) (в случае, когда точка A'_1 совпадает с точкой A'_K):

$$\cos \lambda'_K = \frac{\cos \theta \sin \psi_0 - \sin u}{\sin \theta \cos \psi_0}; \quad (6.25)$$

$$\lambda_c = 2\lambda'_K. \quad (6.26)$$

Приведем формулу для расчета максимальной величины $(\Delta\lambda_{mc})_{\max}$ межстартового интервала. Она достигается при $\Omega_1 = 90^\circ$. Тогда $\lambda = 0$, $m = 90^\circ - \theta$ и

$$\cos \sigma_{\max} = \frac{\cos u - \sin \theta \sin \psi_0}{\cos \theta \cos \psi_0}; \quad (6.27)$$

$$(\Delta\lambda_{mc})_{\max} = 2\sigma_{\max}. \quad (6.28)$$

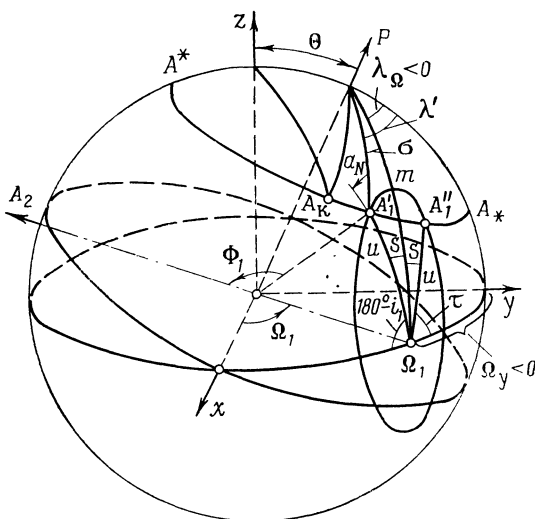


Рис. 6.22. Сферические углы для расчета параметров траектории полета к Луне

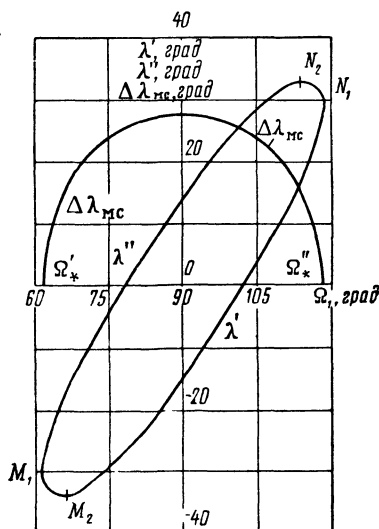


Рис. 6.23. Изменение границ λ' и λ'' стартового интервала и угловой величины $\Delta\lambda_{mc}$ межстартового интервала с изменением долготы узла Ω_1 траектории при фиксированной угловой дальности полета

Этот угол, так же как и угол $\Delta\lambda_c$, можно измерять не только в градусах, но и в часах. Аналогично достижимый интервал можно измерить не только в градусах, но и в часах (или в сутках). В таких мерах и приведены дополнительные шкалы на рис. 6.24, где представлены функции $\Delta\Omega_1$, $\Delta\lambda_c$, $(\Delta\lambda_{mc})_{\max}$ для значений Φ_1 угловой дальности пассивного участка из диапазона $\pi - \beta_0 < \Phi_1 < \pi - \alpha_0$ (где $\Phi_1 = \pi - u$), соответствующего изменению углов $\Delta\Omega_1$ и $\Delta\lambda_c$ от нуля до 360° . Значения функций для диапазона $\alpha_0 < \Phi_1 < \beta_0$ получаются из функций, представленных на рис. 6.24 зеркальным отображением их относительно прямой $\Phi_1 = 90^\circ$. Для диапазона $\beta_0 < \Phi_1 < \pi - \beta_0$ имеем $\Delta\Omega_1 = \Delta\lambda_c = 360^\circ$. С уменьшением угла Φ_1 оба интервала (межстартовый и достижимый) суживаются, при $\Phi_1 = \alpha_0$ они вырождаются в точки и при $\Phi_1 < \alpha_0$ отсутствуют.

Определим, наконец, азимуты и наклонения для точек A'_1 и A_1 . Пусть угол a_N (см. рис. 6.22) отсчитывается от направления на север против хода часовой стрелки, тогда азимут $a'_N = -a_N$ и

$$\cos |a'_N| = - \frac{\cos m - \sin \psi_0 \cos u}{\cos \psi_0 \sin u}; \quad (6.29)$$

$$\sin |a'_N| = \frac{\sin m \sin \sigma}{\sin u}. \quad (6.30)$$

Максимальное значение азимута $|a'_N|$ достигается при $\Omega_1 = 90^\circ$, причем имеем

$$\cos |a'_N|_{\max} = \frac{-\sin \theta + \cos u \sin \psi_0}{\sin u \cos \psi_0}. \quad (6.31)$$

Функции $a'_N(\Omega_1)$ и $a''_N(\Omega_1)$ при $\Phi_1=150^\circ$ графически представлены на рис. 6.25. Изменение максимального азимута в зависимости от угла $\Phi_1=\pi-u$ представлено на рис. 6.26. Для средних широт азимут $(a_N)_{\max}(\Phi^*)$ близок к 90° ($\Phi^*=\pi-\beta_0$).

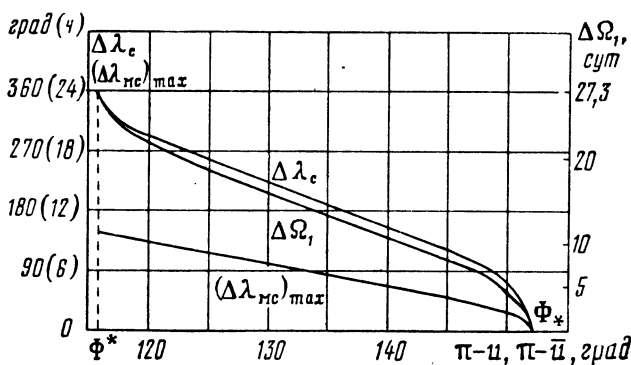


Рис. 6.24. Изменение величин стартового интервала $\Delta\lambda_c$, максимального межстартового интервала $(\Delta\lambda_{мс})_{\max}$ и поражаемого интервала $\Delta\Omega_1$ с изменением угловой дальности полета (или ее дополнения до 360°)

Для определения наклона i_1 плоскости траектории полета к плоскости орбиты Луны имеем формулы (см. рис. 6.22):

$$\sin \tau = \frac{\cos \theta}{\sin m}; \quad \cos \tau = \frac{\sin \theta - \cos m \sin \Omega_1}{\sin m \cos \Omega_1}, \quad (6.32)$$

$$\sin s = \frac{\sin a_N \cos \psi_0}{\sin m}; \quad \cos s = \frac{\sin \psi_0 - \cos u \cos m}{\sin u \sin m}. \quad (6.33)$$

Для точек A'_1 и A''_1 имеем соответственно

$$i'_N = \tau + s; \quad i''_N = \tau - s. \quad (6.34)$$

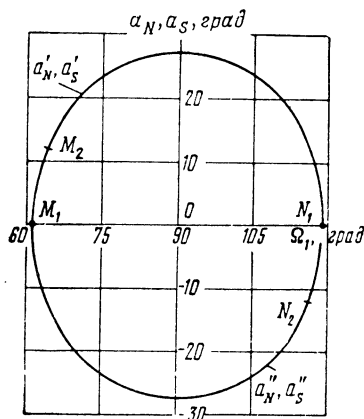


Рис. 6.25. Зависимость азимута запуска от долготы узла Ω_1 при фиксированной угловой дальности полета

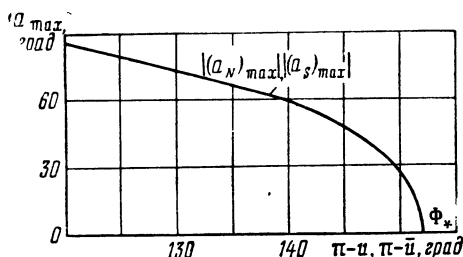


Рис. 6.26. Зависимость максимального азимута запуска от угловой дальности полета

Экстремум величины наклона достигается при тех значениях Ω_1 , при которых точки A'_1 и A''_1 проходят через точку A_* (см. рис. 6.22). Тогда имеем

$$\sin (i_N)_{\min} = \frac{\sin (\psi_0 - \theta)}{\sin u}. \quad (6.35)$$

На рис. 6.27 показано изменение наклонов i'_N и i''_N в зависимости от долготы узла Ω_1 . На рис. 6.25 и 6.27 точки M_1, N_1, M_2, N_2 имеют тот же смысл, что и на рис. 6.23.

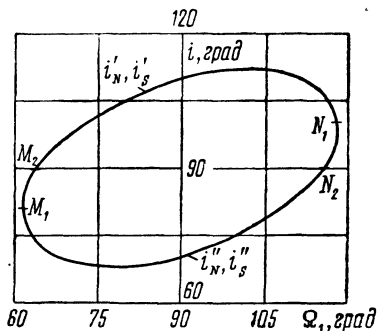


Рис. 6.27. Зависимость наклона i плоскости траектории полета к плоскости лунной орбиты от долготы узла Ω_1

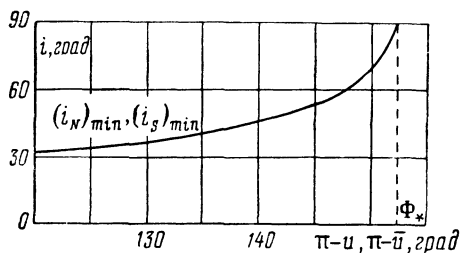


Рис. 6.28. Зависимость экстремальных значений наклона i плоскости траектории полета к плоскости лунной орбиты от угловой дальности полета (или от ее дополнения до 360°)

Кривая зависимости минимальных наклонов $(i_N)_{\min}$ от угловой дальности пассивного участка $\Phi_1 = \pi - u$ представлена на рис. 6.28.

6.1.4. Учет протяженности активного участка

В задаче о попадании в Луну без доразгона назовем *активной угловой дальностью* Φ_a геоцентрический угол между радиусами начальной и конечной точек активного участка.

На абсолютную геоцентрическую скорость в конце активного участка несколько влияет скорость, которую КА имел в точке старта, вращаясь в суточном движении вместе с земной поверхностью. Учитывая малость этой скорости по сравнению с полной характеристической скоростью, сообщаемой двигателями КА, можно считать, что вращающаяся вместе с Землей по Φ_0 -параллели точка старта является центром Φ_a -круга на Земле, т. е. центром окружности заданного углового радиуса Φ_a , над любой точкой которой на заданной высоте H_1 и под заданным углом θ_1 к местному горизонту в любой момент времени может быть получена заданная величина скорости V_1 .

Пассивная угловая дальность, т. е. геоцентрический угол между начальной и конечной точками пассивного участка траектории, по-прежнему определяется однозначно величинами H_1, V_1, θ_1 и попадающие траектории с параметрами H_1, V_1, θ_1 по-прежнему располагаются на круге радиуса $u_1 = \pi - \Phi_1$ с центром в точке Ω_1 .

Для осуществления попадания необходимо, чтобы конец A_1 активного участка (рис. 6.29) находился на u_1 -круге и чтобы радиус Φ_a -круга принадлежал плоскости, проходящей через линию узлов и точку A_1 , т. е. продолжал бы радиус u_1 -круга. Последнее условие означает, что u_1 -круг и Φ_a -круг должны внутренним образом касаться друг друга в точке A_1 , и что полная угловая дальность Φ , отсчитываемая от точки старта, выражается суммой $\Phi = \Phi_1 + \Phi_a$, т. е. $u_1 = u + \Phi_a$, где $u = 180^\circ - \Phi$, $u_1 = 180^\circ - \Phi_1$.

Возможны лишь два различных случая *внутреннего касания*: *случай I*, когда $u_1 - \Phi_a > \alpha_0$, и *случай II*, когда $\Phi_a - u_1 > \alpha_0$ (рис. 6.29 и 6.30).

Наличие активного участка в случае I усложняет достижение Луны, приводя к замене прежнего крайнего значения Φ_1 меньшим значением $\Phi_1 - \Phi_a$.

Ограничения по времени старта определяются, как и ранее, величиной аргумента u широты начальной точки A_1 (см. рис. 6.29) и поэтому характеризуются прежними зависимостями величин $\Delta\lambda_c, \Delta\Omega_1, (\Delta\lambda_{мс})_{\max}$ от параметра u или от полной угловой дальности $\Phi = \pi - u$ (см. рис. 6.24), хотя соответствующие зависимости этих же величин от параметров r_1, V_1, θ_1 будут уже иными. Аналогично сохраняются зависимости максимальных значений азимута и наклона от величины $\pi - u$ (см. рис. 6.26 и 6.28).

Для реализации случая II необходимо, чтобы было $\Phi_a - u_1 \geq \alpha_0$, т. е. активная угловая дальность должна превосходить значение $\alpha_0 = \Phi_0 - \Theta$ (см. рис. 6.30). Для увеличения возможностей попадания в Луну в случае II желательно уменьшать начальную скорость до минимальной, а угол θ_1 ее наклона к горизонту желательно уменьшать до нуля (при этом угол Φ_1 растет до 180° , а угол u_1 убывает до нуля). Совокупность направлений полета в случае II в целом противоположна совокупности направлений в случае I.

Ограничения по времени старта в случае II определяются кругом радиуса $\bar{u} = \Phi_a - u_1$ (кратко u -кругом), аналогично тому, как в случае I они определялись u -кругом. Согласно рис. 6.30 полная угловая дальность $\bar{\Phi} = \pi + \bar{u} = \Phi_1 + \Phi_a$, т. е. выражается прежней формулой через Φ_a и Φ_1 . При этом по-прежнему зависимость пассивной угловой дальности $\Phi_1 = \pi - u_1$ от θ_1 и β_1 характеризуется рис. 6.18.

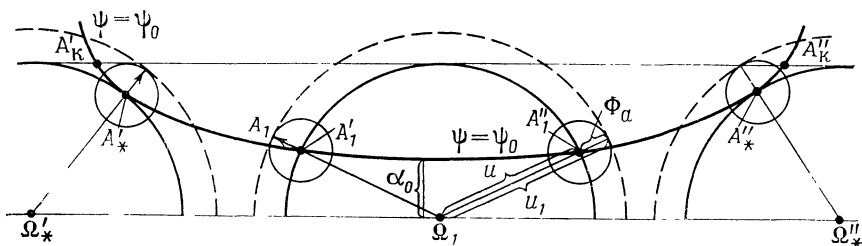


Рис. 6.29. Схема внутреннего касания Φ_a -круга и u_1 -круга при $u_1 - \Phi_a > \alpha_0$ для различных последовательных положений Ω_1 упрежденной точки

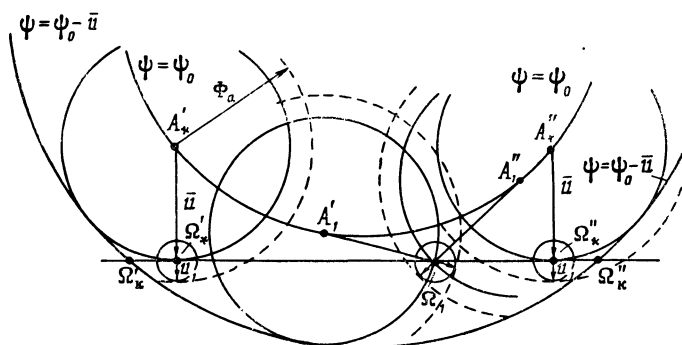


Рис. 6.30. Схема внутреннего касания Φ_a -круга и u_1 -круга при $\Phi_a - u_1 > \alpha_0$ для различных последовательных положений Ω_1 упрежденной точки

В случае II (см. рис. 6.30) точки касания Ω'_* и Ω''_* определяют границы A'_* и A''_* стартового интервала, а крайние точки Ω'_K и Ω''_K являются границами достижимого интервала.

Если точка A_1 не совпадает с точкой A'_* или A''_* , то существует два момента времени, в которые возможно касание: первый отвечает юго-восточному направлению запуска (точка A'_1), а второй — юго-западному (точка A''_1). Назовем интервал $\Delta\lambda_{мс}$ между этими моментами межстартовым, по аналогии со случаем I, и максимум его, достигающийся при $\Omega_1 = 0$, обозначим $(\Delta\lambda_{мс})_{max}$.

При $\bar{u} = \text{const}$ характеристики случая II находятся аналогично характеристикам случая I при $u = \text{const}$ [3]. Обозначим символами Ω'_1 и Ω''_1 упрежденные положения линии узлов, при которых возможно попадание в Луну из точки старта A_1 (рис. 6.31), определяемой полярным углом λ , отсчитываемым от меридиана точки A_{*} .

Для $\bar{u} = 30^\circ$ функции $\lambda'(\Omega_1)$, $\lambda''(\Omega_1)$, обратные функции $\Omega'_1(\lambda)$ и $\Omega''_1(\lambda)$, а также $\Delta\lambda_{мс}$ представлены на рис. 6.23. Эти зависимости в случаях I и II совпадают. Вообще характеристики случая II изображаются теми же кривыми, что и в случае I, только с аргументом $\bar{u}$ вместо u [3]. На рис. 6.25—6.28 они отмечены индексом S (вместо индекса N).

Зависимости рассмотренных характеристик от аргумента широты u (или $\bar{u}$) являются более универсальными, чем зависимости от полной угловой дальности Φ , в том смысле, что пригодны при любых значениях активной угловой дальности Φ_a , причем как в случае I, так и в случае II. Далее рассматривается лишь случай I.

6.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЙ ПОПАДАНИЯ В ЛУНУ

6.2.1. Определение энергетических затрат, необходимых для реализации заданных начальных данных

Под заданными начальными данными понимаются определенные комбинации угла θ_1 *возвышения* начальной скорости и квадрат β_1 *отношения* ее величины к величине местной параболической скорости при заданном азимуте траектории. Энергетические затраты измеряются величиной U_x *характеристической скорости* КА, т. е. скорости, которую приобрел бы КА с теми же затратами топлива при отсутствии внешних сил.

Из энергетических соображений следует, что величина U_x минимальных затрат возрастает с ростом β_1 при $\theta_1 = \text{const}$ и с ростом $\theta_1 (0 \leq \theta_1 \leq \pi/2)$ при $\beta_1 = \text{const}$. Соединяя на плоскости θ_1, β_1 точки с одинаковыми минимальными энергетическими затратами U_x (рис. 6.32), получим кривые оптимальных комбинаций θ_1, β_1 . Точки каждой кривой при любом значении абсциссы θ_1 отвечают минимальным затратам U_x , необходимым для достижения ординаты β_1 .

Строя функции $\beta_1(\theta_1)|_{U_x = \text{const}}$ для серии различных значений U_x , получим семейство оптимальных кривых $U_x = U_x(\theta_1, \beta_1)$, представляющих собой функцию двух переменных и изображенных на рис. 6.32 для $1 - \epsilon < \beta_1 < 1 + 3\epsilon$ (величина $\epsilon \approx 0,02$ является малой поправка $1 - \beta_1 \text{ min}$; $\beta_1 \text{ min}$ соответствует случаю достижения лунной орбиты с минимальной скоростью).

Радиус $r_1 = r_0 + H_1$ (где r_0 — радиус Земли) и угловая дальность Φ_a активного участка, отвечающие оптимальным комбинациям θ_1 и β_1 , не являются произвольными, а образуют однопараметрическое семейство функций от θ_1 . На рис. 6.33 даны границы однопараметрического пучка оптимальных кривых $r_1(\theta_1)|_{\beta_1 = \text{const}}$; там же нанесены границы другого однопараметрического пучка — пучка оптимальных кривых $\Phi_a(\theta_1)|_{\beta_1 = \text{const}}$. Вторым пучок получается (аналогично первому) по тем траекториям, которые оказались наивыгоднейшими в смысле величины характеристической скорости U_x . Из характера изменения r_1 и Φ_a с ростом θ_1 следует, что чем по более крутой траектории происходит разгон, тем на меньших дальностях и больших высотах должен кончиться активный участок.

Пучок кривых $r_1(\theta_1)|_{\beta_1 = \text{const}}$ имеет максимальную ширину при $\theta_1 = \pi/2$ и нулевую — при $\theta_1 = 0$; пучок кривых $\Phi_a(\theta_1)|_{\beta_1 = \text{const}}$, наоборот, сужается до нуля при $\theta_1 = \pi/2$ и максимально расширяется при $\theta_1 = 0$. Кривые обоих пучков в точке наибольшей ширины пучка имеют горизонтальные касательные.

Сказанное выше одинаково применимо к траекториям выведения на орбиту ИСЗ (с которой впоследствии может начинаться доразгон для полета к Луне) и на орбиту полета к Луне без доразгона. В последнем случае зависимость Φ_a и r_1 от β_1 менее существенна, чем от θ_1 (в рассматриваемом малом диапазоне $1 - \epsilon < \beta_1 < 1 + 3\epsilon$).

В приближенных расчетах можно пренебрегать зависимостью Φ_a и r_1 от β_1 , а иногда и зависимостью их от θ_1 — при достаточном сужении диапазона по θ_1 .

6.2.2. Характеристики траекторий достижения Луны с поверхности Земли при фиксированном наклонении плоскости траектории к плоскости экватора

Рассмотрим полную угловую дальность и другие характеристики попадающей в Луну траектории, начинающейся в фиксированной точке B_0 (рис. 6.34). Положение плоскости траектории характеризуется ее наклонением i_1 к плоскости лунной орбиты. При фиксированном наклонении i_a плоскости траектории к экватору траектория, начинающаяся в точке B_0 , будет иметь фиксированный азимут a_0^* .

Долготу узла будем определять углом Ω_y , отсчитываемым* от середины достижимого интервала (т. е. от оси y на рис. 6.22) в сторону оси x . Соответственно вместо прежних осей x и y будут использоваться геоцентрическая ось X , направленная в точку, противоположную середине достижимого интервала, и ось Y , направленная в нисходящий относительно экватора узел лунной орбиты (см. рис. 6.20 и 6.34), так что

$$\left. \begin{aligned} X &= y; \quad Y = -x; \quad Z = z; \\ \sin \Omega_y &= -\cos \Omega_1, \quad \cos \Omega_y = \sin \Omega_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.36)$$

$$\left. \begin{aligned} i_1 &= i_1' = \tau - s; \\ \cos u_0 &= \frac{\cos m \sin \psi_0 + \cos s \cos a_0 \sin m \cos \psi_0}{1 - \sin s \sin a_0 \sin m \cos \psi_0}. \end{aligned} \right\} \quad (6.37)$$

(формулы для m, s были даны выше)

* Индекс «у» означает, что параметр соответствует упрежденной точке траектории полета.

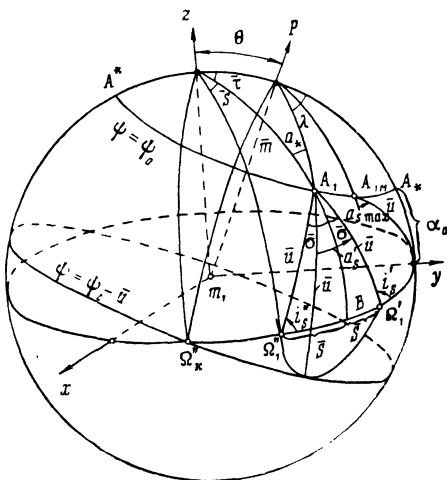


Рис. 6.31. Сферические углы для расчета траектории полета к Луне в случае $\bar{u} = \Phi_a - u_1 > \alpha_0$

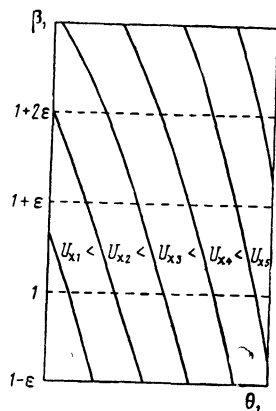


Рис. 6.32. Зависимость между параметрами β_1 и θ_1 при различных постоянных значениях характеристической скорости U_x

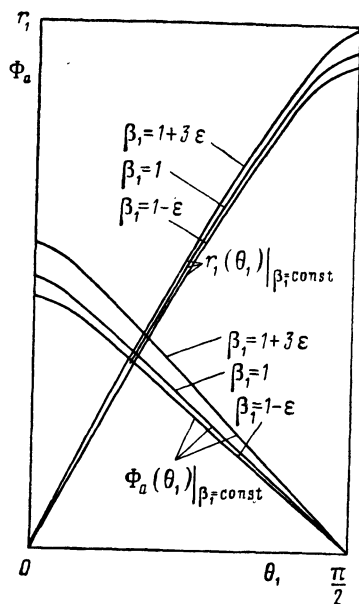


Рис. 6.33. Примерный вид зависимостей геоцентрического радиуса r_1 и угловой дальности Φ_a активного участка от квадрата $(\beta_1 = v^2)$ отношения начальной скорости к местной параболической и от угла θ_1 возвышения вектора начальной скорости над местным горизонтом

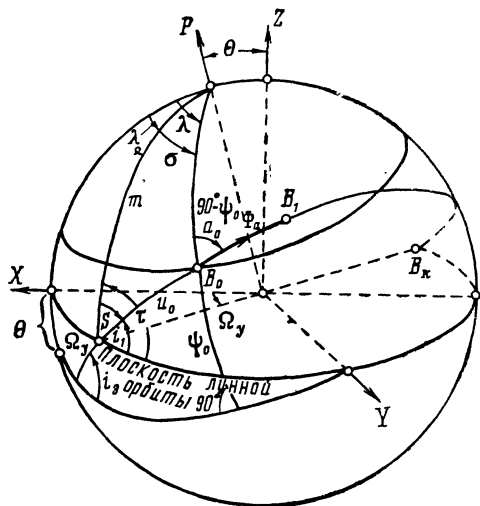


Рис. 6.34. Трасса КА (радиальная проекция траектории полета на земную поверхность) на невращающейся сфере при северо-восточном направлении запуска

Величины $u_0(\Omega_y)$ и $i_1(\Omega_y)$ для двух азимутов ($a_0=35^\circ$ и $a_0=60^\circ$) представлены на рис. 6.35. Имеем

$$u_0(\Omega_y)|_{a_0=60^\circ} > u_0(\Omega_y)|_{a_0=35^\circ}.$$

поскольку с ростом азимута полные угловые дальности все сильнее отличаются от максимальных.

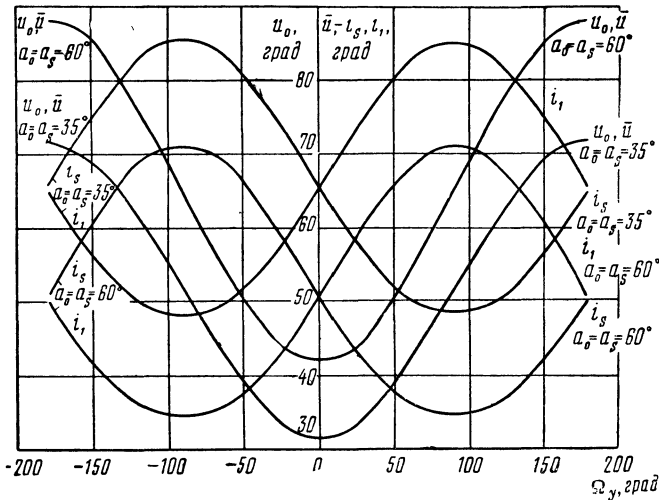


Рис. 6.35. Зависимость аргументов широты $u_0, \bar{u}$ и наклонов i_s, i_1 от долготы Ω_y упрежденной точки

При фиксированном азимуте a_0 траектории для каждого положения Ω_y упрежденной точки величина угла λ между меридианами оси X и точки старта не может быть произвольной. Зависимость $\lambda(\Omega_y)$ находится из рис. 6.34 (или 6.22) по формулам (6.21) — (6.23) (рис. 6.36). Функция $\lambda(\Omega_y)$ всюду монотонно возрастает, причем почти равномерно. Наличие зависимости $\lambda(\Omega_y)$ означает, что при фиксированном азимуте для соударения с Луной в заданный момент времени, т. е. при заданном положении Ω_y Луны на ее орбите, необходимо вполне определенное положение начальной точки в абсолютном пространстве в момент старта. Благодаря суточному вращению Земли такие положения возникают один раз в каждые сутки, когда плоскость направления полета проходит через заданную упрежденную точку Ω_y . Соответствующий момент старта определяется однозначно на каждые звездные сутки, в связи с чем возможные времена полета должны отличаться точно на звездные сутки. Это относится и к старту с орбиты ИСЗ.

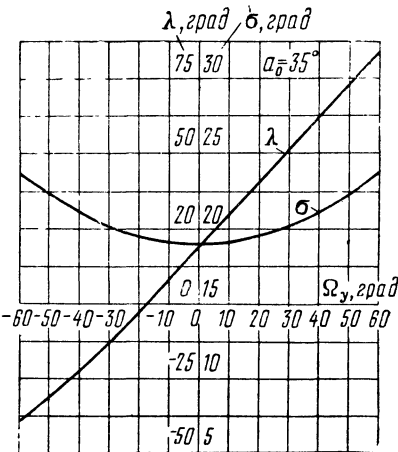


Рис. 6.36. Зависимость угла λ между меридианами оси X и точки старта и угла σ между меридианами узла и точки старта от долготы Ω_y упрежденной точки

6.2.3. Определение оптимальных начальных данных при фиксированном наклонении плоскости траектории к плоскости экватора и отсутствии доразгона

Определим начальные данные, отвечающие минимуму затрат характеристической скорости U_x при запуске КА с фиксированной широты ψ_0 и при фиксированном наклонении i_0 плоскости траектории к экватору, т. е. при фиксированном начальном азимуте a_0 (см. рис. 6.34):

$$\sin a_0 = \frac{\cos i_0}{\cos \psi_0}. \tag{6.38}$$

Оптимальные начальные данные определяются в предположении, что запуск КА может быть произведен в любые сутки заданного интервала дат. Пусть $\Delta\Omega$ — угловая величина достижимого интервала, соответствующего заданному интервалу дат. По величине $\Omega_y = \frac{\Delta\Omega}{2}$ находим $u_0 = u_0(\Omega_y)$ из графиков, приведенных на рис. 6.35. Значение u_0

находится по краю, а не по середине $\Omega_y = 0$ поражаемого интервала, так как найденный для него запас топлива благодаря убыванию u_0 с уменьшением $|\Omega_y|$ будет достаточен и для попадания в Луну, когда она находится внутри поражаемого интервала, в то время как запас топлива, определенный по внутренней точке поражаемого интервала, для достижения Луны на его краю не будет достаточен.

Задавшись теперь средним значением $\Phi_a^{(0)}$ активной угловой дальности, определяем среднее значение пассивной угловой дальности $\Phi_1^{(0)} = 180^\circ - (u_0 + \Phi_a^{(0)})$. Теперь для любой точки (θ_1, β_1) на кривой $\Phi_1 = \Phi_1^{(0)}$ (см. рис. 6.18) по семейству кривых $U_x(\theta_1, \beta_1)$ (см. рис. 6.32) находим соответствующее значение U_x .

Точка (θ_1^*, β_1^*) , в которой достигается минимум $U_{x \min}$, дает оптимальную комбинацию начальных данных. Эту точку легко найти графически, как точку касания кривой $\Phi_1(\theta_1, \beta_1) = \Phi_1^{(0)}$ с кривой семейства $U_x(\theta_1, \beta_1) = \text{const}$ (см. рис. 6.32). Найденные по $\Phi_a^{(0)}$ значения θ_1^*, β_1^* уточняем. Для этого по точке (θ_1^*, β_1^*) на рис. 6.33 находим уточненные значения $H_1(\theta_1^*, \beta_1^*)$ и $\Phi_a(\theta_1^*, \beta_1^*)$. Определяя точку касания при новом значении Φ_a и учитывая изменение H_1 сдвигом кривых на рис. 6.18 по оси ординат, получим после нескольких итераций оптимальные значения θ_1^*, β_1^* и $(U_x)_{\min}$ с необходимой точностью.

Определим теперь значение U_x для начальных данных, позволяющих достигнуть Луну в заданном достижимом интервале $2\Omega_y$ за заданное время полета T при том же фиксированном азимуте траектории. Задавшись временем полета T , находим величину ΔV_1 (из рис. 6.13), затем, задавшись средними значениями $r_1^{(0)}$ и $\Phi_a^{(0)}$, находим параболическую скорость $V_n(r_1^{(0)})$, величину $\beta_1^{(0)} = \left(\frac{V_n + \Delta V_1}{V_n} \right)^2$, аргумент широты $u_0(\Omega_y)$ (из графиков на рис. 6.35) и пассивную угловую дальность $\Phi_1^{(0)} = 180^\circ - (u_0 + \Phi_a^{(0)})$. Абсцисса точки пересечения кривой $\Phi_1(\theta_1, \beta_1) = \Phi_1^{(0)}$ с прямой $\beta_1 = \beta_1^{(0)}$ (см. рис. 6.18) и дает искомую величину $\theta_1^{(0)}$.

Зная $\theta_1^{(0)}$, по рис. 6.33 находим уточненные значения $r_1(\theta_1^{(0)}, \beta_1^{(0)})$ и $\Phi_a(\theta_1^{(0)}, \beta_1^{(0)})$ и повторяем расчет $V_n(r_1)$, β_1 , Φ_1 , производя сдвиг кривых на рис. 6.18, в соответствии с изменением H_1 . Итерации продолжаем до получения необходимой точности. По окончательным значениям θ_1, β_1 находим $U_x(\theta_1, \beta_1)$.

Определение энергетических затрат, необходимых для осуществления таких траекторий попадания в Луну, на которых вектор скорости в начале пассивного участка образует фиксированный угол θ_1 с местным горизонтом, производится примерно так же. Задавшись углом θ_1 и произвольным значением Ω_y , находим аргумент широты $u_0(\Omega_y)$ (см. рис. 6.35). Далее определяем соответствующее значение скорости V_1 , для чего сначала находим итерациями величину

$$\beta_1 = \left(\frac{V_1}{V_n} \right)^2 = \bar{v}^2.$$

Задавшись каким-либо нулевым приближением $\beta_1 = \beta_1^{(0)}$, определяем величины активной угловой дальности $\Phi_a(\theta_1, \beta_1^{(0)})$ и геоцентрического радиуса $r_1(\theta_1, \beta_1^{(0)})$.

Затем находим аргумент u_1 широты конца активного участка и угловую дальность Φ_1 пассивного участка траектории:

$$u_1 = u_0 + \Phi_a; \quad \Phi_1 = 180^\circ - u_1. \quad (6.39)$$

Наконец, уточняем значение β_1 по формулам

$$\Delta\beta_1 = \frac{1 - 2v \cos^2 \theta_1 + \cos(\Phi_1 + 2\theta_1)}{2v \cos^2 \theta_1 - \cos \Phi_1 - \cos(\Phi_1 + 2\theta_1)}; \quad \beta_1 = 1 + \Delta\beta_1. \quad (6.40)$$

Здесь $v = \frac{r_1}{r_2}$ — малая величина, причем слабо изменяющаяся. По новым значениям

β_1 и θ_1 вновь находим значения r_1 и Φ_a как функции величин $u_1, \Phi_1, \Delta\beta_1$ и т. д. Итерации повторяем до получения необходимой точности. Благодаря слабой зависимости Φ_a и особенно r_1 от β_1 итерации быстро сходятся: расчеты показывают, что для получения трех верных десятичных знаков достаточно двух итераций. Вследствие слабой

зависимости от β_1 величин Φ_a и r_1 последние слабо зависят от Ω_y и результаты их расчета удобно представлять в виде кривых $\Phi_a(\theta_1)$, $r_1(\theta_1)$ с параметром $|\Omega_y|$. Кривые эти монотонны по θ_1 и должны быть одинаковыми для значений Ω_y , отличающихся только знаком.

Определив значения Φ_a , r_1 , $\Delta\beta_1$, находим величины местной параболической V_n и начальной геоцентрической V_1 скоростей:

$$V_n = \sqrt{\frac{2\mu_1}{r_1}}; \quad V_1 = V_n \sqrt{\beta_1}, \quad (6.41)$$

где μ_1 — гравитационный параметр Земли.

Избыток $\Delta V_1 = V_1 - V_n$ начальной скорости над параболической получим по формуле

$$\Delta V_1 = V_n \frac{\Delta\beta_1}{1 + \sqrt{1 + \Delta\beta_1}}, \quad (6.42)$$

не содержащей потери точности.

Значения параметров U_x , r_1 , Φ_a , ΔV_1 и других как функций от Ω_y достаточно найти лишь в диапазоне $0^\circ < \Omega_y < 180^\circ$. Функция $u_0(\Omega_y)$ является четной, и кривые, построенные для значений $-180^\circ < \Omega_y < 0^\circ$, симметричны относительно оси ординат соответствующим кривым, построенным для значений $0^\circ < \Omega_y < 180^\circ$. При увеличении $|\Omega_y|$ от 0° до 90° величина u_0 возрастает, достигая максимума, причем изменяется нечетным образом относительно точки с координатами $(\Omega_y = 90^\circ, u_0 = u_0(90^\circ))$. Если при этом функция $u_0(\Omega_y)$ близка к линейной, а влияние изменения высоты H_1 и дальности Φ_a активного участка мало существенно, то можно приближенно считать, что функция $U_x(\Omega_y)|_{\theta_1, \beta_1 = \text{const}}$ определяющая минимальные энергетические затраты, тоже является нечетной в интервалах от 0° до 180° и от -180° до 0° относительно точек с абсциссой $|\Omega_y| = 90^\circ$.

При смещении из оптимальной точки вдоль кривой $\Phi_1 = \text{const}$ по плоскости (θ_1, β_1) (см. рис. 6.18 и 6.32) можно существенно (например, на 1—1,5 суток) изменить время полета без больших энергетических потерь, так как в оптимальной точке кривые $\Phi_1 = \text{const}$ и $U_x = \text{const}$ касаются друг друга.

Широта начальной точки весьма существенно влияет на энергетические затраты, необходимые для достижения Луны. При увеличении широты эти затраты растут, а при уменьшении широты до $\phi_0 = \theta$ они уменьшаются, приближаясь к затратам, имеющим место при полете с доразгоном. С убыванием широты энергетические затраты и другие параметры меняются слабее с отклонением даты старта от оптимальной.

6.2.4. Выбор энергетически оптимального наклона

Определить зависимость энергетических затрат $U_{x \min}(a_0)$ и найти оптимальный азимут, т. е. азимут a_0 , соответствующий наибольшей характеристической скорости, нетрудно, если учесть характер зависимости начальной скорости от азимута и использовать результаты расчета для азимута a_0^* (с помощью соответствующего пересчета).

Для различных азимутов будут различны кориолисова и центробежная силы, а также прибавки к относительной скорости, обусловленные вращением Земли. При этом центробежная сила столь мала по сравнению с тягой, что ее можно вообще не учитывать на активном участке. Кориолисова сила тоже невелика по сравнению с тягой, причем она изменяет лишь направление вектора скорости, не меняя заметно его величины. Вследствие этого она несущественно сказывается на энергетических возможностях и ею можно пренебречь.

При переходе от одного азимута к другому будет изменяться только разность векторов абсолютной $\vec{V}_1$ и относительной $\vec{V}_0$ скоростей, обусловленная вращением Земли.

Зависимость разностей $\Delta V_\psi = V_1 - V_0$ и $\Delta\theta = \theta_0 - \theta_1$ (где θ_0 — угол возвышения вектора относительной скорости $\vec{V}_0$ над горизонтом точки начала пассивного участка) от азимута a_0 трассы абсолютного движения в точке старта и от других параметров определяется формулами (6.43) — (6.47):

$$V_0^2 = V_1^2 - 2V_1\Delta V_\psi^0 + V_\psi^2. \quad (6.43)$$

Здесь $\Delta V_\psi^0 = V_\psi \cos \theta_1 \sin a_1$, где a_1 — азимут вектора абсолютной скорости в точке выхода на пассивный участок траектории.

Величина окружной скорости

$$V_\psi = \omega_3 r_1 \cos \psi_1, \quad (6.44)$$

где ω_3 — угловая скорость вращения Земли; ψ_1 — широта точки начала пассивного участка;

$$\sin a_1 = \cos \psi_0 \frac{\sin a_0}{\cos \psi_1}. \quad (6.45)$$

Учитывая, что $\Delta V_\psi \approx V_\psi^0$, получим

$$\Delta V_\psi = \omega_3 r_1 \cos \psi_0 \sin a_0 \cos \theta_1, \quad (6.46)$$

где ψ_0 — широта точки старта.

Разность $\Delta\theta = \theta_0 - \theta_1$ составляет всего лишь доли градуса:

$$\Delta\theta = \frac{\Delta V_\psi^0}{V_\pi} \operatorname{tg} \theta_1. \quad (6.47)$$

При фиксированной широте точки старта обусловленная вращением Земли скоростная прибавка ΔV_ψ не зависит от длины Φ_a активного участка, а зависит лишь от азимута направления движения из начальной точки и его угла возвышения в конечной точке активного участка.

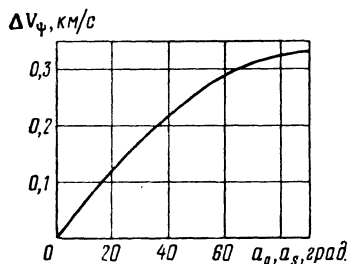


Рис. 6.37. Обусловленная вращением Земли скоростная прибавка ΔV_ψ как функция азимута

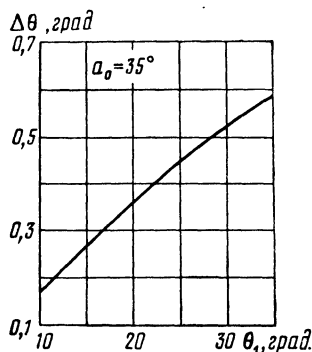


Рис. 6.38. Разность в углах возвышения над горизонтом для векторов относительной и абсолютной скоростей КА в начале пассивного участка

При расчете по формулам (6.46) и (6.47) можно пренебречь слабой зависимостью величины радиуса r_1 от θ_1 . Примерный вид зависимости ΔV_ψ от азимута a_0 представлен на рис. 6.37.

При различных углах θ_1 получаются близкие функции $\Delta V_\psi(a_0)$, поскольку с увеличением θ_1 величина r_1 растет (см. выше), более или менее компенсируя убывание $\cos \theta_1$.

Зависимость $\Delta\theta$ от θ_1 почти синусоидальна (причем отклонения от синусоидальности возникают за счет увеличения r_1 с ростом θ_1). Примерный вид ее представлен на рис. 6.38.

Имея расчеты активного участка для одного какого-либо азимута a_0^* , можно перейти к любому другому азимуту a_0 , прибавив к скорости V_1 разность

$$\Delta V_\psi(a_0) - \Delta V_\psi(a_0^*).$$

Таким путем доказано [3], что внутри диапазона $0^\circ \leq a_0 \leq 90^\circ$ существует азимут, при котором функция $U_x(a_0)$ проходит через минимум $U_{x \min}$, и что положение упрежденной точки, энергетически оптимальное без учета скоростной прибавки от вращения Земли, остается энергетически оптимальным и с учетом вращения Земли. Функция $a_0(u_0)$, полученная с помощью формулы (6.37), представлена на рис. 6.39 для значений $\Omega_y = 0^\circ, 26^\circ 30' \text{ и } 40^\circ$. Значение $\Omega_y = 26^\circ 30'$ соответствует двухсуточному достижимому интервалу, а значение $\Omega_y = 40^\circ$ — трехсуточному.

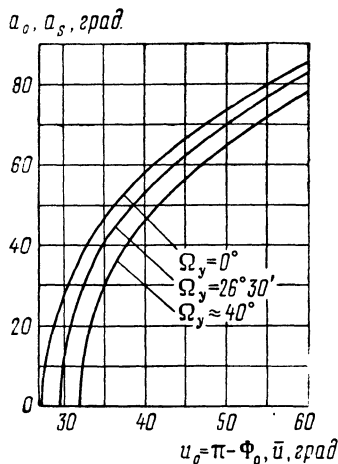


Рис. 6.39. Зависимость азимутов a_0 и a_s от аргумента широты точки старта для траекторий, встречающих Луну на различных угловых расстояниях Ω_y от энергетически оптимальной точки

6.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ НОМИНАЛЬНЫХ ПОПАДАЮЩИХ ТРАЕКТОРИИ И ВЛИЯНИЯ РАЗБРОСА НАЧАЛЬНЫХ ДАННЫХ С УЧЕТОМ ПРИТЯЖЕНИЯ ЛУНЫ

6.3.1. Расчет номинальной траектории попадания в Луну

При определении влияния разброса начальных данных, даже приближенном, недостаточно учитывать только влияние Земли, а необходимо также учитывать и влияние Луны, по крайней мере в сфере ее действия.

Множество номинальных траекторий, попадающих в центр Луны, в пространственной задаче является четырехпараметрическим, и всегда можно задать произвольно какие-либо четыре величины, определяющие начальные данные, а остальные две величины найти из условия попадания в центр Луны.

Задачу определения номинальной траектории можно решить с помощью итерационного процесса по двум переменным. Примем за произвольные параметры следующие величины: высоту H_1 начала B_1 пассивного участка траектории, избыток ΔV_1 начальной геоцентрической скорости над местной параболической, угол α_1 между вектором начальной скорости и начальным радиусом и угол i_1 наклона плоскости траектории к основной плоскости (плоскости орбиты Луны). Эти четыре величины определяют плоскость и форму траектории и позволяют полностью определить траекторию сближения с Луной, если дана точка входа в сферу действия Луны, по конечным формулам.

Итерации ведутся следующим образом (рис. 6.40). Пусть ξ_2, η_2, ζ_2 — известные координаты точки входа B_2 в селеноцентрической системе координат, ось ξ которой постоянно направлена в центр m_1 Земли, ось η направлена против скорости Луны в основной плоскости, а ось ζ дополняет систему осей до правой. Тогда геоцентрический радиус r_2 , скорость V_2 и угол α_2 между векторами входной геоцентрической скорости и входного геоцентрического радиуса находятся по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} r_2 &= \sqrt{(a - \xi_2)^2 + \eta_2^2 + \zeta_2^2}; \\ r_1 &= r_0 + H_1; \quad v = \frac{r_1}{r_2}; \\ V_1 &= V_{\text{п}} + \Delta V_1; \quad V_{\text{п}} = \sqrt{\frac{2\mu_1}{r_1}}; \\ \Delta\beta_1 &= \frac{\Delta V_1}{V_{\text{п}}} \left(2 + \frac{\Delta V_1}{V_{\text{п}}} \right); \\ \beta_2 &= \Delta\beta_1 + v; \quad V_2 = V_{\text{п}} \sqrt{\beta_2}; \\ \sin \alpha_2 &= v \frac{V_1}{V_2} \cos \theta_1, \quad \theta_1 = 90^\circ - \alpha_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.48)$$

Здесь a — постоянное расстояние между центрами Земли и Луны; r_0 — радиус Земли; $V_{\text{п}}$ — параболическая скорость для высоты H_1 ; μ_1 — гравитационный параметр Земли;

$$\Delta\beta_1 = \beta_1 - 1, \quad \text{где} \quad \beta_1 = \left(\frac{V_1}{V_{\text{п}}} \right)^2.$$

Компоненты $\dot{x}_2, \dot{y}_2, \dot{z}_2$ скорости $\vec{V}_2$ в невращающейся геоцентрической системе координат $x_2y_2z_2$, оси которой параллельны соответственно осям ξ, η, ζ в момент t_2 входа КА в сферу действия Луны, определяются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sin u_2 &= \frac{\zeta_2}{r_2 \sin i_1}; \\ x'_2 &= r_2 \cos u_2; \quad y'_2 = r_2 \sin u_2 \cos i_1, \\ x_2 &= \xi_2 - a; \quad y_2 = \eta_2; \quad z_2 = \zeta_2; \\ \cos \bar{Q}_1 &= \frac{x_2 x'_2 + y_2 y'_2}{x_2'^2 + y_2'^2}; \quad \sin \bar{Q}_1 = \frac{y_2 x'_2 - x_2 y'_2}{x_2'^2 + y_2'^2}; \\ w_2 &= u_2 + \alpha_2; \\ \dot{x}_2 &= V_2 (\cos w_2 \cos \bar{Q}_1 - \sin w_2 \sin \bar{Q}_1 \cos i_1); \\ \dot{y}_2 &= V_2 (\cos w_2 \sin \bar{Q}_1 + \sin w_2 \cos \bar{Q}_1 \cos i_1); \\ \dot{z}_2 &= V_2 \sin w_2 \sin i_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.49)$$

Здесь u_2 — аргумент широты точки B_2 ; x_2, y_2, z_2 — координаты точки B_2 в рассматриваемой геоцентрической системе координат; $\vec{\Omega}_1$ — долгота узла траектории движения в сфере действия Луны, отсчитываемая в основной плоскости.

Компоненты входной селеноцентрической скорости $\vec{V}_2$, ее модуль U и угол α'_2 между ее направлением и входным селеноцентрическим радиусом $\vec{Q}_2$ в точке входа в сферу действия Луны определяются следующими формулами (рис. 6.41):

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= \dot{x}_2; \quad \dot{\eta}_2 = \dot{y}_2 - V_L; \quad \dot{\zeta}_2 = \dot{z}_2; \quad U = \sqrt{\dot{\xi}_2^2 + \dot{\eta}_2^2 + \dot{\zeta}_2^2}; \\ \sin \alpha'_2 &= \frac{1}{Q_* U} [(\eta_2 \dot{\zeta}_2 - \zeta_2 \dot{\eta}_2)^2 + (\zeta_2 \dot{\xi}_2 - \xi_2 \dot{\zeta}_2)^2 + (\xi_2 \dot{\eta}_2 - \eta_2 \dot{\xi}_2)^2]^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.50)$$

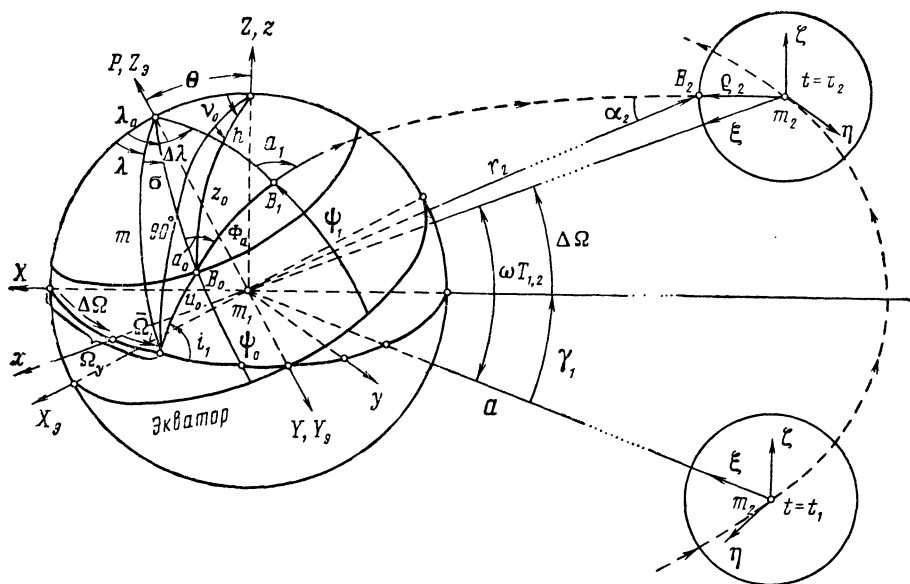


Рис. 6.40. Геометрические параметры, характеризующие пространственную траекторию сближения с Луной вне сферы ее действия

где Q_* — радиус сферы действия Луны; V_L — скорость Луны.

Если окажется, что $|\sin \alpha'_2| < \varepsilon$, где ε — заданная точность, то номинальные значения ξ_2, η_2, ζ_2 найдутся по формулам:

$$\xi_2 = -\frac{Q_*}{U} \dot{\xi}_2; \quad \eta_2 = -\frac{Q_*}{U} \dot{\eta}_2; \quad \zeta_2 = -\frac{Q_*}{U} \dot{\zeta}_2, \quad (6.51)$$

после чего расчет повторяется сначала.

В качестве нулевого приближения для величин ξ_2, η_2, ζ_2 можно взять их значения $\xi_{20}, \eta_{20}, \zeta_{20}$ в той точке сферы действия, в которой направление селеноцентрического радиуса обратно направлению селеноцентрической скорости на расстоянии орбиты Луны без учета притяжения последней. Эти значения могут быть вычислены по формулам (6.51) при значениях $\dot{\xi}_2, \eta_2, \zeta_2$, определяемых формулами:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= -V_2 \cos \alpha_2; \\ \dot{\eta}_2 &= V_L - V_2 \sin \alpha_2 \cos i_1; \\ \dot{\zeta}_2 &= -V_2 \sin \alpha_2 \sin i_1, \end{aligned} \right\} \quad (6.52)$$

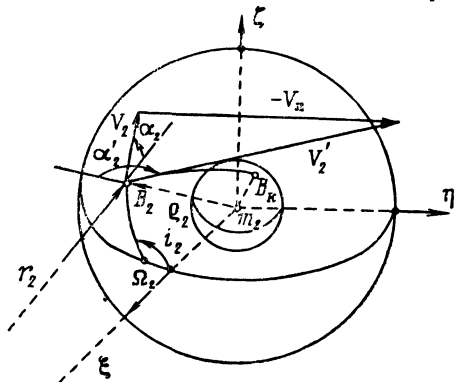
где V_2 и α_2 находятся по формулам (6.48) при

$$\xi_2 = \eta_2 = \zeta_2 = 0.$$

Сходимость описанного процесса является достаточно быстрой: для получения траектории, проходящей от центра Луны на расстоянии порядка 1 км, требуется не более 6 итераций.

По элементам p_1 , e_1 и радиусам r_1 , r_2 определяются истинные аномалии Φ_1 , Φ_2 и время полета $T_{1,2}$ вне сферы действия. Аналогично по элементам p_2 , e_2 и селеноцентрическим радиусам q_* и q_L (соответственно радиусы сферы действия и поверхности Луны) находится время полета $T_{2,n}$ от границы сферы действия до встречи с Луной и полное время полета $T = T_{1,2} + T_{2,n}$.

При запуске без доразгона начальные данные находятся так. В невращающейся системе координат XYZ , ось Y которой направлена в нисходящий относительно экватора узел лунной орбиты, ось Z — ортогонально плоскости орбиты Луны в сторону северного полюса P Земли, а ось X — в плоскости орбиты Луны (дополняя оси Y и Z до правой системы координат, см. рис. 6.40), характеристики траекторий определяются по ранее найденным ее параметрам, если заданы широта φ_0 точки старта и у тории. Долгота узла Ω_y определяется сл



вая дальность Φ_a активного участка траек-
торными формулами:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \vartheta_1 + \omega_1; & u_0 &= u_1 - \Phi_a; \\ \cos z_0 &= \sin u_0 \sin i_1; & \cos h &= \frac{\cos u_0}{\sin i_0}; \\ \cos v_0 &= \frac{\sin \Psi_0 - \cos \Theta \cos z_0}{\sin \Theta \sin z_0}; & \Omega_v &= v_0 - h, \quad \text{или} \quad \Omega_v = -v_0 - h \end{aligned} \right\} \quad (6.53)$$

Зная элементы r_1 , i_1 , u_1 и Ω_y , можно по формулам задачи двух тел (гл. III) найти начальные координаты и скорости в системе XYZ:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= r_1 (\cos u_1 \cos Q_y - \sin u_1 \sin Q_y \cos i_1); \\ Y_1 &= r_1 (\cos u_1 \sin Q_y + \sin u_1 \cos Q_y \cos i_1); \\ Z_1 &= r_1 \sin u_1 \sin i_1; \end{aligned} \right\} \quad (6.54)$$

$$\left. \begin{aligned} \varpi_1 &= \alpha_1 + (90^\circ - \theta_1); \\ \dot{X}_1 &= V_1 (\cos \varpi_1 \cos \Omega_y - \sin \varpi_1 \sin \Omega_y \cos i_1); \\ Y_1 &= V_1 (\cos \varpi_1 \sin \Omega_y + \sin \varpi_1 \sin \Omega_y \cos i_1); \\ \dot{Z}_1 &= V_1 \sin \varpi_1 \sin i_1. \end{aligned} \right\} \quad (6.55)$$

203

$$\left. \begin{aligned} \cos m &= \sin \Theta \cos \Omega_y; & \cos a_0 &= \frac{\cos u_0 \sin \psi_0 - \cos m}{\sin u_0 \cos \psi_0}; \\ \sin \psi_1 &= \sin \psi_0 \cos \Phi_a + \cos \psi_0 \sin \Phi_a \cos a_0; \\ \cos a_1 &= \frac{\sin \psi_1 \cos \Phi_a - \sin \psi_0}{\cos \psi_1 \sin \Phi_a}; & \sin \Delta \lambda &= \sin \Phi_a \frac{\sin a_0}{\cos \psi_1}; \\ \sin \lambda &= \frac{\sin \Omega_y}{\sin m}; & \cos \sigma &= \frac{\cos u_0 - \cos m \sin \psi_0}{\sin m \cos \psi_0}; & \lambda_0 &= \lambda + \sigma, \end{aligned} \right\} \quad (6.56)$$

где m — угловое расстояние узла Ω_y от полюса P ; λ — угол между меридианами узла и оси X , а σ — угол между меридианами узла и точки старта B_0 .

Зная разность долгот узла в системах координат XYZ и xuz

$$\Delta \Omega = \Omega_y - \bar{\Omega}_1, \quad (6.57)$$

найдем значение угла γ_1 между направлением геоцентрического радиуса Луны в момент t_1 отсечки двигателя и отрицательным направлением оси X , а также начальные координаты и скорости Луны по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \omega T_{1,2} - \Delta \Omega; \\ X_L &= -a \cos \gamma_1; & Y_L &= a \sin \gamma_1; & Z_L &= 0; \\ \dot{X}_L &= -V_L \sin \gamma_1; & \dot{Y}_L &= -V_L \cos \gamma_1; & \dot{Z}_L &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.58)$$

где ω — угловая скорость обращения Луны.

Наконец найдем координаты ξ_n , η_n , ζ_n точки падения на поверхности Луны, скорость U_n соударения и угол θ_n между ее направлением и поверхностью Луны в точке встречи:

$$\left. \begin{aligned} \cos \vartheta_n &= \frac{1}{e_2} \left(\frac{p_2}{Q_n} - 1 \right); & u_n &= \vartheta_n + \omega_2; & \Omega_2 &= \bar{\Omega}_2 - \omega T_{2,n}; \\ \xi_n &= Q_n (\cos u_n \cos \Omega_2 - \sin u_n \sin \Omega_n \cos i_2); \\ \eta_n &= Q_n (\cos u_n \sin \Omega_2 + \sin u_n \cos \Omega_2 \cos i_2); \\ \xi_n &= Q_n \sin u_n \sin i_2; \\ U_n^2 &= 2\mu_2 \left(\frac{1}{Q_n} - \frac{1}{Q_*} \right) + U_2'^2; & \cos \theta_n &= \frac{Q_*}{Q_n} \frac{U_2}{U_n} \sin \alpha_2'. \end{aligned} \right\} \quad (6.59)$$

Здесь ϑ_n и u_n — истинная аномалия и аргумент широты точки встречи; $\bar{\Omega}_2$ и Ω_2 — долготы узла в системе координат $\xi\eta\zeta$ соответственно в момент входа в сферу действия Луны и в момент встречи; μ_2 — гравитационный параметр Луны; U_2 — модуль входной селеноцентрической скорости; α_2 — ее угол с селеноцентрическим радиусом Q_2 на границе сферы действия.

Для траектории, достаточно точно попадающей в центр Луны, величина ϑ_n близка к -180° , координаты точки падения пропорциональны компонентам скорости соударения и угол θ_n близок к -90° .

Значения координат на границе сферы действия и на поверхности Луны получаются по изложенной приближенной методике с точностью несколько десятков километров.

6.3.2. Расчет варьированных траекторий

Когда номинальная траектория найдена, то для определения соответствующего влияния разброса начальных данных определяют отклонения точек падения на поверхности Луны, отвечающие траекториям с различными известными отклонениями начальных данных от номинальных.

Отклонения начальных данных от номинальных целесообразно давать не в системе координат XYZ , а в системе hls , связанной с началом пассивного участка траектории и имеющей плоскость траектории lh своей основной плоскостью: ось h направлена по радиусу r_1 , а ось l — по трансверсали в направлении полета. Отклонения начальных данных делятся на три типа:

- I. Отклонение начального радиуса-вектора KA от номинального.
- II. Отклонение вектора начальной скорости KA от номинального.
- III. Отклонение времени начала движения от номинального.
- I. Варьируются начальные координаты.

1) $\delta H_1 \neq 0$ (дается отклонение по высоте). Тогда r_1 , V_n и ΔV_1 заменяются соответственно величинами варьированными (они отмечены индексом «в»):

$$\left. \begin{aligned} r_{1B} &= r_1 + \delta H_1; \quad V_{п.в} = \sqrt{\frac{2\mu_1}{r_{1B}}}; \\ \Delta V_{1B} &= \Delta V_1 + \frac{2\mu_1}{V_{п.} + V_{п.в}} \frac{\delta H_1}{r_1 r_{1B}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.60)$$

При этом аргумент u_1 широты, узел Ω_y и наклонение i_1 траектории не меняются; по формулам (6.54) находятся варьированные значения X_{1B}, Y_{1B}, Z_{1B} .

2) $\delta l \neq 0$ (дается смещение в направлении полета). Тогда находятся:

$$L_1 = c_2 Z_1 - c_3 Y_1; \quad L_2 = c_3 X_1 - c_1 Z_1;$$

$$L_3 = c_1 Y_1 - c_2 X_1,$$

где c_1, c_2, c_3 — компоненты секториальной скорости $\vec{c} = \vec{r}_1 \times \vec{V}_1$; варьированные координаты

$$X_{1B} = X_1 + \frac{L_1}{L} \delta l; \quad Y_{1B} = Y_1 + \frac{L_2}{L} \delta l; \quad Z_{1B} = Z_1 + \frac{L_3}{L} \delta l, \quad (6.61)$$

начальный радиус r_{1B} , параболическая скорость $V_{п.в}$ и избыток ΔV_{1B} начальной скорости над местной параболической:

$$\left. \begin{aligned} r_{1B} &= \sqrt{r_1^2 + \delta l^2}; \quad V_{п.в} = \sqrt{\frac{2\mu_1}{r_{1B}}}; \\ \Delta V_{1B} &= \Delta V_1 + \frac{2\mu_1}{V_{п.} + V_{п.в}} \frac{\delta l}{r_1 r_{1B}} \frac{\delta l}{r_1 + r_{1B}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.62)$$

При этом изменяется на малые первого порядка еще и угол θ_1 :

$$\sin \theta_{1B} = \frac{\dot{X}_1 X_{1B} + \dot{Y}_1 Y_{1B} + \dot{Z}_1 Z_{1B}}{r_{1B} V_1},$$

что необходимо учитывать.

3) $\delta s \neq 0$ (дается боковое отклонение). Тогда

$$\left. \begin{aligned} X_{1B} &= X_1 + \frac{c_1}{c} \delta s; \quad Y_{1B} = Y_1 + \frac{c_2}{c} \delta s; \quad Z_{1B} = Z_1 + \frac{c_3}{c} \delta s; \\ r_{1B} &= \sqrt{r_1^2 + \delta s^2}; \quad V_{п.в} = \sqrt{\frac{2\mu_1}{r_{1B}}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.63)$$

При этом следует учитывать изменение величины ΔV_1 на малые второго порядка:

$$\Delta V_{1B} - \Delta V_1 = \frac{2\mu_1}{V_{п.} + V_{п.в}} \frac{\delta s^2}{(r_1 + r_{1B}) r_1 r_{1B}}. \quad (6.63')$$

Хотя угол θ_1 изменяется здесь тоже на малые второго порядка, влияние этих изменений не так существенно, как влияние ΔV_{1B} .

II. Варьируется вектор начальной скорости. Его вариациями будем считать вариации модуля δV_1 и направления $\delta \theta_1$ скорости в плоскости траектории и вариации боковой компоненты $\delta s = s$ скорости (поскольку для номинальной траектории $s=0$).

1) $\delta V_1 \neq 0$. Тогда

$$\Delta V_{1B} = \Delta V_1 + \delta V_1; \quad V_{1B} = V_{п.} + \Delta V_{1B},$$

и по формулам (6.55) находятся компоненты $\dot{X}_{1B}, \dot{Y}_{1B}, \dot{Z}_{1B}$ начальной скорости.

2) $\delta \theta_1 \neq 0$. Тогда

$$\theta_{1B} = \theta_1 + \delta \theta_1; \quad w_{1B} = w_1 - \delta \theta_1.$$

Компоненты скорости находятся по тем же формулам (6.55).

3) $\delta s \neq 0$. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_{1B} &= \dot{X}_1 + \frac{c_1}{c} \delta \dot{s}; \quad \dot{Y}_{1B} = \dot{Y}_1 + \frac{c_2}{c} \delta \dot{s}; \quad \dot{Z}_{1B} = \dot{Z}_1 + \frac{c_3}{c} \delta \dot{s}; \\ V_{1B} &= \sqrt{V_1^2 + (\delta \dot{s})^2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.64)$$

а ΔV_{1B} находится как меньший корень квадратного уравнения

$$(2V_{п.} + \Delta V_{1B}) \Delta V_{1B} = (2V_{п.} + \Delta V_1) \Delta V_1 + (\delta \dot{s})^2. \quad (6.65)$$

III. Варьируется только момент t_1 начала движения на пассивном участке, т. е. $\delta t_1 \neq 0$. Тогда координаты и компоненты скорости находятся по формулам:

$$\left. \begin{aligned} X_3 &= X_1 \cos \theta - Z_1 \sin \theta; & \dot{X}_3 &= \dot{X}_1 \cos \theta - \dot{Z}_1 \sin \theta; \\ Y_3 &= Y_1; & \dot{Y}_3 &= \dot{Y}_1; \\ Z_3 &= X_1 \sin \theta + Z_1 \cos \theta; & \dot{Z}_3 &= \dot{X}_1 \sin \theta + \dot{Z}_1 \cos \theta; \end{aligned} \right\} \quad (6.66)$$

$$\delta \lambda = \omega_3 \delta t_1; \quad (6.67)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{3,B} &= X_3 \cos \delta \lambda - Y_3 \sin \delta \lambda; & \dot{X}_{3,B} &= \dot{X}_3 \cos \delta \lambda - \dot{Y}_3 \sin \delta \lambda; \\ Y_{3,B} &= X_3 \sin \delta \lambda + Y_3 \cos \delta \lambda; & \dot{Y}_{3,B} &= \dot{X}_3 \sin \delta \lambda + \dot{Y}_3 \cos \delta \lambda; \\ Z_{3,B} &= Z_3; & \dot{Z}_{3,B} &= \dot{Z}_3; \end{aligned} \right\} \quad (6.68)$$

$$\left. \begin{aligned} X_{1B} &= X_{3,B} \cos \theta + Z_{3,B} \sin \theta; & \dot{X}_{1B} &= \dot{X}_{3,B} \cos \theta + \dot{Z}_{3,B} \sin \theta; \\ Y_{1B} &= Y_{3,B}; & \dot{Y}_{1B} &= \dot{Y}_{3,B}; \\ Z_{1B} &= -X_{3,B} \sin \theta + Z_{3,B} \cos \theta; & \dot{Z}_{1B} &= -\dot{X}_{3,B} \sin \theta + \dot{Z}_{3,B} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (6.69)$$

Кроме того, угловое изменение положения Луны за время δt_1 определяется по формуле

$$\gamma_{1B} = \gamma_1 - \omega \delta t_1.$$

Когда для всех отклоненных траекторий найдены начальные координаты и скорости, по ним находятся кеплеровы элементы p_{1B} , e_{1B} , i_{1B} , $\Omega_{y,B}$, ω_{1B} (см. гл. III) участка движения к сфере действия Луны и аргумент широты u_{1B} для точки B_1 . Итерации на получение $Q_2 \rightarrow Q_*$ выгодно вести не по времени $T_{1,2}$, а по радиусу r_2 .

Задавшись какой-либо величиной $r_2^{(n)}$, равной, например, значению r_2 для номинальной траектории, находим по величинам p_{1B} , e_{1B} , $r_2^{(n)}$ истинную аномалию $\vartheta_2^{(n)}$ из уравнения конических сечений и определяем время полета $T_{1,2}^{(n)}$. Затем находим координаты Луны в момент $t_2^{(n)} = t_{1B} + T_{1,2}^{(n)}$:

$$X_{11}^{(n)} = -a \cos \varphi^{(n)}; \quad Y_{11}^{(n)} = -a \sin \varphi^{(n)}; \quad Z_{11}^{(n)} = 0, \quad (6.70)$$

где $\varphi^{(n)} = -\gamma_{1B} + \omega T_{1,2}^{(n)}$ — угол между направлением геоцентрического радиуса Луны в момент $t_2^{(n)}$ и отрицательным направлением оси X . Теперь находим расстояние $Q_2^{(n)}$ в момент $t_2^{(n)}$ по формуле

$$Q_2^{(n)} = \sqrt{[X_2^{(n)} - X_{11}^{(n)}]^2 + [Y_2^{(n)} - Y_{11}^{(n)}]^2 + [Z_2^{(n)} - Z_{11}^{(n)}]^2}, \quad (6.71)$$

в которой $X_2^{(n)}$, $Y_2^{(n)}$, $Z_2^{(n)}$ находятся с помощью формул (6.54) по величинам $r_2^{(n)}$, Q_{yB} , i_{1B} и $u_2^{(n)} = \vartheta_2^{(n)} + \omega_{2B}$.

Если оказывается, что $|Q_2^{(n)} - Q_*| > \varepsilon$, где ε — требуемая точность, то применяем метод хорд: даем величине $r_2^{(n)}$ малое приращение Δr_2 (в расчетах принято $\Delta r_2 = 5000$ км) и производим расчет для $r_2^{(n+1)} = r_2^{(n)} + \Delta r_2$. Получив для значения $r_2^{(n+1)}$ величину $Q_2^{(n+1)}$, находим следующее приближение:

$$r_2^{(n+2)} = r_2^{(n)} + \frac{[Q_* - Q_2^{(n)}] [r_2^{(n+1)} - r_2^{(n)}]}{Q_2^{(n+1)} - Q_2^{(n)}}; \quad (6.72)$$

$$Q_2^{(n+2)} = Q_2 [r_2^{(n+2)}].$$

Повторяем итерации до тех пор, пока они с нужной точностью не сойдутся к предельным значениям. Обозначим эти предельные величины через r_{2B} ; $T_{1,2B}$; $t_{2B} = t_{1B} + T_{1,2B}$; $Q_{2B} = Q_*$; X_{2B} , Y_{2B} , Z_{2B} ; $X_{L,B}$, $Y_{L,B}$, $Z_{L,B}$; ϑ_{2B} , u_{2B} , φ_B .

Когда итерации сошлись, то из интеграла энергии находим входную геоцентрическую скорость $V_{2B} = V_2(r_{2B})$, а из интеграла площадей — угол α_{2B} между вектором этой скорости и входным геоцентрическим радиусом; при этом используются начальные данные r_{1B} , θ_{1B} , V_{1B} и элементы отклоненного конического сечения.

Далее находим для вектора скорости величину аналога аргумента широты $\omega_{2B} = u_{2B} + \alpha_{2B}$ и по формулам (6.55) определяем компоненты $\dot{X}_{2B}$, $\dot{Y}_{2B}$, $\dot{Z}_{2B}$ скорости в точке входа в сферу действия Луны, а затем определяем координаты и скорости в системе координат ξ , η , ζ при $t = t_{2B}$:

$$\left. \begin{aligned} \xi_{2B} &= (X_{2B} - X_{Л.В}) \cos \varphi_B + (Y_{2B} - Y_{Л.В}) \sin \varphi_B; \\ \eta_{2B} &= -(X_{2B} - X_{Л.В}) \sin \varphi_B + (Y_{2B} - Y_{Л.В}) \cos \varphi_B; \\ \zeta_{2B} &= Z_{2B}; \end{aligned} \right\} \quad (6.73)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\xi}_{2B} &= (\dot{X}_{2B} - \dot{X}_{Л.В}) \cos \varphi_B + (\dot{Y}_{2B} - \dot{Y}_{Л.В}) \sin \varphi_B, \\ \dot{\eta}_{2B} &= -(\dot{X}_{2B} - \dot{X}_{Л.В}) \sin \varphi_B + (\dot{Y}_{2B} - \dot{Y}_{Л.В}) \cos \varphi_B, \\ \dot{\zeta}_{2B} &= \dot{Z}_{2B}. \end{aligned} \right\} \quad (6.74)$$

По этим величинам в момент времени t_{2B} находим в системе координат ξ, η, ζ значения кеплеровых элементов $p_{2B}, e_{2B}, i_{2B}, \Omega_{2B}, \omega_{2B}$ селеноцентрического конического сечения, а по ним — время полета $T_{2, п.в}$ от границы сферы действия до поверхности Луны.

Чтобы вычислить координаты $\xi_{п.в}, \eta_{п.в}, \zeta_{п.в}$ точки падения на поверхности Луны, находим по формулам (6.59) долготу узла в системе координат $\xi\eta\zeta$ в момент соударения, аргумент широты, величину скорости соударения и угол между ее направлением и поверхностью Луны в точке соударения.

6.3.3. Влияние разброса начальных данных на расположение точек входа в сферу действия Луны

В системе координат ξ, η, ζ точки входа на сфере действия и на поверхности Луны наиболее наглядным образом проектируются на плоскость η, ζ (рис. 6.42).

Для номинальной попадающей траектории с избытком начальной скорости над местной параболической $\Delta V_1 = +0,170$ км/с, радиусом начала пассивного участка $r_1 =$

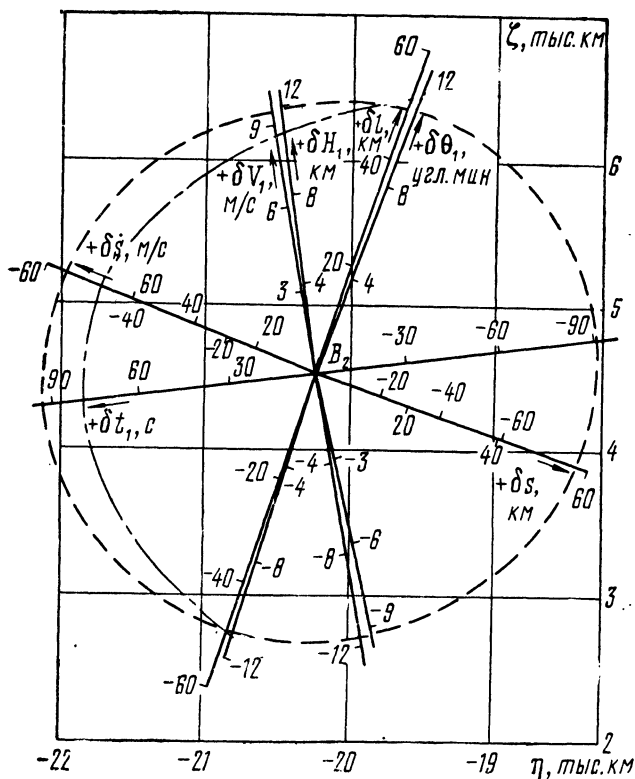


Рис. 6.42. Смещение точки входа траектории в сферу действия Луны при отклонении одного из шести начальных данных и начального момента времени от номинальных значений для $\Delta V_1 = +0,170$ км/с. Точки пунктирной кривой соответствуют траекториям, касающимся поверхности Луны; точки штрих-пунктирной кривой соответствуют траекториям, достигающим лунной поверхности в точках, отделяющих невидимую с Земли часть лунной поверхности от видимой

$=7000$ км и наклонением плоскости траектории к плоскости орбиты Луны $i_1=70^\circ$ координаты номинальной точки B_2 входа в сферу действия Луны, вычисленные по формулам (6.51), будут равны: $\xi=62\,663$ км, $\eta=-20\,218$ км, $\zeta=4\,539$ км (см. рис. 6.42).

Лучи, выходящие из точки входа номинальной траектории в сферу действия Луны, представляют собой геометрические места точек входа отклоненных траекторий, получающихся при отклонении одного из начальных параметров от номинального.

Величины отклонений указаны вдоль лучей цифрами: δH_1 , δl , δs — в км; δV_1 , δs — в м/с; $\delta \theta_1$ — в угловых минутах, δt_1 — в секундах. Стрелки указывают направления смещений точки входа, вызываемых положительными отклонениями. Направление смещений, обусловленных ошибками δl , близко к направлению смещений от ошибок $\delta \theta_1$.

Угол наклона обоих направлений смещений к оси η близок к 70° , т. е. к углу i_1 , так как ошибки δl и $\delta \theta_1$ не вызывают изменения плоскости траектории движения к сфере действия Луны и практически не сказываются на времени полета (зависящего в основном от начальной скорости).

Положительное значение ошибки δl вызывает смещение в ту же сторону, что и ошибка $\delta \theta_1 > 0$. Это смещение точки входа при $\delta l > 0$ объясняется тем, что ошибка $\delta l > 0$ приводит к линейно связанному с ней изменению наклона вектора начальной скорости к местному горизонту.

$$\delta \theta_1 = \frac{\delta l}{r_1} > 0,$$

которое оказывает на смещение точки входа преобладающее влияние.

Смещения точки входа, вызываемые боковыми ошибками δs и δs в положении и в скорости (см. рис. 6.42), примерно перпендикулярны плоскости траектории, поскольку эти ошибки практически не меняют времени полета.

Однако при положительных ошибках знаки смещений противоположны, так как при $\delta s > 0$ конец траектории поворачивается налево относительно начального радиуса-вектора, если смотреть с его конца, а при $\delta s < 0$ он поворачивается направо, причем относительно геоцентрической прямой, параллельной вектору начальной скорости, поскольку угол скорости к радиусом меньше угловой дальности полета.

Ошибка δV_1 не вызывает поворота плоскости траектории, но существенно меняет время полета до сферы действия Луны. При $\delta V_1 > 0$ траектория проходит выше номинальной и достигает сферы действия Луны в точке левее номинальной, поскольку вследствие уменьшения времени полета номинальная точка не успевает достигнуть плоскости траектории.

Ошибки в начальном радиусе $\delta r_1 = \delta H_1$ тоже не вызывают поворота плоскости траектории. Направление соответствующих смещений точки входа из-за этих ошибок близко к направлению смещений, вызываемых ошибками δV_1 , потому что ошибки δH_1 влияют главным образом через изменение избытка ΔV_1 начальной скорости над местной параболической. Изменение избытка ΔV_1 при фиксированном значении V_1 обратно (по знаку) изменению местной параболической скорости в зависимости от радиуса. Изменение начальной высоты при сохранении избытка начальной скорости над параболической сказывается весьма слабо.

Наконец, ошибка δt_1 не влияет на изменение формы траектории, а вызывает поворот ее как жесткого целого вокруг земной оси с запада на восток. Поскольку угловая скорость ω_3 суточного вращения Земли почти в 30 раз превосходит угловую скорость ω обращения Луны по орбите, то при анализе влияния ошибки $\delta t_1 \neq 0$ можно сферу действия Луны считать неподвижной. Тогда на сфере радиуса орбиты Луны при $\delta t_1 > 0$ конец траектории будет смещаться влево и вниз для долготы узла $\Omega_y > 0$; влево и вверх — для $\Omega_y < 0$ (при $|\Omega_y| < 90^\circ$) (рис. 6.42 соответствует случаю $\Omega_y > 0$).

С возрастанием Ω_y при фиксированном азимуте прицеливания a_0 пары лучей δl , $\delta \theta_1$ и δs , δs , оставаясь ортогональными, поворачиваются против часовой стрелки. Пары лучей δV_1 , δH_1 тоже повернется против часовой стрелки, оставаясь примерно на прежних расстояниях по оси η от нового положения пары лучей δl , $\delta \theta_1$. Наконец, луч δt_1 повернется в том же направлении. При уменьшении Ω_y все вращения происходят в обратном направлении, т. е. по часовой стрелке.

При уменьшении азимута a_0 , как следует из рис. 6.34, значения i_1 при всех значениях Ω_y увеличиваются, причем примерно на одну и ту же величину. Соответственно поворачиваются против хода часовой стрелки все лучи, кроме луча δt_1 , направление которого зависит главным образом от Ω_y (при фиксированном значении избытка ΔV_1 начальной скорости над местной параболической) и потому существенно не изменится.

Изменение номинального значения ΔV_1 очень существенно отражается и на длине лучей, соответствующих фиксированным отклонениям начальных данных от номинальных значений. Длина лучей δV_1 и δH_1 быстро возрастает с приближением величины ΔV_1 к минимальному значению. Например, для траектории с параметрами $\Delta V_1 = -0,084$ км/с, $r_1 = 7000$ км при $i_1 = 70^\circ$ (рис. 6.43) длина лучей увеличивается примерно в четыре раза по сравнению с ее значением при $\Delta V_1 = +0,170$ км/с (ср. рис. 6.42 и 6.43).

При начальных скоростях, не близких к минимальным, линейность зависимости смещения d точки входа от отклонений начальных данных проявляется не только в прямолинейности лучей, но и в пропорциональности смещений отклонениям. Например,

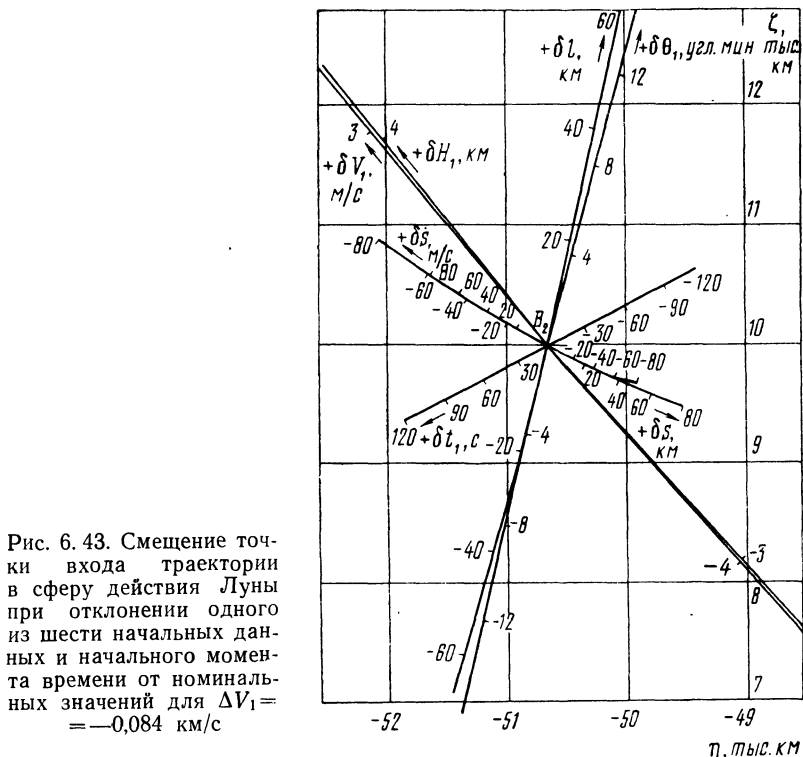


Рис. 6.43. Смещение точки входа траектории в сферу действия Луны при отклонении одного из шести начальных данных и начального момента времени от номинальных значений для $\Delta V_1 = -0,084$ км/с

на рис. 6.42 нарушения прямолинейности и пропорциональности гораздо меньше тех, которые можно было бы заметить при таком масштабе чертежа.

6.3.4. Влияние разброса начальных данных на расположение точек падения

Картина точек падения на поверхности Луны (рис. 6.44), соответствующая описанной выше (см. рис. 6.42) картине точек входа на сфере действия, является типичной.

Проходящие через номинальную точку падения лучи, отвечающие отклонениям x только одного из начальных данных от номинального, проходят довольно точно по меридианам лунной сферы, если за ее полюс принять номинальную точку падения B_k .

Смещение y точки падения от номинальной вдоль луча не всюду пропорционально отклонению соответствующего начального параметра, а только в круге с радиусом порядка 500 км. За этим кругом смещение растет, причем чем дальше от круга, тем быстрее, так что у крайних точек, в которых траектории только касаются поверхности Луны, производная dy/dx делается неограниченной. Однако симметрия точек падения, отвечающих значениям x и $-x$, сохраняется вплоть до крайних точек луча. Это значит, что отклонения входной селеноцентрической скорости от номинальной тоже симметричны.

Эти отклонения направлены от центра Луны. При скоростях, не близких к минимальным, отклонения величины V_2 входной геоцентрической скорости и угла α_2 между ее направлением и геоцентрическим радиусом от номинальных значений с изменением геоцентрического радиуса точки входа в широком диапазоне $a - q_* < r < a + q_*$ сравнительно невелики. Для соответствующей рис. 6.42 траектории эти отклонения составляют: $|\delta V_2| < 0,09$ км/с и $|\delta \alpha_2| < 0^\circ,9$ (см. рис. 6.8). Размеры пятна на сфере действия Луны, соответствующего крайним траекториям (траекториям касания), невелики по сравнению с указанным выше диапазоном $2q_*$. Их приблизительно можно определить согласно

рис. 6.9, считая вектор $\vec{V}_2$ входной селеноцентрической скорости не зависящим от положения точки входа на пятне. В этом приближении пятно является кругом радиуса $d(U)$, где $U = |\vec{V}_2|$. Для соответствующей рис. 6.42 траектории $U = 2,6$ км/с (см. рис. 6.8) и $d(U) = 2\,340$ км (см. рис. 6.11).

Изменения величин V_2 и α_2 внутри пятна составляют доли порядка процента от полученных выше величин δV_2 и $\delta \alpha_2$, и при рассмотрении траекторий попадания в Луну этими измерениями можно пренебречь. Изменения направления вектора $\vec{V}_2$ связаны главным образом с отклонением направления геоцентрического радиуса r_2 точки входа на пятно от номинального. Это отклонение вызывает отклонение направления вектора $\vec{V}_2$ от центра Луны на наибольшую величину при расположении траектории в плоскости орбиты Луны. Для этого случая (рис. 6.45) приближенный расчет отклонения $\Delta \theta_2$ направления вектора $\vec{V}_2$ от номинального производится по формулам:

$$\sin \psi_2 \approx \frac{V_2}{U} \cos \alpha_2$$

(V_2 , α_2 , U находятся из графиков на рис. 6.8);

$$\left. \begin{aligned} \sin \varphi_2 &= \frac{Q_*}{r_2} \cos \psi_2; & r_2^2 &= a^2 + Q_*^2 - 2aQ_* \sin \psi_2; \\ \Delta \varphi_2 &= \frac{d(U)}{r_2} \sin \psi_2; & \cos \theta_2 &= \frac{V_L - V_2 \sin(\alpha_2 + \varphi_2)}{U}, \end{aligned} \right\} \quad (6.75)$$

$$\Delta \theta_2 = \frac{V_2}{U} \left[\frac{V_2}{U} - \frac{V_L}{U} \sin(\alpha_2 + \varphi_2) \right] \Delta \varphi_2. \quad (6.76)$$

Смысл обозначений виден на рис. 6.45.

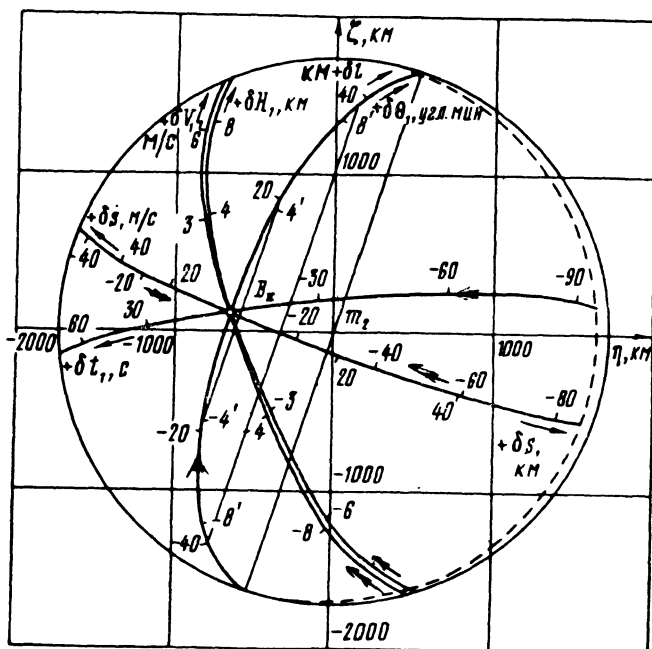


Рис. 6.44. Смещения точки падения по лунной поверхности при отклонении одного из шести начальных данных и начального момента времени от номинальных значений

Результаты расчета краев диапазона отклонений ($\Delta \theta_2^+$ и $\Delta \theta_2^-$) как функций избытка ΔV_1 начальной скорости над местной параболической для нулевого угла θ_1 возвышения вектора начальной скорости над местным горизонтом и соответственно для наклонений $i_1=0$ и $i_1=\pi$ представлены на рис. 6.46. Там же показана зависимость уменьшения $\Delta d^\pm = Q_* \Delta \theta_2^\pm$ диаметра пятна от изменения избытка ΔV_1 . Уменьшение диаметра пятна на сфере действия Луны может достигать сотен километров. Величина $Q_{эфф} = d - \Delta d$ является эффективным радиусом Луны при запусках КА к Луне с Земли или с орбит низких ИСЗ.

Селеноцентрическое угловое расстояние по «лучу» от номинальной точки падения до точки касания отклоненной траектории с поверхностью Луны с учетом отклонения $\Delta\theta_2$ приближенно выражается формулой

$$\Phi_k = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} - \Delta\theta_2, \tag{6.77}$$

где α — угол между выходной и входной селеноцентрическими скоростями для траектории касания (см. рис. 6.11). Для варианта, соответствующего рис. 6.42, получаем из рис. 6.11 и 6.46 и формулы (6.77) значение Φ_k , несколько большее 100° .

Смещения точки встречи по «лучам» на поверхности не могут охватывать Луну полностью ни при какой начальной скорости: даже при минимальных начальных скоростях угол $\alpha < 120^\circ$ (см. рис. 6.11) и $\Phi_k < 150^\circ$. При любой фиксированной начальной скорости существует на Луне недосигаемая область, близкая к кругу с центром в точке, противоположной номинальной. Для варианта, соответствующего рис. 6.42, радиус этого круга оказывается порядка 900 км.

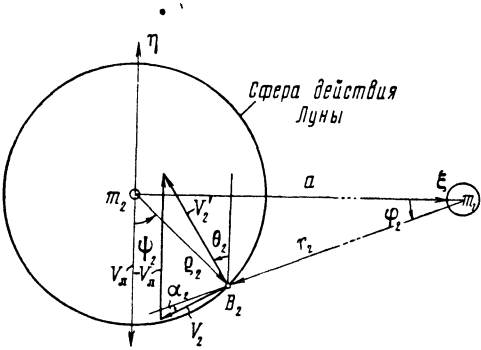


Рис. 6.45. Пересчет геоцентрических параметров движения (в плоскости лунной орбиты) в селеноцентрические параметры на границе сферы действия Луны

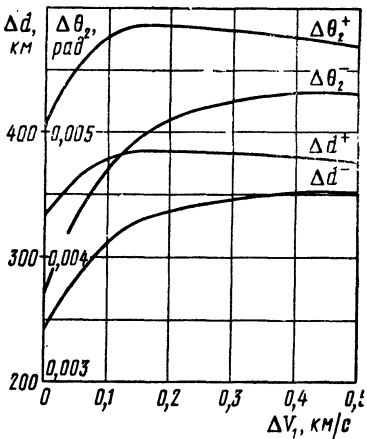


Рис. 6.46. Пределы изменений направления $\Delta\theta_2$ селеноцентрической скорости входа на сфере действия Луны и размеров Δd пятна на сфере действия вследствие отклонения точки входа от номинальной

С помощью картины на сфере действия Луны (см. рис. 6.42) можно определить начальные данные для попадания в *видимую* с Земли часть Луны, оптимальные в том смысле, что величины предельных отклонений начальных данных в противоположные стороны равны. Для этого интерполяциями определим на лучах (на сфере действия) точки, соответствующие значению $\xi_n=0$, если вдоль соответствующих лучей на поверхности координата ξ_n переходит через нуль. Соединив эти точки кривой (штрих-пунктирная линия на рис. 6.42), отсечем от всего пятна область, соответствующую точкам падения на обратную сторону Луны. Середина оставшейся области отвечает номинальной траектории для попадания в видимую часть Луны. Эта средняя точка всегда смещена вправо вниз от точки B_2 .

Предельно допустимые ошибки при попадании в видимую часть Луны имеют примерно тот же порядок, что и предельно допустимые ошибки при попадании во всю Луну. Величины последних по любому из начальных параметров при нулевых значениях ошибок по остальным параметрам представлены в табл. 6.2.

Таблица 6.2
Предельные величины единичных ошибок

Ошибка	Предельная величина	Единица измерения	Ошибка	Предельная величина	Единица измерения
δH_1	11,6	км	$\delta \theta_1$	11,4	угл. мин
δl	50,6	"	$\delta \dot{s}$	98,4	м/с
δs	56,4	"	δt	93,9	с
δV_1	9,14	м/с			

Типичен характер зависимости отклонения точки падения от номинальной в результате ошибки в начальных данных. Угловое смещение y точки падения из номинальной точки падения по лучу на поверхности Луны зависит от соответствующей линейной комбинации x ошибок в начальных данных.

На границе сферы действия Луны вектор $\vec{V}_2'$ входной селеноцентрической скорости для траектории, отклоненной от номинальной на расстояние d , образует с входным селеноцентрическим радиусом такой угол α_2 , что

$$\sin \alpha_2'(x) = \frac{d(x)}{Q_*}. \quad (6.78)$$

В случае *непритягивающей* Луны обозначим $y = \bar{y}$; расстояние d между траекториями остается неизменным вплоть до поверхности Луны, и для малых расстояний d , т. е. при малых значениях x , имеем:

$$\bar{y} = \frac{Q_*}{Q_L} \alpha_2'(x).$$

В случае *притягивающей* Луны величина y будет меньше $\bar{y}$; для малых значений x

$$y = \left\{ 1 + \frac{2 \left(\frac{Q_*}{Q_L} - 1 \right) \beta'}{\sqrt{\left(\frac{Q_*}{Q_L} + \beta' - 1 \right) \beta' + \beta'}} \right\} \alpha_2'(x).$$

$$\text{Здесь} \quad \beta' = (U/V_n')^2,$$

Рис. 6. 47. Зависимость углового отклонения $y(x)$ точки падения от номинальной (x — отклонение одного из начальных данных от номинального значения); $y(\bar{x})$ — то же при отсутствии притяжения Луны

где $U = |\vec{V}_2'|$, а $V_n' = 0,383$ км/с — селеноцентрическая параболическая скорость на расстоянии Q_* . Вблизи номинальной траектории, т. е. при малых x , притяжение Луны

уменьшает величину отклонения более чем в 2 раза. Вдали же от номинальной траектории, т. е. при больших x , это уменьшение исчезает (рис. 6.47). Кривая $y(x)$ в точке $x=0$ имеет перегиб, причем $y(0)=0$, и в окрестности точки $x=0$ величины $y(x)$ малы. Вторые производные $y''(x)$ в этой окрестности весьма близки к нулю, так как функция $d(x)$ в этой окрестности практически линейна.

Если величину x измерять в долях допустимого (предельного) отклонения x_d , то для произвольных направлений l_1 и l_2 лучей отношение смещений $y_1(x_1/x_{1d}) : y_2(x_2/x_{2d})$ при всех $x_1/x_{1d} = x_2/x_{2d}$ одинаково и весьма близко к единице. При известных комбинациях ошибок начальных данных для определения того, имеет ли место попадание или нет, не требуется знать старшие производные от смещения $d(x)$, а достаточно знать лишь первую производную $d'(0)$. Зная линейную комбинацию ошибок x и величину $d'(0)$, находим $d(x)$. При $d(x) < Q_{эфф}$ имеет место попадание, а при $d(x) > Q_{эфф}$ — промах.

Можно использовать следующую приближенную методику прогнозирования точки падения на поверхности Луны, если отклонения δx_i начальных данных от номинальных известны достаточно точно. Зная на сфере действия Луны смещения $\vec{d}_i$, вызываемые вдоль i -го луча единичными отклонениями параметров x_i , и пользуясь линейностью смещения $\vec{d}_i(x_i)$, находим суммарное смещение точки входа на сфере действия в виде векторной суммы $\vec{d} = \sum_{i=1}^n \vec{d}_i x_i$. А так как точки входа на сфере действия практиче-

ски однозначно соответствуют точкам на поверхности Луны, то на соответствующем криволинейном луче на поверхности находим точку падения. При этом точность вычисления точки падения определяется точностью измерения отклонений начальных данных от номинальных.

З а м е ч а н и е. В задаче достижения Луны удобными зависимыми переменными являются функции

$$y = \sqrt{Q_{\min}} \cos i \quad \text{и} \quad z = \sqrt{Q_{\min}} \sin i,$$

где $Q_{\min}$ — минимальное расстояние траектории от центра Луны, а i — наклон плоскости селеноцентрической траектории к какому-либо фиксированному лучу на поверхности Луны. В частности, при отыскании величин предельно допустимых ошибок в начальных данных целесообразно производить интерполяции по начальным параметрам на значение Q_L не с функцией $y = Q_{\min}(x)$, а с функцией $y = \sqrt{Q_{\min}}$ на значение $\sqrt{Q_L}$, где Q_L — радиус Луны.

6.4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ТОЧКЕ ВСТРЕЧИ И РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ОБЪЕКТА ОТНОСИТЕЛЬНО ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

Задача о точке встречи КА с Луной при старте с ИСЗ является тем частным случаем аналогичной задачи при запуске с поверхности Земли, когда снимаются ограничения, связанные с фиксированностью географических координат точки старта. Поэтому ниже формулы и графики приводятся для случая запуска с поверхности Земли.

6.4.1. Решение задачи определения точки встречи с Луной при заданном наклонении плоскости траектории к плоскости экватора

При решении задачи об определении точки встречи в простейшей постановке считаем избыток ΔV_1 начальной скорости над местной параболической заданным. Поскольку время полета T весьма слабо зависит от угла θ_1 начальной скорости с трансверсалью, то приближенно можно считать, что упрежденная точка движется на постоянном угловом расстоянии ωT впереди Луны. В момент t_1 , когда плоскость траектории, поворачиваясь в суточном движении вместе с Землей, проходит через точку на лунной орбите с долготой

$$\Omega_y = \Omega_L(t) + \omega T \quad (6.79)$$

(где Ω_L — долгота Луны), оказывается возможным достижение Луны. Соответствующее значение угла θ_1 однозначно определяется как функция Ω_y по величине избытка ΔV_1 начальной скорости и величине Φ_1 пассивной угловой дальности с помощью итераций, аналогичных применявшимся в п. 6.2.

Зная долготу точки старта и положение $\Omega_L(t)$ Луны (берется из Астрономического ежегодника), можно для любого значения $\Delta V_1 > \Delta V_{1\min}$ с помощью зависимостей $\lambda(\Omega_y)$ (см. рис. 6.36), $\Omega_y(\Omega_L)$ (6.79) и $\Omega_L(t)$, задаваясь различными значениями t и интерполируя (как в конце разд. 6.4.1), вычислить заранее на каждые сутки момент t_1 выхода на траекторию, угол θ_1 начальной скорости с трансверсалью, высоту H_1 , параметр $\beta_1(\Delta V_1, H_1)$ и угловую активную дальность полета $\Phi_a(\theta_1, \beta_1)$. Затем можно уточнить решение задачи о точке встречи с учетом зависимости времени полета от угла θ_1 и высоты H_1 .

Так как за сутки Луна смещается по орбите в среднем на $13^\circ,2$ примерно в том же направлении, в котором вращается Земля, то интервалы между двумя последовательными моментами t_1 будут превосходить сутки в среднем на $0,9$ ч (точка старта вместе с Землей поворачивается на $15^\circ/ч$).

Решим теперь другую задачу: не задавая величины ΔV_1 произвольно, определим ее таким образом, чтобы для любых заданных суток при выходе на траекторию в соответствующий условию встречи момент времени t_1 энергетические затраты были наименьшими. Поскольку момент t_1 заранее неизвестен, задачу следует решать в следующем порядке. Задав произвольным значением Ω_y , находим аргумент широты $u_0(\Omega_y)$ (см. рис. 6.35). Затем, используя метод итераций (см. разд. 6.2.3), находим из условия минимальности характеристической скорости U_x избыток ΔV_1 начальной скорости над местной параболической, угол θ_1 начальной скорости с трансверсалью, начальную высоту H_1 и активную угловую дальность Φ_a . Далее определяем время $T(\Delta V_1, \theta_1, H_1) = T(\Omega_y)$ и величину

$$\Omega_L(\Omega_y) = \Omega_y - \omega T(\Omega_y). \quad (6.80)$$

Во всех случаях для определения времени полета $T(\Omega_y)$ по величинам $r_1, \theta_1, \Delta\beta_1$, найденным итерациями для заданного значения Ω_y , вычисляем по формулам (6.15) параметр p_1 конического сечения, его большую полуось a_1 , эксцентриситет e_1 и, наконец, истинные аномалии ϑ_1 и ϑ_2 точек, соответствующих началу и концу пассивного участка траектории полета:

$$\vartheta_1 = \arccos \left[\frac{1}{e_1} \left(\frac{p_1}{r_1} - 1 \right) \right], \quad \vartheta_2 = \arccos \left[\frac{1}{e_1} \left(\frac{p_1}{r_2} - 1 \right) \right]. \quad (6.81)$$

Время полета для случая $\Delta V_1 < 0$ находится по формулам:

$$E_1 = 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1-e_1}{1+e_1}} \tg \frac{\vartheta_1}{2} \right); \quad (6.82)$$

$$E_2 = 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1-e_1}{1+e_1}} \tg \frac{\vartheta_2}{2} \right); \quad (6.83)$$

$$T(\Omega_y) = \sqrt{\frac{a_1^3}{\mu_1}} [E_2 - E_1 - e_1 (\sin E_2 - \sin E_1)], \quad (6.84)$$

где E_1 и E_2 — эксцентрические аномалии начальной и конечной точек пассивного участка траектории, а для случая $\Delta V_1 > 0$ — по формулам:

$$\bar{f}_1 = \operatorname{arch} \left[\frac{1}{e_1} \left(1 - \frac{r_1}{a_1} \right) \right]; \quad \bar{f}_2 = \operatorname{arch} \left[\frac{1}{e_1} \left(1 - \frac{r_2}{a_1} \right) \right]; \quad (6.85)$$

$$T(\Omega_y) = \sqrt{-\frac{a_1^3}{\mu_1} [\bar{f}_1 - \bar{f}_2 + e_1 (\operatorname{sh} \bar{f}_2 - \operatorname{sh} \bar{f}_1)]}. \quad (6.86)$$

Зная зависимости $\lambda(\Omega_y)$, $\Omega_L(\Omega_y)$ и $\Omega_L(t)$, определяем, как и в предыдущем случае, моменты времени t_1 и соответствующие начальные данные на любые заданные сутки. В задаче встречи при условии $\theta_1 = \text{const}$ величины избытка начальной скорости над параболической для различных значений Ω_y , т. е. для различных суток месяца, будут существенно разными: время полета T и величина упреждения будут заметно меняться с изменением положения Ω_y упрежденной точки.

В рассматриваемой задаче существует вполне определенное максимально возможное значение $\theta_{1 \max}$ угла θ_1 . Оно соответствует максимальному значению $\Phi_{1 \max}$ пассивной угловой дальности и минимальному значению $\Delta V_{1 \min}$ избытка начальной скорости над местной параболической, т. е. минимальному значению $\Delta \beta_{1 \min}$ величины

$$\Delta \beta_1 = (\Delta V_1 / V_n) (2 + \Delta V_1' / V_n).$$

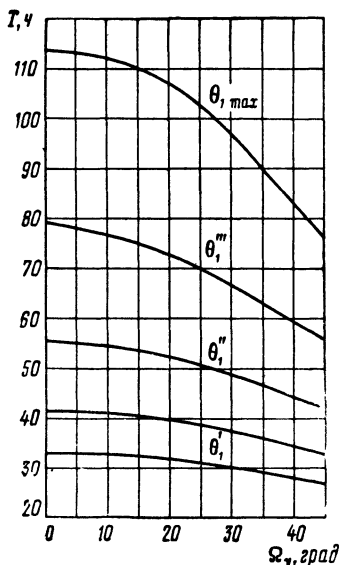


Рис. 6.48. Примерная зависимость времени полета T на пассивном участке траектории от положения Ω_y упрежденной точки при фиксированных углах θ_1 вектора начальной скорости с трансверсалью ($\theta_1' < \theta_1'' < \theta_1''' < \dots < \theta_{1 \max}$)

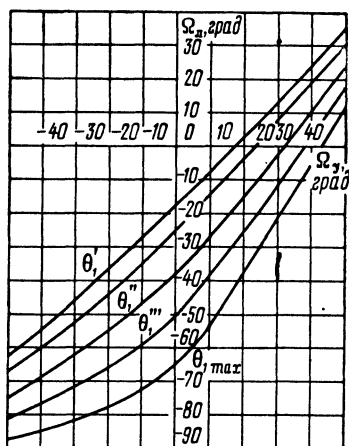


Рис. 6.49. Связь упрежденного Ω_y и текущего Ω_L положений Луны при фиксированных углах θ_1 вектора начальной скорости с трансверсалью ($\theta_1' < \theta_1'' < \theta_1''' < \dots < \theta_{1 \max}$)

Максимальное значение $\theta_{1 \max}$ может быть определено последовательными приближениями. Задавшись какими-либо значениями $\theta_1 < \theta_{1 \max}$ и $\Delta \beta_1 > \Delta \beta_{1 \min}$, по рис. 6.33 находим $r_1(\theta_1, \Delta \beta_1)$ и $\Phi_a(\theta_1, \Delta \beta_1)$. Затем находим

$$v = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{и} \quad \Phi_1 = 180^\circ - [(u_0)_{\min} + \Phi_a], \quad (6.87)$$

где берем в качестве r_2 расстояние между центрами Земли и Луны, а

$$(u_0)_{\min} = u_0|_{\Omega_y = 0}.$$

Наконец находим новые значения θ_1 и $\Delta \beta_1$ по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \cos^2 \theta_1 &= \frac{\sin^2 \frac{\Phi_1}{2}}{(1 - v^2) + v(2 - v) \sin^2 \frac{\Phi_1}{2}}; \\ \Delta \beta_1 &= -v(1 - v \cos^2 \theta_1) / (1 - v^2 \cos^2 \theta_1), \end{aligned} \right\} \quad (6.88)$$

получающимся с помощью выражений (6.18) и (6.19), и повторяем итерации до установления величин θ_1 и $\Delta\beta_1$ с нужной точностью. Задаваясь различными значениями $\theta_1 = \text{const} < \theta_{1\text{max}}$ и Ω_y и проводя итерации для определения величин β_1 , r_1 , Φ_a , T , находим последние как функции Ω_y .

Примерные кривые зависимостей $T(\Omega_y)$ при постоянных значениях θ_1 приведены на рис. 6.48, семейство кривых $\Omega_L(\Omega_y)$ показано на рис. 6.49. Кроме того, как и в предыдущих задачах, для каждого значения θ_1 имеем зависимости $\lambda(\Omega_y)$ (см. рис. 6.36) и $\Omega_L(\theta_1)$.

Для определения моментов времени t_1 выхода КА на траекторию пассивного участка с целью достижения Луны в окрестности наивыгоднейшей точки на ее орбите в заданном месяце заданного года следует воспользоваться Астрономическим ежегодником на этот год. Учитывая, что наивыгоднейшая точка $\Omega_L = 0$ соответствует наименьшему склонению Луны (относительно плоскости экватора), из ежегодника находим момент h_0 звездного времени, когда Луна проходит эту точку. Пусть α^0 — прямое восхождение Луны в момент h_0 . Находим

$$\alpha_X^0 = \alpha^0 - 180^\circ; \quad \lambda_{\text{гр}} = h - \alpha_X^0, \quad (6.89)$$

где α_X^0 — угол поворота меридиана этой оси от точки γ , а $\lambda_{\text{гр}}$ — угол поворота гринвичского меридиана от меридиана оси X . (Нуль вверх означает, что величина берется в момент h_0 .)

Угол поворота меридиана точки старта от меридиана оси X в момент времени h

$$\lambda_h = \lambda_{\text{гр}}^0 + \lambda_0, \quad (6.90)$$

где λ_0 — географическая долгота точки старта B_0 .

Формула (6.90) и вторая формула (6.89) справедливы для любых значений h , а первая из формул (6.89) — только для значения $h = h_0$, т. е. для случая, когда Луна находится в наивыгоднейшей точке $\Omega_L = 0$. Обозначим соответствующее этому положению Луны значение $\lambda(h_0)$ через λ^0 . Теперь, задавшись значением угла θ_1 наклона вектора начальной геоцентрической скорости к местному горизонту, находим из рис. 6.49 для момента времени h по значению $\Omega_L = \omega(h - h_0)$ соответствующее значение $\Omega_y(\Omega_L)$, а по нему с помощью рис. 6.36 — необходимое значение $\lambda(\Omega_y) = \lambda_y$ (здесь ω — угловая скорость обращения Луны).

С другой стороны, располагаемое значение угла поворота меридиана точки старта от меридиана оси X в момент времени h

$$\lambda_h = \lambda^0 + \omega_3(h - h_0), \quad (6.91)$$

где ω_3 — угловая скорость суточного вращения Земли.

Найдя для двух значений h значения разности $\Lambda = \lambda_h - \lambda_y$ и интерполируя по h на значение $\Lambda = 0$, в пределе получим (на каждые сутки) момент времени t_1 выхода на пассивный участок траектории и соответствующие значения

$$\Omega_y, \quad \lambda(\Omega_y), \quad \Omega_L(\Omega_y), \quad T(\Omega_y).$$

Примерный характер изменения времени полета $T(\Omega_y)$ от изменения положения Ω_y точки встречи КА с Луной при постоянных углах θ_1 виден на рис. 6.50. На кривых $T = T(\Omega_y)|_{\theta_1 = \text{const}}$ размещение точек с одинаковым значением $N \pm k$, $k = 1, 2, \dots$, даты соответствует попаданию в Луну в фиксированные даты пуска. Эти точки образуют слабо наклонные линии. Приближенно их можно считать прямыми.

6.4.2. Выбор невозмущенной траектории попадания в Луну с учетом прямой видимости встречи из заданного пункта

В настоящем разделе рассматривается выбор номинальной траектории с учетом условия оптимальной видимости (из заданного пункта H) КА перед его встречей с Луной.

Под условием оптимальной видимости понимается требование, согласно которому угол возвышения направления пункт — КА над горизонтом пункта H в определенный отрезок времени τ , предшествующий встрече с Луной, является наибольшим (например, для удобства радионаблюдения встречи). В момент соударения с Луной этот угол будет

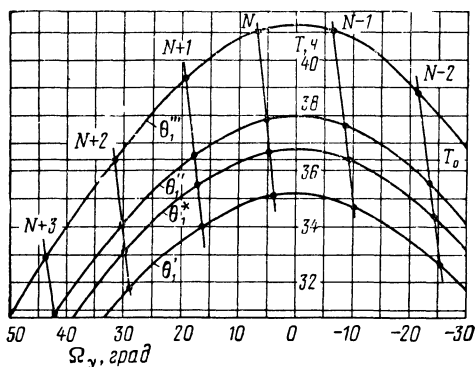


Рис. 6.50. Приближенная зависимость времени полета T на пассивном участке траектории от упрежденных положений Ω_y Луны для энергетически оптимальной даты старта N и близких к ней дат в одном месяце

наибольшим в том случае, если для этого момента времени долгота КА (или Луны) равна долготе пункта H , т. е. (см. рис. 6.34)

$$180^\circ + [(\lambda_{B_0} - \lambda_H) - \sigma(a_0, \Omega_y)] = \omega_3(t_a + T_0) - 2\pi n, \quad (6.92)$$

где $\lambda_{B_0} - \lambda_H = \text{const}$ — разность географических долгот точки старта B_0 и пункта H ; σ — разность долгот точки старта и узла Ω_y в момент старта, определяемая формулами (6.21) — (6.23) (см. рис. 6.36); ω_3 — угловая скорость суточного вращения Земли; t_a — время полета на активном участке траектории; T_0 — оптимальное время полета на пассивном участке, а $n > 0$ — целое число звездных суток, содержащихся во времени T_0 .

Чтобы угол возвышения КА был наибольшим не в момент соударения, а на время $\tau/2$ раньше, следует увеличить время полета T_0 , определяемое из выражения (6.92), на величину $\tau/2$ для определения времени T_0 использовать формулу

$$T_0 = \frac{1}{\omega_3} [\pi(2n + 1) + (\lambda_{B_0} - \lambda_H) - \sigma(a_0, \Omega_y)] + \left(\frac{\tau}{2} - t_a \right). \quad (6.93)$$

Если азимут a_0 постоянен (что в дальнейшем и будем предполагать), то величина σ при изменении Ω_y в диапазоне $|\Omega_y| < 30^\circ$ изменяется весьма слабо (см. рис. 6.36), так что для расчетов с точностью порядка 1° (около 4 мин) можно считать величину σ постоянной (и равной 20° для азимута $a_0 = 35^\circ$ и выбранной в разд. 6.1.2 точке старта). Тогда найдем левую часть выражения (6.92), приняв за пункт наблюдения Москву ($\lambda_H = 37^\circ,6$), и получим время полета в часах

$$T_0 = 23,93 \cdot n + 12,45 + \left(\frac{\tau}{2} - t_a \right). \quad (6.94)$$

Число n может принимать значения 0, 1, 2, 3 и 4, так как время полета до лунной орбиты может достигать 4,5 сут. Определим его в предположении, что $\tau/2 = t_a$. Энергетически оптимальные начальные скорости близки по величине к местной параболической скорости. Таким скоростям соответствует время полета около двух суток, и энергетически наиболее выгодными будут значения $n=1$ и $n=2$. Значение $n=2$ соответствует значительно меньшим величинам избытка ΔV_1 начальной скорости над местной параболической, чем значение $n=1$, и согласно разд. 6.3.3 требует реализации начальных данных с более высокими точностями. Примем $n=1$ и получим $T_0 = 36,38$ ч.

Пренебрегая слабой (согласно рис. 6.13) зависимостью времени полета от угла θ_1 возвышения вектора начальной скорости, по сплошной кривой ($a = 384400$ км) на рис. 6.51 находим, что оптимальному времени полета $T_0 \approx 36,4$ ч соответствует величина избытка $\Delta V_1 \approx 0,158$ км/с.

Угол возвышения ϵ направления пункт — КА над горизонтом пункта наблюдения выражается через S — угол, на который перемещается наблюдаемый объект от его кульминационной точки за время Δt [это перемещение обусловлено суточным вращением Земли (рис. 6.52)]:

$$\sin \epsilon = \cos S \cos \delta \cos \psi_H + \sin \delta \sin \psi_H, \quad (6.95)$$

где ψ_H — широта пункта наблюдения (см. сферический треугольник zEP' на рис. 6.52).

Предполагаем, что имеет место наименьшее склонение КА ($\delta \geq -\Theta$), где Θ — по-прежнему угол между плоскостями земного экватора и орбиты Луны. Перемещением КА относительно звезд здесь можно пренебречь, поскольку оно мало (угловая скорость КА на расстоянии Луны почти в 5 раз меньше угловой скорости обращения Луны вокруг Земли).

В области $\epsilon > 0$ для значений широты $\psi_H > |\delta|$ ($\delta < 0$) функция $\epsilon(S)$ монотонно возрастает от нуля, достигая максимума $\epsilon_{\max}$, и затем монотонно убывает до нуля симметричным образом.

Измерив угол S в часах и построив семейство кривых $\epsilon(S)|_{\delta=\text{const}}$, по кривой $\delta = \delta_{\min}$ и критическому значению $\epsilon = \epsilon_{\min} = 0$ найдем диапазон номинальных значений времени полета ($T_1^{\epsilon}, T_2^{\epsilon}$), симметричный относительно абсциссы точки кульминации. Допустимый диапазон значений T будет уже за счет существования области возможных отклонений скорости от номинальной, обусловленных ошибками выведения. Например, для разбросов $\delta V_1 \approx \pm 8$ м/с и с учетом того, что максимальная производная $\delta T / \delta V_1 \approx -300$ с²/м (при наименьших рассматриваемых в данном примере значениях δV_1), находим, что диапазон номинальных значений времени полета уменьшится с каждого края на величину $\delta t \approx 0,7$ ч. Находим границы интервала гарантированной видимости соударения:

$$T_1^{\epsilon} + \delta t \leq T \leq T_2^{\epsilon} - \delta t.$$

При $T \geq T'' = T_2^{\epsilon} + \delta t$ соударение будет невидимо, так как произойдет слишком поздно, а при $T \leq T' = T_1^{\epsilon} - \delta t$ соударение будет невидимо, так как произойдет слишком рано. Вне диапазона (T'', T') имеем область гарантированной невидимости соударения, а при $T' < T < T_1^{\epsilon} + \delta t$ и $T_2^{\epsilon} - \delta t < T < T''$ — область возможной невидимости.

Нанеся полученный диапазон времени на рис. 6.48 и рассматривая соответствующую

щие ему кривые $T(\Omega_y)|_{\theta_1=\text{const}}$, можно определить максимальное $\theta_{1\max}$ и минимальное $\theta_{1\min}$ значения угла θ_1 , при которых в окрестности точки $\Omega_y = 0$ еще возможно соударение с Луной, контролируемое из пункта наблюдения.

При максимальном значении $\theta_1 = \theta_{1\max}$ в каждом месяце количество дней, в которые возможен запуск КА к Луне, является максимальным. Энергетические ограничения могут уменьшить это количество дней.

При наличии узких энергетических границ, т. е. при условии $|\Omega_y| < |\Omega_y|_{\max}$, имеется определенный диапазон значений θ_1 , для которых кривые $T(\Omega_y)|_{\theta_1=\text{const}}$ всюду проходят в области видимости соударения из пункта наблюдения. Оптимальное значение

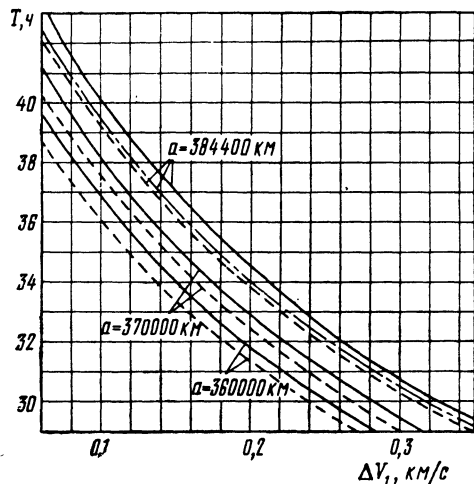


Рис. 6.51. Зависимость времени полета T на пассивном участке траектории от избытка ΔV_1 начальной скорости над местной параболической при различных расстояниях a от центра Земли до точки встречи КА с Луной

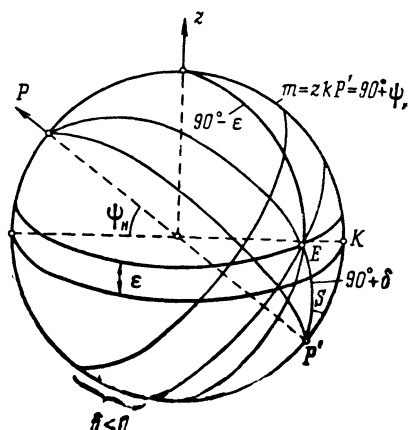


Рис. 6.52. Небесная сфера над горизонтом пункта наблюдения

θ_1 следует искать с учетом расположения на кривых $T(\Omega_y)|_{\theta_1=\text{const}}$ точек, соответствующих попаданию в конкретном месяце (в то время как предыдущее рассмотрение имело место для любого месяца). Имея расчеты кривых $T(\Omega_y)$ (см. рис. 6.50) для конкретного месяца, интерполяцией можно найти параметры θ_1^0 и θ_1^* кривых, проходящих через точку пересечения прямой $T = T_0$ соответственно с линией N энергетически оптимальной даты или с линией $N-1$ предыдущей даты. Характеристики траекторий с $\theta_1 = \theta_1^*$ для других дат находятся интерполяцией всех параметров по линиям этих дат на значение $\theta_1 = \theta_1^*$.

6.4.3. Расчет характеристик движения относительно Земли и Луны

Зная в системе координат, в которой ось Z нормальна плоскости орбиты Луны, а ось Y направлена по линии пересечения плоскости лунной орбиты с плоскостью экватора в нисходящий узел, численные значения координат X, Y, Z и скоростей $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ КА (рис. 6.53) в произвольный момент времени, географические координаты пунктов наблюдения (λ_i, ψ_i) ($i=1, 2, \dots, n$), а также угол λ (см. рис. 6.34) между меридианами оси X и точки старта B_0 в номинальный момент t_1 начала пассивного участка, можно рассчитать географические координаты λ_r и ψ_r точки, в которой геоцентрический радиус-вектор объекта пересекает земную сферу (геометрическое место этих точек является траекторией объекта на Земле) [3].

Область на Земле, с границ которой КА будет виден на горизонте, будет кругом с центром (λ_r, ψ_r) и угловым радиусом

$$\gamma_0 = \arccos \frac{r_0}{r}, \quad r = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}, \quad (6.96)$$

где r_0 — радиус поверхности Земли, а r — геоцентрический радиус КА.

Определим точку на Луне, над которой находится КА, и угловой радиус части лунной сферы, видимой с КА.

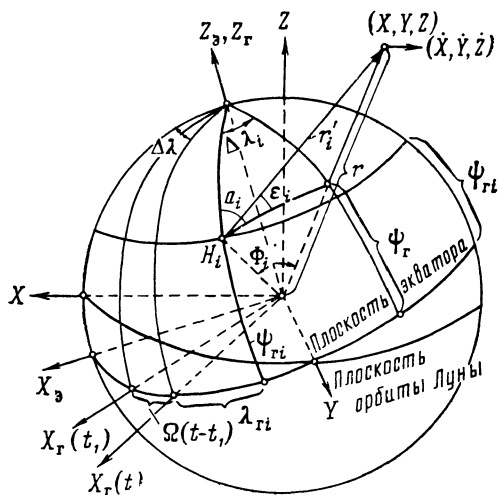


Рис. 6.53. Определение характеристик видимости КА вдоль траектории из пункта наблюдения H_i

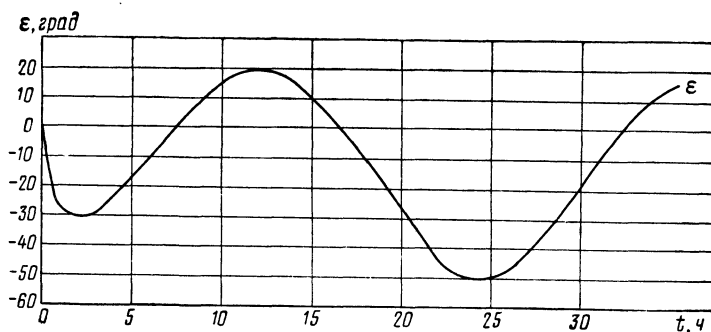


Рис. 6.54. Возможный характер изменения во времени углов ϵ возвышения направления «пункт—КА» над горизонтом Москвы

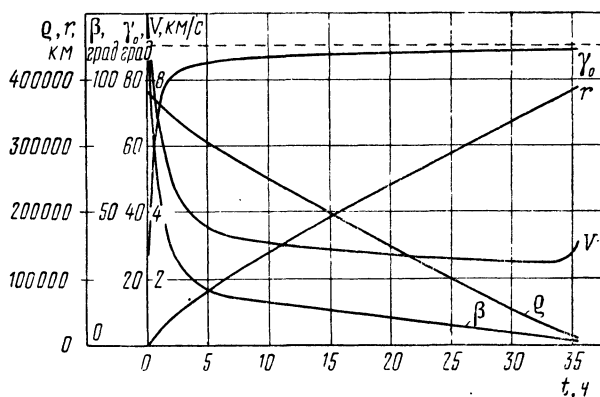


Рис. 6.55. Изменение во времени геоцентрического расстояния r , селеноцентрического расстояния q , геоцентрической скорости V , геоцентрического углового радиуса γ_0 окружности на поверхности Земли, с которой КА виден на горизонте, и геоцентрического углового расстояния β между направлениями из центра Земли на КА и центр Луны

Пусть X_L, Y_L — координаты центра Луны (напомним, что согласно выбору системы XYZ имеем $Z_L=0, Z_L=0$). Угол φ отклонения радиуса-вектора центра Луны от оси X и величина этого радиуса-вектора определяются формулами:

$$\sin \varphi = \frac{Y_L}{r_L}; \quad \cos \varphi = \frac{X_L}{r_L}; \quad r_L = \sqrt{X_L^2 + Y_L^2}. \quad (6.97)$$

Преобразование системы координат XYZ в систему $\xi\eta\zeta$, изображенную на рис. 6.41, дается формулами:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (X_L - X) \cos \varphi + (Y_L - Y) \sin \varphi; \\ \eta &= -(X_L - X) \sin \varphi + (Y_L - Y) \cos \varphi; \\ \zeta &= Z. \end{aligned} \right\} \quad (6.98)$$

Полярные координаты λ', ψ' произвольной точки трассы КА на поверхности Луны находятся по формулам:

$$\sin \psi' = \frac{\zeta}{\varrho}; \quad \sin \lambda' = \frac{\eta}{\varrho \cos \psi'}; \quad \cos \lambda' = \frac{\xi}{\varrho \cos \psi'}, \quad (6.99)$$

где $\varrho = \sqrt{(X - X_L)^2 + (Y - Y_L)^2 + (Z - Z_L)^2}$ — расстояние от КА до центра $(X_L, Y_L, 0)$ Луны, движущейся со скоростью $(\dot{X}_L, \dot{Y}_L, 0)$. Величина угла ψ' отсчитывается от плоскости $\xi\eta$ в сторону значений $\zeta > 0$, а величина угла λ' — в плоскости $\xi\eta$ от оси ξ в сторону значений $\eta > 0$. Угловой радиус части лунной сферы, видимой с КА, очевидно, выразится первой из формул (6.96) с заменой отношения r_0/r отношением ϱ/r .

Угол β между геоцентрическими радиусами КА и Луны находится по формуле

$$\cos \beta = \frac{XX_L + YY_L}{rr_L}, \quad (6.100)$$

где

$$r_L = \sqrt{X_L^2 + Y_L^2}.$$

Полученные выше формулы не связаны с какими-либо допущениями относительно действующих на КА сил и годы как при приближенном, так и при точном учете этих сил для любой даты запуска.

Пример расчета

Результаты расчета по формулам разд. 6.4.2 и 6.4.3 для траектории, характеризующей избытком начальной скорости над местной параболической $\Delta V_1 = 170$ м/с, приведены на рис. 6.54 и 6.55. С помощью изложенной методики получается время полета $T_0 = 35,4$ ч, а по точному расчету (с учетом влияния Луны и пр.) $T_0 = 35,35$ ч.

Соответственно отличию времени полета от номинального ($T_0 \approx 36,4$ ч) кривая $\varepsilon(t)$ на рис. 6.54 угла возвышения КА над горизонтом Москвы оканчивается на значении $\varepsilon < \varepsilon_{\max}$.

На рис. 6.55 приведены примерные зависимости от t текущих характеристик движения: геоцентрического расстояния r КА, селеноцентрического расстояния ϱ , геоцентрической скорости V , геоцентрического углового расстояния β между направлениями из центра Земли на КА и центр Луны, а также углового радиуса γ_0 окружности на поверхности Земли, из точек которой КА виден на горизонте. Скорость $V(t)$ медленно убывает, в окрестности точки входа в сферу действия Луны она стабильна, и только незадолго перед моментом соударения ее значение возрастает (примерно до 3 км/с) под влиянием притяжения Луны.

Функция $\beta(t)$ уменьшается быстро потому, что в начале полета угловая скорость КА велика, а функция $\gamma_0(t)$ быстро растет потому, что КА быстро удаляется от Земли. Примерно через 5 ч полета функция $\beta(t)$ становится почти линейной. При больших значениях r угловая скорость КА становится в несколько раз меньше угловой скорости Луны и Луна почти равномерно «догоняет» КА.

Поскольку плоскость геоцентрической траектории наклонена к плоскости орбиты Луны на угол $i_1 \approx 70^\circ$, то на неподвижной небесной сфере КА будет медленно приближаться к точке встречи справа и сверху (если смотреть с северного полушария Земли), а Луна более чем в 5 раз быстрее — справа.

Если азимут КА будем характеризовать азимутом направления некоторого полярного радиуса, а угол места ε — смещением точки вдоль этого радиуса и указанное смещение будем откладывать от некоторой окружности к ее центру при $\varepsilon < 0$ и от центра при $\varepsilon > 0$, то получим кривые на рис. 6.56 (вдоль кривых отложено время полета в часах).

Заметим, что если КА проходит через зенит пункта наблюдения (что может иметь место только для пунктов, расположенных на трассе), то величина азимута изменится скачком на 180° .

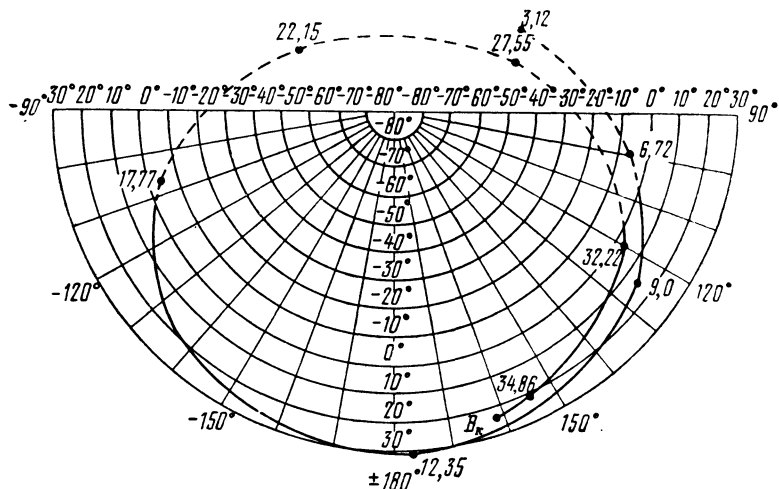


Рис. 6.56. Типичный характер изменения азимута и угла места объекта вдоль пассивного участка траектории полета к Луне

6.5. УЧЕТ ВЛИЯНИЯ ВТОРОСТЕПЕННЫХ ФАКТОРОВ

6.5.1. Анализ влияния Луны как материального тела

Приближенность изложенных в п. 6.4 методик обусловлена прежде всего пренебрежением возмущениями от Луны.

Изменение энергетических затрат и кеплеровых элементов вследствие учета влияния Луны на траекторию встречи будет несущественно.

Однако влияние Луны, весьма слабо изменяя форму траектории, заметно уменьшает время полета, и соударение КА с Луной происходит в некоторой более ранней точке ее орбиты, т. е. при меньших значениях угла Ω_y . Уменьшение ΔT времени полета обусловлено двумя причинами: во-первых, ускоряющим действием Луны, которое сказывается в основном в сфере ее действия, и, во-вторых, тем, что соударение происходит не с центром Луны, а с ее поверхностью, т. е. в более ранний момент времени. Соответствующее (см. рис. 6.57) уменьшение времени полета

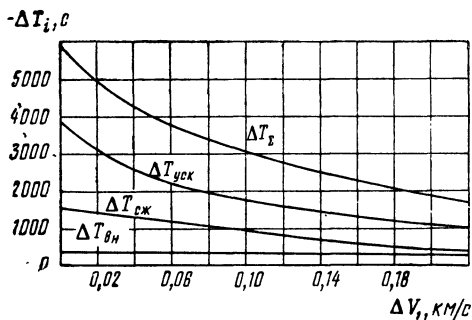


Рис. 6.57. Зависимость уменьшения ΔT_i времени полета на пассивном участке от влияния различных факторов и суммарное уменьшение ΔT_z (ΔV_1 — избыток начальной геоцентрической скорости над местной параболической)

$$\Delta T = \Delta T_{уск} + \Delta T_{вн} \quad (6.101)$$

при значениях $0,1 < \Delta V_1 < 0,2$ км/с составляет около 30 мин. С учетом этой поправки построена штрих-пунктирная кривая $T(\Delta V_1)$ (см. рис. 6.51). Соответствующей величине ΔT поправкой $\Delta \Omega_y$ можно пренебречь при точности методики порядка 1 град.

Оптимальное значение избытка ΔV_1 начальной скорости над местной параболической уменьшится; на рис. 6.51 находим по штрих-пунктирной кривой $\Delta V_1 = 0,152$ км/с.

Зависимости, по которым находились моменты выхода на пассивный участок траектории, и соответствующие начальные данные практически не изменятся [3]. Кривые на рис. 6.50 от учета влияния Луны качественно не изменятся. Номинальные начальные данные изменятся только за счет опускания кривых $T(\Omega_y)$ относительно неподвижной прямой $T = T_0$ (см. рис. 6.50) на сравнительно малую величину ΔT .

При этом изменяется и границы диапазона значений ΔV_1 , соответствующего условию видимости КА из заданного пункта, хотя соответствующий диапазон $T_{min} < T < T_{max}$ не изменится. По величине T_0 , как и в п. 6.4, находят значения θ_1^* , Ω_y , вре-

мя t_1 начала пассивного участка и соответствующие величины i_1 , Φ_a , r_1 , H_1 для различных дат старта, при которых возможна гарантированная видимость соударения из заданного пункта.

6.5.2. Влияние эллиптичности орбиты Луны

Отличия расстояния от Земли до Луны и смещения Луны из точки с наименьшим склонением от их средних значений, соответствующих круговому движению, вычисляются по формулам:

$$\Delta r_2 = 384\,400 - r_2; \Delta \Omega = \Omega_d - \omega(h - h_0), \quad (6.102)$$

где h — рассматриваемый момент всемирного времени;

h_0 — момент прохождения Луной точки с минимальным склонением.

Уменьшение ΔT_a времени полета за счет эллиптичности лунной орбиты при величине геоцентрической скорости полета вблизи орбиты Луны 2 км/с дает поправку порядка нескольких часов, довольно стабильную по избытку ΔV_1 начальной скорости над местной параболической, но для каждого дня будет своя поправка ΔT_a (см. среднюю и нижнюю сплошные кривые на рис. 6.51, отвечающие соответственно расстояниям $r_2 = 370\,000$ и $360\,000$ км).

Уменьшение избытка ΔV_1 номинальной начальной скорости V_1 над местной параболической V_p , обусловленное только уменьшением расстояния r_2 на величину порядка 20 000 км, составляет примерно 5 м/с.

Эллиптичность орбиты Луны приводит еще к смещению энергетически оптимальной точки встречи на этой орбите из положения $\Omega_y = 0$, соответствующего минимальному склонению Луны, в сторону меньших радиусов r_2 , т. е. (для 1959—1960 гг.) в сторону углов $\Omega_d < 0$. Однако можно доказать, что указанное смещение несущественно [3].

6.5.3. Влияние сжатия Земли

Сжатие Земли увеличивает силу земного притяжения у экватора и уменьшает ее у полюсов, причем влияние сжатия убывает с увеличением геоцентрического расстояния пропорционально его четвертой степени [11].

Ниже в качестве примера рассмотрим траектории, плоскости которых наклонены к экватору на угол около 65° . При полете по таким траекториям сначала достигаются северные широты порядка 65° , а затем — южные до -18° , и влияние сжатия в начале траектории частично компенсируется влиянием сжатия на остальной части траектории.

Вдоль рассматриваемых траекторий значение каждой из компонент R , T , W возмущающего ускорения (проекций на радиус, трансверсаль и бинормаль соответственно) переходит через нуль. Поскольку влияние сжатия весьма быстро убывает с увеличением расстояния от центра Земли, то наибольшая компенсация должна иметь место для перемещений по радиусу и трансверсали, которым соответствуют компоненты R и T , переходящие через нуль при относительно малых значениях r , и меньшая компенсация имеет место для компоненты W по нормали к плоскости невозмущенной траектории, так как компонента W переходит через нуль последней лишь при широте $\psi = 0$.

Для параболической траектории с наклоном к экватору $i_0 = 65^\circ$ и начальной высотой $H_1 \approx 1000$ км изменение формы траектории, обусловленное сжатием Земли, будет порядка 1000 км (без учета компенсации). Соответствующее смещение точки попадания составляет доли градуса, а с учетом компенсации оно может стать на порядок меньше.

Изменение $\Delta T_{сж}$ времени полета до Луны с учетом сжатия в основном происходит за счет изменения скорости движения на больших расстояниях от Земли, где КА находится большую часть времени полета, двигаясь с асимптотически убывающей скоростью. При этом КА, достигнув расстояния r_2 в возмущенном движении, проходит примерно тот же путь $s(r_2)$, что и в невозмущенном движении. Это позволяет [3] для использовавшейся выше параболической траектории получить $\Delta T_{сж} = -1630$ с.

При гиперболической начальной скорости величина $\Delta T_{сж}$ меньше, чем при параболической скорости. Для траектории с $\Delta V_1 = 0,130$ км/с и начальной высотой, равной 1000 км, поправка $\Delta T_{сж}$ составляет приблизительно 750 с (см. рис. 6.57). Характер накопления поправки вдоль параболической траектории показан на рис. 6.58, где абсциссой является аргумент широты КА.

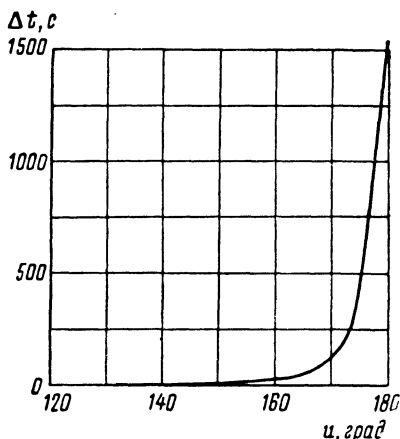


Рис. 6.58. Обусловленное сжатием Земли уменьшение Δt времени полета как функция аргумента широты u вдоль параболической траектории

6.5.4. Влияние Солнца

Солнце тоже возмущает движение КА относительно Земли.

Радиальная компонента возмущающего ускорения максимальна при движении по прямой Земля — Солнце, а трансверсальная — при движении по прямым, образующим угол 45° или 135° с прямой Земля — Солнце.

Влияние Солнца на боковое смещение КА будет наибольшим в случае, когда максимальное возмущающее ускорение действует во все время полета ортогонально траектории. В частности, боковое смещение, соответствующее чисто радиальному движению под углом 45° к направлению Земля — Солнце, может служить оценкой; для случая, когда невозмущенное движение происходит с параболической скоростью [3], оно составляет несколько сот километров. Это значит, что боковым смещением, вызываемым возмущающим влиянием Солнца, в рассматриваемой задаче можно пренебречь.

Радиальное смещение будет того же порядка. Соответствующим изменением $\Delta T'$ времени полета, обусловленным этим смещением, можно пренебречь.

Таким образом, при точности приближенной методики порядка градуса необходимо учитывать только влияние эллиптичности орбиты Луны и сжатия Земли. В силу слабости влияния этих факторов на форму траектории и на энергетические затраты учет этих факторов сводится к учету изменения (уменьшения) времени полета на пассивном участке траектории. Суммарное уменьшение времени полета ΔT_Σ (ΔV_1) от учета влияния притяжения Луны, конечности ее размеров и сжатия Земли представлено на рис. 6.57; изменение времени полета с учетом этого уменьшения представлено на рис. 6.51 пунктирными кривыми (для соответствующих сплошных линий).

Примеры

Расчет номинальных начальных данных с учетом всех второстепенных факторов проводится аналогично тому, как описано в разд. 6.4, только теперь вводятся поправки на эллиптичность лунной орбиты к расстояниям и угловым положениям Луны. Учитывается также суммарное изменение времени полета за счет эллиптичности лунной орбиты и других второстепенных факторов. Последнее делается точно так же, как в разд. 6.5.1.

На рис. 6.59 приведены примеры расчета номинального времени полета $T(\Omega_y)$ с учетом второстепенных факторов для тех же дат $(N-2) \div (N+3)$, что и на рис. 6.50.

Условия видимости сближения можно сделать оптимальными, если на каждый день задавать угол возвышения θ_1 , обеспечивающий оптимальное время полета T_0 .

С помощью приближенной методики путем непосредственной проверки всегда можно выяснить, обеспечивается ли на каждую дату заданного интервала дат удовлетворительная видимость сближения какой-либо заданной совокупностью кривых $T = T(\Omega_y) |_{\theta_1 = \text{const}}$ (см. рис. 6.59).

Определение номинальных начальных данных на ряд суток по условию $\beta_1 = \text{const}$ несколько проще, чем по условию $\theta_1 = \text{const}$, и состоит в определении методом итераций значения угла Ω_y , соответствующего заданному значению β_1 и какому-либо значению θ_1 . Задавшись нулевым приближением Ω_y^0 , находим по функции $r_2(\Omega_y)$, полученной с помощью первой формулы (6.102) и Астрономического ежегодника, расстояние $r_2(\Omega_y^0)$ до Луны в момент соударения и отношение $v = r_1(\theta_1, \beta_1)/r_2(\Omega_y^0)$ начального радиуса к конечному. Затем из формулы (6.40) и рис. 6.33 находим пассивную угловую дальность Φ_1 и аргумент широты точки старта

$$u_0 = 180^\circ - \Phi_a(\theta_1, \beta_1) - \Phi_1,$$

где $\Phi_a(\theta_1, \beta_1)$ — угловая дальность активного участка траектории.

Наконец уточняем значение Ω_y по формуле

$$\cos \Omega_y = \frac{\cos u_0 \cos \psi_0 - \sin u_0 \cos \psi_0 \cos a_0}{\sin \theta}.$$

Формулу (6.40) для определения угла Φ_1 удобно при вычислениях заменить формулами:

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\beta_1 \cos \theta_1; & \gamma &= \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \theta_1}; \\ \sin x &= \frac{1 - \alpha \cos \theta_1}{\gamma}; & \cos x &= \frac{\alpha \sin \theta_1}{\gamma}, \\ \sin y &= \frac{1 - \alpha v \cos \theta_1}{\gamma}; & \Phi_1 &= y + x. \end{aligned}$$

Определение времени полета и остальных номинальных характеристик производит, как и в случае $\theta_1 = \text{const}$.

С учетом второстепенных факторов приближенная методика обеспечивает точность углового сближения траектории с Луной порядка 1° . При этом ее точность по величине

не начальной скорости составляет около 1 м/с и по углу возвышения вектора начальной скорости над местным горизонтом — около $0^\circ,1$.

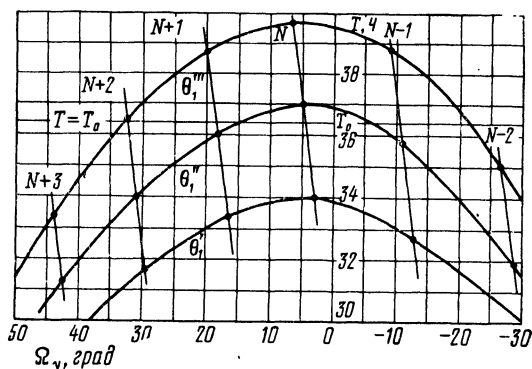
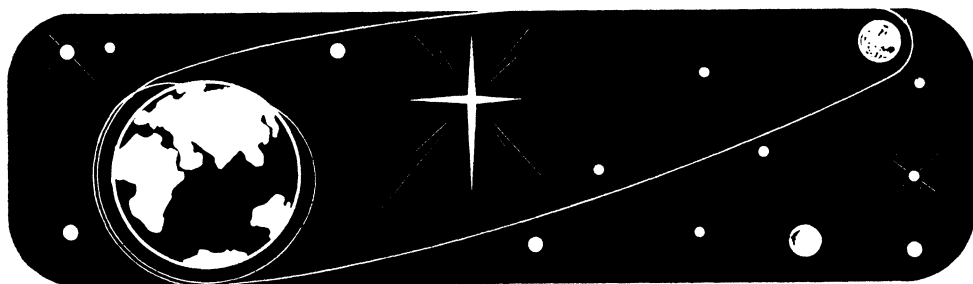


Рис. 6.59. Примерный вид зависимости времени полета T на пассивном участке траектории от упрежденного положения Ω_y Луны для энергетически оптимальной группы дат старта в одном месяце с учетом влияния второстепенных факторов (ср. с рис. 6.50)

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. VI

- Егоров В. А. О некоторых задачах динамики полета к Луне.— «Успехи физических наук», т. 63, вып. 1а, 1957.
- Егоров В. А. К вопросу о захвате в ограниченной круговой проблеме трех точек.— Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 3, 1959.
- Егоров В. А. Пространственная задача достижения Луны. М., «Наука», 1965.
- Куликовский П. Г. Справочник любителя астрономии. М., Физматгиз, 1961.
- Левантовский В. И. Ракетой к Луне. М., Физматгиз, 1960.
- Лисовская М. С. О траекториях полета ракеты вокруг Луны.— «Бюлл. ин-та теоретич. астрономии», т. 6, № 8 (81), 1957.
- Поспелов М. М. Доклад на Совещании по вопросам математической теории движения искусственных небесных тел.— «Астрономический журнал», т. 37, вып. 2, 1960.
- Седов Л. И. Орбиты космических ракет в сторону Луны.— Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 5, 1960.
- Скидмор Л. Д., Пенцо Р. А. Моделирование управления на среднем участке траектории полета к Луне с помощью метода Монте-Карло.— «Ракетная техника и космонавтика», 1963, № 4.
- Субботин М. Ф. Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937.
- Таратынова Г. П. О движении искусственного спутника Земли в нецентрально-тяготении при наличии сопротивления атмосферы.— «Успехи физических наук», т. 63, вып. 1а, 1957.
- Тросс, Определение орбиты для полета к Луне.— «Ракетная техника», 1962, № 4.
- Турский В. С. К вопросу о траекториях столкновения и захвата в задаче трех точек.— Сообщения ГАИШ, № 114, 1961.
- Фесенков В. Г. К вопросу о захвате при близком прохождении.— «Астрономический журнал», т. 23, вып. 1, 1946.
- Чеботарев Г. А., Симметричная траектория для полета вокруг Луны.— «Бюлл. ин-та теоретич. астрономии», т. 6, № 7 (80), 1957.
- Almar I. Balázs B., Approximate method of plotting the orbit of space rocket passing near the Moon, Magyar. tud. Kutató int. közl. vol. 4, No. 2, 1959.
- Békéssy A., Tóth K., Remark of the paper «Approximate method of plotting the orbit of space rocket passing near the Moon» by Almar I., Balázs B. Magyar. tud. acad. Mat. Kutató int. közl. vol. 4, No. 2, 1959.
- Buchheim R. W., Artificial satellites of the Moon. Proc. VII IAF Congress (Rome, 1956). Associazione Italiana Razzi (Rome, 1956).
- Cold. Earth-Moon rocket trajectories, I. ARS Preprint, June 1958.
- Ehrlicke K. A. Cislunar operations, ARS Preprint, June 1957.

21. Goldbaum G. C., Gunkel R. J. Comparison of two-and three-dimensional analysis of Earth-Moon flight, Proc. Amer. Astronaut. Soc., Western Regional Meeting, Palo Alto, August 1958.
 22. Hill G. W. Lunar theory. The Americ. Journ. of Math., vol. 1, part 23, 1877.
 23. Hohmann V. Die Erreichbarkeit des Himmelskörpers, München — Berlin, 1925.
 24. Hopf E. Mathematische Annalen, No. 103, 1930.
 25. Kizner W. A. A method of describing miss-distances for lunar and interplanetary trajectories. Planetary and Space Sci. vol. 7, pp. 125—131, 1961.
 26. Mickelwait A. B., Button R. C. Analytical and numerical studies of three-dimensional trajectories to the Moon. Space Technol. Laboratories, Inc., dated 10 November 1958, presented at the IAS National Summer Meeting, June 16—19, 1959.
 27. Kooj J.M.J., Berghuis J. On the numerical computation of free trajectories of lunar space vehicle, Astronautica Acta, vol. 6, No. 2—3, 1960.
 28. Lawden D. F. Journal of the British Interplan. Society, vol. 13, No. 6, 1954, vol. 14, No. 4, 1955.
 29. Lieske H. A., Circumlunar trajectory studies. RAND Paper, June 1958.
 30. Mickelwait A. B., Lunar trajectories, ARS Journal, vol. 29, No. 12, 1959.
 31. Miele A. Theorem of image trajectories in the Earth-Moon space. Astronautica Acta, vol. 6, No. 5, 1960.
 32. Niman A. Astronautical velocity and timing carts for use in space travel. Journ. of the British Interpl. Soc. vol. 19, No. 1, 1963.
 33. Riddell. Initial azimuth and times for ballistic lunar impact trajectories. ARS Journal, vol. 30, No. 5, 1960.
 34. Strömgren E. Publicationern fra Kobenhavns obs., No. 100, 1936.
 35. Walters L. G., Lunar trajectory mechanics. Navigation, vol. 6, 1958
-



ГЛАВА VII

ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА ОТ ЗЕМЛИ К ЛУНЕ И ВОЗВРАЩЕНИЯ ОТ ЛУНЫ К ЗЕМЛЕ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- A_1 — азимут траектории в сфере действия Луны.
 a_1, a_2 — большая и малая полуоси эллипса влияния.
 B_1, B_2, B_3 — точки траектории: начальная, на сфере действия и конечная.
 $\vec{C}$ — вектор геоцентрического кинетического момента.
 C_1, C_2 — компоненты $\vec{C}$ на плоскости, ортогональной $\vec{r}_2$.
 h — высота КА над поверхностью Земли.
 i, i_3 — наклонение орбиты Луны и орбиты КА к плоскости экватора Земли.
 i_L — наклонение орбиты КА к плоскости орбиты Луны.
 Π — плоскость орбиты ИСЛ.
 R — радиус пятна разбросов.
 R_3 — средний радиус Земли.
 r — расстояние КА до центра Земли.
 r_0 — расстояние от конца активного участка траектории до центра Земли.
 $\vec{r}, \vec{m}, \vec{b}$ — орты по радиусу, трансверсали и бинормали на орбите Луны.
 $\vec{r}_2$ — селеноцентрический радиус точки выхода из сферы действия Луны.
 $r_L = 384\,400$ км — большая полуось лунной орбиты.
 r_T — заданное предельное расстояние траектории возвращения от центра Земли.
 T — время пассивного полета от Земли до Луны.
 $T_{1,2}$ — время полета в сфере действия Луны.
 t_u — момент создания ИСЛ.
 t^* — момент пересечения сферы действия.
 t_1 — момент начала движения по траектории возвращения.
 t_2 — момент выхода из сферы действия Луны.
 $\vec{U}$ — вектор выходной селеноцентрической скорости.
 V_*, V^* — минимальная и критическая величины селеноцентрической выходной скорости.
 u, v, w — невращающееся пространство выходных скоростей; индексы соответствующих компонент скорости.
 V — геоцентрическая скорость КА.
 $V_{\text{кор}}$ — максимальный корректирующий импульс.
 V_T — селеноцентрическая скорость КА у поверхности Луны.
 V_1, θ_1, A_1 — модуль, угол возвышения и азимут начальной скорости пассивного участка.
 $\vec{V}_L$ — вектор скорости Луны.
 $\vec{V}_2$ — селеноцентрическая скорость выхода из сферы действия Луны.
 V_n — геоцентрическая местная параболическая скорость.
 V_T — геоцентрическая скорость на расстоянии r_T .

- V_{τ}^* — максимальная трансверсальная компонента выходной геоцентрической скорости.
 X, Y, Z — невращающаяся геоцентрическая система координат.
 x, y, z — невращающаяся селеноцентрическая система координат.
 α_l — аргумент широты Луны.
 γ — угол между направлениями с Луны на КА и на Солнце.
 ΔV_0 — избыток начальной скорости над параболической.
 $\delta\alpha$ — максимальная ошибка ориентации импульса в плоскости коррекции.
 $\delta\beta$ — максимальная ошибка ориентации импульса перпендикулярно к плоскости коррекции.
 $\delta V_{\text{кор}}$ — максимальная ошибка модуля импульса коррекции.
 $\delta\delta_{\alpha}, \delta\delta_{\beta}, \delta\delta_V$ — отклонения в картинной плоскости, вызванные ошибками $\delta\alpha, \delta\beta, \delta V_{\text{кор}}$, соответственно.
 $\delta V_1, \delta\theta_1, \delta A_1, \delta\rho_1$ — вариации начальных параметров.
 θ_1 — угол наклона вектора скорости к местному горизонту.
 λ — долгота точки посадки.
 μ_{γ} — гравитационный параметр Земли.
 ξ, η — система координат в картинной плоскости у Луны.
 ξ, η, ζ — селеноцентрическая система координат, вращающаяся вокруг оси ξ (ось ξ направлена к центру Земли).
 $\rho_1, \varphi_1, \lambda_1$ — сферические координаты начальной точки.
 Q^* — селеноцентрический выходной радиус.
 ρ — расстояние от КА до центра Луны.
 τ — индекс трансверсальной компоненты.
 Φ_l, Δ_l — широта и долгота точки старта в системе ξ, η, ζ , фиксированной на момент t_1 начала пассивного участка.
 Φ_1, α_1 — селеноцентрическая угловая величина и азимут смещения начальной точки из номинальной.
 φ — угловая дальность полета в сфере действия, широта точки посадки.
 Φ_p, Φ_n — располагаемая и необходимая угловые дальности полета в сфере действия.
 χ — угол возвышения $\vec{U}$ над плоскостью (u, v) .
 Ψ — угол вектора $\vec{U}$ с осью u (долгота).
 Ω, Ω_3 — долгота восходящего узла орбиты КА и Луны соответственно.
 ω — угловая скорость обращения Луны вокруг Земли.

7.1. ОПТИМАЛЬНЫЕ ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА ОТ ЗЕМЛИ К ЛУНЕ

7.1.1. Схема полета к Луне

В настоящем разделе рассматриваются вопросы, связанные с выбором траекторий для мягкой посадки на поверхность Луны в предположении, что старт происходит с *промежуточной орбиты ИСЗ* (см. гл. VI). Такая схема выведения позволяет осуществлять полеты к Луне при любых ее положениях на орбите без энергетических потерь, связанных с фиксированностью координат точки старта. Рассматривается схема посадки, для которой *траектория у Луны* должна быть *близка к осевой* траектории пучка, проходящей через *центр Луны*. Назовем эту осевую траекторию *номинальной*. В этом случае тяга двигателя при торможении должна быть направлена приблизительно по нормали к поверхности Луны. Поскольку выведение аппарата на траекторию Земля—Луна производится неточно и траектория может отклониться от центральной на величину, превышающую допустимые отклонения, проводится *коррекция движения* аппарата.

Кроме того, при выборе траекторий полета на Луну принимается, что посадка на поверхность происходит лунным утром, т. е. тогда, когда угол возвышения Солнца над лунным горизонтом, возрастающая, проходит через ноль.

7.1.2. Основные характеристики номинальных траекторий

Основные параметры траекторий Земля — Луна [2, 3] можно определять, пренебрегая влиянием Луны вне ее сферы действия по отношению к Земле и влиянием Земли — внутри этой сферы. Гравитационные поля Земли и Луны считаются центральными. Тогда вся траектория разбивается на две кеплеровых дуги — геоцентрическую и селеноцентрическую. По первой движение происходит от Земли до границы сферы действия Луны, а по второй — от этой границы к Луне.

Внутри сферы действия Луны номинальная селеноцентрическая траектория, а также траектория после точного проведения коррекции считаются прямыми, проходящими через центр Луны (т. е. *центральными* траекториями). Отклоненные траектории являются гиперболами с фокусом в центре Луны.

Анализ траекторий может быть проведен также с помощью численного интегрирования уравнений движения (с учетом возмущений) или более простым методом: попаданием в непритягивающую Луну. Все эти методы приводят к весьма близким результатам.

Ниже геоцентрическая орбита Луны считается плоской, круговой с постоянными наклонением $i=19^\circ$ и долготой восходящего узла Ω относительно плоскости земного экватора (рис. 7.1).

Рассмотрим изменение энергетических характеристик траекторий полета к Луне в зависимости от условий старта с промежуточной орбиты. Энергетические затраты (расход массы) на коррекцию и торможение определяются в основном величиной начальной скорости (полной энергии движения) и мало зависят от высоты h_0 и угла θ_0 наклона вектора скорости (к местному горизонту) в конце активного участка перехода с промежуточной орбиты ИСЗ на траекторию полета к Луне. Поэтому величины $r_0 = R_3 + h_0$ и θ_0 фиксируются. В расчетах принимается $r_0 = 6700$ км, $\theta_0 = 8^\circ$.

Свободными параметрами, определяющими траектории полета, будут величина начальной скорости V_0 и аргумент широты Луны α_L .

При полете к Луне в зависимости от места старта с промежуточной орбиты возможны два варианта полета: «северный», когда старт происходит в районе восходящего узла Ω_3 промежуточной орбиты ИСЗ в северном направлении, и «южный», когда старт происходит со сдвигом примерно в полвитка, т. е. в районе нисходящего узла промежуточной орбиты ИСЗ, в южном направлении. В первом случае начальный участок траектории проектируется на северное полушарие, поэтому аппарат хорошо наблюдается из пунктов, расположенных в северном полушарии, и, в частности, с территории Советского Союза. Это удобно для организации траекторных измерений в начале полета с целью определения фактической траектории. Поэтому ниже рассматривается только «северный» вариант полета.

Будем считать наклонение i_3 промежуточной орбиты к экватору фиксированным ($i_3 = 65^\circ$). Тогда положение α_L Луны в момент встречи, зависящее от времени запуска КА, однозначно определяет наклонение i_L плоскости невозмущенной траектории КА к плоскости орбиты Луны. Зависимость $i_L = i_L(\alpha_L)$ приведена на рис. 7.2. Из рисунка видно, что экстремальные значения i_L соответствуют совпадению узлов ИСЗ и орбиты Луны. Максимальное значение этого угла

$$i_{L\max} = i_3 + i = 84^\circ$$

достигается при совпадении разноименных узлов. Минимальное значение

$$i_{L\min} = i_3 - i = 46^\circ$$

достигается при совпадении одноименных узлов. В обоих случаях встреча должна происходить в узле.

Изменение селеноцентрической скорости КА у поверхности Луны V_T (при отсутствии торможения) в зависимости от $\Delta V_0 = V_0 - V_n$ и i_L приведено на рис. 7.3, где

$$V_n = \sqrt{\frac{2\mu_\gamma}{r_0}}, \quad \text{а } \mu_\gamma = 398600 \text{ км}^3/\text{с}^2.$$

Наименьшее значение ΔV_0 соответствует (приблизленно) полету к Луне по минимальному эллипсу, достигающему орбиты Луны. Скорость V_T определяет затраты топлива при торможении. Зависимость $V_T(\Delta V_0)$ — монотонно возрастающая и близка к линейной; при $\Delta V_0 = -(90 \div 80)$ м/с среднее значение производной $\frac{\partial V_T}{\partial \Delta V_0} \approx 4,0$; с увеличением наклона i_L от 46° до 84° скорость встречи возрастает примерно на 45 м/с.

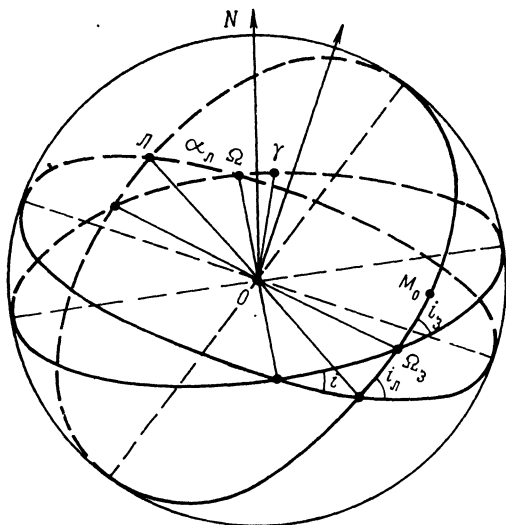


Рис. 7.1. Проекция земного экватора, орбит КА и Луны на единичную сферу

Иногда более удобно при анализе траекторий полета пользоваться не величиной ΔV_0 , а временем T пассивного полета до Луны. Зависимость между величинами T и ΔV_0 монотонна (рис.7.4).

Принятая схема посадки (вертикально к поверхности Луны) определяет геометрию подлета к Луне (рис. 7.5). При этом посадка происходит в определенный район Луны, характеризующийся в зависимости от ΔV_0 следующими селеноцентрическими широтой φ и долготой λ . При $\Delta V_0 = -84$ м/с ($T \approx 3,5$ сут) широта $\varphi \approx (9-10^\circ)$, долгота

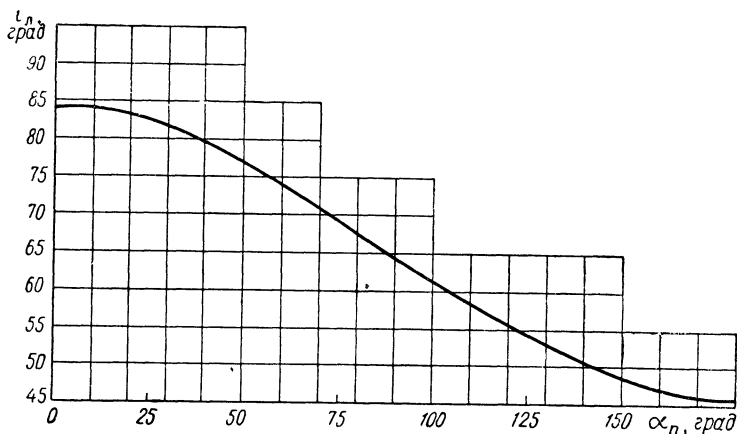


Рис. 7.2. Зависимость наклона i_L от аргумента широты Луны α_L

$\lambda = (62^\circ \div 65^\circ)$ з. д., а при $\Delta V_0 = -40$ м/с ($T \approx 2,5$ сут) широта $\varphi = 6,5^\circ \div 7,5^\circ$, долгота $\lambda = (40^\circ \div 43^\circ)$ з. д.

С уменьшением энергетики полета (с увеличением времени полета) точка посадки смещается к левому краю видимого диска Луны. При этом отклонения от лунного экватора невелики и мало зависят от энергетики полета. Указанный район посадки расположен в Океане Бурь.

Требование посадки КА на утренний терминатор при заданном месяце для старта фиксирует угол α_L , определяющий положение Луны на ее орбите (вследствие фиксированности направления на Солнце). При этом угол γ между направлением на КА с Луны в момент подлета к ней и направлением на Солнце близок к 90° (см. рис. 7.5). В зависимости от допустимого отклонения угла γ от 90° для каждого месяца существуют одна или более дат старта, обеспечивающих сближение с Луной при таких условиях.

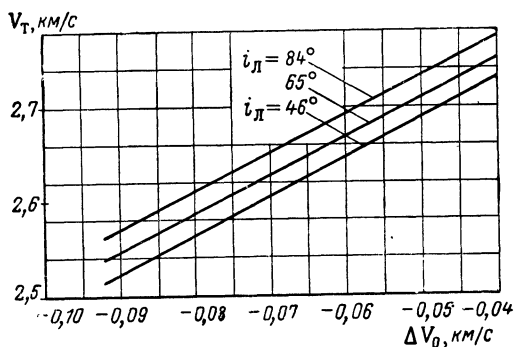


Рис. 7.3. Зависимость скорости КА V_T у Луны от величины ΔV_0

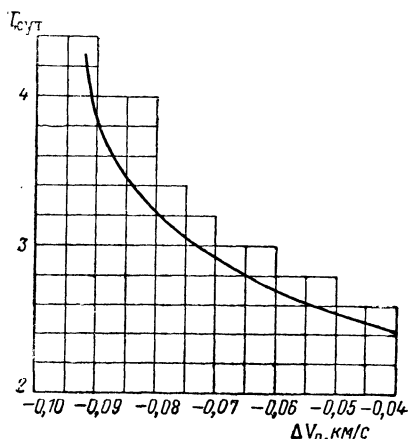


Рис. 7.4. Зависимость времени T полета к Луне от величины ΔV_0

Важной характеристикой траекторий является расположение по времени интервалов видимости аппарата из пункта радионаблюдения, за который здесь принята Крымская астрофизическая обсерватория. В табл. 7.1 приведены некоторые интервалы радио-

видимости КА для траекторий с $\Delta V_0 = -84$ м/с и $\Delta V_0 = -40$ м/с и $\alpha_L = 15^\circ; 45^\circ$ и 75° . Интервалы видимости даны для угла места над горизонтом более 10° .

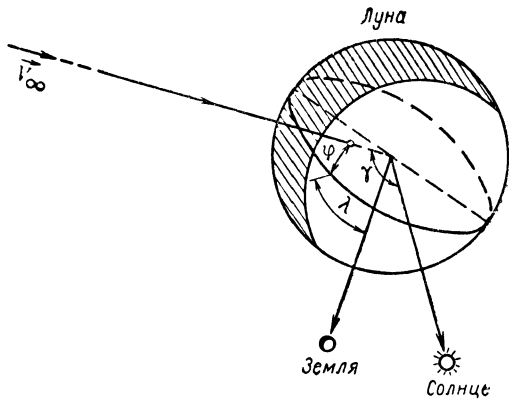


Рис. 7.5. Схема подлета КА к Луне

Таблица 7.1

Интервал	α_L	T_0 , сут	$\frac{1}{2} \Delta T$, час	$T_{\text{вид}}$, сут	r , тыс. км	
					$\Delta V_0 = -84$ м/с	$\Delta V_0 = -40$ м/с
II	15	1,425	5,73	1,19—1,66	226—272	244—303
	45	1,415	6,33	1,15—1,68	222—274	240—304
	75	1,405	6,67	1,13—1,68	220—274	238—304
III	15	2,43	5,48	2,20—2,66	314—347	> 352
	45	2,42	6,3	2,16—2,68	311—349	> 358
	75	2,41	6,4	2,14—2,68	310—349	> 355
IV	15	3,43	5,1	3,22—3,65	> 376	—
	45	3,42	5,26	3,20—3,64	> 375	—
	75	3,41	5,32	3,19—3,64	> 375	—

В табл. 7.1 обозначено:

T_0 — время кульминации КА над горизонтом;

ΔT — продолжительность интервала видимости;

$T_{\text{вид}}$ — диапазон времени полета в интервале видимости;

r — диапазон расстояний в интервале видимости.

7.1.3. Влияние ошибок выведения и параметров коррекции на параметры траекторий

Определим отклонения траекторий от номинальной траектории в картинной плоскости у Луны. За *картинную плоскость* принимается плоскость, ортогональная вектору скорости «на бесконечности» для селеноцентрической траектории. При расчете отклонений притяжение Луны не учитывается и расчет отклонений производится по линейным формулам (т. е. по производным).

При определении эллипса рассеивания (пятна разбросов) в картинной плоскости, вызванного ошибками выведения на траекторию полета к Луне, положим, что это пятно есть круг некоторого радиуса R . Радиус пятна R определяется эквивалентной ошибкой δV_0 по начальной скорости, которая обычно составляет несколько метров в секунду. Примем, что $\delta V_0 = 5$ м/с. Пятно разброса очень слабо зависит от наклона i_L и быстро увеличивается с уменьшением начальной скорости (с увеличением времени полета к Луне). В таблице на рис. 7.7 прижены радиусы пятен R для различных начальных скоростей $\Delta V_0 = V_0 - V_{\text{п}}$. При переходе от траекторий со временем полета 2,5 сут к траекториям со временем полета 3,5 сут максимальные отклонения в картинной плоскости (ξ, η) увеличиваются почти в 3 раза.

С учетом этих отклонений определим теперь корректирующие импульсы.

Для принятых ошибок выведения разброс времени полета до Луны составляет около 3—4 ч для 3,5-суточной траектории и 1,5—2 ч для 2,5-суточной траектории. Так

как разброс времени полета до Луны существенно меньше интервала видимости при сближении КА с Луной, то коррекцию времени полета до Луны можно не проводить. Поэтому далее рассматривается схема коррекции, при которой время полета не входит в число корректируемых параметров.

7.1.4. Коррекция траекторий полета к Луне

При исследовании параметров коррекции предполагается, что исправление отклоненных траекторий полета к Луне осуществляется *одним* корректирующим импульсом, сообщаемым аппарату в определенной плоскости — плоскости коррекции — путем включения двигателя в некоторой точке траектории — *точке коррекции*. Параметры коррекции определяются так, чтобы после коррекции траектория проходила через центр Луны. Корректируются *две координаты*, характеризующие отклонения в картинной плоскости. Расчет составляющих корректирующего импульса проводится по линейным формулам. Траектории, полученные из номинальной сообщением корректирующего им

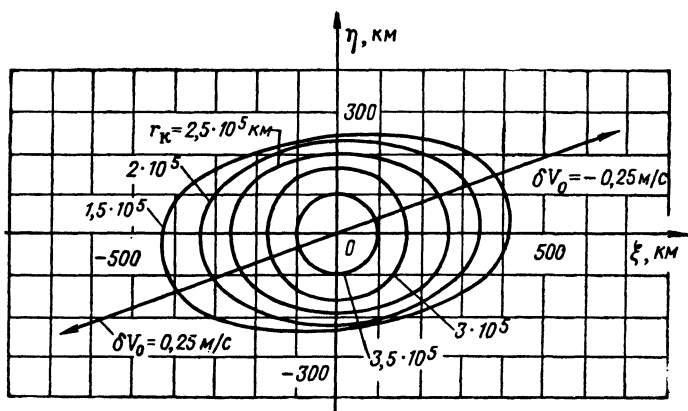


Рис. 7.6. Эллипсы влияния в картинной плоскости у Луны;
 $\Delta V_0 = -90^\circ$ м/с

пульса величиной 1 м/с во всех направлениях в плоскости коррекции, образуют при пересечении с картинной плоскостью так называемый *эллипс влияния*. Пусть a_1 и a_2 — его большая и малая полуоси, соответственно. На рис. 7.6 приведены эллипсы влияния для траектории с $\Delta V_0 = -90^\circ$ м/с, причем плоскость коррекции перпендикулярна направлению на Луну.

Здесь же приведены векторы отклонений, вызываемые ошибкой скорости $\delta V_0 = \pm 0.25$ м/с. На рис. 7.7 приведены зависимости величин большой a_1 и малой a_2 полуосей эллипсов влияния от расстояния r_k точки коррекции до Земли. Из рис. 7.6 видно, что для рассматриваемого диапазона по r_k с приближением точки коррекции к точке встречи с Луной размеры эллипсов влияния монотонно уменьшаются. При этом форма их приближается [7] к круговой радиуса

$$\frac{\varrho}{V_\infty} \approx T - t \text{ [тыс. с]},$$

где ϱ — расстояние до Луны, V_∞ — селеноцентрическая скорость на «бесконечности» t — время коррекции.

За величину *максимального корректирующего импульса* $V_{\text{кор}}$ принимается отношение радиуса R пятна разброса траектории к малой полуоси эллипса влияния a_2 :

$$V_{\text{кор}} = \frac{R}{a_2}.$$

Корректирующий импульс слабо возрастает с увеличением наклона i_d . Наименьшее значение корректирующего импульса достигается на расстояниях 100—200 тыс. км. С увеличением времени полета точка оптимальной коррекции сдвигается в сторону больших расстояний от Земли. Как правило, коррекцию проводят на интервале видимости КА из пункта связи, причем тогда, когда фактическая траектория определена уже в результате обработки измерений, проведенных на предыдущих интервалах видимости, и ошибки коррекции достаточно малы.

Расчеты положения плоскости оптимальной коррекции для фиксированных точек коррекции показывают, что *плоскость оптимальной коррекции близка к плоскости, ортогональной направлению на Луну*. Так, например, угол ε между перпендикуляром к плоскости оптимальной коррекции (*нуль-направлением*) и направлением на Луну для

$r_k = 200$ тыс. км при $\Delta V_0 = -84$ м/с составляет $\varepsilon \approx 20^\circ$. С приближением к Луне, т. е. с увеличением расстояния r_k , этот угол уменьшается. При коррекции в плоскости, ортогональной направлению на Луну, корректирующий импульс $V_{кор}$ не более чем на 6% превосходит импульс оптимальной коррекции и потери топлива на неоптимальность плоскости коррекции невелики. Для посадки лунным утром направление на Солнце в момент коррекции близко к плоскости, ортогональной к направлению на Луну. Ввиду этого можно принять следующую схему выставки двигателя для коррекции:

- ориентация на Солнце одного визира системы ориентации (СО);
- поворот КА вокруг направления на Солнце и ориентация на Луну другого визира СО, направленного перпендикулярно линии тяги;
- поворот КА вокруг направления на Луну.

При этом в плоскости, перпендикулярной направлению на Луну, может быть реализовано любое направление оси корректирующего двигателя, а плоскость Солнца — КА — Луна является опорной плоскостью при выполнении необходимого поворота корректирующего двигателя в плоскости коррекции.

Данная схема коррекции сочетает простоту технической реализации и малость потерь вследствие неоптимальности.

Проведем оценку отклонений траекторий в картинной плоскости у Луны вследствие ошибок исполнения коррекции. Эти ошибки можно разделить на два вида: ошибки по величине импульса коррекции и ошибки в его направлении. Последние соответствуют ориентации в плоскости коррекции и по нормали к плоскости коррекции.

Эти ошибки считаем нормальными случайными величинами с нулевыми значениями математических ожиданий и максимальными (3σ) отклонениями $\delta V_{кор}$, $\delta \alpha$, $\delta \beta$ соответственно. Обычно главной является ошибка по модулю импульса. Так, при коррекции на расстоянии $r_k = 250$ тыс. км при $\Delta V_0 = -85$ м/с и $R = 11$ тыс. км ошибки $\delta V_{кор} = 0,5$ м/с, $\delta \alpha$, $\delta \beta = 10$ угл. мин вызывают следующие составляющие и суммарные отклонения в картинной плоскости:

$$\delta b_V \approx a_1 \delta V_{кор} \approx 110 \text{ км};$$

$$\delta b_\alpha \approx a_1 V_{кор} \delta \alpha = R \frac{a_1}{a_2} \delta \alpha \approx 40 \text{ км};$$

$$\delta b_\beta \approx a_1 V_{кор} \delta \beta \operatorname{tg} \varepsilon \approx \delta b_\alpha \operatorname{tg} \varepsilon \approx 13 \text{ км};$$

$$\delta b_\Sigma = \sqrt{\delta b_V^2 + \delta b_\alpha^2 + \delta b_\beta^2} \approx 118 \text{ км}.$$

Ошибка δb_α слабо зависит от выбора точки коррекции ($a_1/a_2 \approx 1$), ошибка δb_β мала ($\varepsilon \approx 0$). Лишь ошибка δb_V , а вместе с ней и суммарная ошибка исполнения коррекции быстро увеличивается (за счет a_1) при приближении точки коррекции к Земле. Если эту ошибку ограничить предельной величиной $\delta b_{\max}$, то будет ограничено снизу расстояние r_k при коррекции:

$$a_1(r) \leq a_{1\max} = \frac{\delta b_{\max}}{\delta V_{кор}}; \quad r_k \geq r_{k\min}.$$

Пусть

$$\delta b_{\max} = 100 \text{ км}; \quad \delta V_{кор} = 0,5 \text{ м'с}; \quad \text{тогда}$$

$$a_1(r_k) \leq 200 \text{ км} \cdot \text{с/м}.$$

Кроме ошибок исполнения коррекции, на отклонение траектории у Луны влияют ошибки прогноза положения и скорости КА, которые также уменьшаются с приближением точки коррекции к Луне. Если принять ошибки прогноза примерно равными

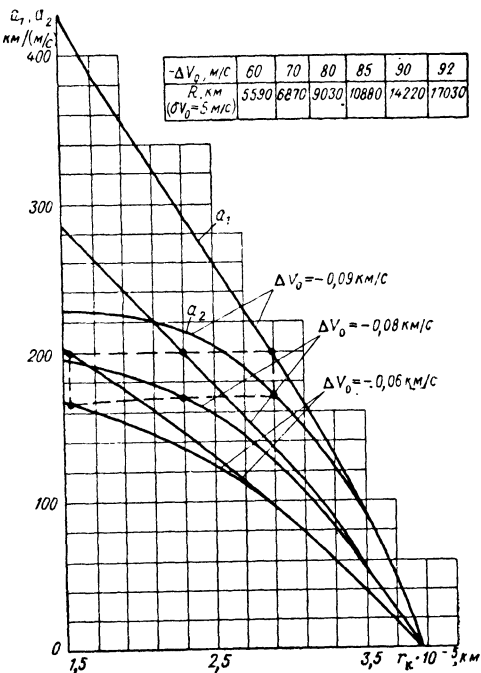


Рис. 7.7. Зависимости величин большой a_1 и малой a_2 полуосей эллипсов влияния от расстояния r_k до Земли

ошибкам коррекции, то в картинной плоскости после коррекции суммарное отклонение траектории от расчетной не превзойдет 150—200 км.

При расчете корректирующего импульса будем исходить из условий [7]

$$a_2 = a_{2\max}; \quad a_1 \leq a_{1\max} = \frac{\delta b_{\max}}{\delta V_{\text{кор}}}.$$

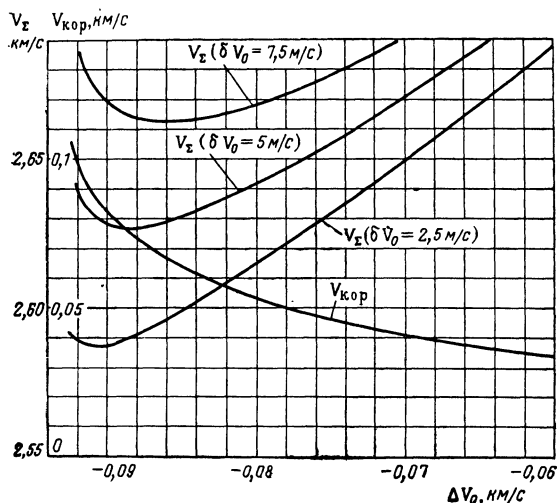


Рис. 7.8. Зависимость корректирующего импульса $V_{\text{кор}}$ и суммарной характеристической скорости V_{Σ} от величины ΔV_0

Это обеспечивает минимизацию величины импульса коррекции при ограничении ошибки исполнения коррекции.

На рис. 7.8 приведена зависимость импульса коррекции $V_{\text{кор}}$ от начальной скорости при $i_L = 65^\circ$, $\delta V_0 = 5$ м/с, $a_{1\max} = 200$ км·с/м.

Для других значений этих параметров характер зависимости $V_{\text{кор}}(\Delta V_0)$ тот же. Импульс коррекции монотонно возрастает при увеличении времени полета T .

7.1.5. Определение оптимальных траекторий для посадки на Луну

Суммарные энергетические затраты на коррекцию и торможение примерно пропорциональны сумме скорости коррекции и конечной скорости у поверхности Луны

$$V_{\Sigma} = V_{\text{кор}} + V_T,$$

если для коррекции и торможения применяется одна и та же двигательная установка. Поэтому для определения оптимальных траекторий полета к Луне (оптимальных значений ΔV_0 или T) минимизируется величина V_{Σ} по ΔV_0 . На рис. 7.8 приведены зависимости $V_{\Sigma}(\Delta V_0)$ при $\delta V_0 = 2,5$ м/с, $\delta V_0 = 5$ м/с, $\delta V_0 = 7,5$ м/с и $i_L = 65^\circ$, $a_{1\max} = 200$ км·с/м.

Зависимость $V_{\Sigma}(\Delta V_0)$ имеет минимум (при достаточно больших разбросах δV_0) в районе «слабых траекторий» с $\Delta V_0 \approx -(80 \div 90)$ м/с и временем полета $T = (3,3 \div 4,3)$ сут. При увеличении радиуса пятна R этот минимум сдвигается в сторону больших начальных скоростей и меньших времен полета. При этих же значениях ΔV_0 достигается максимальный полезный вес КА после прилунения. Оптимум носит довольно плавный характер. Поэтому при окончательном выборе траектории можно учитывать и другие требования к схеме полета. Например, траектории с $T = 3,5$ сут при «северном» варианте полета обеспечивают также удобство наблюдения за прилунением КА с территории Советского Союза, как видно из данных радиовидимости, приведенных в разд. 7.1.2.

7.1.6. Выбор метода ориентации двигателя перед торможением

Рассмотрим особенности ориентации двигателя при торможении у поверхности Луны, связанные с осуществлением мягкой посадки. Схема ориентации должна обеспечивать, с одной стороны, энергетически оптимальный режим торможения, т. е. ось двигателя должна быть близка к направлению вектора скорости при торможении (здесь

рассматривается импульсная постановка). С другой стороны, должны обеспечиваться малые скорости посадки — как вертикальная, так и боковая. Ошибки ориентации аппарата перед торможением в основном влияют на величину боковой скорости (скорости, горизонтальной относительно поверхности Луны). Оценим боковые скорости для не которых схем ориентации. Первая схема предполагает ориентацию оси двигателя для всех траекторий трубки по вектору скорости центральной траектории трубки, определяемой по данным прогноза после коррекции.

Вследствие отклонения действительного вектора скорости V_T от прогнозируемого на угол φ в конце торможения возникает боковая скорость V_6 , равная

$$V_6' \approx V_T \sin \varphi \approx 0,76 \varphi,$$

где φ берется в угловых минутах, а $V_T \approx 2600$ м/с. Изменение V_6' в зависимости от начального отклонения b (прицельной дальности) при этой схеме ориентации приведено на рис. 7.9. Видно, что при отклонениях 100—200 км на картинной плоскости боковые скорости у поверхности Луны достигают 25—50 м/с.

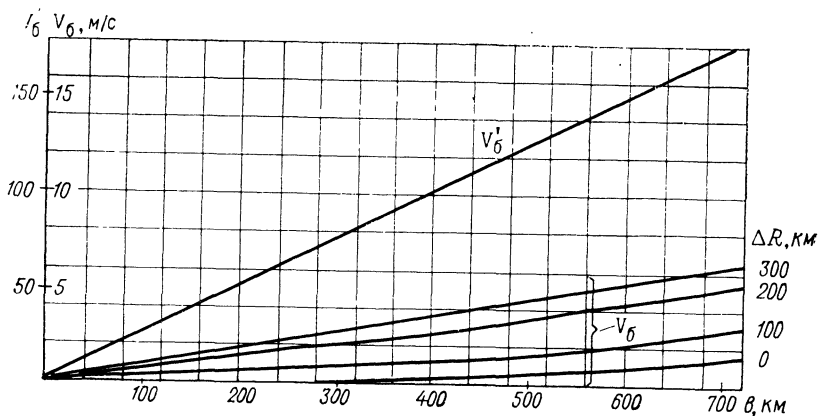


Рис. 7.9. Зависимость боковой скорости V_6 от прицельной дальности b

Вторая схема ориентации предполагает ориентацию оси двигателя по *местной вертикали* к поверхности Луны. В этом случае возможные боковые скорости также велики и составляют 60—120 м/с.

Для уменьшения боковых скоростей у поверхности Луны может быть применен *метод ориентации* [9], основанный на следующем свойстве пучка гиперболических траекторий [1].

Направление скорости в начале торможения (в точке A) для достаточно широкого пучка траекторий весьма точно совпадает с направлением на *центр Луны* на некотором *заранее фиксированном* расстоянии от Луны, равном $Q_B \approx 8200$ км (в точке B определения местной вертикали, рис. 7.10). Величина боковой скорости V_6 , возникающей вследствие начального отклонения b и ошибки ΔR определения расстояния Q_B , приведена на рис. 7.9 (см. также разд. 15.1.3). Видно, что данный метод характеризуется относительно малыми боковыми скоростями для относительно большого диапазона отклонений b и ошибок ΔR . Так, при $b \leq 600$ км и $\Delta R \leq 300$ км боковые скорости $V_6 \leq 5$ м/с, а при $b \leq 200$ км имеем всего $V_6 \leq 2$ м/с.

Для реализации этого метода целесообразно применять следующую схему ориентации:

- автономное определение направления вертикали к поверхности Луны на фиксированном расстоянии Q_B ;
- запоминание этого направления на время T_v полета от этого момента до включения тормозного двигателя ($T_v \approx 1$ ч);
- выставка тяги двигателя к началу торможения по этому направлению.

Кроме методических ошибок способа ориентации, возможны исполнительные ошибки, которые складываются из угловой ошибки Δ_1 определения вертикали, ошибки Δ_2 запоминания вертикали и ошибки Δ_3 выставки оси двигателя по запомненному направлению. Каждая из этих ошибок приводит к ошибке в боковой скорости $V_6 = 0,76 \Delta_i$ ($i=1, 2, 3$; Δ_i берется в угловых минутах). Если, например, за величину каждой ошибки принять 5 угл. мин (что технически легко реализуется), то суммарная боковая скорость за счет инструментальных ошибок не превысит 7 м/с.

Вертикальная составляющая скорости в конце торможения определяется точностью системы управления двигательной установки и точностью прогнозирования скорости КА.

Проведенный анализ траекторий для посадки на Луну показывает, что с учетом коррекции энергетически оптимальными траекториями являются траектории со временем полета до Луны примерно 3,5 сут. Они обеспечивают удобство наблюдения за КА во время прилунения. Для рассмотренных траекторий применима достаточно простая схема коррекции — в плоскости, ортогональной направлению на Луну.

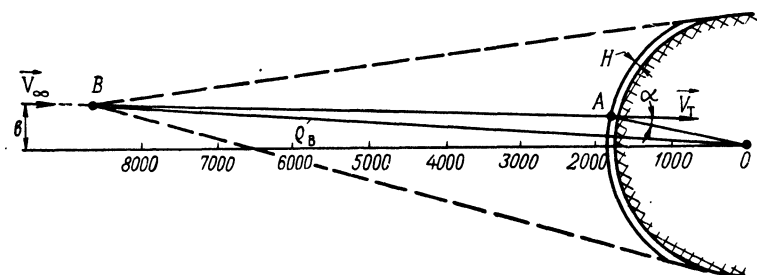


Рис. 7.10. Схема ориентации по вектору скорости

Перед торможением вблизи Луны тягу двигателя целесообразно ориентировать по определяемому автономно направлению на центр Луны на большем, заранее фиксированном расстоянии от Луны. Эта схема ориентации позволяет осуществить посадку с малыми боковыми скоростями для широкой трубки траекторий, возникающей вследствие ошибок выведения, прогноза и коррекции.

7.2. ТРАЕКТОРИИ ВОЗВРАЩЕНИЯ ОТ ЛУНЫ К ЗЕМЛЕ

7.2.1. Общая характеристика траекторий возвращения

Траекториями возвращения называются траектории, которые начинаются в сфере действия Луны (на лунной поверхности или с орбиты ИСЛ), на первом обороте вокруг Луны выходят из этой сферы и затем сближаются с Землей, совершив вокруг нее не более одного оборота.

Приближенный анализ траекторий возвращения можно провести в рамках задачи двух тел: в сфере действия Луны пренебрегаем возмущениями от Земли, а вне сферы действия Луны — возмущениями от Луны (ср. [11, 13, 14]). Тогда траекторию возвращения можно представить двумя дугами конических сечений: *селеноцентрической* — с фокусом в центре Луны и *геоцентрической* — с фокусом в центре Земли. Геоцентрическая начальная скорость на сфере действия Луны (назовем ее *выходной*) равна сумме выходной селеноцентрической скорости и геоцентрической скорости движения Луны.

Орбиту Луны приближенно можно считать круговой, и поэтому скорость Луны $\vec{V}_L$ будет иметь постоянную величину V_L (около 1 км/с).

Пучок траекторий возвращения от Луны к Земле ограничен совокупностью траекторий, проходящих на заданном предельном расстоянии r_γ от центра Земли. Для случая возвращения на поверхность Земли величина r_γ равна радиусу верхней границы земной атмосферы. Для случая возвращения на орбиту спутника Земли она равна апогейному расстоянию этой орбиты. Очевидно, $r_\gamma \ll r_L$, где $r_L = 384400$ км — большая полуось лунной орбиты. Например, в первом случае $r_\gamma/r_L \approx 1/60$. Для граничных траекторий возвращения радиус r_γ является перигейным расстоянием, поэтому из интеграла площадей

$$r_2 V_{2\tau} = r_1 V_\tau,$$

где V_τ — скорость в перигее; r_2 , $V_{2\tau}$ — соответственно геоцентрические радиус и трансверсальная скорость в момент t_2 выхода аппарата из сферы действия Луны.

Из интеграла энергии

$$V_\tau = V_\Pi \sqrt{1 + \beta_2 - v}.$$

Здесь

$$v = \frac{r_\tau}{r_2}; \quad \beta_2 = \left(\frac{V_2}{V_\Pi} \right)^2,$$

где V_Π — параболическая скорость;

$$V_\Pi^2 = \frac{2\mu_\tau}{r_\tau}; \quad \mu_\tau — \text{гравитационный параметр Земли.}$$

Подставив V_γ в интеграл площадей, можно доказать [4], что

$$V_{2\tau} \leq V_\tau^* \quad (7.1)$$

$$\left(\text{где } V_\tau^* \approx \frac{r_\gamma}{r_2} V_\gamma \approx 0,2 \text{ км/с} \right), \quad (7.1')$$

независимо от начальных данных. Для траектории возвращения, проходящей через центр Земли, имеем $V_{2\tau} = 0$. Назовем ее *номинальной*.

Минимальная величина селеноцентрической выходной скорости

$$U_* = V_L - V_\tau^* \approx 0,8 \text{ км/с},$$

причем может быть $U = U_*$ лишь для граничных траекторий рассматриваемого пучка. Величина U_* более чем вдвое превосходит селеноцентрическую параболическую скорость на границе сферы действия Луны, составляющую менее 0,4 км/с, и дуга траек-

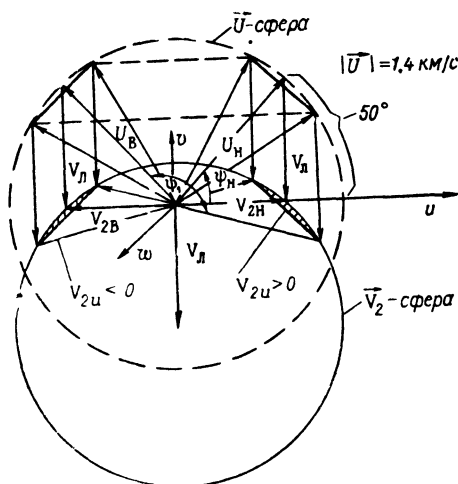


Рис. 7.11. Совокупности скоростей выхода из сферы действия Луны — селеноцентрических $\vec{U}$ и геоцентрических $\vec{V}_2$ при начальных скоростях, не близких к минимальным

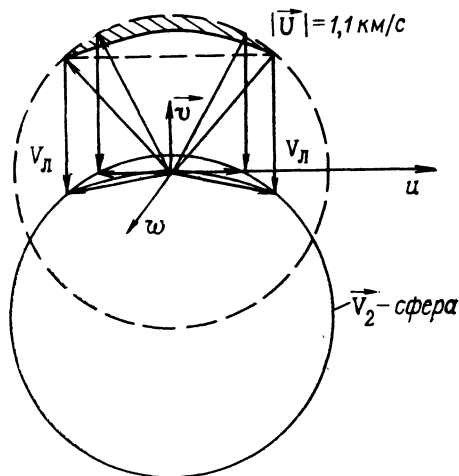


Рис. 7.12. Совокупности скоростных многообразий $\vec{U}$ и $\vec{V}_2$ при начальных скоростях, не намного превышающих минимальную

тории возвращения в сфере действия Луны неизбежно является *гиперболой*. Соответствующая U_* начальная скорость V_{1m} является минимальной, при которой еще возможно приближение к Земле на расстояние r_γ .

Рассмотрим траектории возвращения с *одинаковой энергией селеноцентрического движения*.

Для траекторий возвращения направления выходных селеноцентрических скорости $\vec{U}$ и радиуса $\vec{Q}_*$ весьма близки — угол между ними не превосходит нескольких градусов [4]. Выходные *селеноцентрические скорости* одной величины U и различных направлений в момент t_2 выхода КА из сферы действия в невращающейся системе координат u, v, w (ось u в момент t_2 направлена от Луны к Земле, ось v направлена против скорости Луны $\vec{V}_L$, а ось w дополняет оси u, v до правой тройки осей) совокупностью своих концов образуют *сферу радиуса U* (см. пунктирную окружность на рис. 7.11). Соответствующую совокупность выходных *геоцентрических* скоростей $\vec{V}_2$ получим прибавлением ко всем скоростям $\vec{U}$ одного и того же вектора $\vec{V}_L(t_2)$. Совокупность концов векторов $\vec{V}_2$ также представляет собой сферу радиуса U (сплошная окружность на рис. 7.11).

Области направлений $\vec{V}_2$, удовлетворяющих условию (7.11), вырезаются из этой сферы прямым круговым цилиндром радиуса V_τ^* , ось которого совпадает с осью u . При $U > U_* = V_L + V_\tau^*$, как видно из рис. 7.11, эти области не соединяются и имеют слегка овальную форму. При $U \rightarrow U^* (U > U^*)$ они вытягиваются и сближаются. При $U = U^*$ они касаются в точке $(0, V_\tau^*, 0)$. Если

$$U_* < U < U^*, \quad (7.2)$$

то область (7.1) на сфере является уже односвязной (рис. 7.12). Она весьма вытянута при значениях U , приближающихся к правой границе интервала (7.2), и стягивается в точку с приближением U к левой его границе. При $U < U_*$ траектории возвращения отсутствуют (U_* есть минимальная скорость возвращения).

В случае $U > U_*$ *предельные траектории возвращения* охватывают геоцентрическую сферу $r = r_\gamma$ со всех сторон. При уменьшении U от значения U_* на геоцентрической сфере $r = r_\gamma$ появляется запретная зона (со стороны, почти противоположной направлению скорости Луны), симметричная относительно плоскости лунной орбиты. Она уже не охватывается траекториями возвращения. С убыванием U до U_* эта зона расширяется на всю Землю, точнее, геоцентрическую сферу $r = r_\gamma$.

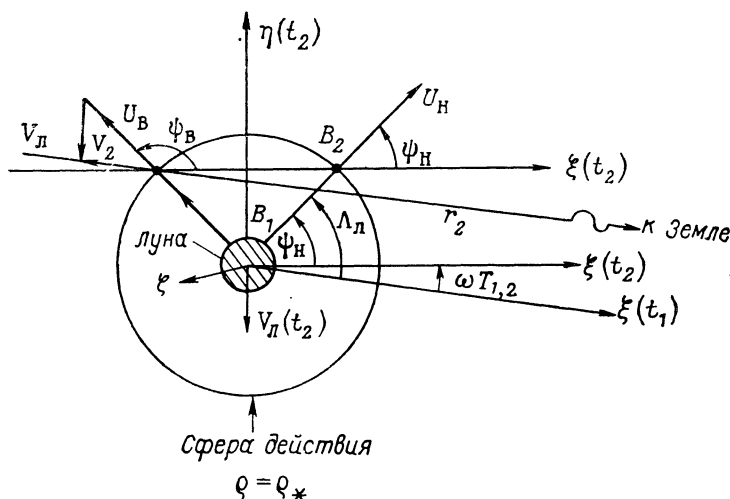


Рис. 7.13. Два основных типа траекторий возвращения — восходящие и нисходящие (по отношению к Земле) после выхода из сферы действия Луны

Точки области (7.1) на V_2 -сфере, для которых составляющая $V_{2u} < 0$, соответствуют удалению КА от Земли (рис. 7.11, 7.13), т. е. при $V_{2u} < 0$ скорость $V_{2r} > 0$; аналогично $V_{2r} < 0$ при $V_{2u} > 0$ [4].

Движения со скоростью $V_{2u} < 0$ называются восходящими, а с $V_{2u} > 0$ — нисходящими (по отношению к Земле). На рис. 7.11, 7.13 они отмечены соответственно индексами «в» и «н».

Если скорость V_2 не превосходит геоцентрической параболической скорости $V_n(r_2)$, то при $V_{2r} > 0$ КА через некоторое время после выхода из сферы действия Луны поворачивает к Земле. В противном случае он удаляется в бесконечность и траектория не является траекторией возвращения. При $V_{2r} < 0$ КА возвращается к Земле независимо от величины V_2 . Имеем

$$1,56 \text{ км/с} = V_n(r_L - \varrho_*) \geq V_n(r_2) \geq V_n(r_L + \varrho_*) = 1,32 \text{ км/с} \quad (7.3)$$

для

$$\varrho_* = 66\,000 \text{ км.}$$

Так как для односвязной области (см. рис. 7.12) скорость $U < U_* = 1,2 \text{ км/с} < V_n(r_L + \varrho_*)$, то все точки этой области действительно соответствуют траекториям возвращения. Однако восходящим траекториям возвращения соответствуют большие времена полета и больший разброс географических координат точки приземления, чем нисходящим.

7.2.2. Номинальные траектории возвращения различных видов

Траектории возвращения с лунной поверхности делятся на два вида: траектории с вертикальным стартом и траектории с *наклонным* стартом (прицельным по углу места и азимуту). Условие, определяющее номинальные траектории в пространстве скоростей, для них является общим.

На сфере выходных геоцентрических скоростей $\vec{V}_2$ (см. рис. 7.11) при заданной величине вектора скорости в конце активного участка V_1 (для которой выходная скорость $U > U_*$) существуют лишь два вектора с $V_{2r} = 0$. Обозначим их $V_{2в}$ и $V_{2н}$ соот-

ветственно для восходящего и нисходящего движения по траекториям попадания в центр Земли. Соответствующие векторы выходной селеноцентрической скорости обозначим символами U_v и U_n . Углы Ψ проекций этих векторов (см. рис. 7.13) на плоскость $\xi\eta$ орбиты Луны с направлением $\xi(t_2)$ от Луны к Земле обозначим соответственно Ψ_v и Ψ_n . При попадании в центр Земли векторы $\vec{V}_2$ и $\vec{U}$ лежат в плоскости лунной орбиты; при попадании в точку земной поверхности, расположенную над плоскостью $\xi\eta$, векторы $\vec{V}_2$ и $\vec{U}$ тоже возвышаются над этой плоскостью (ось η обратна скорости Луны, см. рис. 7.13).

Угол возвышения вектора $\vec{U}$ над плоскостью лунной орбиты при вертикальном старте является селеноцентрической широтой Фл точки старта. Селеноцентрическая долгота Λ_l точки старта (отсчитываемая от меридиана направления Луна — Земля) превосходит Ψ (см. рис. 7.13) на угол $\omega T_{1,2}$, где ω — угловая скорость движения Луны, а $T_{1,2}$ — время полета от поверхности Луны до ее сферы действия (активным участком пренебрегаем).

В качестве *номинальной траектории* в дальнейшем примем *нисходящую траекторию*. Она интересна тем, что для нее точка старта видима с Земли, а времена полета и влияние ошибок в начальных данных меньше, чем для восходящей траектории. Точка старта для нисходящей траектории должна быть тем ближе к центру видимого диска Луны, чем больше начальная скорость V_1 . При бесконечно больших начальных скоростях она совпадает с точкой Фл=0, $\Lambda_l=0$, а с уменьшением скорости до величины V_{1m} такой, что соответствующая селеноцентрическая скорость на сфере действия $U=V_l$, точка старта находится на краю видимого диска Луны (для попадания в центр Земли $\Lambda_l=90^\circ$). При выходных скоростях U порядка 1 км/с получаются углы $\Lambda_l=55^\circ\div 65^\circ$. Это следует из свойства обратимости движения [12] по симметричным относительно плоскости $\xi\xi$ траекториям (ось ξ направлена в северное полушарие ортогонально плоскости лунной орбиты), если учесть, что для точки прилунения КА при селеноцентрической скорости входа в сферу действия Луны 1 км/с долготы будут равны $-55^\circ\div -65^\circ$. Заметим, что точки вертикального старта для восходящих движений примерно симметричны номинальным (нисходящее движение) относительно плоскости $\eta\xi$.

