

Л. В. Овсянников

ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Допущено Министерством высшего
и среднего специального образования РФ
в качестве учебного пособия для студентов
механико-математических
специальностей университетов

Издание второе, дополненное



Москва ♦ Ижевск

2003

УДК 533.8 (075)

О-345

ББК 22.253.8

О 34

Интернет-магазин

MATHESIS

<http://shop.rcd.ru>

- физика
- математика
- биология
- техника



Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту №03-01-14103.

Овсянников Л. В.

Лекции по основам газовой динамики. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 336 стр.

Книга предназначена для ознакомления с математическими основами теоретической газовой динамики. Излагаются принципы построения разнообразных газодинамических моделей — от интегральных законов сохранения до конкретных формул, описывающих то или иное движение газа. Даются теоретико-групповые основы вывода дифференциальных уравнений, описывающих классы частных решений. Методами качественного анализа разбирается решение многих конкретных задач. Для облегчения восприятия материала текст снабжен графическими иллюстрациями.

Книга предназначена для студентов математиков и механиков, аспирантов и преподавателей, научных работников в области механики сплошных сред.

ISBN 5-93972-201-6

© Л. В. Овсянников, 2003

© Институт компьютерных исследований, 2003

<http://rcd.ru>

Оглавление

Предисловие ко второму изданию	7
Предисловие к первому изданию	9
Основные обозначения	13
ГЛАВА I. Математическая модель газовой динамики	14
§ 1. Интегральные законы сохранения	16
Основные величины (16). Движущийся объем (17). Законы сохранения массы, импульса и энергии (17). Балансовые уравнения (19).	
§ 2. Термодинамические свойства	21
Первый закон термодинамики (21). Идеальный газ (21). Политропный газ (22). Нормальный газ (23). Свойства адиабат (26). Термодинамические функции (27).	
§ 3. Дифференциальные уравнения	28
Дифференцирование интеграла по движущемуся объему (29). Вывод основных дифференциальных уравнений (30). Симметрическая форма (33). Форма Громски – Лэмба (34).	
§ 4. Уравнения сильного разрыва	35
Обобщенные движения (35). Движение с сильным разрывом (36). Вывод соотношений на сильном разрыве (37). Классификация разрывов (39). Ударные волны (39). Адиабата Гюгонно (41).	
§ 5. Основные свойства ударных волн	41
Форма адиабаты Гюгонно (42). Поведение вблизи центра (43). Возрастание энтропии (44). Теорема Цемилена (47). Свойство определенности (48).	
§ 6. Характеристики и слабые разрывы	51
Нормальные характеристические векторы; гиперболичность (51). Условия на характеристиках (54). Задача Коши (55). Слабый разрыв (55). Характеристики уравнений газовой динамики (57). Классификация характеристик (59). Бихарактеристики (60). Характеристический конус (61). Характеристическая форма уравнений газовой динамики (62).	
§ 7. Красные задачи	63
Задача Коши (63). Теорема об оценке решения (65). Единственность решения задачи Коши (68). Обобщения задачи Коши (69). Задача о поршне (70). Задача обтекания (71). Задача со свободными границами (71). Задача Гурса (72). Задачи с особенностями (73).	

§ 8. Групповое свойство	73
Группа Галилея (74). Преобразования растяжения (76). Максимально широкая группа (78). Действие на множестве решений (78). Подгруппы и инварианты (79). Инвариантно-групповые решения (80).	
Задачи и упражнения к главе I	80
ГЛАВА II. Специальные модели движения газа	83
§ 9. Термодинамические модели	84
Изэнтропическое движение (84). Изотермическое движение (86). Изобарическое движение (87). Изохорическое движение (88).	
§ 10. Установившиеся движения	89
Исходные уравнения (90). Линии тока (91). Интеграл Бернулли (91). Максимальная и критическая скорости (93). До- и сверхзвуковые течения (93). Характеристики (94). Трубки тока (96). Ударные волны (98). Преобразование Мунка - Прима (100).	
§ 11. Безвихревые движения	100
Условия безвихревого движения (101). Интеграл Коши - Лагранжа (102). Уравнение для потенциала скоростей (103). Модель установившегося течения (106). Течение типа источника (107).	
§ 12. Классы инвариантных решений	108
Инвариантные решения (109). Подмодели ранга три (110). Подмодели ранга два (112). Подмодели ранга один (114). Подмодели ранга нуль (115).	
§ 13. Простые волны	116
Частично инвариантные решения (116). Кратные волны (117). Отыскание простых волн (117). Основные свойства простых волн (118). Автомодельные кратные волны (121).	
§ 14. Приближенные модели	122
Линеаризация (123). Околозвуковое приближение (125). Гиперзвуковое приближение (126). Теория мелкой воды (128).	
Задачи и упражнения к главе II	130
ГЛАВА III. Одномерные неустановившиеся движения	132
§ 15. Плоские, цилиндрические и сферические волны	133
Основные уравнения и их характеристики (133). Лемма о плотности (135). Теорема единственности (135). Времени и пространству подобные направления (137). Слабые разрывы (138). Транспортные уравнения (139). Задача о распаде слабого разрыва (141). Уравнения в лагранжевых координатах (142). Класс точных решений (144).	
§ 16. Изэнтропические движения с плоскими волнами	146
Исходные уравнения (146). Инварианты Римана (147). Простые волны (149). Теорема о примыкании (151). Центрированные простые волны (152). Задача об истечении газа в вакуум (154). Волны сжатия и	

разрежения (155). Градиентная катастрофа (157). Плоскость инвариантов Римана (160). Взаимодействие центрированных волн (163). Метод Римана (165).