Возвращение к Земле из заданной точки лунной поверхности. Ограничимся только *нисходящими движениями*. Заметим, что если заданная точка не совпадает с точкой вертикального старта, то минимальная начальная скорость превышает V_{1m} . Так, например, при старте со скоростью V_{1m} угловая дальность полета из района прилунения станции «Луна-9» ($\Phi_l \leq 10^\circ$, $\Lambda_l \approx -60^\circ$) в сфере действия φ_p не превосходит $\approx 135^\circ$, в то время как для попадания в центр Земли необходима угловая дальность

$$\varphi_n = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ > \varphi_p.$$

Для начальной скорости, отвечающей величине $U=1,4$ км/с, при горизонтальном старте получим $\varphi_p=120^\circ$, а из рис. 7.11 находим $\varphi_n=50^\circ+60^\circ=110^\circ$. Видим, что теперь $\varphi_n < \varphi_p$. Следовательно, существует такая начальная скорость, при которой для горизонтального старта $\varphi_p=\varphi_n$. Соответствующая выходная скорость $U < 1,4$ км/с, но $U > V_l$. Оказывается, эта скорость для $\Lambda_l=60^\circ$, $\Phi_l < 10^\circ$ составляет около 1,2 км/с и соответствует начальной скорости $V_1=2,65$ км/с. Для нее $\varphi_n=\varphi_p \approx 125^\circ$.

При меньших начальных скоростях решения нет, а при больших решение существует лишь для некоторого наклонного старта с $0 < \theta_1 < 90^\circ$. Чем больше начальный угол возвышения, тем большая начальная скорость необходима при фиксированной точке старта. Таким образом, горизонтальный старт является энергетически наиболее выгодным.

С приближением точки старта к точке с координатами $\Phi_l \approx 0^\circ$, $\Lambda_l = 90^\circ$ при вертикальном старте минимальная необходимая начальная скорость монотонно уменьшается до величины V_{1m} .

Возвращение к Земле с орбиты ИСЛ. Пусть проходящая через центр Луны номинальная селеноцентрическая траектория Земля — Луна со временем полета около 3,5 сут является осью пучка селеноцентрических траекторий, которые можно использовать для создания ИСЛ. Эта ось в точке встречи КА с Луной составляет с направлением Луна — Земля угол около 60° . Энергетически *наивыгоднейшим* является *переход на орбиту спутника с линии апсид селеноцентрической гиперболы*, лежащей в плоскости орбиты ИСЛ. Ниже рассмотрим лишь переходы, близкие к наивыгоднейшим.

Для фотографического ИСЛ может быть целесообразно наклонение орбиты спутника к плоскости орбиты Луны $\sim 90^\circ$. В момент t_u вывода ИСЛ на селеноцентрическую орбиту плоскость P этой орбиты будет составлять с направлением $\xi(t_u)$ Луна — Земля угол около 60° (рис. 7.14). Соответствующая долгота восходящего узла орбиты спутника для гиперболы, проходящей севернее Луны, составит около 300° , а для гиперболы, проходящей южнее Луны, указанная долгота составит около 120° . Так как угол между асимптотами гиперболы, с которой осуществляется переход на орбиту спутника,

* Используемые здесь числовые данные можно получить с помощью графика (рис. 1.4), приведенного в работе [3].

составляет около 90° , то для близкого к Луне фотографического ИСЛ точка перехода на орбиту ИСЛ не будет видна с Земли.

Для выхода из сферы действия Луны со скоростью $U=1,2$ км/с по траектории возвращения необходимо (см. рис. 7.14), чтобы асимптота этой траектории в момент

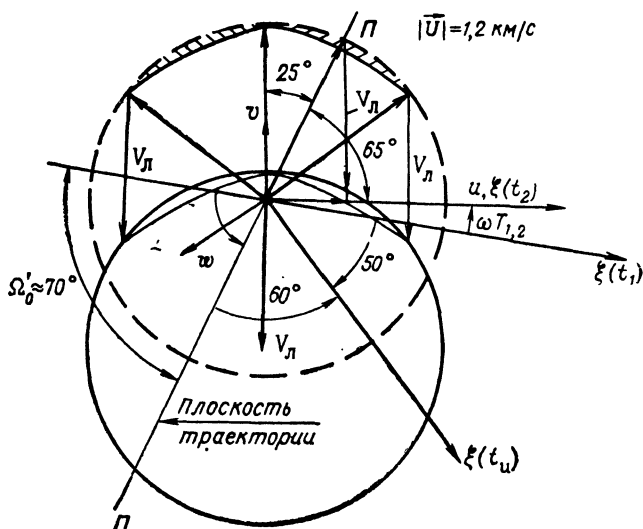


Рис. 7.14. Расположение селеноцентрической плоскости Π траектории возвращения относительно направлений $\xi(t)$ Луна—Земля в моменты t_u создания ИСЛ, t_1 схода с его орбиты и t_2 выхода из сферы действия Луны

выхода составляла, как и ось пучка возможных траекторий, угол около 60° с направлением Луна — Земля. Для выхода с энергетическими затратами, близкими к минимальным, асимптота должна составлять малый угол с плоскостью орбиты ИСЛ. Это происходит лишь два раза в месяц.

Если учесть поворот направления Луна—Земля за время полета от орбиты ИСЛ до границы сферы действия (около полусуток) и если пренебречь прецессией орбиты ИСЛ под действием возмущающих сил, то направления Луна—Земля в момент t_u перехода на орбиту ИСЛ и в момент t_1 схода с этой же орбиты будут различаться примерно на 60° . Соответствующее минимальное время ожидания на орбите составляет около 4 сут.

При энергетических затратах, близких к минимальным, возвращаться к Земле с орбиты ИСЛ можно лишь через интервалы времени, кратные полумесяцу. При этом для траектории возвращения — гиперболы, проходящей севернее или южнее Луны, полу-

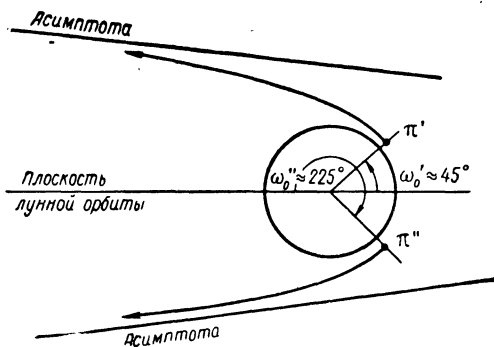


Рис. 7.15. Расположение селеноцентрических траекторий возвращения относительно плоскости лунной орбиты

чим соответственно долготу восходящего узла $\Omega'_0 = 70^\circ$ (см. рис. 7.14) или $\Omega'_0 = 250^\circ$. Здесь угол Ω_0 отсчитывается от направления $-\xi(t_1)$.

Соответственно получим долготу линии апсид траектории возвращения $\omega'_0 = 45^\circ$ или $\omega'_0 = 225^\circ$, если учесть, что ведущая к Земле ветвь гиперболы почти параллельна плоскости лунной орбиты и составляет с другой ветвью угол около 90° . Здесь ω_0 отсчитывается от плоскости орбиты Луны (рис. 7.15). Эксцентриситет орбиты фотографического ИСЛ для простоты примем равным нулю. Тогда момент прохождения ИСЛ через апсиду гиперболы возвращения является и начальным моментом движения.

7.2.3. Оценка необходимой точности начальных данных

Перейдем к оценке точности начальных данных, необходимой для возвращения на Землю в *целом*. Очевидно, для возвращения на Землю по неноминальной траектории трансверсальная компонента выходной геоцентрической скорости должна удовлетворять условию (7.1), которое выделяет допустимые области на V_2 -сфере, и следовательно, на U -сфере (см. рис. 7.11). Размеры последних областей позволяют судить о необходимых точностях начальных данных, так как фактический вектор $\vec{U}$, отклоняясь от номинального по направлению, не должен выйти из допустимой области.

Случай *вертикального старта* заметно отличается по влиянию разброса начальных данных от случая горизонтального старта. Рассмотрим эти крайние случаи, можно получить представление о промежуточных случаях. Имеем для угловой дальности φ полета формулу (ср. [8]):

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \cos \theta_1 / \left(\frac{U}{V_1} + \sin \theta_1 \right), \quad (7.4)$$

если приближенно считать U скоростью на бесконечности.

Вследствие ошибки в направлении вектора скорости для вертикального старта при полете от поверхности до сферы действия появится угол $\varphi \neq 0$.

При помощи формулы (7.4) для вертикального старта можно получить

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} = -2 \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\beta_1}}}; \quad \beta_1 = \left[\frac{V_1}{V_n(\xi_1)} \right]^2. \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \varphi}{\partial V_1} = 0. \quad (7.4')$$

При скорости $U \approx 1$ км/с получим $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} \approx -1,3$ (учтя, что $V_n(\xi_1)$ есть селеноцентрическая параболическая скорость на поверхности Луны $q = q_1$).

Область (7.1) на U -сфере имеет близкие к относительно наибольшим размеры при значениях U , мало отличающихся от V_L . При этом рассматриваемая область оказывается *односвязной*. Угловые размеры ее по длине составляют несколько десятков градусов, по ширине — около 20° .

Так как $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} \right| \approx 1,3$, то предельными будут ошибки по углу θ_1 порядка $\pm 10^\circ$ в направлении ширины области (7.1), т. е. по нормали к плоскости орбиты Луны. Для номинального значения $U = V_L$ ошибки по скорости U (при отсутствии ошибки по θ_1) не должны превышать $\pm 0,2$ км/с, чтобы область (7.1) еще содержала рассматриваемую траекторию. При $\delta U < -0,2$ км/с область (7.1) — пустая, при $\delta U > -0,2$ км/с область (7.1) — двусвязна и фактический вектор $\vec{U}$ будет находиться между частями области (7.1) вне ее. Соответствующие предельные ошибки δV_1 начальной скорости V_1 согласно интегралу энергии удовлетворяют условию

$$V_1 \delta V_1 = U \delta U,$$

т. е. составляют около 0,06 км/с. Очевидно, наиболее вредны здесь смешанные ошибки, так что реальные ошибки не должны превышать величин порядка 2° — 3° по θ_1 и 15—20 м/с — по V_1 , если не предусматривается коррекция траектории.

В случае *наклонного старта* получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_1} &\approx - \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2} 2\mu}{\xi_1 \cos \theta_1 \cdot \xi_1 V_1^2}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial V_1} \approx \frac{-2 \cos \theta_1}{(U + V_1 \sin \theta_1)^2} \cos^2 \frac{\varphi}{2} \frac{2\mu}{\xi_1 U}; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_1} &= \frac{2V_1(V_1 + U \sin \theta_1) \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{(U + V_1 \sin \theta_1)^2}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Для *горизонтального старта* ($\theta_1 = 0$) с поверхности Луны для $U = 1,2$ км/с

$$\delta_{\xi_1} \approx -1,5 \frac{\delta \xi_1}{\xi_1}; \quad \delta_{V_1} \varphi \approx -3 \frac{\delta V_1}{V_1}; \quad \delta_{\theta_1} \varphi \approx -1,7 \delta \theta_1. \quad (7.6)$$

Видим, что модуль производной по θ_1 больше, чем для вертикального варианта.

При горизонтальном старте из района вертикальной посадки станции «Луна-9» имеем $U = 1,2$ км/с (см. раздел 7.2.2), $V_1 = 2,65$ км/с. Предельные ошибки определяются той частью области (7.1), для которой $V_2 < 0$. Ее размеры: 50° по длине и 20° по ширине (см. рис. 7.14). Предельные (одиночные) ошибки по углу θ_1 составляют около $\pm 10^\circ$, по скорости V_1 — около ± 50 м/с [с учетом формул (7.6)]. Ошибки по азимуту должны быть того же порядка, что и по углу θ_1 .

При старте с орбиты спутника предельно допустимые ошибки будут несколько больше, так как можно увеличить угловые размеры допустимой области на U -сфере за счет перехода к меньшей номинальной скорости $U \approx 1,1$ км/с. Это выгоднее и энергетически.

7.2.4. Методика расчета номинальных и отклоненных траекторий возвращения с лунной поверхности

При определении влияния разброса начальных данных на различные траектории возвращения нет нужды учитывать все действующие силы, а достаточно учесть только притяжение Луны внутри ее сферы действия и только притяжение Земли — вне этой сферы. Внутри сферы действия Луны движение рассчитывается в селеноцентрической системе координат, а вне этой сферы — в геоцентрической системе координат. Обозначим их xyz и XYZ соответственно.

Траектория определяется какими-либо шестью селеноцентрическими исходными данными $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_6$ и моментом t_1 начала движения. На границе сферы действия Луны определяются координаты, скорости и элементы геоцентрического движения, а также два вектора $\vec{C}_1$ и $\vec{C}_2$, на которые разлагается геоцентрический кинетический момент: $\vec{C} = \vec{C}_1 + \vec{C}_2$. При этом по определению компонента $\vec{C}_1$ ортогональна геоцентрическому радиусу $\vec{r}_2$ точки выхода из сферы действия и некоторому постоянному направлению, например оси Z , а компонента $\vec{C}_2$ ортогональна радиусу $\vec{r}_2$ и компоненте $\vec{C}_1$. Тогда плоскость, проходящая через направления $\vec{C}_1$ и $\vec{C}_2$, постоянно содержит вектор $\vec{C}$ геоцентрического кинетического момента.

Для определения номинальных траекторий возвращения решается двухпараметрическая краевая задача, например методом Ньютона с использованием конечно-разностных производных. Варьируются ξ_1 и ξ_2 — два из шести исходных параметров, определяющих начальные данные, причем так, чтобы компоненты C_1 и C_2 вектора $\vec{C}$ на плоскости, ортогональной вектору $\vec{r}_2$, принимали заданные значения. Например, для попадания в центр Земли следует положить $C_1 = C_2 = 0$. Начальное приближение задается с помощью приближенной методики 7.2.2. Тогда краевая задача, как показывают расчеты, сходится за несколько итераций: величина $|\vec{C}|$ уменьшается на четыре порядка — от значения порядка 10^5 км²/с до 10 км²/с.

При старте с поверхности Луны за исходные параметры, определяющие начальные данные, примем сферические селеноцентрические геоэкваториальные координаты q_1, λ_1, Φ_1 — радиус, долготу и широту точки старта, а также V_1, θ_1, A_1 — модуль, угол возвышения над местным горизонтом и азимут вектора скорости в той же селеноцентрической невращающейся системе координат. Длина активного участка не учитывается.

Для определения влияния разброса начальных данных на траектории возвращения находятся отклоненные траектории, т. е. траектории, отличающиеся от номинальной отклонением одного из исходных данных в ту или иную сторону на все более возрастающую величину. Сказанное относится к исходным данным $t_1, V_1, \theta_1, A_1, q_1$. Изменение же положения точки старта на лунной поверхности будем задавать селеноцентрическим углом Φ_1 смещения начальной точки из номинальной и азимутом α_1 этого смещения.

7.2.5. Выбор параметров и примеры расчета траекторий возвращения с лунной поверхности

Основным параметром, определяющим энергетические затраты, время полета и жесткость траекторий, которая характеризует влияние ошибок начальных данных, является начальная скорость полета V_1 . Ниже для расчета примеров взяты значения V_1 , равные $2,6$ км/с, $2,65$ км/с и $2,7$ км/с.

Радиус лунной поверхности принимается равным $1738,0$ км.

Параметры θ_1, A_1 , определяющие направление вектора скорости, являются теми исходными данными, значения которых подбираются при решении краевой задачи (например, задачи попадания в центр Земли).

Параметры Φ_1, λ_1 задавались или в окрестности точки вертикальной посадки (варианты 1—3 табл. 7.2), или в окрестности точки вертикального старта (варианты 4—6 табл. 7.2).

Находились сферические селеноцентрические координаты — широта Φ_L и долгота Δ_L начальной точки во вращающейся системе координат ξ, η, ζ (рис. 7.16).

В невращающейся системе координат $\xi^* \eta^* \zeta^*$, оси которой имеют направления осей $\xi \eta \zeta$ в момент $t = t^*$ достижения границы сферы действия Луны, находились сферические долгота и широта ψ и χ вектора U селеноцентрической скорости на границе сферы действия, угловая дальность $\Phi_{1,2}$ и азимут $A_1 \equiv A_{1,2}$ селеноцентрической траектории полета внутри сферы действия, отсчитываемый от плоскости $OB_1(-\zeta^*)$ против часовой стрелки (см. рис. 7.16).

Таблица 7.2

Характеристики траекторий возвращения к Земле с поверхности Луны

Вариант	Фл град	Δl град	V_1 км/с	θ_1 град	$\Phi_{1,2}$	$A_{1,2}$	U км/с	ψ град	T^* ч	T_γ сут. ч	δV_1 м/с	$\delta \theta_1$ град	δA_1 град	$\frac{\partial r_\pi}{\partial V_1}$ км/(м/с)	$\frac{\partial r_\pi}{\partial \theta_1}$ км/град	$\frac{\partial r_\pi}{\partial A_1}$ км/град
1	7,1	-66,5	2,70	12,28	106°30'	92°22'	1,286	43,1	12,6	24 20h,7	275 -150	7,2 -9,2	8,5 -8,4	34,4 -12,7	1974 -1172	1570 -1540
2	7,1	-67,0	2,65	9,81	112°43'	93°24'	1,177	49,2	13,6	34 04h,0	195 -115	9,0 -10,0	9,8 -9,6	51,7 -126	1688 -600	1254 -1319
3	7,1	-67,6	2,60	5,14	123°14'	95°16'	1,060	59,5	14,7	34 17h,0	125 -85	11,0 -5,0	12,0 -12,0	84,5 -119	1508 -915	1034 -1125
4	-6,1	54,2	2,60	55,68	47°16'	95°13'	1,060	103,1	14,4	74 20h,3	75 -65	~50 -12,0	12,5 -12,5	146 -222	~1000 -1524	995 -1083
5	-6,1	54,2	2,60	84,46	7°30'	140°23'	1,060	59,2	14,3	34 17h,2	85 -70	~9 -8,5	~100 -75	141 -171	~3000 -3005	~150 163
6	-0,3	58,1	2,60	≈90	0°10'	168°50'	1,060	58,1	14,2	34 16h,5	—	—	—	—	—	—

Таблица 7.3

Характеристики траекторий возвращения к Земле с орбит искусственного спутника Луны

Вариант	i_0 град	f_0 км	p_1 км	e_1	T^* ч	δV_1 м/с	$\delta \theta_1$ град	δA_1 град	δt_1 с	δp_1 км	δS_1 км	$\frac{\partial r_\pi}{\partial V_1}$ км/(м/с)	$\frac{\partial r_\pi}{\partial \theta_1}$ км/град	$\frac{\partial r_\pi}{\partial A_1}$ км/град	$\frac{\partial r_\pi}{\partial t_1}$ км/с	$\frac{\partial r_\pi}{\partial S_1}$ км/км	$\frac{\partial r_\pi}{\partial \delta S_1}$ км/км
1	170	1836	4772	1,599	12,89	78 -73	9,2 -6,8	±10,5	225 -295	140 -115	400 -410	140,4 -167,2	1120 -2025	1271 -1270	63,3 -35,3	80,4 -129,1	35,6 -32,5
2	10	1836	4768	1,597	12,91	325 -155	7,2 -9,6	±10,5	300 -230	~1000 -250	±410	~20 -93	1870 -1115	1263 -1200	34,15 -65	— -93,2	29,5 -25,9
3	90	1836	4772	1,599	12,89	105 -95	±50	13,5 -19,1	±165	185 -145	460 ~1000	~100 -133,2	2420 -2470	894 -505	±70,7	60,5 -100	36 ~12
4	80	1800	4664	1,580	12,95	110 -95	±5,2	17 -13	±160	190 -140	~1000 ~500	103 -127,4	2360 -2300	~500 -970	72,5 -74,1	55,6 -88,5	16,3 -34,8

В этой же системе находились селеноцентрические сферические координаты точек B_2 и B_3 пересечения траектории со сферой действия Луны и сферой $r=r_\gamma$ у Земли соответственно. В табл. 7.2 приведены некоторые характеристики указанных выше 6 вариантов расчета номинальных траекторий возвращения с поверхности Луны к центру Земли. В той же таблице для вариантов 1—5 приведены такие отклонения параметров V_1 , θ_1 , A_1 от номинальных значений в положительную и отрицательную сторону, которые вызывают отклонение траектории возвращения от центра Земли примерно на величину земного радиуса.

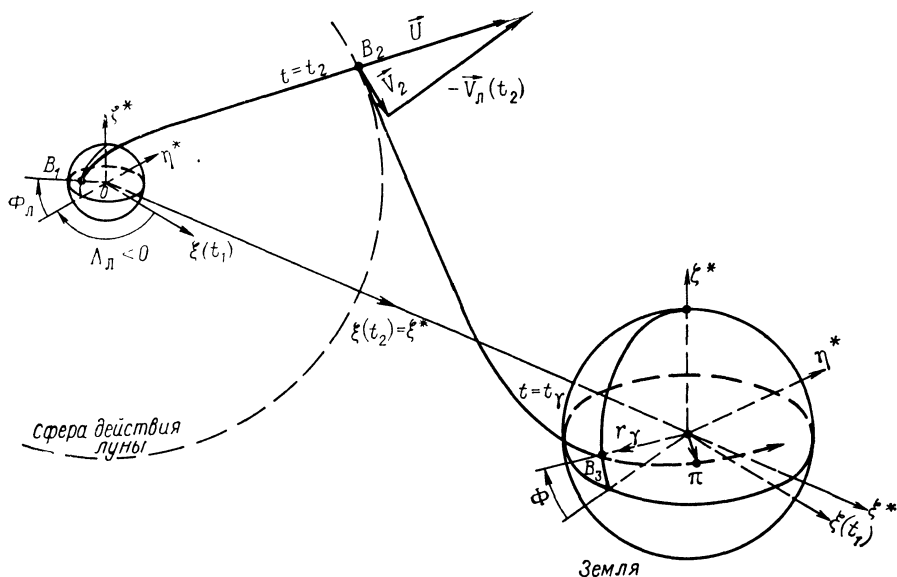


Рис. 7.16. Схема расчета траектории возвращения к Земле из сферы действия Луны

Как и следовало ожидать, с уменьшением начальной скорости V_1 угол θ_1 вектора скорости с местным горизонтом монотонно уменьшается от $12^\circ,3$ при $V_1=2,7$ км/с до $5^\circ,1$ при $V_1=2,6$ км/с. При $V_1=2,55$ км/с краевая задача уже не сходится [вследствие нарушения условия (7.1) решение задачи отсутствует]. Таким образом, минимальная скорость, необходимая для возвращения к Земле из окрестности точки вертикальной посадки «Луна-9», близка к 2,6 км/с.

Полное время полета T_γ почти не зависит от координат точки старта и угла θ_1 . Время полета T_* в сфере действия монотонно увеличивается с уменьшением начальной скорости (см. табл. 7.2). Соответственно убывает величина U селеноцентрической скорости выхода из сферы действия.

Углы χ получились малые (менее $0,9^\circ$) вследствие того, что $V_\zeta \ll V_L$. Углы ψ , в основном определяющие направление скорости выхода U , получились меньше, чем по приближенной теории раздела 7.2.2, причем отличие тем больше, чем больше сам угол ψ (см. рис. 7.1). Объясняется это тем, что сфера действия имеет размер не малый, а сравнимый с расстоянием Земля — Луна. Точки B_2 выхода имеют тем большую величину η_2 , чем меньше скорость U (величина ξ_2 и угол χ малы). Соответственно тем больше должен быть повернут к оси ξ вектор U , чтобы результат его сложения со скоростью Луны — выходная геоцентрическая скорость — был направлен к центру Земли (а не параллельно оси ξ , как предполагалось в приближенной теории).

Отличие вариантов 4 и 5, имеющих одну и ту же точку старта и величину начальной скорости, объясняется тем, что после выхода из сферы действия КА в варианте 5 сразу приближается к Земле по нисходящей траектории, а в варианте 4 сначала удаляется от Земли по восходящей ветви траектории и лишь затем приближается к Земле по нисходящей ветви той же траектории. Таким образом, имеем здесь решения обоих различных типов, предсказанных приближенной теорией.

С уменьшением начальной скорости влияние разброса по скорости возрастает (см. варианты 1—3 табл. 7.2), а влияние разброса по направлению вектора скорости убывает, хотя и в меньшей степени. Положительные ошибки в скорости сказываются меньше, чем отрицательные, так как номинальная величина скорости близка к минимально допустимой.

Для варианта 4 оказываются допустимыми весьма большие положительные ошибки $\delta\theta_1$ (порядка 50°). Дело в том, что этот вариант соответствует решению второго

типа (КА сначала удаляется и от Луны и от Земли), а для величины $U < 1,2$ км/с, как видно из рис. 7.12, 7.13, решения второго типа, исходящие из выбранной точки B_1 , с ростом θ_1 непрерывно переходят в решения первого типа.

Для варианта 5 большой диапазон по азимуту имеет место потому, что угол возвышения близок к 90° . С учетом этого обстоятельства диапазон допустимых отклонений в боковом направлении, исчисляемый по дуге большого круга, будет составлять около 16° (от -9° , до $+7^\circ$).

Кроме влияния разброса величины и направления начальной скорости на траектории возвращения, рассматривается еще влияние *изменения положения начальной точки*. Варьируется величина начального селеноцентрического радиуса-вектора $\vec{q}_1$, а также при постоянном модуле q_1 даются отклонения направлению $\vec{q}_1$ на различные углы $\delta\Phi_1$

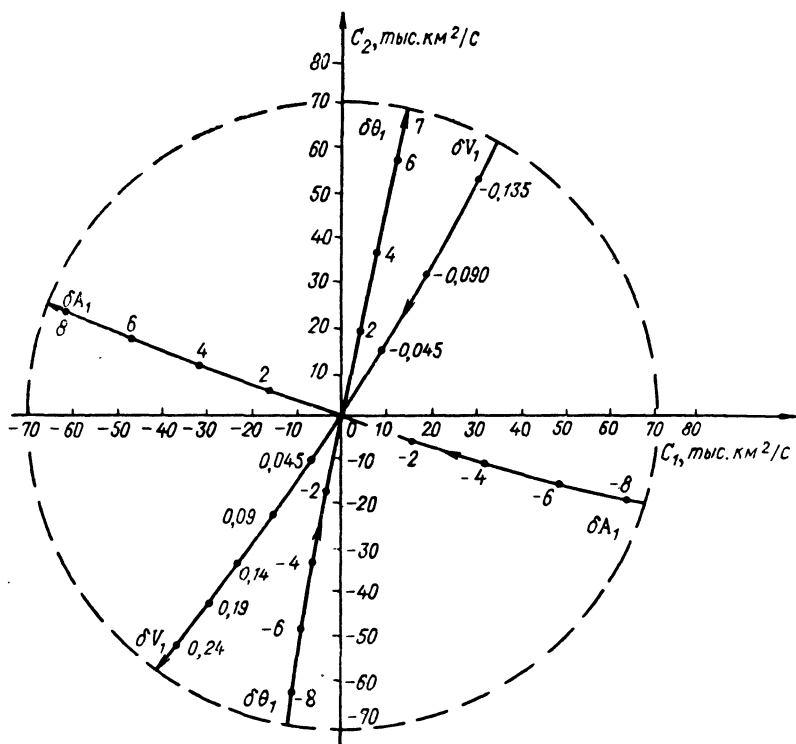


Рис. 7.17. Влияние отклонений величины V_1 , угла возвышения θ_1 и азимута A_1 вектора начальной селеноцентрической скорости на компоненты C_1 , C_2 геоцентрического кинетического момента траектории возвращения (вар. 1, табл. 7.2)

в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, определяемых азимутами $\alpha_1 = 0^\circ$; 90° ; 180° ; 270° .

Результаты расчета отклоненных траекторий в различных видах представлены на рис. 7.17—7.23. На рис. 7.17, 7.18, 7.19 представлены соответственно для вариантов 1, 3, 5 на плоскости компонентов C_1 , C_2 геоцентрического кинетического момента точки, получающиеся при отклонении одного из начальных данных от номинального значения, отвечающего $C_1 = C_2 = 0$. Такие точки располагаются по двум лучам, отвечающим соответственно положительному и отрицательному отклонениям. Таким образом, влияние изменений трех параметров — величины V_1 , угла возвышения θ_1 и азимута A_1 вектора скорости — изображается шестью лучами. Аналогично шестью лучами на рис. 7.20 представлено влияние изменения параметров q_1 , Φ_1 , α_1 . Здесь и далее отклонения $\delta\theta_1$, δA_1 , $\delta\Phi_1$, $\delta\alpha_1$ даны в градусах, δV_1 — в км/с, δq_1 — в км. Точки пунктирного круга

$\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = C \approx 70\,000$ на этих рисунках примерно соответствуют траекториям, касающимся поверхности Земли. Постоянство величины C для таких траекторий объясняется тем, что для рассматриваемых траекторий скорость у поверхности Земли близка к параболической $V_p(r_1) = 11$ км/с и соответственно величина C близка к $r_1 V_p = 70\,000$ км²/с.

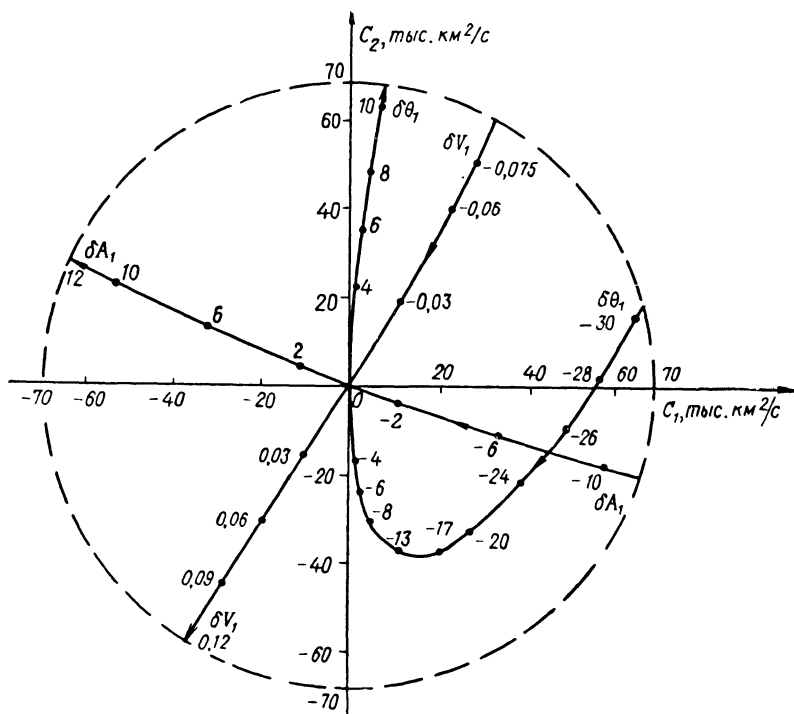


Рис. 7.18. Влияние отклонений величины V_1 , угла возвышения θ_1 и азимута A_1 вектора начальной селеноцентрической скорости на компоненты C_1 , C_2 геоцентрического кинетического момента траектории возвращения (вар. 3, табл. 7.2)

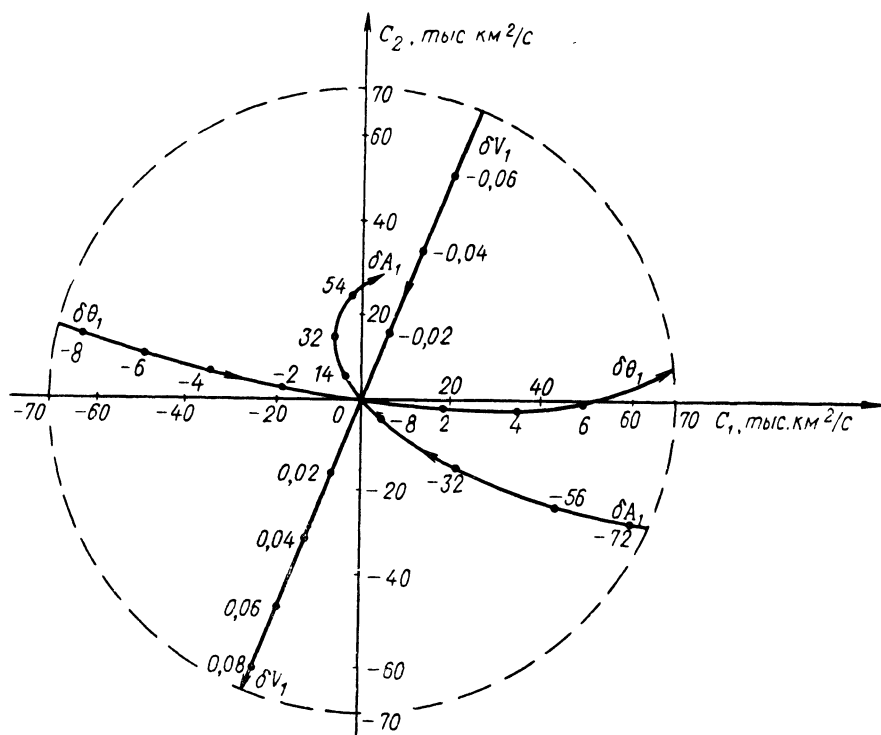


Рис. 7.19. Влияние отклонений величины V_1 , угла возвышения θ_1 и азимута A_1 вектора начальной селеноцентрической скорости на компоненты C_1 , C_2 геоцентрического кинетического момента траектории возвращения (вар. 5, табл. 7.2)

Перигейные расстояния r_π траекторий монотонно увеличиваются до величины r_γ при движении соответствующих им на плоскости C_1C_2 точек по лучам от начала к концу луча. Производные перигейных расстояний по исходным данным в точках концов лучей (т. е. при $r_\pi = r_\gamma$) могут характеризовать влияние разброса начальных данных для траекторий пологого возвращения в земную атмосферу. Такие производные (по параметрам V_1, θ_1, A_1) приведены в трех последних колонках табл. 7.2. Они даны с большим числом знаков, так как коридор входа в атмосферу узок [6, 10].

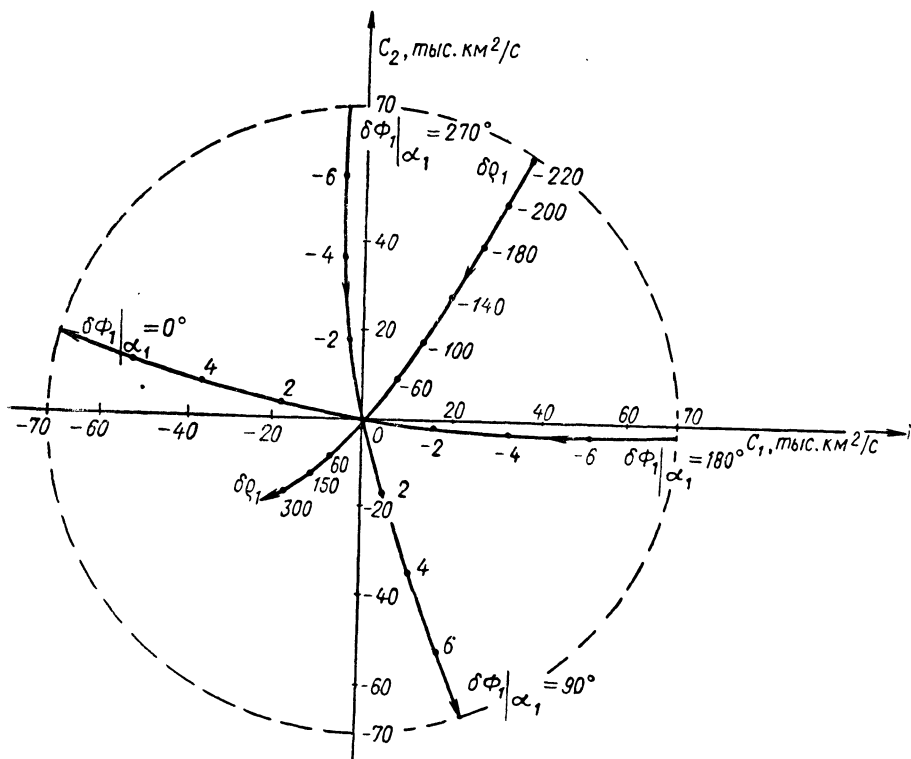
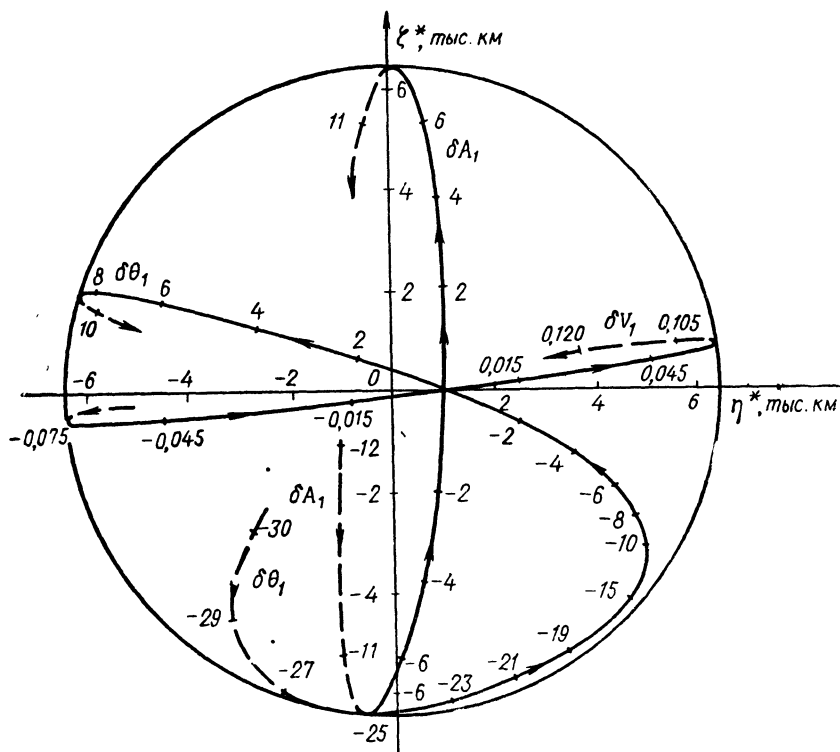
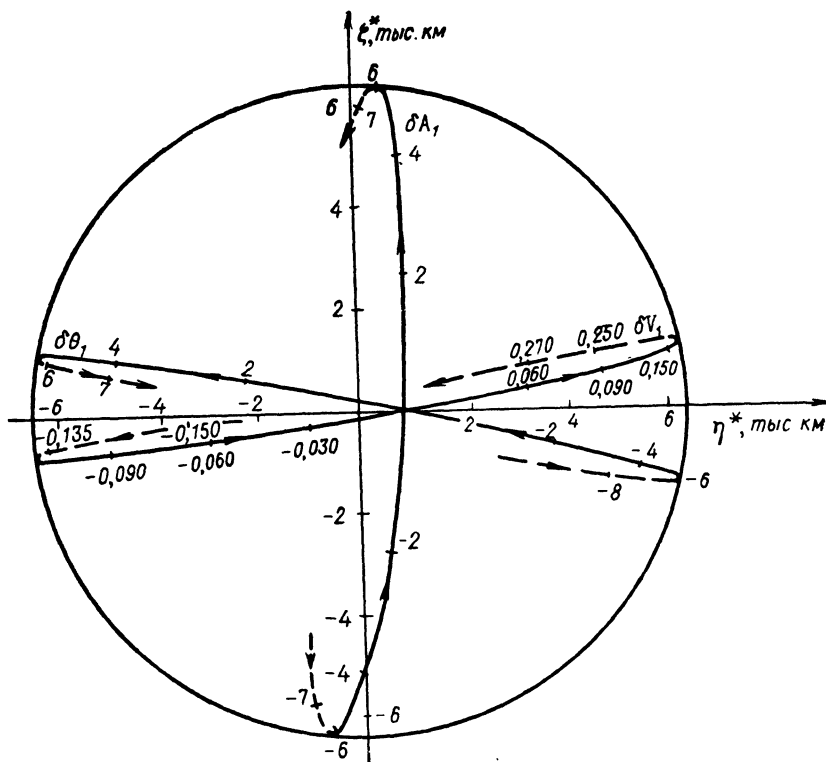


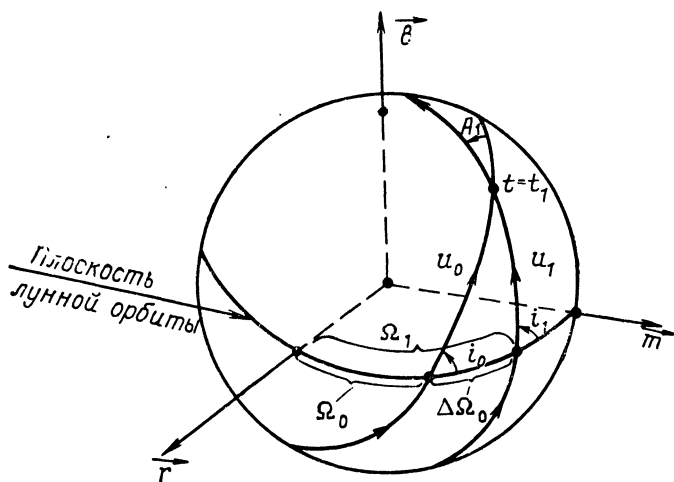
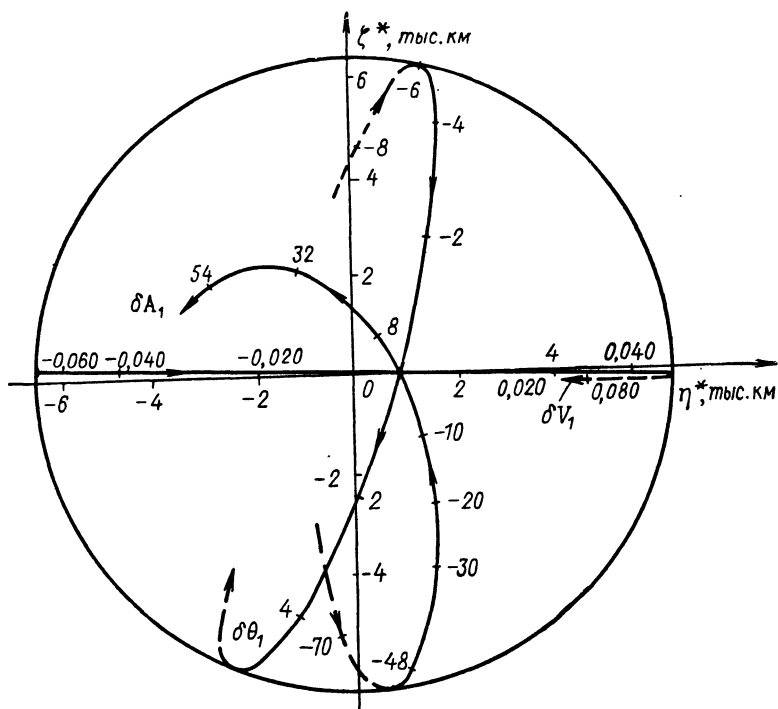
Рис. 7.20. Влияние отклонений высоты $\delta\varrho_1$, а также величины Φ_1 и азимута α_1 смещения начальной точки из номинальной по лунной поверхности

Искривление отрицательных θ_1 -лучей на рис. 7.18 объясняется тем, что при старте из окрестности точки вертикальной посадки рост отрицательных углов θ_1 отвечает постепенному поворачиванию траекторий в область решений второго типа (см. рис. 7.13). Характер лучей для варианта 2 примерно такой, как для варианта 1, а для варианта 4 — как для варианта 3 [5]. На рис. 7.21—7.23 представлены лучи на *земной сфере* (в проекции на плоскость $\eta^*\xi^*$), соответствующие лучам на рис. 7.17—7.19. Видим, что почти прямолинейным лучам на плоскости C_1C_2 отвечают «лучи» на земной сфере, близкие к дугам большого круга. Отклонения от дуг большого круга вызваны искривлением соответствующего луча на плоскости C_1C_2 . Видно, что рассматриваемые лучи охватывают Землю со всех сторон в соответствии с тем, что $U > V_L$ [4].

7.2.6. Методика и результаты расчета траекторий возвращения с орбиты искусственного спутника Луны

Селеноцентрическая орбита искусственного спутника Луны задается ее элементами $i_0, \Omega_0, \omega_0, p_0, e_0, t_0$ в системе координат $\vec{r}, \vec{m}, \vec{b}$, где $\vec{r}$ — селеноцентрический радиус центра Луны, ось $\vec{m}$ направлена из центра Луны в плоскости лунной орбиты примерно по скорости Луны, а ось $\vec{b}$ составляет с направлениями $\vec{r}, \vec{m}$ правую тройку (рис. 7.24). Приблизительно можно считать, что траектория возвращения получается в результате мгновенного сообщения спутнику дополнительного скоростного импульса величиной ΔV (в расчетах принимается $\Delta V = 1$ км/с). Предполагается (только для упрощения расчетов), что при сообщении импульса угол θ_1 возвышения вектора скорости над местным горизонтом не изменяется, а азимут A_1 результирующего вектора скорости





сти может отличаться от азимута исходного вектора скорости. Обозначим через ΔA , разность результирующего и исходного азимутов.

Попадание в центр Земли или в заданную точку земной поверхности получается в результате соответствующего *изменения величины* A_1 и *момента* t_1 сообщения импульса.

В качестве начальных данных траекторий возвращения берутся векторы

$$\vec{q}(t_1) \quad \text{и} \quad \dot{\vec{q}}(t_1) = \dot{\vec{q}}(t_1 - 0) + \frac{\dot{\vec{q}}(t_1 - 0)}{\left| \dot{\vec{q}}(t_1 - 0) \right|} \Delta V.$$

Энергетические затраты на поворот плоскости орбиты исходного спутника здесь не рассматриваются, так как они зависят от выбора исходной орбиты и при оптимальном выборе обращаются в ноль.

Результаты расчетов номинальных и отклоненных траекторий сведены в табл. 7.3, аналогичную табл. 7.2.

В табл. 7.3 брались элементы $e_0=0$ и $t_0=t_1$. В силу того, что $e_0=0$, после разгона аргумент широты $u_1=\omega_1$. После разгона вместо p_0 , e_0 имеем элементы p_1 , e_1 .

Величина δt_1 [с] есть наибольшее отклонение времени t_1 перехода с орбиты ИСЛ на траекторию возвращения, еще пересекающую поверхность Земли. Величина δS_1 [км] есть аналогичное наибольшее отклонение начальной точки от орбиты в боковом направлении. Остальные предельные отклонения имеют тот же смысл, что и в табл. 7.2.

Варианты, представленные в табл. 7.3, выбирались из соображений, изложенных в разд. 7.2.2 и 7.2.3. При этом исходные спутники в вариантах 1 и 2, а также в 3 и 4 движутся примерно в противоположных направлениях.

Ошибки в начальной скорости в варианте 2 значительно слабее сказываются, чем в варианте 1. Объясняется это следующим образом. При положительной ошибке δV_1 селеноцентрическая траектория распрямляется, а скорость движения по ней увеличивается. В частности, увеличивается величина скорости U выхода из сферы действия, поворачиваясь против направления обхода Луны. В варианте 2 изменение трансверсальной компоненты геоцентрической выходной скорости вследствие поворота направления вектора $\vec{U}$ частично компенсируется обратным ее изменением вследствие

увеличения модуля вектора $\vec{U}$. В варианте 1 вместо компенсации происходит сложение влияния изменений направления и величины вектора U , так что изменение трансверсальной компоненты геоцентрической скорости с ростом δV_1 гораздо раньше приводит к промаху мимо Земли.

Той же причиной объясняется и отличие во влиянии разброса начального селеноцентрического радиуса. Оно сказывается главным образом через изменение избытка начальной скорости над местной параболической скоростью, т. е. так же, как δV_1 . Влияние боковых отклонений оказывается менее существенным, чем радиальных.

В последних шести колонках табл. 7.3 приведены производные перигейных расстояний по исходным данным V_1 , θ_1 , A_1 , t_1 , q_1 , S_1 , аналогичные производным в последних трех колонках табл. 7.2.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Пространственная задача *возвращения* имеет ту же характерную особенность, что и другие задачи полета в поле тяготения Земли и Луны: траектории возвращения, обладающие *экстремальными* свойствами, принадлежат *плоскости лунной орбиты*. В частности, траектория возвращения с минимальной селеноцентрической скоростью обходит Землю в направлении движения Луны, лежит в плоскости лунной орбиты и касается геоцентрической сферы $r=r_\gamma$ в точке, противоположной направлению на Луну в момент выхода КА из ее сферы действия.

2. Изложенная в разд. 7.2. 1—7.2. 3 приближенная методика является *асимптотической*, т. е. она тем точнее, чем меньше отношение масс притягивающих тел. Отношение массы Луны к массе Земли (1/80) оказывается уже достаточно малым для того, чтобы с помощью анализа совокупности скоростей получать качественное и приближенное количественное представление о различных свойствах траекторий возвращения (точные машинные расчеты подтверждают это).

3. Условие равенства располагаемой угловой дальности полета φ_p и геометрически необходимой φ_n при заданной начальной скорости имеет тот же энергетический смысл, что и аналогичное условие в задаче попадания в Луну из заданной точки земной поверхности (гл. VI, разд. 6.1). При начальных скоростях, недостаточных для выполнения этого равенства, решение задачи не существует, т. е. нельзя достигнуть Землю с Луны.

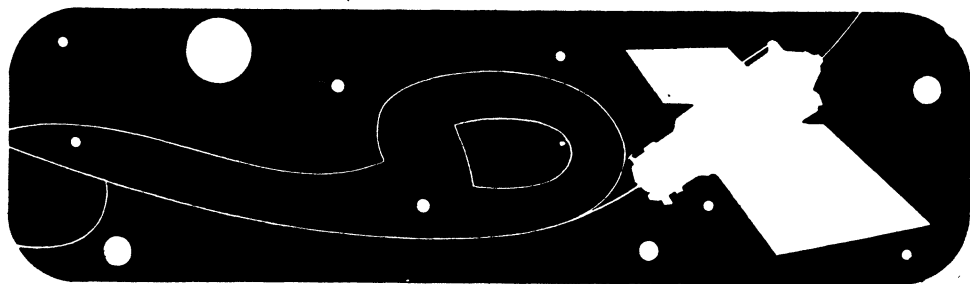
4. При одинаковом модуле приращения вектора выходной селеноцентрической скорости изменение полного времени полета больше для случаев изменения направления этой скорости (в плоскости лунной орбиты), чем для случаев изменения модуля этой скорости. Объясняется это тем, что направление этой скорости (см. рис. 7.11—7.14) ближе к геоцентрической трансверсали, чем к радиусу для рассматриваемых величин

этой скорости. Соответственно направление вектора приращения этой скорости при изменении угла возвышения ближе к радиусу, чем к трансверсали, а именно. радиальная компонента в основном влияет на время полета до Земли.

5. Разброс времени T_* полета в сфере действия Луны для рассматриваемых траекторий возвращения относительно невелик и составляет (в худших случаях) примерно 1 ч. За это время Земля в своем движении вокруг Луны смещается примерно на 3,5 тыс. км, т. е. направление Луна — Земля поворачивается примерно на $0^\circ,5$. Эта величина невелика по сравнению с размером областей (7.1) на рис. 7.11, 7.12, 7.14, составляющим десятки градусов. Именно это обстоятельство позволяет в приближенном анализе влияния разброса начальных данных не учитывать изменение времени T_* , а рассматривать лишь изменения направлений скоростей выхода аппарата из сферы действия Луны.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. VII

1. Дашков А. А., Ивашкин В. В. Об одном замечательном свойстве пучка гиперболических траекторий. — «Космические исследования», т. III, вып. 5, 1965.
2. Егоров В. А. О некоторых задачах динамики полета к Луне. — «Успехи физических наук», т. 63, вып. 1а, 1957.
3. Егоров В. А. Пространственная задача достижения Луны, М., «Наука», 1965.
4. Егоров В. А. О траекториях возвращения от Луны к Земле. — «Космические исследования», т. V, вып. 4, 1967.
5. Егоров В. А. О влиянии разброса начальных данных траектории возвращения от Луны к Земле. — «Космические исследования», т. VII, вып. 1, 1969.
6. Золотухина Н. И., Охочимский Д. Е. Исследования движения космических аппаратов в атмосфере. — «Космические исследования», т. III, вып. 4, 1965.
7. Ивашкин В. В. Оптимальные траектории импульсных переходов между компланарными орбитами при ограничениях на расстояние от центра тяготения. Канд. диссертация, гл. V, 1967.
8. Охочимский Д. Е. Динамика космических полетов. М., изд-во МГУ, 1968.
9. Сообщение ТАСС, «Правда», 1966, 6 февр.
10. Чепмен Дж. Приближенный метод исследования входа тел в атмосферы планет. М., ИЛ, 1962.
11. Almar I., Balazs B. Approximate Method of plotting the orbit of Space rocket, passing near the Moon. Magyar tud. acad. Mat. Kutató int. Közl., vol. 4, Nr. 2, 1959.
12. Miele A. Theorem of imagine trajectories in the Earth-Moon Space. Astronautica Acta, vol. 6, No. 5, 1960.
13. Kooy M. J., Berghuis J. On the numeral computation of free trajectories of lunar space vehicles. Astronautica Acta, vol. 6, No. 2—3, 1960.
14. Niman A. Astronautical velocity and timing carts for use in space travel, Journal of the British Interpl. Soc., vol. 19, No. 1, 1963.



ГЛАВА VIII

ВЫБОР ПАРАМЕТРОВ ОРБИТ И ВРЕМЕНИ ЗАПУСКА ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a — большая полуось орбиты.
- B_3 — географическая широта точки земной поверхности.
- e — эксцентриситет орбиты.
- h — высота полета.
- h_a — высота апогея.
- h_n — высота перигея.
- h_{max} — максимальная высота орбиты.
- h_{min} — минимальная высота орбиты.
- i — наклонение орбиты.
- k_c — число суток, через которое обеспечивается совпадение полос обзора одного и того же спутника.
- L_1 — долгота начала первого витка.
- L_n — долгота начала n -го витка.
- m — масса спутника.
- N — общее число спутников в системе.
- n — число оборотов спутника.
- n_c — целое число оборотов спутника в звездных сутках.
- $P_{зв}$ — продолжительность звездных суток.
- p — фокальный параметр орбиты.
- R — средний радиус Земли.
- r — радиус-вектор спутника.
- $r_{ср}$ — средний радиус-вектор спутника.
- T — период обращения спутника.
- T_r — продолжительность тропического года.
- t_n — необходимое минимальное время нахождения спутника в зоне действия пункта приема информации.
- t_0 — время запуска спутника для выведения спутника на орбиту с долготой восходящего узла Ω .
- $t_{сущ}$ — время существования спутника.
- t_{Ω} — время прохождения спутника через восходящий узел.
- V — скорость отрыва от притягивающего центра.
- v — модуль вектора скорости спутника.
- W — круговая скорость спутника.
- z — число спутников в одной плоскости орбиты.
- $\alpha_{\odot}$ — угол прямого восхождения Солнца.
- β — угол ориентации плоскости орбиты относительно Солнца (планеты).
- γ — угол между плоскостью горизонта и направлением на спутник (угол места).
- γ_{min} — минимальный угол места.
- $\delta_{\odot}$ — склонение Солнца.

θ — угол между направлением скорости движения тела и нормалью к радиусу-вектору.

ϑ — истинная аномалия.

λ — число плоскостей орбит в системе.

τ_p — время прохождения спутника через перигей.

$\tau_{сущ}$ — относительное время существования спутника.

Φ — угловое расстояние между спутниками по фазе.

φ — угловое расстояние между восходящими узлами орбит.

Ω — долгота восходящего узла орбиты.

ω_z — угловая скорость вращения Земли.

ω_n — аргумент перигея.

При выборе параметров орбит необходимо учитывать требования, определяемые назначением ИСЗ, и многочисленные ограничения, к которым относятся, например, ограничения, налагаемые характеристиками применяемых ракет-носителей, наземной аппаратуры и бортового оборудования. В каждом конкретном случае определяются главные ограничения, которые необходимо учитывать, чтобы обеспечить выполнение задач, поставленных перед отдельным спутником или системами ИСЗ.

Так как задачи, решаемые ИСЗ, достаточно многообразны, то составление общего алгоритма выбора орбит, учитывающего специфику налагаемых ограничений в каждом отдельном случае, является пока весьма затруднительным.

Приведем формульные зависимости, позволяющие выбирать параметры орбит ИСЗ для случаев, когда с их помощью производится решение отдельных типовых задач.

В зависимости от назначения спутника выбор параметров его орбиты может производиться с учетом следующих факторов:

- времени существования ИСЗ;
- обеспечения связи или получения информации как с заданных районов Земли, так и в глобальном масштабе;
- обеспечения постоянной ориентации плоскостей орбит относительно Солнца;
- обеспечения оперативности получения информации на пунктах приема информации;
- допустимой величины перспективных искажений и падения разрешения изображений, возникающих из-за сферичности Земли при съемке больших площадей;
- технических характеристик наземной и бортовой аппаратуры;
- воздействия радиационных поясов Земли на работу бортовых систем;
- энергетических возможностей носителей;
- освещенности заданных районов Земли при полете спутника;
- минимизации числа спутников и др.

8.1. ВЫБОР ФОРМЫ ОРБИТ

Число параметров, определяющих орбиту, зависит от ее формы, при выборе которой следует учитывать:

- тип и состав бортовой и наземной аппаратуры, ее технические характеристики и возможности;

- время активного существования спутников;

- задачи, решаемые спутниками, и т. д.

Форма орбиты определяется уравнением в полярной системе координат

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}. \quad (8.1)$$

Из уравнения (8.1) следует, что при $0 \leq e < 1$ рассматриваемая орбита является эллипсом (при $e=0$ этот эллипс превращается в окружность с радиусом $r=\text{const}$). При $e=1$ орбита становится параболой, а при $e>1$ — гиперболой.

Форма орбиты зависит от скорости полета. Уравнение, определяющее форму орбиты, в зависимости от скорости полета имеет вид [16]

$$e = \sqrt{1 - k(2 - k) \cos 2\theta}, \quad (8.2)$$

где θ — угол между направлением скорости движения ИСЗ и нормалью к радиусу-вектору r (рис. 8.1);

$$k = \frac{rv^2}{\mu} = \frac{v^2}{W^2} = \frac{2v^2}{V^2};$$

μ — коэффициент, равный произведению гравитационной постоянной на массу Земли.

Величина $W = \sqrt{\frac{\mu}{r}}$ есть скорость кругового движения на расстоянии r от притягивающего центра, а

$$V = \sqrt{2} W = \sqrt{\frac{2\mu}{r}} \quad (8.3)$$

есть так называемая скорость отрыва на расстоянии r от притягивающего центра (при $r=R$ величины W и V соответственно первая и вторая космические скорости).

Если $v < V$, то $k < 2$ и $e < 1$. В этом случае орбита является эллиптической. Если $v = V$, то $k = 2$; $e = 1$ и орбита становится параболической. Если $v > V$, то $k > 2$; $e > 1$ и движение происходит по гиперболе. В двух последних случаях рассматриваемое тело уходит в бесконечность, т. е. отрывается от притягивающего центра.

Выражение (8.2) можно представить в виде

$$e = \sqrt{\sin^2 \theta + (k-1)^2 \cos^2 \theta}. \quad (8.4)$$

Отсюда непосредственно следует, что круговая орбита ($e=0$) может быть получена лишь при условиях

$$v = W \text{ и } \theta = 0. \quad (8.5)$$

Однако поскольку на практике условие (8.5) точно не выполняется вследствие ошибок систем выведения спутников на расчетные орбиты и соответствующих корректирующих устройств, а также из-за действия на спутники различных возмущающих факторов, то фактически получаемые орбиты для многих типов спутников Земли являются почти круговыми орбитами, которые характеризуются следующими параметрами [16]:

Рис. 8.1. К определению формы орбиты

- эксцентриситетом $0 < e \leq 0,02$;
- наклонением i ;
- средним радиусом $r_{ср}$ (или средней высотой $h_{ср}$);
- долготой восходящего узла Ω (или временем запуска спутников t);
- временем t_{Ω} прохождения спутника через узел;
- аргументом перигея $\omega_{п}$.

Использование эллиптических орбит приводит к конструктивным усложнениям бортовой аппаратуры, непостоянству ширины полосы обзора местности, различиям в качестве получаемой информации на протяжении всего витка орбиты. Кроме того, при достаточно большом времени активного существования ИСЗ стабильность расположения эллиптических орбит относительно друг друга (особенно при малых высотах перигея) значительно ниже, чем для круговых или близких к ним орбит. Однако эллиптические орбиты с большими эксцентриситетами позволяют при соответствующем расположении апогея существенно увеличить продолжительность времени связи наземных точек через спутник, а также имеют ряд других преимуществ и поэтому находят применение в системе связи.

Эллиптические орбиты характеризуются следующими параметрами:

- большой полуосью a ;
- наклонением i ;
- высотой апогея h_a ;
- высотой перигея h_p или минимальной высотой $h_{\min}$;
- долготой восходящего узла Ω (или временем запуска спутников t);
- временем прохождения через перигея t_p ;
- аргументом перигея ω_p ;
- эксцентриситетом e .

8.2. ВЫБОР НАКЛОНЕНИЯ ОРБИТ

Наклонение плоскости орбиты выбирается в зависимости от географического расположения районов, с которыми необходимо обеспечить связь или осуществлять получение соответствующей информации, а также от ширины зоны обзора земной поверхности бортовой аппаратурой, устанавливаемой на спутниках.

Для обеспечения связи или получения информации со всех районов Земли, в том числе и с ее полюсов, наклонение орбит должно находиться в пределах

$$\frac{\pi}{2} - \frac{l}{R} (1 - k') \leq i \leq \frac{\pi}{2} + \frac{l}{R} (1 - k'), \quad (8.6)$$

где $R=6371$ км — средний радиус Земли;

$2l$ — ширина зоны обзора бортовой аппаратуры, половина которой через угол поля зрения аппаратуры 2α и расстояние r от центра Земли до спутника определяется из выражения

$$l = \frac{\pi R}{90^\circ} \left[\arcsin \left(\frac{r}{R} \sin \alpha \right) - \alpha \right]. \quad (8.7)$$

В свою очередь угол поля зрения 2α со спутника ограничивается радиусом-вектором r и углом места γ , с которого может начинаться связь:

$$\alpha = 90^\circ - \arccos \left(\frac{R}{r} \cos \gamma \right). \quad (8.8)$$

При $\gamma=0$ получаем максимальное значение угла поля зрения $2\alpha_{\max}$:

$$\alpha_{\max} = 90^\circ - \arccos \frac{R}{r}. \quad (8.9)$$

Для обеспечения *связи или получения информации с заданной широты* B_3 требуемое наклонение орбит определяется из соотношения

$$\pi - B_3 + \frac{l}{R} (1 - k') \geq i \geq B_3 - \frac{l}{R} (1 - k'), \quad (8.10)$$

где k' — коэффициент, учитывающий требуемый процент перекрытия полосой обзора со спутника заданных широт B_3 ($k'=0,1 \div 1,0$), причем если $k'=0$, заданные широты находятся на краю зоны обзора со спутника; если $k'=1$, трасса полета спутников проходит через B_3 .

Зависимость наклонения i от коэффициента k' для ряда значений l приведена на рис. 8.2.

Для обеспечения *постоянной ориентации* плоскости орбиты относительно Солнца (чтобы спутник над районами с данной широтой появлялся в одно и то же местное время) наклонение орбит выбирается из условия равенства угловой скорости вращения узла орбиты Ω и угловой скорости «перемещения» среднего экваториального Солнца $\Omega_\odot$, т. е.

$$i = \arccos \frac{2\pi T}{T_\Gamma c}, \quad (8.11)$$

где T_Γ — продолжительность тропического года ($T_\Gamma = 365,2422$ солнечных суток);

$$c = - \frac{(2\pi)^{7/3} \epsilon}{(1 - e^2) 2T \sqrt[3]{T} \mu^{5/3}} = - \frac{888,796}{(1 - e^2) 2T \sqrt[3]{T}}; \quad (8.12)$$

здесь T — период обращения ИСЗ;

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= 2,634 \cdot 10^{10} \text{ км}^5/\text{с}^2 \\ \mu &= 398600 \text{ км}^3/\text{с}^2 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{константы, характеризующие} \\ &\text{гравитационное поле Земли.} \end{aligned}$$

Значения наклонений орбит, плоскости которых имеют постоянную ориентацию относительно Солнца, в зависимости от их высоты (при $e=0$) приведены на рис. 8.3.

8.3. ВЫБОР ВЫСОТ ОРБИТ (ПЕРИОДА ОБРАЩЕНИЯ ИСЗ)

При выборе высоты орбит необходимо учитывать следующее:

— требование получения информации с одних и тех же или со всех районов земной поверхности за заданное число суток (при ограниченной ширине зоны обзора бортовой аппаратуры);

— требование оперативного сбора соответствующей запомненной на борту спутников информации на пунктах приема информации (ППИ). Одним из условий, повышающих оперативность получения информации на ППИ, является выбор такой высоты, при которой обеспечивалось бы прохождение спутника на любом витке орбиты через зону действия ППИ. В этом случае также уменьшается необходимый объем памяти бортовых запоминающих устройств;

— допустимую величину перспективных искажений и падения разрешения изображений при съемке больших площадей, вызываемых сферичностью Земли;

— технические характеристики наземной и бортовой аппаратуры (дальность ее действия, возможность получения требуемого разрешения изображений, минимальный угол места, с которого возможна работа пунктов со спутниками, и др.);

— время существования спутников на орбите;

— воздействие радиационных поясов Земли на работу бортовых систем спутников при длительном сроке активного существования системы;

— носитель и его энергетические возможности и т. д.

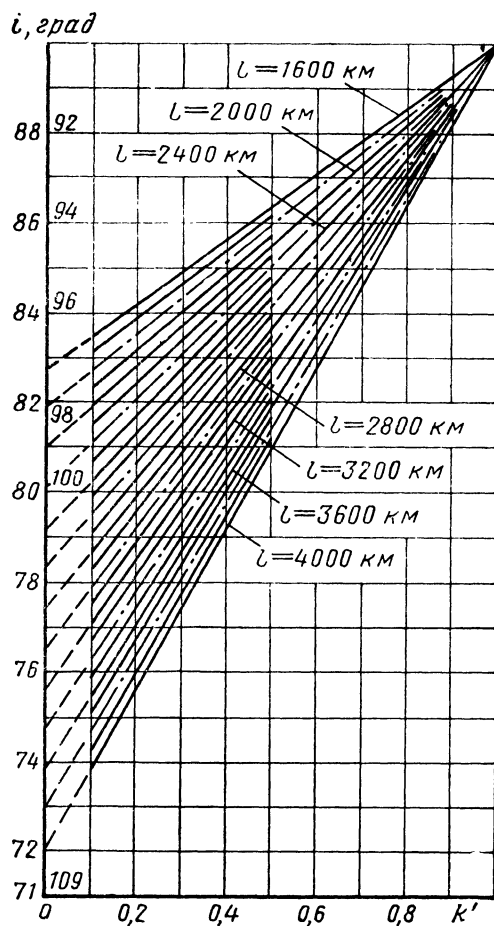


Рис. 8.2. Зависимость наклонения i от коэффициента k'

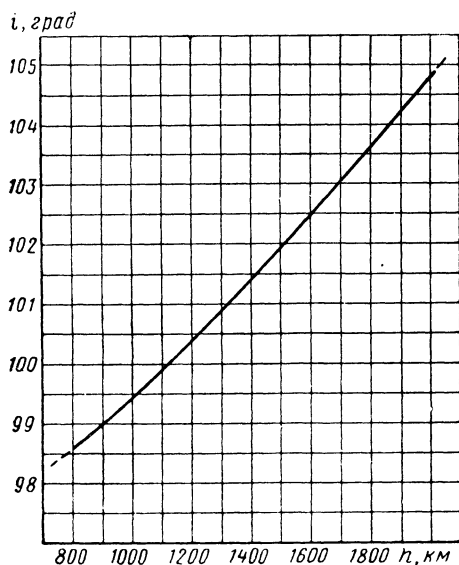


Рис. 8.3. Зависимость наклонения i орбит постоянной ориентации относительно Солнца от высоты (при $e=0$)

Рассмотрим влияние каждого из перечисленных факторов на выбор высоты орбит спутников.

Получение информации со всех районов Земли

Высота орбит, при которой обеспечивается последовательное перекрытие полос обзора между проекциями орбит за заданное число суток, выбирается из условия

$$2\pi - (n_c - 1)\eta = \frac{\eta}{k_c}, \quad (8.13)$$

где n_c — целое число витков в звездных сутках;

k_c — число суток, через которое требуется обеспечить совпадение полос обзора одного и того же ИСЗ;

η — смещение проекции орбиты за один оборот ИСЗ вокруг Земли.

Выражение (8.13) можно представить в виде трансцендентного уравнения

$$\omega_3 T + \frac{(2\pi)^{7/3} \epsilon \cos i}{\mu^{5/3} (1 - e^2) 2T^{4/3}} = \frac{2\pi k_c}{1 + (n_c - 1)k_c}, \quad (8.14)$$

где $\omega_3 = 7,2921158 \cdot 10^{-5}$ 1/с — угловая скорость вращения Земли.

Задаваясь величинами k_c и n_c , для известных значений наклона i и эксцентриситета e можно вычислить период обращения T ИСЗ или высоту h для круговой орбиты.

Уравнение (8.14) решается методом итераций по следующей схеме:

$$T + \frac{(2\pi)^{7/3} \epsilon \cos i}{\mu^{5/3} \omega_3 (1 - e^2)} \frac{1}{T^{4/3}} = \frac{2\pi k_c}{\omega_3 [1 + (n_c - 1)k_c]}$$

до выполнения условия $(T_j - T_{j-1}) \leq \delta T$,

где δT — допустимая ошибка в периоде обращения ИСЗ;

j — число сближений.

В качестве исходного значения $T_{j=0}$ принимается

$$T_{j=0} = \frac{2\pi k_c}{\omega_3 [1 + (n_c - 1)k_c]} = b_0.$$

В дальнейшем

$$T_{j+1} = b_0 - \frac{a_0}{T_j^{4/3}}, \quad \text{где } a_0 = \frac{(2\pi)^{7/3} \epsilon \cos i}{\mu^{5/3} \omega_3 (1 - e^2)^2}.$$

При $k_c = 1$ достигается совпадение полос обзора одного и того же ИСЗ в каждые сутки.

Орбита, период движения по которой в целое число раз n_c меньше периода вращения Земли (планеты), называется *квазисинхронной*, или *изомаршрутной*.

Целое число n_c называется порядком орбиты. Для Земли самый высокий порядок $n_c = 16$.

На рис. 8.4 и 8.5 даны высоты квазисинхронных орбит ($k_c = 1$) и орбит, обеспечивающих последовательное прохождение областей, расположенных между проекциями орбит, полученных в первые сутки (для наклонов орбит $i = 80^\circ$ и 90°).

Орбиты при $k_c = 1$ в течение всего времени наблюдения дают полосы обзора, совпадающие с полосами, полученными в первый день. Для просмотра областей, расположенных между проекциями орбит, необходимо изменить квазисинхронную высоту на величину, обеспечивающую ежедневный сдвиг полосы на расстояние, равное ее ширине l . Очевидно, это изменение высоты может производиться в сторону увеличения или уменьшения квазисинхронного значения (см. рис. 8.4 и 8.5). Количество дней, требуемое для заполнения всей области межвиткового расстояния, находится по формуле

$$k_c = \frac{\eta}{l}. \quad (8.15)$$

Выбор периода обращения, при котором обеспечивается заданное прохождение трасс полета

Некоторые ИСЗ предназначены для получения информации с заданного района поверхности Земли при некотором дополнительном перекрытии маршрутов наблюдения. При этом характер и очередность накрытия земной поверхности маршрутами определяются периодом обращения ИСЗ.

Однако ошибки фактически получаемого после выведения периода обращения достаточно велики и поэтому задача выбора оптимального его значения сводится к определению периода, наиболее удаленного от некоторых наименее благоприятных значе-

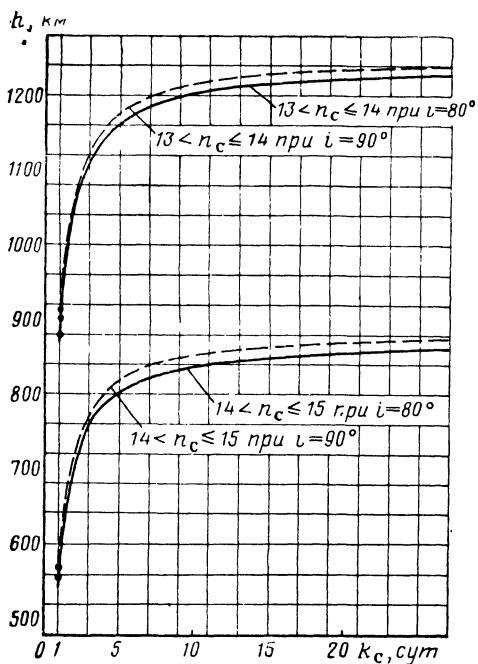


Рис. 8.4. Зависимость высоты орбиты h от числа суток k_c при $i = \text{const}$

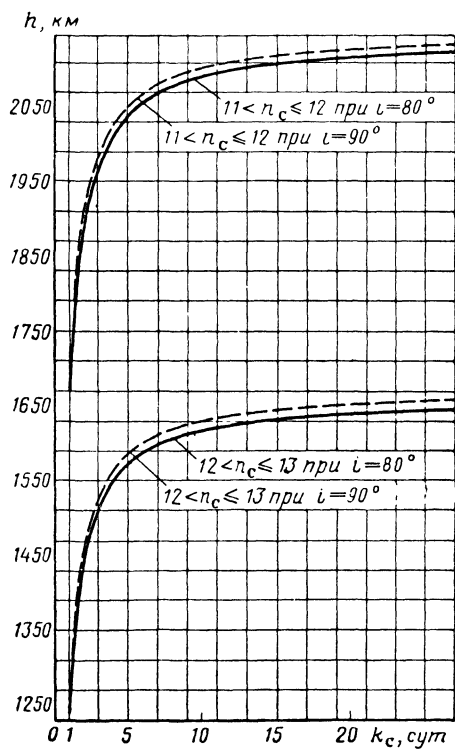


Рис. 8.5. Зависимость высоты орбиты h от числа суток k_c при $i = \text{const}$

ний. С увеличением точности реализации значения периода будет возрастать эффективность выбора оптимального значения.

Оптимальным периодом обращения (для данного наклонения орбиты) является такой период обращения T , при котором достигается максимум функционала

$$F(T) = \sum_j Q_j \int_{-\Delta T}^{+\Delta T} f_j(T) \Psi_T dT, \quad (8.16)$$

где $F(T)$ — математическое ожидание наблюдаемых единиц площади;

Q_j — вес j -й «единичной» площади;

$f_j(T)$ — функция наблюдения j -ой «единичной» площади;

Ψ_T — плотность распределения ошибок получения заданного периода обращения.

Уравнение (8.16) можно решать численным методом путем статистических проб (метод Монте-Карло).

Ниже дается ряд аналитических зависимостей, позволяющих подойти с другой стороны к выбору оптимальных параметров орбит.

Если пренебречь эксцентриситетом орбиты, который для спутников наблюдения, как правило, не превышает 0,06, то долгота начала n -го витка (долгота узла) находится из выражения

$$L_n = L_1 - (n-1) \left(\omega_3 T - d_1 \frac{\cos i}{a^2} \right). \quad (8.17)$$

Значение периода обращения, при котором спутник проходит через заданную долготу, определяется по формуле

$$T = \frac{1}{\omega_3} \left(\frac{L_1 - L_n + 360^\circ N_c}{n-1} + d_1 \frac{\cos i}{a^2} \right). \quad (8.18)$$

Формула для числа витков n , которые должен совершить спутник при данном периоде обращения, чтобы пройти в районе заданной долготы, имеет вид

$$n = \frac{L_1 - L_n + 360^\circ N_c}{\omega_3 T - d_1 \frac{\cos i}{a^2}} + 1. \quad (8.19)$$

В результате расчета по этой формуле величина n может оказаться числом не целым. В этом случае значение n округляется до ближайшего целого числа n^* , а получающаяся разность между долготой начала заданного витка L_n и долготой L_n^* , имеющей место при данном периоде, определяется из выражения

$$L_n - L_n^* = (n - n^*) \left(\omega_3 T - d_1 \frac{\cos i}{a^2} \right).$$

В формулах (8.17) — (8.19), кроме общепринятых, использованы следующие обозначения:

N_c — сутки полета ($N_c = 1, 2, 3, \dots$);

n — номер витка ($n = 1, 2, 3, \dots$);

$\omega_3 = 0,25068447$ град/мин;

$d_1 = -2,3784766 \cdot 10^7$ град · км².

Для низких орбит спутников следует учитывать уменьшение периода обращения из-за влияния атмосферы, используя приближенную зависимость

$$T = T_0 - \frac{2n-1}{2} \delta T,$$

где T — выбранное значение периода обращения;

T_0 — начальное значение периода;

δT — уменьшение периода обращения за один виток.

Из выражений (8.16) — (8.19) можно получить параметры орбиты, обеспечивающие заданное прохождение трасс полета.

В табл. 8.1 и 8.2 представлены результаты расчетов периодов обращения и разности долгот начал соседних витков, при которых происходит наложение маршрутов соседних суток (будем называть такой период «изомаршрутным»), через сутки, через двое суток и т. д. По этим таблицам можно выбрать период обращения, при котором обеспечивается последовательное прохождение трасс с необходимым сдвигом по долготу.

Таблица 8.1

Число витков за сутки	Изомаршрутные периоды обращения в минутах для различных углов наклона i в град							
	50	60	65	70	75	80	90	95
16	88,41	88,72	88,87	89,04	89,21	89,38	89,75	89,94
15	94,40	94,70	94,86	95,02	95,20	95,38	95,75	95,92
14	101,24	101,53	101,69	101,86	102,04	102,11	102,58	102,76

Таблица 8.2

Число витков за сутки	Разности долгот начал соседних витков в градусах для изомаршрутных периодов обращения при различных i в град							
	50	60	65	70	75	80	90	95
16	22,16	22,24	22,28	22,32	22,36	22,41	22,50	22,55
15	23,66	23,73	23,78	23,82	23,86	23,91	24,00	24,05
14	25,38	25,45	25,49	25,54	25,58	25,63	25,71	25,76

Минимальная высота орбит, при которой обеспечивается прохождение спутника на любом витке орбиты через зоны действия пунктов приема информации (ППИ)

В общем случае

$$h_{\min} = f(i, t_n, B_1, B_2, L_{1n}, L_{2n}, \gamma_{\min}), \quad (8.20)$$

где t_n — необходимое минимальное время нахождения спутника в зоне действия ППИ;

B_1, B_2, L_{1n} и L_{2n} — широта и долгота крайних пунктов приема информации;

$\gamma_{\min}$ — минимальный угол места, с которого может осуществляться уверенная работа ППИ со спутниками.

Условие, при котором находится точное значение $h_{\min}$, имеет вид

$$\Delta l_p = L_{\text{необх}}, \quad (8.21)$$

где

$$\Delta l_p = |L_{1n} - L_{2n}|;$$

$$L_{\text{необх}} = 360^\circ - \sum_{j=1}^4 \Delta l_j, \quad j = 1, 2, 3 \text{ и } 4. \quad (8.22)$$

Значения Δl_j определяются по следующим соотношениям:

$$\Delta l_1 = \arccos \left(\frac{\cos l' - 1}{\cos^2 B_1} + 1 \right), \quad (8.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} l' &= \arccos(\cos d \cos b); \quad b = (m + b) - m; \\ d &= \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \psi \cos \frac{v_1}{2} \right); \quad (m + b) = \arcsin \left(\frac{\sin B_1}{\sin i} \right); \\ \psi &= 90^\circ - (\varphi + \gamma_{\min}); \quad m = \arcsin \left[\frac{\sin B_1}{\sin i \cos d} - \operatorname{ctg} i \operatorname{tg} d \right]; \\ f &= \arcsin \left(\frac{R}{R + h} \cos \gamma_{\min} \right); \\ v &= \arccos \left(\frac{\cos u' - 1}{\sin^2 \psi} + 1 \right); \\ u' &= \frac{360^\circ t_n}{T}, \end{aligned} \right\} \quad (8.24)$$

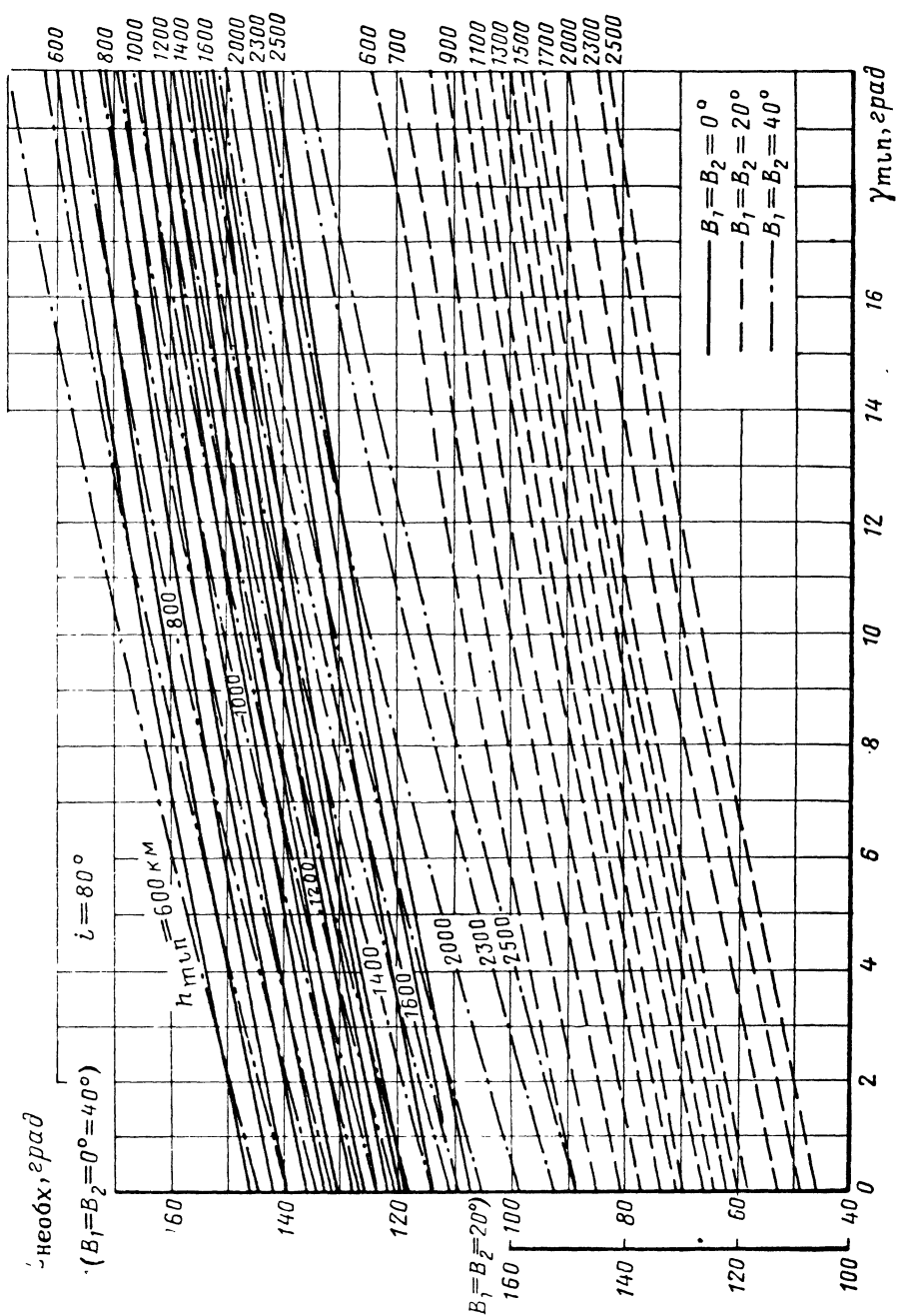


Рис. 8.6. Зависимость $L_{\text{необх}}$ от $\gamma_{\text{мин}}$

f — угол между линией визирования ИСЗ и радиусом, проведенным к ИСЗ из центра Земли.

Величина Δl_2 определяется по соотношениям (8.23) и (8.24), только вместо широты B_1 первого пункта подставляется широта B_2 второго крайнего пункта. При расположении крайних пунктов на одной и той же широте $\Delta l_1 = \Delta l_2$. Далее

$$\Delta l_3 = \arccos \left(\frac{\cos a_1 - \sin B_1 \sin B_2}{\cos B_1 \cos B_2} \right), \quad (8.25)$$

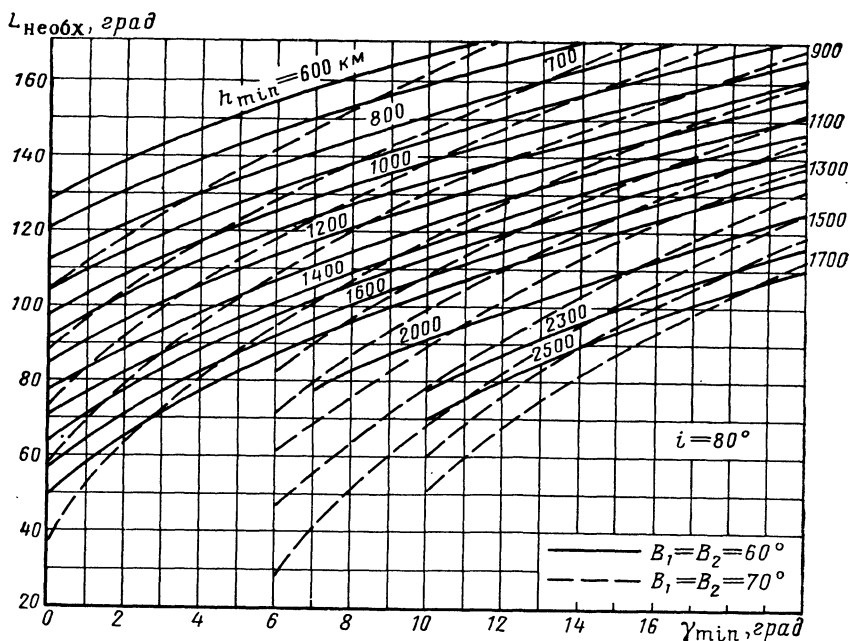


Рис. 8.7. Зависимость $L_{\text{необх}}$ от $\gamma_{\min}$

где

$$a_1 = 180^\circ - \left[\arcsin \left(\frac{\sin B_1}{\sin i} \right) + \arcsin \left(\frac{\sin B_2}{\sin i} \right) \right]; \quad (8.26)$$

$$\Delta l_4 = t_c \omega_3 \frac{180^\circ}{\pi}; \quad (8.27)$$

здесь
$$t_c = \left\{ 0,5 - \frac{1}{360^\circ} \arcsin \left(\frac{\sin B_1}{\sin i} \right) + \arcsin \left(\frac{\sin B_2}{\sin i} \right) \right\} T. \quad (8.28)$$

Значение $h_{\min}$ определяется по формулам (8.21) — (8.28) в следующем порядке.

Задаются исходные значения $h_j \approx 300$ км и находится $L_{\text{необх}}$. Если условие (8.21) не выполняется, очередное значение h_{j+1} выбирается по формуле

$$h_{j+1} = h_j \pm \Delta h_k,$$

где $\Delta h_1 = 50$ км, $\Delta h_2 = 10$ км, $\Delta h_3 = 1$ км, $\Delta h_4 = 0,1$ км и т. д.

При $(L_{\text{необх}} - \Delta l_p) > 0$ значение Δh_k берется со знаком «+», при $(L_{\text{необх}} - \Delta l_p) < 0$ значение Δh_k берется со знаком «-». Переход от Δh_k на Δh_{k+1} осуществляется при смене знака разности $(L_{\text{необх}} - \Delta l_p)$. Итерационный процесс заканчивается при выполнении условия (8.21) или при достижении $\Delta h_4 = 0,1$ км и т. д. и одновременном выполнении условия $(L_{\text{необх}} - \Delta l_p) > 0$.

Зависимости $L_{\text{необх}}$ от $\gamma_{\min}$ для наклонений 80° и 90° и высот 600—2500 км представлены на рис. 8.6—8.9, зависимость $L_{\text{необх}}$ от $h_{\min}$ для ряда широт расположения пунктов ($B_1 = B_2$) — на рис. 8.10 и 8.11, зависимость $L_{\text{необх}}$ от i для ряда высот при постоянных $\gamma_{\min} = 6^\circ$ и $B_1 = B_2 = 20^\circ$ и $B_1 = B_2 = 40^\circ$ представлены на рис. 8.12, зависимость $L_{\text{необх}}$ от $h_{\min}$ для $t_n = 5^m, 6^m, 7^m$ и 8^m и $i = 80^\circ$ при $B_1 = B_2 = 20^\circ, 30^\circ$ и 40° — на рис. 8.13.

Высота орбит, при которой перспективные искажения не превосходят допустимого предела

Перспективные искажения различают в двух направлениях — поперечном и продольном. В связи с тем, что продольные искажения значительно преобладают над поперечными, то последние обычно не принимаются во внимание.

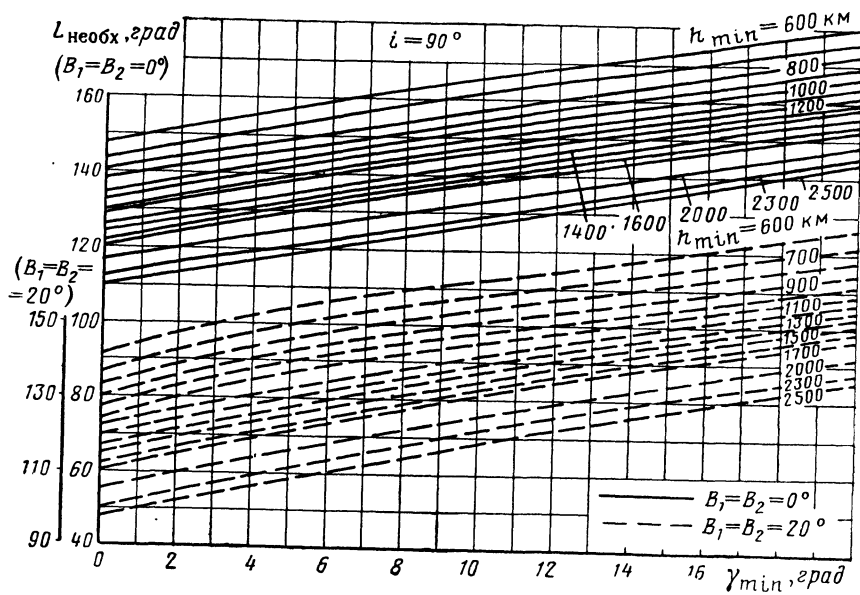


Рис. 8.8. Зависимость $L_{\text{необх}}$ от γ_{min}

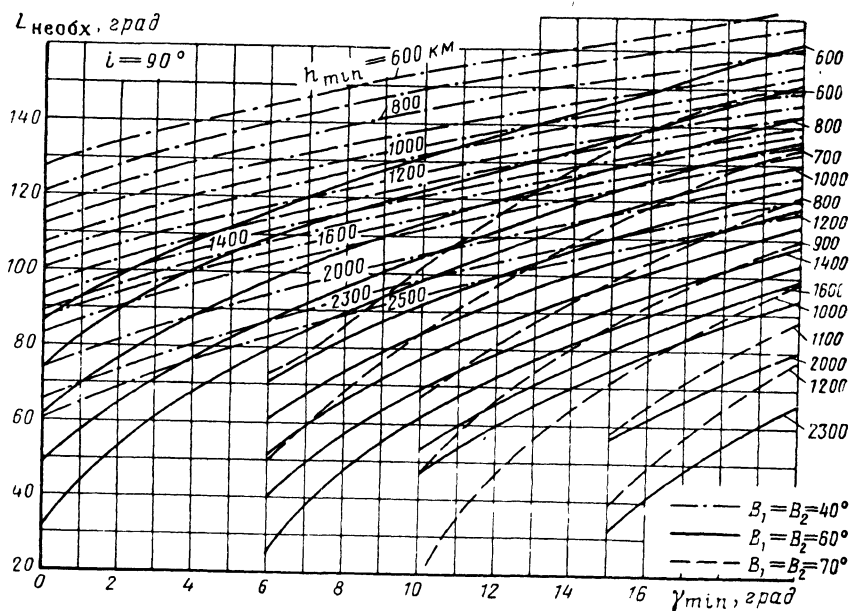


Рис. 8.9. Зависимость $L_{\text{необх}}$ от γ_{min}

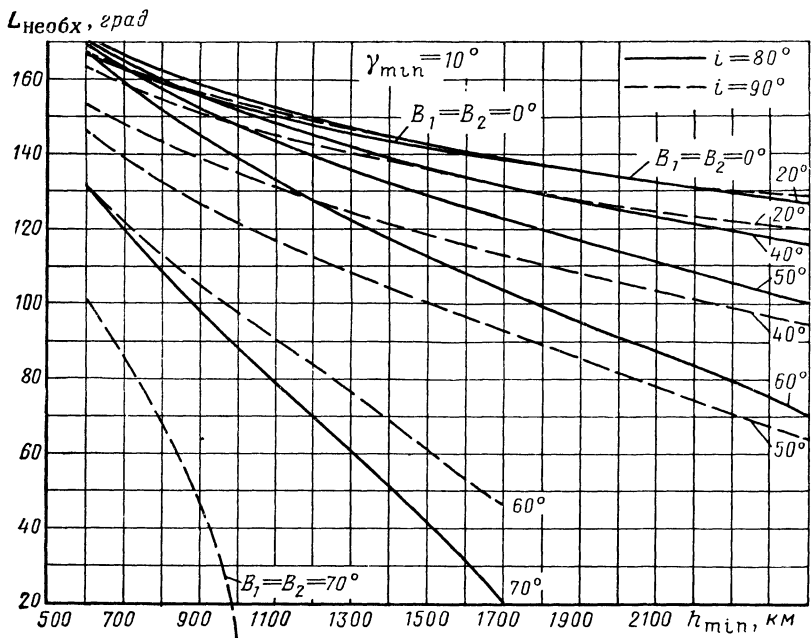


Рис. 8.10. Зависимость $L_{\text{необх}}$ от h_{min}

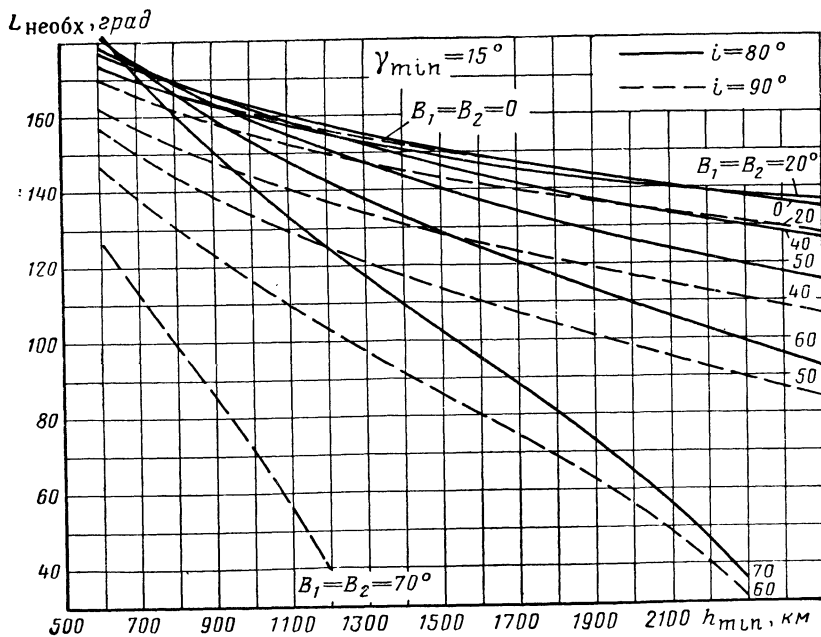


Рис. 8.11. Зависимость $L_{\text{необх}}$ от h_{min}

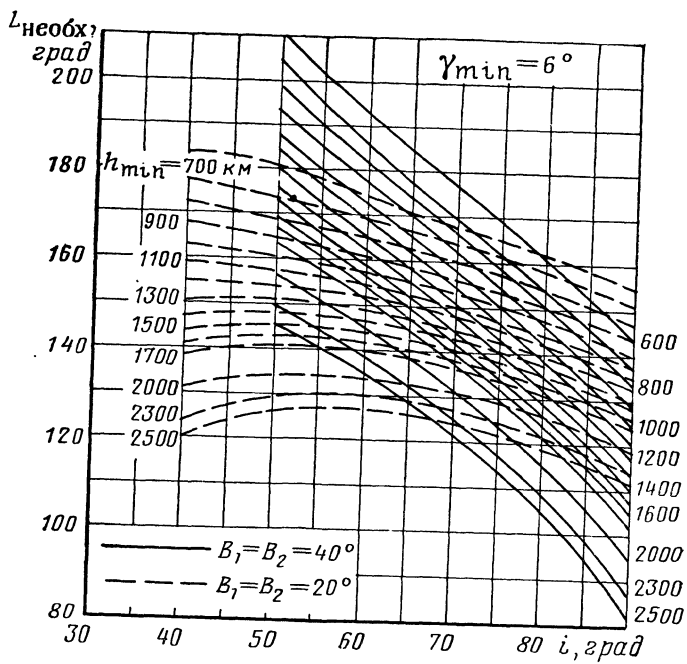


Рис. 8.12. Зависимость $L_{\text{необх}}$ от i

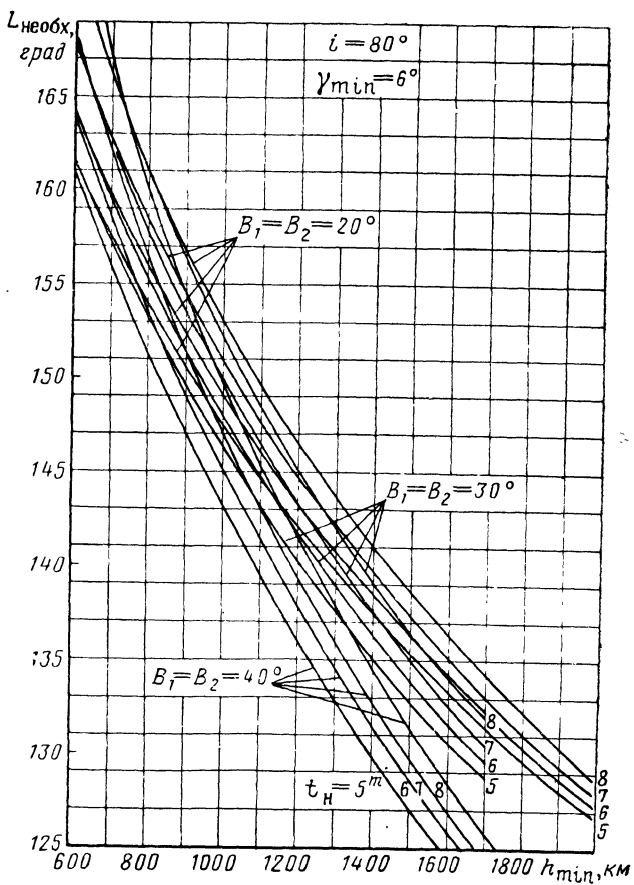


Рис. 8.13. Зависимость $L_{\text{необх}}$ от $h_{\min}$

Зависимость высоты орбиты от допустимого коэффициента перспективных искажений выражается формулой

$$h = \frac{R [\cos \alpha - \cos (l + \alpha)]}{A_{\text{доп}} \cos (l + \alpha) - \cos \alpha}, \quad (8.29)$$

где α — половина угла поля зрения бортовой аппаратуры;

l — половина ширины зоны обзора бортовой аппаратуры [определяется через α по формуле (8.7)];

$A_{\text{доп}}$ — коэффициент, показывающий искажение масштаба за счет перспективы в различных участках изображения относительно подспутниковой точки ($A_{\text{доп}} = 1, 2, 3, \dots$).

Зависимость высоты h от $A_{\text{доп}}$ для различных $2l$ представлена на рис. 8.14.

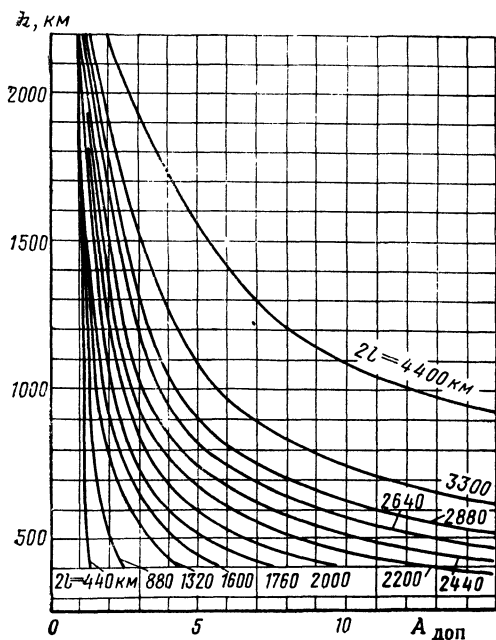


Рис. 8.14. Зависимость высоты орбиты h от $A_{\text{доп}}$

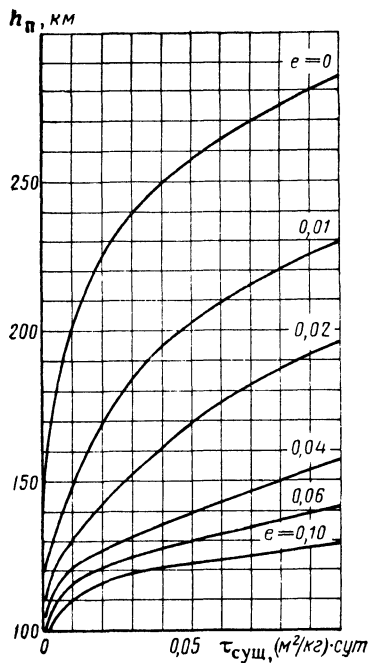


Рис. 8.15. Зависимость высоты перигея h_p от относительного времени существования спутника $\tau_{\text{сущ}}$

Учет характеристик аппаратуры

На выбор высоты орбит накладываются ограничения со стороны технических характеристик наземной и бортовой аппаратуры;

- по минимальному углу места $\gamma_{\min}$;
- по минимальному времени t_n нахождения спутника в зоне действия наземных пунктов, необходимому для воспроизведения запомненной информации;
- по ширине зоны обзора бортовой аппаратуры $2l$;
- по дальности действия аппаратуры D .

Дальность действия аппаратуры ограничивает верхний предел высоты $h_{\max}$, который определяется по формуле

$$h_{\max} = (R^2 + D^2 + 2RD \sin \gamma_{\min})^{1/2} - R. \quad (8.30)$$

Выбор высоты орбит с учетом времени существования ИСЗ

На время существования пассивных ИСЗ влияют следующие основные факторы:

- сопротивление атмосферы;
- гравитационные поля Луны и Солнца;
- световое давление (для ИСЗ с малой плотностью).

Минимальную высоту полета ИСЗ, определяемую влиянием сопротивления атмосферы, удобно находить по графикам на рис. 8.15 и 8.16, где по оси абсцисс отложено относительное время существования $\tau_{\text{сущ}}$, по оси ординат — высота перигея h_p , а кривые

вые соответствуют различным значениям эксцентриситета орбиты e . Графики построены для атмосферы CIRA 1961, которая соответствует периоду максимальной плотности атмосферы.

Время существования ИСЗ $t_{\text{сущ}}$ связано с относительным временем существования $\tau_{\text{сущ}}$ зависимостью

$$t_{\text{сущ}} = \frac{\tau_{\text{сущ}}}{C}. \quad (8.31)$$

Здесь

$$C = \frac{c_x F}{2m},$$

где $c_x = 2 \div 2,5$ — коэффициент аэродинамического сопротивления ИСЗ;

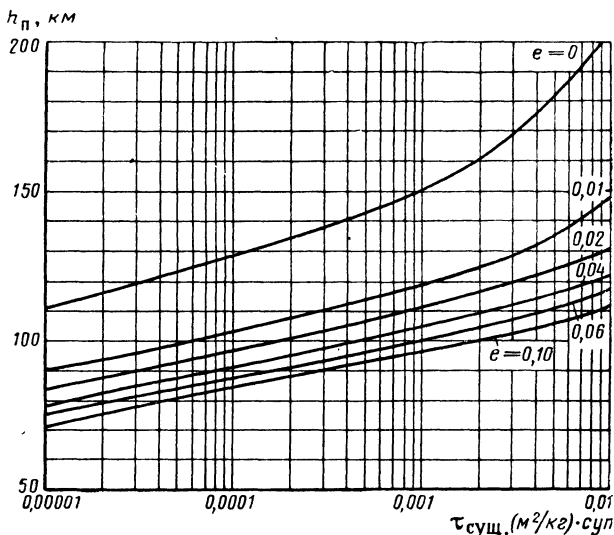


Рис. 8.16. Зависимость высоты перигея h_p от относительного времени существования спутника $\tau_{\text{сущ}}$

F — площадь миделевого сечения ИСЗ, т. е. площадь проекции ИСЗ на плоскость, нормальную к вектору скорости относительно воздуха.

Графики рассчитаны в предположении, что время существования равно нулю, если ИСЗ может сделать еще один полный оборот вокруг Земли.

Пример. Определить время существования ИСЗ с высотой перигея $h_p = 220$ км, эксцентриситетом орбиты $e = 0,01$ и $C = 0,001$ м²/кг.

По графику рис. 8.15 находим, что для $h_p = 220$ км и $e = 0,01$ относительное время существования $\tau_{\text{сущ}} = 0,08$ (м²/кг) · сут.

По формуле (8.31) находим время существования ИСЗ на орбите

$$t_{\text{сущ}} = \frac{\tau_{\text{сущ}}}{C} = \frac{0,08}{0,001} = 80 \text{ сут.}$$

Для определения времени существования ИСЗ на круговых орбитах, определяемого атмосферой CIRA 1961, удобно пользоваться линейными формулами, приведенными в табл. 8.3.

Точность расчета времени существования по данным табл. 8.3 не хуже 15% получаемого результата, что меньше ошибки априорного знания плотности атмосферы.

Пример. Найти время существования ИСЗ массой $m = 6000$ кг, площадью миделевого сечения $F = 3$ м², летящего на круговой орбите с высотой полета 200 км.

По формуле строки 1 из табл. 8.3 получим

$$t_{\text{сущ}} = (-0,092 + 0,0005h) \frac{m}{F} = (-0,092 + 0,0005 \times 200) \frac{6000}{3} = 16 \text{ сут.}$$

Следует отметить, что ошибки расчета времени существования в связи с вариациями плотности атмосферы могут составлять десятки процентов, а на больших высотах (более 500 км) и в годы максимума солнечной активности могут в несколько раз превышать время существования.

Таблица 8.3

№ по пор.	Диапазон высот полета, км	Формула для расчета времени существования ИСЗ в сутках
1	200 ÷ 250	$t_{\text{сущ}} = (-0,092 + 0,0005h) \frac{m}{F}$
2	250 ÷ 300	$t_{\text{сущ}} = (-0,34 + 0,0015h) \frac{m}{F}$
3	300 ÷ 350	$t_{\text{сущ}} = (-1,4 + 0,005h) \frac{m}{F}$
4	350 ÷ 400	$t_{\text{сущ}} = (-3,1 + 0,01h) \frac{m}{F}$

Влияние Луны и Солнца на время существования выражается в том, что для орбит с высоким апогеем возмущения могут привести к существенному снижению перигея и прекращению существования ИСЗ.

Для точного расчета численных значений возмущений элементов орбиты необходимо численно интегрировать уравнения вида

$$\frac{dq_j}{dn} = \delta q_{j1} + \delta q_{j2} + \delta q_{j3} + \delta q_{j4};$$

$$t_{\text{сущ}} = \int_{n_0}^n T dn,$$

где $q_j (j = 1, 2, \dots, 5)$ — элементы орбиты (например, $a, e, \omega_n, i, \Omega$);

n — число оборотов спутника;

$\delta q_{j1}, \delta q_{j2}, \delta q_{j3}, \delta q_{j4}$ — возмущения элементов орбиты за один виток, вызываемые влиянием сопротивления воздуха, сжатием Земли, лунными и солнечными возмущениями.

Вековые возмущения в движении ИСЗ, вызываемые влиянием Луны и Солнца, определяются элементами орбиты спутника a, e, i, ω_n и не зависят от положения восходящего узла орбиты Ω и времени прохождения ИСЗ через узел t_{Ω} . Кроме того, величины возмущений пропорциональны a^3 . Характер возмущений определяется параметрами e, i, ω_n .

В первом приближении в возмущениях высоты перигея наблюдается следующая закономерность. Высота перигея h_n уменьшается в случае, если истинная аномалия ϕ проекции вектора возмущающего ускорения находится во второй или четвертой четверти. Высота перигея увеличивается, если истинная аномалия ϕ находится в первой или третьей четверти. Сказанное пояснено на рис. 8.17.

Эту закономерность можно сформулировать также следующим образом (рис. 8.18). Высота перигея снижается, если угловое расстояние перигея ω_n , отсчитываемое от восходящего узла, лежащего в плоскости возмущающего тела, находится в первой или третьей четверти. Высота перигея увеличивается, если ω_n — во второй и четвертой четверти.

Для оценки вековых лунных возмущений высоты перигея можно воспользоваться табл. 8.4, где приведены средние скорости изменения высоты полета в километрах за один виток ИСЗ для различных высот перигея и апогея орбиты.

Таблица 8.4

Высота апогея h_a км	Средняя скорость изменения высоты полета в км за виток для различных высот перигея h_n в км				
	200	2000	10 000	20 000	50 000
2 000	0,001	—	—	—	—
10 000	0,017	0,014	—	—	—
20 000	0,090	0,103	0,122	—	—
50 000	1,2	1,4	2,0	2,6	—
100 000	10,8	12,3	18,1	23,8	32,8

Оценка величин векового возмущения за продолжительный период в случае нахождения ϑ и ω_p в одной четверти получается путем умножения данных, приведенных в табл. 8.4, на число витков полета.

Величины средних скоростей изменения высоты, вызываемых Солнцем, в 2,2 раза меньше данных, приведенных в таблице.

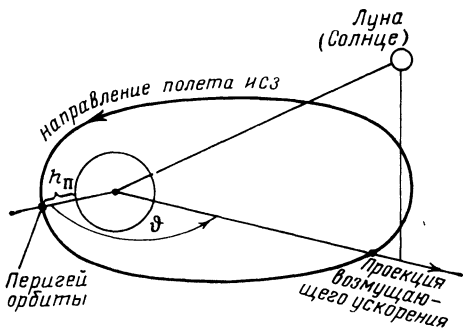


Рис. 8.17. К определению влияния Луны (Солнца) на изменение высот перигея и апогея

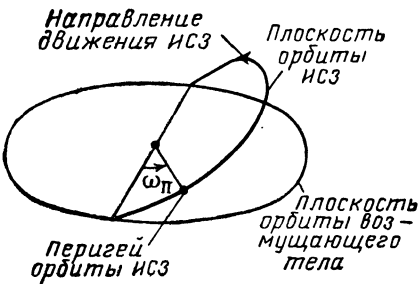


Рис. 8.18. К определению влияния Луны (Солнца) на изменение высот перигея и апогея

Величины максимальных долгопериодических амплитуд солнечных возмущений с периодом 182,66 солнечных суток для различных высот перигея h_p и апогея h_a приведены в табл. 8.5.

Таблица 8.5

Высота апогея h_a в км	Максимальная амплитуда солнечного возмущения в км для различных высот перигея h_p в км				
	200	2000	10 000	20 000	50 000
2 000	0,4	—	—	—	—
10 000	3,2	3,1	—	—	—
20 000	10,0	10,5	9,0	—	—
50 000	51	56	69	70	—
100 000	187	208	277	325	329

Долгопериодические лунные возмущения в 6 раз меньше величин, указанных в табл. 8.5, и имеют период 13,66 солнечных суток.

Пользуясь приведенными выше данными о влиянии Луны и Солнца, можно оценить требуемую величину перигея, обеспечивающую заданное время существования ИСЗ.

Световое давление составляет примерно 1 мг/м² площади ИСЗ.

В табл. 8.6 приведены максимальные возмущения высоты полета в метрах, вызываемые влиянием светового давления на ИСЗ, движущийся по круговой орбите высотой 1000 км.

Таблица 8.6

Отношение характерной площади ИСЗ к его массе, м ² /кг	10	0,03	0,0003
Максимальное возмущение высоты за один виток, м	600	2	0,02

Высоту орбит ИСЗ следует выбирать также с учетом радиационной обстановки в околоземном пространстве, исходя из обеспечения безопасности полета экипажей обитаемых кораблей и удовлетворения требований в отношении нормальной работы бортовых систем при воздействии радиационных поясов Земли за планируемый срок активного существования.

Для этого, задаваясь элементами орбиты ИСЗ, следует определить характер прохождения ИСЗ относительно радиационных поясов Земли и путем последовательных приближений выбирать такие ее элементы, которые удовлетворяют заданному уровню радиации.

8.4. ВЫБОР ВРЕМЕНИ ЗАПУСКА ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

В зависимости от назначения спутники Земли выполняют разнообразные задачи. Одни из этих задач могут быть решены с помощью одного или нескольких, а другие с помощью даже нескольких десятков спутников, ориентированных определенным образом как относительно друг друга, так и относительно Солнца, планет или звезд. Требуемая ориентация плоскостей орбит в пространстве обеспечивается запуском спутников в определенное время. В связи с этим могут возникнуть случаи, когда необходимо осуществить:

— запуск одного спутника в плоскость орбиты, как ориентированную, так и произвольно расположенную в пространстве относительно Солнца, планет или звезд;

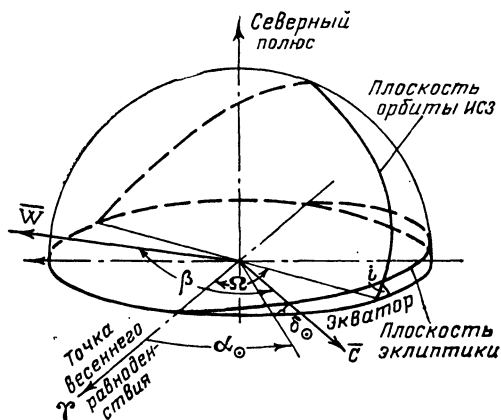


Рис. 8.19. К определению ориентации плоскости орбиты

— запуск нескольких ИСЗ для создания системы из 4 плоскостей орбит, в каждой из которых находится по одному спутнику;

— запуск нескольких ИСЗ для создания системы, состоящей из n плоскостей орбит, в каждой из которой находится по z спутников.

Во втором и третьем случаях системы ИСЗ могут быть как ориентированы, так и не ориентированы относительно Солнца, планет или звезд.

Иногда время запуска обуславливается конструктивными особенностями бортовых систем. Этот случай здесь не рассматривается.

Любая схема взаимного расположения нескольких спутников определяется *угловым расстоянием* φ между восходящими узлами орбит и

фазовым положением Φ каждого спутника в плоскости орбиты.

Под временем создания спутниковой системы P понимается время, отсчитываемое от момента запуска первого до момента запуска последнего спутника.

Плоскостью отсчета называется плоскость орбиты, относительно которой располагаются остальные плоскости системы спутников. При ориентации системы спутников относительно Солнца (планет) за плоскость отсчета принимается та, в которой расположен вектор, направленный из центра Земли на Солнце (планету), а ее наклонение к плоскости экватора соответствует наклонению плоскостей создаваемой системы спутников.

При произвольной ориентации системы спутников за плоскость отсчета принимается плоскость первого спутника.

Ориентация плоскости орбиты относительно Солнца (планеты) определяется углом β , заключенным между вектором $\vec{W}$, перпендикулярным к плоскости орбиты, и вектором $\vec{C}$, направленным из центра Земли на Солнце (планету) (рис. 8.19).

Положение вектора $\overline{W}$ определяется наклонением i и восходящим узлом орбиты Ω , положение вектора $\overline{C}$ — углом прямого восхождения $\alpha_{\odot}$ и углом склонения $\delta_{\odot}$ Солнца (планеты). Скалярное произведение единичных векторов $\overline{W}$ ($i\Omega$) и $\overline{C}$ ($\alpha_{\odot}$, $\delta_{\odot}$) позволяет найти угол между этими векторами:

$$\cos \beta = \sin i \cos \delta_{\odot} \sin (\varrho - \alpha_{\odot}) + \sin \delta_{\odot} \cos i \quad (0^{\circ} \leq \beta \leq 180^{\circ}). \quad (8.32)$$

Ориентация плоскостей орбит считается положительной при $\beta > 90^\circ$ и отрицательной при $\beta < 90^\circ$. При $\beta = 90^\circ$ получается плоскость отсчета.

Положение плоскости орбиты относительно любой другой плоскости определяется углом φ . Ориентация плоскостей относительно плоскости отсчета считается отрицательной, если отсчет углов φ_{j-1} (где j — номер плоскости) ведется от восходящего узла плоскости отсчета по часовой стрелке, и положительной, если отсчет ведется против часовой стрелки (смотря на плоскость экватора с Северного полюса).

С течением времени вследствие прецессии орбит и перемещения Земли вместе с орбитами относительно Солнца (планеты) угол β изменяется. За счет годового движения Земли вместе с орбитой спутника относительно Солнца (планеты) за время t изменяется угол прямого восхождения, который приближенно вычисляется по формуле

$$\alpha_{\odot} = \alpha_{\odot}^0 + \frac{2\pi t}{T_{\Gamma}}, \quad (8.33)$$

где T_{Γ} — продолжительность тропического года ($T = 365,2422$ солнечных суток);

$\alpha_{\odot}^0$ — начальное значение $\alpha_{\odot}$.

За это же время долгота восходящего узла орбиты изменяется на величину

$$\Omega = \Omega_0 - C \cos i \frac{t}{T}, \quad (8.34)$$

где Ω_0 — начальное значение Ω .

$$C = \frac{(2\pi)^{7/3} \epsilon}{\mu^{5/3} (1 - e^2)^{2/3} T^{4/3}} = \frac{888,796}{(1 - e^2)^{2/3} T^{4/3}}.$$

Совместно решая уравнения (8.32), (8.33), (8.34), можно найти изменение угла β с течением времени.

При одинаковых значениях наклонения, периода обращения и эксцентриситета двух орбит угол φ с течением времени сохраняет постоянное значение. При наличии ошибок выведения спутников в этих параметрах (δi , δT и δe) за счет неодинаковой величины прецессии орбит угол φ изменяет свое первоначальное значение.

Изменение угла φ определяется по формуле

$$\varphi - \varphi_0 = C \left[\frac{\cos i}{3T} \delta T + \frac{\sin i}{4} \delta i + \left(1 - \frac{1}{1 - e} \right) \delta e \right] \frac{t}{T} + \delta \varphi_0, \quad (8.35)$$

где $\delta \varphi_0$ — изменение угла φ за счет неточного выдерживания расчетного времени запуска спутников;

φ_0 — начальное значение φ .

Время запуска одиночного спутника

Время запуска спутника в плоскость орбиты с наклонением i и узлом Ω определяется по формуле

$$t_0 = \frac{\Omega + \Delta L - L_0 - S_0}{\omega_3} + M_0 - \tau_a, \quad (8.36)$$

где S_0 — среднее звездное время в гринвичскую полночь; берется из Астрономического ежегодника на дату пуска;

$$\Delta L = \arcsin \left(\frac{\operatorname{tg} B_0}{\operatorname{tg} i} \right);$$

B_0 и L_0 — широта и долгота точки выведения;

$M_0 = N_n + t_d$ — постоянная времени, учитывающая номер пояса N_n , принятого при отсчете времени, и декретное время t_d (для московского времени $M_0 = 3^h$);

τ_a — продолжительность активного участка траектории выведения.

Время запуска спутника в плоскость орбиты, угол ориентации которой составляет $\beta \leq \arccos [\sin(i + \delta_{\odot})]$, вычисляется по формуле

$$t_1 = \frac{\alpha_{\odot} + \Delta L + \Delta \alpha - L_0 - S_0}{\omega_3} + M_0 - \tau_a; \quad (8.37)$$

здесь $\Delta \alpha = \arcsin \left(\frac{\cos \beta - \sin \delta_{\odot} \cos i}{\sin i \cos \delta_{\odot}} \right);$

$\alpha_{\odot}$ и $\delta_{\odot}$ — угол прямого восхождения и угол склонения Солнца (планеты); берутся из Астрономического ежегодника на дату пуска.

Время запуска t_0 спутника в плоскость отсчета вычисляется по формуле (8.37); при этом принимается $\beta = 90^\circ$, т. е.

$$\Delta \alpha = \arcsin (\operatorname{tg} \delta_{\odot} \operatorname{ctg} i).$$

Время запуска спутника в плоскость, восходящий узел которой от восходящего узла плоскости отсчета расположен на угловом расстоянии φ , вычисляется по формулам:

— при положительной ориентации плоскости орбиты

$$t = t_0 + m_0 P_{зв} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi + \Delta\varphi} \right) + \frac{\varphi P_{зв}}{2\pi + \Delta\varphi} = t_0 + \frac{P_{зв}}{1 + \frac{\Delta\varphi}{2\pi}} \left(m_0 + \frac{\varphi}{2\pi} \right); \quad (8.38)$$

— при отрицательной ориентации плоскости орбиты

$$t = t_0 + m_0 P_{зв} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right) + \frac{\varphi P_{зв}}{2\pi} \left(\frac{\Delta\varphi}{2\pi} - 1 \right) = t_0 + P_{зв} \left(m_0 - \frac{\varphi}{2\pi} \right) \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right),$$

где величина m_0 находится по следующему правилу:

$$\left. \begin{aligned} m_0 &= 0 \text{ при } \Delta\tau \leq \frac{\varphi}{15} \text{ (}\varphi \text{ подставляется в градусах);} \\ m_0 &= 1 \text{ при } \frac{\varphi}{15} < \Delta\tau \leq 24^{\text{h}}; \\ m_0 &= 2 \text{ при } 24^{\text{h}} < \Delta\tau \leq 48^{\text{h}}; \\ m_0 &= 3 \text{ при } 48^{\text{h}} < \Delta\tau \leq 72^{\text{h}} \text{ и т. д.;} \end{aligned} \right\} \quad (8.39)$$

$P_{зв}$ — продолжительность звездных суток;

$\Delta\tau$ — время подготовки ракеты-носителя, спутника и пусковой установки к очередному пуску в ч;

$$\Delta\varphi = C \cos i \frac{P_{зв}}{T};$$

T — период обращения ИСЗ.

Создание системы из λ плоскостей, в каждой из которых по одному спутнику, расположенных симметрично относительно плоскости отсчета, в которой находится вектор Земля—Солнце

Время запуска первого спутника определяется по формуле

$$t_1 = t_1^* + \Delta t_1 + \Delta t_2, \quad (8.40)$$

где

$$t_1^* = t_0 - \frac{0,5 \sum_{j=2}^{\lambda} \varphi_{j-1}}{\omega_3}, \quad (8.41)$$

$\sum_{j=2}^{\lambda} \varphi_{j-1}$ — сумма угловых расстояний между восходящими узлами орбит;

$$\Delta t_1 = C \frac{P}{T} \cos i \frac{12}{\pi} \quad (8.42)$$

— поправка, учитывающая прецессию орбиты первого спутника за время создания системы P ;

$$\Delta t_2 = \frac{24P}{T_r} \quad (8.43)$$

— поправка, учитывающая перемещение Земли вместе с орбитой первого спутника относительно Солнца (планеты) за время P .

Примечание. Если в правой части формулы (8.41) получается отрицательное число, равное κ , то

$$t_1^* = 23^{\text{h}}56^{\text{m}}04^{\text{s}} - |\kappa|.$$

Время запуска t_{jn} последующих спутников при произвольном расположении их по фазам находится с помощью выражения

$$t_{jn} = t_1 + (j-1) m_0 P_{зв} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi + \Delta\varphi} \right) + P_{зв} \frac{\sum_{j=2}^{\lambda} \varphi_{j-1}}{2\pi + \Delta\varphi}, \quad (8.44)$$

где j — номер плоскости орбиты или номер запускаемого спутника;

$$\sum_{j=2}^{\lambda} \varphi_{j-1} = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_j + \dots + \varphi_{\lambda-1};$$

φ_j — угловое расстояние между восходящими узлами $j-1$ и j -й плоскостями.
Время создания системы

$$P = (\lambda - 1) m_0 P_{зв} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi + \Delta\varphi} \right) + P_{зв} \frac{\sum_{j=2}^{\lambda} \varphi_{j-1}}{2\pi + \Delta\varphi}. \quad (8.45)$$

Время запуска t_{jp} последующих спутников при обеспечении равенства фаз для всех спутников системы вычисляется по формуле

$$t_{jp} = t_1 + \left[\frac{\sum_{j=2}^{\lambda} \varphi_{j-1}}{|2\pi - (\omega_3 T + C \cos i) n_c|} \right] n_c T, \quad (8.46)$$

где $n_c = \frac{P_{зв}}{T}$ и выражение, заключенное в квадратных скобках, округляется до ближайшего целого числа.

Время создания системы

$$P = \left[\frac{\sum_{j=2}^{\lambda} \varphi_{j-1}}{|2\pi - (\omega_3 T + C \cos i) n_c|} \right] n_c T, \quad (8.47)$$

где n_c и величина в квадратных скобках округляются до ближайшего целого числа.

Создание спутниковой системы из λ плоскостей орбит, в каждой из которых по одному спутнику

Ориентация плоскостей λ орбит в пространстве произвольная, т. е. время запуска первого спутника может быть любым.

Время запуска всех спутников относительно плоскости отсчета определяется:

- при положительной ориентации плоскостей орбит по формуле (8.44);
- при отрицательной ориентации плоскостей орбит по формуле

$$t_{j0} = t_1 + (j - 1) m_0 P_{зв} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right) + P_{зв} \frac{\sum_{j=2}^{\lambda} \varphi_{j-1}}{2\pi} \left(\frac{\Delta\varphi}{2\pi} - 1 \right). \quad (8.48)$$

Время создания системы

$$P = (\lambda - 1) m_0 P_{зв} \left(1 - \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \right) + \frac{P_{зв} \sum_{j=2}^{\lambda} \varphi_{j-1}}{2\pi} \left(\frac{\Delta\varphi}{2\pi} - 1 \right). \quad (8.49)$$

При создании таких систем в каждые сутки для каждого j имеется два значения времени запуска: t_{jn} и t_{jo} .

Создание системы, состоящей из λ плоскостей, в каждой из которой по z спутников

Спутники на орбитах с эксцентриситетом $e \leq 0,01$. Время запуска спутника

в j -ю плоскость, в зависимости от той или иной ориентации плоскостей в пространстве, определяется по формулам (8.44) и (8.48) соответственно.

Запуск спутников в одну и ту же плоскость орбиты с одним и тем же азимутом пуска при наклонении орбит $i \neq 90^\circ$ с одной пусковой установки может производиться не более чем один раз в каждые сутки. В случае проведения маневра на активном участке траектории выведения возможно и большее число раз.

Время запуска последующих спутников в j -ю плоскость определяется по формуле

$$t_{jz} = t_{jq} + \Delta t_s. \quad (8.50)$$

Здесь

$$\Delta t_s = (s - 1) m_1 \frac{P_{зв}}{1 + \frac{\Delta\varphi}{2\pi}}; \quad (8.51)$$

t_{jq} — время запуска первого ИСЗ в j -ю плоскость (индекс q означает н, р или о);
 s — номер запускаемого спутника в j -ю плоскость ($s=2, 3, \dots, z$).

За время Δt_2 при $m_1=1$ предыдущий спутник в данной плоскости отойдет от точки выведения на угол $\Delta\Phi = 2\pi (k_2 - c_0)$, где $k_2 = \frac{\Delta t_2}{T}$, а c_0 — целая часть числа k_2 .

Обычно спутники в одной плоскости орбиты должны располагаться или на равных угловых расстояниях, или на заданных $\Phi \pm \Delta\psi$, где $\Delta\psi$ — допустимое отклонение угла Φ от расчетного значения (обуславливается ошибками выведения).

Чтобы обеспечить расположение двух спутников в одной плоскости на угловом расстоянии $\Phi \pm \Delta\psi$, число проходов m_1 точки выведения через данную плоскость между запусками этих спутников следует определить из неравенства

$$\Phi - \Delta\psi < m_1 \Delta\Phi - 2\pi b < \Phi + \Delta\psi, \quad (8.52)$$

где b — целое число ($b=0, 1, 2, \dots$), которое подставляется в (8.52) до момента удовлетворения неравенства.

Часто число m_1 получается большим, что приводит к значительному и неоправданному увеличению времени создания спутниковой системы. Для уменьшения числа m_1 необходимо несколько изменить период обращения спутников.

Полученные времена запуска последующих спутников как в новую плоскость, так и в одну и ту же проверяются на удовлетворение неравенства

$$t_{j+1} - t_j \geq \Delta\tau,$$

где $\Delta\tau$ — время подготовки ракеты-носителя, спутника и пусковой установки к очередному пуску.

При неудовлетворении неравенства задача образования спутниковых систем может решаться или путем определения потребного количества пусковых установок, или будет состоять в уточнении времени образования системы, которое зависит от чисел m_0 и m_1 , правила определения которых выражены соотношениями (8.39) и (8.52) соответственно.

Спутники на орбитах с эксцентриситетом $e > 0,01$. При создании системы ИСЗ на эллиптических орбитах число m_1 выбирается также методом последовательных приближений. Для этого (предварительно задается $m_1=0, 1, 2, \dots$) определяется угловое расстояние спутника Φ_{m_1} , относительно которого производится запуск нового ИСЗ, в следующем порядке:

— находится средняя аномалия

$$M = 2\pi (k_2 - c_0),$$

где

$$k_2 = \frac{t_{jq}}{T},$$

c_0 — целая часть числа k_2 ;

— вычисляется истинная аномалия

$$\vartheta = M + 2e \sin M + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots; \quad (A)$$

— определяется аргумент широты спутника

$$u = \omega_n + \vartheta + \vartheta_1,$$

где

$$\vartheta_1 = M_1 + 2e \sin M_1 + \frac{5}{4} e^2 \sin 2M + \dots,$$

$$M_1 = \frac{(t_1 + t_3) - t_{00}}{T},$$

$$t_1 = t_0 + \tau_a,$$

$$\Delta t_3 = - \frac{\Delta\varphi}{2\pi} (t_{00} - t_1),$$

t_0 — вычисляется по формуле (8.36) для долготы восходящего узла орбиты Ω , взятой из прогноза движения спутника на любой момент времени t_{00} планируемой даты запуска D_0 ;

— находится угловое расстояние между спутниками

$$\Phi_{m_1} = u - \arcsin \left(\frac{\sin B_0}{\sin i} \right).$$

Примечание. Согласно работе [18] ряд (A) сходится для всех действительных значений M при условии $e < 0,6627$.

Найденное значение Φ_{m_1} сравнивается с заданным Φ , причем число m_1 считается выбранным, если выполняется следующее условие:

$$\Phi + \Delta\psi \geq |\Phi_{m_1}| \geq \Phi - \Delta\psi.$$

При $m_1 > 0$ время запуска $t_{jz} > 24$ ч. В этом случае необходимо производить также уточнение даты старта:

$$D_{ст} = D_0 + \Delta D,$$

где ΔD — целая часть числа $\frac{t_{jz}}{24}$.

Дробная часть числа $\frac{t_{jz}}{24}$ является искомым временем запуска спутника в дату $D_{ст}$.

Время запуска спутника, обеспечивающее его пролет над районами земной поверхности с заданной освещенностью

Если спутник предназначен для наблюдения поверхности Земли в видимой части спектра, то время запуска должно выбираться с учетом освещенности заданных районов поверхности Земли Солнцем. Освещенность поверхности Земли будем характеризовать углом места Солнца $\gamma_{\odot}$ в точке наблюдения. Значение угла места больше некоторого минимального значения $\gamma_{\odot \min}$ обеспечивается выбором времени запуска.

На рис. 8.20 показаны точка старта C , трасса полета $\cup \Omega M$, точка M , находящаяся на заданной широте наблюдения B_3 , и проекция Солнца на сферу.

Минимальное $t'_{c \min}$ и максимальное $t'_{c \max}$ значения местного времени в точке старта C , при которых обеспечивается освещенность поверхности Земли на заданной широте B_3 , определяются выражениями:

$$t'_{c \min} = 12^h - \Delta V - \Delta L_{\odot \max};$$

$$t'_{c \max} = 12^h - \Delta V + \Delta L_{\odot \max};$$

здесь $\Delta L_{\odot \max} =$

$$= \arccos \frac{\sin \gamma_{\odot \min} - \sin B_3 \sin \delta_{\odot}}{\cos B_3 \cos \delta_{\odot}};$$

$\delta_{\odot}$ — склонение Солнца;

$$\Delta V = \arccos \frac{\cos \Delta u - \sin B_c \sin B_3}{\cos B_c \cos B_3},$$

где

$$\Delta u = u_3 - u_c;$$

$$u_3 = \arcsin \frac{\sin B_3}{\sin i};$$

$$u_c = \arcsin \frac{\sin B_c}{\sin i};$$

$$\text{sign } \Delta V = \text{sign } \Delta u;$$

B_c — широта точки старта;

u_3 и u_c — аргументы широты заданных районов и точки старта.

Для определения четвертей углов u_3 и u_c используются зависимости:

для восходящего витка $270^\circ \leq u_3 \leq 90^\circ$

для нисходящего витка $90^\circ \leq u_3 \leq 270^\circ$

при $270^\circ \leq A \leq 90^\circ$ $0^\circ \leq u_c \leq 90^\circ$

при $270^\circ > A \geq 90^\circ$ $180^\circ > u_c \geq 90^\circ$.

Здесь A — азимут запуска.

В практике удобнее пользоваться не местным временем, а гринвичским или московским.

Максимальное и минимальное значения среднего солнечного времени на гринвичском меридиане:

$$t_{c \min}^p = 12^h - L_c - \Delta V - \Delta L_{\odot \max};$$

$$t_{c \max}^p = 12^h - L_c - \Delta V + \Delta L_{\odot \max},$$

где L_c — долгота точки старта.

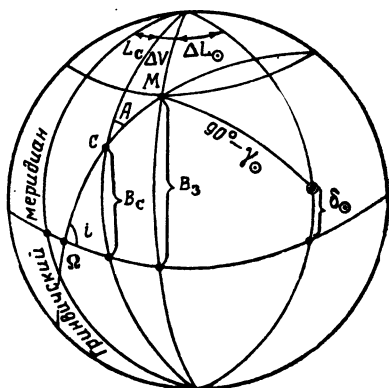


Рис. 8.20. К определению времени запуска из условия освещенности земной поверхности

Выражения для московского времени старта:

$$t_{c \min} = 15^h - L_c - \Delta V - \Delta L_{\odot \max};$$

$$t_{c \max} = 15^h - L_c - \Delta V + \Delta L_{\odot \max}.$$

Приведенные формулы не содержат уравнения времени, которое при необходимости может быть легко учтено. Однако это допущение дает ошибку в угле места Солнца менее 4° , что в большинстве случаев вполне приемлемо, поскольку возможность обзора местности или облачного покрова Земли в значительной степени зависит также от характера поверхности, угла ИСЗ — цель — Солнце и т. д. При проведении точных расчетов необходимо также во время запуска вводить поправку, равную разности времен полета на активном участке выведения и по дуге орбиты от точки старта до точки выхода.

Время освещенности поверхности Земли на восходящих или нисходящих витках при полете спутника может быть найдено из выражения

$$t_{B0} = \frac{2\Delta L_{\odot \max}}{\Delta L_{\odot \text{сут}}},$$

где $\Delta L_{\odot \text{сут}} = \Delta L'_{\odot \text{сут}} + \Delta \Omega$,

$\Delta L'_{\odot \text{сут}}$ — изменение прямого восхождения Солнца за одни сутки;

$\Delta \Omega$ — прецессия узла орбиты за одни сутки.

Значение величин $\Delta L_{\odot \text{сут}}$ для «среднего Солнца» и круговых орбит с высотами полета $h=200$ и 1250 км приведены в табл. 8.8.

Таблица 8.8

i , град		50	60	65	70	75	80
$\Delta L_{\odot \text{сут}}$	$h=200$ км	6,8	5,5	4,8	4,1	3,3	2,6
	$h=1250$ км	4,4	3,7	3,3	2,8	2,4	1,9

Продолжительность освещенности (в днях) поверхности Земли, ограниченной минимальными углами места Солнца $\gamma_{\odot \min}$, при склонении Солнца $\delta_{\odot}$ на широте B для орбит с различным наклонением i приведена в табл. 8.9, 8.10 и 8.11.

В числителе продолжительность освещенности дана для высоты орбиты 200 км, а в знаменателе — для 1250 км. Следует иметь в виду, что указанная в таблице освещенность имеет место как на восходящем, так и на нисходящем витках, причем эти периоды могут накладываться.

Время запуска и максимальная продолжительность затмения ИСЗ

На выбор времени запуска ИСЗ часто накладываются ограничения по продолжительности пребывания его в тени Земли, или, что то же самое, по продолжительности затмения спутника. Так, например, для обеспечения заданного теплового баланса и энергетики солнечных источников питания спутника необходимо, чтобы продолжительность затмения не превышала допустимой величины.

Для прямых орбит (наклонение меньше 90°) восходящий узел прецессирует на запад, тогда как движение Солнца относительно плоскости орбиты будет происходить во встречном направлении. Таким образом, для прямых орбит будет покрываться тенью как восходящая, так и нисходящая часть витка орбиты.

Для обратных орбит (наклонение больше 90°) движение узла и Солнца происходит в одном направлении, что приводит к частичной или полной компенсации их относительного движения. Это значит, что для обратных орбит в течение года может произойти затмение одной части витка или не быть его вовсе.

Чтобы исключить влияние затмения спутника на время запуска целесообразно проектировать бортовую аппаратуру спутника с продолжительным временем существования исходя из максимальной продолжительности затмения.

Максимальное время затмения спутника наблюдается тогда, когда Солнце находится в плоскости орбиты. Время запуска при этом можно вычислить по формуле (8.37), положив угол $\beta=90^\circ$.

Таблица 8.9

Накло- нение i , град	Широта B , град	Продолжительность освещенности в днях при $\gamma_{\odot \min}=5^\circ$ для различных углов $\delta_{\odot}$ в град				
		—23,5	—10	0	10	23,5
50	0	25/38	25/39	25/39	25/39	25/38
	20	22/34	24/37	25/38	26/40	27/42
	40	18/28	22/34	25/38	26/40	31/42
	45	16/25	21/33	24/38	26/40	31/49
60	0	31/46	31/46	31/46	31/46	31/46
	20	27/41	29/44	31/46	32/48	34/50
	40	22/33	27/40	30/45	32/48	48/56
	55	14/21	24/36	30/44	31/51	42/63
65	0	35/51	35/51	35/51	35/51	35/51
	20	31/45	34/49	35/51	37/53	39/55
	40	25/37	31/45	35/41	37/53	43/63
	60	8/12	35/27	33/48	34/50	52/75
70	0	41/60	41/61	41/61	41/61	41/60
	20	37/55	40/58	41/60	43/63	45/67
	40	30/43	36/53	41/60	43/63	51/74
	65	0	26/38	38/56	39/57	66/96
75	0	51/70	52/71	52/71	52/71	51/70
	20	45/62	49/68	51/70	53/73	57/78
	40	37/51	45/62	50/70	53/73	63/87
	60	9/16	28/51	48/67	50/69	75/104
	70	0	25/35	46/63	47/64	95/130
80	0	65/89	65/89	65/89	75/89	65/89
	20	58/79	62/85	65/89	68/93	72/98
	40	47/64	57/79	64/88	64/88	80/110
	60	15/20	47/64	61/84	63/87	95/130
	75	0	0	42/74	55/75	∞

Таблица 8.10

Накло- нение i град	Широта B , град	Продолжительность освещенности в днях при $\gamma_{\odot \min}=20^\circ$ для различных углов $\delta_{\odot}$ в град				
		—23,5	—10	0	10	23,5
50	0	20/31	21/32	21/32	21/32	20/31
	20	17/26	19/29	20/31	21/33	22/35
	40	9/14	16/24	19/29	21/33	24/38
	45	5/7	14/22	18/28	21/33	25/38
60	0	25/37	25/38	25/38	25/38	25/37
	20	20/30	23/35	25/37	26/39	28/41
	40	11/17	19/29	23/34	26/39	30/45
	55	0	11/17	19/29	25/37	32/48
65	0	28/41	29/42	29/42	29/42	28/41
	20	23/34	27/39	29/42	30/44	32/46
	40	13/19	22/32	26/38	30/44	35/50
	60	0	0	20/29	28/41	37/54
70	0	33/49	34/50	34/50	34/50	33/49
	20	27/40	31/46	33/49	35/52	37/54
	40	15/23	26/38	31/45	35/52	40/59
	65	0	0	17/26	31/46	42/62

Наклоне- ние i град	Широта B , град	Продолжительность освещенности в днях при $\gamma_{\odot \min}=20^\circ$ для различных углов $\delta_{\odot}$ в град				
		-23,5	-10	0	10	23,5
75	0	41/57	42/58	42/58	42/58	41/57
	20	34/47	39/54	42/57	44/60	46/63
	40	19/26	32/44	39/53	44/60	50/69
	60	0	0	30/41	41/56	54/75
	70	0	0	0	35/48	51/70
80	0	52/72	54/73	54/74	54/73	52/72
	20	43/59	49/68	53/72	56/76	58/80
	40	24/33	41/56	49/67	49/67	64/87
	60	0	0	37/51	52/71	69/94
	75	0	0	0	36/50	61/83

Таблица 8.11

Наклоне- ние i град	Широта B , град	Продолжительность освещенности в днях при $\gamma_{\odot \min}=40^\circ$ для различных углов $\delta_{\odot}$ в град				
		-23,5	-10	0	10	23,5
50	0	13/21	14/22	15/18	14/22	13/21
	20	7/11	12/18	14/21	15/23	16/25
	40	0	0	10/15	13/21	17/26
	45	0	0	7/11	12/19	17/26
60	0	17/25	18/27	18/27	18/27	17/25
	20	9/14	15/22	17/25	18/28	20/29
	40	0	0	12/18	16/24	21/31
	55	0	0	0	10/15	19/29
65	0	19/28	20/30	21/30	20/30	19/28
	20	10/15	18/25	19/28	21/31	23/33
	40	0	0	14/20	19/27	24/34
	60	0	0	0	0	15/30
70	0	22/23	24/35	24/36	24/35	22/33
	20	12/18	20/29	23/33	25/36	26/38
	40	0	0	16/23	22/32	28/40
	65	0	0	0	0	21/31
75	0	28/38	30/41	30/42	30/41	28/38
	20	15/21	25/34	28/39	31/42	33/45
	40	0	0	20/27	27/38	34/47
	60	0	0	0	0	30/41
	70	0	0	0	0	19/26
80	0	35/48	38/52	38/53	38/52	35/48
	20	19/27	31/43	36/49	39/54	41/57
	40	0	0	25/35	35/48	43/58
	60	0	0	0	0	38/52
	75	0	0	0	0	0

Из рассмотрения схемы движения спутника по круговой орбите (рис. 8.21) можно вывести выражение для определения максимального времени затмения t_T (без учета рефракции):

$$t_T = \frac{T}{\pi} \arcsin \frac{R}{r}, \quad (8.53)$$

где $T = 2\pi \frac{r^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$ — период обращения спутника;

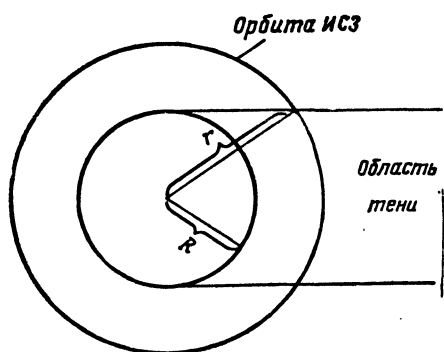


Рис. 8.21. К определению максимального времени затмения спутника на круговой орбите

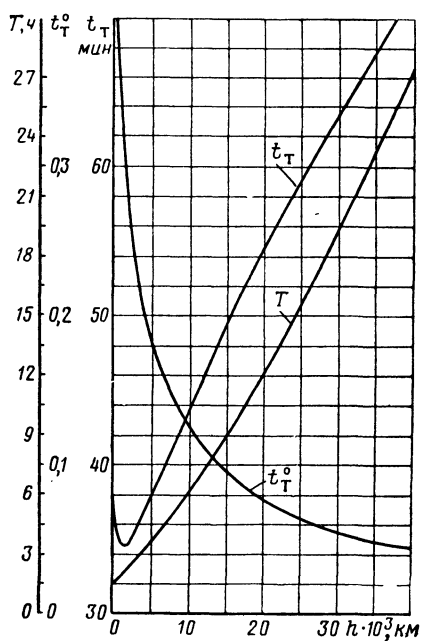


Рис. 8.22. Зависимость максимального t_T и относительного t_T^o времени затмения и периода T обращения спутника от высоты полета h .

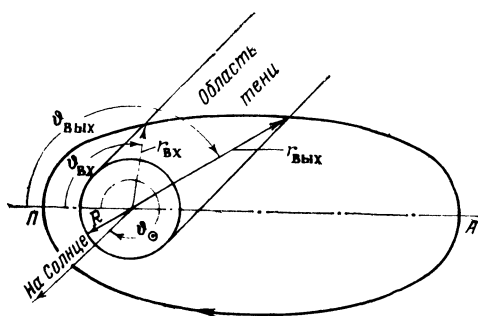


Рис. 8.23. К определению максимального времени затмения спутника на эллиптической орбите

$\mu = 3,986 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2$;
 $R = 6371 \text{ км}$ — средний радиус Земли;
 r — расстояние до спутника от центра Земли
 $(r = R + h$ — для круговых орбит).

Относительное время затмения

$$t_{\tau}^0 = \frac{t_{\tau}}{T} = \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{R}{r}. \quad (8.54)$$

Результаты расчетов величин t_{τ} и t_{τ}^0 по формулам (8.53) и (8.54) представлены на рис. 8.22.

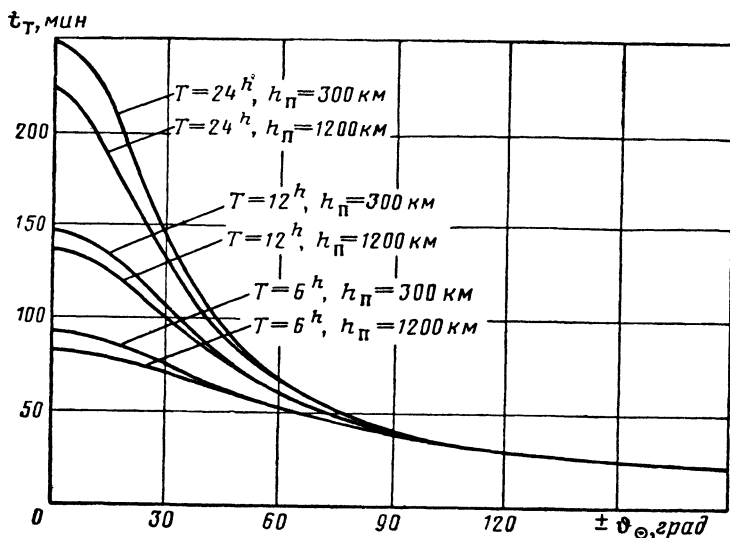


Рис. 8.24. Зависимость максимального времени затмения спутника t_{τ} от истинной аномалии Солнца $\varphi_{\odot}$

Схема определения максимальной продолжительности затмения спутника, движущегося по эллиптической орбите, представлена на рис. 8.23. В этом случае спутник проходит границу тени Земли при выполнении условия

$$\cos \vartheta_{\text{в}} = \frac{1}{e} \left[\frac{a(1-e^2)}{R} \sin |\vartheta_{\odot} - \pi - \vartheta_{\text{в}}| - 1 \right], \quad (8.55)$$

где $\vartheta_{\text{в}}$ — истинная аномалия спутника при входе $\vartheta_{\text{вх}}$ в тень и на выходе $\vartheta_{\text{вых}}$ из тени;
 $\vartheta_{\odot}$ — истинная аномалия Солнца.

Формула (8.55) используется при расчете истинной аномалии ИСЗ как в точке входа в тень, так и в точке выхода из тени.

Максимальное время затмения спутника, движущегося по эллиптической орбите,

$$t_{\tau} = t_{\text{вых}} - t_{\text{вх}},$$

где

$$t_{\text{вх (вых)}} = \frac{E_{\text{вх (вых)}} - e \sin E_{\text{вх (вых)}}}{\lambda};$$

$$\operatorname{tg} \frac{E_{\text{вх (вых)}}}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta_{\text{вх (вых)}}}{2};$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}};$$

E — эксцентрическая аномалия.

Относительное время затмения

$$t_{\tau}^0 = \frac{t_{\tau}}{T}.$$

Максимальные времена затмений t_T спутников, движущихся по различным эллиптическим орбитам, приведены на рис. 8.24 и 8.25.

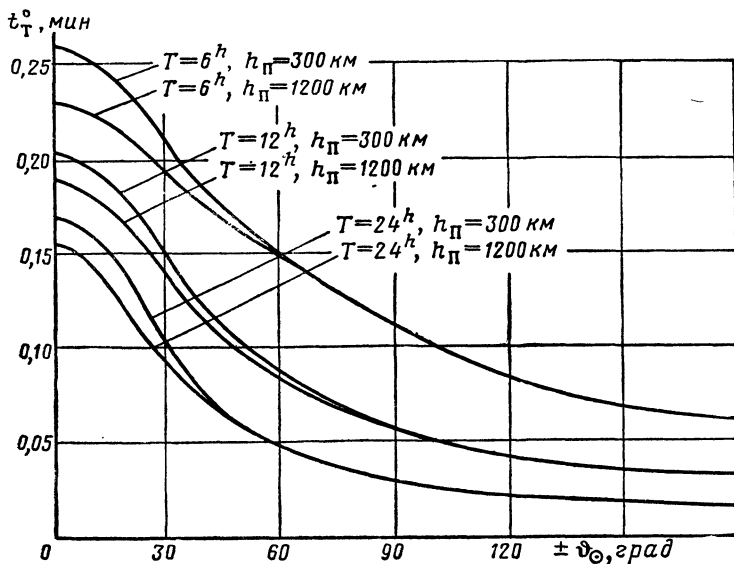
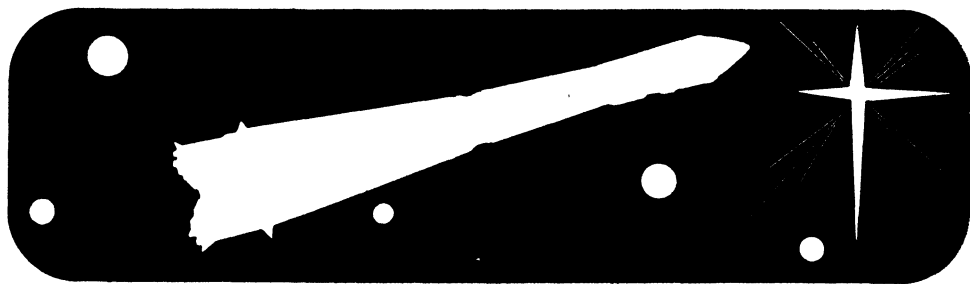


Рис. 8.25. Зависимость относительного максимального времени затмения спутника t_T^0 от истинной аномалии Солнца $\theta_{\odot}^0$

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. VIII

1. Варго, Паскуали, Герстен. Орбиты спутников наблюдения.— «Ракетная техника», 1962, № 1.
2. Дубошин Г. Н. Небесная механика. М., Физматгиз, 1963.
3. Жури́н Б. Л. Максимальное время затмения спутников Земли.— «Космические исследования», т. V, вып. 2. М., «Наука», 1967.
4. Казаков С. А. Курс сферической астрономии, ОНИТИ, 1935.
5. Карымов А. А. Определение времени освещенности искусственного спутника Земли Солнцем. — «Космические исследования», т. V, вып. 2. М., «Наука», 1967.
6. Кондратьев К. Я. Метеорологические спутники М., Гидрометеиздат, 1963.
7. Научное использование искусственных спутников. М., ИЛ, 1960.
8. Об искусственном спутнике Земли. М., Госиздат, 1959.
9. Охотимский Д. Е., Белецкий В. В. Использование ориентированного на Землю спутника для исследований, связанных с Солнцем.— в сб.: «Искусственные спутники Земли», вып. 16. Изд-во АН СССР, 1963.
10. Погорелов Д. А. Теория кеплеровых движений летательных аппаратов. М., Физматгиз, 1961.
11. Проблемы движения искусственных небесных тел. Доклады на конференции по общим и прикладным вопросам теоретической астрономии. Изд-во АН СССР, 1963.
12. Пуанкаре А. Лекции по небесной механике. М., «Наука», 1965.
13. Справочник по космонавтике. М., Воениздат, 1966.
14. Тихонравов М. К. и др. Основы теории полета и элементы проектирования ИСЗ. М., «Машиностроение», 1967.
15. Штерн Т. Введение в небесную механику. Пер. с англ. М., «Мир», 1964.
16. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М., «Наука», 1965.
17. Яцунский И. М. Определение условий освещенности и времени пребывания искусственного спутника в тени и на Солнце.— В сб.: «Искусственные спутники Земли», вып. 4. Изд-во АН СССР, 1960.
18. Eskobal P. R. Orbital entrance and exit from the shadow of the Earth, ARSJ, 1962, XII, vol. 32, No. 12, p. 1939—41.
19. Murrel M. D. Time per orbit that earth satellites in equatorial orbits are in earth's shadow, J. Brit. Interplanetary Soc., 1963, III—IV, vol. 19, No. 2, p. 41—44.
20. Pierce D., A rapid method for determining the percentage of circular orbit in the shadow of the earth, J. Astronaut Sci., 1962, vol. 9, No. 3, p. 89—92.



ГЛАВА IX

ВЫВЕДЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ОРБИТУ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- A_0 — азимут прицеливания.
- a — большая полуось эллипсоида.
- B_0 — геодезическая широта точки старта.
- b — малая полуось эллипсоида.
- c_x, c_y, c_z — аэродинамические коэффициенты.
- e — эксцентриситет.
- f — гравитационная постоянная.
- g — ускорение силы тяжести.
- h — высота полета.
- m — текущее значение массы ракеты-носителя.
- $\dot{m}$ — секундный расход массы.
- P — тяга двигателя.
- $P_{уд}$ — удельная тяга.
- R_z — боковая сила.
- r — текущее расстояние от центра Земли до центра масс ракеты-носителя.
- R_x — сила лобового сопротивления.
- R_y — подъемная сила.
- S — площадь мишени ракеты.
- $u(t)$ — функция управления.
- V — вектор скорости.
- c — скорость истечения газов из сопла двигателя.
- $\dot{W}_{x1}, \dot{W}_{y1}, \dot{W}_{z1}$ — проекции кажущегося ускорения на оси связанной системы координат.
- α — угол атаки.
- β — угол скольжения.
- θ — угол наклона вектора скорости $\vec{V}$ к оси Ox стартовой системы координат.
- θ^* — угол наклона $\vec{V}$ к местному горизонту.
- φ — угол тангажа.
- ω_3 — скорость вращения Земли.

Вопросы выведения КА на орбиту включают в себя целый комплекс задач проектирования ракеты-носителя: выбор числа ступеней, распределения масс между ступенями, определение перегрузок (тяги двигателей), а также программы изменения угла тангажа и др. Из большого круга задач проектирования здесь рассматриваются две, которые можно отнести к динамике полета: выбор программы изменения угла тангажа (или угла атаки) и тяги двигателей.

9.1. СИЛЫ И МОМЕНТЫ, ДЕЙСТВУЮЩИЕ НА РАКЕТУ-НОСИТЕЛЬ

При движении на участке выведения на ракету-носитель действуют следующие основные силы и моменты:

- сила тяжести;
- тяга двигателя;
- аэродинамические силы и их моменты.

9.1.1. Сила тяжести

Точное выражение для силы тяжести земного эллипсоида в любой точке пространства приведено в гл. I.

В некоторых случаях допускается проводить расчеты в предположении о сферичности Земли радиусом R и пренебрегать ее вращением. Тогда потенциал земного притяжения записывается в виде

$$V = \frac{\mu}{r}, \quad \text{где } \mu = fM = 3,986 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2.$$

При таком допущении ускорение силы земного притяжения направлено по радиусу к центру Земли и определяется по формуле

$$g = \frac{\mu}{r^2},$$

которая используется при выборе закона движения ракеты-носителя.

9.1.2. Тяга двигателя

Реактивную тягу $\vec{P}_d$ можно определить как произведение секундного расхода массы $\dot{m}$ вытекающих из сопла продуктов сгорания на скорость $\vec{c}$ истечения продуктов сгорания:

$$\vec{P}_d = -\dot{m}\vec{c}.$$

Полную тягу двигателя можно записать в виде

$$\vec{P} = -\dot{m}\vec{c} + S_a(p_a - p)\vec{x}_1^0.$$

Если вектор $\vec{c}$ направлен в сторону, противоположную вектору $\vec{x}_1^0$, то

$$P = \dot{m}c + S_a(p_a - p) = P_0 + S_a(p_0 - p),$$

где p_a — давление газов на срезе сопла;

p — атмосферное давление на высоте;

p_0 — атмосферное давление у земли;

P_0 — тяга двигателя у земли;

S_a — площадь выходного сечения у сопла.

Величину $S_a(p_0 - p)$ называют *высотной добавкой*, так как она характеризует увеличение тяги с ростом высоты.

В качестве характеристики двигателя используется *удельная тяга* $P_{уд}$, которая определяется как отношение тяги P к весовому секундному расходу топлива $\dot{G} = mg_0$.

Значения удельной тяги (удельного импульса) могут определяться по следующим зависимостям:

$$\text{— в пустоте } P_{уд\infty} = \frac{P_\infty}{\dot{G}};$$

$$\text{— у поверхности Земли } P_{уд0} = P_{уд\infty} - \frac{S_a p_0}{m_0 g_0};$$

$$\text{— и на любой высоте } P_{уд} = P_{уд\infty} - \frac{S_a p}{m g_0}.$$

Здесь P_∞ — тяга двигателя в пустоте, равная

$$P_\infty = P_0 + S_a p_0.$$

Значения тяги P_0 и секундного расхода $\dot{m}_0$ определяются при стендовых испытаниях двигателя.

9.1.3. Аэродинамические силы и моменты

Аэродинамические силы возникают в результате воздействия воздушной среды на поверхность ракеты-носителя.

Полную аэродинамическую силу R обычно представляют в виде трех составляющих по осям скоростной ($x y z$) или связанной ($x_1 y_1 z_1$) системы координат (рис. 9.1):

— подъемной силы R_y ;

— силы лобового сопротивления R_x ;

— боковой силы R_z .

Все эти силы определяются следующими зависимостями:

$$R_{y1} = c_{y1} \frac{\rho V^2}{2} S = c_{y1}^a q S \alpha;$$

$$R_{x1} = c_{x1} \frac{\rho V^2}{2} S = c_{x1} q S;$$

$$R_{z1} = c_{z1} \frac{\rho V^2}{2} S = -c_{z1}^\beta q S \beta;$$

$$R_y = c_y q S;$$

$$R_x = c_x q S;$$

$$R_z = c_z q S,$$

где $q = \frac{\rho V^2}{2}$ — скоростной напор;

S — площадь мишени ракеты;

β — угол скольжения; при положительном значении β силы R_z и R_{z1} отрицательны;

α — угол атаки;

$c_x, c_y, c_z, c_{x1}, c_{y1}, c_{z1}$ — аэродинамические коэффициенты.

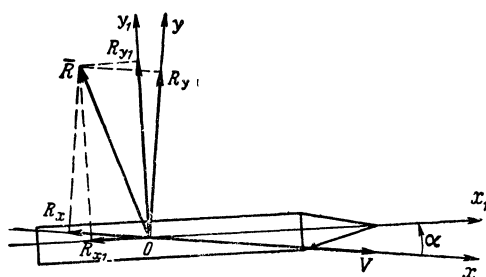


Рис. 9.1. Аэродинамические силы, действующие на ракету-носитель

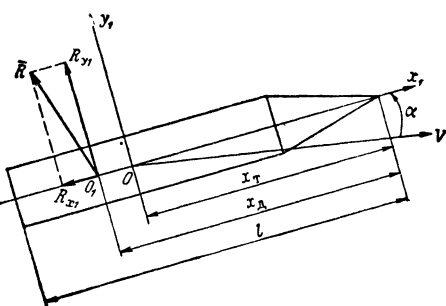


Рис. 9.2. К определению аэродинамических моментов

Значения коэффициентов подъемной силы c_y , лобового сопротивления c_x и боковой силы c_z обычно получают на основании результатов продувок моделей летательных аппаратов в аэродинамической трубе или путем теоретического расчета [11]. Аэродинамические коэффициенты зависят от чисел Маха M и Рейнольдса Re .

В общем случае линия действия полной аэродинамической силы $\bar{R}$ не проходит через центр масс ракеты и пересекает ее продольную ось в точке O_1 (центр давления) (рис. 9.2). В результате этого возникает момент от аэродинамической силы $\bar{R}$, который обычно представляют в виде двух моментов вокруг осей Oz_1 и Oy_1 .

Из рис. 9.2 следует, что аэродинамические моменты можно определить по формулам

$$M_{z1} = -c_{y1}^a q S \alpha (x_L - x_T) = m_{z1}^a q S l \alpha;$$

$$M_{y1} = -c_{z1}^\beta q S \beta (x_L - x_T) = m_{y1}^\beta q S l \beta,$$

где

$$m_{z1}^a = -c_{y1}^a \frac{x_L - x_T}{l};$$

$$m_{y1}^\beta = -c_{z1}^\beta \frac{x_L - x_T}{l};$$

или

$$M_{y1} = -M_{y1}^\beta \beta = -m_{y1}^\beta q S l \beta;$$

$$M_{z1} = -M_{z1}^a \alpha = -m_{z1}^a q S l \alpha.$$

В этих формулах M_{z1}^a и M_{y1}^β — производные по α и β коэффициентов аэродинамических моментов.

В зависимости от положения центра давления относительно центра масс ракеты аэродинамические моменты могут быть стабилизирующими или опрокидывающими. Если центр давления O_1 лежит за центром масс O ($x_d > x_t$ и $m_{z1}^a < 0$), то момент M_{z1} стремится уменьшить угол атаки α , т. е. является стабилизирующим. При расположении центра давления впереди центра масс момент M_{z1} будет опрокидывающим.

Таким образом, статическая устойчивость ракеты определяется знаками аэродинамических коэффициентов m_{z1}^a и m_{y1}^b . При отрицательных значениях коэффициентов m_{z1}^a и m_{y1}^b ракета статически устойчива, при положительных — статически неустойчива.

При вращении ракеты-носителя вокруг центра масс возникают аэродинамические моменты, препятствующие вращению; их называют *демпфирующими моментами*.

Величины составляющих демпфирующего момента определяются по формулам

$$\Delta M_{x1} = -m_{x1}^{\omega} q V S l^2 \omega_{x1};$$

$$\Delta M_{y1} = -m_{y1}^{\omega} q V S l^2 \omega_{y1};$$

$$\Delta M_{z1} = -m_{z1}^{\omega} q V S l^2 \omega_{z1},$$

где m_{x1}^{ω} , m_{y1}^{ω} , m_{z1}^{ω} — производные коэффициентов аэродинамического момента по угловой скорости вращения ракеты-носителя, определяемые экспериментальным или расчетным путем;

ω — угловая скорость вращения ракеты-носителя.

9.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ

Уравнения движения ракеты-носителя являются основой для решения большого числа различных задач, связанных с расчетом номинальных траекторий, исследованием влияния возмущающих факторов на точность выведения КА на заданные орбиты, баллистическим проектированием ракет-носителей и их систем управления, исследованием устойчивости движения и т. п.

Для решения каждой из этих задач на основе общих уравнений движения, анализа системы сил, действующих на ракету, составляются уравнения движения в виде, позволяющем с достаточной точностью наиболее удобно выявить исследуемые особенности движения.

Определение элементов движения ракеты-носителя на участке выведения производится, как правило, численным интегрированием на ЭВМ системы дифференциальных уравнений движения центра масс ракеты-носителя. При выводе уравнений для расчета траектории выведения основным допущением является пренебрежение инерционными членами в уравнениях, описывающих движение ракеты-носителя относительно центра масс.

В качестве модели Земли при расчете траектории ракеты-носителя используется общий земной эллипсоид; гравитационное поле соответствует этой модели [см. гл. I]. Атмосфера принимается неподвижной относительно Земли с параметрами, равными стандартным.

Расчет параметров движения ракеты-носителя на участке выведения может производиться в любой системе координат. Наиболее часто движение определяют относительно стартовой системы координат $Ox_0y_0z_0$, которая позволяет достаточно просто учитывать параметры атмосферы, наглядно увязывает траекторию с точкой старта, плоскостью прицеливания и измерительными пунктами, обслуживающими пуск ракеты.

Кроме стартовой системы, используется связанная система координат $Ox_1y_1z_1$. В этой системе наиболее удобно записываются основные силы, действующие на ракету (сила тяги, управляющие и аэродинамические силы).

Для правильного учета угловой ориентации программного положения оси ракеты, задаваемой гироскопическими приборами системы управления, вводится гироскопическая система координат $Ox_gy_gz_g$. Оси этой системы координат совпадают с соответствующими осями стартовой системы в момент старта ракеты ($t=0$). В дальнейшем гироскопическая система координат сохраняет неизменным положение своих осей в абсолютном пространстве.

Угловое положение осей связанной системы координат относительно гироскопической задается с помощью углов тангажа φ , рысканья ψ и вращения χ . Угол вращения на всем участке выведения мал и практически не влияет на точность расчета траектории центра масс, поэтому обычно в подобных расчетах принимают $\chi=0$.

При этом допущении матрица направляющих косинусов осей связанной системы координат в гироскопической системе имеет вид

$$\|A\| = \begin{vmatrix} \cos \varphi \cos \psi & \sin \varphi \cos \psi & -\sin \psi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi \sin \psi & \sin \varphi \sin \psi & \cos \psi \end{vmatrix}.$$

Матрица направляющих косинусов осей гироскопической системы координат в стартовой системе имеет вид

$$\|B\| = \begin{vmatrix} n_x^2 + (1 - n_x^2) \cos \chi & -n_z \sin \chi + (1 - \cos \chi) n_x n_y & n_y \sin \chi + (1 - \cos \chi) n_x n_z \\ n_z \sin \chi + (1 - \cos \chi) n_x n_y & n_y^2 + (1 - n_y^2) \cos \chi & -n_x \sin \chi + (1 - \cos \chi) n_y n_z \\ -n_y \sin \chi + (1 - \cos \chi) n_x n_z & n_x \sin \chi + (1 - \cos \chi) n_y n_z & n_z^2 + (1 - n_z^2) \cos \chi \end{vmatrix}.$$

где $\chi = \omega_3 t$ — угол поворота Земли вокруг своей оси, отсчитываемый с момента старта ракеты-носителя;

$$n_x = \cos B_0 \cos A_0;$$

$$n_y = \sin B_0;$$

$$n_z = -\cos B_0 \sin A_0$$

— направляющие косинусы вектора угловой скорости ($\bar{\omega}_3$) вращения Земли в осях стартовой системы координат $\widetilde{Oxyz}$;

B_0 — геодезическая широта точки старта;

A_0 — азимут прицеливания.

Матрица направляющих косинусов осей связанной системы в стартовой системе координат может быть получена перемножением матриц

$$\|C\| = \|A\| \|B\|.$$

Управление движением центра масс в процессе полета ракеты-носителя осуществляется по специально выбранным законам на основании показаний инерциальных приборов (акселерометров), установленных на борту и ориентированных определенным образом относительно связанной или гироскопической системы координат. Все акселерометры независимо от принципов измерения (астатиические гироскопы, маятниковые приборы и др.) реагируют не на полное ускорение ракеты, а на так называемое кажущееся ускорение. Под кажущимся ускорением понимают ту долю полного ускорения ракеты-носителя, которую она приобретает под действием всех внешних сил (включая тягу двигателя), за исключением массовых, т. е. силы тяжести и силы Кориолиса.

Вводится также понятие проекции кажущейся скорости, представляющей собой первый интеграл от проекции кажущегося ускорения на рассматриваемое направление.

Система дифференциальных уравнений ракеты-носителя на участке выведения в стартовой системе координат имеет вид

$$\|\dot{W}_1\| = \left\| \begin{matrix} \dot{W}_{x1} \\ \dot{W}_{y1} \\ \dot{W}_{z1} \end{matrix} \right\| = \frac{1}{m} \|F\|;$$

$$\|\dot{V}\| = \left\| \begin{matrix} \dot{V}_x \\ \dot{V}_y \\ \dot{V}_z \end{matrix} \right\| = \|C\| \cdot \|\dot{W}_1\| - 2\omega_3 \|\omega_3\| \cdot \|V\| - \|g\|;$$

$$\left\| \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{matrix} \right\| = \|V\|;$$

$$\|\dot{W}_r\| = \left\| \begin{matrix} \dot{W}_{x_r} \\ \dot{W}_{y_r} \\ \dot{W}_{z_r} \end{matrix} \right\| = \|A\| \cdot \|\dot{W}_1\|;$$

$$\dot{m} = \dot{m}(t).$$

Для определения правых частей, кроме введенных выше выражений, необходимо использовать следующие уравнения:

$$\|F\| = \left\| \begin{matrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \end{matrix} \right\|;$$

$$\|\omega_3^*\| = \begin{vmatrix} 0 & -n_z & n_y \\ n_z & 0 & -n_x \\ -n_y & n_x & 0 \end{vmatrix};$$

$$\|g\| = \begin{vmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{vmatrix}.$$

Здесь

$$F_{x1} = P + X_1 + R_{x \text{ упр}};$$

$$F_{y1} = Y_1 + R_{y \text{ упр}};$$

$$F_{z1} = Z_1 + R_{z \text{ упр}}.$$

Величины, входящие в систему дифференциальных уравнений, имеют следующий смысл:

$\dot{W}_{x1}, \dot{W}_{y1}, \dot{W}_{z1}, \dot{W}_{xT}, \dot{W}_{yT}, \dot{W}_{zT}$ — проекции кажущегося ускорения на оси связанной ($O_1x_1y_1z_1$) и гироскопической ($Ox_Ty_Tz_T$) систем координат;

V, V_x, V_y, V_z — модуль вектора скорости и его проекции на оси стартовой ($Oxyz$) системы координат;

ω_3 — угловая скорость вращения Земли;

g, g_x, g_y, g_z — модуль вектора ускорения силы тяжести и его проекции на оси стартовой ($Oxyz$) системы координат;

m — текущее значение массы ракеты-носителя;

$\dot{m}(t)$ — заданный закон изменения расхода массы;

P — суммарная тяга основных двигателей ракеты-носителя, рассчитываемая (см. разд. 9.1) по формуле

$$P = P_{\text{уд.пуст}} g_0 m_{\text{осн}}(t) - \Delta P \cdot \pi(h),$$

где

$P_{\text{уд.пуст}}$ — удельная тяга основных двигателей при полете ракеты за пределами атмосферы;

ΔP — максимальный статический прирост тяги двигателей (разность значений тяги за пределами атмосферы и у поверхности Земли);

$\pi(h) = \frac{p(h)}{p_0}$ — отношение атмосферного давления на высоте к давлению на уровне моря;

$\dot{m}_{\text{осн}}(t)$ — расход массы ракеты через сопло основных двигателей;

X_1, Y_1, Z_1 — проекции суммарного вектора аэродинамической силы R на оси связанной ($O_1x_1y_1z_1$) системы координат.

Для расчета этих величин удобно использовать выражения:

$$X_1 = -c_{x1}(M, h) D \pi(h) M^2;$$

$$Y_1 = c_{y1}^a(M, h) D \pi(h) M^2 \alpha;$$

$$Z_1 = c_{z1}^b(M, h) D \pi(h) M^2 \beta.$$

Здесь $c_{x1}, c_{y1}^a, c_{z1}^b$ — аэродинамические коэффициенты, зависящие от высоты и числа Маха; как правило, для ракет-носителей принимается $c_{y1}^a = c_{z1}^b$;

$$M — \text{число Маха} \left(M = \frac{V}{\sqrt{k R_T T(h)}} \right);$$

$$D — \text{постоянная величина} \left(D = \frac{k p_0 S_M}{2} \right),$$

где k — показатель адиабаты (для воздуха);

R_T — удельная газовая постоянная воздуха;

$T(h)$ — закон распределения температуры воздуха по высоте;

$k, R_T, T(h), p_0, \pi(h)$ — выбираются в соответствии с принятой моделью атмосферы Земли;

α, β — угол атаки и скольжения;

S_M — площадь мидела ракеты-носителя;

$R_{x \text{ упр}}, R_{y \text{ упр}}, R_{z \text{ упр}}$ — проекции суммарного вектора управляющих сил $\bar{R}_{\text{упр}}(q_i)$ на оси связанной ($O_1x_1y_1z_1$) системы координат.

В выражения для суммарного вектора управляющих сил входят параметры q_i , определяющие величину управляющего усилия (например, углы поворота рулевых дви-

гателей). Указанные параметры q_i связаны с движением ракеты-носителя уравнениями управления

$$F(q_i, x_j) = 0.$$

Вид этого уравнения управления и используемые для управления параметры движения x_j определяются структурой системы управления и конструкцией командных приборов, поэтому они являются предметом специального рассмотрения для каждого образца ракеты-носителя.

Решение задачи по определению параметров движения ракеты-носителя на участке выведения с помощью ЭВМ имеет ряд специфических особенностей, одной из которых является обилие разнородной исходной информации. Общей для всех ракет-носителей является исходная информация о модели Земли (параметры общего земного эллипсоида и его поля силы тяжести), характеристики стандартной атмосферы. Для каждого образца ракеты-носителя исходные данные включают в себя число ступеней и их начальные массы, располагаемый запас топлива по ступеням, закон измерения расхода топлива для основных и управляющих двигателей, удельные тяги и статический при-

рост тяги для всех двигателей, аэродинамические коэффициенты $c_{x1}(M, h)$ и $c_{y1}^a(M, h)$ и площадь миделя. Для решения уравнения моментов необходимо знать изменение положения центра масс ракеты по мере выгорания топлива, изменение положения точки приложения главного вектора аэродинамических сил, точки приложения управляющих сил.

Кроме того, необходимо задать структуру и коэффициенты уравнений управления.

Другой особенностью составления программы для расчета на ЭВМ параметров участка выведения является необходимость широкого варьирования вариантов расчета как по условиям решаемой задачи, так и по объему и виду выдаваемой информации.

Изложенный подход к составлению уравнений для расчета участка выведения космического аппарата на орбиту показывает, что для каждого образца ракеты-носителя необходимо проведение самостоятельного исследования по составлению динамической схемы расчета, наиболее полно отвечающей решаемой задаче.

Для широкого класса задач при приближенном расчете участков выведения, когда параметры ракеты-носителя известны лишь приближенно, а структура системы управления еще не определена, можно воспользоваться упрощенными уравнениями движения.

Если не учитывать влияние вращения Земли, то пространственную задачу можно свести к плоской (рис. 9.3). Идеализация работы системы управления дает возможность исключить уравнения управления.

Уравнения движения в скоростной системе координат упрощают расчет аэродинамических сил. Они имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{m} (\dot{P} + R_{x \text{ упр}} - c_x \cdot q \cdot S_m) - g \cdot \sin \theta - \frac{X}{r} g \cdot \cos \theta; \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{V} \left[\frac{\varphi_{\text{пр}} - \theta}{m} \left(P + R_{y \text{ упр}} + \frac{l_1 - l_{\pi}}{l_1 - l_{\tau}} c_y^a \cdot q \cdot S_m \right) - \right. \\ &\quad \left. - g \cdot \cos \theta + \frac{X}{r} g \sin \theta \right]; \\ \dot{X} &= V \cdot \cos \theta; \\ \dot{Y} &= V \cdot \sin \theta. \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

Для сферической модели Земли

$$g = \frac{g_0 \cdot R_3^2}{r^2};$$

$$r = \sqrt{X^2 + (R_3 + Y)^2}.$$

В приведенных уравнениях использованы дополнительные обозначения:

θ — угол наклона вектора скорости к оси Ox стартовой системы координат;

r — текущее расстояние от центра Земли;

R_3 — средний радиус Земли;

l_1 — расстояние от переднего среза ракеты-носителя до оси вращения рулевого органа;

l_d — расстояние от переднего среза ракеты-носителя до точки приложения суммарной аэродинамической силы;

l_T — расстояние от переднего среза ракеты-носителя до центра масс ракеты.

Интегрирование приведенной системы уравнений возможно при условии, что известен закон программного изменения угла тангажа $\Phi_{пр}(t)$ по времени и изменения массы.

Вопрос о выборе оптимальных законов управления рассмотрен в разд. 9.3.

9.3. ВЫВЕДЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ОРБИТУ СПУТНИКОВ

На этапе баллистического проектирования одним из вопросов, который необходимо исследовать, является выбор оптимальной траектории движения ракеты-носителя. Анализ этого вопроса приводит к задаче определения такого закона движения ракеты-носителя, при котором выбранный критерий оптимальности достигает своего максимального или минимального значения. Таким критерием в различных частных случаях при решении задачи выведения космического аппарата может быть величина полезного груза, высота орбиты и др.

Решение задач оптимизации движения ракеты-носителя основывается на методах вариационного исчисления.

Однако целый ряд вариационных задач, важных для современной ракетной техники, не может быть решен методами классического вариационного исчисления. Для решения таких задач целесообразно использовать принцип максимума Л. С. Понтрягина [26] или метод динамического программирования Беллмана [2].

При анализе вариационных задач динамики полета в качестве модели ракеты-носителя обычно принимают материальную точку, движущуюся под действием сил тяги, тяжести и аэродинамического сопротивления.

Одной из важных задач является выбор оптимального закона движения ракеты-носителя из условия выведения на орбиту космического аппарата максимального веса. Практически эта задача заключается в выборе оптимальных законов изменения угла тангажа $\varphi(t)$ и тяги двигательной установки $P(t)$.

Анализ этой задачи с точки зрения ограничений, накладываемых на функции управления, показывает, что ее надо решать отдельно для атмосферного и внеатмосферного участков траектории. Такой подход позволяет упростить методику проведения расчетов.

В общем виде задача об отыскании оптимального закона управления полетом ракеты-носителя заключается в нахождении такой траектории, на которой некоторый заданный функционал принимает экстремальное значение.

Математическую постановку этой задачи можно сформулировать следующим образом. Движение ракеты-носителя в общем случае описывается с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m) = f_i(x, u), \quad (9.2)$$

где $x_1, \dots, x_n$ — фазовые координаты носителя;

$u_1, \dots, u_m$ — параметры (функции) управления, определяющие закон движения в каждый момент времени.

Если на некотором отрезке времени $[t_0, t_k]$ задан закон управления $u_1(t), \dots, u_m(t)$, то при любых начальных условиях x_0 однозначно определяется закон движения ракеты-носителя $x=x(t)$, т. е. решение системы (9.2) на этом отрезке времени.

В технических задачах параметры (функции) управления не могут принимать произвольных значений, а подчинены некоторым ограничениям. Управления, удовлетворяющие этим ограничениям, называют допустимыми.

Необходимо среди всех допустимых управлений $u=u(t)$, переводящих ракету-носитель из точки с фазовыми координатами x_0 в точку x_k , найти такое, для которого функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_k} f^0(x, u) dt$$

принимает экстремальное значение.

Управление $u(t)$, дающее решение поставленной задачи, называют *оптимальным управлением*, а соответствующую ему траекторию $x(t)$ — *оптимальной*.

Для решения такой задачи целесообразно использовать методы математической теории оптимальных процессов, например, принцип максимума Л. С. Понтрягина [25]. В этой теории для получения основного необходимого условия оптимальности наряду с переменными $x_1, \dots, x_n$ рассматриваются новые переменные $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$, которые подчинены следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \dots, n, \quad (9.3)$$

где

$$H(x, u, \lambda) = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_i(x, u),$$

и сопряженной системе

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (9.3')$$

Принцип максимума заключается в следующем. Пусть $u(t)$ при $t_0 \leq t \leq t_1$ — такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория $x(t)$, исходящая в момент t_0 из точки x_0 , проходит в момент t_1 через некоторую точку x_1 .

Управление $u(t)$ считается кусочно-непрерывным, т. е. каждая из функций $u(t)$ может иметь конечное число разрывов первого рода на конечном интервале времени. Кусочно-непрерывные управления соответствуют предположению о «безынерционности» рулей.

Рассматривается допустимое управление, принимающее значения в области управления U , т. е.

$$u(t) \in U.$$

Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $x(t)$ необходимо существование такой ненулевой непрерывной вектор-функции $\lambda(t) = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, соответствующей функциям $u(t)$ и $x(t)$, что:

1. При любом t , $t_0 \leq t \leq t_1$, функции $H(\lambda(t), x(t), u(t))$ переменного $u \in U$ достигает в точке $u = u(t)$ максимума

$$H(\lambda(t), u(t), x(t)) = M(\lambda(t), x(t)). \quad (9.4)$$

2. В конечный момент времени t_1 выполнены соотношения

$$\lambda_0(t_1) < 0; \quad M(\lambda(t), x(t)) = 0. \quad (9.5)$$

Если величины $\lambda(t)$, $x(t)$ и $u(t)$ удовлетворяют некоторой системе (9.3) и (9.3') и условию (9.4), то функции $\lambda_0(t)$ и M переменного t являются постоянными, так что проверку соотношения (9.5) можно проводить не обязательно в момент t_1 , а в любой момент t , $t_0 \leq t \leq t_1$.

Принцип максимума устанавливает лишь необходимые условия оптимальности. В большинстве практических случаев это условие позволяет однозначно выбрать оптимальное управление.

9.3.1. Атмосферный участок

При практическом решении вопроса о выборе оптимального закона движения ракеты-носителя необходимо учитывать ряд специфических требований, касающихся условий старта, температурных режимов, условий разделения ступеней, управляемости, возможности упрощения системы управления, улучшения эксплуатационных характеристик и др.

На этапе баллистического проектирования обычно рассматриваются законы движения, обеспечивающие выведение на заданную орбиту космического аппарата максимально возможного веса при учете только энергетических соображений и некоторых основных уже известных ограничений.

Общие требования к программе угла тангажа атмосферного участка, учитываемые на этапе проектирования:

1. Вертикальный старт и определенная продолжительность вертикального полета.
2. Максимальный угол атаки $\alpha_{\max}$ на участке управляемого разворота не должен превышать допустимого.

3. В районе трансзвуковых скоростей угол атаки должен быть равным нулю.

При выборе программы угла тангажа, оптимальной с точки зрения наивыгоднейшего использования энергетических возможностей носителя, обычно не учитывают возможные ограничения, накладываемые на нее системой управления. Такой подход к решению дает возможность оценить максимальные возможности носителя и потери, обусловленные использованием системы управления определенного типа. В последующем, после выбора системы управления, эти ограничения необходимо учесть.

Очень важным фактором является то, что для выполнения программы угла тангажа $\varphi(t)$ могут потребоваться большие углы атаки, которые вызовут большие изги-

бающие моменты на корпусе и высокие нагрузки в конструкции. Целесообразно решать задачу, исходя из условия, что на большей части атмосферного участка движение осуществляется по траектории «гравитационного разворота», или *нулевого угла атаки*, которая характеризуется тем, что на ней сила тяги всегда фиксируется вдоль вектора скорости.

Перечисленные требования могут быть удовлетворены программами, выбранными из условия равенства нулю угла атаки на большей части траектории атмосферного участка. Программа такого типа может быть выбрана следующим образом [1].

1. Вертикальный участок ($0 \leq t \leq t_1$)

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

(t_1 — время конца вертикального участка).

2. Дозвуковой участок ($t_1 \div t_2$) определяется моментом времени, когда число M близко к единице ($M \approx 0,8$). Скорость в этот момент определяется по формуле

$$V = -gP_{уд0} \ln \mu - v_0 P_{уд0} (1 - \mu),$$

где μ — отношение текущей массы к начальной (при $t=t_1$ значение $\mu \approx 0,95$);

$P_{уд0}$ — удельная тяга;

v_0 — отношение начального веса к начальной тяге.

После определения μ время t_2 вычисляется по формуле

$$t = v_0 P_{уд0} (1 - \mu).$$

Изменение угла атаки на этом участке может быть задано в виде зависимости

$$\alpha = -\alpha_{\max} \sin^2 \left(\frac{t - t_1}{(t - t_1) + k(t_2 - t_1)} \pi \right), \quad (9.6)$$

$$\varphi = \theta + \alpha,$$

где k — отношение времени нарастания угла атаки от нуля до максимума ко времени спадания от максимума до нуля ($k \approx 0,15 \div 0,35$).

Зависимость $\alpha = \alpha(t)$ дает плавный ход кривой $\alpha(t)$ с нулевыми производными в точках t_1 и t_2 и позволяет выбрать любые значения $\alpha_{\max}$, а также получить эти значения в любой момент времени между t_1 и t_2 путем изменения коэффициента k .

В принципе можно составить и ряд других зависимостей, удовлетворяющих предъявляемым требованиям.

3. Баллистический участок ($t_2 \div t_h$)

$$\alpha = 0; \varphi = \theta$$

t_h — время, соответствующее достижению высоты конца атмосферного участка.

Изменяя величину $\alpha_{\max}$ (в допустимых пределах), можно получить различные траектории атмосферного участка и среди них выбрать те, которые будут удовлетворять перечисленным выше требованиям.

Таким образом, изложенный метод позволяет выбирать программу угла тангажа с учетом перечисленных требований в виде однопараметрической, т. е. характеризуемой только величиной максимального угла атаки на участке управляемого разворота.

9.3.2. Внеатмосферный участок

При выборе закона движения на внеатмосферном участке траектории воздействие аэродинамических сил можно не учитывать. Такое допущение значительно расширяет возможность оптимизации траектории движения, так как отпадают многие ограничения, накладываемые на управление.

При составлении уравнений движения приняты следующие допущения:

1. Траектория движения плоская.
2. Земля — шар, вращение отсутствует.
3. Ускорение силы тяжести на высоте h определяется выражением

$$g = g_0 \left(\frac{R}{R + h} \right)^2.$$

4. Величина силы тяги считается линейной функцией расхода массы.

5. Продольная ось ракеты-носителя всегда совпадает с ее программным направлением.

Для определения условий оптимального управления целесообразно записать уравнения движения в проекциях на радиус-вектор $\bar{r}$ центра масс ракеты-носителя и направление τ , перпендикулярное ему (рис. 9.4).

Уравнение движения в векторной форме имеет вид

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F},$$

где $\bar{F}$ — суммарный вектор внешних сил.

В результате преобразования можно получить

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{r}^0 [\ddot{r} - r\omega^2] + \bar{\tau}^0 [2\dot{r}\omega + r\dot{\omega}], \quad (9.7)$$

где

$\bar{r}^0$ и $\bar{\tau}^0$ — орты направления координатных осей.

Вводя обозначения

$$V_r = \dot{r}; \quad V_\tau = r\omega,$$

равенство (9.7) можно записать в виде

$$\frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{r}^0 \left(\dot{V}_r - \frac{V_\tau^2}{r} \right) + \bar{\tau}^0 \left(\dot{V}_\tau + \frac{V_r V_\tau}{r} \right). \quad (9.8)$$

В проекциях на направления r и τ уравнение (9.8) запишется в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_\tau &= \frac{c\beta}{m} \cos \varphi' - \frac{V_r V_\tau}{R+h}; \\ \dot{V}_r &= \frac{c\beta}{m} \sin \varphi' + \frac{V_\tau^2}{R+h} - g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}; \\ \dot{h} &= V_r; \\ \dot{\delta} &= \frac{V_\tau}{R+h}; \\ \dot{m} &= -\beta, \end{aligned} \right\} \quad (9.9)$$

где φ' — угол тангажа, отсчитываемый от местного горизонта;

δ — полярный угол между текущим и начальным радиусами-векторами;

$c = \text{const}$ — скорость истечения газов из сопла;

β — секундный расход массы, причем

$$\beta_{\min} \leq \beta \leq \beta_{\max}.$$

Система уравнений движения (9.9) позволяет упростить математические выкладки и вполне достаточна для проведения исследований по выбору закона движения.

Из системы (9.9) видно, что семь переменных V_τ , V_r , h , δ , m , β , φ' связаны пятью уравнениями, следовательно, две переменные можно выбрать произвольно. Такими переменными являются функции управления φ' и β .

Таким образом, задача заключается в выборе законов управления по φ' и β такими, чтобы соответствующая им траектория давала минимум функционалу

$$I = \int_{t_0}^{t_k} \beta dt, \quad (9.10)$$

или

$$I = -m_k,$$

где m_k — конечная масса ракеты-носителя при выведении на орбиту.

Функции управления и траектория должны удовлетворять условиям системы (9.9), которая может быть записана в виде

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u),$$

где x — фазовый вектор;

u — вектор управления;

f — пятимерный вектор фазовых координат и управления.

На концах участка выведения должны выполняться граничные условия:

при $t=t_0$

$$g_i(V_\tau^0, V_r^0, h^0, \delta^0, m^0, t_0) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \dots k \leq 6, \quad (9.11)$$

при $t=t_k$

$$g_j(V_\tau^k, V_r^k, h^k, \delta^k, m^k, t_k) = 0, \quad j = 1, 2, 3 \dots l \leq 6,$$

где t_0 — момент начала внеатмосферного участка траектории;

t_k — момент выхода на заданную орбиту.

С точки зрения вариационного исчисления, эта задача на условный экстремум с дифференциальными связями, которыми являются уравнения движения (9.9).

Для нахождения оптимального решения по принципу максимума составляется функция H :

$$H = \lambda_1 \frac{c\beta}{m} \cos \varphi' - \lambda_1 \frac{V_\tau V_r}{R+h} + \lambda_2 \frac{c\beta}{m} \sin \varphi' + \lambda_2 \frac{V_\tau^2}{R+h} - \lambda_2 g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} + \\ + \lambda_3 V_r + \lambda_4 \frac{V_\tau}{R+h} - \lambda_5 \beta,$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ — ненулевой непрерывный вектор, удовлетворяющий системе уравнений, сопряженной системе (9.9).

Сопряженная система (9.3) в развернутом виде будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{\lambda}_1 &= \lambda_1 \frac{V_r}{R+h} - \lambda_2 \frac{2V_\tau}{R+h} - \lambda_4 \frac{1}{R+h}; \\ \dot{\lambda}_2 &= \lambda_1 \frac{V_\tau}{R+h} - \lambda_3; \\ \dot{\lambda}_3 &= -\lambda_1 \frac{V_\tau V_r}{(R+h)^2} + \lambda_2 \left[\frac{V_\tau^2}{(R+h)^2} - 2g_0 \frac{R^2}{(R+h)^3} \right] + \lambda_4 \frac{V_\tau}{(R+h)^2}; \\ \dot{\lambda}_4 &= 0; \\ \dot{\lambda}_5 &= \frac{c\beta}{m^2} (\lambda_1 \cos \varphi' + \lambda_2 \sin \varphi'). \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

Если на протяженность участка выведения не наложено никаких ограничений, то четвертое уравнение системы (9.9) можно исключить из рассмотрения, так как δ не входит в остальные уравнения системы.

После простейших преобразований функцию H можно представить в виде

$$H = H_1(x, u, \lambda) + S(x, \lambda),$$

где

$$H_1 = \beta K(x, \varphi', \lambda);$$

$$K = \frac{c}{m} (\lambda_1 \cos \varphi' + \lambda_2 \sin \varphi') - \lambda_5;$$

$$S = -\lambda_1 \frac{V_\tau V_r}{R+h} + \lambda_2 \left[\frac{V_\tau^2}{R+h} - g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2} \right] + \lambda_3 V_r + \lambda_4 \frac{V_\tau}{R+h}.$$

Из условия абсолютного максимума функции H можно получить

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (9.13)$$

Анализ равенства (9.13) можно найти в работе [29].

Из условия абсолютного максимума функции H по β при условии $K \neq 0$ можно показать, что β принимает граничные значения, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \text{при } K > 0 \quad \beta &= \beta_{\max}; \\ \text{при } K < 0 \quad \beta &= \beta_{\min}. \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

Как видно, от знака функции K зависит характер участка оптимальной траектории, поэтому ее называют *функцией переключения*.

Момент перехода двигательной установки с режима максимальной тяги на режим минимальной или наоборот определяется из условия

$$K = \frac{c}{m} (\lambda_1 \cos \varphi' + \lambda_2 \sin \varphi') - \lambda_5 = 0. \quad (9.15)$$

Условие (9.14) позволяет определить оптимальный режим тяги в неособом случае, когда $K \neq 0$.

Значение β внутри промежутка $[\beta_{\min}, \beta_{\max}]$ возможно только при $K=0$ на нулевом интервале времени.

Легко показать, что функция K может быть константой (в частном случае нулем) только при $\beta = \text{const}$.

Таким образом, можно прийти к следующему выводу. Экстремаль содержит только участки минимальной и максимальной тяги ($\beta = \beta_{\min}$ и $\beta = \beta_{\max}$) и не содержит участков с промежуточной тягой, причем на минимали выполняется условие

$$\left. \begin{array}{l} \text{при } K > 0 \quad \beta = \beta_{\max}; \\ \text{при } K < 0 \quad \beta = \beta_{\min} = 0, \end{array} \right\} \quad (9.16)$$

в точке переключения

$$K = \frac{c}{m} (\lambda_1 \cos \varphi' + \lambda_2 \sin \varphi') - \lambda_5 = 0.$$

Если $K=0$ на ненулевом интервале времени, то функционал I (9.10) не зависит от β и решение не является единственным.

Рассмотренная задача об оптимальном движении ракеты-носителя на внеатмосферном участке может быть решена также методами классического вариационного исчисления [3, 15]. Для этого необходимо неравенство

$$0 \leq \beta \leq \beta_{\max} \quad (9.17)$$

заменить равенством

$$\beta (\beta_{\max} - \beta) - z^2 = 0, \quad (9.18)$$

где z — вещественная переменная.

Благодаря уравнению (9.18) вариационная задача со связью в форме неравенства (9.17) сводится к математической модели, используемой при решении задач, в которых все связи представлены в форме равенств [19].

Граничные условия на левом конце траектории определяются параметрами в конце атмосферного участка.

При использовании принципа максимума удовлетворение граничных условий на правом конце происходит путем поиска начальных значений вектора λ , получаемого решением сопряженной системы (9.12).

Из принципа максимума [25] известно, что, для того чтобы функции $u(t)$ и $x(t)$ давали решение оптимальной задачи с подвижными концами, необходимо существование ненулевой непрерывной функции $\lambda(t)$, удовлетворяющей условиям, указанным в теореме, и, кроме того, условию трансверсальности в обоих концах траектории.

Условие трансверсальности записывается в виде:

— при $t = t_0$

$$\sum_{i=1}^5 \left[\lambda_i(t_0) + \frac{\partial I}{\partial x_{i0}} \right] \delta x_{i0} = 0;$$

— при $t = t_k$

$$\sum_{i=1}^5 \left[\lambda_i(t_k) + \frac{\partial I}{\partial x_{ik}} \right] \delta x_{ik} = 0.$$

Здесь δx_{i0} и δx_{ik} принадлежат множеству (9.11).

Использование условий трансверсальности позволяет получить соотношения, необходимые для определения начальных значений компонент вектора-функции $\lambda(t)$ и тем самым облегчить решение краевой задачи. Начальное значение одной из компонент λ_{i0} можно выбрать произвольно, так как вектор определен с точностью до произвольной постоянной.

На правом конце граничные условия определяются параметрами орбит, на которые необходимо выводить космические аппараты.

При выведении на круговую орбиту граничные условия имеют вид [41]

$$V_{\tau} = \sqrt{\frac{\mu}{R+h}};$$

$$V_r = 0;$$

$$h = h_{\text{зад}};$$

$$\mu = 3,986 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2.$$

При задании эллиптической орбиты с высотой апогея h_a и высотой перигея h_p для выбора граничных условий можно воспользоваться зависимостями

$$V_{\tau} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 + e \cos \vartheta_0);$$

$$V_r = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin \vartheta_0;$$

где

$$r_h = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta_0},$$

$$e = \frac{h_a - h_{II}}{2R + h_a + h_{II}};$$

$$a = R + \frac{h_a + h_{II}}{2};$$

$$p = a(1 - e^2);$$

ϑ_0 — истинная аномалия точки орбиты.

Анализ сопряженной системы уравнений (9.12) показывает, что в общем случае программа угла тангажа на внеатмосферном участке траектории является нелинейной функцией времени.

В тех случаях, когда протяженность участка выведения сравнительно невелика и поле тяготения может быть принято как плоскопараллельное ($R \rightarrow \infty$), из системы уравнений (9.12) можно получить

$$\operatorname{tg} \varphi = a - bt,$$

где a и b — постоянные коэффициенты.

Это частное решение можно найти в работах [23, 21] и др.

При практических расчетах в случае целесообразности выбора программы $\varphi(t)$ в виде линейных функций времени ее можно определить по формуле

$$\varphi(t) = \varphi_0(t_h) + \Delta\varphi_0 + \dot{\varphi}(t - t_h),$$

где $\Delta\varphi_0$ — скачок по углу тангажа в конце атмосферного участка;

$\dot{\varphi}$ — постоянная угловая скорость изменения угла тангажа.

Параметры $\Delta\varphi_0$ и $\dot{\varphi}$ определяются из условия удовлетворения заданным граничным условиям в конце участка выведения.

Анализ закона изменения функции переключения $K(t)$ показывает, что она имеет не более двух нулей. Из этого следует, что оптимальная траектория состоит не более чем из трех частичных дуг. Зависимость $K(t)$ при выведении КА на круговую орбиту приведена на рис. 9.5.

Таким образом, оптимальная траектория (вне атмосферы) содержит не более трех участков, которые следуют в порядке: максимальная тяга, нулевая, максимальная.

Из полученных условий оптимального управления (9.13), (9.16) видно, что в принципе могут быть использованы два способа оптимального выведения КА на заданную орбиту:

- выведение при оптимальном законе изменения угла тангажа (9.13) и законе изменения тяги $P(t) = P_{\max}$;
- выведение при оптимальных законах изменения угла тангажа (9.13) и тяги двигательной установки (9.16).

При первом способе выведения двигательная установка работает непрерывно на участке выведения до получения последней ступенью необходимой скорости. Такой метод является наиболее простым, но для получения отдаленных орбит он становится экономически невыгодным. Иногда называют этот способ *выходом на орбиту без дожига*.

При втором способе выведения двигатель работает с перерывом. После окончания первой части активного участка ракета движется по эллиптической орбите (переходному эллипсу), в одной из точек которой снова включается двигатель (производится «дожиг» топлива), и последняя ступень ракеты выходит уже на требуемую орбиту. Этот способ называют *выходом на орбиту с дожигом топлива*.

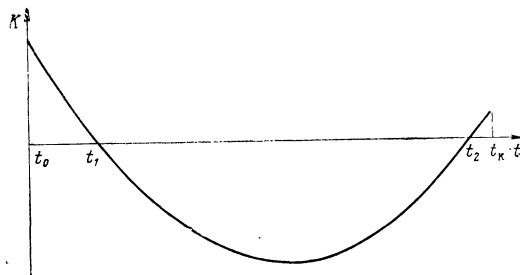
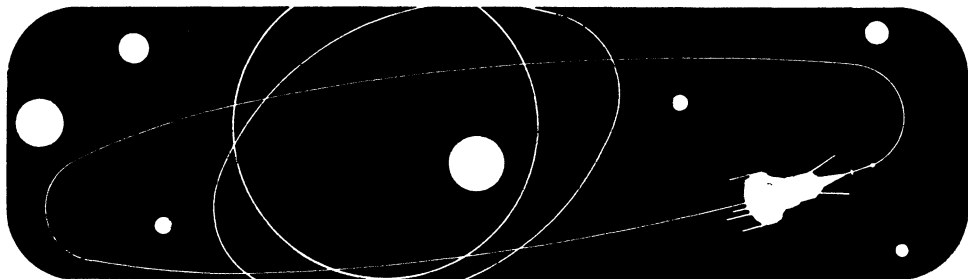


Рис. 9.5. Функция переключения

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. IX

1. Аппазов Р. Ф., Лавров С. С., Мишин В. А. Баллистика управляемых ракет дальнего действия. М., «Наука», 1966.
2. Беллман Р. Динамическое программирование. М., ИЛ, 1960.
3. Блисс А. Лекции по вариационному исчислению. М., ИЛ, 1950.
4. Брэквелл. Оптимизация траектории. — «Вопросы ракетной техники», 1961, № 1.
5. Гамель Г. Об одной задаче вариационного исчисления, связанной с движением ракеты. — Сб. «Исследование оптимальных режимов движения ракет». М., Оборонгиз, 1959.

6. Дубошин Г. Н. Небесная механика. М., Физматгиз, 1963.
7. Егоров В. А. Пространственная задача достижения Луны. М., «Наука», 1965.
8. Исаев В. К. Принцип максимума Л. С. Понтрягина и оптимальное программирование тяги ракет. — «Автоматика и телемеханика», 1961, № 8.
9. Корлисс У. Ракетные двигатели для космических полетов. М., ИЛ, 1962.
10. Космическая техника. Под ред. Г. Сейферт. М., «Наука», 1964.
11. Краснов Н. Ф. Аэродинамика тел вращения. — Сб. «Механика». М., Оборонгиз, 1958.
12. Кротов В. Ф. Разрывные решения вариационных задач. «Изв. вузов» СССР. «Математика», 1960, № 5.
13. Космодемьянский А. А. Экстремальные задачи для точки переменной массы. ДАН СССР, вып. 53, 1946, № 1.
14. Лавренев М. А., Люстерник Л. А. Основы вариационного исчисления, т. 1, ч. 2, ОНТИ, 1935.
15. Лебедев В. А. Вариационная задача о взлете космического аппарата с круговой орбиты. — «Вычислительная математика и математическая физика», т. 3, вып. 6, 1963.
16. Лоуден Дж. Межпланетные траектории ракет. — Сб. «Космические траектории». М., ИЛ, 1963.
17. Мельников А. П. Аэродинамика больших скоростей. М., Воениздат, 1961.
18. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы. М., Гостехиздат, 1952.
19. Методы оптимизации с приложениями к механике космического полета. Под ред. Дж. Лейтмана. М., «Наука», 1965.
20. Орлов Б. В. и др. Основы проектирования ракетно-прямоточных двигателей. М., «Машиностроение», 1967.
21. Охотимский Д. Е. К теории движения ракет, ПММ, 10, вып. 2, 1946.
22. Охотимский Д. Е., Энеев Т. М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. — «Успехи физических наук», т. 63, вып. 1а, 1957.
23. Паушкин Я. М. Химия реактивных топлив. Изд-во АН СССР, 1962.
24. Пономарев В. М. Теория управления движением космических аппаратов. М., «Наука», 1965.
25. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
26. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Об одной статистической задаче оптимального управления. «Изв. АН СССР», сер. «Математика», № 25, 1961.
27. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем, ч. I, II, III. — «Автоматика и телемеханика», вып. 20, 1952, № 10, 11, 12.
28. Рулев В. А. О необходимых и достаточных условиях экстремума в вариационных задачах динамики полета летательных аппаратов. «Изв. вузов СССР, Авиационная техника», 1961, № 1.
29. Тарасов Е. В. Оптимальные режимы полета летательных аппаратов. М., Оборонгиз, 1958.
30. Сисакян А. В. Проблемы космической биологии. М., «Наука», 1965.
31. Стечкин Б. С., Казанджан П. К. и др. Теория реактивных двигателей. М., Оборонгиз, 1958.
32. Троицкий В. А. Задача Майера — Больца вариационного исчисления и теория оптимальных систем, ПММ, 25, вып. 4, 1961.
33. Троицкий В. А. О вариационных задачах оптимизации процессов управления, ПММ, 26, вып. 1, 1962.
34. Троицкий В. А. Вариационные задачи оптимизации процессов управления в системах с ограниченными координатами, ПММ, 26, вып. 3, 1962.
35. Фрид Б., Ричардсон Д. Оптимальные траектории ракет. — Сб. «Исследование оптимальных режимов движения ракет». М., Оборонгиз, 1959.
36. Цандер Ф. А. Проблема полета при помощи ракетных аппаратов. М., Оборонгиз, 1947.
37. Циолковский К. Э. Труды по ракетной технике. М., «Машиностроение», 1967.
38. Чикала Р., Миеле А. Обобщенная теория оптимального программирования тяги при горизонтальном полете самолета с ракетным двигателем. — Сб. «Исследование оптимальных режимов движения ракет». М., Оборонгиз, 1959.
39. Шевелюк М. И. Теоретические основы проектирования жидкостных ракетных двигателей. М., Оборонгиз, 1960.
40. Штернфельд А. Я. Введение в космонавтику, ОНТИ, 1937.
41. Эльзберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М., «Наука», 1965.
42. Исследования по динамике полета. Под ред. И. В. Остославского, вып. 1. М., «Машиностроение», 1965.
43. Исследования по динамике полета. Под ред. И. В. Остославского, вып. 2, М., «Машиностроение», 1969.



ГЛАВА X

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- A — матрица системы нормальных уравнений; азимут направления на КА.
 $\dot{A}$ — скорость слежения по азимуту.
 a — большая полуось оскулирующего эллипса на момент t_0 .
 B — матрица-столбец правых частей системы нормальных уравнений.
 b_0, b_2 — коэффициенты в разложении гравитационного потенциала.
 D — наклонная дальность до КА.
 $\dot{D}$ — радиальная скорость.
 h — высота полета ИСЗ; число групп коррелированных и некоррелированных измерений.
 h_i — шаг численного интегрирования системы дифференциальных уравнений движения ИСЗ.
 i_0 — наклонение оскулирующего эллипса в момент времени t_0 .
 i_N — наклонение орбиты в начале N -го витка.
 K — корреляционная матрица ошибок измерений.
 $K^{(v)}$ — корреляционная матрица ошибок измерений v -й группы.
 L_N — геоцентрическая долгота.
 $L(\delta r)$ — функция правдоподобия выборки из отклонений измеряемых параметров.
 l — порядок системы нормальных уравнений.
 m_i — масса i -й планеты.
 N — число измерений; номер витка.
 n_v — число измерений в v -й группе.
 P — весовая матрица.
 p — фокальный параметр оскулирующего эллипса на момент t_0 .
 Q_m — определяемые параметры.
 q_j — текущие элементы орбиты.
 R — средний радиус Земли.
 R_0 — экваториальный радиус Земли.
 $r, n, \zeta, V_r, V_n, V_\zeta$ — составляющие векторов положения и скорости в системе координат $Orn\zeta$.
 r, u, V_r, V_u — составляющие векторов положения и скорости в цилиндрической системе координат $Oru\zeta$.
 r_p и r_k — расчетное и измеренное значения измеряемого параметра.
 T — драконический период обращения ИСЗ.
 t_0 — момент времени, к которому относятся определенные координаты и компоненты скорости.
 u_{mn} — диагональные элементы матрицы, обратной матрице A .
 u_0 — фиксированное начальное значение аргумента широты.
 X, Y, Z, V_x, V_y, V_z — составляющие векторов положения и скорости ИСЗ в абсолютной системе координат $OXYZ$.

$X_N, Y_N, Z_N, V_{X_N}, V_{Y_N}, V_{Z_N}$ — координаты измерительного пункта и их производные в абсолютной системе координат $OXYZ$.

X_i, Y_i, Z_i — координаты планеты.

x, y, z, v_x, v_y, v_z — координаты и составляющие вектора скорости спутников на невозмущенной орбите в гринвичской системе координат.

x_N, y_N, z_N — координаты измерительных средств в гринвичской системе координат.

α_1 — угол в наклонной плоскости, отсчитываемый от базы (ее образуют две радиотехнические станции) до направления на КА.

α_T — прямое восхождение КА (топоцентрическое).

α_i — прямое восхождение звезды.

β_{ij} — углы, измеренные с КА, между направлениями на звезду и планету или на две планеты и т. д.

γ — угол места КА.

$\dot{\gamma}$ — скорость слежения по углу места.

Δr — погрешности измерения.

$\Delta r_{\text{доп}}$ — допустимое значение вариации δr .

$\Delta \bar{V}$ — расчетное значение корректирующего импульса.

δ — склонение звезды.

δ_T — склонение КА (топоцентрическое).

δQ — матрица-столбец поправок к определяемым параметрам.

δQ_m — поправки к определяемым параметрам.

δr — отклонение измеряемого параметра.

$\delta x, \delta y, \delta z, \delta v_x, \delta v_y, \delta v_z$ — вариации координат и составляющих вектора скорости ИСЗ в гринвичской системе координат.

ϵ_m — критерий сходимости.

κ — коэффициент, учитывающий действие светового давления.

λ — разность долгот измерительного пункта и восходящего узла в момент времени t_0 .

$\mu, \alpha_{00}, \alpha_{20}$ — коэффициенты в разложении потенциала Земли.

ρ — плотность атмосферы.

σ_0 — средняя квадратическая ошибка единицы веса.

σ_{ri} — средние квадратические ошибки группы независимых измерений.

$\xi, \eta, \zeta, V_\xi, V_\eta, V_\zeta$ — координаты и составляющие вектора скорости ИСЗ в топоцентрической системе координат $\xi_\Pi \eta_\Pi \zeta_\Pi$, связанной с пунктом.

ψ_0 — фиксированная начальная геоцентрическая широта.

ω_3 — угловая скорость вращения Земли.

Ω_N — долгота восходящего узла орбиты в начале N -го витка.

10.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Одной из основных задач, возникающих при пусках КА, является определение орбит их движения.

Знание элементов орбиты необходимо для решения вопросов, связанных с прогнозированием, коррекцией движения КА и привязкой во времени и пространстве научных наблюдений.

При определении орбиты КА предполагается, что теоретический закон движения объекта задан системой дифференциальных уравнений или некоторыми аналитическими зависимостями. В качестве определяемых параметров Q_m обычно рассматриваются координаты и компоненты скорости объекта, отнесенные к фиксированному моменту времени t_0 . Состав определяемых параметров может быть пополнен за счет геофизических и астрофизических постоянных. Эти постоянные уточняются в процессе определения орбиты, если точность их знания недостаточна для решения поставленной задачи и может быть повышена в результате обработки траекторных измерений. Под траекторными измерениями понимается совокупность измеренных значений различных относительных координат и компонент скорости объекта.

Измеренные значения являются результатом физических наблюдений и представляют собой сумму неизвестных истинных величин и ошибок измерений. Измерения производятся в дискретном множестве точек и могут быть получены с избытком.

Таким образом, задача определения орбиты в указанной постановке сводится к вычислению параметров, характеризующих движение космического объекта, по избыточному числу измерений заданного состава и точности, проведенных в различные ди-

скретные моменты времени. В подобных случаях, когда измерения искажены ошибками, а полученная информация избыточна, при определении орбит КА применяются статистические методы.

Практика решения разнообразных статистических задач показывает, что одним из наиболее эффективных из них является метод максимума правдоподобия. Применение этого метода к задаче определения орбит КА в настоящее время предполагает, что:

— погрешности измерения Δr носят случайный характер и подчиняются многомерному нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием;

— между отклонениями измеряемых параметров δr_i и поправками δQ_m к значениям определяемых параметров Q_m ($m=1, 2, 3, \dots, l$; $l \geq 6$) существует линейная зависимость вида

$$\delta r_i = \sum_{m=1}^l \frac{\partial r_i}{\partial Q_m} \delta Q_m \quad (\text{условное уравнение}), \quad (10.1)$$

где δr_i — разность между измеренным $r_{i\text{из}}$ и расчетным $r_{i\text{р}}$ значениями:

$$\delta r_i = r_{i\text{из}} - r_{i\text{р}} = \delta r_{i\text{ист}} + \Delta r_i;$$

$\frac{\partial r_i}{\partial Q_m}$ — частные производные от измеряемого параметра r_i по m -й уточняемой величине на момент времени i -го измерения;

$$\delta Q = \delta Q_{l+1} = \begin{Bmatrix} \delta Q_1 \\ \delta Q_2 \\ \vdots \\ \delta Q_l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1^s - Q_1^{(s-1)} \\ Q_2^s - Q_2^{(s-1)} \\ \vdots \\ Q_l^s - Q_l^{(s-1)} \end{Bmatrix} \quad (s - \text{номер приближения}),$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial Q_m} = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial Q_m}, \quad (10.2)$$

где q_j — текущие элементы орбиты, $l=6$.

Установлено, что такой подход позволяет решить задачу определения орбиты с достаточной для практики точностью.

В наиболее общем случае с учетом приведенных выше допущений функция правдоподобия выборки отклонений измеряемых параметров может быть представлена в виде

$$L(\delta r) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} [\det(K)]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\delta r - \delta r_{\text{ист}})^T K^{-1} (\delta r - \delta r_{\text{ист}}) \right].$$

Здесь

$$\delta r = \delta r_{N1} = \begin{Bmatrix} \delta r_1 \\ \delta r_2 \\ \vdots \\ \delta r_N \end{Bmatrix}; \quad K = K \delta r_i \delta r_j = \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} \dots K_{1N} \\ K_{21} & \dots & K_{2N} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ K_{N1} & K_{N2} \dots K_{NN} \end{Bmatrix} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N);$$

K — корреляционная матрица ошибок измерений;

N — число измерений.

Матричная запись условия максимальности функции правдоподобия L может быть представлена в виде

$$v = V^T K^{-1} V = \min,$$

где

$$V = V_{N1} = \delta r - \delta r_{\text{ист}} = \delta r - R \delta Q_{\text{ист}};$$

$$R = R_{Nl} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial Q_1} & \frac{\partial r_1}{\partial Q_2} & \dots & \frac{\partial r_1}{\partial Q_l} \\ \frac{\partial r_2}{\partial Q_1} & \frac{\partial r_2}{\partial Q_2} & \dots & \frac{\partial r_2}{\partial Q_l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial r_N}{\partial Q_1} & \dots & \dots & \frac{\partial r_N}{\partial Q_l} \end{Bmatrix}.$$

Условия для минимума v могут быть представлены в виде

$$\frac{\partial v}{\partial Q} = \left\| \begin{array}{c} \frac{\partial v}{\partial Q_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial v}{\partial Q_m} \end{array} \right\| = 0$$

или

$$R^T K^{-1} V = 0.$$

Умножая матрицу V слева на $R^T K^{-1}$, получим

$$R^T K^{-1} V = R^T K^{-1} \delta r - R^T K^{-1} R \delta Q.$$

Следовательно, при выполнении условия максимальности функции правдоподобия L

$$R^T K^{-1} R \delta Q = R^T K^{-1} \delta r.$$

Отсюда

$$\delta Q = (R^T K^{-1} R)^{-1} R^T K^{-1} \delta r = A^{-1} B.$$

Таким образом, при перечисленных выше допущениях задача определения орбиты с использованием способа максимума правдоподобия может быть решена путем введения поправок δQ к элементам $Q_m^{(0)}$, взятым в качестве нулевого приближения по формуле

$$Q_m = Q_m^{(0)} + \sum_{s=1}^k \delta Q_m^{(s)} \quad (m = 1, 2, \dots, l),$$

где k — количество приближений, необходимое для выполнения условий

$$|\delta Q_m| \leq \varepsilon_m \quad (m = 1, 2, \dots, l);$$

ε_m — заданные критерии сходимости.

В большинстве встречающихся на практике случаев весь объем обрабатываемой информации можно разбить на *некоррелированные между собой группы*.

Весовая матрица

$$P = K^{-1}$$

для обладающих таким свойством измерений будет иметь квазидиагональный вид. В этом случае формирование матриц A и B целесообразно производить по отдельным слагаемым, соответствующим определенной группе измерений.

При этом

$$A = \sum_{v=1}^h C^{(v)}; \quad B = \sum_{v=1}^h b^{(v)}, \quad (10.3)$$

где

$$C^{(v)} = [c_{ij}^{(v)}]; \quad b^{(v)} = [b_i^{(v)}];$$

$$c_{ij}^{(v)} = \sum_{\lambda=1}^{n_v} \sum_{\mu=1}^{n_v} P_{\lambda\mu} \frac{\partial r_{v\lambda}}{\partial Q_i} \frac{\partial r_{v\mu}}{\partial Q_j} \quad (i, j = 1, 2, 3, \dots, l);$$

$$b_i^{(v)} = \sum_{\lambda=1}^{n_v} \sum_{\mu=1}^{n_v} P_{\lambda\mu} \frac{\partial r_{v\lambda}}{\partial Q_i} \delta r_{v\lambda} \quad (\lambda = \mu = 1, 2, 3, \dots, n_v);$$

h — число групп измерений;

n_v — число измерений в v группе.

Как непосредственно следует из формул (10.3), составление элементов матриц A и B для группы *независимых* измерений производится в полном соответствии с правилами формирования расширенной матрицы системы нормальных уравнений по способу наименьших квадратов.

В случае когда определяемые параметры принимаются одновременно и за изме-

рения с заданной корреляционной матрицей $K^{(v)}$, формулы для расчета значений элементов $c_{ij}^{(v)}$ и $b_i^{(v)}$ существенно упрощаются и принимают вид

$$[c_{ij}^{(v)}] = C^{(v)} = [K^{(v)}]^{-1} = [P_{ij}];$$

$$[b_i^{(v)}] = b^{(v)} = [P_{ij}] \begin{pmatrix} Q_1 - Q_1^{(0)} \\ Q_2 - Q_2^{(0)} \\ \vdots \\ Q_l - Q_l^{(0)} \end{pmatrix}.$$

В зависимости от наличия исходной информации и комплекса задач, решаемых в каждом конкретном случае, *исходными данными* для определения орбиты КА могут быть:

- t_0, Q_m — приближенные начальные условия движения КА;
- x_N, y_N, z_N — координаты измерительных средств (обычно в гринвичской системе координат $(Oxyz)$);
- t_i и r_{in} — время и величины измеряемых параметров; (t_i — время i -го измерения, r_{in} — любой измеренный параметр $i=1, 2, \dots, N$);
- K — корреляционная матрица коррелированной группы измерений;
- σ_{ri} — средние квадратические ошибки группы независимых измерений;
- $\epsilon_1 + \epsilon_n$ — коэффициенты сходимости, определяющие необходимую точность решения задачи.

За начальные условия движения КА принимаются полученные в результате расчета полетного задания на пуск значения составляющих вектора скорости и координат на момент отделения КА от ракеты-носителя. При регулярном слежении за КА в качестве Q_m могут приниматься значения составляющих вектора скорости и координат, полученные в результате прогнозирования движения КА для некоторого момента времени t_0 (например, времени прохождения КА через восходящий узел орбиты, времени выхода КА на орбиту полета к планете и т. д.). При определении орбиты после коррекций за приближенные начальные условия движения принимаются составляющие вектора скорости и координаты КА в точке коррекции с учетом расчетного корректирующего импульса $\Delta \vec{V}$.

В состав системы измерений t_i, r_i могут входить как измерения, полученные измерительными средствами наземных пунктов, так и автономные измерения, полученные при помощи специальной аппаратуры, установленной на борту КА.

Задача решается в *следующем порядке*.

1. Для определения расчетной орбиты производится интегрирование системы дифференциальных уравнений движения КА (12.4), (12.6), (12.7).

2. На каждый момент времени, при котором измерялся некоторый параметр r_{in} , вычисляется его расчетное значение r_{ip} .

3. В процессе численного интегрирования уравнений движения КА последовательно для каждого момента времени t_i вычисляются текущие значения координат и составляющих вектора скорости объекта по интерполяционным формулам. Затем в соответствии с признаком измерения r вычисляются отклонения:

$$\delta r_i = r_{in} - r_{ip}.$$

Для исключения из обработки аномальных измерений производится проверка отклонения каждого измерения на выполнение условия

$$|\delta r_i| \leq \Delta r_{i \text{ доп}} \quad (10.4)$$

где $\Delta r_{i \text{ доп}}$ — допустимые отклонения (см. ниже).

4. Для измерений, отклонения которых удовлетворяют условиям (10.4):

— вычисляются производные от текущих элементов орбиты по начальным условиям движения $\frac{\partial q_j}{\partial Q_m}$;

— рассчитываются значения частных производных $\frac{\partial r_i}{\partial Q_m}$ от измеряемых параметров по начальным условиям движения и производится формирование системы

$$A \delta Q = B. \quad (10.5)$$

При формировании системы (10.5) используются следующие ее основные свойства.

а. Матрица A симметрична относительно главной диагонали, поэтому можно ограничиться составлением треугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1l} \\ & a_{22} \dots a_{2l} \\ & & \dots \\ & & & a_{ll} \end{pmatrix}.$$

Это позволяет сократить емкость оперативной памяти для запоминания коэффициентов a_{mn} на $\frac{1}{2}l(l-1)$ ячеек, где l — порядок системы (число неизвестных). Одновременно за счет уменьшения числа сложений и умножений сокращается и машинное время решения задачи, что становится особенно заметным при большом числе измерений.

6. Вычисление коэффициентов a_{mn} и свободных членов b_m системы уравнений можно производить, переходя последовательно от одного измерения к другому. Благодаря этому отпадает необходимость хранения в памяти ЭВМ производных $\frac{\partial r_i}{\partial Q_m}$ и отклонений δr_i , соответствующих всем моментам времени t_i . Достаточно отвести лишь $(l+1)$ ячейку для записи производных и одного отклонения, соответствующих очередному измерению.

Расчет необходимых для формирования системы уравнений частных производных от текущих элементов орбиты по начальным условиям движения КА является наиболее трудоемкой частью решения краевой задачи. В связи с этим при выборе метода расчета этих производных необходимо использовать возможности упрощения алгоритма, обусловленные меньшими требованиями к точности расчета производных по сравнению с требованиями к точности вычисления расчетных значений измеряемых параметров. Последнее объясняется тем, что для принятого метода решения краевой задачи точность определения орбиты зависит при прочих равных условиях только от точности вычисления свободных членов условных уравнений. Точность же расчета производных может оказать влияние только на быстроту сходимости процесса последовательных приближений при решении краевой задачи.

В алгоритмах задачи могут найти применение три способа расчета производных $\frac{\partial q_j}{\partial Q_m}$.

Метод конечных разностей, основанный на разложении текущих элементов орбиты q_j ($j=1, 2, \dots, 6$), как функций начальных условий Q_m ($m=1, 2, \dots, l$), в ряд Тейлора с точностью до линейных относительно приращений начальных условий Q_m членов:

$$q_j(Q_1 + \delta Q_1, Q_2 + \delta Q_2 + \dots + Q_l + \delta Q_l) = \\ = q_j(Q_1, Q_2, \dots, Q_l) + \sum_{m=1}^l \frac{\partial q_j}{\partial Q_m} \delta Q_m.$$

При решении краевой задачи расчет производных этим методом ведется следующим образом. Для определения элементов невозмущенной орбиты и шести возмущенных орбит совместно интегрируются семь систем дифференциальных уравнений (всего 42 уравнения) при начальных условиях:

для невозмущенной орбиты	$Q_1, Q_2, \dots, Q_l$
для 1-й возмущенной орбиты	$Q_1 + \delta Q_1, Q_2, \dots, Q_l$
для 2-й возмущенной орбиты	$Q_1, Q_2 + \delta Q_2, \dots, Q_l$
...	...
для 6-й возмущенной орбиты	$Q_1, Q_2, \dots, Q_l + \delta Q_l$

Кроме координат и составляющих вектора скорости КА на невозмущенной траектории, интерполяцией определяются значения координат и составляющих вектора скорости для возмущенных траекторий в момент времени t_i .

После этого вычисляются частные приращения соответствующих элементов орбиты, например

$$\delta q_j(\delta Q_l) = q_j(Q_1 + \delta Q_1, Q_2, \dots, Q_l) - q_j(Q_1, Q_2, \dots, Q_l) \quad (j = 1, 2, \dots, 6)$$

и частные производные

$$\frac{\partial q_j}{\partial Q_m} = \frac{\delta q_j(\delta Q_m)}{\delta Q_m} \quad (m = 1, 2, \dots, l).$$

Как показывают расчеты, величины производных практически постоянны при изменении приращений начальных условий δQ_m в широких пределах. Значения этих приращений составляют

- в координатах $\delta Q_m = 100 \div 1000$ м ($m = 1, 2, 3$);
- в скоростях $\delta Q_m = 0,1 - 1,0$ м/с ($m = 4, 5, 6$).

Метод конечных разностей требует значительных затрат машинного времени, поэтому его целесообразно применять лишь в тех случаях, когда нельзя использовать другие, более экономичные методы.

Более экономичным и удобным для реализации на ЭВМ методом расчета производных является *метод вариаций*, основанный на совместном численном интегрировании уравнений движения КА и шести систем уравнений в вариациях.

В результате совместного численного интегрирования (с шагом h_t) уравнений движения КА при начальных условиях t_0 , Q_m и шести систем уравнений в вариациях при начальных условиях, заданных элементами соответствующей строки единичной матрицы

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

для каждого момента времени $t_n = t_0 + nh_t$ ($n = 1, 2, \dots$) определяются элементы орбиты $q_j(t_n)$ и производные $\frac{\partial q_j}{\partial Q_m}$ ($j, m = 1, 2, \dots, 6$). Значения этих величин для моментов времени t_i определяются по интерполяционным формулам.

При решении краевой задачи с использованием для расчета производных $\frac{\partial q_j}{\partial Q_m}$ метода конечных разностей численное интегрирование всех семи систем дифференциальных уравнений вынуждено производиться с учетом тех сил, влияние которых необходимо учитывать при интегрировании первой системы дифференциальных уравнений, т. е. при вычислении расчетных элементов орбиты и расчетных значений измеряемых параметров.

В методе вариаций при составлении уравнений в вариациях на основании специального анализа можно пренебречь влиянием некоторых сил, которые учитываются при интегрировании дифференциальных уравнений движения космического аппарата. Благодаря этому и из-за незначительного числа арифметических операций, необходимых для вычисления правых частей уравнений в вариациях, время полного решения краевой задачи при расчете рассматриваемых производных $\frac{\partial q_j}{\partial Q_m}$ (в зависимости от объема измерительной информации) сокращается по сравнению с методом конечных разностей в 1,5—2,5 раза.

Кроме упомянутых методов, для расчета частных производных $\partial q_j / \partial Q_m$ могут использоваться методы, основанные на применении конечных формул эллиптической теории.

5. Решается система (10.5) и определяются поправки к приближенным начальным условиям движения КА. Приближенные начальные условия движения КА исправляются на величины δQ_m , и решение повторяется.

Систему линейных алгебраических уравнений (10.5) можно решать различными численными методами: методом Гаусса, методом квадратных корней и т. п. Поскольку при решении задачи необходимо производить и оценку точности определения начальных условий по случайным ошибкам, для решения системы (10.5) целесообразно использовать численные методы обращения матрицы A . При известной обратной матрице $A^{-1} = \|a_{mn}\|^{-1}$ поправки к начальным условиям δQ_m вычисляются по формулам

$$\begin{pmatrix} \delta Q_1 \\ \delta Q_2 \\ \dots \\ \delta Q_l \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_l \end{pmatrix},$$

где $b_1, b_2, \dots, b_l$ — свободные члены уравнений (10.3).

Уточненные значения начальных условий в момент времени t_0 определяются по формулам

$$Q_m^{(s)} = Q_m^{(s-1)} + \delta Q_m^{(s)}.$$

Средние квадратические ошибки определения начальных условий вычисляются по формулам

$$\sigma(Q_m) = \sigma_0 \sqrt{u_{mm}},$$

где u_{mm} — диагональные элементы матрицы $[u_{ij}] = A^{-1}$;

σ_0 — средняя квадратическая ошибка единицы веса, определяемая из выражения

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{1}{N-l} \left[\sum_{i=1}^N (P_i \delta r_i)^2 - \sum_{m=1}^l b_m \delta Q_m \right]}.$$

Она может быть использована для исключения из обработки аномальных измерений по

условиям (10.4) на втором и последующих приближениях. Для этого допустимые отклонения можно определять в каждом приближении по формуле

$$\Delta r_{i \text{ доп}} = \mu \sigma_0 \sigma_i,$$

где $\mu = 1,5 \div 3,0$, а значение σ_0 определяется на предыдущем приближении;

σ_i — заданная перед решением краевой задачи средняя квадратическая ошибка i -го измерения.

Допустимые отклонения $\Delta r_{i \text{ доп}}$ для первого приближения целесообразно назначать по видам измерений (D , A , γ и т. д.) на основании анализа отклонений измерений от их расчетных значений, соответствующих приближенным начальным условиям t_0 , Q_m .

Для последующих приближений нижняя граница допустимых отклонений назначается в соответствии с известным правилом трех σ гм

$$\Delta r_{i \text{ min}} = 3\sigma_i + \delta_i,$$

где δ_i — определяемое опытным путем слагаемое, величина которого зависит от неучтенных систематических ошибок, сопровождающих процесс измерений; ошибок, обусловленных неполным учетом сил, действующих на КА в полете, и других факторов.

Число необходимых приближений при решении краевой задачи зависит от точности задания начального приближения t_0 , Q_m , состава и качества траекторных измерений r_{ik} . От состава и качества измерений зависит также область сходимости краевой задачи, характеризующая обычно максимально допустимыми значениями суммарных поправок к начальным условиям. Так, например, при выборке, в состав которой входят измерения наклонных дальностей D_i , азимутов A_i и углов места γ_i с одного или нескольких пунктов на двух-трех витках орбиты ИСЗ, задача надежно сходится при суммарных поправках в несколько сот километров к координатам и в несколько сот метров в секунду к составляющим вектора скорости.

Критерием сходимости процесса последовательных приближений считается удовлетворение неравенств

$$|\delta Q_m| < \varepsilon_m, \quad m = 1, 2, \dots, 6.$$

При необходимости для определения орбит КА может привлекаться информация о траектории, полученная априори. Такая информация представляет собой совокупность ожидаемых значений функций параметров траектории в определенные моменты времени с вероятностными характеристиками возможных ошибок этих значений. Эта информация может рассматриваться как выборка коррелированных измерений с известной корреляционной матрицей их ошибок.

При наличии такой информации в полном соответствии с методом максимума правдоподобия дополнительно составляются:

— матрица A_1 , представляющая собой матрицу, обратную заданной корреляционной матрице K :

$$A_1 = K^{-1};$$

— столбец B_1

$$B_1 = (K^{-1})^T \delta Q,$$

где

$$(K^{-1})^T = K^{-1};$$

δQ — столбец из поправок к начальным условиям движения.

В первом приближении указанные поправки приравниваются к нулю. В каждом последующем приближении эти поправки принимаются равными сумме поправок к начальным условиям во всех предшествующих приближениях.

Далее производится суммирование матриц A и A_1 и столбцов B и B_1 , в результате чего образуется суммарная система уравнений [A и B — матрицы системы уравнений (10.5)].

Дальнейший ход решения задачи ничем не отличается от изложенного выше.

10.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТ ИСЗ

Методы определения орбит ИСЗ можно разделить на две основные группы.

К *первой группе* относятся методы, основанные на *численном интегрировании* системы дифференциальных уравнений, описывающих движение спутника. Эти методы применяются, как правило, при определении орбит ИСЗ по траекторным измерениям, полученным на трех-пяти последовательных витках. Иногда такие методы применяются для совместной обработки траекторных измерений, полученных за один-два суток полета спутника*. Задача определения орбиты сводится в этом случае к определению в результате обработки траекторных измерений начальных условий движения спутника t_0 , Q_m ($m = 1, 2, \dots, 6$).

* Рассматриваются ИСЗ с периодами обращения около 90—120 мин. Для определения орбит высоких спутников (типа «Молния-1» и др.) используются методы, изложенные в разд. 10.3.

Ко второй группе отнесем методы, в которых для описания движения спутника на больших интервалах времени используются *аналитические зависимости*. При использовании методов второй группы в результате обработки траекторных измерений определяются некоторые свободные параметры этих аналитических зависимостей. В обоих случаях порядок решения задачи не отличается от изложенного в разд. 10.1.

10.2.1. Методы первой группы

Рассмотрим необходимые рабочие соотношения для определения начальных условий Q_m ($m=1, 2, \dots, 6$) в некоторый фиксированный момент времени t_0 в системе координат $Oxyz$ (см. гл. II, разд. 2.1.2, п. «в», рис. 2.5).

Будем полагать, что измерительные средства наземных пунктов производят измерения наклонных дальностей D , азимутов A , углов места γ , радиальных скоростей $\dot{D}$ и скоростей изменения азимута $\dot{A}$ и угла места $\dot{\gamma}$, а при помощи высотомера, установленного на спутнике, измеряется высота его полета h над уровнем океана. Такое ограничение является не принципиальным, так как при другом составе измерений используются лишь другие формулы для вычисления расчетных значений измеряемых параметров и их производных по текущим элементам орбиты.

Расчетное значение измеряемого параметра r_{ip} вычисляется по одной из следующих формул:

$$D = \sqrt{(x - x_N)^2 + (y - y_N)^2 + (z - z_N)^2};$$

$$A = \arctg \frac{\xi}{\xi}, \quad (0^\circ \leq A \leq 360^\circ);$$

$$\gamma = \arcsin \frac{\eta}{D}, \quad (0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ);$$

$$\dot{D} = \frac{1}{D} [v_x(x - x_N) + v_y(y - y_N) + v_z(z - z_N)];$$

$$\dot{A} = \frac{1}{\xi^2 + \zeta^2} (\xi \dot{\zeta} - \zeta \dot{\xi});$$

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{D \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} (\eta \dot{D} - D \dot{\eta});$$

$$h = r \left[1 - \frac{R_s(1 - \alpha)}{\sqrt{(x^2 + y^2)(1 - \alpha)^2 + z^2}} \right],$$

где

$$\begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{vmatrix} = \|\Lambda_{ij}\| \begin{vmatrix} x - x_N \\ y - y_N \\ z - z_N \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{vmatrix} = \|\Lambda_{ij}\| \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix}.$$

Описание системы координат $\xi_N \eta_N \zeta_N$ и элементы матрицы $\|\Lambda_{ij}\|$ приведены в гл. II (разд. 2.1.5, п. «д», рис. 2.20, разд. 2.2, п. 18).

Частные производные от измеряемых параметров по начальным условиям движения вычисляются по следующим формулам:

$$\frac{\partial D_m}{\partial Q_m} = \frac{1}{D} \left[(x - x_N) \frac{\partial x}{\partial Q_m} + (y - y_N) \frac{\partial y}{\partial Q_m} + (z - z_N) \frac{\partial z}{\partial Q_m} \right];$$

$$\frac{\partial A}{\partial Q_m} = \frac{1}{\xi^2 + \zeta^2} \left(\xi \frac{\partial \zeta}{\partial Q_m} - \zeta \frac{\partial \xi}{\partial Q_m} \right);$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial Q_m} = \frac{1}{D \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} \left(D \frac{\partial \eta}{\partial Q_m} - \eta \frac{\partial D}{\partial Q_m} \right);$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{D}}{\partial Q_m} = & \frac{1}{D} \left[(x - x_N) \frac{\partial v_x}{\partial Q_m} + (y - y_N) \frac{\partial v_y}{\partial Q_m} + (z - z_N) \frac{\partial v_z}{\partial Q_m} + v_x \frac{\partial x}{\partial Q_m} + \right. \\ & \left. + v_y \frac{\partial y}{\partial Q_m} + v_z \frac{\partial z}{\partial Q_m} - \dot{D} \frac{\partial D}{\partial Q_m} \right]; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \dot{A}}{\partial Q_m} = \frac{1}{\xi^2 + \zeta^2} \left[\xi \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial Q_m} - \zeta \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial Q_m} + \dot{\xi} \frac{\partial \xi}{\partial Q_m} - \dot{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial Q_m} - 2\dot{A} \left(\xi \frac{\partial \xi}{\partial Q_m} + \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial Q_m} \right) \right];$$

$$\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial Q_m} = \frac{1}{D \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} \left\{ \dot{\eta} \frac{\partial D}{\partial Q_m} - \dot{D} \frac{\partial \eta}{\partial Q_m} + D \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Q_m} - \eta \frac{\partial \dot{D}}{\partial Q_m} - \right.$$

$$-\frac{\dot{\gamma}}{\sqrt{\xi^2 + \zeta^2}} \left[(\xi^2 + \zeta^2) \frac{\partial D}{\partial Q_m} + D \left(\xi \frac{\partial \xi}{\partial Q_m} + \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial Q_m} \right) \right] \Bigg\},$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial Q_m} = \frac{1}{r} \left[\left(1 - 2R_3 \alpha \frac{z^2}{r^2} \right) \left(x \frac{\partial x}{\partial Q_m} + y \frac{\partial y}{\partial Q_m} + z \frac{\partial z}{\partial Q_m} \right) + 2R_3 \alpha \frac{z}{r} \frac{\partial z}{\partial Q_m} \right],$$

где

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial Q_m} \\ \frac{\partial \eta}{\partial Q_m} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial Q_m} \end{pmatrix} = \| \Lambda_{ij} \| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial Q_m} \\ \frac{\partial y}{\partial Q_m} \\ \frac{\partial z}{\partial Q_m} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial Q_m} \\ \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Q_m} \\ \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial Q_m} \end{pmatrix} = \| \Lambda_{ij} \| \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial Q_m} \\ \frac{\partial v_y}{\partial Q_m} \\ \frac{\partial v_z}{\partial Q_m} \end{pmatrix}.$$

Входящие в приведенные формулы частные производные от текущих элементов орбиты по начальным условиям рассчитываются методом конечных разностей, методом вариаций или методом, основанным на использовании конечных формул эллиптической теории.

Для расчета частных производных $\partial q_j / \partial Q_m$ методом вариаций численно интегрируются шесть систем дифференциальных уравнений вида:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{v}_{xm} &= (\omega_3^2 - A) \delta x_m + (3AE_m + F_m)x + 2\omega_3 \delta v_{ym}; \\ \delta \dot{v}_{ym} &= (\omega_3^2 - A) \delta y_m + (3AE_m + F_m)y - 2\omega_3 \delta v_{xm}; \\ \delta \dot{v}_{zm} &= (2BC - A) \delta z_m + (3AE_m + F_m - 10BCE_m)z; \\ \delta \dot{x}_m &= \delta v_{xm}; \\ \delta \dot{y}_m &= \delta v_{ym}; \\ \delta \dot{z}_m &= \delta v_{zm}, \quad (m = 1, 2, \dots, 6), \end{aligned} \right\} \quad (10.6)$$

где $\delta v_x, \delta v_y, \dots, \delta z$ — вариации текущих элементов орбиты, обусловленные заданными вариациями начальных условий движения δQ_m ;

$$E_m = \frac{1}{r^2} (x \delta x_m + y \delta y_m + z \delta z_m);$$

$$F_m = 2BC \left[(2D - 1) E_m - D \frac{\delta z_m}{z} \right];$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$A = B[\alpha_{00} + C(D - 1)];$$

$$B = \frac{1}{r^2} \frac{R}{r}; \quad D = 5 \left(\frac{z}{r} \right)^2;$$

$$C = \frac{3}{2} \alpha_{20} \left(\frac{R}{r} \right)^2;$$

x, y, z — координаты спутника на невозмущенной орбите.

Интегрируя уравнения (10.6), можно пренебречь влиянием силы сопротивления воздуха. Кроме того, можно не учитывать и влияние сжатия Земли, т. е. положить $\alpha_{20} = 0$. Тогда уравнения (10.6) принимают более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{v}_{xm} &= (\omega_3^2 - B\alpha_{00}) \delta x_m + 3B\alpha_{00} E_m x + 2\omega_3 \delta v_{ym}; \\ \delta \dot{v}_{ym} &= (\omega_3^2 - B\alpha_{00}) \delta y_m + 3B\alpha_{00} E_m y - 2\omega_3 \delta v_{xm}; \\ \delta \dot{v}_{zm} &= -B\alpha_{00} \delta z_m - 3B\alpha_{00} E_m z; \\ \delta \dot{x}_m &= \delta v_{xm}; \\ \delta \dot{y}_m &= \delta v_{ym}; \\ \delta \dot{z}_m &= \delta v_{zm} \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

Поскольку в алгоритмах расчета производных $\frac{\partial q_j}{\partial Q_m}$ влиянием силы сопротивления воздуха и сжатием Земли можно пренебречь, то для их вычисления можно вос-

пользоваться *конечными формулами эллиптической теории*. Так, например, при решении задачи определения орбиты в системе координат *Oxyz* для расчета производных $\frac{\partial q_j}{\partial Q_m}$ может быть использована известная матрица *M* изохронных производных в правой системе прямоугольных координат. Ось *Orn*ξ (ось *Or* направлена по радиусу-вектору точки невозмущенной орбиты, ось *On* лежит в плоскости невозмущенной орбиты и направлена по движению спутника, ось *Oξ* направлена по нормали к плоскости орбиты). Представим матрицу *M* следующим образом:

$$M = \left\| \frac{\partial r, n, \zeta, V_r, V_n, V_\zeta}{\partial r_0, n_0, \zeta_0, V_{r0}, V_{n0}, V_{\zeta_0}} \right\| = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial r}{\partial r_0} & \frac{\partial r}{\partial n_0} & \dots \frac{\partial r}{\partial V_{\zeta_0}} \\ \frac{\partial n}{\partial r_0} & \frac{\partial n}{\partial n_0} & \dots \frac{\partial n}{\partial V_{\zeta_0}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial V_\zeta}{\partial r_0} & \frac{\partial V_\zeta}{\partial n_0} & \dots \frac{\partial V_\zeta}{\partial V_{\zeta_0}} \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{cccccc} m_{11} & m_{12} & 0 & m_{13} & m_{14} & 0 \\ m_{21} & m_{22} & 0 & m_{23} & m_{24} & 0 \\ 0 & 0 & b_{11} & 0 & 0 & b_{12} \\ m_{31} & m_{32} & 0 & m_{33} & m_{34} & 0 \\ m_{41} & m_{42} & 0 & m_{43} & m_{44} & 0 \\ 0 & 0 & b_{21} & 0 & 0 & b_{22} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{array} \right\|.$$

Элементы матрицы m_{ij} ($i, j=1, 2, 3, 4$) и b_{ij} ($i, j=1, 2$) вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} m_{11} &= a \left[\frac{2r-3V_r\tau}{r_0^2} \cdot \frac{1}{r_0} \left(\sqrt{\frac{p}{\mu}} V_u - 1 + \cos \varphi \right) - \frac{V_r V_{r0}}{\mu} \right]; \\ m_{21} &= a \left\{ -\frac{3V_u}{r_0^2} \tau + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\frac{V_r}{r_0} - \frac{V_{r0}}{r} + \frac{r}{r_0 p} (V_r - V_{r0}) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{r_0} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \varphi \right\}; \\ m_{31} &= a \left[\frac{3\mu}{r^2 r_0^2} \tau - \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\sin \varphi}{r r_0} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right) \left(\frac{V_{r0}}{r} - \frac{V_r}{r_0} \right) \right]; \\ m_{41} &= \frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{\mu}{p}} (\cos \varphi - 1); \quad m_{12} = \sin \varphi; \quad m_{22} = \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \varphi - \frac{r}{p}; \\ m_{32} &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{p}} (1 - \cos \varphi); \quad m_{42} = \frac{-1}{p} \left(V_r - V_{r0} + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \varphi \right); \\ b_{11} &= 1 + \frac{r}{p} (\cos \varphi - 1); \quad b_{21} = -\frac{1}{p} \left(V_r - V_{r0} + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \varphi \right); \\ m_{13} &= a \left[\frac{2}{\mu} (r V_{r0} - r_0 V_r) + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sin \varphi - \frac{3}{\mu} V_r V_{r0} \tau \right], \\ m_{23} &= a \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -3 \frac{V_{r0}}{r} \tau + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \varphi - \left[\frac{2r_0}{r} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{r}{p} \left(\sqrt{\frac{p}{\mu}} V_{u0} - 1 \right) \right] \right\}; \\ m_{33} &= a \left[\frac{2r_0 + 3V_{r0}\tau}{r^2} - \frac{1}{r} \left(\sqrt{\frac{p}{\mu}} V_{u0} - 1 + \cos \varphi \right) - \frac{V_r V_{r0}}{\mu} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

$$\left. \begin{aligned}
m_{43} &= -\sin \varphi; \\
m_{14} &= a \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{3V_r}{r_0} \tau - \left(1 + \frac{r_0}{p}\right) \cos \varphi + 2 \frac{r}{r_0} - \frac{r_0}{p} \left(\sqrt{\frac{p}{\mu}} V_u - 1 \right) \right]; \\
m_{24} &= a \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ -\frac{3V_u}{r_0} \tau + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \left(1 + \frac{r_0}{p}\right) \sin \varphi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left[\left(1 + \frac{r}{p}\right) r_0 V_r - \left(1 + \frac{r_0}{p}\right) r V_{r_0} \right] \right\}; \\
m_{34} &= a \left\{ \frac{3V_{u0}}{r^2} \tau + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\frac{V_{r0}}{r} - \frac{V_r}{r_0} + \frac{r_0}{r p} (V_{r0} - V_r) \right] - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r_0}{p}\right) \sin \varphi \right\}; \\
m_{44} &= \left(1 + \frac{r_0}{p}\right) \cos \varphi - \frac{r}{p}; \quad b_{12} = \frac{1}{p} \sqrt{\frac{p}{\mu}} r r_0 \sin \varphi; \\
b_{22} &= 1 + \frac{r_0}{p} (\cos \varphi - 1).
\end{aligned} \right\} \quad (10.8)$$

В формулах (10.8) величины r , u , V_r и V_u определяются по формулам, приведенным в гл. II, разд. 2.2, п. 12; a — большая полуось; p — фокальный параметр оскулирующего эллипса на момент времени t_0 ; $\tau = t - t_0$; t — текущее время; $\mu = R\alpha_{00}$; φ — угловая дальность, вычисляемая по формулам

$$\begin{aligned}
\sin \varphi &= \sin u \cos u_0 - \cos u \sin u_0; \\
\cos \varphi &= \cos u \cos u_0 - \sin u \sin u_0.
\end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned}
L &= \left\| \frac{\partial X, Y, Z, V_X, V_Y, V_Z}{\partial X_0, Y_0, Z_0, V_{X0}, V_{Y0}, V_{Z0}} \right\|; \\
S &= \left\| \frac{\partial x, y, z, v_x, v_y, v_z}{\partial x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}} \right\|.
\end{aligned}$$

Тогда для определения элементов матрицы S получим следующие матричные уравнения:

$$L_v = N M_v N_0^T; \quad S = Q L I \quad (v = 1, 2, 3, 4), \quad (10.9)$$

где

$$L = [l_{\alpha\beta}].$$

$$L_1 = \|l_{\alpha\beta}\| \quad (\alpha = 1, 2, 3; \beta = 1, 2, 3);$$

$$L_2 = \|l_{\alpha\beta}\| \quad (\alpha = 1, 2, 3; \beta = 4, 5, 6);$$

$$L_3 = \|l_{\alpha\beta}\| \quad (\alpha = 4, 5, 6; \beta = 1, 2, 3);$$

$$L_4 = \|l_{\alpha\beta}\| \quad (\alpha = 4, 5, 6; \beta = 4, 5, 6);$$

$$N = \|n_{ij}\| \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$\left. \begin{aligned}
n_{11} &= \frac{X}{r}; \quad n_{12} = \frac{1}{\sin i} (n_Y \sin u - n_X n_Z \cos u); \quad n_{13} = n_X; \\
n_{21} &= \frac{Y}{r}; \quad n_{22} = \frac{-1}{\sin i} (n_X \sin u + n_Y n_Z \cos u); \quad n_{23} = n_Y; \\
n_{31} &= \frac{Z}{r}; \quad n_{32} = \cos u \sin i; \quad n_{33} = n_Z;
\end{aligned} \right\}$$

$$N_0 = \|n_{ij}^{(0)}\| \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$n_{11}^{(0)} = \frac{X_0}{r_0}, \quad n_{12}^{(0)} = \frac{1}{\sin i} (n_Y^{(0)} \sin u_0 - n_X^{(0)} n_Z^{(0)} \cos u_0); \quad n_{13}^{(0)} = n_X^{(0)};$$

$$n_{21}^{(0)} = \frac{Y_0}{r_0}; \quad n_{22}^{(0)} = -\frac{1}{\sin i} (n_X^{(0)} \sin u_0 + n_Y^{(0)} n_Z^{(0)} \cos u_0); \quad n_{23}^{(0)} = n_Y^{(0)};$$

$$n_{31}^{(0)} = \frac{Z_0}{r_0}; \quad n_{32}^{(0)} = \cos u_0 \sin i; \quad n_{33}^{(0)} = n_Z^{(0)};$$

n_x, n_y, n_z — направляющие косинусы нормали к плоскости орбиты относительно осей инерциальной системы координат $OXYZ$ (гл. II, разд. 2.2, п. 13); u — аргумент широты; i — наклонение орбиты;

$$Q = \begin{vmatrix} \cos \beta & \sin \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_3 \sin \beta & \omega_3 \cos \beta & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ -\omega_3 \cos \beta & -\omega_3 \sin \beta & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$I = \begin{vmatrix} \cos \beta_0 & -\sin \beta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \beta_0 & \cos \beta_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_3 \sin \beta_0 & -\omega_3 \cos \beta_0 & 0 & \cos \beta_0 & -\sin \beta_0 & 0 \\ \omega_3 \cos \beta_0 & -\omega_3 \sin \beta_0 & 0 & \sin \beta_0 & \cos \beta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

β и β_0 — углы между осями OX и Ox в моменты времени t и t_0 соответственно [см. гл. II, разд. 2.2, формула п. 9 для γ].

Если использовать систему координат $OXYZ$, оси которой в момент времени t_0 совпадают с осями гринвичской системы координат $Oxyz$, то $\beta=0$; $\beta=\omega_3(t-t_0)$ и матрица I принимает более простой вид

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \omega_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для повышения быстродействия решения задачи участки орбиты, на которых получены траекторные измерения, разбиваются на ряд коротких интервалов при помощи узловых точек v . В узловых точках матрица производных

$$S = \left\| \frac{\partial x_v, y_v, z_v, v_{xv}, v_{yv}, v_{zv}}{\partial x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}} \right\|$$

вычисляется по конечным формулам задачи двух тел (10.8) и (10.9). Производные в любой k -й точке интервала (t_v, t_{v+1}) вычисляются по формуле

$$R = TS,$$

где R — матрица искоемых производных

$$R = \left\| \frac{\partial x_k, y_k, z_k, v_{xk}, v_{yk}, v_{zk}}{\partial x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}} \right\|;$$

$$T = \left\| \frac{\partial x_k, y_k, z_k, v_{xk}, v_{yk}, v_{zk}}{\partial x_v, y_v, z_v, v_{xv}, v_{yv}, v_{zv}} \right\|.$$

Элементы матрицы T вычисляются по формулам

$$T = \left\| \begin{array}{cccccc} \frac{\partial x_k}{\partial x_v} & \frac{\partial x_k}{\partial y_v} & \dots & \frac{\partial x_k}{\partial v_{zv}} \\ \frac{\partial y_k}{\partial x_v} & \frac{\partial y_k}{\partial y_v} & \dots & \frac{\partial y_k}{\partial v_{zv}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial v_{zk}}{\partial x_v} & \frac{\partial v_{zk}}{\partial y_v} & \dots & \frac{\partial v_{zk}}{\partial v_{zv}} \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{array} \right\|, \quad (10.10)$$

где

$$A_1 = E, \quad A_2 = \tau E, \quad A_3 = \tau \|k_{ij}\| \quad (i, j = 1, 2, 3);$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2\omega_3 \tau & 0 \\ -2\omega_3 \tau & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$k_{11} = \frac{\mu}{r_v^3} \left(\frac{3x_v^2}{r_v^2} - 1 \right) + \omega_3^2; \quad k_{12} = \frac{\mu}{r_v^3} \frac{3x_v y_v}{r_v^2}; \quad k_{13} = \frac{\mu}{r_v^3} \frac{3x_v z_v}{r_v^2},$$

$$k_{21} = k_{12}; \quad k_{22} = \frac{\mu}{r_v^3} \left(3 \frac{y_v^2}{r_v^2} - 1 \right) + \omega_3^2; \quad k_{23} = \frac{\mu}{r_v^3} \frac{3y_v z_v}{r_v^2}$$

$$k_{31} = k_{13}; \quad k_{32} = k_{23}; \quad k_{33} = \frac{\mu}{r_v^3} \left(\frac{3z_v^2}{r_v^2} - 1 \right);$$

E — единичная матрица третьего порядка; $\tau = t_k - t_v$.

Формулы (10.10) основаны на разложении составляющих вектора $q_k = (x_k, y_k, z_k, v_{xk}, v_{yk}, v_{zk})$ в ряд Тейлора с последующим удержанием в них слагаемых, содержащих τ в первой степени. Для спутников с высотами полета $h \leq 3000$ км точность расчета производных по формулам (10.10) достаточна при $\tau \leq 180$ с.

При расчете производных по конечным формулам задачи двух тел в сочетании с методом узловых точек время решения краевой задачи по измерениям с трех-пяти последовательных витков уменьшается на 35—40% по сравнению с методом вариаций. Быстродействие краевой задачи повышается еще более заметно (2—2,5 раза), если производится совместная обработка измерений на суточном мерном интервале.

Алгоритм задачи в цилиндрической системе координат $ru\zeta$ (см. гл. II, разд. 2.1, п. 3, «а», рис. 2.9) отличается от алгоритма задачи в гравитационной системе координат $Oxyz$ формулами для вычисления расчетных значений измеряемых параметров и их производных по начальным условиям.

Для широкого класса орбит с малыми эксцентриситетами алгоритм краевой задачи в цилиндрической системе координат характеризуется большим быстродействием по сравнению с алгоритмом краевой задачи в прямоугольной системе координат $Oxyz$. Это объясняется как большим быстродействием численного интегрирования системы дифференциальных уравнений спутника в цилиндрических координатах, так и меньшим объемом вычислений в алгоритме расчета частных производных от измеряемых параметров по начальным условиям при использовании конечных формул задачи двух тел.

Расчетные значения для измерений D , A , γ и $\dot{D}$ определяются по следующим формулам: *

$$\left. \begin{aligned} D &= \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta_N^2}; \\ A &= \arctg \frac{\zeta_N}{\xi}; \quad 0^\circ \leq A \leq 360^\circ; \\ \gamma &= \arctg \frac{\eta}{r_N}; \quad 0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ; \\ \dot{D} &= \frac{1}{D} (\xi \dot{\xi} + \eta \dot{\eta} + \zeta_N \dot{\zeta}_N), \end{aligned} \right\} \quad (10.11)$$

где

$$r_N = \sqrt{\xi^2 + \eta^2},$$

$$\begin{vmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta_N \\ \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta}_N \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} G & 0 \\ 0 & G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \\ \dot{\xi}_0 \\ \dot{\eta}_0 \\ \dot{\zeta}_0 \end{vmatrix}; \quad G = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

* В формулах (10.11) для отличия координаты ζ в цилиндрической системе $Oru\zeta$ от координаты ζ в топоцентрической системе $\xi\eta\zeta_N$ последняя помечена индексом N .

$$\sin \varphi = \sin B \sin \beta - \cos B \sin \beta;$$

$$\cos \varphi = \cos B \cos \beta - \sin B \sin \beta;$$

$$\sin \beta = \frac{z_N}{R_N}; \quad \cos \beta = \frac{R_{1N}}{R_N};$$

$$R_N = \sqrt{x_N^2 + y_N^2 + z_N^2}; \quad R_{1N} = \sqrt{x_N^2 + y_N^2};$$

x_N, y_N, z_N — координаты измерительного пункта в гринвичской системе координат $Oxyz$;

$$\sin B = \frac{z_N}{\sqrt{[(1-\alpha)^2 R_{1N}]^2 + z_N^2}}; \quad \cos B = \frac{(1-\alpha)^2 R_{1N}}{\sqrt{[(1-\alpha)^2 R_{1N}]^2 + z_N^2}};$$

$$\dot{\xi}_0 = \zeta a_8 - r a_6; \quad \dot{\xi}_0 = -V_r a_6 + V_u a_2 + V_\zeta a_8 - c_2 \zeta;$$

$$\dot{\gamma}_0 = r a_{11} - \zeta a_7 - R_N; \quad \dot{\gamma}_0 = V_r a_{11} - V_u a_1 - V_\zeta a_7 + c_1 \zeta;$$

$$\dot{\zeta}_0 = -r a_3 - \zeta a_{10}; \quad \dot{\zeta}_0 = -V_r a_3 + V_u a_5 - V_\zeta a_{10} - \omega_3 (r a_4 - \zeta a_{14});$$

$$a_1 = (\chi_2 - \chi_1 b) \cos \beta - c_4 \cos u; \quad a_8 = c_7 + c_4 \sin \lambda;$$

$$a_2 = (\chi_2 - \chi_1 b) \sin \beta + c_5 \cos u; \quad a_9 = c_4 \sin u;$$

$$a_3 = \chi_1 - \chi_2 b; \quad a_{10} = a \cos \lambda;$$

$$a_4 = \chi_3 + \chi_4 b; \quad a_{11} = a_4 \cos \beta + a_9;$$

$$a_5 = \chi_4 + \chi_3 b; \quad a_{12} = a_2 a_3 - a_5 a_6;$$

$$a_6 = a_4 \sin \beta - c_5 \sin u; \quad a_{13} = a_6 a_{10} + a_3 a_8;$$

$$a_7 = c_5 \sin \lambda - c_6; \quad a_{14} = a \sin \lambda$$

$$a = \sin i_0; \quad \lambda = \lambda_0 + \omega_3 (t - t_0);$$

$$b = \cos i_0;$$

ω_3 — угловая скорость вращения Земли;

λ_0 — разность долгот измерительного пункта и восходящего узла орбиты в момент времени t_0 ;

i_0 — наклонение оскулирующего эллипса в момент времени t_0 ;

$$c_1 = \omega_3 \cos \beta; \quad \chi_1 = \cos u \sin \lambda;$$

$$c_2 = \omega_3 \sin \beta; \quad \chi_2 = \sin u \cos \lambda;$$

$$c_3 = \omega_3 R_N \cos \beta; \quad \chi_3 = \cos u \cos \lambda;$$

$$c_4 = a \sin \beta; \quad \chi_4 = \sin u \sin \lambda.$$

$$c_5 = a \cos \beta;$$

$$c_6 = b \sin \beta;$$

$$c_7 = b \cos \beta.$$

Производные от измеряемых параметров по текущим элементам орбиты вычисляются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial r} &= \frac{1}{D} (r - R_N a_{11}); \quad \frac{\partial D}{\partial u} = \frac{R_N}{D} r a_1; \quad \frac{\partial D}{\partial \zeta} = \frac{R_N}{D} a_7; \\ \left\| \frac{\partial D}{\partial V_r, V_u, V_\zeta} \right\| &= 0; \quad \frac{\partial A}{\partial r} = 0; \quad \frac{\partial A}{\partial u} = \left(\frac{r}{r_N} \right)^2 a_{12}; \\ \frac{\partial A}{\partial \zeta} &= \frac{r}{r_N^2} a_{13}; \quad \left\| \frac{\partial A}{\partial V_r, V_u, V_\zeta} \right\| = 0; \quad \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial V_r, V_u, V_\zeta} \right\| = 0; \\ \frac{\partial \gamma}{\partial r} &= \frac{1}{D r_N} \left[D a_{11} - (r a_{11} - R_N) \frac{\partial D}{\partial r} \right]; \\ \frac{\partial \gamma}{\partial u} &= \frac{-1}{D r_N} \left[r D a_1 + (r a_{11} - R_N) \frac{\partial D}{\partial u} \right]; \\ \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} &= \frac{-1}{D r_N} \left[D a_7 + (r a_{11} - R_N) \frac{\partial D}{\partial \zeta} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (10.12)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \dot{D}}{\partial r} &= \frac{1}{D} \left(V_r + c_3 a_3 - \dot{D} \frac{\partial D}{\partial r} \right); \\
 \frac{\partial \dot{D}}{\partial u} &= \frac{1}{D} \left[R_N (V_u a_{11} + V_r a_1) - r c_3 a_5 - \dot{D} \frac{\partial D}{\partial u} \right]; \\
 \frac{\partial \dot{D}}{\partial \zeta} &= \frac{1}{D} \left(c_3 a_{10} - \dot{D} \frac{\partial D}{\partial \zeta} \right); \quad \frac{\partial \dot{D}}{\partial V_r} = \frac{\partial D}{\partial r}; \\
 \frac{\partial \dot{D}}{\partial V_u} &= \frac{1}{r} \frac{\partial D}{\partial u}; \quad \frac{\partial \dot{D}}{\partial V_\zeta} = \frac{\partial D}{\partial \zeta}.
 \end{aligned} \right\} (10.12)$$

Элементы матрицы изохронных производных

$$S_1 = \left\| \frac{\partial r_v \dot{u}_v \zeta_v V_{rv} V_{uv} \dot{V}_{\zeta v}}{\partial r_0 u_0 \zeta_0 V_{r0} V_{u0} V_{\zeta 0}} \right\|$$

в v -й узловой точке определяются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial r_v}{\partial r_0} &= a \left[-\frac{3V_{rv}}{r_0^2} \tau_v + \frac{1}{r_0} \left(2 \frac{r_v}{r_0} + 1 - \frac{p}{r_v} - \cos \varphi_v \right) - \frac{V_{rv} V_{r0}}{\mu} \right]; \\
 \frac{\partial r_v}{\partial V_{r0}} &= a \left[\frac{-3V_{rv} V_{r0}}{\mu} \tau_v + \frac{2}{\mu} (r_v V_{r0} - r_0 V_{rv}) + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \sin \varphi_v \right]; \\
 \frac{\partial r_v}{\partial V_{u0}} &= a \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\frac{3V_{rv}}{r_0} \tau_v - \left(\frac{r_0}{p} + 1 \right) \cos \varphi_v + 2 \frac{r_v}{r_0} - \frac{r_0}{p} \left(\frac{p}{r_v} - 1 \right) \right]; \\
 \frac{\partial u_v}{\partial r_0} &= \frac{a}{r_v} \left\{ -\frac{3V_{uv}}{r_0^2} \tau_v + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\frac{V_{rv}}{r_0} - \frac{V_{r0}}{r_v} + \frac{r_v}{r_0 p} (V_{rv} - V_{r0}) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{r_0} \left(1 + \frac{r_v}{p} \right) \sin \varphi_v \right\}; \\
 \frac{\partial u_v}{\partial u_0} &= 1; \\
 \frac{\partial u_v}{\partial V_{r0}} &= \frac{aV_{uv}}{\mu} \left[-\frac{3V_{r0}}{r_v} \tau_v + \left(1 + \frac{r_v}{p} \right) \cos \varphi_v - 2 \frac{r_0}{r_v} + \frac{r_v}{p} \left(\frac{p}{r_0} - 1 \right) \right]; \\
 \frac{\partial u_v}{\partial V_{u0}} &= \frac{aV_{uv}}{\mu} \left\{ -\frac{3V_{u0}}{r_v} \tau_v + \left(1 + \frac{r_v}{p} \right) \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \sin \varphi_v + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{V_{\mu p}} \left[\left(1 + \frac{r_v}{p} \right) r_0 V_{rv} - \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) r V_{r0} \right] \right\}; \\
 \frac{\partial V_{rv}}{\partial r_0} &= a \left[-\frac{3\mu}{r_v^2 r_0^2} \left(\frac{p}{r_v} - 1 \right) \tau_v + \frac{V_{uv}}{r_v r_0} \sin \varphi_v + \frac{V_{r0}}{r_v^2} - \frac{V_r}{r_0^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{p}{r_v^2} \left(\frac{V_{rv}}{r_0} - \frac{V_{r0}}{r_v} \right) \right]; \\
 \frac{\partial V_{rv}}{\partial V_{r0}} &= a \left[-\frac{3V_{r0}}{r_v^2} \left(\frac{p}{r_v} - 1 \right) \tau_v + \frac{p}{r_v^2} \cos \varphi - \frac{2r_0}{r_v^2} \left(\frac{p}{r_v} - 1 \right) - \frac{V_r V_{r0}}{\mu} \right]; \\
 \frac{\partial V_{rv}}{\partial V_{u0}} &= \frac{a}{r_v} \left[-\frac{3V_u}{r_0} \left(\frac{p}{r_v} - 1 \right) \tau_v + \frac{p}{r_v} \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \sin \varphi_v + \right. \\
 &\quad \left. + V_{rv} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left(\frac{r_0}{r} - \frac{r}{r_0} \right) \right]; \\
 \frac{\partial V_{uv}}{\partial r_0} &= \frac{aV_{rv}}{r_v} \left\{ \frac{3V_{uv}}{r_0^2} \tau_v - \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\frac{V_{rv}}{r_0} - \frac{V_{r0}}{r_v} + \frac{r_v}{r_0 p} (V_{rv} - V_{r0}) \right] - \right.
 \end{aligned} \right\} (10.13)$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{r_0} \left(1 + \frac{r_v}{p} \right) \sin \varphi_v \Big\} - \frac{V_{u0}}{p} (1 - \cos \varphi_v); \\
\frac{\partial V_{u_v}}{\partial V_{r0}} &= \frac{aV_{r_v} V_{u_v}}{\mu} \left[\frac{3V_{r0}}{r_v} \tau_v - \left(1 + \frac{r_v}{p} \right) \cos \varphi_v + 2 \frac{r_0}{r_v} - \frac{r}{p} \left(\frac{p}{r_0} - 1 \right) \right] - \\
& - \sin \varphi_v; \\
\frac{\partial V_{u_v}}{\partial V_{u0}} &= \frac{aV_{r_v} V_{u_v}}{\mu} \left\{ \frac{3V_{u0}}{r_v} \tau_v - \left(1 + \frac{r_v}{p} \right) \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \sin \varphi_v - \frac{1}{V^{\mu p}} \left[\left(1 + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{r_v}{p} \right) r_0 V_{r_v} - \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) r V_{r0} \right] \right\} - \frac{r_0}{p} + \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \cos \varphi_v; \\
\frac{\partial \zeta_v}{\partial \zeta_0} &= 1 - \frac{r_v}{p} (1 - \cos \varphi_v); \quad \frac{\partial \zeta_v}{\partial V_{\zeta 0}} = \frac{r_v r_0}{V^{\mu p}} \sin \varphi_v; \\
\frac{\partial V_{\zeta_v}}{\partial \zeta_0} &= -\frac{1}{p} \left(V_{r_v} - V_{r0} + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \varphi_v \right); \quad \frac{\partial V_{\zeta_v}}{\partial V_{\zeta 0}} = \\
& = 1 - \frac{r_0}{p} (1 - \cos \varphi_v); \\
\left\| \frac{\partial r_v, V_{r_v}, V_{u_v}}{\partial u_0, \zeta_0, V_{\zeta 0}} \right\| &= 0; \quad \left\| \frac{\partial u_v}{\partial \zeta_0, V_{\zeta 0}} \right\| = 0; \quad \left\| \frac{\partial \zeta_v, V_{\zeta_v}}{\partial r_0, u_0, V_{r0}, V_{u0}} \right\| = 0,
\end{aligned} \tag{10.13}$$

где

$$\sin \varphi_v = \sin u_v \cos u_0 - \cos u_v \sin u_0;$$

$$\cos \varphi_v = \cos u_v \cos u_0 - \sin u_v \sin u_0;$$

$$\mu = R a_{u0}; \quad \tau_v = t_v - t_0.$$

Элементы матрицы изохронных производных

$$T_1 = \left\| \frac{\partial r_k u_k \zeta_k V_{rk} V_{uk} V_{\zeta k}}{\partial r_v u_v \zeta_v V_{rv} V_{uv} V_{\zeta v}} \right\|$$

от элементов орбиты в любой k -й точке короткого интервала (t_v, t_{v+1}) по элементам орбиты в v -й узловой точке вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial r_k}{\partial r_v} &= 1; \quad \frac{\partial r_k}{\partial V_{r_v}} = \tau; \quad \left\| \frac{\partial r_k}{\partial u_v, \zeta_v, V_{u_v}, V_{\zeta_v}} \right\| = 0; \\
\frac{\partial u_k}{\partial r_v} &= -\frac{V_{u_v}}{r_v^2} \tau; \quad \frac{\partial u_k}{\partial u_v} = 1; \quad \frac{\partial u_k}{\partial V_{u_v}} = \frac{1}{r_v} \tau; \quad \left\| \frac{\partial u_k}{\partial \zeta_v, V_{r_v}, V_{\zeta_v}} \right\| = 0; \\
\frac{\partial \zeta_k}{\partial \zeta_v} &= 1; \quad \frac{\partial \zeta_k}{\partial V_{\zeta_v}} = \tau; \quad \left\| \frac{\partial \zeta_k}{\partial r_v, u_v, V_{r_v}, V_{u_v}} \right\| = 0; \\
\frac{\partial V_{rk}}{\partial r_v} &= \left[\frac{\mu (2r_v^2 - \zeta_v^2)}{r_{1v}^5} - \frac{V_{u_v}^2}{r_v^2} \right] \tau; \quad \frac{\partial V_{rk}}{\partial \zeta_v} = \frac{3\mu r_v \zeta_v}{r_{1v}^5} \tau; \quad \frac{\partial V_{rk}}{\partial V_{r_v}} = 1; \\
\frac{\partial V_{rk}}{\partial V_{u_v}} &= 2 \frac{V_{u_v}}{r_v} \tau; \quad \left\| \frac{\partial V_{rk}}{\partial u_v, V_{\zeta_v}} \right\| = 0; \\
\frac{\partial V_{uk}}{\partial r_v} &= \frac{V_{r_v} V_{u_v}}{r_v^2} \tau; \quad \frac{\partial V_{uk}}{\partial V_{r_v}} = \frac{-V_{u_v}}{r_v} \tau; \quad \frac{\partial V_{uk}}{\partial V_{u_v}} = 1 - \frac{V_{r_v}}{r_v} \tau; \\
\left\| \frac{\partial V_{uk}}{\partial u_v, \zeta_v, V_{\zeta_v}} \right\| &= 0; \\
\frac{\partial V_{\zeta k}}{\partial r_v} &= \frac{3\mu r_v \zeta_v}{r_{1v}^5} \tau; \quad \frac{\partial V_{\zeta k}}{\partial \zeta_v} = \frac{\mu (2\zeta_v^2 - r_v^2)}{r_{1v}^5} \tau; \quad \frac{\partial V_{\zeta k}}{\partial V_{\zeta_v}} = 1; \\
\left\| \frac{\partial V_{\zeta k}}{\partial u_v, V_{r_v}, V_{u_v}} \right\| &= 0,
\end{aligned} \tag{10.14}$$

где

$$r_{1v} = \sqrt{r_v^2 + \zeta_v^2}; \quad \tau = t_k - t_v;$$

$r_v, \zeta_v, V_{rv}, V_{uv}$ — координаты и составляющие вектора скорости спутника в узловой точке.

Матрица R_1 производных от текущих элементов q_j орбиты в k -й точке по начальным условиям Q_m определяется из выражения

$$R_1 = T_1 S_1, \\ R_1 = \left\| \frac{\partial r_k u_k \zeta_k V_{rk} V_{uk} V_{\zeta k}}{\partial r_0 u_0 \zeta_0 V_{r0} V_{u0} V_{\zeta 0}} \right\|.$$

После этого по формулам (10.2) с использованием значений производных $\frac{\partial r_i}{\partial q_j}$,

вычисленных по формулам (10.12), определяются производные $\frac{\partial r_i}{\partial Q_m}$ от измеряемых параметров по начальным условиям.

Изложенные выше методы решения задачи сводятся к определению *начальных условий движения спутника* Q_m ($m=1, 2, \dots, 6$) в некоторый фиксированный момент времени t_0 . Возможен иной выбор элементов орбиты, определяемых в результате обработки траекторных измерений. В ряде случаев определенные преимущества, по сравнению с методом решения задачи при фиксированном начальном времени $t_0 = \text{const}$, имеет метод определения начальных условий для фиксированной начальной геоцентрической широты ψ_0 или координаты z_0 . В цилиндрической системе координат можно определять начальные условия для фиксированного значения аргумента широты u_0 .

Пусть задача решается в гринвичской системе координат $Oxyz$ при условии

$$\sin \psi_0 = \frac{z_0}{r_0} = \text{const}. \quad (10.15)$$

Дифференцируя (10.15), получим

$$\delta z_0 = \frac{z_0}{x_0^2 + y_0^2} (x_0 \delta x_0 + y_0 \delta y_0), \quad (10.16)$$

т. е. поправка δz_0 является линейной функцией поправок δx_0 и δy_0 , поэтому ее нельзя определять в результате решения системы уравнений, аналогичной (10.5). Иначе говоря, если решение задачи производится при условии (10.15), то в результате решения системы уравнений (10.5) необходимо определять поправки δQ_m ($\delta x_0, \delta y_0, \delta t_0, \delta v_{x0}, \delta v_{y0}$ и δv_{z0}). Поправка к координате z_0 определяется в каждом приближении по формуле (10.16).

Для такого метода решения краевой задачи условные уравнения принимают следующий вид:

$$\delta r_i = \sum_{m=1,2,3,4,5,6} \frac{\partial r_i}{\partial Q_m} \delta Q_m + \sum_{m=1,2} \left(\frac{\partial r_i}{\partial Q_m} + \frac{\partial r_i}{\partial z_0} \frac{\partial z_0}{\partial Q_m} \right) \delta Q_m - \dot{r}_i \delta t_0,$$

где

$$\frac{\partial z_0}{\partial Q_m} = \frac{z_0}{x_0^2 + y_0^2} Q_m \quad (m=1, 2); \quad (10.17)$$

$\dot{r}_i$ — производная от измеряемого параметра по времени.

Соответственно изменяются коэффициенты и правые части системы нормальных уравнений.

Условные уравнения (10.17) существенно упрощаются, если начальные условия $x_0, y_0, t_0, v_{x0}, v_{y0}$ и v_{z0} определить для фиксированного значения координаты z_0 или при $\psi_0 = \text{const} = 0$.

В этих случаях условные уравнения принимают вид

$$\delta r_i = \sum_{m=1,2,3,4,5,6} \frac{\partial r_i \delta Q_m}{\partial Q_m} - \dot{r}_i \delta t_0,$$

а коэффициенты третьего столбца и третьей строки матрицы $\|a_{mn}\|$ ($m, n=1, 2, \dots, 6$) и свободного члена третьего уравнения системы (10.5) вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} a_{m3} = a_{3n} = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial r_i}{\partial Q_m} \dot{r}_i p_i^2 \quad (m, n=1, \dots, 6); \\ a_{33} = \sum_{i=1}^N \dot{r}_i^2 p_i^2; \quad b_3 = - \sum_{i=1}^N \dot{r}_i \delta r_i p_i^2, \end{aligned} \right\} \quad (10.18)$$

где p_i — вес i -го измерения.

Из (10.18) следует, что при определении начальных условий для фиксированной координаты z_0 или при условии $\psi_0=0$ число интегрируемых уравнений в вариациях (10.7) сокращается до 30, так как величина производной r_i вычисляется, при известных в момент времени t_i элементах расчетной орбиты, по конечным формулам. Это приводит к повышению скорости решения задачи по сравнению с методом ее решения при $t_0=\text{const}$. Аналогично упрощается и расчет производных по конечным формулам задачи двух тел.

В результате обработки траекторных измерений можно определять не только начальные условия t_0, Q_m ($m=1, 2, \dots, 6$), но и некоторые геофизические параметры, оказывающие заметное влияние на движение спутника. В частности, для низких орбит спутников ($h_{cp} \leq 250$ км) в результате решения задачи можно уточнять среднее значение баллистического коэффициента S за время полета спутника на мерном интервале.

В этом случае в условные уравнения добавляются дополнительно слагаемые, а именно:

$$\delta r_i = \sum_{m=1}^6 \frac{\partial r_i}{\partial Q_m} \delta Q_m + \frac{\partial r_i}{\partial S} \delta S \quad (i=1, 2, \dots, N),$$

где $\frac{\partial r_i}{\partial S}$ — частные производные от измеряемых параметров по баллистическому коэффициенту.

Величины производных $\frac{\partial r_i}{\partial S}$ определяются из выражений

$$\frac{\partial r_i}{\partial S} = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \frac{\partial q_j}{\partial S},$$

где $\frac{\partial q_j}{\partial S}$ — частные производные от текущих элементов орбиты по баллистическому коэффициенту. Для вычисления этих производных можно использовать также метод вариаций. Тогда система (10.6) или (10.7) дополняется седьмой системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \delta \dot{v}_x &= F_x - S \zeta v v_x \left(\frac{\delta S}{S} + \frac{\delta \varrho}{\varrho} + \frac{\delta v}{v} + \frac{\delta v_x}{v_x} \right); \\ \delta \dot{v}_y &= F_y - S \varrho v v_y \left(\frac{\delta S}{S} + \frac{\delta \varrho}{\varrho} + \frac{\delta v}{v} + \frac{\delta v_y}{v_y} \right); \\ \delta \dot{v}_z &= F_z - S \varrho v v_z \left(\frac{\delta S}{S} + \frac{\delta \varrho}{\varrho} + \frac{\delta v}{v} + \frac{\delta v_z}{v_z} \right); \\ \delta \dot{x} &= \delta v_x; \\ \delta \dot{y} &= \delta v_y; \\ \delta \dot{z} &= \delta v_z, \end{aligned} \right\} \quad (10.19)$$

где F_x, F_y и F_z — правые части соответствующих уравнений системы (10.7); δS — вариация баллистического коэффициента;

$$\delta v = \frac{v_x \delta v_x + v_y \delta v_y + v_z \delta v_z}{v};$$

$$\frac{\delta \varrho}{\varrho} = r [k_{1i}(h - h_i) - k_{2i}(h - h_i)] E_j;$$

h — высота полета;

k_{1i}, k_{2i} и h_i — постоянные величины, значения которых приведены в табл. 12.1 (см. гл. XII, разд. 12.1).

Начальными условиями для интегрирования системы (10.19) являются нулевые вариации $\delta v_{x0} = \delta v_{y0} = \dots = \delta z_0 = 0$ и принятое значение вариации баллистического коэффициента δS . В расчетах можно принимать $\delta S = 0,1S$; тогда производные от текущих элементов орбиты q_j вычисляются по формулам

$$\frac{\partial q_j}{\partial S} = \frac{\delta q_j}{\delta S} \quad (j=1, 2, \dots, 6),$$

где δq_j — вариации элементов орбиты, вычисленные в результате интегрирования системы (10.19).

Уточнение баллистического коэффициента S в результате обработки траекторных измерений позволяет повысить точность прогнозирования движения низких спутников. В зависимости от средней высоты полета спутника и величины баллистического коэффициента S (от степени влияния сопротивления атмосферы на движение спутника) уточнение коэффициента S можно производить либо по измерениям с трех-пяти последовательных мерных витков, либо по измерениям суточного мерного интервала.

10.2.2. Методы второй группы

Рассмотрим алгоритм задачи в системе $Ox'y'z'$, повернутой относительно системы $Oxyz$ на угол L_N вокруг оси Oz . Угол L_N — географическая долгота восходящего узла N -го витка орбиты, определяемая по формуле

$$L_N = \text{Arc tg} \frac{y_N}{x_N}.$$

где x_N, y_N — координаты восходящего узла N -го витка орбиты в системе $Oxyz$.

Связь между системами $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ для N -го витка орбиты осуществляется по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x'_N &= x_N \cos L_N + y_N \sin L_N; & x_N &= x'_N \cos L_N; \\ y'_N &\equiv z'_N \equiv 0; & y_N &= x'_N \sin L_N; \\ v'_{xN} &= v_{xN} \cos L_N + v_{yN} \sin L_N; & v_{xN} &= v'_{xN} \cos L_N - v'_{yN} \sin L_N; \\ v'_{yN} &= -v_{xN} \sin L_N + v_{yN} \cos L_N; & v_{yN} &= v'_{xN} \sin L_N + v'_{yN} \cos L_N; \\ v'_{zN} &= v_{zN}; & v_{zN} &= v'_{zN}. \end{aligned}$$

Основной метод определения орбит спутников по данным измерений на больших интервалах времени является аппроксимация некоторых элементов орбиты в начале витка степенными полиномами.

Примем за систему параметров, определяемых на основании обработки траекторных измерений, следующие элементы в начале N -го витка: время t_N , географическую долготу L_N , модуль радиуса-вектора r_N и составляющие вектора скорости v'_{xN} , v'_{yN} и v'_{zN} .

При аппроксимации этих элементов орбиты степенными полиномами за независимое переменное примем функцию номера витка

$$\chi = \frac{N - N_{\min}}{N_{\max} - N_{\min}}, \quad 0 \leq \chi \leq 1,$$

где $N_{\min}$ и $N_{\max}$ — минимальный и максимальный номера витков интервала аппроксимации.

Тогда аппроксимирующие полиномы можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} t_N &= \sum_{k=0}^{k_1} a_{1k} \chi^k; \\ L_N &= \sum_{k=0}^{k_2} a_{2k} \chi^k; \\ &\dots \dots \dots \\ v'_{zN} &= \sum_{k=0}^{k_6} a_{6k} \chi^k, \end{aligned} \right\} \quad (10.20)$$

где $k_1, k_2, \dots, k_6$ — целые числа; $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{6k}$ — коэффициенты полиномов.

Задачу определения элементов орбиты спутника по данным измерений на больших интервалах времени сформулируем следующим образом: по данной системе измерений t_i, r_{iu} определить такие значения коэффициентов полиномов (10.20), которые наилучшим образом, в смысле способа наименьших квадратов, удовлетворяют заданной системе измерений.

Исходными данными для решения задачи полиномиальным методом являются результаты измерений t_i, r_{iu} и приближенные значения коэффициентов полиномов (10.20) a_{lk} ($l=1, 2, \dots, 6; k=0, 1, \dots, k_l$). Последние определяются перед решением, аппроксимацией расчетных значений элементов орбиты в начале витков $t_N, L_N, \dots, v'_{zN}$ полиномами (10.20) заданной степени или принимаются равными коэффициентам, получен-

ным в результате решения краевой задачи полиномиальным методом по измерениям на предыдущем мерном интервале.

Исходя из алгоритма задачи данные измерений должны быть определенным образом упорядочены по времени, например, при записи их на магнитные запоминающие устройства ЭВМ:

— для каждого мерного витка измерения всех пунктов должны располагаться в порядке возрастания времени;

— расположение измерений с различных мерных витков в порядке возрастания времени является не обязательным, но обычно такой принцип выдерживается, так как это обеспечивает определенные удобства при несложном алгоритме дополнительной обработки информации перед решением краевой задачи.

Для каждого измерения номер мерного витка N определяется из выражения

$$N = E \left(\frac{t_i - t_{N_{\min}}}{T_{N_{\min}}} \right) + N_{\min}, \quad (10.21)$$

где символ E обозначает целую часть от выражения в скобках; $t_{N_{\min}}$ — время прохождения спутника через восходящий узел орбиты для витка с номером $N_{\min}$; $T_{N_{\min}} = t_{N_{\min}+1} - t_{N_{\min}}$ — период обращения для витка с номером $N_{\min}$.

Очевидно, что для всех измерений с временами t_i , удовлетворяющими неравенству $t_N \leq t_i \leq t_{N+1}$, номер мерного витка не изменяется. Поэтому определение номеров мерных витков по формуле (10.21) производится лишь для времени первого измерения каждого из этих витков.

После определения N по формулам (10.20) вычисляются элементы орбиты в начале N -го витка $t_N, L_N, r_N, v_{xN}, v_{yN}, v_{zN}$ и производится преобразование координат и составляющих вектора скорости в систему координат $Oxyz$.

Расчетные значения текущих элементов орбиты $q_j(t)$ ($j=1, 2, \dots, 6$) и измеряемых параметров r_i определяются на каждом мерном витке численным интегрированием системы дифференциальных уравнений (см. гл. XII) при начальных условиях $t_N, v_{xN}, v_{yN}, v_{zN}, x_N, y_N$ и $z_N \equiv 0$.

Для всех измерений, отклонения которых удовлетворяют условиям (10.4), составляются условные уравнения вида

$$\delta r_i = \sum_{lk} \frac{\partial r_i}{\partial a_{lk}} \delta a_{lk} \quad (l=1, 2, \dots, 6; k=0, 1, \dots, k_l; i=1, 2, \dots, K_1), \quad (10.22)$$

где δa_{lk} — искомые поправки к коэффициентам полиномов (10.20);

$\frac{\partial r_i}{\partial a_{lk}}$ — частные производные от измеряемых параметров по этим коэффициентам,

K_1 — число измерений.

Величины производных $\frac{\partial r_i}{\partial a_{lk}}$ определяются из выражения

$$\frac{\partial r_i}{\partial a_{lk}} = \sum_{j=1}^6 \frac{\partial r_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial q_j}{\partial a_{lk}},$$

где $\frac{\partial r_i}{\partial q_j}$ — частные производные от измеряемых параметров по текущим элементам орбиты.

Частные производные от текущих элементов орбиты по коэффициентам полиномов (10.20) вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_j}{\partial a_{1k}} &= -\dot{q}_j \chi^k, \\ \frac{\partial q_j}{\partial a_{2k}} &= \left(-y_N \frac{\partial q_j}{\partial x_N} + x_N \frac{\partial q_j}{\partial y_N} - v_{yN} \frac{\partial q_j}{\partial v_{xN}} + v_{xN} \frac{\partial q_j}{\partial v_{yN}} \right) \chi^k, \\ \frac{\partial q_j}{\partial a_{3k}} &= \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_N} \cos L_N + \frac{\partial q_j}{\partial y_N} \sin L_N \right) \chi^k, \\ \frac{\partial q_j}{\partial a_{4k}} &= \left(\frac{\partial q_j}{\partial v_{xN}} \cos L_N + \frac{\partial q_j}{\partial v_{yN}} \sin L_N \right) \chi^k, \\ \frac{\partial q_j}{\partial a_{5k}} &= \left(-\frac{\partial q_j}{\partial v_{xN}} \sin L_N + \frac{\partial q_j}{\partial v_{yN}} \cos L_N \right) \chi^k, \\ \frac{\partial q_j}{\partial a_{6k}} &= \frac{\partial q_j}{\partial v_{zN}} \chi^k. \end{aligned}$$

Производные от текущих элементов орбиты по начальным условиям $\frac{\partial q_j}{\partial Q_{mN}}$ (j ,

$m = 1, 2, \dots, 6$) определяются либо методом вариаций, либо по конечным формулам задачи двух тел.

По условным уравнениям (10.22) составляется система нормальных уравнений

$$\sum_{n=1}^x \alpha'_{mn} \delta a_n = \beta'_m \quad \left(m, n = 1, 2, \dots, x; x = \sum_{l=1}^6 k_l + 6 \right), \quad (10.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_{mn} &= \sum_{i=1}^{k_l} \frac{\partial r_i}{\partial a_m} \frac{\partial r_i}{\partial a_n} p_i^2, \\ \beta'_m &= \sum_{i=1}^{k_l} \frac{\partial r_i}{\partial a_m} \delta r_i p_i^2. \end{aligned} \right\} \quad (10.24)$$

В формулах (10.23) и (10.24)

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_{10}, \quad a_2 = a_{11}, \dots, a_{k_1+1} = a_{20}; \\ a_{k_1+2} &= a_{21}, \dots, a_x = a_{6k_6}. \end{aligned} \right\} \quad (10.25)$$

Система условных уравнений (10.22), а следовательно, и система нормальных уравнений (10.18) являются недостаточными для точного решения задачи полиномиальным методом. Это объясняется тем, что некоторые из коэффициентов аппроксимирующих полиномов (10.20) связаны между собой определенными кинематическими зависимостями, без учета которых результаты решения задачи могут быть искажены за счет влияния как неучтенных систематических ошибок измерений, так и методических ошибок, обусловленных неполным учетом сил, действующих на спутник.

Рассмотрим прежде всего такой параметр орбиты, как драконический период обращения спутника T_N . С одной стороны, $T'_N = t_{N+1} - t_N$, причем времена в начале N -го и $(N+1)$ -го витков определяются по первому из полиномов (10.20). С другой стороны, период обращения можно вычислить численным интегрированием системы дифференциальных уравнений (12.4) по элементам орбиты в начале N -го витка: $v'_{xN}, v'_{yN}, v'_{zN}, x'_N = r_N; y'_N = 0; z'_N = 0$, т. е. $T'_N = f(v'_{xN}, v'_{yN}, v'_{zN}, r_N)$. Очевидно, что решение задачи должно производиться при условии

$$T'_N = T''_N. \quad (10.26)$$

Поэтому система условных уравнений (10.22) должна быть дополнена условными уравнениями вида

$$\delta T_N = \sum_{l,k} \frac{\partial T_N}{\partial a_{lk}} \delta a_{lk}, \quad (10.27)$$

где

$$\delta T_N = T''_N - T'_N;$$

$\frac{\partial T_N}{\partial a_{lk}}$ — производные от периода обращения по коэффициентам аппроксимирующих полиномов.

Производные от периода обращения по элементам орбиты в начале N -го витка вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_N}{\partial t_N} &= 0; \quad \frac{\partial T_N}{\partial L_N} = 0; \quad \frac{\partial T_N}{\partial v_{xN}} = \frac{3v_N T_{N \text{ окк}}}{2 - v_N} \frac{v'_{xN}}{V_N^2}; \\ \frac{\partial T_N}{\partial r_N} &= \frac{3}{2} \frac{T_{N \text{ окк}}}{r_N} \left\{ 1 + \frac{v_N}{2 - v_N} \left[1 + \frac{2\omega_3 r_N (\omega_3 r_N - v'_{yN})}{V_N^2} \right] \right\}; \\ \frac{\partial T_N}{\partial v'_{yN}} &= \frac{3v_N T_{N \text{ окк}}}{2 - v_N} \frac{v'_{yN} + \omega_3 r_N}{V_N^2}, \quad \frac{\partial T_N}{\partial v'_{zN}} = \frac{3v_N T_{N \text{ окк}}}{2 - v_N} \frac{v'_{zN}}{V_N^2}, \end{aligned}$$

где

$$T_{N \text{ оск}} = \frac{2\pi}{\sqrt{R\alpha_{00}}} a_N^{3/2}; \quad a_N = \frac{r_N}{2 - v_N}; \quad v_N = \frac{r_N V_N^2}{R\alpha_{00}};$$

$$V_N^2 = v_{xN}^2 + v_{yN}^2 + v_{zN}^2 + \omega_3^2 r_N^2 - 2\omega_3 r_N v_{yN}.$$

Производные от периода обращения по коэффициентам полиномов (10.20) вычисляются после этого по формулам

$$\frac{\partial T_N}{\partial a_{lN}} = \frac{\partial T_N}{\partial q_{lN}} \chi^k \quad (l = 1, 2, \dots, 6; \quad k = 0, 1, 2, \dots, k_l).$$

Количество условных уравнений (10.27) K_2 зависит от числа витков в интервале $(N_{\min}, N_{\max})$. В предельном случае $K_{2\max} = N_{\max} - N_{\min} + 1$, однако при этом существенно увеличивается время решения задачи на ЭВМ. Анализ показывает, что результаты решения задачи практически совпадают с полученными при $K_{2\max}$, если условные уравнения (10.27) составлять лишь для $K_2 = (0,15 - 0,20) K_{2\max}$ витков, равномерно распределенных в интервале $(N_{\min}, N_{\max})$.

Веса условных уравнений (10.27) p_T выбираются на основании опыта обработки траекторных измерений. Как показывают сравнительные расчеты при изменении p_T в широких пределах, результаты решения задачи изменяются незначительно.

Кроме условия (10.26), для принятой системы определяемых параметров можно ввести также условия $L'_{N+1} = L''_{N+1}$ и $r'_{N+1} = r''_{N+1}$. Однако, как показывают расчеты, особой необходимости в этом нет, так как точность определения орбиты полиномиальным методом достаточно высока даже в том случае, если ограничиться только введением условия (10.26).

Система нормальных уравнений, соответствующая условным уравнениям (10.27), запишется в следующем виде:

$$\sum_{n=1}^x \alpha''_{mn} \delta a_n = \beta''_m, \quad (10.28)$$

где

$$\alpha''_{mn} = \sum_{i=1}^{k_2} \frac{\partial T_i}{\partial a_m} \frac{\partial T_i}{\partial a_n} p_T^2; \quad \beta''_m = \sum_{i=1}^{k_2} \frac{\partial T_i}{\partial a_m} \delta T_i p_T^2.$$

При решении задачи на ЭВМ расчеты в каждом приближении целесообразно производить в два этапа: составляются нормальные уравнения (10.23); затем в результате численного интегрирования дифференциальных уравнений (12.4) на k_2 витках — нормальные уравнения (10.28) и окончательно формируется система *нормальных уравнений*

$$\sum_{n=1}^x \alpha_{mn} \delta a_n = \beta_m \quad \left(m, n = 1, 2, \dots, x = \sum_{l=1}^6 k_l + 6 \right), \quad (10.29)$$

где

$$\alpha_{mn} = \alpha'_{mn} + \alpha''_{mn}; \quad \beta_m = \beta'_m + \beta''_m.$$

В результате решения системы нормальных уравнений (10.29) в каждом приближении определяются поправки к коэффициентам полиномов (10.20) и уточненные значения этих коэффициентов по формулам

$$a_{lk} = \tilde{a}_{lk} + \sum_{v=1}^x \delta a_{lk}^{(v)},$$

где v — номер приближения.

Критериями сходимости процесса последовательных приближений являются неравенства

$$|\delta a_{lk}| \leq \varepsilon_{lk}; \quad \sigma \leq \varepsilon.$$

Средняя квадратическая ошибка единицы веса σ вычисляется в каждом приближении по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k_1} (\delta r_i p_i)^2 + \sum_{i=1}^{k_2} (\delta T_i p_T)^2 - \sum_{m=1}^x \delta a_m \beta_m}{k_1 + k_2 - x}},$$

где δa_m — поправка к коэффициентам полиномов (10.20);
 β_m — правые части нормальных уравнений (10.29).

Степень каждого из полиномов (10.20) зависит от характера изменения соответствующего элемента орбиты на интервале аппроксимации ($N_{\min}$, $N_{\max}$).

При выборе степеней полиномов необходимо также учитывать точность измерений, в результате обработки которых определяется орбита спутника. При больших ошибках измерений и невысокой следствии этого точности определения элементов орбиты нецелесообразно добиваться максимально возможного исключения методических ошибок за счет повышения степеней аппроксимирующих полиномов.

Анализ влияния основных возмущающих факторов на характер изменения элементов орбиты как функций номера витка N показывает следующее:

- ошибки аппроксимации элементов орбиты t_N , L_N , r_N , ..., v'_{2N} полиномами (10.20) при заданной длине интервала ($N_{\min}$, $N_{\max}$) определяются главным образом аномалиями поля сил тяжести, а для низких орбит ($h_{cp} \leq 250$ км) — аномалиями и торможением спутника в земной атмосфере;

- ошибки аппроксимации, обусловленные сжатием Земли и долгопериодическими колебаниями плотности атмосферы, сравнительно невелики даже при большой длине интервала аппроксимации;

- из всех элементов орбиты наибольшие методические ошибки наблюдаются при аппроксимации времени t_N ; уменьшение длины мерного интервала в два-три раза приводит, как правило, к уменьшению методической ошибки аппроксимации времени t_N более чем на порядок.

В каждом конкретном случае степени аппроксимирующих полиномов необходимо выбирать исходя из требуемой точности решения задачи, характеристик орбиты, длины интервала аппроксимации ($N_{\min}$, $N_{\max}$) и точности измерений. На основании анализа методических ошибок аппроксимации основных элементов можно дать следующие *общие рекомендации* по решению задачи *полиномным методом*:

а) степени аппроксимирующих полиномов (10.20), как правило, следует назначать равными $k_1=3$, $k_2=2$, $k_3=k_4=k_5=k_6=1$; при большой длине мерного интервала ($N_{\max}-N_{\min}>40$) и сравнительно точных измерениях может оказаться целесообразным повышение степеней всех полиномов на единицу (особенно для низких орбит);

б) во всех случаях длину мерного интервала необходимо по возможности ограничивать; для низких орбит при достаточном числе измерений длину мерного интервала целесообразно ограничивать сутками полета спутника; совместная обработка измерительной информации более чем за семь-десять суток полета спутника допустима лишь для системы измерений невысокой точности.

При решении задачи полиномным методом в качестве определяемых параметров можно принять отличные от рассмотренных выше элементы орбиты. Так, для цилиндрической системы координат можно определять следующие элементы орбиты в начале N -го витка: t_N , i_N , Ω_N , r_N , V_{rN} и V_{uN} , где i_N и Ω_N — соответственно наклонение и долота восходящего узла орбиты.

В этом случае для определения расчетных значений измеряемых параметров r_i целесообразно интегрировать систему дифференциальных уравнений движения спутника в цилиндрических координатах, а для расчета частных производных от текущих элементов орбиты по начальным условиям использовать соответствующие конечные формулы задачи двух тел в сочетании с методом узловых точек. Следует заметить, что независимо от выбора системы определяемых элементов орбиты решение задачи полиномным методом необходимо производить при введении дополнительных условий, аналогичных (10.26).

10.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТ МЕЖПЛАНЕТНЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Соотношения, необходимые для определения орбиты межпланетного КА, приведем в предположении, что:

- интегрирование системы дифференциальных уравнений (12.7), (12.108) движения КА и составление системы нормальных уравнений производятся в системе координат $OXYZ$ (гл. II, разд. 2.1.2, «б», рис. 2.4);

- в качестве измеряемых параметров выбраны D , $\dot{D}$, A , γ , α_i , β_{ij} , α_r , δ_r , $\dot{A}$, $\dot{\gamma}$.

Расчетные значения всех указанных выше параметров и их частных производных

$\frac{\partial r_i}{\partial Q_m}$ на момент измерения определяются по следующим формулам:

$$D = \sqrt{(X - X_N)^2 + (Y - Y_N)^2 + (Z - Z_N)^2};$$

$$\frac{\partial D}{\partial Q_m} = \frac{1}{D} \left[\frac{\partial X}{\partial Q_m} (X - X_N) + \frac{\partial Y}{\partial Q_m} (Y - Y_N) + \frac{\partial Z}{\partial Q_m} (Z - Z_N) \right],$$

где X , Y , Z — координаты КА;

X_N , Y_N , Z_N — координаты измерительного пункта;

$$\dot{D} = \frac{1}{D} [(V_X - \dot{X}_N)(X - X_N) + (V_Y - \dot{Y}_N)(Y - Y_N) + (V_Z - \dot{Z}_N)(Z - Z_N)];$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{D}}{\partial Q_m} = & \frac{1}{D} \left[\frac{\partial V_X}{\partial Q_m} (X - X_N) + \frac{\partial V_Y}{\partial Q_m} (Y - Y_N) + \frac{\partial V_Z}{\partial Q_m} (Z - Z_N) + \right. \\ & + \frac{\partial X}{\partial Q_m} (V_X + \omega_3 Y_N + \omega_3 g Z_N \sin G) + \frac{\partial Y}{\partial Q_m} (V_Y - \omega_3 X_N + \omega_3 g Z_N \cos G) + \\ & \left. + \frac{\partial Z}{\partial Q_m} (V_Z - \omega_3 g Y_N \cos G - \omega_3 g X_N \sin G) - \dot{D} \frac{\partial D}{\partial Q_m} \right]. \end{aligned}$$

Поскольку величины D , $\dot{D}$, $\frac{\partial D}{\partial Q_m}$, $\frac{\partial \dot{D}}{\partial Q_m}$ не зависят от того, в какой системе

координат они вычисляются и в какой системе составляется матрица системы нормальных уравнений, целесообразно определять эти параметры в системе координат $\xi_{\Pi} \eta_{\Pi} \zeta_{\Pi}$ (гл. II, разд. 2.1.5, «д», рис. 2.20). В этом случае решение будет проходить по следующей схеме:

- интегрирование уравнений движения в системе $OXYZ$;
- перевод элементов орбиты и производных от них по начальным условиям $dq_j/\partial Q_m$ в систему $\xi_{\Pi} \eta_{\Pi} \zeta_{\Pi}$;
- вычисление величин D , $\dot{D}$, $\partial D/\partial Q_m$, $\partial \dot{D}/\partial Q_m$;
- формирование матриц $A = R_{\Pi}^T P R$ и $B = R^T P \delta r$.

При этом расчетные формулы значительно упрощаются, а прецессия и нутация оси вращения Земли будут учтены через величины g и G (см. гл. II, разд. 2.2, п. 9) при переводе из системы $OXYZ$ в систему $\xi_{\Pi} \eta_{\Pi} \zeta_{\Pi}$.

Формулы для расчета D , $\dot{D}$ и их производных $\frac{\partial D}{\partial Q_m}$, $\frac{\partial \dot{D}}{\partial Q_m}$ в системе $\xi_{\Pi} \eta_{\Pi} \zeta_{\Pi}$ имеют вид

$$D = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}; \quad \frac{\partial D}{\partial Q_m} = \frac{1}{D} \left[\frac{\partial \xi}{\partial Q_m} \xi + \frac{\partial \eta}{\partial Q_m} \eta + \frac{\partial \zeta}{\partial Q_m} \zeta \right];$$

$$\dot{D} = \frac{1}{D} [\dot{\xi} \xi + \dot{\eta} \eta + \dot{\zeta} \zeta];$$

$$\ddot{D} = \frac{1}{D} [\ddot{\xi} \xi + \ddot{\eta} \eta + \ddot{\zeta} \zeta + \dot{\xi} \dot{\xi} + \dot{\eta} \dot{\eta} + \dot{\zeta} \dot{\zeta} - \dot{D}^2];$$

$$\frac{\partial \dot{D}}{\partial Q_m} = \frac{1}{D} \left[\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial Q_m} \xi + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Q_m} \eta + \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial Q_m} \zeta + \frac{\partial \xi}{\partial Q_m} \dot{\eta} + \frac{\partial \eta}{\partial Q_m} \dot{\xi} + \frac{\partial \zeta}{\partial Q_m} \dot{\xi} + \frac{\partial \xi}{\partial Q_m} \dot{\zeta} - \frac{\partial D}{\partial Q_m} \dot{D} \right].$$

Продолжим перечень формул для расчета измеряемых параметров и производных по начальным условиям движения:

$$A = \arctg \frac{\zeta}{\xi};$$

$$\frac{\partial A}{\partial Q_m} = \frac{1}{r_1^2} \left(\xi \frac{\partial \zeta}{\partial Q_m} - \zeta \frac{\partial \xi}{\partial Q_m} \right), \quad \text{где } r_1 = \sqrt{\xi^2 + \zeta^2};$$

$$\dot{A} = \frac{1}{r_1^2} (\xi \dot{\zeta} - \zeta \dot{\xi});$$

$$\frac{\partial \dot{A}}{\partial Q_m} = \frac{1}{r_1^2} \left[(\dot{\xi} - 2\xi \dot{A}) \frac{\partial \xi}{\partial Q_m} - (\dot{\xi} + 2\zeta \dot{A}) \frac{\partial \zeta}{\partial Q_m} - \zeta \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial Q_m} + \xi \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial Q_m} \right];$$

$$\gamma = \arctg \frac{\eta}{r_1};$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial Q_m} = \frac{1}{D r_1} \left(D \frac{\partial \eta}{\partial Q_m} - \eta \frac{\partial D}{\partial Q_m} \right); \quad \dot{\gamma} = \frac{1}{D r_1} (D \dot{\eta} - \eta \dot{D});$$

$$\frac{\partial \dot{\gamma}}{\partial Q_m} = \frac{1}{r_1} \left[\frac{\eta D}{D^2} \cdot \frac{\partial D}{\partial Q_m} + \frac{1}{r_1} \left(\eta \frac{\dot{D}}{D} - \dot{\eta} \right) \frac{\partial r_1}{\partial Q_m} + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial Q_m} - \frac{\dot{D}}{D} \frac{\partial \eta}{\partial Q_m} - \frac{\eta}{D} \frac{\partial \dot{D}}{\partial Q_m} \right],$$

где

$$\frac{\partial r_1}{\partial Q_m} = \frac{1}{r_1} \left(\xi \frac{\partial \xi}{\partial Q_m} + \zeta \frac{\partial \zeta}{\partial Q_m} \right);$$

$$\alpha_1 = \arccos \frac{\zeta \zeta_N + \xi \xi_N}{D d},$$

где $d = \sqrt{\zeta_N^2 + \xi_N^2}$;

ξ_N, ζ_N — координаты приемной антенны в системе координат $\xi_{II}\eta_{II}\zeta_{II}$ с началом в месте расположения передающей антенны;

$$\begin{aligned}\frac{\partial \alpha_1}{\partial Q_m} &= \frac{1}{\sqrt{(\zeta_N - \xi_N)^2 + \eta^2 d^2}} \left[d \cos \alpha_1 \frac{\partial D}{\partial Q_m} - \left(\xi_N \frac{\partial \xi}{\partial Q_m} + \zeta_N \frac{\partial \zeta}{\partial Q_m} \right) \right]; \\ \frac{\partial \dot{\alpha}_1}{\partial Q_m} &= \frac{1}{\sqrt{(\zeta_N - \xi_N)^2 + \eta^2 d^2}} \left[d \left(\cos \alpha_1 \frac{d\dot{D}}{\partial Q_m} - \sin \alpha_1 \dot{D} \frac{\partial \alpha_1}{\partial Q_m} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\xi_N \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial Q_m} + \zeta_N \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial Q_m} \right) \right] - \frac{\dot{\alpha}_1}{(\zeta_N - \xi_N)^2 + \eta^2 d^2} \times \\ &\quad \times \left[\left(\zeta_N - \xi_N \right) \cdot \left(\xi_N \frac{\partial \zeta}{\partial Q_m} - \zeta_N \frac{\partial \xi}{\partial Q_m} \right) + \eta d^2 \frac{d\eta}{\partial Q_m} \right]; \\ \alpha_T &= \arccos \frac{X - X_N}{\sqrt{(X - X_N)^2 + (Y - Y_N)^2}},\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}\alpha_T &= \arctg \frac{Y - Y_N}{X - X_N} \quad (0 \leq \alpha_T \leq 360^\circ); \\ \frac{\partial \alpha_T}{\partial Q_m} &= \frac{(X - X_N) \frac{\partial Y}{\partial Q_m} - (Y - Y_N) \frac{\partial X}{\partial Q_m}}{(X - X_N)^2 + (Y - Y_N)^2}; \\ \delta_T &= \arccos \sqrt{\frac{(X - X_N)^2 + (Y - Y_N)^2}{(X - X_N)^2 + (Y - Y_N)^2 + (Z - Z_N)^2}} = \\ &= \arctg \frac{Z - Z_N}{\sqrt{(X - X_N)^2 + (Y - Y_N)^2}}; \\ \frac{\partial \delta_T}{\partial Q_m} &= \frac{r^2 \frac{\partial Z}{\partial Q_m} - (Z - Z_N) r \frac{\partial r}{\partial Q_m}}{r D^2}; \quad r = \sqrt{(X - X_N)^2 + (Y - Y_N)^2}; \\ \frac{\partial r}{\partial Q_m} &= \frac{1}{r} \left[(X - X_N) \frac{\partial X}{\partial Q_m} + (Y - Y_N) \frac{\partial Y}{\partial Q_m} \right].\end{aligned}$$

В случае автономных измерений с борта КА в качестве измеряемых параметров могут быть приняты:

1. Углы между направлениями на звезду и планету.

$$\begin{aligned}\beta_{1i} &= \arccos [\mu_1 (X_i - X) + \mu_2 (Y_i - Y) + \\ &\quad + \mu_3 (Z_i - Z) \frac{1}{\sqrt{(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2}}]; \\ \frac{\partial \beta_{1i}}{\partial Q_m} &= \frac{1}{r_1 \sin \beta_{1i}} \left(\frac{1}{r_i} a \cos \beta_{1i} - b \right),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}r_1 &= \sqrt{(X_i - X)^2 + (Y_i - Y)^2 + (Z_i - Z)^2}; \\ a &= (X_i - X) \frac{\partial X}{\partial Q_m} + (Y_i - Y) \frac{\partial Y}{\partial Q_m} + (Z_i - Z) \frac{\partial Z}{\partial Q_m}; \\ b &= \left(\mu_1 \frac{\partial X}{\partial Q_m} + \mu_2 \frac{\partial Y}{\partial Q_m} + \mu_3 \frac{\partial Z}{\partial Q_m} \right);\end{aligned}$$

X_i, Y_i, Z_i — координаты планеты;
 X, Y, Z — координаты КА;

$$\mu_1 = \cos \delta \cos \alpha; \quad \mu_2 = \cos \delta \sin \alpha; \quad \mu_3 = \sin \delta;$$

α — прямое восхождение звезды;

δ — склонение звезды.

2. Углы между направлениями на две планеты.

$$\beta_{2ij} = \arccos \frac{1}{r_i r_j} [(X_i - X)(X_j - X) + (Y_i - Y)(Y_j - Y) + (Z_i - Z)(Z_j - Z)];$$

$$\frac{\partial \beta_{2ij}}{\partial Q_m} = \frac{\cos \beta_{2ij}}{\sin \beta_{2ij}} \left[\frac{1}{D_i} \frac{\partial D_i}{\partial Q_m} + \frac{1}{D_j} \frac{\partial D_j}{\partial Q_m} \right] - \frac{1}{D_i D_j \sin \beta_{2ij}} \left\{ (X_i - X) \left(\frac{\partial X_i}{\partial Q_m} - \frac{\partial X}{\partial Q_m} \right) + \right.$$

$$+ (X_j - X) \left(\frac{\partial X_i}{\partial Q_m} - \frac{\partial X}{\partial Q_m} \right) + (Y_i - Y) \left(\frac{\partial Y_j}{\partial Q_m} - \frac{\partial Y}{\partial Q_m} \right) + (Y_j - Y) \left(\frac{\partial Y_i}{\partial Q_m} - \frac{\partial Y}{\partial Q_m} \right) +$$

$$\left. + (Z_i - Z) \left(\frac{\partial Z_j}{\partial Q_m} - \frac{\partial Z}{\partial Q_m} \right) + (Z_j - Z) \left(\frac{\partial Z_i}{\partial Q_m} - \frac{\partial Z}{\partial Q_m} \right) \right\},$$

где $X_i, Y_i, Z_i; X_j, Y_j, Z_j$ — координаты планет.

Для определения частных производных $\partial r_i / \partial Q_m$ необходимо знать соответствующие частные производные $\partial q_j / \partial Q_m$ от элементов орбиты по начальным условиям движения. Для определения этих производных прибегают к методу конечных разностей или к методу вариаций. При этом частные производные $\partial q_j / \partial Q_m$ получаются в той системе координат, в которой производится интегрирование системы дифференциальных уравнений движения. Затем они переводятся в систему координат, выбранную для вычислений расчетных значений измеряемых параметров и их производных $\partial r_i / \partial Q_m$.

В случае *уточнения астрономических и геофизических констант* и каких-либо других элементов необходимо рассчитывать производные от элементов q_j по уточняемым параметрам. Для этого дополнительно интегрируется система дифференциальных уравнений движения КА при варьированном значении уточняемого параметра.

Вычисление производных $\partial q_j / \partial Q_m$ методом *вариаций* осуществляется следующим образом.

Система дифференциальных уравнений движения КА представляется в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_X &= X_{30} + X_{10} + \sum_i X_{i0} + X_{13} + \sum_i X_{i3}; \\ \dot{V}_Y &= Y_{30} + Y_{10} + \sum_i Y_{i0} + Y_{13} + \sum_i Y_{i3}; \\ \dot{V}_Z &= Z_{30} + Z_{10} + \sum_i Z_{i0} + Z_{13} + \sum_i Z_{i3}; \\ \dot{X} &= V_X; \quad \dot{Y} = V_Y; \quad \dot{Z} = V_Z, \end{aligned} \right\} \quad (10.30)$$

где $i=2, 4, 6, 7, 8$;

$X_{30}, X_{10}, X_{i0}, X_{13}, X_{i3}$

$Y_{30}, \dots, Y_{i3}$

$Z_{30}, \dots, Z_{i3}$ — составляющие ускорений системы сил, определяющих движение КА.

Телам Солнечной системы соответствуют следующие индексы:

1 — Солнце;	6 — Марс;
2 — Венера;	7 — Юпитер;
3 — Земля;	8 — Сатурн.
4 — Луна;	

КА обозначается индексом 0.

В правые части уравнений движения КА входят составляющие ускорений, характеризующие притяжение КА Землей, Луной, планетами и Солнцем, а также притяжение Земли к Солнцу и планетам. Составляющие последнего вида зависят лишь от взаимного положения Земли, Солнца, планет и не зависят от координат и скоростей КА (от Q_m). Следовательно:

$$\begin{aligned} \delta X_{13} &= \delta X_{23} = \delta X_{43} = \delta X_{63} = \delta X_{73} = \delta X_{83} = 0; \\ \delta Y_{13} &= \delta Y_{23} = \delta Y_{43} = \delta Y_{63} = \delta Y_{73} = \delta Y_{83} = 0; \\ \delta Z_{13} &= \delta Z_{23} = \delta Z_{43} = \delta Z_{63} = \delta Z_{73} = \delta Z_{83} = 0. \end{aligned}$$

Тогда система (10.30) в вариациях по Q_m будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta \dot{V}_{Xm} &= \delta X_{30} + \sum_{i=1,2,4,6,7,8} \delta X_{i0}; \\ \delta \dot{V}_{Ym} &= \delta Y_{30} + \sum_{i=1,2,4,6,7,8} \delta Y_{i0}; \\ \delta \dot{V}_{Zm} &= \delta Z_{30} + \sum_{i=1,2,4,6,7,8} \delta Z_{i0}. \end{aligned}$$

$$\delta \dot{X}_m = \delta V_{Xm}; \quad \delta \dot{Y}_m = \delta V_{Ym}; \quad \delta \dot{Z}_m = \delta V_{Zm}; \quad m = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \delta X_{30} &= A_1 \delta X_m + A_{2m} X + A_{3m} X; \\ A_1 &= -\frac{b_0}{r_{30}^3} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{b_2}{b_0 r_{30}^2} \left(\frac{5Z^2}{r_{30}^2} - 1 \right) \right]; \\ A_{2m} &= \frac{3b_0}{r_{30}^4} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{b_2}{b_0 r_{30}^2} \left(\frac{5Z_0^2}{r_{30}^2} - 1 \right) \right] \frac{X \delta X_m + Y \delta Y_m + Z \delta Z_m}{r_{30}}; \\ A_{3m} &= -\frac{3b_2}{r_{30}^6} \left[\left(\frac{10Z^2}{r_{30}^2} - 1 \right) \frac{X \delta X_m + Y \delta Y_m + Z \delta Z}{r_{30}} - \frac{5Z \delta Z_m}{r_{30}} \right]; \\ \delta Y_{30} &= A_1 \delta Y_m + A_{2m} Y + A_{3m} Y; \\ \delta Z_{30} &= B_1 \delta Z_m + B_{2m} Z + B_{3m} Z; \\ B_1 &= -\frac{b_0}{r_{30}^3} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{b_2}{b_0 r_{30}^2} \left(\frac{5Z^2}{r_{30}^2} - 3 \right) \right]; \\ B_{2m} &= \frac{3b_0}{r_{30}^4} \left[1 - \frac{3}{2} \frac{b_2}{b_0 r_{30}^2} \left(\frac{5Z^2}{r_{30}^2} - 3 \right) \right] F_1; \\ B_{3m} &= -\frac{3b_2}{r_{30}^6} \left[\left(\frac{10Z^2}{r_{30}^2} - 3 \right) F_1 - \frac{5Z \cdot \delta Z_m}{r_{30}} \right]; \\ \delta X_{40} &= \frac{k_4 b_0}{r_{40}^3} \left[3 \frac{(X_4 - X)}{r_{40}} F_2 - \delta X_m \right]; \\ \delta Y_{40} &= \frac{k_4 b_0}{r_{40}^3} \left[3 \frac{(Y_4 - Y)}{r_{40}} F_2 - \delta Y_m \right]; \\ \delta Z_{40} &= \frac{k_4 b_0}{r_{40}^3} \left[3 \frac{(Z_4 - Z_0)}{r_{40}} F_2 - \delta Z_m \right]; \\ \delta X_{i0} &= \frac{m_i}{r_{i0}^3} k^2 A_0^3 \left[3 \frac{(X_i - X)}{r_{i0}} F_3 - \delta X_m \right]; \\ \delta Y_{i0} &= \frac{m_i}{r_{i0}^3} k^2 A_0^3 \left[3 \frac{(Y_i - Y)}{z_{i0}} F_3 - \delta Y_m \right]; \\ \delta Z_{i0} &= \frac{m_i}{r_{i0}^3} k^2 A_0^3 \left[3 \frac{(Z_i - Z)}{Z_{i0}} F_3 - \delta Z_m \right], \end{aligned} \right\} \quad (10.31)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{X \delta X_m + Y \delta Y_m + Z \delta Z_m}{r_{30}}; \\ F_2 &= \frac{(X_4 - X) \delta X_m + (Y_4 - Y) \delta Y_m + (Z_4 - Z) \delta Z_m}{r_{40}}; \\ F_3 &= \frac{(X_i - X) \delta X_m + (Y_i - Y) \delta Y_m + (Z_i - Z) \delta Z_m}{r_{i0}}; \end{aligned}$$

$\delta V_X, \delta V_Y, \delta V_Z, \delta X, \delta Y, \delta Z$ — вариации текущих элементов орбиты, обусловленные заданными вариациями начальных условий движения δQ_m ;

X, Y, Z, V_X, V_Y, V_Z — текущие элементы орбиты КА (индекс „0“ для сокращения записи здесь и в дальнейшем опускается);

k^2 — постоянная Гаусса;

m_i — масса i -й планеты; $k_4 = \frac{m_4}{m_3}$ — отношение массы Луны к массе Земли.

При $i=1$ величина $m_i=1$ и значение $\delta X_{i0}, \delta Y_{i0}, \delta Z_{i0}$ умножаются на $1-\kappa$ (κ — отношение силы светового давления на КА к силе притяжения Солнцем).

В качестве начальных условий для интегрирования каждой из шести систем необходимо взять элементы соответствующей строки единичной матрицы

$$I = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

В случае уточнения *астрономической постоянной* A_0 в процессе решения задачи, т. е. в случае, когда $m=7$ и A_0 входит в число определяемых параметров, для расчета необходимо иметь и значения производных $\frac{\partial q_i}{\partial A_0}$, которые можно также вычислять методом вариаций.

В этом случае система уравнений движения КА в вариациях, седьмая по счету, для вычисления путем интегрирования значений производных $\frac{\partial q_j}{\partial A_0}$ будет иметь вид

$$\begin{aligned} \delta \dot{X} &= \delta X_{30} + \sum_{i=1,2,4,6,7,8} \delta X_{i0} - \sum_{i=1,2,4,6,7,8} \delta X_{i3}; \\ \delta \dot{Y} &= \delta Y_{30} + \sum_{i=1,2,4,6,7,8} \delta Y_{i0} - \sum_{i=1,2,4,6,7,8} \delta Y_{i3}; \\ \delta \dot{Z} &= \delta Z_{30} + \sum_{i=1,2,4,6,7,8} \delta Z_{i0} - \sum_{i=1,2,4,6,7,8} \delta Z_{i3}; \\ \delta \dot{X} &= \delta V_X; \quad \delta \dot{Y} = \delta V_Y; \quad \delta \dot{Z} = \delta V_Z, \end{aligned}$$

где δX_{30} , δY_{30} , δZ_{30} , δX_{40} , δY_{40} , δZ_{40} вычисляются по формулам (10.31), но с учетом того, что вариации берутся по A_0 ;

$$\delta X_{i0} = \frac{m_i}{r_{i0}^3} k^2 A_0^3 \left[\frac{3}{A_0} (X_i - X) + (\delta X_i - \delta X) - 3 \frac{X_i - X}{r_{i0}} H \right];$$

$$\delta Y_{i0} = \frac{m_i}{r_{i0}^3} k^2 A_0^3 \left[\frac{3}{A_0} (Y_i - Y) + (\delta Y_i - \delta Y) - 3 \frac{Y_i - Y}{r_{i0}} H \right];$$

$$\delta Z_{i0} = \frac{m_i}{r_{i0}^3} k^2 A_0^3 \left[\frac{3}{A_0} (Z_i - Z) + (\delta Z_i - \delta Z) - 3 \frac{Z_i - Z}{r_{i0}} H \right];$$

$$\delta X_{i3} = \frac{m_i}{r_{i3}^3} k^2 A_0^3 \left[\frac{3}{A_0} X_i + \delta X_i - 3 \frac{X_i}{r_{i3}} H_1 \right];$$

$$\delta Y_{i3} = \frac{m_i}{r_{i3}^3} k^2 A_0^3 \left[\frac{3}{A_0} Y_i + \delta Y_i - 3 \frac{Y_i}{r_{i3}} H_1 \right];$$

$$\delta Z_{i3} = \frac{m_i}{r_{i3}^3} k^2 A_0^3 \left[\frac{3}{A_0} Z_i + \delta Z_i - 3 \frac{Z_i}{r_{i3}} H_1 \right];$$

$$H = \frac{1}{r_{i0}} [(X_i - X)(\delta X_i - \delta X) + (Y_i - Y)(\delta Y_i - \delta Y) + (Z_i - Z)(\delta Z_i - \delta Z)];$$

$$H_1 = \frac{1}{r_{i3}} (X_i \delta X_i + Y_i \delta Y_i + Z_i \delta Z_i).$$

При $i=1$ величина $m_1=1$ и значения δX_{10} , δY_{10} , δZ_{10} умножаются на $1-\kappa$. В качестве начальных условий можно брать в этом случае

$$\delta V_X = \delta V_Y = \delta V_Z = \delta X = \delta Y = \delta Z = 0.$$

Производные от координат планет по A_0 определяются методом конечных разностей. Для этого координаты планет из размерности [а. е.] переводят в километры при номинальном A_0 и варьированном A_0' значениях астрономической постоянной по формулам

$$X_i [\text{км}] = X_i [\text{а. е.}] A_0; \quad X_i' [\text{км}] = X_i [\text{а. е.}] A_0' \quad \text{и т. д.}$$

Здесь и далее штрихом обозначены величины параметров, числовые значения которых изменились в результате вариации.
Тогда

$$\delta X_i = \frac{X'_i - X_i}{A'_0 - A_0} = X_i (\text{а. е});$$

$$\delta Y_i = \frac{Y'_i - Y_i}{A'_0 - A_0} = Y_i (\text{а. е});$$

$$\delta Z_i = \frac{Z'_i - Z_i}{A'_0 - A_0} = Z_i (\text{а. е}).$$

Аналогичным образом можно получить систему уравнений в вариациях для вычисления значений производных от текущих элементов орбиты по любой другой уточняемой астрофизической величине.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. X

1. Аким Э. Л., Энеев Т. М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений. — «Космические исследования», т. I, вып. 1. Изд-во АН СССР, 1963.

2. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки результатов измерений. М., Физматгиз, 1962.

3. Хорошавцев В. Г., Ястребов В. Д. Алгоритмы определения параметров движения ИСЗ с использованием цилиндрических координат. — «Космические исследования», т. V, вып. 6. Изд-во АН СССР, 1967.

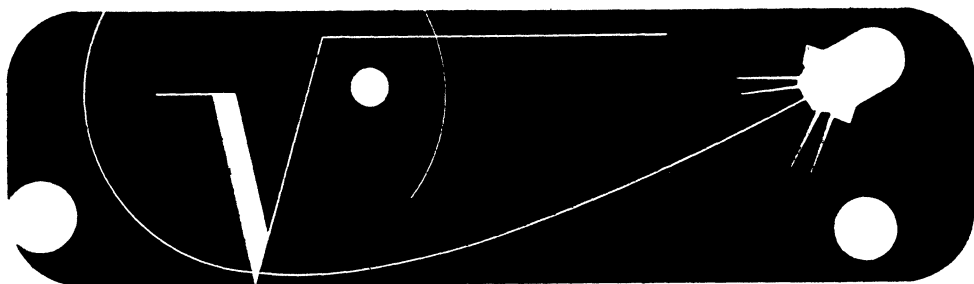
4. Хорошавцев В. Г. Расчет частных производных от характеристик движения по начальным условиям. — «Космические исследования», т. III, вып. 3. 1965.

5. Шапиро И. И. Расчет траекторий баллистических снарядов по данным радиолокационных наблюдений. М., ИЛ, 1961.

6. Энеев Т. М., Платонов А. К., Казакова Р. К. Определение орбит ИСЗ по данным наблюдений за ИСЗ. — «Искусственные спутники Земли», вып. 4, Изд-во АН СССР, 1960.

7. Ястребов В. Д., Эльясберг П. Е. Определение плотности верхней атмосферы по результатам наблюдений за полетом третьего советского искусственного спутника Земли. — «Искусственные спутники Земли», т. IV, Изд-во АН СССР, 1960.

8. Ястребов В. Д. Определение орбиты искусственного спутника Земли по данным измерений на больших интервалах времени. — «Космические исследования», т. 4, вып. 2. Изд-во АН СССР, 1966.



ГЛАВА XI

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- D — дальность.
 $\dot{D}$ — радиальная скорость КА относительно измерительного пункта.
 d_v — количество рассматриваемых источников ошибок для v -й группы измерений.
 h — число групп независимых измерений.
 n_v — количество измерений в v -й группе.
 N — общее число измерений.
 Q_m — начальные условия движения КА.
 r — измеряемый параметр.
 $\delta\bar{B}, \delta\bar{L}, \delta\bar{H}$ — погрешности геодезической привязки измерительного средства к центру инерции общего земного эллипсоида по широте, долготе и высоте соответственно.
 δq — ошибка в параметре q .
 $\delta\Phi_\xi$ — погрешности в параметрах Φ_ξ .
 $\delta\tau$ — суммарная ошибка привязки измерений к единому времени.
 Δq — предельная ошибка в параметре q .
 η — параметры (число которых χ_λ), необходимые для представления конкретного источника ошибок λ .
 λ — номер источника ошибок измерений параметра r .
 q — оцениваемый параметр.
 Φ_ξ ($\xi = 1, 2, \dots, f$) — параметры, характеризующие возмущающие силы.
 ω_3 — скорость вращения Земли.

11.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

С оценкой точности определения орбит тесно связано решение ряда практических задач из области баллистического проектирования и обеспечения полетов КА. К числу этих задач относятся:

- определение основных требований к наземной и бортовой измерительной аппаратуре, используемой при запусках КА;
- выбор состава орбитальных измерений и размещения средств слежения за КА;
- выбор программы орбитальных измерений;
- определение возможных моментов коррекции орбит КА;
- обоснование и выбор схем полета КА;
- определение перспектив развития измерительной техники;
- выбор направлений дальнейших научных изысканий и т. д.

Для решения указанных задач, как правило, требуется знание возможных ошибок определения элементов орбиты (для заданного положения КА) или некоторых других параметров, которые являются известными функциями этих элементов.

Параметры, точность определения которых исследуется в данной конкретной задаче, будем называть оцениваемыми параметрами и обозначать q . При выборе оцениваемых параметров прежде всего исходят из физической сущности решаемой задачи. В качестве оцениваемых параметров могут рассматриваться:

- координаты и составляющие вектора скорости КА,
- прогнозируемые параметры, характеризующие прохождение КА через заданную в пространстве плоскость (плоскость экватора Земли; плоскость, нормальную к вектору скорости КА в заданной точке орбиты и т. д.);
- измеряемые параметры и другие.

Ошибки в параметрах q обозначим δq . Наиболее полной вероятностной характеристикой ошибок δq является закон их распределения. Однако на практике, как правило, оказывается достаточным определить лишь числовые характеристики этого закона (математические ожидания и корреляционные моменты) или предельные значения ошибок Δq .

Рассматриваемая ниже методика *априорной оценки* точности определения орбит позволяет находить или числовые характеристики, или предельные значения ошибок Δq в предположении, что орбита КА определяется по результатам траекторных измерений с использованием метода максимума правдоподобия или способа наименьших квадратов. При этом предполагается справедливость определенных гипотез относительно вероятностных характеристик погрешностей траекторных измерений и параметров, характеризующих силы, действующие на КА в полете.

Рассматриваемые погрешности обуславливаются влиянием различных источников ошибок. По характеру влияния на точность определения орбиты КА эти источники можно разбить на следующие три группы:

- погрешности в результатах измерений, полученные для одного или ряда моментов времени;

- ошибки знания сил, действующих на КА в полете;
- система допущений, принятых при составлении конкретных алгоритмов определения и прогнозирования орбит по результатам измерений.

Алгоритмы определения орбит КА обычно разрабатываются таким образом, чтобы влияние ошибок за счет принятых допущений было существенно меньше влияния первых двух групп источников ошибок. В связи с этим влияния третьей группы в настоящей главе не рассматриваются.

Погрешности измерений вызываются:

- аппаратными ошибками (ошибками юстировок и калибровок, динамическими ошибками, ошибками дискретности отсчетов, флуктуационными ошибками, ошибками в номинальных значениях частот; ошибками за счет нестабильности характеристик аппаратуры; ошибками, вызванными искажением диаграмм направленности антенны; ошибками из-за временных неисправностей или сбоев в аппаратуре или вследствие невнимательности обслуживающего персонала и т. д.);

- ошибками геодезической привязки измерительных средств к центру общего земного эллипсоида (ошибками триангуляционной привязки на геодезическом эллипсоиде и ошибками координат центра геодезического эллипсоида относительно центра инерции Земли);

- ошибками временной привязки результатов измерений (ошибками за счет нестабильности задающих генераторов; ошибками сведения автономных шкал времени по сигналам единого времени, передаваемым специальными станциями службы времени; ошибками времени распространения сигналов точного времени до места расположения измерительных средств и другими);

- ошибками, обусловленными распространением радиоволн в неоднородных средах (атмосфере, ионосфере, межпланетном газе);

- ошибками, обусловленными погрешностью определения скорости света в вакууме.

Ошибки знания сил, действующих на КА в полете, вызываются неточным знанием:

- параметров гравитационного поля Земли;
- астрофизических постоянных;
- параметров верхней атмосферы;
- положений и скоростей Луны и планет;
- сил светового давления и т. д.

Ошибки знания сил влияют на точность определения оцениваемых параметров двояко:

- через ошибки расчетных значений измеряемых параметров, полученные вследствие наличия погрешностей в законе движения КА при определении его орбиты;
- через ошибки прогнозирования значений параметров q по полученным в результате определения орбиты КА начальным условиям его движения Q_m .

Задача оценки точности определения орбит КА состоит в том, чтобы по заданным вероятностным характеристикам погрешностей измерений и параметров, характеризующих силы, действующие на КА в полете, определить вероятностные характеристики оцениваемых параметров.

11.2. ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОРБИТ КА

В общем случае измерения, которые используются для определения орбит, являются функциями времени.

Под измеряемыми параметрами r понимают совокупность различных относительных координат и компонент скорости КА (дальность D и радиальная скорость $\dot{D}$ КА относительно измерительного пункта, его угловые координаты и т. д.).

Рассматриваемые методы оценки предполагают, что измерения делятся на группы по числу независимых измеряемых параметров, сеансов измерений, измерительных пунктов и т. д. Все группы нумеруются по порядку ($v=1, 2, \dots, h$), независимо от номера измеряемого параметра и измерительного средства, которому принадлежат соответствующие измерения. Измерения нумеруются по порядку, начиная с первого измерения первой группы. Количество измерений в каждой v -й группе обозначим через n_v .

Общее число измерений $N = \sum_{v=1}^h n_v$.

Погрешности измерений каждого параметра r , обусловленные источником λ ($\lambda=1, 2, \dots, d_v$), могут быть представлены в виде суммы двух некоррелированных составляющих случайных функций

$$\delta r_{\lambda}(t) = \delta r'_{\lambda}(t) + \delta r''_{\lambda}(t). \quad (11.1)$$

Если погрешности δr_{λ} не удастся представить в виде (11.1), то оценка влияния δr_{λ} на ошибки определения орбиты производится аналогично оценке влияния погрешностей $\delta r'_{\lambda}$.

Для дискретных значений δr_{λ}

$$(\delta r_{\lambda})_i = (\delta r'_i)_{\lambda} + (\delta r''_i)_{\lambda}.$$

Функция $\delta r'_{\lambda}$ представляет собой практически некоррелированную случайную функцию с математическим ожиданием, тождественно равным нулю,

$$M[\delta r'_{\lambda}] \equiv 0$$

и корреляционной функцией

$$K_{\delta r'_{\lambda}}[t, t'] = 0 \quad \text{при} \quad t \neq t';$$

$$K_{\delta r'_{\lambda}}[t, t'] = D[\delta r'_{\lambda}] \quad \text{при} \quad t = t',$$

где $D[\delta r'_{\lambda}]$ — дисперсия случайной функции $\delta r'_{\lambda}$;

t и t' — два различных момента времени проведения измерений.

Функция $\delta r''_{\lambda}$ представляет собой коррелированную случайную функцию, для которой в общем случае

$$M[\delta r''_{\lambda}] \neq 0; \quad K_{\delta r''_{\lambda}}(t, t') \neq 0.$$

Числовые характеристики ошибок δq в оцениваемых параметрах q (корреляционная матрица $K_{\delta q}$ и матрица математических ожиданий $M_{\delta q}$) определяются путем решения следующих матричных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} K_{\delta r_{\lambda}}^{(v)} &= K_{\delta r_{\lambda}}^{(v)} + K_{\delta r_{\lambda}}^{(v)}; & M[\delta q_{\lambda}] &= CM[\delta r''_{\lambda}]; \\ K_{\delta r}^{(v)} &= \sum_{\lambda=1}^{d_v} K_{\delta r_{\lambda}}^{(v)}; & M[\delta q_{\lambda}] &= BM[\delta q_{\lambda}]; \\ K_{\delta r} &= \left\| \begin{matrix} K_{\delta r}^{(1)} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & K_{\delta r}^{(h)} \end{matrix} \right\|; & M[\delta q] &= \sum_{\lambda=1}^{d_v} M[\delta q_{\lambda}]; \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

$$\left. \begin{aligned} K_{\delta q} &= CK_{\delta r}C^T; \\ C &= (R^TK^{-1}R)^{-1}R^TK^{-1}; \\ K_{\delta q} &= BK_{\delta q}B^T; \end{aligned} \right\} \quad M[\delta r''_{\lambda}] = \left\| \begin{matrix} M^{(1)}[\delta r''_{\lambda}] \\ M^{(2)}[\delta r''_{\lambda}] \\ \dots \\ M^{(v)}[\delta r''_{\lambda}] \\ \dots \\ M^{(h)}[\delta r''_{\lambda}] \end{matrix} \right\|$$

$$H_{\tau_i} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_{v1}}{\partial \eta_{\lambda 1}}, & \frac{\partial r_{v1}}{\partial \eta_{\lambda 2}}, & \dots, & \frac{\partial r_{v1}}{\partial \eta_{\lambda \chi_\lambda}} \\ \frac{\partial r_{v2}}{\partial \eta_{\lambda 1}}, & \dots & \dots & \frac{\partial r_{v2}}{\partial \eta_{\lambda \chi_\lambda}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial r_{v n_v}}{\partial \eta_{\lambda 1}}, & \dots & \dots & \frac{\partial r_{v n_v}}{\partial \eta_{\lambda \chi_\lambda}} \end{vmatrix};$$

K_{η_λ} — корреляционная матрица (порядка $\chi_\lambda \chi_\lambda$) ошибок параметров η , характеризующих λ -й источник погрешностей измерений;

$M[\delta \eta_\lambda]$ — матрица математических ожиданий (порядка $\chi_\lambda 1$) ошибок параметров η , характеризующих λ -й источник погрешностей измерений.

Каждый источник погрешностей измерений λ может быть представлен различным числом параметров η . Так, например, погрешности геодезической привязки измерительного средства к центру инерции общего земного эллипсоида могут быть представлены в виде ошибок по широте $\delta \bar{B}$, долготе $\delta \bar{L}$ и высоте $\delta \bar{H}$ в координатах мировой геодезической системы координат, а ошибки привязки измерений к единому времени иногда можно представить одинаковой для всех измерений суммарной ошибкой $\delta \tau$, полученной за счет всех составляющих ее погрешностей и т. д.

Число χ_λ параметров η , необходимое для представления конкретного источника ошибок λ , в основном зависит от его физической природы и степени влияния на формирование ошибок в оцениваемых параметрах.

В тех случаях, когда вероятностные характеристики K_{η_λ} и $M[\delta \eta_\lambda]$ не заданы или заданы недостаточно полно, при проведении оценочных расчетов следует использовать вместо этих характеристик их возможные приближения, полученные на основе анализа конструктивных особенностей измерительных систем, методов измерений и результатов предшествующих экспериментов.

Влияние погрешностей в знании сил на точность определения орбиты существенно зависит от того, включены ли параметры Φ_ξ ($\xi = 1, 2, \dots, f$), характеризующие эти силы, в число неизвестных Q_m при определении орбиты или нет.

Если имеется возможность уточнить параметры Φ_ξ в процессе определения орбиты КА, они включаются в число неизвестных Q_m и оценка влияния ошибок их определения на точность расчета параметров q производится по формулам (11.2), (11.3).

В тех случаях, когда параметры Φ_ξ не уточняются при определении орбиты, числовые характеристики ошибок в оцениваемых параметрах δq , обусловленных погрешностями $\delta \Phi_\xi$, определяются путем решения следующих матричных уравнений:

$$\begin{aligned} K_{\delta q} &= G' K_\Phi G'^T; \\ M[\delta q] &= G' M[\delta \Phi_\xi]; \\ G' &= F - B C H_\Phi; \end{aligned}$$

$$F = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \Phi_1}, & \dots, & \frac{\partial q_1}{\partial \Phi_f} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial q_b}{\partial \Phi_1}, & \dots, & \frac{\partial q_b}{\partial \Phi_f} \end{vmatrix}; \quad H_\Phi = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial \Phi_1}, & \dots, & \frac{\partial r_1}{\partial \Phi_f} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial r_N}{\partial \Phi_1}, & \dots, & \frac{\partial r_N}{\partial \Phi_f} \end{vmatrix},$$

где K_Φ — корреляционная матрица (порядка $f f$) погрешностей $\delta \Phi_\xi$;

$M[\delta \Phi_\xi]$ — матрица математических ожиданий (порядка $f 1$) погрешностей $\delta \Phi_\xi$;

F — матрица (порядка $b f$), составленная из частных производных $\frac{\partial q}{\partial \Phi_\xi}$;

H_Φ — матрица (порядка $N f$), составленная из частных производных $\frac{\partial r_i}{\partial \Phi_\xi}$ для всех N дискретных моментов измерений.

В тех случаях, когда вероятностные характеристики K_Φ и $M[\delta \Phi_\xi]$ не заданы или заданы не полно, следует вместо этих характеристик использовать их возможные приближения.

В процессе проведения оценочных расчетов по изложенной методике, кроме формул, приведенных в разделе, посвященном определению орбит КА, могут быть

полезны следующие соотношения для расчета частных производных от текущих координат КА в системе $\xi_{\text{п}}\eta_{\text{п}}\zeta_{\text{п}}$ (гл. II, разд. 2.1.5, «д»), начало которой способом параллельного переноса совмещено с центром масс Земли по географическим координатам $\bar{B}\bar{L}\bar{H}$ измерительного пункта:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial \bar{B}} &= -(\eta + R); & \frac{\partial \xi}{\partial \bar{L}} &= -\zeta \sin \bar{B}; \\ \frac{\partial \eta}{\partial \bar{B}} &= \xi; & \frac{\partial \eta}{\partial \bar{L}} &= \zeta \cos \bar{B}; \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{B}} &= 0; & \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{L}} &= \xi \sin \bar{B} - (\eta + R) \cos \bar{B}; \\ \frac{\partial \xi}{\partial \bar{H}} &= 0; & \frac{\partial \eta}{\partial \bar{H}} &= -1; & \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{H}} &= 0; \quad R - \text{средний радиус Земли}\end{aligned}$$

При этом матрица направляющих косинусов для перехода от гринвичской системы координат к новой системе имеет вид

	x	y	z
ξ	$-\sin \bar{B} \cos \bar{L}$	$-\sin B \sin \bar{L}$	$\cos \bar{B}$
$\eta + R$	$\cos \bar{B} \cos \bar{L}$	$\cos B \sin \bar{L}$	$\sin \bar{B}$
ζ	$-\sin \bar{L}$	$\cos \bar{L}$	0

При определении частных производных от измеряемых параметров по времени, кроме формул, приведенных в гл. X, могут быть полезны соотношения вида

$$\begin{aligned}\ddot{A} &= \frac{1}{r_1^2} \left\{ \left[\dot{\zeta} - 2 \frac{\xi}{r_1^2} (\xi \dot{\zeta} - \zeta \dot{\xi}) \right] \dot{\xi} - \left(\ddot{\xi} + 2\zeta \dot{A} \right) \dot{\zeta} - \ddot{\zeta} \dot{\xi} + \dot{\xi} \dot{\zeta} \right\}; \\ \ddot{\gamma} &= \frac{1}{r_1} \left[\frac{\eta \dot{D}^2}{D^2} + \frac{1}{r_1^2} \left(\frac{\eta \dot{D}}{D} - \dot{\eta} \right) (\xi \dot{\zeta} + \zeta \dot{\xi}) + \ddot{\eta} - \frac{\dot{D} \dot{\eta}}{D} - \frac{\eta \ddot{D}}{D} \right]; \\ r_1 &= \sqrt{\xi^2 + \zeta^2}; \\ \ddot{D} &= \frac{1}{D} [B - \dot{D}^2],\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}B &= V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2 + \dot{V}_X (X - X_N) + \dot{V}_Y (Y - Y_N) + \dot{V}_Z (Z - Z_N) + \omega_3^2 X X_N + \\ &+ \omega_3^2 Y Y_N + 2\omega_3 V_X Y_N - 2\omega_3 V_Y X_N - \omega_3^2 g X Z_N \cos G - \omega_3^2 g Z X_N \cos G + \\ &+ \omega_3^2 g Z Y_N \sin G + \omega_3^2 g Y Z_N \sin G + 2\omega_3 g V_X Z_N \sin G + 2\omega_3 g V_Y Z_N \cos G - \\ &- 2\omega_3 g V_Z Y_N \cos G - 2\omega_3 g V_Z X_N \sin G; \\ \dot{a}_1 &= \frac{1}{\sqrt{(\zeta \dot{\xi}_N - \xi \dot{\zeta}_N)^2 + \eta^2 \dot{a}^2}} [\cos \alpha_1 \dot{D} - (\xi_N \dot{\zeta} + \zeta_N \dot{\xi})].\end{aligned}$$

(величины g и G см. в гл. II, разд. 2.2, п. 9).

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. XI

1. Аким Э. Л., Энеев Т. М. Определение параметров движения космического летательного аппарата по данным траекторных измерений. — «Космические исследования», т. I, вып. 1. Изд-во АН СССР, 1963.

2. Брыков А. В. О возможности повышения точности определения орбит космических аппаратов за счет уменьшения влияния коррелированных ошибок. — «Космические исследования», т. II, вып. 4. Изд-во АН СССР, 1964.

3. Брыков А. В. Оценка влияния корреляции между измерениями на точность результатов обработки. — в Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16. Изд-во АН СССР, 1963.

4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М., Физматгиз, 1963.

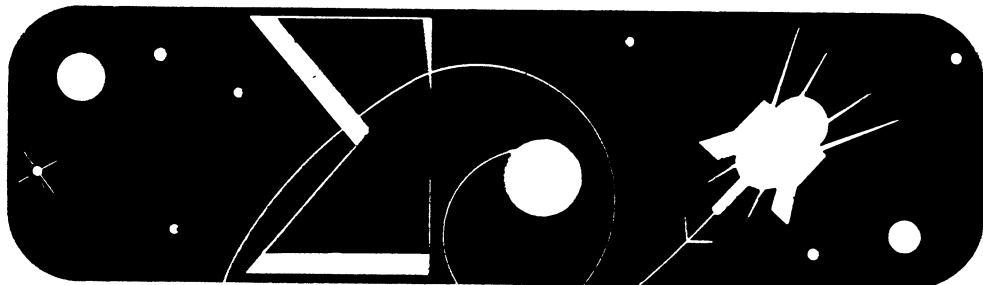
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., Гостехиздат, 1953.

6. Лидов М. Л. К априорным оценкам точности определения параметров по методу наименьших квадратов. — «Космические исследования», т. II, вып. 5, 1964.

7. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки результатов измерений. М., Физматгиз, 1962.

8. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического регулирования. М., Физматгиз, 1962.

9. Скидмор (Skidmore L. I.), Пенцо Р. А. (Penzo R. A.). Моделирование управления на среднем участке траектории полета к Луне с помощью метода Монте-Карло. — «Ракетная техника и космонавтика» (A.I.AA Journal) русск. перев. 1963, № 4.



ГЛАВА XII

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- A — азимут ИСЗ.
- A_0 — астрономическая единица.
- a — большая полуось оскулирующего эллипса.
- B — географическая широта ИСЗ.
- b_1 и b_2 — коэффициенты разложения потенциала ускорения силы притяжения Земли в ряд по сферическим функциям.
- c_x — безразмерный коэффициент сопротивления воздуха.
- D — наклонная дальность от пункта до ИСЗ.
- $\dot{r}$ — радиальная скорость.
- E — эксцентрическая аномалия.
- E_Q — энергия рассеяния (работа силы сопротивления воздуха).
- e — эксцентриситет.
- F_m — площадь миделева сечения спутника.
- $F_{\text{пол}}$ — полная поверхность спутника.
- g_r и g_m — радиальная и меридиональная составляющие ускорения силы тяжести.
- i — наклонение орбиты.
- k^2 — постоянная Гаусса (гравитационная постоянная).
- $k_4 = m_4/m_3$ — отношение массы Луны к массе Земли.
- L — географическая долгота ИСЗ.
- M — средняя аномалия.
- m — масса спутника.
- n — среднее движение.
- R — средний радиус Земли.
- R_0 — экваториальный радиус Земли.
- R_x — модуль силы сопротивления воздуха.
- r — радиус-вектор.
- S — баллистический коэффициент.
- St — звездное время Гринвича.
- T — кинетическая энергия.
- $T_{\text{оск}}$ — оскулирующий период обращения.
- T_Q — драконический период обращения.
- t_d — декретное время.
- $t_{\text{эф}}$ — эфемеридное время.
- v — модуль вектора скорости спутника относительно воздуха.
- u — аргумент широты.
- W — потенциальная энергия.
- α — сжатие общего земного эллипсоида.
- γ — угол места.
- ϑ — истинная аномалия.

κ — коэффициент, учитывающий световое давление.
 $\mu = k^2 m_3$ — произведение гравитационной постоянной на массу Земли.
 ρ — плотность воздуха.
 τ — поправка на переход от московского к гринвичскому времени.
 ψ — геоцентрическая широта спутника.
 Ω — долгота восходящего узла.
 ω_3 — угловая скорость вращения Земли.
 ω — аргумент перигея.

12.1. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ МЕТОДОМ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Движение ИСЗ может быть описано в той или иной системе координат. От выбора системы координат зависят степень сложности алгоритма вычисления правых частей дифференциальных уравнений, удобство формул для расчета различных параметров орбит в этой системе координат и в конечном счете быстрдействие метода точного расчета элементов орбиты ИСЗ.

Для ИСЗ, движение которых можно рассматривать без учета влияния Луны и Солнца, наиболее широко применяется относительная гринвичская система прямоугольных координат *Oxyz* (см. гл. II, разд. 2.1.2, «в», рис. 2.5).

В системе координат *Oxyz* система дифференциальных уравнений движения ИСЗ имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= -g_r \frac{x}{r} + g_m \frac{z}{r} \frac{x}{r_1} + 2\omega_3 v_y - \frac{R_x}{m} \frac{v_x}{v}; \\ \dot{y} &= -g_r \frac{y}{r} + g_m \frac{z}{r} \frac{y}{r_1} - 2\omega_3 v_x - \frac{R_x}{m} \frac{v_y}{v}; \\ \dot{z} &= -g_r \frac{z}{r} - g_m \frac{r_1}{r} - \frac{R_x}{m} \frac{v_z}{v}; \\ \dot{x} &= v_x; \quad \dot{y} = v_y; \quad \dot{z} = v_z, \end{aligned} \right\} \quad (12.1)$$

где x, y, z — координаты;

v_x, v_y, v_z — составляющие вектора скорости спутника;

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \quad r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Величины g_r и g_m вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} g_r &= \frac{\alpha_{00}}{r} \frac{R}{r} + 3 \frac{\alpha_{20}}{r} \left(\frac{R}{r} \right)^3 P_{20} - \frac{\omega_3^2 r_1^2}{r}; \\ g_m &= -\frac{3}{2} \frac{\alpha_{20}}{r} \left(\frac{R}{r} \right)^3 \sin 2\psi + \frac{\omega_3^2 z r_1}{r}, \end{aligned} \right\} \quad (12.2)$$

где

$$\alpha_{00} = b_0/R; \quad \alpha_{20} = -b_2/R^3, \quad \sin \psi = \frac{z}{r}; \quad \cos \psi = \frac{r_1}{r}; \quad P_{20} = \frac{1}{2} (3 \sin^2 \psi - 1).$$

Модуль ускорения силы лобового сопротивления воздуха вычисляется по формуле

$$R_x/m = S \tilde{v}^2,$$

где $S = c_x F_m / 2m$ — баллистический коэффициент;

$\tilde{v}$ — модуль вектора скорости спутника относительно воздуха.

Обычно принимают, что в верхних слоях атмосферы $c_x \approx 2,0 \div 2,5$. Величина F_m для ориентированных спутников легко вычисляется и зависит от формы спутника. Для неориентированных спутников $F_m \cong \frac{1}{4} F_{\text{пол}}$.

Плотность воздуха на различных высотах h с достаточной для практики точностью вычисляется по приближенной формуле

$$\rho(h) = A_i \exp[k_{1i}(h - h_i)^2 - k_{2i}(h - h_i)], \quad (12.3)$$

где A_i, k_{1i} и k_{2i} — коэффициенты, постоянные в пределах изменения высоты от h_i до h_{i+1} (i -тый слой). Значения этих коэффициентов приведены в табл. 12.1.

Таблица 12.1

Номер слоя i	$h_i < h \leq h_{i+1}$ км	A_i кг·м ⁻³	$k_{1i} \cdot 10^{10}$ м ⁻²	$k_{2i} \cdot 10^5$ м ⁻¹
1	$0 < h \leq 20$	1,225	-26,39	7,825
2	$20 < h \leq 60$	$0,891 \cdot 10^{-2}$	4,407	16,375
3	$60 < h \leq 100$	$2,578 \cdot 10^{-4}$	-25,60	5,905
4	$100 < h \leq 150$	$4,061 \cdot 10^{-7}$	14,69	17,870
5	$150 < h \leq 300$	$2,130 \cdot 10^{-9}$	0,8004	3,734
6	$300 < h \leq 600$	$4,764 \cdot 10^{-11}$	0,07111	1,547
7	$600 < h \leq 900$	$8,726 \cdot 10^{-12}$	0,01831	0,928
8	$900 < h \leq \infty$	$6,367 \cdot 10^{-13}$	0	0,954

Высота полета спутника над поверхностью общего земного эллипсоида определяется по приближенной формуле

$$h = r - R_3 \left(1 - \alpha \frac{z^2}{r^2} \right).$$

При расчете силы сопротивления воздуха принимается, что атмосфера вращается вместе с Землей. Влияние ветра на движение спутника не учитывается. При таких допущениях $\vec{v} = \vec{v}$. Как показывают расчеты, такое допущение является вполне правомерным.

Приведем систему (12.1) к виду, более удобному для решения задач на электронных вычислительных машинах. Для этого подставим в первые три уравнения системы (12.1) составляющие ускорения силы тяжести g_r и g_m , которые, как следует из (12.2), являются функциями координат спутника и постоянных величин R , ω_3 , α_{00} и α_{20} . Пропишем необходимые преобразования и введем дополнительные обозначения

$$A = B[\alpha_{00} + C(D - 1)]; \quad B = \frac{1}{r^2} \frac{R}{r};$$

$$C = \frac{3}{2} \alpha_{20} \left(\frac{R}{r} \right)^2; \quad D = 5 \left(\frac{z}{r} \right)^2,$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \dot{v}_x &= (\omega_3^2 - A)x + 2\omega_3 v_y - S_{\zeta} v v_x; \\ \dot{v}_y &= (\omega_3^2 - A)y - 2\omega_3 v_x - S_{\zeta} v v_y; \\ \dot{v}_z &= (2BC - A)z - S_{\zeta} v v_z; \\ \dot{x} &= v_x; \quad \dot{y} = v_y; \quad \dot{z} = v_z. \end{aligned} \right\} \quad (12.4)$$

Начальными условиями для интегрирования системы дифференциальных уравнений (12.4) являются координаты x_0 , y_0 , z_0 и составляющие вектора скорости спутника v_{x0} , v_{y0} , v_{z0} в некоторый заданный момент времени t_0 .

В результате численного интегрирования системы (12.4) с постоянным шагом h_t для каждого момента времени $t_k = t_0 + kh_t$ ($k=1, 2, \dots$) вычисляются текущие значения составляющих вектора скорости и координат спутника q_{kj} ($j=1, 2, \dots, 6$). В зависимости от назначения задачи по простым аналитическим зависимостям можно определить значения любых искомых параметров. Так, например, при решении задачи расчета трассы полета спутника вычисляются географическая широта B , долгота L и высота полета спутника h по формулам

$$\left. \begin{aligned} B &= \arcsin \frac{z}{\sqrt{[(1-\alpha)^2 r_1]^2 + z^2}}; \\ L &= \arctg \frac{y}{x}, \quad (-180^\circ \leq L \leq 180^\circ); \\ h &= r - R_3 \left(1 - \alpha \frac{z^2}{r^2} \right); \quad r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

Из (12.4) и (12.5) очевидны основные преимущества системы прямоугольных координат: несложный алгоритм вычисления правых частей дифференциальных урав-

нений и простота формул для расчета различных параметров орбиты. Однако для обеспечения требуемой точности расчета элементов орбит спутников при численном интегрировании дифференциальных уравнений в прямоугольных координатах необходимо назначать сравнительно небольшой шаг интегрирования, что ограничивает возможность существенного повышения быстродействия расчетных методов.

Увеличение шага численного интегрирования, по сравнению с его значением при интегрировании с эквивалентной точностью в прямоугольных координатах, может быть достигнуто за счет выбора для описания движения спутника оскулирующих элементов орбиты. Однако алгоритм вычисления правых частей системы дифференциальных уравнений в оскулирующих элементах существенно сложнее (см. гл. IV), что снижает выигрыш во времени за счет увеличения шага интегрирования. В результате интегрирование в оскулирующих элементах оказывается практически равноценным по быстродействию с интегрированием в прямоугольных координатах. Для широкого класса орбит спутников с малыми эксцентриситетами ($e \leq 0,1$) рассматриваемая в гл. II, разд. 2.1.3, «а», рис. 2.9) система цилиндрических координат $Oru\zeta$ в смысле возможности увеличения шага численного интегрирования обладает тем же преимуществом, по сравнению с прямоугольными координатами, что и оскулирующие элементы орбиты. В то же время сложность правых частей дифференциальных уравнений в цилиндрических координатах по сравнению с прямоугольными координатами возрастает незначительно. Вследствие этого быстродействие расчета параметров орбит интегрированием в цилиндрических координатах заметно повышается по сравнению с интегрированием в прямоугольных координатах и в оскулирующих элементах.

В системе цилиндрических координат движение спутника в каждый момент времени t полностью характеризуется радиусом-вектором $\vec{r}_1 \{r, u, \zeta\}$ и вектором скорости $\vec{V} \{V_r, V_u, V_\zeta\}$, где r и u — полярные координаты спутника в основной плоскости; ζ — расстояние от спутника до этой плоскости; V_r, V_u и V_ζ — составляющие вектора скорости соответственно по направлению вектора $\vec{r}$, перпендикулярно этому вектору в основной плоскости и перпендикулярно основной плоскости.

Система дифференциальных уравнений движения спутника в цилиндрических координатах может быть записана в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_r &= \frac{1}{r} V_u^2 - Ar + Df_2\zeta - Sqvv_r; \\ \dot{V}_u &= -\frac{1}{r} V_r V_u + Dar_1 \cos u - Sqvv_u; \\ \dot{V}_\zeta &= -A\zeta - Df_2r - Sqvv_\zeta; \\ \dot{r} &= V_r; \quad \dot{u} = \frac{1}{r} V_u; \quad \dot{\zeta} = V_\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (12.6)$$

где

$$A = B [\alpha_{00} + C (3f_1^2 - 1)]; \quad B = \frac{R}{r_1} \frac{1}{r_1^2};$$

$$C = \frac{3}{2} \alpha_{20} \left(\frac{R}{r_1} \right)^2; \quad D = 2BCf_1;$$

$$f_1 = \sin \psi = \frac{ar \sin u + b\zeta}{r_1};$$

$$f_2 = \frac{a\zeta \sin u - br}{r_1};$$

$$r_1 = \sqrt{r^2 + \zeta^2}; \quad a = \sin i_0; \quad b = \cos i_0,$$

$$v_r = V_r - \omega_3 a \zeta \cos u; \quad v_u = V_u + \omega_3 r_1 f_2;$$

$$v_\zeta = V_\zeta + \omega_3 ar \cos u; \quad v = \sqrt{v_r^2 + v_u^2 + v_\zeta^2}.$$

Высота h , необходимая для вычисления плотности воздуха $\rho(h)$ по формуле (12.3), определяется из выражения

$$h = r_1 - R_3 (1 - \alpha f_1^2).$$

Начальными условиями для интегрирования системы (12.6) являются координаты и составляющие вектора скорости в момент времени t_0 :

$$r = r_0; \quad u = u_0; \quad \zeta = 0; \quad V_r = V_{r0}; \quad V_u = V_{u0}; \quad V_\zeta = 0.$$

При задании начальных условий в гринвичской системе прямоугольных координат $Oxyz$ преобразование их в систему цилиндрических координат производится в следующем порядке:

— определяются координаты и составляющие вектора скорости на момент $t=t_0$ в системе прямоугольных координат $OXYZ$ по формулам гл. II, разд. 2.2, п. 9;

— рассчитываются величины

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}; \\ c_1 &= Y_0 V_{z0} - Z_0 V_{Y0}; \quad c_2 = Z_0 V_{x0} - X_0 V_{z0}; \\ c_3 &= X_0 V_{Y0} - Y_0 V_{x0}; \quad c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}; \\ a &= \sin i_0 = \frac{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}{c}; \quad b = \cos i_0 = \frac{c_3}{c}; \\ d &= \sin u_0 = \frac{z_0 c}{r_0 \sqrt{c_1^2 + c_2^2}}; \quad e = \cos u_0 = \frac{Y_0 c_1 - X_0 c_2}{r_0 \sqrt{c_1^2 + c_2^2}}; \\ f &= \sin Q_0 = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}; \quad g = \cos Q_0 = -\frac{c_2}{\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}, \\ u_0 &= \arcsin \frac{z_0 c}{r_0 \sqrt{c_1^2 + c_2^2}}; \quad 0 \leq u_0 \leq 2\pi; \end{aligned}$$

— определяются направляющие косинусы

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= eg - bdf; & \alpha_{12} &= ef + bdg, & \alpha_{13} &= ad, \\ \alpha_{21} &= -dg - bef; & \alpha_{22} &= -df + beg, & \alpha_{23} &= ae \end{aligned}$$

и составляющие вектора скорости

$$\begin{aligned} V_{r0} &= V_{X0}\alpha_{11} + V_{Y0}\alpha_{12} + V_{Z0}\alpha_{13}; \\ V_{u0} &= V_{X0}\alpha_{21} + V_{Y0}\alpha_{22} + V_{Z0}\alpha_{23}. \end{aligned}$$

Преобразование цилиндрических координат r и ξ и составляющих вектора скорости V_r, V_u, V_ξ , полученных в результате интегрирования системы дифференциальных уравнений (12.6) в систему координат $OXYZ$ и $Oxyz$, производится по формулам, приведенным в гл. II, разд. 2.2, п. 13.

Для высоких орбит ($h > 3000$ км) основной особенностью методов расчета является необходимость учета влияния Луны и Солнца на движение спутника. Как известно, координаты Луны и Солнца приводятся в Астрономическом ежегоднике ИТА АН СССР и в дополнениях к нему. Они даются в инерциальной геоцентрической системе координат $OXYZ$, фиксированной, например, на начало тропического 1960 г. В связи с этим методы расчета элементов таких орбит наиболее удобны для реализации на ЭВМ при описании движения спутника в системе координат $OXYZ$. В этой системе координат дифференциальные уравнения движения спутника имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_X &= X_{10} + X_{40} + X_{30} - X_{13} - X_{43}; \\ \dot{V}_Y &= Y_{10} + Y_{40} + Y_{30} - Y_{13} - Y_{43}; \\ \dot{V}_Z &= Z_{10} + Z_{40} + Z_{30} - Z_{13} - Z_{43}; \\ \dot{X} &= V_X, \quad \dot{Y} = V_Y, \quad \dot{Z} = V_Z. \end{aligned} \right\} \quad (12.7)$$

Здесь и ниже обозначены: индексом «0» — центр масс КА, «1» — Солнца, «3» — Земли, «4» — Луны, «5» — системы Земля — Луна. Таким образом, слагаемые с индексами 10, 40 и 30 представляют собой ускорения под действием сил притяжения Солнца, Луны и Земли (с учетом сопротивления атмосферы) соответственно, а слагаемые с индексами 13 и 43 учитывают влияние Солнца и Луны на движение Земли.

Слагаемые правых частей уравнений (12.7) вычисляются по следующим формулам (индекс «0» при координатах и составляющих вектора скорости КА для сокращения записи в дальнейшем опускается):

$$\left. \begin{aligned}
X_{10} &= k^2 A_0^3 (1 - \varkappa) \frac{X_1 - X}{r_{10}^3}; & X_{40} &= k_4 b_0 \frac{X_4 - X}{r_{40}^3}; \\
Y_{10} &= k^2 A_0^3 (1 - \varkappa) \frac{Y_1 - Y}{r_{10}^3}; & Y_{40} &= k_4 b_0 \frac{Y_4 - Y}{r_{40}^3}; \\
Z_{10} &= k^2 A_0^3 (1 - \varkappa) \frac{Z_1 - Z}{r_{10}^3}, & Z_{40} &= k_4 b_0 \frac{Z_4 - Z}{r_{40}^3}; \\
X_{30} &= -\frac{X}{r_{30}^3} \left(b_0 - \frac{3}{2} b_2 \frac{5Z^2 - r_{30}^2}{r_{30}^2} \right) - S_Q v^2 \frac{V_X}{V}; \\
Y_{30} &= -\frac{Y}{r_{30}^3} \left(b_0 - \frac{3}{2} b_2 \frac{5Z^2 - r_{30}^2}{r_{30}^2} \right) - S_Q v^2 \frac{V_Y}{V}; \\
Z_{30} &= -\frac{Z}{r_{30}^3} \left(b_0 - \frac{3}{2} b_2 \frac{5Z^2 - 3r_{30}^2}{r_{30}^2} \right) - S_Q v^2 \frac{V_Z}{V}; \\
X_{13} &= k^2 A_0^3 \frac{X_1}{r_{13}^3}; & X_{43} &= k_4 b_0 \frac{X_4}{r_{43}^3}; \\
Y_{13} &= k^2 A_0^3 \frac{Y_1}{r_{13}^3}; & Y_{43} &= k_4 b_0 \frac{Y_4}{r_{43}^3}; \\
Z_{13} &= k^2 A_0^3 \frac{Z_1}{r_{13}^3}; & Z_{43} &= k_4 b_0 \frac{Z_4}{r_{43}^3},
\end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

где

$$\begin{aligned}
r_{10} &= \sqrt{(X_1 - X)^2 + (Y_1 - Y)^2 + (Z_1 - Z)^2}; \\
r_{40} &= \sqrt{(X_4 - X)^2 + (Y_4 - Y)^2 + (Z_4 - Z)^2}; \\
r_{13} &= \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}; & r_{43} &= \sqrt{X_4^2 + Y_4^2 + Z_4^2}; \\
r_{30} &= \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}; & V &= \sqrt{V_X^2 + V_Y^2 + V_Z^2}; \\
v &= \sqrt{(V_X + \omega_3 Y)^2 + (V_Y - \omega_3 X)^2 + V_Z^2}.
\end{aligned}$$

Высота полета h , необходимая для расчета плотности воздуха, вычисляется по формуле

$$h = r_{30} - R_3 \left(1 - \alpha \frac{Z^2}{r_{30}^2} \right).$$

Начальными условиями для интегрирования системы (12.7) являются координаты X_0, Y_0, Z_0 и составляющие вектора скорости V_{X0}, V_{Y0}, V_{Z0} в начальный момент времени t_0 .

При задании начальных условий в гринвичской системе координат $Oxyz$ преобразование их в систему координат $OXYZ$ производится по формулам гл. II, разд. 2.2, п.9).

Для определения координат Солнца, входящих в правые части системы (12.7), используются таблицы геоцентрических координат центра масс системы Земля+Луна и геоцентрических координат Луны, приведенные в дополнениях к Астрономическому ежегоднику. Геоцентрические координаты Солнца вычисляются через координаты Луны и центра масс системы Земля+Луна по формулам:

$$\bar{r}_{13} = \frac{k_4}{1 + k_4} \bar{r}_{43} - \bar{r}_{51}; \quad \bar{r}_{13} \{X_1, Y_1, Z_1\},$$

где $\bar{r}_{43}$ — геоцентрический радиус-вектор Луны;

$\bar{r}_{51}$ — геоцентрический радиус-вектор центра масс системы Земля+Луна.

Аргументом таблиц Астрономического ежегодника является эфемеридное время. Переход от московского декретного времени t_d к эфемеридному $t_{эф}$ производится по формуле

$$t_{эф} = t_d - \tau + \Delta T_{эф},$$

где $\Delta T_{\text{эф}}$ — поправка на переход от гринвичского и эфемеридному времени;
 τ — поправка на переход от московского к гринвичскому времени.

Значения координат Луны, системы Земля+Луна и редуционных величин g и G (см. гл. II, разд. 2.2, п. 9) на любой не кратный табличному шагу момент времени могут быть получены интерполяцией таблиц ИТА АН СССР.

Для решения систем дифференциальных уравнений (12.4), (12.6) и (12.7) можно применять различные методы численного интегрирования.

Наиболее экономичными по затратам времени расчета на ЭВМ являются разностные методы. Ниже рассматривается один из таких удобных для реализации на ЭВМ методов — метод Адамса.

Запишем систему дифференциальных уравнений движения спутника в общем виде

$$\dot{y}_j = f_j(t, y_1, y_2, \dots, y_6) \quad (j = 1, 2, \dots, 6),$$

где $y_1(t), y_2(t), \dots, y_6(t)$ — искомые функции;

$y_1(t_0) = y_{1,0}, y_2(t_0) = y_{2,0}, \dots, y_6(t) = y_{6,0}$ — начальные условия.

Обозначим для краткости

$$y_{j,k} = y_j(t_k) \quad \text{и} \quad f_{j,k} = f_j(t_k, y_{1,k}, y_{2,k}, \dots, y_{6,k}).$$

Пусть $h_t = \text{const}$, т. е. интегрирование ведется с постоянным шагом. Тогда по известным значениям искомых функций $y_{j,k}$ в k -й точке (для k -го шага численного интегрирования) и их производных $\dot{f}_j$ в $(r+1)$ -й точке (в k -й и в r предыдущих точках) приближенные значения этих функций в $(k+1)$ -й точке вычисляются по первой, или экстраполяционной, формуле Адамса

$$y_{j,k+1} = y_{j,k} + h_t \sum_{p=0}^r \beta_p \nabla^p f_{j,k}, \quad (12.9)$$

где $\Delta^p f_{j,k}$ — левая разность p -го порядка функции $f_{j,k}$, вычисленная в точке $(t_k, y_{1,k}, y_{2,k}, \dots, y_{6,k})$, причем

$$\nabla^p f_{j,k} = \nabla^{p-1} f_{j,k} - \nabla^{p-1} f_{j,k-1} \quad \text{и} \quad \nabla^0 f_{j,k} = f_{j,k}.$$

Коэффициенты β_p экстраполяционной формулы определяются соотношениями

$$\beta_0 = 1; \quad \beta_p = \frac{1}{p!} \int_0^1 u(u+1)(u+2)\dots(u+p-1) du.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{1}{2}; & \beta_6 &= \frac{19087}{60\,480}; \\ \beta_2 &= \frac{5}{12}; & \beta_7 &= \frac{5217}{17\,280}; \\ \beta_3 &= \frac{3}{8}; & \beta_8 &= \frac{1\,070\,017}{3\,628\,800}; \\ \beta_4 &= \frac{251}{720}; & \beta_9 &= \frac{2\,082\,753}{7\,257\,600}; \\ \beta_5 &= \frac{95}{288}; & \beta_{10} &= \frac{26\,842\,253}{95\,800\,320}. \end{aligned}$$

Вторая, или интерполяционная, формула Адамса позволяет уточнить значения искомых функций, полученные по экстраполяционной формуле. Интерполяционная формула Адамса записывается в виде

$$y_{j,k+1}^* = y_{j,k} + h_t \sum_{p=0}^r \beta_p^* \nabla^p f_{j,k+1}, \quad (12.10)$$

где $f_{j,k+1} = f_j(t_{k+1}, y_{1,k+1}, y_{2,k+1}, \dots, y_{6,k+1})$, $y_{j,k+1}$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) — значения искомых функций, полученные по экстраполяционной формуле (12.9).

Коэффициенты β_p^* определяются соотношениями:

$$\beta_0^* = 0; \quad \beta_p^* = \frac{1}{p!} \int_0^1 (u-1)u(u+1)\dots(u+p-2) du.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -\frac{1}{2}; & \beta_6 &= -\frac{863}{60\,480}; \\ \beta_2 &= -\frac{1}{12}; & \beta_7 &= -\frac{1375}{120\,960}; \\ \beta_3 &= -\frac{1}{24}; & \beta_8 &= -\frac{33\,953}{3\,628\,800}; \\ \beta_4 &= -\frac{19}{720}; & \beta_9 &= -\frac{57\,281}{7\,257\,600}; \\ \beta_5 &= -\frac{3}{160}; & \beta_{10} &= -\frac{3\,250\,433}{479\,001\,600}.\end{aligned}$$

Формулы Адамса (12.9) и (12.10) применяют обычно тогда, когда в ходе вычислений, приходится менять число r входящих в них разностей. В случае, когда r фиксировано, для уменьшения объема вычислений пользуются модифицированными, или ординатными формулами Адамса. С помощью соотношения

$$\nabla^p f_{j,k} = \sum_{l=0}^p (-1)^l C_p^l f_{j,k-l}$$

формулы (12.9) и (12.10) приводятся к виду

$$y_{j,k+1} = y_{j,k} + h_t \sum_{p=0}^r \alpha_p f_{j,k-p}; \quad (12.11)$$

$$y_{j,k+1}^* = y_{j,k} + h_t \sum_{p=0}^r \alpha_p^* f_{j,k+1-p}. \quad (12.12)$$

В отличие от формул (12.9) и (12.10) в формулах (12.11) и (12.12) для различных r коэффициенты α_p и α_p^* имеют разные значения. В частности, для $r=7$

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= 0,358995535 \cdot 10^1; & \alpha_0^* &= 0,304224537 \cdot 10^0; \\ \alpha_1 &= -0,952520668 \cdot 10^1; & \alpha_1^* &= 0,115615906 \cdot 10^1; \\ \alpha_2 &= 0,180545387 \cdot 10^2; & \alpha_2^* &= -0,100691964 \cdot 10^1; \\ \alpha_3 &= -0,220277530 \cdot 10^2; & \alpha_3^* &= +0,101796461 \cdot 10^1; \\ \alpha_4 &= 0,0173796544 \cdot 10^2; & \alpha_4^* &= -0,732035384 \cdot 10^0; \\ \alpha_5 &= -0,861212797 \cdot 10^1; & \alpha_5^* &= 0,343080357 \cdot 10^0; \\ \alpha_6 &= 0,244516369 \cdot 10^1; & \alpha_6^* &= -0,938409392 \cdot 10^{-1}; \\ \alpha_7 &= -0,304224537 \cdot 10^0; & \alpha_7^* &= 0,113673942 \cdot 10^{-1}.\end{aligned}$$

Как следует из формул (12.11) и (12.12), при численном интегрировании системы дифференциальных уравнений методом Адамса для каждой функции $y_j(t)$, кроме начального значения, необходимо иметь еще r «разгонных» точек $y_{j,1}, y_{j,2}, \dots, y_{j,r}$. Для вычисления значений искомых функций в *первых r точках* обычно применяют *метод Рунге — Кутты* 4-го порядка. Значения искомых функций при использовании этого метода вычисляются по формулам

$$y_{j,k+1} = y_{j,k} + \frac{1}{6} h_t (k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j}) \quad (j = 1, 2, \dots, 6),$$

где

$$\begin{aligned}k_{1,j} &= f_j(t_k; y_{1,k}, y_{2,k}, \dots, y_{6,k}); \\ k_{2,j} &= f_j\left(t_k + \frac{1}{2} h_t; y_{1,k} + \frac{1}{2} k_{1,1}, y_{2,k} + \frac{1}{2} k_{1,2}, \dots, y_{6,k} + \frac{1}{2} k_{1,6}\right); \\ k_{3,j} &= f_j\left(t_k + \frac{1}{2} h_t; y_{1,k} + \frac{1}{2} k_{2,1}, y_{2,k} + \frac{1}{2} k_{2,2}, \dots, y_{6,k} + \frac{1}{2} k_{2,6}\right); \\ k_{4,j} &= f_j(t_k + h_t; y_{1,k} + k_{3,1}, y_{2,k} + k_{3,2}, \dots, y_{6,k} + k_{3,6}).\end{aligned}$$

Здесь второй индекс у величин k_1, k_2, k_3, k_4 показывает, к какой функции $y_j(t)$ относятся эти коэффициенты.

Точность численного интегрирования систем дифференциальных уравнений (12.4) и (12.7) методом Адамса зависит от величины шага интегрирования h_t , числа r удерживаемых в формулах (12.11) и (12.12) разностей, а также от разрядности и особенностей выполнения арифметических операций в ЭВМ, используемых для расчета элементов орбит. Для анализа ошибок численного интегрирования можно рекомендовать следующие способы.

1. Анализ главной части ошибок численного интегрирования можно производить путем сравнения результатов расчета элементов орбит для кеплеровского движения ($a_{20}=0, S=0$, влияние Солнца и Луны не учитывается) численным интегрированием и по формулам эллиптической теории. При этом, как показывают расчеты, необходимо анализировать лишь ошибки определения положения спутника вдоль витка, так как по сравнению с ними ошибки по высоте и в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты, пренебрежимо малы.

При использовании этого способа численным интегрированием вычисляется время t_{N_1} в начале N -го витка. За начало витка, как правило, принимают точку пересечения орбиты с плоскостью экватора при движении спутника с юга на север. Это же время определяется по формуле

$$t_N^{(0)} = t_1 + (N-1)T_{\text{оск}}, \quad (12.13)$$

где t_1 — время в начале первого витка; $T_{\text{оск}}$ — оскулирующий период обращения, вычисляемый по известной формуле (3.25) (см. гл. III).

Так как ошибка вычисления $t_N^{(0)}$ по формуле (12.13) практически равна нулю, величина разности

$$\delta t_N = t_{N_1} - t_N^{(0)}$$

представляет собой истинную ошибку численного интегрирования для случая кеплеровского движения.

Оценки ошибок численного интегрирования, полученные для кеплеровского движения, в основном являются справедливыми и для возмущенного движения спутника.

2. Оценку дополнительных ошибок численного интегрирования, обусловленных влиянием возмущающих факторов, можно производить двумя способами:

а) путем сравнения результатов интегрирования систем (12.4), (12.6) и (12.7) при значениях шага интегрирования h_t и $\frac{1}{2}h_t$. Практическое совпадение этих результатов является необходимым условием того, что интегрирование с шагом h_t обладает удовлетворительной точностью;

б) путем контроля в процессе численного интегрирования постоянства функции

$$E = T + W + E_Q = \text{const.}$$

Если систему (12.4), (12.6) или (12.7) дополнить дифференциальным уравнением

$$\dot{E}_Q = -Sqv^3,$$

то величина E_Q вычисляется в результате численного интегрирования вновь образованной системы из семи дифференциальных уравнений. Поскольку величины T и W могут быть вычислены по известным формулам, вид которых зависит от системы координат, то для каждого момента времени $t_k = t_0 + kh_t$ ($k=1, 2, \dots$) может быть произведена проверка условия

$$|E_k - E_0| \leq \varepsilon,$$

где E_0 и E_k — значения функции E соответственно в моменты времени t_0 и t_k .

Непосредственные расчеты показывают, что если ошибки численного интегрирования систем дифференциальных уравнений (12.4) и (12.7) с постоянным шагом h_t практически равны нулю для кеплеровского движения, то для возмущенного движения спутника выполняются необходимые условия равенства нулю ошибок интегрирования для способов их оценки «а» и «б».

Точность и быстродействие методов расчета орбит спутников численным интегрированием в значительной степени зависит от характеристик орбит и в первую очередь от эксцентриситета e . При $e \leq 0.2$ целесообразно, как правило, применять метод интегрирования Адамса с постоянным шагом. Для времени полета спутника в 15–20 суток достаточно высокая точность численного интегрирования с постоянным шагом на ЭВМ с разрядностью мантисс представляемых чисел в 36 и более двоичных разрядов достигается при $r=7-9$ и $h_t=90-120$ с. Для получения r «разгонных» точек системы (12.4) и (12.7) можно интегрировать методом Рунге — Кутты с шагом $h_t=15-30$ с.

Для орбит с эксцентриситетами $e > 0.2$, как правило, целесообразно применять метод численного интегрирования Адамса с автоматическим выбором шага. Применение такого метода позволяет при эквивалентной точности обеспечить значительное повышение быстродействия методов расчета элементов орбит по сравнению с интегрированием с постоянным шагом.

Суть метода состоит в следующем. На каждом шаге численного интегрирования вычисляются разности

$$\delta y_{j,k+1} = y_{j,k+1}^* - y_{j,k+1},$$

где $y_{j,k+1}$ и $y_{j,k+1}^*$ — значения искоемых функций, вычисленные соответственно по формулам (12.11) и (12.12). Если выполняются условия

$$\epsilon_{1,j} \leq |\delta y_{j,k+1}| \leq \epsilon_{2,j}, \quad (12.14)$$

то шаг интегрирования h_t не меняется.

При невыполнении хотя бы одного из условий (12.14) производится или увеличение, или уменьшение шага интегрирования в два раза.

В первом случае

$$|\delta y_{j,k+1}| < \epsilon_{1,j} \quad \text{для всех } j$$

интегрирование с шагом h_t производится до накопления необходимого числа точек, в которых через интервалы времени $2h_t$ известны значения функций f_j . Дальнейшее интегрирование продолжается с удвоенным шагом.

Во втором случае, при

$$|\delta y_{j,k+1}| > \epsilon_{2,j} \quad \text{хотя бы для одного значения } j,$$

по известным значениям функций f_j в $(r+1)$ -й точках путем интерполяции по формуле Лагранжа определяются значения этих функций для моментов времени

$$t_k - \frac{1}{2} h_t, \quad t_k - \frac{3}{2} h_t, \dots, t_k - \frac{r+1}{2} h_t.$$

После этого интегрирование продолжается с шагом, равным $\frac{1}{2} h_t$. Значения величин $\epsilon_{1,j}$ и $\epsilon_{2,j}$ выбирают экспериментально на основании анализа результатов сравнительных оценочных расчетов для каждого класса орбит исходя из требуемой точности прогнозирования.

При решении различных задач в процессе численного интегрирования системы дифференциальных уравнений движения спутника необходимо вычислять его координаты и составляющие вектора скорости в моменты времени t_v , не кратные шагу интегрирования h_t . Для этой цели обычно используются точные интерполяционные формулы, основанные на применении *интерполяционной формулы Лагранжа* для производных $\dot{f}_j$ от искоемых функций.

Введем переменную

$$\xi = \frac{t_k - t_v}{h_t}.$$

Тогда для $r=7$ интерполяционная формула Лагранжа запишется в виде

$$\begin{aligned} f(\xi) = & \frac{1}{5040} f_{k-7} (\xi^7 - 21\xi^6 + 175\xi^5 - 735\xi^4 + 1624\xi^3 - 1764\xi^2 + 720\xi) - \\ & - \frac{1}{720} f_{k-6} (\xi^7 - 22\xi^6 + 190\xi^5 - 820\xi^4 + 1849\xi^3 - 2038\xi^2 + 840\xi) + \\ & + \frac{1}{240} f_{k-5} (\xi^7 - 23\xi^6 + 207\xi^5 - 925\xi^4 + 2144\xi^3 - 2412\xi^2 + 1008\xi) - \\ & - \frac{1}{144} f_{k-4} (\xi^7 - 24\xi^6 + 226\xi^5 - 1056\xi^4 + 2545\xi^3 - 2952\xi^2 + 1260\xi) + \\ & + \frac{1}{144} f_{k-3} (\xi^7 - 25\xi^6 + 247\xi^5 - 1219\xi^4 + 3112\xi^3 - 3796\xi^2 + 1680\xi) - \\ & - \frac{1}{240} f_{k-2} (\xi^7 - 26\xi^6 + 270\xi^5 - 1420\xi^4 + 3929\xi^3 - 5274\xi^2 + 2520\xi) + \\ & + \frac{1}{720} f_{k-1} (\xi^7 - 27\xi^6 + 295\xi^5 - 1665\xi^4 + 5104\xi^3 - 8028\xi^2 + 5040\xi) - \\ & - \frac{1}{5040} f_k (\xi^7 - 28\xi^6 + 322\xi^5 - 1950\xi^4 + 6769\xi^3 - 13132\xi^2 + \\ & + 13068\xi - 5040). \end{aligned} \quad (12.15)$$

Интегрируя уравнение (12.15), получим

$$y_j(t_v) = y_j(t_k) + h_t \sum_{i=k-7}^k f_{j,i} \psi_i \quad (j = 1, 2, \dots, 6),$$

где

$$\psi_{k-7} = \frac{1}{120960} (3\xi^8 - 72\xi^7 + 700\xi^6 - 3528\xi^5 + 9744\xi^4 + 14112\xi^3 + 8640\xi^2);$$

$$\psi_{k-6} = -\frac{1}{120960} (21\xi^8 - 528\xi^7 + 5320\xi^6 - 27552\xi^5 + 77658\xi^4 + 114128\xi^3 + 70560\xi^2);$$

$$\psi_{k-5} = \frac{1}{120960} (63\xi^8 - 1656\xi^7 + 17388\xi^6 - 93240\xi^5 + 270144\xi^4 - 405216\xi^3 + 254016\xi^2);$$

$$\psi_{k-4} = \frac{1}{120960} (105\xi^8 - 2880\xi^7 + 31640\xi^6 - 177408\xi^5 + 534450\xi^4 - 826560\xi^3 + 529200\xi^2);$$

$$\psi_{k-3} = \frac{1}{120960} (105\xi^8 - 3000\xi^7 + 34580\xi^6 - 204792\xi^5 + 653520\xi^4 - 1062880\xi^3 + 705600\xi^2);$$

$$\psi_{k-2} = -\frac{1}{120960} (63\xi^8 - 1872\xi^7 + 22680\xi^6 - 143136\xi^5 + 495054\xi^4 - 886032\xi^3 + 635040\xi^2);$$

$$\psi_{k-1} = \frac{1}{120960} (21\xi^8 - 648\xi^7 + 8260\xi^6 - 55944\xi^5 + 214368\xi^4 - 449568\xi^3 + 423360\xi^2);$$

$$\psi_k = -\frac{1}{120960} (3\xi^8 - 96\xi^7 + 1288\xi^6 - 9408\xi^5 + 40614\xi^4 - 105056\xi^3 + 156816\xi^2 - 120960\xi).$$

При решении таких задач, как определение времени существования искусственного спутника Земли, определение эволюции орбиты спутника за время его существования и т. п., возникает необходимость расчета элементов орбиты спутника для больших интервалов времени полета (порядка сотен и тысяч оборотов спутника вокруг Земли).

Во всех таких случаях при использовании описанных выше методов численного интегрирования требуется весьма большое время для расчета элементов орбиты на электронных вычислительных машинах. Это объясняется тем, что из-за колебательного характера изменения, например, оскулирующих элементов орбиты на протяжении одного периода, нельзя назначать достаточно большой шаг интегрирования. В то же время, если рассматривать некоторые элементы орбиты в начале витка как функции номера витка, то их изменения носят монотонный характер. Это позволяет построить экономный метод численного решения уравнений в конечных разностях для расчета орбит ИСЗ на большие интервалы времени его полета [22].

Запишем систему уравнений в конечных разностях в виде

$$y_{j,N+1} - y_{j,N} = f_{j,N}(x_N, y_{1,N}, y_{2,N}, \dots, y_{6,N}), \quad (12.16)$$

где y_j — искомые функции;

f_j — приращение искомых функций;

$$x_{N+1} - x_N = h.$$

Задачу численного решения уравнений (12.16) сформулируем следующим образом: найти значение искомых функций y_j , удовлетворяющих уравнениям (12.16) при $x = x_N + H$ (где $H = nh$, а n — положительное целое число), если значения искомых функций y_j при $x = x_N$ известны.

Рассмотрим прежде всего метод решения уравнений (12.16), аналогичный обычному методу численного интегрирования Адамса 4-го порядка.

Пусть в точке k (в начале витка с номером k) известны значения искомых функций $y_{j,k}$ ($j = 1, 2, \dots, 6$) и, кроме того, известны приращения этих функций за один оборот в k -, $(k-n)$ -, $(k-2n)$ - и $(k-3n)$ -точках, а именно:

$$f_{j,k} = y_{j,k+1} - y_{j,k};$$

$$f_{j,k-n} = y_{j,k-n+1} - y_{j,k-n};$$

$$\begin{aligned}f_{j,k-2n} &= y_{j,k-2n+1} - y_{j,k-2n}; \\f_{j,k-3n} &= y_{j,k-3n+1} - y_{j,k-3n},\end{aligned}$$

где n — шаг численного решения уравнений (12.16).

Тогда приближенные значения искомым функций в $(k+n)$ -й точке вычисляются по экстраполяционной формуле

$$y_{j,k+n} = y_{j,k} + n \sum_{p=0}^3 R_{k-pn} f_{k-pn}, \quad (12.17)$$

где

$$\begin{aligned}R_k &= \frac{55n^2 - 36n + 5}{24n^2}; & R_{k-n} &= -\frac{(n-1)(59n-13)}{24n^2}; \\R_{k-2n} &= \frac{(n-1)(37n-11)}{24n^2}; & R_{k-3n} &= -\frac{(n-1)(3n-1)}{8n^2}.\end{aligned}$$

После этого по значениям функций $y_{j,k+n}$ вычисляются их приращения $f_{j,k+n}$ и по интерполяционной формуле уточняются значения искомым функций в $(k+n)$ -й точке

$$y_{j,k+n}^* = y_{j,k} + n \sum_{p=0}^3 R_{k-pn}^* f_{k-(p-1)n}, \quad (12.18)$$

где

$$\begin{aligned}R_k^* &= \frac{(n-1)(9n-1)}{24n^2}; & R_{k-n}^* &= \frac{(n+1)(19n-r)}{24n^2}; \\R_{k-2n}^* &= -\frac{5(n^2-1)}{24n^2}; & R_{k-3n}^* &= \frac{n^2-1}{24n^2}.\end{aligned}$$

Здесь и далее рассматривается частный случай, когда вычисляются приращения искомым функций за один оборот. Для этого наиболее часто применяемого на практике случая $x_N = N$ — номер витка, $h=1$ и $H=n$.

Для получения четырех «разгонных» точек применяется метод, аналогичный методу Рунге — Кутты 4-го порядка. Формулы этого метода имеют вид

$$y_{j,k+n} = y_{j,k} + \frac{n(n+1)}{6(n-1)} k_{1,j} + \frac{n(n-2)}{3(n-1)} k_{2,j} + \frac{n(n-2)}{3(n-1)} k_{3,j} + \frac{n(n+1)}{6(n-1)} k_{4,j}, \quad (12.19)$$

где

$$\begin{aligned}k_{1,j} &= f_j(x_N; y_{1,N}, y_{2,N}, \dots, y_{6,N}); \\k_{2,j} &= f_j \left(x_N + \frac{n-1}{n} H; y_{1,N} + \frac{n-1}{2n} k_{1,1}, y_{2,N} + \frac{n-1}{2n} k_{1,2}, \dots, y_{6,N} + \frac{n-1}{2n} k_{1,6} \right); \\k_{3,j} &= f_j \left(x_N + \frac{n-1}{n} H; y_{1,N} + \frac{1}{n} k_{1,1} + \frac{n-3}{2n} k_{2,1}, \dots, y_{6,N} + \frac{1}{n} k_{1,6} + \frac{n-3}{2n} k_{2,6} \right); \\k_{4,j} &= f_j \left[x_N + \frac{n-1}{n} H; y_{1,N} + \frac{1}{n} k_{1,1} + \frac{2(n-2)}{n(n+1)} k_{2,1} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n+1)} k_{3,1}, \dots, \right. \\&\quad \left. y_{6,N} + \frac{1}{n} k_{1,6} + \frac{2(n-2)}{n(n+1)} k_{2,6} + \frac{(n-1)(n-2)}{n(n+1)} k_{3,6} \right].\end{aligned}$$

За искомые функции при использовании системы (12.4) можно принять: время t_N , географическую долготу L_N , модуль радиуса-вектора r_N и составляющие вектора скорости $v'_{xN}, v'_{yN}, v'_{zN}$. При заданных в системе координат $Oxyz$ значениях $x_N, y_N, z_N \equiv 0, v_{xN}, v_{yN}$ и v_{zN} элементы орбиты, принятые за искомые функции, вычисляются по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned}L_N &= \arctg \frac{y_N}{x_N}; \\r_N &= x_N \cos L_N + y_N \sin L_N; \\v'_{xN} &= v_{xN} \cos L_N + v_{yN} \sin L_N; \\v'_{yN} &= -v_{xN} \sin L_N + v_{yN} \cos L_N; \\v'_{zN} &= v_{zN}.\end{aligned} \right\} \quad (12.20)$$

Формулы обратного перехода:

$$\left. \begin{aligned} x_N &= r_N \cos L_N; \\ y_N &= r_N \sin L_N; \\ v_{xN} &= v'_{xN} \cos L_N - v'_{yN} \sin L_N; \\ v_{yN} &= v'_{xN} \sin L_N + v'_{yN} \cos L_N; \\ v_{zN} &= v'_{zN}. \end{aligned} \right\} \quad (12.21)$$

Расчет орбиты для принятой системы искомым функций ведется в следующем порядке:

а) по известным в начале k -го витка функциям $t_k, L_k, \dots, v'_{z,k}$ вычисляются начальные условия для интегрирования системы (12.4) по формулам (12.21), а именно:

$$t_k, x_k, \dots, v_{z,k} \quad (z_k \equiv 0);$$

б) в результате интегрирования системы (12.4) определяются $t_{k+1}, x_{k+1}, \dots, v_{z,k+1}$, а по формулам (12.20) определяются $t_{k+1}, L_{k+1}, \dots, v'_{z,k+1}$,

в) определяются приращения искомым функций

$$f_{j,k} = y_{j,k+1} - y_{j,k} \quad (j = 1, 2, \dots, 6);$$

г) по формулам (12.17) и (12.18) вычисляются значения искомым функций в начале $(k+n)$ -го витка.

При использовании цилиндрических координат за искомые функции целесообразно выбирать величины

$$t_N, i_N, \Omega_N, r_N, v_{rN}, v_{uN}. \quad (12.22)$$

При использовании как системы (12.4), так и системы (12.6) за искомые функции можно выбирать также

$$t_N, a_N, e_N, i_N, \Omega_N, \omega_N. \quad (12.23)$$

Преобразование величин (12.22) и (12.23) в соответствующие системы координат и обратно производится по известным формулам. В остальном алгоритм задачи не меняется, т. е. решение осуществляется по приведенной выше схеме для искомым функций $t_N, L_N, \dots, v'_{zN}$.

Величина шага n численного решения уравнений в конечных разностях (12.16) зависит от характеристик орбиты спутника и требований к точности расчета. Для типичных орбит спутников в начале полета величина шага выбирается достаточно большой: $n = 50 \div 100$.

В процессе полета спутника высота непрерывно уменьшается, что приводит к большей эволюции элементов орбиты и, следовательно, к необходимости уменьшать величину шага n .

Контроль точности расчета можно производить по величине разности

$$\delta y_{j,k+n} = y_{j,k+n}^* - y_{j,k+n}.$$

Переход на меньший шаг производится либо при помощи формул (12.19), либо методом, аналогичным методу численного интегрирования с автоматическим выбором шага.

12.2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ

12.2.1. Способы построения аналитических методов прогнозирования

В общем случае система дифференциальных уравнений движения ИСЗ в конечном виде не интегрируется. Поэтому при разработке аналитических методов прогнозирования применяют различные способы получения приближенных решений. Для этих целей обычно используют методы приближенного интегрирования уравнений Лагранжа или стремятся найти такой вид потенциальной функции, аппроксимирующей гравитационное поле Земли, которая допускает решение дифференциальных уравнений в квадратурах. Получить решение в квадратурах удалось пока в немногих частных случаях: для потенциалов, в основном довольно полно учитывающих полярное сжатие Земли и частично аномалии поля сил притяжения [1, 14].

Эти потенциалы могут интерпретироваться как потенциал двух неподвижных центров, имеющих координаты (c_1, c_2) и массы (m_1, m_2) , являющиеся комплексно сопряженными числами

$$\bar{V} = \frac{k^2 m}{2} \left(\frac{1 + \sigma i}{r_1} + \frac{1 - \sigma i}{r_2} \right), \quad (12.24)$$

где $m = m_1 + m_2$ — масса Земли;

r_1 и r_2 — радиусы-векторы, величины которых определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} r_1^2 &= x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + i)]^2; \\ r_2^2 &= x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - i)]^2. \end{aligned} \right\} \quad (12.25)$$

Здесь $Oxyz$ — прямоугольная система координат, у которой ось Oz проходит через точки с массами m_1, m_2 .

Разложение функции (12.24) в ряд по полиномам Лежандра имеет вид

$$\bar{V} = \frac{k^2 m}{r} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k}{r^k} P_k \left(\frac{z}{r} \right) \right], \quad (12.26)$$

где

$$\gamma_1 = 0;$$

$$\gamma_2 = -c^2(1 + \sigma^2);$$

$$\gamma_3 = -c^3(1 + \sigma^2)2\sigma;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\gamma_k = \frac{c^k}{2} [(1 + i\sigma)(\sigma + i)^k + (1 - i\sigma)(\sigma - i)^k].$$

Параметры c и σ выбираются так, чтобы первые три члена в разложении (12.26) совпадали с соответствующими членами разложения потенциала общего земного эллипсоида.

При решении многих практических задач точность аналитических методов, построенных для потенциала (12.24), оказывается недостаточной. В таких случаях указанные решения можно рассматривать как модели новых (некеплеровых) промежуточных орбит и на их основе строить теории возмущений, которые учитывали бы высшие гармоники потенциала Земли и другие возмущающие силы (сопротивление атмосферы, гравитационные влияния Луны, Солнца и др.).

Наибольшее распространение при аналитическом расчете орбит нашли методы, основанные на приближенном интегрировании уравнений Лагранжа. Известно несколько способов получения таких методов, например:

- разложение решения в ряды, расположенные по степеням приращений независимой переменной;
- разложение решения в ряды по степеням малого параметра;
- повитковое суммирование приращений элементов в узлах орбиты;
- решение уравнений возмущенного движения с использованием метода усреднения.

Каждый из приведенных приемов имеет свои достоинства и недостатки и может быть наилучшим образом использован при решении конкретных задач. Так, аналитические выражения, найденные разложением решений по степеням независимой переменной, используются лишь для малых сроков прогноза [17], например, когда требуется рассчитать движение на ограниченном участке орбиты в пределах одного витка. Эти выражения могут быть представлены в виде ряда [17]

$$z(u) = z_0 + z'_0 \frac{(u - u_0)}{1} + z''_0 \frac{(u - u_0)^2}{2!} + \dots + z^{(n)}_0 \frac{(u - u_0)^n}{n!} + \dots, \quad (12.27)$$

где $z(u)$ — какой-либо элемент орбиты;

u — независимая переменная, в качестве которой может быть выбрано время, средняя аномалия и т. д.;

z_0 — начальное значение элемента $z(u)$ при $u = u_0$;

$z^{(v)}_0$ — производная v -го порядка от $z(u)$ по u в точке $u = u_0$.

Выражение для $z^{(v)}(u)$ определяется обычным дифференцированием уравнения Лагранжа. Выбор степени n зависит от продолжительности и требуемой точности прогноза и может быть определен, например, путем сравнения результатов расчета по данному методу с результатами численного интегрирования.

Приближенные решения уравнений Лагранжа с помощью разложения в ряды по степеням малого параметра могут быть использованы для прогнозирования движения ИСЗ на значительно большие сроки. Эти решения строятся в виде ряда [7]

$$\varepsilon(u) = \varepsilon_0 + \sum_{i=1}^k \varepsilon_i f_i(u) + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \varepsilon_i \varepsilon_j f_{ij}(u) + \dots, \quad (12.28)$$

где ε_i — малый параметр, соответствующий определенному возмущающему фактору;

k — число учитываемых возмущающих факторов;

$f_i(u)$, $f_{ij}(u)$ — некоторые функции начальных элементов орбиты и независимой переменной (например, аргумента широты u).

Величину $\delta \varepsilon_1(u) = \varepsilon_i f_i(u)$ называют возмущениями первого порядка, величину $\delta \varepsilon_2(u) = \varepsilon_i \varepsilon_j f_{ij}(u)$ — возмущениями второго порядка и т. д. Каждое из возмущений $\delta \varepsilon_1(u)$ и $\delta \varepsilon_2(u)$ принято разделять на три составляющие:

$$\delta \varepsilon(u) = \tilde{\varepsilon}(u) + \tilde{\tilde{\varepsilon}}(u) + \bar{\varepsilon}(u), \quad (12.29)$$

где $\tilde{\varepsilon}(u)$ — короткопериодическая составляющая (с периодом, не превышающим периода обращения ИСЗ), обладающая свойством $\tilde{\varepsilon}(2\pi) = 0$;

$\tilde{\tilde{\varepsilon}}(u)$ — долгопериодическая составляющая (с периодом, значительно превышающим период обращения ИСЗ);

$\bar{\varepsilon}(u)$ — вековое возмущение, пропорциональное независимой переменной u .