- § 17. Распад произвольного разрыва 166
Постановка задачи (167). Направление обращения волн (168). Метод (u, p) -диаграмм (168). Существование и единственность автомодельного решения (172). Акустическое приближение (177).
- § 18. Семь задач 177
Работа ударной трубы (177). Задача о поршне (179). Отражение ударной волны от жесткой стенки (181). Преломление ударной волны (183). Взаимодействие ударных волн (184). Взаимодействие ударной и простой волн (187). Акустическое приближение (188). Задача о безударном сжатии (189).
- § 19. Асимптотическое поведение ударных волн 191
Амплитуда слабых ударных волн (191). Постоянство энтропии и инварианта Римана (193). Асимптотические формулы (196).
- § 20. Автомодельные движения 197
Уравнения автомодельных движений (197). Линии уровня (199). Интегральные законы сохранения (200). Свойства примыкания (202). Соотношения на ударной волне (203). Случай сильной ударной волны (204).
- § 21. Задачи о поршне и о сильном взрыве 205
Постановка задачи о поршне (205). Структура плоскости (U, Z) (207). Давление на поршень (208). Постановка задачи о сильном взрыве (209). Интеграл Селова (210). Анализ решения (211). Расчет движения фронта (213).
- Задачи и упражнения к главе III 214

ГЛАВА IV. Двумерные установившиеся течения 217

- § 22. Уравнения безвихревого течения 218
Плоскопараллельные и осесимметричные течения (218). Линии тока (219). Функция тока (220). Изэнтропичность безвихревых течений (222). Основные уравнения (225). Потенциал скоростей (226). Метод голографа (227). Простые волны осесимметричных течений (228). Уравнения на плоскости голографа (229). Уравнения С. А. Чаплыгина (231). Групповое свойство (234). Течение Прандтля-Мейера (235). Обтекание выпуклого угла (237). Течения Буземаина (238).
- § 23. Дозвуковые течения 241
Задачи о струях (242). Истечение симметричной струи (244). Струйное обтекание клина (248). Свободные струи (250). Задачи обтекания (252). Циркуляция (253). Аналог теоремы Жуковского (254). Некоторые качественные результаты (257).
- § 24. Характеристики и простые волны 258
Исходные уравнения (258). Характеристики (259). Транспортные уравнения (262). Качественные свойства (264). Простые волны (266). Волны

сжатия и разрежения (269). Плоскость инвариантов Римана (272). Задача об истечении струн (273).	
§ 25. Косые скачки уплотнения	275
Ударная поляра (276). Аналитическое представление (277). Обтекание вогнутого угла (280). Отражение косога скачка от стенки (282). Осесимметричное обтекание конуса (285).	
§ 26. Окологзвукковые течения	287
Звуковая линия (287). Теорема А. А. Никольского и Г. И. Таганова (288). Примыкание простой волны (289). Местная сверхзвуковая зона (290). Окрестность центра течения (291). Трехлиственность годографа (295). Замечание о моделировании (297). Прямая звуковая линия (298). Сошло Лаваля (302). Истечение сверхзвуковой струи (304).	
§ 27. Гиперзвуковые течения	306
Формулы скачка в политропном газе (307). Параметры гиперзвукового подобия (308). Классификация моделей (309). Обтекание заостренного тела (309). Влияние заглушения (313). Приближение Ньютона (314).	
Задачи и упражнения к главе IV	315
Приложение	318
Группы и алгебры Ли (318). Алгебры Ли, допускаемые УГД (320). Инварианты (321). Подобие подалгебр (322). Оптимальные системы подалгебр (323). Нормализованная ΘL^{11} (324).	
Литература	334

Предисловие ко второму изданию

Необходимость в переиздании этого учебника возникла по ряду причин. За 20 лет его использования в преподавании основ газовой динамики в университетах он стал библиографической редкостью даже в библиотеках. У специалистов в этой области знания возникли замечания о его недостатках, связанных с некоторыми неточностями в формулировках, пояснениях, формулах и выкладках. Наконец, за это время в научном сообществе существенно вырос объем понимания разнообразных нелинейных газодинамических процессов благодаря систематическому учету влияния свойства симметрии уравнений газовой динамики (УГД) на построение точных решений этих уравнений.