Для каждой конкретной комбинации учитываемых при прогнозировании возмущающих факторов в выражении (12.28) следует удерживать члены одного порядка малости. Погрешность решения (12.28) имеет порядок малости $(\varepsilon u)^{n+1}$, где n — порядок малости членов, удерживаемых в решении, а ε — один из параметров ε_i . Такое решение применяется для прогнозирования на сроки, при которых $\varepsilon u \ll 1$ (обычно это несколько десятков витков орбиты ИСЗ).

Для прогнозирования движения на большие интервалы времени широко применяется метод повиткового суммирования возмущений [18]. Аналитические выражения для возмущений за виток $\delta \varepsilon(2\pi)$ получаются с помощью разложения решения в ряды по степеням малого параметра. Элементы орбиты в узле N -го витка определяются по схеме

$$\varepsilon_N = \varepsilon_0 + \sum_{j=1}^N (\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1}), \quad (12.30)$$

где ε_j — вектор значений элементов в узле j -го витка;

$\varepsilon_j - \varepsilon_{j-1} = \delta \varepsilon(\varepsilon_{j-1}, 2\pi)$ — возмущение элементов на $(j-1)$ -м витке, рассчитываемое по элементам ε_{j-1} .

Наряду с повитковым суммированием для этих же целей применяется решение усредненных уравнений движения, которые строятся на основе уравнений Лагранжа с помощью метода усреднения. Правая часть усредненной системы может быть выражена (в случае, когда «быстрая» переменная u -скаляр) через возмущения оскулирующих элементов за виток следующим образом:

$$\frac{d\bar{\varepsilon}}{dN} = \delta \varepsilon_1(2\pi) + \delta \varepsilon_2(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial \delta \varepsilon_{1i}(2\pi)}{\partial \varepsilon} \varepsilon_{1j}(2\pi) + O(\varepsilon^3), \quad (12.31)$$

где $\bar{\varepsilon}$ — вектор (столбец) средних элементов, которые можно выбрать так, чтобы они совпадали в узлах орбиты с оскулирующими элементами;

$$\delta \varepsilon_1(2\pi) = \sum_{i=1}^k \delta \varepsilon_{1i}(2\pi) \text{ и } \delta \varepsilon_2(2\pi) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \delta \varepsilon_{2ij}(2\pi) \text{ — возмущения оскулирующих}$$

элементов первого и второго порядка за виток;

$$N = \frac{u}{2\pi} \text{ — новая независимая переменная (число витков).}$$

Оскулирующие элементы ε связаны со средними элементами $\bar{\varepsilon}$ зависимостью

$$\varepsilon(u) = \bar{\varepsilon} + \sum_{i=1}^k \left[\delta \varepsilon_{1i}(\bar{\varepsilon}, u) - \delta \varepsilon_{1i}(2\pi) \frac{u}{2\pi} \right] + O(\varepsilon^2). \quad (12.32)$$

Система дифференциальных уравнений (12.31) в общем случае не интегрируется в конечном виде. Для нахождения аналитических выражений $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(N)$ прибегают к раз-

личным способам получения приближенных решений. Для решения системы (12.31) могут быть использованы также методы численного интегрирования. Отличие известных методов (алгоритмов) связано главным образом с выбором разных систем элементов (координат). Это, как правило, позволяет установить тождественность соответствующих возмущений, полученных разными авторами. Ниже приведены аналитические методы прогнозирования, построенные на основе использования наиболее распространенных систем элементов, позволяющие учесть:

— возмущения, порождаемые второй зональной гармоникой разложения потенциала (порядка c_{20}) — $\delta z_1(u)$ (приведенные соотношения могут использоваться для прогнозирования на малых интервалах — несколько витков, доли витка);

— основные вековые и долгопериодические возмущения первого порядка, порождаемые основными членами разложения потенциала, а также возмущения второго порядка от второй зональной гармоники (порядка c_{20}^2) — $\delta z_2(2\pi)$;

— вековые возмущения первого порядка, порождаемые сопротивлением атмосферы;

— вековые и долгопериодические возмущения, порождаемые гравитационным влиянием Луны и Солнца. Для названных выше вековых и долгопериодических возмущений даны соотношения для их расчета за виток — $\delta z(2\pi)$. Ими можно пользоваться для составления усредненных уравнений (12.31) и повиткового суммирования. Приводятся также некоторые решения усредненной системы уравнений; этими решениями можно пользоваться для долгосрочного прогнозирования $\dot{z} = \dot{z}(N)$ и при расчетах по формуле (12.32);

— некоторые решения, полученные на основе точного интегрирования уравнений движения в гравитационном поле (12.24). Ими можно пользоваться, когда требуется большая точность прогнозирования на малых интервалах (несколько витков, доли витка).

12.2.2. Гравитационные возмущения, обусловленные второй зональной гармоникой (порядка c_{20})

Для прогнозирования движения ИСЗ, орбиты которых отличаются от круговых, можно применить систему кеплеровых оскулирующих элементов $\dot{z} = (a, e, i, \Omega, \omega, M_0)$. Возмущения этих элементов имеют вид [4]

$$\delta a(u) = -c_{20} \frac{R_3^2}{a} \left(\frac{a}{r} \right)^3 (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u) + C_a + O(ac_{20}^2); \quad (12.33)$$

$$\begin{aligned} \delta e(u) = & -\frac{3}{2} c_{20} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 \left\{ \left(1 + \frac{1}{4} e^2 \right) \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \cos \vartheta + \right. \\ & + \frac{1}{4} \sin^2 i \left(1 + \frac{11}{4} e^2 \right) \cos (2\omega + \vartheta) + \sin^2 i \left(\frac{7}{12} + \frac{17}{48} e^2 \right) \cos (2\omega + 3\vartheta) + \\ & + \frac{1}{2} e \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \cos 2\vartheta + \frac{5}{4} e \sin^2 i \cos 2u + \frac{3}{8} e \sin^2 i \cos (2\omega + 4\vartheta) + \\ & + \frac{1}{16} e^2 \sin^2 i \cos (2\omega - \vartheta) + \frac{1}{12} e^2 \left(1 - \frac{3}{2} \sin^2 i \right) \cos 3\vartheta + \\ & \left. + \frac{1}{16} e^2 \sin^2 i \cos (2\omega + 5\vartheta) \right\} + C_e + O(c_{20}^2); \end{aligned} \quad (12.34)$$

$$\begin{aligned} \delta i(u) = & -\frac{3}{8} c_{20} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 \sin 2i \left[\cos 2u + e \cos (2\omega + \vartheta) + \frac{1}{3} e \cos (2\omega + 3\vartheta) \right] + \\ & + C_i + O(c_{20}^2); \end{aligned} \quad (12.35)$$

$$\begin{aligned} \delta \Omega(u) = & \frac{3}{2} c_{20} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 \cos i \left\{ u - \frac{1}{2} \sin u + e \left[\sin \vartheta - \frac{1}{2} \sin (2\omega + \vartheta) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{6} \sin (2\omega + 3\vartheta) \right] \right\} + C_\Omega + O(c_{20}^2); \end{aligned} \quad (12.36)$$

$$\begin{aligned} \delta M_0(u) = & c_{20} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 \frac{(1-e^2)^3}{e} \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \sin^2 i \right) \left[\left(\frac{a}{r} \right)^2 (1-e^2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{a}{r} \right) + 1 \right] \sin \vartheta + \frac{3}{8} \sin^2 i \left[- \left(\frac{a}{r} \right)^2 (1-e^2) - \left(\frac{a}{r} \right) + 1 \right] \sin (2\omega + \vartheta) + \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{3}{8} \sin^2 i \left[\left(\frac{a}{r} \right)^2 (1 - e^2) + \left(\frac{a}{r} \right) + \frac{1}{3} \right] \sin (2\omega + 3\vartheta) \Big\} + C_M + O(e_{20}^2); \quad (12.37)$$

$$\begin{aligned} \delta\omega(u) = & -\sqrt{1-e^2} \delta M_0(u) - c_{20} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 \left\{ \left(3 - \frac{15}{4} \sin^2 i \right) (u + e \sin \vartheta) + \right. \\ & \left. + \left(-\frac{3}{2} + \frac{15}{4} \sin^2 i \right) \left[\frac{1}{2} \sin 2u + \frac{1}{2} e \sin (2\omega + \vartheta) + \frac{1}{6} e \sin (2\omega + 3\vartheta) \right] \right\} + \\ & + C_\omega + O(e_{20}^2), \end{aligned} \quad (12.38)$$

где

$$p = a(1 - e^2);$$

$$\left(\frac{a}{r} \right) = \frac{1 + e \cos \vartheta}{1 - e^2}.$$

Первое приближение значения аргумента широты

$$u = u^{(0)} = \omega + \vartheta; \quad (12.39)$$

$$\vartheta = \vartheta^{(0)} = 2 \operatorname{arctg} \left[\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \right]. \quad (12.40)$$

Эксцентрисическая аномалия E находится из уравнения Кеплера

$$E - e \sin E = M_0 + \bar{n}(t - t_0), \quad (12.41)$$

в котором

$$\bar{n} = n_0 \left[1 - \frac{3}{2} c_{20} \left(\frac{R_3}{a} \right)^2 \left(\frac{a}{r} \right)_0^3 \right] \quad (12.42)$$

— «среднее» среднее движение,

$$n_0 = \frac{\sqrt{k^2 m}}{a_0^{3/2}}; \quad \left(\frac{a}{r} \right)_0 = \frac{1 + e_0 \cos(u_0 - \omega_0)}{1 - e_0^2}, \quad (12.43)$$

$a_0, e_0, \omega_0, M_0, u_0$ — начальные значения элементов (в момент времени t_0);
 $k^2 m$ — произведение гравитационной постоянной на массу Земли.

Постоянные интегрирования C_s определяются так, чтобы возмущения были равны нулю в точке $u = u_0$, т. е.

$$\delta s(u_0) = f(u_0) + C_s = 0. \quad (12.44)$$

Возмущенное значение аргумента широты u находится на основе уравнения Кеплера

$$E - [e_0 + \delta e(u^{(0)})] \sin E = M_0 + \bar{n}(t - t_0) + \delta M_0(u^{(0)}) \quad (12.45)$$

по зависимостям, аналогичным (12.39) и (12.40).

Прогнозирование ИСЗ, близких к круговым, целесообразно ввести по зависимостям (12.35), (12.36), (12.39), (12.40), (12.41), (12.42), (12.43), а также

$$u = u^{(0)} + \delta u(u^{(0)}); \quad (12.46)$$

$$r = \frac{a_0(1 - e_0^2)}{1 + e_0 \cos \vartheta^{(0)}} + \delta r(u^{(0)}), \quad (12.47)$$

где

$$\begin{aligned} \delta u(u) = & -\frac{3}{2} c_{20} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 \left\{ \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) u + \left(-2 + \frac{4}{3} \sin^2 i \right) \sin u + \right. \\ & + \left(-\frac{1}{2} + \frac{7}{12} \sin^2 i \right) \sin 2u + e \left[-2 \sin^2 i \sin \vartheta + \left(-\frac{3}{2} + \frac{5}{6} \sin^2 i \right) \sin (2\omega + \vartheta) + \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{6} (-1 + \sin^2 i) \sin (2\omega + 3\vartheta) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \sin^2 i \right) \sin (\omega + 2\vartheta) \right] + O(e^2) \right\} + C_u; \end{aligned} \quad (12.48)$$

$$\begin{aligned} \delta r(u) = & -\frac{3}{2} c_{20} \left(\frac{R_3}{a} \right)^2 a \left\{ \frac{1}{1 + e \cos \vartheta} \left[\cos u - \frac{1}{2} e \cos \vartheta - \frac{1}{2} e \cos (2\omega + \vartheta) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} e \cos (\omega + 2\vartheta) \right] + \sin^2 i \left(\frac{1}{6} \cos 2u - \frac{2}{3} \cos u \right) + O(e^2) \right\} + C_r. \end{aligned} \quad (12.49)$$

Некоторые дополнительные соотношения. Дракони́ческий период

$$T_{\mathfrak{D}} = T_{\text{оск0}} \left\{ 1 + \frac{3}{2} c_{20} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 \left[\left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) \frac{(1 - e^2)^{3/2}}{(1 + e \cos \omega)^2} + \frac{(1 + e \cos \vartheta_0)^3}{1 - e^2} (1 - 3 \sin^2 i \sin^2 u_0) \right] \right\}, \quad (12.50)$$

где
$$T_{\text{оск0}} = 2\pi \frac{a_0^{3/2}}{\sqrt{k^2 m}}; \quad \vartheta_0 = u_0 - \omega.$$

Аномалистический период

$$T_{\omega} = T_{\text{оск0}} \left[1 + \frac{3}{2} c_{20} \left(\frac{R_3}{a} \right)^2 \left(\frac{1 + e \cos \vartheta_0}{1 - e^2} \right)^3 \right]. \quad (12.51)$$

Высота перигея

$$h_{\pi} = [a(1 - e) - R_3] + R_3 \left[\frac{3}{2} c_{20} \left(\frac{R_3}{a} \right) \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 i \right) (1 - \cos \omega) + \left(\frac{1}{2} a + \frac{1}{4} c_{20} \frac{R_3}{a} \right) \sin^2 i (1 - \cos 2\omega) + O(c_{20}e) \right]. \quad (12.52)$$

В выражении (12.52) элементы a, e, i, ω соответствуют точке $u_0 = 0$.

Вековые возмущения элементов за виток:

$$\delta a(2\pi) = \delta e(2\pi) = \delta i(2\pi) = 0; \quad (12.53)$$

$$\delta \Omega(2\pi) = 2\pi \frac{3}{2} c_{20} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 \cos i; \quad (12.54)$$

$$\delta \omega(2\pi) = -2\pi \frac{3}{4} c_{20} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 (4 - 5 \sin^2 i); \quad (12.55)$$

$$\delta M(2\pi) = -2\pi \frac{3}{2} c_{20} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 \frac{(1 + e \cos \vartheta_0)^3}{(1 - e^2)}. \quad (12.56)$$

Вековые возмущения элементов $l = e \cos \omega, \quad h = e \sin \omega$:

$$\delta l(2\pi) = 2\pi \frac{3}{4} c_{20} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 (4 - 5 \sin^2 i) h; \quad (12.57)$$

$$\delta h(2\pi) = -2\pi \frac{3}{4} c_{20} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 (4 - 5 \sin^2 i) l. \quad (12.58)$$

12.2.3. Вековые и долгопериодические гравитационные возмущения порядка c_{20}^2 (за виток)

Возмущения от зональных гармоник [10]:

$$\bar{\delta} a(2\pi) = 0; \quad (12.59)$$

$$\widetilde{\delta} a(2\pi) = 2\pi (\sigma_{22} c_{20}^2 + \sigma_3 c_{30} + \sigma_4 c_{40} + \sigma_5 c_{50} + \sigma_6 c_{60}), \quad (12.60)$$

где
$$\sigma_{22} = -a \xi^4 \frac{9}{4} (4 - 5\widetilde{\mu}) \frac{(1 + e \cos \omega)^2}{1 - e^2} e \sin \omega;$$

$$\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = 0.$$

$$\bar{\delta} e(2\pi) = 0. \quad (12.61)$$

$$\widetilde{\delta} e(2\pi) = 2\pi (s_{22} c_{20}^2 + s_3 c_{30} + s_4 c_{40} + s_5 c_{50} + s_6 c_{60}), \quad (12.62)$$

где

$$s_{22} = \frac{3}{32} \xi^4 \{ (-4 + 5\widetilde{\mu}) [(12 - 8\widetilde{\mu}) + e^2 (3 + 8\widetilde{\mu})] \sin \omega + [(-48 + 46\widetilde{\mu} + 15\widetilde{\mu}^2) + e^2 (14\widetilde{\mu} - 15\widetilde{\mu}^2)] e \sin 2\omega + (-4 + 5\widetilde{\mu}) 3e^2 \sin 3\omega \},$$

$$s_3 = \frac{3}{8} \xi^3 \sin i (4 - 5\widetilde{\mu}) (1 - e^2) \cos \omega;$$

$$s_4 = \frac{15}{32} \xi^4 (6\tilde{\mu} - 7\tilde{\mu}^2) e(1 - e^2) \sin 2\omega;$$

$$s_5 = \frac{15}{256} \xi^5 \sin i \left[-(16 - 56\tilde{\mu} + 42\tilde{\mu}^2)(4 + 3e^2)(1 - e^2) \cos \omega - \right. \\ \left. - 7(8\tilde{\mu} - 9\tilde{\mu}^2)(1 - e^2)e^2 \cos 3\omega \right];$$

$$s_6 = \frac{105}{1024} \xi^6 \tilde{\mu}(1 - e^2) \{ (-80 + 240\tilde{\mu} - 165\tilde{\mu}^2)(2 + e^2)e \sin 2\omega + \\ + (-30\tilde{\mu} + 33\tilde{\mu}^2)e^3 \sin 4\omega \}.$$

$$\bar{\delta} i(2\pi) = 0; \quad (12.63)$$

$$\bar{\delta} i(2\pi) = 2\pi (\tau_{22} c_{20}^2 + \tau_3 c_{30} + \tau_4 c_{40} + \tau_5 c_{50} + \tau_6 c_{60}), \quad (12.64)$$

где

$$\tau_{22} = \frac{3}{64} \xi^4 \sin 2i [(-4 + 5\tilde{\mu})8e \sin \omega + (14 - 15\tilde{\mu})e^2 \sin 2\omega];$$

$$\tau_3 = \frac{3}{8} \xi^3 \cos i (-4 + 5\tilde{\mu})e \cos \omega;$$

$$\tau_4 = \frac{15}{64} \xi^4 \sin 2i (-6 + 7\tilde{\mu})e^2 \sin 2\omega;$$

$$\tau_5 = \frac{15}{256} \xi^5 \cos i [2(4 + 3e^2)(8 - 28\tilde{\mu} + 21\tilde{\mu}^2)e \cos \omega + 7(8\tilde{\mu} - 9\tilde{\mu}^2)e^3 \sin 3\omega];$$

$$\tau_6 = \frac{105}{2048} \xi^6 \sin 2i [(80 - 240\tilde{\mu} + 165\tilde{\mu}^2)(2 + e^2)e^2 \sin 2\omega + \\ + (30\tilde{\mu} - 33\tilde{\mu}^2)e^4 \sin 4\omega].$$

$$\bar{\delta} \Omega(2\pi) = 2\pi (\bar{Q}_{22} c_{20}^2 + \bar{Q}_3 c_{30} + \bar{Q}_4 c_{40} + \bar{Q}_5 c_{50} + \bar{Q}_6 c_{60}), \quad (12.65)$$

где

$$\bar{Q}_{22} = \frac{3}{8} \xi^4 \cos i \left[(3 - 20\tilde{\mu}) - e^2 \left(1 + \frac{5}{4} \tilde{\mu} \right) \right];$$

$$\bar{Q}_3 \approx \bar{Q}_5 = 0;$$

$$\bar{Q}_4 = \frac{15}{16} \xi^4 \cos i (-4 + 7\tilde{\mu}) \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right);$$

$$\bar{Q}_6 = \frac{105}{2048} \xi^6 \cos i [2(8 - 36\tilde{\mu} + 33\tilde{\mu}^2)(8 - 40e^2 + 15e^4)].$$

$$\bar{\delta} \Omega(2\pi) = 2\pi (Q_{22} c_{20}^2 + Q_3 c_{30} + Q_4 c_{40} + Q_5 c_{50} + Q_6 c_{60}), \quad (12.66)$$

где

$$Q_{22} = \frac{3}{16} \xi^4 \cos i [16(2 - 5\tilde{\mu})e \cos \omega - (7 - 15\tilde{\mu})e^2 \cos 2\omega];$$

$$Q_3 = \frac{3}{8} \xi^3 \operatorname{ctg} i (-4 + 15\tilde{\mu})e \sin \omega;$$

$$Q_4 = \frac{15}{17} \xi^4 \cos i (3 - 7\tilde{\mu})e^2 \cos 2\omega;$$

$$Q_5 = \frac{15}{256} \xi^5 \operatorname{ctg} i \left[(64 - 672\tilde{\mu} + 840\tilde{\mu}^2) \left(1 + \frac{3}{4} e^2 \right) e \sin \omega + \right. \\ \left. + (56\tilde{\mu} - 105\tilde{\mu}^2)e^3 \sin 3\omega \right];$$

$$Q_6 = \frac{105}{2048} \xi^6 \cos i \left[20(-16 + 96\tilde{\mu} + 99\tilde{\mu}^2) \left(1 + \frac{1}{2} e^2 \right) e^2 \cos 2\omega + \right. \\ \left. + (-60\tilde{\mu} + 99\tilde{\mu}^2)e^4 \cos 4\omega \right].$$

$$\bar{\delta} \omega(2\pi) = 2\pi (\bar{q}_{22} c_{20}^2 + \bar{q}_3 c_{30} + \bar{q}_4 c_{40} + \bar{q}_5 c_{50} + \bar{q}_6 c_{60}), \quad (12.67)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{q}_{22} &= \frac{3}{128} \xi^4 [(760\tilde{\mu} - 890\tilde{\mu}^2) + e^2(56 - 36\tilde{\mu} + 45\tilde{\mu}^2)]; \\ \bar{q}_3 &= \bar{q}_5 = 0; \\ \bar{q}_4 &= \frac{15}{128} \xi^4 [(64 - 248\tilde{\mu} + 196\tilde{\mu}^2) + e^2(72 - 252\tilde{\mu} + 189\tilde{\mu}^2)]; \\ \bar{q}_6 &= \frac{105}{4096} \xi^6 [(-512 + 4096\tilde{\mu} - 8256\tilde{\mu}^2 + 4752\tilde{\mu}^3) + \\ &+ e^2(-1920 + 13760\tilde{\mu} - 26160\tilde{\mu}^2 - 14520\tilde{\mu}^3) + e^4(-640 + 4320\tilde{\mu} - 7920\tilde{\mu}^2 + 4290\tilde{\mu}^3)]. \\ \bar{\delta}\omega(2\pi) &= 2\pi (q_{22}c_{20}^2 + q_3c_{30} + q_4c_{40} + q_5c_{50} + q_6c_{60}),\end{aligned}\quad (12.68)$$

где

$$\begin{aligned}q_{22} &= \frac{3}{64} \xi^4 \left[(-96 + 184\tilde{\mu} - 80\tilde{\mu}^2) \frac{\cos \omega}{e} + (-96 + 92\tilde{\mu} + 30\tilde{\mu}^2) \cos 2\omega + \right. \\ &+ (-200 + 922\tilde{\mu} - 800\tilde{\mu}^2) e \cos \omega + (-24 + 30\tilde{\mu}) e \cos 3\omega + \\ &\left. + (28 - 158\tilde{\mu} + 135\tilde{\mu}^2) e^2 \cos 2\omega \right]; \\ q_3 &= \frac{3}{8} \xi^3 \frac{1}{\sin i} \left[(-4\tilde{\mu} + 5\tilde{\mu}^2) \frac{\sin \omega}{e} + (4 - 35\tilde{\mu} + 35\tilde{\mu}^2) e \sin \omega \right]; \\ q_4 &= \frac{15}{64} \xi^4 [(12\tilde{\mu} - 14\tilde{\mu}^2) - e^2(12 - 70\tilde{\mu} + 63\tilde{\mu}^2)] \cos 2\omega; \\ q_5 &= \frac{15}{256} \xi^5 \frac{1}{\sin i} \left[(64\tilde{\mu} - 224\tilde{\mu}^2 + 168\tilde{\mu}^3) \frac{\sin \omega}{e} + (-64 + 1392\tilde{\mu} - \right. \\ &- 3808\tilde{\mu}^2 + 2562\tilde{\mu}^3) e \sin \omega + (56\tilde{\mu}^2 - 63\tilde{\mu}^3) e \sin 3\omega + (-48 + 840\tilde{\mu} - \\ &- 2142\tilde{\mu}^2 + 1386\tilde{\mu}^3) e^3 \sin \omega + (-56\tilde{\mu} + 273\tilde{\mu}^2 - 231\tilde{\mu}^3) e^3 \sin 3\omega]; \\ q_6 &= \xi^6 \frac{105}{4096} [(-640\tilde{\mu} + 1920\tilde{\mu}^2 - 1320\tilde{\mu}^3) \cos 2\omega + (640 - 8000\tilde{\mu} + \\ &+ 18360\tilde{\mu}^2 - 11220\tilde{\mu}^3) e^2 \cos 2\omega + (-120\tilde{\mu}^2 + 132\tilde{\mu}^3) e^2 \cos 4\omega + \\ &+ (320 - 3360\tilde{\mu}^2 + 7260\tilde{\mu}^3 - 4290\tilde{\mu}^3) e^4 \cos 2\omega + (120\tilde{\mu} - 528\tilde{\mu}^2 + 429\tilde{\mu}^3) e^4 \cos 4\omega]. \\ \bar{\delta}M_0(2\pi) &= 2\pi (\bar{q}_{22}c_{20}^2 + \bar{q}_3c_{30} + \bar{q}_4c_{40} + \bar{q}_5c_{50}),\end{aligned}\quad (12.69)$$

где

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_{22} &= \frac{3}{128} \xi^4 \sqrt{1-e^2} [(-112 + 356\tilde{\mu} - 367\tilde{\mu}^2) 2 + e^2(152 - 256\tilde{\mu} - 25\tilde{\mu}^2)]; \\ \bar{\varphi}_3 &= \bar{\varphi}_5 = 0; \\ \bar{\varphi}_4 &= \frac{15}{128} \xi^4 \sqrt{1-e^2} 3(8 - 40\tilde{\mu} + 35\tilde{\mu}^2) e^2. \\ \bar{\delta}M_0(2\pi) &= 2\pi (\varphi_{22}c_{20}^2 + \varphi_3c_{30} + \varphi_4c_{40} + \varphi_5c_{50}),\end{aligned}\quad (12.70)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_{22} &= \frac{3}{64} \xi^4 \sqrt{1-e^2} \left[16(4 - 5\tilde{\mu}) \left(\frac{3}{2} - \tilde{\mu} \right) \frac{\cos \omega}{e} + (96 - 220\tilde{\mu} + 120\tilde{\mu}^2) \cos 2\omega + \right. \\ &+ (264 - 386\tilde{\mu} + 120\tilde{\mu}^2) e \cos \omega + 6(4 - 5\tilde{\mu}) e \cos 3\omega + \\ &\left. + (-96 + 310\tilde{\mu} - 255\tilde{\mu}^2) e^2 \cos 2\omega \right]; \\ \varphi_3 &= \frac{3}{8} \xi^3 \sqrt{1-e^2} (4 - 5\tilde{\mu}) \sin i \left(\frac{\sin \omega}{e} - 4e \sin \omega \right); \\ \varphi_4 &= \frac{15}{64} \xi^4 \sqrt{1-e^2} (-6\tilde{\mu} + 7\tilde{\mu}^2) (2 - 5e^2) \cos 2\omega; \\ \varphi_5 &= \frac{15}{256} \xi^5 \sin i \sqrt{1-e^2} \left[-(64 - 224\tilde{\mu} + 168\tilde{\mu}^2) \frac{\sin \omega}{e} - \right. \\ &\left. - 17(8 - 28\tilde{\mu} + 21\tilde{\mu}^2) e \sin \omega + (56\tilde{\mu} - 63\tilde{\mu}^2) e \sin 3\omega \right].\end{aligned}$$

В формулах (12.60)–(12.70) обозначено

$$\xi = \frac{R_3}{p}; \quad \tilde{\mu} = \sin^2 i.$$

При одновременном вычислении возмущений порядка c_{20}^2 и c_{20} в формулах (12.54), (12.55), (12.56) необходимо использовать в качестве начальных значения оскулирующих элементов в точке $u_0=0$.

Перечисленные выше формулы целесообразно применять при прогнозировании эллиптических орбит.

Для орбит, близких к круговым, наряду с приведенными формулами для возмущений в элементах a , i , Ω могут использоваться возмущения в элементах $l=e \cos \omega$ и $h=e \sin \omega$, усредненные уравнения для которых выражаются через приведенные возмущения элементов e и ω :

$$dl/dN = \cos \omega de/dN - e \sin \omega d\omega/dN = \cos \omega \delta e (2\pi) - e \sin \omega \delta \omega (2\pi); \quad (12.71)$$

$$dh/dN = \sin \omega de/dN + e \cos \omega d\omega/dN = \sin \omega \delta e (2\pi) + e \cos \omega \delta \omega (2\pi). \quad (12.72)$$

Возмущения за один виток элементов l и h :

$$\delta l (2\pi) = dl/dN - \frac{9\pi^2 c_{20}^2}{8} (5\tilde{\mu} - 4)^2 l;$$

$$\delta h (2\pi) = dh/dN - \frac{9\pi^2 c_{20}^2}{8} (5\tilde{\mu} - 4)^2 h.$$

Возмущения за один виток в элементах $\bar{a}=a/R_3$ и T_2 через возмущения элементов l и h (отброшены члены порядка $c_{20}^3 e$):

$$\delta \bar{a} = -\frac{3c_{20}(1+l)^2}{\bar{a}(1-h^2-l^2)^4} [(1+2l+l^2-h^4) \delta l + 2h(1+l) \delta h];$$

$$\delta T_2 = \frac{3T_{\text{оск}} c_{20} (4-5\tilde{\mu})}{4\bar{a}^2 (1-h^2-l^2)^2 (1+l)^3} [h(1+l) \delta h - (2-l-3l^2-2h^2) \delta l].$$

Возмущения от секториальной гармоники c_{22} , d_{22} :

$$\delta a (2\pi) = \delta e (2\pi) = 0;$$

$$\delta l (2\pi) = 3 \frac{n}{2\omega_3} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 \sin i [c_{22} (\cos 2l - \cos 2l_0) - d_{22} (\sin 2l - \sin 2l_0)];$$

$$\delta \Omega (2\pi) = 3 \frac{n}{2\omega_3} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 \cos i [c_{22} (\sin 2l - \sin 2l_0) + d_{22} (\cos 2l - \cos 2l_0)];$$

$$\delta \omega (2\pi) = \frac{3n}{4\omega_3} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 (-2 + 5\tilde{\mu}) [c_{22} (\sin 2l - \sin 2l_0) + d_{22} (\cos 2l - \cos 2l_0)];$$

$$\delta M_0 (2\pi) = \frac{9}{2} \frac{n}{2\omega_3} \left(\frac{R_3}{p} \right)^2 \tilde{\mu} [c_{22} (\sin 2l - \sin 2l_0) + d_{22} (\cos 2l - \cos 2l_0)],$$

где

$$l = s_r - \Omega;$$

$$\tilde{\mu} = \sin^2 i.$$

(12.73)

12.2.4. Вековые и долгопериодические возмущения, порождаемые сопротивлением атмосферы

Ниже приведены возмущения при сферондальной невращающейся атмосфере, которые учитывают также влияние отклонения траектории от эллипса, порождаемое действием второй зональной гармоники:

$$\delta a (2\pi) = -4\pi (s_{0n} p) \frac{a^2}{p} \exp(-z) \left\{ I_0(z) + 2eI_1(z) + \frac{3}{4} e^2 [I_0(z) + I_2(z)] + \right. \\ \left. + \dots - \frac{A}{H} \cos \omega [I_0(z) - I_1(z)] - \frac{B}{H} \cos 2\omega [I_0(z) - I_2(z)] \right\};$$

$$\delta l (2\pi) = -4\pi (s_{0n} p) \exp(-z) \left\{ I_1(z) + \frac{1}{2} e [I_0(z) + I_2(z)] + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} e^2 [3I_1(z) + I_3(z)] + \dots \Big\} \cos \omega - \frac{A}{2H} \cos \omega [-I_0(z) + 2 \cos 2\omega I_1(z) - \\
& - \cos 2\omega I_2(z)] - \frac{B}{2H} \cos 3\omega [I_1(z) - I_3(z)] \Big\}; \\
\delta h(2\pi) = & -4\pi (sQ_n p) \exp(-z) \Big\{ \Big(I_1(z) + \frac{1}{2} e [I_0(z) + I_2(z)] + \\
& + \frac{1}{8} e^2 [3I_1(z) + I_3(z)] + \dots \Big\} \sin \omega - \frac{A}{2H} \sin 2\omega [I_1(z) - I_2(z)] - \\
& - \frac{B}{2H} \sin 3\omega [I_1(z) - I_3(z)] \Big\}; \\
\delta T_{\Sigma}(2\pi) = & \frac{3}{2} T_{\Sigma} \frac{\delta a(2\pi)}{a}.
\end{aligned}$$

Здесь

Q_n — плотность атмосферы в перигее;

$$z = \frac{ae}{H};$$

H — высота однородной атмосферы,

$I_0(z)$, $I_1(z)$, $I_2(z)$, ... — функции Бесселя мнимого аргумента соответственно порядка 0, 1, 2, ... ,

$$I_n(z) = \frac{(z/2)^n}{\Gamma(n+1)} + \frac{(z/2)^{n+2}}{1! \Gamma(n+2)} + \frac{(z/2)^{n+4}}{2! \Gamma(n+3)} + \dots$$

Для вычисления $I_n(z)$ при $z \gg 1$ могут быть использованы асимптотические формулы:

$$\begin{aligned}
I_0(z) &= \frac{\exp z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 + \frac{1}{8z} + \dots \right); & I_1(z) &= \frac{\exp z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 - \frac{3}{8z} + \dots \right); \\
I_2(z) &= \frac{\exp z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 - \frac{15}{8z} + \dots \right); & I_3(z) &= \frac{\exp z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 - \frac{35}{8z} + \dots \right).
\end{aligned}$$

Слагаемые, содержащие величины A и B , характеризуют влияние сжатия Земли и отклонения гравитационного поля от центрального на возмущения элементов от атмосферы:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{3}{2} c_{20} a \left(1 - \frac{2}{3} \sin^2 i \right); \\
B &= \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{2} c_{20} \right) a \sin^2 i,
\end{aligned}$$

где α — сжатие атмосферы (Земли).

Относительная величина этих слагаемых тем больше, чем меньше эксцентриситет, и достигает 32% для круговых орбит. Погрешность приведенных выражений имеет порядок $10^{-2} \delta a(2\pi)$.

В тех случаях, когда величина $\delta T_{\Sigma}(2\pi)$ определяется при обработке измерений, возмущения элементов a и e можно определить по формулам:

$$\begin{aligned}
\delta a(2\pi) &= \frac{2}{3} \frac{\delta T_{\Sigma}(2\pi)}{T_{\Sigma}} a; \\
\delta e(2\pi) &= \frac{2}{3} \frac{\delta T_{\Sigma}(2\pi)}{T_{\Sigma}} \left[\frac{eI_0(z) + I_1(z)}{I_0(z)(1+e^2) + 2eI_1(z)} + O\left(\frac{H}{a}\right) \right].
\end{aligned}$$

Величина $\left(\frac{\delta T_{\Sigma}(2\pi)}{T_{\Sigma}} \right) = \epsilon$ может рассматриваться в качестве безразмерного малого

параметра, характеризующего возмущения от атмосферы. Для большинства ИСЗ эта величина не превышает 10^{-5} – 10^{-6} , т. е. имеет такой же порядок, что и c_{20}^2 . В связи с этим короткопериодические возмущения, порождаемые атмосферой, обычно не учитывают.

12.2.5. Связь между аргументом широты и временем при долгосрочном прогнозировании

Связь между аргументом широты и временем при прогнозировании внутри витка изложена выше. В данном разделе изложена методика определения времени пересечения экватора в функции числа витков.

При повитковом суммировании возмущений применяется зависимость

$$t_N = t_0 + \sum_{i=0}^{N-1} T_{\Omega i}.$$

Входящий в это выражение драконический период T_{Ω} определяется на каждом витке по зависимости

$$T_{\Omega i} = T_{\text{оск}0i} [1 + c_{20} \alpha(\varepsilon_i)],$$

где

$$\alpha(\varepsilon_i) = \frac{3}{2} \left(\frac{R_{\varepsilon}}{p_i} \right)^2 \left[\frac{\left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i_i \right) (1 - e_i^2)^{3/2}}{(1 + e_i \cos \omega_i)^2} + \frac{(1 + e_i \cos \omega_i)^3}{1 - e_i^2} \right];$$

$$T_{\text{оск}0i} = 2\pi \frac{a_i^{3/2}}{\sqrt{k^2 m}}.$$

При интегрировании системы усредненных уравнений вида (12.31) связь между числом витков и временем может быть сформулирована следующим образом:

$$t_N = t_0 + \int_0^N T_{\Omega N} dN - \frac{1}{2} (T_{\Omega N} - T_{\Omega 0}) + O(T_{\Omega} \varepsilon^2 N) = t_0 + T_{\Omega 0} N - \frac{1}{2} (T_{\Omega N} - T_{\Omega 0}) + \int_0^N (T_{\Omega N} - T_{\Omega 0}) dN + O(T_{\Omega} \varepsilon^2 N).$$

Для вычисления драконического периода $T_{\Omega N}$ нужно воспользоваться приведенной выше формулой и результатами интегрирования усредненной системы уравнений. При определении интеграла удобно применить разложение

$$T_{\Omega N} - T_{\Omega 0} = \frac{T_{\Omega 0}}{1 + c_{20} \alpha(\varepsilon_0)} \left\{ \frac{3}{2} \frac{a_N - a_0}{a_0} + \frac{3}{8} \left(\frac{a_N - a_0}{a_0} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{a_N - a_0}{a_0} \right)^3 + c_{20} [\alpha(\varepsilon_N) - \alpha(\varepsilon_0)] + \frac{3}{2} \frac{a_N - a_0}{a_0} c_{20} \alpha(\varepsilon_N) \right\}.$$

Так как правая часть выражения для $T_{\Omega i}$ является медленно меняющейся функцией числа витков, то вычисление интеграла $\int_0^N (T_{\Omega N} - T_{\Omega 0}) dN$ может быть выполнено с применением большого шага по N (несколько десятков витков). Этим достигается определенная экономия машинного времени по сравнению с повитковым суммированием.

Удобство применения приведенного выражения для t_N связано также с тем, что величина $T_{\Omega 0}$ обычно включается в число уточняемых при обработке измерений параметров. В этом случае погрешности формулы меньше сказываются на величине t_N .

12.2.6. Алгоритмы, построенные с использованием метода усреднений

1. Почти круговые орбиты [16]

Расчет элементов орбиты в восходящем узле любого N -го витка производится по начальным условиям

$$l_0 = e_0 \cos \omega_0; \quad h_0 = e_0 \sin \omega_0; \quad i_0, \Omega_0; \quad a_0; \quad T_{\Omega 0}; \quad t_{\Omega 0},$$

заданным для начала N_0 -го витка, и по выбранным значениям коэффициентов зональных гармоник c_{n0} . Элементы l, h, Ω, i рассчитываются с точностью до c_{20}^2 и

c_{n0} ($3 \leq n \leq 6$). В соотношениях для $T_{\mathfrak{Q}}$, $t_{\mathfrak{Q}}$ и a отброшены члены порядка $c_{20}^2 e$. Вид решения зависит от соотношения величин B и C :

$$B = \frac{3\pi}{2\bar{p}^2} (5\tilde{\mu} - 4) c_{20} + \frac{3\pi}{32\bar{p}^4} (380\tilde{\mu} - 445\tilde{\mu}^2) c_{20}^2 + \frac{15\pi}{16\bar{p}^4} (16 - 62\tilde{\mu} + 49\tilde{\mu}^2) c_{40} + \\ + \frac{105\pi}{256\bar{p}^6} (-64 + 512\tilde{\mu} - 1032\tilde{\mu}^2 + 594\tilde{\mu}^3) c_{60}; \quad (12.74)$$

$$C = \frac{3\pi}{16\bar{p}^4} (-48 + 46\tilde{\mu} + 15\tilde{\mu}^2) c_{20}^2 + \frac{15\pi}{16\bar{p}^4} (6\tilde{\mu} - 7\tilde{\mu}^2) c_{40} + \\ + \frac{105\pi}{256\bar{p}^6} (-80\tilde{\mu} + 240\tilde{\mu}^2 - 165\tilde{\mu}^3) c_{60}. \quad (12.75)$$

При условии $B^2 > C^2$

$$l = \frac{(B+C)l_0 + A}{B+C} \cos[\sqrt{B^2 - C^2}(N - N_0)] - \frac{(B-C)h_0 - D}{\sqrt{B^2 - C^2}} \times \\ \times \sin[\sqrt{B^2 - C^2}(N - N_0)] - \frac{A}{B+C}; \quad (12.77)$$

$$h = \frac{(B-C)h_0 - D}{B-C} \cos[\sqrt{B^2 - C^2}(N - N_0)] + \frac{(B+C)l_0 + A}{\sqrt{B^2 - C^2}} \times \\ \times \sin[\sqrt{B^2 - C^2}(N - N_0)] + \frac{D}{B-C}; \quad (12.78)$$

$$T_{\mathfrak{Q}} = T_{\mathfrak{Q}0} + \frac{3c_{20}T_{\text{окк}}(5\tilde{\mu} - 4)}{2\bar{a}^2} \left[(l - l_0) - \frac{7}{4}(l^2 - l_0^2) - \frac{1}{4}(h^2 - h_0^2) \right]; \quad (12.79)$$

$$t_{\mathfrak{Q}} = t_{\mathfrak{Q}0} + T_{\mathfrak{Q}0}(N - N_0) - \frac{3c_{20}T_{\text{окк}}(5\tilde{\mu} - 4)}{2\bar{a}^2} \left\{ \frac{A}{B+C} + \frac{7}{8} \left[\frac{(B+C)l_0 + A}{B+C} \right]^2 + \right. \\ + \frac{7}{8} \left[\frac{(B-C)h_0 - D}{\sqrt{B^2 - C^2}} \right]^2 + \frac{7}{4} \left(\frac{A}{B+C} \right)^2 + \frac{1}{8} \left[\frac{(B-C)h_0 - D}{B-C} \right]^2 + \\ + \frac{1}{8} \left[\frac{(B+C)l_0 + A}{\sqrt{B^2 - C^2}} \right]^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{D}{B-C} \right)^2 + l_0 - \frac{7}{4}l_0^2 - \frac{1}{4}h_0^2 \left. \right\} (N - N_0) + \\ + \frac{3c_{20}T_{\text{окк}}(5\tilde{\mu} - 4)}{2\bar{a}^2} \left\{ (h - h_0) \left[\frac{1}{B+C} + \frac{21A}{8(B+C)^2} + \frac{A}{8(B^2 - C^2)} \right] + \right. \\ + (l - l_0) \left[\frac{7D}{8(B^2 - C^2)} + \frac{3D}{8(B-C)^2} \right] + \\ + (hl - h_0l_0) \left[-\frac{7}{8(B+C)} + \frac{1}{8(B-C)} \right] \left. \right\}, \quad (12.80)$$

$$\bar{a} = \bar{a}_0 - \frac{c_{20}}{\bar{a}_0} [3(l - l_0) + 6(l^2 - l_0^2) + 3(h^2 - h_0^2)], \quad (12.81)$$

$$i = i_0 - (l - l_0) \left[\frac{Hi}{B-C} - \frac{AHht}{(B-C)(B+C)} \right] + (h - h_0) \frac{Li}{B+C} + (h^2 - h_0^2) \frac{Hht}{2(B+C)}, \quad (12.82)$$

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0 + \left[K_{\mathfrak{Q}} + \frac{1}{2} H_{\mathfrak{Q}2} \left(h_0^2 + \frac{B+C}{B-C} l_0^2 \right) + \frac{1}{2} L_{\mathfrak{Q}2} \left(l_0^2 + \frac{B-C}{B+C} h_0^2 \right) \right] (N - N_0) + \\ + (l - l_0) \left[-\frac{H_{\mathfrak{Q}}}{B-C} - \frac{3H_{\mathfrak{Q}2}D}{2(B-C)^2} - \frac{L_{\mathfrak{Q}2}D}{2(B^2 - C^2)} \right] + \\ + (h - h_0) \left[\frac{L_{\mathfrak{Q}}}{B+C} - \frac{H_{\mathfrak{Q}2}A}{2(B^2 - C^2)} - \frac{3L_{\mathfrak{Q}2}A}{2(B+C)^2} \right] + \\ + (hl - h_0l_0) \left[-\frac{H_{\mathfrak{Q}2}}{2(B-C)} + \frac{L_{\mathfrak{Q}2}}{2(B+C)} \right]; \quad (12.83)$$

$$e = \sqrt{l^2 + h^2}; \quad (12.84)$$

$$\omega = \text{Arc tg } \frac{h}{l}. \quad (12.85)$$

При условии

$$B^2 < C^2 \quad (12.86)$$

$$l = \frac{(C+B)l_0 + A}{C+B} \text{ch} [\sqrt{C^2 - B^2}(N - N_0)] + \frac{(C-B)h_0 + D}{\sqrt{C^2 - B^2}} \times \\ \times \text{sh} [\sqrt{C^2 - B^2}(N - N_0)] - \frac{A}{C+B}; \quad (12.87)$$

$$h = \frac{(C-B)h_0 + D}{C-B} \text{ch} [\sqrt{C^2 - B^2}(N - N_0)] + \\ + \frac{(C+B)l_0 + A}{\sqrt{C^2 - B^2}} \text{sh} [\sqrt{C^2 - B^2}(N - N_0)] - \frac{D}{C-B}; \quad (12.88)$$

$$t_{\Sigma} = t_{\Sigma 0} + T_{\Sigma 0}(N - N_0) - \frac{3c_{20}T_{\text{ск}}(5\tilde{\mu} - 4)}{2\bar{a}^2} \left\{ \frac{7}{8} \left[\frac{(C+B)l_0 + A}{C+B} \right]^2 - \right. \\ - \frac{7}{8} \left[\frac{(C-B)h_0 + D}{\sqrt{C^2 - B^2}} \right]^2 + \frac{7}{4} \left(\frac{A}{C+B} \right)^2 + \frac{1}{8} \left[\frac{(C-B)h_0 + D}{C-B} \right]^2 - \\ - \frac{1}{8} \left[\frac{(C+B)l_0 + A}{\sqrt{C^2 - B^2}} \right]^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{D}{C-B} \right)^2 + l_0 - \frac{7}{4}l_0^2 - \frac{1}{4}h_0^2 + \frac{A}{C+B} \bigg\} (N - N_0) + \\ + \frac{3c_{20}T_{\text{оск}}(5\tilde{\mu} - 4)}{2\bar{a}^2} \left\{ (h - h_0) \left[\frac{1}{C+B} + \frac{21A}{8(C+B)^2} - \frac{A}{8(C^2 - B^2)} \right] + \right. \\ + (l - l_0) \left[-\frac{7D}{8(C^2 - B^2)} + \frac{3D}{8(C-B)^2} \right] + \\ \left. + (hl - h_0l_0) \left[-\frac{7}{8(C+B)} - \frac{1}{8(C-B)} \right] \right\}. \quad (12.89)$$

Величины T_{Σ} , $\bar{a}$, ω , e , i , Ω вычисляются по формулам (12.79), (12.81—12.85).

При условии

$$B = C \quad (12.90)$$

$$l = l_0 + D(N - N_0); \quad (12.91)$$

$$h = h_0 + (A + 2Cl_0)(N - N_0); \quad (12.92)$$

$$t_{\Sigma} = t_{\Sigma 0} + T_{\Sigma 0}(N - N_0) + \frac{3c_{20}T_{\text{оск}}(5\tilde{\mu} - 4)}{4\bar{a}^2} D(N - N_0)^2; \quad (12.93)$$

$$\Omega = \Omega_0 + (N - N_0)(K_{\Sigma} + H_{\Sigma}h_0 + L_{\Sigma}l_0 + H_{\Sigma 2}h_0^2 + L_{\Sigma 2}l_0^2); \quad (12.94)$$

$$i = i_0 + (N - N_0)(H_i h_0 + L_i l_0 + H_{il} l_0 h_0). \quad (12.95)$$

Для расчета T_{Σ} и $\bar{a}$ используются соотношения (12.79) и (12.81).

При условии

$$B = -C \quad (12.96)$$

$$l = l_0 + (D + 2Ch_0)(N - N_0); \quad (12.97)$$

$$h = h_0 + A(N - N_0). \quad (12.98)$$

Величины t_{Σ} , T_{Σ} , $\bar{a}$, i , Ω рассчитываются по формулам (12.93), (12.79), (12.81), (12.94), (12.95).

В приведенных соотношениях обозначено:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{3\pi}{4\bar{p}^4} (5\tilde{\mu} - 4)(3 - 2\tilde{\mu}) c_{20}^2; \\ D &= \frac{3\pi \sin i}{4\bar{p}^3} (4 - 5\tilde{\mu}) c_{30} + \frac{15\pi \sin i}{16\bar{p}^5} (-8 + 28\tilde{\mu} - 21\tilde{\mu}^2) c_{50}; \\ K_{\Sigma} &= \frac{3\pi}{\bar{p}^2} \left[c_{20} + \frac{3 - 20\tilde{\mu}}{4\bar{p}^2} c_{20}^2 + \frac{35(7\tilde{\mu} - 4)}{56\bar{p}^2} c_{40} + \right. \end{aligned} \right\} \quad (12.99)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{35(8 - 36\tilde{\mu} + 33\tilde{\mu}^2)}{64\bar{p}^4} c_{60} \Big] \cos i; \\
H_{\Sigma} &= \frac{3\pi}{4\bar{p}^3} \left[(15\tilde{\mu} - 4) c_{30} + \frac{5(8 - 84\tilde{\mu} + 105\tilde{\mu}^2)}{4\bar{p}^2} c_{70} \right] \operatorname{ctg} i; \\
L_{\Sigma} &= \frac{6\pi(2 - 5\tilde{\mu}) \cos i}{\bar{p}^4} c_{20}^2; \\
H_i &= \frac{3\pi \sin 2i}{4\bar{p}^4} (5\tilde{\mu} - 4) c_{20}^2; \\
L_i &= \frac{3\pi \cos i}{4\bar{p}^3} \left[(5\tilde{\mu} - 4) c_{30} + \frac{5(8 - 28\tilde{\mu} + 21\tilde{\mu}^2)}{4\bar{p}^2} c_{50} \right]; \\
H_a &= \frac{9\pi}{2\bar{p}^3} (5\tilde{\mu} - 4) c_{20}^2; \\
H_{\Sigma 2} &= \frac{15\pi \cos i}{16\bar{p}^4} \left[c_{20}^2(2 - 7\tilde{\mu}) - c_{40}(18 - 35\tilde{\mu}) + \frac{105c_{60}}{16\bar{p}^2}(16 - 80\tilde{\mu} + 77\tilde{\mu}^2) \right]; \\
L_{\Sigma 2} &= \frac{15\pi \cos i}{16\bar{p}^4} \left[\frac{1}{5} c_{20}^2(-18 + 25\tilde{\mu}) - c_{40}(6 - 7\tilde{\mu}) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{35c_{60}}{16\bar{p}^2}(16 - 48\tilde{\mu} + 33\tilde{\mu}^2) \right]; \\
H_{hl} &= \frac{3\pi \sin 2i}{16\bar{p}^4} \left[(14 - 15\tilde{\mu}) c_{20}^2 - (30 - 35\tilde{\mu}) c_{40} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{35c_{60}}{16\bar{p}^2}(80 - 240\tilde{\mu} + 165\tilde{\mu}^2) \right]; \\
\bar{a} &= \frac{a}{R_s}; \quad \bar{p} = \bar{a}(1 - e^2); \quad \tilde{\mu} = \sin^2 i; \\
T_{\text{оск}} &= \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{k^2 m}}.
\end{aligned} \tag{12.99}$$

Постоянные (12.74), (12.75), (12.99) рассчитываются по начальным условиям движения.

Условие $B^2 > C^2$ выполняется для всех наклонений, кроме интервалов протяженностью менее $1'$ в окрестности критических наклонений.

При $|B| = |C|$ и $B^2 < C^2$ расчет по соответствующим формулам следует вести только до выхода наклонения из интервала вековых изменений элементов орбиты [границы интервала определяются соотношениями (12.90) и (12.96)]. После этого нужно переходить к формулам для случая $B^2 > C^2$.

2. Эллиптические орбиты

Соотношения (12.59)–(12.68) можно рассматривать как систему усредненных уравнений второго приближения и записать их в виде

$$\frac{d\vartheta_i}{dN} = \bar{\delta}\vartheta_{i1} + \bar{\delta}\vartheta_{i2} + \tilde{\delta}\vartheta_{i2} \quad (\vartheta_i = \Omega, \omega, e, i, a), \tag{12.100}$$

где

$$\tilde{\delta}\vartheta_{i2} = \begin{cases} \sum_{j=1}^4 \bar{f}_{ij}^{(k)} \sin j\omega; \\ \sum_{j=1}^4 \bar{\bar{f}}_{ij}^{(k)} \cos j\omega; \end{cases} \tag{12.101}$$

$\bar{f}_{ij}^{(k)}$, $\bar{\bar{f}}_{ij}^{(k)}$ — коэффициенты при $\sin j\omega$ и $\cos j\omega$ в выражении для долгопериодического возмущения i -го элемента, обусловленного влиянием k -го фактора (c_{20}^2 , c_{30} , c_{40} , c_{50} , c_{60}).

Легко заметить, что в пределах точности исходных соотношений решение системы (12.100) будет следующим:

$$\begin{aligned} \vartheta_i = \vartheta_{i0} + (\bar{\delta}\vartheta_{i1} + \bar{\delta}\vartheta_{i2})(N - N_0) + \int_{N_0}^N \bar{\delta}\vartheta_{i2} dN = \vartheta_{i0} + (\bar{\delta}\vartheta_{i1} + \bar{\delta}\vartheta_{i2})(N - N_0) + \\ + \frac{1}{\bar{\delta}\omega_1 + \bar{\delta}\omega_2} \int_{\omega_0}^{\omega} \bar{\delta}\vartheta_{i2} d\omega = \vartheta_{i0} + (\bar{\delta}\vartheta_{i1} + \bar{\delta}\vartheta_{i2})(N - N_0) + \\ + \left\{ \frac{1}{\bar{\delta}\omega_1 + \bar{\delta}\omega_2} \sum_{j=1}^4 \left[-\frac{\bar{f}_{ij}^{(k)}}{j} (\cos j\omega - \cos j\omega_0) \right]; \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{\bar{\delta}\omega_1 + \bar{\delta}\omega_2} \sum_{j=1}^4 \left[\frac{\bar{f}_{ij}^{(k)}}{j} (\sin j\omega - \sin j\omega_0) \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12.102)$$

Для расчета драконического периода $T_{\mathcal{Q}}$ и времени начала витка $t_{\mathcal{Q}}$ по заданным $T_{\mathcal{Q}0}$ и $t_{\mathcal{Q}0}$ можно воспользоваться тем, что

$$T_{\mathcal{Q}} = T_{\mathcal{Q}0} + \int_{N_0}^N \frac{dT_{\mathcal{Q}}}{dN} dN; \quad (12.103)$$

$$t_{\mathcal{Q}} = t_{\mathcal{Q}0} + \int_{N_0}^N T_{\mathcal{Q}} dN - \frac{1}{2} (T_{\mathcal{Q}} - T_{\mathcal{Q}0}). \quad (12.104)$$

На основании формулы (12.50) и выражения для интеграла энергии найдем $\frac{dT_{\mathcal{Q}}}{dN}$ и после интегрирования получим

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{Q}} = T_{\mathcal{Q}0} + \frac{3c_{20}T_{\text{оск}}(4 - 5\tilde{\mu})}{4\bar{a}^2(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \left[\frac{1}{(1 + e \cos \omega)^2} - \frac{1}{(1 + e \cos \omega_0)^2} \right]; \quad (12.105) \\ t_{\mathcal{Q}} = t_{\mathcal{Q}0} + T_{\mathcal{Q}0}(N - N_0) + \frac{3c_{20}T_{\text{оск}}(5\tilde{\mu} - 4)}{4\bar{a}^2(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}(1 + e \cos \omega_0)^2} (N - N_0) + \\ + \frac{3c_{20}T_{\text{оск}}(5\tilde{\mu} - 4)}{4\bar{a}^2(1 - e^2)^{\frac{3}{2}}(\bar{\delta}\omega_1 + \bar{\delta}\omega_2)} \left[\frac{e \sin \omega}{1 + e \cos \omega} - \frac{e \sin \omega_0}{1 + e \cos \omega_0} - \right. \\ \left. - \frac{2}{(1 - e^2)^{\frac{1}{2}}} \left(\arctg \frac{\sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2}}{1 + e} - \arctg \frac{\sqrt{1 - e^2} \operatorname{tg} \frac{\omega_0}{2}}{1 + e} \right) \right] - \frac{1}{2} (T_{\mathcal{Q}} - T_{\mathcal{Q}0}). \end{aligned} \quad (12.106)$$

При расчетах по приведенным в данном разделе формулам значения элементов a, e, i в правых частях этих формул следует принимать равными их начальным значениям. Для получения значений элементов орбиты в пределах витка в соотношениях (12.77)–(12.85), (12.87)–(12.89), (12.91)–(12.95), (12.97), (12.98), (12.102), (12.105), (12.106) следует положить

$$N = \frac{u}{2\pi}$$

и воспользоваться зависимостью (12.32) и приведенными ранее формулами (12.33)–(12.49).

12.2.7. Возмущения, обусловленные гравитационным влиянием Луны и Солнца

Расчет возмущений элементов орбиты за один виток можно провести по формулам [18]

$$\delta^{(k)} \varepsilon_i(2\pi) = \delta_{11}^{(k)} \varepsilon_i + \delta_{12}^{(k)} \varepsilon_i + \delta_{21}^{(k)} \varepsilon_i \quad (\varepsilon_i = a, e, i, \Omega, \omega), \quad (12.107)$$

где k — индекс, соответствующий k -му возмущающему телу ($k=1, 2$). Первый нижний индекс указывает на учитываемое приближение в разложении возмущающего ускорения в ряд по степеням отношения расстояния от центрального тела до ИСЗ к расстоянию от центрального тела до возмущающего тела. Второй индекс связан с тем или иным предположением относительно степени учета движения возмущающего тела.

Слагаемые (12.107) рассчитываются по формулам

$$\begin{aligned} \delta_{11}a &= 0; \quad \delta_{11}e = -15\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 e \varepsilon^{1.2} \beta_3; \\ \delta_{11}i &= 15\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \left[\left(1 - \frac{4}{5} \varepsilon\right) \beta_5 \cos \omega - \frac{1}{5} \varepsilon \beta_4 \sin \omega \right]; \\ \delta_{11}\Omega &= 15\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \frac{1}{\varepsilon^{1/2} \sin i} \left[\left(1 - \frac{4}{5} \varepsilon\right) \beta_5 \sin \omega + \frac{1}{5} \varepsilon \beta_4 \cos \omega \right]; \\ \delta_{11}\omega &= 3\pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \varepsilon^{\frac{1}{2}} [4\beta_1 - \beta_2 - \beta_6] - \delta_{11}\Omega \cos i; \\ \delta_{12}a &= -\frac{3}{2} \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 a T_{\text{оск}} \left[(e+4) \left(\frac{d\beta_2}{dt} - \frac{1}{3} \frac{d\beta_6}{dt} \right) + (2e^2 + 4e - 1) \left(\frac{d\beta_1}{dt} - \frac{d\beta_2}{dt} \right) \right]; \\ \delta_{12}e &= -3 \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \varepsilon T_{\text{оск}} \left[\frac{e+4}{4} \left(\frac{d\beta_2}{dt} - \frac{1}{3} \frac{d\beta_6}{dt} \right) + \left(\frac{1}{8} e - \frac{1}{3} \right) \left(\frac{d\beta_1}{dt} - \frac{d\beta_2}{dt} \right) \right]; \\ \delta_{12}i &= \frac{9}{8} \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 T_{\text{оск}} \left(e^2 + \frac{32}{9} e - \frac{2}{3} \right) \left[\frac{d\beta_4}{dt} \cos \omega - \frac{d\beta_5}{dt} \sin \omega \right]; \\ \delta_{12}\Omega &= \frac{9}{8} \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \frac{T_{\text{оск}}}{\sin i} \left(e^2 + \frac{32}{9} e - \frac{2}{3} \right) \left[\frac{d\beta_5}{dt} \cos \omega + \frac{d\beta_4}{dt} \sin \omega \right]; \\ \delta_{12}\omega &= -3 \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^3 \frac{T_{\text{оск}}}{e} \left(\frac{9}{8} e^3 + \frac{8}{3} e^2 - e - \frac{4}{3} \right) \frac{d\beta_3}{dt} - \cos i \delta_{12}\Omega; \\ \delta_{21}a &= 0; \\ \delta_{21}e &= \frac{525}{8} \pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^4 \varepsilon^{\frac{1}{2}} \left[\left(1 - \frac{6}{7} \varepsilon\right) \gamma_3 + \frac{\varepsilon}{7} \gamma_2 - \left(1 - \frac{3}{7} \varepsilon\right) \frac{\alpha_2}{5} \right]; \\ \delta_{21}i &= -\frac{525}{8} \pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^4 \frac{e}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}} \left[\left(1 - \frac{4}{7} \varepsilon\right) \gamma_1 \cos \omega + \frac{1}{7} \varepsilon (\gamma_5 \cos \omega - 2\gamma_7 \sin \omega) - \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - \frac{3}{7} \varepsilon\right) \frac{1}{5} \alpha_3 \cos \omega \right]; \\ \delta_{21}\Omega &= -\frac{525}{8} \pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^4 \frac{e}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} \sin i} \left[\left(1 - \frac{4}{7} \varepsilon\right) \gamma_4 \sin \omega + \frac{1}{7} \varepsilon (\gamma_5 \sin \omega + \right. \\ &\quad \left. + 2\gamma_7 \cos \omega) - \left(1 - \frac{3}{7} \varepsilon\right) \frac{1}{5} \alpha_3 \sin \omega \right]; \\ \delta_{21}\omega &= -\frac{75}{2} \pi \frac{\mu_k}{\mu} \left(\frac{a}{p_k}\right)^4 \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{e} \left[\frac{5}{4} \left(1 - \frac{4}{5} \varepsilon\right) \gamma_4 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} \varepsilon\right) \gamma_6 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{13}{20} \left(1 - \frac{9}{13} \varepsilon\right) \alpha_1 \right] - \delta_{21}\Omega \cos i. \end{aligned}$$

Здесь

$$\alpha = D_1 U_1 \Delta_k^4;$$

$$\beta = D_2 U_2 \Delta_k^3; \quad \beta_6 = \Delta_k^3; \quad \gamma = D_3 U_3 \Delta_k^4;$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix}; \quad \beta = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{vmatrix}; \quad \gamma = \begin{vmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5 \\ \gamma_6 \\ \gamma_7 \end{vmatrix};$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{vmatrix}; \quad D_1 = CBA;$$

$$A = \begin{vmatrix} \cos \Omega_k & -\sin \Omega_k \cos i_k \\ \sin \Omega_k & \cos \Omega_k \cos i_k \\ 0 & \sin i_k \end{vmatrix};$$

$$B = \begin{vmatrix} \cos \Omega & \sin \Omega & 0 \\ -\sin \Omega \cos i & \cos \Omega \cos i & \sin i \\ \sin \Omega \sin i & -\cos \Omega \sin i & \cos i \end{vmatrix};$$

$$C = \begin{vmatrix} \cos \omega & \sin \omega & 0 \\ -\sin \omega & \cos \omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix};$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} d_{11}^2 & 2d_{11}d_{12} & d_{12}^2 \\ d_{21}^2 & 2d_{21}d_{22} & d_{22}^2 \\ d_{11}d_{21} & d_{11}d_{22} + d_{12}d_{21} & d_{12}d_{22} \\ d_{31}d_{21} & d_{31}d_{22} + d_{32}d_{21} & d_{32}d_{22} \\ d_{11}d_{31} & d_{12}d_{31} + d_{11}d_{32} & d_{12}d_{32} \end{vmatrix};$$

$$D_3 =$$

$$= \begin{vmatrix} d_{11}^3 & 3d_{11}^2d_{12} & 3d_{11}d_{12}^2 & d_{12}^3 \\ d_{21}^3 & 3d_{21}^2d_{22} & 3d_{21}d_{22}^2 & d_{22}^3 \\ d_{11}^2d_{21} & d_{22}d_{11}^2 + 2d_{11}d_{21}d_{12} & d_{21}d_{12}^2 + 2d_{11}d_{12}d_{22} & d_{12}^2d_{22} \\ d_{11}^2d_{31} & d_{32}d_{11}^2 + 2d_{11}d_{31}d_{12} & d_{31}d_{12}^2 + 2d_{11}d_{12}d_{32} & d_{12}^2d_{32} \\ d_{21}^2d_{31} & d_{32}d_{21}^2 + 2d_{21}d_{31}d_{22} & d_{31}d_{22}^2 + 2d_{21}d_{22}d_{32} & d_{22}^2d_{32} \\ d_{21}^2d_{11} & d_{12}d_{21}^2 + 2d_{11}d_{21}d_{22} & d_{11}d_{22}^2 + 2d_{12}d_{21}d_{22} & d_{12}d_{22}^2 \\ d_{11}d_{21}d_{31} & d_{11}d_{21}d_{32} + d_{11}d_{22}d_{31} + d_{12}d_{21}d_{31} & d_{11}d_{22}d_{32} + d_{12}d_{21}d_{32} + d_{12}d_{22}d_{31} & d_{12}d_{22}d_{32} \end{vmatrix}$$

$$U_1 = \begin{vmatrix} \cos u_k \\ \sin u_k \end{vmatrix}; \quad U_2 = \begin{vmatrix} \cos^2 u_k \\ \cos u_k \sin u_k \\ \sin^2 u_k \end{vmatrix}; \quad U_3 = \begin{vmatrix} \cos^3 u_k \\ \cos^2 u_k \sin u_k \\ \cos u_k \sin^2 u_k \\ \sin^3 u_k \end{vmatrix}.$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \left\| \begin{array}{c} \frac{d\beta_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d\beta_5}{dt} \end{array} \right\| = D_2 b \Delta_k^2 \frac{d}{du_k} (U_2 \Delta_k^3);$$

$$\frac{d\beta_6}{dt} = -3e_k b \Delta_k^4 \sin(u_k - \omega_k);$$

$$\frac{d}{du_k} (U_2 \Delta_k^3) = \left\| \begin{array}{c} -2\Delta_k^3 \cos u_k \sin u_k - 3e_k \Delta_k^2 \sin(u_k - \omega_k) \cos^2 u_k \\ \Delta_k^3 \cos 2u_k - 3e_k \Delta_k^2 \sin(u_k - \omega_k) \cos u_k \sin u_k \\ 2\Delta_k^3 \cos u_k \sin u_k - 3e_k \Delta_k^2 \sin(u_k - \omega_k) \sin^2 u_k \end{array} \right\|;$$

$$b = \frac{2\pi}{T_{\text{оск}} k \varepsilon_k^{3/2}}; \quad \Delta_k = 1 + e_k \cos v_k; \quad \varepsilon = 1 - e^2;$$

$$\varepsilon_k = 1 - e_k^2; \quad T_{\text{оск}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} a^{3/2};$$

μ — гравитационная постоянная Земли;
 μ_k — гравитационная постоянная k -го тела;
 $p_k, e_k, \omega_k, \Omega_k, i_k, u_k, v_k, T_{\text{оск } k}$ — элементы орбиты k -го возмущающего тела в момент t_0 .

Для расчета изменения драконического периода можно проварьировать формулу (12.50) и в качестве вариаций элементов орбиты за виток принять значения поправок (12.107).

12.2.8. Методы прогнозирования, основанные на использовании модели двух неподвижных центров

I. Алгоритм на основе точных интегралов движения ИСЗ в нормальном гравитационном поле [14, 15]

Начальные условия задаются в сферической инерциальной системе координат (r_k — расстояние до центра масс Земли,

ψ_k — геоцентрическая широта, q_{3k} — долгота, $v_{1k} = \dot{r}_k$,

$v_{2k} = r_k \dot{\psi}_k$, $v_{3k} = r_k \dot{q}_{3k} \cos \psi_k$ — соответствующие скорости).

1. Расчет текущих декартовых координат x, y, z и времени t :

$$x = \bar{r} \cos q_3; \quad y = \bar{r} \sin q_3; \quad z = \Lambda_1 (-1)^k \sqrt{q_1} \sin \delta \zeta;$$

$$t = \Lambda_2 + k \Lambda_3 + k' \Lambda_4 + \Lambda_5 \Delta M + \Lambda_6 L(\delta \zeta);$$

$$\bar{r} = d \sqrt{(1 + q_1)(1 + q_2)}; \quad q_3 = \Lambda_7 + k \Lambda_8 + k' \Lambda_9 + \Lambda_{10} \Delta S + \Lambda_{11} \Pi(\delta \zeta);$$

$$q_1 = x_1^2 \frac{(1 + (-1)^{k'} \beta \cos \delta \varphi)^2}{(1 + (-1)^{k'} E \cos \delta \varphi)^2}; \quad q_2 = -r_2^2 \sin^2 \delta \zeta;$$

$$k' = k + \Delta k; \quad \Delta k = \frac{\tilde{\mu}}{\pi} \text{ с округлением до ближайшего целого значения};$$

$$\delta \varphi = \tilde{\mu} + \pi(k - k'); \quad \tilde{\mu} = \Lambda_{12} + \Lambda_{13} k + \Lambda_{14} F(\delta \zeta, k_{\eta}) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{q^n}{n(1 + q^{2n})} \sin \frac{n\pi F}{K(k_{\xi})} \right];$$

$$F = \Lambda_{15} + k \Lambda_{16} + \Lambda_{17} F(\delta \zeta, k_{\eta});$$

$$\Delta \theta = \begin{cases} \theta(\delta \varphi) & \text{при } k' \text{ — четном} \\ \theta(\pi + \delta \varphi) - \theta(\pi) & \text{при } k' \text{ — нечетном, } \theta = S, M, \end{cases}$$

где k — число узлов, через которые спутник прошел;

$\delta \zeta$ — угловое расстояние от текущего положения ИСЗ до ближайшего узла орбиты $\left(|\delta \zeta| \leq \frac{\pi}{2} \right)$;

M, S, L, Π, F — эллиптические интегралы, рассчитываемые с помощью рядов [15]. Количество учитываемых членов указанных рядов может выбираться из конкретной потребной точности вычислений (ввиду малости $\delta\varphi$ и $\delta\zeta$ это количество составляет обычно 2 — 3);

$\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_{17}; x_1; \beta; E; \eta_2; q; K(k_\xi); k_\xi; k_{\eta_i}$ — постоянные (их расчет см. в п. 3 и в [14], [15]).

При заданных k' и $\delta\varphi$ в формулах для k' и $\delta\varphi$ нужно заменить везде $k', \delta\varphi, k_\xi, \varphi_k, F_{k_\eta}, q(k_\xi), T_\xi$ соответственно на $k, \delta\zeta, k_{\eta_i}, \zeta_k, F_{k_\xi}, q(k_{\eta_i}), T_{\eta_i}$ и наоборот.

В частном случае орбит ИСЗ при $E=0$ величины q_3, t, q_1 вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} q_3 &= \Lambda_{18} + k\Lambda_{19} + \Lambda_{20}F(\delta\zeta, k_{\eta_i}) + \Lambda_{11}\Pi(\delta\zeta); \\ t &= \Lambda_{21} + k\Lambda_{22} + \Lambda_{23}F(\delta\zeta, k_{\eta_i}) + \Lambda_6L(\delta\zeta), \\ q_1 &= x_1^2, \end{aligned}$$

где $\Lambda_{18}, \Lambda_{19}, \dots, \Lambda_{23}$ — постоянные (их расчет см. ниже, в п. 3).

2. Расчет текущих составляющих v_1, v_2, v_3 вектора скорости в сферической инерциальной системе координат.

$$\begin{aligned} v_1 &= 2(\Phi_1 - \Phi_2)/Q; \quad v_3 = \Lambda_{24}/D; \\ v_2 &= \frac{D(-1)^k}{Q} \left\{ \Lambda_{25} \frac{\cos \delta\zeta \sqrt{q_1(1 - k_{\eta_i}^2 \sin^2 \delta\zeta)}}{1 + q_2} + \frac{2\eta_2 \Phi_1 \sin \delta\zeta}{\sqrt{q_1(1 + q_1)}} \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{где} \quad \Phi_1 = \Lambda_{26}(-1)^{k'} \sin \delta\varphi \frac{(1 + \beta(-1)^{k'} \cos \delta\varphi) \sqrt{1 - k_\xi^2 \sin^2 \delta\varphi}}{(1 + E(-1)^{k'} \cos \delta\varphi)^3};$$

$$\Phi_2 = \Lambda_{27} \sin 2\delta\zeta \sqrt{1 - k_{\eta_i}^2 \sin^2 \delta\zeta};$$

$$Q = d(q_1 - q_2) \sqrt{1 + q_1 + q_2}; \quad D = \sqrt{(1 + q_1)(1 + q_2)};$$

$\Lambda_{24}, \Lambda_{25}, \Lambda_{26}, \Lambda_{27}$ — постоянные (их расчет см. ниже, в разд. 12.33).

3. Расчет постоянных:

$$\Lambda_1 = d\eta_2; \quad \Lambda_2 = t_k - \Lambda_5 M(\varphi_k) - \Lambda_6 L(\zeta_k);$$

$$\Lambda_3 = \Lambda_6 L_k; \quad \Lambda_4 = \Lambda_5 M_k;$$

$$\Lambda_5 = \sqrt{\frac{d^3}{2b_0}} x_1^2 T_\xi; \quad \Lambda_6 = \sqrt{\frac{d^3}{2b_0}} \eta_2^2 T_{\eta_i};$$

$$\Lambda_7 = q_{3k} - \Lambda_{10} S(\varphi_k) - \Lambda_{11} \Pi(\zeta_k); \quad \Lambda_8 = \Lambda_{11} \Pi_k;$$

$$\Lambda_9 = \Lambda_{10} S_k; \quad \Lambda_{10} = -\frac{D_2 T_\xi}{\sqrt{2}(1 + x_1^2)};$$

$$\Lambda_{11} = \frac{D_2}{\sqrt{2}} T_{\eta_i}; \quad \Lambda_{12} = \frac{\pi \Lambda_{15}}{2K(k_\xi)};$$

$$\Lambda_{13} = \pi [\Lambda_{16} 2K(k_\xi) - 1]; \quad \Lambda_{14} = \pi \Lambda_{17} 2K(k_\xi);$$

$$\Lambda_{15} = F(\varphi_k, k_\xi) - \Lambda_{17} F(\zeta_k, k_{\eta_i}); \quad \Lambda_{16} = \Lambda_{17} F_{k_{\eta_i}};$$

$$\Lambda_{17} = T_{\eta_i} T_\xi; \quad \Lambda_{18} = q_{3k} + \Lambda_{11} [F(\zeta_k, k_{\eta_i})/(1 + x_1^2) - \Pi(\zeta_k)];$$

$$\Lambda_{19} = \Lambda_{11} [\Pi_k - F_{k_{\eta_i}}/(1 + x_1^2)]; \quad \Lambda_{20} = -\Lambda_{11}/(1 + x_1^2);$$

$$\Lambda_{21} = t_k - \Lambda_{23} F(\zeta_k, k_{\eta_i}) - \Lambda_6 L(\zeta_k); \quad \Lambda_{22} = \Lambda_{23} F_{k_{\eta_i}} + \Lambda_6 L_k;$$

$$\Lambda_{23} = T_{\eta_i} x_1^2 \sqrt{\frac{d^3}{2b_0}}; \quad \Lambda_{24} = D_2 \sqrt{\frac{b_0 d}{d}};$$

$$\Lambda_{25} = \eta_2 \sqrt{2b_0 d}/T_{\eta_i}; \quad \Lambda_{26} = \sqrt{\frac{b_0 d}{2}} \frac{E x_1 (x_1 - x_2)}{T_\xi};$$

$$\Lambda_{27} = \sqrt{\frac{b_0 d}{8}} \frac{\eta_2^2}{T_{\eta_i}}; \quad F_{k_\xi} = F(l\pi, k_\xi)' l;$$

$$F_{k_{\eta_i}} = F(l\pi, k_{\eta_i})' l; \quad \Omega_k = \Omega(l\pi)' l;$$

$$\Omega = M, \Pi, L, S \quad (l = 1, 2, \dots; l \text{ — фиксируется}).$$

Остальные постоянные величины рассчитываются по формулам, указанным в [14, 15] в тех же обозначениях.

4. Порядок вычислений.

— По заданным начальным условиям движения в сферической инерциальной системе координат r_k, ψ_k, q_{3k} (координаты), v_{1k}, v_{2k}, v_{3k} (составляющие скорости) и t_k (начальное время) определяются постоянные $\xi_k, \eta_k, D_1, D_2, D_3, m, n, s, \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, x_1, x_2, E, \beta, k_\xi^2, T_\xi, \Delta_1, \Delta_2, k_\eta^2, T_\eta, q_{1k}, q_{2k}, \varphi_k, \zeta_k, F(\varphi_k, k_\xi), S(\varphi_k), M(\varphi_k), F(\zeta_k, k_\eta), L(\zeta_k), \Pi(\zeta_k), q(k_\xi), K(k_\xi), F(l\pi), S(l\pi), M(l\pi), F(l\pi, k_\eta), L(l\pi), \Pi(l\pi)$ по зависимостям, изложенным в [14, 15].

— Рассчитываются постоянные $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{27}, F_{k\xi}, F_{k\eta}, L_k, \Pi_k, S_k, M_k$ по формулам п. 3. Вычислять постоянные $F_{k\xi}, F_{k\eta}, L_k, \Pi_k, S_k$ и M_k можно также с помощью следующих числовых рядов:

$$F_{k\xi} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} a_{n\xi}; \quad F_{k\eta} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} a_{n\eta}; \quad L_k = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n\eta} \frac{2n+1}{2n+2} \right);$$

$$a_{n\xi} = \bar{a}_n(k_\xi); \quad a_{n\eta} = \bar{a}_n(k_\eta);$$

$$\bar{a}_n(k) = \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \right)^2 \cdot k^{2n}, \quad \bar{a}_0 = 1;$$

$$\Pi_k = \pi \left[\frac{1}{\sqrt{1-\eta_2^2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\gamma_n \cdot \frac{v_{n-1}}{\gamma_1^{2n}} \right) \right]; \quad \gamma_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2n-1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n};$$

$$v_n = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\eta_2^2}} + \sum_{i=1}^n (\gamma_i \eta_2^{2i}), \quad \eta_2 < 1;$$

$$S_k = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n k_\xi^{2n} (\bar{S}_n^{(0)} + 2E\bar{S}_n^{(1)} + E^2\bar{S}_n^{(2)});$$

$$\bar{S}_n^{(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \bar{D}_{m+k, n}; \quad \gamma_0 = 1;$$

$$\bar{D}_{00} = 1; \quad \bar{D}_{2n+1, m} = 0; \quad n, m = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\bar{D}_{2k, 0} = \gamma_k; \quad k = 1, 2, \dots;$$

$$\bar{D}_{2k, n} = \gamma_k \frac{1}{2(1+k)} \frac{3}{2(2+k)} \dots \frac{2n-1}{2(n+k)}; \quad n = 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$a_0 = 1; \quad a_1 = -\Delta_1; \quad a_m = -\Delta_1 a_{m-1} - \Delta_2 a_{m-2} \quad (m \geq 2);$$

$$M_k = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n k_\xi^{2n} (\bar{M}_n^{(0)} + 2\beta \bar{M}_n^{(1)} + \beta^2 \bar{M}_n^{(2)});$$

при $E \ll 1$:

$$\bar{M}_n^{(k)} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) (-1)^m E^m \bar{D}_{m+k, n};$$

при $E \gg 0$:

$$\bar{M}_0^{(0)} = \frac{1}{(1-E^2)\sqrt{1-E^2}}; \quad \bar{M}_0^{(1)} = -E\bar{M}_0^{(0)};$$

$$\bar{M}_0^{(2)} = \frac{1}{E^2} [1 + (2E^2 - 1)\bar{M}_0^{(0)}]; \quad \bar{M}_n^{(0)} = \bar{M}_{n-1}^{(0)} - \bar{M}_{n-2}^{(2)};$$

$$\bar{M}_n^{(1)} = \frac{1}{E^2} [(1+E^2)\bar{M}_{n-1}^{(1)} + 2E\bar{M}_{n-1}^{(2)}]; \quad \bar{M}_n^{(2)} = \frac{\gamma_n - \bar{M}_n^{(0)} - 2E\bar{M}_n^{(1)}}{E^2},$$

$$n = 1, 2, \dots$$

— Задается номер текущего узла k , в полувитковой окрестности которого требуется рассчитать текущие элементы движения ИСЗ, и величина $\delta\zeta$, равная приближенно угловому расстоянию от текущего положения ИСЗ до заданного (ближайшего) узла орбиты $\left(|\delta\zeta| < \frac{\pi}{2}, \quad \zeta = k\pi + \delta\zeta\right)$.

— По зависимостям пп. 1 и 2 вычисляются искомые элементы движения ИСЗ x, y, z, v_1, v_2, v_3 и t для заданной совокупности независимых переменных.

II. Приближенный алгоритм прогнозирования в нормальном гравитационном поле [23]

Используется система элементов (постоянных интегрирования), несколько отличающаяся от кеплеровой:

$$a, e, s = \sin i, \omega_0, M_0.$$

Расчет прямоугольных геоцентрических координат (ось Oz направлена в полюс мира, плоскость xy совпадает с экваториальной) в момент времени t ведется следующим образом.

1. Определяются постоянные:

$$c = R \sqrt{-c_{20}}; \quad \varepsilon = \frac{c}{a(1-e^2)};$$

$$\bar{e} = e \{1 + \varepsilon^2(1-e^2)(1-2s^2) + \varepsilon^4(1-e^2)[(3-16s^2+14s^4) - 2e^2(1-s^2)^2]\};$$

$$v = \frac{\varepsilon^2}{4}(12-15s^2) + \frac{\varepsilon^4}{64}[(288-1296s^2+1035s^4) - e^2(144+288s^2-510s^4)];$$

$$\bar{\mu} = -\frac{3}{2}\varepsilon^2 \cos i - \frac{3}{16}\varepsilon^4 \cos i (6-17s^2-24e^2s^2);$$

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} \left\{ 1 - \frac{3}{2}\varepsilon^2(1-e^2)(1-s^2) + \frac{3}{8}\varepsilon^4(1-e^2)(1-s^2)[(1+11s^2) - e^2(-5s^2)] \right\};$$

$$\lambda = -\frac{\varepsilon^4}{16}(1-e^2)^{3/2}(24-96s^2-75s^4); \quad n = \frac{\bar{n}}{1-\lambda}.$$

2. По данному t находится M и из решения уравнения Кеплера — координата θ (аналог истинной аномалии)

$$M = n(t-t_0) + M_0; \quad E - \bar{e} \sin E = M; \quad \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\bar{e}}{1-\bar{e}}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}.$$

3. Далее

$$\omega = \omega_0 + v\theta;$$

$$\vartheta = \theta - \varepsilon^2 \frac{s^2}{4}(1+e \cos \theta)^2 \sin 2(\theta + \omega) - \varepsilon^2 e \left[(2-3s^2) + \frac{e}{4}(8-11s^2) \cos \theta \right] \sin \theta;$$

$$u = (1+v)\vartheta + \omega_0;$$

$$\bar{\Omega} = \Omega_0 + \bar{\mu}\vartheta + d_1 \sin \vartheta + d_2 \sin 2\vartheta + d_3 \sin 3\vartheta + d_4 \sin 4\vartheta + \bar{d}_2 \sin 2u,$$

где

$$d_1 = -2\varepsilon^2 e \cos i \left\{ 1 + \frac{\varepsilon^2}{16} [(8-56s^2) - e^2(12+13s^2)] \right\};$$

$$d_2 = -\frac{\varepsilon^2 e^2}{4} \cos i \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{4} [(22-2s^2) + e^2(2+s^2)] \right\};$$

$$d_3 = \frac{\varepsilon^4 e^3}{8} \cos i (4-3s^2);$$

$$d_4 = \frac{\varepsilon^4 e^4}{64} \cos i (2-s^2);$$

$$\bar{d}_2 = -\frac{\varepsilon^4}{32} (1-e^2)^2 s^2 \cos i.$$

$$\varphi = u + \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2} (1 - e^2) s^2 \left[1 - \frac{\varepsilon^2}{2} (8 - 9s^2 + e^2 s^2) \right] \sin 2u.$$

$$\xi = a(1 - e^2)(a_0 + a_1 \cos \vartheta + a_2 \cos 2\vartheta + a_3 \cos 3\vartheta + a_4 \cos 4\vartheta)^{-1},$$

где

$$a_0 = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} e^2 (1 - 2s^2) + \frac{\varepsilon^4}{16} e^2 [(24 - 128s^2 + 112s^4) - e^2 (8 + s^2 - 18s^4)];$$

$$a_1 = e \left\{ 1 - \frac{\varepsilon^2}{16} e^2 s^2 - \frac{\varepsilon^4 e^2}{256} [(48 - 96s^2 + 80s^4) - 7e^2 s^4] \right\};$$

$$a_2 = -\frac{\varepsilon^2}{2} e^2 (1 - 2s^2) - \frac{\varepsilon^4 e^2}{2} [(3 - 16s^2 + 14s^4) - e^2 (1 - 2s^4)];$$

$$a_3 = \frac{\varepsilon^2}{16} e^3 s^2 + \frac{\varepsilon^4}{32} e^3 (6 - 12s^2 + 10s^4 - e^2 s^4);$$

$$a_4 = -\frac{\varepsilon}{16} e^4 s^2 (1 - 2s^2).$$

4. Наконец, определяются прямоугольные координаты:

$$x = \sqrt{\xi^2 + c^2} (\cos \varphi \cos \bar{\Omega} - \cos i \sin \varphi \sin \bar{\Omega});$$

$$y = \sqrt{\xi^2 + c^2} (\cos \varphi \sin \bar{\Omega} + \cos i \sin \varphi \cos \bar{\Omega});$$

$$z = \xi s \sin \varphi.$$

Приведенный алгоритм прогнозирования имеет погрешность порядка c_{20}^3 (по отношению к точному движению в гравитационном поле двух неподвижных центров).

12.3. ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ МЕЖПЛАНЕТНЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

В настоящее время используются следующие методы прогнозирования орбит межпланетных космических аппаратов (КА):

- численное интегрирование уравнений движения КА в прямоугольной системе координат;
- численное интегрирование уравнений движения КА в оскулирующих элементах;
- расчет параметров орбит методом малых вариаций уравнений кеплеровского движения.

Во всех перечисленных методах приняты следующие допущения. Движение КА происходит под действием сил притяжения Солнца, Венеры, Земли, Луны, Марса, Юпитера и Сатурна. Учитывается влияние светового давления на движение КА. Силы притяжения КА Землей и Марсом определяются с учетом сжатия этих планет (на участках орбиты в непосредственной близости от Земли и Марса). Притяжение остальных тел Солнечной системы, сопротивление межпланетного вещества и прочие факторы не учитываются.

При необходимости указанная система сил может быть дополнена силой тяги реактивного двигателя, если она действует на КА постоянно или на отдельных участках траектории его движения.

Используемые в тексте условные обозначения совпадают с общепринятыми астрономическими обозначениями. Параллельно с этими обозначениями в качестве индексов употребляются цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 в соответствии с табл. 12.2.

Величины, определяющие положение КА в пространстве, обозначаются индексом 0.

Для описания движения КА используются правые прямоугольные системы координат

$$X_i, Y_i, Z_i; \xi_i, \eta_i, \zeta_i; \bar{r}_i, \bar{\eta}_i, \bar{z}_i \quad (i = 1, 2, 3, 6);$$

$$\odot X_1 Y_1 Z_1; \odot \xi_1 \eta_1 \zeta_1; \odot \bar{r}_1 \bar{\eta}_1 \bar{z}_1 \text{ — гелиоцентрические;}$$

$$\oplus X_3 Y_3 Z_3; \oplus \xi_3 \eta_3 \zeta_3; \oplus \bar{r}_3 \bar{\eta}_3 \bar{z}_3 \text{ — геоцентрические;}$$

$$\text{♀ } \xi_2 \eta_2 \zeta_2; \text{♀ } \bar{r}_2 \bar{\eta}_2 \bar{z}_2 \text{ — афродитоцентрические;}$$

$$\text{♂ } \xi_6 \eta_6 \zeta_6; \text{♂ } \bar{r}_6 \bar{\eta}_6 \bar{z}_6 \text{ — ареоцентрические.}$$

Начало каждой из систем находится в центре масс соответствующего тела. Плоскость $X_3 Y_3$ совпадает с плоскостью земного экватора, ось X_3 направлена в точку весны эпохи 1960.0, ось Z_3 — к Северному полюсу мира P_{1960} . Соответствующие оси системы $\odot X_1 Y_1 Z_1$ параллельны осям системы $\oplus X_3 Y_3 Z_3$.

Плоскость $\xi_i \eta_i$ совпадает с плоскостью оскулирующей орбиты КА, ось ξ_i направлена по радиусу-вектору КА, ось ζ_i перпендикулярна плоскости оскулирующей орбиты, ее положительное направление совпадает с вектором кинетического момента КА.

Таблица 12.2

Небесное тело	Обозначение, принятое в астрономии	Индекс
Солнце	$\odot$	1
Венера	♀	2
Земля	$\oplus$	3
Луна	☾	4
Центр масс системы Земля+Луна	}	5
Марс		
Юпитер	♃	6
Сатурн	♄	7
	♅	8

При расчете орбит методом малых вариаций уравнений кеплеровского движения координатная плоскость (плоскость, в которой отсчитывается угол η_i) совпадает с плоскостью невозмущенной кеплеровской орбиты КА относительно центрального тела, в сфере действия которого движется КА. Ее положение изменяется при переходе от одного центрального тела к другому. Через r_i обозначена проекция радиуса-вектора КА на координатную плоскость. Угол η_i отсчитывается от радиуса-вектора начальной точки данного участка орбиты в направлении движения КА. Ось z_i перпендикулярна координатной плоскости, ее положительное направление совпадает с направлением вектора кинетического момента КА.

При расчетах орбит КА используются следующие константы:

- b_0 и b_2 — коэффициенты при первом и втором членах разложения потенциала нормального поля сил притяжения Земли по полиномам Лежандра;
- A_0 — астрономическая единица;
- $\mu_i, i=1, 2, 3, 4, 6, 7, 8$ — произведение гравитационной постоянной на массу соответствующей планеты;
- k_4 — отношение массы Луны к массе Земли;
- k^2 — постоянная Гаусса.

Орбита КА рассчитывается последовательно для геоцентрического, гелиоцентрического и планетоцентрического участков. При этом на геоцентрическом участке учитываются возмущающие ускорения за счет влияния Земли (с учетом ее сжатия), притяжения Луны и Солнца; на гелиоцентрическом — возмущающие ускорения от системы Земля+Луна, Венеры, Марса, Юпитера и Сатурна; на планетоцентрическом — возмущающие ускорения за счет влияния Солнца и сжатия планеты (для Марса).

Световое давление, изменяющееся обратно пропорционально квадрату расстояния КА от Солнца, учитывается на всех участках орбиты изменением массы Солнца на соответствующую величину.

12.3.1. Расчет орбит КА, основанный на численном интегрировании уравнений движения в прямоугольной системе координат

Система дифференциальных уравнений, описывающая движение КА в абсолютной геоцентрической системе координат $\text{☉ } X_3 Y_3 Z_3$, может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{30} = & -\frac{b_0}{r_{30}^3} X_{30} + \frac{3}{2} \frac{b_2 X_{30}}{r_{30}^5} \left(5 \frac{Z_{30}^2}{r_{30}^2} - 1 \right) + \frac{3b_2 Z_{30}}{r_{30}^5} g \left[\left(1 - \frac{5X_{30}^2}{r_{30}^2} \right) \cos G + \right. \\ & \left. + \frac{5X_{30} Y_{30}}{r_{30}^2} \sin G \right] + \mu_1 \left[(1 - \kappa) \frac{X_{31} - X_{30}}{\Delta_{01}^3} - \frac{X_{31}}{r_{31}^3} \right] + \\ & + \sum_{i=2, 4, 6, 7, 8} \mu_i \left(\frac{X_{3i} - X_{30}}{\Delta_{0i}^3} - \frac{X_{3i}}{r_{3i}^3} \right); \end{aligned} \quad (12.108)$$

$$\ddot{Y}_{30} = -\frac{b_0}{r_{30}^3} Y_{30} + \frac{3}{2} \frac{b_2 Y_{30}}{r_{30}^5} \left(5 \frac{Z_{30}^2}{r_{30}^2} - 1 \right) + \frac{3b_2 Z_{30}}{r_{30}^5} g \left[\left(1 - \frac{5Y_{30}^2}{r_{30}^2} \right) \sin G + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{5X_{30}Y_{30}}{r_{30}^2} \cos G \Big] + \mu_1 \left[(1-\alpha) \frac{Y_{31}-Y_{30}}{\Delta_{01}^3} - \frac{Y_{31}}{r_{31}^3} \right] + \\
& + \sum_{i=2,4,6,7,8} \mu_i \left(\frac{Y_{3i}-Y_{30}}{\Delta_{0i}^3} - \frac{Y_{3i}}{r_{3i}^3} \right); \\
\ddot{Z}_{30} = & - \frac{b_0}{r_{30}^3} Z_{30} + \frac{3}{2} \frac{b_2 Z_{30}}{r_{30}^5} \left(5 \frac{Z_{30}^2}{r_{30}^2} - 3 \right) + \frac{3b_2}{r_{30}^5} g \left[\left(1 - \frac{5Z_{30}^2}{r_{30}^2} \right) (Y_{30} \sin G - \right. \\
& \left. - X_{30} \cos G) \right] + \mu_1 \left[(1-\alpha) \frac{Z_{31}-Z_{30}}{\Delta_{01}^3} - \frac{Z_{31}}{r_{31}^3} \right] + \\
& + \sum_{i=2,4,6,7,8} \mu_i \left(\frac{Z_{3i}-Z_{30}}{\Delta_{0i}^3} - \frac{Z_{3i}}{r_{3i}^3} \right); \\
\dot{X}_{30} = & V_{X_{30}}; \quad \dot{Y}_{30} = V_{Y_{30}}; \quad \dot{Z}_{30} = V_{Z_{30}},
\end{aligned}$$

где $\Delta_{0i} = \sqrt{(X_{3i}-X_{30})^2 + (Y_{3i}-Y_{30})^2 + (Z_{3i}-Z_{30})^2}$;
 $r_{3i} = \sqrt{X_{3i}^2 + Y_{3i}^2 + Z_{3i}^2}$, $\mu_i = k^2 m_i \frac{A^3}{86400^2}$; $\mu_1 = k^2 b_0$;

X_{3i}, Y_{3i}, Z_{3i} — текущие координаты Солнца, планет, Луны и КА;
 g и G — редукционные величины, с помощью которых учитывается нутация и прецессия земной оси;
 m_i — массы планет, выраженные в единицах массы Солнца;
 α — коэффициент, равный

$$\alpha = \frac{S_{\text{эф}} P_{\text{вл}} r_0^2 g}{k^2 P};$$

где $S_{\text{эф}} = \varrho S_{\text{осв}}$ — эффективная площадь освещаемой поверхности КА,
 $P_{\text{вл}}$ — удельное световое давление на КА у Земли для абсолютно поглощающего тела;
 r_0 — среднее расстояние от Солнца до КА на выбранном участке полета;
 g — ускорение силы тяжести на поверхности Земли;
 P — вес КА;
 ϱ — коэффициент отражения;
 $S_{\text{осв}}$ — освещаемая поверхность КА.

Составным элементом точного расчета межпланетных орбит является определение координат и составляющих скорости планет Солнечной системы, влияющих на движение КА, в функции времени.

В настоящее время эти величины определяются с помощью интерполяции их значений, помещенных в таблицах ИТА АН СССР. Таблицы содержат координаты и компоненты скорости планет Солнечной системы в прямоугольной гелиоцентрической геоэваториальной системе координат, фиксированной на начало тропического 1960,0 года. Координаты выражены в астрономических единицах (а. е.), а скорости в а. е./сред. солн. сутки.

Для перехода от а. е. к километрам необходимо пользоваться наиболее вероятным значением а. е. в километрах, которое известно по современным определениям этой величины. Кроме того, имеются таблицы положений и скоростей Луны и Солнца в прямоугольной геоцентрической экваториальной системе координат.

Для удобства расчетов табличные значения могут быть аппроксимированы полиномами вида

$$q_i = a_0 + a_1 \tau + a_2 \tau^2 + \dots + a_n \tau^n,$$

где

$$\tau = \frac{t - t_0}{T};$$

q_i — аппроксимируемый параметр;

t — текущее время;

t_0 — начало интервала аппроксимации;

T — интервал аппроксимации.

Коэффициенты полиномов определяются с использованием способа наименьших квадратов. Для аппроксимации таблиц с достаточной для проведения расчетов точ-

ностью могут быть рекомендованы интервалы аппроксимации и степени полиномов, приведенные в табл. 12.3.

Таблица 12.3

Небесное тело	Интервал аппроксимации (сутки)	Степень полинома
Луна	9	7
Земля+Луна	32	5
Венера	32	6
Марс	32	5
Юпитер	532	5
Сатурн	532	5

12.3.2. Расчет орбит КА, основанный на численном интегрировании уравнений движения в оскулирующих элементах

Сравнительно медленное изменение оскулирующих элементов кеплеровской орбиты КА в процессе его полета позволяет проводить интегрирование уравнений движения с большим шагом, что сокращает время решения задачи на ЭВМ по сравнению с интегрированием в прямоугольных координатах при той же точности расчета.

Система дифференциальных уравнений, описывающая движение КА, имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{V\mu p} \frac{\sin u}{\sin i} W; \\ \frac{di}{dt} &= \frac{r}{V\mu p} \cos u W; \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{2r V\bar{p}}{V\mu} T; \\ \frac{da}{dt} &= 2a^2 \left(\frac{e \sin \vartheta}{V\mu p} S + \frac{V\bar{p}}{r V\mu} T \right); \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{V\bar{p}}{e V\mu} \cos \vartheta S + \frac{V\bar{p}}{e V\mu} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \vartheta T - \frac{r}{V\mu p} \operatorname{ctg} i \sin u W; \\ \frac{du}{dt} &= \frac{V\mu p}{r^2} \left(1 - \frac{r^3}{\mu p} \sin u \operatorname{ctg} i W \right), \end{aligned} \right\} \quad (12.109)$$

где $u = \omega + \vartheta$; $r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta}$; $e^2 = 1 - \frac{p}{a}$.

В этих формулах приняты следующие обозначения:

p — фокальный параметр;

r — расстояние от КА до центрального тела притяжения;

S , T , W — проекции возмущающего ускорения соответственно на направления радиуса-вектора, перпендикуляра к радиусу-вектору в плоскости орбиты и перпендикуляра к плоскости орбиты.

Расчет геоцентрического участка орбиты КА

Интегрируется система дифференциальных уравнений (12.109). Проекции возмущающих ускорений за счет сжатия Земли вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \frac{3}{2} b_2 r^{-4} (3 \sin^2 u \sin^2 i - 1); \\ T_1 &= -\frac{3}{2} b_2 r^{-4} \sin 2u \sin^2 i; \\ W_1 &= -\frac{3}{2} b_2 r^{-4} \sin u \sin 2i. \end{aligned} \right\} \quad (12.110)$$

После выхода КА из геоцентрической сферы радиусом R_I величины S_1 , T_1 , W_1 можно считать равными нулю.

Величина радиуса R_I выбирается его варьированием в зависимости от требуемой точности расчета.

Проекции возмущающих ускорений за счет притяжения Луны и Солнца определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} S_2 &= \sum_{i=1,4} \mu_i \left[\frac{(\xi_{3i} - r_{30}) \sigma}{\Delta_{i0}^3} - \frac{\xi_{3i}}{\Delta_{3i}^3} \right]; \\ T_2 &= \sum_{i=1,4} \mu_i \left(\frac{\sigma}{\Delta_{i0}^3} - \frac{1}{\Delta_{3i}^3} \right) \eta_{3i}; \\ W_2 &= \sum_{i=1,4} \mu_i \left(\frac{\sigma}{\Delta_{i0}^3} - \frac{1}{\Delta_{3i}^3} \right) \zeta_{3i}, \end{aligned} \right\} \quad (12.111)$$

где ξ_{3i} , η_{3i} , ζ_{3i} — координаты i -го возмущающего тела, определяемые с помощью таблиц ИТА АН СССР;

$$\Delta_{i0} = \sqrt{\Delta_{3i}^2 + r_{30}^2 - 2\xi_{3i}r_{30}};$$

$$\Delta_{3i} = \sqrt{\xi_{3i}^2 + \eta_{3i}^2 + \zeta_{3i}^2};$$

$$\mu_1 = \frac{k^2 A_0^3}{86400^2}; \quad \sigma = 1 - \alpha.$$

При определении координат Солнца в системе $\odot X_3 Y_3 Z_3$ используется векторное соотношение

$$\bar{r}_{31} = \bar{r}_{34} \frac{k_4}{1 + k_4} - \bar{r}_{15}, \quad (12.112)$$

в котором компоненты радиусов-векторов $\bar{r}_{15}$ и $\bar{r}_{34}$ определяются по таблицам ИТА АН СССР. Система (12.109) интегрируется до выполнения условия

$$r_{30} \geq R_{II}, \quad (12.113)$$

где R_{II} — радиус сферы действия Земли, выбираемый аналогично радиусу R_I .

После этого определяются прямоугольные геоцентрические координаты и компоненты скорости КА для перехода на гелиоцентрический участок орбиты по формулам, приведенным в гл. II.

Расчет гелиоцентрического участка орбиты КА

После выполнения условия (12.113) координаты и компоненты скорости КА пересчитываются в гелиоцентрическую систему $\odot X_1 Y_1 Z_1$. При переходе к системе $\odot X_1 Y_1 Z_1$ радиус-вектор $\bar{r}_{10}$ и вектор скорости $\dot{\bar{r}}_{10}$ вычисляются по формулам:

$$\bar{r}_{10} = \bar{r}_{15} - \frac{k_4}{1 + k_4} \bar{r}_{34} + \bar{r}_{30};$$

$$\dot{\bar{r}}_{10} = \dot{\bar{r}}_{15} - \frac{k_4}{1 + k_4} \dot{\bar{r}}_{34} + \dot{\bar{r}}_{30}.$$

Расчет элементов невозмущенной гелиоцентрической орбиты КА выполняется по формулам эллиптической теории.

Величины S_2 , T_2 , W_2 до выполнения условия

$$r_{30} \geq R_{III} \quad (12.114)$$

вычисляются по формулам (12.111). При этом σ берется равной единице, $i=2, 3, 4, 6, 7, 8$. Радиус R_{III} определяется аналогично радиусу R_I . Координаты возмущающих планет определяются по таблицам ИТА АН СССР.

Интегрирование системы (12.109) продолжается до выполнения условия

$$\left. \begin{aligned} r_{60} &\leq R_V^{(6)} \text{ — при полете на Марс;} \\ r_{20} &\leq R_V^{(2)} \text{ — при полете на Венеру,} \end{aligned} \right\} \quad (12.115)$$

где $R_V^{(6)}$; $R_V^{(2)}$ — радиусы сфер действия Марса и Венеры относительно Солнца.

При выполнении условия (12.115) координаты и компоненты скорости КА пересчитываются в афродитоцентрическую (ареоцентрическую) систему координат. Интегрируется система дифференциальных уравнений (12.109), описывающая движение КА под действием притяжения Венеры (Марса), Солнца и силы светового давления. Проекции возмущающего ускорения за счет сжатия Марса вычисляются по следующим формулам:

$$S_1 = \frac{\varepsilon}{r^4} (3 \sin^2 u \sin^2 i - 1);$$

$$T_1 = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin 2u \sin^2 i;$$

$$W_1 = -\frac{\varepsilon}{r^4} \sin u \sin 2i,$$

где ε — постоянная, учитывающая сжатие Марса.

В зависимости от цели расчета интегрирование системы может быть прекращено при прохождении КА минимального расстояния от центра Венеры (Марса) или при падении на его поверхность.

12.3.3. Расчет орбит КА, основанный на методе малых вариаций уравнений кеплеровского движения

При расчете орбиты КА методом малых вариаций уравнений движения Кеплера траектория полета разбивается на геоцентрический, гелиоцентрический и планетоцентрический участки. На каждом из этих участков движение КА рассчитывается с помощью линейных поправок к элементам невозмущенного кеплеровского движения. Расчет участков в районах границ сфер действия Земли и планеты-цели производится методом численного интегрирования уравнений движения КА, так как на этих участках поправки, учитывающие действующие на КА возмущения, становятся существенно нелинейными.

Расчет геоцентрического участка орбиты

Элементы невозмущенной геоцентрической орбиты рассчитываются по заданным начальным условиям движения КА.

Координаты и компоненты скорости КА в цилиндрической системе координат $\delta \vec{r}_{30} \vec{z}_{30}$ на момент окончания геоцентрического участка полета ($r_{30} = \varrho_1$) определяются по формулам

$$\bar{\eta}_{30} = \text{Arc cos } \frac{p - \varrho_1}{e \varrho_1} - \vartheta_0 = \text{Arc sin } \frac{\tilde{\varrho}_1}{e \varrho_1} - \vartheta_0;$$

$$\dot{\bar{\eta}}_{30} = \frac{c}{\varrho_1^2}; \quad \dot{\bar{r}}_{30} = \sqrt{\frac{b_0}{p} \frac{\tilde{\varrho}_1}{\varrho_1}},$$

где ϱ_1 — радиус геоцентрической сферы, в пределах которой орбита КА рассчитывается с помощью поправок к невозмущенному гиперболическому движению,

$$\tilde{\varrho}_1 = \sqrt{\varrho_1^2 (e^2 - 1) + 2p\varrho_1 - p^2};$$

c — величина вектора кинетического момента КА.

Время полета КА по невозмущенной орбите определяется по формуле

$$t = t_k + \left| \frac{\sqrt{\frac{p}{b_0}}}{e^2 - 1} \left[\tilde{\varrho}_1 - \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} \ln \left| \varrho_1 + \frac{p}{e^2 - 1} + \tilde{\varrho}_1 \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \right| \right] \right| \frac{\varrho_1}{\bar{r}_{30k}},$$

где t_k и $\bar{r}_{30k}$ — соответственно время и радиус точки конца активного (начала пассивного) участка движения.

Поправки к невозмущенным значениям координат, составляющих скорости и полетного времени, учитывающие возмущающее действие Солнца, Луны и сжатия Земли, определяются по следующим формулам:

$$\dot{\delta \bar{\eta}}_{30} = \frac{1}{\sqrt{\frac{b_0}{p} \varrho_1^2}} \int_{\bar{r}_{30k}}^{\varrho_1} \frac{\bar{r}_{30}^2}{\tilde{r}_{30}} \delta g_{\vec{r}_i} d\bar{r}_{30};$$

$$\delta \dot{\bar{r}}_{30} = \frac{\epsilon_1 \sqrt{\frac{p}{b_0}}}{\tilde{r}_{30}} \int_{\tilde{r}_{30\kappa}}^{\epsilon_1} \left(2 \frac{c}{\tilde{r}_{30}} \delta \dot{\eta}_{30} + \delta g_{\bar{r}} \right) d\bar{r}_{30};$$

$$\delta \bar{\eta}_{30} = \frac{1}{\sqrt{\frac{b_0}{p}}} \int_{\tilde{r}_{30\kappa}}^{\epsilon_1} \frac{\bar{r}_{30}}{\tilde{r}_{30}} \left(\delta \dot{\eta}_{30} - \frac{p \delta \dot{r}_{30}}{\tilde{r}_{30} \tilde{r}_{30}} \right) d\bar{r}_{30};$$

$$\delta \bar{z}_{30} = \frac{1}{b_0 l^2} \left[\tilde{r}_{30} \int_{\tilde{r}_{30\kappa}}^{\epsilon_1} \delta g_{\bar{z}} \frac{\bar{r}_{30} (p - \bar{r}_{30})}{\tilde{r}_{30}} d\bar{r}_{30} - (p - \epsilon_1) \int_{\tilde{r}_{30\kappa}}^{\epsilon_1} \delta g_{\bar{z}} \bar{r}_{30} d\bar{r}_{30} \right];$$

$$\delta \dot{\bar{z}}_{30} = \frac{1}{\sqrt{b_0 p \epsilon_1 e^2}} \left\{ [\epsilon_1 (e^2 - 1) + p] \int_{\tilde{r}_{30\kappa}}^{\epsilon_1} \delta g_{\bar{z}} \frac{\bar{r}_{30} (p - \bar{r}_{30})}{\tilde{r}_{30}} d\bar{r}_{30} + \epsilon_1 \int_{\tilde{r}_{30\kappa}}^{\epsilon_1} \delta g_{\bar{z}} \bar{r}_{30} d\bar{r}_{30} \right\};$$

$$\delta t = - \frac{p}{b_0} \int_{\tilde{r}_{30\kappa}}^{\epsilon_1} \frac{\bar{r}_{30}^2 \delta \dot{r}_{30}}{\tilde{r}_{30}^2} d\bar{r}_{30},$$

где $\tilde{r}_{30} = \sqrt{\bar{r}_{30}^2 (e^2 - 1) + 2p\bar{r}_{30} - p^2};$

$\delta g_{\bar{r}}, \delta g_{\bar{\eta}}, \delta g_{\bar{z}}$ — проекции возмущающего ускорения на соответствующие направления, определяемые по формулам

$$\delta g_{\bar{r}} = \delta g'_{\bar{r}} + \delta g''_{\bar{r}}; \quad \delta g_{\bar{\eta}} = \delta g'_{\bar{\eta}} + \delta g''_{\bar{\eta}}; \quad \delta g_{\bar{z}} = \delta g'_{\bar{z}} + \delta g''_{\bar{z}}.$$

Проекции возмущающего ускорения, определяемые сжатием Земли, вычисляются по следующим формулам:

$$\delta g'_{\bar{r}} = \frac{\epsilon}{\bar{r}_{30}^4} \left\{ 3 \frac{\sin^2 i}{e^2 \bar{r}_{30}^2} [\tilde{r}_{30} \cos \omega + (p - \bar{r}_{30}) \sin \omega]^2 - 1 \right\};$$

$$\delta g'_{\bar{\eta}} = \frac{-\epsilon}{e^2 \bar{r}_{30}^6} \{ [(p - \bar{r}_{30})^2 - \tilde{r}_{30}^2] \sin 2\omega + 2\tilde{r}_{30} (p - \bar{r}_{30}) \cos 2\omega \};$$

$$\delta g'_{\bar{z}} = - \frac{\epsilon \sin 2i}{e^2 \bar{r}_{30}^5} [\tilde{r}_{30} \cos \omega + (p - \bar{r}_{30}) \sin \omega].$$

Проекции возмущающих ускорений, определяемых влиянием Солнца и Луны, вычисляются по следующим формулам:

$$\delta g''_{\bar{r}} = \sum_{i=1,4} \mu_i \left(\frac{\bar{r}_{3i} \cos \beta - \bar{r}_{30}}{\Delta_{0i}^3} - \frac{\bar{r}_{3i} \cos \beta}{\Delta_{3i}^3} \right);$$

$$\delta g''_{\bar{\eta}} = \sum_{i=1,4} \mu_i \left(\frac{1}{\Delta_{0i}^3} - \frac{1}{\Delta_{3i}^3} \right) \bar{r}_{3i} \sin \beta;$$

$$\delta g''_{\bar{z}} = \sum_{i=1,4} \mu_i \left(\frac{1}{\Delta_{0i}^3} - \frac{1}{\Delta_{3i}^3} \right) \bar{z}_{3i},$$

где $\Delta_{0i} = \sqrt{\bar{r}_{30}^2 + \bar{r}_{3i}^2 + \bar{z}_{3i}^2 - 2\bar{r}_{3i}\bar{r}_{30} \cos \beta}; \quad \Delta_{3i} = \sqrt{\bar{r}_{3i}^2 + \bar{z}_{3i}^2};$

$$\cos \beta = \frac{1}{e \bar{r}_{30}^2} \{ [(p - \bar{r}_{30}) \cos \omega - \tilde{r}_{30} \sin \omega] (X_{30} \cos \Omega + Y_{30} \sin \Omega) +$$

$$+ [(p - \bar{r}_{30}) \sin \omega + \tilde{r}_{30} \cos \omega] [\bar{z}_{30} \sin i + (Y_{30} \cos \Omega - X_{30} \sin \Omega) \cos i] \}.$$

Цилиндрические координаты Солнца и Луны относительно Земли определяются с помощью таблиц ИТА АН СССР.

Цилиндрические координаты и компоненты скорости КА на геоцентрической сфере радиусом Q_1 определяются суммированием их невозмущенных значений и соответствующих поправок.

Расчет переходного участка ведется методом численного интегрирования уравнений движения КА до выполнения условия

$$r_{30} = Q_2.$$

Величина Q_2 выбирается из условия определения положения КА в районе планеты-цели с заданной точностью.

Расчет гелиоцентрического участка орбиты

Невозмущенные координаты, составляющие вектора скорости и полетное время при заданном значении угла η_{10} определяются по формулам

$$\begin{aligned} \bar{r}_{10} &= \frac{p}{1 + e \cos (\vartheta_0 + \bar{\eta}_{10})}; \\ \dot{\bar{r}}_{10} &= \sqrt{\frac{k^2 A_0^3 (1 - x)}{p 86400^2}} e \sin (\vartheta_0 + \bar{\eta}_{10}); \quad \dot{\bar{\eta}}_{10} = \frac{c}{\bar{r}_{10}^2}; \\ t &= t_k + \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\frac{k^2 A_0^3 (1 - x)}{86400^2}}} [E - E_k - e (\sin E - \sin E_k)], \end{aligned}$$

где t_k — время пересечения КА геоцентрической сферы радиусом Q_2 ;

$$\cos E = \frac{a - \bar{r}_{10}}{ae};$$

$$\sin E = \frac{\sin (\vartheta_0 + \bar{\eta}_{10})}{1 + \cos (\vartheta_0 + \bar{\eta}_{10})} \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} (1 + \cos E).$$

Поправки к элементам невозмущенного движения находятся по формулам

$$\begin{aligned} \delta \bar{z} &= \frac{5 \cdot 86400^2 p^3}{k^2 A_0^3 (1 - x)} \left[\sin (\vartheta_0 + \bar{\eta}'_{10}) \chi' \int_0^{\bar{v}'} \chi^3 \delta g_z \cos (\vartheta_0 - \bar{\eta}_{10}) \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \cos (\vartheta_0 + \bar{\eta}'_{10}) \chi' \int_0^{\bar{v}'} \chi^3 \delta g_z \sin (\vartheta_0 + \bar{\eta}'_{10}) \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} \right]; \\ \delta \dot{\bar{z}} &= \frac{5 \cdot 86400^2}{k^2 A_0^3 (1 - x)} c p \left\{ [\cos (\vartheta_0 + \bar{\eta}'_{10}) + e] \int_0^{\bar{v}'} \frac{\chi^3 \delta g_z \cos (\vartheta_0 + \bar{\eta}_{10}) dv}{\sqrt{1 - v^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \sin (\vartheta_0 + \bar{\eta}'_{10}) \int_0^{\bar{v}'} \frac{\chi^3 \delta g_z \sin (\vartheta_0 + \bar{\eta}_{10}) dv}{\sqrt{1 - v^2}} \right\}; \\ \delta \bar{r} &= - \frac{5 \cdot 86400^2}{k^2 A_0^3 (1 - x)} p^3 \chi'^2 \left[\cos \bar{\eta}'_{10} \int_0^{\bar{v}'} \frac{\chi^2 \delta g_r \sin \bar{\eta}_{10} dv}{\sqrt{1 - v^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \sin \bar{\eta}'_{10} \int_0^{\bar{v}'} \frac{\chi^2 \delta g_r \cos \bar{\eta}_{10} dv}{\sqrt{1 - v^2}} + (e \sin \vartheta_0 \sin \bar{\eta}'_{10} - 2) \times \right. \\ &\quad \times \int_0^{\bar{v}'} \frac{\chi^3 \delta g_{\bar{\eta}} dv}{\sqrt{1 - v^2}} + 2 \cos \bar{\eta}' \int_0^{\bar{v}'} \frac{\chi^3 \delta g_{\bar{\eta}} \cos \bar{\eta}_{10} dv}{\sqrt{1 - v^2}} + 2 \sin \bar{\eta}' \int_0^{\bar{v}'} \frac{\chi^3 \delta g_{\bar{\eta}} \sin \bar{\eta}_{10} dv}{\sqrt{1 - v^2}} - \\ &\quad \left. - e \cos (\bar{\eta}'_{10} - \vartheta_0) \int_0^{\bar{v}'} \frac{\chi^3 \delta g_{\bar{\eta}} \sin^2 \bar{\eta}_{10} dv}{\sqrt{1 - v^2}} + e \sin (\bar{\eta}'_{10} - \vartheta_0) \int_0^{\bar{v}'} \frac{\chi^3 \delta g_{\bar{\eta}} \sin \bar{\eta}_{10} \cos \bar{\eta}_{10} dv}{\sqrt{1 - v^2}} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{r}} = & \frac{c}{p^2} \left\{ 2e \sin(\vartheta_0 + \bar{\eta}'_{10}) \frac{\delta \bar{\mathbf{r}}}{\chi'} - \frac{5 \cdot 86400^2 p^3}{k^2 A_0^3 (1 - \kappa)} \left[- \sin \bar{\eta}'_{10} \int_0^{\nu'} \frac{\chi^2 \delta g_{\bar{r}} \sin \bar{\eta}_{10} d\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} - \right. \right. \\ & - \cos \bar{\eta}'_{10} \int_0^{\nu'} \frac{\chi^2 \delta g_{\bar{r}} \cos \bar{\eta}_{10} d\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} + e \cos \bar{\eta}'_{10} \sin \vartheta_0 \int_0^{\nu'} \frac{\chi^3 \delta g_{\bar{\eta}} d\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} - \\ & - 2 \sin \bar{\eta}'_{10} \int_0^{\nu'} \frac{\chi^3 \delta g_{\bar{\eta}} \cos \bar{\eta}_{10} d\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} + 2 \cos \bar{\eta}'_{10} \int_0^{\nu'} \frac{\chi^3 \delta g_{\bar{\eta}} \sin \bar{\eta}_{10} d\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} + \\ & \left. + e \sin(\bar{\eta}'_{10} - \vartheta_0) \int_0^{\nu'} \frac{\chi^3 \delta g_{\bar{\eta}} \sin^2 \bar{\eta}_{10} d\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} + e \cos(\bar{\eta}'_{10} - \vartheta_0) \int_0^{\nu'} \frac{\chi^3 \delta g_{\bar{\eta}} \sin \bar{\eta}_{10} \cos \bar{\eta}_{10} d\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} \right] \Bigg\} + \\ & + ep \sin(\bar{\eta}'_{10} + \vartheta_0) \chi'^2 \delta \bar{\eta}; \end{aligned}$$

$$\delta \dot{\bar{\eta}} = \frac{5}{\chi'^2 p^2} \left[\frac{p^3}{c} \int_0^{\nu'} \frac{\chi^3 \delta g_{\bar{\eta}} d\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} - 2 \sqrt{\frac{k^2 A_0^3 (1 - \kappa)}{86400^2 p}} \frac{\delta \bar{\mathbf{r}}}{\chi} \right];$$

$$\delta t = - \frac{5p^2}{c} \left[\frac{2}{p} \int_0^{\nu'} \frac{\chi \delta \bar{r} d\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} - \frac{86400^2 p^2}{k^2 A_0^3 (1 - \kappa)} \int_0^{\nu'} \chi^2 F_{\bar{\eta}} \frac{d\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}} \right],$$

$$\text{где } F_{\bar{\eta}} = \int_0^{\nu'} \chi^3 \delta g_{\bar{\eta}} \frac{d\nu}{\sqrt{1 - \nu^2}}; \quad \chi = \frac{1}{1 + e \cos(\vartheta_0 + \bar{\eta}_{10})}; \quad \chi' = \frac{1}{1 + e \cos(\vartheta_0 + \bar{\eta}'_{10})};$$

$$\sin \bar{\eta}_{10} = \nu [4(1 - \nu^2)(1 - 4\nu^2) + 1]; \quad \cos \bar{\eta}_{10} = \sqrt{1 - \sin^2 \bar{\eta}_{10}}.$$

Верхним пределом интегралов является такое значение $\nu = \nu'$, при котором выполняется условие $\Delta_{0i} = Q_3^{(i)}$ ($i=2,6$). Величина $Q_3^{(i)}$ выбирается аналогично величине Q_2 .

Возмущающие ускорения от планет вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \delta g_{\bar{r}} = & \sum_{i=2,5,6,7,8} \mu_i \left[\frac{\bar{r}_{1i} (\cos \bar{\eta}_{10} \cos \bar{\eta}_{1i} + \sin \bar{\eta}_{10} \sin \bar{\eta}_{1i} - p\chi)}{\Delta_{0i}^3} - \right. \\ & \left. - \frac{\bar{r}_{1i} (\cos \bar{\eta}_{10} \cos \bar{\eta}_{1i} + \sin \bar{\eta}_{10} \sin \bar{\eta}_{1i})}{\Delta_{1i}^3} \right]; \end{aligned}$$

$$\delta g_{\bar{\eta}} = \sum_{i=2,5,6,7,8} \mu_i \bar{r}_{1i} (\sin \bar{\eta}_{1i} \cos \bar{\eta}_{10} - \sin \bar{\eta}_{10} \cos \bar{\eta}_{1i}) \left(\frac{1}{\Delta_{0i}^3} - \frac{1}{\Delta_{1i}^3} \right);$$

$$\delta g_{\bar{z}} = \sum_{i=2,5,6,7,8} \mu_i \bar{z}_i \left(\frac{1}{\Delta_{0i}^3} - \frac{1}{\Delta_{1i}^3} \right),$$

$$\text{где } \Delta_{0i} = \sqrt{p^2 \chi^2 + \bar{r}_{1i}^2 + \bar{z}_{1i}^2 - 2p\bar{r}_{1i}\chi \cos(\bar{\eta}_{10} - \bar{\eta}_{1i})}; \quad \Delta_{1i} = \sqrt{\bar{r}_{1i}^2 + \bar{z}_{1i}^2}.$$

Цилиндрические координаты планет находятся с помощью таблиц ИТА АН СССР. Расчет планетоцентрического участка производится аналогично тому, как было показано для геоцентрического участка орбиты.

12.3.4. Прогнозирование движения лунного КА

Прогнозирование движения лунного КА производится интегрированием уравнений движения в поле сил притяжения Земли, Солнца и Луны. Учитывается также сила светового давления солнечных лучей. При определении силы притяжения КА Землей учитывается сжатие этой планеты. Притяжение остальных тел Солнечной системы,

сопротивление межпланетного вещества, аномалии силы тяжести и прочие факторы не учитываются.

Система дифференциальных уравнений, описывающая движение КА в абсолютной геоцентрической системе координат $\delta X_3 Y_3 Z_3$, имеет вид

$$\ddot{X}_{30} = -b_0 \frac{X_{30}}{r_{30}^3} + \frac{3}{2} \frac{b_2 X_{30}}{r_{30}^5} \left(5 \frac{Z_{30}^2}{r_{30}^2} - 1 \right) + k^2 A_0^3 \left[(1-\alpha) \frac{X_{31} - X_{30}}{\Delta_{01}^3} - \frac{X_{31}}{r_{31}^3} \right] +$$

$$+ k_4 b_0 \left(\frac{X_{34} - X_{30}}{\Delta_{04}^3} - \frac{X_{34}}{r_{34}^3} \right);$$

$$\ddot{Y}_{30} = -b_0 \frac{Y_{30}}{r_{30}^3} + \frac{3}{2} \frac{b_2 Y_{30}}{r_{30}^5} \left(5 \frac{Z_{30}^2}{r_{30}^2} - 1 \right) + k^2 A_0^3 \left[(1-\alpha) \frac{Y_{31} - Y_{30}}{\Delta_{01}^3} - \frac{Y_{31}}{r_{31}^3} \right] +$$

$$+ k_4 b_0 \left(\frac{Y_{34} - Y_{30}}{\Delta_{04}^3} - \frac{Y_{34}}{r_{34}^3} \right);$$

$$\ddot{Z}_{30} = -b_0 \frac{Z_{30}}{r_{30}^3} + \frac{3}{2} \frac{b_2 Z_{30}}{r_{30}^5} \left(5 \frac{Z_{30}^2}{r_{30}^2} - 3 \right) + k^2 A_0^3 \left[(1-\alpha) \frac{Z_{31} - Z_{30}}{\Delta_{01}^3} - \frac{Z_{31}}{r_{31}^3} \right] +$$

$$+ k_4 b_0 \left(\frac{Z_{34} - Z_{30}}{\Delta_{04}^3} - \frac{Z_{34}}{r_{34}^3} \right);$$

$$\dot{X}_{30} = V_{X_{30}}; \quad \dot{Y}_{30} = V_{Y_{30}}; \quad \dot{Z}_{30} = V_{Z_{30}};$$

где

$$r_{30} = \sqrt{X_{30}^2 + Y_{30}^2 + Z_{30}^2};$$

$$\Delta_{0i} = \sqrt{(X_{3i} - X_{30})^2 + (Y_{3i} - Y_{30})^2 + (Z_{3i} - Z_{30})^2} \quad (i = 1, 4);$$

$$r_{3i} = \sqrt{X_{3i}^2 + Y_{3i}^2 + Z_{3i}^2} \quad (i = 1, 4).$$

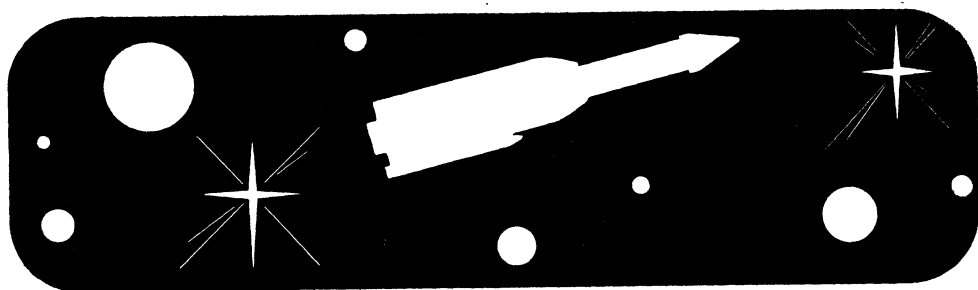
Начальные условия движения ($X_0, Y_0, Z_0, V_{X0}, V_{Y0}, V_{Z0}$) задаются в системе координат $\delta X_3 Y_3 Z_3$. С этими начальными условиями система дифференциальных уравнений интегрируется до необходимого момента времени (пересечения картинной плоскости, достижения перигея орбиты и т. д.), на который рассчитываются параметры, наиболее наглядно характеризующие положение КА и его движение в специфических точках.

Следует отметить, что расчет орбит КА методом численного интегрирования уравнений движения в прямоугольных координатах наиболее прост, но требует больших затрат машинного времени по сравнению с численным интегрированием уравнений движения в оскулирующих элементах и методом малых вариаций уравнений кеплеровского движения. Последний метод имеет тот недостаток, что на переходных участках (в районе действия Земли и планеты-цели) необходимо применять метод численного интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. XII

1. Аксенов Е. П., Гребенников Е. А., Демин В. Г. Применение обобщенной задачи двух неподвижных центров в теории движения искусственных спутников Земли. — Сб. «Проблемы движения искусственных небесных тел». Изд-во АН СССР, 1963.
2. Аксенов Е. П. Влияние тессеральных и секториальных гармоник земного потенциала на движение искусственных спутников. Труды ГАИШ, т. 35, 1966.
3. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1958.
4. Брауэр Д., Клеменс Дж. Методы небесной механики. М., «Мир», 1964.
5. Волосов В. М., Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. — «Успехи математических наук», т. XVII, вып. 6, 1962.
6. Волосов В. М. и др. Асимптотические методы нелинейной механики, связанные с усреднением. — Труды II всесоюзного съезда по теоретической и прикладной механике, вып. 2, М., «Наука», 1965.
7. Дубошин Г. Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М., «Наука», 1968.
8. Евтушенко Ю. Г. и др. Движение искусственных спутников в гравитационном поле Земли. Изд-во ВЦ АН СССР, 1967.
9. Жандаров А. М. Возмущения орбит от тессеральных гармоник разложения гравитационного потенциала. — «Космические исследования», т. V, вып. 1, 1967.

10. Жонголо́вич И. Д. Возмущения искусственного спутника в гравитационном поле Земли. — «Бюлл. ИТА», т. VII, 10(93), 1960.
 11. Жонголо́вич И. Д. Пелли́нен Л. П. Средние элементы искусственных спутников Земли. — «Бюлл. ИТА», т. VIII, 6(99), 1962.
 12. Каула В. М. Космическая геодезия. М., «Недра», 1965.
 13. Кинг-Хили Д. Теория орбит искусственных спутников в атмосфере. М., «Мир», 1966.
 14. Кислик М. Д. Движение искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. — В сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 4, 1960.
 15. Кислик М. Д. Анализ интегралов уравнений движения искусственного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. — В сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 13, 1962.
 16. Кугаенко Б. В., Эльясберг П. Е. Эволюция почти круговых орбит ИСЗ под влиянием зональных гармоник. — «Космические исследования», т. VI, № 2, 1968.
 17. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях, изд. 5, ГИТТЛ, 1950.
 18. Лидов М. Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. — Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 8, 1961.
 19. Назаренко А. И. О составлении усредненных уравнений движения искусственных спутников Земли. — Конференция по общим вопросам небесной механики и аэродинамики, ГАИШ, 1967.
 20. Орлов А. А. Вычисление членов второго порядка относительно сжатия Земли в координатах искусственного спутника Земли. — «Бюлл. ИТА», т. VII, 7(90), 1960.
 21. Проску́рин В. Ф., Батраков Ю. В. Возмущения в движении искусственных спутников, вызываемые сжатием Земли. — «Бюлл. ИТА», т. VII, 7(90), 1960.
 22. Таратынова Г. П. Методы численного решения уравнений в конечных разностях. — Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 4. Изд-во АН СССР, 1960.
 23. Тимошкова Е. И. Об определении постоянных интегрирования в обобщенной задаче двух неподвижных центров. — «Вестник ЛГУ», т. 13, вып. 3, 1966.
 24. Устинов Б. А. Движение спутников по орбитам с малым эксцентриситетом в нецентральной гравитационном поле Земли. — «Космические исследования», т. V, вып. 2, 1967.
 25. Фоми́нов А. М. Движение спутников Земли в атмосфере с несферическим распределением плотности, зависящим от высоты. — «Бюлл. ИТА», том X, № 9(122), 1966.
 26. Хорошавцев В. Г. Расчет частных производных от характеристик движения по начальным условиям. — «Космические исследования», т. 3, вып. 3, 1965.
 27. Штерн Т. Е. Введение в небесную механику. М., «Мир», 1964.
 28. Эльясберг П. М. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М., «Наука», 1965.
 29. Brouer D. Solution of the problem of artificial satellite theory without drag, Astr. J., vol. 64, 1969.
 30. Claus A. J., Lubawe A. G. A high-accuracy perturbation method with direct application to communication satellite orbit prediction Astr. Acta, vol. 9, 1963.
 31. Garfinkel B. On the motion of the satellite of oblate Planet. Astr. J., vol. 63, 1958.
 32. Garfinkel B. The orbit of a satellite of an oblate planet, Astr. J., vol. 64, 1959.
 33. Hale N. S., Goulowicz H. F. Orbits about an oblate pyriform attracting body Space Res., vol. 11, 1961.
 34. Kovalevsky J. Influence les terms du second ordre sur la theory du mouvement d'un satellite artifical. Proc. Ist. Int. Spac Sci. symposium Nice, 1960.
 35. Kasai Y. The motion of a class earth satellite, Astr. J., vol. 64, 1959.
 36. Vinti J. P. New method of solution for unretarded satellite orbits J. Res. Nat. Bur. Stand., vol. 62, 1959.
-



ГЛАВА XIII

ДВИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С ДВИГАТЕЛЯМИ МАЛОЙ ТЯГИ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a — большая полуось орбиты.
 e — эксцентриситет орбиты.
 $\vec{f}$ — реактивное ускорение.
 f_p — размерное значение модуля реактивного ускорения.
 f_η, f_ξ, f_ζ — проекции вектора реактивного ускорения соответственно на оси η, ξ, ζ .
 g_R — ускорение ньютоновского притяжения на расстоянии R от центра притяжения.
 h — безразмерная полная энергия.
 i_0 — один из углов, определяющих положение вектора тяги до изменения направления.
 i_k — тот же угол после поворота вектора тяги.
 m — переменная масса КА.
 N — часть мощности бортовой двигательной установки, переходящая в кинетическую энергию реактивной струи.
 n — число витков спирали разгона.
 p — фокальный параметр кеплеровской траектории.
 $\vec{r}$ — радиус-вектор траектории.
 $\vec{r}_*$ — кеплеров эллипс, параметры которого определяются краевыми условиями задачи.
 $\sim$ — начальное расстояние от центра притяжения.
 $\vec{r}_a(t)$ — транспортирующая траектория.
 T_γ — время, необходимое для разгона в сфере действия Земли по спирали с низкой круговой орбиты спутника до параболической скорости.
 T — время полета к планете.
 $T_{\Sigma \min}$ — минимальное для рассматриваемой величины f суммарное время полета к Марсу.
 $t=0$ — момент прохождения транспортирующего эллипса через Землю.
 t_k — момент прохождения транспортирующего эллипса через проекцию Марса на плоскость эклиптики.
 $t_{1\min}$ — начало интервала возможных дат старта к Марсу.
 t_1 — время начала полета.
 t_2 — время конца полета.
 $U=U(x, y, z)$ — потенциал произвольного консервативного силового поля.
 $\vec{V}_0, \vec{V}_k$ — начальная и конечная скорости на транспортирующей траектории относительно соответственно Земли (планеты старта) и планеты назначения.

V_r — скорость движения частиц струи относительно корпуса КА.
 V_x^a, V_y^a, V_z^a — компоненты скорости относительно Марса при $t=t_k$ в транспортирующем движении.
 V_x^I, V_y^I, V_z^I — компоненты скорости относительно Земли в момент $t=0$ в транспортирующем движении.

x, y, z — инерциальная система координат; оси x, y расположены в плоскости эклиптики.

z_a — расстояние от Марса до плоскости эклиптики в момент $t=t_k$.

α_0 — один из углов, определяющих положение вектора тяги до изменения направления.

α_k — тот же угол после поворота вектора тяги.

ΔT_a — возможное увеличение времени пребывания у Марса.

Δt_1 — длина интервала возможных дат старта к Марсу.

θ_0 — угол между $\vec{V}_0$ и $\vec{V}_k$.

ϑ — истинная аномалия.

σ — долгота перигея.

τ — момент выключения двигателя.

Φ — угловая дальность полета.

Ω — положение восходящего узла орбиты.

ω — угловая скорость движения по транспортирующей траектории.

В настоящей главе рассматривается задача о полете КА с ионным или плазменным двигателем в предположении, что затрата мощности на реакцию струи постоянна. Максимальные ускорения, которые смогут сообщать КА рассматриваемые двигатели, составляют 10^{-6} — $10^{-3}g$ [1]. Вследствие малости получающихся реактивных ускорений по сравнению с ускорением силы тяжести траектория космического полета состоит из участков двух разных типов: участков спиралевидного движения вблизи планет и участков полета между сферами действия планет.

13.1. МЕЖПЛАНЕТНЫЕ ПОЛЕТЫ С ДВИГАТЕЛЯМИ ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ

13.1.1. Исходные соображения. Модельные задачи. Транспортирующая система координат

Пусть N — часть мощности бортовой двигательной установки, переходящая в кинетическую энергию реактивной струи, V_r — скорость движения частиц в струе, f — реактивное ускорение, m — переменная масса КА. Тогда по определению реактивной силы и мощности

$$f = -\frac{V_r}{m} \frac{dm}{dt}; \quad (13.1)$$

$$N = -\frac{dm}{dt} \frac{V_r^2}{2}. \quad (13.2)$$

Считаем N постоянным в течение всего времени работы двигателя. При помощи (13.1), (13.2) найдем [2]

$$\frac{m_0}{m} - 1 = \frac{m_0}{2N} J; \quad (13.3)$$

$$J = \int_0^T f^2 dt; \quad (13.4)$$

$$f = 2N/mV_r, \quad (13.5)$$

откуда следует, что в любой фиксированный момент работы двигателя реактивное ускорение тем больше, чем меньше скорость истечения в этот момент.

Из формулы (13.3) следует, что для любого КА с двигателем постоянной мощности струи наимыгоднейшим является такой режим работы, при котором за время полета достигается минимум интеграла J (13.4) (причем при небольшом относительном весе топлива его затраты примерно пропорциональны J).

Это позволяет выполнять траекторные исследования и расчет реактивного ускорения без использования параметров конкретных КА, а относительные конечные веса и потребные затраты топлива могут быть затем рассчитаны по значениям интеграла J , как только будут известны параметры двигательной установки.

Задачи определения режимов полета, отвечающих минимуму функционала (13.4), существенно отличаются от задач на минимум функционала $\int_0^T |f| dt$, обычно решаемых для ракет на химических топливах. Это видно уже на простейших модельных задачах.

1. Рассмотрим прямолинейное движение с малым постоянным реактивным ускорением f на заданном пути $2s$ в заданное время $2T$ при отсутствии внешних сил и при условии, что скорость в начале и в конце пути должна быть равна нулю. Считаем, что на первой половине пути скорость равномерно возрастает, а на второй — равномерно убывает.

Имеем

$$f = 2s/T^2 = 2V_0/T. \quad (13.6)$$

При этом достигается, а затем гасится скорость $V_1 = 2s/T = 2V_0$, т. е. затрачивается скоростной импульс $4V_0$. Здесь $V_0 = s/T$. По суммарному скоростному импульсу затраты при движении с малой тягой ровно вдвое превышают затраты импульсивного разгона и торможения КА.

Для всего пути имеем

$$J_1 = 2f^2T = 8V_0^2/T. \quad (13.7)$$

2. Предположим теперь, что малое постоянное ускорение действует не все время, а лишь в начале и в конце заданного пути и требуется на такое время выключить двигатель, чтобы получить минимум J при заданном полном времени полета.

В силу симметрии движения достаточно его рассмотреть, как и в задаче 1, лишь на половине s всего пути в течение времени T , равного половине полного времени полета. Пусть τ — момент выключения двигателя. Тогда получаем J и заданный путь:

$$J_2 = 2f^2\tau; \quad (13.8)$$

$$2s = f\tau^2 + 2f\tau(T - \tau). \quad (13.9)$$

Решая задачу на минимум (13.8) при условии (13.9), находим

$$\tau = \frac{2}{3}T; \quad f = \frac{9}{4} \frac{V_0}{T}; \quad J_2 = \frac{27}{4} \frac{V_0^2}{T}. \quad (13.10)$$

Видим, что $J_2 < J_1$ на $5/4 V_0^2/T$, т. е. примерно на 15,5%.

3. Предположим теперь, что график ускорения имеет две ступеньки высотой f_1 и f_2 и протяженностью τ и $T - \tau$ и требуется параметры τ , f_1 , f_2 подобрать из условия минимума (13.4) при заданном пути s .

В этой задаче вместо (13.8), (13.9) имеем

$$J_3 = 2[f_1^2\tau + f_2^2(T - \tau)]; \quad 2s = f_1\tau^2 + 2f_1\tau(T - \tau) + f_2(T - \tau)^2,$$

что приводит аналогично предыдущему к формулам

$$\tau = \frac{1}{2}T; \quad f_1 = \frac{12}{5} \frac{V_0}{T}; \quad f_2 = \frac{4}{5} \frac{V_0}{T}; \quad J_3 = \frac{32}{5} \frac{V_0^2}{T}. \quad (13.11)$$

Видим, что $J_3 < J_2$, причем выигрыш $|J_3 - J_1|$ составляет уже 20% от J_1 .

4. Максимальный выигрыш можно получить, если решить вариационную изопериметрическую задачу на минимум функционала (13.4) при заданном пути

$$s = 2 \int_0^T (T - t) f(t) dt. \quad (13.12)$$

Из условия обращения в нуль вариации

$$\delta H = \int_0^T [2f + \lambda(T - t)] \delta f dt$$

(где λ — постоянный множитель Лагранжа) и условия (13.12) находим

$$f = 2 \frac{V_0}{T} \left[\frac{3}{2} \left(1 - \frac{t}{T} \right) \right]; \quad s(t) = \frac{3}{2} VT \left(\frac{t}{T} \right)^2 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{t}{T} \right) \right]; \quad J = 6 \frac{V_0^2}{T}. \quad (13.13)$$

Реактивное ускорение убывает линейно до нуля при $t = T$ от начальной величины, в полтора раза большей постоянного ускорения задачи 1, а выигрыш в величине J по сравнению с задачей 1 составляет 25%.

5. Аналогично можно решить вариационную задачу и с отличными от нуля краевыми скоростями. Решением опять является линейный закон изменения реактивного ускорения, и выигрыш по сравнению со случаем постоянного реактивного ускорения будет того же порядка.

Изложенные задачи являются некоторой аналогией задач полета между сферами действия планет в заданные сроки t_1 начала и t_2 конца полета, так как этими сроками фиксируются начальная и конечная точки пути, гелиоцентрические скорости в этих точках, а также время полета.

Для приближенных расчетов движения в заданные сроки между сферами действия планет с учетом притяжения Солнца более удобным оказывается рассмотрение движения не в неподвижной, а в движущейся поступательно системе координат. Пусть начало этой системы движется по гелиоцентрическому коническому сечению (согласно законам Кеплера) в те же сроки t_1, t_2 , между теми же краевыми точками. На КА в этой системе будет действовать не само тяготение Солнца, а лишь «возмущение» от Солнца, т. е. разность притяжений Солнцем КА и начала координат, точнее — разность силы солнечного тяготения и силы инерции, обусловленной неинерциальностью системы отсчета.

Назовем введенную систему координат *транспортирующей системой*, а траекторию начала координат — *транспортирующей траекторией*. Траектория КА в рассматриваемой системе будет начинаться и кончаться в начале координат. Поскольку при полете с Земли начальная гелиоцентрическая скорость КА совпадает со скоростью Земли, то начальная скорость КА в транспортирующей системе будет обратна по направлению и равна по величине геоцентрической начальной скорости начала координат транспортирующей системы. Аналогично конечная скорость КА в транспортирующей системе будет равна по величине и обратна по направлению конечной планетоцентрической скорости начала координат транспортирующей системы.

Когда траектория в транспортирующей системе мало отклоняется от начала координат, то возмущениями можно пренебречь по сравнению с реактивной силой и получаем движение в пространстве без сил, так что рассмотренные выше модельные задачи приобретают еще больший смысл. Здесь и всюду в дальнейшем под «возмущениями» понимаются указанные выше солнечные возмущения в транспортирующей системе координат.

13.1.2. Постановка общей вариационной задачи

Как видно из (13.3), задача о минимальном расходе массы в данном полете сводится к минимизации интеграла (13.4). К минимизации этого же интеграла сводится задача на минимум суммы масс горючего и двигательной установки [5, 9].

Математически задачу можно поставить следующим образом. Пусть на КА с массой m действует поле сил с потенциалом U и реактивное ускорение. Пусть $U = U/m$. Тогда уравнения движения КА будут иметь вид

$$\ddot{\vec{r}} - \text{grad } U = \vec{f}; \quad \dot{\vec{r}} = \vec{V},$$

где

$$\dot{\vec{r}} = (x, y, z); \quad \vec{V} = (u, v, w); \quad \vec{f} = (f_x, f_y, f_z). \quad (13.14)$$

Требуется определить закон изменения вектора $\vec{f}$ такой, чтобы функционал J (13.4) для заданного T имел экстремум при наличии связей (13.14). С помощью метода множителей Лагранжа можно получить для f_x, f_y и f_z уравнения [1]

$$\ddot{\vec{f}} - A\vec{f} = 0; \quad A = \begin{vmatrix} U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} \\ U_{yx} & U_{yy} & U_{yz} \\ U_{zx} & U_{zy} & U_{zz} \end{vmatrix}. \quad (13.15)$$

Совместное решение уравнений (13.14) и (13.15) дает оптимальную траекторию $\vec{r}(t)$ и оптимальную программу $\vec{f}(t)$. В общем случае решение системы (13.14) — (13.15) будет зависеть от 12 произвольных постоянных, располагаясь которыми, можно удовлетворить тем или иным начальным и конечным условиям.

Отметим одно свойство уравнений вариационной задачи. Введем функцию

$$H = up + vq + wn - U_x f_x - U_y f_y - U_z f_z - \frac{1}{2} f_x^2 - \frac{1}{2} f_y^2 - \frac{1}{2} f_z^2, \quad (13.16)$$

где обозначено

$$p = \dot{f}_x; \quad q = \dot{f}_y; \quad n = \dot{f}_z.$$

Тогда уравнения (13.14) — (13.15) запишутся в следующем каноническом виде.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= H_p; \quad \dot{y} = H_q; \quad \dot{z} = H_n; \quad \dot{f}_x = H_u; \quad f_y = H_v; \quad \dot{f}_z = H_w; \\ \dot{p} &= -H_x; \quad \dot{q} = -H_y; \quad \dot{n} = -H_z; \quad \dot{u} = -H_{f_x}; \quad \dot{v} = -H_{f_y}; \quad \dot{w} = -H_{f_z}, \end{aligned} \right\} \quad (13.17)$$

где H с индексами означают частные производные от H по аргументу, указанному индексом. Отсюда сразу следует первый интеграл вариационной задачи $\dot{H} = H_0$.

Пусть потенциал U обладает свойствами:

$$\left. \begin{aligned} yU_{xz} - xU_{yz} &\equiv 0; \quad zU_{xy} - xU_{zy} \equiv 0; \quad yU_{xz} - zU_{xy} \equiv 0; \\ U_x + yU_{xy} - xU_{yy} &\equiv 0; \quad U_x + zU_{xz} - xU_{zz} \equiv 0; \quad U_y + zU_{zy} - yU_{zz} \equiv 0; \\ U_y + xU_{xy} - yU_{xx} &\equiv 0; \quad U_z + xU_{xz} - zU_{xx} \equiv 0; \quad U_z + yU_{zy} - zU_{yy} \equiv 0. \end{aligned} \right\} \quad (13.18)$$

Эти тождества имеют, например, место для любого центрального поля сил, в частности ньютоновского. Тогда уравнения (13.14)–(13.15), или, что то же, уравнения (13.17) имеют еще интеграл

$$\vec{r} \times \dot{\vec{f}} - \dot{\vec{r}} \times \vec{f} = \vec{k}. \quad (13.19)$$

Таким образом, в *пространственном* случае имеются *четыре интеграла уравнений движения*, а в *плоском* случае — *два интеграла*. Эти интегралы позволяют понизить порядок системы: вместо уравнений (13.15) получим, например, в плоском случае для компонент $\dot{f}_x, \dot{f}_y$ систему

$$\left. \begin{aligned} (x\dot{x} + y\dot{y})\dot{f}_x - f_x(xU_x + y\dot{y}) + f_y(\dot{x}\dot{y} - xU_y) - \frac{1}{2}f^2x &= H_0x + k_1\dot{y}; \\ (x\dot{x} + y\dot{y})\dot{f}_y - f_x(\dot{x}\dot{y} - yU_x) - f_y(\dot{x}^2 + yU_y) - \frac{1}{2}f^2y &= H_0y - k_1\dot{x}. \end{aligned} \right\} \quad (13.20)$$

Здесь $f^2 = f_x^2 + f_y^2$. Уравнения, аналогичные (13.20), имеют место и в *пространственном* случае.

13.1.3. Метод приближенного решения уравнений оптимального движения

Уравнения (13.14)–(13.15) оптимального движения в произвольном консервативном силовом поле с потенциалом $U = U(x, y, z)$ можно записать в следующем векторном виде:

$$\ddot{\vec{r}} - \text{grad } U = \vec{f}; \quad (13.21)$$

$$\ddot{\vec{f}} - A\vec{f} = 0. \quad (13.22)$$

Здесь $\vec{r}$ — радиус-вектор траектории, а матрица A определяется формулой (13.15).

В случае ньютоновского поля сил $U = \mu/r$ и элементы матрицы в (13.15) имеют вид, указанный в п. 13.1.6 [формулы (13.41)], правые части которых следует только домножить на μ .

Двенадцать постоянных интегрирования системы (13.21) следует определить так, чтобы удовлетворялись 12 *краевых условий*:

$$\vec{r} = \vec{r}_0; \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 \quad \text{при } t = t_1; \quad \vec{r} = \vec{r}_k; \quad \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_k \quad \text{при } t = t_2. \quad (13.23)$$

В задаче о полете между сферами действия планет можно пренебречь притяжением планет и в качестве краевых условий брать координаты и компоненты скорости планеты старта и планеты назначения. Для решения системы (13.21)–(13.22) используется *метод линеаризации* уравнений около подходящим образом выбранной транспортирующей траектории. Предположим, что траектория движения есть

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{q}, \quad (13.24)$$

где $\vec{r}_0$ определяет известную траекторию, а величина $|\vec{q}|$ мала по сравнению с $|\vec{r}_0|$. Транспортирующая траектория $\vec{r}_0(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\ddot{\vec{r}}_0 - \text{grad } U_0 = 0. \quad (13.25)$$

Подставляя (13.24) в (13.21), (13.22) и пренебрегая малыми второго порядка (к таковым отнесем и члены вида $\ddot{\vec{q}}$), получим систему линейных уравнений

$$\ddot{\vec{q}} - A_0\vec{q} = \vec{f}; \quad (13.26)$$

$$\ddot{\vec{f}} - A_0\vec{f} = 0. \quad (13.27)$$

Здесь U_0, A_0 — значения функции U и матрицы A вдоль транспортирующей траектории $\vec{r}_0(t)$. В первом приближении можно положить $A_0=0$, и тогда для $\vec{q}$ и $\vec{f}$ получаются элементарные формулы, при помощи которых расчеты проводятся особенно просто (см. п. 13.1.4). Для более точного определения $\vec{q}$ и $\vec{f}$ следует интегрировать линейную систему (13.26)—(13.27). Эта система содержит периодические коэффициенты, но тем не менее должна интегрироваться по крайней мере в квадратурах, если интегрируется в квадратурах уравнение (13.25) транспортирующей траектории. Это будет иметь место, например, для ньютоновского центрального поля сил $U=\mu/r$. В дальнейшем рассматривается именно это значение U . При этом в рассматриваемом приближении оптимальное управление вектором реактивного ускорения дается формулой

$$\vec{f} = \frac{g_R}{R} (\vec{r}_* - \vec{r}_0), \quad (13.28)$$

где $\vec{r}_0$ — транспортирующий кеплеров эллипс;

$\vec{r}_*$ — кеплеров эллипс, параметры которого определяются краевыми условиями задачи;

g_R — ускорение ньютоновского притяжения на расстоянии R от центра притяжения.

Предлагаемый приближенный метод позволяет, во-первых, в ряде случаев избежать численного интегрирования и, во-вторых, позволяет решать краевую задачу без итераций.

Выписанный в разд. 13.1.6 алгоритм полностью решает краевую задачу для системы уравнений (13.26)—(13.27).

13.1.4. Решение общей вариационной задачи без учета возмущений

При небольших отклонениях движения от транспортирующего приближенно в системе (13.26)—(13.27) можно пренебречь возмущениями от основного поля сил по сравнению с тягой, тем более, что главная часть действия основного потенциала учитывается самим введением транспортирующей системы координат. Тогда $A_0=0$, и уравнения движения в системе координат x, y, z поступательно перемещающейся по законам невозмущенного движения вдоль транспортирующей траектории, запишутся наиболее просто:

$$\ddot{x} = f_x; \quad \ddot{y} = f_y; \quad \ddot{z} = f_z; \quad \ddot{f}_x = 0; \quad \ddot{f}_y = 0; \quad \ddot{f}_z = 0. \quad (13.29)$$

В этом приближении оптимальный закон управления тягой линеен по времени

$$\vec{f} = \vec{A}t + \vec{B}, \quad (13.30)$$

а траектория $\vec{q}(t)$ в рассматриваемой системе координат запишется в виде

$$\vec{q}(t) = \vec{C}_0 + \vec{C}_1 t + \vec{B} t^2/2 + \vec{A} t^3/6. \quad (13.31)$$

Если требуется обеспечить отлет из сферы действия Земли с нулевой относительной скоростью и прилет на сферу действия другой планеты с нулевой относительной скоростью, то краевые условия задачи будут

$$\left. \begin{aligned} \vec{q}(0) &= \vec{q}_0; \quad \dot{\vec{q}}(0) = -\vec{V}_0 = \dot{\vec{q}}_0; \\ \vec{q}(T) &= \vec{q}_k; \quad \dot{\vec{q}}(T) = -\vec{V}_k = \dot{\vec{q}}_k. \end{aligned} \right\} \quad (13.32)$$

где T — заданное время полета; $\vec{V}_0, \vec{V}_k$ — начальная и конечная скорости на транспортирующей траектории относительно соответственно Земли (планеты старта) и планеты назначения. Тогда константы задачи определяются через краевые условия следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \vec{C}_0 &= \vec{q}_0; \quad \vec{C}_1 = \dot{\vec{q}}_0; \\ \vec{A} &= \frac{6}{T^2} (\dot{\vec{q}}_0 + \dot{\vec{q}}_k) - \frac{12}{T^3} (\vec{q}_k - \vec{q}_0); \\ \vec{B} &= -\frac{2}{T} (2\dot{\vec{q}}_0 + \dot{\vec{q}}_k) + \frac{6}{T^2} (\vec{q}_k - \vec{q}_0). \end{aligned} \right\} \quad (13.33)$$

Величина интеграла $J = \int \dot{f}^2 dt$ дается формулой

$$J = |\vec{A}|^2 \frac{T^3}{3} + (\vec{A}\vec{B}) T^2 + |\vec{B}|^2 T.$$

Рассмотрим пример расчета полета к Марсу. На рис. 13.1 и 13.2 приведены траектория $\vec{q}(t)$ и закон управления $\vec{f}(t)$ для случая, когда Марс движется в плоскости

эклиптики, старт происходит 27.IX.1960 г. и время полета $T=212$ сут. Краевые условия, записанные в безразмерном виде, в этом случае таковы:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_0 &= -0,0145; & \dot{y}_0 &= -0,12826; \\ \dot{x}_K &= -0,076884; & \dot{y}_K &= -0,109856; \end{aligned} \right\} \quad (13.34)$$

$$x_0 = y_0 = x_K = y_K = 0.$$

Для получения размерных значений скоростей следует умножить значения (13.34) на скорость движения Земли в момент старта. Величина интеграла (13.4), определяю-

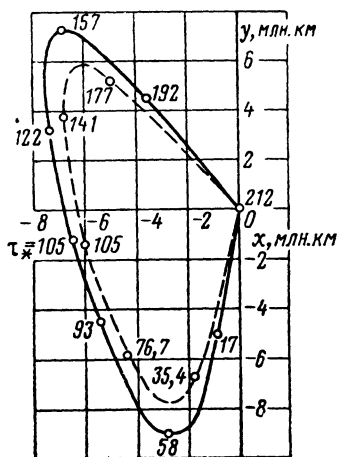
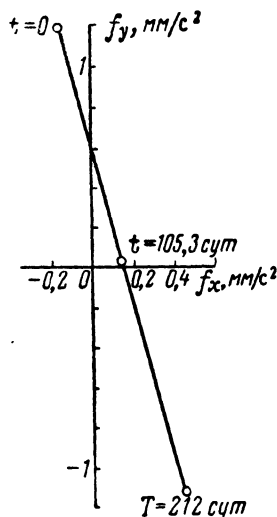


Рис. 13.1. Пример траектории полета к Марсу в транспортирующей системе координат при постоянном по величине и однократно меняющем направлении реактивном ускорении

Время полета T и время поворота тяги τ_* отмечены на траектории в сутках. Пунктир — траектория с теми же крайними условиями, но при оптимальном управлении тягой (все без учета возмущений)

ускорения силы тяги меняется существенно: от значения $f_0=1,20$ мм/с² убывает (на 105-е сутки полета) до значения, близкого к нулю ($f_{\min}=0,15$ мм/с²), а затем возрастает до $f_K=1,22$ мм/с².



до изменения направления; α_k, i_k — те же углы после поворота вектора тяги; τ — момент поворота.

Эти шесть параметров должны быть выбраны так, чтобы обеспечивалось выполнение заданных краевых условий. При этом α есть угол между осью x и проекцией вектора $\vec{f}$ на плоскость эклиптики xy , а i — угол между вектором $\vec{f}$ и осью z . Уравнения движения в транспортирующей системе без учета возмущений имеют вид

$$\ddot{x}_s = f_s^0, \quad t < \tau, \quad \ddot{x}_s = f_s^K, \quad t > \tau, \quad s = 1, 2, 3 \quad (13.35)$$

(здесь обозначено $x = x_1, y = x_2, z = x_3$). Компоненты f_s^0 и f_s^K определяются формулами:

$$\begin{aligned} f_1^0 &= f \cos \alpha_0 \sin i_0; & f_2^0 &= f \sin \alpha_0 \sin i_0; & f_3^0 &= f \cos i_0, \\ f_1^K &= f \cos \alpha_k \sin i_k; & f_2^K &= f \sin \alpha_k \sin i_k; & f_3^K &= f \cos i_k. \end{aligned}$$

Интегрируя уравнения (13.35) и требуя, чтобы при $t = 0$ было $x_s = x_s^0, \dot{x}_s = \dot{x}_s^0$, а при $t = T$ было $x_s = x_s^K, \dot{x}_s = \dot{x}_s^K$, получим систему алгебраических уравнений для определения параметров $\alpha_0, i_0, \alpha_k, i_k, f, \tau$.

Решение этой системы можно записать следующим образом. Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta V_{x_s} &= \dot{x}_s^K - \dot{x}_s^0; \quad \Delta x_s = x_s^K - x_s^0 - \dot{x}_s^0 T; \quad v^2 = \sum_{s=1}^3 (\Delta V_{x_s})^2; \\ q^2 &= \sum_{s=1}^3 (\Delta x_s)^2; \quad u = \frac{q}{T}; \quad \cos \theta = \frac{\sum_{s=1}^3 (\Delta V_{x_s})(\Delta x_s)}{qv}. \end{aligned}$$

Тогда решение системы упомянутых алгебраических уравнений будет зависеть от трех параметров: $v, q, \cos \theta$ и представится в виде

$$\frac{\tau}{T} = \frac{2(v^2 + 2u^2 - 3uv \cos \theta) \pm \sqrt{2(v^2 + 2u^2 - 3uv \cos \theta)^2 + 2(2u^2 - uv \cos \theta)^2}}{2(v^2 - 2uv \cos \theta)}$$

(знак перед радикалом выбирается из условия $0 \leq \tau/T \leq 1$);

$$f = \frac{1}{T} \frac{\sqrt{v^2 \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2 + 4u^2 - 4uv \cos \theta \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)}}{\left(\frac{\tau}{T}\right)}; \quad (13.36)$$

$$\cos i_0 = \frac{-\Delta V_{x_3}(T - \tau) + 2\Delta x_3}{f\tau T}, \quad 0^\circ \leq i_0 \leq 180^\circ;$$

$$\sin \alpha_0 = \frac{-\Delta V_{x_2}(T - \tau) + 2\Delta x_2}{f\tau T \sin i_0}; \quad \cos \alpha_0 = \frac{-\Delta V_{x_1}(T - \tau) + 2\Delta x_1}{f\tau T \sin i_0};$$

$$\cos i_k = \frac{\Delta V_{x_3}(2T - \tau) - 2\Delta x_3}{fT(T - \tau)}, \quad 0^\circ \leq i_k \leq 180^\circ;$$

$$\sin \alpha_k = \frac{\Delta V_{x_2}(2T - \tau) - 2\Delta x_2}{fT(T - \tau) \sin i_k}; \quad \cos \alpha_k = \frac{\Delta V_{x_1}(2T - \tau) - 2\Delta x_1}{fT(T - \tau) \sin i_k}.$$

Эти формулы определяют величину реактивного ускорения, его направление до и после поворота и время поворота по заданным краевым условиям и полному времени полета T . В эти формулы входят координаты x_s и компоненты $\dot{x}_s$ скоростей в транспортирующей (движущейся) системе координат.

При исследовании полета с Земли на Марс транспортирующий эллипс выбирался так, чтобы в момент $t = 0$ он проходил через Землю, а в момент t_k — через проекцию Марса на плоскость эклиптики. Пусть $V_x^I, V_y^I, V_z^I = 0$ — компоненты скорости относительно Земли в момент $t = 0$, а V_x^a, V_y^a, V_z^a — относительно Марса при $t = t_k$ в транспортирующем движении. И пусть в момент $t = t_k$ расстояние от Марса до плоскости эклиптики есть z_a . Тогда $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$; $x_1^K = x_2^K = 0$; $x_3^K = z_a$; $\dot{x}_1^0 = -V_x^I$; $\dot{x}_2^0 = -V_y^I$; $\dot{x}_3^0 = 0$; $\dot{x}_1^K = -V_x^a$; $\dot{x}_2^K = -V_y^a$; $\dot{x}_3^K = -V_z^a$.

Такой выбор граничных условий обеспечивает отлет с Земли с нулевой относительно Земли скоростью и прилет на Марс с нулевой относительно Марса скоростью. (Земля и Марс считаются нетяготеющими точками.) Для полета с Марса на Землю с теми же условиями граничные данные имеют вид

$$\begin{aligned}x_1^0 &= x_2^0 = 0; & x_3^0 &= z_a; & x_1^k &= x_2^k = x_3^k = 0; \\x_1^0 &= -V_x^a; & \dot{x}_2^0 &= -V_y^a; & \dot{x}_3^0 &= -V_z^a; \\x_1^k &= -V_x^l; & \dot{x}_2^k &= -V_y^l; & \dot{x}_3^k &= 0.\end{aligned}$$

Остановимся кратко на *общем характере зависимости параметров f* (величина ускорения тяги) и τ (время поворота) *от краевых условий*.

С этой целью рассмотрим задачу с нулевыми начальными и конечными значениями координат ($x_s^0 = x_s^k = 0$, $s=1, 2, 3$). Пусть V_0 — начальная скорость, V_k — конечная скорость, θ_0 — угол между $\vec{V}_0$ и $\vec{V}_k$; обозначим $k = V_0/V_k$; $k_0 = V_k/V_0 = 1/k$. Тогда

$$\frac{\tau}{T} = \frac{2(1 + k \cos \theta_0) - \sqrt{(1 + k^2 + 2k \cos \theta_0)^2 + (1 - k^2)^2}}{2(1 - k^2)}, \quad (13.37)$$

или

$$\frac{\tau}{T} = \frac{2(k_0^2 + k_0 \cos \theta_0) - \sqrt{(k_0^2 + 1 + 2k_0 \cos \theta_0)^2 + (k_0^2 - 1)^2}}{2(k_0^2 - 1)}. \quad (13.37a)$$

В зависимости от знака неравенства $V_0 \leq V_k$ удобнее пользоваться первой или второй из этих формул, а именно той из них, в которой отношение скоростей меньше единицы. Время поворота τ зависит от двух параметров: k и θ_0 . Эта зависимость изображена на рис. 13.3. Видим, что при заданном отношении начальной и конечной скоростей время поворота тем ближе к началу ($V_0 < V_k$) или к концу ($V_0 > V_k$) полета, чем больше угол θ_0 между $\vec{V}_0$ и $\vec{V}_k$. При фиксированном θ_0 время поворота изменяется в зависимости от отношения V_0/V_k .

Аналогично для ускорения силы тяги f имеем формулу

$$f = \frac{V_k}{T} \frac{\sqrt{\left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2 + k^2 \left(1 + \frac{\tau}{T}\right)^2 + 2k \cos \theta_0 \left(1 - \frac{\tau^2}{T^2}\right)}}{\left(\frac{\tau}{T}\right)}, \quad (13.38)$$

или

$$f = \frac{V_0}{T} \frac{\sqrt{k_0^2 \left(1 - \frac{\tau}{T}\right)^2 + \left(1 + \frac{\tau}{T}\right)^2 + 2k_0 \cos \theta_0 \left(1 - \frac{\tau^2}{T^2}\right)}}{\left(\frac{\tau}{T}\right)}. \quad (13.38a)$$

Из рис. 13.4, на котором приведена зависимость Tf/V_k от k и θ_0 , Tf/V_0 от k_0 и θ_0 , видно, что

$$f = \alpha \frac{\max(V_0, V_k)}{T}, \quad 2 < \alpha < 4, \quad (13.39)$$

где α зависит от отношения V_0/V_k и угла θ_0 , но является ограниченной величиной.

Формула (13.39) позволяет сразу оценить значение f , необходимое для осуществления заданного полета (заданы T и V_0, V_k). Величины V_0, V_k, θ_0 , а также в общем случае еще и z_a являются при известных орбитах планет старта и финиша функциями только момента отлета t_1 и момента прилета t_2 .

Ниже рассмотрен пример расчета траектории в транспортирующей системе координат. Расчет проведен для того же случая полета на Марс (со стартом 27.IX.1960 г.), для которого рассчитывалась плоская задача с оптимальным (без учета возмущений) управлением (п. 13.1.4). Траектория в транспортирующей системе изображена на рис. 13.1. Для сравнения на рис. 13.1 нанесена траектория такого же полета, но рассчитанная для оптимального случая, т. е. при линейных компонентах реактивного ускорения. Необходимое постоянное реактивное ускорение $f = 0.83$ мм/с², поворот вектора тяги происходит на 105-е сутки полета (при полном времени полета 212 суток); максимальное отклонение траектории от транспортирующего эллипса ~ 10 млн. км. Безразмерная величина $J = f^2 T$ (где f и T — безразмерные) равна 0,0695; по сравнению с величиной $J = 0,0520$, рассчитанной (без учета возмущений) для этого же примера при оптимальном управлении, оптимальное управление дает выигрыш $\sim 25\%$.

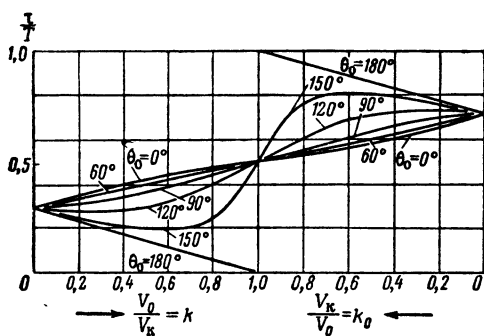


Рис. 13.3. Зависимость времени τ поворота вектора тяги от отношения начальной V_0 и конечной V_k скоростей в транспортирующей системе координат и от угла θ_0 между векторами этих скоростей

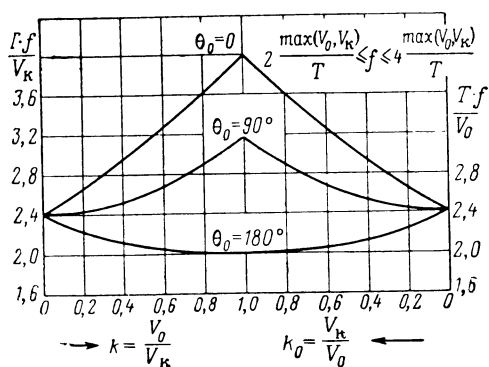


Рис. 13.4. Зависимость величины f реактивного ускорения от отношения начальной V_0 и конечной V_k скоростей, угла θ_0 между векторами этих скоростей и от времени полета T

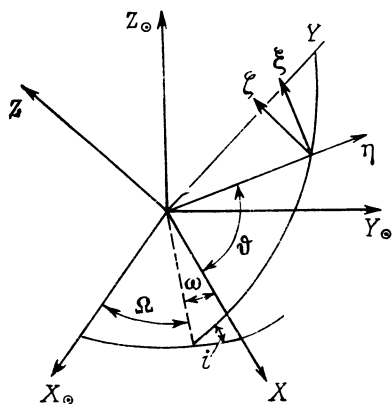


Рис. 13.5. Системы координат

В рассматриваемых примерах точные безразмерные значения J (полученные для истинного поля тяготения) составляют соответственно 0,092 и 0,065. Таким образом, оба полученных выше приближенных значения интеграла J отличаются от точных в одну сторону на 23—24%. Точность определения выигрыша от оптимизации управления примерно такова же. Для прикидочных расчетов такая точность бывает достаточна. Второе приближение (с учетом линейной части солнечных возмущений), как показано в разд. 13.1.7, дает гораздо более точный результат.

13.1.6. Интегрирование линеаризованной системы уравнений оптимального движения

В задаче об оптимальном управлении реактивным ускорением рассмотрим ее решение во втором приближении, т. е. получим решение системы (13.26)—(13.27).

Будем рассматривать безразмерные переменные r, v, t , связанные с размерными R, V, T соотношениями

$$R = \tilde{r}r; \quad T = \sqrt{\frac{\tilde{r}}{g}} t; \quad V = \sqrt{\tilde{r}g}v; \quad g = \frac{\mu}{r^2}. \quad (13.40)$$

Здесь $\tilde{r}$ — начальное расстояние от центра притяжения и g — ускорение тяготения на этом расстоянии. В линеаризованных уравнениях (13.26) предполагается, что система координат $x y z$ движется поступательно вдоль кеплеровой транспортирующей траектории. Индекс «0» означает, что коэффициенты взяты вдоль транспортирующей траектории.

Решение однородных уравнений, соответствующих системе (13.26), дает просто вариацию кеплерова движения. Решение неоднородных уравнений (13.26) возможно при любом законе изменения f_x, f_y, f_z . В частности, можно рассматривать оптимальное управление вектором реактивного ускорения $\vec{f}(f_x, f_y, f_z)$ по формуле (13.27).

Коэффициенты уравнений (13.26) и (13.27) вычисляются по формулам

$$\left. \begin{aligned} U_x &= -\frac{x}{r^3}; & U_y &= -\frac{y}{r^3}; & U_z &= -\frac{z}{r^3}; \\ U_{xx} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}; & U_{yy} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}; & U_{zz} &= -\frac{1}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}; \\ U_{xy} &= \frac{3xy}{r^5}; & U_{xz} &= \frac{3xz}{r^5}, & U_{yz} &= \frac{3zy}{r^5}. \end{aligned} \right\} \quad (13.41)$$

Выберем теперь такую абсолютную систему координат XYZ с началом в центре притяжения, чтобы плоскость транспортирующей траектории совпадала с плоскостью XY , а ось X была направлена в перигелий транспортирующей траектории (рис. 13.5).

При таком выборе системы координат будем иметь вдоль транспортирующей траектории:

$$\left. \begin{aligned} U_{xx}^0 &= \frac{1}{r_0^3} (3 \cos^2 \vartheta - 1); & U_{yy}^0 &= \frac{3 \sin^2 \vartheta - 1}{r_0^3}; & U_{zz}^0 &= \frac{-1}{r_0^3}; \\ U_{xy}^0 &= \frac{3 \cos \vartheta \sin \vartheta}{r_0^3}; & U_{xz}^0 &= U_{yz}^0 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (13.42)$$

где ϑ — истинная аномалия. В уравнениях (13.26) и (13.27) коэффициенты имеют значения (13.42).

Для интегрирования системы уравнений (13.26) удобно перейти к *вращающейся системе координат*, начало которой совпадает с началом системы $x y z$ (т. е. с точкой транспортирующей траектории), ось ξ совпадает с осью z , ось η направлена по радиусу-вектору транспортирующей траектории, а ось ζ направлена по трансверсали транспортирующей траектории в сторону движения. Имеем

$$x = \eta \cos \vartheta - \xi \sin \vartheta; \quad y = \eta \sin \vartheta + \xi \cos \vartheta; \quad z = \zeta. \quad (13.43)$$

Подставив (13.43) в уравнение (13.26), после некоторых преобразований получим уравнения движения в виде

$$\left. \begin{aligned} \ddot{\eta} - 2\dot{\xi}\omega - \omega^2\eta - \dot{\omega}\xi - \frac{2}{r_0^3}\eta &= f_\eta; \\ \ddot{\xi} + 2\dot{\eta}\omega - \omega^2\xi + \dot{\omega}\eta + \frac{1}{r_0^3}\xi &= f_\xi; \\ \ddot{\zeta} + \frac{1}{r_0^3}\zeta &= f_\zeta. \end{aligned} \right\} \quad (13.44)$$

Здесь ω — угловая скорость движения по транспортирующей траектории; f_η, f_ξ, f_ζ — проекции вектора реактивного ускорения на оси η, ξ, ζ .

Если f определяется уравнениями (13.27), то фундаментальная система решений уравнений (13.44) без правых частей будет давать фундаментальную систему решений и для (13.27); таким образом, f_η, f_ξ, f_ζ будут определены; тогда движение находится интегрированием неоднородной линейной системы (13.44) с известными правыми частями. В результате интегрирования системы (13.44) получим сводку формул, описывающих движение.

Пусть рассматривается движение в окрестности кеплеровской траектории с фокальным параметром p (безразмерным), эксцентриситетом e , истинной аномалией ϑ во вращающейся системе координат $\eta\xi\zeta$, начало которой движется по выбранной кеплеровской транспортирующей траектории. Обозначим штрихом производную по ϑ : например, $d\eta/d\vartheta = \eta'$. Переход к производной по времени (безразмерному) проводится при помощи формул

$$d\vartheta/dt = \sqrt{p/r_0^2}; \quad r_0 = pQ; \quad Q = 1/(1 + e \cos \vartheta).$$

Рассматриваемое движение будет определяться следующей сводкой формул [1]:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= C_1\eta_1 + C_2\eta_2 + C_3\eta_3 + \eta_2 F_2 + \eta_3 F_3; \quad \eta' = C_1\eta'_1 + C_2\eta'_2 + C_3\eta'_3 + \\ &+ \eta'_2 F_2 + \eta'_3 F_3; \\ \eta_1 &= \frac{1}{e} [\eta_3 + \cos \vartheta]; \quad \eta'_1 = \frac{1}{e} [\eta'_3 - \sin \vartheta]; \\ \eta_2 &= \sin \vartheta; \quad \eta'_2 = \cos \vartheta; \\ \eta_3 &= -Q^2 \cos \vartheta + Q^2 \frac{e}{1-e^2} \sin^2 \vartheta + \sin \vartheta \frac{e}{(1-e^2)^2} \{(1+2e^2) \times \\ &\times Q \sin \vartheta - 3e\tilde{E}\}; \\ \eta'_3 &= Q^2 \sin \vartheta \left[1 + \frac{e \cos \vartheta}{1-e^2} \right] + \frac{e \cos \vartheta}{(1-e^2)^2} \{(1+2e^2) Q \sin \vartheta - 3e\tilde{E}\}; \\ F_2 &= -p^3 \int \frac{\eta_3}{Q} \left(\frac{2J_\xi}{p^3} + Q^3 f_\eta \right) d\vartheta, \quad J_\xi = p^3 \int Q^3 f_\xi d\vartheta; \\ F_3 &= p^3 \int \frac{\sin \vartheta}{Q} \left(\frac{2J_\xi}{p^3} + Q^3 f_\eta \right) d\vartheta, \quad J_\xi(\vartheta_0) = 0; \\ \xi &= C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + C_3\xi_3 + C_4\xi_4 + Q\psi, \quad \xi' = Q \left(e\xi \sin \vartheta + C_1 - 2\frac{\eta}{Q} + J_\xi \right); \\ \xi_1 &= \frac{e}{(1-e^2)^2} Q \sin \vartheta \{5 - 2e^2 + (4e - e^3) \cos \vartheta\} - \frac{3\tilde{E}}{(1-e^2)^2 Q}; \\ \xi_2 &= -\frac{Q}{e} [1 - (1 + e \cos \vartheta)^2]; \\ \xi_3 &= \frac{Q \sin \vartheta}{(1-e^2)^2} [2 + e^2 + e(1 + 2e^2) \cos \vartheta] - \frac{3e}{(1-e^2)^2} \frac{1}{Q} \tilde{E}; \\ \xi_4 &= Q; \\ \psi &= \int \left\{ J_\xi - \frac{2}{Q} (\eta_2 F_2 + \eta_3 F_3) \right\} d\vartheta; \quad \tilde{E} = \frac{E}{\sqrt{1-e^2}}; \\ \cos E &= Q(e + \cos \vartheta), \quad \sin E = \sqrt{1-e^2} Q \sin \vartheta; \\ \zeta &= C_5\zeta_5 + C_6\zeta_6 + \zeta_5 z_5 + \zeta_6 z_6; \quad \zeta' = C_5\zeta'_5 + C_6\zeta'_6 + \zeta'_5 z_5 + \zeta'_6 z_6; \\ \zeta_5 &= Q \sin \vartheta; \quad \zeta'_5 = Q^2(e + \cos \vartheta); \\ \zeta_6 &= Q \cos \vartheta; \quad \zeta'_6 = -Q^2 \sin \vartheta; \\ z_5 &= p^3 \int f_\zeta \cos \vartheta Q^3 d\vartheta; \quad z_6 = -p^3 \int f_\zeta Q^3 \sin \vartheta d\vartheta; \\ C_1 &= 2 \frac{\eta_0}{Q_0} + \frac{1}{\zeta_0} (\xi'_0 - Q_0 e \sin \vartheta_0 \xi_0); \end{aligned} \right\} \quad (13.45)$$

$$\left. \begin{aligned}
 C_2 &= \frac{1}{Q_0^2} (k_0 \gamma_3'^0 - k_0' \gamma_3^0); \\
 C_3 &= -\frac{1}{Q_0^2} (k_0 \gamma_2'^0 - k_0' \gamma_2^0); \quad k_0 = \eta_0 - C_1 \gamma_1^0; \quad k_0' = \eta_0' - C_1 \gamma_1'^0; \\
 C_4 &= \frac{\xi_0}{Q_0} - \xi_1^0 \frac{C_1}{Q_0} - \xi_2^0 \frac{C_2}{Q_0} - \xi_3^0 \frac{C_3}{Q_0}; \\
 C_5 &= \zeta_0 \sin \vartheta_0 + \frac{\zeta_0'}{Q_0} \cos \vartheta_0; \\
 C_6 &= \zeta_0 (e + \cos \vartheta) - \frac{\zeta_0'}{Q_0} \sin \vartheta_0.
 \end{aligned} \right\} \quad (13.45)$$

Сводные формулы (13.45) выписаны для произвольного управления вектором $\vec{f}$ реактивного ускорения.

Пусть теперь $\vec{f}$ удовлетворяет уравнениям оптимального управления. Тогда, как следует из разд. 13.1.2, компоненты вектора $\vec{f}$ по осям ξ, η, ζ будут даваться формулами

$$f_\xi = \sum_{i=1}^4 a_i \xi_i; \quad f_\eta = \sum_{i=1}^3 a_i \eta_i; \quad f_\zeta = \sum_{j=s}^6 a_j \zeta_j. \quad (13.46)$$

Здесь a_i, a_j — константы, подлежащие определению через краевые условия. Подставляя (13.46) в формулы (13.45), получим, в частности,

$$\left. \begin{aligned}
 J_\xi &= \sum_{i=1}^4 a_i J_{\xi i}; \quad J_{\xi i} = p^3 \int Q^3 \xi_i d\vartheta; \\
 F_2 &= \sum_{i=1}^4 a_i F_{2i}; \quad F_{2i} = -p^3 \int \frac{J \sin \vartheta}{Q} \left(\frac{2J_{\xi i}}{p^3} + Q^3 \eta_i \right) d\vartheta; \\
 F_3 &= \sum_{i=1}^4 a_i F_{3i}; \quad F_{3i} = p^3 \int \frac{\sin \vartheta}{Q} \left(\frac{2J_{\xi i}}{p^3} + Q^3 \eta_i \right) d\vartheta,
 \end{aligned} \right\} \quad (13.47)$$

причем

$$\left. \begin{aligned}
 \psi &= \sum_{i=1}^4 a_i \psi_i; \quad \psi_i = \int \left\{ J_{\xi i} - \frac{2}{Q} (\eta_2 F_{2i} + \eta_3 F_{3i}) \right\} d\vartheta; \\
 z_5 &= \sum_{j=5}^6 a_j z_{5j}; \quad z_{5j} = p^3 \int \zeta_j Q^3 \cos \vartheta d\vartheta; \\
 z_6 &= \sum_{j=5}^6 a_j z_{6j}; \quad z_{6j} = -p^3 \int \zeta_j Q^3 \sin \vartheta d\vartheta.
 \end{aligned} \right\} \quad (13.48)$$

Теперь a_i и a_j определяются из системы алгебраических уравнений:

$$\left. \begin{aligned}
 \eta_k &- \sum_{i=1}^3 C_i \eta_{ik} = \sum_{i=1}^4 a_i (\eta_{2k} F_{2ik} + \eta_{3k} F_{3ik}); \\
 \eta'_k &- \sum_{i=1}^3 C_i \eta'_{ik} = \sum_{i=1}^4 a_i (\eta'_{2k} F_{2ik} + \eta'_{3k} F_{3ik}); \\
 \xi_k &- \sum_{i=1}^4 C_i \xi_{ik} = Q_k \sum_{i=1}^4 a_i \psi_{ik}; \\
 \xi'_k &- Q_k \left(C_1 + e \sin \vartheta_k \xi_k - 2 \frac{\eta_k}{Q_k} \right) = Q_k \sum_{i=1}^4 a_i J_{\xi ik};
 \end{aligned} \right\} \quad (13.49)$$

$$\left. \begin{aligned} \zeta_k - \sum_{j=5}^6 C_j \zeta_{jk} &= \sum_{j=5}^6 a_j (\zeta_k z_{5jk} + \zeta_{6k} z_{6jk}); \\ \zeta'_k - \sum_{j=5}^6 C_j \zeta'_{jk} &= \sum_{j=5}^6 a_j (\zeta'_k z_{5jk} + \zeta'_{6k} z_{6jk}). \end{aligned} \right\} \quad (13.49)$$

Здесь индекс «к» означает конечные значения переменных.

Формулы (13.45)—(13.49) полностью решают *линеаризованную задачу об оптимальном движении КА*. Входящие в эти формулы квадратуры могут быть взяты по крайней мере частично. Выражения квадратур в явном виде очень громоздки. Практически при серийном расчете задач эти квадратуры находятся численно.

К выписанным формулам следует добавить формулу для вычисления интеграла $J_p = \int f_p^2 dt$. Здесь f_p — размерное значение модуля реактивного ускорения, t — размерное время; J_p выражается через безразмерное значение J формулой

$$J_p = \frac{1}{r} \left(\frac{\mu}{r} \right)^{3/2} J; \quad J = p^{3/2} \int f^2 Q^2 d\vartheta. \quad (13.50)$$

Эту квадратуру тоже удобнее находить численно.

Пусть $X_0 Y_0 Z_0$ — абсолютная система координат, причем ось Z_0 перпендикулярна плоскости эклиптики, ось X_0 направлена на точку весеннего равноденствия. Положение ранее введенной системы ξ, η, ζ относительно системы $X_0 Y_0 Z_0$ дается углами $\Omega, \omega, i, \vartheta$ (рис. 13.5), которые дают соответственно положение восходящего узла орбиты, положение перигелия орбиты, наклон орбиты к плоскости эклиптики и истинную аномалию. Пусть система $x y z$ имеет оси, параллельные осям $X_0 Y_0 Z_0$, но начало координат совпадает с началом координат системы ξ, η, ζ .

Матрица перехода между этими системами и ее производная будут

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad A' = \begin{pmatrix} -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица обратного перехода и ее производная будут

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad (A^{-1})' = \begin{pmatrix} -a_{21} & a_{11} & 0 \\ -a_{22} & a_{12} & 0 \\ -a_{23} & a_{13} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\sin u \cos \Omega - \cos u \sin \Omega \cos i; & a_{12} &= -\sin u \sin \Omega + \cos u \cos \Omega \cos i; \\ a_{21} &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i; & a_{22} &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i; \\ a_{31} &= \sin i \sin \Omega; & a_{32} &= -\sin i \cos \Omega; \\ a_{13} &= \cos u \sin i; & a_{23} &= \sin u \sin i; & a_{33} &= \cos i. \end{aligned}$$

$$(u = \omega + \vartheta).$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = (A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} A + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} A' \quad (13.51)$$

и, наоборот,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (A^{-1}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (A^{-1}) \begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \\ \zeta' \end{pmatrix} + (A^{-1})' \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}. \quad (13.52)$$

Здесь штрих означает производную по истинной аномалии ϑ .

Расчет динамических и энергетических характеристик траекторий ведется в следующем порядке.

1. По заданным моменту старта t_1 и моменту финиша t_2 рассчитывается транспортирующая траектория, лежащая в плоскости эклиптики и имеющая в моменты t_1, t_2 координаты, совпадающие с координатами проекций планет на плоскость эклиптики. Расчет транспортирующих траекторий ведется по формулам кеплерова движения.

2. Вычисляются краевые условия ($x_0, y_0, z_0; x_0, y_0, z_0; x_k, y_k, z_k; x_k, y_k, z_k$) в относительной системе координат и пересчитываются на систему координат (ξ, η, ζ) по формулам (13.51).

3. По формулам (13.45)—(13.49) решается красная задача и рассчитываются характеристики траектории в транспортирующей вращающейся системе координат.

4. По формулам (13.52) параметры траектории могут быть пересчитаны в транспортирующую поступательно-движущуюся систему.

При желании могут быть рассчитаны траектории и в абсолютной системе координат.

13.1.7. Примеры расчета некоторых траекторий. Сравнение с точным решением

Полученные по предыдущим формулам характеристики траекторий могут быть использованы в качестве первого приближения для расчета обычным итерационным методом точной краевой задачи (13.21)—(13.24).

В настоящем разделе даны примеры расчета некоторых траекторий полета к Марсу, Венере, Юпитеру, проведено сравнение точного и приближенного расчетов.

На рис. 13.6—13.9 приведены некоторые характеристики полета к Марсу. Рис. 13.6 и 13.7 содержат результаты точного и приближенного расчетов модуля реактивного ускорения и его направления для полета со стартом 28.IX.1960 г. и финишем 28.IV.1961 г. Видно хорошее совпадение точного и приближенного расчетов. (Более подробный анализ точностей будет дан ниже). На рис. 13.8 изображены для того же полета: точная траектория, транспортирующий эллипс, траектория, рассчитанная по линейным уравнениям предыдущего раздела; на рис. 13.9 — траектория, рассчитанная по линейным уравнениям и изображенная в транспортирующей системе координат. Отклонения от начала координат, т. е. отклонения приближенной траектории от транспортирующего эллипса, не-

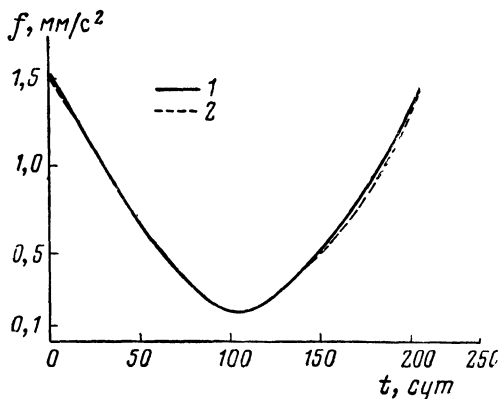


Рис. 13.6. Зависимость величины реактивного ускорения f от времени t :

1 — точный расчет; 2 — приближенный расчет

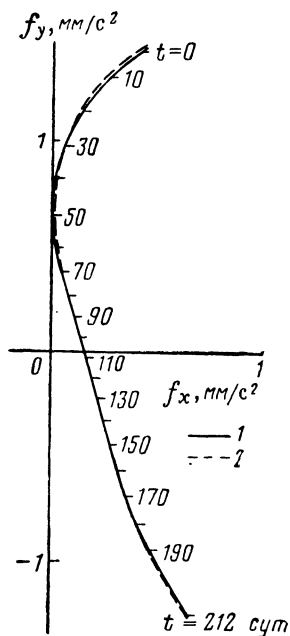


Рис. 13.7. Изменение величины и направления реактивного ускорения:

1 — точный расчет; 2 — приближенный расчет

лики (менее 7 млн. км). Еще меньше (на порядок) отклонения точной траектории от приближенной.

Как показано в разд. 13.1.4, оптимальная зависимость компонент f_x , f_y , f_z от времени линейная, если не учитывать возмущений. С учетом возмущений это тем точнее, чем больше максимальное значение модуля реактивного ускорения. А модуль ускорения велик, если мало время полета. При больших временах полета реактивное ускорение мало и, как показывают точные и приближенные расчеты с учетом возмущений, годограф ускорений сильно отличается от линейного. Некоторые примеры годографов $f_y(f_x)$ приведены на рис. 13.7, 13.10, 13.11. На рис. 13.10 изображен годограф $f_y(f_x)$ (точный расчет) для полета на Марс, длящегося 420 сут. (Старт 17.VIII.1964 г., финиш 11.X.1965 г.). Видим, что годограф резко нелинеен. На рис. 13.11 зависимость $f_y(f_x)$ приведена для полета на Марс, длящегося 130 сут. (Старт 14.I.1965 г., финиш 24.V.1965 г.). Зависимость $f_y(f_x)$ в этом случае близка к линейной. Роль компонента f_z всегда невелика. Для сравнения на рис. 13.12 изображены точные зависимости $f_x(t)$; $f_y(t)$; $f_z(t)$ для полета со стартом 15.XI.1964 г. и финишем 11.X.1965 г.

Истинные оптимальные траектории при полете на большие угловые дальности требуют тем меньшего расхода топлива, чем больше угловая дальность и время полета. Аналитически это означает, что зависимость интеграла (13.4) от полного времени полета T является монотонной и с увеличением T интеграл J уменьшается.

На рис. 13.13 приведена зависимость $J(T)$, причем $T=t_2-t_1$, где t_1 — время старта (время финиша t_2 фиксировано). На этом рисунке приведены результаты точных расчетов и приближенных (с учетом и без учета солнечных возмущений в транспортирующей

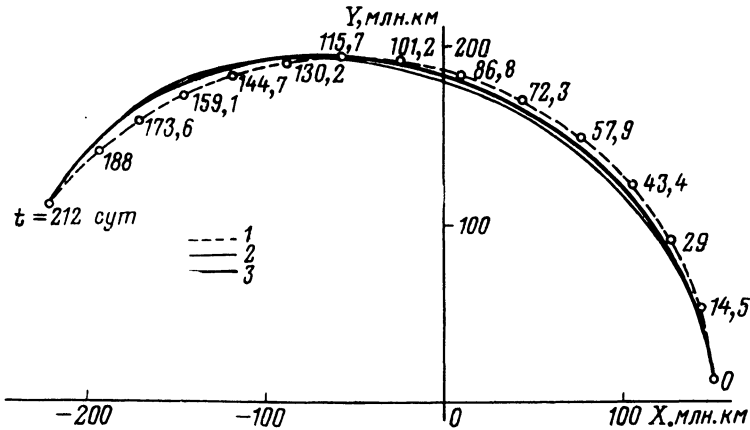


Рис. 13.8. Траектории полета к Марсу:
1—транспортирующий эллипс; 2—приближенная траектория; 3—точная траектория

щей системе координат); рассматриваются полеты к Венере с финишем 18.VII.1964 г. Видна область, в которой приближенный расчет дает хорошее совпадение с точным. В табл. 13.1 приведены характеристики полета с Земли на Марс, а также (в последней строке таблицы) с Марса на Землю. В табл. 13.2 содержатся аналогичные характеристики для полетов с Земли на Венеру. В первой колонке таблиц указаны даты старта и финиша. В последующих колонках расположены следующие величины:

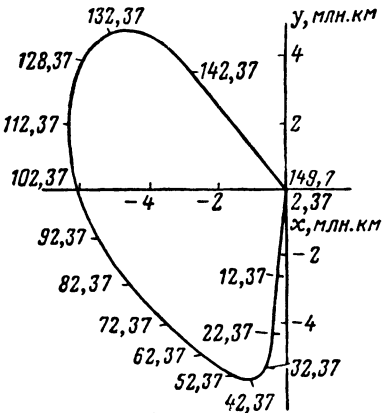


Рис. 13.9. Траектория в транспортирующей системе координат.
Вдоль траектории указаны значения истинной аномалии на транспортирующем эллипсе

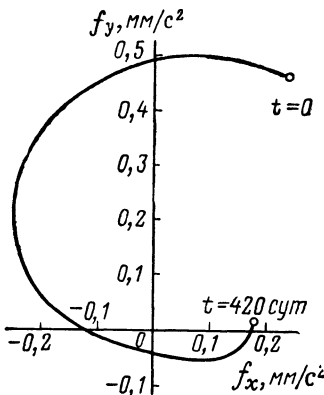


Рис. 13.10. Изменение величины и направления реактивного ускорения

$j = \int_0^T f^2 dt$ в $\text{м}^2/\text{с}^3$, T — полное время полета в сутках, Φ — угловая дальность полета, f_k — конечная величина модуля реактивного ускорения в $\text{мм}/\text{с}^2$, f_0 — начальная величина модуля реактивного ускорения в $\text{мм}/\text{с}^2$.
В клетках таблиц, содержащих J , f_0 , f_k , выписаны по три значения каждой из этих величин. Первое число получено по методу, описанному в разд. 13.1.4, т. е. без учета солнечных возмущений в транспортирующей системе координат. Иначе говоря, первое число — характеристика полета в первом приближении. Второе число получено описанным в разд. 13.1.6 методом и дает характеристику во втором приближении. Наконец, третье число получено обычным итерационным расчетом краевой задачи (13.23) для точных уравнений (13.21) и (13.22).

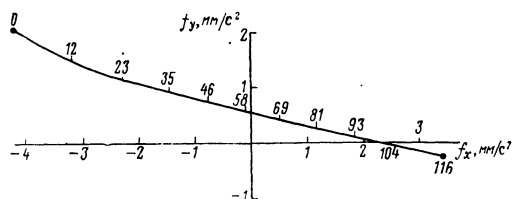


Рис. 13.11. Изменение величины и направления реактивного ускорения.

Вдоль годографа указано время полета в сутках

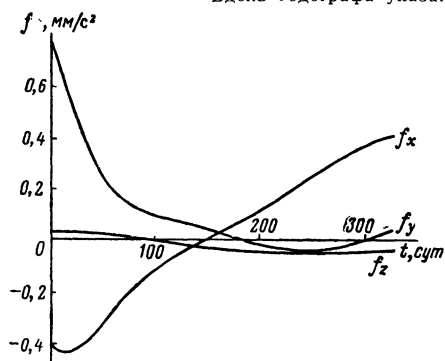


Рис. 13.12. Компоненты реактивного ускорения

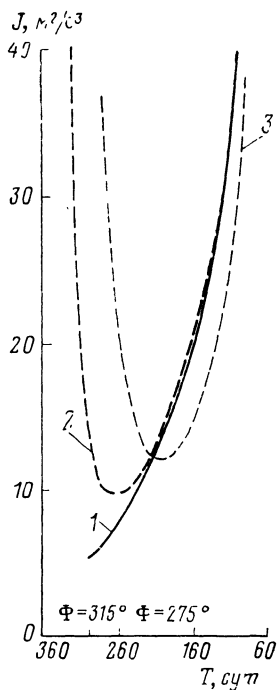


Рис. 13.13. Зависимость J от длительности полета T . Вдоль оси T указаны также угловые дальности Φ полета:

1—точный расчет; 2—расчет во втором приближении; 3—расчет в первом приближении

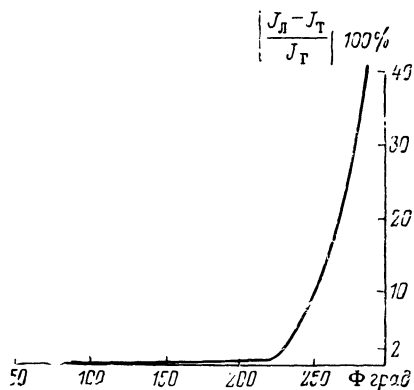


Рис. 13.14. Зависимость ошибки приближенного расчета величины J от угловой дальности Φ полета (для полетов к Марсу и Венере)

В седьмой колонке указано отличие значения J во втором приближении ($J_{л}$) от точного значения $J_{т}$ в процентах по отношению к $J_{т}$.

В первой таблице, кроме того, для сравнения даются величины f_c , J_c — первые приближения характеристик неоптимальных полетов, а именно полетов с постоянным по величине и однократно меняющим направление реактивным ускорением. Здесь обозначено: f_c — величина реактивного ускорения в мм/с², J_c — значение $\int f^2 dt = f_c^2 T$ в м²/с³.

Эти характеристики вычислены без учета солнечных возмущений в транспортирующей системе координат по методу, изложенному в разд. 13.1.5, и могут сравниваться только с первым приближением оптимальных характеристик. Но учитывая, что влияние солнечных возмущений в процентном отношении почти одинаково для полетов с разным управлением (при одинаковых датах старта и финиша), по числам, приведенным в табл. 13.1, можно оценить поправку на влияние солнечных возмущений и для указанного случая неоптимального полета.

Таблица 13.1

Характеристики полетов к Марсу

Дата старта и финиша	J м ² /с ³	T сут	Φ град	f_k мм/с ²	f_0 мм/с ²	$\left \frac{J_{л}-J_{т}}{J_{т}} \right \cdot 100\%$	f_c мм/с ²	J_c м ² /с ³
14.I.1965	60,88	130	89,06	4,08	3,80	0,13	2,67	80,13
	71,29			4,54	4,64			
24.V.1965	71,20			4,485	4,71			
28.IX.1960	9,33	212	147,38	1,22	1,21	0,09	0,82	12,30
	11,53			1,44	1,51			
28.IV.1961	11,54			1,43	1,52			
15.XI.1964	3,60	330	222,65	0,62	0,61	0,94	0,41	4,80
	3,23			0,405	0,89			
11.X.1965	3,20			0,42	0,88			
8.VII.1964*	3,67	360	227,33	0,61	0,58	1,84	0,40	4,90
	3,32			0,935	0,31			
3.VII.1965	3,26			0,925	0,315			

Анализ табл. 13.1 и 13.2 показывает, что приближенный метод расчета обладает достаточно высокой точностью для наиболее интересных случаев, когда полное время полета не очень велико. При полетах на угловую дальность 225°—235° расчет обеспечивает точность в определении J (а также f) в 1—5%. С увеличением угловой дальности неточность расчета быстро возрастает и, наоборот, при угловых дальностях, меньших, чем 225°—235°, точность метода весьма велика и в некоторых случаях (при $\Phi < 180^\circ$) вычисленные характеристики отличаются от точных на десятки и сотые доли процента.

На рис. 13.14 приведена зависимость величины $|(J_{л}-J_{т})/J_{т}| \cdot 100\%$ от угловой дальности Φ . Этот график характеризует точность приближенного метода расчета.

Расчет по этому методу требует примерно в 10 раз меньше машинного времени, чем обычный итерационный расчет краевой задачи для точных уравнений.

Расчет полетов к Юпитеру по приближенному методу дает меньшую точность, чем расчет полетов к Марсу и Венере (при сравнимых угловых дальностях полета). При времени полета 549 дней и при угловой дальности полета 200° отличие приближенного значения J от точного составляет около 12% (с завышением), т. е. точность на порядок хуже, чем в расчетах полетов к Марсу и Венере. При меньших угловых дальностях (150°—170°) точность будет порядка 1—5%, т. е. вполне приемлемой. Для полетов к Юпитеру отклонения приближенной траектории от транспортирующего эллипса достигают 50—60 млн. км, что не только абсолютно, но и относительно (по отношению к пройденному расстоянию) больше, чем при полетах к Марсу и Венере (приблизительно на порядок). Поэтому точность расчета полетов к Юпитеру и оказывается меньше.

Представление о характеристиках полета к Юпитеру дает табл. 13.3, где приняты обозначения такие же, как и в табл. 13.1 и 13.2, только вместо f_0 и f_k введено $f_{\max}$ — наибольшее из значений f_0 , f_k ; приведены результаты расчетов только по приближенной методике второго приближения (разд. 13.1.6).

Метод транспортирующих траекторий позволяет быстро и достаточно точно рассчитывать характеристики космических полетов при наличии реактивного ускорения. Точность определения основных характеристик полетов составляет 1—2% для полетов к Марсу и Венере с угловыми дальностями порядка 200°—220°. При уменьшении угло-

* Полет с Марса на Землю.

вых дальностей точность растет, при увеличении — резко падает. Точность падает также с ростом расстояния до орбиты планеты назначения, поэтому полеты к Юпитеру рассчитываются менее точно, чем полеты к Марсу и Венере (при сравнимых угловых дальностях).

Таблица 13.2

Характеристики полетов к Венере

Дата старта и финиша	J м ² /с ³	T сут	Φ град	f_k мм/с ²	f_0 мм/с ²	$\left \frac{J_{\text{л}} - J_{\text{т}}}{J_{\text{т}}} \right 100\%$
22.III.1964	19,03	121	136,35	2,51	2,09	0,04
	26,44			4,02	1,85	
21.VII.1964	26,43			4,08	1,845	
11.XII.1963	12,65	220	234,79	1,29	1,50	5,18
	11,975			2,25	1,26	
18.VII.1964	11,385			2,24	1,15	
21.XI.1963	15,45	240	255,05	1,37	1,58	11,48
	10,39			2,01	1,19	
18.VII.1964	9,32			1,95	1,04	
1.XI.1963	22,11	260	275,16	1,62	1,77	25,81
	9,65			1,85	1,17	
18.VII.1964	7,67			1,70	0,93	

Таблица 13.3

Характеристики полетов к Юпитеру

Дата старта и финиша	J м ² /с ³	T сут	Φ град	f_{max} мм/с ²
1.VII.1965	36,71	549	198	1,60
1.I.1967				
31.VII.1965	39,80	519	170	1,92
1.I.1967				
30.VIII.1965	49,01	489	144	2,60
1.I.1967				

Заметим, что при оптимальном управлении реактивным ускорением возможны полеты со сколь угодно малым реактивным ускорением, запасом топлива, значением интеграла J . Однако такой полет требует весьма большого полного времени полета, причем тем большего, чем меньше значение интеграла J . При оптимальном управлении реактивным ускорением для полетов к Марсу и Венере с возвращением на Землю приблизительно в полугодагодичные сроки требуются максимальные реактивные ускорения 1,5—3 мм/с² и расход интеграла в несколько десятков м²/с³.

Для полетов к Юпитеру с возвращением примерно в трехгодичный срок с максимальным реактивным ускорением 2—3 мм/с² требуется значение J порядка 100 м²/с³.

Для полетов в те же сроки между сферами действия планет с постоянным однократно переключаемым вектором реактивного ускорения требуются энергетические затраты на 20—25% больше (по значению интеграла J), чем при оптимальном управлении тягой.

13.2. РАЗГОН КА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ЗЕМЛИ

13.2.1. Разгон с касательным постоянным ускорением

Если КА уже выведен на орбиту вокруг Земли, то с помощью двигателей малой тяги он может быть разогнан до параболической (или гиперболической) скорости по спиральной траектории вокруг Земли (рис. 13.15). Обозначим r — расстояние от центра тяготения, V — скорость КА, t — время полета и введем безразмерные величины

$$\varrho = \frac{r}{r_0}; \quad v = \frac{1}{\sqrt{g_0 r_0}} V; \quad \tau = \sqrt{\frac{g_0}{r_0}} t; \quad f = \frac{f_p}{g_0}, \quad (13.53)$$

где индексом «0» помечены начальные значения величин, а g_0 — ускорение тяготения на расстоянии r_0 от центра притяжения.

Пусть разгон осуществляется с *начальной круговой орбиты* с помощью *постоянного касательного* ускорения $f = \text{const}$. Тогда параметры траектории в конце участка разгона (в момент достижения *параболической* скорости) описываются следующими приближенными (точность 5—10%) формулами [3]:

$$\varrho_k = \sqrt{\frac{1}{f}}; \quad v_k = \sqrt[4]{4f}; \quad \tau_k = \frac{1}{f(1 + \sqrt[4]{4f})}. \tag{13.54}$$

Число витков n спирали разгона с большой точностью определяется формулой [3]

$$n = 0,04 \cdot \frac{1}{f}. \tag{13.55}$$

При разгоне с орбит, близких к круговым, среднее за оборот по орбите значение оскулирующего эксцентриситета $e_{\text{ср}}$ и безразмерная оскулирующая большая полуось орбиты a связаны соотношением [7]

$$e_{\text{ср}}^2 = \frac{c}{a} + 4f^2a^4; \quad c = a_0e_{\text{ср}0}^2 - 4f^2a_0^5. \tag{13.56}$$

Из (13.56) видно, что $e_{\text{ср}}$ с ростом a сначала уменьшается, достигает минимума и только после этого начинает возрастать. Достижению параболической скорости отвечает значение $e_{\text{ср}} = 1$.

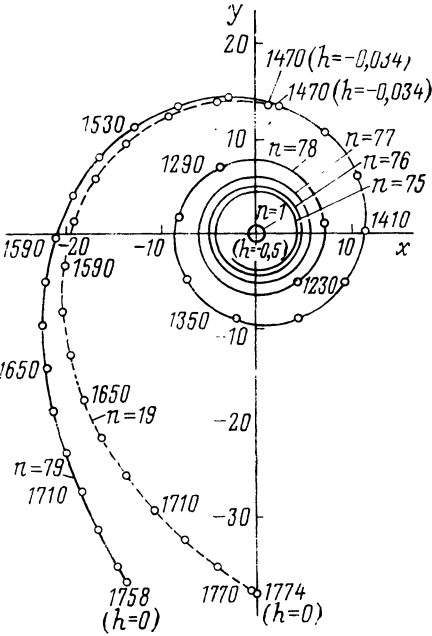


Рис. 13.15. Пример траекторий разгона с исходной круговой орбиты (в безразмерных переменных).

Сплошная линия — траектория при постоянном касательном ускорении $f = 0,0005 \text{ мм/с}^2$. Пунктирная линия — траектория при таком же по величине трансверсальном ускорении. Вдоль траектории указано безразмерное время полета и номера витков n . Витки 2—74 не изображены. В скобках даны безразмерные значения h полной энергии

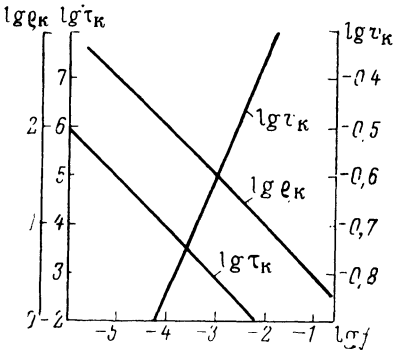


Рис. 13.16. Зависимость между логарифмами безразмерных параметров траекторий разгона с исходной круговой орбиты

В табл. 13.4 приведены численные значения некоторых параметров разгона, полученных численным интегрированием уравнений движения [7].

На рис. 13.16 приведены зависимости $\lg \varrho_k$, $\lg \tau_k$, $\lg v_k$ от $\lg f$ [3]. Эти графики удобны для расчета параметров разгона.

Таблица 13.4

Параметры разгона с круговой орбиты				Разгон с орбиты с высотой 300 км над поверхностью Земли			
Безразмерные параметры							
f	τ_k	v_k	ϱ_k	f_p мм/с ²	t_k сут	V_k км/с	r_k км
$5 \cdot 10^{-3}$	157	0,401	12,438	44,7	1,5	3,10	82 970
10^{-3}	856	0,268	27,846	8,95	8,5	2,07	185 760
$5 \cdot 10^{-4}$	1758	0,225	39,506	4,5	17,5	1,74	263 150
10^{-4}	9192	0,151	87,715	0,9	92	1,17	585 150

Уравнения движения под действием касательного реактивного ускорения имеют первый интеграл — интеграл энергии, записываемый в безразмерной форме в виде

$$\frac{v^2}{2} - \frac{1}{q} - f(s - s_0) = h, \quad (13.57)$$

где s — безразмерный путь, пройденный аппаратом вдоль траектории.

Уравнения движения под действием касательного постоянного ускорения f обладают определенной автомодельностью. Пусть движение при $f=1$ определяется функциями

$$v_1(\tau_1); \quad q_1(\tau_1), \quad (13.58)$$

где τ_1 — текущее безразмерное время для случая $f=1$. Тогда одновременно с решением (13.58) существует серия решений для произвольных f :

$$\left. \begin{aligned} q(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{f}} q_1(\tau_1); \quad v(\tau) = \sqrt[4]{f} v_1(\tau_1); \\ \tau &= \frac{1}{\sqrt[4]{f}} \tau_1. \end{aligned} \right\} \quad (13.59)$$

Движение можно рассматривать в оскулирующих переменных [8]: p — фокальный параметр орбиты, e — эксцентриситет орбиты, Φ — истинная аномалия, σ — долгота перигея, t — время. «Автомодельные» переменные вводятся соотношениями

$$z = \frac{p}{P}; \quad \tau = \frac{\sqrt{\mu}}{P^{3/2}} t; \quad P = \sqrt{\frac{\mu}{2f_p}}; \quad \mu = g_0 r_0^2. \quad (13.60)$$

Решение уравнений движения в оскулирующих элементах дает, вообще говоря, колеблющиеся функции с периодом колебаний, примерно равным периоду обращения.

Пример гладкого решения (но не для постоянного f) — логарифмическая спираль — рассмотрен в работе [10]. Для $f=\text{const}$ существует класс гладких решений, в определенном смысле универсальных [8].

13.2.2. Оптимальный разгон

Разгон, минимизирующий значение J , получается, если вектор реактивного ускорения по определенному закону колеблется между касательной и трансверсалью траектории, оставаясь по модулю почти постоянным. Векторные дифференциальные уравнения, определяющие оптимальное движение, таковы:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q} - \text{grad } U &= \vec{f}; \\ \dot{\vec{f}} - A\vec{f} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad A = \begin{vmatrix} U_{xx} & U_{xy} & U_{xz} \\ U_{yx} & U_{yy} & U_{yz} \\ U_{zx} & U_{zy} & U_{zz} \end{vmatrix}; \quad U = \frac{1}{q}. \quad (13.61)$$

В момент достижения параболической скорости вектор ускорения должен быть направлен по касательной и, кроме того, $\frac{d}{dt}\left(\frac{v}{f}\right) = 1$. На участке спиралевидного движения с большой точностью можно положить, что оптимальный закон управления реактивным ускорением при разгоне с круговой орбиты таков: вектор $\vec{f}_{\text{опт}}$ *постоянен по модулю и делит пополам угол между трансверсалью и касательной* к траектории [3]. На рис. 13.15 изображены траектории разгона с постоянным касательным и с постоянным трансверсальным ускорением при разгоне с круговой орбиты. На участках спиралевидного движения эти траектории весьма близки друг к другу, и на этих участках можно считать, что оптимальный разгон близок к разгону с постоянным касательным ускорением.

В случае, когда трансверсальная компонента f_τ реактивного ускорения постоянна, а радиальная $f_q = \ddot{q}$, уравнение в проекции на трансверсаль интегрируется и при $q_0=1$ получаются формулы [11]:

$$q = \frac{1}{(1 - f_\tau t)^2}; \quad \dot{q} = \frac{2f_\tau}{(1 - f_\tau t)^3}; \quad f_q = \ddot{q} = \frac{6f_\tau^2}{(1 - f_\tau t)^4}. \quad (13.62)$$

Эти формулы дают достаточно хорошее приближение оптимального движения на участках полета по спиралевидной траектории, т. е. при скоростях, не близких к параболическим.

13.3. АНАЛИЗ ТРАЕКТОРИЙ МЕЖПЛАНЕТНЫХ ПОЛЕТОВ С ДВИГАТЕЛЯМИ ПОСТОЯННОЙ МОЩНОСТИ

13.3.1. Оценка влияния «пространственности» движения и введение эклиптической транспортирующей системы координат

Реальные траектории полета между сферами действия Земли и, например, Марса, будут, как правило, *пространственными*. Это обусловлено тем, что в начале и в конце движения гелиоцентрическая скорость КА должна совпадать соответственно со скоростью Земли и Марса, а орбита Марса наклонена к эклиптике на угол $i_\alpha \approx 1^\circ 50'$. При этом Марс отклоняется от плоскости эклиптики на максимальное расстояние $z_{\alpha \max}$ порядка 8 млн. км и может иметь по нормали в эклиптике максимальную скорость $\dot{z}_{\alpha \max}$ порядка 0,8 км/с, а транспортирующие траектории могут существенно отклоняться от плоскости эклиптики. Плоскость транспортирующего движения становится ортогональной к плоскости эклиптики, когда эклиптические долготы начальной и конечной точек отличаются на 180° ; при этом крайние скорости в транспортирующей системе будут велики — порядка скорости Земли. Это приводит к большим отклонениям траектории от начала транспортирующей системы координат по нормали z к плоскости xy транспортирующего движения, и даже приближенно нельзя пренебрегать возмущающей силой.

Чтобы избежать больших отклонений по нормали z , следует транспортирующее движение рассчитывать не по истинному Марсу, а по *фиктивному*, движущемуся в плоскости эклиптики, т. е. с нулевым наклонением орбиты и неизменными остальными элементами орбиты. Соответствующую транспортирующую систему координат называют *эклиптической* [4]. Траектория КА в ней, как и в прежней системе, будет начинаться в начале координат. Однако кончаться она будет не в начале, а на оси z в той ее точке z_α , в которой находится истинный Марс в конечный момент движения. (Смещением проекции истинного Марса на плоскость эклиптики от фиктивного Марса здесь можно пренебречь ввиду малости наклона.)

В эклиптической транспортирующей системе координат проекции на плоскость xy , т. е. плоскость эклиптики, начальной и конечной скоростей будут такие же, как и в плоской задаче. Такими же будут и отклонения траектории от начала координат в проекции на плоскость эклиптики.

По нормали к эклиптике отклонения, как можно показать [4], будут порядка $z_{\alpha \max}$. Максимум нормальной к эклиптике и постоянной по величине компоненты f_z реактивного ускорения, необходимой для сообщения КА компонент $z_{\alpha \max}$, $\dot{z}_{\alpha \max}$ для времени полета $T=100$ сут, достигает 0,43 мм/с² [4] (рис. 13.17). При типичных величинах полного реактивного ускорения порядка 2 мм/с² и времени полета порядка 200 сут потребуются угол между вектором тяги и плоскостью эклиптики менее 0,1 град, а соответствующие энергетические потери будут менее 1%. С ростом времени полета T полное реактивное ускорение убывает примерно как $1/T^2$, т. е. энергетическое влияние «пространственности» невелико и при других временах полета. Эклиптическая транспортирующая система координат столь же удобна в пространственной задаче, как и обычная транспортирующая система в плоской задаче.

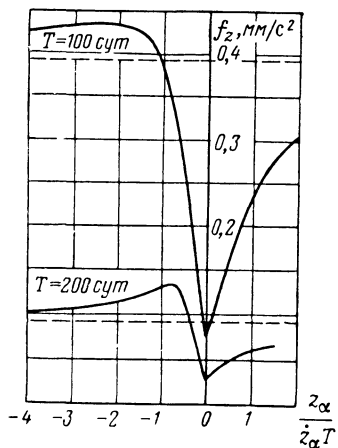


Рис. 13.17. Зависимость нормальной к плоскости эклиптики компоненты f_z реактивного ускорения от функции $z_\alpha / \dot{z}_\alpha T$ аргумента широты u Марса и от времени полета T

13.3.2. Выбор задач для массовых расчетов и способа представления результатов при анализе энергетики траекторий полета к планетам

Если основной целью расчетов является определение необходимых энергетических затрат в задаче о полете к планете назначения (Марсу, Венере, Юпитеру) с возвращением к Земле (или без возвращения), то внешняя задача, т. е. задача о полете между сферами действия Земли и планеты, рассматривается отдельно от внутренней [изложенной в разд. 13.2]. Для массового расчета наиболее целесообразно выбрать задачу с оптимальным законом изменения величины и направления тяги (как с учетом возмущений, так и без их учета), а также задачу о полете с постоянным по величине реактивным ускорением, однократно скачком меняющим направление (без учета воз-

мушений). Под «возмущениями» здесь понимаются солнечные возмущения в транспортирующей системе координат. Без учета возмущений получаем решение первого приближения. Решение задачи с учетом возмущений в линейной постановке (13.1) является вторым приближением к точному решению.

В качестве основных определяющих параметров удобно взять времена начала t_1 и конца t_2 полета между сферами действия планет. Полеты «туда» удобно рассчитывать [4] независимо от полетов «обратно».

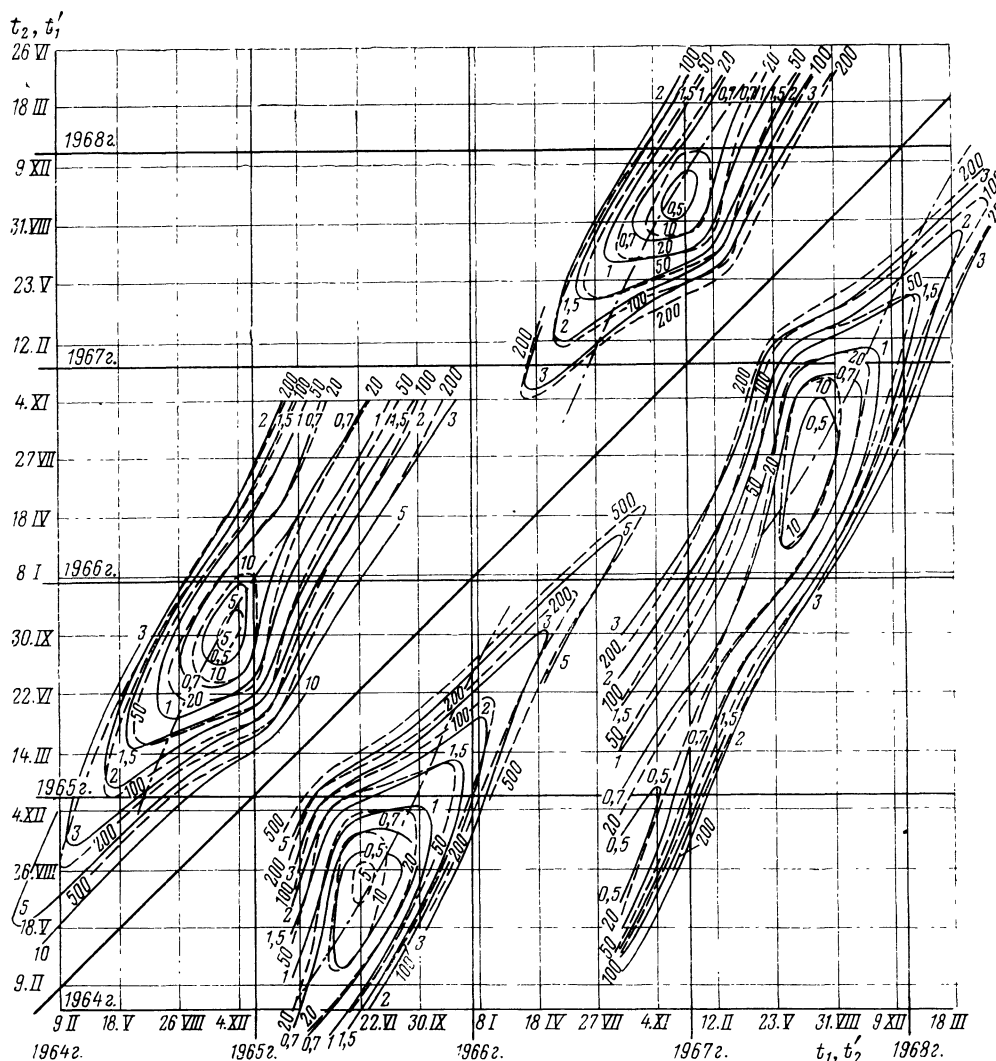


Рис. 13.18. Характеристики полетов к Марсу и обратно в 1964—1967 гг.

Изолинии разных ускорений f , mm/s^2 (сплошные линии) и равных значений величины $I = f^2 T$, m^3/s^3 (пунктир) характеризующей расход топлива. При полете к Марсу t_1 — время старта, t_2 — финиша. При полете обратно t_1' — время старта, t_2' — финиша. Ускорение силы тяги во время полета в один конец постоянно по величине и однократно меняет направление. Штрих-пунктир — линия 10%-ной точности характеристик

Для представления результатов удобно использовать плоскость t_1, t_2 (рис. 13.18). Ось t_1 направлена по оси абсцисс, ось t_2 — по оси ординат. В этой плоскости удобно рассматривать различные семейства изолиний, в частности линии одинаковых реактивных ускорений или одинакового расхода топлива. Каждому полету «туда» на этой плоскости отвечает точка (t_1, t_2) над биссектрисой первого квадранта, поскольку $t_2 > t_1$. Величина необходимого для данного полета реактивного ускорения определяется изолинией, проходящей через эту точку. Биссектриса соответствует полетам с бесконечно большой скоростью. Если для обратных полетов условиться время t_1' начала полета откладывать по оси ординат, а время t_2' конца полета — по оси абсцисс той же плоскости, то обратным полетам будут отвечать точки под биссектрисой этой плоскости, так

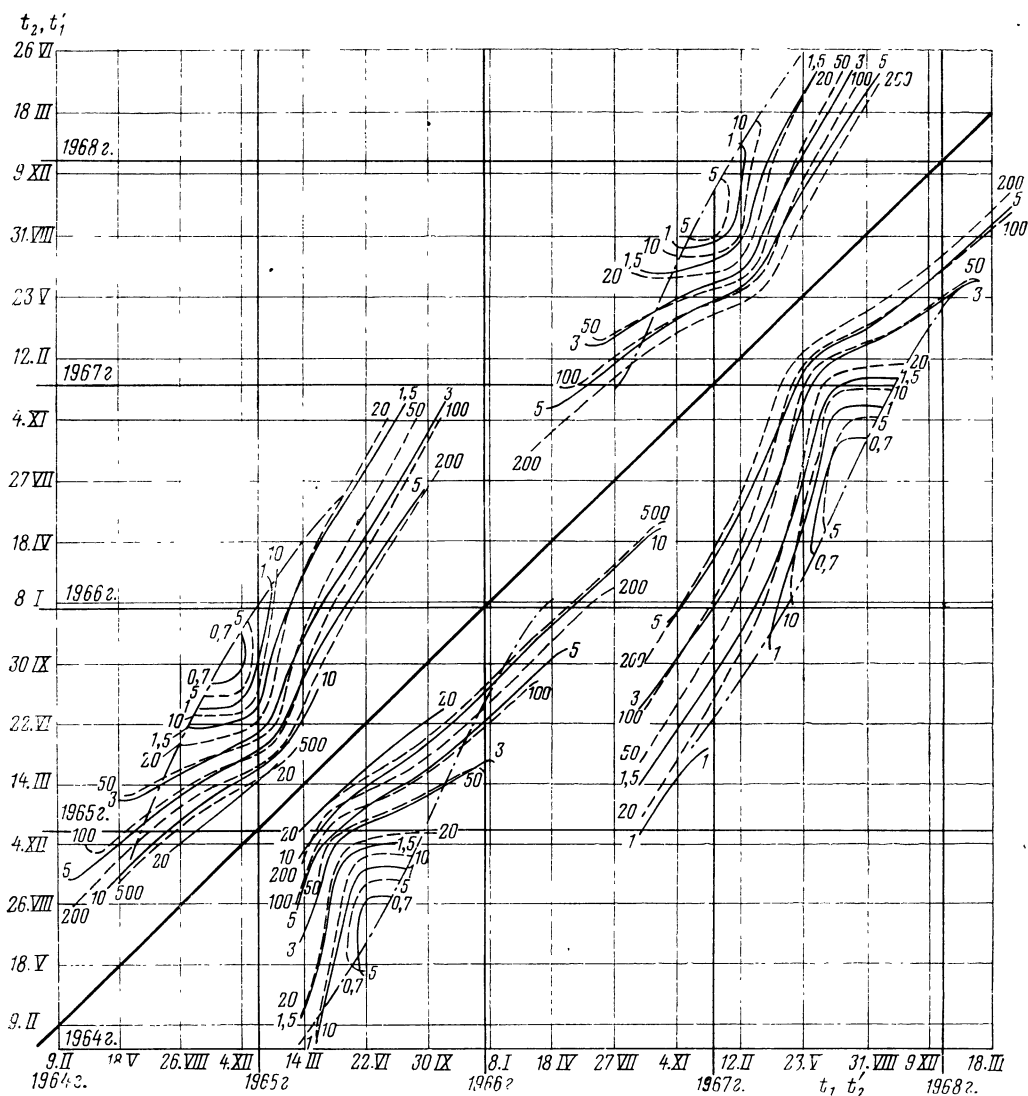


Рис. 13.19. Характеристики полетов к Марсу и обратно в 1964—1967 гг. для случая оптимального управления ускорением.

Изолинии равных максимальных ускорений $f_{\max}$ мм/с² (сплошные линии) и равных значений величины $J = \int_0^T f^2 dt$, м²/с³ (пунктир), характеризующей расход топлива. При полете к Марсу t_1 — время старта, t_2 — финиша; при полете обратно t_1' — время старта, t_2' — финиша. Штрих-пунктир — линия 10%-ной точности характеристик

как здесь $t_2' > t_1'$. Расстояния по вертикали и по горизонтали от данной точки до биссектрисы равны и представляют собой время полета.

Чтобы пара точек (t_1, t_2) , (t_1', t_2') могла представлять полет туда и обратно, необходимо, чтобы было $t_1' \geq t_2$, при этом расстояние по вертикали между точками, т. е. разность $t_1' - t_2$, есть время пребывания вблизи планеты назначения. Разность $T = t_2' - t_1$, равная расстоянию по горизонтали между точками (t_1, t_2) , (t_1', t_2') , представляет собой полное время пребывания экспедиции вне сферы действия Земли.

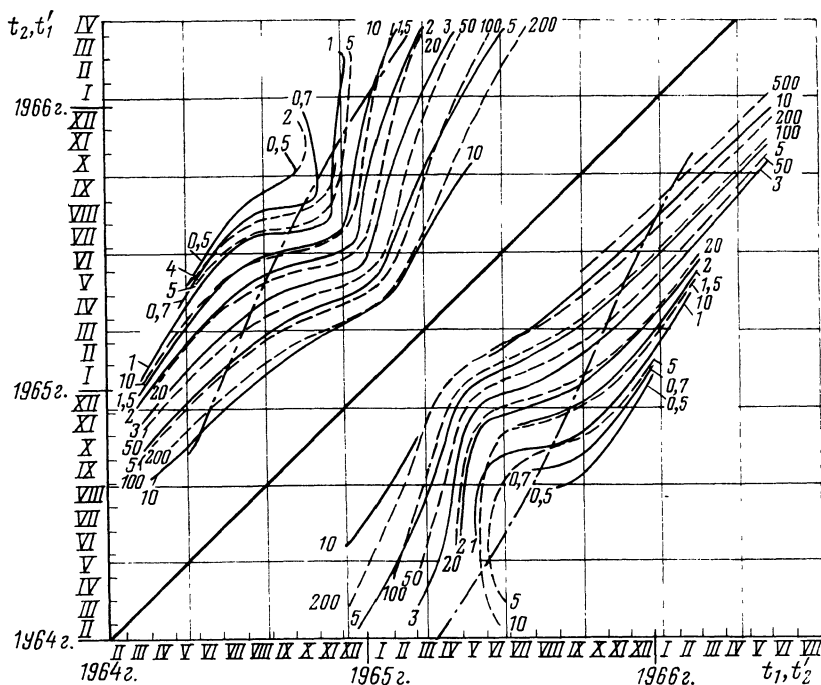


Рис. 13.20. Изолинии характеристик полетов к Марсу.

Пунктир — изолинии интеграла $J = \int f^2 dt$ и значения J , $\text{м}^2/\text{с}^3$, сплошные кривые — изолинии максимального ускорения $f_{\max}$ и значения $f_{\max}$, $\text{мм}/\text{с}^2$; t_1, t_2 — время старта и финиша при полете к Марсу; t_1', t_2' — время старта и финиша при полете обратно. Штрих-пунктир — линия 1%-ной точности характеристик. Сторона квадрата сетки — 100 дней

Результаты расчета интеграла $J = \int_0^T f^2 dt$ во всех задачах удобно представлять на

плоскости t_1, t_2 в виде линий $J = \text{const}$ (пунктир на рис. 13.18—13.22). На рис. 13.18, кроме линий $J = \text{const}$, для задачи о движении с постоянным по величине и однократно меняющим направление реактивным ускорением построены линии $f = \text{const}$, а для задач с оптимальным выбором функции $f(t)$ на рис. 13.19—13.22 построены линии $f_{\max} = \text{const}$, где $f_{\max}$ — максимальная величина реактивного ускорения вдоль траектории, определяемой рассматриваемыми моментами t_1, t_2 начала и конца движения. На рис. 13.20—13.22 даны аналогичные характеристики, но вычисленные во втором приближении.

13.3.3. Результаты анализа (в первом приближении) оптимальных областей и траекторных характеристик при полете к Марсу с постоянным реактивным ускорением

Обычно интересны сравнительно небольшие времена полета (порядка года) между сферами действия Земли и Марса. Поэтому при расчете кривых на рис. 13.18 предполагалось, что за время полета в один конец космический аппарат совершает не более одного оборота вокруг Солнца.

Из рис. 13.18 видно, что имеются области значений (t_1, t_2) , отвечающие полету туда и обратно со сравнительно небольшими реактивными ускорениями и временами по-

лета. Они расположены вдоль биссектрисы квадранта и образуют пары, следующие друг за другом с периодом, равным синодическому периоду обращения Марса. Из-за эксцентриситеты орбиты Марса взаимные расстояния Марса, Земли и Солнца при одинаковых конфигурациях оказываются различными. Вследствие этого в 1966—1968 гг. положение планет энергетически несколько более благоприятно, чем в 1964—1966 гг. Примерно такие же положения планет будут возникать приблизительно через 15—17 лет, т. е. через период, с которым повторяются великие противостояния Марса.

Рассматривая одну из пар, например пару, отвечающую стартам в 1964—1965 гг. и возвращением в 1965—1967 гг. (см. рис. 13.18), видим, что при значениях реактивного ускорения f , близких к минимальным $f_{\min}$, кривые $f = \text{const}$ являются замкнутыми линиями как выше, так и ниже биссектрисы. Эти линии стягиваются в точке при $f \rightarrow f_{\min}$. При помощи рис. 13.18 можно получить такие характеристики траекторий полета с заданным реактивным ускорением f , как начало и конец интервала дат старта с этим ускорением, возможное время пребывания у Марса, минимальное полное время полета между сферами действия и т. д. Для определения наиболее ранней даты $t_{1\min}$ старта с данным ускорением f^* достаточно на линии $f = f^*$ в области выше биссектрисы найти точку с минимальным значением $t_1 = t_{1\min}$. Для определения наиболее поздней даты данной пары областей даты $t_{1\max}$ старта надо на той же линии найти абсциссу $t_1 = t_{1\min}$ точки с ординатой $t'_{1\max}$, являющейся максимальной для другой линии $f = f^*$, принадлежащей области пары ниже биссектрисы. При больших значениях t_1 получаются даты t_2 прибытия к Марсу более поздние, чем наибольшая возможная дата $t_{1\max}$ отправления обратно к Земле. Если потребовать, чтобы между полетами к Марсу и обратно имелось время T_α достаточное, например, для спирального снижения с тем же ускорением f^* к орбите близкого спутника Марса и спирального разгона с этой орбиты до преодоления тяготения Марса (см. разд. 13.1), то интервал возможных дат старта сократится соответственно величине времени пребывания у Марса. В дальнейшем под интервалом Δt_1 дат старта понимается именно такой сокращенный интервал.

Для точки с минимальной ординатой $t_{2\min}$ на кривой $f = \text{const}$ выше биссектрисы будет максимальной разность $t_1 - t_2$ и соответственно максимально возможное увеличение ΔT_α времени пребывания КА у Марса сверх того минимального времени T_α , которое требуется затратить на спиральное снижение и обратный подъем в сфере действия Марса. Соответствующее величине T_α суммарное время полета $T_{\Sigma\min}$ кратко назовем *минимальным*. Избыточное время ΔT_α может быть использовано для совершения экспедиции с орбиты спутника Марса на поверхность Марса и обратного возвращения исследователей на орбиту спутника или для длительного наблюдения и фотографирования поверхности Марса с орбиты близкого его спутника. Сравнивая суммарные минимальные времена полета $T_{\Sigma m} = T_1 + T_\alpha + T_2$, где $T_1 = t_2 - t_1$, $T_2 = t'_2 - t'_1$, для различных дат старта t_1 , найдем минимальное и максимальное возможное значение времени полета. Сравнивая суммарные значения интеграла $J_\Sigma = J_1 + J_\alpha + J_2$, где J_1 отвечает полету туда, J_2 — обратно, а J_α — спиральному снижению и подъему в сфере действия Марса, найдем минимальное для рассматриваемого значения f значение $(J_\Sigma)_{\min}$.

Из рис. 13.18 видно, что минимальные значения реактивного ускорения f , для которого возможен полет туда и обратно в пределах рассматриваемой пары благоприятных областей 1964—1966 гг., составляет около 1,7—1,8 мм/с². Для следующей пары благоприятных областей (1966—1968 гг.) имеем соответствующее минимальное значение $f \approx 1,6$ мм/с², т. е. энергетически более легкие условия полета. Из рис. 13.18 видно также, что при той же области стартов (1964—1965 гг.) можно перейти в другую область возвращений (1966—1967 гг.), отвечающую заметно большим временам полета, но зато меньшим реактивным ускорениям. Эта область возвращений является, как видно из рис. 13.18, продолжением области, соответствующей следующему за рассмотренным благоприятному взаимному расположению Земли и Марса. Именно поэтому при полете к Марсу с минимальным реактивным ускорением $f_{\min} = 0,4$ мм/с² нельзя сразу же отправляться обратно, а приходится ожидать сверх времени T_α еще около $\Delta T_\alpha = 100$ дней на орбите спутника Марса.

Аналогично полет туда и обратно с ускорением $f_{\min} \approx 0,4$ мм/с² можно получить, сохранив прежней область возвращений, но перейдя в область стартов, отвечающую предыдущему благоприятному взаимному расположению Земли и Марса. Вследствие аналогичности условий полета энергетические затраты при этом будут примерно такие же, как и в предыдущем случае.

Способами, описанными выше, определены в случае движений с различным *постоянным* по величине и *однократно* меняющим направление реактивным ускорением следующие характеристики совокупности траекторий полета к Марсу в 1964—1965 гг. с возвращением в 1965—1966 гг.

1. Величина постоянного реактивного ускорения f .
2. Начало $t_{1\min}$ интервала возможных дат старта.
3. Длина интервала Δt_1 возможных дат старта.

4. Возможное увеличение ΔT_a времени пребывания у Марса (сверх времени, необходимого на спиральное снижение к круговой орбите высотой 300 км и обратный спиральный подъем).

5. Минимальное для рассматриваемой величины f суммарное время полета $T_{\Sigma \min}$.

6. Соответствующие тому же f пределы суммарных значений интеграла $J_{\Sigma} = \int_0^T f^2 dt = f^2 T_{\Sigma \min}$.

Эти характеристики представлены в табл. 13.5. Кроме того, в последней колонке таблицы дано время T_{γ} , необходимое для разгона в сфере действия Земли по спирали с круговой орбиты спутника (высотой 300 км) до параболической скорости (или на обратное спиральное снижение). Сделано это потому, что в принципе возможен вход КА в сферу действия Земли с торможением в атмосфере и посадкой без помощи двигателя, да и вывод КА из сферы действия Земли может производиться не обязательно с малой тягой. Если для разгона или снижения в сфере действия Земли используется двигатель малой тяги, то к величине $T_{\Sigma \min}$ должно быть прибавлено время T_{γ} или $T'_{\gamma} = 2T_{\gamma}$ при получении *минимального полного времени полета*.

Таблица 13.5

Характеристики траекторий полета к Марсу при $f = \text{const}$

f мм/с ²	Дата старта t_1	Δt_1 сут	ΔT_a сут	$T_{\Sigma \min}$ сут	J_{Σ} м ² /с ³	T_{γ} сут
0,4	14.XI.1964 г.	0	~100	970	12,6	250
0,5	5.X.1964 г.	70	60 ÷ 320	900	22,7	200
0,7	26.VIII.1964 г.	300	0 ÷ 420	820	48	140
1,0	17.VII.1964 г.	400	0 ÷ 560	800	104	100
1,7 ÷ 1,8	13.V.1964 г.	~20	10	550	120	60
2,0	3.V.1964 г.	150	90	465 ÷ 570	184	50
3,0	19.II.1964 г.	380	340	330 ÷ 390	305	35
5,0	30.XI.1963 г.	600	660	250 ÷ 400	880	20

Верхняя половина таблицы относится к случаю, когда для возвращения используется область благоприятных взаимных положений Земли и Марса, следующая по времени за областью возвращений, использованной для составления нижней половины таблицы. Поэтому суммарные минимальные времена полета в верхней половине заметно больше, чем в нижней.

Из обеих половин табл. 13.5 получается «непрерывный спектр» по реактивным ускорениям, временам полета и другим характеристикам.

Минимальное суммарное время полета, как видно из таблицы, существенно уменьшается с ростом величины реактивного ускорения, хотя это уменьшение и замедляется с ростом f . Для наиболее интересных значений $2 < f < 5$ мм/с² построен график функции $T_{\Sigma \min}(f)$ (рис. 13.23).

На том же графике дано полное время $T(f)$ полета в случае, когда разгон с круговой орбиты спутника Земли на высоте 300 км и возвращение на эту орбиту производится за время $T'_{\gamma} = 2T_{\gamma}$ с тем же ускорением, что и полет между сферами действия Земли и Марса.

Еще более существенно изменяется *длина интервала возможных дат старта* — от величины порядка суток до 400 сут в первой половине таблицы и до 600 сут — во второй половине таблицы. Величина ΔT_a изменяется в несколько больших пределах почти сходным образом. Но при этом в первых строках таблицы увеличение на $\Delta T_a = 100 \div 60$ сут времени пребывания у Марса сверх величины T_a является не только возможным, но и необходимым, т. е. вынужденным временем ожидания благоприятного взаимного расположения Земли и Марса.

Представление об интервалах возможных дат t_2 возвращения и об изменении суммарных времен полета T_{Σ} внутри одного интервала для значений $2 < f < 5$ мм/с² дает рис. 13.24. Видим, что при $f = 2$ мм/с² функция $T_{\Sigma}(t_2) = \text{const}$, и с ростом f диапазон ее значений растет, причем содержит два минимума и максимум.

Что касается значений величин J , использованных в табл. 13.5, то они отличаются от точных значений на 10—15%. На рис. 13.18 и 13.19 штрих-пунктирными линиями отмечена область такой точности (эта область лежит между биссектрисой $t_1 = t_2$ и упомянутыми штрих-пунктирными линиями).

Рассмотрим *пример полета* с продолжительностью около полутора лет к Марсу и обратно, сочитанный без учета возмущений для случая постоянного, однократно меняющего направление ускорения тяги. Однократность изменения направления подразумевается, конечно, на каждом направлении: один раз при полете к Марсу, один раз при полете обратно.

Транспортирующие траектории при полете туда и обратно изображены на рис. 13.25. Весь полет продолжается 500 дней; из них 225 дней — полет к Марсу, 40 — спиральное снижение до высоты 300 км над поверхностью Марса и обратный подъем в сфере действия Марса и 235 дней — полет обратно к Земле. Все движение происходит под действием постоянного ускорения малой тяги

$f \approx 1,95 \text{ мм/с}^2$ (точнее, $1,93 \text{ мм/с}^2$ при полете туда и $1,97 \text{ мм/с}^2$ — обратно).

Поворот направления тяги происходит на 122-е сутки после старта от сферы действия Земли и на 94-е сутки после старта от сферы действия Марса. Такой выбор сроков полета и ускорения малой тяги обуславливает близость этого полета к полету с минимальным расходом топлива, так как величина f достаточно близка к минимальному значению $f_{\min} = 1,7 \div 1,8 \text{ мм/с}^2$, при котором возможен полет туда и обратно, а сроки полета выбраны из условия минимальности полного времени полета.

Траектории полета в транспортирующей системе изображены на рис. 13.26. Ось x направлена параллельно направлению на точку весеннего равноденствия; изображены проекции траекторий на плоскость эклиптики. На рис. 13.27 отдельно изображена компонента z как функция времени t .

Рис. 13.23. Характеристики полетов к Марсу с возвращением на Землю.

Зависимость суммарного минимального времени $T_{\Sigma \min}$ полета к Марсу от величины ускорения f с учетом времени разгона и торможения у Земли (верхняя кривая) и без учета его (нижняя кривая)

Оценим возмущения добавлением в уравнения движения ускорения силы с компонентами F_x, F_y , ликвидирующей возмущения. (По оси z отклонения на порядок меньше, и соответственно влияние возмущений несущественно). Импульс этой силы за время полета, отнесенный к импульсу силы реактивной тяги за это же время ($\bar{J}_x, \bar{J}_y$, табл. 13.6), дает оценку относительного влияния возмущений.

Таблица 13.6

Оценка влияния возмущений

Относительный импульс	Полет Земля — Марс	Полет Марс — Земля	Полет Земля — Марс — Земля
$\bar{J}_x$	0,082	0,021	0,050
$\bar{J}_y$	0,008	—0,307	—0,155

Для суммарного полета туда и обратно имеем завышение примерно на 15%. Полученная оценка дает лишь порядок поправки на возмущения и, возможно, является верхней оценкой. Энергетика полета определяется не ускорением тяги, а квадратом этого ускорения. Поэтому снижение на 15% ускорения тяги означает снижение энергетических затрат примерно на 30%.

13.3.4. Оптимальные траекторные характеристики (в первом приближении)

Из точных уравнений оптимального движения следует, что при достаточном увеличении времени полета между сферами действия планет можно использовать сколь угодно малые реактивные ускорения. При этом будут получаться траектории, делающие много витков вокруг Солнца. Соответственно на плоскости (t_1, t_2) изолинии $f_{\max} = \text{const}$ и $J = \text{const}$ уже не будут замкнутыми. Поэтому при приближенном расчете оптимальной задачи имеет смысл рассматривать только ту примыкающую к биссектрисе часть плоскости (t_1, t_2) , на которой изолинии не имеют еще тенденции «замкнуться».

При полете с оптимальным (линейным по t) изменением компонент реактивного ускорения характеристики на этой части плоскости (t_1, t_2) имеют точность 12—15%. На рис. 13.19 приводятся оптимальные характеристики полетов к Марсу, вычисленные в первом приближении. Вместо прежней величины f рассматривается максимальное

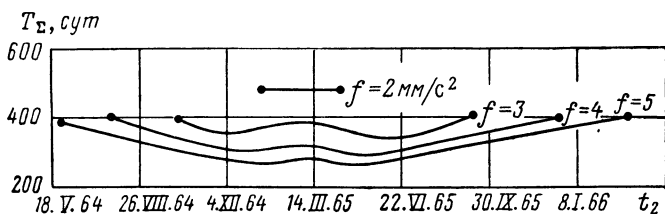


Рис. 13.24. Характеристики полетов к Марсу:
Зависимость суммарного времени полета T_Σ к Марсу и обратно от
даты t_2 конца полета и величины реактивного ускорения f

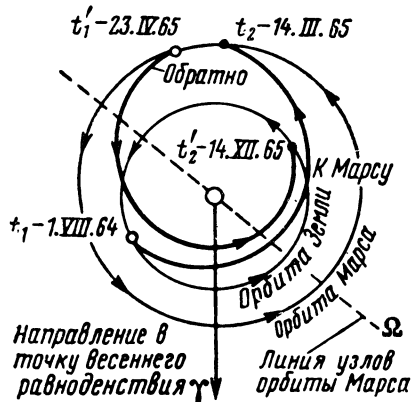


Рис. 13.25. Транспортирующие траектории для полета к Марсу и обратно, близкого к энергетически оптимальному полету

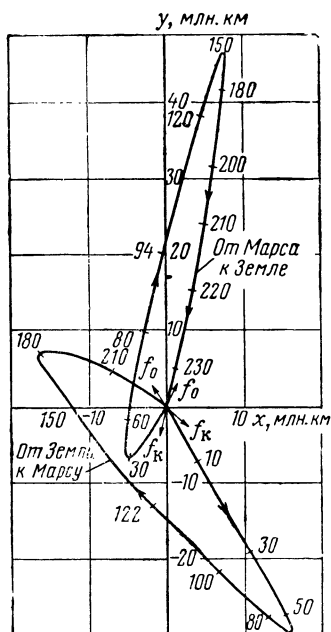


Рис. 13.26. Траектории полета к Марсу и обратно (проекция на плоскость xy эклиптики) в транспортирующей системе координат, соответствующей транспортирующей траектории, приведенной на рис. 13.25.

Время полета к Марсу 226 суток; пребывание в сфере действия Марса 40 сут.; полет обратно 235 сут. Вдоль траекторий указано время полета в сутках

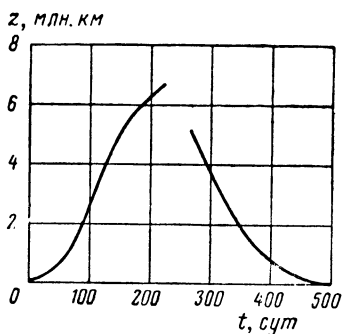


Рис. 13.27. Зависимость компоненты z от времени t

для данной траектории значение $f_{\max}$ реактивного ускорения (сплошные линии на рис. 13.19).

Сравнение некоторых полетов с постоянным реактивным ускорением и полетов с линейными по времени компонентами ускорения проводится в табл. 13.7. В этой таблице приведены даты t_1 старта, даты t_2 сближения со сферой действия Марса, даты t'_1 отправления от этой сферы и даты t'_2 возвращения к сфере действия Земли, определяемые условием минимальности суммарного времени полета с заданным постоянным реактивным ускорением f . Для этих дат находятся величины интеграла J , определяющие расходы массы при движении между сферами действия планет. Значения J' того же интеграла даны и в случае, когда этот полет совершается в те же сроки t_1, t_2, t'_1, t'_2 , но с линейными компонентами реактивного ускорения. Значения соответствующих ускорений приведены в последней колонке (максимальное ускорение, требующееся в процессе осуществления указанного полета туда и обратно при линейных компонентах ускорения).

Таблица 13.7

**Характеристики траекторий полета к Марсу
(Величина и направление реактивного ускорения оптимальны
в первом приближении)**

f мм/с ²	t_1	$T_{\Sigma \min}$ сут	t_2	t'_1	t'_2	J м ² /с ³	J' м ² /с ³	$f_{\max}$ мм/с ²
2	6.VIII.1964 г.	465	14.III.1965 г.	14.IV.1965 г.	29.VI.1965 г.	160	122	3,4
3	24.I.1965 г.	330	2.VI.1965 г.	23.VI.1965 г.	19.XII.1965 г.	270	210	5,5
4	14.I.1965 г.	275	3.V.1965 г.	19.V.1965 г.	30.X.1965 г.	380	305	6,5
5	14.VI.1965 г.	250	23.IV.1965 г.	6.V.1965 г.	30.IX.1965 г.	520	405	8,0

Видим, что в случае постоянного ускорения необходимые величины ускорений на 50—70% меньше, чем максимальные ускорения при линейном управлении, но в величине J проигрывается лишь 20—25% по сравнению с линейным управлением. Таким образом, линейное управление ускорением позволяет при том же расходе топлива отправить в полет заметно больший полезный груз, чем при постоянном ускорении.

**13.3.5. Решение задачи о полете с постоянным реактивным ускорением
к Марсу без возвращения (в первом приближении)**

Полет к Марсу без возвращения на Землю может быть использован, например, для создания искусственного спутника Марса. Характеристики полетов содержатся в верхней полуплоскости ($t_2 > t_1$) плоскости t_1, t_2 (см. рис. 13.18).

Для задачи с постоянным реактивным ускорением (см. рис. 13.18) примерно *каждые два года существует единственная оптимальная дата старта t_1 и единственная соответствующая дата t_2 прибытия*. Для этой пары дат t_1, t_2 энергетические затраты за время $t_2 - t_1$ полета (определяемые интегралом $J = \int_{t_1}^{t_2} f^2 dt$), минимальны. Суще-

ствуют также единственные пары дат, при которых минимальны значения постоянного реактивного ускорения f . Указанный примерно двухгодичный интервал является *периодом повторения одинаковых взаимных положений Земли и Марса*.

Рассмотрим окрестность пары (t_1, t_2), отвечающей минимуму J (или f). При значениях постоянных J (или f), больших, чем минимальные значения, старт (и прибытие) становится возможным уже в любой день внутри некоторого диапазона Δt_1 дат старта (и диапазона Δt_2 дат прибытия).

Чем больше значения постоянных J (или f), тем шире диапазоны $\Delta t_1, \Delta t_2$. При переходе от одной изолинии к другой изолинии с большей величиной параметра J (или f) интервалы $\Delta t_1, \Delta t_2$ медленно растут в сторону малых значений t_1, t_2 и быстро — в сторону больших значений. Рост интервалов $\Delta t_1, \Delta t_2$ в сторону малых значений t_1, t_2 всегда ограничен при ограниченных значениях J, f . В сторону же больших значений t_1, t_2 интервалы становятся неограниченными начиная с некоторых критических значений J^*, f^* . Из рис. 13.18 имеем $J^* \approx 17$ м²/с³, $f^* = 0,6$ мм/с². Старт становится возможен в любой день начиная с некоторой даты t_1 — нижней границы дат старта для рассматриваемого значения параметра J или f .

Неограниченностью интервалов $\Delta t_1, \Delta t_2$ при значениях J , превышающих критические, и объясняются прочерки в табл. 13.8. В этой таблице даны траекторные характеристики при полетах к Марсу без возвращения с постоянным реактивным ускорением (без учета влияний возмущений от Солнца).

**Характеристики траекторий полета к Марсу без возвращения
при $f = \text{const}$**

$f, \text{мм/с}^2$	t_1	$\Delta t_1, \text{сут}$	t_2	$\Delta t_2, \text{сут}$	$T_{\Sigma \text{ min}}$ сут	$J=f^2T$ $\text{м}^2/\text{с}^3$
1	2	3	4	5	6	7
0,4	14.XI.1964 г.	0	30.XI.1965 г.	0	320	4,4
0,5	5.X	75	11.VIII	135	270	5,8
0,66	5.IX	170	17.VII	300	240	8,8
0,7	26.VIII	—	5.VII	—	225	10,0
1,0	17.VII	—	11.VII	—	200	17,3
1,5	28.V	—	22.III	—	175	34
2,0	3.V	—	13.I	—	150	52
3,0	18.II	—	8.X	—	125	97
5,0	30.XI.1963 г.	—	18.V	—	100	215

Во 2-й колонке таблицы даны начальные даты t_1 интервалов Δt_1 возможных дат старта; в 3-й приведены сами эти интервалы. В 4-й и 5-й колонках приведены начальные даты и величины интервалов Δt_2 возможных дат прибытия к Марсу. В 6-й даны минимальные времена полета при заданных значениях f . В 7-й колонке приведены соответствующие минимальные значения интеграла $J = \int_{t_1}^{t_2} f^2 dt$, определяющего расход топлива.

Видим, что минимальное постоянное ускорение, при котором возможен полет к Марсу, равно $\sim 0,4 \text{ мм/с}^2$. Время полета при этом составляет около 10 месяцев, а необходимое значение $J=4,4 \text{ м}^2/\text{с}^3$.

Для сравнения из рис. 13.19 можно определить, что при оптимальном управлении ускорением (линейные по времени компоненты) полет такой же длительности требует большей величины максимального значения реактивного ускорения ($f_{\text{max}}=0,6 \text{ мм/с}^2$), но меньших энергетических затрат ($J=3 \text{ м}^2/\text{с}^3$).

13.3.6. Оптимальные траекторные характеристики полетов к Марсу, Венере, Юпитеру (во втором приближении)

Полеты с возмущением, для которых за время полета в один конец КА совершает не более одного оборота вокруг Солнца, изучены в транспортирующей системе координат во втором приближении, т. е. с линейным учетом разницы солнечного притяжения в начале координат и в месте нахождения аппарата [4].

На рис. 13.20—13.22 изображены характеристики таких траекторий полетов к Марсу (см. рис. 13.20), к Венере (см. рис. 13.21), к Юпитеру (см. рис. 13.22) со стартами в 1964—1965 гг. в виде изолиний максимальных необходимых реактивных ускорений f_{max} и значений интеграла $J = \int f^2 dt$. Изолинии $f_{\text{max}} = \text{const}$ изображены сплошной линией; цифры около сплошных линий — значения f_{max} в мм/с^2 . Изолинии $J = \text{const}$ изображены пунктиром; цифры около пунктирных линий — значения J в $\text{м}^2/\text{с}^3$. В разд. 13.1 показано, что применяемый метод приближенного расчета — метод транспортирующих траекторий — обладает высокой точностью при угловых дальностях полета, не превышающих 200° — 220° ; при больших угловых дальностях ошибка расчета резко возрастает с ростом угловых дальностей. Поэтому на рис. 13.20—13.22 нанесены штрих-пунктирные линии, выделяющие область расчетов с высокой точностью (ошибка $\leq 1\%$). Область характеристик, определенных с высокой точностью, лежит по обе стороны биссектрисы квадранта вплоть до упомянутых штрих-пунктирных линий. Для полетов к Марсу энергетические характеристики рассматриваемых траекторий ограничены снизу значениями $f_{\text{max}} \approx 0,5 \div 0,7 \text{ мм/с}^2$ и $J \approx 2 \div 4 \text{ м}^2/\text{с}^3$ (полет в один конец), а для полета к Венере соответственно $f_{\text{max}} \approx 0,8 \div 1,0 \text{ мм/с}^2$, $J \approx 5 \text{ м}^2/\text{с}^3$ и для полета к Юпитеру соответственно $f_{\text{max}} \approx 1,5 \text{ мм/с}^2$, $J \approx 20 \div 30 \text{ м}^2/\text{с}^3$. При очень малых временах полета (когда точки плоскости t_1, t_2 лежат близко к биссектрисе квадранта) получаются, естественно, весьма большие значения энергетических характеристик. На рис. 13.20—13.22 имеются изолинии f_{max} вплоть до $f_{\text{max}} \approx 10 \div 20 \text{ мм/с}^2$ и изолинии J вплоть до $J \approx 200 \div 500 \text{ м}^2/\text{с}^3$.

На плоскости изолиний характеристик полетов к Венере (см. рис. 13.21), кроме основной области изолиний, соответствующей циклу 1964—1965 гг., имеются небольшие куски изолиний предыдущего цикла (внизу плоскости).

Изолинии характеристик имеют «горбы», вытянутые по направлению к биссектрисе квадранта. Благодаря этим «горбам» можно найти на заданной изолинии точку, обеспечивающую минимальное время полета в один конец («туда» или «обратно»), а также точки, обеспечивающие минимальное суммарное время полета (т. е. в оба конца). При этом нетрудно учесть и время, необходимое на разгон или торможение в сфере действия планеты. Это время можно рассчитать по данным, приведенным в разд. 13.1, а также в предыдущем разделе.

Анализ плоскостей t_1 , t_2 (см. рис. 13.20—13.22) позволяет определить характеристики совокупности траекторий полетов к Марсу, Венере, Юпитеру. Некоторые из этих характеристик приведены в табл. 13.9—13.11.

Таблица 13.9

Характеристика оптимальных (во втором приближении) траекторий полета к Марсу

f , мм/с ²	t_1	T_{Σ} сут	J_{T+0} м ² /с ³	J_{Σ} м ² /с ³	$\Delta t_{ож}$ сут
1	20.XI.1964 г.	564	13,5	18,7	56
2	20.XII.1964 г.	470	37	47,4	50
5	3.I.1965 г.	330	170	196	38
10	6.II.1965 г.	236	500	550	34

Таблица 13.10

Характеристики оптимальных (во втором приближении) траекторий полета к Венере

f , мм/с ²	t_1	T_{Σ} , сут.	J_{T+0} , м ² /с ³	J_{Σ} , м ² /с ³	$\Delta t_{ож}$, сут.
3	4.V.1964 г.	490	45	84	25
5	1.IX.1964 г.	340	125	185	25
10	9.I.1965 г.	200	350	454	25

В табл. 13.9 приведены характеристики полетов к Марсу с минимальным суммарным временем полета. В 1-й колонке приведены значения максимального реактивного ускорения $f_{\max}$ в рассматриваемом полете; во 2-й — даты старта t_1 ; в 3-й — суммарное время полета T_{Σ} к Марсу и обратно с учетом времени, необходимого на торможение вблизи Марса (на круговую орбиту с высотой $h=300$ км) и обратный разгон; в 4-й — значения интеграла $J=J_{T+0}$, необходимые для полета между сферами действия планет («туда» и «обратно»); в 5-й — суммарное значение интеграла $J=J_{\Sigma}$ с учетом затрат на торможение и разгон. Кроме времени, затраченного на торможение и разгон около Марса, полезно предусмотреть некоторое время на пребывание экспедиции на Марсе. Если по прошествии этого времени «ожидания» $\Delta t_{ож}$ начать полет обратно на Землю и потребовать, чтобы энергетические характеристики этого полета (J и $f_{\max}$) остались бы такими же, как и при $\Delta t_{ож}=0$, то время полета обратно увеличится на некоторое $\Delta t_{обр}$. Из 6-й колонки видно, какого времени ожидания можно добиться без изменения энергетических характеристик полета при увеличении времени обратного полета на $\Delta t_{обр}=40$ сут.

В табл. 13.10 приведены аналогичные характеристики для полетов к Венере и обратно с минимальным суммарным временем полета. В табл. 13.11 приведены характеристики некоторых полетов к Юпитеру и обратно. Построение этой таблицы несколько отлично от построения табл. 13.9 и 13.10. Юпитер обладает мощным полем тяготения, поэтому расход массы на торможение и разгон весьма велик. В приведенной таблице рассматриваются характеристики торможения до орбиты Амальтеи — спутника Юпитера. В 1-й колонке табл. 13.11 приведены максимальные значения реактивного ускорения, во 2-й — даты старта, в 3-й — суммарное время полета T_{Σ} , в 4-й — значения $J=J_{T+0}$, необходимые для полета между сферами действия Земли и Юпитера («туда» и «обратно»); в 5-й колонке приведено время $2T_0$ торможения и разгона около Юпитера (переходов на орбиту и с орбиты Амальтеи), в 6-й — необходимые для этого торможения и разгона значения интеграла $J=2J_0$.

Из таблиц видно, что максимальное ускорение $2\div 3 \text{ мм/с}^2$ обеспечивает полеты к Марсу или Венере с возвращением на Землю продолжительностью примерно 1,5 года, а также полет к Юпитеру с возвращением на Землю продолжительностью 3 года. Полет к Марсу продолжительностью 1,5 года возможен даже при $f_{\max} = 1 \text{ мм/с}^2$. Расходы J при этом получаются сравнительно небольшими для полетов к Марсу и Венере ($J = 20\div 50 \text{ м}^2/\text{с}^3$). Из таблиц видно также, что уменьшение полного времени полета приблизительно в два раза связано (для рассмотренных полетов) с возрастанием необходимых значений максимального реактивного ускорения и интеграла J примерно на порядок.

Полеты к планетам без возвращения обратно могут быть использованы для запуска автоматических станций на орбиту спутника планеты и для других задач.

В табл. 13.12 приведены характеристики полетов к сфере действия Марса без возвращения с минимальным временем полета.

В 1-й колонке даны величины максимального реактивного ускорения, во 2-й — даты t_1 старта, в 3-й — времена T полета, в 4-й — значения J .

Таблица 13.11

**Характеристики оптимальных (во втором приближении)
траекторий полета к Юпитеру**

$f, \text{ мм/с}^2$	t_1	$T, \text{ сут}$	$J_{\text{т+о}}, \text{ м}^2/\text{с}^3$	$2T_0, \text{ сут}$	$2J_0, \text{ м}^2/\text{с}^3$
2	2.VII.1965 г.	1090	85	270	93
3	21.VIII.1965 г.	1000	135	180	140
5	10.X.1965 г.	890	320	116	242

Таблица 13.12

**Характеристики оптимальных (во втором приближении)
траекторий полета к сфере действия Марса без возвращения к Земле**

$f, \text{ мм/с}^2$	t_1	$T, \text{ сут}$	$J, \text{ м}^2/\text{с}^3$
1	21.XI.1964 г.	260	6
2	6.VI.1965 г.	204	17
3	16.VI.1965 г.	160	40
5	18.VI.1965 г.	128	88

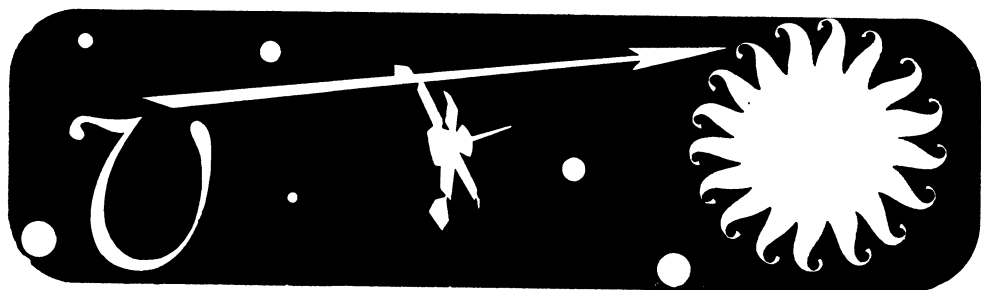
Из общих графиков типа рис. 13.20—13.22 можно получить характеристики разнообразных полетов. Можно, например, не ограничиваться полетами с минимальным суммарным временем, а искать полеты с приемлемыми датами старта или финиша и с суммарным временем полета, близким к минимальному: при наличии расчетов в более широкой области (захватывающей по крайней мере два цикла) можно искать полеты с весьма длительным пребыванием на планете назначения и с возвращением на планету старта в следующем цикле.

Рассмотрение движения по сферам действия принципиально упрощает рассмотрение. Без этого упрощения уравнения оптимального движения оказываются существенно сложнее [6].

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. XIII

1. Белецкий В. В., Егоров В. А. Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности — «Космические исследования», т. 2, 1964.
2. Белецкий В. В. О траекториях космических полетов с постоянным вектором реактивного ускорения — «Космические исследования», т. 2, 1964.
3. Белецкий В. В., Егоров В. А. Разгон космического аппарата в сфере действия планеты. — «Космические исследования», т. 2, 1964.
4. Белецкий В. В., Егоров В. А., Ершов В. Г. Анализ траекторий межпланетных полетов с двигателями постоянной мощности. — «Космические исследования», т. 3, 1965.

5. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. Механика космического полета с малой тягой.— «Инженерный журнал», т. 3, 1963.
 6. Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В. О движении тела переменной массы с постоянной затратой мощности в гравитационном поле. ДАН СССР, т. 137, 1961.
 7. Евтушенко Ю. Г. Влияние касательного ускорения на движение спутника.— «Прикладная математика и механика», т. 30, 1966.
 8. Охочимский Д. Е. Исследование движения в центральном поле под действием постоянного касательного ускорения.— «Космические исследования», т. 2, 1964.
 9. Irving J. H., Blum E. K. Comparative performance of ballistic and low thrust vehicles for flight to Mars. *Vistas in Astronaut*, vol. 2, 191, 1959.
 10. London H. S. Some exact solution of the equation of motion of solar sail with constant sail setting. *J. Amer. Rock. Soc.* vol. 30, 198, 1960.
 11. Tsien H. S. Take-off from satellite orbit. *J. Amer. Rock. Soc.*, vol. 23, 233, 1953.
-



ГЛАВА XIV

КОРРЕКЦИЯ ТРАЕКТОРИЙ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\bar{A}_i \left(\frac{\partial \xi_i}{\partial V_x}, \frac{\partial \xi_i}{\partial V_y}, \frac{\partial \xi_i}{\partial V_z} \right)$ — градиент корректируемого параметра ξ_i .

a — большая полуось орбиты.

$\bar{a}(t)$ — вектор корректирующего ускорения.

b — прицельная дальность.

$\bar{c}$ — векторный интеграл площадей.

D_ξ — дисперсия параметра ξ .

E — единичная матрица.

$\bar{f}$ — векторный интеграл Лапласа.

h — интеграл энергии.

I — сумма модулей корректирующих импульсов скорости.

K_0 — корреляционная матрица шестого порядка, характеризующая разброс параметров движения КА.

K — матрица случайного вектора корректируемых параметров.

N — матрица частных производных от корректируемых параметров по компонентам корректирующей скорости.

$\bar{n}$ — трансверсаль траектории движения КА.

p — параметр орбиты.

$\bar{r}$ — радиус-вектор КА.

T — время полета КА от момента коррекции до прохождения через картинную плоскость (разд. 14.10).

t_ξ — коэффициент, характеризующий изменение времени полета при коррекции координаты ξ .

U — матрица изохронных производных в абсолютной системе координат $O\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$.

$\bar{V}$ — скорость полета КА.

$\bar{V}_\infty$ — скорость на бесконечном удалении от притягивающего центра.

ΔV_k — корректирующий импульс.

ΔV_i — корректирующий импульс i -й «солнечной» коррекции.

$\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ — оси абсолютной системы координат.

$\bar{z}$ — нормаль к плоскости орбиты КА.

α — угол наклона большой полуоси эллипса рассеивания к оси ξ картинной плоскости (разд. 14.3), угол между вектором влияния единичного импульса при «солнечной» коррекции $\xi(t)$ и производной от этого вектора по времени $\frac{d\xi}{dt}$ (разд. 14.9); сектор промахов одноразовой коррекции (разд. 14.9).

β — сектор промахов двухразовой коррекции.

$\Delta \xi$ — приращение величины ξ .

δ_ξ — ошибка величины ξ .

- $\bar{\xi}$ — ось координатной системы, перпендикулярная картинной плоскости.
 $\bar{\eta}$ — ось координатной системы в картинной плоскости.
 μ — гравитационная постоянная поля тяготения (произведение постоянной k^2 тяготения на массу M притягивающего тела).
 $\bar{v}$ — вектор нуля-направления.
 $\bar{\xi}$ — вектор корректируемых параметров (разд. 14.1); ось координатной системы в картинной плоскости (разд. 14.2); вектор влияния единичного импульса при «солнечной» коррекции (разд. 14.9).
 $\bar{q}$ — радиус-вектор КА относительно планеты-цели.
 σ_i — средняя квадратическая ошибка i -й величины.
 σ — угол между $\bar{A}_1$ и $\bar{A}_2$.
 τ — время полета от момента t_0 до момента t .
 φ — угловая дальность полета.
 ψ — угол между вектором корректирующего импульса и вектором $\bar{A}_1$.
 ω_0 — угловая скорость движения КА по орбите в точке t_0 .

14.1. КЛАССИФИКАЦИЯ РАЗЛИЧНЫХ СПОСОБОВ КОРРЕКЦИИ

Коррекция траектории, т. е. ее целенаправленное изменение, необходима тогда, когда требуется изменить некоторые характеристики движения КА и получить с требуемой точностью определенные элементы его орбиты.

Коррекция производится путем приложения силы к КА, в результате чего траектория его движения изменяется нужным образом. По величине корректирующего ускорения коррекция может быть импульсной или непрерывной.

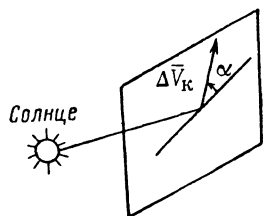


Рис. 14.1. Вектор корректирующего импульса $\Delta \bar{V}_K$ в плоскости, ортогональной направлению на Солнце

С точки зрения энергетических затрат важно, чтобы характеристическая скорость ΔV_K , сообщаемая КА при коррекции, была минимальной. Это соответствует минимуму расхода топлива, затрачиваемого на коррекцию движения КА. Известно, что ΔV_K минимальна при бесконечно большом ускорении, сообщаемом КА корректирующим двигателем. Следовательно, теоретически самым выгодным является случай импульсного изменения скорости полета при коррекции. Однако ускорение, сообщаемое КА корректирующим двигателем, всегда конечно. Предположение о мгновенности изменения скорости при коррекции справедливо лишь тогда, когда ошибки в параметрах движения, обусловленные этим предположением, соизмеримы с ошибками за счет метода расчета траектории КА. Во многих случаях при расчете коррекций справедливо использование гипотезы о мгновенности изменения скорости. Ниже приводятся основные зависимости, справедливые для импульсной коррекции.

В общем случае с помощью одного импульса скорости, приложенного к КА в некоторой точке траектории, варьируя *три составляющие* этого импульса, можно скорректировать три параметра траектории, например, три координаты или три составляющие скорости движения КА в некоторой точке на траектории или три любых функции, зависящие от координат и скорости. Такая коррекция называется *трехкомпонентной*. Для реализации трехкомпонентной коррекции на КА устанавливается специальная система, позволяющая ориентировать ось двигателя в любом заданном направлении. Более простые системы ориентации могут накладывать ограничения на число свободных компонент корректирующего импульса. Если при коррекции могут варьироваться *одна или две компоненты* корректирующего импульса, то такие коррекции называются соответственно *одно- или двухкомпонентной*. Например, если задана плоскость, в которой должен лежать корректирующий импульс, то в этом случае могут варьироваться лишь две величины: величина импульса и положение импульса в плоскости. Такой плоскостью может быть плоскость, ортогональная направлению на Солнце (рис. 14.1).

Двухкомпонентная коррекция будет также иметь место для случая, когда величина корректирующего импульса фиксирована, но свободным является его направление в пространстве.

Однокомпонентная коррекция соответствует случаю, когда направление корректирующего импульса фиксировано (с точностью до знака) и может меняться только его величина. Такое направление может быть коллинеарно направлению на Солнце, звезду или какую-нибудь планету [1].

Многоразовые коррекции (многократное включение двигателя) можно подразделить на *неоднородные (связанные)* и *однородные (несвязанные)*. Каждая из многоразовых коррекций может быть проведена по одному из способов одноразовой коррекции.

Однородные (несвязанные) коррекции могут использоваться для последовательно-го уменьшения ошибок движения. В этом случае при каждом включении двигателя прицеливание производится в одну и ту же точку, т. е. характеристики коррекций определяются из однородных условий.

Связанные (неоднородные) коррекции могут использоваться для сокращения энергетических затрат, а также в случае, когда число корректируемых параметров превышает число свободных компонент скорости при одноразовой коррекции. При подобной коррекции происходит поочередное смещение траектории либо вдоль наиболее эффективных направлений, либо вдоль фиксированных направлений так, чтобы суммарное смещение получилось равным заданному. При каждом включении двигателя прицеливание производится в новую точку, т. е. характеристики коррекции определяются из различных условий. Необходимый результат в этом случае получается только после проведения всех коррекций.

Например, для коррекции трех параметров может оказаться выгодным провести три раза неоднородную однокомпонентную коррекцию, а в случае, когда нужно скорректировать шесть параметров траектории с помощью трехкомпонентной коррекции, число включений должно быть не меньше двух.

По числу параметров траекторий, подлежащих исправлению, коррекция может быть *однопараметрической*, *двухпараметрической* и т. д.

14.2. ВЫБОР КОРРЕКТИРУЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ

Параметры траектории, подлежащие коррекции, образуют пространство корректируемых параметров. Каждой реализации фактической траектории полета соответствует точка в пространстве корректирующих параметров. В этом пространстве существует также область, в которой удовлетворяются условия, наложенные на траекторию полета КА. Цель коррекции заключается в смещении указанной точки в заданную область.

Смещение в пространстве корректируемых параметров $\bar{\xi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ в общем виде связано с вектором корректирующего ускорения $\bar{a}(t)$ соотношением

$$\bar{\xi} = \int_0^T \bar{N}[t, \bar{a}(t)] dt,$$

где $\bar{N}(t, \bar{a}(t))$ — в общем случае нелинейный векторный оператор.

Величина характеристической скорости коррекции равна

$$\Delta \bar{V}_k = \int_0^T \bar{a}(t) dt.$$

Корректируемые параметры $\bar{\xi}$ удобно выбирать так, чтобы оператор $\bar{N}[t, \bar{a}(t)]$ был линейным относительно $\bar{a}(t)$:

$$\begin{aligned} \bar{N}[t, \bar{a}(t)] &= N(t) \bar{a}(t); \\ \bar{\xi} &= \int_0^T N(t) \bar{a}(t) dt. \end{aligned}$$

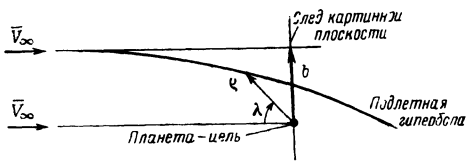
Для случая *мгновенного изменения скорости* $N(t)$ есть матрица частных производных корректируемых параметров по компонентам корректирующей скорости, определяющая эффективность коррекции,

$$N(t) = \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \xi_1}{\partial V_X} & \frac{\partial \xi_1}{\partial V_Y} & \frac{\partial \xi_1}{\partial V_Z} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial V_X} & \frac{\partial \xi_2}{\partial V_Y} & \frac{\partial \xi_2}{\partial V_Z} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial V_X} & \frac{\partial \xi_n}{\partial V_Y} & \frac{\partial \xi_n}{\partial V_Z} \end{array} \right\|.$$

В случае импульсной n -разовой коррекции

$$\bar{\xi} = \sum_{i=1}^n N(t_i) \Delta \bar{V}_{k_i}.$$

При полете к Луне и планетам Солнечной системы одним из источников нелинейности связи корректируемых параметров с корректирующим импульсом является притяжение планеты-цели или Луны. Для исключения нелинейного влияния притяжения планеты в качестве корректируемых параметров следует выбирать *оскулирующие характеристики* $\bar{V}_\infty$ и $\bar{b}$ (рис. 14.2) планетоцентрического движения на бесконечно большом удалении от планеты, рассчитанные для момента наиболее тесного сближения с планетой по приведенным ниже формулам:



$$\mu = k^2 M; \quad a = \frac{\mu}{V_\infty^2};$$

$$\bar{c} = \bar{q} \times \bar{V}; \quad b = \frac{c}{V_\infty};$$

Рис. 14.2. Характеристики планетоцентрического движения, используемые в качестве корректируемых параметров

$$\bar{f} = \bar{V} \times \bar{c} - \mu \frac{\bar{q}}{q}; \quad \sin \gamma = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$V_\infty = \sqrt{V^2 - \frac{2\mu}{q}}; \quad \cos \gamma = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\bar{V}_\infty = V_\infty \left[\sin \gamma \frac{\bar{f}}{f} + \cos \gamma \frac{\bar{c} \times \bar{f}}{|\bar{c} \times \bar{f}|} \right];$$

$$\bar{b} = b \left[\cos \gamma \frac{\bar{f}}{f} - \sin \gamma \frac{\bar{c} \times \bar{f}}{|\bar{c} \times \bar{f}|} \right].$$

Здесь k^2 — постоянная тяготения;

M — масса планеты;

$\bar{q}$, $\bar{V}$ — характеристики планетоцентрического движения.

Компоненты вектора скорости на бесконечности $\bar{V}_\infty$ и вектора прицельной дальности $\bar{b}$ однозначно определяют геометрические условия сближения КА с планетой и энергию планетоцентрического движения. Например, в качестве корректируемых параметров можно принять компоненты смещения $\Delta \bar{b} = (\bar{b} - \bar{b}_{\text{зад}})$ в плоскости, ортогональной $\bar{V}_\infty$ (картинной плоскости), и время полета до планеты.

При вычислении вектора $\bar{b}_{\text{зад}}$ для отображения точек физического пространства вблизи планеты-цели на картинную плоскость с координатами ξ и η могут быть использованы следующие соотношения [2]:

$$b_{\text{зад}} = \frac{q \sin \lambda \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4\mu}{qV_\infty^2} \frac{1}{1 + \cos \lambda}} \right)}{2};$$

$$\xi_{\text{зад}} = b_{\text{зад}} \bar{b}^0 \bar{\xi}^0;$$

$$\eta_{\text{зад}} = b_{\text{зад}} \bar{b}^0 \bar{\eta}^0;$$

$$\bar{b}^0 = \frac{\bar{V}_\infty \times \bar{q} \times \bar{V}_\infty}{|\bar{V}_\infty \times \bar{q} \times \bar{V}_\infty|}.$$

Здесь $\bar{\xi}^0$ и $\bar{\eta}^0$ — единичные векторы, определяющие направления осей в картинной плоскости;

λ и q — полярные координаты отображаемой точки в плоскости заданной траектории (рис. 14.2).

При коррекции движения КА следует учитывать, что выбор косвенных параметров, не связанных однозначно с требуемыми, вообще говоря, приводит к увеличению энергетических затрат на коррекцию.

14.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТИ РАССЕЙВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ КОРРЕКТИРУЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ

Принимая параметры расчетной траектории за метаматическое ожидание параметров действительной траектории, отклонения ее от расчетной можно охарактеризовать с помощью шестимерного нормального случайного вектора. Этому вектору в некоторой системе координат соответствует корреляционная матрица шестого порядка [2]

$$K_0 = \begin{vmatrix} K_{11}^0 & K_{12}^0 & K_{13}^0 & K_{14}^0 & K_{15}^0 & K_{16}^0 \\ K_{21}^0 & K_{22}^0 & K_{23}^0 & K_{24}^0 & K_{25}^0 & K_{26}^0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K_{61}^0 & K_{62}^0 & K_{63}^0 & K_{64}^0 & K_{65}^0 & K_{66}^0 \end{vmatrix}.$$

По определению корреляционной матрицы члены, стоящие на главной диагонали, представляют дисперсии, т. е. квадраты средних квадратичных ошибок σ_i :

$$K_{ii}^0 = (\sigma_i)^2 = D_i.$$

Остальные члены представляют собой вторые смешанные моменты

$$K_{ij}^0 = K_{ji}^0 = r_{ij} \sigma_i \sigma_j,$$

где r_{ij} — коэффициенты связи величин i и j .

При расчетах коррекции можно пользоваться матрицей, где вместо средних квадратичных ошибок используются *предельные ошибки*. Если известна корреляционная матрица в момент времени t_0 на траектории, то такая же матрица в момент времени t в линейном приближении может быть определена по формуле

$$K_t = UK_0U^*,$$

где U — матрица изохронных производных;

U^* — транспонированная матрица,

$$U = \begin{vmatrix} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{X}_0} & \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{Y}_0} & \frac{\partial \tilde{X}}{\partial \tilde{Z}_0} & \frac{\partial \tilde{X}}{\partial (V_{\tilde{X}})_0} & \frac{\partial \tilde{X}}{\partial (V_{\tilde{Y}})_0} & \frac{\partial \tilde{X}}{\partial (V_{\tilde{Z}})_0} \\ \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial \tilde{X}_0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial \tilde{Y}}{\partial (V_{\tilde{Z}})_0} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial (V_{\tilde{Z}})}{\partial \tilde{X}_0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial (V_{\tilde{Z}})}{\partial (V_{\tilde{Z}})_0} \end{vmatrix}.$$

Координаты $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$ и компоненты скорости $V_{\tilde{X}}$, $V_{\tilde{Y}}$, $V_{\tilde{Z}}$ относятся к моменту времени t , а координаты $\tilde{X}_0$, $\tilde{Y}_0$, $\tilde{Z}_0$ и компоненты скорости $(V_{\tilde{X}})_0$, $(V_{\tilde{Y}})_0$, $(V_{\tilde{Z}})_0$ относятся к моменту времени t_0 .

Корреляционная матрица в пространстве корректируемых параметров может быть получена по формуле

$$K = \tilde{B}K_t\tilde{B}^*,$$

где $\tilde{B}$ представляет собой матрицу преобразования от параметров $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$, $V_{\tilde{X}}$, $V_{\tilde{Y}}$, $V_{\tilde{Z}}$ к пространству корректируемых параметров $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$.

Для случая коррекции положения КА в картинной плоскости эллипс рассеивания случайного вектора $\Delta b(\Delta \xi, \Delta \eta)$ в момент времени t определяется матрицей

$$\begin{vmatrix} D_\xi & K_{\xi\eta} \\ K_{\xi\eta} & D_\eta \end{vmatrix}.$$

Большая и малая полуоси эллипса рассеивания получаются как корень квадратный из D_1 и D_2 , равных

$$D_1 = \frac{1}{2} \left[D_\xi + D_\eta + \sqrt{(D_\xi - D_\eta)^2 + 4K_{\xi\eta}^2} \right];$$

$$D_2 = \frac{1}{2} \left[D_\xi + D_\eta - \sqrt{(D_\xi - D_\eta)^2 + 4K_{\xi\eta}^2} \right].$$

	$\frac{\partial}{\partial r_0}$	$\frac{\partial}{\partial n_0}$	$\frac{\partial}{\partial z}$	$\frac{\partial}{\partial (V_r)_0}$	$\frac{\partial}{\partial (V_n)_0}$	$\frac{\partial}{\partial (V_z)_0}$
r	$a \left[\frac{2r - 3V_r \tau}{r_0^2} - \frac{1}{r_0} \left(\sqrt{\frac{p}{\mu}} V_n - \frac{1}{1 + \cos \varphi} \right) - \frac{V_r (V_r)_0}{\mu} \right]$	$\sin \varphi$	0	$a \left[\frac{2[r(V_r)_0 - r_0 V_r]}{\mu} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\sin \varphi}{3 V_r (V_r)_0} \right]$	$a \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \frac{-3V_r \tau}{r_0} - \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \cos \varphi + \left[\frac{2r}{r_0} - \frac{r_0}{p} \right] \times \left(\sqrt{\frac{p}{\mu}} V_n - 1 \right) \right\}$	0
n	$a \left\{ \frac{-3V_n \tau}{r_0^2} + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \times \left[\frac{V_r}{r_0} - \frac{(V_r)_0}{r} + \frac{r}{r_0 p} [V_r - (V_r)_0] + \frac{1}{r_0} \left(1 + \frac{r}{p} \right) \sin \varphi \right] \right\}$	$\left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \varphi - \frac{r}{p}$	0	$a \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \frac{-3(V_r)_0 \tau}{r} + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \cos \varphi - \left[\frac{2r_0}{r} - \frac{r}{p} \right] \times \left(\sqrt{\frac{p}{\mu}} (V_n)_0 - 1 \right) \right\}$	$a \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left\{ \frac{-3V_n \tau}{r_0} + \left(1 + \frac{r}{p} \right) \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \times \sin \varphi + \frac{1}{\sqrt{p\mu}} \times \left[\left(1 + \frac{r}{p} \right) r_0 V_r - \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) r (V_r)_0 \right] \right\}$	0
z	0	0	$1 + \frac{r}{p} (\cos \varphi - 1)$	0	0	$\frac{1}{p} \sqrt{\frac{p}{\mu}} r r_0 \sin \varphi$

V_r	$a \left\{ \frac{3\mu\tau}{r_0^2} - \sqrt{\frac{\mu}{p}} \frac{\sin \varphi}{r r_0} + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_0} \right) \times \left(\frac{(V_r)_0}{r} - \frac{V_r}{r_0} \right) \right\}$	$\frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{p}} \times \frac{1}{1 - \cos \varphi}$	0	$a \left[\frac{2r_0 + 3(V_r)_0\tau}{r^2} - \frac{1}{r} \left(\sqrt{\frac{\mu}{p}} (V_r)_0 - 1 + \cos \varphi \right) - \frac{V_r (V_r)_0}{\mu} \right]$	$a \left\{ \frac{3(V_r)_0\tau}{r^2} + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \times \left[\frac{(V_r)_0}{r} - \frac{V_r}{r_0} + \frac{r_0}{r p} [(V_r)_0 - V_r] - \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \sin \varphi \right] \right\}$	0
V_n	$\frac{1}{r_0} \sqrt{\frac{\mu}{p}} (\cos \varphi - 1)$	$-\frac{1}{p} \left[V_r - (V_r)_0 + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \varphi \right]$	0	$-\sin \varphi$	$\left(1 + \frac{r_0}{p} \right) \cos \varphi - \frac{r}{p}$	0
V_z	0	$-\frac{1}{p} \left[V_r - (V_r)_0 + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \varphi \right]$	$-\frac{1}{p} \left[V_r - (V_r)_0 + \sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin \varphi \right]$	0	0	$1 + \frac{r_0}{p} (\cos \varphi - 1)$

Угол наклона большой полуоси эллипса рассеивания к оси ξ

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2K_{\xi\eta}}{D_{\xi} - D_{\eta}};$$

$$0 < \alpha < 90^\circ; \quad K_{\xi\eta} > 0;$$

$$90^\circ < \alpha < 180^\circ; \quad K_{\xi\eta} < 0.$$

Наоборот, если известны параметры эллипса рассеивания, то можно получить элементы матрицы D_{ξ} , $D_{\xi\eta}$, D_{η} (формулы легко получить из предыдущих, поэтому здесь они не приводятся).

14.4. ИЗОХРОННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

При оценке влияния отклонений координат и компонент вектора скорости в некоторый момент времени t_0 на отклонения координат и компонент вектора скорости в момент времени t приходится пользоваться матрицей изохронных производных. Ту же матрицу можно использовать и при расчете коррекции с целью сближения КА с планетами, Луной или другими КА.

Эти производные могут быть найдены в случае кеплерового движения непосредственно путем варьирования выражений, полученных из интегралов уравнений движения. Однако при этом получаются сравнительно громоздкие формулы.

В табл. 14.1 приводится матрица изохронных производных, полученная методом интегрирования уравнений в вариациях [7] и пригодная для круговых, эллиптических и гиперболических орбит. Матрица изохронных производных дана в орбитальной системе координат rhz (радиус-вектор — КА, трансверсаль и бинормаль траектории). Индекс «нуль» в формулах относится к начальной точке.

Существует простой способ обращения указанной матрицы путем специальной перестановки ее элементов [7].

При решении некоторых задач, связанных с коррекциями, требуется знание производных по времени от элементов матрицы изохронных производных. Члены этой матрицы могут быть определены из равенства

$$\frac{dU}{dt_0} = -UQ,$$

где U — матрица изохронных производных координат и компонент вектора скорости в абсолютной системе в момент времени t по координатам и компонентам вектора скорости в той же абсолютной системе в момент времени t_0

Матрица Q для потенциального поля имеет вид

$$Q = \begin{vmatrix} 0 & E \\ p & 0 \end{vmatrix},$$

где

$$p = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{X}^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Y}} & \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Z}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Y}} & \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{Y}^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{Y} \partial \tilde{Z}} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{X} \partial \tilde{Z}} & \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{Y} \partial \tilde{Z}} & \frac{\partial^2 F}{\partial \tilde{Z}^2} \end{vmatrix};$$

F — потенциал поля тяготения (для центрального поля он равен $\frac{\mu}{r}$).

В случае коррекции положения КА в картинной плоскости и времени полета до планеты при расчетах приходится использовать матрицу изохронных производных компонент радиуса-вектора и вектора скорости в момент времени t в системе координат $\xi\eta\zeta$, связанной с картинной плоскостью, по компонентам радиуса-вектора и вектора скорости в орбитальной системе координат в момент времени t_0 :

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial r_0} & \frac{\partial \xi}{\partial n_0} & \frac{\partial \xi}{\partial z_0} & \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{r}_0} & \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{n}_0} & \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial \eta}{\partial r_0} & \frac{\partial \eta}{\partial n_0} & \frac{\partial \eta}{\partial z_0} & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{r}_0} & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{n}_0} & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial r_0} & \frac{\partial \zeta}{\partial n_0} & \frac{\partial \zeta}{\partial z_0} & \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \dot{r}_0} & \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \dot{n}_0} & \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial \dot{z}_0} \\ \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial r_0} & \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial n_0} & \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial z_0} & \frac{\partial \ddot{\xi}}{\partial \ddot{r}_0} & \frac{\partial \ddot{\xi}}{\partial \ddot{n}_0} & \frac{\partial \ddot{\xi}}{\partial \ddot{z}_0} \\ \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial r_0} & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial n_0} & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial z_0} & \frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial \ddot{r}_0} & \frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial \ddot{n}_0} & \frac{\partial \ddot{\eta}}{\partial \ddot{z}_0} \\ \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial r_0} & \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial n_0} & \frac{\partial \dot{\zeta}}{\partial z_0} & \frac{\partial \ddot{\zeta}}{\partial \ddot{r}_0} & \frac{\partial \ddot{\zeta}}{\partial \ddot{n}_0} & \frac{\partial \ddot{\zeta}}{\partial \ddot{z}_0} \end{vmatrix}.$$

Третья ось ζ системы координат ортогональна картинной плоскости, и отклонение по этой оси характеризует изменение времени полета до планеты.

Матрица типа $\frac{dM}{dt_0}$ может быть определена по формуле [3]

$$\frac{dM}{dt_0} = -MR. \quad (14.1)$$

Матрица R для потенциального поля может быть представлена в виде

$$R = \begin{vmatrix} q & E \\ \lambda & q \end{vmatrix},$$

где матрицы q и λ выражаются так:

$$q = \omega_0 \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \lambda = \frac{\mu}{r_0^3} \begin{vmatrix} (3 \cos^2 \varphi - 1); & (3 \sin \varphi \cdot \cos \varphi); & 0 \\ (3 \sin \varphi \cdot \cos \varphi); & (3 \sin^2 \varphi - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Здесь ω_0 и r_0 — соответственно угловая скорость движения по орбите и расстояние от притягивающего тела в точке t_0 .

Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \dot{r}_0} \right) = -\frac{\partial \xi}{\partial r_0} + \omega_0 \frac{\partial \xi}{\partial \dot{n}_0}; \quad (14.2)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \dot{r}_0} \right) = -\frac{\partial \eta}{\partial r_0} + \omega_0 \frac{\partial \eta}{\partial \dot{n}_0} \text{ и т. д.} \quad (14.3)$$

Следует также заметить, что

$$\frac{dM}{dt} = RM; \quad \frac{dU}{dt} = QU.$$

14.5. ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ КОРРЕКЦИЯ

Пусть $\Delta \xi_1$, $\Delta \xi_2$, $\Delta \xi_3$ — корректируемые отклонения. Тогда компоненты импульса скорости коррекции в орбитальной системе могут быть определены из системы уравнений

$$\Delta \xi_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial \dot{r}} \Delta \dot{r} + \frac{\partial \xi_1}{\partial \dot{n}} \Delta \dot{n} + \frac{\partial \xi_1}{\partial \dot{z}} \Delta \dot{z};$$

$$\Delta \xi_2 = \frac{\partial \xi_2}{\partial \dot{r}} \Delta \dot{r} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \dot{n}} \Delta \dot{n} + \frac{\partial \xi_2}{\partial \dot{z}} \Delta \dot{z};$$

$$\Delta \xi_3 = \frac{\partial \xi_3}{\partial \dot{r}} \Delta \dot{r} + \frac{\partial \xi_3}{\partial \dot{n}} \Delta \dot{n} + \frac{\partial \xi_3}{\partial \dot{z}} \Delta \dot{z}.$$

Зная корректируемые отклонения, можно однозначно определить составляющие корректирующего импульса

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{r} \\ \Delta \dot{n} \\ \Delta \dot{z} \end{pmatrix} = B^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \xi_1 \\ \Delta \xi_2 \\ \Delta \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \text{где } B = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial \dot{r}} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \dot{n}} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial \dot{r}} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \dot{n}} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial \xi_3}{\partial \dot{r}} & \frac{\partial \xi_3}{\partial \dot{n}} & \frac{\partial \xi_3}{\partial \dot{z}} \end{pmatrix}.$$

Если определять составляющие корректирующего импульса в некоторой системе координат γ , связанной с орбитальной системой преобразованием L

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} r \\ n \\ z \end{pmatrix},$$

то составляющие корректирующего импульса определяются в зависимости от корректируемого отклонения

$$\begin{pmatrix} \Delta \dot{\gamma}_1 \\ \Delta \dot{\gamma}_2 \\ \Delta \dot{\gamma}_3 \end{pmatrix} = L \cdot B^{-1} \begin{pmatrix} \Delta \xi_1 \\ \Delta \xi_2 \\ \Delta \xi_3 \end{pmatrix}.$$

Априорно корректируемые отклонения могут быть представлены в виде случайного вектора с корреляционной матрицей K . Тогда корреляционная матрица корректирующего импульса получается [4]

$$K_{\gamma} = (LB^{-1}) K (LB^{-1})^*.$$

Если известна шестимерная матрица K_0 случайного вектора отклонения траектории, то

$$K = \tilde{E} K_0 \tilde{E}^*,$$

где $\tilde{E}$ — матрица, выделяющая корректируемые параметры.

Для коррекции трех параметров ξ_1, ξ_2, ξ_3 шестимерного вектора

$$\xi_K = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \end{pmatrix}$$

имеем

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$\bar{K}_{\gamma} = H (\tilde{E} K_0 \tilde{E}^*) H^*,$$

где

$$H = \begin{pmatrix} 0; & LB^{-1} \\ 0; & 0 \end{pmatrix};$$

$\bar{K}_{\gamma}$ — шестимерная матрица вила

$$\bar{K}_{\gamma} = \begin{pmatrix} 0; & 0 \\ 0; & K_{\gamma} \end{pmatrix}.$$

14.6. ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ КОРРЕКЦИЯ

Пусть $\Delta\xi_1, \Delta\xi_2$ — корректируемые отклонения, а вектор корректирующего импульса находится в некоторой плоскости. Введем в этой плоскости некоторую прямоугольную систему координат γ_1, γ_2 ; тогда можно написать

$$\begin{vmatrix} \Delta\dot{\gamma}_1 \\ \Delta\dot{\gamma}_2 \end{vmatrix} = C^{-1} \begin{vmatrix} \Delta\dot{\xi}_1 \\ \Delta\dot{\xi}_2 \end{vmatrix}, \quad (14.4)$$

где

$$C = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{\xi}_1}{\partial \dot{\gamma}_1} & \frac{\partial \dot{\xi}_1}{\partial \dot{\gamma}_2} \\ \frac{\partial \dot{\xi}_2}{\partial \dot{\gamma}_1} & \frac{\partial \dot{\xi}_2}{\partial \dot{\gamma}_2} \end{vmatrix}.$$

Из (14.4) получим

$$K_{\gamma_1, \gamma_2} = C^{-1} K (C^{-1})^*.$$

Корреляционная матрица вектора корректирующего импульса будет двухмерной, а следовательно, она будет определять эллипс рассеивания корректирующего импульса.

Можно определить плоскость оптимальной коррекции [5]. Найдем градиенты величин ξ_1 и ξ_2 в точке коррекции

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= \text{grad } \xi_1 = \frac{\partial \xi_1}{\partial \mathbf{r}} i + \frac{\partial \xi_1}{\partial n} j + \frac{\partial \xi_1}{\partial \mathbf{z}} k; \\ \bar{A}_2 &= \text{grad } \xi_2 = \frac{\partial \xi_2}{\partial \mathbf{r}} i + \frac{\partial \xi_2}{\partial n} j + \frac{\partial \xi_2}{\partial \mathbf{z}} k, \end{aligned}$$

где i, j, k — орты единичных векторов, направленных соответственно по осям орбитальной системы r, n, z .

Плоскостью оптимальной коррекции называется плоскость, проходящая через векторы $\bar{A}_1 = \text{grad } \xi_1$ и $\bar{A}_2 = \text{grad } \xi_2$. Минимальный по величине импульс $\Delta\bar{V}_K$ коррекции отклонений $\Delta\xi_1$ и $\Delta\xi_2$ принадлежит плоскости оптимальной коррекции и равен

$$\Delta\bar{V}_K = \frac{\bar{A}_2 \times \bar{A}_1 \times \bar{A}_2}{(\bar{A}_1 \times \bar{A}_2)^2} (\Delta\xi_1) + \frac{\bar{A}_1 \times \bar{A}_2 \times \bar{A}_1}{|\bar{A}_1 \times \bar{A}_2|^2} (\Delta\xi_2). \quad (14.5)$$

Формула (14.5) позволяет определить импульс $\Delta\bar{V}_K$ по заданным величинам $\Delta\xi_1$ и $\Delta\xi_2$.

Направление в пространстве, ортогональное плоскости оптимальной коррекции и определяемое единичным вектором

$$\bar{v}^0 = \frac{\bar{A}_1 \times \bar{A}_2}{|\bar{A}_1 \times \bar{A}_2|},$$

называется *нуль-направлением*. Импульс $\Delta\bar{V}$, коллинеарный вектору $\bar{v}^0$, в линейном приближении не изменяет корректируемых параметров ξ_1 и ξ_2 . В частности, если корректируемыми параметрами являются координаты в картинной плоскости, то импульс не изменяет координат в картинной плоскости, но изменяет время сближения с планетой T .

Если известна двухмерная матрица K случайного вектора корректируемых параметров, дополненная нулями до трехмерной, то эллипс рассеивания *корректирующего импульса* в плоскости оптимальной коррекции в системе координат rnz может быть определен из корреляционной матрицы

$$K_{\text{опт}} = C_{\text{опт}}^{-1} K (C_{\text{опт}}^{-1})^*, \quad (14.6)$$

где

$$C_{\text{опт}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \dot{\xi}_1}{\partial \dot{r}} & \frac{\partial \dot{\xi}_1}{\partial \dot{n}} & \frac{\partial \dot{\xi}_1}{\partial \dot{z}} \\ \frac{\partial \dot{\xi}_2}{\partial \dot{r}} & \frac{\partial \dot{\xi}_2}{\partial \dot{n}} & \frac{\partial \dot{\xi}_2}{\partial \dot{z}} \\ \bar{v}_r^0 & \bar{v}_n^0 & \bar{v}_z^0 \end{vmatrix},$$

$\bar{v}_r^0, \bar{v}_n^0, \bar{v}_z^0$ — составляющие вектора $\bar{v}^0$ в орбитальной системе координат.

Следует заметить, что во всякой другой плоскости эллипс рассеивания корректирующего импульса должен быть таким, чтобы проекция его на плоскость оптимальной коррекции равнялась эллипсу, определяемому из формулы (14.6) (рис. 14.3).

Эффективность коррекции в данной точке траектории может быть охарактеризована влиянием совокупности всевозможных единичных импульсов коррекции на корректируемые параметры. Если направление корректирующей скорости может быть любым, такой совокупностью является единичная сфера

$$\Delta \bar{V}_k^0 \Delta \bar{V}_k^0 = 1.$$

В пространстве корректируемых параметров ξ_1, ξ_2, ξ_3 такой сфере соответствует эллипсоид влияния импульсов коррекции

$$\xi^* (B^{-1})^* B^{-1} \xi = 1.$$

Соответственно этому определяется и эллипс влияния в плоскости $\xi_i \xi_j$ с помощью

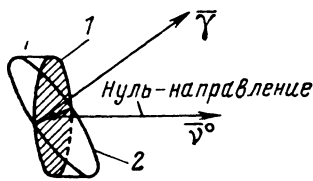


Рис. 14.3. Эллипс корректирующего импульса в плоскости оптимальной коррекции и в плоскости γ

1 — эллипс рассеивания корректирующих импульсов в плоскости оптимальной коррекции; 2 — эллипс рассеивания корректирующих импульсов в плоскости коррекции γ .

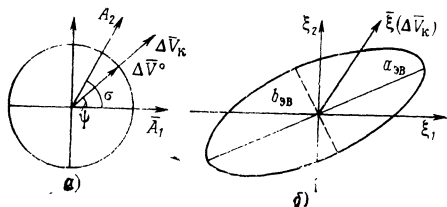


Рис. 14.4. Характеристики эффективности коррекции:

a — окружность единичных импульсов в плоскости оптимальной коррекции; b — эллипс влияния корректирующих импульсов в плоскости оптимальной коррекции.

двухмерной матрицы, получаемой из матрицы (BB^*) вычеркиванием строки и столбца с номером $k \neq i, j$.

Эллипс влияния является отображением единичной окружности, расположенной в плоскости коррекции, на плоскость корректируемых параметров (рис. 14.4).

Вытянутый эллипс влияния указывает на неравномерность различных направлений с точки зрения коррекции. Отклонение, лежащее близко к направлению большой полуоси эллипса влияния, легче поддается коррекции, чем отклонения, направленные в сторону малой полуоси.

Уравнение эллипса влияния может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \xi_1 &= |\bar{A}_1| \cos \psi; \\ \xi_2 &= |\bar{A}_2| \cos (\psi - \sigma), \end{aligned}$$

где $\bar{A}_1, \bar{A}_2$ — градиенты корректируемых параметров;

ψ — полярный угол в плоскости оптимальной коррекции между импульсом $\Delta \bar{V}_k$ и направлением градиента $\bar{A}_1$.

Отсюда следует, что при $|\bar{A}_1| = |\bar{A}_2|$ и при $\sigma = 90^\circ$, т. е. при равнонаправленности всех направлений, эллипс влияния превращается в окружность радиуса $|\bar{A}_1|$. Такая ситуация, например, реализуется в конце полета при сближении с планетой.

Величины большой и малой полуоси эллипса влияния определяются выражением

$$\lambda_{\min}^{\max} = \sqrt{\frac{1}{2} (\bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2 \pm \sqrt{\bar{A}_1^4 + \bar{A}_2^4 + 2\bar{A}_1^2 \bar{A}_2^2 \cos 2\sigma})}.$$

14.7. ОДНОКОМПОНЕНТНАЯ КОРРЕКЦИЯ

Рассматривается однокомпонентная коррекция, когда направление вектора корректирующего импульса задано с точностью до знака и можно менять только его величину.

Пусть корректируемым параметром является ξ . Тогда в линейном приближении величина корректирующего импульса может быть определена из уравнений

$$\Delta \xi = \frac{\partial \xi}{\partial V} \Delta V_k.$$

Производная $\frac{\partial \xi}{\partial V}$ в общем случае является функцией времени, которая может иметь максимумы и минимумы.

Минимальные затраты корректирующего импульса будут там, где график производной будет иметь максимум (рис. 14.5).

14.8. СВЯЗАННЫЕ КОРРЕКЦИИ) (Случай многоразовой оптимальной коррекции)

При подобной коррекции происходит поочередное смещение траектории в пространстве корректируемых параметров вдоль наиболее эффективных направлений так, чтобы суммарное смещение получить равным заданному. При каждом включении двигателя прицеливание производится в новую точку, т. е. характеристики коррекции определяются из различных условий в отличие от обычного случая многоразовой коррекции, в котором каждая последующая коррекция исправляет ошибки предыдущей, а условия коррекции остаются неизменными.

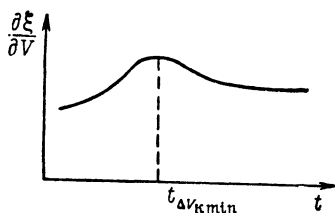


Рис. 14.5. Пример зависимости производной $\frac{\partial \xi}{\partial V}$ от времени t проведения коррекции

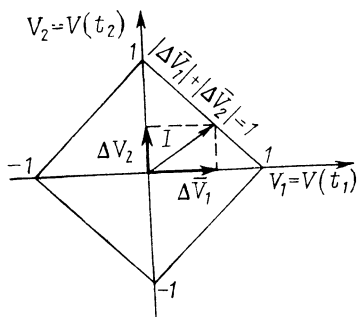


Рис. 14.6. Квадрат единичных импульсов для случая двухразовой коррекции

Рассмотрим сначала случай коррекции двух координат ξ и η в картинной плоскости с помощью двухразовой импульсной коррекции в предположении, что моменты и направления приложения импульсов $\Delta \bar{V}(t_1)$ и $\Delta \bar{V}(t_2)$ заданы. Будем рассматривать сумму величин корректирующих импульсов $|I| = |\Delta \bar{V}_1| + |\Delta \bar{V}_2|$.

В данном случае аналогом единичной сферы в пространстве $\bar{I}$ будет фигура (рис. 14.6), отвечающая условию

$$|\Delta \bar{V}_1| + |\Delta \bar{V}_2| = 1.$$

Ввиду линейности преобразования вектора $\bar{I}$ в вектор $\bar{\xi}(\xi, \eta)$ фигурой влияния в плоскости является параллелограмм, натянутый на радиусы $\bar{\xi}(t_1)$ и $\bar{\xi}(t_2)$ (рис. 14.7).

Каждая точка этого параллелограмма может быть скорректирована единичным суммарным импульсом

$$\bar{I} = \left\| \begin{array}{c} \Delta \bar{V}_1 \\ \Delta \bar{V}_2 \end{array} \right\|;$$

$$|I| = |\Delta \bar{V}_1| + |\Delta \bar{V}_2| = 1,$$

и каждой паре импульсов $\Delta \bar{V}_1$ и $\Delta \bar{V}_2$ соответствует свое значение вектора $\bar{\xi}(\Delta V_1, \Delta V_2)$ (рис. 14.7).

Варьируя t_1 и t_2 , мы получим годограф вектора $\bar{\xi}(t)$ в картинной плоскости ξ, η (рис. 14.8), по которому будут двигаться вершины параллелограмма. Максимальную фигуру влияния мы получим обкаткой годографа спрямляющей прямой [3]. Прямолинейные участки этой фигуры указывают на те отклонения, для которых энергетически выгодна двухразовая коррекция, криволинейные участки соответствуют тем направлениям, где выгодна однократная коррекция (сектор α на рис. 14.8).

Таким образом, в случае коррекции двух параметров указанным выше способом оптимальное число идеальных коррекций не превосходит двух.

Рассмотрим коррекцию двух параметров ξ, η способом трехкомпонентной коррекции, т. е. когда нет ограничений на направление корректирующего импульса.

Построим в плоскости ξ, η эллипсы влияния для различных времен проведения коррекций.

Для построения максимальной фигуры влияния двухразовой коррекции следует данную совокупность эллипсов влияния одноразовой коррекции в моменты t_1, t_2, t_3 обкатывать спрямляющей прямой (рис. 14.9) [5].

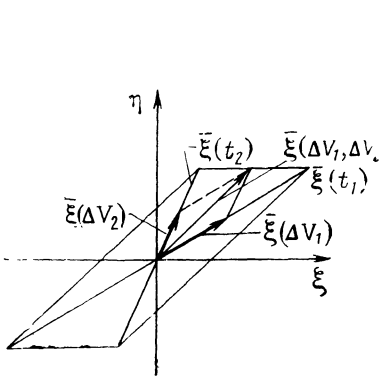


Рис. 14.7. Фигура влияния двухразовой коррекции

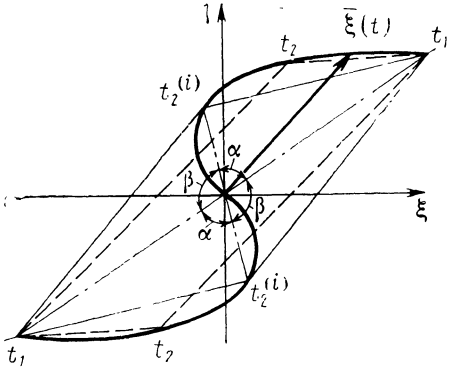


Рис. 14.8. Зависимость размеров параллелограмма влияния от моментов времени проведения коррекции t_1, t_2

Полученная фигура определяет различную тактику коррекции в зависимости от направления вектора отклонения $\bar{\xi}$. Спрямленные участки получившейся выпуклой фигуры соответствуют двухразовому включению двигателя, а участки, принадлежащие исходной совокупности эллипсов влияния, — однократному включению двигателя. Отсюда следует, что двухразовая коррекция может потребоваться в случае, если исходная совокупность эллипсов влияния не всюду выпукла, — только тогда будут существовать спрямленные участки. Не всюду выпуклая совокупность эллипсов влияния возможна лишь в случае немонотонной зависимости характеристик эллипсов влияния от времени. В противном случае всегда существует эллипс влияния, охватывающий все остальные эллипсы влияния. Из приведенных рассуждений следует, что для каж-

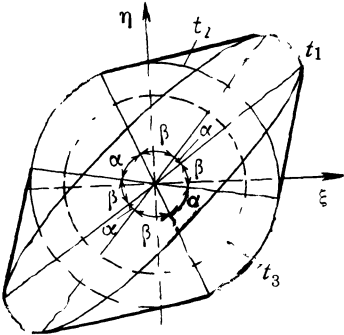


Рис. 14.9. Максимальная фигура влияния двухразовой коррекции

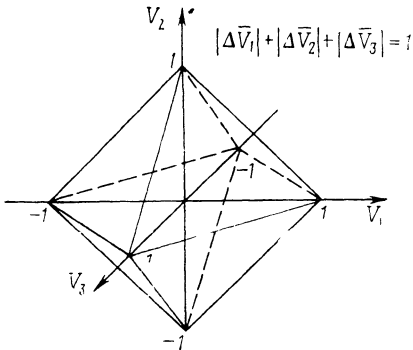


Рис. 14.10. Октаэдр единичных импульсов для случая трехразовой коррекции

дой траектории имеется конечное число фиксированных моментов и направлений импульсов для оптимальной двухразовой идеальной коррекции двух параметров. Эти моменты и направления определяются точками касания спрямляющей прямой исходной невыпуклой совокупности эллипсов влияния [5].

Полученные результаты легко обобщаются для случая трехразовой коррекции. При этом роль единичной сферы

$$\bar{I} = \left\| \begin{matrix} \Delta \bar{V}_1 \\ \Delta \bar{V}_2 \\ \Delta \bar{V}_3 \end{matrix} \right\|;$$

$$I = |\Delta \bar{V}_1| + |\Delta \bar{V}_2| + |\Delta \bar{V}_3| = 1$$

в пространстве играет октаэдр, изображенный на рис. 14.10.

Соответственно максимальная фигура влияния в пространстве корректируемых параметров получается обкаткой спрямляющей плоскостью фигур влияния одноразовой коррекции. Плоские участки получившейся фигуры отвечают трехимпульсной коррекции, линейчатые — двухимпульсной, остальные точки — одноимпульсной.

Аналогичные рассуждения можно провести для четырехимпульсной коррекции и т. д.

Пользуясь полученными результатами, можно показать, что *оптимальное количество импульсов связанной коррекции не превышает размерности пространства корректируемых параметров* [6].

Указанные свойства не зависят от вида исходной совокупности фигур влияния. В частности, эта совокупность может соответствовать корректирующим импульсам, направление которых так или иначе фиксировано в пространстве. В этом случае, а также в случае, когда число корректируемых параметров превышает число независимых корректирующих воздействий в каждой точке траектории, применение связной коррекции может оказаться необходимым вне зависимости от соображений минимизации суммарной скорости.

14.9. КОРРЕКЦИЯ С ПОМОЩЬЮ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ СКОРОСТИ («СОЛНЕЧНАЯ» КОРРЕКЦИЯ)

В данном способе коррекции межпланетных траекторий (полет к планетам Солнечной системы) система ориентации должна позволять направить ось двигателя только к Солнцу или от Солнца, т. е. импульс корректирующей скорости должен быть коллинеарен направлению на Солнце. Все результаты, изложенные в данном разделе, могут быть отнесены и к коррекциям планетоцентрических траекторий вдоль направления КА — центр тяготения.

Одноразовая коррекция по данному способу позволяет скорректировать только один параметр у планеты назначения, т. е. она является однокомпонентной. Многоразовая связанная коррекция может скорректировать несколько параметров.

14.9.1. Общие свойства многоразовой коррекции вдоль направления на Солнце

I. В теории коррекции доказывается следующая теорема. При n солнечных коррекциях ($n > 4$), проведенных в некоторые моменты времени $t_1, t_2, \dots, t_n$, количество независимых корректируемых координат не превосходит двух; количество независимых корректируемых скоростей не превосходит двух, а общее число корректируемых параметров не превосходит четырех [3].

II. Для достижения минимальных энергетических затрат оптимальное число солнечных коррекций не может быть больше четырех, поскольку это число не бывает больше числа корректируемых параметров (при абсолютно точном знании действительной траектории полета и нулевых ошибках исполнения коррекции).

Если корректируемыми параметрами являются две координаты в картинной плоскости, то минимальное число корректирующих импульсов в общем случае не превосходит двух.

III. Если корректируемыми параметрами являются две координаты в картинной плоскости ξ, η , то время полета до картинной плоскости, характеризуемое третьей координатой, не корректируется.

Доказательство этого положения основано на том, что при солнечной коррекции импульс скорости лежит всегда в плоскости траектории и не меняет линию пересечения этой плоскости с плоскостью орбиты планеты, а только на этой линии и может произойти встреча КА с планетой, которая будет там в определенное время.

Изменение времени полета после таких коррекций можно представить в виде

$$\Delta t_n = t_{\xi} \Delta \xi + t_{\eta} \Delta \eta,$$

где $\Delta \xi, \Delta \eta$ — корректируемые отклонения в картинной плоскости;

t_{ξ}, t_{η} — коэффициенты, зависящие только от элементов матрицы преобразования орбитальной системы в систему координат, связанную с картинной плоскостью; следовательно, это величины постоянные для каждой траектории.

Таким образом, время встречи с планетой после n солнечных коррекций всегда одно и то же и не зависит от времени проведения этих коррекций, но и не совпадает со временем сближения с планетой до коррекции.

14.9.2. Двухразовая солнечная коррекция для исправления координат в картинной плоскости

Если известны первоначальные отклонения ($\Delta \xi, \Delta \eta$) в картинной плоскости, то в линейной постановке величины первого и второго корректирующих импульсов определяются из системы уравнений

$$\Delta \xi = \frac{\partial \xi}{\partial r_1} \Delta V_1 + \frac{\partial \xi}{\partial r_2} \Delta V_2; \quad \Delta \eta = \frac{\partial \eta}{\partial r_1} \Delta V_1 + \frac{\partial \eta}{\partial r_2} \Delta V_2,$$

где ΔV_1 и ΔV_2 — величины импульсов скорости коррекции, сообщенных соответственно в первой и во второй коррекциях;

$\frac{\partial \xi}{\partial \dot{r}_1}, \frac{\partial \xi}{\partial \dot{r}_2}, \frac{\partial \eta}{\partial \dot{r}_1}, \frac{\partial \eta}{\partial \dot{r}_2}$ — частные производные от корректируемых параметров по корректирующему воздействию.

Эта система имеет решение, когда ее определитель не равен нулю, что почти всегда имеет место для траекторий полета к планетам Солнечной системы. В самом деле, если определитель

$$\Delta = \frac{\partial \xi}{\partial \dot{r}_1} \frac{\partial \eta}{\partial \dot{r}_2} - \frac{\partial \xi}{\partial \dot{r}_2} \frac{\partial \eta}{\partial \dot{r}_1} = 0,$$

то это означает коллинеарность векторов $\bar{\xi}(t_1)$ и $\bar{\xi}(t_2)$:

$$\bar{\xi}(t) = \frac{\partial \xi}{\partial \dot{r}}(t) i + \frac{\partial \eta}{\partial \dot{r}}(t) j,$$

где i и j — единичные векторы, направленные соответственно по осям ξ и η картинной плоскости.

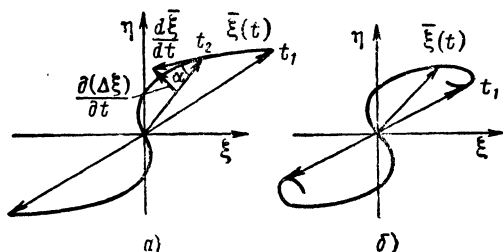


Рис. 14.11. Вид годографа вектора $\bar{\xi}(t)$ при коррекции с помощью гелиоцентрических импульсов скорости

На рис. 14.8 показан вид годографа вектора $\bar{\xi}(t)$, соответствующего полету к планетам. Каждая точка на годографе соответствует отклонению в картинной плоскости, возникающему в результате приложения единичного импульса скорости, направленного по радиусу-вектору или против него, в разные моменты времени.

Выбирая на траектории любые две точки коррекции, для которых векторы $\bar{\xi}$ не параллельны, можно в принципе скорректировать любое отклонение в картинной плоскости. Как было показано в разд. 14.8, для фиксированных моментов времени t_1

и t_2 в зависимости от соотношения ΔV_1 и ΔV_2 единицей корректирующей скорости можно выбрать отклонение в пределах параллелограмма, построенного на векторах $\bar{\xi}(t_1)$ и $\bar{\xi}(t_2)$. В зависимости от моментов первой и второй коррекций вершины параллелограмма будут двигаться по кривой $\bar{\xi}(t)$, определяемой годографом вектора производных в картинной плоскости.

Годограф вектора $\bar{\xi}$ имеет всегда вид, подобный изображенному на рис. 14.8. Из этого рисунка видно, что для тех отклонений, которые лежат в секторах α , энергетически выгодно провести одно включение двигателя. Для остальных направлений (секторы β) энергетически выгодным оказывается двухразовое включение. При этом момент однократной коррекции определяется однозначно из условия, чтобы направление вектора $\bar{\xi}(t)$ совпадало с направлением отклонения.

Моменты первого и второго включения двигателя можно выбрать исходя из минимума суммарной величины корректирующего импульса скорости

$$\Delta V_{\Sigma} = |\Delta \bar{V}_1| + |\Delta \bar{V}_2|.$$

Как уже говорилось в разд. 14.8, оптимальные моменты включения двигателя могут быть получены обкаткой годографа спрямляющей прямой. В зависимости от вида годографа возможны следующие случаи.

Случай I. Годограф соответствует виду, представленному на рис. 14.11, а. В этом случае оптимальный по времени момент первой коррекции соответствует началу полета, а момент второй коррекции определяется из условия

$$\frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \dot{r}_2} \right)}{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \dot{r}_2} \right)} = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial \dot{r}_2} + \frac{\partial \eta}{\partial \dot{r}_1}}{\frac{\partial \xi}{\partial \dot{r}_2} + \frac{\partial \xi}{\partial \dot{r}_1}}. \quad (14.7)$$

Случай II. Годограф соответствует виду, представленному на рис. 14.11, б. В этом случае для оптимальных моментов времени проведения коррекций, кроме (14.7), должно выполняться и такое условие:

$$\frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \dot{r}_1} \right)}{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \dot{r}_1} \right)} = \frac{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \dot{r}_2} \right)}{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \xi}{\partial \dot{r}_2} \right)}. \quad (14.8)$$

Производные по времени от $\frac{\partial \xi}{\partial r}$ и $\frac{\partial \eta}{\partial r}$ могут быть найдены по методу, приведенному в разд. 14.4 [см. формулы (14.2) и (14.3)].

14.9.3. Выбор времени проведения второй коррекции

Для двух связанных коррекций, после того как проведена первая коррекция, однозначно определяются момент времени и величина импульса скорости второй коррекции (при известных первоначальных отклонениях траектории). Если к моменту первой коррекции траектория была известна с некоторой погрешностью, а к моменту второй коррекции возможно уточнение траектории, то оно может быть учтено путем изменения момента времени и импульса скорости второй коррекции.

Предположим, что между действительным и необходимым моментами времени проведения второй коррекции есть некоторое отличие Δt , которое приводит к появлению смещения траектории в картинной плоскости. Вектор этого смещения в линейной постановке можно определить так:

$$\Delta \bar{\xi} = \Delta V_{\kappa} \frac{d \bar{\xi}}{dt} \Delta t,$$

где $\frac{d \bar{\xi}}{dt}$ — производная по времени от вектора $\bar{\xi}(t)$;

ΔV_{κ} — величина корректирующего импульса скорости;

Δt — отличие между действительным и необходимым моментами времени включения двигателя.

Можно получить производную вектора смещения по времени проведения коррекции, т. е. производную без изменения величины корректирующего импульса; назовем ее «полной» производной:

$$\frac{d(\Delta \bar{\xi})}{dt} = \Delta V_{\kappa} \cdot \frac{d \bar{\xi}}{dt},$$

где $\frac{d \bar{\xi}}{dt}$ может быть найдено по элементам матрицы изохронных производных (см. разд. 14.4).

Проекция вектора $\frac{d(\Delta \bar{\xi})}{dt}$ на направление $\bar{\xi}(t_2)$ при известном Δt может быть скомпенсирована изменением импульса скорости второй коррекции. Нескомпенсированной остается только проекция на направление, ортогональное $\bar{\xi}(t_2)$ (см. рис. 14.11, а). Эту нескомпенсированную часть назовем «частной» производной $\frac{\partial(\Delta \bar{\xi})}{\partial t}$. Она всегда меньше полной производной, но требует для каждого момента времени изменения величины корректирующего импульса.

Величина частной производной равна

$$\frac{\partial(\Delta \bar{\xi})}{\partial t} = \left| \frac{d \bar{\xi}}{dt} \right| \sin \alpha.$$

Материалы, изложенные в данном параграфе для двухразовой солнечной коррекции, могут быть распространены и на другие виды связанных коррекций, в том числе и на случаи, когда первая и вторая коррекции проводятся разными способами. Особенностью последнего случая является то, что здесь приходится иметь дело одновременно с двумя годографами векторов производных, что существенных трудностей не представляет.

14.10. СВОЙСТВА КОРРЕКЦИИ НА КОНЕЧНОМ УЧАСТКЕ ТРАЕКТОРИИ

Перед сближением с планетой-целью на конечном участке траектории ввиду близости планеты и КА, летящего к ней, их относительное движение может быть представлено в первом приближении как равномерное прямолинейное движение, а совокупность возможных траекторий — как пучок параллельных прямых.

Выделяя продольное сечение пучка, в котором лежит корректирующее отклонение скорости $\Delta \bar{V}_{\kappa}$, введем величину соответствующего отклонения Δl вдоль линии пересечения рассматриваемого сечения с картинной плоскостью (рис. 14.12).

Плоскость оптимальной коррекции для исправления положения КА в картинной плоскости в данном случае есть плоскость, перпендикулярная оси пучка. Эллипс влияния есть окружность радиуса T , где под T понимается время, оставшееся до попадания в картинную плоскость:

$$\frac{\partial l}{\partial V_k} = T.$$

Таким образом, вне зависимости от величин скоростей и взаимного расположения планеты и КА эффективность коррекции в конце траектории определяется временем, оставшимся до сближения с планетой, т. е. эффективность коррекции одинакова при полете к Луне и планетам Солнечной системы, если коррекции проводятся за одинаковое время до попадания в планету.

Влияние импульса $\Delta \vec{V}_v$, направленного по нуль-направлению (т. е. вдоль оси пучка), на время полета определяется из формулы

$$\frac{\partial T}{\partial V_v} = -\frac{T}{V_{отн}}.$$

Заметим, что при совместной коррекции координат и времени целесообразно использовать более точную формулу, учитывающую изменение после коррекции времени полета до сближения с планетой,

$$\frac{\partial l}{\partial V_k} = T - \Delta T = T \left(1 - \frac{\Delta V_v}{V_{отн}} \right).$$

Импульс, необходимый для коррекции времени на величину ΔT , определяется как

$$\Delta V_v = -\frac{\Delta T}{T} V_{отн}.$$

Импульс, необходимый для ликвидации отклонения Δl и времени ΔT , определяется из формул:

$$\Delta V_v = -\frac{\Delta T}{T} V_{отн};$$

$$\Delta V = -\frac{\Delta l}{T \left(1 - \frac{\Delta V_v}{V_{отн}} \right)};$$

$$\Delta V_{\Sigma} = \sqrt{\Delta V_k^2 + \Delta V_v^2}.$$

Расчет по проведенным выше формулам дает хорошие результаты при определении параметров коррекции, проводимой вблизи планеты (примерно за 15 суток до сближения с Венерой и за 2 месяца до сближения с Марсом) [5].

14.11. ОШИБКИ ИСПОЛНЕНИЯ КОРРЕКЦИИ

Ошибки коррекции параметров ξ_i определяются ошибками величины и направления импульса. Ошибки величины импульса можно разделить на абсолютные, т. е. не зависящие от величины импульса, и относительные. Абсолютная ошибка величины импульса $\delta V_{абс}$ вызывает максимальную погрешность корректируемых параметров, равную

$$\delta \xi_i = \bar{A}_i \frac{\Delta \bar{V}}{|\Delta \bar{V}|} \delta V_{абс}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Относительная ошибка величины импульса

$$\delta V_{отн} = k |\Delta \bar{V}|$$

вызывает максимальную погрешность в корректируемых параметрах, равную

$$\delta \xi_i = \bar{A}_i k \Delta \bar{V} = k \Delta \xi_i.$$

Таким образом, влияние относительной ошибки величины импульса коррекции на параметры ξ_i не зависит от момента коррекции, если величина корректируемого отклонения $\Delta \xi$ сохраняется неизменной.

Абсолютная угловая ошибка направления импульса соответствует относительной ошибке боковой компоненты импульса. В пространстве импульсов абсолютной угловой ошибке $\delta\psi$ соответствует круг, плоскость которого ортогональна направлению импульса и радиус которого

$$\delta V_6 = |\Delta \bar{V}| \operatorname{tg} \psi \approx |\Delta \bar{V}| \delta \psi.$$

Следовательно, максимальная ошибка параметра ξ_i равна:

$$\delta \xi_i = \frac{\Delta \bar{V} \times \bar{A}_i \times \Delta \bar{V}}{|\Delta \bar{V} \times \bar{A}_i \times \Delta \bar{V}|} \bar{A}_i |\Delta \bar{V}| \delta \psi.$$

Относительная угловая ошибка направления импульса

$$\delta \psi_{\text{отн}} = q |\Delta \bar{V}|$$

вызывает аналогичную погрешность в корректируемых параметрах

$$\delta \xi_i = \frac{\Delta \bar{V} \times \bar{A}_i \times \Delta \bar{V}}{|\Delta \bar{V} \times \bar{A}_i \times \Delta \bar{V}|} \bar{A}_i \Delta V^2 q.$$

Абсолютная погрешность боковой компоненты импульса $\delta V_{6.abc}$ вызывает максимальную погрешность корректируемых параметров

$$\delta \xi_i = \frac{\Delta \bar{V} \times \bar{A}_i \times \Delta \bar{V}}{|\Delta \bar{V} \times \bar{A}_i \times \Delta \bar{V}|} \bar{A}_i \delta V_{6.abc}.$$

Для данного импульса коррекции ΔV область возможных его ошибок при нормальном распределении компонент в пространстве импульсов представляет собой эллипсоид вращения с осью, коллинеарной импульсу ΔV , и полуосями, соответственно равными (при предположении о независимости всех ошибок):

$$a_{\Delta V} = \sqrt{(\delta V_{abc})^2 + (k \Delta V)^2};$$

$$a_6 = \sqrt{(\delta V_{6.abc})^2 + (\Delta V \delta \psi)^2 + (q \Delta V^2)^2}.$$

Матрица вторых моментов, соответствующая указанному эллипсоиду, в абсолютной системе координат $OXYZ$ имеет вид

$$K_{\Delta V} = G K G^*,$$

где

$$K = \begin{vmatrix} a_{\Delta V} & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & a_6 \end{vmatrix};$$

$$G = \begin{vmatrix} k_X^0 & l_X^0 & m_X^0 \\ k_Y^0 & l_Y^0 & m_Y^0 \\ k_Z^0 & l_Z^0 & m_Z^0 \end{vmatrix};$$

$$\bar{k}^0 = \frac{\Delta \bar{V}}{|\Delta \bar{V}|}; \quad \bar{l}^0 = \frac{\Delta \bar{V} \times \bar{g}^0}{|\Delta \bar{V} \times \bar{g}^0|}; \quad \bar{m}^0 = \frac{\Delta \bar{V} \times \bar{l}^0}{\Delta \bar{V} \times \bar{l}^0};$$

$\bar{g}^0$ — единичный вектор, неколлинеарный $\Delta \bar{V}$.

Соответственно ошибки в пространстве корректируемых параметров $\bar{\xi}$ описываются эллипсоидом с матрицей вторых моментов

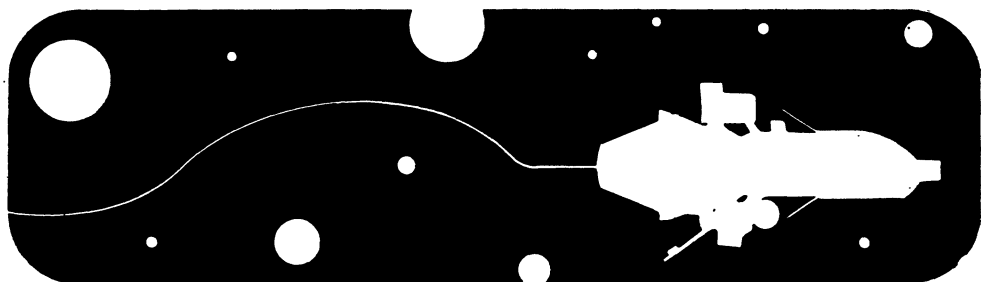
$$K_{\bar{\xi}} = N K_{\Delta V} N^*.$$

Следует подчеркнуть, что все приведенные зависимости получены для известного импульса коррекции ΔV . Для области возможных импульсов, определяемых, например, с помощью корреляционной матрицы $K_{\Delta V}$, закон распределения ошибок коррекции уже не является нормальным и характеристики ошибок исполнения коррекции должны определяться численным способом.

Подробная библиография работ о коррекции траекторий космических аппаратов приводится в сборнике «Механика в СССР за 50 лет» [8].

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. XIV

1. Дашков А. А. Некоторые требования к системам коррекции межпланетных траекторий. — «Космические исследования», т. IV, вып. 5, 1966.
 2. Казакова Р. К., Киселев В. Г., Платонов А. К. Исследование свойств энергетически оптимальных орбит полета к Юпитеру. — «Космические исследования», т. VI, вып. 1, 1968.
 3. Кубасов В. Н. Коррекция межпланетных траекторий с помощью импульсов радиальной гелиоцентрической скорости. — «Космические исследования». т. IV, вып. 5, 1966.
 4. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки результатов измерений. М., Физматгиз, 1962.
 5. Платонов А. К. Исследование свойств корректирующих маневров межпланетных полетов. — «Космические исследования». т. IV, вып. 5, 1966.
 6. Платонов А. К., Дашков А. А., Кубасов В. Н. Оптимизация управления полетом космических аппаратов. — Сб. «Автоматическое управление космическими летательными аппаратами». М., «Наука», 1968.
 7. Чарный В. И. Об изохронных производных. — Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16, 1963.
 8. Механика в СССР за 50 лет. М., «Наука», 1968.
-



ГЛАВА XV

МАНЕВРИРОВАНИЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a — большая полуось орбиты.
- A_j — апоцентр орбиты T_j .
- A — апогей орбиты КА.
- b — прицельная дальность (разд. 15.1); малая полуось орбиты (разд. 15.2).
- c_x — коэффициент лобового сопротивления.
- c_y — коэффициент подъемной силы.
- D — продольная дальность спуска КА.
- D_b — боковая дальность спуска КА.
- E — константа энергии.
- $\bar{E}$ — эксцентрическая аномалия.
- e — эксцентриситет.
- F — тяга двигательной установки КА.
- F_m — площадь мишени.
- $\dot{f}$ — реактивное ускорение.
- g — ускорение земного притяжения.
- G — вес.
- H — высота полета.
- H_0 — высота круговой орбиты.
- $H_{атм}$ — верхняя граница условной атмосферы.
- H — высота однородной атмосферы.
- I — удельный импульс двигателя.
- i — угол наклона орбитальной плоскости к экватору.
- K — заданное кольцо, концентричное относительно центра притяжения (разд. 15.1);
аэродинамическое качество КА $\left(K = \frac{c_y}{c_x}, \text{ разд. 15.2} \right)$.
- k_p — коэффициент работы двигательной установки КА.
- k_j — весовой коэффициент при j -м граничном условии.
- k_1 — весовой коэффициент при составляющей основной (минимизируемой) части функционала.
- $k_0 = \frac{1}{H}$ — коэффициент.
- L — константа площадей.
- m — масса.
- N — число импульсов скорости.
- n — число корректируемых параметров (разд. 15.1); полная перегрузка (разд. 15.2);
- O — центр притяжения.
- P — перигей орбиты КА.
- P_j — перигей орбиты T_j .
- p — фокальный параметр (разд. 15.1); удельная нагрузка на крыло КА (разд. 15.2).

- P — плоскость скоростей (разд. 15.1), минимизируемый функционал (разд. 15.2).
 Q — интегральный тепловой поток.
 q — скоростной напор.
 q_i — элемент орбиты.
 q_k — удельный конвективный теплопоток.
 R — радиус Земли (средний).
 $\vec{r}$ — радиус-вектор.
 r_a — радиус в апоцентре.
 r_n — радиус в перигеете.
 S — проекция суммарного ускорения на радиус-вектор.
 S — коэффициент конструктивного совершенства.
 $S_{\text{нес}}$ — площадь крыла КА.
 T — проекция суммарного ускорения на трансверсаль, время конца маневра (момент выполнения граничных условий).
 T_j — орбита КА.
 t — текущее время (независимая переменная).
 u — полярный угол радиуса-вектора.
 U_e — эффективная скорость истечения газов из сопла двигателя КА.
 V — скорость полета КА.
 V_r — радиальная составляющая вектора скорости.
 V_t — трансверсальная составляющая скорости.
 V_∞ — скорость на бесконечном удалении от притягивающего центра.
 W — проекция суммарного ускорения на нормаль к плоскости орбиты.
 w — характеристическая скорость.
 X — заданное граничное условие.
 x — значение фазовой координаты.
 Y — подъемная сила КА.
 y — управляющая функция.
 α — угол между вектором скорости и радиусом-вектором (15.1); угол атаки КА (15.2).
 β — угол скольжения КА.
 γ — внутренняя граница кольца K (разд. 15.1); угол крена КА (разд. 15.2).
 Γ — внешняя граница кольца.
 Δ — угол собственного вращения орбитальной плоскости.
 Δe — приращение эксцентриситета.
 Δp — приращение фокального параметра.
 ΔV — импульс скорости.
 $\Delta \Omega$ — смещение долготы восходящего узла.
 $\Delta \omega$ — смещение перигея.
 δ_0 — угловое положение линии апсид во вспомогательной системе координат.
 δ_y — приращение управляющей функции.
 ε — отклонение параметра от расчетного значения.
 θ — угол наклона траектории КА.
 ϑ — угол тангажа КА.
 κ — штрафная функция, учитывающая ограничения по фазовым координатам.
 λ — географическая долгота.
 μ — гравитационная постоянная Земли.
 ν — истинная аномалия.
 ξ — относительный вес.
 ρ — плотность воздуха.
 ρ_n — плотность воздуха в перигее.
 τ — тяговооруженность КА $\left(\tau = \frac{F}{G} \right)$.
 Φ — угловое положение перигея относительно линии узлов.
 φ — угол между вектором тяги и трансверсалью (разд. 15.1); географическая широта (разд. 15.2).
 χ — угол поворота орбитальной плоскости (плоский угол между начальной и конечной орбитами).

ψ — угол рысканья КА.

Ω — долгота восходящего узла.

ω — угловая скорость движения КА.

ω_3 — угловая скорость суточного вращения Земли.

ω — аргумент перигея.

15.1. ОПТИМАЛЬНОЕ МАНЕВРИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКИ БОЛЬШОЙ ТЯГИ (ИМПУЛЬСНЫЕ МАНЕВРЫ)

15.1.1. Оптимальные переходы между компланарными орбитами при ограничениях на расстояние от центра тяготения

Рассматривается *плоская задача* оптимального импульсного перехода между *компланарными* орбитами в центральном ньютоновском поле сил. При переходе расстояние r движущейся точки от притягивающего центра должно удовлетворять ограничениям

$$r_{\min} \leq r(t) \leq r_{\max} (t_n \leq t \leq t_k), \quad (15.1)$$

т. е. в процессе всего перехода точка должна находиться в заданном кольце K , центр которого совпадает с центром тяготения:

$$K = \{r_{\min} \leq r \leq r_{\max}\}.$$

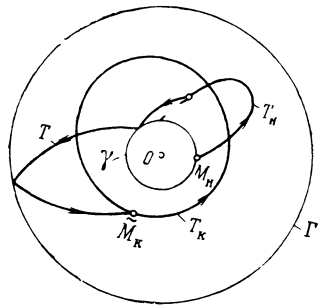
Внутреннюю границу кольца $\{r=r_{\min}\}$ обозначим через γ , а внешнюю $\{r=r_{\max}\}$ — через Γ (рис. 15.1).

Ограничения на расстояние от центра тяготения возникают в ряде задач, например при рассмотрении переходов между орбитами вблизи планеты в пределах ее сферы действия. При этом внутренней границей кольца будет граница атмосферного слоя или поверхность планеты, а внешней — граница сферы действия.

В начальный момент перехода $t=t_n$ точка должна находиться на начальной орбите T_n , для которой заданы два элемента, например константа площадей L_n и энергии E_n или пери- и апоцентрическое расстояния $r_{пн}$, $r_{ан}$. Если энергия положительна ($E_n > 0$), то

$$r_{ан} = -\mu(1 + e_n)/2E_n < 0.$$

Рис. 15.1. Переход между орбитами T_n и T_k , осуществляемый в заданном кольце



Здесь e_n — эксцентриситет начальной орбиты T_n .

В конечный момент перехода $t=t_k$ точка находится на конечной орбите T_k , параметры которой равны L_k , E_k или $r_{пк}$, $r_{ак}$ (если $E_k > 0$, то $r_{ак} < 0$). Если начальная или конечная орбита пересекает границы кольца, то учитывается только ее некоторая связанная часть, принадлежащая кольцу. Начальную и конечную орбиты будем называть исходными или заданными.

Направление движения по обеим орбитам — одинаковое. Ограничений на взаимное положение линий апсид исходных орбит и на время перехода не накладывается.

Среди переходов с конечным (нефиксированным) числом импульсов $\vec{\Delta V}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$) определяется оптимальная траектория импульсного перехода, на которой величина *характеристической скорости* w_k в конце перехода (сумма величин всех импульсов) достигает точной нижней грани абсолютного минимума на множестве всех переходов:

$$w_k = \sum_{i=1}^N \Delta V_i \rightarrow \inf w_k.$$

Рассмотрение импульсов оправдано тем, что при большой тяге размеры активных участков при движении вне атмосферы часто малы и для знания характера оптимальных траекторий достаточно бывает ограничиться импульсной постановкой. Кроме того, некоторые результаты, например, по переходу между эллиптическими орбитами в кольце, применимы целиком для ограниченной тяги двигательной установки.

Практическая важность минимизации характеристической скорости w_k , равной

$$w_k = \int_{t_n}^{t_k} |\vec{f}(t)| dt$$

(при движении с ограниченным реактивным ускорением $\vec{f}(t)$), или $w_k = \sum_{i=1}^N \Delta V_i$.

(при сообщении импульсов скорости), определяется тем, что при некоторых условиях минимизация характеристической скорости соответствует минимизации расхода топлива на КА. Это имеет место, если масса m аппарата изменяется (уменьшается) только при создании реактивной тяги (сообщении импульсов) и при этом скорость истечения U_e постоянна. Тогда характеристическая скорость равна

$$w = -U_e \ln(m/m_n),$$

где m_n — начальная масса.

Заметим также, что, хотя в исходной постановке задачи время перехода не ограничивается, введение ограничений на расстояние от центра притяжения приводит к оптимальным решениям с конечным временем перехода. Этого, вообще говоря, может не быть в задаче оптимизации без ограничения на расстояние и время перехода, когда на оптимальном решении может требоваться приложение импульсов сколь угодно далеко от притягивающего центра и сколь угодно близко к нему, а время перехода может неограниченно возрастать.

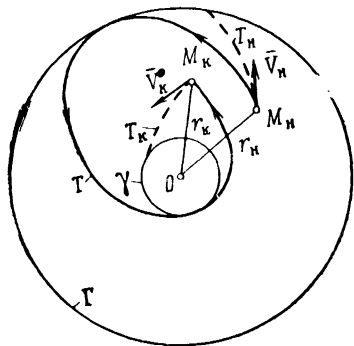


Рис. 15.2. Переход из начальной точки M_n в конечную точку M_k

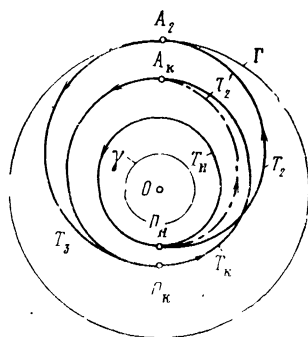


Рис. 15.3. Двух- и трехимпульсный переходы между эллиптическими орбитами

Рассмотрим некоторые свойства оптимального импульсного перехода из точки в точку. Пусть в начале перехода заданы начальные кинематические параметры r_n, V_{rn}, V_{tn} (расстояние от центра тяготения, радиальная и тангенциальная компоненты скорости), в конце перехода — конечные r_k, V_{rk}, V_{tk} (т. е. угловое расстояние между точками не задается), а остальные условия перехода аналогичны указанным выше. Будем говорить, что эти параметры определяют соответственно начальную M_n и конечную M_k точки траектории перехода, если кеплеровские орбиты (начальная T_n и конечная T_k), определяемые этими параметрами, пересекают границы кольца (рис. 15.2). Если же соответствующая орбита не пересекает границ кольца, то точку назовем квазиначальной M_n или квазиконечной M_k . Вместо нее с равным успехом можно было бы взять любую другую точку соответствующей кеплеровской орбиты T_n или T_k ввиду ее замкнутости и незаданности времени перехода. Начальную и конечную точки траектории перехода назовем *границными*. Остальные точки траектории перехода, в частности квазиначальная и квазиконечная (если они есть), по определению будут *внутренними*. Тогда справедлива следующая теорема [18, 6].

Теорема. Внутренние точки оптимальной траектории, в которых сообщаются импульсы, будут *апсидальными*, т. е. в них радиальная компонента скорости равна нулю до и после сообщения импульса. Такие импульсы также называют апсидальными. Рассмотрим два примера применения теоремы.

Пример 1. Начальные и конечные условия соответствуют орбитам T_n и T_k , не пересекающим границ кольца, т. е. имеет место переход между эллиптическими орбитами, не пересекающими границ заданного кольца K . Граничных точек нет, все импульсы будут апсидальными, оптимальный переход будет двух- или трехимпульсным (рис. 15.3). Пусть для определенности $r_{an} \leq r_{ak}$. Тогда при *двухимпульсном* переходе параметры *промежуточной* орбиты T_2' равны:

$$r'_{n2} = r_{nn}; \quad r'_{a2} = r_{ak}.$$

Первый импульс сообщается в перигеентре начальной орбиты, второй — в конечном (более удаленном) апоцентре [28]. Если при этом $r_{nn} = r_{nk}$ или $r_{an} = r_{ak}$, то переход вырождается в одноимпульсный, импульс сообщается в общем перигеентре или апоцентре соответственно.

При *трехимпульсном* переходе параметры *промежуточных* орбит T_2 и T_3 равны:

$$r_{n2} = r_{nn}; \quad r_{a2} = r_{a3} = r_{max}; \quad r_{n3} = r_{nk}.$$

Второй импульс сообщается на внешней границе кольца $\Gamma(r=r_{\max})$, первый и третий — прилагаются в перигентрах начальной и конечной орбит соответственно [29, 7]. Если $r_{\text{пн}}=r_{\text{пк}}$, то случай $N=3$ не может быть оптимальным. Если $r_{\text{ак}}=r_{\text{мак}}$, то переход вырождается в двухимпульсный.

Заметим, что соответствующую минимальную характеристическую скорость можно сколь угодно точно реализовать и при переходе с конечной тягой. Для этого каждый импульс ΔV_i надо разбить на несколько достаточно малых составляющих импульсов

$$\Delta V_{ij} \left(\Delta V_i = \sum_{j=1}^n \Delta V_{ij} \right), \quad \text{имеющих то же направление, что и прежний импульс } \Delta V_i,$$

и сообщать их друг за другом через оборот спутника по орбите. Далее эти частичные импульсы аппроксимируются достаточно точно активными участками с конечной тягой. Если затем устремить к нулю величину каждого частичного импульса ΔV_{ij} (и время соответствующего активного участка), а число оборотов (и время перехода) к бесконечности, то в пределе получим характеристическую скорость оптимального перехода.

При переходе между круговыми орбитами радиусов r_n и r_k ($r_n < r_k$) возможны три случая. Если отношение радиусов r_k/r_n меньше $\tilde{p} \approx 11,94$, то оптимальным будет двухимпульсный хомановский переход [21] $N=2$ [величина $\sqrt{1/\tilde{p}} = x$ есть корень уравнения $x^3 + x^2 - (2\sqrt{2} + 1)x + 1 = 0$]. Если r_k/r_n больше $\tilde{p} \approx 15,56$, то при любом $r_{\max} > r_k$ оптимальным будет трехимпульсный переход Штернфельда [20] $N=3$ ($\tilde{p}^{-1} = 4 \cos 40^\circ - 3$).

В промежуточном случае $\tilde{p} \leq r_k/r_n \leq \tilde{p}$ существует предельное значение $\tilde{r}_{\max}$, такое, что при $r_{\max} < \tilde{r}_{\max}$ переход будет двухимпульсным, а при $r_{\max} > \tilde{r}_{\max}$ — трехимпульсным. Указанные области оптимальности обоих переходов и зависимость $r_n/\tilde{r}_{\max}$ от r_n/r_k приведены на рис. 15.4, где обозначено $\tilde{r} = 1/\tilde{p}$, $\tilde{r} = 1/\tilde{p}$ (см. также [27])

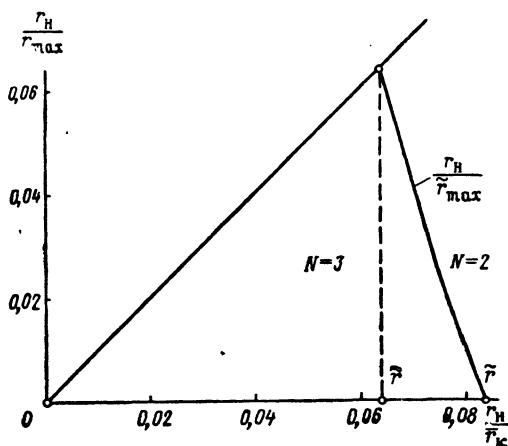


Рис. 15.4. Области оптимальности двух- и трехимпульсного переходов между круговыми орбитами

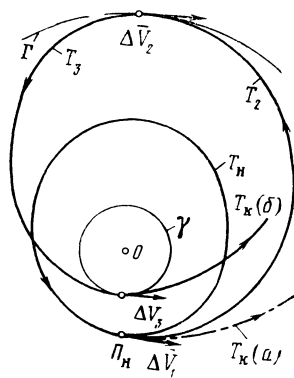


Рис. 15.5. Одно- и трехимпульсная траектории оптимального «ухода» с эллиптической орбиты

Пример 2. Начальная орбита не пересекает границ кольца. Для конечной орбиты (гиперболы) задана лишь энергия $E_k = V_\infty^2/2$. Имеем задачу оптимального «ухода» с эллиптической орбиты [6]; она встает на начальной стадии межпланетного полета, когда из решения «внешней» задачи определяется для гиперболы отлета вектор $\vec{V}_\infty$. Для оптимальной траектории перехода граничных точек сообщения импульсов нет, все импульсы будут апсидальными, сообщается один или три импульса (рис. 15.5):

- при $V_\infty < V^* = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{\max}}}$ оптимальной будет траектория одноимпульсного перехода с тангенциальным импульсом в перигентре эллипса;
- при $V_\infty > V^*$ оптимальной будет траектория трехимпульсного перехода, причем для нее

$$r_{\text{пн}} = r_{\text{п2}}; \quad r_{\text{мак}} = r_{\text{а2}} = r_{\text{а3}}; \quad r_{\text{пк}} = r_{\text{п3}}.$$

Первый импульс сообщается в перигентре начального эллипса Π_n , второй — на внешней границе кольца Γ , третий — на внутренней границе кольца γ ; здесь же будет перигентр Π_k конечной гиперболы; условно этот переход обозначим $\Pi_n \rightarrow \Gamma \rightarrow \gamma$ (аналогичные обозначения будем применять и дальше);

в) при $V_\infty = V^*$ имеет место независимость этого трехимпульсного оптимального перехода $\Pi_n \rightarrow \Gamma \rightarrow \Pi_k$ от конечного перигентрического расстояния в диапазоне $r_{\min} \leq r_{\Pi k} \leq r_{\Pi n}$.

В силу обратимости задачи перехода эти результаты справедливы и для оптимального схода с гиперболической орбиты с известной величиной V_∞ на заданную эллиптическую орбиту.

Перейдем к анализу общей задачи перехода между орбитами.

Классификация исходных орбит и оптимальных траекторий переходов

Все орбиты по характеру пересечения ими границ кольца можно разбить на несколько типов (рис. 15.6) [7].

Тип I. Орбита этого типа — эллиптическая, не пересекает границ кольца, все ее точки — внутренние:

$$r_{\min} \leq r_{\Pi} \leq r_a \leq r_{\max}.$$

Тип II. Орбита эллиптическая, пересекает внутреннюю границу кольца γ , начальная M_n и конечная M_k точки орбиты лежат на внутренней границе, апоцентр A принадлежит кольцу:

$$r_{\Pi} < r_{\min}; \quad r_{\min} \leq r_a \leq r_{\max}.$$

Тип III. Орбита пересекает внешнюю границу кольца Γ . Начальная и конечная точки орбиты принадлежат внешней границе Γ , перигент Π лежит в кольце:

$$r_{\min} \leq r_{\Pi} \leq r_{\max}; \quad s_a < s_{\max}.$$

Здесь и ниже

$$s_a = r_a^{-1}; \quad s_{\max} = r_{\max}^{-1}.$$

Тип IV. Орбита пересекает обе границы кольца, в кольце нет апсидальных точек орбиты:

$$r_{\Pi} < r_{\min}; \quad s_a < s_{\max}.$$

В зависимости от выделенной связной части орбиты можно различить два варианта:

IVa — соответствует движению от γ к Γ , при этом

$$M_n \in \gamma; \quad M_k \in \Gamma;$$

IVб — соответствует движению от Γ к γ ; $M_n \in \Gamma$, $M_k \in \gamma$.

Тип V. Орбита не имеет общих точек с данным кольцом:

$$r_{\Pi} > r_{\max} \quad \text{или} \quad r_a < r_{\min};$$

эти орбиты не представляют интереса для рассматриваемой задачи.

Если исходные орбиты — начальная и конечная — типа S и T соответственно, то переход между ними обозначим ST (например, если осуществляется переход с орбиты типа I на орбиту типа IVa, то обозначим его I IVa).

Не уменьшая общности, за начальную точку траектории перехода можно взять точку $M_n \in T_n$, за конечную точку — точку $M_k \in T_k$. Эти граничные точки, очевидно, можно выделить, если соответствующие орбиты будут орбитами типов II, III, IVa, IVб. Например, если начальная орбита типа I, то на траектории перехода нет граничной начальной точки. Все остальные точки траектории перехода будут внутренними.

Все импульсы оптимального перехода разбиваются на две группы:

а) *граничные*, т. е. сообщаемые в граничных точках траектории перехода; такие импульсы могут быть, если соответствующие исходные орбиты будут орбитами типов II, III, IVa, IVб;

б) *внутренние*, сообщаемые во внутренних точках траектории перехода. В соответствии

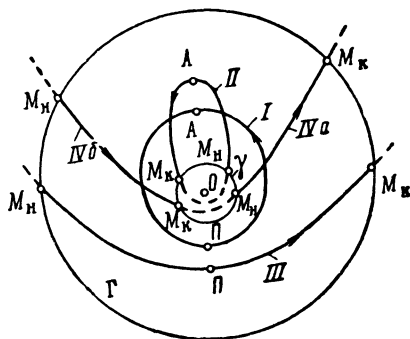


Рис. 15.6. Различные типы орбит в зависимости от характера пересечения ими границ заданного кольца

с приведенной выше теоремой эти импульсы и точки их приложения — апсидальные.

В зависимости от числа граничных импульсов оптимальные переходы разделяются на 3 класса:

1-й класс. Обе исходные орбиты — типа I, не пересекают границу кольца, имеем переход II I (пример 1). В этом случае все импульсы — апсидальные, граничных импульсов нет (см. рис. 15.3).

2-й класс. Одна из исходных орбит — типа I, не пересекает границ кольца, другая пересекает его границы. Это переходы III I, III I, IVa I, IVb I (переходы типов I II и т. д. здесь не указаны, так как сводятся к выписанным изменениям направления движения). Переходы этого класса имеют не более одного граничного импульса. Задание этого импульса полностью определит оптимальную траекторию перехода.

3-й класс. Обе исходные орбиты пересекают границы кольца. Это переходы:

II II, II III, II IVa, II IVb;

III III, III IVa, III IVb;

IVa IVa, IVa IVb, IVb IVa

(остальные переходы эквивалентны этим).

Для таких переходов может быть два граничных импульса: как в начальной, так и в конечной точках. Они и определяют оптимальную траекторию.

Плоскость скоростей

Ниже для геометрического представления результатов оптимизации будет использоваться плоскость скоростей P . Координатами точки в ней являются тангенциальная V_t и радиальная V_r компоненты скорости $\vec{V}(V_t, V_r)$ КА, соответствующие заданному радиусу-вектору $\vec{r}$ или заданному расстоянию r от центра тяготения. Точку в этой плоскости будем обозначать так же, как и соответствующий вектор скорости $\vec{V}$. Укажем некоторые свойства плоскости скоростей P .

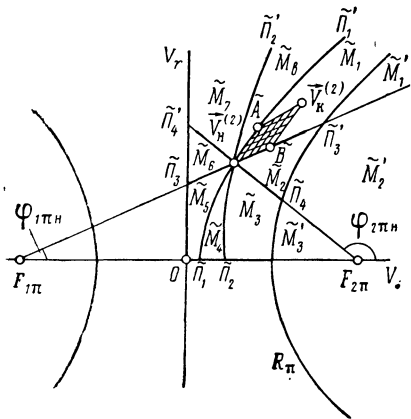


Рис. 15.7. Плоскость скоростей P_π (начальное перигелическое расстояние меньше, чем на R_π)

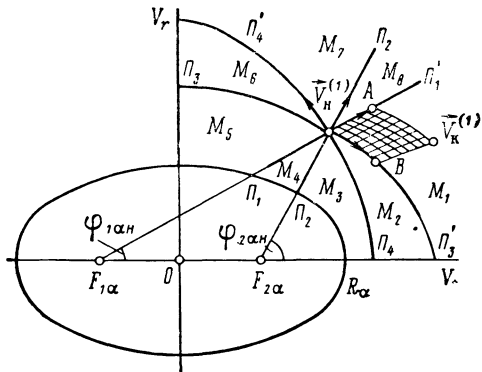


Рис. 15.8. Плоскость скоростей P_α (начальное апоцентрическое расстояние больше, чем на R_α)

1. Задание точки в плоскости P полностью определяет орбиту, поэтому плоскость P можно считать фазовой плоскостью. При пассивном движении, когда элементы орбиты не меняются, орбита изображается в P неизменной фазовой точкой. Если осуществляется маневр, орбита меняется, то, пока орбита достигает заданного для P расстояния ($r_\pi \leq r$; $s_\alpha \leq r^{-1}$), точка в P будет описывать фазовую траекторию и по ней можно следить за изменением орбиты.

При сообщении импульса $\Delta \vec{V}$ на том же расстоянии r , для которого построена плоскость P , фазовой траекторией в P будет отрезок прямой $\Delta \vec{V}$, исходящий из начальной точки. Если же импульс сообщается на другом расстоянии от центра, то фазовой траекторией будет отрезок некоторой кривой второго порядка. Плоскость, построенную при $r=r_{\min}$, будем обозначать через P_α , а плоскость, построенную при $r=r_{\max}$, — через P_π .

2. Геометрическим местом точек в P , соответствующих орбитам с заданным перигелическим расстоянием r_π ($0 \leq r_\pi \leq r$), является гипербола R_π (рис. 15.7):

$$\frac{V_t^2}{\sigma_\pi^2} - \frac{V_r^2}{\tau_\pi^2} = 1; \quad \sigma_\pi = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \sqrt{\frac{2r_\pi}{r+r_\pi}}; \quad \tau_\pi = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \sqrt{\frac{2(r-r_\pi)}{r_\pi}}. \quad (15.2)$$

Ее эксцентриситет равен r/r_n ; фокусы $F_{1\pi}$ и $F_{2\pi}$ лежат на оси V_t на расстоянии $\frac{r}{r_n} \sigma_\pi$ от начала координат. Правая ветвь ($V_t > 0$) соответствует прямому движению по орбите, левая — обратному.

В качестве параметра на гиперболе R_π вводится угол Φ_π , определяющий (при $r_n > 0$) следующим образом компоненты скорости КА:

$$V_t = \sigma_\pi \sec \Phi_\pi; \quad V_r = \tau_\pi \operatorname{tg} \Phi_\pi, \quad (15.3)$$

для прямого движения

$$-\frac{\pi}{2} < \Phi_\pi < \frac{\pi}{2}.$$

Точкам в P , лежащим между ветвями гиперболы R_π ($V_t^2 < \left(\frac{V_r^2}{\tau_\pi^2} + 1\right) \sigma_\pi^2$), соответствуют орбиты с меньшим перигелийским расстоянием, чем на R_π . В остальной части плоскости $\left[V_t^2 > \left(\frac{V_r^2}{\tau_\pi^2} + 1\right) \sigma_\pi^2\right]$ перигелийское расстояние больше заданного на R_π .

Если $r_n = 0$, то обе ветви сливаются с осью V_r . Если $r_n = r$, то гипербола вырождается в два луча на оси V_t , уходящих из точек $\left(\pm \sqrt{\frac{\mu}{r}}, 0\right)$ в бесконечность. При уменьшении r_n от r до нуля семейство непересекающихся кривых R_π сплошь заполняет плоскость P , причем точки внутри круга радиуса $\sqrt{2\mu/r}$ соответствуют эллиптическому движению, а вне его — гиперболическому.

3. Геометрическим местом точек, соответствующих орбитам с фиксированным апоцентрическим расстоянием r_a , при $-r^{-1} < s_a < r^{-1}$ является эллипс R_α (рис. 15.8):

$$\frac{V_t^2}{\sigma_\alpha^2} + \frac{V_r^2}{\tau_\alpha^2} = 1; \quad \sigma_\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \sqrt{\frac{2r_a}{r_a + r}}; \quad \tau_\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{r}} \sqrt{\frac{2(r_a - r)}{r_a}}. \quad (15.4)$$

Эксцентриситет эллипса равен $r/|r_a|$. Его фокусы $F_{1\alpha}$, $F_{2\alpha}$ лежат на оси V_t на расстоянии $\sigma_\alpha r/|r_a|$ от начала координат.

Компоненты скорости КА, движущегося по орбите с заданным апоцентрическим расстоянием $r_a > 0$, на расстоянии r от центра тяготения определяются с помощью вспомогательного угла Φ_α :

$$V_t = \sigma_\alpha \cos \Phi_\alpha; \quad V_r = \tau_\alpha \sin \Phi_\alpha, \quad (15.5)$$

причем для прямого движения $-\frac{\pi}{2} \leq \Phi_\alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

Точкам, лежащим внутри эллипса R_α , при $r_a > 0$ соответствуют орбиты с меньшим апоцентрическим расстоянием, чем точкам на R_α . Вне эллипса величина s_a меньше заданной на R_α .

Если $r_a = r$, то эллипс вырождается в отрезок прямой между точками $\left(\pm \sqrt{\frac{\mu}{r}}, 0\right)$. Для параболического движения ($E = 0$) эллипс R_α становится кругом радиуса $\sqrt{2\mu/r}$.

4. Пусть имеются две плоскости скоростей P_α и P_π , построенные на двух различных расстояниях от центра, $r = r_{\min}$ и $r = r_{\max}$ соответственно. Будем рассматривать орбиты, достигающие обоих расстояний; для них $r_n \leq r_{\min}$ и $s_a \leq r_{\max}^{-1}$. Тогда можно использовать обе плоскости. Это удобно при исследовании двухимпульсных переходов, когда плоскости строятся в двух точках сообщения импульсов.

В плоскости P_α построим эллипс R_α , для которого $r_a = r_{\max}$, а в плоскости P_π построим гиперболу R_π , для которой $r_n = r_{\min}$. Пусть $\vec{V}^{(1)}$ и $\vec{V}^{(2)}$ — фазовые точки в плоскостях P_α и P_π соответственно, относящиеся к одной орбите T (L , E):

$$\vec{V}^{(1)} = \left(L/r_{\min}, \sqrt{2E - (L/r_{\min})^2 + (2\mu/r_{\min})} \right);$$

$$\vec{V}^{(2)} = \left(L/r_{\max}, \sqrt{2E - \frac{L^2}{r_{\max}^2} + \frac{2\mu}{r_{\max}}} \right).$$

Рассмотрим некоторые свойства обеих плоскостей.

Большая ось эллипса R_α равна расстоянию между фокусами гиперболы R_π и, наоборот, действительная ось гиперболы R_π равна расстоянию между фокусами эллипса R_α :

$$2\sigma_\alpha = 2 \frac{r_{\max}}{r_{\min}} \sigma_\pi = F_{1\pi} F_{2\pi}; \quad 2\sigma_\pi = F_{1\alpha} F_{2\alpha}.$$

Расстояние от фазовой точки до некоторого фокуса одно и то же в обеих плоскостях:

$$V^{(1)} F_{1\alpha} = V^{(2)} F_{1\pi}; \quad V^{(1)} F_{2\alpha} = V^{(2)} F_{2\pi}.$$

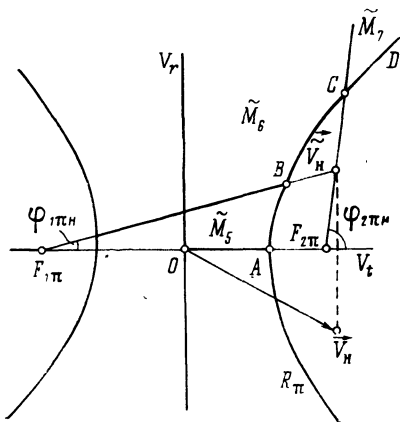


Рис. 15.9. Плоскость скоростей P_π (начальное перигелическое расстояние больше заданного на R_π)

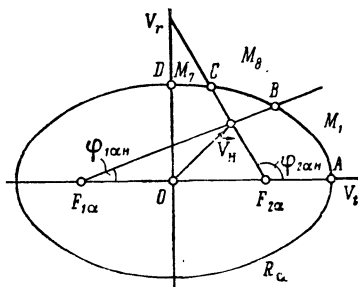


Рис. 15.10. Плоскость скоростей P_α (начальное апоцентрическое расстояние меньше заданного на R_α)

В каждой из плоскостей проведем через начальную точку ($\vec{V}_N^{(1)} \in P_\alpha$; $\vec{V}_N^{(2)} \in P_\pi$) по четыре фазовых траектории (см. рис. 15.7 и 15.8). Две из них соответствуют сообщению импульсов при $r = r_{\min}$, причем так, что линии их действия проходят в плоскости P_α через фокусы $F_{1\alpha}$ и $F_{2\alpha}$ (это прямые $\Pi_1\Pi'_1$ и $\Pi_2\Pi'_2$ в P_α , гиперболы $\tilde{\Pi}_1\tilde{\Pi}'_1$ и $\tilde{\Pi}_2\tilde{\Pi}'_2$ в P_π). Две другие соответствуют сообщению импульсов при $r = r_{\max}$, так что линии их действия в P_π проходят через фокусы $F_{1\pi}$ и $F_{2\pi}$ (прямые $\tilde{\Pi}_3\tilde{\Pi}'_3$ и $\tilde{\Pi}_4\tilde{\Pi}'_4$ в P_π , кривые второго порядка $\Pi_3\Pi'_3$ и $\Pi_4\Pi'_4$ в P_α). Эти фазовые траектории делят все допустимое ($r_{\pi} < r_{\min}$, $s_\alpha < r_{\max}^{-1}$) множество конечных скоростей $\vec{V}_K^{(1)}$ в P_α ($\vec{V}_K^{(2)}$ в P_π) на восемь подмножеств $M_i \in P_\alpha$ ($\tilde{M}_i \in P_\pi$), $i = 1, 2, \dots, 8$ (рис. 15.7, 15.8):

$$M_1 (\tilde{M}_1) = \{\vec{V}_K^{(j)}: \varphi_{1\alpha k} \leq \varphi_{1\alpha n}, \varphi_{1\pi k} \geq \varphi_{1\pi n}\};$$

$$M_2 (\tilde{M}_2) = \{\vec{V}_K^{(j)}: \varphi_{1\pi k} \leq \varphi_{1\pi n}, \varphi_{2\pi k} \leq \varphi_{2\pi n}\};$$

$$M_3 (\tilde{M}_3) = \{\vec{V}_K^{(j)}: \varphi_{2\alpha k} \leq \varphi_{2\alpha n}, \varphi_{2\pi k} \geq \varphi_{2\pi n}\};$$

$$M_4 (\tilde{M}_4) = \{\vec{V}_K^{(j)}: \varphi_{1\alpha k} \leq \varphi_{1\alpha n}, \varphi_{2\alpha k} \geq \varphi_{2\alpha n}\}.$$

Здесь $\varphi_{1\alpha n}$ и $\varphi_{1\alpha k}$ — углы наклона векторов $\vec{F}_{1\alpha}\vec{V}_N^{(1)}$ и $F_{1\alpha}V_K^{(1)}$ к оси V_t в плоскости P_α ; аналогично определяются остальные углы φ . Индекс « j » равен $j = 1$ для P_α , $j = 2$ для P_π .

Остальные области $M_5(\tilde{M}_5) \div M_8(\tilde{M}_8)$ получим, сменив знаки неравенств, определяющих области $M_1(\tilde{M}_1) \div M_4(\tilde{M}_4)$, на обратные.

В частном случае, при $r_{ан} = r_{\max}$, $\vec{V}_n^{(1)} \in R_\alpha$, области $M_i(\tilde{M}_i)$, $i = 2, 3, \dots, 6$, сливаются с дугой R_α , остаются области M_1, M_7, M_8 ($\tilde{M}_1, \tilde{M}_7, \tilde{M}_8$). Если же $r_{ин} = r_{\min}$, то остаются области M_5, M_6, M_7 ($\tilde{M}_5 \div \tilde{M}_7$).

При $r_{пн} > r_{\min}$, $s_{ан} \leq r_{\max}^{-1}$ можно пользоваться лишь плоскостью P_π (рис. 15.9), а при $r_{ан} < r_{\max}$, $r_{пн} \leq r_{\min}$ — плоскостью P_α (рис. 15.10).

Оптимизация переходов на орбиту, не пересекающую границ кольца (переходов 2-го класса)

Переходы данного класса разобьем на две группы [8, 9]. Рассмотрим сначала переходы типа III I, IV6 I. Начальная орбита T_n пересекает в начальной точке внешнюю границу кольца, $M_n \in \Gamma$, для нее $s_{ан} < s_{\max}$. Конечная орбита не пересекает границ кольца, $T_k \in K$. Эти случаи могут встретиться, например, при рассмотрении участка траектории в сфере действия планеты назначения при прилете к ней с другой планеты.

Пусть имеет место переход III I, перигентр начальной орбиты лежит в кольце, $r_{\min} \leq r_{пн} \leq r_{\max}$; параметром, определяющим характер траектории перехода, будет величина $r_{п2}$ — перигентрическое расстояние орбиты T_2 , получающейся после сообщения импульса $\Delta \vec{V}_1$ в начальной точке M_n . В качестве второго параметра минимизации функции ω_k удобно взять угол Φ_π , через который выражаются компоненты скорости в точке M_n при $r = r_{\max}$ для орбиты T_2 в соответствии с формулами (15.3), (15.2).

Не ограничивая общности, положим $\mu = 1$; $r_{\max} = 1$ и будем иногда применять обозначение r_n вместо $r_{п2}$.

Оптимальный переход имеет вид $M_n \rightarrow P_2 \rightarrow \Gamma \rightarrow P_k$. Фиксируем сначала величину $r_{п2}$. Тогда, минимизируя суммарную характеристическую скорость

$$\omega_k(r_{п2}, \Phi_\pi) = \Delta V_1(r_{п2}, \Phi_\pi) + \Delta V_2(r_{п2}, \Phi_\pi) + \Delta V_3(r_{п2}) + \Delta V_4 \quad (15.6)$$

по Φ_π , получим, что оптимальный импульс $\Delta \vec{V}_1$ в плоскости скоростей P_π направлен вдоль прямой, проходящей через начальную точку $\vec{V}_n(V_{tn}, V_{rn})$ и фокус $F_{t\pi}(\xi\beta\sigma_\pi/r_n, 0)$, до пересечения с гиперболой $R_\pi = \{\vec{V} : r_n = r_{п2}\}$. Угол Φ_π и угол φ наклона импульса к трансверсали равны:

$$\left. \begin{aligned} \sin \Phi_\pi &= \frac{k_1 \sqrt{1 - r_n^2}}{k_3 - r_n k_2}; \quad \cos \Phi_\pi = \xi\beta \frac{r_n k_3 - k_2}{k_3 - r_n k_2}; \\ \sin \varphi &= -\xi \frac{k_1}{k_3}; \quad \cos \varphi = -\xi \frac{k_2}{k_3}; \quad k_1 = V_{rn}; \\ k_2 &= V_{tn} - \xi\beta \sqrt{2/V_{rn}(1 + r_n)}; \quad k_3 = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

В частности, $\Phi_\pi = \Phi_{пн}$, $\Delta V_1 = 0$, если $r_n = r_{пн}$. Формулы получены для более общего случая, чем переход III I,

$$\xi = \text{sign}(V_{п2} - V_{п3});$$

$$\beta = \text{sign}(r_{п2} - r_{пн}),$$

для переходов III I, IV6 I будет $\xi = 1$, случай $\xi = -1$ используется при нахождении переходов 3-го класса.

В формуле (15.6) величины импульсов

$$\Delta V_1 = \{(V_{rn} - \tau_\pi \text{tg} \Phi_\pi)^2 + (V_{tn} - \sigma_\pi \sec \Phi_\pi)^2\}^{1/2}; \quad (15.8)$$

$$\Delta V_2 = V_{п2} - V_{п3}; \quad \Delta V_3 = |V_{а3} - V_{а4}|; \quad \Delta V_4 = V_{п4} - V_{пк}, \quad (15.9)$$

причем

$$V_{п2} = \frac{V_{t2} r_{\max}}{r_{п2}} = \frac{\sigma_\pi \sec \Phi_\pi}{r_{п2}};$$

$$T_2, T_3(r_{п3} = r_{п2}, r_{а3} = r_{\max}); \quad T_4(r_{п4} = r_{пк}; r_{а4} = r_{\max})$$

— переходные орбиты (рис. 15.11, 15.12).

Исследование зависимости $\omega_k(r_{п2})$ при $\Phi_\pi = \Phi_{\text{опт}}$ показывает, что оптимальным значением $r_{п2}$ может быть одна из двух величин:

$$(r_{п2})_{\text{опт}} = r_{\min} \quad \text{или} \quad (r_{п2})_{\text{опт}} = \min(r_{пн}, r_{пк}); \quad (15.10)$$

в формулах (15.7) будет при этом $\xi = -\beta = 1$, импульс $\Delta \vec{V}_1$ проходит в P_π через фокус $F_{1\pi}$.

В первом случае оптимальный переход будет четырехимпульсным

$$M_H \rightarrow \gamma \rightarrow \Gamma \rightarrow \Pi_K. \quad (15.11)$$

Во втором случае он будет двухимпульсным $M_H \rightarrow \Pi_K$, если $r_{\Pi H} \geq r_{\Pi K}$, или трехимпульсным $\Pi_H \rightarrow \Gamma \rightarrow \Pi_K$ (при этом все импульсы апсидальные), если $r_{\Pi H} < r_{\Pi K}$.

На рис. 15.11 показаны оптимальные переходы при $r_{\Pi H} > r_{\Pi K}$, на рис. 15.12 — при $r_{\Pi H} < r_{\Pi K}$. Второй параметр Φ_π орбиты T_2 определяется по формуле (15.7) для соответствующего значения $(r_{\Pi 2})_{\text{опт}}$.

Алгоритм решения задачи будет следующим: для каждого из двух значений $r_{\Pi 2}$,

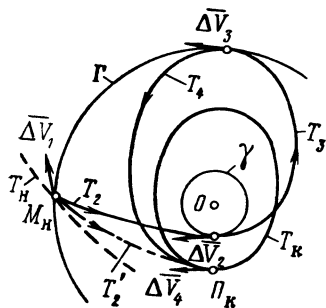


Рис. 15.11. Оптимальные двух- и четырехимпульсные переходы типа III I при $r_{\Pi H} > r_{\Pi K}$

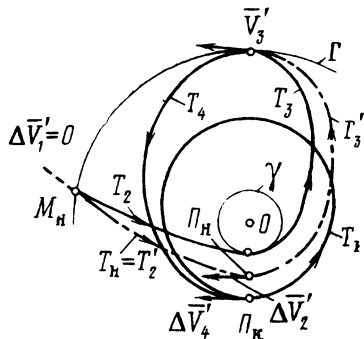


Рис. 15.12. Оптимальные трех- и четырехимпульсные переходы типа III I при $r_{\Pi H} < r_{\Pi K}$

указанных в (15.10), находятся величина Φ_π по (15.7), компоненты скорости после сообщения импульса $\Delta \vec{V}_1$ по формулам (15.3), импульс ΔV_1 , элементы орбиты T_2 , затем по формулам (15.9) — импульсы $\Delta V_2, \Delta V_3, \Delta V_4$, величина ω_K по (15.6). Находим минимальное значение $(\omega_K)_{\text{опт}}$, одновременно $(r_{\Pi 2})_{\text{опт}}$ и оптимальный переход.

В частности, если $\min(r_{\Pi H}, r_{\Pi K}) = r_{\min}$, то получим $(r_{\Pi 2})_{\text{опт}} = r_{\min}$. Поэтому переход IVb I будет четырехимпульсным (15.11), для него:

$$(r_{\Pi 2})_{\text{опт}} = r_{\min}; \quad \xi = \beta = 1,$$

импульс $\Delta \vec{V}_1$ проходит в P_π через фокус $F_{2\pi}$. На рис. 15.13 изображен этот переход $T_H^{(6)} \rightarrow T_K$; он осуществляется по орбитам $T_2^{(6)}, T_3^{(6)}$ и $T_4^{(6)}$.

Переходы типа III I и IVa I исследуются аналогично; в этих случаях начальная орбита T_H пересекает в начальной точке внутреннюю границу кольца, $M_H \in \gamma$, $r_{\Pi H} < r_{\min}$, а конечная орбита не пересекает границ кольца, $T_K \in K$. Эти случаи на практике могут встретиться, например, при рассмотрении заатмосферного участка траектории при выведении КА с планеты на орбиту спутника (переход III I) или при экономном аварийном возвращении на орбиту спутника в случае неудачного отлета от планеты (переходы IVa I и III I).

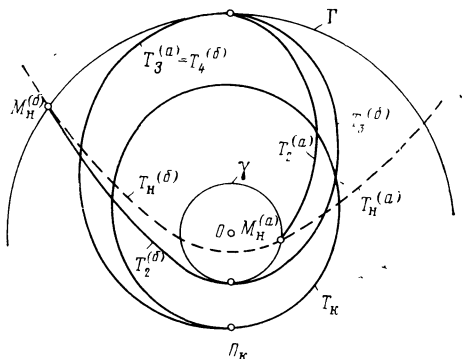


Рис. 15.13. Оптимальные переходы типа IVa I и IVb I

Пусть сначала имеет место переход III I. В качестве параметров, характеризующих орбиту T_2 , здесь удобно взять апоцентрическое расстояние r_{a2} (или $s_{a2} = r_{a2}^{-1}$) и угол Φ_α , через который выражаются компоненты скорости в начальной точке M_H после сообщения импульса $\Delta \vec{V}_1$ при $r = r_{\min}$ (15.5), (15.4).

Положим $r_{\min} = 1$; $\mu = 1$. Иногда для краткости будем обозначать s_{a2} через s_a . При фиксированной величине r_{a2} оптимальный начальный импульс $\Delta \vec{V}_1$ проходит в пло-

скости P_a вдоль прямой, соединяющей начальную точку $(V_{тн}, V_{гн})$ и фокус F_{2a} , до эллипса $R_a = \{V: r_a = r_{a2}\}$.

Оптимальное значение угла Φ_a и угла φ наклона импульса $\vec{\Delta V}_1$ к трансверсали для заданной величины s_{a2} определяется формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sin \Phi_a &= \frac{V_{гн} \sqrt{1-s_a^2}}{k_3 + \xi \beta s_a k_2}; \quad \cos \Phi_a = \frac{k_2 + \xi \beta s_a k_3}{k_3 + \xi \beta s_a k_2}; \\ \sin \varphi &= \beta k_1' / k_3; \quad \cos \varphi = \beta k_2 / k_3; \\ k_1 &= V_{гн}; \quad k_2 = V_{тн} - \xi \beta \frac{i \sqrt{2} s_a}{\sqrt{1+s_a}}; \quad k_3 = (k_1^2 + k_2^2)^{1/2}; \\ \beta &= \text{sign}(s_{ан} - s_a); \quad \xi = \text{sign}(V_{a2} - V_{a3}). \end{aligned} \right\} \quad (15.12)$$

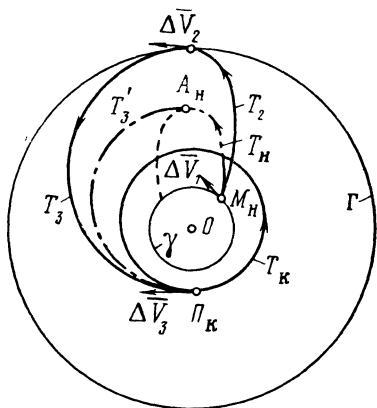


Рис. 15.14. Оптимальные двух- и трехимпульсные переходы типа II I при $r_{ан} > r_{ак}$

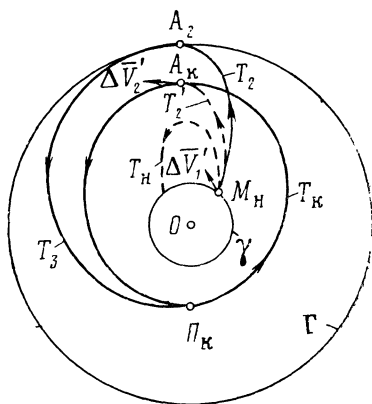


Рис. 15.15. Оптимальные переходы типа II I при $r_{ан} < r_{ак}$

В частности, если $s_a = s_{ан}$, то $\Phi_a = \Phi_{ан}$; $\Delta V_1 = 0$.

Для переходов II I, IVa I будет $\xi = -1$; случай $\xi = 1$ используется при исследовании переходов 3-го класса.

Исследуя далее зависимость ω_k от s_{a2} , получим, что оптимальный переход будет в общем случае трехимпульсным и запишется в виде $M_н \rightarrow A_2 \rightarrow P_к$, а оптимальными значениями r_{a2} могут быть лишь крайние значения:

$$(r_{a2})_{\text{опт}} = r_{\text{мах}} \quad \text{или} \quad (r_{a2})_{\text{опт}} = \max(r_{ан}, r_{ак}),$$

причем $\xi = -\beta = -1$, импульс $\vec{\Delta V}_1$ проходит в P_a через фокус F_{1a} .

В первом случае переход трехимпульсный; он имеет вид

$$M_н \rightarrow \Gamma \rightarrow P_к, \quad (15.13)$$

во втором случае — одноимпульсный в апоцентре $A_н$, если $r_{ан} = r_{ак}$, и двухимпульсный, $M_н \rightarrow A_к$, если $r_{ак} > r_{ан}$, или $A_н \rightarrow P_к$, если $r_{ан} > r_{ак}$. На рис. 15.14 показаны оптимальные переходы при $r_{ан} > r_{ак}$, на рис. 15.15 — при $r_{ан} < r_{ак}$ (случай $r_{мах} = \infty$ см. также в [24]).

В частности, если $\max(r_{ан}, r_{ак}) = r_{мах}$, то $(r_{a2})_{\text{опт}} = r_{мах}$. Отсюда следует, что переход IVa I будет трехимпульсным (15.13); для него $r_{a2} = r_{мах}$; $\xi = \beta = -1$, импульс $\vec{\Delta V}_1$ проходит в плоскости P_a через фокус F_{2a} . На рис. 15.13 изображен этот переход $T_н^{(a)} \rightarrow T_к$; он осуществляется по орбитам $T_2^{(a)}$ и $T_3^{(a)}$.

В данном разделе рассматриваются переходы 3-го класса, когда обе исходные орбиты пересекают границы кольца K [12]. Рассмотрим три случая.

Случай 1. Оптимальные траектории переходов, граничные точки которых находятся на внешней границе кольца. Сюда относятся переходы III III, III IVa, IVb IVa, при этом исходные орбиты пересекают внешнюю границу Γ .

Для перехода III III считаем $r_{пн} > r_{пк}$, его оптимальная траектория будет одной из следующих трех. Это, во-первых, траектория перехода с двумя граничными импульсами: в начальной точке M_n сообщается первый импульс $\Delta \vec{V}_1$ в направлении выравнивания начальных скоростей исходных орбит, далее точка движется по переходной орбите T_2 в конечную точку M_k , где сообщается второй импульс $\Delta \vec{V}_2$ в направлении выравнивания конечных скоростей орбит (рис. 15, 16, 15, 17):

$$\left. \begin{aligned} \Delta \vec{V}_1 &= \chi (\vec{V}_k - \vec{V}_n); \Delta \vec{V}_2 = (1 - \chi) (\vec{V}_k - \vec{V}_n); \\ \vec{V}_k &= (V_{tk}, -V_{rk}); \vec{V}_n = (V_{tn}, -V_{rn}). \end{aligned} \right\} \quad (15.14)$$

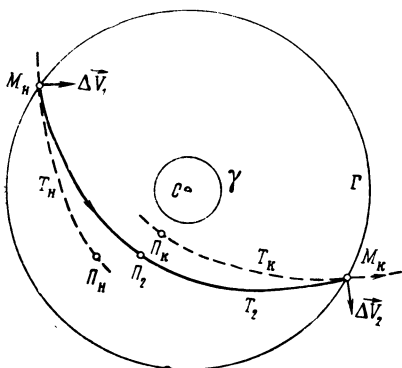


Рис. 15. 16. Двухимпульсный переход между орбитами типа III; оба импульса — граничные

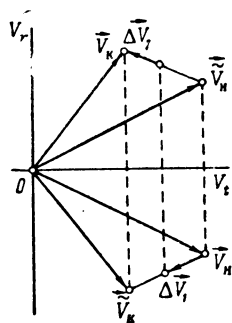


Рис. 15. 17. Схема определения импульсов для перехода с двумя граничными импульсами

Для данного перехода $\vec{V}_k$ и $\vec{V}_n$ — начальная скорость на конечной орбите и конечная скорость на начальной орбите соответственно; χ — степень дробления импульсов. При $\chi=1$ или $\chi=0$ переход становится одноимпульсным в начальной M_n или конечной M_k точках, тогда $r_{п2}=r_{пк}$ или $r_{п2}=r_{пн}$. Вообще

$$0 \leq \chi \leq 1; \quad r_{пк} < r_{п2}(\chi) \leq r_{пн}.$$

Суммарная характеристическая скорость такого перехода не зависит от χ :

$$w_k = |\vec{V}_k - \vec{V}_n| = |\vec{V}_n - \vec{V}_k|, \quad (15.15)$$

поэтому условно его будем называть одноимпульсным.

Во-вторых, оптимальный переход может быть двухимпульсным, в котором второй импульс $\Delta \vec{V}_2$ — апсидальный, сообщается в перигеетре конечной орбиты (рис. 15. 18):

$$M_n \rightarrow P_k. \quad (15.16)$$

Первый (граничный) импульс $\Delta \vec{V}_1$, сообщаемый в начальной точке M_n , определяет, как и в переходе III I. Возможны лишь оба случая: $\xi=+1$ (импульс $\Delta \vec{V}_1$ в плоскости P_π проходит через фокус $F_{1\pi}$) и $\xi=-1$ (импульс $\Delta \vec{V}_1$ проходит через фокус $F_{2\pi}$).

Сравним оба перехода. В плоскости скоростей P_π через точку $\vec{V}_n$ и оба фокуса гиперболы $R_\pi = \{\vec{V} : r_\pi = r_{пк}\}$ проведем прямые (см. рис. 15.9). Тогда множество допустимых конечных скоростей $\vec{V}_k$, расположенное в первом квадранте на R_π , раз-

бывается на три дуги (или две, если прямая, проходящая через $F_{2\pi}$, не пересекается с R_π при $V_r > 0$). На дуге $CD = \{\vec{V}_k: \varphi_{2\pi k} < \varphi_{2\pi n}\}$, если она есть, и на дуге $AB = \{\vec{V}_k: \varphi_{1\pi k} < \varphi_{1\pi n}\}$ экономичнее двухимпульсный переход (15.16). Для него на дуге CD :

$$\xi = -1; \beta = -1; w_k = F_{2\pi}V_k - F_{2\pi}V_n;$$

на дуге AB :

$$\xi = 1; \beta = -1; w_k = F_{1\pi}V_n - F_{1\pi}V_k.$$

На промежуточной дуге BC экономичнее одноимпульсный переход (15.14), (15.15). В точках B и C апсидальный импульс равен нулю, оба перехода тождественны. Кроме того, возможен трехимпульсный переход (рис. 15.19).

$$M_n \rightarrow \gamma \rightarrow M_k; r_{n2} = r_{n3} = r_{\min}; \Delta V_2 = |V_{n3} - V_{n2}|. \quad (15.17)$$

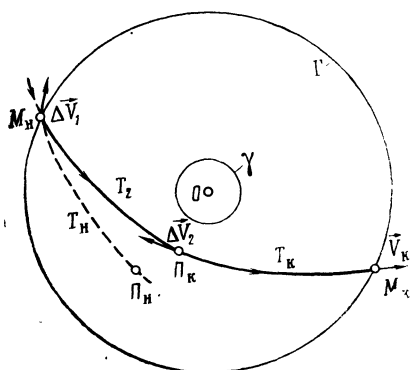


Рис. 15.18. Двухимпульсный переход типа III III с одним апсидальным импульсом

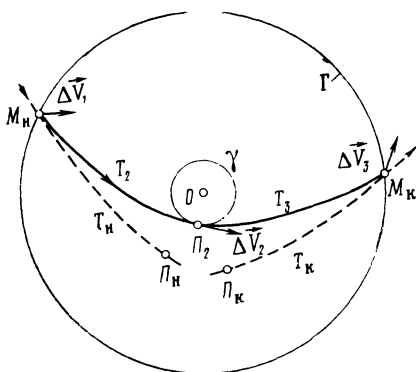


Рис. 15.19. Трехимпульсный переход между орбитами типа III

Для него переходные орбиты T_2, T_3 , граничные импульсы $\Delta \vec{V}_1$ и $\Delta \vec{V}_3$ определяются, как и в переходе III I, причем при определении импульса $\Delta \vec{V}_1$ будет $\beta = \beta_2 = -1$; $\xi = \xi_2 = \pm 1$. При определении импульса $\Delta \vec{V}_3$ будет $\beta = \beta_3 = -1$, $\xi = \xi_3 = -\xi_2$, а в формулах (15.7) вместо величин $V_{r\pi}, V_{t\pi}$ надо брать V_{rk}, V_{tk} и направление импульса сменить на обратное. Из двух вариантов $\xi_2 = -\xi_3 = \pm 1$ выбирается тот, для которого $\Delta V_2 = \xi_2 V_{n2} + \xi_3 V_{n3} \geq 0$.

Оптимальный переход III IVa может быть одноимпульсным (15.14), (15.15) и трехимпульсным (15.17). Для последнего $\beta_2 = -\beta_3 = -1$. Сравним их. Пусть области $\tilde{M}_5, \tilde{M}_6$ и $\tilde{M}_7$ (если она есть) образуют множество допустимых конечных скоростей $\vec{V}_k$ в плоскости P_π , причем $R_\pi = \{\vec{V}: r_\pi = r_{\min}\}$ (см. рис. 15.9). Тогда, если $\vec{V}_k \in \tilde{M}_5$ или $\vec{V}_k \in \tilde{M}_7$, то оптимальным будет трехимпульсный переход; для него получим

$$\xi_2 = -\xi_3 = -1; w_k = F_{2\pi}V_k - F_{2\pi}V_n, \text{ если } \vec{V}_k \in \tilde{M}_7;$$

$$\xi_2 = -\xi_3 = 1; w_k = F_{1\pi}V_n - F_{1\pi}V_k, \text{ если } \vec{V}_k \in \tilde{M}_5.$$

На рис. 15.20 изображен этот переход $T_n \rightarrow T_k^{(a)}$; он осуществляется по орбитам $\tilde{T}_2^{(a)}$ и $\tilde{T}_3^{(a)}$. В области $\tilde{M}_6$ оптимальным будет одноимпульсный переход (15.14), причем в данном случае

$$0 \leq \chi \leq \chi^*; r_\pi(\chi^*) = r_{\min} \leq r_\pi(\chi) \leq r_{\pi n}.$$

Оптимальный переход IVb IVa может быть одноимпульсным в начальной точке M_n (рис. 15.21):

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_k - \vec{V}_n, \quad (15.18)$$

причем для этого необходимо (но недостаточно) выполнение условия

$$r_\pi(w) < r_{\min}; 0 \leq w \leq w_k,$$

т. е. импульс $\Delta \vec{V}$ не должен пересекать в плоскости P_π кривую $R_\pi = \{\vec{V} : r_\pi = r_{\min}\}$. Кроме того, в областях $C = \{\vec{V} : V_{t2}(F_{1\pi}) < V_{t3}(F_{2\pi})\}$, если она есть, и $A = \{\vec{V} : V_{t2}(F_{2\pi}) \geq V_{t3}(F_{1\pi})\}^*$ оптимальным может быть прежний трехимпульсный переход (15.17); для него $\beta_2 = \beta_3 = 1$, $\xi_2 = -\xi_3 = 1$, если $\vec{V}_k \in A$, и $\xi_2 = -\xi_3 = -1$, если $\vec{V}_k \in C$ (рис. 15.22).

В области B оптимальным может быть двухимпульсный переход, осуществляемый по той же схеме (15.17), но без промежуточного импульса. Кроме того, для него граничные импульсы (оставим за ними прежнюю нумерацию) не проходят через фокусы $F_{i\pi}$. Они сообщаются так, чтобы угол падения δ_n луча, следующего из начальной точки $\vec{V}_n$ вдоль импульса $\Delta \vec{V}_1$, на гиперболу R_π был равен углу отражения δ_k луча, следующего вдоль вектора $\Delta \vec{V}_3 (\Delta V_{3t} - \Delta V_{3r})$, в точку $\vec{V}_k$.

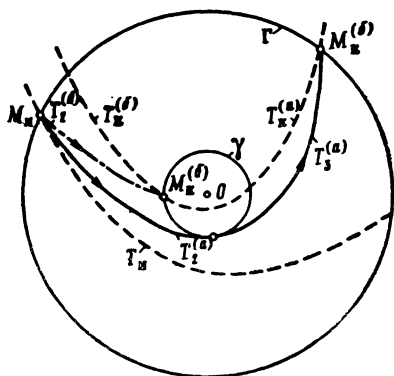


Рис. 15.20. Оптимальные переходы типа III IVa и III IVb при $N > 1$

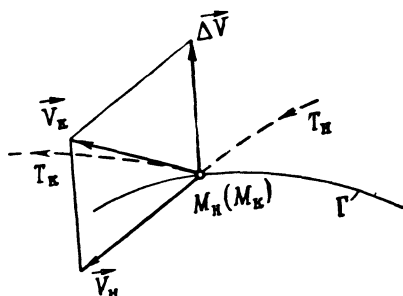


Рис. 15.21. Одноимпульсный переход на внешней границе Γ

Случай 2. Оптимальные траектории переходов, граничные точки которых находятся на внутренней границе кольца. Здесь будут описаны переходы II II, II IVb, IVa IVb; их исходные орбиты пересекают внутреннюю границу γ .

Для перехода II II считаем $r_{an} \leq r_{ak}$. Он может быть одноимпульсным (15.14), (15.15), причем

$$0 \leq \chi \leq 1; r_{an} \leq r_{a2}(\chi) \leq r_{ak}.$$

При $0 < \chi < 1$ получаем двухимпульсную реализацию. Кроме того, оптимальный переход может быть двухимпульсным: из начальной точки M_n , где сообщается первый импульс $\Delta \vec{V}_1$, КА движется по переходной орбите T_2 в (более удаленный) апоцентр A_k конечной орбиты T_k , в котором сообщается второй, апсидальный, импульс $\Delta \vec{V}_2$ (рис. 15.23):

$$M_n \rightarrow A_k; \Delta \vec{V}_2 = |V_{ak} - V_{a2}|. \quad (15.19)$$

Первый, граничный, импульс $\Delta \vec{V}_1$ определяется, как и в переходе II I, $\beta = 1$ (15.12), только теперь возможно $\xi = \xi_2 = -1$ (импульс $\Delta \vec{V}_1$ в плоскости P_a проходит через фокус F_{1a}) и $\xi = \xi_2 = 1$ (импульс $\Delta \vec{V}_1$ проходит через F_{2a}).

Сравним оба перехода. В плоскости P_a проведем прямые через начальную точку $\vec{V}_n$ и оба фокуса эллипса $R_a = \{\vec{V} : r_a = r_{ak}\}$ (см. рис. 15.10). Они разобьют часть эллипса, лежащую в первом квадранте, на три дуги AB , BC , CD [если $V_t(C) < 0$, то будет две дуги], на одной из них будет находиться точка $\vec{V}_k$ (V_{tk} , $-V_{rk}$), характеризующая конечную орбиту T_k . На дуге $CD = \{\vec{V}_k : \varphi_{2ak} \geq \varphi_{2an}\}$, если она есть, и дуге $AB = \{\vec{V}_k : \varphi_{1ak} \leq \varphi_{1an}\}$ оптимальным будет двухимпульсный переход (15.19), причем если $\vec{V}_k \in AB$, то

*) В скобках указаны фокусы, через которые проходят линии действия соответствующих импульсов.

$$\xi_2 = -1; \quad w_k = F_{1a}V_k - F_{1a}V_n, \quad (15.20)$$

если же $\vec{V}_k \in CD$, то

$$\xi_2 = 1; \quad w_k = F_{2a}V_k - F_{2a}V_n. \quad (15.21)$$

На дуге BC оптимальным будет одноимпульсный переход (15.14).

Переход $II \rightarrow IVb$ также может быть одноимпульсным (15.14), (15.15), причем теперь

$$0 \leq \chi \leq \chi^*; \quad r_a(\chi^*) = r_{\max} \geq r_{a2} \geq r_{an},$$

или трехимпульсным

$$M_n \rightarrow \Gamma \rightarrow M_k, \quad r_{a2} = r_{a3} = r_{\max}; \quad \Delta V_2 = |V_{a3} - V_{a2}|. \quad (15.22)$$

В последнем случае граничные импульсы определяются, как и в переходе $II \rightarrow I$. Для импульса $\Delta \vec{V}_1$ будет $\xi = \xi_2 = \pm 1$, $\beta = \beta_2 = 1$. Для импульса $\Delta \vec{V}_3$ будет $\xi = \xi_3 = -\xi_2$; $\beta = \beta_3 = -1$, а вместо величин $V_{tн}$, $V_{rн}$ надо брать $V_{tк}$, $V_{rк}$ и направление импульса сменить на обратное.

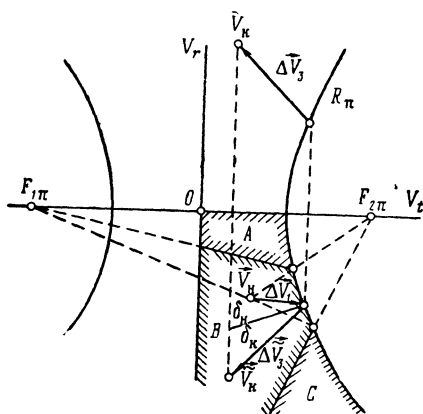


Рис. 15.22. Построения в плоскости скоростей P_π для перехода $IVb \rightarrow IVa$

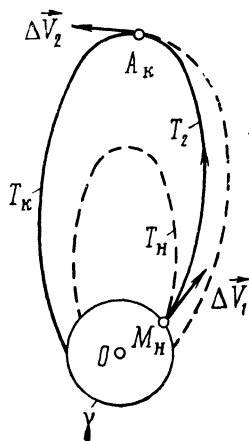


Рис. 15.23. Двухимпульсный переход типа $II \rightarrow II$ с одним апсидальным импульсом

Сравним оба перехода. Пусть в плоскости P_a области M_1 , M_7 , M_8 образуют допустимое множество скоростей $\vec{V}_k$, определяющих конечные орбиты, причем $R_a = \{\vec{V} : r_a = r_{\max}\}$ (см. рис. 15.10). Тогда в областях M_7 (если она есть) и M_1 оптимальным будет трехимпульсный переход (15.22), причем в них выполняются условия (15.21) и (15.20) соответственно. На рис. 15.24 изображен этот переход $T_n \rightarrow T_k^{(6)}$; он осуществляется по орбитам $T_2^{(6)}$ и $T_3^{(6)}$. В области M_8 оптимальным будет одноимпульсный переход (15.14).

Переход $IVa \rightarrow IVb$ может быть одно-, двух- и трехимпульсным. Для оптимальности одноимпульсного перехода (15.18), осуществляемого в начальной точке M_n (рис. 15.25), необходимо (но не достаточно), чтобы импульс $\Delta \vec{V}$ в плоскости P_a не пересекал эллипса $R_a = \{\vec{V} : r_a = r_{\max}\}$. Другой, трехимпульсный, переход (15.22), для которого $\beta_2 = \beta_3 = -1$, может быть оптимальным в подмножествах (рис. 15.26)

$$A = \{\vec{V} : V_{t2}(F_{2a}) < V_{t3}(F_{1a})\} \quad \text{и} \quad C = \{\vec{V} : V_{t2}(F_{1a}) > V_{t3}(F_{2a})\}.$$

Если $\vec{V}_k \in A$, то $\xi_2 = -\xi_3 = -1$, если же $\vec{V}_k \in C$, то $\xi_2 = -\xi_3 = 1$. В промежуточной области B оптимальным может быть двухимпульсный переход, осуществляемый по той же схеме (15.22), но на нем нет промежуточного импульса, $\Delta \vec{V}_2 = 0$. Граничные импульсы $\Delta \vec{V}_1$ и $\Delta \vec{V}_3$ сообщаются так, чтобы угол падения δ_n луча, следующего вдоль импульса $\Delta \vec{V}_1$ на эллипс $R_a = \{\vec{V} : r_a = r_{\max}\}$, был равен углу отражения δ_k луча, следующего вдоль вектора $\Delta \vec{V}_3$ (ΔV_{3t} ; $-\Delta V_{rt}$) в точку $\vec{V}_k$ (см. рис. 15.26).

Случай 3. Оптимальные траектории переходов, граничные точки которых находятся на обеих границах. Здесь будут рассмотрены переходы IVa IVa, II IVa, IVa III, II III. При этом начальная точка M_n траектории перехода лежит на внутренней границе кольца, $M_n \in \gamma$, а конечная — на внешней, $M_k \in \Gamma$.

Оптимальный переход IVa IVa может быть одно- или двухимпульсным. Зафиксируем в плоскостях P_α и P_π начальную скорость $\vec{V}_n^{(1)} \in P_\alpha$, $\vec{V}_n^{(2)} \in P_\pi$ (см. рис. 15.7 и 15.8). Пусть

$$R_\alpha = \{\vec{V} : r_a = r_{\max}\} \in P_\alpha; \quad R_\pi = \{\vec{V} : r_\pi = r_{\min}\} \in P_\pi.$$

Тогда, если конечная точка $\vec{V}_k^{(1)} \in P_\alpha$ ($\vec{V}_k^{(2)} \in P_\pi$) принадлежит областям $M_4(\tilde{M}_4)$ и $M_8(\tilde{M}_8)$, то оптимальным будет одноимпульсный переход в начальной точке M_n :

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_k^{(1)} - \vec{V}_n^{(1)}; \quad r(w) = r_{\min}; \quad 0 \leq w \leq w_k. \quad (15.23)$$

В областях $M_2(\tilde{M}_2)$ и $M_6(\tilde{M}_6)$ переход будет одноимпульсным в конечной точке M_k :

$$\Delta \vec{V} = \vec{V}_k^{(2)} - \vec{V}_n^{(2)}; \quad r(w) = r_{\max}; \quad 0 \leq w \leq w_k. \quad (15.24)$$

В остальных областях осуществляется двухимпульсный переход

$$M_n \rightarrow M_k; \quad r(w) = r_{\min} (0 \leq w \leq \Delta V_1); \quad r(w) = r_{\max} (\Delta V_1 \leq w \leq w_k). \quad (15.25)$$

Первый импульс сообщается в начальной точке M_n , так что он проходит в плоскости P_α через фокус $F_{1\alpha}$ (если $\vec{V}_k^{(1)} \in M_1 \cup M_5$) или $F_{2\alpha}$ (если $\vec{V}_k^{(1)} \in M_3 \cup M_7$). Вторым импульсом сообщается в конечной точке M_k , линия его действия в P_π проходит через фокус $F_{1\pi}$ (если $\vec{V}_k^{(2)} \in \tilde{M}_1 \cup \tilde{M}_5$) или $F_{2\pi}$ (если $\vec{V}_k^{(2)} \in \tilde{M}_3 \cup \tilde{M}_7$). Величины импульсов при переходе равны:

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_1 &= w_k \frac{\cos \varphi_k - c}{\cos \varphi_k - q \cos \varphi_n}; \quad \Delta V_2 = w_k \frac{c - q \cos \varphi_n}{\cos \varphi_k - q \cos \varphi_n}; \\ w_k &= \Delta V_1 + \Delta V_2 = |\Phi_k - \Phi_n|; \quad c = V_{t_k} - q V_{t_n}/w_k; \quad q = \frac{r_{\min}}{r_{\max}}. \end{aligned} \right\} \quad (15.26)$$

Здесь $\Phi_k = F_{1\alpha} V_k^{(1)} = F_{1\pi} V_k^{(2)}$ и $\Phi_n = F_{1\alpha} V_n^{(1)} = F_{1\pi} V_n^{(2)}$ —

расстояние от конечной и начальной точек в плоскостях скоростей до соответствующего фокуса. Углы φ_n и φ_k определяют наклон начального и конечного импульсов к трансверсали. Они получаются по формуле

$$\cos \varphi(\vec{V}, r) = \frac{V_t - \xi \beta \lambda r}{\sqrt{V_r^2 + (V_t - \xi \beta \lambda r)^2}} \psi;$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\mu}{r_{\min} r_{\max} (r_{\min} + r_{\max})}}$$

при $\vec{V} = \vec{V}_n^{(1)}$, $r = r_{\min}$ и $\vec{V} = \vec{V}_k^{(2)}$, $r = r_{\max}$ соответственно. Величины ξ , β , ψ , индекс фокуса «i» зависят от области:

$$\xi \beta = -1, \quad \psi = 1, \quad i = 1, \quad \text{если } \vec{V}_k^{(1)} \in M_1; \quad \vec{V}_k^{(2)} \in \tilde{M}_1; \quad (15.27)$$

$$\xi \beta = 1, \quad \psi = -1, \quad i = 2, \quad \text{если } \vec{V}_k^{(1)} \in M_3; \quad \vec{V}_k^{(2)} \in \tilde{M}_3; \quad (15.28)$$

$$\xi \beta = -1, \quad \psi = -1, \quad i = 1, \quad \text{если } \vec{V}_k^{(1)} \in M_5; \quad \vec{V}_k^{(2)} \in \tilde{M}_5;$$

$$\xi \beta = 1, \quad \psi = 1, \quad i = 2, \quad \text{если } \vec{V}_k^{(1)} \in M_7; \quad \vec{V}_k^{(2)} \in \tilde{M}_7. \quad (15.29)$$

На рис. 15.27 изображен этот переход $T_n^{(a)} \rightarrow T_k^{(a)}$, осуществляемый по орбите $T_2^{(a)}$. Здесь же указан соответствующий переход типа IVб IVб по орбите $T_2^{(b)}$.

Переход II IVa будет одно- или двухимпульсным. Пусть в плоскости P_α , где $R_\alpha = \{\vec{V} : r_a = r_{\max}\}$, для данной начальной скорости $\vec{V}_n = \vec{V}_n^{(1)}$ построены области M_1, M_7, M_8 (см. рис. 15.10), образующие допустимое множество начальных скоростей конечной орбиты $\vec{V}_k^{(1)}$. Тогда в области M_8 оптимальным будет одноимпульсный переход в на-

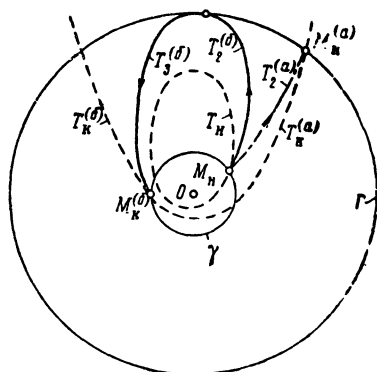


Рис. 15.24. Оптимальные переходы типа II IVa и II IVb при $N > 1$

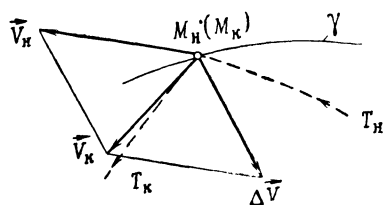


Рис. 15.25. Одноимпульсный переход на внутренней границе γ

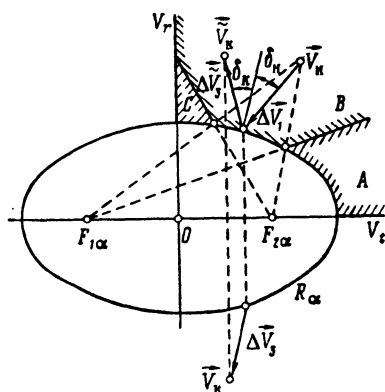


Рис. 15.26. Построения в плоскости скоростей P_{α} для перехода IVa IVb

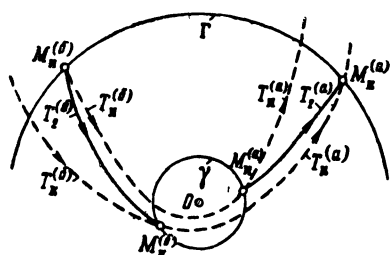


Рис. 15.27. Двухимпульсные переходы типа IVa IVa и IVb IVb

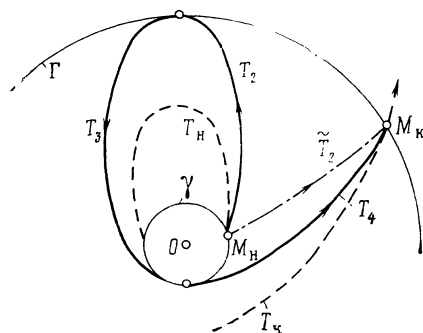


Рис. 15.28. Оптимальные двух- и четырехимпульсные переходы типа II III

начальной точке M_n (15.23). Если же $\vec{V}_k^{(1)} \in M_1 \cup M_7$, то оптимальным будет двухимпульсный переход (15.25), (15.26), причем $\Phi_n = F_{i\alpha} V_n$. В области M_1 выполняется условие (15.27), а в области M_7 — условие (15.29). Этот двухимпульсный переход $M_n \rightarrow M_k^{(a)}$ изображен на рис. 15.24.

Вместо перехода III IVб рассмотрим здесь обратный ему (и эквивалентный) переход IVа III.

Переход IVа III. Пусть в плоскости P_π области $\tilde{M}'_1, \tilde{M}'_2, \tilde{M}'_3$ образуют непустое множество конечных скоростей при фиксированной начальной орбите, причем $R_\alpha = \{\vec{V}: r_\pi = r_{\min}\}$ (рис. 15.7). Тогда, если $\vec{V}_k = \vec{V}_k^{(2)} \in \tilde{M}'_2$, то оптимальным будет одноимпульсный переход в конечной точке $M_k \in \Gamma$ (15.24). В областях $\tilde{M}'_1$ и $\tilde{M}'_3$ оптимален двухимпульсный переход (15.25), (15.26). Для него $\Phi_k = F_{i\pi} V_k$ (на рис. 15.20 изображен переход $M_n \rightarrow M_k^{(6)}$, типа III IVб, обратный данному). В области $\tilde{M}'_1$ выполняются условия (15.27), а в области $\tilde{M}'_3$ условия (15.28).

Оптимальный переход II III может быть осуществлен по двум различным траекториям с одинаковой характеристической скоростью. Это, с одной стороны, траектория двухимпульсного перехода $M_n \rightarrow M_k$ (15.25), (15.26); для него $\Phi_n = F_{i\alpha} V_n$, $\Phi_k = F_{1\pi} V_k$, причем $R_\alpha = \{\vec{V}: r_a = r_{\max}\} \in P_\alpha$, $R_\pi = \{\vec{V}: r_\pi = r_{\min}\} \in P_\pi$ (см. также работы [26, 22]). Кроме того, оптимальна траектория четырехимпульсного перехода (рис. 15.28):

$$M_n \rightarrow \Gamma \rightarrow \gamma \rightarrow M_k; \quad r_{a2} = r_{a3} = r_{\max}; \quad r_{\pi3} = r_{\pi4} = r_{\min}.$$

В этом случае начальный и конечный импульсы определяются, как в переходах II I и I III, соответственно. Ориентация этих импульсов точно такая же, как и в случае двухимпульсного перехода.

Некоторые свойства оптимальных траекторий

Таким образом, полностью описаны оптимальные решения рассматриваемой задачи. Подчеркнем некоторые их свойства.

На оптимальных траекториях для данного класса переходов между орбитами соображается конечное (до четырех) число импульсов. При этом оптимальные переходы совершаются за конечное время (если $r_{\max} < \infty$).

Описанные переходы будут оптимальными и в том случае, если при движении допускается приложение, кроме импульсов, произвольной конечной тяги.

Более того, большинство из переходов (все, кроме случаев IVа IVб и IVб IVа) останется оптимальным и в задаче, смежной с данной, при более слабом, чем (15.1), ограничении. Оно состоит в том, что при переходе активные точки $M(w)$ (т. е. точки приложения импульсов и тяги) должны находиться в заданном кольце, а пассивный выход за пределы кольца допустим:

$$M(w) \in K, \quad 0 \leq w \leq w_k. \quad (15.30)$$

Это позволяет лучше понять одно интересное свойство некоторых оптимальных решений. Существуют пары оптимальных переходов, эквивалентных между собой по суммарной характеристической скорости w_k . А именно, оптимальные переходы в следующих парах: а) IVа I и IVб I (рис. 15.13); б) II IVа и II IVб (см. рис. 15.24); в) III IVа и III IVб (рис. 15.20); г) IVа IVа и IVб IVб (рис. 15.27); д) двух- и четырехимпульсные переходы типа II III (рис. 15.28) — эквивалентны по w_k , если в них исходные орбиты одинаковы, например имеют равные элементы r_π, r_a .

Оказывается, в смежной задаче, при ограничении (15.30), оптимальное решение часто неоднозначно. Указанные выше оптимальные переходы в парах «а»÷«д» входят в соответствующие множества оптимальных решений смежной задачи, поэтому и имеют одинаковую характеристическую скорость. Например, на рис. 15.7 и 15.8 в плоскостях P_π и P_α для данных исходных орбит типа IV заштрихован кривой четырехугольник, который в смежной задаче (15.30) сплошь заполняется оптимальными разовыми траекториями, эквивалентными по минимизируемому функционалу w_k . Одна его граница $V_n^{(1)} AV_k^{(1)} (V_n^{(2)} \tilde{A} V_k^{(2)})$ образует в основной задаче (15.1) фазовую траекторию оптимального перехода IVа IVа, а другая граница $V_n^{(1)} BV_k^{(1)} (V_n^{(2)} \tilde{B} V_k^{(2)})$ — фазовую траекторию перехода IVб IVб.

15.1.2. Оптимальное корректирование траектории космического полета при наличии последующего маневра

Оптимизация коррекции с учетом маневра (точная постановка)

В данном разделе рассматривается вопрос об оптимальной коррекции траектории полета космического аппарата при необходимости последующего проведения маневра [10]. Под маневром здесь понимается такое управляемое изменение траектории, при ко-

тором происходит расход (уменьшение) массы аппарата и которое в соответствии с целью полета имеет место как при номинальном, точном полете, так и при реальном отклоненном движении. Примерами такого маневра будут: переход с траектории полета к планете на орбиту ее спутника, переход с околопланетной орбиты спутника на вытянутую траекторию полета к другой планете, торможение при посадке на Луну. Предполагается, что вся траектория полета может быть разбита на две части. Сначала проводятся коррекции траектории, затем осуществляется маневр. Рассматривается случай одноразовой импульсной коррекции и одного маневра.

Пусть имеется реальная траектория движения, на которой с некоторого момента $t=t_m$ должен быть проведен маневр. Задано, что к моменту проведения маневра элементы орбиты q_j ($j=1, \dots, 6$) должны удовлетворять некоторым условиям

$$\varphi_i(q_i)=0, i=1, \dots, n. \quad (15.31)$$

На номинальной расчетной орбите эти условия выполнены подбором соответствующих параметров орбиты, однако для фактической траектории ($q_j=q_{j\phi}$) они оказались нарушенными:

$$\varphi_i(q_{j\phi}) = \varphi_i \varphi; \sum_{i=1}^n \varphi_i^2 > 0.$$

Это нарушение должно быть исправлено с помощью коррекции скорости — заранее, до маневра, в некоторый момент коррекции $t=t_k < t_m$. Для фактической известной траектории полета указанные условия (15.31) можно представить в виде условий, наложенных на вектор скорости $\vec{V}=(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ объекта после коррекции:

$$f_i(\vec{V}, t_k) \equiv f_i(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t_k) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (15.32)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_n + \vec{w}_1. \quad (15.33)$$

Здесь $\vec{V}_n=(\dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n)$ — вектор скорости объекта при $t=t_k$ до сообщения корректирующего импульса скорости $\vec{w}_1(\Delta \dot{x}_1, \Delta \dot{y}_1, \Delta \dot{z}_1)$, $\vec{w}_1 \neq 0$.

Ниже будем считать, что число условий f_i не превышает двух ($n \leq 2$), момент коррекции t_k фиксирован.

Геометрически, в трехмерном пространстве P скоростей при $t=t_k$ условия (15.32) задают некоторое допустимое множество F , которому должен принадлежать конец вектора скорости $\vec{V}$ после коррекции (ниже конец вектора скорости $\vec{V}$ будем называть просто точкой $\vec{V}$ и в этом смысле применять обозначение $\vec{V} \in F$), $\vec{V} \in F$. Считаем, что при $n=1$ это множество будет гладкой поверхностью $F=\{\vec{V}: f_1(\vec{V}, t_k)=0\}$, а при $n=2$ — гладкой кривой

$$F=\{\vec{V}: f_1(\vec{V}, t_k)=0; f_2(\vec{V}, t_k)=0\}.$$

В этом пространстве P вектор корректирующего импульса $\vec{w}_1$ начинается в точке $\vec{V}_n \in F$ и кончается в точке $\vec{V} \in F$. Введем касательное множество $\bar{F}$. Это плоскость при $n=1$ или прямая при $n=2$, касательные к F в точке $\vec{V}$. Условно в обоих случаях будем называть F поверхностью, $\bar{F}$ — плоскостью.

Пусть на импульс коррекции не наложено других условий, кроме (15.32), причем $n \leq 2$. Тогда число условий коррекции (корректируемых параметров) меньше числа управляющих параметров (трех компонент импульса коррекции) и необходимо провести оптимизацию. Один возможный метод управления при коррекции состоит в минимизации величины импульса коррекции (или затрат топлива на коррекцию — в точной, неимпульсной постановке):

$$w_1 = |\vec{V} - \vec{V}_n| = \sqrt{(\dot{x} - \dot{x}_n)^2 + (\dot{y} - \dot{y}_n)^2 + (\dot{z} - \dot{z}_n)^2} \rightarrow \min. \quad (15.34)$$

Геометрически применение этого критерия сводится к отысканию на поверхности F точки, ближайшей к начальной, или, в данном случае гладкой поверхности, к опусканию перпендикуляра из начальной точки $\vec{V}_n$ на поверхность F (рис. 15.29). Обозначим импульс коррекции при таком методе оптимизации через $\vec{w}_{10}$, индексом «0» будем ниже обозначать все величины, относящиеся к такой коррекции (15.34).

Недостатком указанного критерия оптимизации является то, что при этом методе не учитывается влияние коррекции на параметры последующего маневра, в частности на расход топлива при маневре.

Будем характеризовать расход топлива при маневре характеристической скоростью маневра w_2 , а суммарные энергетические затраты на коррекцию и маневр — суммарной характеристической скоростью

$$w = w_1 + w_2. \quad (15.35)$$

Заданием вектора скорости после коррекции $\vec{V}$ полностью определяется дальнейшая траектория полета и, в частности, характеристическая скорость последующего (оптимального) маневра. Поэтому считаем, что на поверхности F задана соответствующая функция

$$w_2 = w_2(\vec{V}, t_k) = w_2(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t_k), \quad w_2 > 0, \quad \vec{V} \in F. \quad (15.36)$$

Следовательно, суммарные энергетические затраты w полностью определяются параметрами коррекции и величину w надо взять за минимизируемый функционал для оптимизации управления коррекцией:

$$w(\vec{V}, t_k) = w_1(\vec{V}, t_k) + w_2(\vec{V}, t_k) \rightarrow \min_{\vec{V} \in F}. \quad (15.37)$$

Из этого условия может быть различными способами определена скорость $\vec{V}_{\text{опт}}$ после оптимальной коррекции.

Приведем необходимое условие оптимальности коррекции. Пусть $w_2(\vec{V})$, $\vec{V} \in F$, — дифференцируемая функция; тогда

$$w_2(\vec{V} + \Delta\vec{V}) - w_2(\vec{V}) = \vec{\text{grad}}_F w_2(\vec{V}) \Delta\vec{V} + o(\Delta\vec{V}),$$

причем ее градиент $\vec{\text{grad}}_F w_2$ лежит в касательной плоскости $\bar{F}$. Функцию $w_2(\vec{V})$ можно распространить (различными способами) с поверхности F на ее некоторую окрестность $\epsilon(F)$. Тогда получим функцию $\tilde{w}_2(\vec{V})$, $\vec{V} \in \epsilon(F)$, при этом на поверхности F проекция Π_F ее градиента (обозначим его через $\vec{\text{grad}}_F \tilde{w}_2$) на касательную плоскость $\bar{F}$ равна:

$$\Pi_F \vec{\text{grad}} \tilde{w}_2 = \vec{\text{grad}}_F w_2.$$

Из условия (15.37) получим, что при оптимальном решении корректирующий импульс должен удовлетворять условию

$$\vec{w}_1/w_1 + \vec{\text{grad}}_F w_2(\vec{V}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{\text{grad}} f_i(\vec{V}), \quad \vec{V} \in F, \quad (15.38)$$

или

$$\vec{w}_1^e(\vec{V}) + \vec{\text{grad}} \tilde{w}_2(\vec{V}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{\text{grad}} f_i(\vec{V}), \quad \vec{V} \in F$$

(здесь $\vec{w}_1^e = \vec{w}_1/w_1$, λ_i — множители Лагранжа), т. е. теперь уже векторы $\vec{w}_1^e + \vec{\text{grad}}_F w_2$ и $\vec{w}_1^e + \vec{\text{grad}} \tilde{w}_2$ ортогональны поверхности F (рис. 15.29). Из решения системы (15.38), (15.32), (15.33) получим оптимальное управление при коррекции, минимизирующее функционал (15.35). Пусть индекс «F» означает проекцию вектора на касательную плоскость. Условие оптимальности (15.38) можно выразить в другой форме:

$$\vec{w}_{1F}^e(\vec{V}) + \vec{\text{grad}}_F w_2(\vec{V}) = 0.$$

Используя приведенные условия оптимальности, можно сформулировать следующее геометрическое свойство оптимальной коррекции. Оптимальный корректирующий импульс $\vec{w}_{1\text{опт}}$ лежит в плоскости, проходящей через (некоторую, при $n=2$) нормаль к F и вектор $\vec{\text{grad}} \tilde{w}_2$ (или $\vec{\text{grad}}_F w_2$). При этом импульс коррекции $\vec{w}_{1\text{опт}}$ и вектор $\vec{\text{grad}} \tilde{w}_2$ (или $\vec{\text{grad}}_F w_2$) повернуты от этой нормали в разные стороны, их проекции на касатель-

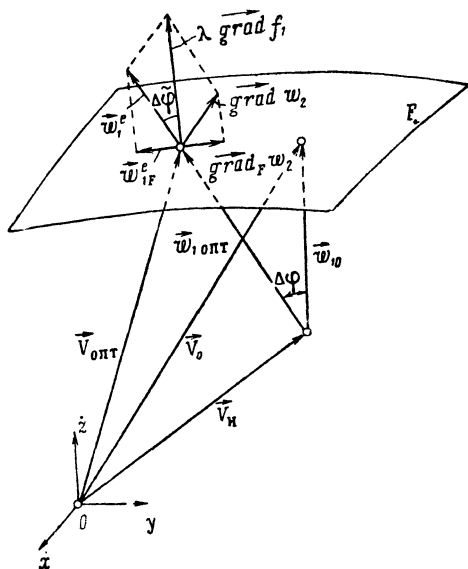


Рис. 15.29. Минимальный и оптимальный импульсы коррекции при $n=1$

ную плоскость $\bar{F}$ антиколлинеарны. Угол $\Delta\varphi$, составляемый корректирующим импульсом с нормалью к F (с нормальной к F плоскостью, при $n=2$), определяется условием

$$\sin \Delta\varphi_{\text{опт}} = \text{grad}_F w_2 (\vec{V}_{\text{опт}}).$$

Отсюда, в частности, следует, что в оптимальной точке $\vec{V}_{\text{опт}}$ величина вектора $\text{grad}_F w_2$ не превышает единицы.

Частный случай. Пусть F и $G = \{\vec{V} : \tilde{w}_2(\vec{V}) = C > 0\}$ — поверхности вращения вокруг одной оси. Тогда оптимальный импульс коррекции сообщается в плоскости, проходящей через начальную точку $\vec{V}_n$ и указанную ось. Дальнейшую оптимизацию можно проводить в этой плоскости.

Приближенное определение оптимальной коррекции

Рассмотрим в линейном приближении задачу оптимизации управления при коррекции с учетом маневра. Пусть известно решение задачи (15.34) о минимуме корректирующего импульса, при этом $\vec{V} = \vec{V}_0$ и т. д. Считаем, что векторы $\text{grad } f_i$, $\text{grad}_F w_2$ в рассматриваемой окрестности точки $\vec{V}_0$ постоянны:

$$\overrightarrow{\text{grad}} f_i (\vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}} f_{i0}; \overrightarrow{\text{grad}}_F w_2 (\vec{V}) = \overrightarrow{\text{grad}}_F w_{20}, \vec{V} \in F.$$

При этом поверхность F заменяется касательной плоскостью $\bar{F}_0$ и в формулах для f_i , w_2 учитываются лишь линейные члены. В этом приближении оптимальный корректи-

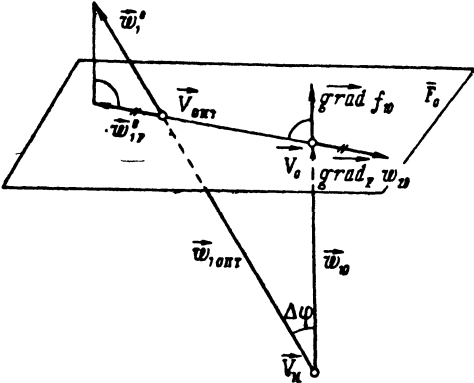


Рис. 15.30. Приближенное построение оптимального импульса коррекции при $n=1$

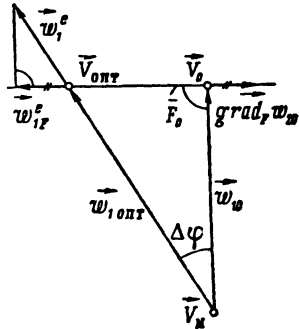


Рис. 15.31. Приближенное построение оптимального импульса коррекции при $n=2$

рующий импульс сообщается в плоскости, проходящей через минимальный импульс $\vec{w}_{10}$ и вектор $\text{grad}_F w_{20}$, отклоняясь от импульса $\vec{w}_{10}$ на вектор $\vec{w}_3$, направленный противоположно $\text{grad}_F w_{20}$ [рис. 15.30 ($n=1$), рис. 15.31 ($n=2$)]:

$$\vec{w}_{1\text{опт}} = \vec{w}_{10} + \vec{w}_{3\text{опт}}; \quad \vec{w}_{3\text{опт}} = -\vec{w}_{10} \frac{\text{grad}_F w_{20}}{\text{grad}_F w_{20}} \text{tg } \Delta\varphi. \tag{15.39}$$

Здесь $\Delta\varphi$ — угол поворота оптимального импульса от минимального; он определяется условием

$$\sin \Delta\varphi = \text{grad}_F w_{20}, \quad 0 \leq \Delta\varphi < \frac{\pi}{2}. \tag{15.40}$$

Величина характеристической скорости коррекции, маневра и суммарная величина w для этого оптимального решения будут равны:

$$\left. \begin{aligned} w_{1\text{опт}} &= w_{10} \sec \Delta\varphi; \\ w_{2\text{опт}} &= w_{20} - w_{10} \sin \Delta\varphi \text{tg } \Delta\varphi; \\ w_{\text{опт}} &= w_{20} + w_{10} \cos \Delta\varphi = w_0 - w_{10} (1 - \cos \Delta\varphi). \end{aligned} \right\} \tag{15.41}$$

Отсюда получим изменения величин w_1 , w_2 и функционала w при переходе от критерия (15.34) к критерию (15.37):

$$\left. \begin{aligned} \Delta w_1 &= w_{10} - w_{1\text{опт}} = (1 - \sec \Delta\varphi) w_{10}; \\ \Delta w_2 &= w_{20} - w_{2\text{опт}} = \sin \Delta\varphi \operatorname{tg} \Delta\varphi w_{10}; \\ \Delta w &= w_0 - w_{\text{опт}} = (1 - \cos \Delta\varphi) w_{10}. \end{aligned} \right\} \quad (15.42)$$

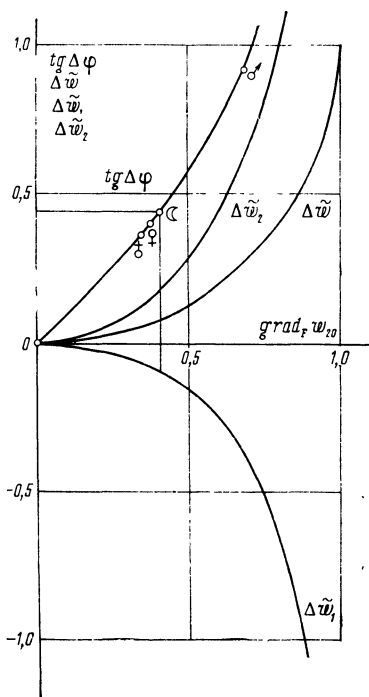


Рис. 15.32 Зависимость относительных изменений импульсов и угла поворота корректирующего импульса $\Delta\varphi$ от величины $\operatorname{grad}_F w_{10}$

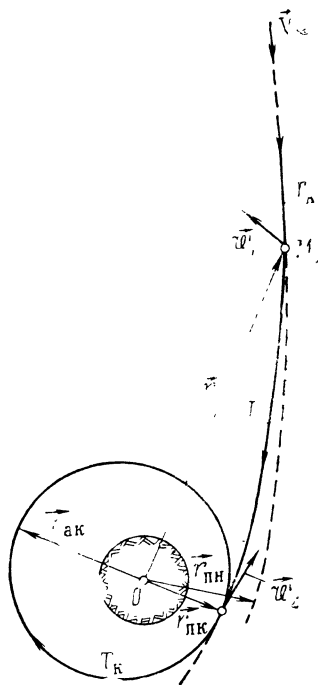


Рис. 15.33. Схема коррекции и торможения при переходе на орбиту спутника планеты

т. е. они линейны по величине корректирующего импульса. При этом их относительные изменения

$$\Delta \tilde{w}_1 = \Delta \tilde{w}_1 / w_{10}; \quad \Delta \tilde{w}_2 = \Delta w_2 / w_{10}; \quad \Delta \tilde{w} = \Delta w / w_{10}$$

полностью определяются градиентом $\operatorname{grad}_F w_{20}$ характеристической скорости маневра w_2 в касательной плоскости $\bar{F}_0$ (рис. 15.32).

Задача коррекции для обеспечения маневра перехода на орбиту искусственного спутника планеты

В работах [8, 11] определяется оптимальная коррекция, необходимая для обеспечения торможения при вертикальной посадке на планету. Здесь приводится решение еще одной конкретной задачи. Пусть вблизи планеты в центральном ньютоновском гравитационном поле движется аппарат по известной гиперболической орбите T_n , перигелийское расстояние которой равно r_{nn} . В результате проведения маневра торможения должен быть осуществлен переход на орбиту спутника T_k с заданными величинами перигелийского расстояния r_{pk} , r_{ak} (рис. 15.33). Если $r_{nn} \neq r_{pk}$, то заранее в некоторой точке орбиты T_n , на расстоянии r от центра планеты, проводится коррекция так, чтобы для новой траектории T перигелийское расстояние r_n равнялось заданному конечному r_{pk} , т. е. $r_n = r_{pk}$.

Это условие аналогично условиям (15.31), (15.32), $n=1$. Маневр торможения (считаем его импульсным) проводится в перигелии скорректированной орбиты T . При этом импульс сообщается противоположно вектору скорости; скорость уменьшается от начальной V_n до конечной величины V_{pk} .

Рассмотрим пространство P скоростей в точке коррекции. Поверхность $F(\vec{V}: f_1 \equiv \equiv r_{\pi} - r_{\pi\kappa} = 0)$ будет однополостным гиперболоидом вращения, полученным вращением гиперболы (15.2) вокруг оси V_r .

Минимальный корректирующий импульс $\vec{w}_{10}$ есть перпендикуляр, опущенный из начальной точки $\vec{V}_n$ на F , лежит в начальной плоскости (V_t, V_r) , направлен по градиенту $\text{grad } r_{\pi}$ в конечной точке $\vec{V}_0$.

Рассмотрим теперь оптимальную коррекцию при учете последующего маневра. Оптимальный импульс коррекции $\vec{w}_{1 \text{ опт}}$ будет сообщаться в начальной плоскости движения под некоторым углом $\Delta\varphi$ к минимальному импульсу $\vec{w}_{10}$. Приведем точное и приближенное решение данной задачи.

Вместо всего пространства скоростей P будем рассматривать его плоскость $P_{\pi}(V_t, V_r)$, поскольку в ней осуществляются и оптимальная и минимальная коррекции. Пусть R_{π} — гипербола в P_{π} , сечение гиперболоида F плоскостью P_{π} . Она соответствует орбитам с заданным перигентрическим расстоянием $r_{\pi} = r_{\pi\kappa}$.

В точном решении задачи (см. разд. 15.1, переходы III I, IV B I) оптимальный (с учетом маневра) корректирующий импульс проходит из начальной точки $\vec{V}_n$ к одному из фокусов гиперболы R_{π} до пересечения с ближайшей, правой, ее ветвью ($V_t > 0$). При этом в случае $r_{\pi n} < r_{\pi\kappa}$, $\beta = 1$, берется правый фокус $\vec{F}_2(\sigma_{\pi} r/r_{\pi\kappa}, 0)$, а в случае $r_{\pi n} > r_{\pi\kappa}$, $\beta = -1$, берется левый фокус $F_1(-\sigma_{\pi} r/r_{\pi\kappa}, 0)$, рис. 15.34. Величины корректирующего, тормозного и суммарного импульсов определяются из соответствующих формул раздела 15.1.1, причем угол $\varphi_{\text{опт}}$ наклона оптимального импульса коррекции к трансверсали равен

$$\cos \varphi_{\text{опт}} = - \frac{V_{tn} - (\beta \sigma_{\pi} r/r_{\pi\kappa})}{V_n F_i}, \quad \sin \varphi_{\text{опт}} > 0.$$

Видим, что при переходе от минимальной к оптимальной коррекции импульс $\vec{w}_1$ поворачивается, приближаясь к положительному радиальному направлению, при этом увеличивается радиальная компонента импульса, она будет положительной; весь импульс коррекции также увеличивается, а величина скорости после коррекции (и тормозной импульс w_2) уменьшается.

Рассмотрим теперь приближенное (15.39), (15.40) решение данной задачи, считая, что минимальная коррекция (15.34) получена. Угол $\Delta\varphi$ поворота оптимального импульса от минимального определяется следующим образом:

$$\sin \Delta\varphi = \text{grad}_F w_{20} = \left| \frac{\partial r_{\pi}}{\partial V_{r0}} \right| r/r_{\pi\kappa} \text{grad } r_{\pi 0}; \quad (15.43)$$

тогда

$$\varphi_{\text{опт}} = \varphi_0 + \Delta\varphi \text{sign}(r_{\pi\kappa} - r_{\pi n}).$$

Величины корректирующего, тормозного, суммарного импульсов, уменьшение суммарных затрат определяются по формулам (15.41), (15.42) с учетом (15.43).

Хотя в данной задаче известно точное оптимальное решение, приведенное приближенное решение весьма полезно, так как оно помогает лучше понять, причем не только качественно, но и количественно связь обоих методов коррекции.

Рассмотрим случай больших расстояний коррекции, $r \rightarrow \infty$. Предельное направление минимального импульса ортогонально радиальному, $\sin \varphi_0 \rightarrow 0$.

Таблица 15.1

Небесное тело	$r_{\pi\kappa}$, км	V_{∞} , км/с	$\Delta\varphi^{\infty}$, град.	$\Delta \tilde{w}^{\infty}$	$\Delta \tilde{w}_1^{\infty}$	$\Delta \tilde{w}_2^{\infty}$
Луна ☾	1900	1	24	0,09	—0,09	0,18
Марс ♂	4400	4	42	0,26	—0,35	0,61
Земля ☿	6600	4	20	0,06	—0,06	0,12
Венера ♀	6500	4	22	0,07	—0,08	0,15

Для оптимальной коррекции при $r \rightarrow \infty$ угол наклона оптимального корректирующего импульса приближается к следующему предельному:

$$\varphi_{\text{опт}}^{\infty} = \Delta\varphi^{\infty} \text{ при } r_{\pi n} < r_{\pi\kappa}; \quad \varphi_{\text{опт}}^{\infty} = \pi - \Delta\varphi^{\infty} \text{ при } r_{\pi n} > r_{\pi\kappa};$$

$$\sin \Delta\varphi^{\infty} = \sin \varphi_{\text{опт}}^{\infty} = \tilde{V}_{\infty} / \sqrt{\tilde{V}_{\infty}^2 + 1}; \quad \tilde{V}_{\infty} = V_{\infty} / \sqrt{\frac{2\mu}{r_{\pi\kappa}}} = \text{tg } \Delta\varphi^{\infty}.$$

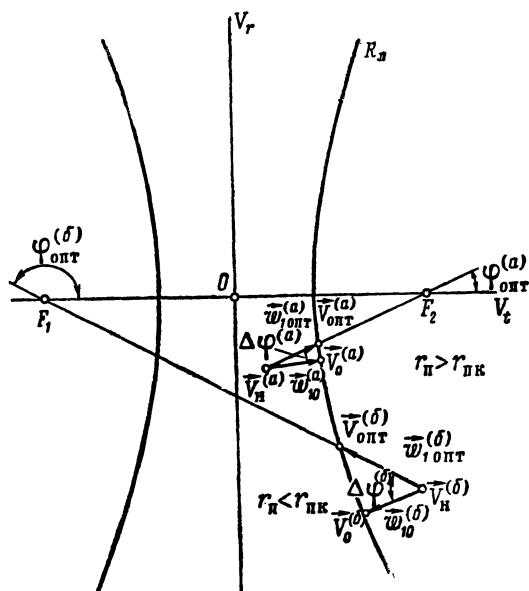


Рис. 15.34. Определение в плоскости скоростей оптимального корректирующего импульса

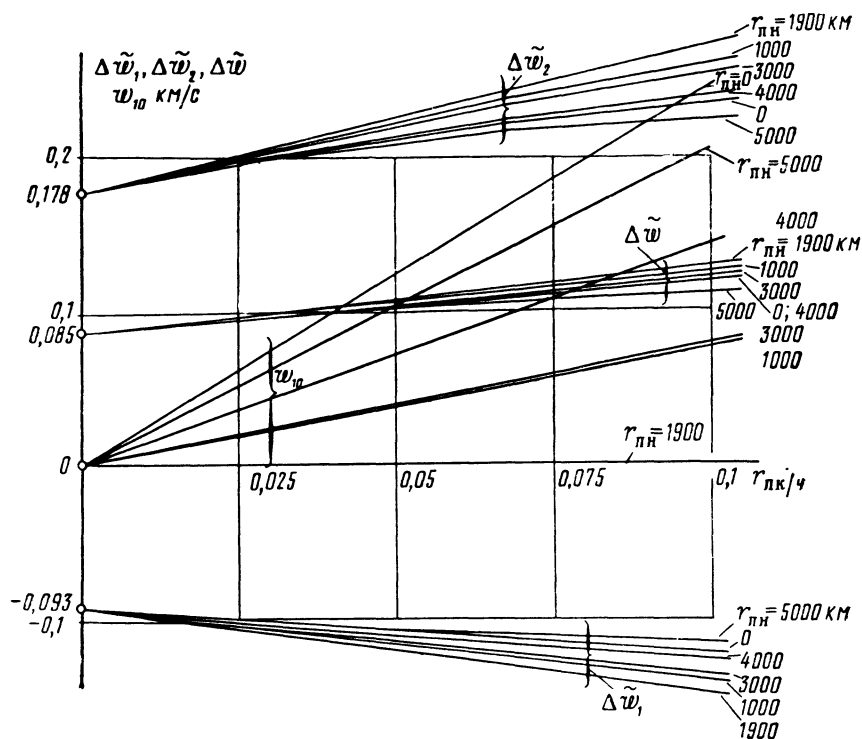


Рис. 15.35. Зависимость минимального импульса коррекции и относительных изменений импульсов от безразмерного расстояния коррекции

Интересно отметить, что предельная ориентация (относительно радиуса-вектора) оптимального импульса коррекции в рассматриваемой задаче та же, что и в задаче коррекции для торможения при вертикальной посадке на планету.

Предельные относительные изменения импульсов $\Delta\tilde{w}^\infty$, $\Delta\tilde{w}_1^\infty$, $\Delta\tilde{w}_2^\infty$ и величину $\text{grad}_F \omega_{20}^\infty$ можно получить, зная $\tilde{V}_\infty = \text{tg } \Delta\varphi^\infty$, из рис. 15.32 (на нем нет лишь индексов « ∞ »). В табл. 15.1 приведены соответствующие предельные характеристики оптимальной коррекции при полетах к Луне и близким планетам для характерных величин перигелийского расстояния спутника и скорости «на бесконечности» V_∞ . Используя эти

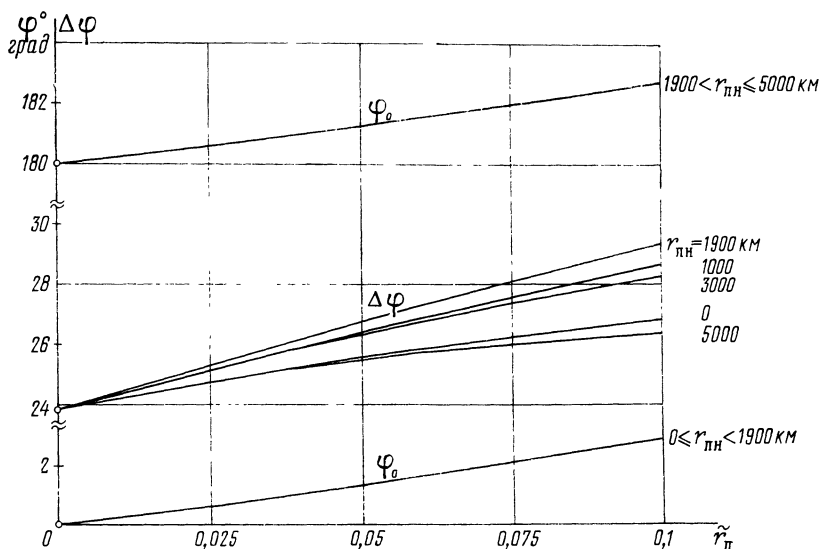


Рис. 15.36. Зависимость углов φ_0 и $\Delta\varphi$ от безразмерного расстояния коррекции

предельные данные, можно приблизительно оценить параметры оптимальной коррекции на большом удалении от планеты ($r_{пк}/r \leq 0,05$), в частности, получим

$$w_{10} - w_{1\text{опт}} \approx \Delta\tilde{w}_1^\infty w_{10};$$

$$w_{20} - w_{2\text{опт}} \approx \Delta\tilde{w}_2^\infty w_{10};$$

$$w_0 - w_{\text{опт}} \approx \Delta\tilde{w}^\infty w_{10};$$

$$\Delta\varphi \approx \Delta\varphi^\infty.$$

Пример. Вблизи Луны осуществляется маневр торможения для перехода с начальной гиперболической орбиты на эллиптическую орбиту спутника, перигелийский радиус которой равен $r_{пк} = 1900$ км. Начальная скорость на бесконечности задана $V_\infty = 1$ км/с.

На рис. 15.35 и 15.36 представлены зависимости минимального импульса w_{10} , относительных изменений импульсов $\Delta\tilde{w}_1$, $\Delta\tilde{w}_2$, $\Delta\tilde{w}$ и углов φ_0 , $\Delta\varphi$ от безразмерного обратного расстояния коррекции $\tilde{r}_п = r_{пк}/r$ для различных значений начального перигелийского расстояния $r_{пн}$.

Из приведенных данных следует, что при полете от Земли к Луне для данной задачи коррекции переход от минимизации корректирующего импульса к минимизации суммарных энергетических затрат на коррекцию и торможение приводит к уменьшению суммарных затрат, которое составляет около 10% от импульса коррекции.

15.1.3. Автономный метод определения направления вектора скорости путем ориентации на центр планеты и использование его для маневра торможения

Вопрос об определении вектора скорости в некоторой точке траектории может возникнуть в различных задачах. Например, при маневрах вблизи планет часто оптимальный импульс необходимо сообщить вдоль или противоположно вектору скорости. Так как обычно траектория бывает известна неточно, то возникает потребность в таком методе определения вектора скорости, который был бы слабо чувствителен к ошибкам

прогноза. В рассматриваемом ниже методе вопрос об определении вектора скорости связывается с задачей торможения, т. е. ориентацией импульса (вектора тяги) перед торможением вблизи планеты.

Для совершения маневра в пространстве у планет необходимо тягу двигателя направлять заданным образом, часто (в первом приближении) по направлению вектора скорости КА. Некоторые известные методы ориентации в космическом пространстве у планет, применяемые для данной задачи, например ориентация по прогнозируемому вектору скорости, обладают значительными недостатками. Так, при недостаточно хорошем знании траектории (из-за неточности коррекции и измерительных средств) возникают ошибки в ориентации, приводящие, как правило, к возникновению больших боковых скоростей. Кроме того, в этом случае обычно используется сложная система выставки корабля в инерционной системе координат, а также проведение больших вычислительных работ по расчету установок на ориентацию.

Используя свойства движения тел в гравитационном поле вблизи планеты, например сохранение плоскости движения, а также возможность одноосной ориентации на центральное тело, можно иногда автономно определить направление вектора скорости в точке маневра, осуществить автономную ориентацию двигателя по вектору скорости. В каждом из этих случаев можно также вычислить ошибки в точности проведения маневра в зависимости от точности определения первоначальной орбиты и точности выдерживания направления по радиусу-вектору.

Наиболее интересными из рассмотренных методов автономной ориентации являются случаи, когда точность проведения маневра не зависит или слабо зависит от точности знания орбиты перед маневром. Ошибки в определении орбиты как бы исправляются самим методом ориентации. Тогда этот метод удобно использовать при проведении маневров. Следует заметить, что в этом случае не предполагается проведение каких-либо специальных навигационных замеров и расчетов на борту КА.

Таким будет рассматриваемый ниже *автономный метод ориентации* тормозного двигателя по вектору скорости при вертикальной посадке на безатмосферное небесное тело, например Луну.

Рассмотрим случай импульсного торможения у планеты в центральном ньютоновском поле сил. Пусть возможные траектории сближения с планетой образуют осесимметричный пучок гиперболических траекторий. Осевая траектория проходит через центр планеты, КА движется по ней при отсутствии ошибок прогноза и коррекции. Каждую орбиту пучка можно характеризовать вектором скорости $\vec{V}_\infty$ на бесконечно большом удалении от планеты и прицельной дальностью $\vec{b}$, характеризующей отклонение орбиты от траектории, проходящей через центр планеты. Прицельная дальность b связана с перигелическим расстоянием r_n следующей зависимостью:

$$b^2 = r_n^2 + \frac{2\mu r_n}{V_\infty^2}.$$

Физически величина b соответствует ошибкам прогноза и коррекции, которые приводят к отклонению реальной траектории от расчетной, в данном случае центральной.

Применение рассматриваемого метода автономной навигации для проведения маневра торможения основано на следующем свойстве [3] траекторий: для широкого пучка гиперболических траекторий существует расстояние r_B^* , на котором направление на притягивающий центр достаточно точно совпадает с направлением вектора скорости в точке торможения (направлением оси тормозного двигателя).

Пусть A (рис. 15.37) — точка торможения (маневра). Расстояние r_B от центра планеты до точки B , в которой направление на центр планеты параллельно вектору скорости V_A в точке A , равно:

$$r_B = r_{A1} k_A (1 + \cos \alpha),$$

где r_A — расстояние от центра до точки A ;

$k_A = \frac{V_A^2 r_A}{\mu}$ — величина, зависящая только от энергии траектории и от r_A и не зависящая от b ;

α — угол между вектором $\vec{V}_A$ и направлением на центр планеты в точке A ;

$$\sin \alpha = \frac{V_\infty}{V_A r_A} b.$$

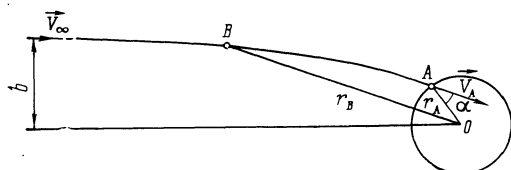
С точностью до членов второго порядка по α расстояние r_B постоянно для всех траекторий пучка и равно:

$$r_B^* = 2k_A r_A.$$

Если для всех траекторий за расстояние r_B брать эту величину, то совершаемая ошибка в определении расстояния r_B оценивается величиной

$$\Delta r_B = r_A k_A (1 - \cos \alpha) \approx \frac{r_A k_A}{2} \alpha^2.$$

При этом для ошибки в определении направления вектора скорости $\vec{V}_A$ (и направления оси тормозного двигателя) имеет место следующая оценка:



$$\Delta \alpha = \alpha_B \frac{\Delta r_B}{r_B^*},$$

где α_B — угол между вектором скорости и направлением на центр планеты в точке B;

Рис. 15.37. Схема ориентации по вектору скорости при маневре

$$\sin \alpha_B = \frac{V_\infty}{V_{B^*}} b.$$

Величина $\Delta \alpha$ имеет третий порядок малости относительно b .

Допустимая ошибка $\Delta b_{\max}$ в определении орбиты по прицельной дальности для случая центральной трубки определяется по формуле

$$\Delta b_{\max} = \frac{1}{V_\infty} \sqrt[3]{2 V_B r_B^2 \Delta \alpha_{\max}},$$

где $\Delta \alpha_{\max}$ — допустимая ошибка в ориентации тормозного двигателя, в радианах.

В табл. 15.2 приведены значения r_B^* , Δr_B и $\Delta b_{\max}$ для характерных при сближении с планетами скоростей V_∞ .

Таблица 15.2

Небесное тело	r_A , км	V_∞ км/с	r_B^* , км	$\Delta \alpha_{\max}$, угл. мин	Δr_B , км	$\Delta b_{\max}$, км
Земля	6370	4	28 700	5	440	4600
Венера	6100	4	27 500	5	420	4400
Марс	3400	4	22 300	5	510	1600
Луна	1740	0,5	7 260	5	100	1960
		1	8 200	5	130	1100
		1,5	9 720	5	185	890

Для Луны приведены данные для нескольких значений V_∞ , чтобы иллюстрировать влияние этой величины.

Возникающая вследствие угловой ошибки $\Delta \alpha$ боковая скорость V_6 в конце торможения оценивается по формуле

$$V_6 \approx V_T \Delta \alpha,$$

где V_T — скорость торможения, $V_T \approx V_A$.

Пример. Для случая посадки на Луну при допустимой точности ориентации $\Delta \alpha_{\max} = 5'$ ($V_6 \leq 5$ м/с) допустимое отклонение траектории от расчетной составляет 1100 км (при $V_\infty = 1$ км/с, $r_A = 1800$ км), при этом $r_B^* \approx 8200$ км, а $\Delta r_B \leq 130$ км.

Из рассмотренного свойства пучка гиперболических траекторий следует, что для осуществления маневра торможения при вертикальной посадке на планету может быть использован следующий метод автономной ориентации и навигации. Существо способа сводится к тому, что для большой трубки траекторий можно выбрать такое расстояние r_B^* (фиксированное для всех траекторий трубки), на котором направление на центр планеты параллельно (с высокой точностью) вектору скорости аппарата и оси двигателя, осуществляющего торможение. Это направление сохраняется каким-либо способом (например, с помощью гироскопа или оптической привязки к небесным светилам) до момента включения двигателя. Момент включения двигателя определяется каким-либо другим способом (например, с помощью высотомера). Момент прохождения расстояния r_B^* определяется по расчетному времени или высотомеру.

Далее можно отметить, что данный метод ориентации импульса по вертикали к планете может быть применен не только при вертикальной посадке, но и в некотором диапазоне нецентральных траекторий [4]. Возможны и другие применения этого метода. Так, например, для проведения маневра схода с круговой орбиты у планет можно ориентировать двигатели на центр планеты, а затем через $1/4$ периода провести маневр торможения.

15.2. АЭРОДИНАМИЧЕСКИЙ МАНЕВР

Аэродинамическим маневром (АМ) принято называть управляемое движение космического аппарата (КА), предназначенное для изменения параметров орбиты при помощи аэродинамических сил. Применение АМ расширяет маневренные возможности КА, обладающего несущими свойствами, и дает энергетическое превосходство АМ над газодинамическим маневром (ГМ).

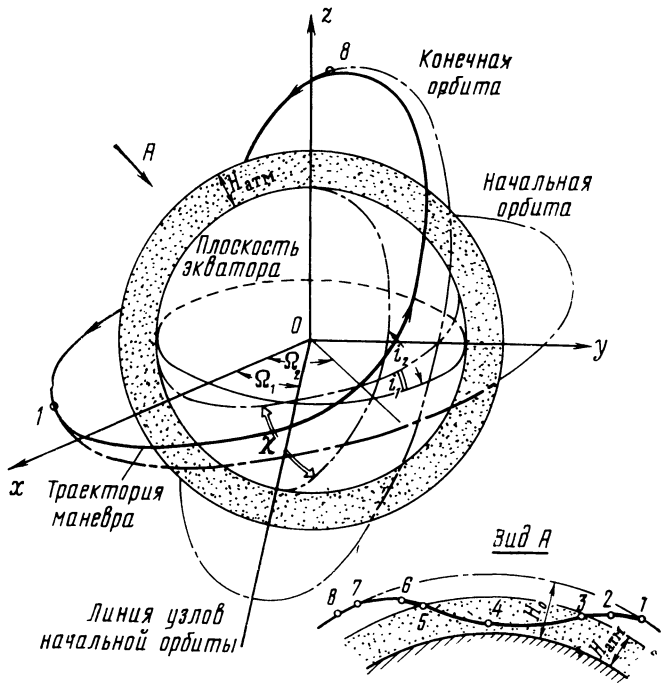


Рис. 15.38. Аэродинамический поворот орбитальной плоскости (орбитальный АМ)

— изменение наклона орбитальной плоскости и долготы восходящего узла (рис. 15.38);

- расширение коридора входа в атмосферу;
- изменение периода обращения для фазирования с другим КА, например

— малые изменения всех орбитальных элементов для перехода на новую заданную орбиту или для коррекции первоначальной орбиты.

В соответствии с этим следует различать пять типов АМ:

1. Аэродинамический поворот орбитальной плоскости (орбитальный маневр).
2. Предпосадочный АМ (маневр на возвращении).
3. Расширение коридора входа (входной маневр).
4. Фазирующий АМ.
5. Аэродинамический маневр с помощью малых аэродинамических сил (корректирующий АМ).

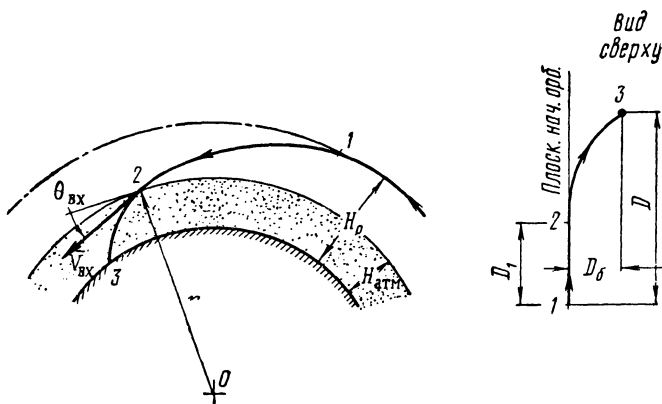


Рис. 15.39. Аэродинамический маневр при возвращении (предпосадочный АМ)

1—сход с начальной орбиты; 2—вход в атмосферу; 3—точка посадки

Возможность осуществления АМ достигается приданием КА определенной формы, обеспечивающей нужную величину максимального аэродинамического качества ($K_{\max}$) при гиперзвуковых скоростях полета. Это ведет к некоторому утяжелению конструкции

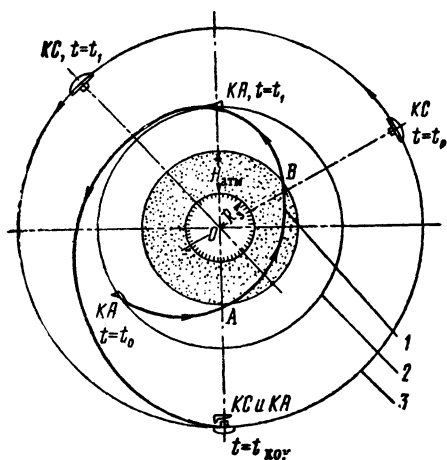


Рис. 15.40. Аэродинамический маневр при встрече с другим КА или КС (фазирующий АМ)

1—траектория фазирования КА в атмосфере; 2—опорная орбита КА; 3—орбита КС

КА. Кроме того, осуществление АМ требует применения специальной системы теплозащиты наружной поверхности КА и теплоизоляции его внутренних объемов. Поэтому превосходство АМ над ГМ обеспечивается только при условии, что утяжеление конструкции КА с АМ будет меньше, чем выигрыш в весе топлива по сравнению с КА, способным выполнить такое же изменение параметров орбиты при помощи ГМ.

15.2.1. Поворот орбитальной плоскости

Этот тип АМ будет выполняться в случае необходимости изменить положение орбитальной плоскости относительно инерциального пространства (система координат $Oxyz$, см. рис. 15.38). Такая необходимость может встретиться при повторном проходе над заданной точкой поверхности вращающейся планеты или при переходе с одной заданной трассы на другую; при этом изменяются наклонение i и долгота восходящего узла орбиты Ω (рис. 15.41). Остальные элементы орбиты могут не изменяться: для круговой орбиты конечная высота равна начальной, для эллиптической — равны начальные

и конечные высоты перигея и апогея и неизменно угловое положение перигея Φ относительно плоскости отсчета (см. рис. 15. 41).

Аэродинамический разворот орбитальной плоскости может выполняться следующим образом: КА при помощи импульса бортовой двигательной установки (ДУ) сходит с первоначальной орбиты, погружается в плотные слои атмосферы и совершает разворот за счет боковой компоненты подъемной силы. При подходе к заданной плоскости орбиты крен уменьшается и КА, используя подъемную силу и тягу ДУ, поднимается на нужную высоту. После этого КА выходит на новую орбиту, разгоняясь до нужной скорости при помощи бортовой ДУ (см. рис. 15. 38).

На рис. 15. 38 приняты следующие обозначения.
 $Oxyz$ — геоцентрическая инерциальная система координат (см. абсолютную систему координат, гл. II);

- 1—2 — сход с начальной орбиты при работающей ДУ;
- 2—3 — пассивный полет по траектории снижения;
- 3 — вход в плотные слои атмосферы;
- 3—4 — пространственное движение с разворотом орбитальной плоскости за счет аэродинамических сил;
- 4 — угол наклоения близок к заданному: $i=i_{зад}-\varepsilon i$;
- 4—5 — выход из атмосферы с доворотом до $i=i_{зад}$ при помощи аэродинамических сил;
- 5—6 — подъем с работающей ДУ;

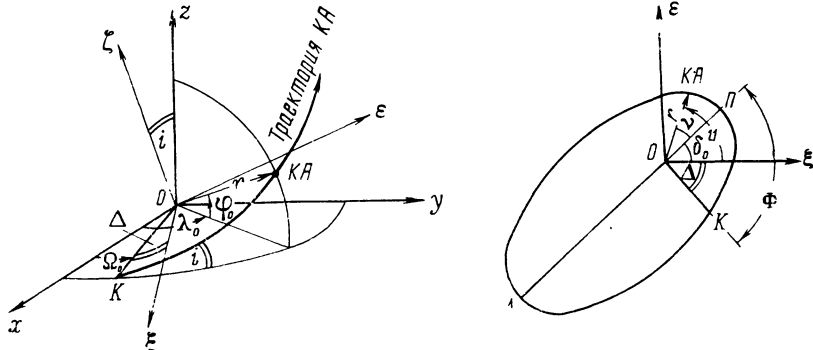


Рис. 15. 41. Параметры орбиты КА

- 6—7 — пассивный подъем до заданной высоты;
- 7—8 — разгон до орбитальной скорости, выход на новую орбиту.

Исследование поворота орбитальной плоскости удобнее всего проводить в той системе координат, в которой наклонение и долгота восходящего узла непосредственно входят в дифференциальные уравнения движения центра масс КА (см. оскулирующую систему координат, гл. II). При этом положение плоскости развертки относительно основной системы координат $Oxyz$ определяется углами Эйлера i, Ω, Δ (см. рис. 15. 38 и 15. 41):

- i — наклонение к экватору (угол нутации);
- Ω — долгота восходящего узла (угол прецессии);
- Δ — угол собственного вращения.

В случае, когда за независимую переменную принято время t , уравнения возмущенного движения центра масс КА записываются в следующей форме [14]:

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = - \frac{\mu}{r^2} + S; \\ \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{du}{dt} \right) = rT; \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{W}{r \frac{du}{dt}} \frac{\sin(u + \Delta)}{\sin i}; \\ \frac{di}{dt} = \frac{W}{r \frac{du}{dt}} \cos(u + \Delta); \\ \frac{d\Delta}{dt} = - \frac{W}{r \frac{du}{dt}} \sin(u + \Delta) \operatorname{ctg} i. \end{array} \right.$$

$$(15.44)$$

$$(15.45)$$

$$(15.46)$$

$$(15.47)$$

$$(15.48)$$

Первые два уравнения системы (I) представляют собой обобщение уравнений невозмущенного эллиптического движения, а три последних определяют движение плоскости развертки как твердого тела, закрепленного в центре Земли.

В системе (I) приняты следующие обозначения:

μ — гравитационная постоянная Земли;

r — радиус-вектор, равный $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos(u-\delta_0)}$;

$u = v + \delta_0$ — полярный угол радиуса-вектора, где v — истинная аномалия;

$\Delta = \Phi - \delta_0$ — угол собственного вращения плоскости развертки, где Φ — угловое положение перигея от линии узлов;

δ_0 — угол между линией апсид и осью ξ вспомогательной системы координат $O\xi e\zeta$, участвующей во вращении плоскости развертки (см. рис. 15.41)*.

На рис. 15.41 обозначено:

$АП$ — линия апсид;

$ОК$ — линия узлов;

φ_0, λ_0 — широта и долгота начальной точки орбиты;

xOy — плоскость экватора;

ξOe — плоскость, совпадающая с орбитальной плоскостью;

S, T, W — проекции суммарного ускорения от действия сил, за исключением ньютоновского притяжения, на радиус-вектор, трансверсаль и нормаль к орбитальной плоскости,

$$S = g_0 n_r;$$

$$T = g_0 n_T;$$

$$W = g_0 n_W;$$

n_r, n_T, n_W — компоненты полной перегрузки n ,

$$n = (n_r^2 + n_T^2 + n_W^2)^{1/2};$$

g_0 — ускорение земного тяготения на уровне моря.

Составляющие полной перегрузки определяются из следующих выражений:

$$n_r = (\overline{mg}_0)^{(-1)} [k_p \tau_0 \sin \vartheta + q \nabla_0 (c_y \cos \gamma \cos \theta - c_x \sin \theta)]; \quad (15.49)$$

$$n_T = (\overline{mg}_0)^{(-1)} [k_p \tau_0 \cos \vartheta \cos \psi - q \nabla_0 (c_y \cos \gamma \sin \theta + c_x \cos \theta)]; \quad (15.50)$$

$$n_W = (\overline{mg}_0)^{(-1)} [-k_p \tau_0 \cos \vartheta \sin \psi + q \nabla_0 c_y \sin \gamma]. \quad (15.51)$$

Здесь $q = \frac{qV^2}{2}$ — скоростной напор;

k_p — коэффициент работы ДУ;

($k_p = 1$ — ДУ работает; $k_p = 0$ — ДУ выключена; $0 < k_p < 1$ — ДУ дросселирована);

$\tau_0 = \frac{F}{m_0 g_0}$ — начальная тяговооруженность, где F — тяга ДУ;

$$\nabla_0 = \frac{S_{\text{нес}}}{G_0} = \frac{1}{p_0},$$

где p_0 — начальная удельная нагрузка на несущую поверхность $S_{\text{нес}}$ КА;

γ — угол крена (угол между плоскостью симметрии КА и плоскостью, содержащей радиус-вектор и трансверсаль);

ϑ — угол тангажа,

ψ — угол рысканья,

(углы между горизонтальной и связанной системами координат, см. гл. II).

Пределы изменения величин углов ориентации КА:

$$-180^\circ \leq \gamma \leq +180^\circ;$$

$$-90^\circ \leq \vartheta \leq +90^\circ;$$

$$0^\circ \leq \psi \leq 360^\circ$$

Полагая, что КА обладает флюгерной устойчивостью, а отсчет угла рысканья ведется от проекции вектора скорости на местный горизонт, т. е. полагая угол скольжения $\beta=0$, путевой угол $\psi_c=0$, получим следующую форму выражений, связывающих

* При $\delta_0=0$ соответствует орбитальной системе координат (см. гл. II).

угол наклона траектории θ , угол тангажа ϑ , угол рысканья ψ , угол крена γ и угол атаки α :

$$\sin \vartheta = \sin \theta \cos \alpha + \cos \theta \sin \alpha \cos \gamma; \quad (15.52)$$

$$\sin \psi = -\frac{1}{\cos \vartheta} (\sin \alpha \sin \gamma); \quad (15.53)$$

$$\cos \psi = \frac{1}{\cos \vartheta} (\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha \cos \gamma) \quad (15.54)$$

(α — угол между связанной и скоростной системами координат, см. гл. II).

Эти соотношения удобны в случае, когда управляющими функциями на маневре являются угол атаки α , угол крена γ и коэффициент k_p работы ДУ.

Угол наклона траектории θ определяется из соотношения

$$\sin \theta = \frac{V_r}{V_\Sigma}. \quad (15.55)$$

Здесь

$$V_\Sigma = \{V_r^2 + [(V \cos \theta_1)^2 + (\omega_3 r \cos \varphi)^2 + 2(V \cos \theta_1)(\omega_3 r \cos \varphi) \cos i]^2\}^{1/2}; \quad (15.56)$$

$$\sin \theta_1 = \frac{V_r}{V}, \quad (15.57)$$

$V_r = \frac{dr}{dt}$ — радиальная составляющая вектора скорости КА $\bar{V}$;

ω_3 — угловая скорость вращения Земли;

$$\sin \varphi = \sin i \sin (u + \Delta); \quad (15.58)$$

$\bar{m} = \frac{m}{m_0}$ — относительная текущая масса КА, где m_0 — начальная масса КА перед маневром,

$$\frac{d\bar{m}}{dt} = -\frac{k_p}{g_0} \frac{\tau}{I}, \quad (15.59)$$

где $I = \frac{U_e}{g_0}$ — удельный импульс ДУ.

В случае постоянства скорости истечения из сопла ДУ $U_e = \text{const}$ и неизменности тяги $F = F_0 = \text{const}$

$$\bar{m} = 1 - \frac{k_p}{g_0} \frac{\tau_0}{I} \Delta t, \quad (15.59')$$

где Δt — продолжительность работы ДУ.

На участке разгона после подъема на заданную высоту (уч. 7—8 на рис. 15.38) ориентация КА с неподвижной относительно корпуса ДУ определяется из выражений

$$\sin \vartheta = \frac{1}{\tau_0} \left[\frac{1 - \delta \xi_T}{g_0} \left(\frac{\mu - rV^2}{r^2} \right) - q \nabla_0 c_y \right] \quad (15.60)$$

$$\cos \vartheta = \frac{1}{\tau_0} \left[\frac{1 - \delta \xi_T}{g_0} \frac{dV}{dt} + q \nabla_0 c_x \right]. \quad (15.61)$$

Здесь $\delta \xi_T$ — относительный вес топлива, израсходованного к текущему моменту.

Как известно, при полете в атмосфере с гиперзвуковыми скоростями КА подвергается интенсивному кинетическому нагреву. Поэтому закон управления для АМ следует определять при совместном решении динамической и тепловой задачи. Это приводит к вариационной постановке поиска оптимального управления при заданных крайних условиях и ограничениях на фазовые координаты и управляющие функции.

Достаточно эффективным для поиска оптимального управления при АМ является численный метод решения, предложенный Л. И. Шатровским [19]. Сущность этого метода в данном случае сводится к последовательному улучшению управляющих функций $k_p(t)$, $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ при помощи итерационного процесса, причем поправки к управляющим функциям вычисляются так, что новое значение функционала меньше предыдущего: $P_\alpha[y + \delta y] < P_\alpha[y]$.

Краевые условия и ограничения по фазовым координатам учитываются добавлением к оптимизируемому функционалу штрафных слагаемых:

$$P_0 = P + \sum k_j [x_j(t_k) - X_j]^2 + \chi^2(t_k), \quad (15.62)$$

$$\text{где} \quad P = \bar{m}_\tau g_0 + k_1 \int_0^{t_m} q_k dt \quad (15.63)$$

$\bar{m}_\tau$ — основной (минимизируемый) функционал;

$\bar{m}_\tau$ — относительный расход топлива при выполнении АМ.

Здесь q_k — удельный тепловой поток к поверхности КА,

t_m — продолжительность маневра.

Значения коэффициентов k_j подбираются из условия равновеликого влияния каждого члена на минимизируемый функционал. В первом приближении можно принимать эти коэффициенты обратно пропорциональными значениям невязок.

После введения соотношений $\frac{dr}{dt} = V_r$ и $\frac{du}{dt} = \omega$ и преобразований система (I) записывается в виде (II), удобном для численного интегрирования:

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dr}{dt} = V_r; \end{array} \right. \quad (15.64)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{du}{dt} = \omega; \end{array} \right. \quad (15.65)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dV_r}{dt} = r\omega^2 - \frac{\mu}{r^2} + S; \end{array} \right. \quad (15.66)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r} (T - 2V_r\omega); \end{array} \right. \quad (15.67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{di}{dt} = \frac{W}{r\omega} \cos(u + \Delta); \end{array} \right. \quad (15.68)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Omega}{dt} = \frac{W}{r\omega} \frac{\sin(u + \Delta)}{\sin i}; \end{array} \right. \quad (15.69)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Delta}{dt} = -\frac{W}{r\omega} \sin(u + \Delta) \operatorname{ctg} i. \end{array} \right. \quad (15.70)$$

Помимо вариационной постановки задачи оптимального управления при АМ, возможна упрощенная постановка, позволяющая при большей наглядности поиска и меньших затратах машинного времени получить закон управления, весьма близкий к оптимальному по суммарным весовым затратам на выполнение АМ. Одним из таких упрощенных методов решения является метод непосредственного варьирования управляющих функций, основанный на максимизации работы боковой силы mW при выдерживании ограничений по суммарной перегрузке и температуре торможения. При этом аэродинамический поворот орбитальной плоскости разбивается на участки в соответствии с рис. 15.38.

Значения коэффициента k_p на каждом участке задаются исходя из физической сущности задачи: на участках 1—2 и 7—8 коэффициент $k_p=1$, на участке 5—6 $k_p=1$ при $H_{\text{кон}} \gg H_{\text{атм}}$ (см. рис. 15.38) и $k_p=0$ при $H_{\text{кон}} \approx H_{\text{атм}}$; на всех остальных участках $k_p=0$. На участке 4—5 значения γ подбираются из условия обеспечения равенства высоты апогея эллипса подъема заданной высоте конечной орбиты $H_{\text{кон}}$. Сход с орбиты осуществляется за счет работы бортовой ДУ при оптимальной по углу входа в атмосферу ориентации вектора тяги $\bar{F}$.

При использовании метода непосредственного варьирования управляющих функций задаются их начальные значения в точке входа в атмосферу и величины поправок, постоянные на заданном числе шагов («периоде») интегрирования уравнений движения КА. В конце каждого периода проверяется выдерживание ограничений. При выходе за пределы ограничений по перегрузке n или по температуре T_w обшивки КА происходит возврат на начало периода и изменяются поправки к управляющим функциям. Этот процесс повторяется до определения значений управляющих функций, обеспечивающих

на данном периоде $\sum_{i=1}^l n_w \Delta t = \max$ (где l — число шагов, Δt — шаг интегрирования) при выдерживании заданных ограничений.

Подбор шага изменения поправок к управляющим функциям позволяет менять быстродействие и точность расчета: увеличение приращений поправок увеличивает быстродействие за счет точности счета и наоборот. При высоте конечной орбиты, отличающейся от условной высоты атмосферы $H_{\text{атм}}$ (см. рис. 15.38) не более чем на 50—100 км, подъем КА обеспечивается за счет отражения от плотных слоев атмосферы путем соответствующего программирования $\gamma(t)$ и $\alpha(t)$ на участке 4—5 (см. рис. 15.38). При $H_{\text{кон}} \gg H_{\text{атм}}$ после выхода на границу модельной атмосферы, т. е. в точке $Q(H) = 0$, включается ДУ. Величина требуемого приращения скорости определяется выражением

$$\Delta V_{\Pi} = (V_{\text{в}}^2 + V_{\Pi}^2 - 2V_{\text{в}}V_{\Pi} \cos \theta_{\text{в}})^{1/2}; \quad (15.71)$$

здесь

$$V_{\Pi} = V_{\text{I}} \left(1 + \frac{H_{\text{кон}} - H_{\text{в}}}{2R_{\text{З}} + H_{\text{кон}} + H_{\text{в}}} \right)^{1/2} \quad (15.72)$$

— потребная скорость в перигее переходного эллипса Хомана.

В выражениях (15.71) и (15.72):

$H_{\text{в}} = H_{\text{атм}}$ — высота выхода;
 V_{I} — местная круговая скорость;
 $R_{\text{З}}$ — средний радиус Земли;
 $\theta_{\text{в}}$ — угол траектории выхода.

При этом

$$\vartheta = -\arcsin \left(\frac{V_r}{\Delta V_{\Pi}} \right); \quad \left. \begin{array}{l} \\ \psi = 0. \end{array} \right\} \quad (15.73)$$

После подъема по хомановскому полуэллипсу, в его апогее, КА разгоняется до нужной орбитальной скорости; ориентация аппарата на разгоне определяется выражениями (15.60) и (15.61).

На рис. 15.42 показан примерный вид управляющих функций $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$, а также перегрузки $n(t)$ при развороте орбитальной плоскости на 20° для КА, обладающего величиной $K_{\text{max}} = 2,9 \div 3$. Закон управления получен методом непосредственного варьирования управляющих функций. На рис. 15.43 показаны соответствующие этому случаю зависимости $H(t)$ и $V(t)$.

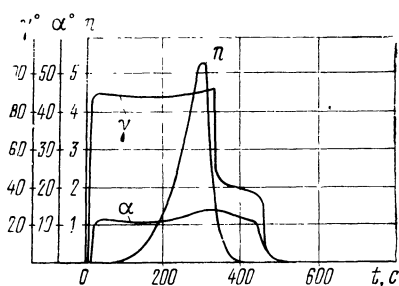


Рис. 15.42. Изменение управляющих функций при орбитальном АМ (приближенный метод)

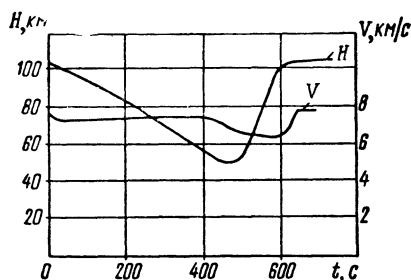


Рис. 15.43. Изменение высоты H и скорости V полета при орбитальном АМ (приближенный метод)

Расчет орбитального АМ в большинстве случаев целесообразно вести приближенным методом, так как результаты, полученные по точному и приближенному методам, практически совпадают.

Некоторое дополнительное уменьшение затрат топлива при выполнении орбитального маневра может дать сочетание газодинамического маневра (ГМ) с АМ: при сходе с орбиты для выполнения аэродинамического разворота в атмосфере первоначальный импульс дается под углом к начальной орбитальной плоскости; при выходе из атмосферы импульс для выхода на новую орбиту дается под углом к плоскости траектории подъема.

Наиболее выгодной является такая схема комбинированного поворота орбитальной плоскости, когда сход с орбиты выполняется плоским, а газодинамический доворот осуществляется после выхода из атмосферы, на участке разгона (см. рис. 15.38).

Для определения знаков угла рысканья на разгоне ψ_p и угла крена γ при выполнении аэродинамического разворота в атмосфере можно использовать выражения:

$$\left. \begin{array}{l} (\text{sign } \gamma = -1) \cap (\text{sign } \psi_p = 1) \leftarrow N \cap (i_2 > i_1) \cup S \cap (i_2 < i_1); \\ (\text{sign } \gamma = 1) \cap (\text{sign } \psi_p = -1) \leftarrow N \cap (i_2 < i_1) \cup S \cap (i_2 > i_1). \end{array} \right\} \quad (15.74)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$\cap$ — знак конъюнкции;
 $\cup$ — знак дизъюнкции;
 $\rightarrow$ — знак импликации;
 N — полет с пересечением экватора из южного полушария («на nord»);
 S — полет с пересечением экватора из северного полушария («на зюйд»);
 i_2 — наклонение конечной орбиты;
 i_1 — наклонение начальной орбиты.

При этом $\text{sign } \gamma = -1$ соответствует левому развороту («левое крыло вниз»);
 $\text{sign } \gamma = 1$ соответствует правому развороту.

Положение точки пересечения («узла») начальной и конечной трасс (проекции орбит на поверхность неподвижной Земли) определяется следующими выражениями:

$$\sin \varphi_y = \frac{\sin i_1}{\sin i_2} \frac{\sin (\Omega_2 - \Omega_1)}{(\sin \chi)}; \quad (15.75)$$

$$\lambda_y = \Omega_2 + \arcsin (\text{ctg } i_2 \text{ tg } \varphi_y), \quad (15.76)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{sign } \varphi_y = 1 &\leftarrow N \cap [(i_2 > i_1) \cap (\Omega_2 > \Omega_1) \cup (i_2 < i_1) \cap (\Omega_2 < \Omega_1)] \cup S \cap \\ &\cap [(i_2 > i_1) \cap (\Omega_2 < \Omega_1) \cup (i_2 < i_1) \cap (\Omega_2 > \Omega_1)]; \\ \text{sign } \varphi_y = -1 &\leftarrow N \cap [(i_2 > i_1) \cap (\Omega_2 < \Omega_1) \cup (i_2 < i_1) \cap (\Omega_2 > \Omega_1)] \\ &\cup S \cap [(i_2 > i_1) \cap (\Omega_2 > \Omega_1) \cup (i_2 < i_1) \cap (\Omega_2 < \Omega_1)]. \end{aligned} \right\} \quad (15.77)$$

Здесь φ_y — широта узла; λ_y — долгота узла орбит;
 Ω_2 — долгота восходящего узла конечной орбиты;
 Ω_1 — долгота восходящего узла начальной орбиты.

Сход с начальной орбиты при выполнении АМ должен осуществляться на определенном расстоянии от узла. Величина этого расстояния зависит от потребного угла разворота, т. е. плоского угла χ между начальной и конечной орбитами, и от характеристик самого КА ($K_{\max}$, p , закона управления при АМ). Для определения управления бортовой ДУ, т. е. для определения потребных значений коэффициента k_p на различных участках аэродинамического орбитального маневра, можно пользоваться следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} (k_p = 1) &\leftarrow [V_1 \geq V \geq (V_1 - \Delta V_T)] \cap (H > H_{\text{атм}}) \cup (H = H_{\text{кон}}) \cap (V < V_1) \cap \\ &(H = H_{\text{кон}}) \cup (H_{\text{атм}} < H < H_{\text{кон}}) \cap \left(\frac{dr}{dt} = 0 \right); \\ (k_p = 0) &\leftarrow [V < (V_1 - \Delta V_T)] \cap (H < H_{\text{атм}}) \cap \left(\frac{dr}{dt} \neq 0 \right) \cup \\ &\cup (H > H_{\text{атм}}) \cap \left(\frac{dr}{dt} \neq 0 \right), \end{aligned} \right\} \quad (15.78)$$

где ΔV_T — оптимальная величина изменения скорости при сходе с орбиты.

На начальной стадии исследования орбитального АМ сравнение АМ и ГМ многими авторами, например в [23] и [24], проводилось по величине потребной характеристической скорости при развороте на одинаковый угол χ . Однако такое сравнение может использоваться только в качестве первого приближения.

Вторым приближением можно считать сравнение по относительному расходу массы на управление. (т. е. с учетом потребных масс: ДУ, системы управления и топлива). В более общем случае необходимо учитывать конструктивные особенности и веса разнотипных КА — рассчитанного на АМ и способного только на ГМ. Сравнение при этом следует проводить по величинам начальных весов на орбите, потребным для поворота орбитальной плоскости на одинаковые углы χ . Такая задача уже относится к области проектирования КА.

Однако необходимо иметь в виду, что окончательный ответ можно получить только в результате сравнительной оценки КА с АМ и КА с ГМ по стоимости и эффективности решения ими конкретных задач.

15.2.2. Боковой аэродинамический маневр при возвращении

При выполнении предпосадочного маневра КА сходит с начальной орбиты за счет импульса тормозной ДУ и, войдя в плотные слои атмосферы, совершает пространственный полет с использованием положительного или отрицательного (при $\gamma = 180^\circ$) аэродинамического качества. Для искривления траектории КА в горизонтальной плоскости можно использовать боковую силу при полете со скольжением. Однако при этом увеличивается c_x и торможение происходит более интенсивно, чем при полете без скольжения.

Наиболее выгоден полет с креном, когда боковое отклонение определяется величиной проекции подъемной силы на горизонтальную плоскость. В этом случае существенно снижается интегральный тепловой поток вследствие более крутого снижения из-за уменьшения вертикальной компоненты подъемной силы.

Достижимые в результате бокового предпосадочного АМ точки земной поверхности находятся в области, ограниченной кривыми 1, 2, 3 и 4 на рис. 15.44. Кривая 1 определяется величиной наибольшего значения c_y (ограничение по $\alpha_{\text{крит}}$). Кривая 2 определяется допустимой величиной подведенного к аппарату тепла Q_{max} ; кривая 3 — ограничение по равновесной температуре поверхности КА; кривая 4 определяется величиной максимально допустимого угла крена $\gamma_{\text{пред}}$.

Таким образом, величина $(D_6)_{\text{max}}$ определяется точкой пересечения ограничительных кривых: по Q_{max} и по $(T_w)_{\text{max}}$ (или по $\gamma_{\text{пред}}$). Площадь, заключенную внутри ограничительных кривых, принято называть «полем маневренных возможностей» КА или просто «полем маневра» (ПМ). Размеры ПМ зависят от величины K_{max} на гиперзвуковых скоростях и от начальной (предпосадочной) нагрузки $p_{\text{пос}}$ на несущую поверхность

КА. Увеличение K_{max} расширяет ПМ, рост $p_{\text{пос}}$ сужает. Определяющими для размеров ПМ являются располагаемый вес теплозащиты КА и энергоемкость холодильных устройств, обеспечивающих заданные температурные режимы внутри рабочих объемов КА.

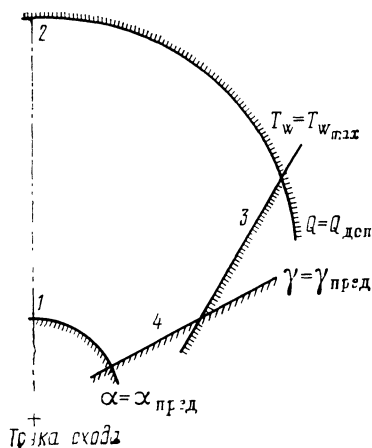


Рис. 15.44. Область, в границах которой возможна посадка КА при выполнении им маневра на воз- вращении

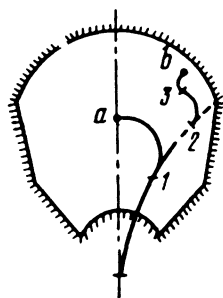


Рис. 15.45. Траектории посадки при управлении по крену:

a, b —точки посадки;
1, 2, 3—точки пере-
мены знака γ

При оптимальных законах управления по углу атаки и крену величина $(D_6)_{\text{max}}$ для КА, имеющего на гиперзвуковых скоростях при континуумном обтекании $K_{\text{max}} = 2,7 \div 3$, может иметь порядок до 4000—5000 км. Попадание в любую точку ПМ может быть осуществлено за счет управления только по крену γ (рис. 15.45).

15.2.3. Корректирующий аэродинамический маневр

Аэродинамический маневр с помощью малых аэродинамических сил можно производить для низколетящих ИСЗ (с высотой полета до 300 км) или для ИСЗ, перигей которого лежит на высоте ниже 300 км, путем целенаправленного изменения аэродинамических сил, действующих на ИСЗ на орбите.

В случае 2-ступенчатого аэродинамического управления (т. е. когда на орбите дважды изменяются аэродинамические силы) зависимости для приближенной оценки изменения параметров орбит с начальным эксцентриситетом $e \leq 0,01$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta e &= \frac{1}{p} (\bar{c}_2 - \bar{c}_1) \frac{\bar{v} + e}{2} \left[(\bar{E}_2 - \bar{E}_1) + \frac{2}{\bar{v} + e} (\sin \bar{E}_2 - \sin \bar{E}_1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\sin 2\bar{E}_2 - \sin 2\bar{E}_1) \right] - \frac{\bar{c}_2}{p} \pi (\bar{v} + e); \\ \Delta p &= (\bar{c}_2 - \bar{c}_1) [(\bar{E}_2 - \bar{E}_1) + \bar{v} (\sin \bar{E}_2 - \sin \bar{E}_1) - c_2 2\pi]; \\ \Delta \omega &= \frac{(\bar{c}_1 - \bar{c}_2) \alpha}{p^2 e} \left[(\cos \bar{E}_2 - \cos \bar{E}_1) + \frac{e + \bar{v}}{4} (\cos 2\bar{E}_2 - \cos 2\bar{E}_1) \right]; \end{aligned}$$

$$\Delta\Omega = \frac{d_1 - d_2}{\sin i} \left\{ (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) \sin \bar{\omega} \frac{\bar{v} - e}{2} - [\cos(\bar{E}_2 + \bar{\omega}) - \cos(\bar{E}_1 + \bar{\omega})] - \right. \\ \left. - [\cos(2\bar{E}_2 + \bar{\omega}) - \cos(2\bar{E}_1 + \bar{\omega})] \frac{\bar{v} + e}{4} \right\} + \frac{2\pi d_2}{\sin i} \sin \bar{\omega} \frac{\bar{v} - e}{2};$$

$$\Delta i = \frac{a}{p} (d_1 - d_2) \left\{ \cos \omega (\bar{E}_2 - \bar{E}_1) \frac{\bar{v} - e}{2} + [\sin(\bar{E}_2 + \bar{\omega}) - \sin(\bar{E}_1 + \bar{\omega})] + \right. \\ \left. + [\sin(2\bar{E}_2 + \bar{\omega}) - \sin(2\bar{E}_1 + \bar{\omega})] \frac{\bar{v} + e}{2} \right\} + \frac{2\pi a d_2}{p} \cos \bar{\omega} \frac{\bar{v} - e}{2}.$$

Здесь

$$\bar{c} = -\bar{b} p^2 Q_n \exp(-\bar{v}),$$

$$\bar{b} = 2\bar{S} = \frac{c_x F_m}{m};$$

$$\bar{v} = aeK;$$

$$d = b Q_n \exp(-\bar{v}) 2Ka,$$

K — аэродинамическое качество объекта.

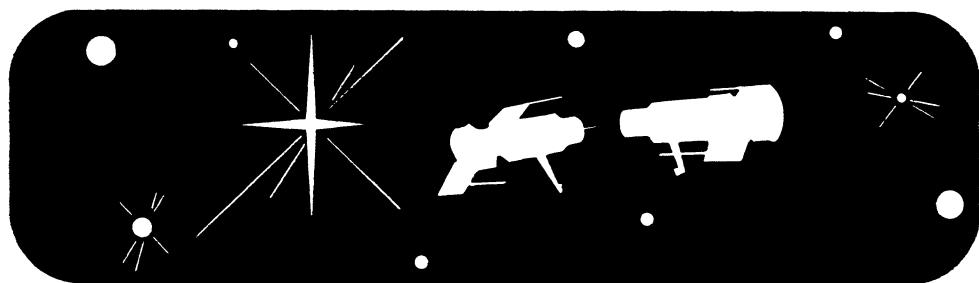
Индексы «1» и «2» соответствуют первой и второй областям ступенчатого изменения аэродинамических характеристик объекта.

Для более точного расчета изменения параметров орбит с помощью аэродинамического управления необходимо использовать численные методы решения уравнений движения на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. XV

1. Беллман Р. Динамическое программирование. М., ИЛ, 1960.
2. Береснев Н. П., Легостаев В. П. Система управления автоматической станцией «Луна-9» — «Космические исследования», т. VI, вып. 4, 1968.
3. Дашков А. А., Ивашкин В. В. Об одном замечательном свойстве пучка гиперболических траекторий. — «Космические исследования», т. III, вып. 5, 1965.
4. Дашков А. А., Ивашкин В. В. Автономный метод определения направления вектора скорости путем ориентации на центр планеты. — «Космические исследования», т. VI, вып. 1, 1968.
5. Ивашкин В. В. Одноимпульсный переход с гиперболической на эллиптическую орбиту при радиальном импульсе. — «Космические исследования», т. IV, вып. 3, 1966.
6. Ивашкин В. В. Оптимальные траектории импульсного перехода между орбитами при наличии ограничений по радиусу. — «Космические исследования», т. IV, вып. 4, 1966.
7. Ивашкин В. В. Классификация и анализ оптимальных импульсных переходов при ограничениях на расстояние от притягивающего центра. — «Космические исследования», т. IV, вып. 6, 1966.
8. Ивашкин В. В. Оптимальные траектории импульсных переходов между компланарными орбитами при ограничениях на расстояние от центра тяготения. Канд. диссертация, М., 1966.
9. Ивашкин В. В. Оптимальные импульсные переходы внутри кольца на орбиты, не пересекающие его границы. — «Космические исследования», т. VI, вып. 4, 1968.
10. Ивашкин В. В. Некоторые свойства оптимальной коррекции траектории космического полета для обеспечения последующего маневра. — «Космические исследования», т. VII, вып. 5, 1970.
11. Ивашкин В. В. Совместный анализ задач коррекции и торможения для одного класса траекторий посадки на планету. — «Космические исследования», т. VI, вып. 5, 1968.
12. Ивашкин В. В. Оптимальные импульсные переходы в кольце между орбитами, пересекающими его границы. — «Космические исследования», т. VII, вып. 5, 1969.
13. Кузмяк Г. Е. Исследование оптимальных многоимпульсных перелетов между близкими квазикруговыми некомпланарными орбитами. — «Космические исследования», ч. I, т. 5, вып. 4, 1967; ч. II, т. 5, вып. 6, 1967.
14. Лахтин Л. М. Свободное движение в поле земного сфероид. М., Физматгиз, 1963.
15. Лоуден Д. Ф. Межпланетные траектории ракет. — В сб.: «Космические траектории». М., ИЛ, 1963.

16. Пономарев В. М. Теория управления движением космических аппаратов. М., «Наука», 1965.
 17. Понтрягин Л. С. и др. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.
 18. Чарный В. И. Об оптимальных траекториях со многими импульсами. — В сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16. Изд-во АН СССР, 1963.
 19. Шатровский Л. И. Об одном численном методе решения задач оптимального управления. — «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1962, № 3.
 20. Штернфельд А. А. Искусственные спутники. М., Гостехтеоретиздат, 1958.
 21. Hohmann W. Die Erreichbarkeit der Himmelskörper, München, 1925.
 22. Horner J. M. Optimum two-impulse transfer between arbitrary coplanar terminals, ARS Journal, vol. 32, No. 1, 1962.
 23. London H. Change of satellite orbit plane by aerodynamic maneuvering, JAS paper 29, No. 3, 1962.
 24. Marchal C. Optimisation de la phase extra-atmosphérique de la montée en orbite, 1-e part. Etude dans le cas où l'orbite finale est elliptique et d'orientation indifférente, Rech aérospace, 1967, No. 116.
 25. Marec J. P. Transferts infinitésimaux impulsions économiques entre orbites quasi-circulaires non coplanaires. Communication présentée au XVII-e Congrès International d'Astronautique, Madrid, 9—15 octobre, 1966.
 26. Munick H., McGill R., Taylor G. E., Minimisation of characteristic velocity for two-impulse orbital transfer, ARS Journal, vol. 30, No. 7, 1960.
 27. Rider L., Characteristic velocity requirements for impulsive thrust transfers between non coplanar circular orbits, ARS Journal, vol. 31, No. 3, 1961.
 28. Ting L. Optimum orbital transfer by impulses, ARS Journal, vol. 30, No. 11, 1960.
 29. Ting L., Optimum orbital transfer by several impulses, Astronaut. acta, vol. 6, No. 5, 1960.
 30. Wallner E. P., Camiel J. J. Plane change split in circular orbits, J. Spacecraft and Rockets, No. 4, 1966.
-



ГЛАВА XVI

СБЛИЖЕНИЕ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ОРБИТЕ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- A — азимут запуска.
- i — наклонение орбиты.
- N — число звездных суток.
- $\vec{R}$ — радиус-вектор из центра притяжения.
- T — период обращения.
- $V_{кр}$ — круговая скорость.
- $\vec{v}$ — относительная скорость.
- $\vec{V}$ — скорость спутника.
- X, Y, Z — координаты вектора в инерциальной системе координат (ось X проходит через Гринвич, ось Z направлена в полюс планеты).
- α — угол линии визирования с осью $\vec{x}$ орбитальной системы координат.
- Δl — отклонение между кораблями по дуге орбиты.
- $\Delta t_{ст}$ — отклонение момента старта.
- $\Delta \dot{x}, \Delta \dot{y}, \Delta \dot{z}$ — компоненты $\Delta \vec{V}$.
- ΔV — величина корректирующего импульса, или приращения скорости.
- λ — географическая долгота.
- φ — географическая широта.
- $\vec{q}$ — вектор относительного положения в орбитальной системе координат.
- φ_a — широта в момент выведения на орбиту.
- χ — угол между плоскостями орбит.
- ω — угловая скорость обращения на орбите спутника.
- ω_3 — угловая скорость вращения Земли.
- Ω — долгота восходящего узла.
- $\dot{\Omega}$ — угловая скорость ухода линии узлов.

Сборка на орбите спутника планеты может производиться для следующих целей.

1. Накопление на орбите полезного груза, необходимого для старта космического корабля.

2. Снабжение космического корабля или обитаемой космической станции компонентами для поддержания жизнедеятельности и необходимым оборудованием.

3. Смена экипажа космической станции или доставка экипажа или полезного груза в космический корабль, выведенный на орбиту ранее или являющийся кораблем-маткой, с которого был проведен спуск на планету.

4. Спасение экипажа космического корабля в случае возникновения неустранимой в полете неисправности, угрожающей жизни экипажа или создавшей невозможность надежного возвращения его на Землю.

5. Проверка, профилактическое обслуживание, наладка аппаратуры, ремонт и другие операции с автоматическими спутниками различного назначения, требующие непосредственной работы человека в космосе.

Процесс сборки можно условно разделить на несколько этапов.

1. Выведение на монтажную орбиту. Оно может включать как собственно выведение, так и проведение маневров или коррекций, обеспечивающих наиболее благоприятные условия для сближения.

2. Сближение — управляемый процесс уменьшения рассогласований кинематических параметров космических аппаратов. Оно может производиться как по командам с Земли, так и автономно с использованием только бортовых средств.

3. Причаливание — заключительные маневры, производимые в непосредственной близости между космическими аппаратами. Характеризуется более жесткими, чем при сближении, требованиями к взаимной ориентации объектов.

4. Стыковка — механическое соединение сближающихся космических аппаратов. В некоторых случаях может отсутствовать или заменяться выходом космонавтов в открытый космос. Тогда космический корабль, производящий сближение, вблизи цели переводится в режим «зависание» — выдерживание заданного диапазона расстояний между объектами.

16.1. МОНТАЖНЫЕ ОРБИТЫ

Орбиты, на которые выведены космические аппараты, специально предназначенные для сближения, должны обеспечивать:

1. Достаточное время существования для проведения сближения и необходимых операций в совместном полете.

2. Минимум суммарных энергетических затрат на проведение этапов сборки.

3. Удовлетворительные условия для наблюдения, измерения параметров орбиты и связи с пунктами командно-измерительного комплекса.

4. Допустимые районы приземления первых ступеней ракеты-носителя, если выведение на монтажную орбиту производится с Земли.

5. Удовлетворение других, специфичных для данного космического аппарата требований, например: минимум энергетических затрат на выполнение цели полета, обеспечение возможности выхода из аварийных ситуаций, удовлетворение условий спуска на штатные полигоны посадки, прохождения трассы полета над интересующими районами и т. д.

Монтажной орбитой называют орбиту корабля, выполняющего пассивную роль, т. е. не производящего маневров с целью сближения. Однако такое определение неточно, так как в процессе сближения корабли могут меняться ролями. Кроме того, выведенный на орбиту космический корабль может совершать маневры с целью занять наиболее благоприятное положение для встречи с другими кораблями, которые предполагается вывести. Поэтому для определенности монтажной орбитой будем называть орбиту, интегральные параметры которой необходимо обеспечить на момент механического соединения кораблей.

Ниже будет рассмотрено построение монтажной орбиты при старте с планеты; однако это не исключает возможность выхода на монтажную орбиту с другой орбиты. Тогда под стартовой площадкой следует понимать условную материальную точку, орбита которой совпадает с орбитой космического корабля до включения двигателей.

Сборка на орбите может производиться как при одновременном старте нескольких носителей с близко расположенных стартовых площадок, так и при последовательных стартах с одной или различных стартовых площадок.

В первом случае время между стартами минимально. Для заданных параметров монтажной орбиты оно определяется последовательностью сборки, расположением стартовых площадок и характеристиками траекторий выведения используемых ракет-носителей. При старте с планеты оно не превышает части периода монтажной орбиты.

Во втором случае интервал между стартами, как правило, составляет несколько периодов монтажной орбиты.

Исходя из требования минимума затрат топлива на сближение необходимо согласовать параметры орбит обоих космических аппаратов с учетом ограничений, налагаемых другими требованиями, и с учетом используемых схемы и метода сближения, а также характеристик носителя и космических кораблей.

Рассмотрим возможности совмещения плоскостей двух орбит. Необходимость такого согласования видна из графиков, показанных на рис. 16.1.

По оси абсцисс отложено время t в единицах периода T_n собственного вращения планеты, прошедшее с момента выведения на орбиту первого КА (или момента его прохождения через область выведения второго) до момента выведения на орбиту второго с той же стартовой площадки. По оси ординат отложено i_2 — оптимальное наклонение орбиты второго КК. Наклонение i_1 орбиты первого КК и величина импульса скорости

$$\Delta \bar{V} = \frac{\Delta V}{V_{кр}},$$

потребного для совмещения плоскостей орбит, являются параметрами графиков. Эти зависимости приведены для Луны при выведении на экваторе без учета прецессии орбиты.

При определении оптимального наклонения принималось, что импульс, совмещающий плоскости орбит, минимален, если центральный угол между точкой окончания выведения второго КК на орбиту и точкой исполнения корректирующего импульса ΔV , исполняемого в момент прохождения через плоскость первой орбиты, равен 90° , что справедливо для равных орбит. Аналогичные зависимости могут быть получены по формулам сферической тригонометрии для любых условий.

Из графиков видно, что при старте с экватора минимальные затраты топлива на совмещение плоскостей орбит будут для экваториальных орбит и для орбит с любым наклонением при старте через время, кратное примерно половине периода планеты (с учетом прецессии плоскости орбиты).

Из простых геометрических построений можно увидеть, что существуют дополнительно особые случаи, когда возможно совмещение плоскостей орбит производить без энергетических затрат, изменяя азимут стрельбы второго КК. Так, при наклонении 90°

и старте с полюса планеты это возможно на любом витке. При широте выведения φ второго КК, меньшей наклонения i_1 орбиты первого КК, для этого необходимо, чтобы стартовая позиция была расположена вблизи точки пересечения трасс восходящего и нисходящего витков орбиты первого КК (рис. 16.2).

В последнем случае, пренебрегая длительностью и протяженностью участка выведения, можно оценить время между моментами стартов обоих кораблей с одной стартовой площадки (моментами прохождения над стартовой площадкой на восходящей и нисходящей части витка) по формуле

$$\Delta t = \frac{2}{\omega_{\Pi} + \Omega} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\sin^2 i - \sin^2 \varphi}}{\cos i \sin \varphi}.$$

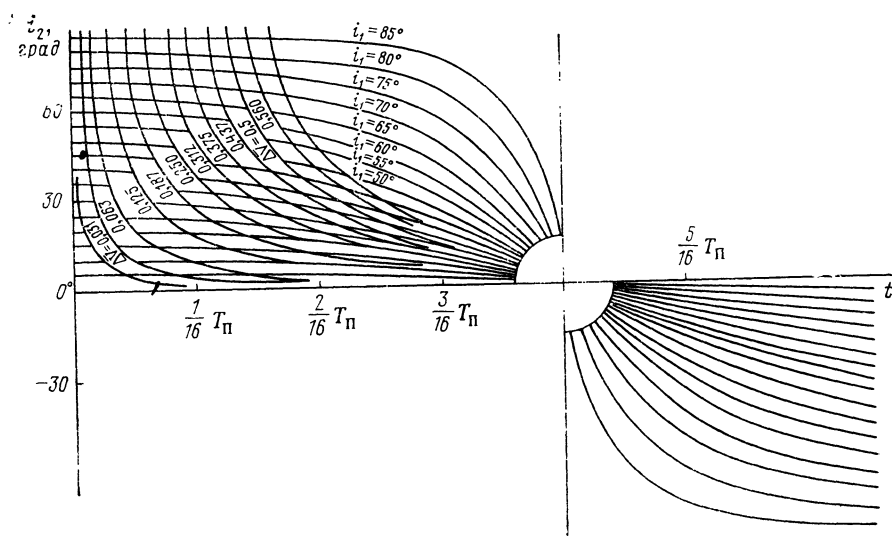


Рис. 16.1. Зависимость оптимального наклонения i_2 выводимого на орбиту корабля и величины импульса $\Delta \bar{V} = \frac{\Delta V}{V_{кр}}$, совмещающего плоскости орбит, от времени пребывания на Луне t при различных наклонениях i_1 монтажной орбиты

Потребный период монтажной орбиты

$$T = \frac{\Delta t}{n + \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{\sin \varphi}{\sin i}}.$$

При этом требуется изменение азимута старта на величину

$$\Delta A = \arcsin \frac{\sin i}{\cos b} \sin (\omega + \dot{\Omega}) \Delta t = \arccos \frac{\cos (\omega + \dot{\Omega}) \Delta t + \sin^2 b}{\cos^2 b},$$

где
$$b = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\sin \varphi}{\sin i};$$

n — число витков.

На рис. 16.3 приведено указанное выше время для Луны в зависимости от широты стартовой площадки φ и наклонения орбиты i . На рис. 16.4 приведено потребное изменение азимута ΔA , на рис. 16.5 — производная минимального импульса, совмещающего плоскости орбит, по виткам, пропущенным после расчетного времени старта.

Нелинейность затрат на совмещение плоскостей орбит при уменьшении разницы между значениями широты и наклонения видна из рис. 16.6, где показаны зоны допустимого времени t пребывания на Луне в случае взлета на орбиту, с которой была произведена посадка, при фиксированных значениях импульса ΔV , совмещающего плоскости орбит.

В случае, когда по условиям старта не допускается изменение азимута запуска, можно выбрать кратную монтажную орбиту — орбиту с периодом, кратным периоду вращения плоскости орбиты относительно планеты. Условия кратности:

$$T_{\Pi \text{ л}} N = T_{\text{сн}} n,$$

или

$$\frac{N}{n} = \frac{\omega_{пл} + \dot{\Omega}}{\omega_{сп}}.$$

Здесь $T_{пл}$ — период вращения плоскости орбиты относительно планеты;
 $T_{сп}$ — период монтажной орбиты;

$$\omega_{сп} = \frac{2\pi}{T_{сп}}.$$

В случае старта с Земли условие кратности имеет вид

$$\frac{n}{N} = \left[\frac{\omega_3}{V\mu} (h_{сп} + R_3)^{3/2} + \frac{\epsilon}{\mu} \frac{\cos i}{h_{сп} + R_3} \right]^{-1}.$$

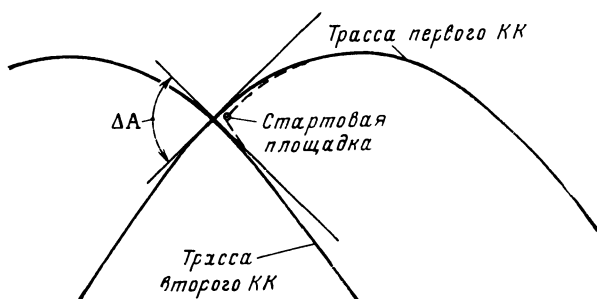


Рис. 16.2. Схема изменения азимута ΔA

Задавая целочисленные значения N — кратности прохождения (число звездных суток), n — числа витков в периоде кратности, определяем период орбиты корабля, с кратностью N проходящего над стартом, а следовательно, и среднюю высоту. На рис. 16.7 приведены высоты кратных орбит для Земли, без учета атмосферы. При учете влияния атмосферы на параметры кратной орбиты необходимо, чтобы средний период орбиты на интервале периода кратности равнялся определенному выше.

Соблюдение условий кратности обеспечивает равенство нулю отклонений между кораблями по дуге орбиты, нормали к плоскости орбиты и боковой относительной скорости в момент выведения второго корабля. Рассмотрим отклонения от этих условий.

Если задать положение плоскости орбиты в инерциальной системе координат X, Y, Z вектором, антипараллельным вектору кинетического момента

$$\vec{c} = \frac{\vec{V} \times \vec{R}}{|\vec{V} \times \vec{R}|},$$

проекции которого c_X, c_Y, c_Z через наклонение i и долготу восходящего узла Ω выражаются

$$c_X = \sin i;$$

$$c_Y = \sqrt{c_X^2 + c_Z^2} \sin \left(\Omega + \frac{\pi}{2} \right);$$

$$c_Z = \sqrt{c_X^2 + c_Y^2} \cos \left(\Omega + \frac{\pi}{2} \right),$$

то направление, образованное пересечением плоскостей орбит (направление на узел), будет иметь направляющие косинусы

$$b_X = \frac{1}{\vartheta} (c_{Y1}c_{Z2} - c_{Z1}c_{Y2});$$

$$b_Y = \frac{1}{\vartheta} (c_{Z1}c_{X2} - c_{X1}c_{Z2});$$

$$b_Z = \frac{1}{\vartheta} (c_{X1}c_{Y2} - c_{Y1}c_{X2});$$

$$\vartheta = \sqrt{(c_{Y1}c_{Z2} - c_{Z1}c_{Y2})^2 + (c_{Z1}c_{X2} - c_{X1}c_{Z2})^2 + (c_{X1}c_{Y2} - c_{Y1}c_{X2})^2}.$$

Второй индекс означает номер орбиты. Географические координаты узла орбит:

$$\varphi_y = \arcsin b_z;$$

$$\lambda_y = \operatorname{Arcsin} \frac{b_y}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}};$$

$$\operatorname{sign} \cos \lambda_y = \operatorname{sign} b_x.$$

Время полета между экватором и узлом

$$t_y \cong \frac{1}{\omega_{cp}} \arcsin \frac{\sin \varphi_y}{\sin i},$$

где ω_{cp} — среднее значение ω .

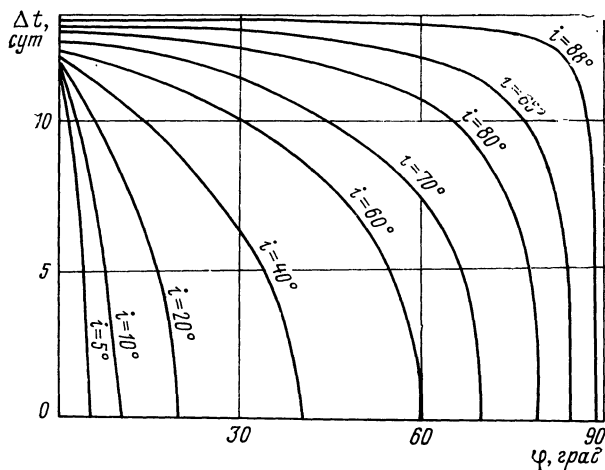


Рис 16.3 Время Δt до второго прохождения над стартовой позицией в зависимости от широты φ и наклона i

Угол между плоскостями орбит

$$\chi = \arccos \frac{\bar{c}_1 \bar{c}_2}{|\bar{c}_1 \bar{c}_2|}.$$

Величина импульса, потребного для совмещения плоскостей орбит при стабилизации в инерциальном пространстве,

$$\Delta V = 2V \sin \frac{\chi}{2}.$$

Если рассогласование плоскостей орбит равных наклонов произошло за счет отклонения Δt_c момента старта от расчетного (обеспечивающего компланарность плоскостей), то угол χ можно определить из выражения

$$\sin \chi = \sin i \sqrt{(1 - \cos \Delta \Omega)^2 \cos^2 i + \sin^2 \Delta \Omega};$$

$$\Delta \Omega = (\omega_n + \dot{\Omega}) \Delta t_c.$$

Широта узла

$$\varphi_y = \arctg \left(\cos \frac{\Delta \Omega}{2} \operatorname{tg} i \right).$$

Боковое отклонение второго корабля от орбиты первого в момент выведения, определяемое по дуге большого круга, нормального к плоскости орбиты второго, можно найти из выражения

$$z = R \arcsin (\sin \Delta l_y \sin \chi).$$

Если точка окончания выведения находится до аппекса орбиты, то

$$\Delta l_y = \pi - \arcsin \frac{\sin \varphi_y}{\sin i} - \arcsin \frac{\sin \varphi_B}{\sin i}$$

и

$$\Delta l_y = \arcsin \frac{\sin \varphi_y}{\sin i} - \arcsin \frac{\sin \varphi_B}{\sin i},$$

если точка окончания выведения находится после аппекса.

Здесь φ_B — широта выведения.

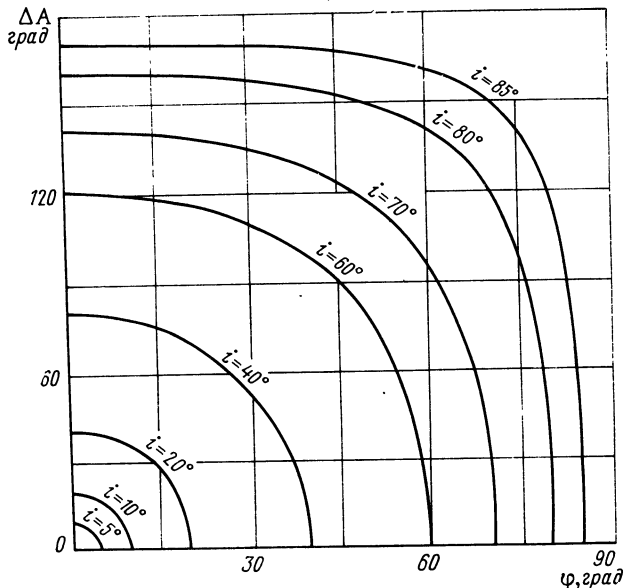


Рис. 16.4. Изменение азимута ΔA , потребное для совмещения плоскостей посадочной и взлетной орбит с наклонением i

Боковая скорость при малых $\Delta\Omega$ может быть оценена по формуле

$$\dot{z} \approx -\frac{z}{\omega_{cp}} \operatorname{ctg} \Delta l_y.$$

В случае $\varphi_B \approx i$ и малых $\Delta\Omega$ достаточно точны формулы

$$\chi \approx \Delta\Omega \sin i; \quad z \approx R\chi \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \varphi_B}{\sin i}\right)^2}; \quad \dot{z} \approx V\chi.$$

Из них видно, что для схемы встречи с последовательными стартами и встречей сразу после выведения возможно эффективно корректировать отклонения по дуге орбиты Δl изменением времени старта второго корабля. Изменив время старта, обеспечивавшее ранее минимум угла между плоскостями орбит, на величину $\Delta t_c = \frac{\Delta l}{V}$, получим

$$\Delta\Omega = (\omega_n + \dot{\Omega})\Delta t_c.$$

Это приведет к отклонениям по боку в момент выведения, существенно меньшим отклонения Δl .

Приведенные выше оценочные формулы можно использовать как для оценки характеристик монтажных орбит, так и для определения параметров нулевого приближения при решении краевой задачи по уточнению параметров монтажной орбиты.

При решении такой краевой задачи удобно рассматривать прохождение одного космического аппарата (в случае последовательного старта аппарата, движущегося по монтажной орбите предшествующего приближения) через картинную плоскость (плоскость, проходящую через другой корабль перпендикулярно вектору скорости относительно планеты), построенную в расчетный момент выведения на орбиту другого космического корабля. Варьируя параметры прицеливания, параметры программы выведения и разность времен старта кораблей, удовлетворяют ограничениям, требованиям

к монтажной орбите и принятым условиям в момент прохождения. Последние удобно записывать в орбитальной относительной системе координат (см. разд. 16.2), связанной с центром одного из объектов.

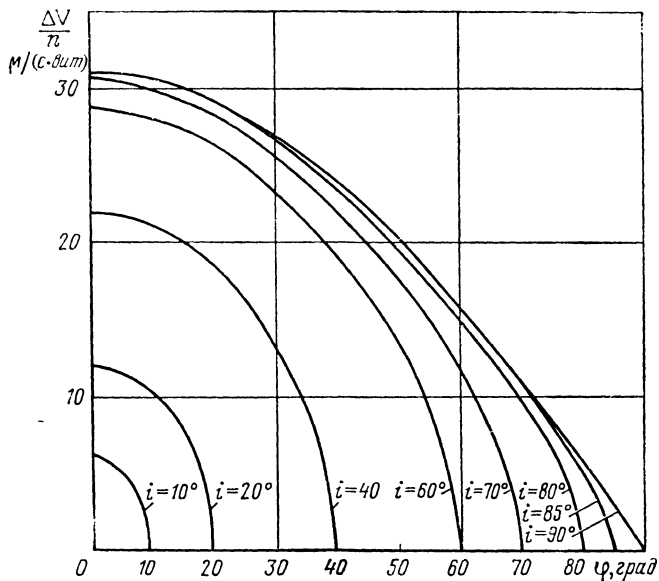


Рис. 16.5. Производная импульса, совмещающего плоскости орбит, по виткам, пропущенным после прохождения трассы через стартовую площадку

Так, например, условие встречи без промежуточных маневров через заданное время τ после выведения второго космического аппарата можно записать в виде

$$\bar{v} = A_\tau \bar{r},$$

где $\bar{r}$, $\bar{v}$ — относительные координаты и скорости космических аппаратов в орбитальной системе координат (см. разд. 16.2);

A_τ — матрица коэффициентов (см. разд. 16.3).

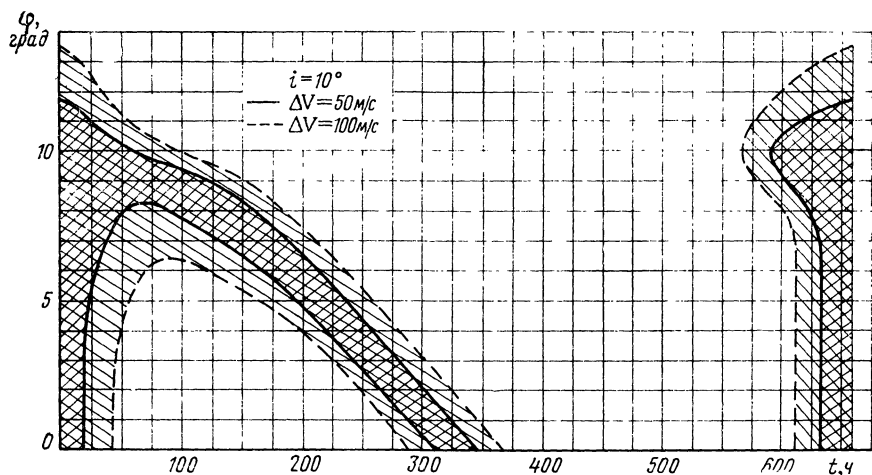


Рис. 16.6. Зоны допустимого времени t пребывания на Луне при фиксированных значениях импульса, совмещающего плоскости орбит

16.2. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Рассматриваются основные зависимости, определяющие относительное движение близколетающих космических аппаратов. Последние принимаются за материальные точки.

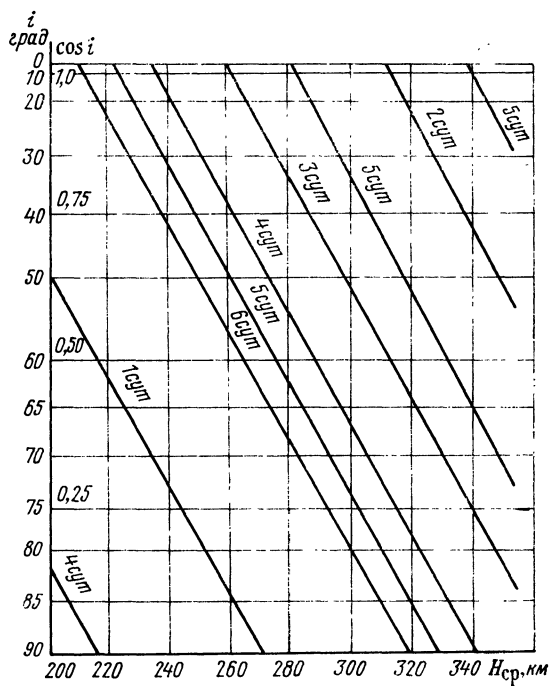


Рис. 16.7. Номограмма высот кратных орбит

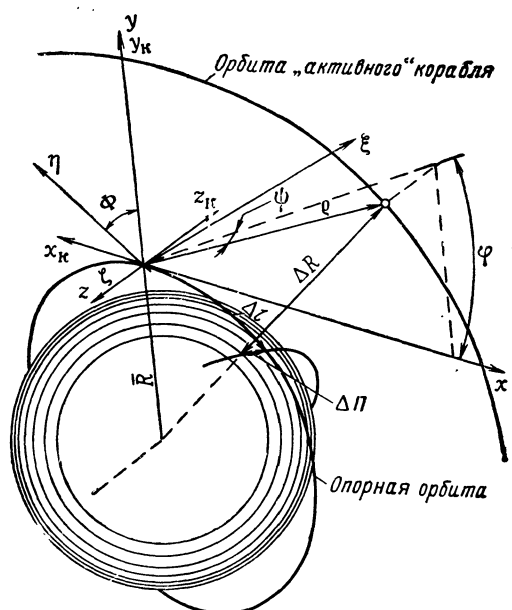


Рис. 16.8. Орбитальная система координат

в одной из которых помещено начало относительной системы координат. Орбиту последней будем называть опорной.

Принятый вид, ориентация осей координат и допускаемая точность уравнений определяют сложность дифференциальных уравнений движения одного из объектов относительно другого. Наиболее простой вид дифференциальные уравнения относительного движения имеют в декартовой системе координат.

В практике расчетов сближения чаще всего применяются орбитальная и инерциальная относительные системы координат. В этих системах первые две оси лежат в плоскости орбиты, третья ось — нормально плоскости орбиты и дополняет систему до правой.

В орбитальной системе координат (ОСК) (рис. 16. 8) ось y направлена по радиусу-вектору $\bar{R}$, проходящему из центра притяжения через начало относительной системы координат.

Ось x ей перпендикулярна и бывает направлена в сторону вектора переносной скорости (полетная система координат) или против него (кинетическая система координат). Направляющие орты орбитальной системы координат записываются через вектор $\bar{R}$ и вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ начала координат относительно центра притяжения:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm \frac{\bar{\omega} \times \bar{R}}{|\bar{\omega} \times \bar{R}|} \\ \frac{\bar{R}}{|\bar{R}|} \\ \mp \frac{\bar{\omega}}{|\bar{\omega}|} \end{pmatrix}.$$

Верхний знак перед $\bar{\omega}$ соответствует полетной системе, а нижний знак — кинетической.

Инерциальная относительная система координат (ξ, η, ζ) совпадает по направлению осей с орбитальной в принятый начальный момент времени. Ориентация осей относительно инерциального пространства неизменна и характеризуется углом Φ между одной из осей, лежащих в плоскости опорной орбиты, и текущим радиусом-вектором $\bar{R}_0$ начала координат.

Если пренебречь несферичностью поля тяготения планеты, взаимным притяжением объектов и другими возмущающими факторами высоких порядков малости, то дифференциальные уравнения относительного движения запишутся:

— в кинетической орбитальной системе координат

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega \frac{dy}{dt} + \left[\frac{\mu}{R^3} - \omega^2 \right] x - \frac{d\omega}{dt} y &= P_x; \\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega \frac{dx}{dt} + \left[\frac{\mu}{R^3} - \omega^2 \right] y + \frac{d\omega}{dt} x &= P_y - \frac{\mu R}{R_0^3} + \frac{\mu}{R_0^2}; \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{R^3} &= P_z, \end{aligned}$$

где R_0 — расстояние до начала координат из центра притяжения;

R — расстояние от центра притяжения до движущейся точки;

— в инерциальной относительной системе координат в случае, когда вектор $\bar{R}_0$ проходит через перигей опорной орбиты при $t=0$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} - \left(\frac{\mu R_0}{R^3} - \frac{\mu}{R_0^2} \right) \sin \Phi + \frac{\mu \xi}{R^3} &= P_\xi; \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + \left(\frac{\mu R_0}{R^3} - \frac{\mu}{R_0^2} \right) \cos \Phi + \frac{\mu \eta}{R^3} &= P_\eta; \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{\mu \zeta}{R^3} &= P_\zeta, \end{aligned}$$

где ξ, η, ζ — координаты движущейся точки, совпадающие в момент прохождения началом координат перигея с координатами орбитальной системы координат (x, y, z) , соответственно;

P_ξ, P_η, P_ζ — компоненты возмущающего (управляющего) ускорения.

В этих уравнениях величина $\frac{\mu R_0}{R^3} - \frac{\mu}{R_0^2}$ есть разность ускорения силы тяжести в точках расположения объектов; члены $\frac{\mu\xi}{R^3}$, $\frac{\mu\eta}{R^3}$, $\frac{\mu\zeta}{R^3}$ характеризуют главным образом разницу в направлении ускорения силы тяжести.

Для отклонений между объектами, значительно меньших расстояния до общего центра притяжения, уравнения линейризуются. Для орбит с малым эксцентриситетом ($e < 0,01$) величина

$$\sqrt{\frac{\mu}{R_0^3}} \approx \omega \approx \text{const.}$$

Тогда приведенные выше уравнения принимают еще более простой вид и допускают решение в замкнутом виде в элементарных функциях. Так, линейризованные дифференциальные уравнения относительного движения в полетной орбитальной системе координат

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + 2\omega \frac{dy}{dt} &= P_x; \\ \frac{d^2y}{dt^2} - 2\omega \frac{dx}{dt} - 3\omega^2 y &= P_y; \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \omega^2 z &= P_z \end{aligned}$$

имеют для случая постоянной тяги реактивных двигателей следующие интегралы, записанные в виде, разрешенном относительно начальных отклонений.

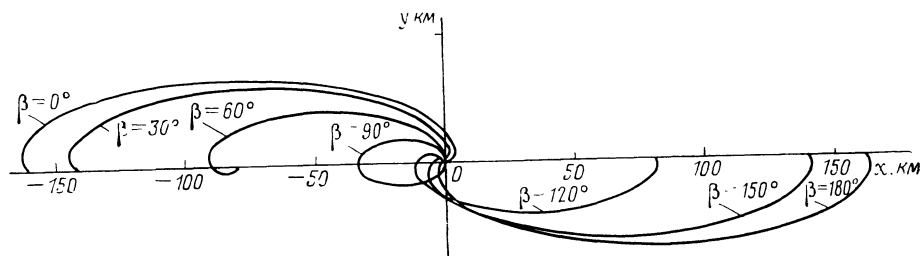


Рис. 16.9. Траектории относительного движения

При неизменной ориентации возмущающего ускорения с осями орбитальной системы координат

$$\left| \begin{array}{c} \bar{r} \\ \bar{v} \end{array} \right| = M \left| \begin{array}{c} \bar{r}_0 \\ \bar{v}_0 \end{array} \right| + P_0 |\bar{P}|.$$

При неизменной ориентации возмущающего ускорения с осями инерциальной относительной системы координат

$$\left| \begin{array}{c} \bar{r} \\ \bar{v} \end{array} \right| = M \left| \begin{array}{c} \bar{r}_0 \\ \bar{v}_0 \end{array} \right| + P_n |\bar{P}|.$$

Здесь $\left| \begin{array}{c} \bar{r} \\ \bar{v} \end{array} \right|$, $\left| \begin{array}{c} \bar{r}_0 \\ \bar{v}_0 \end{array} \right|$ — соответственно текущий и начальный вектор-столбец кинематических отклонений координат $\bar{r}(x, y, z)$ и скорости $\bar{v}(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$;

$|\bar{P}|$ — вектор-столбец начальных компонент возмущающего ускорения;

M — матрица размерности 6×6 ,

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 6(\sin \omega t - \omega t) & 0 & \left(\frac{4}{\omega} \sin \omega t - 3t \right) & -\frac{2}{\omega}(1 - \cos \omega t) & 0 \\ 0 & (4 - 3 \cos \omega t) & 0 & \frac{2}{\omega}(1 - \cos \omega t) & \frac{1}{\omega} \sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & \cos \omega t & 0 & 0 & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \\ 0 & -6\omega(1 - \cos \omega t) & 0 & 4 \cos \omega t - 3 & -2 \sin \omega t & 0 \\ 0 & 3\omega \sin \omega t & 0 & 2 \sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \sin \omega t & 0 & 0 & \cos \omega t \end{vmatrix};$$

P_0 , P_n — матрицы размерности 6×3 ,

$$P_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega^2} \left[4(1 - \cos \omega t) - \frac{3}{2} \omega^2 t^2 \right] & \frac{2}{\omega^2} (\sin \omega t - \omega t) & 0 \\ -\frac{2}{\omega^2} (\sin \omega t - \omega t) & \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \\ \frac{1}{\omega} [4 \sin \omega t - 3\omega t] & \frac{2}{\omega} (\cos \omega t - 1) & 0 \\ \frac{2}{\omega} (1 - \cos \omega t) & \frac{1}{\omega} \sin \omega t & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \end{pmatrix};$$

$$P_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega^2} [3\omega t \sin \omega t - 5(1 - \cos \omega t)] & \frac{3}{\omega^2} (\omega t - 2 \sin \omega t + \omega t \cos \omega t) & 0 \\ \frac{3}{2\omega^2} (\sin \omega t - \omega t \cos \omega t) & \frac{2}{\omega^2} \left(\cos \omega t - 1 + \frac{3}{4} \omega t \sin \omega t \right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) \\ \frac{1}{\omega} (3\omega t \cos \omega t - 2 \sin \omega t) & \frac{3}{\omega} (1 - \cos \omega t + \omega t \sin \omega t) & 0 \\ \frac{3}{2\omega} \omega t \sin \omega t & \frac{1}{2\omega} (3\omega t \cos \omega t - \sin \omega t) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\omega} \sin \omega t \end{pmatrix};$$

t — текущее время полета.

Уравнения относительной траектории пассивного полета в орбитальной системе координат можно представить также в следующем виде:

$$x = \frac{2}{\omega} e \sin (\omega t_{y \max} + \omega t) - 3Ct + \left(X_0 - \frac{2}{\omega} \dot{y}_0 \right);$$

$$y = \frac{e}{\omega} \cos (\omega t_{y \max} + \omega t) + \frac{2}{\omega} C;$$

$$z = Z_{\max} \sin (\omega t_{z=0} + \omega t),$$

где
$$Z_{\max} = \sqrt{z_0^2 + \left(\frac{z_0}{\omega} \right)^2}, \quad \omega t_{z=0} = \arcsin \frac{z_0}{Z_{\max}} = \arccos \frac{\dot{z}_0}{\omega Z_{\max}}.$$

Остальные обозначения ясны из нижеследующих формул.

Из этих уравнений видно, что относительное движение в плоскости опорной орбиты является движением по эллипсу с отношением полуосей 2, центр которого перемещается со скоростью $3C$ из начального положения

$$\left(x_0 - \frac{2}{\omega} \dot{y}_0 \right), \quad \frac{2}{\omega} C.$$

На рис. 16.9 приведены траектории такого движения при различных направлениях начального вектора скорости и нулевых начальных отклонениях по координатам.

В траектории пассивного относительного движения можно выделить инварианты относительно времени полета:

— эквивалент эксцентриситета относительной траектории

$$e = \sqrt{\dot{y}^2 + (2\dot{x} + 3\omega y)^2} = \sqrt{\dot{y}_0^2 + (2\dot{x}_0 + 3\omega y_0)^2};$$

— скорость векового движения

$$3c = 3(\dot{x} + 2\omega y) = 3(\dot{x}_0 + 2\omega y_0).$$

Уравнение продольного относительного смещения

$$2\dot{y} - \omega x = 2\dot{y}_0 - \omega x_0 + 3c\omega t.$$

Центральный угол до характерных точек на относительной траектории можно определить по следующим формулам:

— до экстремальной высоты

$$\omega t_{y \max} = \operatorname{Arcsin} \left(-\frac{\dot{y}}{e} \right);$$

$$\operatorname{sign} \cos \omega t_{y \max} = \operatorname{sign} (2\dot{x} + 3\omega y_0);$$

— до точки возврата в продольном движении

$$\omega t_{\text{возвр}} = \pm \arccos \frac{3}{2} \frac{c}{e} + \omega t_{y \max};$$

— до момента равных высот

$$\omega t_{y=0} = \pm \arccos \left(2 \frac{c}{e} \right) + \omega t_{y \max};$$

— до пересечения плоскости опорной орбиты

$$\omega t_{z=0} = (\operatorname{sign} z + \operatorname{sign} \dot{z}) \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega \frac{z}{\dot{z}};$$

— до экстремального удаления от плоскости опорной орбиты

$$\omega t_{z \max} = \operatorname{arctg} \frac{\dot{z}}{\omega z}.$$

Для эллиптической опорной орбиты в качестве параметрических уравнений относительного движения в линеаризованной постановке удобно использовать выражения частных производных отклонений кинематических параметров в искомый момент по отклонениям в заданный момент. Используя для этой цели полученные в работах [14, 15] матрицы изохронных производных

$$\left| \frac{\bar{r}}{\Delta \bar{V}} \right| = M_n \left| \frac{\bar{r}_0}{\Delta \bar{V}_0} \right|,$$

следует иметь в виду, что фигурирующая в них разность абсолютных скоростей КА ($\Delta \bar{V}$) не является относительной скоростью в орбитальной системе координат. Последняя находится из выражения

$$\bar{v}_0 = \Delta \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}.$$

При решении некоторых задач сближения, автономной навигации и при обработке результатов измерений с малой избыточностью бывают полезны некоторые соотношения, вытекающие из свойств матрицы изохронных производных. В частности, координаты отклонений между объектами в орбитальной системе координат, взятые в фиксированные моменты времени (с индексами i, j, k в порядке возрастания времени), удовлетворяют соотношению

$$n\bar{r}_i + m\bar{r}_j + k\bar{r}_k = |\bar{0}|.$$

Элементы матриц n, m, k могут быть найдены из выражений

$$\begin{aligned} n &= -\|c_{ik} - d_{ik}b_{ik}^{-1}a_{ik}\|; \\ m &= \|c_{jk} - d_{jk}b_{jk}^{-1}a_{jk}\|; \\ k &= \|d_{jk}b_{jk}^{-1} - d_{ik}b_{ik}^{-1}\|. \end{aligned}$$

Эквивалентные системы уравнений дают также

$$\left. \begin{aligned} n &= \|c_{ij} - d_{ij}b_{ij}^{-1}a_{ij}\| \\ m &= \|d_{ij}b_{ij}^{-1} + b_{jk}^{-1}a_{jk}\| \\ k &= -\|b_{ij}^{-1}\| \end{aligned} \right\} \text{ или } \left\{ \begin{aligned} n &= \|b_{ij}^{-1}a_{ij} - b_{ik}^{-1}a_{ik}\| \\ m &= -\|b_{ij}^{-1}\| \\ k &= \|b_{ik}^{-1}\| \end{aligned} \right.$$

Индексы в обозначениях подматриц матрицы изохронных производных (согласно равенству $M_{n \ ij} = \left\| \begin{matrix} a_{ij} & b_{ij} \\ c_{ij} & d_{ij} \end{matrix} \right\|$) указывают, что они определены на интервале между

этими моментами. Скоростные и смешанные соотношения подобного типа не приводят, поскольку они в практике менее употребительны из-за большего влияния аппаратных и методических погрешностей на точность решения.

Следует также иметь в виду, что при больших расстояниях между объектами по дуге орбиты методические погрешности определения относительного положения космических аппаратов по линеаризованным уравнениям относительного движения существенно уменьшаются, если координаты x , y , z уравнений при переходах считать криволинейными координатами, т. е.

x — отклонение по дуге орбиты (Δl);

y — превышение объекта над координатной поверхностью, образованной поворотом опорной орбиты относительно линии узлов орбит (ΔR);

z — боковое отклонение по дуге координатной поверхности, нормальной плоскости опорной орбиты (Δn).

Значения производных $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ следует определять по значениям относительных координат в двух точках траектории по формулам на стр. 485.

16.3. АУТОНОМНОЕ СБЛИЖЕНИЕ

Под автономным сближением понимается сближение космических аппаратов, находящихся на близких орбитах, осуществляемое с помощью только бортовых измерительных и исполнительных средств. На участке автономного сближения требуется уменьшить до допустимых значений начальные рассогласования кинематических параметров, вызванные погрешностью исполнения предшествующих участков. Начальные отклонения могут достигать десятков и сотен километров по координатам и десятков метров в секунду по относительной скорости.

Основная часть алгоритма, преобразующего измеряемые параметры или их комбинации в команды управления, выполнение которых приводит к сближению, называется обычно *методом сближения*. Иногда понятие метода сближения распространяют и на способ аппаратной реализации алгоритма. Методы сближения в явном или неявном виде включают элементы навигации, обработки результатов измерений, прогноза, маневра и управления. В основе большинства из них лежит допущение о характере движения цели. Для построения алгоритма используются кинематические или динамические соотношения или их аппроксимирующие зависимости, позволяющие решить задачу сближения с той или иной степенью оптимальности.

Методы можно разделить на две группы:

1. Методы, аналогичные методам самонаведения управляемых ракет малых высот.

2. Методы, предназначенные специально для сближения космических аппаратов.

К первой группе можно отнести методы погони, пропорциональной навигации, трех точек и другие. Их математическое описание при использовании в космосе не меняется. Существенно изменяется аппаратное решение в соответствии со спецификой управления, и для достижения малой относительной скорости в конце сближения требуется регулирование скорости сближения в процессе сближения.

Методы второй группы в отличие от методов первой основываются на законах относительного движения космических аппаратов в поле тяготения, поэтому их иногда называют *методами орбитальной механики*. Методы, в которых полет с работающим двигателем составляет значительную часть общего времени сближения, называются *методами свободных траекторий*. В большинстве случаев сами уравнения метода выводятся с учетом принятых критериев оптимальности. Ими, как правило, бывают экономичность, быстродействие, простота измерительной и преобразующей аппаратуры, возможность использования аппаратуры, установленной на объекте, для других целей и тому подобные требования.

Как пример методов первой группы кратко рассмотрим метод параллельного наведения. Кинематическое условие метода — угловая скорость линии визирования должна равняться нулю — в космическом полете легко контролируется с помощью локатора и датчиков угловой скорости или путем измерения скорости перемещения цели на фоне звезд. Измеренные значения угловой скорости линии визирования являются рассогласованиями. Они ликвидируются составляющими тяги двигательной установки, нормальными линии визирования (КА — цель). При значениях угловой скорости линии визирования, близких к расчетным погрешностям ее измерения, считается, что КА находится «на методе».

Управление по каналу дальности заключается, как правило, в выдерживании заданного закона изменения радиальной скорости по дальности. Последний определяется из условия оптимальности сближения. Он может быть многопараметрическим, учитывающим начальное относительное положение космических аппаратов. В этом случае метод сближается с методами орбитальной механики. Для метода параллельного сближения в целях простоты обычно используется минимальное число параметров.

На рис. 16.10 в фазовых координатах «радиальная скорость $\dot{\rho}$ — дальность ρ » приведена схема простейших законов управления для «мягкого» сближения и типичные траектории.

Траектория 1 соответствует случаю, когда двигательная установка допускает глубокое дросселирование тяги.

Траектория 2 — двигательная установка не дросселируется, но допускает многократное включение.

Траектория 3 — двигательная установка не дросселируется, число включений минимально.

Сплошной линией показан полет с работающим двигателем, пунктирной — пассивный полет.

Поясним основные характеристики закона регулирования.

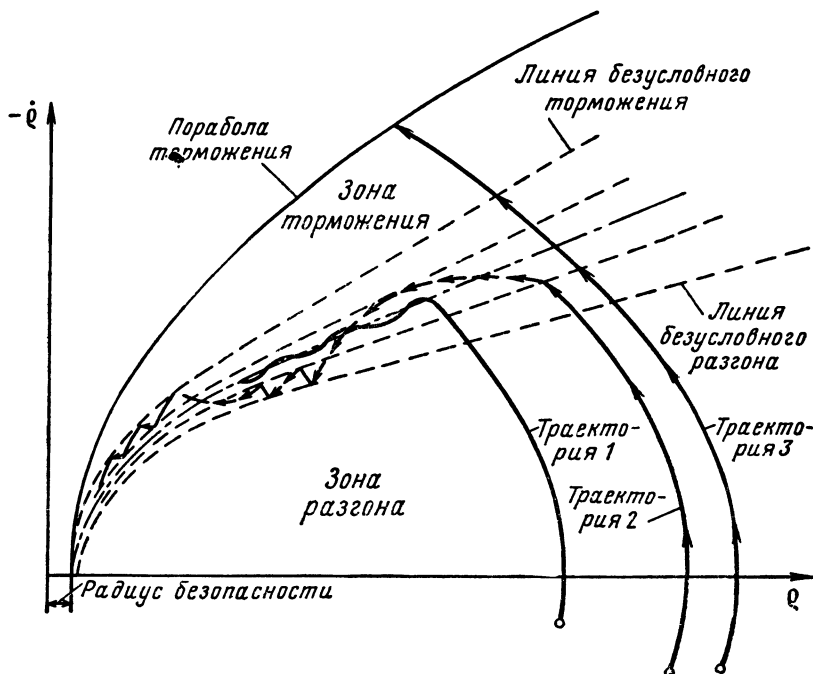


Рис. 16. 10. Простейший закон управления по каналу дальности

Радиус безопасности ограничивает пространство вблизи цели, в котором опасно движение с полярным управлением. Он должен превышать минимально допустимую зону причаливания.

«Парабола торможения» является предельной фазовой траекторией торможения с максимально возможной радиальной составляющей тяги. Она обеспечивает минимальную скорость КА вблизи цели вне радиуса безопасности независимо от направления подхода к цели. Ее название условно, так как при простейшей реализации метода ее аппроксимируют, а при точной реализации учитываются высокие члены разложения потенциала тяготения вблизи цели.

Оптимальный закон изменения радиальной скорости по дальности наиболее точно может быть выдержан при сближении с непрерывно работающим двигателем, допускающим глубокое дросселирование тяги (траектория 1). В целях простоты закона управления начальное рассогласование по скорости можно ликвидировать при максимальной тяге. В случае ограниченной глубины дросселирования тяги для реализации закона сближения, близкого к оптимальному, требуется многократное включение двигателей. При этом вблизи заданного закона обычно выделяется зона, параметры которой определяются допускаемым числом включений двигателя и погрешностями измерений.

Граничная кривая зоны, лежащая сверху оптимального закона, отсекает сверху зону безусловного торможения. Граничная кривая зоны, лежащая ниже оптимального закона, отделяет снизу зону безусловного разгона. Между граничными кривыми вводятся две кривые выключения. При пересечении измеряемой фазовой траекторией этих линий посылается команда, требующая равенства нулю радиальной составляющей тяги двигателей.

Аналогичным образом определяется тангенциальная составляющая тяги (рис. 16. 11).

Можно проводить сближение без дросселирования тяги при одном включении двигателя. Однако при этом существенно усложняется работа системы ориентации объекта.

Фазовая траектория приближается к траектории максимального быстродействия, когда активные участки разгона и торможения соприкасаются без пассивного участка между ними.

Приведем краткое описание простейшего алгоритма работы системы ориентации при полярном управлении.

После поиска цели измерительными средствами КА (или локатор) разворачивается так, чтобы цель оказалась на оси зоны точных измерений. Во время измерений производится непрерывное отслеживание этого положения. Проводятся точные измерения угловой скорости линии визирования, разворачивают КА вокруг линии визирования так, чтобы свести к нулю проекцию ее угловой скорости на одну из принятых осей КА, перпендикулярную линии визирования. Таким образом, одна из выбранных плоскостей КА совмещается с плоскостью, проходящей через линию визирования и относительную скорость, — плоскостью наведения. В дальнейшем в процессе сближения система ориентации должна непрерывно сохранять это состояние. Развороты КА, необходимые для создания управляющих движением центра масс составляющих тяги, производятся в плоскости наведения.

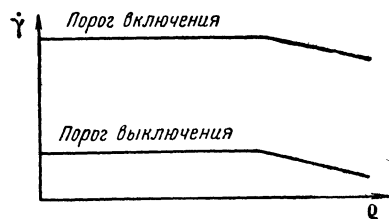


Рис. 16.11. Закон управления угловой скоростью линии визирования

В качестве примера методов второй группы коротко рассмотрим один из вариантов метода свободных траекторий — метод последовательных коррекций траектории относительного движения, производимых через заданные интервалы времени. Для него корректирующий импульс определяется на борту по результатам автономных измерений параметров относительного движения.

Уравнения рассматриваемого метода — зависимость, позволяющая определить по измеренным значениям относительных координат и скоростей величину корректирующего импульса, потребного для встречи КА в заданное время с целью. Они зависят от состава измерений и принятой для определения импульса системы координат. В орбитальной системе координат уравнения управления имеют линейный вид. Для полного состава измерений — измерения относительного положения (вектора $\bar{q}$) и скорости (вектора $\bar{V}$) уравнения метода записываются в виде

$$\Delta \bar{V}_\tau = A_\tau \bar{q} - \bar{V}.$$

Здесь A_τ — матрица коэффициентов, зависящих от времени коррекции до расчетного момента встречи (τ) и априорных параметров орбиты цели.

Для орбит с малым эксцентриситетом ($e < 0,01$) коэффициенты матрицы A_τ выражаются следующими функциями:

$$a_{11} = -\frac{1}{\Delta} \omega \sin \omega \tau;$$

$$a_{12} = -\frac{2}{\Delta} \omega [7(1 - \cos \omega \tau) - 3\omega \tau \sin \omega \tau];$$

$$a_{13} = 0; \quad a_{21} = \frac{2}{\Delta} \omega (1 - \cos \omega \tau);$$

$$a_{22} = \frac{1}{\Delta} (3\omega \tau \cos \omega \tau - 4 \sin \omega \tau); \quad a_{23} = a_{31} = a_{32} = 0; \quad a_{33} = -\omega \operatorname{tg} \omega \tau;$$

$$\Delta = 8(1 - \cos \omega \tau) - 3\omega \tau \sin \omega \tau.$$

Зависимость коэффициентов от времени приведена на рис. 16.12.

Для эллиптических орбит матрица

$$A_\tau = -b_\tau^{-1} a_\tau.$$

Следует напомнить, что для приведенного выше выражения матрицы A_τ через изохронные производные следует при определении компонент корректирующего импульса относительную скорость объекта определять в инерциальной относительно системы координат, совпадающей в момент определения с орбитальной.

Из уравнений метода видно, что если для орбит с малым эксцентриситетом предполетная информация об орбите цели ограничивается величиной средней угловой скорости, то при сближении на эллиптических орбитах коэффициенты в уравнении метода зависят от параметров, определяющих орбиту в ее плоскости. В этом недостаток методов второй группы.

Однако в большинстве случаев встречи необходимая информация имеется. В случае ее отсутствия, усложнив алгоритм и увеличив число измерений, можно определить

необходимые дополнительные параметры автономно по измерениям параметров относительно движения.

При ограниченном составе измерений уравнения метода изменяются. Так, при измерении только относительных координат

$$\Delta \bar{V} = B_{n-1} \bar{q}_{n-1} + B_n \bar{q}_n,$$

где B_n , B_{n-1} — матрицы коэффициентов, зависящих от интервала времени между измерениями τ_n , времени сближения τ и априорных параметров орбиты цели.

Для орбит с малым эксцентриситетом выражения для коэффициентов будут

$$b_{11, n-1} = \frac{\omega}{\Delta_2} \sin \omega \tau_n;$$

$$b_{12, n-1} = -\frac{\omega}{\Delta_2} 2(1 - \cos \omega \tau_n);$$

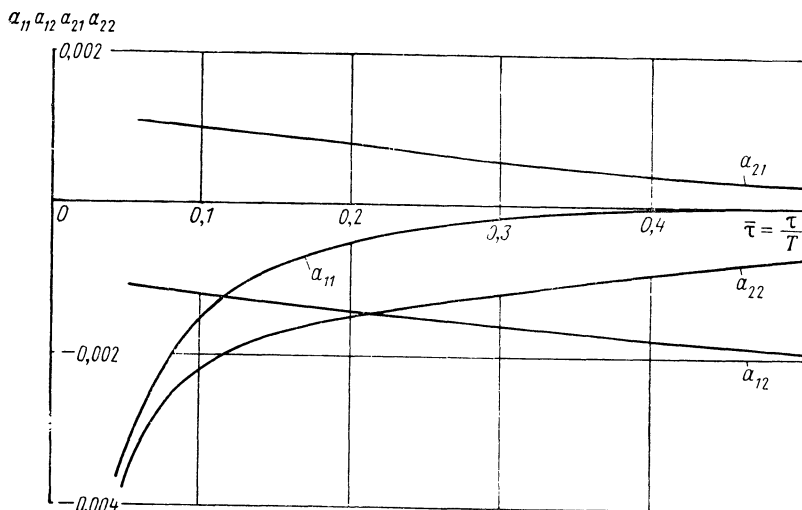


Рис. 16.12. Зависимость коэффициентов метода свободных траекторий от времени до встречи

$$b_{13, n-1} = 0;$$

$$b_{21, n-1} = -b_{12, n-1};$$

$$b_{22, n-1} = \frac{\omega}{\Delta_2} (4 \sin \omega \tau_n - 3\omega \tau_n);$$

$$b_{23, n-1} = b_{31, n-1} = b_{32, n-1} = 0;$$

$$b_{33, n-1} = \omega (\sin \omega \tau_n - \cos \omega \tau_n \operatorname{ctg} \omega \tau_n);$$

$$b_{11, n} = -b_{11, n-1} + a_{11};$$

$$b_{12, n} = \frac{\omega}{\Delta_2} [7(1 - \cos \omega \tau_n) - 3\omega \tau_n \sin \omega \tau_n] + a_{12};$$

$$b_{13, n} = 0;$$

$$b_{21, n} = b_{12, n-1} + a_{21};$$

$$b_{22, n} = -\frac{\omega}{\Delta_2} (4 \sin \omega \tau_n - 3\omega \tau_n \cos \omega \tau_n) + a_{22};$$

$$b_{23, n} = b_{31, n} = b_{32, n} = 0;$$

$$b_{33, n} = \omega \operatorname{tg} \omega \tau_n + a_{33};$$

$$\Delta_2 = 8(1 - \cos \omega \tau_n) - 3\omega \tau \sin \omega \tau.$$

Для эллиптической орбиты коэффициенты матриц B_{n-1} и B_n выражаются следующими зависимостями:

$$B_{n-1} = c_{\tau n} - d_{\tau n} b_{\tau n}^{-1} a_{\tau n}; \quad B_n = -b_{\tau}^{-1} a_{\tau} - d_{\tau n} b_{\tau n}^{-1}.$$

Здесь матрицы b_{τ} , a_{τ} определяются для времени τ , оставшегося до конца встречи, матрицы $a_{\tau n}$, $b_{\tau n}$, $c_{\tau n}$, $d_{\tau n}$ определяются для интервала времени между измерениями τ_n , т. е.

$$\begin{vmatrix} \bar{Q}_n \\ \bar{V}_n \end{vmatrix} = M \begin{vmatrix} \bar{Q}_{n-1} \\ \bar{V}_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{\tau n} & b_{\tau n} \\ c_{\tau n} & d_{\tau n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{Q}_{n-1} \\ \bar{V}_{n-1} \end{vmatrix}.$$

Следует отметить, что дальнейшее сокращение числа измеряемых параметров с одновременным пропорциональным увеличением числа замеров приводит к нелинейности уравнений метода. Стремление сохранить линейный вид уравнений приводит к необходимости непропорционально увеличивать потребное число замеров. В этом случае более рационально компоненты импульса определять по методу наименьших квадратов.

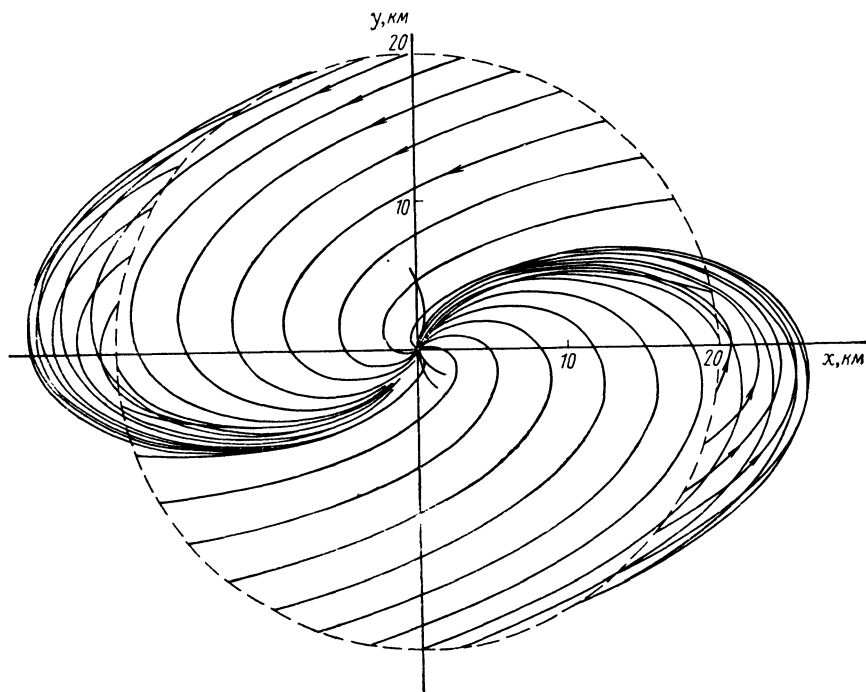


Рис. 16. 13. Траектории, сближающиеся с началом координат за половину периода обращения

На рис. 16. 13 для круговой орбиты приведены относительные траектории, двигаясь по которым КА сближается с целью за 0,5 периода цели. Движение показано в плоскости орбиты. Пунктиром соединены точки с равными временами до встречи с целью. Скорости, соответствующие сближающимся траекториям, показаны на рис. 16. 14. Видно, что линии одинакового времени полета до цели в выбранных координатах: $\dot{r}/r$ — радиальная скорость, отнесенная к дальности, и $\dot{\varphi}$ — угловая скорость линии визирования относительно орбитальной системы координат, являются окружностями. Для времени $\tau=0,1 T$ нанесено начальное угловое расположение КА. Оно имеет вид равномерной по дуге окружности шкалы. Для остальных времен дано только начало этой шкалы. Следует обратить внимание на то, что при малых временах сближения фазовая траектория метода приближается к фазовой траектории метода параллельного наведения. В этих координатах уравнение последнего имеет вид $\dot{\varphi}=\dot{\varphi}_0$.

Для перехода с любой траектории на сближающуюся достаточно одного корректирующего импульса. Однако вследствие погрешностей измерения и исполнения этот переход осуществляется неточно, поэтому необходимы промежуточные коррекции. Они определяются по тем же выражениям, но для времени, оставшегося до встречи с целью. В достаточной близости от цели последним корректирующим импульсом должны быть погашены относительные скорости. Вследствие линейной зависимости потребной для сближения скорости от дальности последний корректирующий импульс может определяться по этим же формулам, но с коэффициентами, рассчитанными для большего времени сближения. Эффект уменьшения относительной скорости в процессе сближения за счет запаздывания уменьшения времени сближения в расчетных формулах коррекции по сравнению с реальным изменением времени используется в разновидности метода свободных траекторий, называемой *асимптотическим* сближением.

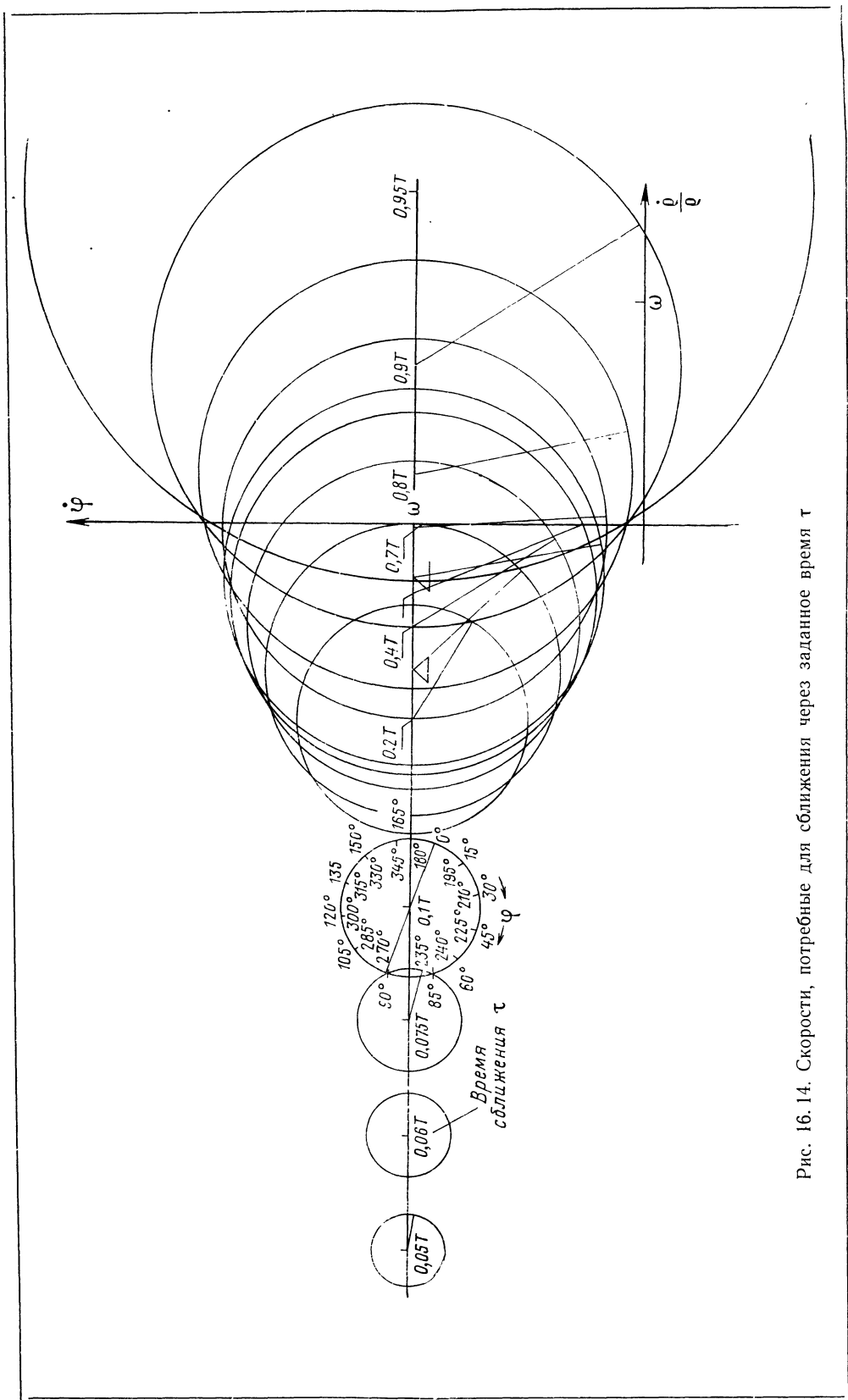


Рис. 16. 14. Скорости, необходимые для сближения через заданное время τ

Оптимальное время сближения, число корректирующих импульсов и распределение их по времени сближения существенно зависят от величины, спектра и корреляции аппаратных погрешностей и начальных кинематических отклонений. Последнее видно из рис. 16. 15, где в орбитальной системе координат для интервала времени в пределах периода T (сплошными линиями) и для интервала времени от периода до двух периодов (пунктирными) показаны изолинии характеристической скорости, потребной для сближения, при оптимальном времени сближения $\tau_{\text{опт}}$ и начальных отклонениях по скорости, соответствующих условиям: $c_0=0$, $y_0=0$. Другие начальные условия по скорости, так же как и аппаратные погрешности, алгоритм и способ реализации, деформируют эти линии.

Для КА, имеющих достаточные вычислительные возможности бортовых средств, оптимальные параметры сближения могут определяться на борту по упрощенным алгоритмам. В более простых системах управления они определяются на Земле заранее до пуска на основе анализа вероятных погрешностей системы сближения и расчетного эл-

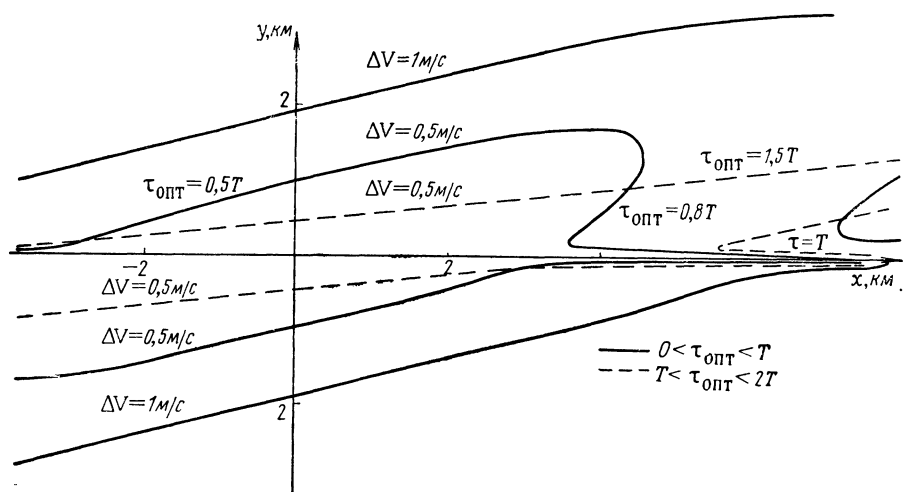


Рис. 16. 15. Изолинии затрат характеристической скорости, потребной для мягкого сближения, при $c_0=0$, $y_0=0$

липсоида отклонений при выведении в район цели. Тогда определение и исполнение любого корректирующего импульса (цикл коррекции) начинается по временным меткам программно-временного устройства, дискретно переключающего группу коэффициентов в уравнениях управления в соответствии со временем, оставшимся до конца сближения. При этом цикл коррекции неизменен для любого импульса. Это — измерение параметров относительного движения, определение импульса и исполнение.

Работа системы ориентации при сближении по методу свободных траекторий зависит от возможностей используемой измерительной аппаратуры. При наличии на объекте системы астрокоррекции режимы работы системы ориентации могут соответствовать аналогичным режимам при астрокоррекции, т. е. поиск цели соответствует поиску звезды, режим измерения — режиму слежения за звездой (ориентации на звезду) или режиму ориентации при связи с Землей; режимы коррекции совпадают.

Интересно выделить случай сближения через время, кратное периоду цели. Учитывая возрастание с увеличением дальности погрешностей измерения тангенциальных составляющих скорости и координат, в этом случае рационально принять следующий алгоритм.

На больших дальностях не корректировать вертикальную и нормальную составляющую скорости. Моментом начала сближения принять момент минимальной разности высот сближающихся космических аппаратов.

Первый сближающий корректирующий импульс определять для этого момента по выражениям

$$\Delta \dot{x} = \frac{\omega}{6\pi n} l - 2\omega \Delta h - \dot{l};$$

$$\Delta \dot{y} = 0; \quad \Delta \dot{z} = 0,$$

где l — расстояние между аппаратами по дуге орбиты при $\Delta h_{\text{мин}}$;

Δh — минимальная разность высот;

$\dot{l}$ — скорость измерения l .

Нормальную плоскости орбиты составляющую скорости ликвидировать в интервале длиной четверть периода у расчетного момента встречи — в момент равенства нулю отклонения цели от плоскости орбиты (в узле орбит) $\Delta z = -\dot{z}$.

Такое видоизменение метода свободных траекторий иногда называют предварительным дальним автономным сближением, иногда — фазированием. При нем снижаются требования к системе ориентации: можно ликвидировать отклонения по дуге орбиты (центральному углу между объектами) с минимальными затратами топлива.

После проведения такого сближения остаются нескорректированными разность высот и относительная скорость. Поэтому вблизи цели следует переходить на другой вариант сближения. При большой величине прогнозируемой на момент коррекции минимальной разности высот целесообразно перед первым сближающим корректирующим импульсом исполнить импульс, обеспечивающий минимальную разность высот, меньшую погрешности ее измерения.

16.4. ОЦЕНКА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЗАТРАТ

Использование для сближения того или иного метода определяется комплексом конструктивно-баллистических требований. Среди них важное значение имеют потребности для сближения запасы топлива, зависящие от следующих основных факторов:

- начальных отклонений кинематических параметров;
- принятого метода сближения;
- погрешностей аппаратуры и реализации;
- конструктивного исполнения метода.

Вероятные начальные отклонения кинематических параметров до пуска определяются расчетным путем как следствие погрешностей исполнения предшествующих этапов. Они задаются либо в виде предельных возможных отклонений каждого из параметров, либо в виде корреляционной матрицы предельных отклонений, которая определяет априорный эллипсоид относительного рассеивания. Задание предельно возможных отклонений каждого кинематического параметра соответствует диагональной корреляционной матрице предельных отклонений. Учитывая то, что ниже будут приведены некоторые способы реализации векторов начальных отклонений из многомерного эллипсоида, следует напомнить, что полуоси эллипсоида соответствуют собственным векторам корреляционной матрицы.

Определение потребных для сближения запасов топлива производится различными способами в зависимости от необходимой точности и допустимой трудоемкости расчетов. Рассмотрим несколько наиболее часто встречающихся способов.

1. Наиболее простой, но обладающий наибольшей погрешностью способ предполагает идеальную работу всех систем. Он позволяет, не привязываясь к конкретному приборному решению, оценить возможные энергетические затраты. Способ, как правило, дает минимальную оценку.

При его использовании для методов первой группы бывает целесообразно разбить траекторию сближения на участки:

- переходной (выход на метод);
- маршевый (движение по кинематической траектории метода);
- тормозной (гашение относительной скорости при «мягком» сближении).

Для простоты обычно принимают, что переходной и тормозной участки осуществляются импульсно.

Так, для метода свободных траекторий при допущениях первого способа затраты топлива на маршевом участке равны нулю — по определению метода. Поэтому оценка потребной характеристической скорости легко производится по следующим формулам.

Первый корректирующий импульс

$$\Delta \bar{V}_1 = \|A_\tau - E\| \begin{vmatrix} \bar{\zeta}_0 \\ \bar{V}_0 \end{vmatrix}.$$

Тормозной корректирующий импульс

$$\begin{vmatrix} \bar{0} \\ \Delta \bar{V}_2 \end{vmatrix} = -M_\tau \begin{vmatrix} |0| & |0| \\ A_\tau & |0| \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{\zeta}_0 \\ \bar{v}_0 \end{vmatrix}.$$

Корреляционная матрица двух импульсов (вектора $\begin{vmatrix} \Delta \bar{V}_1 \\ \Delta \bar{V}_2 \end{vmatrix}$)

$$K_{V1,2} = cK_0 c^*.$$

Здесь $\begin{vmatrix} \bar{\zeta}_0 \\ \bar{v}_0 \end{vmatrix}$, K_0 — вектор-столбец начальных отклонений и корреляционная матрица начальных отклонений соответственно;
 E , $|0|$ — единичная матрица и нулевая матрица размерности 3×3 каждая;

$$c = \begin{vmatrix} -b_{\tau}^{-1}a_{\tau} & -E \\ c_{\tau} - d_{\tau}b_{\tau}^{-1}a_{\tau} & |0| \end{vmatrix};$$

c^* — транспонированная матрица c .

2. Частичный учет основных погрешностей аппаратуры с довольно грубыми допущениями об их характере иногда только усложняет первый способ, а иногда требует совершенно иного подхода к решению задачи. В большинстве случаев оценка ведется по максимальному влиянию рассматриваемых погрешностей. Для многих методов, особенно для методов первой группы, методов с параметрическим управлением, требуется проводить довольно трудоемкий анализ влияния погрешностей.

Для методов, допускающих линейризацию влияния погрешностей аппаратуры на запасы топлива, можно получить оценку с высокой степенью точности.

Так, например, для метода свободных траекторий с программным включением коррекций можно воспользоваться рекуррентным выражением

$$K_n^n = (\tilde{E} + \tilde{A}_{\tau}) K_n^0 (\tilde{E} + \tilde{A}_{\tau})^* + \tilde{A}_{\tau} K_{\text{ош.пр}} \tilde{A}_{\tau}^* + K_{\text{ош.к}},$$

где

$$\tilde{A}_{\tau} = \begin{vmatrix} |0| & |0| \\ A_{\tau} & -E \end{vmatrix};$$

$$\tilde{E} = \begin{vmatrix} E & |0| \\ |0| & |0| \end{vmatrix};$$

K_n^n — корреляционная матрица после корректирующего импульса;

K_n^0 — корреляционная матрица отклонений кинематических параметров до корректирующего импульса;

$K_{\text{ош.пр}}$ — корреляционная матрица ошибок прогноза (измерения) кинематических параметров;

$K_{\text{ош.к}}$ — корреляционная матрица погрешностей исполнения коррекции.

Корреляционную матрицу корректирующего импульса можно определить по формуле

$$K_{vn} = \tilde{A}_{\tau} K_n^0 \tilde{A}_{\tau}^*.$$

Корреляционную матрицу отклонений в расчетный момент последующей коррекции — по формуле

$$K_{n+1}^0 = M_{\tau n, n+1} K_n^n M_{\tau n, n+1}^*,$$

где $M_{\tau n, n+1}$ — матрица изохронных производных от момента коррекции с номером n к моменту коррекции с номером $n+1$.

Матрицы прогноза и исполнения коррекций характеризуют точность используемых систем. Они могут быть получены путем суммирования корреляционных матриц каждой независимой погрешности. Последние в практике расчетов не всегда бывают известны. Часто независимые погрешности системы задаются в виде значений средних квадратических отклонений соответствующих параметров.

При использовании такой информации для построения корреляционных матриц следует иметь в виду, что если эти параметры являются функциями используемых в расчете координат, то элементы построенной корреляционной матрицы должны удовлетворять следующему соотношению:

$$D(f_n) = \sum k_{xi, xi} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_i} \right)^2 + \sum k_{xj, xj} \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_j} \right)^2 + \sum_{i \neq j} k_{xi, xj} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_i},$$

где $D(f_n)$ — известная дисперсия отклонений функции f_n ;

n — номер функции;

$k_{xi, xi}$; $k_{xj, xj}$; $k_{xi, xj}$ — элементы искомой корреляционной матрицы с номерами строки i и столбца j .

Если известно направление, в котором независимая погрешность отличается от погрешности в двух других перпендикулярных направлениях, корреляционная матрица, выраженная через направляющие косинусы этого направления и известные значения независимых дисперсий, в трехмерном пространстве будет иметь вид

$$k = \begin{vmatrix} a_{11}^2 \alpha^2 + (1 - a_{11}^2) \gamma^2 & a_{11} a_{12} (\alpha^2 - \gamma^2) & a_{11} a_{13} (\alpha^2 - \gamma^2) \\ a_{11} a_{12} (\alpha^2 - \gamma^2) & a_{12}^2 \alpha^2 + (1 - a_{12}^2) \gamma^2 & a_{12} a_{13} (\alpha^2 - \gamma^2) \\ a_{11} a_{13} (\alpha^2 - \gamma^2) & a_{12} a_{13} (\alpha^2 - \gamma^2) & a_{13}^2 \alpha^2 + (1 - a_{13}^2) \gamma^2 \end{vmatrix},$$

где a_{11}, a_{12}, a_{13} — направляющие косинусы направления, в котором дисперсия α^2 , отличается от дисперсий γ^2 в остальных двух взаимно перпендикулярных направлениях. Таким направлением часто бывает направление линии визирования, направление математического ожидания корректирующего импульса и т. п.

Определив по приведенным выше формулам рекуррентным обращением все корректирующие импульсы (их корреляционные матрицы), можно оценить затраты характеристической скорости.

Характеристическая скорость является модулем трехмерного случайного вектора коррекции. Для ее определения, не прибегая к точным таблицам, можно с достаточной для инженерной практики точностью воспользоваться формулами

$$R_p = a_1 \sigma_1 + a_2 S,$$

где R_p — модуль трехмерного случайного вектора, характеризующийся вероятностью P ;

$$S = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \text{ — след корреляционной матрицы импульса;}$$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — независимые среднеквадратические отклонения корреляционной матрицы (в порядке убывания по величине);

a_1, a_2 — коэффициенты, значения которых приведены в табл. 16.1.

Таблица 16.1

P	0,95	0,96	0,97	0,98	0,985	0,99	0,995	0,9973	0,999
a_1	0,719	0,818	0,946	1,13	1,25	1,42	1,68	1,904	2,23
a_2	1,17	1,161	1,146	1,12	1,1	1,07	1,04	1,009	0,969

Наибольшая погрешность формулы $\pm 3\%$ для значений

$$\sigma_2 \approx \sigma_3 \approx 0,7\sigma_1.$$

Более точная формула с погрешностью $\bar{\Delta} < 1,5\%$ (при $\bar{\sigma}_2 \approx 0,5\bar{\sigma}_1 \approx \bar{\sigma}_3$)

$$R_p = (3 + 0,04\bar{\sigma}_2 + 0,4\bar{\sigma}_2^4 + 0,335\bar{\sigma}_3^4) \sigma_1,$$

$$\text{где } \bar{\sigma}_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}; \quad \bar{\sigma}_3 = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}.$$

Математическое ожидание величины модуля трехмерного импульса аппроксимируется с погрешностью $-2,8\% \div +2,4\%$

$$M_R = -0,213\sigma_1 + 1,055\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}$$

(положительная погрешность соответствует заниженным значениям M_R).

Максимальная оценка суммарной величины характеристической скорости $V_{x\Sigma \max}$ при предположении полной корреляции между импульсами может быть произведена по формуле

$$V_{x\Sigma \max} = \sum R_{pi}.$$

Минимальная оценка (предположение независимости коррекций)

$$V_{x\Sigma \min} = \sum M_{Ri} + \sqrt{\sum (R_i - M_{Ri})^2}.$$

3. Моделирование процесса сближения является наиболее точным способом определения потребной для сближения характеристической скорости. Оно проводится с различной степенью приближения к реальному аппаратному решению в соответствии с уровнем разработки системы сближения. Требуется значительной затраты труда как при математическом построении модели, реализации ее на моделирующей установке или быстродействующей вычислительной машине дискретного действия, так и при решении задачи с готовой моделью.

Анализ результатов моделирования позволяет в ряде случаев получить эмпирические зависимости, по которым с высокой точностью можно определять потребные запасы топлива при изменившихся начальных условиях. Для построения таких эмпирических зависимостей иногда бывает целесообразно использовать результаты указанных ранее упрощенных способов оценки.

При моделировании сближения из эллипсоида начальных кинематических отклонений тем или иным способом выбирается вектор начальных кинематических отклонений и согласно функционалам управления имитируется процесс управления объектом.

В модели, построенной для цифровой вычислительной машины, рассматривается как реальное движение объекта, так и «кажущееся», соответствующее информации, получаемой от измерительных средств с наложением погрешностей аппаратуры, инерционности используемых средств и т. п.

Для задания погрешностей для ЭЦВМ выделяют следующие составляющие: случайную и систематическую, флуктуационную и плавающую, независимую от дальности (или других параметров) и зависимую и т. д.

Способ, каким выбирается из эллипсоида начальных параметров относительного движения вектор кинематических параметров, зависит от целей моделирования. Для точных предположенных расчетов применяется обычно метод статистических испытаний. Для него каждая случайная реализация вектора начальных отклонений может быть получена по формуле

$$\bar{r}_0 = \sum_{i=1}^n \bar{R}_i \lambda_i,$$

где $\bar{R}_i$ — собственный вектор корреляционной матрицы начальных отклонений, умноженный на значение среднего квадратического отклонения в его направлении;

n — размерность матрицы и векторов $\bar{R}_i (\bar{R}_1, \bar{R}_2, \dots, \bar{R}_n)$;

λ_i — случайное число с нормальным законом распределения (дисперсия равна единице).

Для анализа начального эллипсоида в целях наглядности, а также для сокращения потребного числа расчетов при моделировании часто используется выделение с поверхности эллипсоида. При этом удобно вектор начальных отклонений получать по формуле

$$\begin{aligned} \bar{r}_0 = & (\bar{R}_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 \cos \alpha_5 + \\ & + \bar{R}_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 \cos \alpha_5 + \\ & + \bar{R}_3 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 \cos \alpha_5 + \\ & + \bar{R}_4 \sin \alpha_3 \cos \alpha_4 \cos \alpha_5 + \\ & + \bar{R}_5 \sin \alpha_4 \cos \alpha_5 + \\ & + \bar{R}_6 \sin \alpha_5) \times, \end{aligned}$$

где $\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_6$ — векторы исходной корреляционной матрицы;

$\alpha_1, \dots, \alpha_5$ — углы обобщенной сферической системы координат.

Для функций, не убывающих с увеличением модуля многомерного аргумента, можно использовать более наглядный способ. При нем исходную корреляционную матрицу представляют в виде суммы двух матриц

$$\begin{aligned} K_0 = \begin{vmatrix} k_{rr} & k_{rv} \\ k_{rv} & k_{vv} \end{vmatrix} &= K_{0\text{св}} + K_{v'}; \quad K_{0\text{св}} = K_0 - \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_{v'} \end{vmatrix}; \\ K_{v'} &= k_{vv} - k_{vr} k_{rr} k_{rv}, \end{aligned}$$

где $K_{v'}$ — корреляционная матрица для отклонений составляющей скорости, не связанной с отклонением по координатам;

$K_{0\text{св}}$ — корреляционная матрица отклонений координат и связанных с ним отклонений скорости.

Найдя трехмерные собственные векторы матриц k_{rr} и $k_{v'}$ и умножив их на значения соответствующих среднеквадратических отклонений, получим векторы $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \tilde{r}_3$ и $\tilde{v}_4, \tilde{v}_5, \tilde{v}_6$ соответственно. Тогда базисные шестимерные векторы получим по формулам

$$\begin{aligned} \|\tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \tilde{r}_3\| &= \|EA\| \|\tilde{r}_1 \tilde{r}_2 \tilde{r}_3\|; \\ \|\tilde{r}_4 \tilde{r}_5 \tilde{r}_6\| &= \|0E\| \|\tilde{v}_4 \tilde{v}_5 \tilde{v}_6\|, \end{aligned}$$

где $A = k_{vr} k_{rr}$.

В некоторых случаях такое разделение на «связанные» отклонения по скорости и «не связанные» происходит при обычном нахождении векторов матрицы K_0 .

Для построения вектора реализации используют формулу

$$\begin{aligned} \bar{r}_0 = & (\bar{r}_1 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \bar{r}_2 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \bar{r}_3 \sin \alpha_2) \times_r + \\ & + (\bar{r}_4 \cos \alpha_3 \cos \alpha_4 + \bar{r}_5 \sin \alpha_3 \cos \alpha_4 + \bar{r}_6 \sin \alpha_4) \times_v, \end{aligned}$$

где $\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_6$ — базисные векторы;

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ — углы трехмерного пространства, имеющие привычный смысл, а именно:
 $\alpha_1 (\alpha_3)$ — угол между первым базовым вектором $\bar{r}_1$ и расчетным $\bar{r}_0$ в плоскости векторов $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$ ($\bar{r}_3$ и $\bar{r}_4$);
 $\alpha_2 (\alpha_4)$ — угол выхода из этой плоскости;
 $\kappa_r, \kappa_v, \kappa$ — множители, определяющие величину вероятности P попадания в область, ограниченную поверхностью эллипсоида.

Для определения значения κ необходимо, чтобы

$$P_r P_v = P,$$

где P_r, P_v — вероятности попадания в эллипсоид координат и скоростей соответственно.

В табл. 16.2 приводятся значения $\kappa, \kappa_r, \kappa_v$ для следующих вариантов:

- 1) реализация с поверхности шестимерного и четырехмерного гиперэллипсоида;
- 2) разделение на два эллипсоида вдвое меньшей размерности при $P_r = P_v$, что дает $\kappa_r = \kappa_v$;
- 3) разделение на два эллипсоида при $\kappa_r = \kappa$.

Таблица 16.2

Вариант	Множитель	Значения множителей $\kappa, \kappa_r, \kappa_v$ для различных P									Размерность
		0,3	0,5	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999	
1	κ^2	3,87	5,35	7,23	8,56	10,64	12,6	15,0	16,8	22,5	6
		2,2	3,36	4,88	5,99	7,78	9,5	11,7	13,3	18,5	4
2	$\kappa_r^2 = \kappa_v^2$	2,50	3,6	5,1	6,2	7,8	9,35	11,3	12,8	17,75	3+3
		1,6	2,4	4,1	4,5	5,9	7,35	9,15	10,6	15,17	2+2
3	κ_r^2	3,87	5,35	7,23	8,56	10,6	12,6	15,0	16,8	22,5	3+3
		2,2	3,36	4,88	5,99	7,78	9,5	11,7	13,3	18,5	2+2
	κ_v^2	1,85	2,7	4,0	5,0	6,6	7,5	10,0	11,5	16,4	3+3
		1,15	1,85	2,9	3,7	5,0	6,4	8,2	9,55	13,8	2+2

Для этих вариантов характер области двумерного пространства с равной вероятностью попадания показан на рис. 16.16. Рассматриваемое разделение многомерного гиперэллипсоида на два позволяет наглядно представить связи между координатными и скоростными отклонениями (рис. 16.17), чем облегчается анализ исходных данных при выборе способа расчета искомых характеристик сближения.

В заключение следует отметить, что выделение векторов с поверхности эллипсоида позволяет в ряде случаев формально свести некоторые задачи анализа функции многомерного случайного аргумента к задачам анализа функции неслучайного аргумента. Например, для поиска экстремальных значений (при заданной вероятности) удобно принять в качестве аргументов углы обобщенной сферической системы координат и использовать аналитические или численные методы нахождения экстремума. При этом на единицу сокращается размерность задачи по сравнению с размерностью пространства случайного аргумента.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. XVI

1. Андерсон Г. Введение в многомерный статистический анализ. М., Физматгиз, 1963.
2. Бэттин Р. Наведение в космосе. Перев. с англ. М., «Машиностроение», 1966.
3. Дунин-Барковский И. В. Теория вероятности и математическая статистика в технике. М., ГИТТЛ, 1955.
4. Ермилов Ю. А. О расчете импульсов для сближения спутников в центральном Ньютоновском поле тяготения. — «Космические исследования», т. 4, вып. 6, 1968.

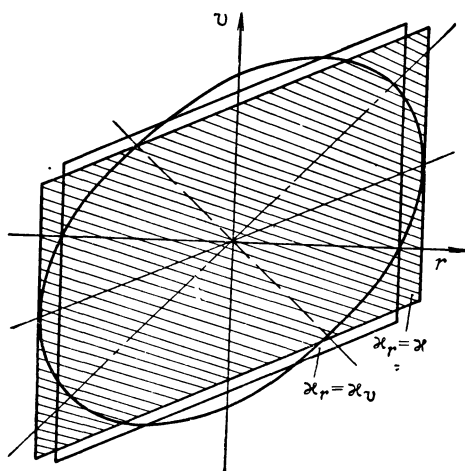


Рис. 16.16. Области двумерного пространства с равной вероятностью попадания.

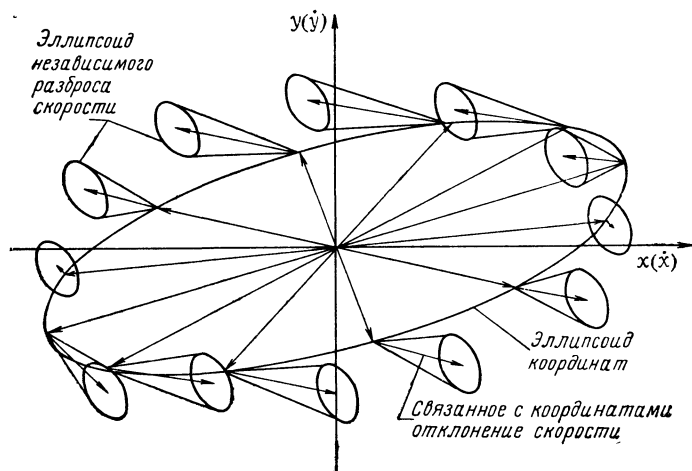
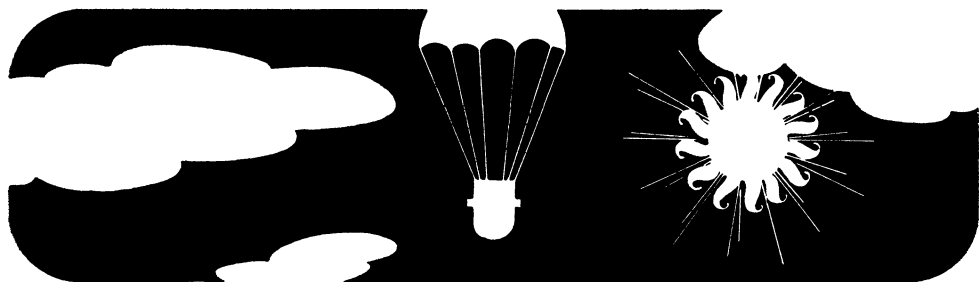


Рис. 16.17. Представление четырехмерного гиперэллипсоида в двумерном пространстве

5. Космическая техника. Под ред. Г. Сейферта, перев. с англ. М., «Наука», 1964.
 6. Лебедев А. А., Соколов В. Б. Встреча на орбите. М., «Машиностроение», 1969.
 7. Легостаев В. П., Раушенбах Б. В. Автоматическая сборка в космосе. — «Космические исследования», т. 7, вып. 6, 1969.
 8. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. Перев. с англ. М., «Наука», 1966.
 9. Пономарев В. М. Теория управления движением космических аппаратов М., «Наука», 1965.
 10. Уилкс С. С. Математическая статистика. Перев. с англ. М., «Наука», 1967.
 11. Управление космическими летательными аппаратами. Под ред. К. Леондеса, пер. с англ. М., «Машиностроение», 1967.
 12. Хок Д. С. Космические маневры. Оптимизация. — Сб. «Космические траектории», пер. с англ. М., ИЛ, 1963.
 13. Хорошавцев В. Г. Расчет частных производных от характеристик движения по начальным условиям. — «Космические исследования», т. 3, вып. 3, 1965.
 14. Чарный В. И. Об изохронных производных. — Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 16. Изд-во АН СССР, 1963.
 15. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М., «Наука», 1965.
 16. Энеев Т. М. О применении градиентного метода в задачах теории оптимального управления. — «Космические исследования», т. 4, вып. 5, 1966.
-



ГЛАВА XVII

СПУСК КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ПОВЕРХНОСТЬ ЗЕМЛИ И ПЛАНЕТ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- $\bar{a}$ — интегрируемое ускорение от акселерометра.
- c_x — коэффициент аэродинамической силы торможения.
- c_y — коэффициент аэродинамической подъемной силы.
- e — эксцентриситет.
- F_{Σ} — равнодействующая от сил притяжения Солнца, Луны и других небесных тел.
- G — вес КА.
- g_0, g — ускорение силы тяжести на уровне поверхности и на высоте соответственно.
- H — высота полета КА над поверхностью планеты.
- $H_{\min}$ — минимальная высота пролета КА над поверхностью планеты.
- $(H_{\min})_{\text{доп}}$ — минимально допустимая высота полета.
- $H_{\text{одн}}$ — высота однородной атмосферы.
- $H_{\Pi}^{(в)}$ — высота условного перицентра, соответствующая верхней границе коридора.
- $H_{\Pi}^{(н)}$ — высота условного перицентра, соответствующая нижней границе коридора.
- J — тензор инерции.
- J_{x*}, J_{y*}, J_{z*} — составляющие тензора инерции относительно главных осей инерции.
- K — аэродинамическое качество КА; $K = \frac{c_y}{c_x}$.
- K_0 — значение аэродинамического качества при полете на балансирующем угле атаки.
- $K_{\text{расп}}$ — максимальное располагаемое значение аэродинамического качества.
- $K_{\text{эфф}}$ — «эффективное» качество КА, управляемых углом крена;
$$K_{\text{эфф}} = K_0 \cos \gamma.$$
- L — конечная продольная дальность полета.
- L_{Π} — продольная дальность полета, отсчитываемая по поверхности планеты от условного перицентра до точки посадки.
- M — равнодействующая моментов активных сил относительно центра масс аппарата.
- m — масса спускаемого аппарата.
- $(n_{\max})_{\text{доп}}$ — максимальная допустимая перегрузка.
- n_x — перегрузка вдоль скоростной оси СА.
- n_y — перегрузка от действия подъемной силы.
- n_{Σ} — суммарная перегрузка.
- $n_{\max}$ — максимальная суммарная перегрузка.
- $(P_{x \max})_{\text{доп}}$ — максимально допустимая приведенная нагрузка.

P_x — приведенная нагрузка на лобовую поверхность спускаемого аппарата;

$$P_x = \frac{G}{c_x S}.$$

Q — суммарный тепловой поток.

q — удельный тепловой поток.

$\bar{q}$ — скоростной напор; $\bar{q} = \frac{\rho V^2}{2}$.

r — расстояние от центра планеты до КА.

r_a — расстояние от центра планеты до апоцентра орбиты.

r_p — расстояние от центра планеты до перигея орбиты.

S — площадь миделя.

T — равнодействующая активных сил, действующих на КА.

T_w — температура на поверхности СА.

t — текущее время полета.

V — скорость центра масс КА.

$V_{кр}$ — первая космическая скорость.

$V_{n \max}$ — скорость полета КА в момент достижения максимальной перегрузки.

$V_{пар}$ — параболическая скорость.

$V_{вх}$ — скорость входа КА в плотные слои атмосферы.

$V_{вых}$ — скорость вылета КА из атмосферы после первого погружения.

W — ускорение СА.

X — аэродинамическое лобовое сопротивление; $X = c_x \bar{q}$.

Y — аэродинамическая подъемная сила; $Y = c_y \bar{q}$.

x, y, z — скоростная барицентрическая система координат, соответствующая системе $\tilde{\xi}, \tilde{\eta}, \tilde{\zeta}$, приведенной в гл. II.

α — угол атаки.

α_0 — балансирующий угол атаки.

β — логарифмический градиент плотности.

γ — угол крена СА.

ΔH_p — величина коридора входа по высотам условного перигея.

ΔL_k — отклонение конечной продольной дальности от требуемого значения.

ΔL_b — отклонение конечной боковой дальности от требуемого значения.

$\Delta \theta_{вх}$ — величина коридора входа по углам входа.

θ — угол наклона вектора скорости к местному горизонту.

$\theta_{вх}^{(в)}$ — угол входа, соответствующий верхней границе коридора входа.

$\theta_{вх}^{(н)}$ — угол входа, соответствующий нижней границе коридора входа.

μ — произведение массы планеты на постоянную тяготения.

ρ — плотность атмосферы.

$\sigma_x = \frac{c_x S}{G}$ — баллистический параметр.

ω — угловая скорость вращения координатных осей, связанных с телом относительно инерциальных осей.

$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции вектора угловой скорости на оси связанной системы координат.

ω^* — угловая скорость вращения планеты.

17.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В процессе спуска космического аппарата (КА) или его спускаемого аппарата (СА) должна быть погашена вся потенциальная и кинетическая энергия, уровень которой чрезвычайно высок. Например, при спуске с орбиты ИСЗ одна техническая единица массы обладает энергией в десятки миллионов килограммометров. Принципиально гашение энергии можно осуществлять двумя путями:

— активным торможением;

— пассивным торможением с использованием аэродинамических сил.

Первый способ применяется для посадки КА на небесные тела, лишенные атмосферы. Для посадки на планеты, имеющие атмосферу, в настоящее время более эффек-

тивным считается второй способ — торможение с использованием аэродинамических сил. В этом случае при торможении энергия движения практически полностью переходит в тепловую, рассеивается в окружающем пространстве и поглощается хладагентами и конструкцией СА за счет ее теплоемкости.

В данной главе рассматривается второй способ посадки.

По скорости входа КА в плотные слои атмосферы различают спуск с первой космической скоростью (спуск с орбиты ИСЗ) [18, 22], спуск со скоростью, близкой ко второй космической (при возвращении КА от Луны) [3, 12, 23], и спуск с гиперболическими скоростями (при возвращении КА от планет Солнечной системы) [2, 16, 24].

По характеру использования аэродинамической подъемной силы известны два типа спуска — планирующий спуск (с использованием подъемной силы) и баллистический спуск ($K=0$).

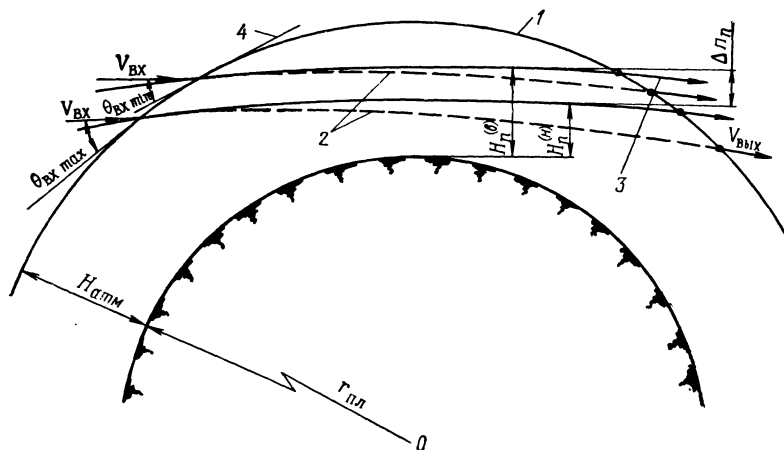


Рис. 17.1. Коридор входа СА в атмосферу:

1—условная граница атмосферы; 2—траектория движения КА в атмосфере; 3—траектория движения КА без учета атмосферы; 4—местный горизонт

На последнем этапе спуска должна быть осуществлена безопасная посадка космонавтов:

- самолетная посадка СА вместе с космонавтами;
- парашютная посадка космонавтов, покинувших корабль у Земли;
- посадка с использованием парашютной, реактивной или парашютно-реактивной системы приземления аппарата и т. д.

В общем случае следует различать две составные части проблемы спуска КА:

- подход к границе плотных слоев атмосферы;
- движение в плотных слоях атмосферы, включая посадку.

В результате решения первой задачи должны быть прежде всего получены необходимые начальные условия входа в атмосферу, которые обеспечиваются точностью прогноза и коррекции траектории возвращения КА.

К начальным условиям входа относятся: скорость входа ($V_{вх}$), угол наклона вектора скорости к местному горизонту на границе условной атмосферы ($\theta_{вх}$) и координаты точки входа. В качестве границы плотных слоев атмосферы принимается то значение высоты над поверхностью планеты, где аэродинамические силы становятся соизмеримыми с силой притяжения. Для простоты исследований обычно принимается, что во всех случаях так называемая условная граница атмосферы постоянна и определяется некоторой высотой над поверхностью $H_{атм}$. Так, для Земли $H_{атм} \approx 100$ км ($Q_H = 100 \approx 5,4 \cdot 10^{-10}$ кг/м³). Внесенные этим допущением погрешности решения в реальном полете оказываются весьма незначительными.

Одной из основных характеристик спуска является ширина коридора входа. Она дает возможность проводить общие сравнительные оценки аппаратов разного класса, позволяет судить о принципиальной возможности совершения конкретным аппаратом тех или иных оптимальных маневров при спуске, позволяет сформулировать требования к точности прогнозирования и коррекции траекторий.

Для спуска с орбиты ИСЗ коридор входа обычно характеризуется разностью предельных углов входа

$$\Delta\theta_{вх} = \theta_{вх \max} - \theta_{вх \min}.$$

Этот диапазон определяется допустимыми перегрузками, тепловым режимом для обеспечения безопасного спуска КА и точностью посадки.

Под шириной коридора входа для межпланетных КА понимается диапазон высот условного перицентра H_{Π} (или углов входа $\theta_{вх}$ на высоте $H_{атм}$), в котором возможен безопасный спуск КА (рис. 17.1). Высота условного перицентра представляет собой то минимальное расстояние от планеты, которое имела бы траектория возвращения, если бы атмосфера не влияла на движение аппарата. Между высотой условного перицентра H_{Π} и углом входа на границе условной атмосферы $\theta_{вх}$ для каждой скорости входа существует однозначное соответствие. На рис. 17.2 приведена взаимозависимость $H_{\Pi}(\theta_{вх})$ для диапазона начальных скоростей $V_{вх} = 11-30$ км/с при входе в атмосферу Земли.

Коридор входа ограничен «верхней» и «нижней» границами. «Верхняя» граница

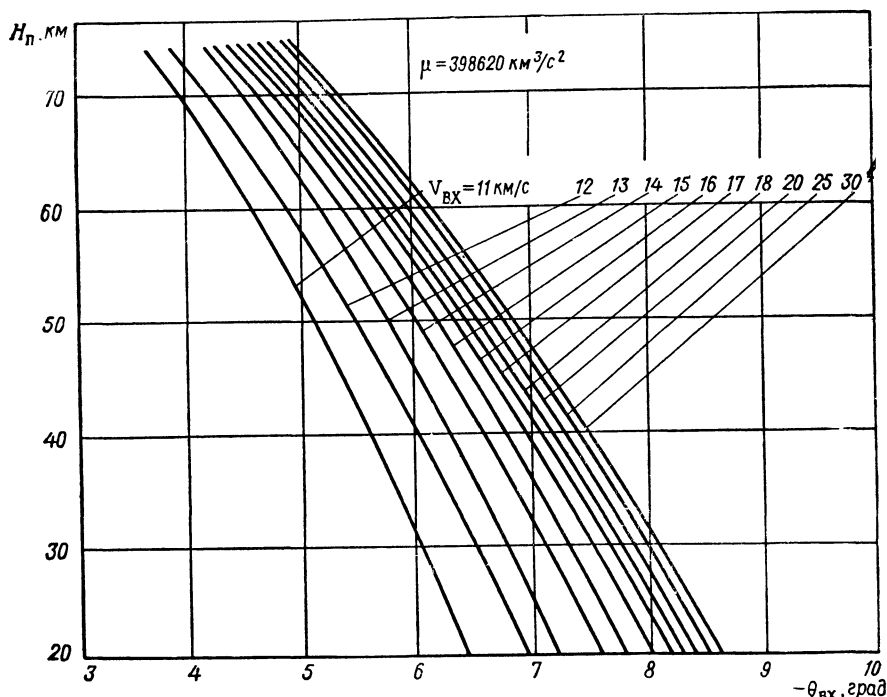


Рис. 17.2. Зависимость угла входа $\theta_{вх}$ СА в атмосферу от высоты условного перицентра H_{Π}

$H_{\Pi}^{(в)}$ характеризуется максимальной высотой условного перицентра траектории возвращения, при входе по которой обеспечивается выполнение поставленных условий по «захвату» корабля атмосферой. При входе КА со скоростями, большими первой космической, можно ограничить высоту подъема КА после вылета его из атмосферы (или время полета после вылета), дальность полета и т. д. Чаще всего считается, что корабль «захвачен» атмосферой, если после первого прохождения плотных слоев атмосферы он удаляется от Земли не более чем на 300—400 км (первая схема спуска).

При входе в атмосферу Земли по гиперболическим траекториям ($V_{вх} > 11,2$ км/с), имеющим место, например, при полетах и возвращении КА от Марса или Венеры, в некоторых случаях целесообразно использовать схему спуска, когда при движении в атмосфере корабль гасит скорость до величины, большей первой космической скорости, но меньшей параболической скорости ($V_{кр} < V_{вых} < V_{пар}$), выходит на вытянутую эллиптическую орбиту и уже с нее осуществляет посадку (вторая схема). В этом случае высота, достигаемая кораблем после вылета и определяющая границу захвата, может исчисляться десятками тысяч километров.

«Нижняя» граница $H_{\Pi}^{(н)}$ коридора входа КА, как правило, определяется допустимым перегрузочным режимом или минимальной высотой орбиты при второй схеме посадки.

Величиной $\Delta H_{\Pi} = H_{\Pi}^{(в)} - H_{\Pi}^{(н)}$ определяется максимальная ширина коридора входа. В некоторых случаях при определении границ коридора входа могут выдвигаться и другие ограничения (например, ограничения на максимальную температуру, глубину погружения, требуемую дальность полета и т. д.). В этих случаях ширина коридора будет меньше или равна ΔH_{Π} .

17.2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СПУСКАЕМОГО АППАРАТА

Вид дифференциальных уравнений движения СА зависит от выбранной системы координат и от состава принимаемых во внимание сил, действующих на аппарат. Ниже рассмотрены два наиболее важных случая записи уравнений движения центра масс СА в проекциях [5, 11, 18, 22].

1) на оси планетоцентрической прямоугольной экваториальной системы координат $OX_A Y_A Z_A$ с началом в центре масс планеты, принимаемой за инерциальную систему, с направлениями осей:

- OZ_A из центра планеты к северному полюсу Мира;
- OX_A из центра планеты в точку весеннего равноденствия;
- OY_A из центра планеты и дополняет систему до правой;

2) на оси скоростной барицентрической системы координат $Axyz$ с началом в центре масс СА.

Считается, что на корабль, движущийся в атмосфере планеты, действуют:

- сила тяжести G ;
- аэродинамическая сила R_a ;
- тяга двигателя T (или равнодействующая активных сил);
- суммарная сила притяжения Солнца, Луны и планет F_Σ .

В результате

$$\bar{F} = \bar{G} + \bar{R}_a + \bar{F}_\Sigma + \bar{T}. \quad (17.1)$$

При расчетах траекторий спуска, даже самых точных, F_Σ обычно не учитывается вследствие малости. Например, при спуске в атмосфере Земли ускорение в результате действия притяжения Луны и Солнца составляет соответственно $\sim 1,2 \cdot 10^{-7}$ и $\sim 0,5 \cdot 10^{-7}$ от ускорения g_3 .

17.2.1. Уравнения движения в инерциальной системе

Проектируя составляющие вектора равнодействующей силы $\bar{F}$ на оси инерциальной системы $OX_A Y_A Z_A$, получаем выражения для ускорений в проекциях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{G_{xA}}{m} &= -\frac{\mu_{пл}}{r^2} \frac{X_A}{r} + g_{XA}^{(n)}; \\ \frac{G_{yA}}{m} &= -\frac{\mu_{пл}}{r^2} \frac{Y_A}{r} + g_{yA}^{(n)}; \\ \frac{G_{zA}}{m} &= -\frac{\mu_{пл}}{r^2} \frac{Z_A}{r} + g_{zA}^{(n)}; \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{R_{XA}}{m} &= \frac{K\sigma_x g_0}{2} qV^2 [a_1 \cos \gamma + b_1 \sin \gamma] - \frac{\sigma_x g_0}{2} qVV_{XA}; \\ \frac{R_{YA}}{m} &= \frac{K\sigma_x g_0}{2} qV^2 [a_2 \cos \gamma + b_2 \sin \gamma] - \frac{\sigma_x g_0}{2} qVV_{YA}; \\ \frac{R_{ZA}}{m} &= \frac{K\sigma_x g_0}{2} qV^2 [a_3 \cos \gamma + b_3 \sin \gamma] - \frac{\sigma_x g_0}{2} qVV_{ZA}; \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{F_{\Sigma XA}}{m} &= \sum_{i=1}^n \mu_i \left[\frac{X_{iA} - X_A}{(r - r_i)^3} - \frac{X_{iA}}{r_i^3} \right]; \\ \frac{F_{\Sigma YA}}{m} &= \sum_{i=1}^n \mu_i \left[\frac{Y_{iA} - Y_A}{(r - r_i)^3} - \frac{Y_{iA}}{r_i^3} \right]; \\ \frac{F_{\Sigma ZA}}{m} &= \sum_{i=1}^n \mu_i \left[\frac{Z_{iA} - Z_A}{(r - r_i)^3} - \frac{Z_{iA}}{r_i^3} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (17.4)$$

$$T_{XA}^* = \frac{T_{XA}}{m}; \quad T_{YA}^* = \frac{T_{YA}}{m}; \quad T_{ZA}^* = \frac{T_{ZA}}{m}. \quad (17.5)$$

В соотношениях (17.2) первые члены учитывают основную составляющую ускорения, вызванного притяжением планеты; вторые члены — нецентральность сил притяжения планеты.

Для случая движения в атмосфере Земли основной член, учитывающий нецентральность земного притяжения, записывается следующим образом [22]:

$$g^{(н)} = \varepsilon_1 \frac{5Z_A^2 - r^2}{r^6} \quad (\varepsilon_1 = 0,2635 \cdot 10^{26} \text{ м}^5/\text{с}^2).$$

В соотношениях (17.3) слагаемые представляют собой ускорения соответственно за счет подъемных сил и сил лобового сопротивления. Коэффициенты $a_1, \dots, b_3$ являются направляющими косинусами взаимно перпендикулярных осей, относительно которых отсчитывается угол крена (при управлении креном).

Соотношения (17.4) показывают составляющие ускорения, вызываемые притяжением других планет (помимо планеты, в атмосфере которой происходит спуск).

Соотношения (17.5) являются составляющими ускорений за счет действия активных сил.

Дифференциальные уравнения движения в проекциях на оси инерциальной системы координат имеют следующий вид (в случае движения в поле земного притяжения):

$$\left. \begin{aligned} \ddot{X}_A &= -\frac{\mu}{r^2} \frac{X_A}{r} + \varepsilon_1 \frac{5Z_A^2 - r^2}{r^6} \frac{X_A}{r} + \frac{\sigma_x g_0}{2} qVV X_A + \\ &+ \sum_{i=1}^n \mu_i \left[\frac{X_{iA} - X_A}{(r - r_i)^3} - \frac{X_{iA}}{r_i^3} \right] + \frac{K\sigma_x g_0}{2} qV^2 [a_1 \cos \gamma + b_1 \sin \gamma] + \\ &+ T_{XA}^*; \\ Y_A &= -\frac{\mu}{r^2} \frac{Y_A}{r} + \varepsilon_1 \frac{5Z_A^2 - r^2}{r^6} \frac{Y_A}{r} - \frac{\sigma_x g_0}{2} qVV Y_A + \\ &+ \sum_{i=1}^n \mu_i \left[\frac{Y_{iA} - Y_A}{(r - r_i)^3} - \frac{Y_{iA}}{r_i^3} \right] + \frac{K\sigma_x g_0}{2} qV^2 (a_2 \cos \gamma + \\ &+ b_2 \sin \gamma) + T_{YA}^*; \\ \ddot{Z}_A &= -\frac{\mu}{r^2} \frac{Z_A}{r} + \varepsilon_1 \frac{5Z_A^2 - r^2}{r^6} \frac{Z_A}{r} - \frac{\sigma_x g_0}{2} qVV Z_A + \\ &+ \sum_{i=1}^n \mu_i \left[\frac{Z_{iA} - Z_A}{(r - r_i)^3} - \frac{Z_{iA}}{r_i^3} \right] + \frac{K\sigma_x g_0}{2} qV^2 (a_3 \cos \gamma + \\ &+ b_3 \sin \gamma) + T_{ZA}^*; \\ V_{XA} &= \dot{X}_A = \int_0^t \ddot{X}_A dt; \\ V_{YA} &= \dot{Y}_A = \int_0^t \ddot{Y}_A dt; \\ V_{ZA} &= \dot{Z}_A = \int_0^t \ddot{Z}_A dt. \end{aligned} \right\} \quad (17.6)$$

Уравнения движения центра масс (17.6) могут быть использованы для точных вычислений параметров движения.

17.2.2. Уравнения движения СА в скоростной системе координат

Если считать, что все силы, действующие на СА, приложены к его центру масс, то уравнение движения относительно вращающейся планеты будет (масса СА считается постоянной)

$$\bar{W} = F\bar{m} = \bar{R}_a + \bar{T} + \bar{G} + \bar{F}_{ц\omega*} + \bar{F}_k + \Delta\bar{F}_A + \Delta\bar{F}_{cf} + \bar{F}_\Sigma. \quad (17.7)$$

Здесь $F_{ц\omega^*}$ — центробежная сила, возникающая в результате вращения планеты

$$\bar{F}_{ц\omega^*} = m (\bar{\omega}^* \times \bar{r}) \times \bar{\omega}^*;$$

$$\bar{F}_K — \text{сила Корнолиса; } \bar{F}_K = 2m (\bar{V} \times \bar{\omega}^*);$$

$\Delta \bar{F}_g$ — составляющая за счет нецентральности сил притяжения;

$\Delta \bar{F}_{сф}$ — составляющая за счет нешарообразности планеты.

Ускорение СА в скоростной системе координат представляется в виде

$$\bar{W} = \left(\frac{dV}{dt} \bar{i} + V \frac{d\theta^*}{dt} \bar{j} + V \frac{d\varepsilon^*}{dt} \bar{k} \right),$$

где $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ — единичные векторы по скоростным осям;

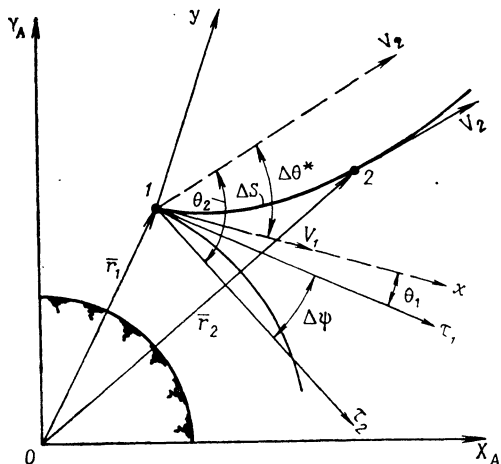


Рис. 17.3. К выводу уравнений движения:

0 — центр планеты; 1 — начальное положение аппарата; 2 — положение аппарата через некоторый промежуток времени Δt ; τ_1 , τ_2 — линии местного горизонта в точках 1 и 2 соответственно

$\Delta \theta^*$ и $\Delta \varepsilon^*$ — изменение углов наклона вектора скорости к плоскости местного горизонта соответственно в продольной и перпендикулярной плоскостях движения, которые отсчитываются от некоторой начальной точки траектории (рис. 17.3).

Справедливо соотношение $\Delta \theta^* = \Delta \theta - \Delta \psi$,

$$\text{где } \Delta \psi = \frac{\Delta S \cos \theta}{r} = \frac{V \cos \theta}{r} dt.$$

В результате уравнение (17.7) в проекциях на оси скоростной системы координат записывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= -X - T_x - G_x + F_{ц\omega_x^*} + F_{Kx}; \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= Y - T_y - G_y + F_\theta + F_{ц\omega_y^*} + F_{Ky}; \\ mV \frac{d\varepsilon^*}{dt} &= Z + G_z + F_{ц\omega_z^*} + F_{Kz}. \end{aligned} \right\} \quad (17.8)$$

Вместо угла ε^* можно пользоваться углом ε (углом пересечения траектории с параллелью), причем [11]

$$\frac{d\varepsilon^*}{dt} = \left(\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{V}{r} \cos \varepsilon \operatorname{tg} \varphi_{ц} \cos \theta \right) \cos \theta,$$

где $\varphi_{ц}$ — широта места;

ε — угол, который составляет вектор скорости с параллелью в плоскости, касательной к поверхности планеты (угол изменяется от 0° до 360° и измеряется от восточного направления параллели против часовой стрелки).

Проекции силы тяги:

$$T_x = T \cos (\alpha - \tau_y); \quad T_y = T \sin (\alpha - \tau_y),$$

где α — угол атаки;
 η — угол установки двигателя.
 Проекция силы притяжения:

$$G_x = G \sin \theta; \quad G_y = G \cos \theta; \quad G_z = 0.$$

Проекция центробежной силы, возникающей в результате вращения планеты, и силы Кориолиса запишутся следующим образом:

$$F_{\omega x}^* = -F_{\omega}^* (\sin \varphi_{\Pi} \sin \varepsilon \cos \theta - \cos \varphi_{\Pi} \sin \theta);$$

$$F_{\omega y}^* = F_{\omega}^* (\sin \varphi_{\Pi} \sin \varepsilon \sin \theta + \cos \varphi_{\Pi} \cos \theta);$$

$$F_{\omega z}^* = F_{\omega}^* \sin \varphi_{\Pi} \cos \varphi_{\Pi};$$

$$F_{Kx} = 0;$$

$$F_{Ky} = 2mV\omega^* \cos \varepsilon \cos \varphi_{\Pi};$$

$$F_{Kz} = 2mV\omega^* (\cos \theta \sin \varphi_{\Pi} - \sin \theta \sin \varepsilon \cos \varphi_{\Pi});$$

$$|F_K| = 2mV\omega^* \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_{\Pi} \sin^2 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \varepsilon \cos^2 \varphi_{\Pi} - \frac{1}{2} \sin 2\theta \sin 2\varphi_{\Pi} \sin \varepsilon}.$$

Дополнительно к системе уравнений (17.8) можно записать еще три кинематических соотношения, позволяющие определить положение центра масс КА:

$$\frac{dH}{dt} = V \sin \theta;$$

$$\frac{d\varphi_{\Pi}}{dt} = -\frac{V}{r} \cos \theta \sin \varepsilon;$$

$$\frac{d\lambda_{\Pi}}{dt} = -\frac{V^2}{r} \frac{\cos \varepsilon \cos \theta}{\cos \varphi_{\Pi}}.$$

Итак, окончательно получим общие уравнения движения СА в скоростной сферической системе координат:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= -c_x S \frac{\rho V^2}{2} - mg_0 \frac{r_{\Pi\lambda}^2 \sin \theta}{r^2} + T \cos (\alpha - \gamma_y) + \\ &+ m\omega^{*2} r \cos \varphi_{\Pi} (\cos \varphi_{\Pi} \sin \theta - \sin \varphi_{\Pi} \sin \varepsilon \cos \theta); \\ mV \frac{d\theta}{dt} &= c_y S \frac{\rho V^2}{2} - mg_0 \frac{r_{\Pi\lambda}^2 \cos \theta}{r^2} + T \sin (\alpha - \gamma_y) + \\ &+ \frac{mV^2 \cos \theta}{r} + m\omega^{*2} r \cos \varphi_{\Pi} (\sin \varphi_{\Pi} \sin \varepsilon \sin \theta + \cos \varphi_{\Pi} \cos \theta) + \\ &+ 2mV\omega^* \cos \varepsilon \cos \varphi_{\Pi}; \\ \cos \theta mV \frac{d\varepsilon}{dt} &= c_z S \frac{\rho V^2}{2} + m\omega^{*2} r \cos \varphi_{\Pi} \cos \varepsilon \sin \varphi_{\Pi} + \\ &+ 2mV\omega^* (\cos \theta \sin \varphi_{\Pi} - \sin \theta \sin \varepsilon \cos \varphi_{\Pi}) - m \frac{V^2}{r} \cos \varepsilon \operatorname{tg} \varphi_{\Pi} \cos^2 \theta; \\ \frac{dH}{dt} &= V \sin \theta; \\ \frac{d\varphi_{\Pi}}{dt} &= -\frac{V}{r} \cos \theta \sin \varepsilon; \\ \frac{d\lambda_{\Pi}}{dt} &= -\frac{V^2}{r} \frac{\cos \varepsilon \cos \theta}{\cos \varphi_{\Pi}}. \end{aligned} \right\} \quad (17.9)$$

Ускорение, обусловленное вращением планеты, как правило, невелико по сравнению с основной составляющей $g = \mu/r^2$, и во многих случаях центробежной силой без большой погрешности можно пренебречь (например, для Земли ускорение за счет центробежной силы составляет всего $\sim 0.04\%$ от g_3). Силы Кориолиса начинают оказывать заметное влияние на движение КА в атмосфере Земли при скоростях полета более 2000—3000 м/с. При таких скоростях сила Кориолиса может составлять несколько

процентов от силы тяжести, а при $V \sim 8000$ м/с — порядка 10% от G_3 [11]. Необходимо отметить, что величина силы Кориолиса довольно сложным образом зависит от места и направления полета. Поэтому при проведении проектно-баллистических расчетов силой Кориолиса в первом приближении пренебрегают. При более точных расчетах, особенно связанных с навигацией КА, эти силы надо учитывать.

17.2.3. Уравнения движения относительно центра масс

В проекциях на оси связанной системы координат $Ax_1y_1z_1$ движение спускаемого аппарата относительно центра масс описывается следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \frac{1}{J_{x_1}^*} \left[M_1 - (J_{z_1}^* - J_{y_1}^*) \omega_2 \omega_3 \right]; \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1}{J_{y_1}^*} \left[M_2 - (J_{x_1}^* - J_{z_1}^*) \omega_3 \omega_1 \right]; \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{1}{J_{z_1}^*} \left[M_3 - (J_{y_1}^* - J_{x_1}^*) \omega_1 \omega_2 \right], \end{aligned} \right\} \quad (17.10)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции вектора угловой скорости $\vec{\omega}^*$ на оси связанной системы координат $Ax_1y_1z_1$;

M_1, M_2, M_3 — проекции вектора момента равнодействующих активных сил на оси связанной системы координат $Ax_1y_1z_1$;

$J_{x_1}^*, J_{y_1}^*, J_{z_1}^*$ — главные моменты инерции КА относительно главных осей инерции.

За основные направления осей связанной системы координат $Ax_1y_1z_1$ принимаются:

Ax_1 — в основной плоскости (плоскости вектор скорости — радиус-вектор), по оси симметрии СА;

Ay_1 — в вертикальной плоскости симметрии СА вверх;

Az_1 — дополняет систему до правой.

Полученные уравнения движения относительно центра масс используются на практике для оценки устойчивости движения и выбора основных проектных параметров системы управления спускаемого космического аппарата.

17.2.4. Основные кинематические соотношения

Полные уравнения движения спускаемого КА включают уравнения движения центра масс (17.6) или (17.9) в зависимости от рассматриваемой системы координат, уравнения движения относительно центра масс (17.10) и кинематические уравнения, связывающие линейные и угловые скорости с линейными и угловыми координатами.

Так, если рассматривать движение СА в скоростной системе $Axyz$ и связанной системе $Ax_1y_1z_1$, то уравнения (17.9) и (17.10) необходимо дополнить следующими основными кинематическими соотношениями:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\vartheta}_V &= \dot{\varphi}_\Pi (\sin \epsilon \cos \varphi_\Pi - \cos \epsilon \sin \varphi_\Pi \sin \theta) + \dot{\epsilon} \cos \theta \sin \varphi_\Pi + \dot{\theta} \cos \varphi_\Pi, \\ \dot{\varphi}_V &= \dot{\lambda}_\Pi - \dot{\varphi}_\Pi (\cos \epsilon \sin \theta \cos \varphi_\Pi + \sin \epsilon \sin \varphi_\Pi) \frac{1}{\cos \vartheta_V} + \dot{\epsilon} \cos \theta \cos \varphi_\Pi \frac{1}{\cos \vartheta_V} - \\ &\quad - \dot{\theta} \frac{\sin \varphi_\Pi}{\cos \vartheta_V}, \\ \dot{\varphi}_V &= \dot{\lambda}_\Pi \sin \vartheta_V + \dot{\varphi}_\Pi \cos \epsilon \cos \theta + \dot{\epsilon} \sin \theta - \dot{\varphi}_V \sin \vartheta_V; \\ \alpha &= \omega_2 \sin \gamma^* + \omega_3 \cos \gamma^* - \dot{\varphi}_V (\sin \beta^* \sin \vartheta_V - \cos \beta^* \cos \vartheta_V \sin \varphi_V) - \\ &\quad - \dot{\vartheta}_V \cos \varphi_V \cos \beta^* - \dot{\varphi}_V \sin \beta^*; \\ \gamma^* &= \omega_1 - \dot{\varphi}_V (\cos \beta^* \cos \alpha \sin \vartheta_V + \sin \alpha \cos \vartheta_V \cos \varphi_V + \sin \beta^* \cos \alpha \cos \vartheta_V \sin \varphi_V) + \\ &\quad + \dot{\vartheta}_V (\cos \varphi_V \sin \beta^* \cos \alpha - \sin \varphi_V \sin \alpha) - \dot{\varphi}_V \cos \beta^* \cos \alpha - \dot{\beta}^* \sin \alpha; \\ \beta^* &= [\omega_2 \cos \gamma^* - \omega_3 \sin \gamma^* - \dot{\varphi}_V (\cos \alpha \cos \vartheta_V \cos \varphi_V - \cos \beta^* \sin \alpha \sin \vartheta_V - \\ &\quad - \sin \beta^* \sin \alpha \cos \vartheta_V \sin \varphi_V) - \dot{\vartheta}_V (\cos \varphi_V \sin \beta^* \sin \alpha + \sin \varphi_V \cos \alpha) + \\ &\quad + \dot{\varphi}_V \cos \beta^* \sin \alpha] \frac{1}{\cos \alpha}; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\vartheta} &= \omega_2 \sin \tilde{\varphi} + \omega_3 \cos \tilde{\varphi}; \\ \tilde{\psi} &= \frac{\omega_2 \cos \tilde{\varphi} - \omega_3 \sin \tilde{\varphi}}{\cos \tilde{\vartheta}}; \\ \tilde{\varphi} &= \omega_1 - \tilde{\psi} \sin \tilde{\vartheta}. \end{aligned} \right.$$

17.3. АТМОСФЕРЫ ОСНОВНЫХ ПЛАНЕТ ЗЕМНОЙ ГРУППЫ

Для проведения баллистических расчетов движения СА в атмосфере планет необходимо прежде всего знать распределение плотности по высоте $\varrho(H)$, которое в общем случае зависит от времени года и широты. При расчетах с целью получения качественных результатов достаточно знать некоторое стандартное распределение $\varrho(H)$, рассчитываемое для среднего состояния атмосферы. На рис. 17.4 приведена приближенная модель атмосферы Венеры с указанием нижней и верхней границ изменения $\varrho(H)$ [1, 9, 15, 17, 19, 20, 23]. Модели атмосфер Земли и Марса приведены в гл. I.

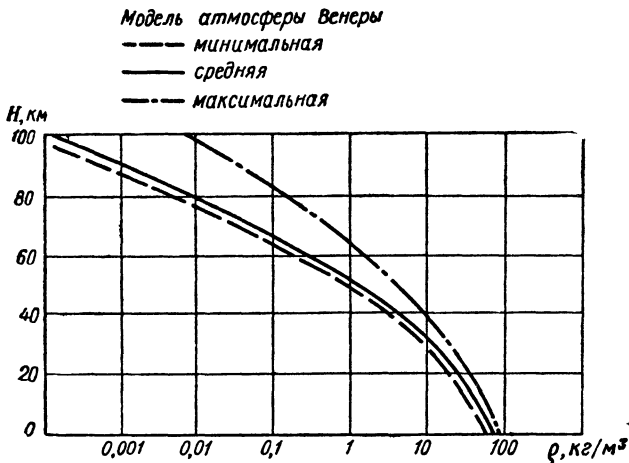


Рис. 17.4. Изменение плотности по высоте для атмосферы Венеры

Имеющиеся в настоящее время данные не позволяют построить точные модели атмосфер планет, в том числе и распределение плотности по высоте. Для проведения приближенных расчетов допустимо пользоваться экспоненциальным представлением изменения плотности по высоте

$$\varrho = \varrho_0 e^{-\beta H},$$

где ϱ_0 — среднее значение плотности атмосферы у поверхности; β — значение градиента плотности; H — высота над поверхностью.

В табл. 17.1 приведены основные характеристики атмосфер планет земной группы.

Таблица 17.1

Основные характеристики атмосфер планет

Параметр	Единица измерения	Земля	Марс	Венера
Средняя равновесная температура стратосферы	К	218	178	200
Средний молекулярный вес газового состава атмосферы	отн. ед.	29	44—42	44 (?)
Логарифмический градиент плотности стратосферы	км ⁻¹	0,15—0,18	0,09—0,125	0,15—0,23 (?)
Плотность атмосферы у поверхности	г/см ³	1,23·10 ⁻³	(1,3—2,7)·10 ⁻⁵	6,4·10 ⁻² (?)

17.4. ВНЕАТМОСФЕРНЫЙ УЧАСТОК СПУСКА

На внеатмосферном участке полета необходимо обеспечить полет КА по такой траектории, чтобы были выполнены требуемые условия входа в плотные слои атмосферы (начальные условия на границе плотных слоев атмосферы).

При возвращении к Земле аппаратов с параболическими и гиперболическими скоростями, а также при полете КА к планетам Солнечной системы необходимые условия входа могут быть обеспечены только путем сообщения кораблю определенного корректирующего импульса. При возвращении КА с низких орбит спутников Земли и планет принципиально можно организовать перевод корабля на траекторию спуска двумя путями: *аэродинамическим* и с помощью *реактивного импульса*.

Идея аэродинамического метода состоит в следующем. Известно, что эллиптические орбиты с течением времени превращаются в круговые. Посредством увеличения силы торможения в апоцентре и уменьшения ее в перигентре сохраняется требуемая эллиптичность орбиты до последних витков. При допустимой остаточной эллиптичности захват спутника атмосферой происходит в области наиболее низких орбитальных высот. Управление полетом и переход на траекторию спуска можно осуществлять с помощью изменения силы сопротивления X и подъемной силы Y . Искусственное изменение X производится за счет изменения баллистического параметра

$$\sigma_x = \frac{c_x S}{G}, \text{ в частности путем поворота КА около центра масс. Эффективность управления зависит от возможного диапазона изменения баллистического параметра } \bar{\sigma} = \frac{\sigma_{x \max}}{\sigma_{x \min}}.$$

Для современных кораблей-спутников коэффициент $\bar{\sigma}$ невелик, для планирующих КА он может достигать величины 20 и более.

При этом виде спуска большое значение имеет прогноз времени существования спутника на последних витках.

При этом виде спуска большое значение имеет прогноз времени существования спутника на последних витках.

Зная величину σ_x и программу торможения, можно определить $t_{\text{сущ}}$ по периоду с достаточной точностью.

В настоящее время основным способом перевода КА на траекторию спуска является *способ сообщения тормозного импульса*. Производится это следующим образом. Сначала осуществляется ориентация корабля на орбите, т. е. оси корабля занимают определенное заданное положение в космическом пространстве. Затем в заранее рассчитанное время включается тормозная двигательная установка (ТДУ) и двигатель работает определенное время, необходимое для изменения вектора скорости таким образом, чтобы перевести СА на траекторию полета к Земле (рис. 17.5).

Для проектировочных расчетов можно пренебречь длительностью участка торможения, т. е. предположить, что тормозной импульс прикладывается мгновенно.

Если в фиксированный момент времени известны требуемые условия входа на условной границе атмосферы:

- $V_{\text{вх}}$ — скорость;
 - $\theta_{\text{вх}}$ — угол наклона вектора скорости к плоскости местного горизонта;
 - $r_{\text{вх}}$ — радиус-вектор из центра планеты;
 - $\omega_{\text{вх}}$ — аргумент широты,
- то этим самым определяются параметры переходного эллипса.

При известных параметрах орбиты (радиусе перигея r_p , радиусе апогея r_a и аргументе широты перигея ω_p) точка пересечения этой орбиты с переходным эллипсом определяет (см. рис. 17.5) момент включения тормозного двигателя $t_{\text{вкл}}$, величину u и направление λ вектора тормозной скорости, время спуска $t_{\text{сп}}$, дальность спуска $L_{\text{сп}}$ от момента включения ТДУ до входа в атмосферу и угол разворота $\Delta\theta_{\text{разв}}$ по тапгажу, обеспечивающий ориентированный вход СА в атмосферу.

Формулы для расчета указанных величин, полученные из уравнений невозмущенного кеплеровского движения, имеют следующий вид [5]:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{2r_a r_{II}}{r_a + r_{II}}; \quad e = \frac{r_a - r_{II}}{r_a + r_{II}}; \quad a = \frac{r_a + r_{II}}{2}; \quad c_1 = r_{BX} V_{BX} \cos \vartheta_{BX}; \\
 p_1 &= \frac{c_1^2}{\mu}; \quad h_1 = V_{BX}^2 - \frac{2\mu}{r_{BX}}; \quad e_1 = \sqrt{1 + \frac{h_1 c_1}{\mu}}; \quad a_1 = -\frac{\mu}{h_1}; \\
 \cos \vartheta'_{BX} &= \frac{p_1 - r_{BX}}{e_1 r_{BX}}; \quad \sin \vartheta'_{BX} = -\sqrt{1 - \cos^2 \vartheta'_{BX}}; \quad \tilde{\omega}'_{II} = \tilde{\omega}_{BX} - \vartheta'_{BX}; \\
 \sin \tilde{\omega}_{ВВХ} &= [p^2 e_1^2 + p_1^2 e^2 - 2pp_1 e e_1 \cos(\tilde{\omega}_{II} - \tilde{\omega}'_{II})]^{-1} \times \\
 &\times [(p e_1 \sin \tilde{\omega}'_{II} - p_1 e \sin \tilde{\omega}_{II})(p_1 - p) - (p e_1 \cos \tilde{\omega}'_{II} - p_1 e \cos \tilde{\omega}_{II})] \times \\
 &\times \sqrt{p^2(e_1^2 - 1) + p_1^2(e^2 - 1) + 2pp_1[1 - e e_1 \cos(\tilde{\omega}_{II} - \tilde{\omega}'_{II})]}; \\
 \cos \tilde{\omega}_{ВКЛ} &= \frac{p_1 - p - (p e_1 \sin \tilde{\omega}'_{II} - p_1 e \sin \tilde{\omega}_{II}) \sin \tilde{\omega}_{ВКЛ}}{p e_1 \cos \tilde{\omega}'_{II} - p_1 e \cos \tilde{\omega}_{II}}; \\
 \vartheta_{ВКЛ} &= \tilde{\omega}_{ВКЛ} - \tilde{\omega}_{II}; \quad \vartheta'_{ВКЛ} = \tilde{\omega}_{ВКЛ} - \tilde{\omega}'_{II}; \\
 \tilde{V} &= \sqrt{\frac{\mu}{a}}; \quad V_p = \tilde{V} \frac{1 + e \cos \vartheta_{ВКЛ}}{\sqrt{1 - e^2}}; \quad V_r = \tilde{V} \frac{e \sin \vartheta_{ВКЛ}}{\sqrt{1 - e^2}}; \\
 u_p &= V'_p - V_p; \quad u_r = V'_r - V_r; \quad u = \sqrt{u_p^2 + u_r^2}; \\
 \sin \lambda &= \frac{u_r}{u}; \quad \cos \lambda = \frac{u_p}{u}; \quad \tau = \frac{E - e \sin E}{n}; \quad n = \frac{\tilde{V}}{a}; \\
 \sin E &= \sin \vartheta \frac{\sqrt{1 - e^2}}{1 + e \cos \vartheta}; \quad \cos E = \frac{e + \cos \vartheta}{1 + e \cos \vartheta}; \\
 t_{СП} &= \tau_{ВХ} - \tau_{ВКЛ}; \quad \Delta \vartheta = \vartheta_{ВХ} - \vartheta'_{ВКЛ}; \quad L_{СП} = r_{II} \Delta \vartheta; \\
 \Delta \vartheta_{РАЗ} &= (\lambda - \pi) + \Delta \vartheta + \vartheta_{ВХ} + \alpha_6,
 \end{aligned}$$

где p — фокальный параметр;

e — эксцентриситет;

a — большая полуось эллипса;

c — постоянная интеграла площадей;

h — постоянная интеграла энергии;

ϑ — истинная аномалия;

$\tilde{\omega}$ — аргумент широты ($\sin \tilde{\omega} = \frac{\sin \varphi}{\sin i}$; здесь φ — географическая широта, i — наклонение орбиты);

E — эксцентрическая аномалия;

n — средняя угловая скорость движения КА по орбите;

τ — время, отсчитываемое от момента прохождения перигентра.

Индексы «I» и «'» относятся к параметрам переходного эллипса.

Можно решить также и обратную задачу — определить условия входа в атмосферу $V_{ВХ}$, $\vartheta_{ВХ}$, $r_{ВХ}$, $\omega_{ВХ}$, $\tau_{ВХ}$ при известном моменте включения тормозного двигателя $\tau_{ВКЛ}$, величине u и направлении λ вектора тормозной скорости. Предполагаются известными также параметры орбиты в момент включения ТДУ: скорость $V_{ВКЛ}$, угол наклона вектора скорости к плоскости местного горизонта $\vartheta_{ВКЛ}$, радиус из центра планеты $r_{ВКЛ}$, аргумент широты $\tilde{\omega}_{ВКЛ}$.

Скорость КА после окончания работы ТДУ ($V'_{ВКЛ}$) и угол наклона к местному горизонту ($\vartheta'_{ВКЛ}$) определяются из следующих соотношений:

$$\begin{aligned}
 V'_{ВКЛ} &= \sqrt{V_{ВКЛ}^2 + u^2 - 2V_{ВКЛ}u \cos(\lambda - \vartheta_{ВКЛ})} \approx V_{ВКЛ} - u \cos(\lambda - \vartheta_{ВКЛ}); \\
 \vartheta'_{ВКЛ} &= \vartheta_{ВКЛ} + \arctg \frac{u \sin(\lambda - \vartheta_{ВКЛ})}{V_{ВКЛ} - u \cos(\lambda - \vartheta_{ВКЛ})} \approx \vartheta_{ВКЛ} + \frac{u}{V_{ВКЛ}} \sin(\lambda - \vartheta_{ВКЛ}).
 \end{aligned}$$

Параметры входа $V_{\text{вх}}, \theta_{\text{вх}}, \tilde{\omega}_{\text{вх}}$ определяются при фиксированном $r'_{\text{вх}}$:

$$V_{\text{вх}} = \sqrt{2 \frac{\mu}{r_{\text{вх}}} - \frac{\mu}{a_1}}; \quad \theta_{\text{вх}} = \arctg \frac{e_1 r_{\text{вх}} \sin \vartheta_{\text{вх}}}{p_1}; \quad \tilde{\omega}_{\text{вх}} = \tilde{\omega}'_{\text{п}} + \vartheta'_{\text{вх}}; \quad \tau_{\text{вх}} = \tau_{\text{вкл}} + \Delta t.$$

$$\text{Здесь } a_1 = \frac{r_{\text{вкл}}}{2 - K_{\text{вкл}}}; \quad K_{\text{вкл}} = \frac{V_{\text{вкл}}^2 r_{\text{вкл}}}{\mu};$$

$$e_1 = \sqrt{(1 - K_{\text{вкл}})^2 + K_{\text{вкл}}(2 - K_{\text{вкл}}) \sin^2 \vartheta'_{\text{вкл}}}; \quad p_1 = a_1(1 - e_1^2);$$

$$\cos \vartheta'_{\text{вх}} = \frac{\frac{p_1}{r_{\text{вх}}} - 1}{e_1}; \quad \cos \vartheta'_{\text{вкл}} = \frac{K_{\text{вкл}} \cos^2 \vartheta'_{\text{вкл}} - 1}{e_1};$$

$$\tilde{\omega}'_{\text{п}} = \tilde{\omega}_{\text{вкл}} - \vartheta'_{\text{вкл}}; \quad \Delta t = \frac{1}{n} [(E'_{\text{вх}} - e_1 \sin E'_{\text{вх}}) - (E'_{\text{вкл}} - e_1 \sin E'_{\text{вкл}})];$$

$$n_1 = \frac{\sqrt{\mu}}{a_1^{3/2}}; \quad \tg \frac{E'_{\text{вкл}}}{2} = \sqrt{\frac{1 - e_1}{1 + e_1}} \tg \frac{\vartheta'_{\text{вкл}}}{2};$$

$$\tg \frac{E'_{\text{вх}}}{2} = \sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} \tg \frac{\vartheta'_{\text{вх}}}{2}.$$

17.5. АТМОСФЕРНЫЙ УЧАСТОК СПУСКА

После прохождения внеатмосферного участка КА входит в плотные слои атмосферы.

Системы дифференциальных уравнений (17.6), (17.9) представляют собой полные системы уравнений, описывающие спуск аппаратов в атмосфере. Для проведения качественных исследований с целью выявления основных закономерностей целесообразно пользоваться системой уравнений, записанных при некоторых допущениях:

— спуск аппарата происходит под действием только силы веса G и аэродинамической силы R_a ;

— Земля (или планета, на которую происходит спуск) — шар радиусом $r_{\text{пл}}$;

— поле тяготения центральное;

— движение аппарата вокруг центра масс не рассматривается;

— рассматривается плоское движение.

При сделанных упрощающих предположениях система уравнений записывается в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= -\sigma_x g_0 \cdot \frac{QV^2}{2} - g \sin \theta; \\ \frac{d\theta}{dt} &= \sigma_x K g_0 \frac{QV}{2} + \left(\frac{V}{r} - \frac{g}{V} \right) \cos \theta; \\ \frac{dH}{dt} &= V \sin \theta; \quad \frac{dL}{dt} = V \frac{r_{\text{пл}}}{r} \cos \theta; \\ g &= \frac{\mu}{r^2}; \quad n_x = \frac{c_x S Q V^2}{2G} = \sigma_x \bar{q}; \\ n_y &= \frac{c_y S Q V^2}{2G} = K \sigma_x \bar{q}; \quad n_z = \sqrt{n_x^2 + n_y^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17.11)$$

Из системы (17.11) видно, что оказывать влияние на траекторию снижения СА в атмосфере принципиально возможно изменением только двух параметров: качества спускаемого аппарата K и баллистического параметра σ_x . В этом случае к основной системе уравнений необходимо добавить уравнения управления и осуществить совместное решение полученной системы. Под уравнением управления понимается аналитическая запись некоторого закона изменения баллистического параметра или качества аппарата на траектории спуска.

В зависимости от величины качества различают несколько режимов спуска и соответственно несколько типов СА. Спуск без участия подъемных сил, когда качество аппарата $K=0$, называется *баллистическим*, а аппараты, на которых реализуется такой спуск, — аппаратами *баллистического спуска*.

Спуск при участии подъемных сил, когда $K \neq 0$, называется *планирующим*. Среди режимов планирующего спуска выделяют еще режим *скользящего* спуска: $0 < K < 0,5 \div 0,7$.

Понятие скользящего спуска возникло в связи с появлением особого класса космических аппаратов, отличающихся большими значениями коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления и сравнительно малым качеством. Аппараты этого класса, радикально отличающиеся от привычных самолетных форм, принято называть аппаратами *скользящего спуска*.

Аппараты, позволяющие получать качество более $0,7-1$, называются аппаратами *планирующего спуска*.

Баллистический спуск является простейшим видом спуска, наиболее просто реализуемым. Он применялся для спуска аппаратов шаровых форм («Восток») и сегментально-конических («Союз», «Джеминей»). При этом на участке снижения в атмосфере не требуется применения специальных сложных систем управления СА. Баллистический спуск наиболее надежен по сравнению со всеми другими видами спуска.

Если принять, что максимально допустимой для космонавта перегрузкой является $n_{\max} \approx 10 \div 11$, то при баллистическом спуске с орбиты ИСЗ диапазон возможных углов лежит в пределах от $\theta_{\text{вх}} = 0$ до $\theta_{\text{вх}} = -2,5^\circ \div -3^\circ$ (рис. 17.6–17.8); при возвращении с параболической скоростью диапазон допустимых углов входа существенно сокращается и лежит в пределах от $\theta_{\text{вх}} \approx -4,5^\circ$ до $\theta_{\text{вх}} \approx -5^\circ$ для СА с $\sigma_x \approx 0,0002 \text{ м}^2/\text{Н}$ (рис. 17.9, 17.10). При гиперболических скоростях входа баллистический спуск СА с человеком на борту практически невозможен.

Наряду с тяжелым перегрузочным режимом баллистический спуск характеризуется достаточно тяжелым тепловым режимом. Так, при спуске СА с орбиты ИСЗ максимальные температуры на поверхности СА достигают $2500-3000^\circ\text{С}$, а суммарные тепловые потоки $50-150 \text{ тыс. ккал/м}^2$. С увеличением скорости $V_{\text{вх}}$ тепловые потоки и максимальные температуры значительно увеличиваются, причем в тепловом балансе резко возрастает роль лучистых тепловых потоков:

$$V_{\text{вх}} \approx 11 \text{ км/с}; T_{W_{\max}} \approx 3300 \div 3500^\circ\text{С}; Q_{\Sigma} = 230 \div 250 \text{ тыс. ккал/м}^2;$$

$$V_{\text{вх}} = 13 \text{ км/с}; T_{W_{\max}} \approx 4000 \div 4200^\circ\text{С}; Q_{\Sigma} = 330 \div 350 \text{ тыс. ккал/м}^2.$$

Аппараты скользящего спуска, так же как и аппараты баллистического спуска, не имеют специальных аэродинамических устройств для создания подъемной силы. Аэродинамические силы создаются самим корпусом аппарата за счет его несимметричного обтекания вследствие соответствующего расположения центра тяжести аппарата относительно центра давления. На аппаратах скользящего спуска должна быть предусмотрена специальная система стабилизации.

На рис. 17.11 и 17.12 показано изменение основных параметров траектории спуска для СА, снижающихся с орбиты ИСЗ с постоянным значением качества $K=0,2$ и $0,5$ соответственно. Особенностью траекторий спуска КА с постоянным значением качества является их колебательный характер около траектории равновесного планирования, на которой аэродинамическая подъемная сила уравновешивает центробежную силу и силу тяжести. Частота и амплитуда колебаний зависят от параметров входа и качества аппарата. Как видно из рис. 17.11 и 17.12, частота колебаний увеличивается с ростом качества. В силу этого рассмотрение неуправляемого полета аппаратов планирующего спуска нецелесообразно.

Тепловой режим спуска аппаратов скользящего типа достаточно близок к режиму спуска аппаратов баллистического типа. Он характеризуется несколько меньшими значениями максимальных температур и одновременным увеличением суммарного теплового потока. Так, при спуске СА со значением $K=0,2$ с орбиты ИСЗ максимальные значения температур уменьшаются на $300-400^\circ\text{С}$, а Q_{Σ} увеличивается на $15-25 \text{ тыс. ккал/м}^2$ по сравнению с баллистическим спуском.

17.5.1. Номинальные траектории спуска с орбиты ИСЗ

Наиболее распространенным является класс простейших номинальных траекторий с *постоянным значением качества*. В зависимости от реальных начальных условий входа в атмосферу может быть установлено такое значение качества, которое обеспечивает попадание КА в заданный район (естественно, в пределах зоны маневра). При спуске с орбиты ИСЗ значение качества $\sim 0,15$ вполне достаточно для существенного

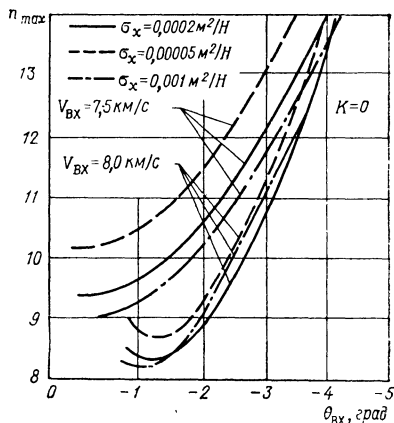


Рис. 17.6. Зависимость максимальной перегрузки $n_{\max}$ от угла входа $\theta_{\text{вх}}$ при спуске с орбиты ИСЗ

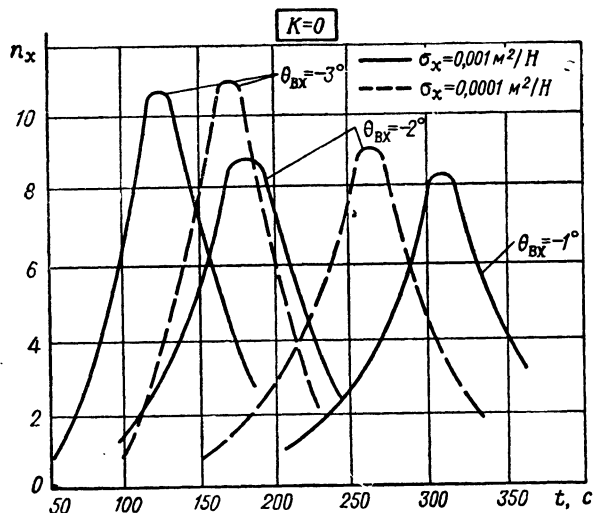


Рис. 17.7. Зависимость перегрузки n_x от времени t при спуске с низкой орбиты ИСЗ

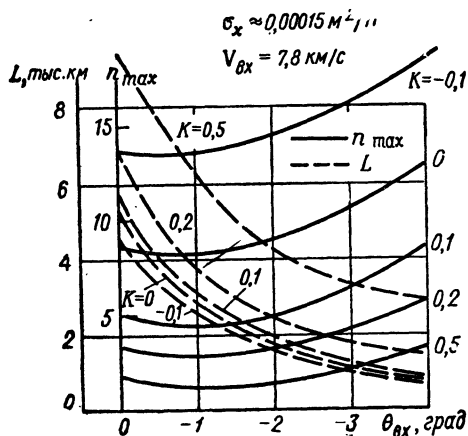


Рис. 17.8. Зависимость максимальной перегрузки $n_{\max}$ и дальности спуска L , отсчитываемой от точки входа в атмосферу до точки посадки, от угла входа θ_{BX}

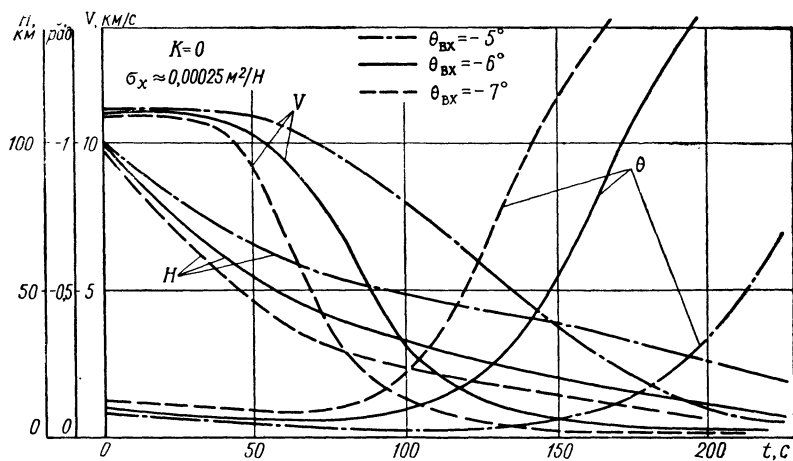


Рис. 17.9. Зависимость скорости V , высоты H и угла θ наклона вектора скорости к местному горизонту от времени спуска t

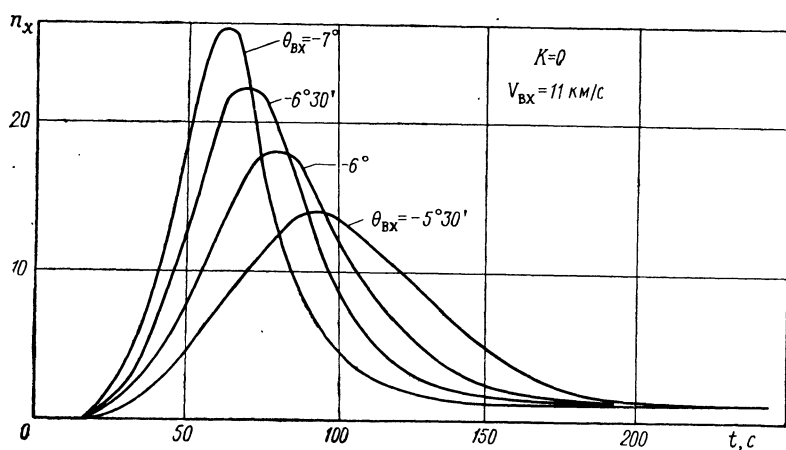


Рис. 17.10. Зависимость перегрузки n_x от времени t при спуске с орбиты ИСЗ

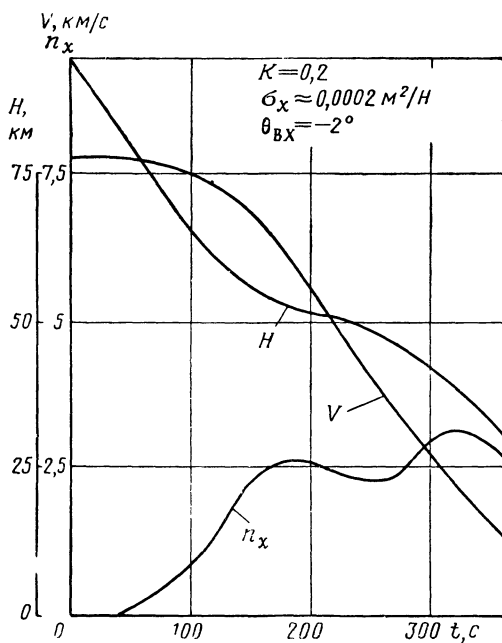


Рис. 17.11. Зависимость скорости V , высоты H и перегрузки n_x от времени t при спуске СА с орбиты ИСЗ с постоянным значением качества $K=0,2$

облегчения перегрузочного режима (максимальные значения перегрузок не превышают 4—5).

Небольших запасов качества в пределах 0,1—0,2 (относительно номинального значения) в целом достаточно для парирования действующих на СА возмущений. Погрешное номинальное значение качества определяется как условиями входа аппарата в плотные слои атмосферы, так и требуемым районом посадки.

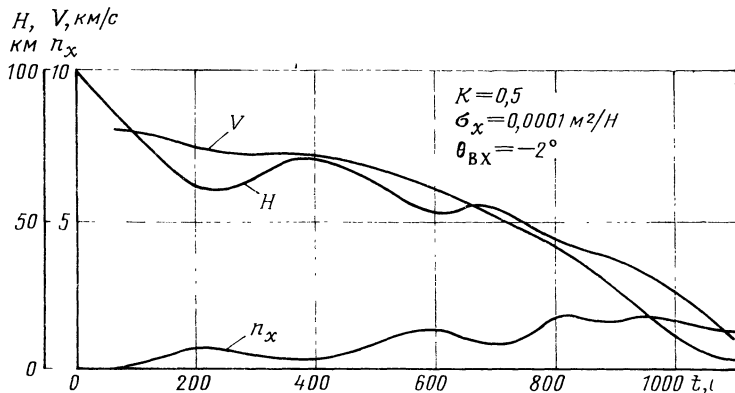


Рис. 17. 12. Зависимость скорости V , высоты H и перегрузки n_x от времени t при спуске СА с орбиты ИСЗ с постоянным значением качества $K=0,5$

Во многих случаях целесообразной является номинальная траектория с постоянным значением качества на основном участке полета с *переходом на закрутку* (режим полета, близкий к баллистическому спуску $K=0$) с высот полета 25—30 км при скорости полета СА, соответствующей $M \approx 5$. Основным преимуществом указанной траектории является отсутствие необходимости учитывать изменение аэродинамических характеристик на последнем участке полета.

17.5.2. Номинальные траектории при спуске со второй космической скоростью

В зависимости от атмосферной дальности полета СА, отсчитываемой от точки входа до точки посадки, различают два типа траекторий:

— «короткие» траектории, общая дальность которых не превосходит 3000—4000 км;

— «протяженные» траектории с общей дальностью полета, большей 4000—4500 км.

На аппаратах, располагающих малым значением аэродинамического качества, большие дальности полета практически можно получить только при таком снижении, когда СА после кратковременного погружения в атмосферу, погасив скорость до круговой (первая схема спуска), выходит из плотных слоев, движется в верхних слоях атмосферы, затем опять погружается в атмосферу и совершает посадку. В связи с этим на траектории различают три участка спуска:

- участок первого погружения (первый участок);
- участок полета в сильно разреженных слоях атмосферы (второй участок);
- участок второго погружения в атмосферу и посадки в заданном районе (третий участок).

Основной отличительной особенностью первого участка является то, что дальность (и рассеивание) формируются почти полностью именно здесь, хотя этот участок составляет по времени всего 15—20% общего времени спуска.

Действительно, дальность полета на втором и третьем участках зависят, в основном, от двух параметров в конце первого участка:

- скорости вылета из плотных слоев атмосферы $V_{\text{вых}}$;
- угла наклона вектора скорости к местному горизонту $\theta_{\text{вых}}$.

Изменяя управление на первом участке, можно получить множество пар значений $V_{\text{вых}}$ и $\theta_{\text{вых}}$, соответствующих одной и той же дальности полета L . Даже малые погрешности в $\theta_{\text{вых}}$ и $V_{\text{вых}}$ приводят к большому промаху по дальности полета. Так, ошибки в скорости вылета $V_{\text{вых}}$ на 1 м/с или в угле $\theta_{\text{вых}}$ на одну минуту приводят к величине промаха в несколько десятков километров. Следует отметить, что частные производные $\partial L / \partial \theta_{\text{вых}}$ и $\partial L / \partial V_{\text{вых}}$ растут с уменьшением $\theta_{\text{вых}}$ и соответственно с увеличением $V_{\text{вых}}$.

На третьем участке спуска можно скомпенсировать ошибки в дальности полета, накопленные на первых двух этапах полета. Основной особенностью спуска на этом участке является то, что текущая область маневра сравнительно невелика и существенно

зависит от величины располагаемого качества. Так, например, при $K_{расп}=0,4$ величина возможного маневра на третьем участке ΔL^{III} не превосходит 600—700 км. Итак, основное управление на «протяженной» траектории должно происходить на участке первого погружения, причем ошибки по дальности, накопленные на первом и втором участках полета, не должны превосходить величины

$$\Delta L^{I+II} = |\Delta L|_{\max} + |\Delta L_{упр}^{III}|,$$

где $|\Delta L|_{\max}$ — допустимый разброс точек посадки;

$|\Delta L_{упр}^{III}|$ — возможный маневр на третьем участке с учетом погрешности управления.

В общем случае номинальная программа управления должна выбираться таким образом, чтобы величина коридора входа ΔH_n имела максимальное значение. Для этого необходимо, чтобы величина $H_n^{(n)}$ имела максимальное значение, а $H_n^{(n)}$ — соответственно минимальное. В уравнения движения качество входит линейно, поэтому экстремальные значения перегрузок (при $\sigma_x = \text{const}$) достигаются в том случае, когда качество принимает свои граничные значения.

В некоторых случаях для выполнения условий по «захвату» необходимо уменьшить полетное значение качества после прохождения максимума перегрузок. При входе в коридор с $H_n^{(n)} < H_n < H_n^{(n)}$ можно подобрать такое постоянное значение угла крена (эффективное качество), которое обеспечивает выполнение поставленных условий. Класс номинальных траекторий с постоянным углом крена при спуске со второй космической скоростью, как и при спуске с орбиты ИСЗ, очень распространен.

17.6. УПРАВЛЕНИЕ ПРИ СПУСКЕ АППАРАТОВ С ОРБИТЫ ИСЗ И ПРИ ВОЗВРАЩЕНИИ ОТ ЛУНЫ

Система управления — это комплекс устройств, обеспечивающих управление спускаемым аппаратом и предназначенных для ведения СА по определенной номинальной траектории или для выведения его в заданную точку фазового пространства с учетом всех возможных возмущений.

К основным возмущениям, действующим на СА, относятся:

1. Возмущения по начальным условиям входа: ошибки по высоте условного перицентра (или соответственно углу входа); ошибки в скорости входа, в координатах точки входа.

2. Возмущения, вызванные неточным знанием аэродинамических характеристик СА, его веса и размеров.

3. Возмущения, возникающие в результате неточного знания характеристик атмосферы и, в первую очередь, неточного знания зависимости плотности воздуха от высоты и дальности полета, а также турбулентности атмосферы и т. д.

4. Приборные ошибки, связанные с использованными в системе управления чувствительными элементами, средствами обработки информации, исполнительными органами и т. д.

Общая задача управления СА в атмосфере состоит в том, чтобы перевести аппарат из точки, лежащей на границе условной атмосферы и определяемой известными фазовыми координатами, в заданную точку на поверхности Земли (или в какую-то точку, не лежащую на поверхности Земли), выдержав заданные ограничения и промежуточные условия (например, ограничения по перегрузкам, температуре и т. д.). При этом в первую очередь необходимо определить программу управления, при которой обеспечивается полет по траектории, удовлетворяющей поставленным требованиям (номинальная траектория). При действии возмущений текущая траектория полета будет отличаться от расчетной и для обеспечения требуемых условий спуска необходимо введение уточненного закона управления траекторией.

Итак, для получения приемлемого решения целесообразно разбить общую задачу управления на две практически самостоятельные части:

- выбор номинальной траектории и соответствующей ей программы управления;
- построение системы управления (продольным и боковым движением), парирующей воздействие возмущений для осуществления движения по номинальной траектории.

Отдельной задачей управления является *стабилизация движения СА вокруг центра масс*.

Вследствие значительного различия времен длинно- и короткопериодических колебаний СА влиянием последних на первые в первом приближении можно пренебречь и при анализе траекторий рассматривать СА как материальную точку.

В настоящее время основным способом управления при снижении СА является управление путем *изменения аэродинамического качества*. При этом большое распространение получило управление с помощью *изменения угла крена* аппарата, который сбалансирован на постоянном угле атаки α_6 . Поворот СА вокруг оси, направление

которой совпадает с направлением вектора скорости $\bar{V}$, на угол крена γ приводит только к изменению вертикальной составляющей качества

$$K_{эфф} = K_6 \cos \gamma,$$

или (что то же самое), при постоянной величине коэффициента лобового сопротивления, к изменению вертикальной составляющей подъемной силы

$$Y_{эфф} = Y_6 \cos \gamma.$$

где $K_{эфф}$, $Y_{эфф}$ — вертикальная (эффективная) составляющая качества и подъемной силы соответственно;

K_6 , Y_6 — значение качества и подъемной силы на балансировочном угле атаки соответственно.

Изменение по определенной программе угла крена СА позволяет управлять продольным движением. Для сокращения этот способ управления условно называют «управлением углом крена», или «управлением эффективным качеством». Значение качества при $\alpha = \alpha_6$ называют располагаемым значением качества $K_{расп} = K_6$.

Как правило, СА осесимметричны относительно продольной оси, поэтому они статически нейтральны по крену и нет необходимости преодолевать статические моменты при таком управлении (при отсутствии возмущений). Это приводит к существенному энергетическому выигрышу при использовании управления углом крена.

Применение угла крена γ в качестве единственного управляющего параметра вызывает необходимость распорядиться последним так, чтобы обеспечить одновременно как продольное, так и боковое управление. Общее решение этой задачи состоит в раздельном использовании модуля и знака угла γ в одном из двух вариантов:

— изменение модуля γ подчиняется требованиям продольного управления, изменение знака γ — требованиям бокового управления;

— обратное распределение модуля и знака.

Управление с помощью изменений знака угла крена γ по смыслу является дискретным, благодаря чему в конце траектории имеет место неуправляемый участок, на котором образуется конечный промах по соответствующей координате. Первый вариант более удобный, универсальный и точный, так как в этом случае более совершенное управление (модулем угла γ) применяется для решения наиболее сложной части задачи: формирования и стабилизации траектории в продольной плоскости, а более грубое управление (знаком угла γ) — для ликвидации относительно небольших боковых отклонений.

Все возможные типы СУС можно классифицировать по некоторым общим признакам.

1. По средствам связи с Землей и по использованию информации (или команд) с Земли:

- автономные;
- командного наведения с Земли;
- полуавтономные или комбинированные.

2. По роли космонавта в управлении полетом:

- автоматические;
- ручные;
- полуавтоматические.

3. По принципу построения:

- системы управления с использованием прогнозирования траектории спуска;
- системы управления, строящиеся на отслеживании номинальной траектории.

4. По характеру обработки поступающей информации:

- с простейшей обработкой;
- с использованием специализированных вычислителей.

5. По способу стабилизации опорной траектории (запоминаемой на борту аппарата или прогнозируемой):

- с непрерывным управлением относительно расчетной траектории;
- с дискретным корректированием траектории в некоторых характерных точках.

6. В зависимости от типа установки чувствительных элементов на борту аппарата:

- с чувствительными элементами, выставленными определенным образом в инерциальном пространстве (что достигается, например, при использовании гиросtabilизированной платформы);

— с чувствительными элементами, жестко связанными с корпусом аппарата.

Каждой системе управления присущи свои достоинства и недостатки в отношении обеспечиваемой точности, надежности, весовых затрат, потребных бортовых и наземных средств, простоты реализации и т. д., что в целом и определяет компромиссность выбора типа СУС в каждом конкретном случае.

17.6.1. Простые системы управления непрерывного действия

В настоящем разделе рассматривается задача построения алгоритмов управления конечной дальностью полета СА — задача обеспечения посадки СА в заданном районе Земли с минимальным разбросом точек приземления.

Можно рассматривать следующие принципы синтеза СУС непрерывного действия:

- с использованием заранее рассчитанных программных зависимостей;

— с прогнозированием точки посадки;
— смешанного типа, когда по результатам прогноза выбирается программная зависимость.

Наиболее простыми являются СУС первого типа. Под простыми СУС понимаются системы, которые строятся с использованием простой, легко доступной для измерений информации и предусматривают обработку этой информации (для выдачи управляющего сигнала) на простейших вычислителях (или простых аналоговых устройствах). В настоящее время считается, что такой простой информацией является информация от измерения перегрузок, интегралов от перегрузок и времени полета. При этом СУС получается наиболее простой, если перегрузки измеряются в осях, жестко связанных с корпусом СА.

При работе СУС непрерывного действия должна определяться некоторая функция фазовых координат (функционал управления), выдерживание текущих значений которой близкими к расчетным позволяют обеспечить необходимую точность приземления. В качестве такой функции можно рассматривать отклонение точки приземления от заданной точки $\Delta L_k = L_k - L_{k \text{ ном}}$, которое должно быть равно нулю. Считая, что действующие на СА возмущения невелики, отклонение точки посадки в продольной плоскости движения (при условии, что с момента времени t_i возмущения не будут действовать) можно записать в виде

$$\Delta L_k(t_i) = \frac{\partial L_k}{\partial X_i} \Delta X_i + \frac{\partial L_k}{\partial Y_i} \Delta Y_i + \frac{\partial L_k}{\partial V_{x_i}} \Delta V_{x_i} + \frac{\partial L_k}{\partial V_{y_i}} \Delta V_{y_i}. \quad (17.12)$$

Здесь $\frac{\partial L_k}{\partial X_i}, \dots, \frac{\partial L_k}{\partial V_{y_i}}$ — частные производные конечной дальности полета по координатам и скоростям, взятым в момент времени t_i ; $\Delta X, \Delta Y, \Delta V_x, \Delta V_y$ — соответственно отклонения составляющих координат и скорости СА в момент t_i от заданных значений.

Приводя в каждый момент времени выражение для $\Delta L_k(t_i)$ к нулю путем введения соответствующего управляющего воздействия

$$\Delta L_k(t_i) = \xi \frac{\partial L_k}{\partial \gamma} \Delta \gamma = 0,$$

можно обеспечить условие посадки в заданном районе. Здесь $\frac{\partial L_k}{\partial \gamma}$ — частная производная конечной дальности по углу крена для момента t_i , коэффициент $\xi \neq 0$ вводится для улучшения динамики процесса управления.

Для решения выбранного функционала необходимо знать частные производные $\frac{\partial L_k}{\partial X}, \dots, \frac{\partial L_k}{\partial \gamma}$, номинальные (программные) значения траекторных параметров $X_{\text{ном}}, Y_{\text{ном}}, \gamma_{\text{ном}}$ и текущие значения этих же параметров, которые должны быть определены на борту СА.

Системы управления, использующие простую информацию с датчиков, жестко связанных с корпусом СА, имеют существенные методические ошибки. Эти погрешности приводят к появлению некомпенсируемого промаха порядка 1000—1500 км при $V_{\text{вх}} \approx 11$ км/с и $L_{\text{п}} \geq 9000$ км, что показывает нецелесообразность их применения для указанных режимов спуска. Возможность использования подобных СУС зависит от соотношения фактических ошибок по ΔL и требуемых точностей приземления.

17.6.2. Система управления, использующая измерения с датчиков, не связанных жестко с корпусом СА

Рассмотрим принципы инерциального управления дальностью полета СА, когда чувствительные элементы — акселерометры установлены определенным образом на гиросtabilизированной платформе [6]. В этом случае члены $\Delta X, \dots, \Delta V_x$ в функционале (17.12) представляют собой рассогласования составляющих координат и скоростей инерциальной системы на текущей и номинальной (программной) траекториях.

Перепишем выражение (17.12), взяв только два основных, определенным образом выбранных направления в инерциальной системе:

$$\Delta L_k = \frac{\partial L_k}{\partial V_\lambda}(t_i) \Delta V_\lambda + \frac{\partial L_k}{\partial S_\mu}(t_i) \Delta S_\mu. \quad (17.13)$$

Функция (17.13) выражает промах в конечной дальности полета, вызванный погрешностями в момент времени t_i , причем

$$\frac{\partial L_k}{\partial V_\lambda}(t_i) = \sqrt{\left[\frac{\partial L_k}{\partial V_x}(t_i) \right]^2 + \left[\frac{\partial L_k}{\partial V_y}(t_i) \right]^2 + \left[\frac{\partial L_k}{\partial V_z}(t_i) \right]^2};$$

$$\frac{\partial L_k}{\partial S_\mu}(t_i) = \sqrt{\left[\frac{\partial L_k}{\partial X}(t_i) \right]^2 + \left[\frac{\partial L_k}{\partial Y}(t_i) \right]^2 + \left[\frac{\partial L_k}{\partial Z}(t_i) \right]^2}.$$

где ΔV_λ — проекция вектора ($\Delta V_X, \Delta V_Y, \Delta V_Z$) на направление λ , определяемое вектором $\text{grad}_V L$;

ΔS_μ — проекция вектора ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$) на направление μ , определяемое вектором $\text{grad}_S L$.

Задача управления состоит в приведении функционала (17.13) к нулю путем введения соответствующих корректирующих добавок. В случае идеального управления равенство $\Delta L_K = 0$ должно выполняться вдоль всей траектории. Оно может быть выполнено, если на траектории

$$\Delta V_\lambda = \int_0^t \Delta \dot{V}_\lambda dt = 0; \quad \Delta S_\mu = \int_0^t \int_0^\tau \Delta \dot{V}_\mu d\tau dt = 0.$$

Итак, можно построить систему управления дальностью полета, использующую два интегрирующих акселерометра, установленных по направлению баллистических инвариантов (направления λ и μ). Методические ошибки подобных СУС, вызванные, в частности, использованием вместо рассогласований пути и скорости рассогласований интегралов от перегрузок, подобны ошибкам при использовании датчиков, жестко связанных с корпусом СА. Целесообразность их применения объясняется, в первую очередь, незначительными погрешностями за счет неточной балансировки СА в полете. Вместе с тем применение подобных СУС требует обеспечения достаточно точной выставки чувствительных элементов и малых уходов гиросплатформы в процессе снижения. Действительно, ошибка в 1 мин в точности выставки гиросtabilизированной платформы приводит для рассмотренного в предыдущем разделе примера ($V_{вх} \approx 11$ км/с, $L_n > 9000$ км) к отклонению точки посадки приблизительно на 20 км.

Отметим, что функционал (17.13) принципиально может быть реализован при использовании только одного интегрирующего акселерометра с переменным направлением оси чувствительности [6]. Перепишем (17.13):

$$\begin{aligned} \Delta L_K &= \frac{\partial L_K}{\partial V_\lambda}(t_i) \int_0^t \Delta \dot{V}_\lambda dt + \frac{\partial L_K}{\partial S_\mu}(t_i) \int_0^t \int_0^\tau \Delta \dot{V}_\mu d\tau dt = \\ &= \int_0^t \left[\frac{\partial L_K}{\partial V_\lambda}(t_i) \Delta \dot{V}_\lambda + (t - \tau) \frac{\partial L_K}{\partial S_\mu}(t_i) \Delta \dot{V}_\mu \right] dt = \\ &= \int_0^t \left[\frac{\partial L_K}{\partial V_\lambda}(t_i) \bar{\lambda}^0 + (t - \tau) \frac{\partial L_K}{\partial S_\mu}(t_i) \bar{\mu}^0 \right] \Delta \dot{V} dt. \end{aligned} \quad (17.14)$$

Здесь $\bar{\lambda}^0, \bar{\mu}^0$ — соответственно единичные векторы в направлении $\text{grad}_V L$ и $\text{grad}_S L$.

Если вдоль траектории выдерживать равенство нулю проекции $\Delta \dot{V}$ на направление

$$\bar{v} = \frac{\partial L_K}{\partial V_\lambda} \bar{\lambda}^0 + \frac{\partial L_K}{\partial S_\mu} \bar{\mu}^0 (t - \tau),$$

то в конце полета обеспечивается $\Delta L_K = 0$. В силу этого интегрирующий акселерометр должен быть в каждый момент времени направлен по $\bar{v}$. Направление $\bar{v}$ в общем случае можно определить двумя углами λ_1 и λ_2 :

λ_1 — угол между местным горизонтом, проведенным в условном периферическом центре траектории, и проекцией $\bar{v}$ на плоскость орбиты;

λ_2 — угол между плоскостью орбиты и $\bar{v}$.

При этом $\lambda_1 > 0$, если $\bar{v}$ выше местного горизонта; $\lambda_2 > 0$, если $\frac{\partial L_K}{\partial V_Z} > 0$. В целом

подобные СУС позволяют осуществить посадку СА с разбросом точек приземления в несколько сотен километров ($V_{вх} = 11$ км/с, $L_n > 8000$ км).

Рассмотрим некоторые из более простых вариантов СУС. Из приведенных данных следует, что в общем случае для реализации функционалов типа (17.12) — (17.14) необходимо, кроме интегрирования перегрузок, дифференцировать их или вводить гиросtabilизированную платформу с двумя интегрирующими акселерометрами или одним акселерометром с переменным направлением и т. д., т. е. эти системы можно определить как «не очень простые». Во многих случаях целесообразно применять действительно простые системы, использующие минимальную информацию и самую простую ее обработку. К таким системам относятся СУС, использующие информацию с одного интегрирующего акселерометра. Ось этого акселерометра или жестко связана с корпусом СА ($n_{св}$), или выставлена определенным образом в инерциальном пространстве ($n_{ин}$). На борту СА запоминается программная зависимость изменения перегрузок $n_{св}$ или $n_{ин}$

в функции используемого в СУС аргумента. Чаще всего в качестве аргумента используют кажущуюся скорость $V_{св}$ или $V_{ин}$.

По величине рассогласований перегрузок $\Delta n_{св} = (n_{св})_{тек} - (n_{св})_{прогр}$ или $\Delta n_{ин} = (n_{ин})_{тек} - (n_{ин})_{прогр}$ на текущей и программной траекториях формируют управляющий сигнал $\Delta \gamma = \xi \Delta n$. Коэффициент ξ может быть или постоянным, или переменным по траектории. Это определяется в основном требованиями, предъявляемыми к точности посадки СА.

В некоторых случаях вместо рассогласований перегрузок используют рассогласования времени спуска на текущей и программной траекториях. Подобные простые СУС имеют существенные методические ошибки, что определяет возможную область их применения: спуск с орбиты ИСЗ или спуск только по «коротким» траекториям при возвращении СА от Луны. При спуске с орбиты ИСЗ простые СУС позволяют обеспечить посадку с разбросом по дальности полета в пределах нескольких десятков километров.

17.6.3. Дискретная система управления, использующая семейство попадающих траекторий

Применение дискретного управления при наведении аппарата на одну заданную опорную траекторию, как правило, неэффективно и нецелесообразно. Работу дискретной системы можно существенно улучшить, если траекторию полета непрерывно изменять с учетом возмущающих факторов при использовании метода попадающих траекторий.

Рассмотрим один из возможных путей построения закона управления путем дискретного корректирования траектории в ее характерных точках. Будем называть попадающими такие траектории, полет КА по которым приводит к попаданию в заданную точку, т. е. когда обеспечивается достижение заданной дальности при обязательном выполнении ограничения по перегрузке $n_{max} < (n_{max})_{доп}$.

Метод попадающих траекторий при управлении дальностью полета возвращающегося космического корабля целесообразно применять по следующим причинам. При решении задачи попадания в заданную точку нет необходимости компенсировать влияние возмущений в каждой точке траектории, выбираемой на основании обработки измерений на начальном участке спуска в атмосфере. Имеется целое семейство траекторий, движение по которым позволяет выполнить поставленные условия. Поэтому рационально рассматривать задачу парирования не текущих отклонений параметров движения от номинальных, а конечного отклонения регулируемого параметра. В данном случае — это обеспечение минимума рассеивания точки посадки при выполнении ограничений по перегрузкам и аэродинамическому нагреву. Требование вести полет по одной траектории приводит к чрезмерной перегрузке на СУС и нерациональному расходу рабочего тела.

Рассмотрим один из возможных путей управления при дискретном корректировании траектории с использованием метода попадающих траекторий. При синтезе системы управления предполагается, что существует m точек на траектории, в которых можно изменять величину управляющей силы (путем введения корректирующего изменения) таким образом, чтобы возмущения были парированы.

Места проведения коррекций могут быть фиксированы или выбираться на борту аппарата в зависимости от действующих возмущений или от величины отклонения текущей траектории от номинальной.

Принцип действия рассматриваемой автономной системы управления заключается в следующем. В момент достижения аппаратом фиксированного значения аргумента системы p_0 по полученной на борту информации определяется некоторое постоянное значение угла крена γ_0 , с которым осуществляется дальнейший полет. В момент достижения аргументом значения $p = p_1$ по результатам сравнения величины функционала, вычисленного по данным бортовых измерений, с некоторым известным значением проводится коррекция первоначального значения угла крена $\gamma_1 = \gamma_0 + \Delta \gamma_1$. В последующие моменты достижения аргументом значений $p = p_2, p_3, \dots, p_m$ аналогичным способом проводятся коррекции значений $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$. Коррекции проводятся так, чтобы на каждом этапе осуществлялся переход на ближайшую попадающую траекторию. Таким образом, выбором угла γ_0 (в момент $p = p_0$) определяется расчетная траектория первого приближения. При действии различных возмущений параметры действительной траектории будут отличаться от параметров расчетной траектории, поэтому в последующие моменты полета на основании продолжающихся бортовых измерений проводятся корректировки текущих значений качества 1, 2, ..., m -го приближений в некоторых характерных точках траектории (при заданных фиксированных значениях аргумента).

17.6.4. Линейный синтез системы дискретного управления с использованием метода попадающих траекторий

В данном разделе приводится построение закона управления в линейной форме в предположении о малости действующих возмущений, когда справедлива запись отклонений от программной траектории в виде линеаризованных уравнений.

При проведении решения используются предположения о том, что:

— осуществляется стабилизация попадающей траектории, определяемой режимом полета с постоянным углом крена γ ;

— система возмущений характеризуется расчетными случайными параметрами $A_1, A_2, \dots, A_l$, включающими все действующие возмущения;

— число коррекций равно m , и проводятся они последовательно в моменты достижения аргументом расчетных значений $p_1, p_2, \dots, p_m$; на участках между коррекциями КА движется с постоянным углом крена, величина которого определяется соответствующей коррекцией, т. е. $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$;

— в процессе спуска измеряются некоторые параметры $x_1, x_2, \dots, x_q$.

В основе синтеза системы управления лежит условие минимизации расстояния между конечной точкой возмущенной траектории и конечной точкой номинальной траектории:

$$\Delta L_k = L - \bar{L} \rightarrow \min,$$

где $L, \bar{L}$ — значения конечной дальности полета в точке приземления на возмущенной и номинальной траекториях соответственно.

Другими словами, необходимо выполнить условие постоянства на номинальной и возмущенной траекториях некоторой функции

$$L = L(A_1, A_2, \dots, A_l; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m).$$

Значение функции L зависит от величины действующих возмущений и текущих полетных значений углов крена $\gamma_i, i=1, 2, \dots, m$ (или величин корректирующих добавок $\Delta\gamma_1, \Delta\gamma_2, \dots, \Delta\gamma_i$, где $\Delta\gamma_i = \gamma_i - \bar{\gamma}_i$). Система строится таким образом, чтобы влияние этих факторов на величину функции L возможно более полно компенсировалось друг другом.

При проведении синтеза системы управления используются соотношения

$$\left. \frac{dL}{dA_k} \right|_{A_k = \bar{A}_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, l) \quad (17.15)$$

при $n_{\max} \leq (n_{\max})_{\text{доп.}}$

Величины производных, входящих в эти условия, определяются как зависимостью функции L от параметров $A_1, A_2, \dots, A_l$, так и зависимостью величин $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ (или корректирующих добавок $\Delta\gamma_1, \Delta\gamma_2, \dots, \Delta\gamma_m$) от этих же параметров; последняя зависимость, собственно, и задается системой управления. При удовлетворении условий (17.15) путем соответствующего выбора значений $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m$ можно в линейном приближении полностью скомпенсировать влияние возмущений на дальность в конечной точке траектории.

Введем понятие корректирующей функции S . Считается, что корректирующая функция известна и представляет собой некоторую функцию от измеряемых параметров $x_1, x_2, \dots, x_q$:

$$S = S(x_1, x_2, \dots, x_q, p). \quad (17.16)$$

Для попадающей расчетной траектории корректирующая функция равна $\bar{S}$. При номинальных значениях всех характеристик, определяющих траекторию полета, на протяжении всего времени движения в атмосфере выполняется тождество

$$\Delta S = S(x_1, x_2, \dots, x_q, p) - \bar{S}(x_1, x_2, \dots, x_q, p) = 0.$$

При действии возмущений между значениями S на возмущенной и номинальной траекториях появляется величина рассогласования

$$\Delta S = S(x_1, x_2, \dots, x_q, p) - \bar{S}(x_1, x_2, \dots, x_q, p) \neq 0.$$

Эта величина рассогласования является основой для формирования корректирующих добавок, т. е. для коррекций траекторий. Значение корректирующей функции в момент i -й коррекции ($i=1, 2, \dots, m$), проводимой в момент достижения аргументом p расчетного значения $\bar{p}_i$, обозначается через S_i :

$$S(x_1, x_2, \dots, x_q) \Big|_{p=\bar{p}_i} = S_i. \quad (17.17)$$

Величина корректирующей добавки определяется в функции от величины рассогласования фактических и расчетных значений корректирующей функции в моменты соответствующих коррекций

$$\Delta \gamma_i \Big|_{p=\bar{p}_i} = Z_i \Delta S_i, \quad (17.18)$$

где $\Delta \gamma_i = \gamma_i - \bar{\gamma}_i$ ($i=1, 2, \dots, m$),

Z_i — коэффициенты для определения корректирующей добавки.

Согласно условиям задачи искомые коэффициенты управления Z_i и корректирующая функция S должны быть определены таким образом, чтобы выполнялись условия (17.15). Вид корректирующей функции S определяется соотношением (17.16). С другой стороны, ее величина в каждом конкретном случае зависит от действующих возмущений и полетных значений угла крена:

$$S_i = S_i(A_1, A_2, \dots, A_l; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1}, p). \quad (17.19)$$

Текущее потребное значение угла крена γ_i также зависит от действующих возмущений и величин предшествующих корректирующих добавок (или полетных значений угла крена):

$$\gamma_i = \gamma_i(A_1, A_2, \dots, A_l; \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{m-1}). \quad (17.20)$$

От тех же параметров A_k ($k=1, 2, \dots, l$) и γ_i ($i=1, 2, \dots, m$) зависит и функция L .

Итак, для решения уравнений (17.18) и (17.15) располагаем явным соотношением (17.16), позволяющим в процессе спуска вычислять на борту КА корректирующую функцию S , и неявными зависимостями (17.19) и (17.20).

Окончательными соотношениями являются:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{Z_m} + \frac{\partial L}{\partial \gamma_m} &= 0; \\ \frac{1}{Z_{m-1}} + \frac{\partial L}{\partial \gamma_{m-1}} - \frac{\partial S_m}{\partial \gamma_{m-1}} &= 0; \\ \frac{1}{Z_{m-2}} + \frac{\partial L}{\partial \gamma_{m-2}} - \frac{\partial S_{m-1}}{\partial \gamma_{m-2}} - \frac{\partial S_m}{\partial \gamma_{m-2}} &= 0; \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{1}{Z_1} + \frac{\partial L}{\partial \gamma_1} - \frac{\partial S_2}{\partial \gamma_1} - \frac{\partial S_3}{\partial \gamma_1} - \dots - \frac{\partial S_{m-1}}{\partial \gamma_1} - \frac{\partial S_m}{\partial \gamma_1} &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (17.21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial A_k} - \left(\frac{\partial S_1}{\partial A_k} + \frac{\partial S_2}{\partial A_k} + \dots + \frac{\partial S_{m-1}}{\partial A_k} + \frac{\partial S_m}{\partial A_k} \right) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, l). \quad (17.22)$$

Уравнения (17.21) позволяют вычислять коэффициенты для определения корректирующих добавок, если известна корректирующая функция S , вид которой определяется системой уравнений (17.22). Сначала следует решить задачу определения корректирующей функции. В общем случае вид корректирующей функции может быть различным, что в первую очередь зависит от имеющихся исходных данных для построения системы: возможностей по выбору исходной измерительной информации, возможностей ее обработки и т. д.

Проведенный синтез системы в линейной постановке при одной опорной траектории может служить основой при окончательном решении рассматриваемой задачи. При этом необходимо иметь в виду, что действительные отклонения от опорной траектории велики и выходят за пределы линейности, поэтому необходимо располагать дополнительным запасом качества для парирования возмущений и обеспечения движения по опорной траектории. Этот запас может быть достигнут введением в закон управления (17.18) множителя, большего единицы и определяемого эмпирическим путем. Однако на аппаратах с ограниченным значением качества ($K < 0,3$) в некоторых случаях может не хватить управляющих сил для обеспечения наведения на опорную траекторию.

При практическом решении задачи необходима настройка системы на начальные условия, т. е. необходим переход на одну из опорных траекторий, выбираемую в результате обработки результатов бортовых измерений на начальном участке спуска. Это означает, что в каждом реальном случае спуска за опорную принимается лишь одна траектория из всего семейства опорных.

За опорные траектории допустимо принимать семейство попадающих траекторий ($\gamma_0 = \text{const}$), определяемых в зависимости от угла крена γ_0 , причем γ_0 может иметь любое из значений от $\gamma_{\min}$ до $\gamma_{\max}$, где $\gamma_{\min}$, $\gamma_{\max}$ — соответственно минимальное и максимальное значения угла крена, обеспечивающие полет по попадающим траекториям (при движении по нижней или верхней границе коридора входа).

Выставка соответствующего угла γ_0^* производится в момент $p = p_0$. При этом все необходимые производные, корректирующие функции и коэффициенты для получения корректирующих добавок должны определяться в функции угла крена: при проведении каждой коррекции указанные выше величины должны соответствовать ближайшим попадающим траекториям, а последние (по условиям задачи) должны быть найдены на борту КА путем обработки результатов бортовых измерений. Эффективность управляющего воздействия зависит не только от величины управляющей силы, но и от начала и продолжительности ее действия. Если для парирования конечного промаха по дальности полета, вызванного действием возмущений, необходима величина добавки к управляющей функции $\Delta \gamma_0$ с момента входа в атмосферу (при $p = p_0$), то с любого

другого момента $p > p_0$ требуется величина $|\Delta\gamma_i| > |\Delta\gamma_0|$ для парирования того же самого возмущения.

Поэтому если при проведении i -й коррекции окажется, что для перевода КА на попадающую траекторию необходима корректирующая добавка $\Delta\gamma_i$, то для определения этой попадающей траектории (нахождение соответствующего угла крена γ_i) значение $\Delta\gamma_i$ следует привести в соответствие с $\Delta\gamma_0$ в момент $p = p_0$. При этом m -разовую систему коррекций при опорной траектории можно рассматривать как m независимых одноразовых коррекций, проводимых в моменты достижения аргументом последовательных значений $p_1, p_2, \dots, p_m$ для опорных попадающих траекторий, определяемых на борту КА.

Для i -й коррекции справедливы следующие выражения:

$$\Delta\gamma_i = Z_i(\gamma_0^{(i)}) \Delta S_i \quad \text{при} \quad p = \bar{p}_i \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

$$\frac{1}{Z_i(\gamma_0^{(i)})} = - \frac{\partial L}{\partial \gamma_i}(\gamma_0^{(i)}) \Big|_{p = \bar{p}_i};$$

$$\frac{\partial S_i}{\partial A_k}(\gamma_0^{(i)}) = \frac{\partial L}{\partial A_k}(\gamma_0^{(i)}) \quad (k = 1, 2, \dots, l).$$

С момента $p = \bar{p}_i$ КА движется с углом крена

$$\gamma_i = \tilde{\gamma}_{i-1} + \Delta\gamma_i.$$

При этом осуществляется наведение на попадающую траекторию $(i+1)$ -го приближения, определяемую полетом с углом крена

$$\gamma_0^{(i+1)} = \gamma_0^{(i)} + \Delta\gamma_i^{(0)} \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

$$\Delta\gamma_i^{(0)} = Z_i^{(0)}(\gamma_0^{(i)}) \Delta S_i;$$

$$\frac{1}{Z_i^{(0)}(\gamma_0^{(i)})} = - \frac{\partial L}{\partial \gamma_0}(\gamma_0^{(i)});$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial A_k}(\gamma_0^{(i)}) = \frac{\partial L}{\partial A_k}(\gamma_0^{(i)})$$

$$(k = 1, 2, \dots, l; \quad i = 1, 2, \dots, m).$$

Оценка приведенного решения с точки зрения потребных бортовых средств для реализации выбранного алгоритма управления показывает, что в период непосредственно перед коррекцией должны выполняться только достаточно простые операции. При этом основной объем вычислений по подготовке исходных данных для проведения окончательных расчетов может осуществляться в период между коррекциями. Поэтому реализация выбранного алгоритма управления возможна при использовании достаточно простых специализированных бортовых вычислителей.

17.6.5. Реализация алгоритма дискретного управления

При построении алгоритма управления дальностью полета для системы простейшего типа в качестве исходной информации используются легко доступные измерения времени полета t и перегрузки n_x по скоростной оси СА. Предполагается, что на борту имеется интегратор для измерения величины кажущейся скорости

$$V_s = g_0 \int_t n_x dt.$$

Итак, имеются три измеряемые величины, которые содержат косвенную информацию о траектории полета:

$$L \rightarrow t; \quad H \rightarrow n_x; \quad V \rightarrow V_s.$$

Необходимо отметить, что даже в случае рассмотрения только продольного движения эта информация является неполной. Полную информацию о продольном движении можно получить, измерив еще производные от перегрузки, что, однако, сопряжено с трудностями при практической реализации.

Порядок работы простой системы управления дальностью полета может быть следующим.

По команде с Земли включаются часы, используемые в системе управления спуском. После отделения от приборного отсека СА ориентируется и стабилизируется таким образом, чтобы к моменту входа в атмосферу угол атаки был близок к расчетному балансировочному углу $\bar{\alpha}_0$, а угол крена γ_0 — к номинальному значению $\bar{\gamma}_0$. Полет с γ_0 проходит до тех пор, пока не будет достигнуто малое заданное значение перегрузки n_c .

При достижении перегрузки n_c включается интегратор для расчета кажущейся скорости V_s и устанавливается новое значение угла крена:

$$\gamma_1 = \gamma_0 + \Delta\gamma_0; \quad \Delta\gamma_0 = a_0\Delta t; \quad \Delta t = t_1 - \bar{t}_1,$$

где t_1 — время достижения перегрузки n_c , отсчитываемое, например, от последнего сеанса радиосвязи при входе со 2-й космической скоростью, или от расчетного момента включения ТДУ при спуске с орбиты ИСЗ; $\bar{t}_1$ — номинальное значение.

Последующие коррекции проводятся при достижении значений кажущейся скорости V_{s_i} ($i=1, 2, \dots, m$). В результате устанавливаются новые углы крена

$$\gamma_{i+1} = \gamma_i + \Delta\gamma_i,$$

где

$$\Delta\gamma_i = a_{i1}\Delta t + a_{i2}\Delta n_x + \sum_{k=0}^{i-1} a_{i(k+3)}\Delta\gamma_k.$$

После проведения последней коррекции полет проходит со значением угла крена γ_m до ввода в действие парашютной системы. СУС с использованием указанного простого алгоритма обеспечивает точность посадки порядка нескольких сотен километров при возвращении корабля от Луны по «протяженным» траекториям и порядка нескольких десятков километров при спуске с орбиты ИСЗ.

17.6.6. Алгоритмы управления, реализуемые с помощью бортовой вычислительной машины

Использование бортовых ЦВМ раскрывает широкие возможности в построении СУС, обеспечивающих высокую точность посадки. Принципиально структура управления в случае использования бортовых ЦВМ очень гибка и позволяет в процессе полета получить значительный объем информации о движении, на основании которой можно формировать алгоритмы управления.

В настоящее время имеется достаточно большое количество работ по построению СУС при полном прогнозировании [12, 3].

Рассмотрим один из возможных алгоритмов управления с бортовой ЦВМ для КА с малым значением располагаемого аэродинамического качества, управление дальностью полета для которого осуществляется изменением угла крена при постоянном угле атаки. Использование этого алгоритма в системе управления спуском позволяет обеспечить высокую точность посадки, не предъявляя существенных требований к ЦВМ.

Перед началом спуска задаются координаты требуемой точки посадки. При спуске с орбиты ИСЗ в номинальном случае требуемая продольная дальность, отсчитываемая в плоскости большого круга по поверхности Земли, обеспечивается расчетным временем включения ТДУ на орбите и полетом в атмосфере с выбранным значением эффективного аэродинамического качества $K_{эфф}$. Требуемое отклонение точки посадки в боковом направлении от продольной плоскости движения обеспечивается переворотом аппарата «с боку на бок» (сменой знака угла крена) в определенной точке на траектории.

Начальные значения компонент вектора состояния определяются или на Земле, или автономными средствами и засылаются в бортовую ЦВМ. В момент включения ТДУ начинается решение на борту следующих основных задач:

— определение вектора состояния КА в фазовом пространстве и всей необходимой информации о характеристиках корабля и окружающей среды (первая задача навигации);

— определение с необходимой дискретностью требуемых значений управляющего параметра для выполнения конечных условий посадки (вторая задача навигации) [4].

Для определения на борту компонент вектора состояния КА можно использовать уравнение

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \vec{a} + \frac{\vec{T}}{m}.$$

Оси инерциальной прямоугольной системы координат, совпадающие с осями чувствительности акселерометров, имеют следующие направления:

Oh_1 — из центра Земли в точку расчетного включения ТДУ;

Oh_3 — в плоскости орбиты по направлению движения;

Oh_2 — дополняет систему до правой.

Основные усилия при решении второй задачи навигации направлены на ослабление требований к характеристикам бортовых ЦВМ. Часы, используемые для получения дополнительной информации о траектории, включаются автономно, независимо от действительного момента включения ТДУ. После окончания работы ТДУ на втором участке снижения (в разреженных слоях атмосферы) акселерометры выключаются и предполагаемое ускорение от действия аэродинамических сил вычисляется с использованием значений номинальной плотности атмосферы. Тем самым систематические и случайные ошибки акселерометров на этом участке полета не будут включены в вычисления. На

этом же участке с учетом ошибок подачи тормозного импульса вычисляется новое расчетное значение угла крена γ_0 , обеспечивающее достижение заданной продольной дальности полета.

При входе в плотные слои атмосферы ($H \approx 100$ км) снова включаются акселерометры и их показания используются для решения первой навигационной задачи. В момент достижения малого фиксированного значения перегрузки n_c по показаниям бортовых часов происходит сравнение действительного времени с расчетным. Величина расхождения является исходной информацией для проведения первой коррекции, цель которой состоит в компенсации ошибок начальных значений компонент вектора состояния, а также возмущений, накопленных при полете в разреженных слоях атмосферы.

После проведения первой коррекции с учетом сравнительно малой эффективности управления в верхних разреженных слоях атмосферы некоторое время ΔT (до высоты примерно 65 км) полет СА проходит в режиме стабилизации текущего угла крена.

По истечении времени ΔT начинается периодическое решение второй задачи навигации и производятся последовательные коррекции угла крена. Требуемые значения угла крена определяются на основании прогноза дальнейшего движения КА путем численного интегрирования уравнений движения. Фактической процедуре прогнозирования присущи следующие особенности.

1. Все вычисления проводятся в промежутках времени между коррекциями t_i и t_{i+1} по информации о компонентах вектора состояния, полученной на начало этого промежутка.

2. При помощи простых формул на борту периодически определяются аэродинамическое качество СА и произведение баллистического параметра на отношение действительного значения плотности к номинальному. Эти значения принимаются постоянными при решении текущей задачи прогноза:

$$K = \frac{n_y}{n_x}; \quad \sigma_x \xi = \frac{2n_x}{Q_{\text{НОМ}} V^2};$$

$$n_x = -\frac{n_1 V_1 + n_2 V_2 + n_3 V_3}{V}; \quad n_y = \sqrt{n_2^2 - n_x^2};$$

$$n_z = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}; \quad V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}.$$

Здесь n_j , V_j ($j=1, 2, 3$) — соответственно проекции векторов суммарной перегрузки и скорости на оси инерциальной системы координат.

3. Для ослабления требований к быстродействию ЦВМ количество разрешаемых просчетов траектории вперед ограничивается на начальном этапе снижения, увеличиваясь по мере снижения СА и уменьшения прогнозируемого интервала времени полета.

4. Для парирования бокового отклонения точки посадки от расчетной применяется следующий метод. Расчет траектории вперед в ускоренном масштабе времени осуществляется со значением угла крена, знак которого противоположен действительному значению (используется свойство практической независимости продольной дальности полета до точки посадки от знака угла крена, причем $\Delta L_k < 2$ км). При этом определяется величина бокового отклонения точки посадки в случае смены знака угла крена в момент следующей коррекции. После того как значение прогнозируемого бокового отклонения точки посадки попадет в некоторую допустимую окрестность относительно расчетной точки («зону нечувствительности»), осуществляется действительный переворот СА «с боку на бок». Допустимо ограничиться двумя такими переворотами на траектории.

5. Интервал между коррекциями может быть как постоянным, так и переменным; он выбирается из условий требуемой точности посадки и необходимого быстродействия ЦВМ.

При использовании данного алгоритма управления обеспечивается высокая точность посадки по продольной и боковой дальности при действии всех возмущений, приборных ошибок, с учетом динамики движения СА по каналу крена как при спуске с орбиты ИСЗ, так и при возвращении от Луны.

17.6.7. Ручное управление

При создании системы ручного управления, предназначенной для решения всех задач спуска, необходимо учитывать ряд ограничений:

— при входе по нижней границе аварийного коридора входа максимальные значения перегрузок не должны превышать значений $n_x = 10 \div 12$;

— при управляемом спуске в штатном случае предельным максимальным значением перегрузки следует считать $n_x = 8 \div 10$;

— при выполнении всех задач управления спуском точность управления на аппаратах с недостаточной статической устойчивостью и плохим демпфированием невысока.

Необходимо отметить, что ручные системы управления принципиально могут быть получены с использованием любого из указанных в предыдущем разделе методов построения СУС. Рассмотрим одну из возможных систем ручного управления с использованием прогнозирования дальности полета при спуске со второй космической скоростью.

Предполагается, что управление осуществляется с помощью изменения угла атаки, при этом аэродинамическое качество K может изменяться от 0 до 0,5. Управление углом крена также возможно. На борту имеется вычислительная машина, с помощью которой прогнозируется положение точки посадки путем решения приближенных уравнений движения [8, 23, 28].

Расчет производится при следующих значениях параметров:

- 1) $\frac{c_y}{c_x} = 0,5$; $\gamma = 0$ — максимальная дальность полета;
- 2) $\frac{c_y}{c_x} = 0$; $\gamma = 0$ — минимальная дальность полета;
- 3) $\frac{c_y}{c_x} = 0,5$; $\gamma \approx 45^\circ$ — максимальная боковая дальность;
- 4) значения $\frac{c_y}{c_x}$ и γ являются постоянными и соответствуют текущим значениям.

Космонавт использует индикатор — прибор с экраном, на котором прогнозируемая точка имеет координаты

$$y_k = \frac{L - L_{\min}}{L_{\max} - L_{\min}}; \quad x_k = \frac{L_6}{L_{6 \max}},$$

где L_6 — дальность в боковом направлении.

Вместе с тем бортовая вычислительная машина определяет значения c_y/c_x , при которых достигается максимально допустимая перегрузка и максимальная высота вылета из атмосферы. Эти значения также выводятся на экран. С помощью указанной информации космонавт имеет возможность осуществлять посадку в заданную точку, не нарушая ограничений по максимальной величине перегрузки и максимальной высоте вылета СА из атмосферы.

17.7. ДВИЖЕНИЕ МЕЖПЛАНЕТНЫХ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ С ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ СКОРОСТЯМИ

Трудности входа с гиперболическими скоростями в баллистическом отношении связаны, в первую очередь, с необходимостью обеспечить захват СА атмосферой, с уменьшением коридора безопасного движения, а также с проблемой переносимости космонавтом перегрузки после длительного пребывания в космосе.

Простое попадание СА в коридор входа еще не гарантирует захват его атмосферой. В этом случае для принятия правильного решения системой управления необходима информация о положении аппарата в коридоре входа. Поскольку любой системе управления свойственны некоторые погрешности, то необходимо, чтобы ошибки бортовых данных о положении СА внутри коридора не превышали определенной величины. При движении аппарата вблизи верхней границы величина допустимых ошибок «стремится» к нулю. По этой причине некоторая часть коридора со стороны указанной границы оказывается непригодной для безопасного спуска.

Ширина полезной части коридора зависит от условий входа, характеристик аппарата и способа управления. Она может меняться от величины, составляющей 90% полного коридора, до нуля (в крайних случаях). Увеличение скорости входа приводит как к уменьшению полной ширины коридора так и к сужению его полезной части. В частности, уже при скорости входа 13—14 км/с становится невозможным баллистический спуск даже в качестве дублирующего варианта системы управления.

Интенсивное уменьшение ширины коридора с ростом скорости входа приводит к необходимости использовать аппараты с достаточно большим аэродинамическим качеством, а также к применению более сложных способов управления. Наиболее простой способ управления — путем изменения угла крена — при скоростях входа более 16—17 км/с становится невозможным без существенного повышения точности входа СА в атмосферу [16, 23].

Оценки теплового режима СА, движущихся с гиперболическими скоростями, показывают, что после обеспечения условий захвата аппарата атмосферой решающее значение приобретают вопросы тепловой защиты его, поскольку требуемый вес теплозащиты значительно увеличивается.

17.7.1. Способы посадки СА на Землю

В настоящее время реальными считаются следующие два способа посадки СА. первый — прямая посадка непосредственно с подлетной межпланетной траектории; второй — посадка с орбиты искусственного спутника, на которую аппарат переводится путем приложения импульса скорости после аэродинамического торможения и вылета из атмосферы. Так как траектории возвращения, рассчитываемые по условиям энергетической оптимизации схемы экспедиции, в настоящее время не отличаются по способу посадки, то любой из двух указанных способов считается равнозначным. В силу

этого представляет интерес общая оценка траекторий возвращения, допускающих осуществление прямой посадки СА в заданный район Земли.

Приводимые данные справедливы, когда:

- рассматривается кеплерово невозмущенное движение КА из бесконечности на нисходящей ветви гиперболической орбиты;

- начальное положение КА относительно Земли определяется заданием вектора скорости на бесконечности, т. е. модулем скорости V_∞ , углом склонения δ_∞ и углом прямого восхождения α_∞ (углы δ_∞ и α_∞ измеряются в геоцентрической экваториальной системе координат);

- за счет коррекции времени t^* прохождения перицентра подлетной траектории можно обеспечить попадание аппарата в любую требуемую точку по долготе; поэтому под посадкой понимается попадание в требуемый район заданной широты, которая может быть принята равной $\varphi_3 = 50^\circ$;

- рассматриваются только прямые и полярные траектории движения КА в сфере действия Земли, для которых наклонение орбиты $i \leq \pi/2$;

- за меру попадания в требуемый район выбрана величина продольной дальности L_n , отсчитываемой по поверхности Земли от условного перицентра подлетной планетоцентрической траектории до заданного района посадки на широте φ_3 .

В качестве минимального значения продольной дальности, при которой обеспечивается прямая посадка, принята величина $L_{\min} = 3000$ км, а в качестве максимального — $L_{\max} = 15\,000$ км. Таким образом, прямая посадка возможна только на таких траекториях, на которых выполняется неравенство $L_{\min} \leq L_n \leq L_{\max}$. В противном случае считается, что можно реализовать только способ посадки с выходом на орбиту ИСЗ.

Каждому положению КА на бесконечности (при подлете к Земле) соответствуют при одном и том же наклонении i две траектории движения в сфере действия (с. д.), различающиеся по величине долготы восходящего узла Ω (Ω_1 , Ω_2). При этом значение долготы восходящего узла Ω_1 близко исходному значению угла прямого восхождения α_∞ . Диапазон допустимых наклонений i возвратных траекторий КА определяется условиями $i \geq \varphi_3$ и $i \geq |\delta_{с.д.}|$, причем $|\delta_{с.д.}| < \pi/2$.

При наклонении $i > \varphi_3$ на каждой из возвратных траекторий (или с долготой Ω_1 , или с долготой Ω_2) физически возможны две дальности L_n — меньшая дальность L_1 и большая дальность L_2 , реализация любой из которых зависит от фактического времени t^* прохождения перицентра подлетной траектории. Поэтому в дальнейшем различаются четыре возможных типа траекторий движения КА в сфере действия, как комбинации Ω_1 , Ω_2 и L_1 , L_2 , на каждой из которых принципиально возможна прямая посадка СА по условию $L_{\min} \leq L_n \leq L_{\max}$. При наклонении $i = \varphi_3$ имеются две траектории — при долоте Ω_1 и при долоте Ω_2 , реализующие только по одной дальности L_n .

Скорость входа, при которой на траектории спуска достигается значение продольной дальности $L_{\min} = 3000$ км, на рис. 17.13 обозначена как V_1 ; при скорости входа V_2 достигается максимальное значение продольной дальности $L_{\max} = 15\,000$ км. На рис. 17.13 приведены зависимости скоростей V_1 и V_2 от угла склонения на бесконечности δ_∞ . Рядом с обозначением скорости (V_1 или V_2) приводятся соответствующий тип траектории и величины наклонений i в градусах. Направление односторонней штриховки на кривых $V_1 = f(\delta_\infty)$ и $V_2 = \psi(\delta_\infty)$ указывает область отсутствия или траекторий некоторого типа, или соответствующих наклонений рассматриваемого типа траектории.

Как следует из рис. 17.13, в области положительных углов склонения δ_∞ возможности осуществления прямой посадки СА весьма ограничены. Лишь в узком диапазоне совместных значений $V_{вх}$ и δ_∞ возможно существование траекторий возвращения, обеспечивающих прямую посадку. В основном реализуется один тип возвратных траекторий: или (Ω_2, L_1) при скорости V_2 , или (Ω_1, L_2) при скорости V_1 . Только в небольших заштрихованных областях A и B возможны два типа траекторий, однако диапазон допустимых наклонений i является ограниченным, особенно в области B . В области A траектория типа (Ω_2, L_1) при скорости V_2 реализуема для любых допустимых наклонений i , т. е. $\varphi_3 \leq i \leq \pi/2$. Это означает, что имеется некоторый диапазон скоростей $V_{вх}$, в котором для обеспечения любой требуемой продольной дальности согласно условию $L_{\min} \leq L_n \leq L_{\max}$ всегда можно отыскать соответствующее допустимое значение наклонения i .

В области отрицательных углов склонения δ_∞ имеется, как минимум, одна траектория движения, реализующая прямую посадку СА. Именно в заштрихованной области C существует траектория движения единственного типа. С другой стороны, в заштрихованной области D возможны все четыре типа траекторий движения КА в сфере действия, каждая из которых может обеспечить прямую посадку. При этом три возвратные траектории реализуемы при любом допустимом значении наклонения i . Области, отличные от C и D , характеризуются различным числом рассматриваемых типов возвратных траекторий, реализующих прямую посадку СА, каждая из которых обладает соответствующим диапазоном допустимых наклонений.

В соответствии с зависимостями $V_1 = f(\delta_\infty)$ и $V_2 = \psi(\delta_\infty)$, приведенными на рис. 17.13, можно или оценить траекторию возвращения с точки зрения обеспечения прямой посадки КА в заданный район, или подобрать приемлемую траекторию движения КА в сфере действия с требуемым диапазоном наклонений i .

Траекториями, образующими границу области существования траекторий прямой посадки при положительных углах δ_∞ , являются (см. рис. 17.13) полярная ($i=\pi/2$) траектория (Ω_2, L_1) при скорости V_2 , реализующая дальность $L_{\max}$, и полярная траектория (Ω_1, L_2) при скорости V_1 , реализующая дальность $L_{\min}$. Как следует из

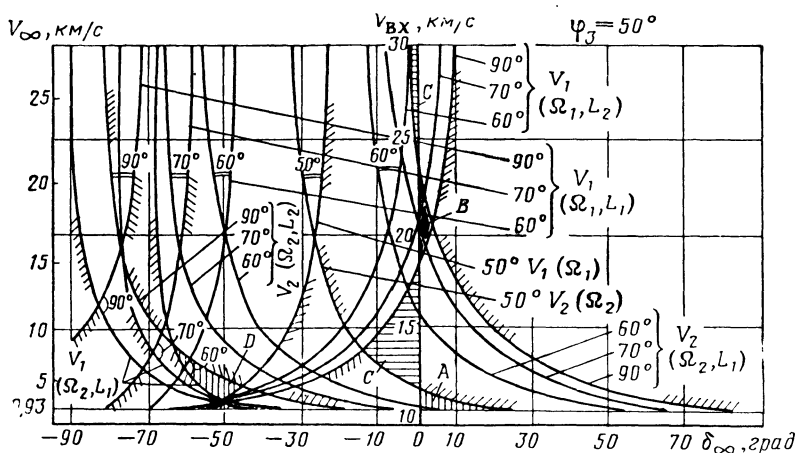


Рис. 17.13. К выбору способа посадки КА, траектория которого задается параметрами V_∞ и δ_∞ ($L_{\min}=3000$ км; $L_{\max}=15\,000$ км)

рис. 17.14, увеличение максимальной $L_{\max}$ и уменьшение минимальной $L_{\min}$ дальностей прямого спуска приводят к некоторому расширению области существования траекторий возвращения, обеспечивающих прямую посадку СА. Однако принципиальных изменений в смысле абсолютного расширения области существования траекторий прямой посадки в диапазоне углов склонения $\delta_\infty > 0$ не происходит, не считая, естественно, случая, когда ограничение по $L_{\max}$ устанавливается в пределах одного витка.

Таким образом, при разумных значениях граничных продольных дальностей $L_{\min}$ и $L_{\max}$ существуют некоторые неблагоприятные сочетания параметров КА на бесконечности V_∞ и δ_∞ , эквивалентных параметрам (V_{BX}, δ_∞) и определяющих траекторию

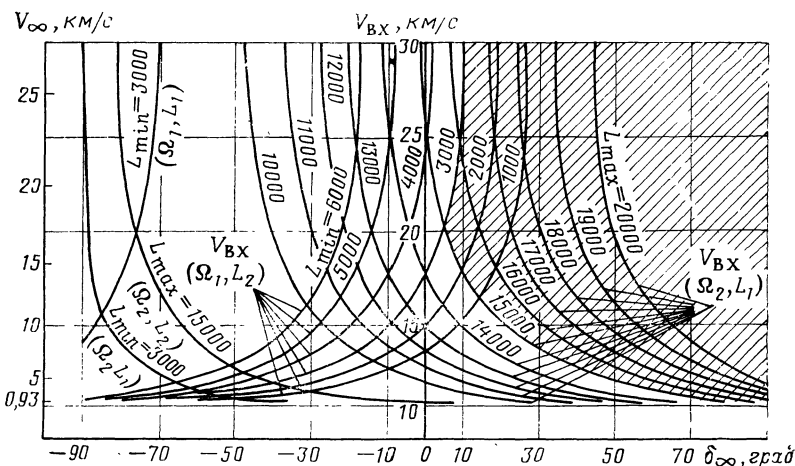


Рис. 17.14. Влияние граничных максимальной $L_{\max}$ и минимальной $L_{\min}$ дальностей прямого спуска на область допустимых траекторий возвращения КА при наклонении $i=90^\circ$

возвращения КА к Земле, при которых осуществление прямой посадки в заданный район становится невозможным. Необходимым условием существования траекторий возвращения, реализующих прямую посадку СА в заданный район, является требование неположительности исходного угла склонения на бесконечности $\delta_\infty \leq 0$.

17.7.2. Коридор входа

Различают несколько характерных типов коридора входа.

Подлетный коридор входа определяется точностью работы систем навигации и коррекции корабля на подлетном участке траектории и характеризует ошибки входа СА в плотные слои атмосферы. Знание подлетного коридора позволяет сформулировать требования к основным проектно-баллистическим характеристикам СА. На основе имеющихся данных можно считать, что до скоростей входа $V_{вх} \approx 20$ км/с подлетный коридор по высотам условного перицентра будет составлять величину порядка $\pm 6 \div \pm 12$ км [4, 12, 27].

Для каждого конкретного аппарата, имеющего определенные аэродинамические характеристики, можно определить максимальный диапазон высот условного перицентра, при котором выполняются все условия осуществления безопасного торможения СА.

Коридор входа, определенный при идеальной работе систем управления и отсутствии внешних возмущений, действующих на СА в полете, будем называть **предельным**. **Рабочий** (эквивалентный) коридор входа составляет часть предельного коридора. При движении в рабочем коридоре выполняются поставленные условия и ограничения с учетом всех возмущений и качества работы реальной системы управления. Для обеспечения надежной посадки СА предельный коридор входа должен превышать подлетный по крайней мере на величину, эквивалентную атмосферным возмущениям и ошибкам, возникающим при работе реальной системы управления.

Для прикидочных и сравнительных оценок целесообразно рассмотреть «теоретический» коридор входа. Верхняя граница этого коридора определяется при полете с наименьшим отрицательным значением качества ($-K_{max}$), а нижняя граница — при полете с максимальным положительным значением качества ($+K_{max}$). Однако при таком определении границ коридора входа

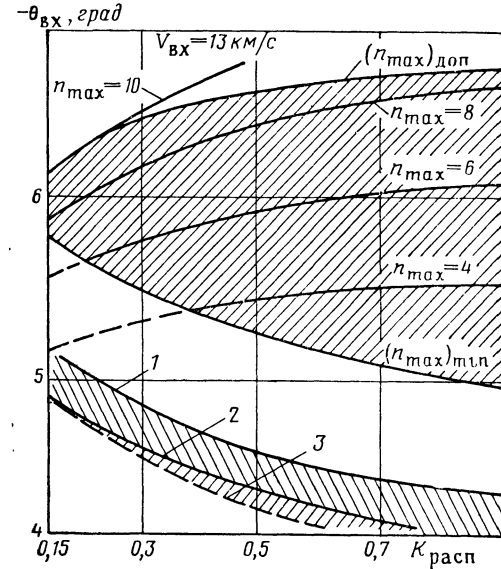


Рис. 17.15. Зависимость величины коридора входа от располагаемого качества $K_{расп}$:

1 — реализуемая верхняя граница; 2 — граница при идеальной работе СУС (предельная верхняя граница); 3 — теоретическая граница

невозможно одновременно выполнить два обязательных условия: обеспечить захват СА атмосферой и не превысить допустимый уровень перегрузок. Это объясняется отсутствием необходимого запаса управления. Для СА с малым значением располагаемого качества $K_{расп}$ и при скоростях входа, близких к параболической, «теоретический» коридор совпадает с предельным. На рис. 17.15—17.17 для скоростей входа 13; 15 и 17 км/с приведены указанные коридоры входа в зависимости от располагаемого качества для СА с нагрузкой на лобовую поверхность 5000 Н/м^2 и управляемых эффективным качеством.

Как видно из рис. 17.15—17.17, величина рабочего коридора, во-первых, существенно зависит от допустимой перегрузки и, во-вторых, резко уменьшается с увеличением скорости входа.

Знание потребного рабочего коридора входа позволяет конкретизировать требования к основным проектно-баллистическим параметрам спускаемых аппаратов.

17.7.3. Перегрузочный режим

Режим снижения КА с человеком на борту в большой степени зависит от значения максимально допустимой перегрузки. Уровень переносимости перегрузок является одним из важнейших динамических параметров при полетах на космических кораблях. Реакция человека на воздействие перегрузок определяется различными факторами, среди которых существенными являются время действия, темп нарастания и направление действия перегрузки, а также состояние организма космонавта, зависящее от многих условий внешней и внутренней среды.

На рис. 17.18 приведены характерные зависимости переносимых человеческим организмом перегрузок [7, 13], показаны номинальный и предельный уровни переносимости перегрузок.

Следует отметить, что все известные данные получены при исследовании человека в земных условиях. После длительного пребывания человека в космосе современные

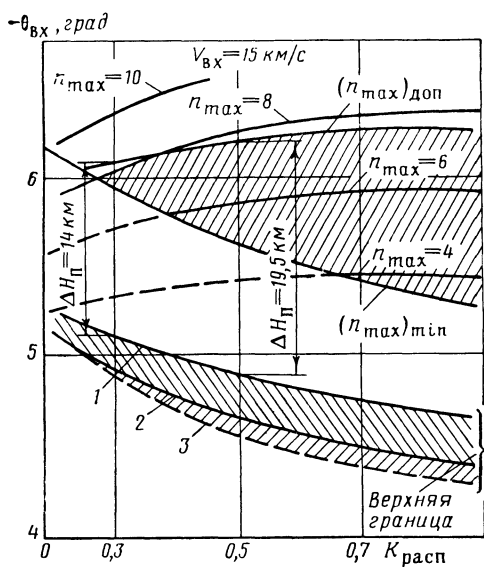


Рис. 17.16. Зависимость величины коридора входа от располагаемого качества $K_{расп}$:

1—реализуемая верхняя граница; 2—граница при идеальной работе СУС (предельная верхняя граница); 3—теоретическая граница

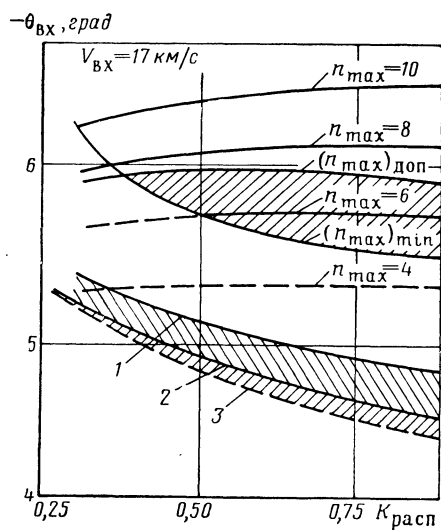


Рис. 17.17. Зависимость величины коридора входа от располагаемого качества $K_{расп}$:

1—реализуемая верхняя граница; 2—граница при идеальной работе СУС (предельная верхняя граница); 3—теоретическая граница

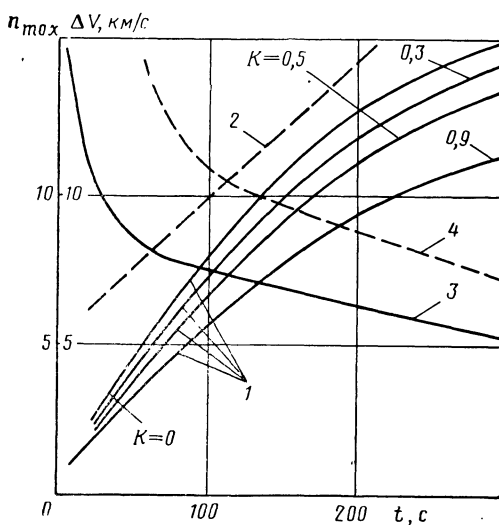


Рис. 17.18. Зависимости гашения скорости ΔV при полете КА с постоянной перегрузкой n_{max} и уровней допустимых перегрузок от времени t :

1—гашение скорости ΔV при полете с постоянной перегрузкой, соответствующей номинальному уровню переносимости ее; 2—гашение скорости ΔV при полете с постоянной перегрузкой, соответствующей предельному уровню переносимости ее; 3—номинальный уровень переносимости перегрузок; 4—предельный уровень переносимости перегрузок

представления о переносимости перегрузок могут измениться, что повлияет на результаты исследования проблемы спуска КА. Поэтому задача об определении переносимости перегрузок человеческим организмом с учетом фактора длительного пребывания в космосе является в настоящее время важной и актуальной.

17.7.4. Способ управления

Наиболее простым и надежным способом управления СА при движении в атмосфере является управление путем изменения угла крена при постоянном значении угла атаки (управление «эффективным» качеством).

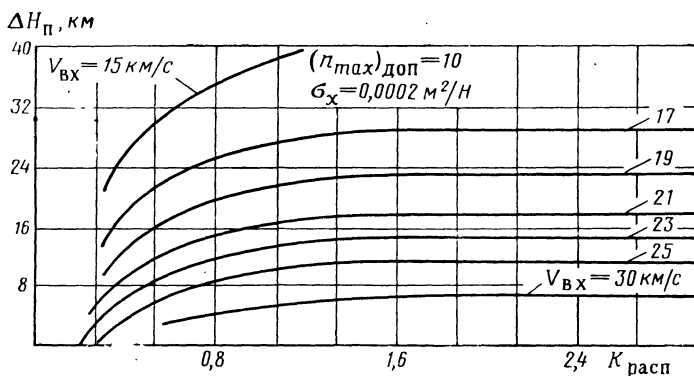


Рис. 17.19. Зависимость ширины коридора входа $\Delta H_{\text{п}}$ от располагаемого качества $K_{\text{расп}}$

С увеличением скорости входа для получения необходимого рабочего коридора требуется увеличивать располагаемое качество. Но как видно из рис. 17.19, увеличение располагаемого качества до величины более единицы практически не дает приращения коридора входа. Поэтому при скоростях входа более 17 км/с управление с использованием «эффективного» качества при подлетных коридорах входа порядка $\pm 6 \div \pm 8$ км практически невозможно.

17.7.5. Методы управления

Обеспечение точной и безопасной посадки СА в большой степени определяется возможностями управления аппаратом в пределах коридора входа. При решении указанной задачи целесообразно применять метод расчленения траектории снижения на некоторые характерные участки.

Первым участком является участок от точки входа СА в атмосферу до точки достижения максимально допустимой перегрузки. На втором участке выдерживаются заданные физические ограничения, в частности, ограничение по суммарной перегрузке и высоте полета. На последнем участке обеспечивается выход на заданные условия по высоте, скорости, дальности полета и т. д. Такой путь позволяет тщательно и относительно просто исследовать всю траекторию снижения СА.

Первый участок непродолжителен по времени и мало эффективен в смысле гашения скорости. Скорость движения СА на этом участке падает на 0,5—3 км/с, причем меньшие цифры относятся к большим скоростям входа.

Одной из основных задач, которые должны быть решены системой управления спуском на этом участке, является уточнение траектории снижения и получение достаточной информации для обеспечения условий как по захвату СА атмосферой, так и по перегрузочному режиму. Малая продолжительность полета СА на первом участке и исключительная инерционность СА влияют на выбор программ управления — практически целесообразным на этом участке является полет с постоянным углом крена.

С момента достижения аппаратом максимальной перегрузки начинается второй участок, который является основным в отношении гашения скорости. Среди возможных номинальных траекторий на втором участке наиболее рациональными можно считать изоперегрузочные траектории. Режим полета СА с постоянной перегрузкой обеспечивает минимальное время гашения избытка скорости.

Торможение СА на втором участке рационально организовать так, чтобы к моменту его окончания величина и направление вектора скорости, а также высота полета приблизительно соответствовали тем величинам, которые получаются в момент первого максимума перегрузок при входе СА в атмосферу с параболической скоростью.

В таком случае третий участок по характеру решаемых задач и по условиям снижения будет подобен участку траектории после прохождения максимума перегрузки при входе СА со 2-й космической скоростью. В качестве номинальных программ управ-

ления на третьем участке могут быть использованы программы полета СА с постоянным углом крена.

На рис. 17.20—17.22 построены границы коридора входа при использовании этих номинальных программ управления.

Кривые слева на этих рисунках показывают зависимость потребного эффективного качества на первом участке $K_{эфф}$ от угла входа при реализации минимальных перегрузок. При входе СА с углом $\theta_{вх}$, соответствующим точке a_i ($i=1, 2, 3$) на первом

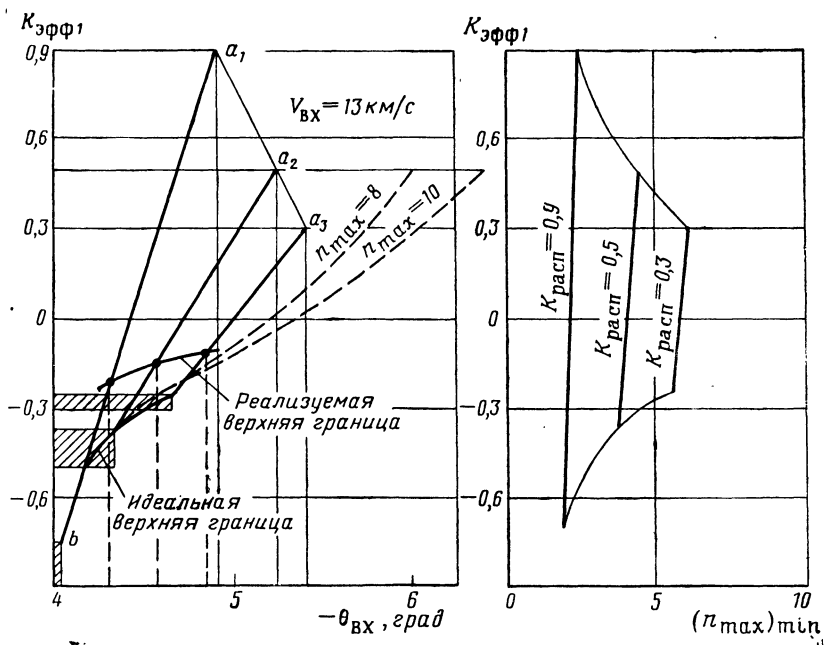


Рис. 17.20. Зависимости качества $K_{эфф1}$ от угла входа $\theta_{вх}$ и от величины $(n_{max})_{min}$ при полете на первом участке траектории снижения

участке, необходим полет с $K_{эфф1}=0,9; 0,5; 0,3$ соответственно с последующим переходом на полностью отрицательное качество $-K_{расп}$; при входе СА с $\theta_{вх}$, соответствующим любой точке линии $a_i b$, необходим полет с определенным значением $K_{эфф}$ с последующим переходом в точке достижения максимума перегрузки на полет с $-K_{расп}$ и т. д. Пунктирные кривые по смыслу аналогичны кривой $a_i b$, но при этом реализуется соответствующая максимальная перегрузка.

Кривые в правой стороне рисунков показывают минимальные реализуемые значения максимальных перегрузок.

На рис. 17.23 для СА, входящего в атмосферу Земли со скоростью 15 км/с, приведены взаимозависимости скорости $V_{n_{max}}$ и высоты достижения максимальной перегрузки $H_{n_{max}}$ в конце первого участка для указанных выше режимов снижения.

Область фазовых координат $(V_{n_{max}}, H_{n_{max}})$ построена при значениях располагаемого качества $K_{расп} \leq 0,9$ и при максимальной перегрузке $n_{max} \leq 10$.

17.7.6. Определение минимально необходимого располагаемого качества

Определим минимально необходимое значение располагаемого качества $(K_{расп})_{min}$ для космических аппаратов, входящих в атмосферу Земли с гиперболическими скоростями.

Зависимость величины $\Delta\theta_{вх}$ при различных скоростях входа $V_{вх}$ от располагаемого качества $K_{расп}$ приведена на рис. 17.24. Перегрузка аппарата при движении по нижней границе коридора входа принята равной 6 и соответствует $(n_{max})_{доп}$, рассчитанной на основании номинального уровня переносимости перегрузок.

Пересчет величины коридора $\Delta\theta$ на $\Delta H_{п}$ производится с учетом того, что:

- при $V_{вх}=13$ км/с величина $\Delta\theta=1'$ соответствует $\Delta H_{п} \approx 0,29$ км;
- при $V_{вх}=15$ км/с величина $\Delta\theta=1'$ соответствует $\Delta H_{п} \approx 0,256$ км;
- при $V_{вх}=17$ км/с величина $\Delta\theta=1'$ соответствует $\Delta H_{п} \approx 0,217$ км.

Задаваясь величиной эквивалентного коридора входа $\Delta H_{п}^3$, можно определить $(K_{расп})_{min}$. Зависимость величины $(K_{расп})_{min}$ от скорости входа $V_{вх}$ при различных $\Delta H_{п}^3$ приведена на рис. 17.25. Величина эквивалентного коридора, при движении в ко-

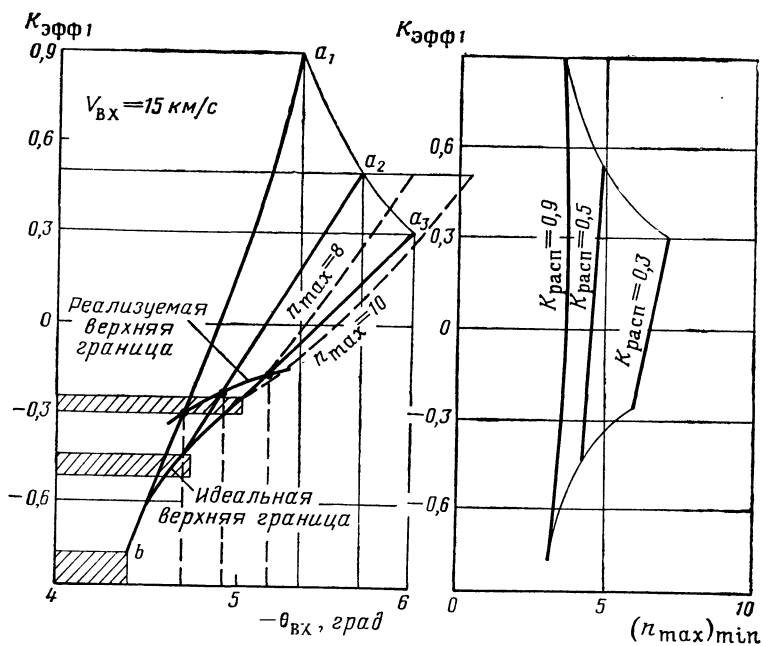


Рис. 17.21. Зависимость качества $K_{эфф1}$ от угла входа $\theta_{вх}$ и от величины $(n_{max})_{min}$ при полете на первом участке траектории снижения

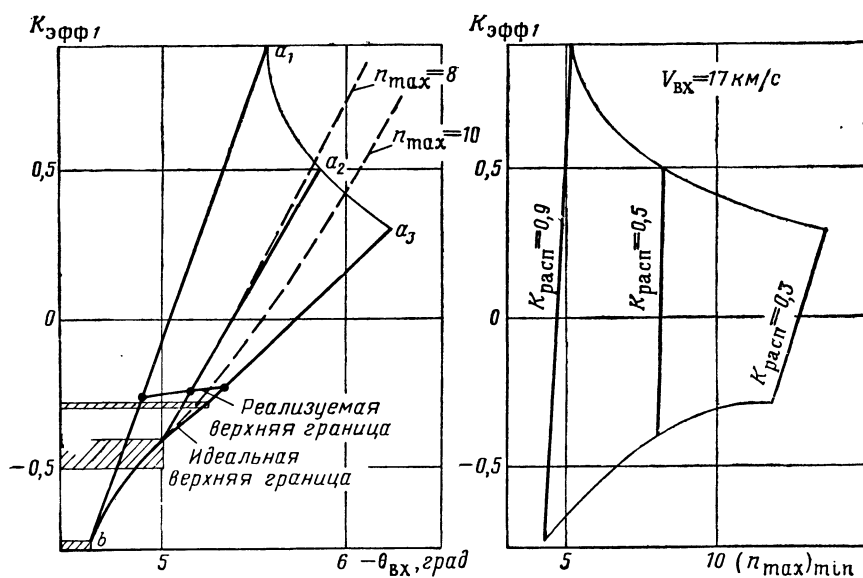


Рис. 17.22. Зависимость качества $K_{эфф1}$ от угла входа $\theta_{вх}$ и от величины $(n_{max})_{min}$ при полете на первом участке траектории снижения

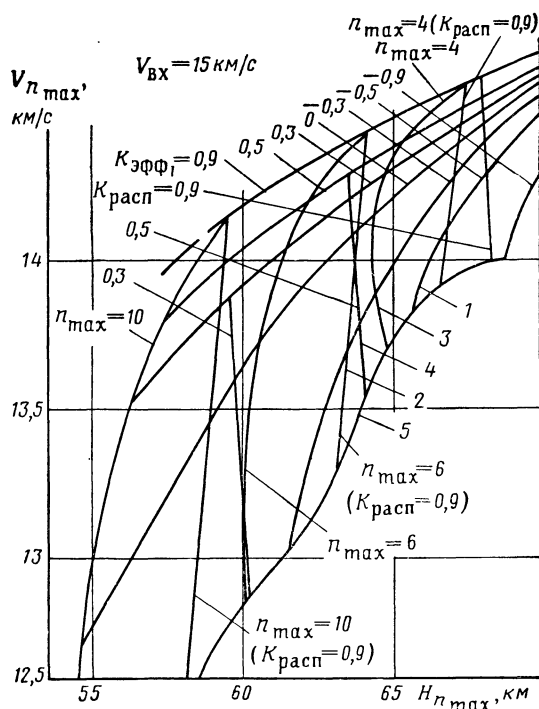


Рис. 17.23. Область допустимых фазовых координат:

1—геометрическое место параметров V и H реальных траекторий с $K_{эфф} = \text{const}$ на первом участке в точке максимальной перегрузки; 2—линии одинаковой максимальной перегрузки при $K_{расп} = 0.9$; 3—огнивающая семейства линий одинаковой максимальной перегрузки для различных $K_{расп}$; 4—граничная линия — линия минимальной перегрузки; 5—предельная верхняя граница коридора входа

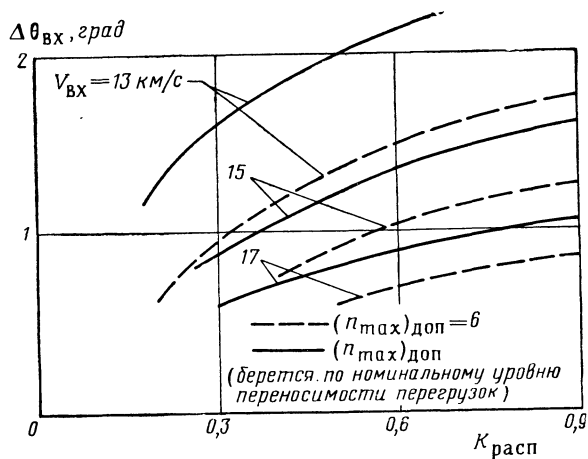


Рис. 17.24. Зависимость ширины коридора входа $\Delta\theta_{вх}$ от располагаемого качества $K_{расп}$

тором обеспечиваются все поставленные условия, равна $\Delta H_n^9 = 16 \div 25,5$ км. Первая цифра указанного диапазона соответствует величине подлетного коридора, равного 12 км, а вторая — величине 24 км.

В табл. 17.2 указаны значения $(K_{расп})_{min}$.

Таблица 17.2

$V_{вх}, \text{ км/с}$	$\Delta H_n^9, \text{ км}$	Располагаемое качество $(K_{расп})_{min}$		
		$(n_{max})_{доп}$	$n_{max} = 6$	$n_{max} = 10$
13	20	0,18	0,4	0,18
	15	0,12	0,28	0,12
14	20	0,33	0,65	0,25
	15	0,22	0,4	0,17
15	20	0,57	1,0	0,33
	15	0,35	0,56	0,21
16	20	0,92	—	0,52
	15	0,52	0,8	0,33
17	20	—	—	0,85
	15	0,78	—	0,45

Значения $(K_{расп})_{min}$, приведенные в таблице, получены без учета точности определения аэродинамических характеристик и возможного большого уноса теплозащитного покрытия в процессе снижения СА, поэтому при расчете указанные значения $(K_{расп})_{min}$ следует увеличивать приблизительно на 20%.

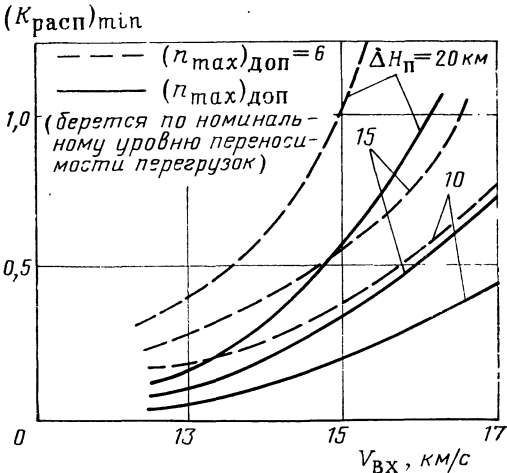


Рис. 17.25. Зависимость величины необходимого качества $(K_{расп})_{min}$ от скорости входа $V_{вх}$

Прочерки в таблице указывают на невозможность использовать аппараты, управляемые путем изменения угла крена, при указанных условиях. Если допустить возможность кратковременного действия перегрузок большей величины с последующим их снижением для осуществления полета по изоперегрузочной траектории, то, как видно из таблицы, требуемое значение $(K_{расп})_{min}$ будет значительно меньше.

Таким образом, до скоростей входа 17 км/с с баллистической точки зрения вполне возможно использовать аппараты, управляемые с помощью изменения угла крена. Использование подобных СА возможно и при больших скоростях входа, но при этом необходимо уменьшать в первую очередь подлетный коридор (повышать точность навигационных систем).

17.7.7. Вопросы управления КА при гиперболических скоростях

Для гиперболических скоростей входа при использовании номинальных траекторий с $K = \text{const}$, даже при движении по нижней границе коридора, скорость на выходе из плотных слоев атмосферы после первого погружения может значительно превышать вторую космическую, т. е. в данном случае при $K = \text{const}$ и принятых ограничениях по максимальной перегрузке невозможно выполнить требуемые конечные условия.

Определим скорости входа, при которых существует принципиальная возможность использовать номинальные траектории с $K = \text{const}$.

Рассматриваются траектории спуска, ограниченные величиной максимальной перегрузки, равной 10. Скорости выхода КА из атмосферы после первого прохождения

Таблица 17.3

$K_{\text{расп}}$	Предельная скорость входа $V_{\text{вх. пред.}}$, км/с	
	при прямой посадке на Землю и $V_{\text{вых}} = 7,8$ км/с	при выходе на орбиту ИСЗ и $V_{\text{вых}} \approx 11$ км/с
0,3	12	14,5
0,4	11,8	14,2
0,5	11,2	13,9
0,6	10,8	13,6
0,7	10,5	13,3
1,0	—	11,9

плотных слоев зависят от величины располагаемого качества, причем $V_{\text{вых}}$ увеличивается с увеличением значения качества. Для различных значений $K_{\text{расп}}$ предельные скорости входа $V_{\text{вх. пред.}}$, до которых еще можно использовать программы с $K = \text{const}$, имеют значения, приведенные в табл. 17.3. Данные табл. 17.3 получены на основании рис. 17.26. Пунктирные кривые на этом рисунке обозначают номинальные траектории с постоянным качеством ($K = \text{const}$) при полете по нижней границе коридора входа. Различаются эти кривые по скорости выхода из плотных слоев атмосферы.

Как следует из табл. 17.3, при посадке КА на Землю с $K_{\text{расп}} = 0,3$ построение системы управления спуском (СУС) путем использования номинальных траекторий с постоянным качеством возможно только при скоростях входа до 12 км/с. В этом случае нужно полностью использовать предельный коридор входа.

Как следует из рис. 17.26, при скоростях, больших $V_{\text{вх. пред.}}$ и движении по траектории с $K = \text{const}$ наблюдается резкое сужение коридора, которое происходит за счет сдвига нижней границы вследствие того, что при $V_{\text{вх. пред.}}$ нельзя использовать весь имеющийся диапазон $K_{\text{расп}}$ (от K_{max} до K_{min}).

Таким образом, при создании СУС для СА, входящих в атмосферу Земли с гиперболическими скоростями, использовать номинальные траектории с постоянным значением качества ($K = \text{const}$) невозможно, если, конечно, выдерживается допустимый перегрузочный режим. Однако это не исключает применения подобных траекторий на некоторых участках спуска.

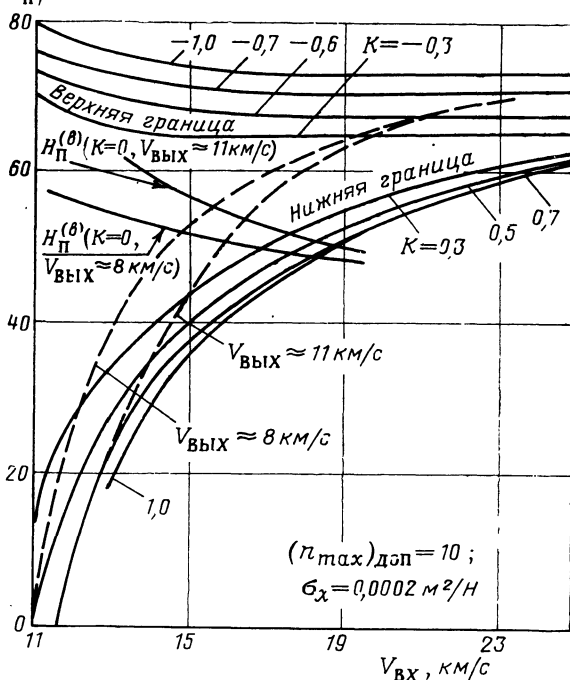


Рис. 17.26. Зависимость величины коридора входа от скорости входа $V_{\text{вх}}$

17.7.8. Метод построения СУС для аппарата гиперболического входа

Главная особенность рассматриваемого метода построения СУС [2] заключается в разделении основных задач управления на каждом характерном участке снижения СА с обязательным выполнением только определенных требований на каждом из них.

Для реализации данной СУС необходимо наличие на борту СА быстродействующей цифровой вычислительной машины (бортовой ЦВМ), позволяющей определять вектор состояния в фазовом пространстве и прогнозировать движение СА. Исходной информацией для решения системы уравнений движения на борту СА являются данные о перегрузках, поступающие с трех взаимно перпендикулярных акселерометров, установ-

ленных на гиросtabilизированной платформе. Оси чувствительности этих акселерометров совпадают с осями некоторой инерциальной системы координат $Oh_1h_2h_3$.

Уравнения движения в векторной форме имеют вид

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{a},$$

где $\vec{a}$ — ускорение от действия аэродинамических сил:

$$\vec{a} = \frac{\xi \sigma_{x \text{ ном}} Q_{\text{ст}} g_0}{2} V \left\{ -\vec{V} + \frac{K}{\sqrt{V_1^2 + V_3^2}} [V(\vec{r}_2 \times \vec{V}) \cos \gamma + \vec{V} \times (\vec{r}_2 \times \vec{V}) \sin \gamma] \right\};$$

$\sigma_{x \text{ ном}}$ — номинальное значение баллистического параметра;

$Q_{\text{ст}}$ — плотность стандартной атмосферы;

V_1, V_3 — проекции вектора скорости $\vec{V}$ на оси координат Oh_1 и Oh_3 ;

$\vec{r}_2$ — радиус-вектор $\vec{r}$ в проекции на ось Oh_2 .

Начальные данные для уравнений движения получают или автономно на борту СА, или засылают с Земли. С помощью наземных средств можно определить место-

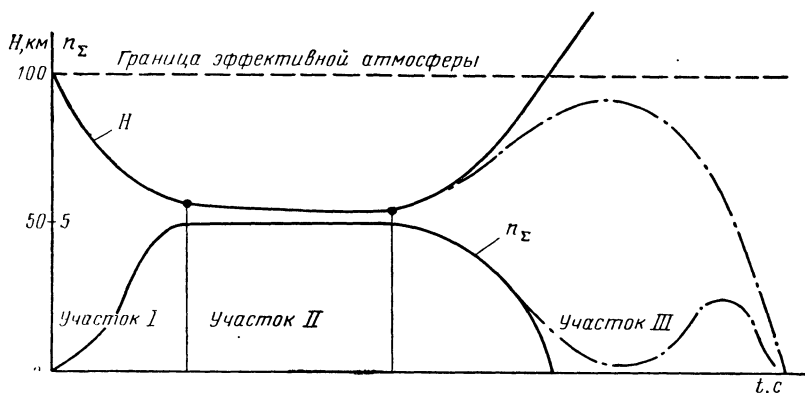


Рис. 17.27. Типичная зависимость высоты H полета КА и перегрузки n_z от времени t движения по траектории спуска

положение СА по высоте условного перицентра с точностью $\pm(1\div3)$ км и скорость входа с точностью до $\pm(1\div2)$ м/с. При последующем снижении СА в атмосфере в течение некоторого времени Δt_y можно путем обработки на бортовой ЦВМ поступающей с акселерометров информации уточнить начальные данные ΔH_n и $V_{\text{вх}}$. При этом в течение времени Δt_y СА летит с постоянным значением качества, которое выбирается с учетом ожидаемых начальных условий.

Поэтому на начальном участке спуска СУС прежде всего должна решать задачу обеспечения «захвата» (с учетом перегрузочного режима) и только после гашения скорости до 9–10 км/с можно переходить к выполнению конечной цели — обеспечению посадки СА в заданный район, выведению аппарата на орбиту ИСЗ и т. д.

С учетом переносимости человеческим организмом перегрузок можно определить некоторую максимально допустимую величину $(n_{\text{max}})_{\text{доп}}$. На основе баллистического анализа движения СА определенной формы с учетом условия обеспечения «захвата» может быть определена минимально допустимая величина максимальной перегрузки $(n_{\text{max}})_{\text{min}}$, в общем случае зависящая от скорости входа. Условиям задачи удовлетворяет любая траектория СА, при движении по которой с постоянным значением качества достигается максимальная перегрузка

$$(n_{\text{max}})_{\text{min}} \leq n_{\text{max}} \leq (n_{\text{max}})_{\text{доп}}.$$

Такая траектория при входе СА с гиперболической скоростью может быть только рикошетирующей. При этом на выходе аппарата из плотных слоев атмосферы скорость $V_{\text{вых}}$ существенно превышает круговую. Для снятия избытка скорости необходимо после прохождения максимума перегрузок распрямить траекторию для удержания СА в атмосфере.

В результате выявляются три характерные участка траектории снижения (рис. 17.27): первый участок — от точки входа в плотные слои атмосферы до точки достижения максимума перегрузок; второй участок — от точки максимума перегрузок до границы надежного «захвата» СА атмосферой (эта граница легко определяется при баллистическом анализе; она соответствует скоростям полета $\approx 9\text{--}10$ км/с); третий участок — от границы надежного «захвата» до области, в которой выполняются конечные условия.

На каждом из этих участков СУС решает наиболее ответственные задачи. Так, на первом участке снижения СУС должна выполнить единственную задачу — вывести СА в область максимальных перегрузок

$$(n_{\max})_{\min} \leq n_{\max} \leq (n_{\max})_{\text{доп}}$$

На втором участке СУС решает задачу удержания СА в атмосфере и только на третьем участке обеспечивает выполнение требуемых конечных условий.

При использовании указанного метода создаются наиболее благоприятные условия для работы бортовой ЦВМ на наиболее трудных и наименее изученных участках полета. Действительно, на преодоление первого участка требуется несколько десятков секунд (меньше 100 с), поэтому текущая задача должна решаться в течение этого небольшого интервала времени (для сравнения: время полного спуска составляет примерно 1000 с).

На втором участке расчет вперед производится только за время, равное 10—20 с.

Третий участок снижения при «протяженных» траекториях и траекториях вывода на орбиту ИСЗ по характеру решаемых задач и исходным предпосылкам подобен достаточно хорошо изученному участку траектории после прохождения максимума перегрузок при возвращении со второй космической скоростью.

Несколько другой подход к решению задачи применяется при полете по «коротким» траекториям («затягивание» второго участка, определенные условия выбора K).

Изложенный метод может быть использован для построения СУС аппаратов, входящих в атмосферу Земли с любыми гиперболическими скоростями.

17.7.9. Особенности работы системы управления спуском

При построении алгоритма управления требуется решать три системы уравнений [3]. Первая система описывает реальное движение СА. С ее помощью получают ускорения от аэродинамических сил. При этом используется угол крена $\gamma(t)$, который формируется в результате работы СУС с учетом динамики движения СА около центра масс. Полученные при решении первой системы значения перегрузок используются во второй системе, которая предназначена для определения текущего фазового вектора СА. При этом также учитываются ошибки в начальных данных и погрешности, возникающие при бортовых вычислениях и исполнении.

Значение угла крена, удовлетворяющее текущим условиям (например, вывод СА в область допустимых максимальных перегрузок), определяется при решении третьей системы. При этом используется «прогноз» текущего значения качества и величины σ_x . Осуществляется это следующим образом. В некоторый момент t_{i-1} находятся текущее (по данным акселерометров) и расчетное (из решения третьей системы) значения суммарной перегрузки. Считается, что их отношение $\xi = n_{\text{тек}}/n_{\text{расч}}$ отличается от единицы только в результате возникновения ошибки при определении плотности атмосферы и ошибки в значении $\sigma_{x \text{ ном}}$.

При решении третьей системы используется значение

$$\sigma_{xQ} = \sigma_{x \text{ ном}} Q_{\text{ст}} \xi.$$

Прогнозируемое качество определяется по величине отношения перегрузок $K_n = n_y/n_x$, которое рассчитывается в момент каждой коррекции. Полученное значение качества K_n используется при решении третьей системы.

В качестве примера рассматривается работа системы управления спуском аппарата, управляемого по углу крена, входящего в атмосферу Земли со скоростью 15 км/с и обладающего величиной располагаемого качества, равной 0,5 ($\sigma_x \approx 0,0002 \text{ м}^2/\text{Н}$).

Первый участок

На рис. 17.28 для указанного примера приведена зависимость требуемых значений номинального качества на первом участке спуска от высоты условного перицентра при различных режимах снижения СА. Кривая ab соответствует режимам спуска при минимально возможных максимальных перегрузках $(n_{\max})_{\min}$, достигаемых СА в конце первого участка снижения. Величина перегрузок $(n_{\max})_{\min}$ указывается на рис. 17.28. Как следует из рис. 17.28, перегрузка $(n_{\max})_{\min}$ слабо зависит от высоты условного перицентра, поэтому с некоторым запасом можно принять $(n_{\max})_{\min} = 5,1$. Следует отметить, что при достижении значения перегрузки $(n_{\max})_{\min}$ в конце первого участка требуется мгновенный переход на минимальное значение качества (при $\gamma = 180^\circ$) для обеспечения дальнейшего полета (в частности, по изоперегрузочной траектории).

Движение аппарата левее кривой ab невозможно при использовании рассматриваемого номинального управления, так как СА не будет захвачен атмосферой.

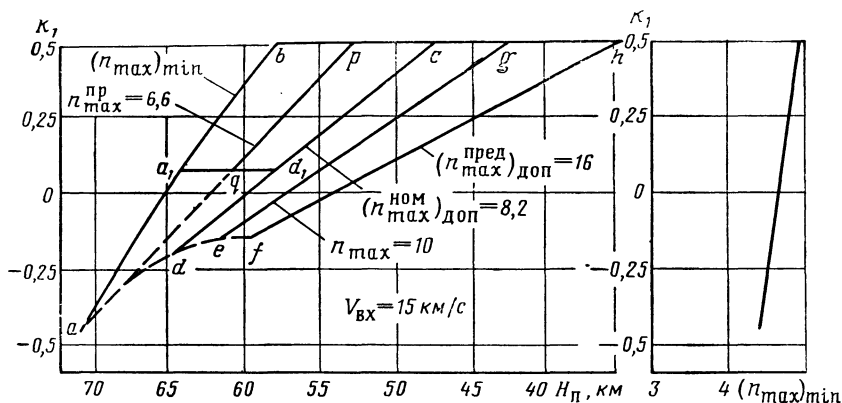
Кривая af ограничивает область максимально возможных перегрузок, которые могут быть достигнуты СА, т. е. при полете ниже кривой af и номинальном управлении максимальные перегрузки достигают значений, недопустимых для человеческого организма.

Кривые dc , eg и fh отражают зависимость $K_1 = f(H_n)$, на которой обеспечивается достижение в конце первого участка соответствующих значений перегрузок $(n_{\max})_{\text{доп}}$.

Наконец, прямая bh соответствует режиму полета СА на первом участке с максимальным значением располагаемого качества.

Итак, зона $abcd$ является номинальной рабочей зоной. Верхняя граница коридора входа соответствует высоте условного перицентра $H_{п}^{(в)} = 70,6$ км, а нижняя («номинальная») — высоте $H_{п}^{(н)} = 47$ км. Величина коридора входа составляет $\Delta H_{п \text{ ном}} = 23,6$ км.

Из рис. 17.28 следует: чем ниже по высоте условного перицентра (в пределах допустимой зоны) входит СА в атмосферу, тем шире зона по $H_{п}$, в которой возможно движение с постоянным значением качества K_1 , без какой-либо коррекции на первом участке. Действительно, в диапазоне высот $H_{п} = 58 \div 47$ км для обеспечения условий в конце первого участка СА должен двигаться с $K_1 = 0,5$, которому соответствует величина $H_{п} = 52,5$ км и допустим разброс $\Delta H_{п} = \pm 5,5$ км. При изменении K_1 на величину $\pm 0,08$ соответствующий диапазон значений $H_{п}$ изменяется на ± 3 км. Предполагается, что непосредственно перед входом в плотные слои атмосферы высота перицентра подлетной траектории известна с точностью до ± 3 км (линия a_1d_1 на рис. 17.28). Тогда



жать больших ошибок при определении $n_{\max}$, целесообразно использовать переменный шаг интегрирования третьей системы; до момента $n < 3$ шаг интегрирования $\Delta t_{III} = 3$ с, а при $n \geq 3$ величина $\Delta t_{III} = 1$ с.

Для решения краевой задачи можно применять любые, даже самые простые способы. Действительно, при быстроедействии бортовой машины порядка 10 000 простых операций в секунду один просчет третьей системы от t_y до $n_{\max}$ (при суммарном времени не более 100 с) занимает менее 0,6 с, т. е. за время $\Delta t_{KI} = 6$ с число итераций практически неограничено.

Второй участок

После достижения максимума перегрузок, определяемого указанным выше способом, дается сигнал на увеличение текущего угла крена (на уменьшение эффективного качества) для сохранения достигнутой перегрузки $n_{\max}$ и для осуществления перехода на полет по изоперегрузочной траектории. Решение краевой задачи проводится за некоторый интервал времени, т. е. в момент t_{i-1} ищется значение угла крена $\gamma_{\text{треб}}$ (требуемое для момента t_i), которое обеспечит выход в область $n_{\text{зад}}$ в момент $t_{i+1} = t_i + \Delta t_{KII} \kappa$ ($\kappa \leq 10$, $\Delta t_{KII} = 2$ с).

Колебания величины перегрузки в пределах от $(n_{\max})_{\min}$ до $(n_{\max})_{\text{доп}}$ на данном участке не мешают выполнению основной задачи — гашению избытка скорости. Поэтому при решении краевой задачи выполняется единственное условие обеспечения выхода СА в область с $\Delta n_{\text{зад}} \approx \pm 1$.

При текущей скорости $V \leq 10,5$ км/с на втором участке начинается (помимо основной задачи) решение задачи прогноза при величине $K_{\text{эффIII}}$, что необходимо для определения момента достижения заданных конечных условий.

Третий участок

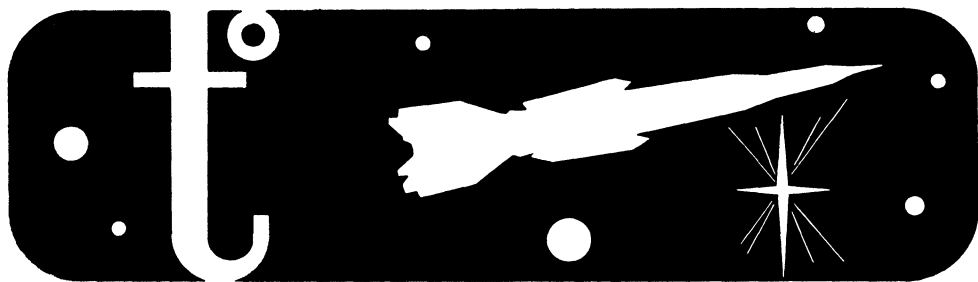
Порядок проведения коррекций, прогнозирование плотности и качества на указанном участке при полете по «протяженным» траекториям и по траекториям, на которых возможен выход на орбиту ИСЗ, подобен управлению на участке рикошета при входе СА с параболической скоростью. В этом случае $K_{\text{эффIII}} \approx 0$, что обеспечивает равный запас по качеству. Для «коротких» траекторий условия выбора $K_{\text{эффIII}}$ такие же, как и для участка второго погружения при входе СА с параболической скоростью.

Приведенный метод построения системы управления спуском достаточно универсален и гибок и является работоспособным в большом диапазоне изменения $V_{\text{вх}}$ и $K_{\text{расп}}$. Данный метод позволяет при использовании аэродинамического способа торможения с большой точностью обеспечить достижение заданной точки посадки, а также осуществить перевод СА на орбиту ИСЗ практически в границах всего предельного коридора входа.

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. XVII

1. Авдеевский В. С., Маров М. Я., Рождественский М. К. Результаты измерений параметров атмосферы Венеры межпланетной станцией «Венера-4». — «Космические исследования», т. VII, вып. 2, 1969.
2. Бочаров Л. А., Иванов Н. М., Голуб И. Б. Алгоритм управления спуском аппаратов, входящих в атмосферу Земли с гиперболическими скоростями. — «Космические исследования», т. IX, вып. 5, 1971.
3. Бухаркина А. П., Голубев Ю. Ф., Охочимский Д. Е. Управление пространственным движением при входе космического аппарата в атмосферу. — «Космические исследования», т. VI, вып. I, 1968.
4. Воробьев Л. М. Навигация космических кораблей. М., Воениздат, 1964.
5. Дубошин Г. Н. Небесная механика. М., Физматгиз, 1963.
6. Ишлинский А. Ю. Инерциальное управление баллистическими ракетами. М., «Наука», 1968.
7. Космическая биология и медицина. Под ред. проф. В. И. Яздовского. М., «Наука», 1966.
8. Лох У. Динамика и термодинамика спуска в атмосферах планет. М., «Мир», 1966.
9. Мороз В. И. Физика планет. М., «Наука», 1967.
10. Новое о Марсе и Венере планет. М., «Мир», 1968.
11. Остославский И. В., Стражева И. В. Динамика полета. Траектории летательных аппаратов. М., «Машиностроение», 1969.
12. Охочимский Д. Е., Бухаркина А. П., Голубев Ю. Ф. Управление движением при входе в атмосферу. — «Космические исследования», т. VII, вып. 2, 1969.
13. Проблемы космической биологии, т. VI, Под ред. акад. Н. М. Сисакяна. М., «Наука», 1967.
14. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. М., Физматгиз, 1960.
15. Сихарулидзе Ю. Г., Бутузова М. А. Модель вариаций плотности атмосферы Земли на высотах 30–80 км. — «Космические исследования», т. VIII, вып. 4, 1970.

16. Смольяков Э. Р. Оптимизация коридора входа в атмосферу. — «Космические исследования», т. VI, вып. 1, 1968.
 17. Справочник по геофизике. М., «Наука», 1967.
 18. Тихонравов М. К. и др. Основы теории полета и элементы проектирования искусственных спутников Земли. М., «Машиностроение», 1967.
 19. Тейфель В. Г. Атмосфера планеты Юпитер. М., «Наука», 1969.
 20. Шаронов В. В. Планета Венера. М., «Наука», 1965.
 21. Щиголев Б. М., Математическая обработка наблюдений, М., Физматгиз, 1962.
 22. Эльясберг П. Е. Введение в теорию полета искусственных спутников Земли. М., «Наука», 1965.
 23. Ярошевский В. А. и др. Маневрирование космических аппаратов. М., «Машиностроение», 1970.
 24. Ярошевский В. А. и др. Управление космическим аппаратом при входе в атмосферу. — «Космические исследования», т. VII, вып. 2, 1969.
 25. Handbook of the physical properties of the planet Mars, New-York, 1968.
 26. Mankovit D. J., The analysis and configuration of a control system for a Mars propulsive landers, Pasadena, Calif., 1967.
 27. Repic E. M., Boobar M. G., Chapel F. G., Aerobraking as a potential planetary capture mode, J. «Spacecraft and Rocket», No. 8, 1968.
 28. Wingrove R., Coate R. Piloted simulation studies of re-entry guidance and control at parabolic velocities, JAS Paper, No. 61—195, 1961.
-



ГЛАВА XVIII

РАСЧЕТ ТЕПЛООБМЕНА НА ПОВЕРХНОСТИ СПУСКАЕМОГО АППАРАТА

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- α — коэффициент температуропроводности.
- c — коэффициент теплоемкости.
- c_p — коэффициент теплоемкости газа при постоянном давлении.
- c_i — массовая концентрация i -го компонента.
- J_e — эффективная энтальпия газа.
- J_w — энтальпия газа на поверхности тела.
- L — характерный линейный размер.
- M — молекулярная масса.
- M_v — молекулярная масса вдуваемых продуктов разрушения.
- p — давление.
- q_w, q_p — конвективный и радиационный тепловой поток к поверхности тела.
- R — радиус кривизны.
- T — температура.
- T_w — температура поверхности материала.
- U_1 — скорость потока на внешней границе пограничного слоя.
- u, v, w — компоненты вектора скорости.
- w — линейная скорость разрушения материала.
- X — эффективная длина пластины.
- x, y, z — пространственные координаты.
- (α/c_p) — коэффициент теплообмена.
- $(\alpha/c_p)_0$ — коэффициент теплообмена на непроницаемой поверхности.
- γ — коэффициент вдува.
- ϵ — степень черноты.
- κ — показатель адиабаты.
- λ — коэффициент теплопроводности.
- μ — коэффициент вязкости.
- ρ — плотность.

При спуске в атмосфере Земли аппарат испытывает интенсивное торможение, поэтому воздух вблизи поверхности спускаемого аппарата нагревается до высоких температур за счет преобразования кинетической энергии движения в тепло в областях сжатия газа и в вязких пограничных слоях. Температуры газа при этом могут значительно превышать температуры разрушения материалов, из которых изготовлен аппарат, и для безопасной посадки необходимо провести точный расчет теплообмена на поверхности СА, выбрать и рассчитать тепловую защиту, обеспечивающую прочность и требуемый тепловой режим конструкции.

Спускаемые аппараты и их отдельные элементы имеют сложную форму, поэтому течение газа вблизи их поверхности является в общем случае пространственным с областями ускоренного и замедленного движения, областями отрыва и областями взаимодействия невязких и вязких потоков. На различных участках траектории в вязком пограничном слое возникает ламинарный, турбулентный или переходный режимы течения, существенно влияющие на теплоотдачу к аппарату. При больших скоростях входа (8—12 км/с) происходят химические превращения, диссоциация и излучение в газе как в основном потоке идеальной жидкости, так и в пограничном слое. При работе различ-

ных теплозащитных покрытий возникают также физико-химическое взаимодействие материала поверхности с потоком в пограничном слое и поток массы от поверхности за счет сублимации.

При практических расчетах теплообмена удобно отдельно рассматривать конвективные и лучистые тепловые потоки, хотя в общем случае возможно их взаимное влияние. При расчете конвективного теплообмена при ламинарном режиме течения учет влияния большинства факторов можно произвести путем численных решений дифференциальных уравнений пограничного слоя. Расчеты теплообмена в случае турбулентного движения основываются на обобщении экспериментальных исследований и использовании интегральных или дифференциальных уравнений и эмпирических зависимостей.

Ниже приводятся основные результаты и упрощенные инженерные формулы расчета теплообмена.

18.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ЛАМИНАРНОМ И ТУРБУЛЕНТНОМ РЕЖИМАХ ТЕЧЕНИЯ

Конвективные тепловые потоки у поверхности гиперзвукового спускаемого аппарата удобно представлять при помощи видоизмененной формулы Ньютона. При этом величина конвективных тепловых потоков q_w определяется произведением обобщенного коэффициента теплообмена α/c_p на разность эффективной энтальпии газа J_e и действительной энтальпии газа у стенки J_w :

$$q_w = \frac{\alpha}{c_p} (J_e - J_w). \quad (18.1)$$

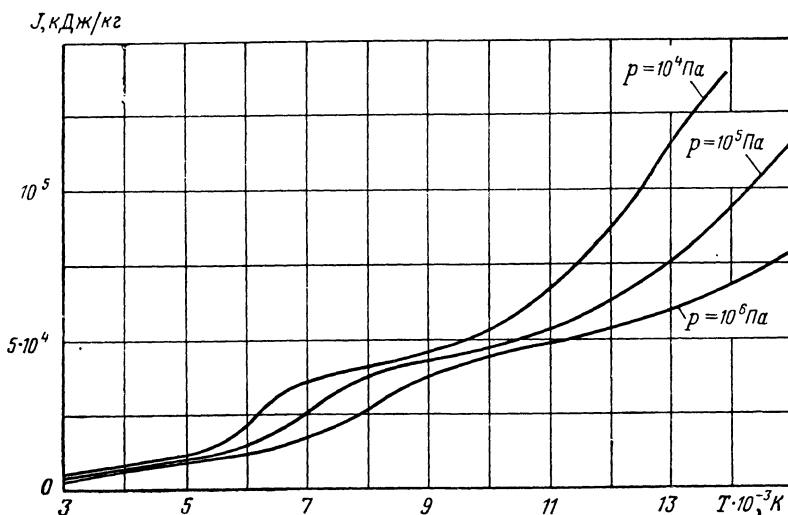


Рис. 18.1. Зависимость энтальпии воздуха J от температуры T и давления p

На рис. 18.1 показана зависимость энтальпии воздуха J кДж/кг, учитывающей энергию химических преобразований в высокотемпературном газе, от давления p [Па] и температуры T [°K]. Величина эффективной энтальпии газа J_e для лобовой части спускаемого аппарата совпадает с величиной энтальпии торможения J_{01} , учитывающей кинетическую энергию потока:

$$J_{01} = J_1 + \frac{U_1^2}{2}.$$

В общем случае эффективная энтальпия связана с параметрами основного потока соотношением

$$J_e = J_{01} \frac{1 + \omega r}{1 + \omega}; \quad (18.2)$$

$$\omega = \frac{U_1^2}{2J_1}.$$

Здесь U_1 — скорость на внешней границе пограничного слоя; r — коэффициент восстановления энтальпии, равный для ламинарного пограничного слоя $Pr^{1/2}$, а для турбулентного пограничного слоя $Pr^{1/3}$ (для воздуха число Прандтля Pr можно принять равным 0,7).

Значения величин с индексом «0» будут соответствовать условиям торможения, с индексом «1» — условиям вне пограничного слоя, с индексом «w» — условиям у стенки.

Пограничный слой, образующийся вблизи поверхности аппарата, где проявляются силы вязкости и теплопроводность, является обычно достаточно тонким и слабо влияет на распределение давления и других параметров течения по телу. Поэтому параметры на внешней границе пограничного слоя могут определяться из расчетов обтекания тела невязкой (идеальной) жидкостью [6, 11, 12, 16]. Это условие, однако, не всегда справедливо при полете на больших высотах и в некоторых сложных случаях течения, рассматриваемых ниже.

Использование разности энтальпии $J_e - J_w$ в формуле (18.1) позволяет учесть перенос химической энергии, которая выделяется за счет рекомбинации диссоциированных молекул при их диффузии поперек пограничного слоя к поверхности омываемого гиперзвукового аппарата.

При относительно малых скоростях движения местные коэффициенты теплообмена α/c_p можно определить из довольно общих критериальных зависимостей, подтвержденных многочисленными расчетами и экспериментами. Если числа Стантона St , Рейнольдса Re_w и Прандтля Pr образовать по местным значениям параметров и по некоторой эффективной длине

$$St = \frac{\alpha/c_p}{q_w U_1}; \quad Re_w = \frac{q_w U_1 X}{\mu_w}; \quad Pr = \frac{\mu_w c_{pw}}{\lambda_w}, \quad (18.3)$$

то критериальные зависимости, характеризующие теплопередачу на изотермической непроницаемой поверхности, имеют вид:

— для ламинарного пограничного слоя

$$St = A Re_w^{-0,5} Pr^{-0,6}; \quad (18.4)$$

— для турбулентного пограничного слоя

$$St = 0,0296 Re_w^{-0,2} Pr^{-0,57}. \quad (18.5)$$

В формулах (18.3) U_1 — скорость вдоль линии тока с идеальной жидкостью;

X — линейный размер, называемый эффективной длиной и являющийся функцией расстояния и распределения параметров течения вдоль линии тока от точки начала развития пограничного слоя.

Множитель пропорциональности A в (18.4) зависит от безразмерных параметров, характеризующих температуру поверхности $\bar{T}_w = J_w/J_{01}$, геометрию поверхности, местную скорость M_1 и ее градиент β , а также величину вторичных токов при пространственных движениях. Выражения для A и X получаются на основании аппроксимации результатов расчетов и экспериментов в общем случае единичными зависимостями типа (18.4), (18.5), такими же как при течении на плоской пластине. Для простейшего движения на плоской пластине

$$A = 0,332; \quad X = s.$$

Из соотношений (18.1) — (18.5) для обобщенного коэффициента теплообмена при малых скоростях и малых перепадах температур получим:

— при ламинарном пограничном слое

$$\frac{\alpha}{c_p} = A \left(\frac{q_w \mu_w U_1}{X} \right)^{0,5} Pr^{-0,6}; \quad (18.6)$$

— при турбулентном пограничном слое

$$\frac{\alpha}{c_p} = 0,0296 q_w^{0,8} \mu_w^{0,2} U_1^{0,8} Pr^{-0,57} X^{-0,2}. \quad (18.7)$$

В случае гиперзвуковых скоростей теплопередача существенно зависит от ряда новых явлений, происходящих в пограничном слое. При гиперзвуковых скоростях сильно изменяется температура и соответственно величины μ , q и их произведение поперек пограничного слоя и важную роль играют физико-химические превращения. Кроме того, на профили скоростей и температур в пограничном слое и тепловые потоки к поверхности оказывают влияние как вдув газа при разрушении поверхности, так и неизоэнтропичность внешнего течения. Численные решения и эксперименты показывают, что влияние этих явлений на теплопередачу можно учесть введением поправочных множителей для обобщенного коэффициента теплообмена (18.6), (18.7).

Основные уравнения для расчета конвективного теплообмена в области безотрывного движения газа на изотермической поверхности спускаемого аппарата можно представить в следующей форме:

— для ламинарного режима

$$\frac{\alpha}{c_p} = A (Q_w \mu_w U_1)^{0,5} X^{-0,5} k_1 k_2 k_3 k_4 k_5; \quad (18.8)$$

— для турбулентного режима

$$\frac{\alpha}{c_p} = 0,0296 Q_w^{0,8} \mu_w^{0,2} U_1^{0,8} X^{-0,2} k_1 k_2 k_3 k_4 k_5. \quad (18.9)$$

В этих соотношениях поправочные множители k_i ($1 \leq i \leq 5$) зависят от режима течения, причём

k_1 — поправка на число Прандтля;

k_2 — поправка на переменность μ , Q поперек пограничного слоя;

k_3 — поправка на наличие химических реакций;

k_4 — поправка на вдув газа через поверхность;

k_5 — поправка на неизоэнтропичность во внешнем потоке.

Определение величины A и эффективной длины основано на точном и приближенном решении уравнений пограничного слоя или обработке экспериментов. Такое определение величины A и X , основные расчетные случаи и методы решений будут даны в дальнейшем.

18.2. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЕВ

Расчет сжимаемых ламинарных пограничных слоев можно провести численными и приближенными методами. При численном методе решаются дифференциальные уравнения пограничного слоя в частных производных параболического типа. Для решения этих уравнений можно использовать, например, конечноразностные методы [9, 10]. Такие методы применимы как к двумерным (плоским и осесимметричным), так и к трехмерным пограничным слоям [10], для которых в общем случае приходится решать систему уравнений от трех независимых переменных. Точное решение трехмерных уравнений пограничного слоя оказывается возможным для ограниченного класса задач и, кроме того, на современных вычислительных машинах занимает сравнительно много машинного времени, поэтому при практических расчетах часто используются приближенные методы или сложные пространственные течения заменяются комбинацией более простых движений.

Важным классом пространственных течений является течение вблизи линии растекания, когда уравнения пограничного слоя зависят только от двух переменных. Такие течения возникают, например, в плоскости симметрии на наветренной стороне осесимметричных аппаратов, движущихся под углом атаки. В этой области тепловые потоки достигают наибольших значений.

Для ряда течений (в окрестности точек торможения, вдоль линий растекания конусов, цилиндров и др.) уравнения пограничного слоя преобразуются к обыкновенным дифференциальным уравнениям (автомодельные движения), что существенно упрощает решение.

Именно эти типы течений были использованы для исследования влияния физических свойств газа [21, 27, 29] и определения значения поправочных множителей k_i , а также значений X и A .

18.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОПРАВОЧНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ

Влияние числа Прандтля на обобщенный коэффициент теплообмена для ламинарного и турбулентного режимов течения при $0,7 \leq Pr \leq 1$ с достаточной точностью представляется в виде

$$k_1 = \begin{cases} Pr^{-0,6} & (\text{для лам. реж.}) \\ Pr^{-0,57} & (\text{для турб. реж.}) \end{cases} \quad (18.10)$$

Влияние переменности μQ поперек ламинарного пограничного слоя учитывается по методу «условной энтальпии» одним из двух способов

$$a) \quad k_2 = \left(\frac{\mu^* Q^*}{\mu_w Q_w} \right)^{1/3} \left(\frac{\mu_1 Q_1}{\mu_w Q_w} \right)^{\gamma}, \quad \gamma = \frac{1}{15} \frac{J_w}{J_{01}} \quad (\text{для лам. реж.}), \quad (18.11)$$

где μ^*Q^* вычисляется при «условной (максимальной внутри слоя) энтальпии»

$$J^* = \begin{cases} J_1 & , \quad \text{при } \omega = \frac{U_1^2}{2J_1} < 1 - \frac{J_w}{J_1} \\ J_1 \left[\frac{J_w}{J_1} + \frac{1}{4} \left(1 + \omega - \frac{J_w}{J_1} \right)^2 \right] & , \quad \text{при } \omega > 1 - \frac{J_w}{J_1} ; \end{cases} \quad (18.12)$$

$$\text{б) } k_2 = \left(\frac{\mu^* Q^*}{\mu_1 Q_1} \right)^{0,5} \quad (\text{для лам. реж.}), \quad (18.13)$$

где μ^*Q^* вычисляется при «условной энтальпии»

$$J^* = 0,5 (J_w + J_1) + 0,11 P_1^{0,5} \frac{U_1}{J_1}. \quad (18.14)$$

На рис. 18.2 представлены значения комплекса $P = 0,58 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{p}{\mu Q}$ для воздуха в зависимости от энтальпии J при различных значениях p [20, 28]. При этом давление вычислено в Паскалях, а произведение μQ имеет размерность $\text{кг}^2/\text{м}^4\text{с}$.

При помощи поправочного множителя k_2 (18.13) достигается хорошая точность расчетов в слабоградиентных потоках; в общем случае коэффициент k_2 предпочтительнее вычислять по формуле (18.11).

Для турбулентного пограничного слоя коэффициент k_2 , учитывающий сжимаемость, имеет вид:

$$\text{а) } k_2 = (\mu^*/\mu_w)^{0,2} (Q^*/Q_w)^{0,8} \quad (\text{для турб. реж.}), \quad (18.15)$$

где μ^* и Q^* вычисляются при условной энтальпии

$$J^* = \frac{1}{3} J_1 + \frac{2}{3} J_w + \frac{1}{5} \omega r J_1;$$

$$\text{б) } k_2 = (J_w/J_e)^m (1 + r\omega)^{0,11}, \quad m = 0,4 + 0,2 \exp(-\omega r) \quad (\text{для турб. реж.}). \quad (18.16)$$

Формулы (18.15) и (18.16) определяют поправку на сжимаемость газа примерно с одинаковой точностью, однако множитель k_2 проще вычислять по формуле (18.16), так как при этом не требуется знание термодинамических и переносных свойств газа.

Влияние диссоциации, ионизации и других химических реакций на теплопередачу при ламинарном течении наиболее просто оценивается при помощи коэффициента k_3 для равновесного и замороженного пограничных слоев. Для равновесного пограничного слоя при отсутствии диссоциации газа на стенке множитель равен

$$k_3 = 1 + (\text{Le}^{0,52} - 1) \frac{Q}{J_{01} - J_w} \quad (\text{для лам. реж.}) \quad (18.17)$$

Зависимость числа Льюиса—Семенова Le и приведенного теплового эффекта диссоциации и ионизации $Q = J - 0,23 J_{O_2} - 0,77 J_{N_2}$ для воздуха от J представлены соответственно на рис. 18.3 и 18.4.

В формуле (18.17) величины Le и Q рассчитываются при условной (максимальной внутри слоя) энтальпии J^* по (18.12). Соотношение (18.17) можно использовать при расчете теплопередачи к аппаратам, летящим на любых высотах.

Для расчета теплопередачи к телам малого размера (1 см и менее) при небольших давлениях (ниже 0,1 ат) следует пользоваться выражением, полученным для замороженного потока (т. е. при отсутствии реакций в газовой фазе),

$$k_3 = 1 + (\text{Le}^{0,63} - 1) \frac{Q}{J_{01} - J_w}. \quad (\text{для лам. реж.}) \quad (18.18)$$

Здесь Le и Q определяются по тем же графикам (см. рис. 18.3 и 18.4), но при температуре на внешней границе пограничного слоя. Как показывают поправки (18.17) и (18.18), при $\text{Le}=1$ тепловые потоки у стенки не зависят от скоростей химических реакций в смеси [15].

В случае турбулентного пограничного слоя поправочный множитель k_3 определяется по той же формуле (18.17). Однако, как следует из приближенных оценок, показатель степени β при числе Le изменяется при турбулентном течении в диапазоне $2/3 \leq \beta \leq 1$. Обычно принимают $\beta=2/3$ и величины Le и Q вновь определяют по рис. 18.3, 18.4.

Если необходимо учесть протекание химических реакций между компонентами внешней среды и материала аппарата, то приближенные расчеты можно проводить в предположении, что такие реакции происходят не внутри пограничного слоя, а на по-

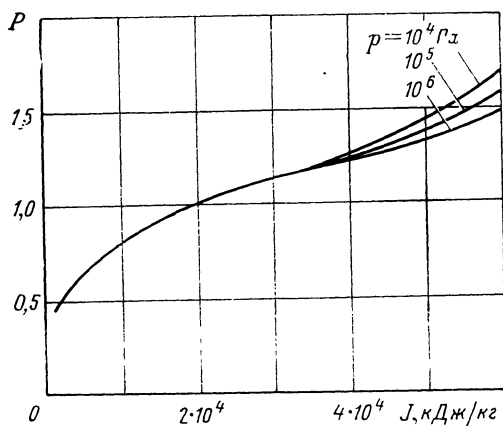


Рис. 18.2. Зависимость комплекса $P = 0,58 \cdot 10^{-10} \frac{P}{\mu Q}$ (Па · м⁴ · с/кг²) для воздуха от энтальпии J и давления p

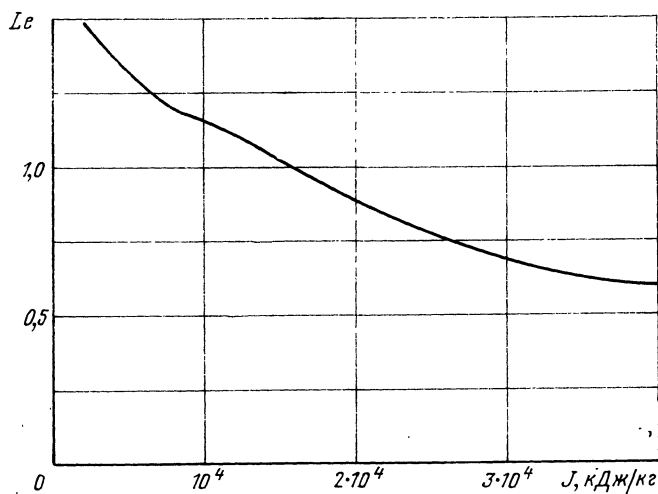


Рис. 18.3. Зависимость числа Льюиса—Семенова Le для воздуха от энтальпии J

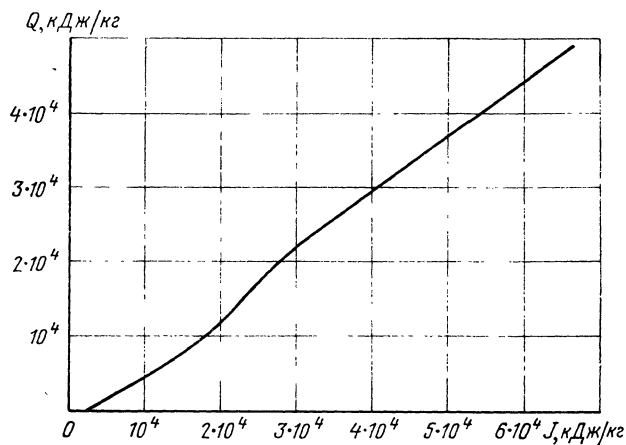


Рис. 18.4. Зависимость приведенного теплового эффекта диссоциации и ионизации Q для воздуха от энтальпии J

верхности тела, и тепловые эффекты этих реакций учитывать в балансе энергии. Именно такой подход используется обычно в расчетах при выборе тепловой защиты.

Влияние на теплоотдачу вдува одиночного газа определяется при помощи функции вдува ψ

$$k_4 = \psi(\gamma \bar{G}) \quad \left(\psi \equiv \frac{(\alpha/c_p)}{(\alpha/c_p)_0} \right). \quad (18.19)$$

В этом выражении $\bar{G} = G/(\alpha/c_p)_0$ — расход газа через поверхность G , отнесенный к обобщенному коэффициенту теплообмена на непроницаемой поверхности $(\alpha/c_p)_0$, а γ — коэффициент вдува, представляющий собой коэффициент пропорциональности в линейном законе вдува

$$\frac{\alpha/c_p}{(\alpha/c_p)_0} \approx 1 - \gamma \bar{G}, \quad (18.20)$$

который справедлив при малых вдувах ($\bar{G} \ll 1$).

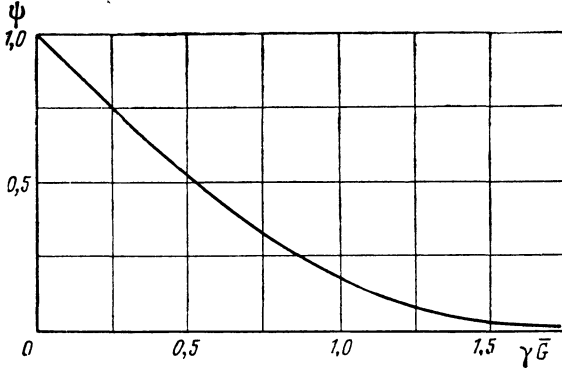


Рис. 18.5. Универсальная функция вдува ψ ; $\bar{G}$ — расход газа через поверхность, отнесенный к обобщенному коэффициенту теплообмена на непроницаемой поверхности $(\alpha/c_p)_0$; γ — коэффициент вдува.

Функция $\psi(\gamma \bar{G})$ для ламинарного пограничного слоя изображена на рис. 18.5. Она носит универсальный характер и не зависит от свойств внешнего и вдуваемого газов, геометрии тела, температурного (энтальпийного) фактора. Эта функция может быть аппроксимирована с помощью следующих соотношений:

$$\psi = \begin{cases} 1 - \gamma \bar{G} & , \text{ если } -0,3 < \gamma \bar{G} < 0,4 \\ 1,012 - 1,16(\gamma \bar{G}) + 0,325(\gamma \bar{G})^2 & , \text{ если } 0,4 < \gamma \bar{G} < 1,2. \end{cases} \quad (18.21)$$

Точность аппроксимации при $\gamma \bar{G} \leq 1$ составляет 5%.

При $\gamma \bar{G} < 0,5$ с погрешностью не более 10% можно пользоваться линейной зависимостью (18.20).

Коэффициент вдува одиночного газа можно рассчитать по формулам [17, 18]:

$$\gamma = a \left(\frac{M_e}{M_v} \right)^{0,24} \quad (\text{для ламин. реж.}); \quad (18.22)$$

$$\gamma = 0,19 \left(\frac{M_e}{M_v} \right)^b \quad (\text{для турб. реж.}); \quad (18.23)$$

$$b = \begin{cases} 0,35 & \text{при } 0,2 < (M_e/M_v) < 1 \\ 0,70 & \text{при } 1 < (M_e/M_v) < 8, \end{cases}$$

где M_e — молекулярный вес внешнего газа, а M_v — молекулярный вес вдуваемого газа. Множитель a зависит от геометрии тела, причем не очень сильно (например, в случае обтекания острого конуса под углом атаки этот множитель на всей поверхности имеет то же значение, что и на линии растекания). Значения множителя a для некоторых геометрических тел таковы:

Пластина, конус	0,8
Осесимметричная критическая точка	0,6
Плоская критическая точка	0,55
Острый конус под углом атаки	0,6

Если на поверхности тела одновременно происходит вдув или отсос нескольких газообразных компонент (как это имеет место при гетерогенных химических реакциях между материалом тела и внешним потоком), то суммарный эффект такого сложного массообмена описывается той же универсальной функцией $\psi(\gamma\bar{G})$, причем коэффициент вдува определяется по формуле

$$\gamma = \sum_i \gamma_i G_i / \sum_i G_i, \quad (18.24)$$

где γ_i — коэффициент вдува отдельной компоненты (18.22);

G_i — парциальный расход i -й компоненты (при вдуве $G_i > 0$, при отсосе $G_i < 0$).

При спуске гиперзвукового аппарата перед ним возникает криволинейная ударная волна, которая существенным образом изменяет распределение параметров течения на внешней границе пограничного слоя. Действительно, струйки тока, входящие в пограничный слой по мере его развития, проходят через участки ударной волны различной интенсивности и имеют различные значения энтропии и давления торможения. В этом случае течение газа на внешней границе является неизоэнтропическим, и при расчете теплопередачи необходимо учитывать поправочный коэффициент k_5 .

Определение коэффициента k_5 проводится методом последовательных приближений. Первоначально рассчитывается пограничный слой в предположении изоэнтропичности внешнего потока и находятся коэффициенты теплообмена, толщина вытеснения и расход газа через пограничный слой. Затем по первоначально вычисленному расходу определяется уточненное распределение параметров на внешней границе, по которым и вычисляется коэффициент теплообмена, или коэффициент k_5 [2, 3].

18.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИН X И A

Местные коэффициенты теплообмена у поверхности спускаемого аппарата (18.8) и (18.9) зависят от толщины пограничного слоя и деформации профилей скоростей и температур, причем эффективная длина X учитывает нарастание толщины пограничного слоя, а множитель пропорциональности A — местную деформацию распределений параметров внутри слоя. В случае турбулентного пограничного слоя, как показывают эксперименты, при отрицательных и небольших положительных градиентах давления профили скоростей и температур деформируются слабо и величина A остается постоянной

$$A = 0,0296 \quad (\text{для турб. реж.}). \quad (18.25)$$

В случае ламинарного пограничного слоя для эффективной длины имеем [11]

$$X = \frac{1}{U_1 q_w (h_2')^2 k_2^2} \int_0^s U_1 q_w (h_2')^2 k_2^2 ds \quad (\text{для ламинар. реж.}). \quad (18.26)$$

Здесь интегрирование проводится от критической точки вдоль линии тока идеальной жидкости на поверхности: U_1 и p_1 — скорость и давление на внешней границе пограничного слоя (вдоль линии тока); h_2' — коэффициент Ламе, характеризующий положение линии тока.

Как показывает сравнение с точными вычислениями при принятом выборе эффективной длины (18.26), величина A при ламинарном течении изменяется в узких пределах и для сильно охлаждаемой поверхности приближенно равна значению на пластине $A = 0,332$.

В случае турбулентного пограничного слоя на основании обобщенных экспериментальных исследований для эффективной длины можно получить следующее соотношение [2]:

$$X = \frac{1}{U_1 q_w (h_2')^{1,25} k_2^{1,25}} \int_0^s U_1 q_w (h_2')^{1,25} k_2^{1,25} ds \quad (\text{для турб. реж.}), \quad (18.27)$$

причем величина k_2 определяется по формулам (18.15) или (18.16).

При помощи введения эффективной длины пластины устанавливается универсальная зависимость для теплообмена в турбулентных потоках при отрицательных и небольших положительных градиентах давления. На рис. 18.6 представлены результаты экспериментов по теплообмену в виде зависимости

$$(St \cdot Re_w) / (k_1 \cdot k_2) \quad \text{от} \quad Re_w.$$

Прямая на этом рисунке соответствует соотношению [13]

$$\begin{aligned} \frac{St}{k_1 \cdot k_2} &= 0,0296 Re_w^{-0,2} \quad (\text{для турб. реж.}); \\ St &= \frac{q_w}{q_w U_1 (J_e - J_w)}, \quad Re_w = \frac{q_w U_1 X}{\mu_w}. \end{aligned} \quad (18.28)$$

Такая аппроксимация результатов экспериментов справедлива в диапазоне чисел M на границе пограничного слоя от 0 до 10 и при изменении энтальпийного фактора: $0,1 \leq J_w \leq 1,5$.

При внешнем обтекании гладких тел для упрощения вычислений эффективной длины можно пренебречь изменением величины k_2 по поверхности аппаратов. Такое приближение принято в дальнейшем при рассмотрении частных случаев (разд. 18.5). При этом формулы для эффективной длины на изотермических поверхностях (18.26), (18.27) имеют вид

$$X = \frac{1}{U_1 p_1 h_2'} \int_0^s U_1 p_1 h_2'^2 ds \quad (\text{для ламин. реж.});$$

$$X = \frac{1}{U_1 p_1 (h_2')^{1,25}} \int_0^s U_1 p_1 (h_2')^{1,25} ds \quad (\text{для турб. реж.}).$$

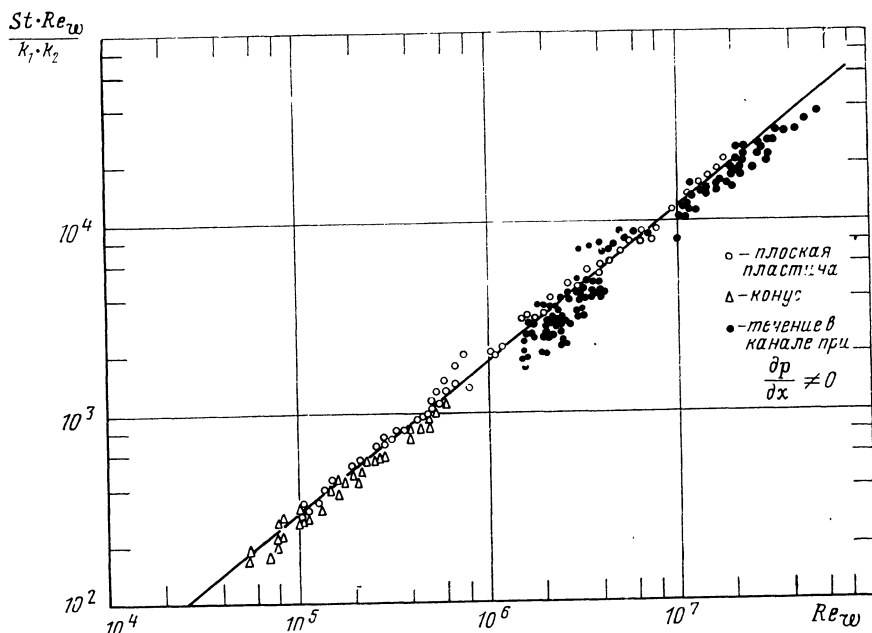


Рис. 18.6. Зависимость параметра теплообмена $St Re_w / (k_1 \cdot k_2)$ от числа Re_w при турбулентном пограничном слое при наличии и отсутствии градиента давления

При использовании этих формул ошибка в определении тепловых потоков составляет около 10%. При расчете теплообмена на телах сложной геометрической формы, а также для течений в соплах предпочтительнее применять формулы (18.26) и (18.27).

Для расчета эффективной длины по формулам (18.26) и (18.27) в общем случае необходимо задать распределения параметров течения вдоль линий тока идеальной жидкости, а также координаты самих линий тока.

Обычно параметры течения и линии тока задаются в системе криволинейных ортогональных координат x, z на поверхности и координаты y по нормали к поверхности; элемент дуги вдоль поверхности представляется тогда в виде

$$dl^2 = h_1^2 dx^2 + h_2^2 dz^2, \quad (18.29)$$

где h_1 и h_2 — координаты Ламе для принятой системы.

Для расчета по линиям тока s осуществляется переход к криволинейным ортогональным координатам s, p , для которых

$$dl^2 = ds^2 + (h_2')^2 dp^2. \quad (18.30)$$

Если в системе координат (18.29), связанной с поверхностью, направление линий тока представить в параметрическом виде

$$x = t; \quad z = f(t), \quad (18.31)$$

то величина h_2' , входящая в соотношение (18.30), определится по формуле

$$\ln(q_1 U_1 h_2') = \int_0^t \frac{1}{q_1 u_1 h_2} \left[\frac{\partial(q_1 u_1 h_2)}{\partial x} + \frac{\partial(q_1 w_1 h_1)}{\partial z} \right] dt. \quad (18.32)$$

Здесь подынтегральная функция вычисляется вдоль линии тока, а u_1 и w_1 — проекции вектора скорости внешнего течения на оси x и z . Для элемента дуги вдоль линии тока имеем

$$ds = \frac{U_1}{u_1} h_1 dt. \quad (18.33)$$

18.5. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ И ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

Двумерный поток

Пусть x, z — взаимно ортогональная система координат на поверхности, причем ось x направлена по обводу контура в направлении течения. Тогда для плоского течения

$$h_1 = h_2 = 1 \quad (18.34)$$

и для осесимметричного течения

$$h_1 = 1, \quad h_2 = R(x), \quad (18.35)$$

где R — радиус вращения в данном сечении тела.

Линии тока в этих случаях совпадают с линиями $z = \text{const}$ и имеют место равенства

$$h_2' = h_2; \quad U_1 = u_1; \quad ds = dx. \quad (18.36)$$

Величина h_2' может быть определена также из (18.32). Теперь выражение (18.26) для эффективной длины при ламинарном режиме представляется в виде

$$X = \frac{1}{u_1 p_1 R^{2k}} \int_0^x u_1 p_1 R^{2k} dx \quad (\text{для ламинар. реж.}), \quad (18.37)$$

причем $k=0$ для плоского и $k=1$ для осесимметричного течений. В частности, для пластины ($u_1 = \text{const}$) и острого конуса ($u_1 = \text{const}, R = ax$) из выражения (18.37) получаем

$$X = x \text{ или } X = \frac{x}{3} \text{ и } A = 0,332 \quad (\text{для ламинар. реж.}). \quad (18.38)$$

Таким образом, при ламинарном режиме тепловые потоки на остром конусе в $\sqrt{3}$ раз больше, чем на пластине (на равных расстояниях от переднего края).

Для плоской и осесимметричной критических точек ($u_1 = ax$) соответственно

$$X = \frac{x}{2} \text{ и } X = \frac{x}{4} \quad (\text{для ламинар. реж.}). \quad (18.39)$$

Величина A для критических точек, определенная на основании численных решений при $\text{Pr}=1$ [27], приведена в табл. 18.1 для различных значений температурного фактора $\bar{T}_w$.

Таблица 18.1

$\bar{T}_w$	Значение множителя A из уравнения (18.8)	
	плоская критич. точка	осесимметричная критич. точка
1	0,403	0,381
0,5	0,384	0,366
0,2	0,368	0,356
0,0	0,358	0,350

Из табл. 18.1 видно, что значения A для плоской и осесимметричной критических точек различаются не более чем на 6%, а в случае сильного охлаждения поверхности близки к значению на пластине.

Величина обобщенного коэффициента теплообмена (18.8) в области критических точек зависит также от градиента скорости основного потока в точке торможения $a = (du_1/dx)_{x=0}$. Значение этого градиента обычно определяется из расчетов идеальной

жидкости или из соотношений Ньютона. В последнем случае величину градиента скорости можно представить в виде

$$\frac{R^\circ}{a_{01}} \frac{du_1}{dx} = \sqrt{\frac{2}{\kappa} \left(1 - \frac{p_n}{p_{01}}\right)}, \quad \text{или} \quad \frac{du_1}{dx} = \frac{1}{R^\circ} \sqrt{\frac{2(p_{01} - p_n)}{\varrho_{01}}}, \quad (18.40)$$

где p_n — давление набегающего потока;

a_{01} — скорость звука заторможенного внешнего течения;

R° — радиус кривизны поверхности в критической точке;

p_{01} — давление в точке торможения потока;

ϱ_{01} — плотность в той же точке;

κ — показатель адиабаты для воздуха.

Формула (18.40) применима для аппаратов с гладкой выпуклой лобовой поверхностью при числе $M > 3$, если радиус кривизны R° и мидель аппарата D_m удовлетворяют условию

$$\frac{D_m}{R^\circ} \geq 1,42.$$

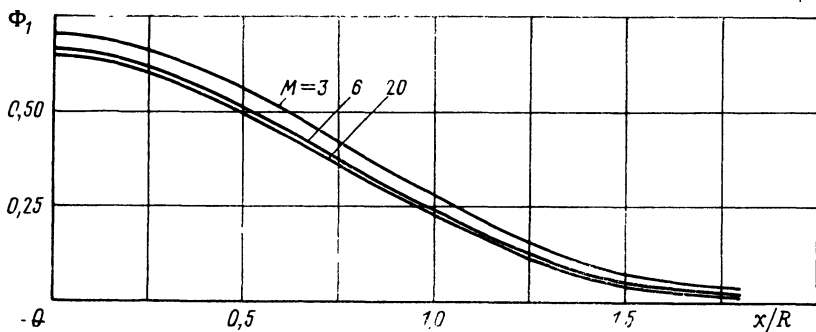


Рис. 18.7. Распределение функции теплообмена Φ_1 из (18.42) при ламинарном течении по поверхности сферы радиуса R для чисел Маха 3; 6 и 20; (x/R) — дуга вдоль поверхности от критической точки

Для аппаратов с плоской торцевой поверхностью радиуса R градиент скорости в критической точке равен

$$\frac{du_1}{dx} = 0,31 \frac{a_{01}}{R}. \quad (18.41)$$

Приведем результаты расчетов теплообмена на боковой поверхности для некоторых случаев, полученные численным методом. Для практического использования результаты расчетов удобно представить в виде зависимости функции теплообмена Φ_1 , связанной с параметрами набегающего потока (они обозначены индексом «н»),

$$\Phi_1 = St_n (Re_{wn})^{0,5} Pr^{0,6} M^{-1} \quad (18.42)$$

$$\left(St_n = \frac{q_w}{\varrho_w u_n (J_{01} - J_w)}; \quad Re_{wn} = \frac{u_n \varrho_w n L}{\mu_n} \right)$$

от безразмерной координаты x/L . Функция Φ_1 показана на рис. 18.7—18.10 для обтеканий сферы, торца, цилиндра, затупленного конуса ($L=R$) и оживального тела ($L=D_m$). При расчете теплообмена использовались распределения давления по поверхностям, данные в работе [16].

Функция Φ_1 распределения тепловых потоков для цилиндра (кривая 1) и торца (кривая 2) при $M=3$ показана на рис. 18.8. На торцевой поверхности тепловые потоки в критической точке имеют минимальное значение и возрастают при приближении к острому краю. Для гладких тел (сферы и цилиндра) тепловые потоки монотонно уменьшаются от соответствующих значений в передней критической точке.

Результаты расчета теплообмена на затупленных конусах с полууглами раствора $\beta=10^\circ$ и 20° , при осесимметричном обтекании, угле $\alpha=0^\circ$ и числе $M=20$ показаны на рис. 18.10. В качестве примера расчета теплообмена на сложном теле на рис. 18.9 представлена функция Φ_1 для оживального тела, состоящего из острого конуса с полууглом раствора $\beta=25^\circ$ ($\alpha=0^\circ$), оживала с относительным удлинением $\lambda=2$ и цилиндра при $M=3$. На рис. 18.9 величина $x=x/D_m$ расстояние, отнесенное к миделю, вдоль оси вращения тела от сечения, соединяющего конус и оживало

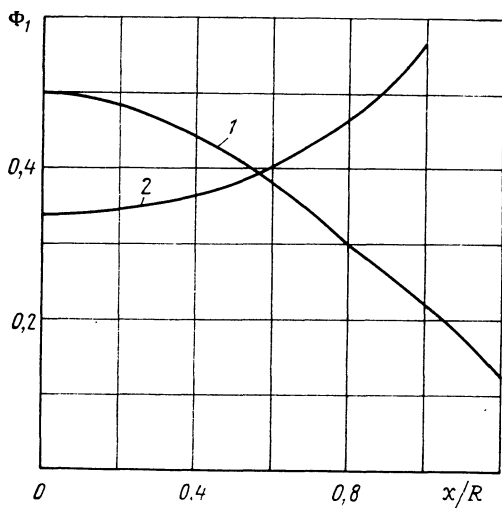


Рис. 18.8. Распределение функции теплообмена Φ_1 из (18.42) при ламинарном обтекании цилиндра (кривая 1) и плоского торца (кривая 2) радиуса R ; x/R — безразмерная координата вдоль поверхности от критической точки

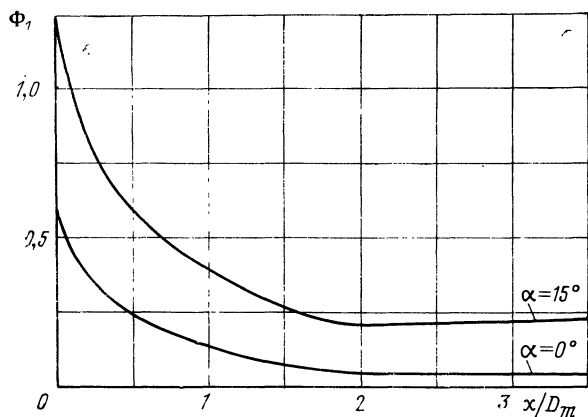


Рис. 18.9. Распределение функции теплообмена Φ_1 из (18.42) при ламинарном обтекании тела «конус—оживало—цилиндр» при углах атаки $\alpha = 0^\circ$ и 15° (на линии растекания) и числе $M=3$; x/D_m — расстояние вдоль поверхности тела, отнесенное к миделю D_m

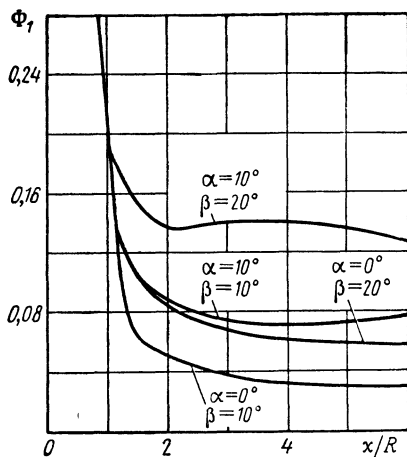


Рис. 18.10. Распределение функции теплообмена Φ_1 из (18.42) при ламинарном обтекании сферически затупленных конусов с радиусом притупления R , полууглом раствора $\beta = 10^\circ$ и 20° и углом атаки $\alpha = 0^\circ$ и 10° при числе $M=20$; x/R — расстояние от критической точки вдоль линии растекания

При расчете двумерного турбулентного пограничного слоя эффективная длина

$$X = \frac{1}{p_1 u_1 R^{1,25k}} \int_0^x p_1 u_1 R^{1,25k} dx \quad (\text{для турб. реж.}), \quad (18.43)$$

где $k=0$ для плоского тела и $k=1$ для осесимметричного. Для пластины и конуса в сверхзвуковом потоке $X=x$ и $X=\frac{4}{9}x$.

Отсюда находим, что тепловой поток на конусе в $(9/4)^{0,2}=1,17$ раза больше, чем на пластине.

На рис. 18.11 показаны результаты расчета теплообмена на поверхности торца и сферически затупленного конуса ($\beta=0$), обтекаемых сверхзвуковым потоком. На этих рисунках показано изменение величины

$$\Phi_2 = St_n (Re_{wn})^{0,2} Pr^{0,57} \bar{J}_w^{0,6} M^{-1,6} \quad (18.44)$$

по образующей тела. Величины St_n и Re_{wn} определены соотношением (18.42).

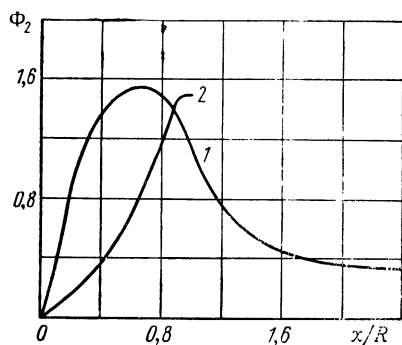


Рис. 18.11. Распределение функции теплообмена Φ_2 из (18.44) при турбулентном течении на поверхности плоского торца (кривая 2) и сферически затупленного конуса при $\beta=0$ (кривая 1); x/R — безразмерная координата вдоль поверхности от критической точки

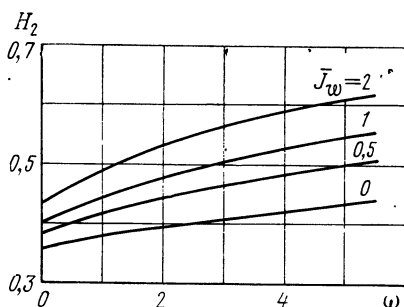


Рис. 18.12. Зависимость параметра теплообмена H_2 для линии торможения цилиндра от параметров ω и J_w

Трехмерное течение на бесконечном цилиндре, обтекаемом под углом атаки

Направим ось x ортогонально образующим цилиндра, а ось z — вдоль его образующих, так что

$$h_2 = h_1 = 1; \quad u_1 = u_1(x); \quad w_1 = a = \text{const.}$$

Из формулы (18.32)

$$h_2' = \frac{u_1}{U_1}; \quad U_1 = \sqrt{u_1^2 + w_1^2}$$

и элемент дуги вдоль линии тока

$$ds = \frac{U_1}{u_1} dx.$$

Для эффективной длины получаем выражение

$$X = \frac{U_1}{u_1} \frac{1}{p_1 u_1} \int_0^x p_1 u_1 dx \quad (\text{для ламин. реж.}). \quad (18.45)$$

В частном случае течения на критической линии

$$u_1 = bx^m; \quad w_1 = a.$$

Из (18.45) получаем

$$X = \frac{U_1}{u_1} \frac{x}{m+1} \quad (\text{для ламин. реж.}). \quad (18.46)$$

Зависимость величины $A=H_2$, определяющей коэффициент теплообмена по формуле (18.8), от параметров ω и J_w при $Pr=1$ приведена на рис. 18.12, при этом эффективная длина X находится по соотношению (18.46). Эти значения H_2 получены из численных решений уравнений пограничного слоя, выполненных в [29]. Приближенная аппроксимация (с точностью 6%) расчетов для различных m приводит к соотношению

$$A \equiv H_2 = 0,332 [1 + 0,16(1 + J_w)\beta^{1/2}(1 + \omega^{5/6})]^{1/2} \quad (\text{для ламин. реж.}), \quad (18.47)$$

$$\beta = \frac{2m}{m+1}.$$

Определяющий параметр ω для линии торможения цилиндра легко определить по числу M и углу стреловидности γ :

$$\omega = \frac{(\alpha - 1)M^2 \sin^2 \gamma}{2 + (\alpha + 1)M^2 \cos^2 \gamma}.$$

Значение градиента скорости $\beta = du_1/dx$ на критической линии определяется из газодинамического расчета поперечного обтекания цилиндра потока с числом Маха $M_n = M \cos \gamma$ по формуле Ньютона

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{a_{n0}}{R} \sqrt{\frac{1}{\alpha} (1 - p_n/p_{к.л})}, \quad \frac{p_n}{p_{к.л}} = \frac{\pi_n}{\sigma_n}, \quad (18.48)$$

где σ — коэффициент восстановления давления; $\pi = p/p_0$. Индекс «п» означает, что величины определяются по значению M_n , а индексом «к.л» обозначены величины на критической линии. Величина A может приближенно определяться по формуле (18.47) и в общем случае течения на цилиндре, причем

$$m = \frac{\partial w_1}{\partial z} \frac{z}{w_1}.$$

В случае турбулентного пограничного слоя эффективная длина равна

$$X = \frac{U_1^{0,25}}{p_1 u_1^{1,25}} \int_0^x u_1^{0,25} p_1 U_1^{0,75} dx \quad (\text{для турб. реж.}). \quad (18.49)$$

Тепловые потоки рассчитываются по формуле (18.9). В частном случае линии торможения

$$X = 0,8 \frac{w_1}{u_1} x \quad (u_1 = bx; \quad w_1 = U_n \sin \gamma)$$

и градиент скорости находится из (18.48).

Тепловые потоки в области критической линии цилиндра можно определить при помощи рис. 18.13 (кривая для $\beta=0$), если считать $\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma$. Тепловые потоки в стенку связаны с показанной здесь функцией Φ_2 соотношением (18.44).

Распределение функции теплообмена Φ_2 по боковой поверхности косообтекаемых цилиндров дано на рис. 18.14 при $M=10$, $J_w=0,1$ для различных значений углов стреловидности γ . Как видно, при увеличении угла стреловидности коэффициент теплоотдачи при турбулентном режиме возрастает и достигает наибольшего значения при $\gamma \approx 45^\circ$; при этом максимум Φ_2 перемещается по боковой поверхности к критической линии.

Изложенные здесь результаты применимы к ведущим цилиндрическим кромкам стреловидного крыла с углом стреловидности γ , расположенным под углом атаки α . В этом случае при расчетах следует использовать эффективный угол стреловидности γ^* , который для линии растекания определяется соотношением

$$\sin \gamma^* = \sin \gamma \cos \alpha.$$

Трехмерное течение на поверхности конуса

Пусть x — ось вдоль образующих конуса, полуугол исторого равен β ; ось z — дуга в окружном направлении. Тогда для элемента дуги (18.29) имеем

$$h_1 = 1; \quad h_2 = x \sin \beta.$$

Для конического потока распределение параметров внешнего потока зависит только от угловой координаты z :

$$u_1 = u_1(z); \quad w_1 = w_1(z),$$

и для системы координат, связанной с линиями тока, из (18.32) можно получить

$$h_2' = \frac{w_1}{U_1} \exp \int_0^t \frac{u_1}{w_1} \sin \beta dt; \quad ds = \frac{U_1}{w_1} h_2 dt,$$

причем уравнение линий тока задано в виде

$$z = t; \quad x = f(t) \left[\frac{df}{dt} = \frac{u_1 h_2}{w_1 h_1} \right].$$

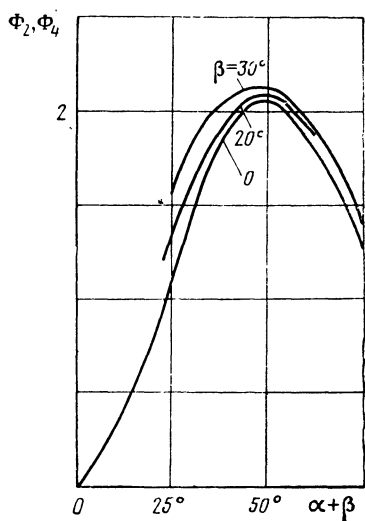


Рис. 18.13. Зависимость функции теплообмена Φ_4 при турбулентном течении на линии растекания острых конусов с полууглом раствора β от полного угла встречи поверхности с потоком $\alpha + \beta$; α — угол атаки. Кривая для $\beta = 0$ соответствует зависимости функции Φ_2 из (18.44) для линии торможения с углом стреловидности γ , если принять $\alpha = (\pi/2) - \gamma$

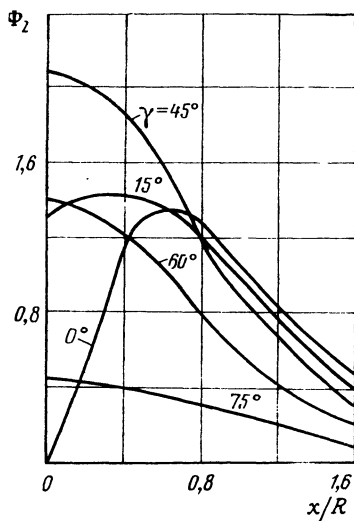


Рис. 18.14. Распределение функции теплообмена Φ_2 из (18.44) при турбулентном течении по поверхности цилиндров для различных углов стреловидности γ ; x/R — безразмерная координата от критической линии вдоль поверхности цилиндра радиуса R

Эффективная длина при ламинарном режиме течения в этом случае

$$X = \frac{U_1}{w_1 l} \int_0^t l h_2 dt; \quad l = w_1 p_1 \exp \left(2 \int_0^t \frac{u_1}{w_1} \sin \beta dt \right) \quad (\text{для ламинар. реж.}) \quad (18.50)$$

Здесь величина h_2 вычисляется вдоль линии тока.

Вдоль линии растекания ($u_1 = \text{const}$; $w_1 = bz$ эффективная длина)

$$X = \frac{x}{3 + 2K} \quad (\text{для ламинар. реж.}) \quad (18.51)$$

и течение зависит от четырех определяющих параметров

$$K = \frac{b}{u_1 \sin \beta}; \quad \omega = \frac{u_1}{2J_1}; \quad \bar{J}_w \text{ и } Pr.$$

При вычислении коэффициентов теплообмена по формулам (18.8) и (18.51) для величины A на основании аппроксимации численных решений имеем

$$A = 0,575 \sqrt{\frac{1 + K}{3 + 2K}} + [\sqrt{2}H_2(\omega, \bar{J}_w) - 0,575] \sqrt{\frac{K}{3 + 2K}}, \quad (18.52)$$

причем значения функции H_2 или определяются по рис. 18.12, или вычисляются из соотношения (18.47) при $\beta=1$. Для линии растекания острого конуса было проанализировано влияние числа Прандтля. Оказалось, что в этом случае

$$k_1 = Pr^\varepsilon; \quad \varepsilon = -0,65 + \frac{0,1K}{K+1} \approx -0,6.$$

Для боковой поверхности острого конуса вычисление тепловых потоков можно приближенно проводить по формулам (18.8), (18.50) и (18.52) при условии, что значения K и ω вычисляются по местным параметрам на границе слоя.

Для боковой поверхности острого конуса получены также численные решения для ламинарного пограничного слоя. Распределение функции теплообмена

$$\Phi_3 = St_n Re_w^{0.5} Pr^{0.6} M^{-1} (\sin \beta)^{0.5};$$

$$Re_w = \frac{\rho_w u_w x}{\mu_w};$$

$$St_n = \frac{q_w}{\rho_w u_w (J_{01} - J_w)}$$

показано на рис. 18.15 для острых круглых конусов при $\beta=20^\circ$, $M=7$, $J_w=0,5$ и различных углах атаки. Параметры идеального газа около конусов можно определить по таблицам [6] или на наветренной стороне поверхности по приближенной теории Ньютона:

$$\frac{p_1 - p_n}{0,5 \rho_n u_n^2} =$$

$$= 2 (\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \cos z)^2;$$

$$w_1 = b \sin z.$$

Величина давления торможения рассчитывается по способу местного конуса для плоскости симметрии потока. В случае линии растекания получим

$$\frac{p_1}{p_n} = \kappa M_n^2 \sin^2(\alpha + \beta); \quad \frac{u_1}{u_n} = \cos(\alpha + \beta);$$

$$K \equiv \frac{b}{u_1 \sin \beta} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 4 \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{c_1}{\sin^2 \beta \cdot \omega}};$$

$$c_1 = \left(\frac{\partial^2 p_1}{\partial z^2} \right)_{z=0} = \frac{\sin \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)};$$

$$\omega_1 = \frac{(\kappa - 1) M^2 \cos^2(\alpha + \beta)}{2 + (\kappa - 1) M^2 \sin^2(\alpha + \beta)}.$$

В случае турбулентного пограничного слоя из (18.27) имеем

$$X = \frac{U_1}{w_1 l} \int_0^t l h_2 dt;$$

$$l = w_1^{0,25} U_1^{0,75} p_1 \exp \left\{ 1,25 \int_0^t \frac{u_1}{w_1} \sin \beta dt \right\} \quad (\text{для турб. реж.}) \quad (18.53)$$

Здесь величина h_2 вычисляется вдоль линии тока, тепловые потоки определяются по формуле (18.9).

В случае линии растекания

$$X = \frac{4x}{9 + 5K} \quad (\text{для турб. реж.}),$$

и для обобщенного коэффициента теплообмена на непроницаемой поверхности из (18.9) получаем

$$\left(\frac{\alpha}{c_p}\right)_w = 0,0348 \left(1 + \frac{5}{9} K\right)^{0,2} k_{2w}^{0,2} \bar{c}_w^{0,8} u_1^{0,8} x^{-0,2} \text{Pr}^{-0,57} \quad (\text{для турб. реж.}). \quad (18.54)$$

Эта формула при подстановке местных параметров течения вне пограничного слоя может быть использована для приближенного расчета на боковой поверхности.

В качестве примера на рис. 18.13 даны распределения функции теплообмена

$$\Phi_4 = \text{St}_n \text{Re}_{wn}^{0,2} \text{Pr}^{0,57} \bar{J}_w^{0,6} M^{-1,6} (\sin \beta)^{0,2}$$

на линии растекания конуса при $\beta=20^\circ$ и 30° , $M=10$ и $\bar{J}_w=0,1$ для различных углов атаки.

Течение на линии растекания затупленного тела

Течение в окрестности линии растекания можно рассмотреть в декартовой системе координат, считая, что ось x направлена вдоль поверхности тела от критической точки и $h_1=h_2=1$. Компоненты скоростей имеют вид

$$u_1=u_1(x); \quad w_1=\Psi(x)z.$$

Уравнение линий тока, для которых ось x является огибающей, представляем в параметрической форме $x=t$, $z=f(t)$. Для элемента дуги вдоль линии тока и коэффициента h_2 по (18.31) имеем

$$ds = \frac{U_1}{u_1} dx; \quad h_2' = \frac{u_1}{U_1} \exp\left(\int_0^t \frac{1}{u_1} \Psi(t) dt\right). \quad (18.55)$$

Отсюда для эффективной длины при ламинарном режиме течения имеем

$$X = \frac{1}{U_1 l} \int_0^x u_1 dx, \quad l = p_1 \exp\left(2 \int_0^x \frac{1}{u_1} \frac{\partial w_1}{\partial z} dx\right). \quad (18.56)$$

Течение в окрестности пространственной критической точки $u_1=ax$, $w_1=bz$ зависит от трех определяющих параметров:

$$K_1 = \frac{b}{a}; \quad \bar{J}_w \text{ и } \text{Pr}.$$

Из (18.56) можно получить

$$h_2' = x^{K_1}; \quad X = \frac{x}{2(1+K_1)} \quad (\text{для ламин. реж.}). \quad (18.57)$$

Случаи $K_1=0$ и $K_1=1$ соответствуют плоской и осесимметричной критическим точкам, и формула (18.57) переходит в соотношения (18.39).

Зависимость величины A от K_1 можно принять линейной

$$A = A_1(1-K_1) + K_1 A_2 \quad (\text{для ламин. реж.}), \quad (18.58)$$

где A_1 и A_2 — значения для плоской и осесимметричной критических точек, приведенные в табл. 18.1. Использование формулы (18.58) при расчете тепловых потоков по уравнениям (18.8) и (18.57) приводит к завышению результатов не более чем на 2%.

Градиент скорости в критической точке $a=du_1/dx$ при ньютоновском течении можно определить по формуле (18.40), где следует использовать радиус R_x кривизны поверхности для критической точки в плоскости $z=0$. Величину K_1 при этом можно приближенно принять равной отношению радиусов кривизны R_x и R_z :

$$K_1 = \frac{R_x}{R_z}.$$

Результаты расчета теплообмена вдоль линии растекания приведены на рис. 18.9 и 18.10. На рис. 18.10 дано распределение функции теплообмена (18.42) для обтекания сферически затупленных конусов с полууглами раствора $\beta=10^\circ$ и 20° , при числе $M=20$ и углах атаки $\alpha=10^\circ$ (кривые 3 и 4).

На рис. 18.9 показано распределение Φ_1 из (18.42) для сложного тела (конус—оживало—цилиндр), обтекаемого сверхзвуковым потоком при $M=3$. Полуугол конуса β равен 25° , относительное удлинение оживала $\lambda=2$, температура поверхности принята равной $0,5 T_{01}$.

В случае развитого турбулентного пограничного слоя в плоскости симметрии эффективная длина находится по формулам (18.27) и (18.55). Для течения в окрестности критических точек получим

$$h_2' = x^{K_1}; \quad X = [2 + 1,25K_1]^{-1}x \quad (\text{для турб. реж.}) \quad (18.59)$$

Теперь величина обобщенного коэффициента теплообмена (18.9) для окрестности критических точек равняется

$$\frac{\alpha}{c_p} = 0,0296 (2 + 1,25K_1)^{0,2} \epsilon_w^{0,8} \mu_w^{0,2} a^{0,8} x^{0,6} k_i \quad (\text{для турб. реж.}) \quad (18.60)$$

Как видно, в критической точке турбулентный тепловой поток равен нулю и теплообмен определяется молекулярным переносом при ламинарном течении.

18.6. ВЛИЯНИЕ ПЕРЕМЕННОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ

При переменной температуре стенки T_w в общем случае не удастся ввести обобщенный коэффициент теплообмена (или коэффициент теплоотдачи) и представить тепловые потоки в стенку в виде (18.1). Это в значительной мере усложняет расчет теплообмена к спускаемому аппарату для областей с переменной температурой поверхности.

Для ламинарного течения в случае гладкого изменения температуры поверхности, когда энтальпия газа на стенке J_w представляется в виде полинома

$$\frac{J_e - J_w}{J_1} = \sum_n a_n \left(\frac{x}{L} \right)^n, \quad \text{где } J_e = J_1(a + \omega r), \quad (18.61)$$

тепловые потоки в стенку при небольших градиентах давления можно определить по соотношению [22]

$$q_w = \frac{1}{2Pr} J_1' l_{1w} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1 u_1}{l_1}} \sum a_n \left(\frac{x}{L} \right)^n Y_n'(0), \quad (18.62)$$

где $l_{1w} = \frac{\mu_w \epsilon_w}{\mu_1 \epsilon_1}$; l_1 — значение l_{1w} при средней температуре стенки. Величины $Y_n'(0)$ для воздуха (при $Pr = 0,72$) даны в табл. 18.2.

Таблица 18.2

n	0	1	2	3	4	5	10
$Y_n'(0)$	0,592	0,978	1,20	1,37	1,49	1,60	2,01

Для других значений чисел Pr величины $Y_n'(0)$ из табл. 18.2 следует умножить на $1,11 Pr^{1/3}$.

В случае скачкообразного изменения энтальпии газа от J_e до J_w в точке на некотором удалении от передней кромки плоской пластины ($x = \xi$) распределение тепловых потоков по длине определяется формулами:

$$q_w = \frac{\alpha}{c_p}(x, \xi)(J_e - J_w); \quad \frac{\alpha}{c_p}(x, \xi) = \frac{\alpha}{c_p}(x, 0) \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{3/4} \right]^{-1/3};$$

$$\frac{\alpha}{c_p}(x, 0) = 0,332 Pr^{-\frac{2}{3}} l_{1w} \sqrt{\frac{\epsilon_1 \mu_1 u_1}{x l_1}}. \quad (18.63)$$

Для учета градиента давления на участке до скачка энтальпии J_w следует вычислить эффективное значение ξ по формуле (18.26). При помощи соотношений (18.63) можно рассчитать теплообмен при переменной температуре поверхности с учетом скачкообразного изменения [23].

Обозначив $\theta(x) = J_e - J_w$, выражение для тепловых потоков при переменной J_w можно привести к виду

$$q_w(x) = \frac{\alpha}{c_p}(x, 0)\theta(0) + \int_0^x \frac{\alpha}{c_p}(x, \xi) \frac{d\theta}{d\xi} d\xi + \sum \frac{\alpha}{c_p}(x, \xi_i) [\theta(\xi_i^+) - \theta(\xi_i^-)]. \quad (18.64)$$

Здесь сумма учитывает разрывы θ , причем $\theta(\xi_i^+) - \theta(\xi_i^-)$ представляет скачок $\Delta\theta$ в точке $x = \xi_i > 0$. Подынтегральное выражение в соотношении (18.64) удастся упростить и представить величину q_w при непрерывном изменении θ в виде

$$q_w(x) = \frac{\alpha}{c_p}(x, 0) \left\{ \theta(0) + A_1 [\theta(x) - \theta(0)] + B_1 \left[\theta(x) - \frac{1}{x} \int_0^x \theta dx \right] \right\}. \quad (18.65)$$

Таким образом, тепловой поток в стенку зависит от энтальпии газа на передней кромке $\theta(0)$, местной энтальпии $\theta(x)$ и средней по длине энтальпии: $\bar{\theta} = (1/x) \int_0^x \theta dx$.

Значения A_1 и B_1 даны в табл. 18.3 для безградиентного потока и ускоренных течений $u_1 = ax^m$.

Таблица 18.3

m	Ламинарное течение		Турбулентное течение	
	A_1	B_1	A_1	B_1
0	1,0	1,40	0,991	0,234
0,5	0,840	1,144	0,991	0,234
1,0	0,792	1,076	0,991	0,234

В случае турбулентного режима течения тепловые потоки при наличии скачка энтальпии газа на стенке определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha}{c_p}(x, \xi) &= \frac{\alpha}{c_p}(x, 0) \left[1 - \left(\frac{\xi}{x} \right)^{9/10} \right]^{-1,9}; \\ \frac{\alpha}{c_p}(x, 0) &= 0,0296 \mu_w^{0,8} u_1^{0,2} \text{Pr}^{-2/3} k_2 x^{-0,2}, \end{aligned} \right\} \quad (18.66)$$

а при переменной $\theta(x)$ — по уравнениям (18.64) или (18.65) и табл. 18.3.

Для потоков с градиентами давления и плавными изменениями энтальпии вдоль поверхностей возможно обобщение формулы для эффективной длины:

$$X = \frac{\int_0^s Q_w \mu_w (h_2' k_2 / \text{Pr})^2 (J_e - J_w)^2 ds}{Q_w \mu_w (h_2' k_2 / \text{Pr})^2 (J_e - J_w)^2} \quad (\text{для ламин. реж.}) \quad (18.67)$$

$$X = \frac{\int_0^s Q_w \mu_w^{0,25} (h_2' k_2 / \text{Pr})^{1,25} (J_e - J_w)^2 ds}{Q_w \mu_w^{0,25} (h_2' k_2 / \text{Pr})^{1,25} (J_e - J_w)^2} \quad (\text{для турб. реж.}), \quad (18.68)$$

так что тепловые потоки находятся из равенств (18.8) и (18.9).

В случае ламинарного течения около пластины и конуса при $\mu \sim T$, $k_2 \approx \text{const}$, $\text{Pr} = \text{const}$ получим

$$\frac{\alpha}{c_p} = 0,332 \text{Pr}^{-2/3} (Q_w \mu_w u_1)^{1/2} \theta \left[\int_0^x \theta^2 dx \right]^{-1/2} k_2; \quad (18.69)$$

$$\frac{\alpha}{c_p} = 0,332 \text{Pr}^{-2/3} (Q_w \mu_w u_1)^{1/2} \theta x \left[\int_0^x \theta^2 x^2 dx \right]^{-1/2} k_2; \quad (18.70)$$

$$\theta = J_e - J_w.$$

Расчет по формулам (18.67) и (18.70) имеет достаточную для практики точность, если энтальпия на поверхности уменьшается по x .

18.7. ИЗЛУЧЕНИЕ

В уравнение баланса энергии на поверхности аппарата входит радиационный тепловой поток $q_p = q_{p2} - q_{p1}$, величина которого равна разности радиационного потока, поглощаемого поверхностью тела (q_{p2}), и радиационного потока, излучаемого этой поверхностью в пространство (q_{p1}). Величина q_{p2} определяется внешним радиационным потоком от горячего газа q_{pe} и средней степенью черноты поверхности ε_2 : $q_{p2} = \varepsilon_2 q_{pe}$. Величина q_{p1} определяется температурой поверхности и средней степенью черноты этой поверхности ε_1 :

$$q_{p1} = \varepsilon_1 \sigma T_w^4, \quad (18.71)$$

где $\sigma = 0,57 \cdot 10^{-10}$ квт/м²·с град⁴ — постоянная Стефана—Больцмана.

Коэффициенты ϵ_1 и ϵ_2 в общем случае различны; оба они зависят от температуры поверхности материала, кроме того, ϵ_2 зависит от спектрального распределения излучения горячего газа. Однако из-за недостатка данных по спектральным распределениям степени черноты теплозащитных покрытий и интенсивности излучения горячих газов можно принять $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$.

В формулы для расчета тепловой защиты обычно входит безразмерная величина радиационного теплового потока

$$\bar{q}_p = q_p/q_{k0} \text{ или } \bar{q}_p^* = q_p/(\alpha/c_p)_0 J_{01}. \quad (18.72)$$

Радиационный нагрев аппаратов, входящих в атмосферу Земли, становится существенным при скоростях входа 10 км/с и выше. При этом излучение воздуха, нагретого за отошедшей ударной волной до температуры, близкой к температуре адиабатического торможения, наиболее существенно в области затупленной лобовой поверхности аппарата. Важную роль может играть излучение из отрывных и застойных областей, а также от струй ракетных двигателей.

Образующийся на поверхности аппарата тонкий пограничный слой может как поглощать внешнее излучение от идеального газа, так и сам излучать значительное количество энергии (особенно если пары теплозащитного покрытия имеют большие коэффициенты поглощения). Однако при расчете радиационного теплового потока к лобовой поверхности аппарата в первом приближении можно считать, что излучающий слой состоит лишь из внешнего газа, являясь плоским и изотермическим. Толщина этого слоя равна величине отхода ударной волны от поверхности тела, температура при скорости входа в атмосферу до 13 км/с может быть принята равной температуре торможения. На больших скоростях входа становится существенным высвечивание за ударной волной, что приводит к уменьшению средней температуры горячего газа. При практическом расчете данные по излучению изотермического плоского слоя удобно представить при помощи эффективной степени черноты газа ϵ^* , такой, что $q_{pe} = \epsilon^* \sigma T^4$ [7, 14]. Величина ϵ^* зависит от вида газа, его температуры T , давления p и толщины слоя l . Для воздуха соответствующие данные приведены в табл. 18.4.

Таблица 18.4

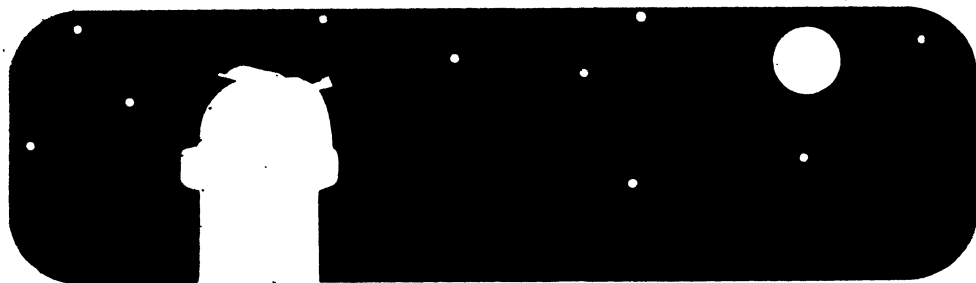
Эффективная степень черноты воздуха $\epsilon^* = A \cdot 10^{-r}$ [14] в зависимости от T и l и давления p

T, К	l, см	A	r	A	r	A	r	A	r	A	r
		10 ³ Па		10 ⁴ Па		10 ⁵ Па		10 ⁶ Па		5·10 ⁶ Па	
4 000	1	6,0	8	2,2	6	7,8	5	1,2	3	7,0	3
	10	5,1	7	2,1	5	6,0	4	9,0	3	5,0	2
	100	5,0	6	2,1	4	5,5	3	7,5	2	3,1	1
6 000	1	4,2	7	6,1	6	1,4	4	4,8	3	3,2	2
	10	2,9	6	5,4	5	1,4	3	3,2	2	1,7	1
	100	2,2	5	4,5	4	1,2	2	1,9	1	6,1	1
8 000	1	6,5	6	3,4	5	3,1	4	7,5	3	7,9	2
	10	3,3	5	1,9	4	2,5	3	6,9	2	4,0	1
	100	1,7	4	1,1	3	1,7	2	3,5	1	9,1	1
10 000	1	5,3	5	3,2	4	2,2	3	1,6	2	1,3	1
	10	2,6	4	1,5	3	9,0	3	9,5	2	6,2	1
	100	1,0	3	6,1	3	4,9	2	4,9	1	9,8	1
12 000	1	1,0	4	1,3	3	8,5	3	4,2	2	1,5	1
	10	4,3	4	5,5	3	2,9	2	1,7	1	6,1	1
	100	2,2	3	2,0	2	1,2	1	6,9	1	9,9	1
14 000	1	9,5	5	1,5	3	2,5	2	1,0	1	2,6	1
	10	3,9	4	8,7	3	6,9	2	3,2	1	7,5	1
	100	1,8	3	3,2	2	2,2	1	8,2	1	9,9	1

ЛИТЕРАТУРА К ГЛ. XVIII

1. Авдеевский В. С. Приближенный метод расчета трехмерного ламинарного пограничного слоя. — «Изв. АН СССР», ОТН, сер. «Механика и машиностроение», 1962, № 2.

2. Авдудевский В. С. Метод расчета пространственного турбулентного пограничного слоя в сжимаемом газе. — «Изв. АН СССР», ОТН, сер. «Механика и машиностроение», 1962, № 4.
3. Авдудевский В. С. Влияние кривизны ударной волны на теплообмен при обтекании тела сверхзвуковым потоком. — В сб. «Исследование теплообмена в потоках жидкости и газа». М., «Машиностроение», 1965.
4. Анфимов Н. А. Тепло- и массообмен в окрестности критической точки при вдуве и отсосе различных газов через поверхность тела. — «Изв. АН СССР», сер. «Механика жидкости и газа», 1966, № 1.
5. Анфимов Н. А. Ламинарный пограничный слой на химически активной поверхности. — «Изв. АН СССР», ОТН, сер. «Механика и машиностроение», 1962, № 3.
6. Бабенко К. И. и др. Пространственное обтекание гладких тел идеальным газом. М., «Наука», 1964.
7. Биберман Л. М. и др. Рациональный нагрев при гиперзвуковом обтекании. — «Космические исследования», т. 2, вып. 3, 1964.
8. Бичер, Розенсвейг. Механизм абляции пластмасс с неорганическим армированием. — «Ракетная техника», 1961, № 4.
9. Браиловская И. Ю., Чудов Л. А. Решение уравнений пограничного слоя разностным методом — В сб. «Вычислительные методы и программирование». М., МГУ, 1962.
10. Введенская Н. Д. О трехмерном ламинарном пограничном слое на затупленном теле. — «Изв. АН СССР», сер. «Механика жидкости и газа», 1966, № 5.
11. Гишинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. — «Изв. АН СССР», сер. «Механика и машиностроение», № 4, 1964.
12. Дьяконов Ю. Н. Пространственное обтекание затупленных тел с учетом равновесных физико-химических реакций. ДАН СССР, т. 157, № 4, 1964.
13. Козлов Л. В. Экспериментальное определение закона теплообмена для турбулентного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке. — В сб.: «Исследование теплообмена в потоках жидкости и газа». М., «Машиностроение», 1965.
14. Коньков А. А., Нейланд В. Я., Николаев В. М., Пластинин Ю. А. Проблема лучистого теплообмена в гиперзвуковой аэродинамике (обзор). — «Теплофизика высоких температур», 1969, том 7, № 1, стр. 140—164.
15. Лиз Л. Ламинарная теплопередача на затупленном теле при гиперзвуковых скоростях. — В сб.: «Научные проблемы искусственных спутников Земли». М., ИЛ, 1960.
16. Лунев В. В., Магомедов М. К., Павлов В. Г. Гиперзвуковое обтекание притупленных конусов с учетом равновесных физико-химических превращений. Изд-во ВЦ АН СССР, 1968.
17. Мугалев В. П. Экспериментальное исследование турбулентного слоя на пористой поверхности при вдувании различных газов и переменном числе М потока. Сб. «Всесоюзный съезд по теоретич. и прикладной механике», М., «Наука», 1964.
18. Мугалев В. П. Влияние вдувания различных газов на теплообмен вблизи передней критической точки затупленного тела. — «Изв. АН СССР», сер. «Механика», 1965, № 1, стр. 175—180.
19. Полежаев Ю. В. Теоретический анализ нестационарного прогрева и разрушения стеклопластика в окрестности критической точки. — «Изв. АН СССР», ОТН, сер. «Механика и машиностроение», № 3, 1964, стр. 3—8.
20. Предводителев А. С. и др. Таблицы термодинамических функций воздуха. Изд-во АН СССР, 1957.
21. Фэй Д. И., Ридделл Ф. Теоретический анализ теплообмена в лобовой точке, омываемой диссоциированным воздухом. — В сб. «Проблемы движения головной части ракет дальнего действия», М., ИЛ, 1959, стр. 217—256.
22. Чепмен Д., Рубезин М. Профили скоростей и температур в сжимаемом ламинарном пограничном слое с произвольным распределением температуры поверхности. — Сб. переводов «Механика», вып. 4, М., ИЛ, 1951, стр. 50.
23. Эккерт Э. Р., Дрейк Р. М. Теория тепло- и массообмена. М., Госэнергоиздат, 1961, стр. 227.
24. Энциклопедия современной техники. — «Конструкционные материалы», т. 1—3. М., «Советская энциклопедия», 1963—1965.
25. Adams Mac C. Recent advances in ablation. ARS Journal, vol. 29, No. 9, 1959, pp. 625—632.
26. Bethe H. A., Adams Mac C. A theory for the ablation of glassy materials. Journal of Aero/Space Sciences, vol. 26, No. 6, p. 321—328.
27. Cohen C. B., Reshotko E. Similar solutions for the laminar compressible boundary layer with heat transfer and pressure gradient. NACA Rep., No. 1293, 1957.
28. Hansen C. F. Approximations for the thermodynamic and transport properties of high temperature air, NASA TR—R50, 1950.
29. Reshotko E., Beckwith J. Compressible laminar boundary layer over a yawed infinite cylinder with heat transfer and arbitrary Prandtl number NACA Rep., No. 1379, 1958.



ГЛАВА XIX

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ НАБЛЮДЕНИЯ ЗА ПОЛЕТОМ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ С НАЗЕМНЫХ ПУНКТОВ

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- a — большая полуось орбиты.
 B — географическая широта.
 D — радиус зоны видимости в линейной мере.
 d — наклонная дальность.
 E — эксцентрическая аномалия.
 e — эксцентриситет.
 N — порядок орбиты (целое число витков полета за сутки).
 h — высота полета.
 L — географическая долгота.
 p — параметр орбиты.
 R — средний радиус Земли.
 r — расстояние от центра Земли до текущей точки на орбите.
 T — период обращения спутника по орбите.
 α — действительная полуось гиперболы.
 α' — угол обзора аппаратуры КА.
 β — радиус зоны видимости в угловой мере.
 γ — угол места наблюдения КА с наземного пункта.
 δ — склонение КА.
 $\epsilon; \mu$ — константы гравитационного поля Земли.
 ψ — геоцентрическая широта.
 Φ — истинная аномалия.
 ω — аргумент перигея орбиты.
 ω_{π} — угловая скорость вращения планеты.
 Ω — долгота восходящего узла, отсчитываемая от точки весеннего равноденствия.

19.1. ТРАССЫ ПОЛЕТА

Трасса полета (проекция орбиты на поверхность вращающейся Земли) может быть построена следующим образом.

Рассчитывается широта B и долгота L (рис. 19.1) ряда точек орбиты по формулам:

$$\left. \begin{aligned} B &= \arcsin(\sin u \sin i); \\ L &= \Omega + \arctg(\operatorname{tg} u \cos i) - S + \Delta\Omega \frac{t}{T}, \end{aligned} \right\} \quad (19.1)$$

где

- u — аргумент широты;
 i — наклонение орбиты;
 Ω — начальное значение долготы восходящего узла;
 $S = S_0 + \omega_3(t - t_{S_0})$ — звездное время на гринвичском меридиане;
 S_0 — звездное время в некоторую гринвичскую полночь (берется из Астрономического ежегодника);
 t_{S_0} — время наступления этой полуночи;
 t — текущее время полета;

$$\omega_3 = 7,29211 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1} = 0,25068 \text{ град} \cdot \text{мин}^{-1} = 15,0411 \text{ град} \cdot \text{час}^{-1}$$

- угловая скорость вращения Земли;
 $\Delta\Omega$ — прецессия узла орбиты за один оборот;
 T — период обращения ИСЗ.

Полученные в результате расчета точки наносят на карту и соединяют плавной линией, которая и является *трассой полета*.

Высота полета определяется из выражения

$$h=r-R, \quad (19.2)$$

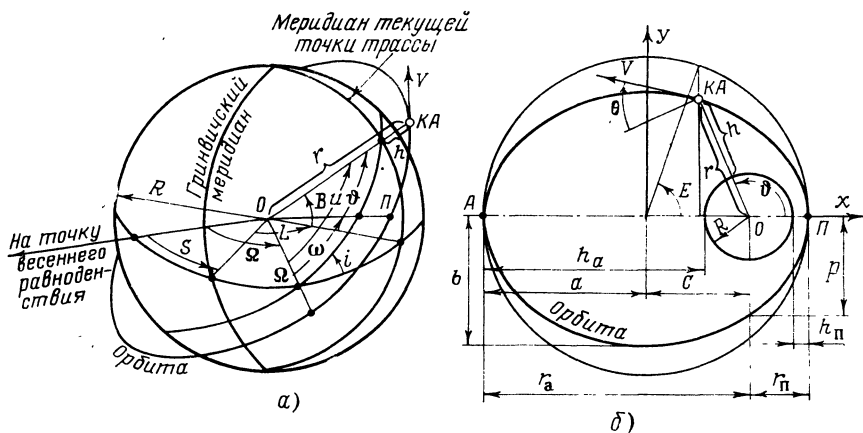


Рис. 19.1. Элементы орбиты:
а—в пространстве; б—на плоскости

где r — расстояние от центра Земли до текущей точки на орбите;

R — средний радиус Земли.

Входящие в (19.1) и (19.2) величины u , t , $\Delta\Omega$ и r находятся по разным формулам в зависимости от формы орбиты.

Круговая орбита ($e=0$)

$$u = 2\pi \frac{t - t_{\Omega}}{T}; \quad (19.3)$$

$$\Delta Q = -\frac{2\pi}{r^2} \frac{\varepsilon}{\mu} \cos i = -A \frac{\cos i}{r^2}; \quad (19.4)$$

$$r = \sqrt[3]{\mu \left(\frac{T}{2\pi} \right)^2}, \quad (19.5)$$

где t_0 — время прохождения ИСЗ через плоскость экватора в восходящем узле орбиты;

$$\varepsilon = 2,634 \cdot 10^{10} \text{ км}^5/\text{с}^2;$$

$$\mu = 3,98602 \cdot 10^5 \text{ км}^3/\text{с}^2;$$

$$A = 4,15196 \cdot 10^5 \text{ км}^2.$$

Для расчета трассы необходимо задаться шагом по времени 1—5 мин.

Эллиптическая орбита ($0 < e < 1$)

$$u = \omega + \vartheta;$$

$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \frac{t - t_{\omega_0}}{T};$$

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{p^2} \frac{\varepsilon}{\mu} (5 \cos^2 i - 1);$$

$$t = \tau + \frac{E - e \sin E}{\lambda};$$

$$\lambda = \frac{V_{\mu}}{a^{3/2}};$$

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2};$$

$$e = \frac{r_a - r_n}{r_a + r_n} = \frac{h_a - h_n}{2a} = \frac{r_a}{a} - 1 = 1 - \frac{r_n}{a};$$

$$\Delta\Omega = -\frac{2\pi}{p^2} \frac{\varepsilon}{\mu} \cos i = -A \frac{\cos i}{p^2};$$

$$p = a(1 - e^2) = r(1 + e \cos \vartheta) = r_n(1 + e) = r_a(1 - e);$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} = a(1 - e \cos E).$$

$\Delta\Omega, \Delta\omega, \text{ град}$

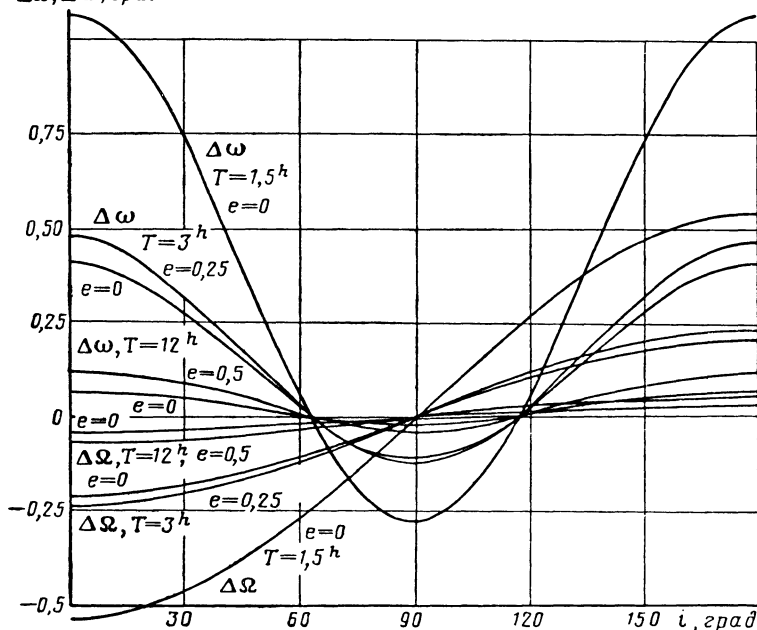


Рис. 19. 2. Изменение положений перигея $\Delta\omega$ и узла орбиты $\Delta\Omega$ (прецессия) за один виток в зависимости от наклона i для различных орбит

В этих формулах:

ω_0 — начальное значение аргумента перигея;

t_{ω_0} — момент времени, на которое взято ω_0 ;

τ — время прохождения КА через перицентр орбиты;

r_a, h_a — длина радиуса-вектора и высота апогея;

r_n, h_n — длина радиуса-вектора и высота перигея;

$\Delta\omega, \Delta\Omega$ — прецессия перигея и узла орбиты за один виток (рис. 19. 2);

a — большая полуось орбиты.

Для расчета трассы эллиптической орбиты задаются шагом по истинной аномалии (5° — 20°) и по приведенным формулам находят координаты точек проекции. При необходимости рассчитывать координаты с шагом по времени решают уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = \lambda (t - \tau).$$

При $e \leq 0,05$ можно без потери точности расчета по формулам (19. 1) пользоваться выражениями, справедливыми для круговой орбиты (19. 3) и (19. 4), а при $e < 0,0015$ — также формулой (19. 5). Максимальные ошибки расчета эллиптических орбит с высотой перигея h_n и высотой апогея h_a по формулам кругового движения приведены в табл. 19. 1—19. 4.

Ошибки расчета по высоте

Высота апогея h_a , км	Ошибки расчета по высоте (в км) для различных высот перигея h_{II} , км					Высота апогея h_a , км	Ошибки расчета по высоте (в км) для различных высот перигея h_{II} , км				
	200	400	600	800	1000		200	400	600	800	1000
400	100	0	—	—	—	800	300	200	100	0	—
600	200	100	0	—	—	1000	400	300	200	100	0

Таблица 19.2

Ошибки расчета вдоль орбиты

Высота апогея h_a , км	Ошибки расчета вдоль орбиты (в км) для различных высот перигея h_{II} , км					Высота апогея h_a , км	Ошибки расчета вдоль орбиты (в км) для различных высот перигея h_{II} , км				
	200	400	600	800	1000		200	400	600	800	1000
400	200	0	—	—	—	800	600	400	200	0	—
600	400	200	0	—	—	1000	800	600	400	200	0

Таблица 19.3

Ошибки расчета по времени

Высота апогея h_a , км	Ошибки расчета по времени (в с) для различных высот перигея h_{II} , км					Высота апогея h_a , км	Ошибки расчета по времени (в с) для различных высот перигея h_{II} , км				
	200	400	600	800	1000		200	400	600	800	1000
400	26	0	—	—	—	800	79	53	27	0	—
600	52	26	0	—	—	1000	106	80	54	27	0

Гиперболическая орбита ($e > 1$)

$$u = \omega + \vartheta;$$

$$t = \tau + \frac{e \operatorname{sh} H - H}{\sqrt{\mu}};$$

$$v = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}};$$

$$\operatorname{th} \frac{H}{2} = \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} \operatorname{th} \frac{\vartheta}{2};$$

$$e = 1 + \frac{r_{II}}{a} = \sqrt{1 + \frac{p}{a}};$$

$$\Delta \Omega = 0;$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} = a(e \operatorname{ch} H - 1);$$

$$p = a(e^2 - 1) = r(1 + e \cos \vartheta) = r_{II}(1 + e),$$

где a — действительная полуось гиперболы.

Ошибки расчета в боковом направлении

Высота перигея $h_{п}$, км	Высота апогея $h_{а}$, км	Боковое отклонение подспутниковой точки в км				
		Наклонение $i = 50^\circ$ для широт		Наклонение $i = 75^\circ$ для широт		
		30°	45°	30°	45°	60°
100	200	3,5	1,8	4,9	3,9	2,7
	300	6,9	3,5	9,9	7,9	5,2
	400	10,4	5,3	14,8	11,8	7,7
	500	13,9	7,1	19,8	15,8	10,3
	1000	32,0	16,3	45,4	36,2	23,6
200	300	3,5	1,8	5,0	3,9	2,7
	400	7,0	3,5	10,0	7,9	5,2
	500	10,5	5,3	14,9	11,8	7,8
	1000	28,5	14,5	40,6	32,3	21,0
300	400	3,5	1,8	5,0	3,9	2,7
	500	7,1	3,6	10,0	8,0	5,2
	1000	25,1	12,8	35,6	28,4	17,6

Параболическая орбита ($e=1$)

$$u = \omega + \vartheta;$$

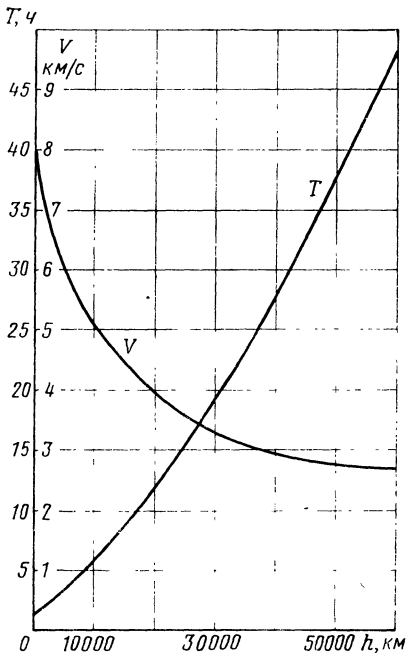
$$t = \tau + \frac{p^{3/2}}{2\sqrt{\mu}} \left(\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\vartheta}{2} \right);$$

$$\delta \Omega = 0;$$

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \vartheta} = \frac{p}{2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}} = \frac{p}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} \right);$$

$$p = 2r_{п}.$$

Ошибка расчета трассы по приведенным выше формулам составляет несколько угловых минут на одном витке.



На рис. 19.3 приведен график зависимости периода обращения T от высоты полета h по круговой орбите (или средней высоты полета) и скорости полета V для круговой орбиты.

При построении трасс полета ИСЗ целесообразно рассчитывать трассу только одного витка. При этом если известно начало какого-либо витка, например первого, то при расчете принимают $\Omega=0$ и $S_0=0$.

Последующие и предыдущие витки могут быть получены путем сдвига трассы на долготу начала n -го витка

$$L_{п} = L_1 - (n-1) \left(qT - d \frac{\cos i}{a^2} \right), \quad (19.6)$$

где L_1 — долгота начала первого витка;

n — номер витка;

$q = 0,25068$ град/мин = $15,0411$ град/ч;

$d = -2,378 \cdot 10^7$ град $\cdot$ км².

Рис. 19.3. Изменение периода обращения T и скорости V полета в зависимости от высоты h круговой орбиты

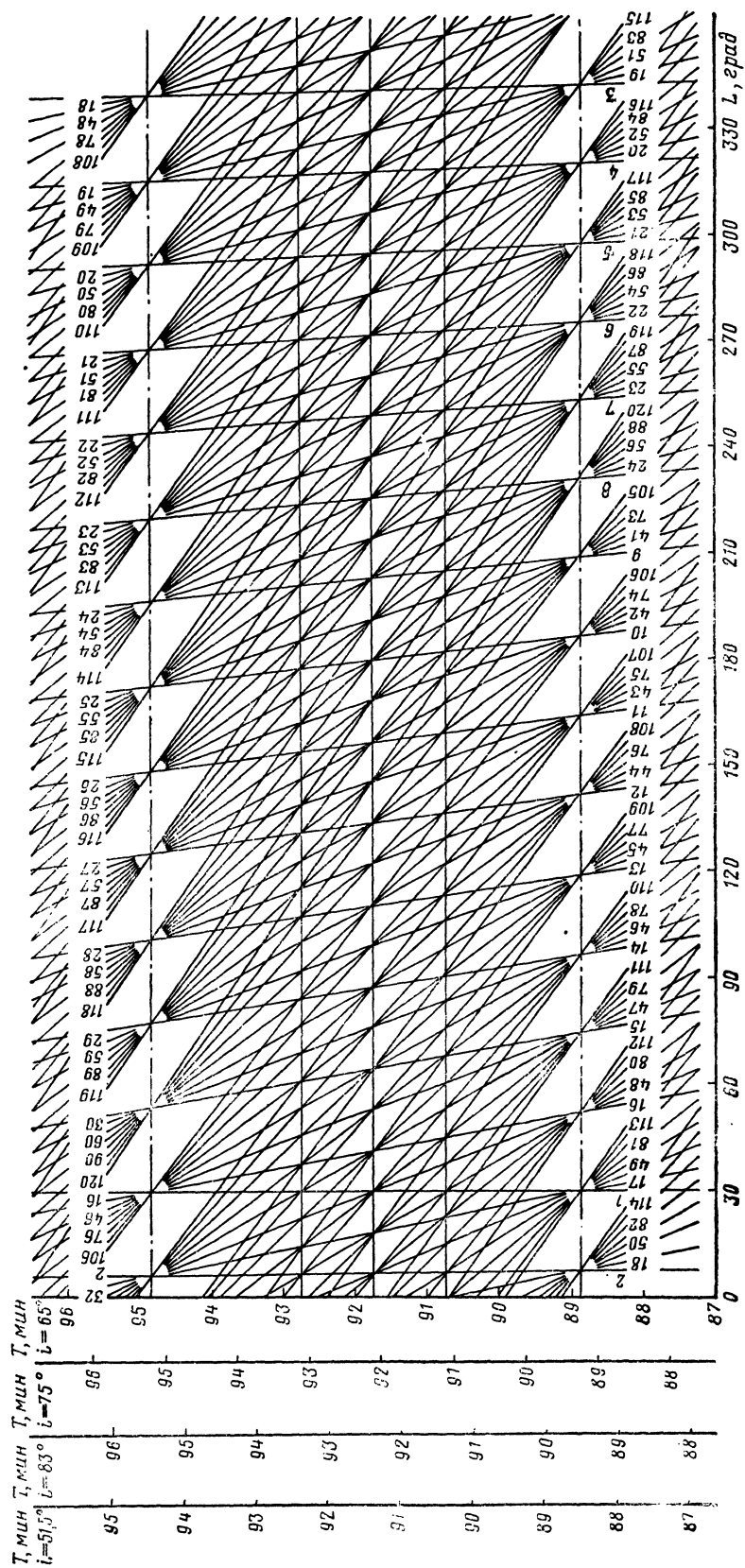


Рис. 19. 4. Смещение долгот L начал витков орбит спутников в зависимости от периода обращения T и наклонения i

Взаимное положение трасс, рассчитанных по формуле (19.6), представлено на рис. 19.4 в виде зависимости долгот начал витков L_n от наклонения i и периода обращения T . Цифры на линиях графика соответствуют номерам витков полета.

Влияние тормозящего действия атмосферы на период обращения может быть учтено по формуле

$$T = T_0 - \frac{2n-1}{2} \delta T,$$

где T — текущее значение периода обращения;

T_0 — начальное его значение;

δT — падение периода обращения за один виток.

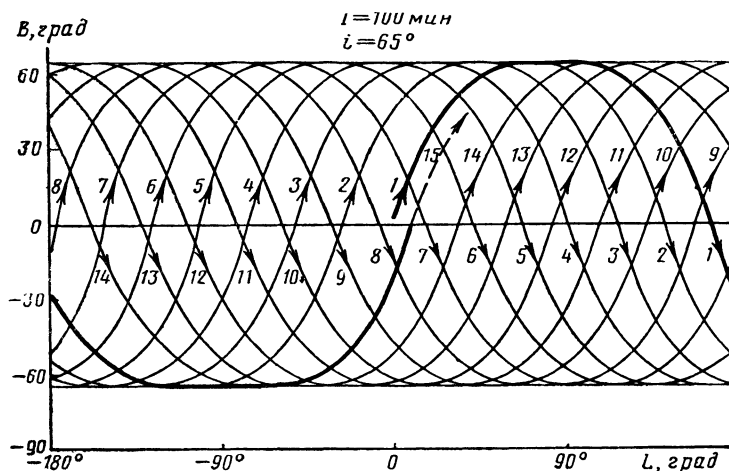


Рис. 19.5. Трассы полета ИСЗ на низких орбитах

Трассы полета для некоторых характерных орбит приведены на рис. 19.5, 19.6, 19.7, 19.8.

Для расчета элементов орбит удобно пользоваться линейными формулами, аппроксимирующими значение элементов на некотором интервале. Эти выражения имеют вид

$$X = A_{xy} + B_{xy}Y, \quad (19.7)$$

где X — искомое значение параметра орбиты;

Y — известное значение параметра орбиты;

A_{xy}, B_{xy} — постоянные коэффициенты (берутся из табл. 19.5).

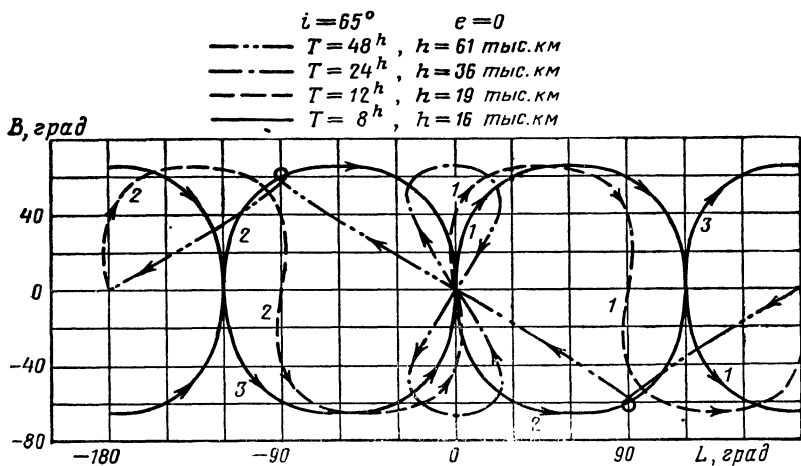


Рис. 19.6. Трассы полета ИСЗ на высоких круговых орбитах.

Цифры означают номера витков

В табл. 19.5 приведены значения коэффициентов для интервалов

$$\begin{aligned} 100 \leq n \leq 1000 \text{ км}, & \quad 7,35 \leq \tilde{V} \leq 7,85 \text{ км/с}, \\ 86,4 \leq T \leq 105 \text{ мин}, & \quad 21,6 \leq \Delta L \leq 26,3 \text{ град}, \\ 6471 \leq a \leq 7371 \text{ км}, & \end{aligned}$$

где ΔL — разность долгот соседних витков.

В табл. 19.5 указаны также предельные ошибки расчета по линейным формулам. Примеры пользования линейной формулой (19.7).

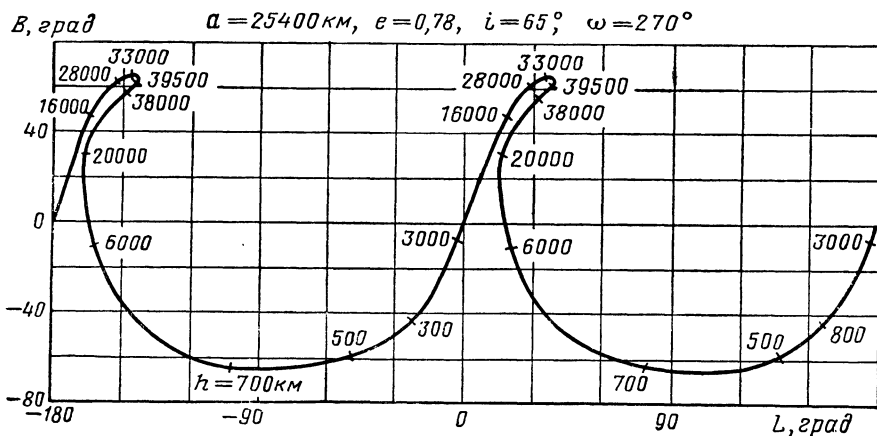


Рис. 19.7. Трасса полета ИСЗ типа «Молния»

1. Пусть известны высота перигея $h_p = 700$ км и высота апогея $h_a = 900$ км. Тогда период обращения может быть найден по формуле (см. табл. 19.5, столбец 2, формула № 1)

$$T = A_{Th} + B_{Th}h, \quad \text{где} \quad h = \frac{h_p + h_a}{2}.$$

Взяв значения коэффициентов из столбцов 6 и 7 и значение ошибки из столбца 4, получим

$$T = 84,2 + 0,0207 \left(\frac{700 + 900}{2} \right) = 100,76 \pm 0,1 \text{ мин}$$

(без учета возмущений).

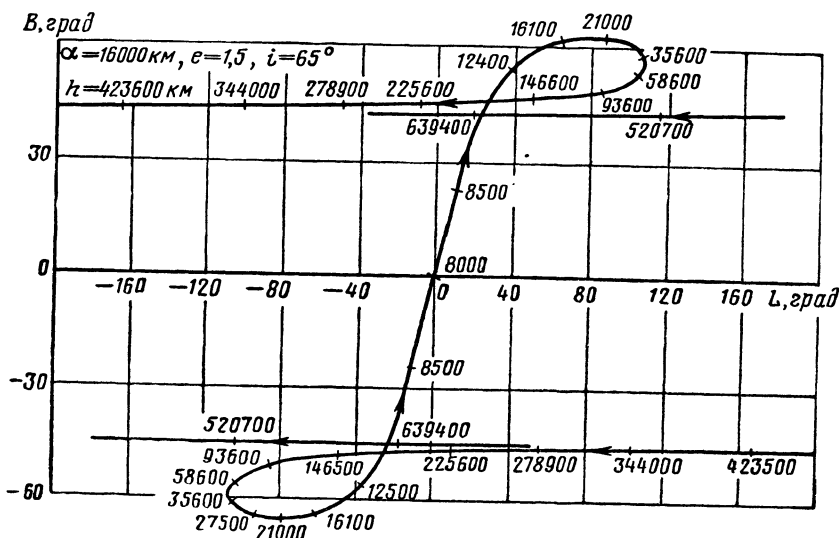


Рис. 19.8. Трасса полета ИСЗ на гиперболической орбите

№ по пор.	Линейные формулы	Формулы кеплеровского движения	Предельные ошибки линейных формул относительно кеплеровских	Предельные ошибки кеплеровских формул, если не учтено сжатие Земли	A_{xy}	B_{xy}
1	2	3	4	5	6	7
1	$T = A_{Th} + B_{Th}h$	$T = 2\pi \frac{(R+h)^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$	0,1 мин	0,35 мин	84,2 мин	0,0207 мин/км
2	$T = A_{Ta} + B_{Ta}a$	$T = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$	0,1 мин	0,35 "	—47,7 "	0,0207 мин/км
3	$T = A_{TL} + B_{TL}\Delta L$	$T = \frac{\Delta L}{\Omega}$	0,05 мин	0,35 "	—0,25 "	4 мин/град
4	$T = A_{TV} + B_{TV}V$	$T = \frac{2\pi\mu}{V^3}$	0,32 мин	0,35 "	381,15 "	—37,6 мин·км/с
5	$h = A_{hT} + B_{hT}T$	$h = \sqrt{\frac{\mu T^2}{4\pi^2}} - R$	5 км	21 км	—4066 км	48,3 км/мин
6	$h = A_{hL} + B_{hL}\Delta L$	$h = \left(\frac{\Delta L \sqrt{\mu}}{2\pi\Omega}\right)^{2/3} - R$	4 "	21 "	—4074,5 "	193 км/град
7	$h = A_{hV} + B_{hV}V$	$h = \frac{\mu}{V^2} - R$	11 "	21 "	14365 "	—1819 с
8	$a = A_{aT} + B_{aT}T$	$a = \sqrt[3]{\frac{\mu T^2}{4\pi^2}}$	5 "	21 "	2305 "	48,3 км/мин
9	$a = A_{aL} + B_{aL}\Delta L$	$a = \left(\frac{\Delta L \sqrt{\mu}}{2\pi\Omega}\right)^{2/3}$	5 "	21 "	2308 "	192,5 км/град
10	$a = A_{aV} + B_{aV}V$	$a = \frac{\mu}{V^2}$	11 "	21 "	20763 "	—1822 с
11	$\Delta L = A_{LT} + B_{LT}T$	$\Delta L = \Omega T$	1'	0,6 град	0,06 град	0,25 град/мин
12	$\Delta L = A_{Lh} + B_{Lh}h$	$\Delta L = 2\pi\Omega \frac{(R+h)^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$	1,4'	0,6 "	21,1 "	0,0052 град/км
13	$\Delta L = A_{La} + B_{La}a$	$\Delta L = 2\pi\Omega \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$	1,2'	0,6 "	11,96 "	0,00519 град/км
14	$\Delta L = A_{LV} + B_{LV}V$	$\Delta L = \frac{2\pi\mu\Omega}{V^3}$	4,6'	0,6 "	95,66 "	—9,44 град·с/км
15	$V = A_{VT} + B_{VT}T$	$V = \left(\frac{2\pi\mu}{T}\right)^{1/3}$	9 м/с	13 м/с	10,137 км/с	—0,0266 км/(с·мин)
16	$V = A_{Vh} + B_{Vh}h$	$V = \sqrt{\frac{\mu}{R+h}}$	7 "	13 "	7,898 "	—0,00055 1/с
17	$V = A_{Va} + B_{Va}a$	$V = \sqrt{\frac{\mu}{a}}$	7 "	13 "	11,402 "	—0,00055 1/с
18	$V = A_{VL} + B_{VL}\Delta L$	$V = \left(\frac{2\pi\mu\Omega}{\Delta L}\right)^{1/3}$	9 "	13 "	10,135 "	—0,106 км/(с·град)

2. Найдем приращение скорости полета V при переходе спутника с круговой орбиты, имеющей период обращения $T_1=96$ мин, на орбиту с $T_2=101$ мин. Скорости на орбитах

$$V_1 = A_{VT} + B_{VT}T_1; \quad V_2 = A_{VT} + B_{VT}T_2.$$

Следовательно,

$$\Delta V = V_2 - V_1 = B_{VT}(T_2 - T_1) = -0,0274(101 - 96) = -0,137 \text{ км/с} \pm 0,0003 \text{ км/с}.$$

В табл. 19.6 приведены данные для расчета периода обращения с точностью не хуже 0.1 мин (без учета возмущений) на средних высотах полета до 5000 км.

Таблица 19.6

№ по пор.	Диапазон высот $h_1 \div h_2$ км	Значения коэффициентов			
		$a_1 \div a_2$ км	A_{Th} мин	A_{Ta} мин	B_{Th}, B_{Ta} мин/км
1	100 ÷ 1000	6471 ÷ 7371	84,20	—47,65	0,02069
2	1000 ÷ 2000	7371 ÷ 8371	82,81	—57,80	0,02207
3	2000 ÷ 3000	8371 ÷ 9371	80,09	—69,18	0,02343
4	3000 ÷ 4000	9371 ÷ 10371	76,24	—81,23	0,02472
5	4000 ÷ 5000	10371 ÷ 11371	71,35	—93,90	0,02594

На рис. 19.9 дана номограмма для определения параметров движения ИСЗ по круговым орбитам.

На рис. 19.10 представлена номограмма для расчета межвитковых интервалов, а на рис. 19.11 — номограмма для расчета суточных сдвигов трасс.

19.2. ЗОНЫ ВИДИМОСТИ

Зоной видимости называется область пространства, в которой измерительный пункт видит космический аппарат (или космический аппарат видит пункт). Типичные зоны видимости измерительного пункта и космического аппарата представлены на рис. 19.12 и 19.13.

Между величинами, приведенными на этих рисунках, существуют следующие зависимости:

$$h = R \left[\frac{\cos \gamma}{\cos(\gamma + \beta)} - 1 \right]; \quad (19.8)$$

$$\beta = \arccos \left(\frac{R}{R+h} \cos \gamma \right) - \gamma; \quad (19.9)$$

$$h = R \left[\frac{\sin(\alpha' + \beta)}{\sin \alpha'} - 1 \right]; \quad (19.10)$$

$$\beta = \arcsin \left[\left(\frac{h}{R} + 1 \right) \sin \alpha' \right] - \alpha'; \quad (19.11)$$

$$\beta = 180^\circ - \alpha' - \delta', \quad (19.12)$$

где угол $\delta' = \arcsin \left(\frac{R+h}{R} \sin \alpha' \right)$;

$D \approx h \operatorname{tg} \alpha'$ (ошибка менее 2% при $h < 1000$ км и $\alpha' < 25^\circ$).

Если имеет место ограничение в работе аппаратуры по наклонной дальности d , то между параметрами, характеризующими зону видимости, существуют зависимости:

$$\beta_{d \max} = \arcsin \left(\frac{d}{R+h} \cos \gamma_{d \min} \right);$$

$$h_{d \max} = (R^2 + d^2 + 2Rd \sin \gamma_{d \max})^{1/2} - R,$$

где $\beta_{d \max}$ — максимальный радиус зоны видимости;

$\gamma_{d \min}$ — минимальный угол места работы аппаратуры;

$h_{d \max}$ — максимальная высота полета.

Результаты расчета параметров зон видимости по приведенным формулам представлены на рис. 19.14—19.17. Зону видимости удобно представлять проекцией ее границы на поверхность Земли. Тогда пересечение трассы полета с границей зоны видимости даст точки начала и конца видимости.

Зона видимости круговой орбиты представляет собой геометрическое место точек на поверхности планеты, равноудаленных от пункта наблюдения. На картах поликонической проекции зоны видимости представляют собой окружности (рис. 19.18).

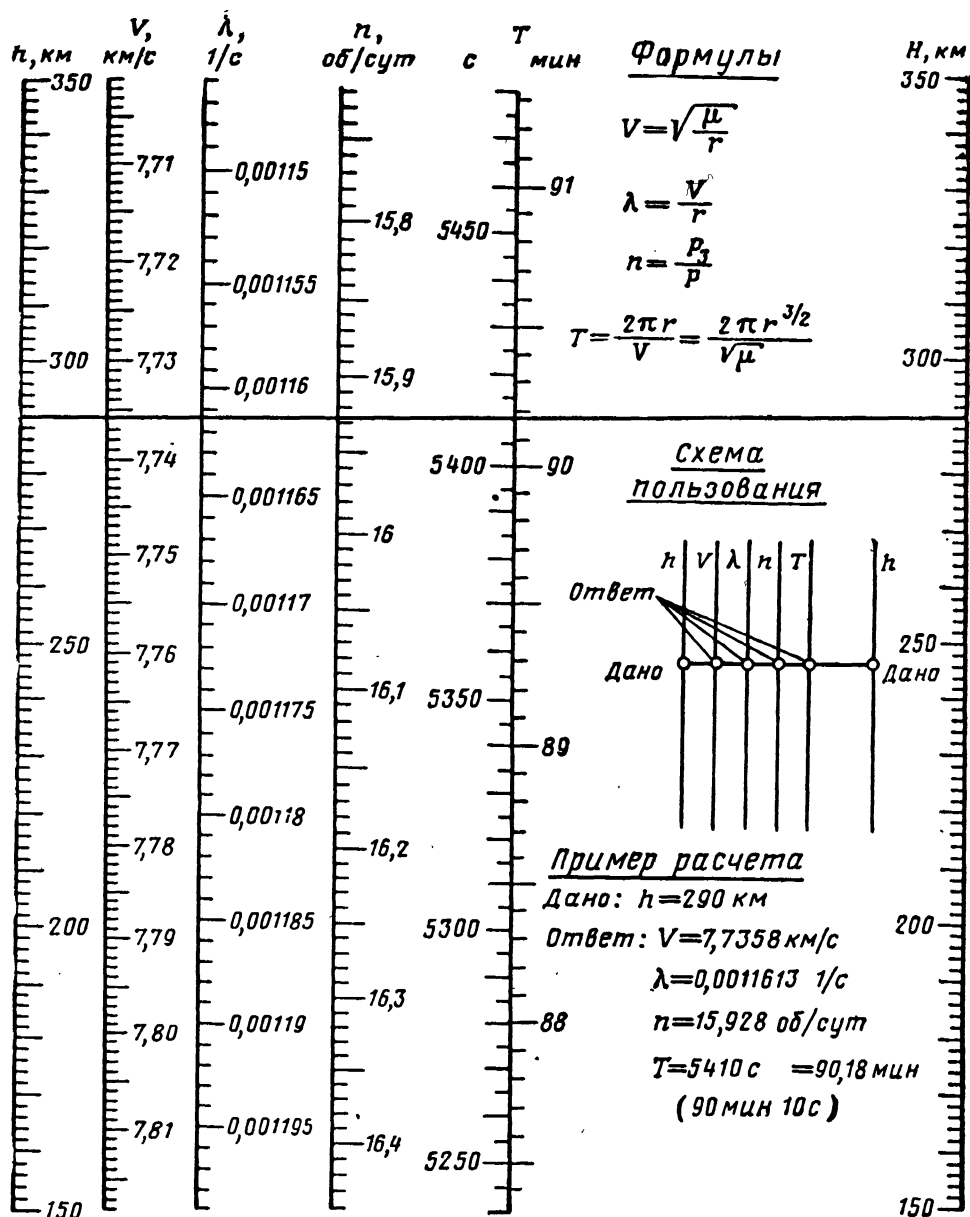


Рис. 19.9. (на 5 листах). Номограмма для определения параметров движения ИСЗ по круговым орбитам (лист 1)

При использовании других проекций и для орбит, отличных от круговых, построение зоны видимости может быть произведено путем расчета широты B_a и долготы L_a точек ее границы.

Для расчета границы зоны видимости должны быть известны координаты пункта (широта B_n и долгота L_n) и элементы орбиты (эксцентриситет e , наклонение i , фокальный параметр p , аргумент перигея ω).

Широты точек границы зоны видимости выбираются с некоторым шагом из диапазона

$$B_n - \beta_j < B_a < B_n + \beta_j.$$

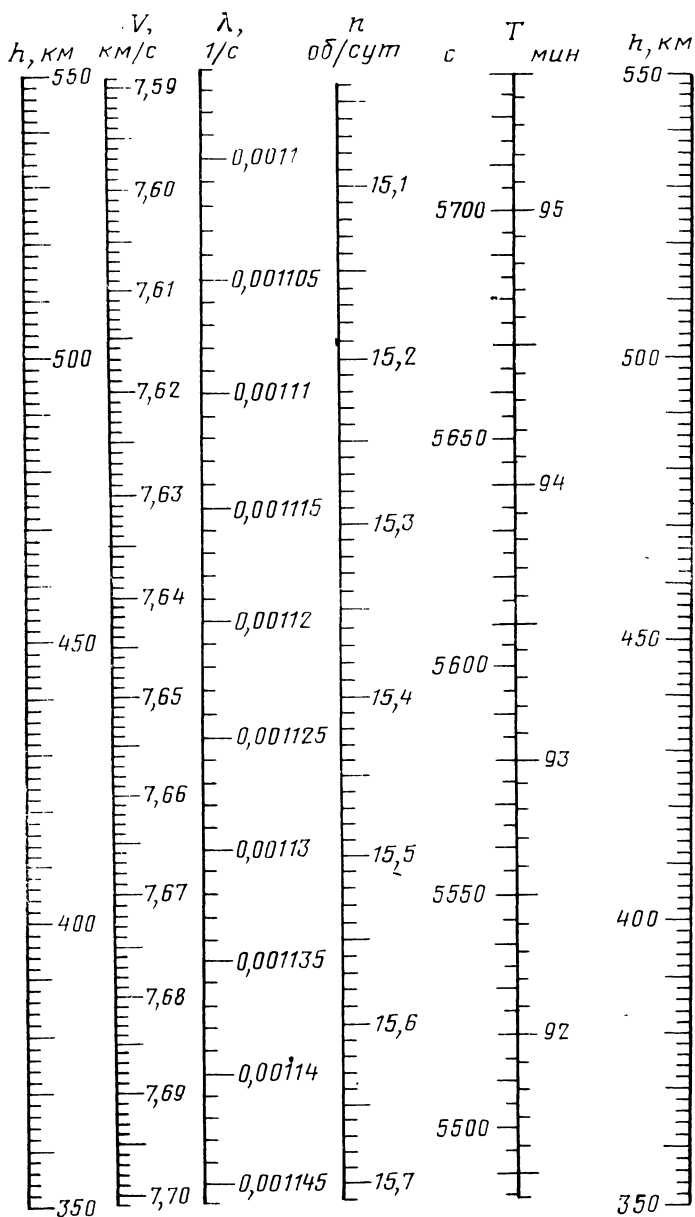


Рис. 19.9. Номограмма для определения параметров движения ИСЗ по круговым орбитам (лист 2)

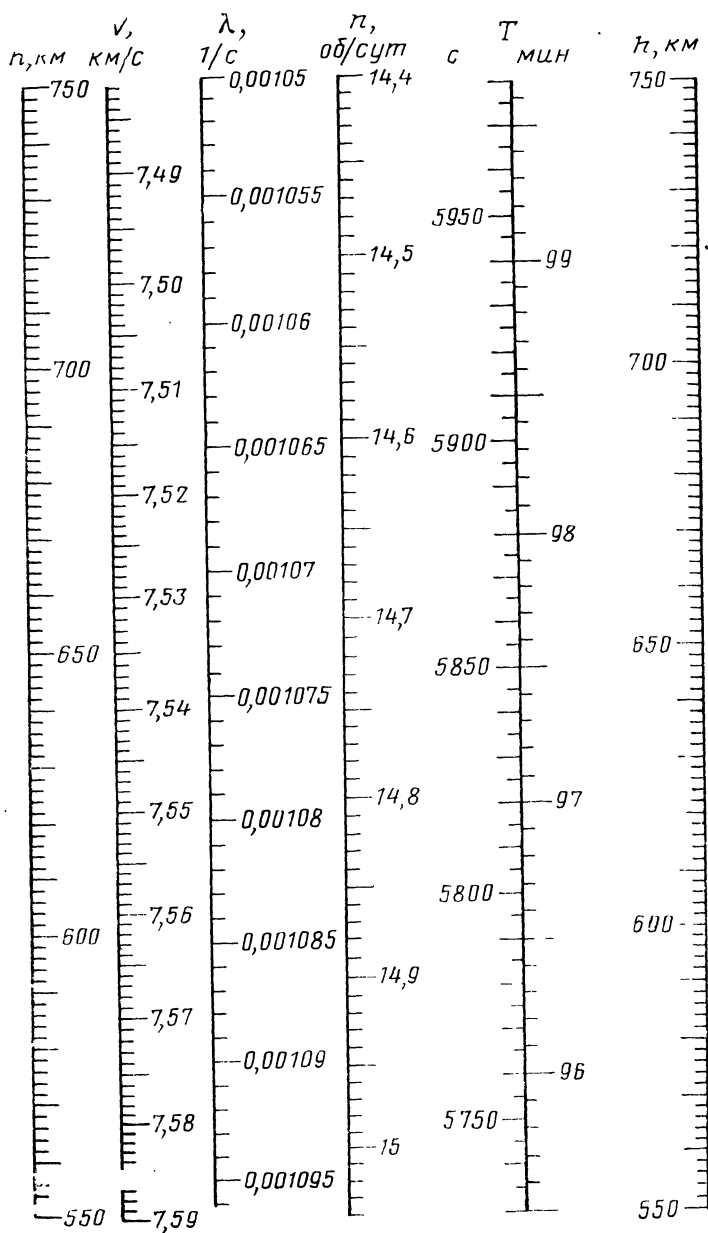


Рис. 19.9. Номограмма для определения параметров движения ИСЗ по круговым орбитам (лист 3)

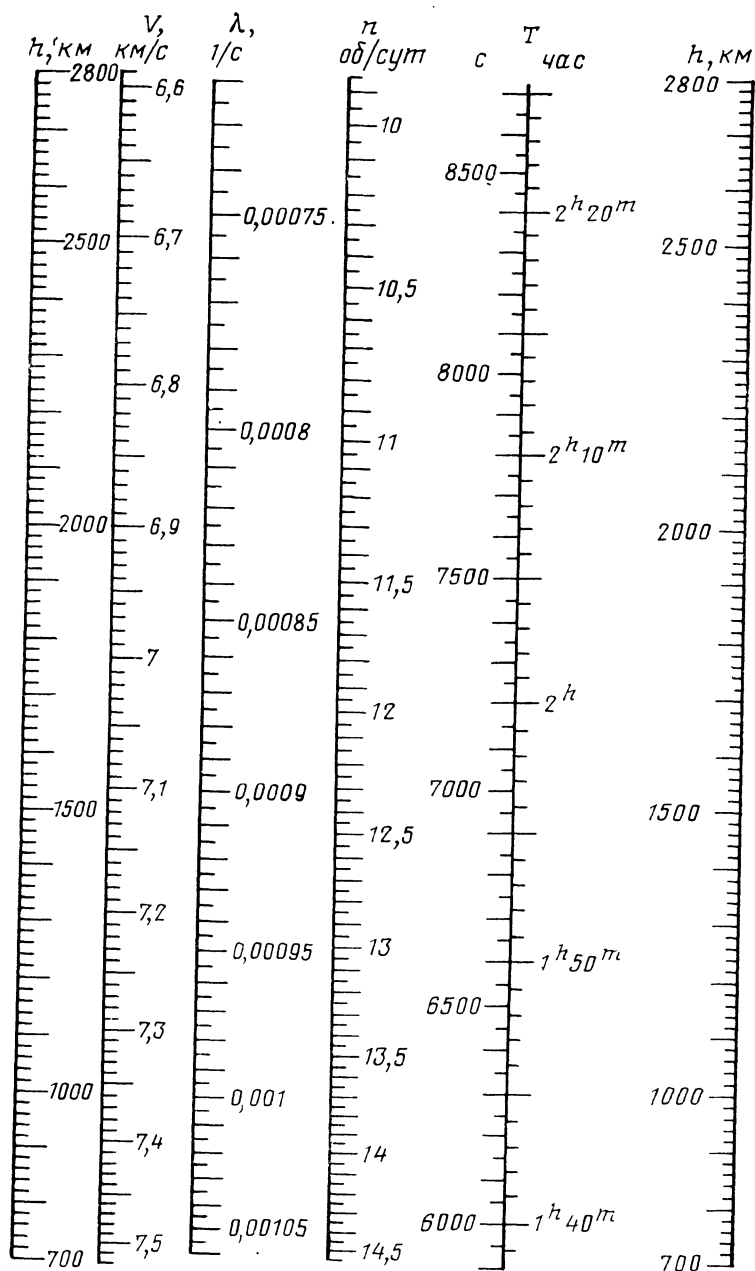


Рис. 19.9. Номограмма для определения параметров движения ИСЗ по круговым орбитам (лист 4)

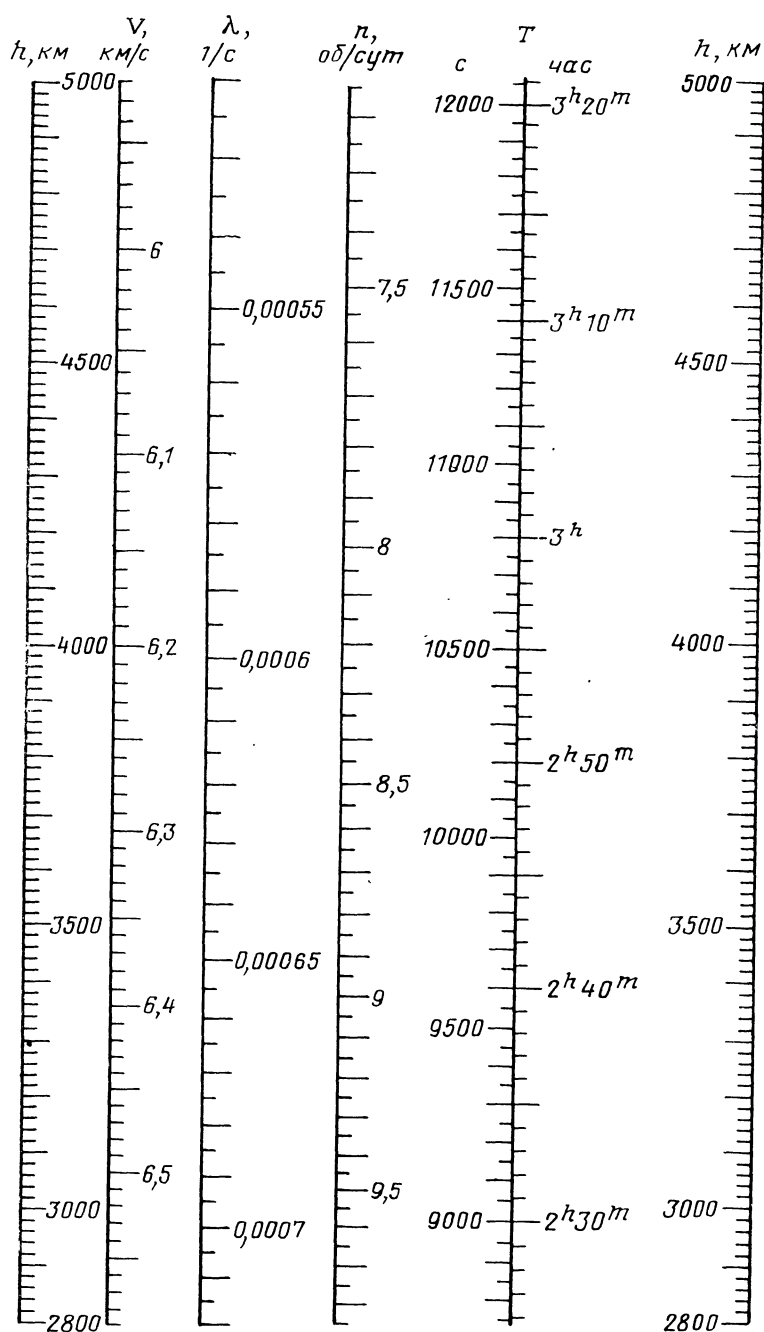


Рис. 19. 9. Номограмма для определения параметров движения ИСЗ по круговым орбитам (лист 5)

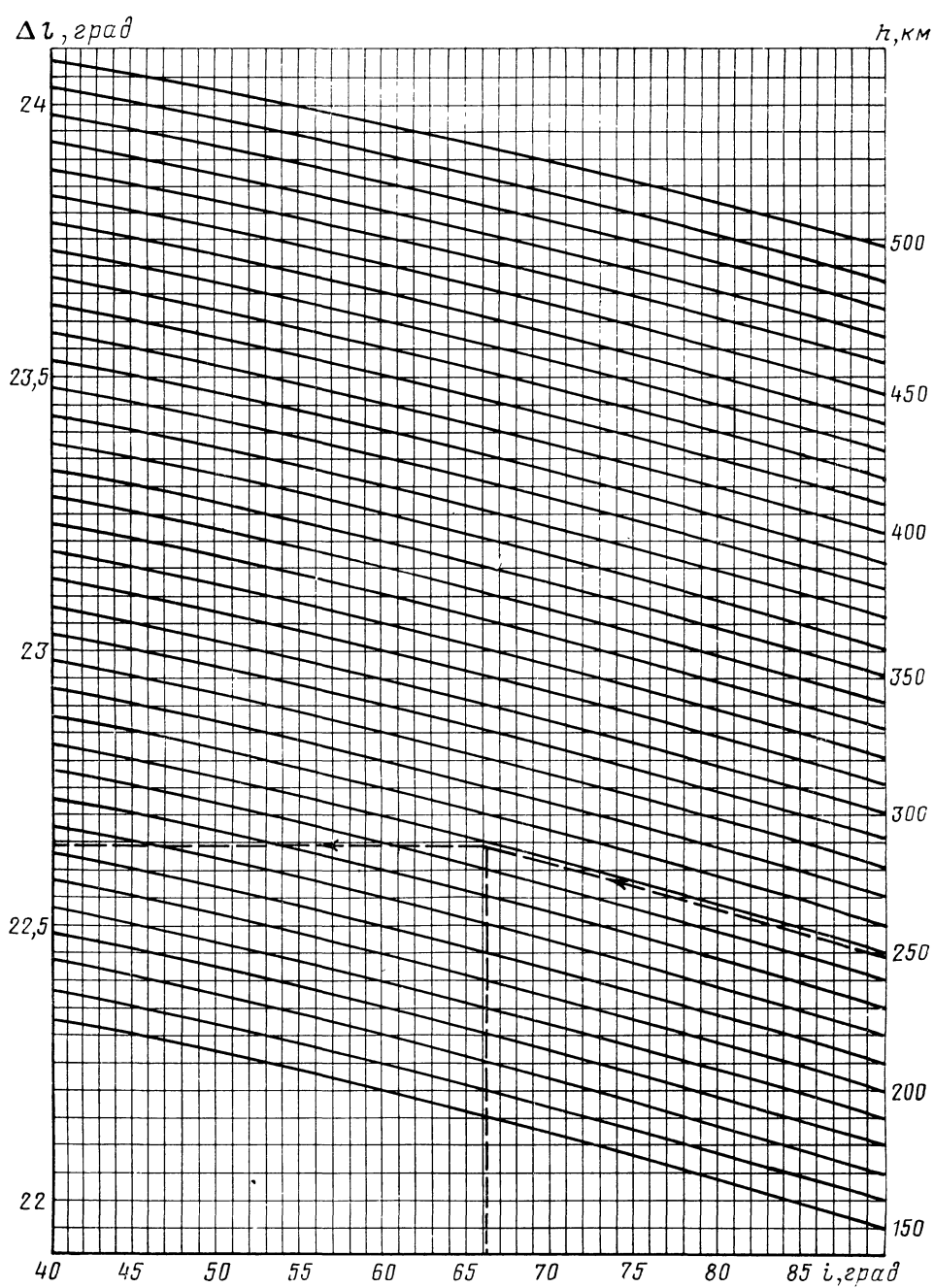


Рис. 19.10. (на 4 листах). Номограмма для расчета межвитковых интервалов (лист 1)

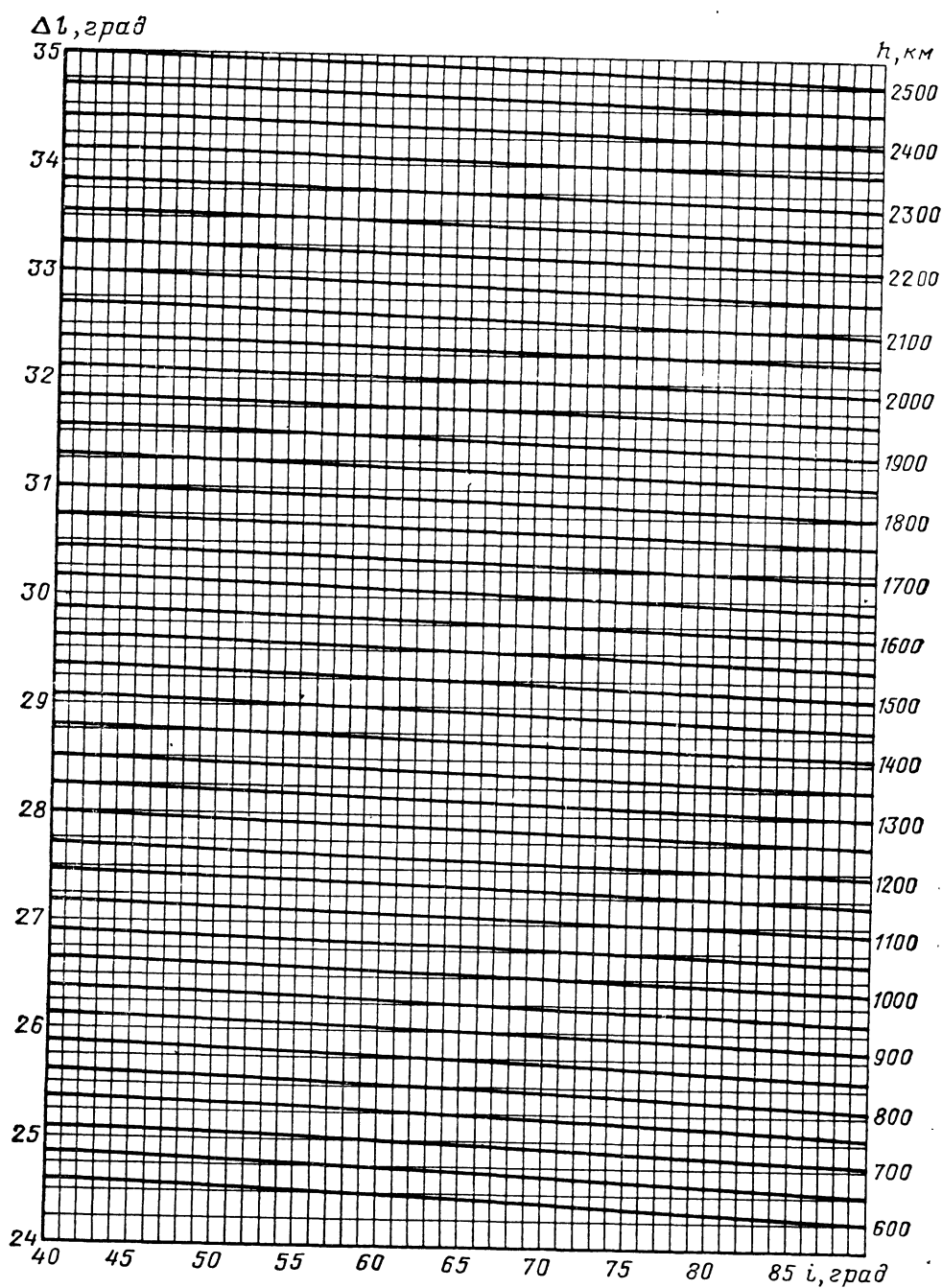


Рис. 19.10. Номограмма для расчета межвитковых интервалов (лист 2)

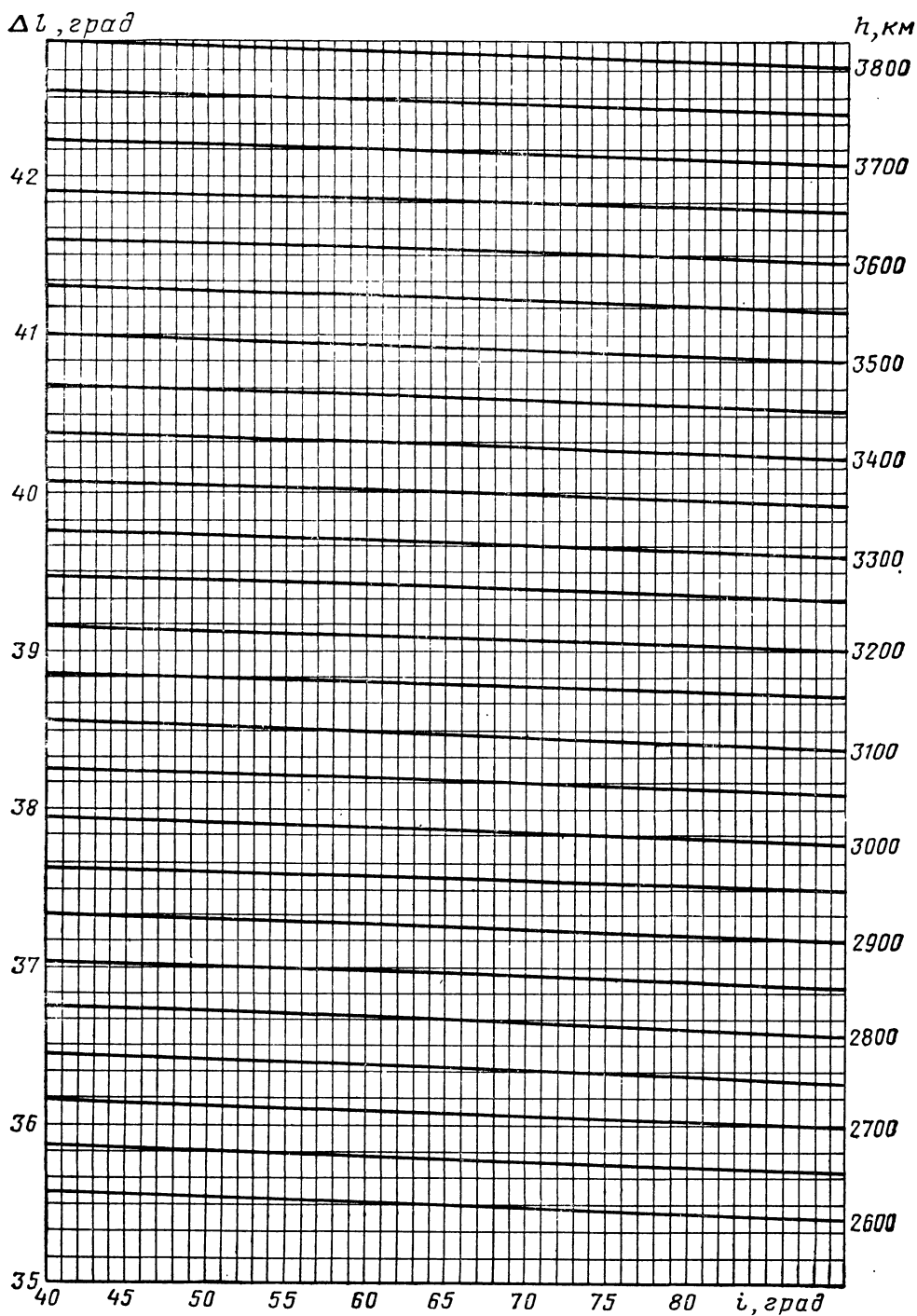


Рис. 19.10. Номограмма для расчета межвитковых интервалов (лист 3)

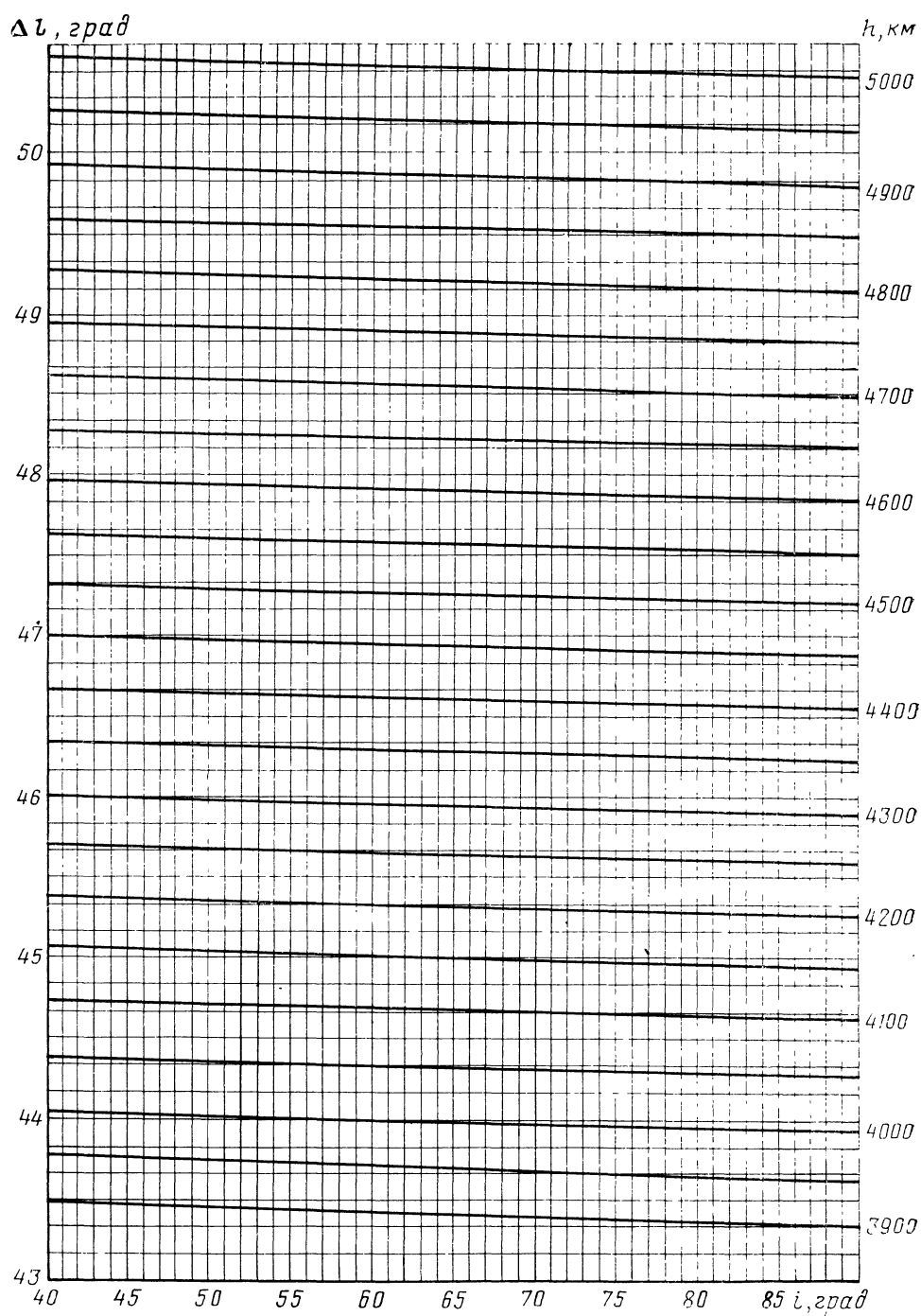


Рис. 19.10. Номограмма для расчета межвитковых интервалов (лист 4)

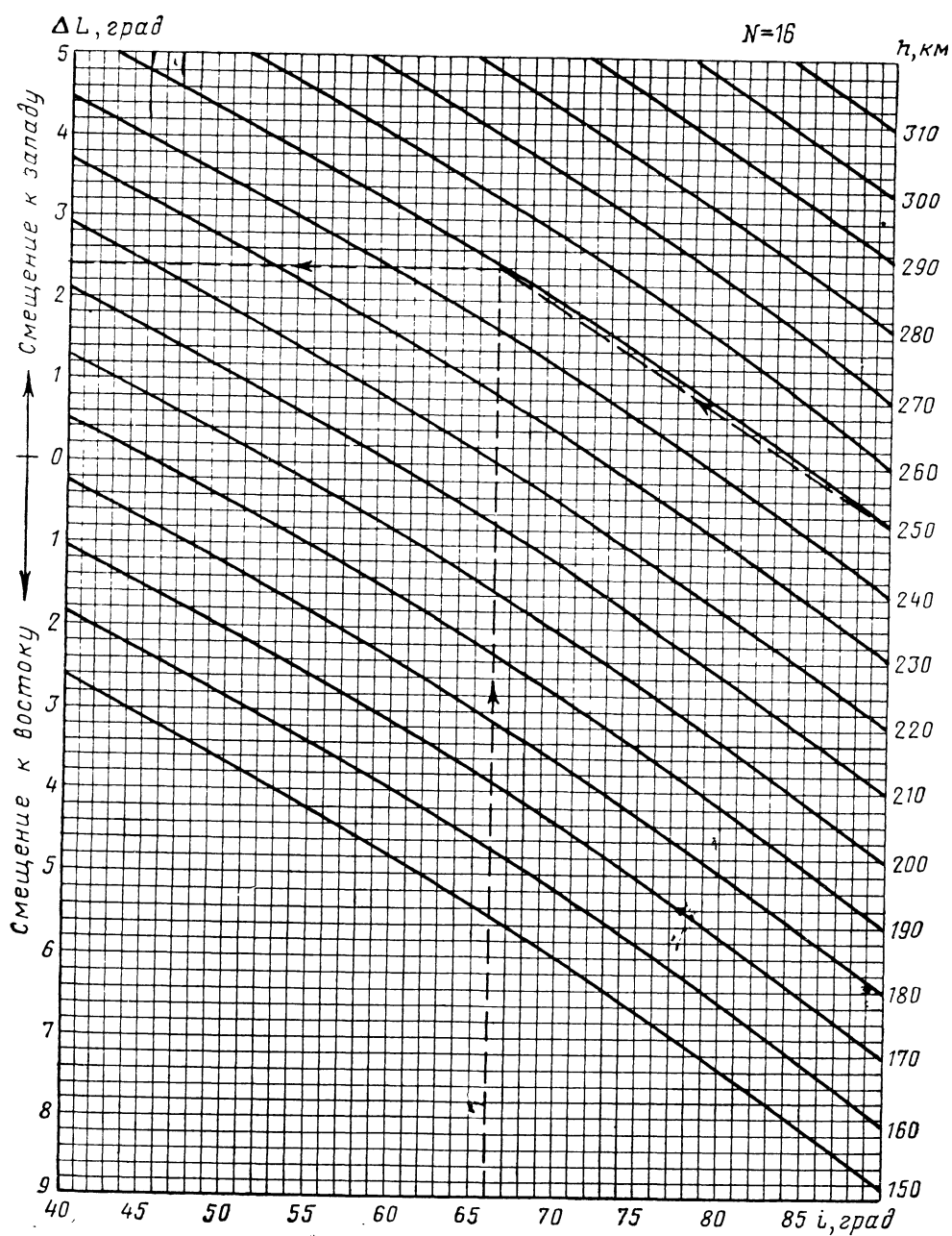


Рис. 19. 11. (на 10 листах). Номограмма для расчета суточных сдвигов трасс (лист 1)

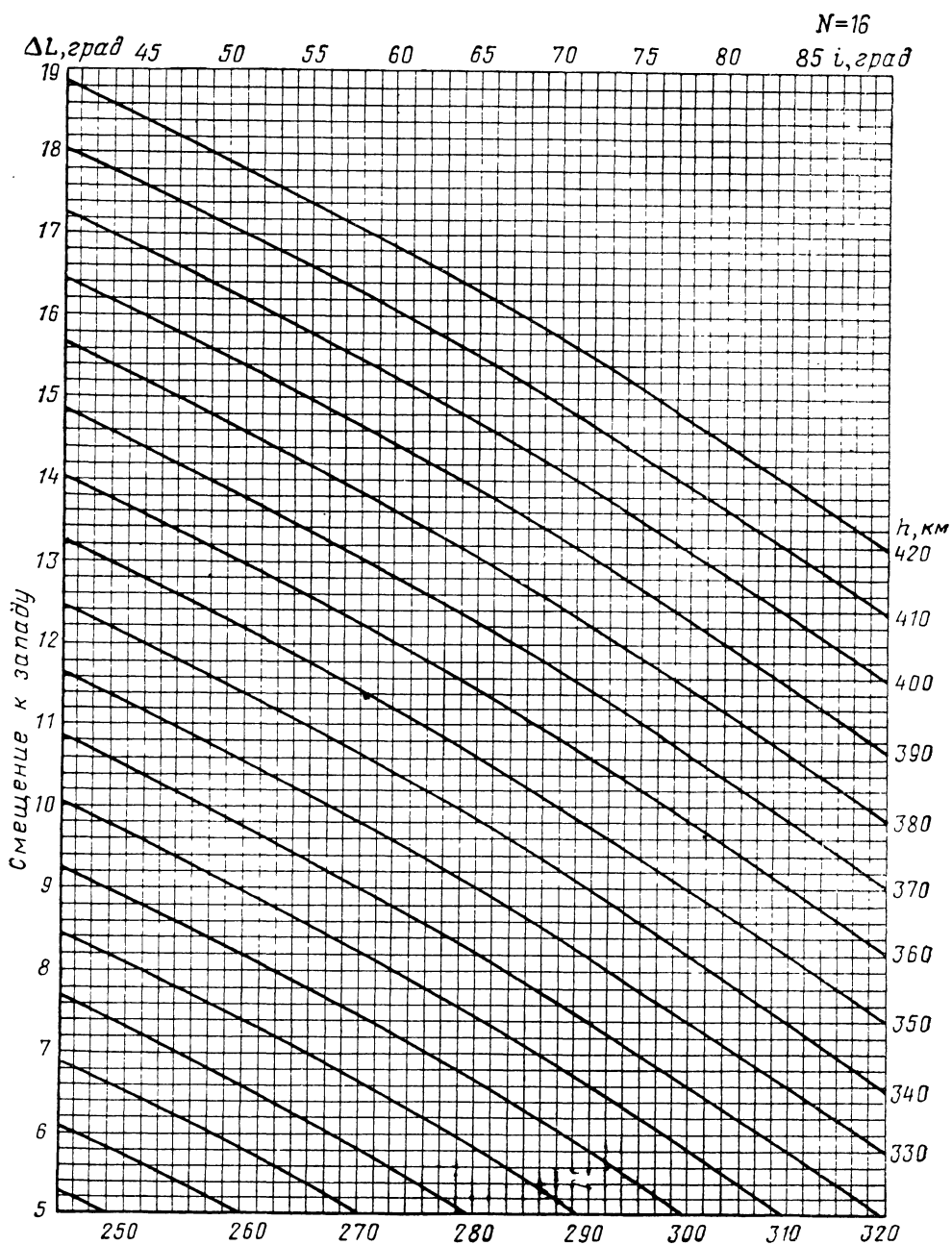


Рис. 19. 11. Номограмма для расчета суточных сдвигов трасс (лист 2)

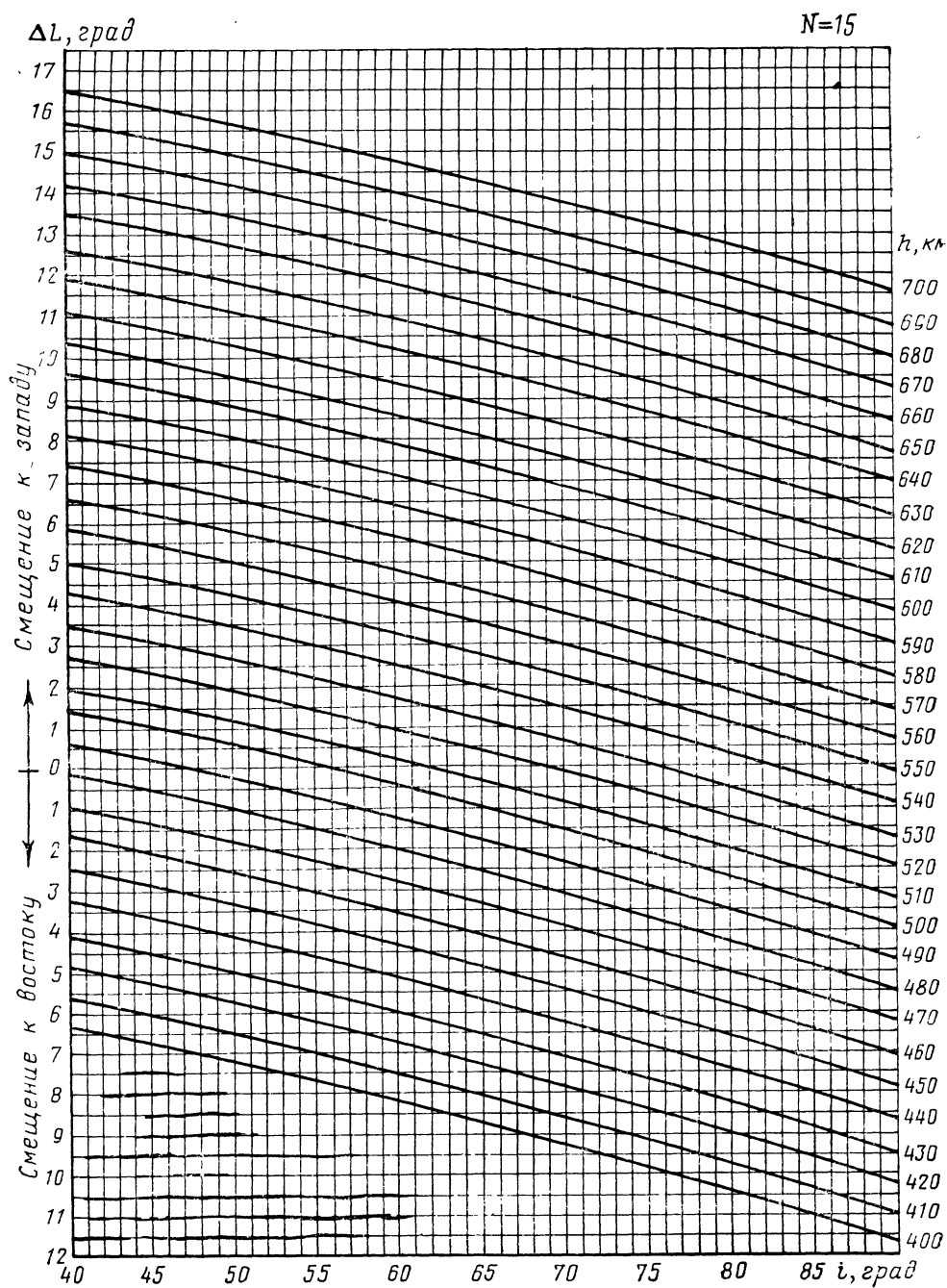


Рис. 19.11. Номограмма для расчета суточных сдвигов трасс (лист 3)

Величины β_j рассчитываются по формуле (19.9),

где

$$h_j = \begin{cases} \text{const} & \text{для круговых орбит,} \\ \frac{p}{1 - e \cos \vartheta_j} - R & \text{для некруговых орбит,} \end{cases}$$

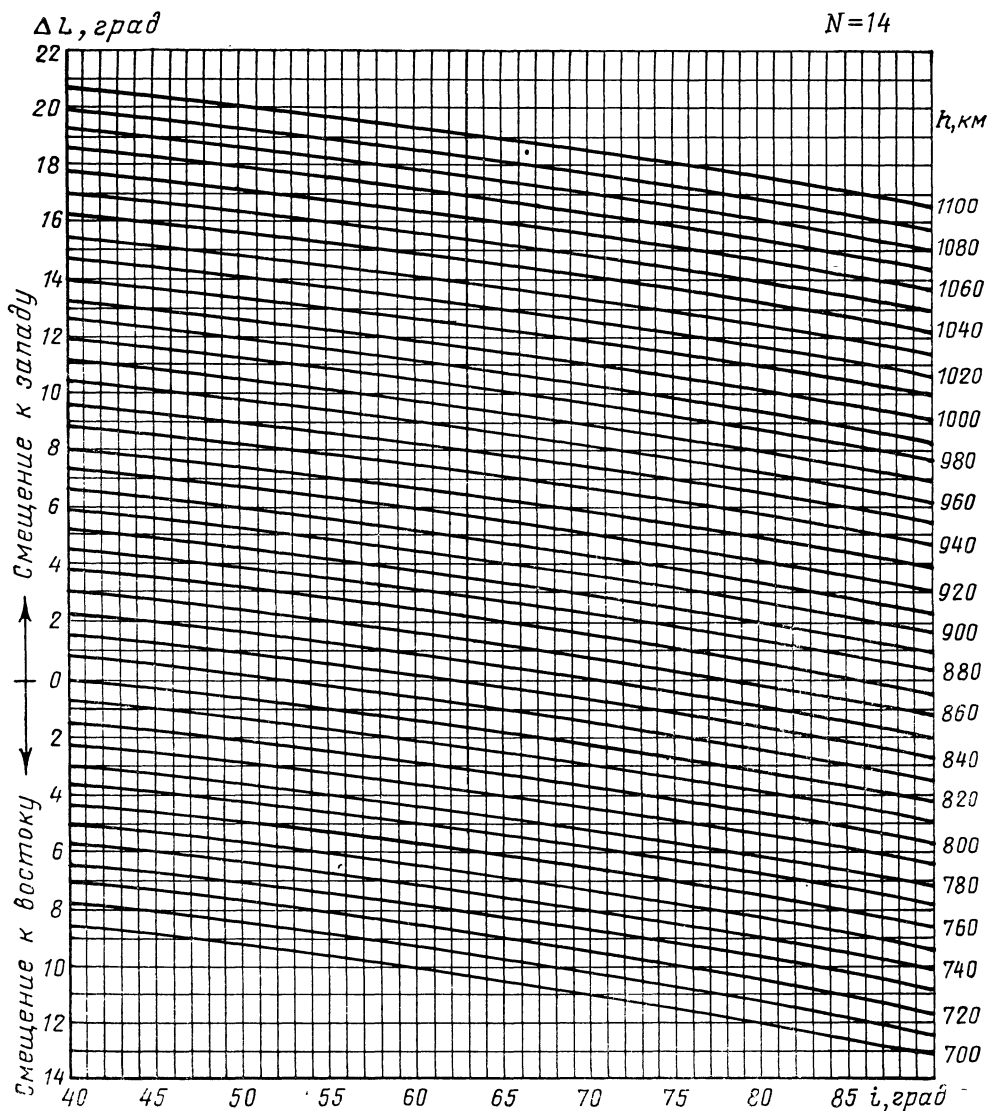
$$\vartheta_j = \arcsin \frac{\sin B_3}{\sin i} - \omega.$$

Долготы точек границы зоны видимости к западу ($L_{з.з}$) и востоку ($L_{з.в}$) от пункта наблюдения рассчитываются по формулам:

$$L_{з.з} = \begin{cases} A_1 & \text{при } A_1 \geq -\pi, \\ 2\pi - A_1 & \text{при } A_1 < -\pi, \end{cases} \quad L_{з.в} = \begin{cases} A_2 & \text{при } A_2 \leq \pi, \\ A_2 - 2\pi & \text{при } A_2 > \pi, \end{cases}$$

$$A_1 = L_{\Pi} - \Delta j; \quad A_2 = L_{\Pi} + \Delta j; \quad \Delta j = \begin{cases} \arccos C_j & \text{при } C_j \geq 0, \\ \pi - \arccos C_j & \text{при } C_j < 0, \end{cases}$$

$$C_j = \frac{\cos \beta_j - \sin B_3 \sin B_{\Pi}}{\cos B_3 \cos B_{\Pi}}.$$



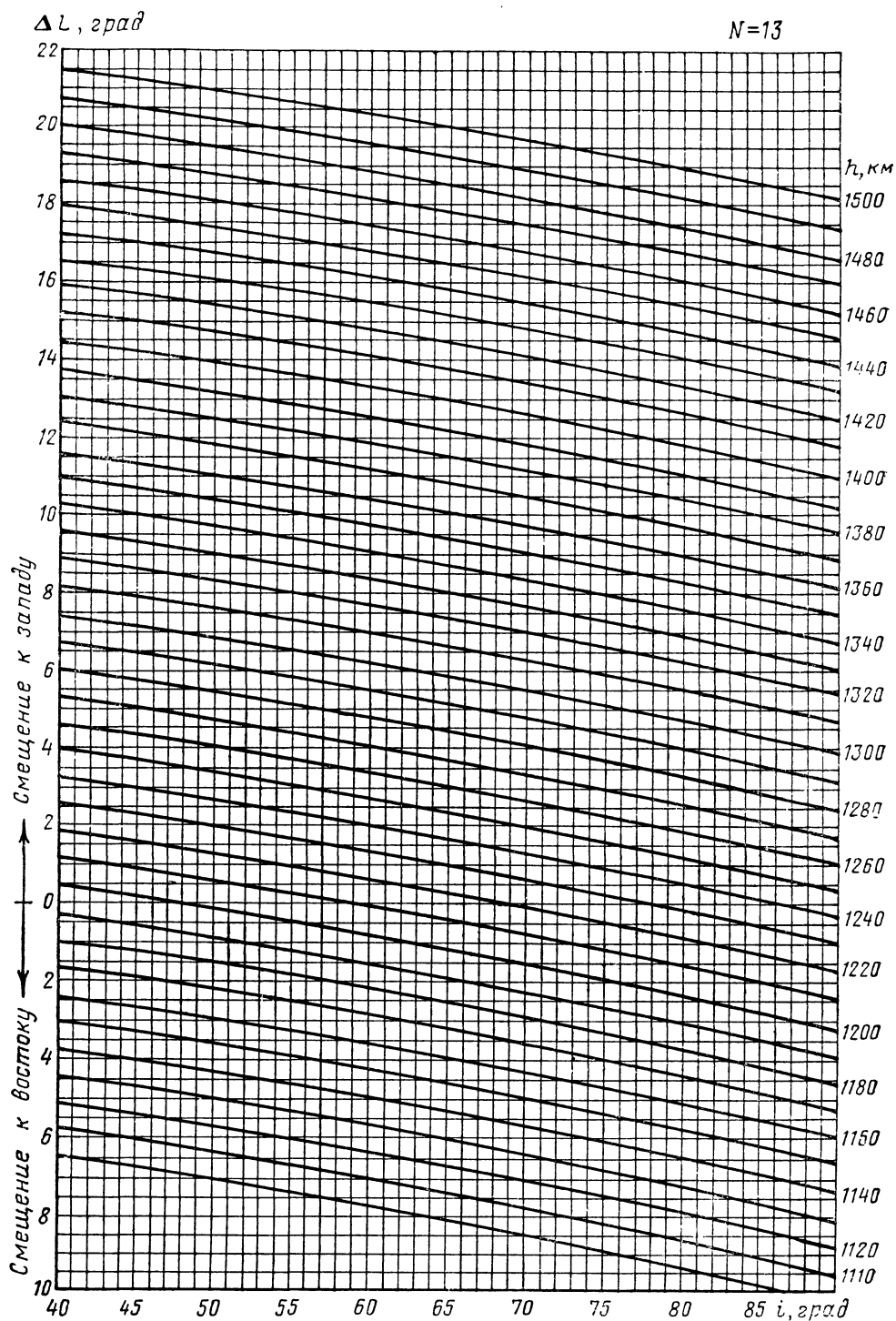


Рис. 19.11. Номограмма для расчета суточных сдвигов трасс (лист 5)

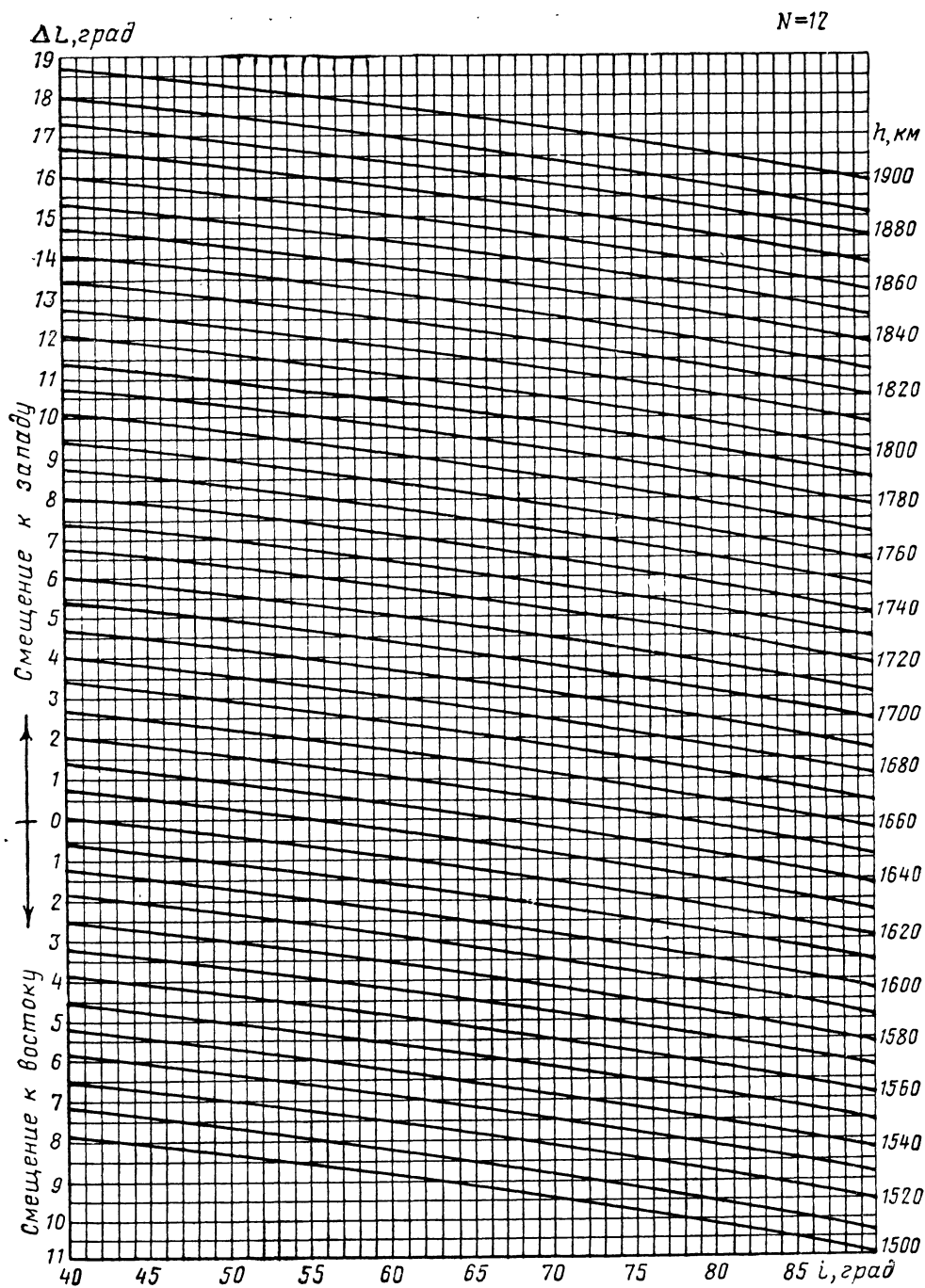


Рис. 19.11. Номограмма для расчета суточных сдвигов трасс (лист 6)

Для контроля правильности построения зоны видимости необходимо учитывать следующие ее свойства.

1. Зоны видимости на поверхности планеты симметрично расположены относительно меридиана пункта наблюдения, между параллелями $+i$ и $-i$.

2. Границы входа КА в зону видимости и выхода из нее совпадают между собой для круговых и эллиптических орбит с $\omega = (2k+1) \pi/2$, где $k=0, 1, 2, \dots$

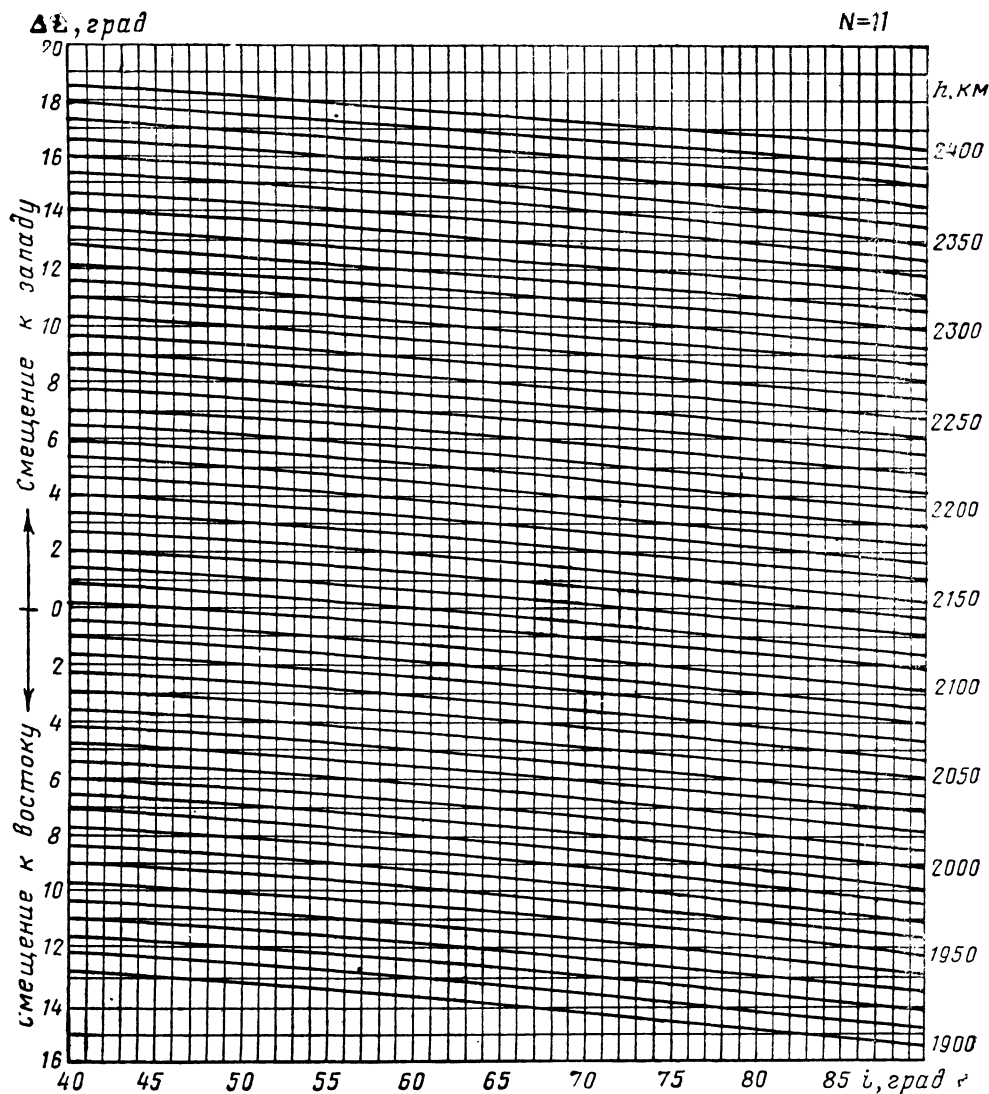


Рис. 19.11. Номограмма для расчета суточных сдвигов трасс (лист 7)

3. Если текущая широта орбиты КА $B_j > \pi - (B_n + \beta_j)$, то соответствующая ей параллель целиком лежит внутри зоны видимости. В этом случае КА проходит через зону видимости пункта наблюдения при всех возможных положениях трассы.

4. При облете планеты по гиперболической орбите пункты, с которых перигей не виден, имеют только границу входа зоны видимости при движении КА по восходящей ветви или только границу выхода — при движении КА по нисходящей ветви.

Пункты, с которых перигей виден, имеют обе границы (входа и выхода).

На рис. 19.19 и 19.20 приведены зоны видимости при полете спутников типа «Восток» и «Молния».

На рис. 19.21 представлены зоны видимости при облете Земли по гиперболической орбите.

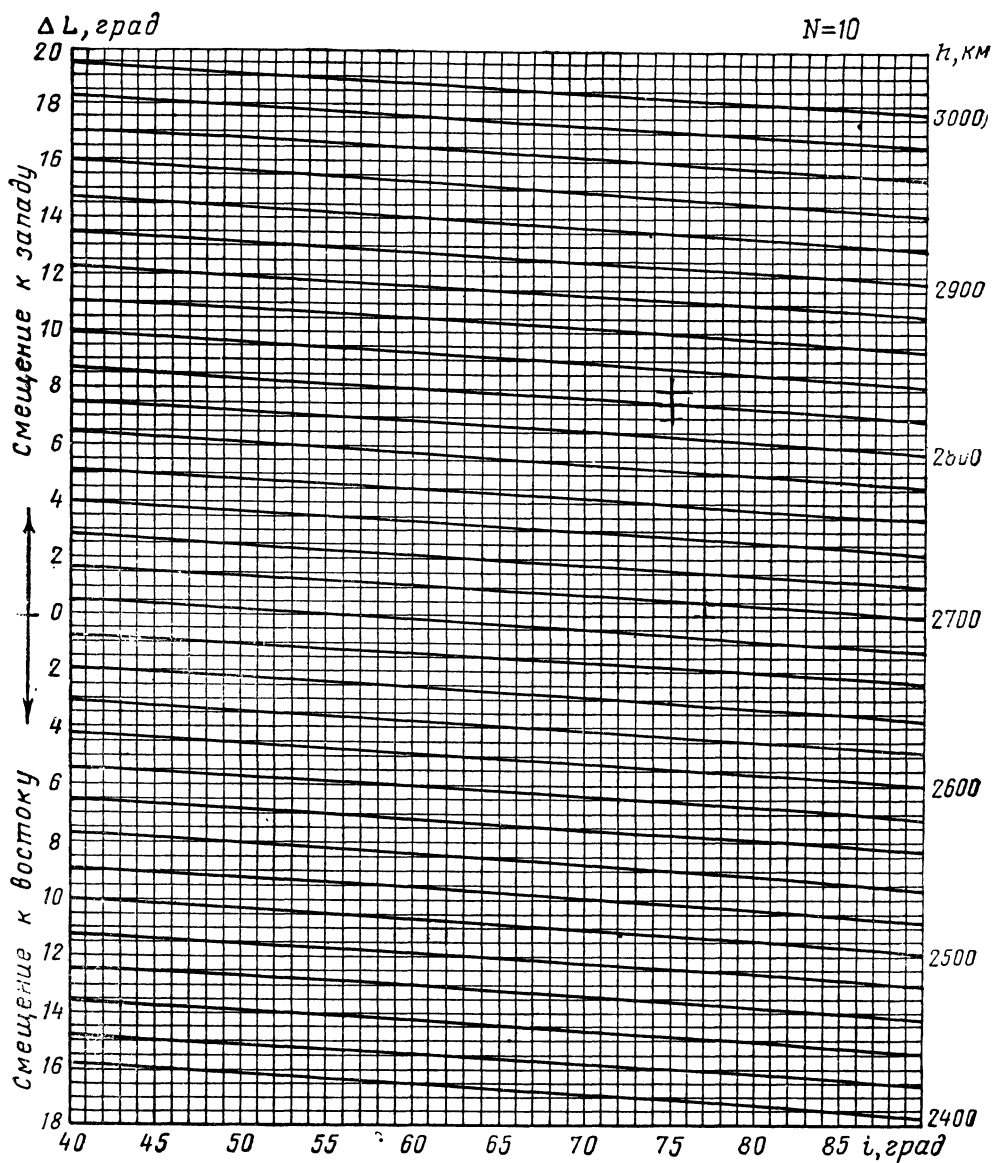


Рис. 19. 11. Номограмма для расчета суточных сдвигов трасс (лист 8)

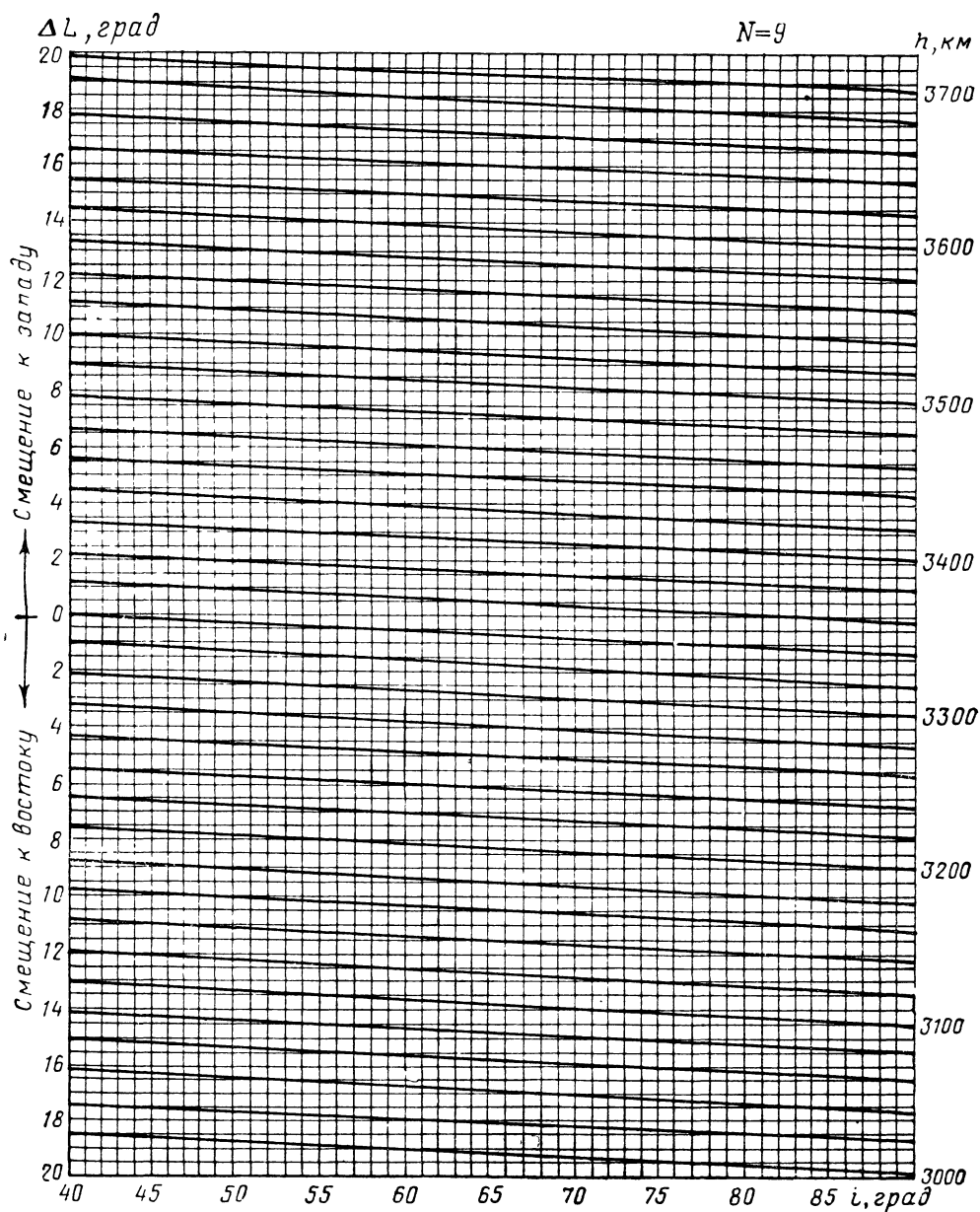


Рис. 19.11. Номограмма для расчета суточных сдвигов трасс (лист 9)

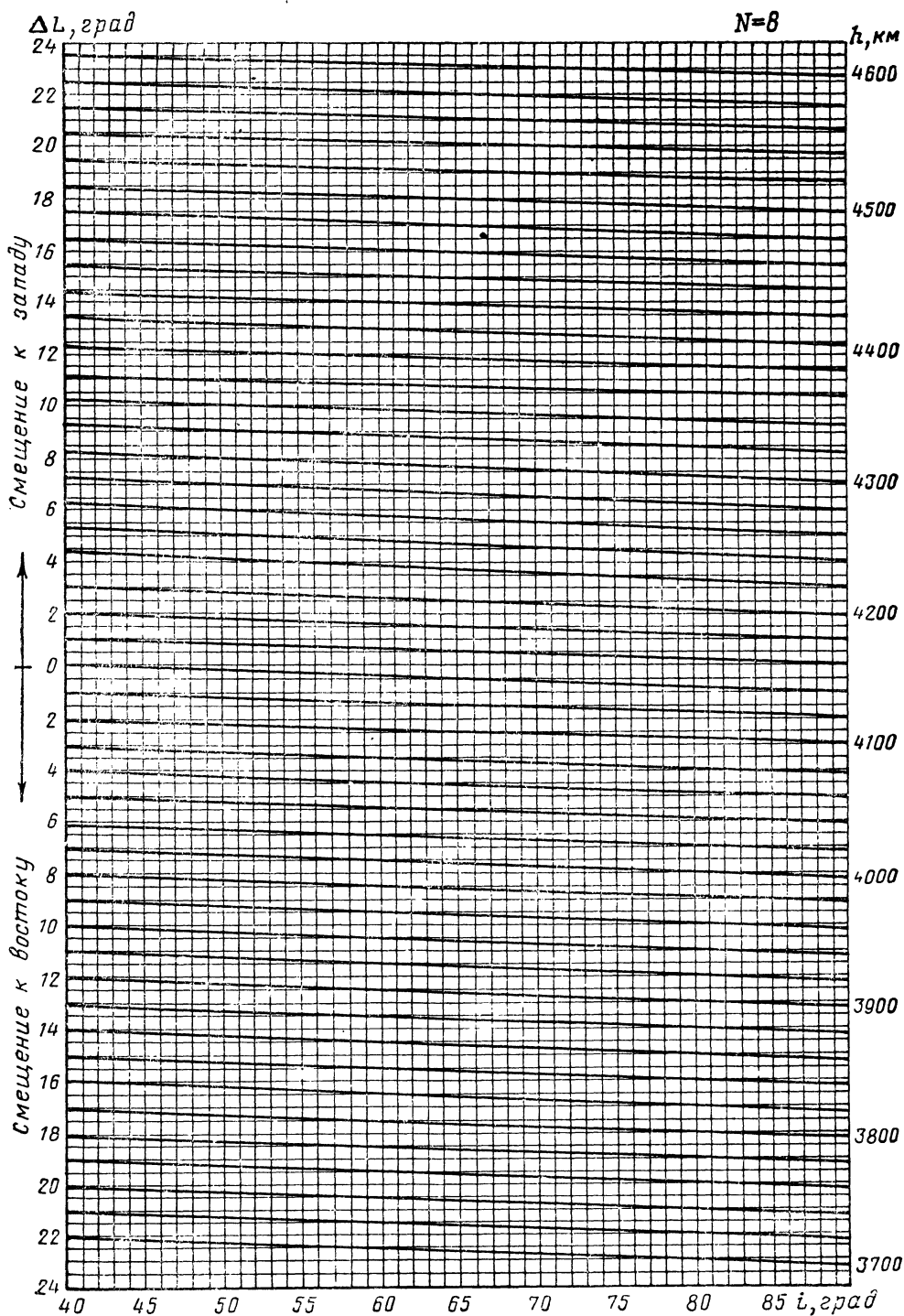


Рис. 19.11. Номограмма для расчета суточных сдвигов трасс (лист 10).

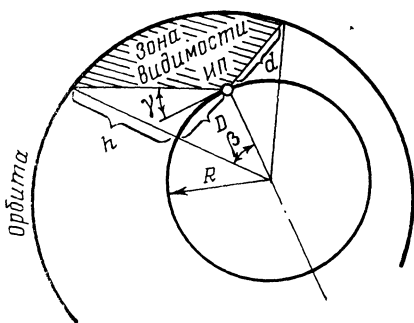


Рис. 19.12. Зона видимости измерительного пункта

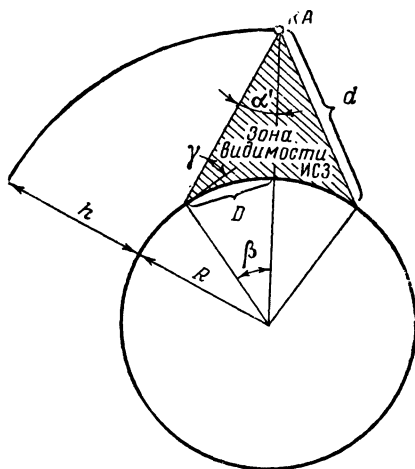


Рис. 19.13. Зона видимости ИСЗ.

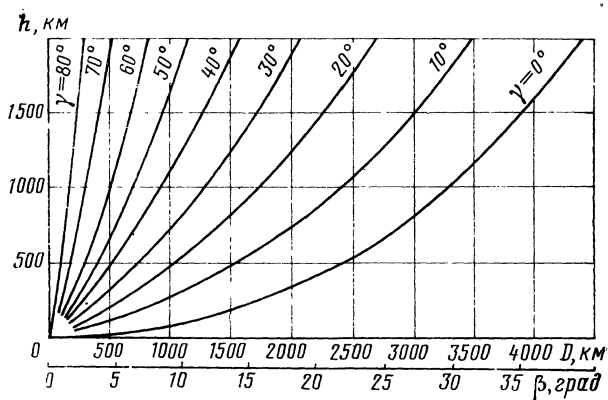


Рис. 19.14. Зависимость размеров зоны видимости от высоты полета ИСЗ и угла места на измерительном пункте γ

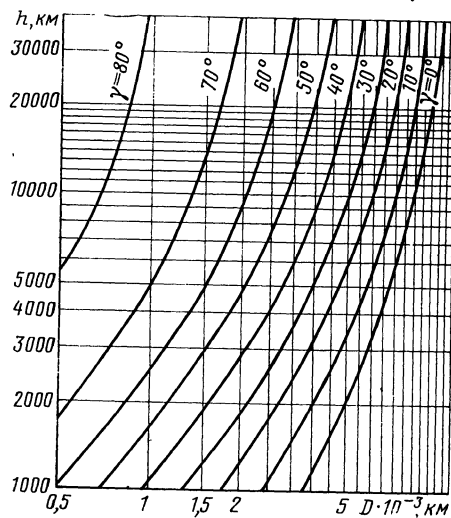


Рис. 19.15. Зависимость размеров зоны видимости от высоты полета ИСЗ и угла места на измерительном пункте

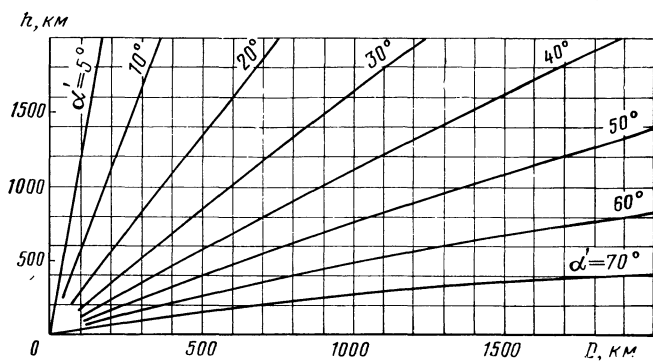


Рис. 19.16. Зависимость размеров зоны видимости от высоты полета ИСЗ и угла обзора α'

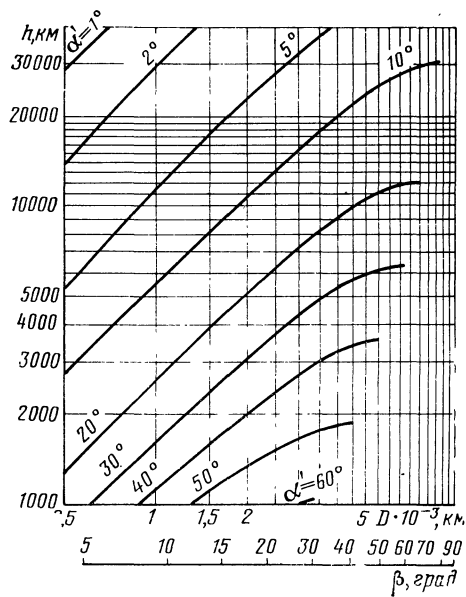


Рис. 19.17. Зависимость размеров зоны видимости от высоты полета ИСЗ и угла обзора α'

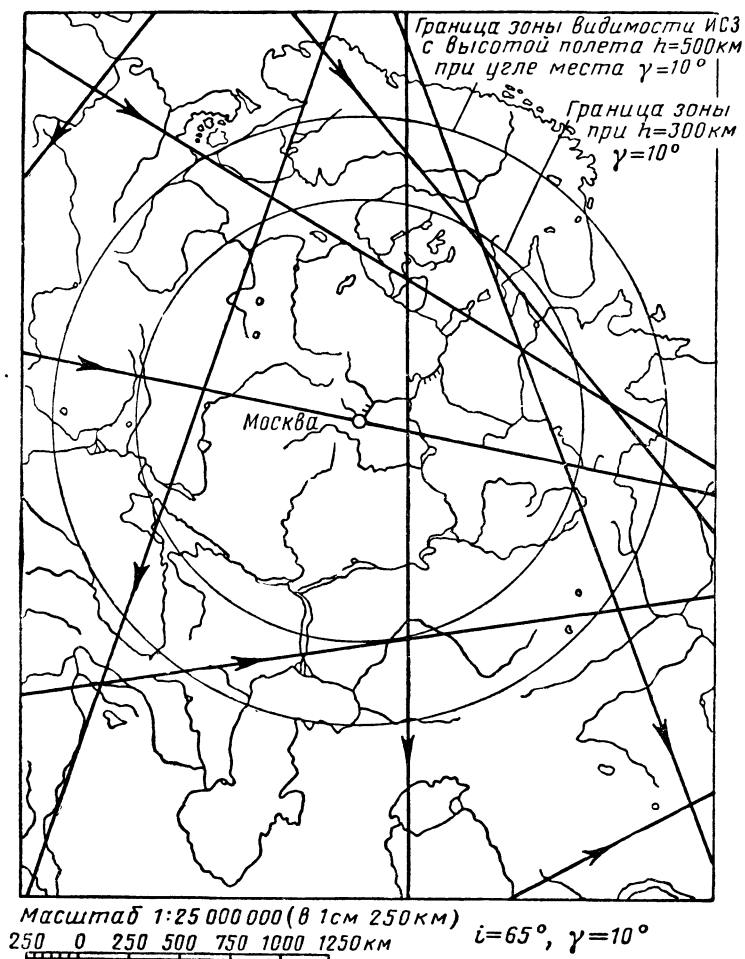


Рис. 19.18. Зоны видимости и трассы на карте поликонической проекции

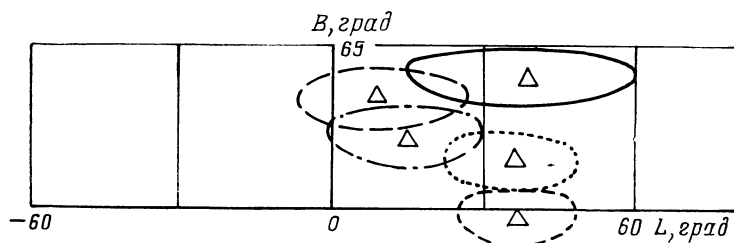


Рис. 19.19. Зоны видимости Москвы (—), Белграда (— —), Каира (— · —), Порт-Судана (...) и Найроби (— · · —) при полете ИСЗ типа «Восток» ($h=300$ км; $i=65^\circ$; $e=0$)

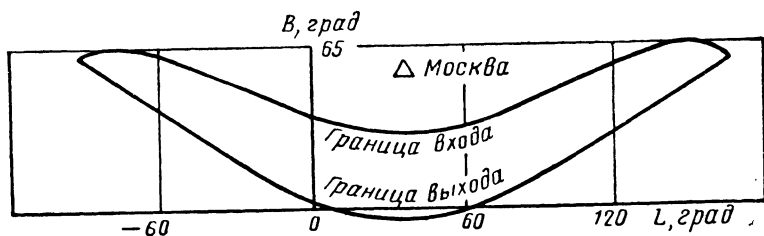


Рис. 19.20. Зона видимости Москвы при полете КА типа «Молния» ($T=12^h$; $i=65^\circ$; $e=0,75$; $\omega=325^\circ$)

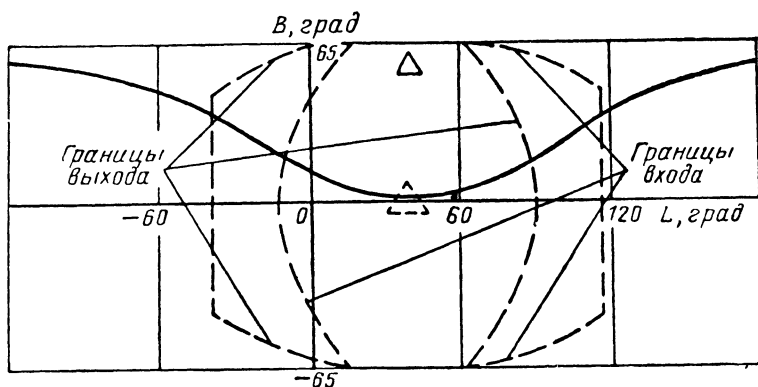


Рис. 19.21. Зона видимости Москвы (—) и пункта на экваторе (---) при полете КА около Земли по гиперболической орбите ($a=16\,000$ км; $e=1,5$; $\omega=0^\circ$; $i=65^\circ$)

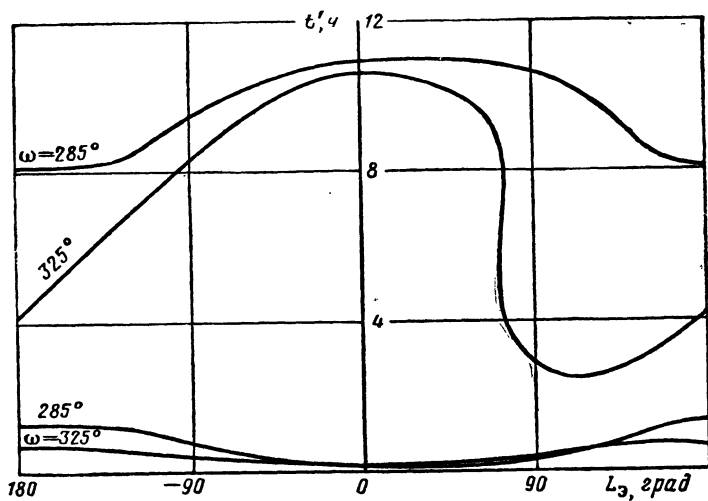


Рис. 19.22. Диаграммы прохождения спутников типа «Молния» через зону видимости Москвы

19.3. ВРЕМЕННЫЕ ДИАГРАММЫ ПРОХОЖДЕНИЯ

При запусках КА возникает необходимость определить время прохождения КА $t'(L_3)$ через границы зоны видимости пунктов. График зависимости $t'(L_3)$ называется диаграммой прохождения; здесь t' — время начала (конца) видимости, отсчитываемое от момента прохождения КА над экватором, L_3 — долгота точки пересечения восходящей части орбиты с плоскостью экватора.

Диаграмма прохождения может быть получена геометрическим построением и расчетом. Геометрическое построение осуществляется следующим образом. Трасса с временными метками наносится на кальку и перемещается по карте вдоль полосы, ограниченной параллелями $+i$ и $-i$. Метки времени в точках пересечения границ зоны видимости с трассой соответствуют t' , а долготы точек пересечения экватора с восходящей частью трассы орбиты — величине L_3 .

Диаграмма прохождения рассчитывается по формулам

$$t' = \begin{cases} \frac{T}{2\pi} \arcsin \frac{\sin B_j}{\sin i} & \text{для круговых орбит,} \\ \frac{\varepsilon_j - \varepsilon_3 - e(\sin \varepsilon_j - \sin \varepsilon_3)}{\lambda} & \text{для эллиптических орбит,} \\ \frac{H_j - H_3 - e(\operatorname{sh} H_j - \operatorname{sh} H_3)}{\lambda} & \text{для гиперболических орбит,} \\ \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} u_j + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{1}{2} u_j}{2v} & \text{для параболических орбит.} \end{cases}$$

Здесь

$$\varepsilon_j = \arcsin \frac{\sin \vartheta_j \sqrt{1-e^2}}{1+e \cos \vartheta} = \arccos \frac{e + \cos \vartheta_j}{1+e \cos \vartheta_j};$$

$$\varepsilon_3 = \arcsin \frac{\sin \omega \sqrt{1-e^2}}{1+e \cos \omega} = \arccos \frac{e + \cos \omega}{1-e \cos \omega};$$

$$H_j = \operatorname{arcsch} \frac{e \sin \vartheta_j}{1+e \cos \vartheta_j} \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} = \operatorname{arcsch} \frac{e + \cos \vartheta_j}{1+e \cos \vartheta_j};$$

$$H_3 = \operatorname{arcsch} \frac{e \sin \omega}{1+e \cos \omega} \sqrt{\frac{e-1}{e+1}} = \operatorname{arcsch} \frac{e + \cos \omega}{1+e \cos \omega};$$

$$u_j = \vartheta_j + \omega;$$

$$\lambda = \frac{a}{\sqrt{\mu}}, \quad v = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}};$$

$$L_3 = \begin{cases} L_{3.3} - \Delta j_1 + \Delta j_2 \\ L_{3.в} - \Delta j_1 + \Delta j_2, \end{cases}$$

где

$$\Delta j_1 = \begin{cases} \delta' & \text{при } E_{j+1} - B_j \geq 0, \\ \pi - \delta' & \text{при } B_{j+1} - B_j < 0, \end{cases}$$

$$\Delta j_2 = \omega t'; \quad \delta' = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} B_j}{\operatorname{tg} i}.$$

На рис. 19.22 представлены диаграммы прохождения спутников типа «Молния» на полусуточных эллиптических орбитах ($\omega=285^\circ$ и 325°) через зону видимости Москвы при $\gamma=10^\circ$.

На рис. 19.23 приведены диаграммы прохождения спутника «Молния-1» ($\omega=285^\circ$) через зону видимости этого же пункта, но при $\gamma=10^\circ, 20^\circ, \dots, 80^\circ$.

На рис. 19.24 даны диаграммы прохождения спутника «Молния-1» через зону видимости пунктов, в качестве примера условно размещенных в северном полушарии на широтах $B_n=10^\circ, 30^\circ, 50^\circ$ и 70° на меридиане Москвы при $\gamma=10^\circ$. Диаграммы прохождения пунктов, расположенных на других меридианах, могут быть получены смещением соответствующей диаграммы на разность их долгот.

Для получения на диаграмме времени входа в зону видимости или выхода из нее необходимо через соответствующую долготу пересечения восходящей части орбиты с плоскостью экватора провести прямую, параллельную оси ординат. Точки пересечения

указанной прямой с соответствующей линией $\gamma = \text{const}$ дадут искомые моменты времени.

Для определения параметров зон видимости межпланетных КА удобно пользоваться диаграммой, представленной на рис. 19.25.

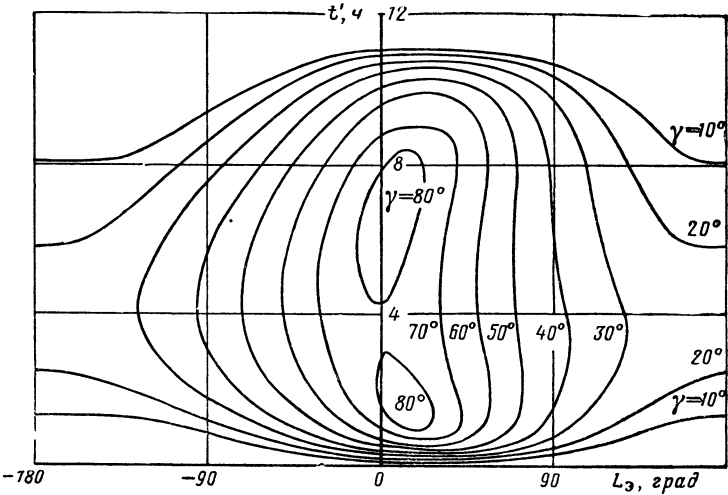


Рис. 19.23. Диаграммы прохождения спутника типа «Молния» через зону видимости Москвы при различных углах места γ

По оси абсцисс отложены широты пунктов B_{Π} , а по оси ординат максимальное значение угла места γ_{max} и продолжительность t пребывания в зоне видимости. Диаграмма соответствует минимально допустимому углу места $\gamma_{\text{min}} = 5^\circ$. Параметром кривых служит текущее склонение δ КА, движущегося по гиперболе удаления.

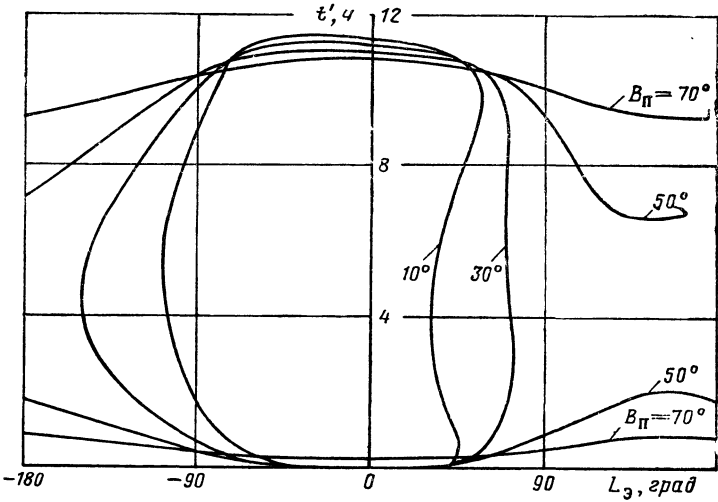


Рис. 19.24. Диаграммы прохождения спутника типа «Молния» через зоны видимости пунктов, условно расположенных в северном полушарии на меридиане Москвы

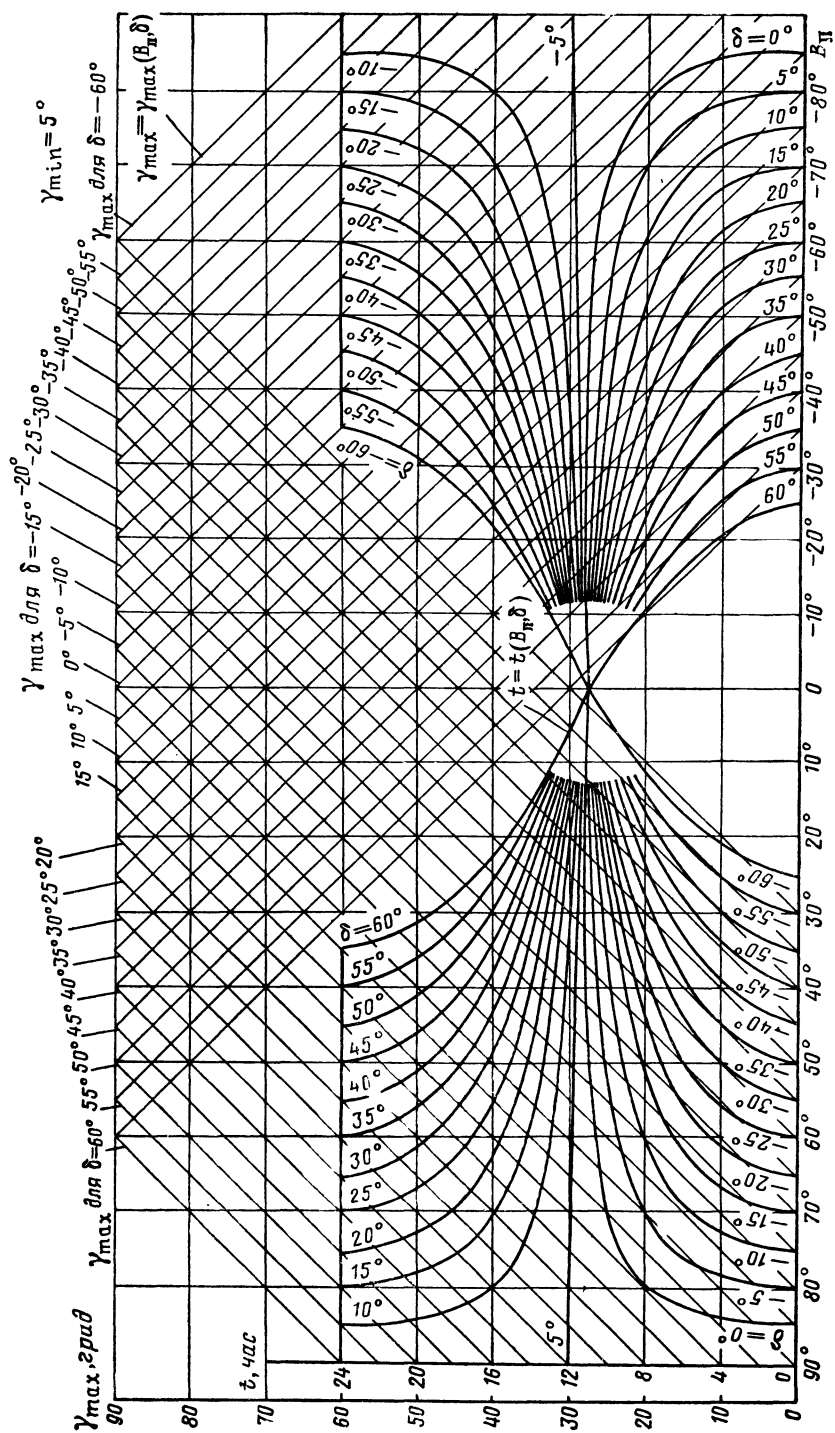


Рис. 19.25. Диаграмма видимости межпланетных космических аппаратов с наземных пунктов

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

ВАЖНЕЙШИЕ ЕДИНИЦЫ МЕЖДУНАРОДНОЙ СИСТЕМЫ (СИ) (по проекту ГОСТа „Единицы физических величин“)

Наименование величины	Размерность	Единица	
		Наименование	Обозначение
Основные единицы			
Длина	L	метр	м
Масса	M	килограмм	кг
Время	T	секунда	с
Сила электрического тока	I	ампер	А
Термодинамическая температура Кельвина	Θ	кельвин	К
Сила света	J	кандела	кд
Дополнительные единицы			
Плоский угол	—	радиан	рад
Телесный угол	—	стерадиан	ср
Производные единицы пространства и времени			
Площадь	L ²	квадратный метр	м ²
Объем	L ³	кубический метр	м ³
Скорость	LT ⁻¹	метр в секунду	м/с
Ускорение	LT ⁻²	метр на секунду в квадрате	м/с ²
Частота	T ⁻¹	герц	Гц
Частота вращения	T ⁻¹	секунта в минус первой степени	с ⁻¹
Угловая скорость	T ⁻¹	радиан в секунду	рад/с
Угловое ускорение	T ⁻²	радиан на секунду в квадрате	рад/с ²
Производные единицы механических величин			
Плотность	L ⁻³ M	килограмм на кубический метр	кг/м ³
Удельный объем	L ³ M ⁻¹	кубический метр на килограмм	м ³ /кг
Динамический момент инерции	L ² M	килограмм-метр в квадрате	кг·м ²
Количество движения	LMT ⁻¹	килограмм-метр в секунду	кг·м/с
Момент количества движения	L ² MT ⁻¹	килограмм-метр в квадрате в секунду	кг·м ² /с
Сила	LMT ⁻²	ньютон	Н
Момент силы	L ² MT ⁻²	ньютон-метр	Н·м
Импульс силы	LMT ⁻¹	ньютон-секунда	Н·с
Давление	L ⁻¹ MT ⁻²	паскаль	Па
Работа (энергия)	L ² MT ⁻²	джоуль	Дж
Мощность	L ² MT ⁻³	ватт	Вт
Массовый расход	MT ⁻¹	килограмм в секунду	кг/с
Объемный расход	L ³ T ⁻¹	кубический метр в секунду	м ³ /с

Наименование величины	Размерность	Единица	
		Наименование	Обозначение
Производные единицы тепловых величин			
Количество теплоты (энтальпия, внутренняя энергия)	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж
Удельное количество теплоты	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	Дж/кг
Теплоемкость системы	$L^2MT^{-2}\theta^{-1}$	джоуль на кельвин	Дж/К
Энтропия системы	$L^2MT^{-2}\theta^{-1}$	джоуль на кельвин	Дж/К
Удельная теплоемкость	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг·К)
Удельная энтропия	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг·К)
Удельная газовая постоянная	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	джоуль на килограмм-кельвин	Дж/(кг·К)
Тепловой поток	L^2MT^{-3}	ватт	Вт
Коэффициент теплообмена (теплоотдачи)	$MT^{-3}\theta^{-1}$	ватт на квадратный метр-кельвин	Вт/(м ² ·К)
Температурный градиент	$L^{-1}\theta$	кельвин на метр	К/м
Теплопроводность	$LMT^{-3}\theta^{-1}$	ватт на метр-кельвин	Вт/(м·К)

Производные единицы световых величин и величин энергетической фотометрии

Световой поток	J	люмен	лм
Световая энергия	TJ	люмен-секунда	лм·с
Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	лк
Светимость	$L^{-2}J$	люмен на квадратный метр	лм/м ²
Яркость	$L^{-2}J$	кандела на квадратный метр	кд/м ²
Количество освещения	$L^{-2}TJ$	люкс-секунда	лк·с
Энергия излучения	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж
Энергетическая освещенность (светимость)	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м ²
Энергетическая сила света	L^2MT^{-3}	ватт на стерадиан	Вт/ср
Энергетическая яркость	MT^{-3}	ватт на стерадиан-квадратный метр	Вт/(ср·м ²)
Спектральная плотность энергии излучения (по длине волны)	LMT^{-2}	джоуль на метр	Дж/м
Спектральная плотность энергии излучения (по частоте)	L^2MT^{-1}	джоуль на герц	Дж/Гц

Производные единицы величин в области ионизирующих излучений

Энергия ионизирующего излучения	L^2MT^{-2}	джоуль	Дж
Доза излучения (поглощенная доза излучения)	L^2T^{-2}	джоуль на килограмм	Дж/кг
Мощность дозы излучения	L^2T^{-3}	ватт на килограмм	Вт/кг
Интенсивность излучения	MT^{-3}	ватт на квадратный метр	Вт/м ²
Плотность потока ионизирующих частиц	$L^{-2}T^{-1}$	секунда в минус первой степени-метр в минус второй степени	с ⁻¹ ·м ⁻²

Таблица 2

ЕДИНИЦЫ, ДОПУСКАЕМЫЕ К ПРИМЕНЕНИЮ НАРАВНЕ С ЕДИНИЦАМИ СИ

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Значение в единицах СИ
Масса	тонна	т	10^3 кг
	центнер	ц	100 кг
Время	минута	мин	60 с
	час	ч	3600 с
	сутки	сут	86400 с
	неделя	нед	7 сут
	месяц	мес	от 28 до 31 сут
	год	год	12 мес
	век	век	100 лет
Термодинамическая температура Цельсия	градус Цельсия	°C	—
Плоский угол	полный угол	—	2π рад = 6,283185 рад
	прямой угол		$\pi/2$ рад = 1,570796 рад
	градус	...°	$\pi/180$ рад = 1,745329 · 10 ⁻² рад
	минута	...'	$\pi/10800$ рад
	секунда	...''	$\pi/648000$ рад
Телесный угол	полный телесный угол	—	4π ср = 12,56637 ср
Объем	литр	л	10 ⁻³ м ³
Скорость	километр в час	км/ч	0,277778 м/с
Частота вращения	оборот в секунду	об/с	1 · с ⁻¹
	оборот в минуту	об/мин	0,01666667 · с ⁻¹
Работа (энергия)	киловатт-час	кВт · ч	3,6 · 10 ⁶ Дж
Объемный расход	литр в секунду	л/с	10 ⁻³ м ³ /с

Таблица 3

ЕДИНИЦЫ, ВРЕМЕННО ДОПУСКАЕМЫЕ К ПРИМЕНЕНИЮ (до 1975 г.)

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Значение в единицах СИ
Длина	ангстрем	Å	10 ⁻¹⁰ м
Сила (сила тяжести)	килограмм-сила	кгс	9,80665 Н (точно)
	грамм-сила	гс	9,80665 · 10 ⁻³ Н (точно)
Момент силы	килограмм-сила-метр	кгс · м	9,80665 Н · м (точно)
Давление	килограмм-сила на квадратный сантиметр	кгс/см ²	98066,5 Па (точно)
	миллиметр ртутного столба	мм рт. ст.	133,322 Па
	бар	бар	10 ⁵ Па
Работа (энергия)	килограмм-сила-метр	кгс · м	9,80665 Дж (точно)
	ватт-час	Вт · ч	3600 Дж
Мощность	килограмм-сила-метр в секунду	кгс · м/с	9,80665 Вт (точно)
	лошадиная сила	л.с.	735,499 Вт
Количество теплоты	калория	кал	4,1868 Дж (точно)
Удельное количество теплоты	калория на грамм	кал/г	4,1868 · 10 ³ Дж/кг (точно)
Теплоемкость системы	калория на градус Цельсия	кал/°C	4,1868 Дж/К (точно)

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Значение в единицах СИ
Удельная тепло- емкость	калория на грамм-гра- дус Цельсия	кал/(г·°С)	$4,1868 \cdot 10^3$ Дж (кг·К) (точно)
Тепловой поток	калория в секунду	кал/с	4,1868 Вт (точно)
Поверхностная плот- ность теплового по- тока	калория в секунду на квадратный сантиметр	кал/(с·см ²)	$4,1868 \cdot 10^4$ Вт/м ² (точ- но)
Теплопроводность	калория в секунду на сантиметр-градус Цель- сия	кал/(с·см·°С)	$4,1868 \cdot 10^2$ Вт/(м·К) (точно)
Доза излучения	рад	рад	0,01 Дж/кг
Мощность дозы из- лучения	рад в секунду	рад/с	0,01 Вт/кг

Таблица 4

МНОЖИТЕЛИ И ПРИСТАВКИ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ ДЕСЯТИЧНЫХ КРАТНЫХ И ДОЛЬНЫХ ЕДИНИЦ И ИХ НАИМЕНОВАНИЙ

Множитель	Приставка		Множитель	Приставка	
	Наиме- нование	Обозна- чение		Наиме- нование	Обозна- чение
$1\,000\,000\,000\,000 = 10^{12}$	тера	Т	$0,01 = 10^{-2}$	(санتي)	с
$1\,000\,000\,000 = 10^9$	гига	Г	$0,001 = 10^{-3}$	милли	м
$1\,000\,000 = 10^6$	мега	М	$0,000\,001 = 10^{-6}$	микро	мк
$1\,000 = 10^3$	кило	к	$0,000\,000\,001 = 10^{-9}$	нано	н
$100 = 10^2$	(гекто)	г	$0,000\,000\,000\,001 = 10^{-12}$	пико	п
$10 = 10^1$	(дека)	да	10^{-15}	фемто	ф
$0,1 = 10^{-1}$	(деци)	д	10^{-18}	атто	а

Таблица 5

ВАЖНЕЙШИЕ ЕДИНИЦЫ СИСТЕМЫ СГС И ДРУГИЕ ЕДИНИЦЫ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ТЕОРЕТИЧЕСКИХ РАЗДЕЛАХ ФИЗИКИ И АСТРОНОМИИ

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Значение в единицах СИ
Длина	астрономическая еди- ница длины	а. е. д.	$1,49600 \cdot 10^{11}$ м
	световой год	св. год	$9,4605 \cdot 10^{15}$ м
	парсек	пк	$3,086 \cdot 10^{16}$ м
Масса	грамм	г	10^{-3} кг
Площадь	квадратный сантиметр	см ²	10^{-4} м ²
Объем	кубический сантиметр	см ³	10^{-6} м ³
Скорость	сантиметр в секунду	см/с	10^{-2} м/с
Ускорение	сантиметр на секунду в квадрате	см/с ²	10^{-2} м/с ²
Плотность	грамм на кубический сантиметр	г/см ³	10^3 кг/м ³

Наименование величины	Единица		
	Наименование	Обозначение	Значение в единицах СИ
Сила	дина	дин	10^{-5} Н
Момент силы	дина-сантиметр	дин·см	10^{-7} Н·м
Давление	дина на квадратный сантиметр	дин/см ²	0,1 Па
Работа (энергия)	эрг	эрг	10^{-7} Дж
Мощность	эрг в секунду	эрг/с	10^{-7} Вт
Напряженность магнитного поля	эрстед	Э	79,5775 А/м
Количество теплоты	эрг	эрг	10^{-7} Дж
Электромагнитная энергия	электронвольт	эВ	$1,60210 \cdot 10^{-19}$ Дж
Удельная газовая постоянная	эрг на грамм-кельвин	эрг/(г·К)	10^{-4} Дж/(кг·К)
Поток излучения	эрг в секунду	эрг/с	10^{-7} Вт
Энергетическая сила света	эрг в секунду на стерадиан	эрг/(с·ср)	10^{-7} Вт/ср
Энергетическая яркость	эрг в секунду на стерадиан-квадратный сантиметр	эрг/(с·ср·см ²)	10^{-3} Вт/(ср·м ²)

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Автономный метод ориентации 457

Адамса метод 338

Аргумент перигея 252

Аспекты в положении планет 22

Астероиды 61

Астрономическая единица 7

Астрономические постоянные 7

— вспомогательные 8

— определяющие 8

— основные 8

— производные 9

Атмосфера Венеры 30

— Земли 37

— Луны 58

— Марса 49

— Меркурия 29

— Сатурна 54

— солнечная 20

— Юпитера 53

Атмосферный участок выведения 288

— спуска 508

Аэродинамическая сила боковая 281

— лобового сопротивления 281

— подъемная 281

— полная 281

Аэродинамические коэффициенты 282

Аэродинамические моменты 282

— демпфирующие 283

— опрокидывающие 283

— стабилизирующие 283

Аэродинамический маневр 459

— боковой 466

Б

Баллистический коэффициент 122

Блеск звезды 11

Болометрическая поправка 11

Большая полуось орбиты 151, 252

В

Вековые возмущения орбиты 112, 349, 352

Венера 30

Видимая поверхность Венеры 30

— Марса 46

— Меркурия 29

— Сатурна 54

— Юпитера 52

Видимые звездные величины планет 28

— фигуры планет 23

Влияние на движение КА аномалий силы тяжести 108, 145

— малых начальных возмущений 120

— одновременно несколько космических тел 136

— планет и Солнца 109, 133

— постоянных и периодических возмущений 121

— сопротивления воздуха 122

Возмущающие силы 107

Возмущения 347

— от зональных гармоник 347

— от Луны и Солнца 126, 359

— от планет 126

— от сопротивления атмосферы 352

Внеатмосферный участок выведения 289

— спуска 506

Вращение Солнца 18

Время 91

— декретное 94

— запуска одиночного спутника 269

— при создании системы 268

— затемнения спутника 274

— максимальное 274

— относительное 278

— звездное 92

— истинное солнечное 92

— межстартовое 190

— мировое 93

— московское 94

— полета до орбиты Луны 183

— поясное 93

— прохождения КА через границы зоны видимости 593

— среднее солнечное 92

— эфемеридное 94

Выбор метода ориентации двигателя перед торможением 232

— невозмущенной траектории попадания в Луну 215

— опорных траекторий полета КА 160

— параметров орбит 250

— параметров траекторий возвращения с Луны 240

— программы фотографирования 158

Высота аполгея 252

— орбиты 260, 264, 334

— перигея 252

— полета ИСЗ 334

Выход на орбиту без дожига топлива 293

— с дожигом топлива 293

Г

Геоид 35

Годограф скорости в кеплеровом движении 103

Гравитационная постоянная 26

Гравитационное поле Земли 33

Гравитационные возмущения 347

Д

- Давление воздуха 42
- Даты старта и времени полета 149, 160
- Движение КА круговое 101
 - параболическое 101
 - прямолинейное 102
- Дифференциальные уравнения движения КА 107
 - — ракеты-носителя 284
- Длина интервала возможных дат старта 403
- Долгота восходящего узла 100, 150, 252
- Драконический период 140

Е

- Единицы расстояний 7

З

- Запуск КА к Луне без доразгона 186
 - — с доразгоном 186
- Задача о точке встречи КА с Луной 213
- Звездная величина 11
- Звезды 11
- Зоны видимости круговых орбит 570
 - — межпланетных КА 594

И

- Интеграл Лапласа 98
 - площадей 98
 - энергии 97
- Интервалы радиовидимости КА 229
- Истинная аномалия орбиты КА 152

К

- Календарь 94
 - юлианский 95
 - григорианский 95
- Квадратура 22
- Канонические уравнения Гамильтона 119
- Картинная плоскость 229
- Кеплера уравнение 99, 562
- Кинетическая энергия КА 118
- Классификация исходных орбит и оптимальных траекторий переходов 435
- Конечные формулы эллиптической теории 305
- Корректирующие импульсы 486
- Коррекция многообразовая 413
 - однокомпонентная 412
 - оптимальная с учетом маневра 449
 - траекторий полета к Луне 230
 - трехкомпонентная 412
- Косинусы направляющие 283, 307, 330
- Красовского эллипсоид 34
- Круговое движение 101

Л

- Лагранжа уравнения 118, 345
- Луна 58

М

- Магнитное поле Луны 60
 - Юпитера 53
- Малые начальные возмущения круговой орбиты 120
- Марс 46
- Межстартовый интервал 194
- Меркурий 29
- Метод вариаций 300, 304, 321
 - конечных разностей 300
 - максимума правдоподобия 297

- определения орбит 295
- попадающих траекторий 517
- Рунге—Кутта 339
- сближения 482

Минимально необходимое располагаемое качество 529

Моделирование процесса сближения 491

Н

- Наклонение плоскости орбиты 100, 252
 - лунной орбиты к эклиптике 58
- Начальные условия входа 498
 - — движения КА 299, 312
- Нептун 54

О

- Обращение планет вокруг Солнца 23
- Общая задача управления спускаемым аппаратом в атмосфере 513
- Общие сведения о планетах 22
- Ограничения по времени старта 194
- Определение геометрических характеристик орбиты КА 150
 - координат объектов на поверхности Луны 61
 - минимально необходимого располагаемого качества 529
 - орбит ИСЗ 302
 - — межпланетных полетов 318
 - оптимальных траекторий для посадки на Луну 232
 - параметров траектории КА на планетоцентрическом участке полета 153
 - условий посадки КА на поверхность планеты 159
- Оптимальный разгон 396
- Оптимальные траекторные характеристики при полете к Венере 408
 - к Марсу 408
 - к Юпитеру 409
- Оптимизация переходов на орбиту 440
 - — между орбитами 443
- Орбита квазисинхронная 255
 - монтажная 471
 - опорная 478
 - почти круговая 252
 - эллиптическая 252
- Орбитальный аэродинамический маневр 467
- Ориентация КА при коррекции 169
- Основные неравенства в движении Луны 58
- Особенности работы системы управления спуском 535
- Отношения массы Солнца к массе планеты 7
- Ошибки знания сил, действующих на КА в полете 326
 - исполнения коррекции 428
 - предельные 415
 - расчета эллиптических орбит 503
- Оценка точности начальных данных определения орбит КА 326

П

- Параболическое движение 101
- Параметры орбиты 296
 - измеряемые 296, 318, 326
 - оцениваемые 325
 - прогнозируемые 326
 - свободные 227

Парсек 7
 Период обращения 255
 — драконический 140
 — звездный 23
 — изомаршрутный 258
 — оптимальный 257
 — сидерический 22
 — синодический 22
 Период осевого вращения Венеры 30
 — — — Меркурия 20
 — — — Нептуна 20
 — — — Сатурна 54
 — — — Солнца 18
 — — — Урана 54
 — — — Юпитера 52
 Планеты 22
 Плоскость оптимальной коррекции 421, 428
 Плутон 54
 Поверхность Луны 60
 Погрешности траекторных измерений аппаратные 326
 — временной привязки 326, 329
 — геодезической привязки 326, 329
 Пограничный слой 541
 Показатель цвета 11
 Потенциал возмущающих сил 133
 — сил тяжести 33
 — центробежной силы 33
 Потенциальная энергия 118
 Прандтля число 541
 Принцип максимума 288
 Прицельная дальность 156, 183
 Прогнозирование движения ИСЗ 333
 — — лунных КА 373
 — — межпланетных КА 365
 — работы наземных измерительных пунктов 166
 Продолжительность радиовидимости КА 157
 — сеанса фотографирования 158
 Противостояние 22
 Протуберанцы 20

Р

Радиолокация Венеры 31
 Разгон КА с касательным постоянным ускорением 394
 Распределение энергии в солнечном спектре 18
 Расчет участка орбиты геоцентрического 368, 370
 — — — гелиоцентрического 369, 372
 — — — планетоцентрического 370
 — характеристик движения относительно Земли и Луны 217
 Ручное управление 522

С

Сатурн 54
 Световой год 7
 Свойства оптимальных траекторий 449
 Сила давления солнечного света 18
 — тяжести 281
 Система астрономических постоянных 7, 8
 Система координат барицентрическая прямоугольная 76
 — — — орбитальная 76
 — — — связанная 77

— — — скоростная 77
 — — — горизонтальная 77
 — — — гелиоцентрическая экваториальная прямоугольная 71
 — — — эклиптическая прямоугольная 71
 — — — геоцентрическая гринвичская прямоугольная 71, 333
 — — — орбитальная прямоугольная 72
 — — — экваториальная сферическая 74
 — — — эклиптическая прямоугольная 71
 — — — эклиптическая сферическая 72
 — — — цилиндрическая 72, 308, 335
 — — — оскулирующая 79
 — — — планетоцентрическая прямоугольная 77
 — — — вращающаяся 79
 — — — невращающаяся 77
 — — — селеноцентрическая прямоугольная 79
 — — — абсолютная 79
 — — — экваториальная вращающаяся 79
 — — — топоцентрическая 75
 — — — земная прямоугольная 75
 — — — пунктовая прямоугольная 76
 — — — стартовая прямоугольная 75
 — — — сферическая 76
 — — — экваториальная 76
 — — — транспонирующая 377

Системы счета времени 93
 Солнечная активность 20
 — постоянная 18
 — система 13
 Солнечные вспышки 21
 Солнечный ветер 21
 Солнце 13
 Способы посадки спускаемого аппарата на Землю 523
 Спуск КА на поверхность Земли и планет 496
 — баллистический 498, 508
 — планирующий 498, 509
 — скользящий 509
 Спутники планет 55
 — Сатурна 57
 — Юпитера 57
 Среднее экваториальное Солнце 92
 Средние места характерных звезд в системе координат
 — лунной 14
 — экваториальной 17
 — эклиптической 17
 Стартовый интервал 190
 Сутки звездные 92
 — истинные солнечные 92
 — средние солнечные 92
 Сфера действия 103
 Схема полета к Луне 226

Т

Температура Венеры 30
 — земной атмосферы 40
 — Луны 59

- Марса 48
- Меркурия 29
- планет 23
- Юпитера 52
- Тепловой поток конвективный 540
 - — радиационный 557
- Теплообмена коэффициенты 541
 - основные уравнения 542
 - расчеты 548
 - функции 545
- Торможение активное 497
 - пассивное с использованием аэродинамических сил 497
- Точка весеннего равноденствия 91
- Точки входа в сферу действия Луны 207
 - критические 178
 - либрации 178
 - падения на поверхность Луны 209
- Точность численного интегрирования 340
- Траектории возвращения от Луны к Земле номинальные 236, 240
 - — — отклоненные 240
 - — — предельные 236
 - — — с вертикальным стартом 239
 - — — с наклонным стартом 239
- номинальные для посадки в заданный район 509
- опорные 519
- оптимальные для посадки на Луну 232
- планетоцентрические 154, 158, 172
- полета к Луне варьированные 204
 - — — номинальные попадающие 201, 206
 - — — энергетически оптимальные 196
- сближения с Луной 180, 183
- транспонирующие 379
- Трассы полета 560
- Тяга двигателя в пустоте 281
 - полная 281
 - реактивная 281
 - у поверхности Земли 281

У

- Угловая дальность полета 150
 - — активная 193
 - — пассивная 186, 193
- Удельная тяга 281

- Управление движением центра масс 284
 - оптимальное 381
- Уравнение времени 92
- Уравнения движения КА 97, 107
 - в векторной форме 97
 - в полярной системе координат 97
 - в скалярной форме 97
 - в сферических координатах 97
 - ракеты-носителя 283
- Уран 54
- Ускорение силы притяжения 34
 - — сопротивления воздуха 122
- Условие радиовидимости КА 57, 167.
- Уточнение отношения массы Солнца к массе планеты 7
- Участок траектории гелиоцентрический 148, 167
 - — геоцентрический 153, 156, 165

Ф

- Формулы перехода от одной системы координат к другой 79
- Фотометрические характеристики Луны 59
 - — планет 23

Х

- Характеристики полетов к Венере 394
 - — Марсу 393
 - — Юпитеру 394
 - траекторий попадания в Луну 189
- Характеристическая скорость КА 196

Ч

- Часовые пояса 93

Ш

- Ширина коридора входа 498

Э

- Эксцентриситет орбиты 100, 152, 252
- Элементы орбит 100, 145
- Эллипс влияния 230, 422
- Эллипсоид вращения 34
 - Красовского 34
- Элонгация 22
- Эпоха 71

Ю

- Юпитер 52

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр
Предисловие	5
Глава I. Основные сведения о Вселенной и Солнечной системе	7
1. 1. Астрономические постоянные	7
1. 1. 1. Система астрономических постоянных 1964 г.	7
1. 1. 2. Уточнение значения постоянных	7
1. 1. 3. Единицы расстояний	7
1. 2. Звезды	11
1. 3. Солнечная система	13
1. 3. 1. Солнце	13
1. 3. 2. Общие сведения о планетах	22
1. 3. 3. Меркурий	29
1. 3. 4. Венера	30
1. 3. 5. Земля и околоземное пространство	33
1. 3. 6. Марс	46
1. 3. 7. Юпитер	52
1. 3. 8. Сатурн	54
1. 3. 9. Уран, Нептун, Плутон	54
1. 3. 10. Спутники планет	55
1. 3. 11. Астероиды	61
Литература к гл. I	64
Глава II. Системы координат и время	71
2. 1. Системы координат	71
2. 1. 1. Гелиоцентрические прямоугольные системы координат	71
2. 1. 2. Геоцентрические прямоугольные системы координат	71
2. 1. 3. Геоцентрические криволинейные системы координат	72
2. 1. 4. Геоцентрические сферические системы координат, определяющие положение точки на земной поверхности	74
2. 1. 5. Топоцентрические прямоугольные системы координат	75
2. 1. 6. Топоцентрическая сферическая система координат	76
2. 1. 7. Бариецентрические прямоугольные системы координат	76
2. 1. 8. Планетоцентрические прямоугольные системы координат	77
2. 1. 9. Селеноцентрические прямоугольные системы координат	79
2. 1. 10. Оскулирующая система координат	79
2. 2. Формулы перехода от одной системы координат к другой	79
2. 3. Время	91
Литература к гл. II	95
Глава III. Невозмущенное движение космического аппарата	96
3. 1. Уравнения движения	97
3. 2. Первые интегралы уравнений движения	97
3. 3. Траектории полета	98
3. 4. Связь между временем движения и элементами орбиты. Уравнение Кеплера	99
3. 5. Элементы орбит	100
3. 6. Предельные случаи невозмущенного кеплерового движения	101
3. 7. Определение параметров движения через элементы орбиты	102
3. 8. Сфера действия планеты	103
3. 9. Годограф скорости в кеплеровом движении	103
Литература к гл. III	105
Глава IV. Возмущенное движение космического аппарата	106
4. 1. Уравнения движения	107

	<i>Стр.</i>
4.2. Оценка влияния малых возмущений при движении по круговым и почти круговым орбитам	120
4.3. Влияние сопротивления воздуха на движение космических аппаратов . .	122
4.4. Возмущающее влияние планет, Солнца и давления солнечного света . .	126
4.5. Влияние аномалий силы тяжести	145
Л и т е р а т у р а к г л . I V	147
Глава V. Выбор межпланетных траекторий космических аппаратов	148
5.1. Методика расчетов и выбор траекторий на гелиоцентрическом участке полета	148
5.2. Определение параметров планетоцентрических участков траектории . .	153
5.3. Определение геоцентрических параметров, характеризующих движение космического аппарата	156
5.4. Порядок расчетов и анализ характерных параметров межпланетных траекторий	159
Глава VI. Динамика полета к Луне	174
6.1. Анализ условий полета к Луне	180
6.2. Определение энергетически оптимальных траекторий попадания в Луну .	195
6.3. Определение номинальных попадающих траекторий и влияния разброса начальных данных с учетом притяжения Луны	201
6.4. Решение задачи о точке встречи и расчет параметров движения объекта относительно поверхности Земли	213
6.5. Учет влияния второстепенных факторов	220
Л и т е р а т у р а к г л . V I	223
Глава VII. Траектории полета от Земли к Луне и возвращения от Луны к Земле	225
7.1. Оптимальные траектории полета от Земли к Луне	226
7.2. Траектории возвращения от Луны к Земле	234
Л и т е р а т у р а к г л . V I I	249
Глава VIII. Выбор параметров орбит и времени запуска искусственных спутников Земли	250
8.1. Выбор формы орбит	251
8.2. Выбор наклона орбит	252
8.3. Выбор высоты орбит (периода обращения ИСЗ)	253
8.4. Выбор времени запуска искусственных спутников Земли	268
Л и т е р а т у р а к г л . V I I I	279
Глава IX. Выведение космических аппаратов на орбиту	280
9.1. Силы и моменты, действующие на ракету-носитель	280
9.2. Уравнения движения ракеты-носителя	283
9.3. Выведение космических аппаратов на орбиты спутников	287
Л и т е р а т у р а к г л . I X	293
Глава X. Определение орбит космических аппаратов	295
10.1. Постановка задачи	296
10.2. Определение орбит ИСЗ	302
10.3. Определение орбит межпланетных космических аппаратов	318
Л и т е р а т у р а к г л . X	324
Глава XI. Оценка точности определения орбит космических аппаратов	325
11.1. Постановка задачи	325
11.2. Оценка точности определения орбит КА	326
Л и т е р а т у р а к г л . X I	330
Глава XII. Прогнозирование движения космических аппаратов	332
12.1. Прогнозирование движения ИСЗ методом численного интегрирования .	333
12.2. Аналитические методы прогнозирования движения ИСЗ	344
12.3. Прогнозирование движения межпланетных космических аппаратов . .	365
Л и т е р а т у р а к г л . X I I	374
Глава XIII. Движение космических аппаратов с двигателями малой тяги	376
13.1. Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности	377
13.2. Разгон КА в поле тяготения Земли	394
13.3. Анализ траекторий межпланетных полетов с двигателями постоянной мощности	397
Л и т е р а т у р а к г л . X I I I	409
Глава XIV. Коррекция траекторий космических аппаратов	411
14.1. Классификация различных способов коррекции	412
14.2. Выбор корректируемых параметров	413

14.3. Определение области рассеивания в пространстве корректируемых параметров	414
14.4. Изохронные производные	418
14.5. Трехпараметрическая коррекция	419
14.6. Двухпараметрическая коррекция	421
14.7. Однокомпонентная коррекция	422
14.8. Связанные коррекции (случай многократной оптимальной коррекции)	423
14.9. Коррекция с помощью гелиоцентрических импульсов скорости («солнечная» коррекция)	425
14.10. Свойства коррекции на конечном участке траектории	427
14.11. Ошибки исполнения коррекции	428
Литература к гл. XIV	430
Глава XV. Маневрирование космического аппарата	431
15.1. Оптимальное маневрирование с использованием двигательной установки большой тяги (импульсные маневры)	433
15.1.1. Оптимальные переходы между компланарными орбитами при ограничениях на расстояние от центра тяготения	433
15.1.2. Оптимальное корректирование траектории космического полета при наличии последующего маневра	449
15.1.3. Автономный метод определения направления вектора скорости путем ориентации на центр планеты и использование его для маневра торможения	456
15.2. Аэродинамический маневр	459
15.2.1. Поворот орбитальной плоскости	460
15.2.2. Боковой аэродинамический маневр при возвращении	466
15.2.3. Орбитальный аэродинамический маневр	467
Литература к гл. XV	468
Глава XVI. Сближение космических аппаратов на орбите	470
16.1. Монтажные орбиты	471
16.2. Относительное движение	476
16.3. Автономное сближение	482
16.4. Оценка энергетических затрат	489
Литература к гл. XVI	493
Глава XVII. Спуск космических аппаратов на поверхность Земли и планет	496
17.1. Основные понятия и определения	497
17.2. Уравнения движения спускаемого аппарата	500
17.3. Атмосферы основных планет земной группы	505
17.4. Внеатмосферный участок спуска	506
17.5. Атмосферный участок спуска	508
17.6. Управление при спуске аппаратов с орбиты ИСЗ и при возвращении от Луны	513
17.7. Движение межпланетных космических аппаратов в атмосфере Земли с гиперболическими скоростями	523
Литература к гл. XVII	537
Глава XVIII. Расчет теплообмена на поверхности спускаемого аппарата	539
18.1. Основные уравнения для расчета конвективного теплообмена при ламинарном и турбулентном режимах течения	540
18.2. Методы расчета пограничных слоев	542
18.3. Определение поправочных множителей	542
18.4. Определение величин X и A	546
18.5. Частные случаи и примеры расчетов	548
18.6. Влияние переменной температуры поверхности	556
18.7. Излучение	557
Литература к гл. XVIII	558
Глава XIX. Определение условий наблюдения за полетом космических аппаратов с наземных пунктов	560
19.1. Трассы полета	560
19.2. Зоны видимости	569
19.3. Временные диаграммы прохождения	593
Приложение	596
Предметный указатель	601

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
150	22 сверху	$t_{\text{ст}} = \frac{l_2 + l_1 + \omega_2 t_{\text{н}} + \pi(2n-1)}{ \omega_1 - \omega_2 }$	$t_{\text{ст}} = \frac{l_2 - l_1 + \omega_2 t_{\text{н}} + \pi(2n-1)}{ \omega_1 - \omega_2 }$
151	8 сверху	$= \frac{x_j \cos \Omega + y_j \sin \Omega}{r_j \cos i}$	$= \frac{x_j \cos \Omega + y_j \sin \Omega}{r_j}$
156	10 снизу	где $R_{\text{н.п}}$	где $\bar{R}_{\text{н.п}}$
191	Формула (6.26)	$\lambda_c =$	$\Delta \lambda_c =$
236	13 снизу	$< V_{\text{н}}(r_{\text{Л}} + \rho_*)$	и $V_2 < V_{\text{н}}(r_{\text{Л}} + \rho_*)$
255	18 сверху	$T + \frac{(2\pi)^{7/3} \varepsilon \cos i}{\mu^{5/3} \omega_3 (1 - e^2)}$	$T + \frac{(2\pi)^{7/3} \varepsilon \cos i}{\mu^{5/3} \omega_3 (1 - e^2)^2}$
298	2 сверху	$\frac{\partial v}{\partial Q_m}$	$\frac{\partial v}{\partial Q_l}$
304	2 сверху	$\left(1 - 2R_3 \alpha \frac{z^2}{r^2}\right)$	$\left(1 - 2R_3 \alpha \frac{z^2}{r^3}\right)$
305	11 сверху	$\frac{2r - 3V_r \tau}{r_0^2} \cdot \frac{1}{r_0}$	$\frac{2r - 3V_r \tau}{r_0^2} - \frac{1}{r_0}$
311	6 снизу	$\left[\frac{\mu(2r_v^2 - \zeta_v^2)}{r_1^5} - \right.$	$\left[\frac{\mu(2r_v^2 - \zeta_v^2)}{r_{1v}^5} - \right.$
312	3 снизу	$(m, n = 1, \dots, 6)$	$(m, n = 1, 2, 4, 5, 6)$
351	15 снизу	$+ (320 - 3360\mu^2 + 7260\tilde{\mu}^3 - 4290\tilde{\mu}^3)$	$+ (320 - 3360\tilde{\mu} + 7260\tilde{\mu}^2 - 4290\tilde{\mu}^3)$
357	4 сверху	$H_i = \frac{3\pi \sin 2i}{4\bar{p}^4}$	$H_i = \frac{3\pi \sin 2i}{4\bar{p}^3}$
364	21 сверху	$- e^2(-5s^2)]\}$	$- e^2(1 - 5s^2)]\}$
418	6 сверху	матрицы $D_{\xi}, D_{\xi\tau}, D_{\eta}$	матрицы $D_{\xi}, K_{\xi\tau}, D_{\eta}$
445	11 сверху	$(\Delta V_{3t} - \Delta V_{3r})$	$(\Delta V_{3t}, -\Delta V_{3r})$
446	2 снизу	$\{\vec{V}: r_a = r_{\text{max}}\}$	$\{\vec{V}: r_a = r_{\text{max}}\}$
446	1 снизу	$(\Delta V_{3t}; -\Delta V_{rt})$	$(\Delta V_{3t}, -\Delta V_{3r})$
473	9 снизу	$c_X = \sin i;$	$c_Z = -\cos i$
473	7 снизу	$c_Z =$	$c_X =$
489	9 снизу	$\Delta \bar{V}_1 = \ A_{\tau} - E\ \left\ \frac{\bar{p}_0}{\bar{V}_0} \right\ $	$\Delta \bar{V} = \ A_{\tau} - E\ \left\ \frac{\bar{p}_0}{\bar{v}_0} \right\ $
489	7 снизу	$\left\ \frac{\bar{0}}{\Delta \bar{V}_2} \right\ = -M_{\tau} \left\ \begin{matrix} 10 & 10 \\ A_{\tau} & 10 \end{matrix} \right\ \left\ \frac{\bar{p}_0}{\bar{v}_0} \right\ $	$\Delta V_2 = \ c + dA_{\tau} \begin{matrix} 10 \\ 10 \end{matrix}\ \left\ \frac{\bar{p}_0}{\bar{v}_0} \right\ $
490	10 снизу	$+ \sum_{i \neq j} k_{xi, xj} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_i},$	$+ 2 \sum_{i \neq j} k_{xi, xj} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f_n}{\partial x_i},$
501	15 сверху	$+ \frac{\sigma_x g_0}{2}$	$- \frac{\sigma_x g_0}{2}$
501	Формула (17.7)	$\bar{W} = F\bar{m} = \bar{R}_a + \bar{T} + \bar{G} + \bar{F}_{\text{н.в.}} + \bar{F}_K + \Delta \bar{F}_d + \Delta \bar{F}_{\text{сф}} + \bar{F}_{\Sigma}.$	$m\bar{W} = \bar{F} = \bar{R}_a + \bar{T} + \bar{G} + \bar{F}_{\text{н.в.}} + \bar{F}_K + \Delta \bar{F}_g + \Delta \bar{F}_{\text{сф}} + \bar{F}_{\Sigma}.$
511	Рис. 17.10	Зависимость перегрузки n_x от времени t при спуске с орбиты ИСЗ	Зависимость перегрузки n_x от времени t для траекторий спуска при возвращении от Луны
543	Формула (18.12)	$\frac{1}{4} \left(1 + \omega - \frac{J\omega}{J_1}\right)^2$	$\frac{1}{4\omega} \left(1 + \omega - \frac{J\omega}{J_1}\right)^2$
593	18 снизу	$\lambda = \frac{a}{V_{\mu}}$	$\lambda = \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}$

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
28	Табл. 1.8	$+ 5 \lg r \cdot \Delta +$	$+ 5 \lg (r \cdot \Delta) +$
29	22 снизу	$58^{\circ}, 4 \pm 0,4$	$58^{\text{d}}, 4 \pm 0,4$
53	Подпись рис. 1. 25	10^{-26}	10^{-25}
97	16 снизу	$\dot{u} -$	$u -$
97	12 снизу	$+ r^2 \dot{\lambda} \sin \varphi \cos \varphi$	$+ r^2 \dot{\lambda}^2 \sin \varphi \cos \varphi$
97	11 снизу	$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\lambda}^2 \cos^2 \varphi) = 0$	$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\lambda} \cos^2 \varphi) = 0$
98	20 сверху	$- r \dot{r} X = f_1;$	$- r \dot{r} \dot{X} = f_1;$
98	21 сверху	$- r \dot{r} Y = f_2;$	$- r \dot{r} \dot{Y} = f_2;$
98	22 сверху	$- r \dot{r} Z = f_3,$	$- r \dot{r} \dot{Z} = f_3,$
99	Формула (3.9)	$+ 2 \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \cos \vartheta$	$+ 2 \frac{\mu}{p} e \cos \vartheta$
99	16 сверху	$V_1^2 - 2 \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \cos \vartheta_1 =$ $= V_2^2 - 2 \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \cos \vartheta_2$	$V_1^2 - 2 \frac{\mu}{p} e \cos \vartheta_1 =$ $= V_2^2 = 2 \frac{\mu}{p} e \cos \vartheta_2$
101	Формула (3.26)	$M_0 = k (t_0 - \tau);$	$M_0 = n (t_0 - \tau);$
102	8 сверху	$+ \frac{1}{3} \operatorname{tg} \frac{3\vartheta}{2} =$	$+ \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{\vartheta}{2} =$
102	16 сверху	$\frac{\sqrt{\mu}}{3 \sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{3 \sqrt{\mu}}$
102	18 сверху	$\pm (t - t_0) = \left[\frac{2 \sqrt{r}}{h} - \frac{2 \sqrt{2\mu}}{h \sqrt{h}} \times \right.$ $\left. \times \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{hr}{2\mu}} \right]_{r_0}^r$	$\pm (t - t_0) = \sqrt{\frac{-a^3}{\mu}} \times$ $\times \left[\ln \frac{\sqrt{-2a+r} - \sqrt{r}}{\sqrt{-2a+r} + \sqrt{r}} + \frac{\sqrt{r(-2a+r)}}{-a} \right]_{r_0}^r$
102	20 сверху	$\pm (t - t_0) = \left[\frac{2 \sqrt{r}}{h} - \frac{2 \sqrt{2\mu}}{h \sqrt{-h}} \times \right.$ $\left. \times \ln \frac{2\mu - hr + 2 \sqrt{-2\mu h}}{\sqrt{2\mu + hr}} \right]_{r_0}^r$	$\pm (t - t_0) = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} \left[2 \operatorname{arctg} \right.$ $\left. \times \sqrt{\frac{r}{2a-r} - \frac{\sqrt{r(2a-r)}}{a}} \right]$
107	11 снизу	$X =$	$\ddot{X} =$
112	14 сверху	$+ \frac{25}{28} k$	$+ \frac{25}{48} k$
113	13 снизу	$0,5c$	$0,05c$
124	4 сверху	$A = \exp (a_0)$	$A = \exp (\bar{a}_0)$
125	12 снизу	$\frac{dp}{dn} = - \frac{\sqrt{\pi b A}}{2 \sqrt{\gamma}}$	$\frac{dp}{dn} = - \frac{\sqrt{\pi b A}}{\sqrt{\gamma}}$
125	11 снизу	$\frac{de}{dn} = - \frac{\sqrt{\pi b A}}{2 \sqrt{\gamma}}$	$\frac{de}{dn} = - \frac{\sqrt{\pi b A}}{\sqrt{\gamma}}$
138	9 снизу	$- \frac{e}{4} \cos 2E \left(\frac{1}{36} - \frac{e^2}{18} \right)$	$- \frac{e}{4} \cos 2E + \left(\frac{1}{36} - \frac{e^2}{18} \right)$
149	15 снизу	$V_y = V_r (\cos u \cos \Omega +$	$V_y = V_r (\cos u \sin \Omega +$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОЛЕТА КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Редактор *Г. Ф. Лосева*

Художник *Е. Г. Байтман*

Техн. редактор *В. И. Орешкина*

Корректор *Е. П. Карнаух*

Т-01878	Сдано в набор 9/IX 1971 г.	Подписано в печать 14/III 1972 г.
Формат 70×108 ¹ / ₁₆	Печ. л. 38,87	(Усл. печ. л. 54,42) Уч.-изд. л. 59,95
Бум. л. 19,43	Бумага № 1	Тираж 3500 экз. Зак. 2739
Цена 6 р. 40 к.		Тем. план 1971 г. № 106

Издательство «Машиностроение», Москва, Б-66, 1-й Басманный пер., 3.
Московская типография № 8 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Хохловский пер., 7. Тип. зак. 3669