Последние 10–15 лет коллективно разрабатывалась научно-исследовательская программа «Подмодели газовой динамики» по использованию симметрии (группового свойства) УГД [13]. Главной целью этой программы является исчерпывающее описание классов точных решений УГД в виде инвариантных и частично инвариантных *подмоделей*. Для этого были разработаны аналитические алгоритмы отыскания наиболее широкой допускаемой УГД локальной группы Ли G преобразований базового пространства, групповой классификации УГД по входящим в них произвольным функциям и параметрам, построения нормализованных оптимальных систем ΘG подгрупп конечномерной группы Ли G , использования аппарата алгебр Ли операторов. В частности, с уравнением состояния газа общего вида УГД допускает 11-мерную группу G^{11} , для политропного газа — группу G^{13} , а в случае показателя адиабаты $\gamma = 5/3$ — группу G^{14} . Вычисленные для них нормализованные оптимальные системы подгрупп состоят из 223 представителей в ΘG^{11} , 1342 в ΘG^{13} и 1826 в ΘG^{14} . Каждая подгруппа H допускаемой группы порождает класс H -решений, описываемый упрощенной системой дифференциальных уравнений — факторсистемой УГД по группе H . Для возникающих массивов H -решений введен ряд классификационных признаков, позволяющих описать подмножества H -решений в более компактной форме. Найлены существенно новые, подчас обладающие неожиданными свойствами, H -решения, ранее не упоминавшиеся в классической литературе. Несомненна необходимость хотя бы беглого ознакомления с этими достижениями всех, кому пужны и полезны сведения о симметрии УГД и ее использовании — читателям, слушателям курса лекций,

преподавателям и студентам, практикам-вычислителям, научным работникам. В первом издании сведения о симметрии УГД и ее использовании содержались в § 8, 12 и в Приложении, но сообщались там лишь выборочно.

В предлагаемом издании подвергнуты переработке разделы, относящиеся к понятию гиперболичности возникающих систем дифференциальных уравнений, интегральным законам сохранения для автомодельных движений, описанию примеров осесимметричных и околосвуковых течений газа. В § 18 добавлена задача о безударном сжатии. Заново написаны § 8, где дано общее представление о свойстве симметрии УГД и принцип его использования для построения классов точных решений (подмоделей) и § 12, где приведен полный список всех инвариантных подмоделей с тремя независимыми переменными (ранга 3), получившими свои названия, а также примеры подмоделей рангов 2, 1, 0.

Полностью изменено добавленное к основному тексту Приложение, которое теперь содержит краткое описание понятий и алгоритмов, связанных с использованием алгебр Ли дифференциальных операторов. Здесь также приведена нормализованная оптимальная система подалгебр (223 представителя) всех размерностей 11-мерной алгебры Ли, допускаемой УГД в случае уравнения состояния газа общего вида.

Немного расширен список рекомендуемой литературы. Ввиду временного отсутствия единой монографии по симметрии УГД и ее использованию даны ссылки на несколько основополагающих журнальных статей.

Автор благодарит д.ф.-м.н. В. М. Тешукова, д.ф.-м.н. А. П. Чупахина и к.ф.-м.н. С. В. Головина за содействие и ценные замечания, послужившие улучшению текста, а также инж. Э. З. Боровскую за помощь при подготовке рукописи к печати.

22 октября 2002 г.

Предисловие к первому изданию

Современная газовая динамика представляет собой обширную физико-математическую дисциплину, занимающую прочное место в фундаменте системы знаний о поведении сплошных легкоподвижных сред. Ее объектами являются не только непосредственно наблюдаемые газообразные и жидкие тела, но и твердые при обычных условиях материалы, если они находятся под воздействием больших температур и давлений. Собственно газовая динамика выделяет и изучает свойство сжимаемости среды. Вместе с тем в реальных условиях проявление сжимаемости сопровождается другими, во многих случаях не менее важными эффектами, такими как вязкость, теплопроводность, способность к химическим реакциям и т. д. Однако если изменение состояния среды происходит достаточно быстро, за времена много меньшие характерных времен протекания диссипативных процессов, то свойство сжимаемости оказывается определяющим и может быть выделено и изучено независимо. Поэтому газовую динамику следует рассматривать как науку, изучающую быстротекущие процессы в сжимаемых средах.

Область практических приложений результатов и выводов газовой динамики весьма широка. Она охватывает процессы и явления, происходящие при движении в газе (воздухе) летательных аппаратов, снарядов и ракет, при истечении газовых струй, при протекании газа через газовые турбины и компрессоры, при взрыве и детонации взрывчатых веществ, при распространении ударных волн и их воздействии на препятствия, при формировании кумулятивных струй, при волновых движениях на поверхности водоемов, при формировании погоды в атмосфере Земли и т. д.

Как и во всякой физико-математической дисциплине, в газовой динамике выделяются экспериментальное и теоретическое направления. Опираясь на результаты экспериментов по прямому наблюдению и регистрации параметров газодинамических процессов, теоретическая газовая динамика имеет своей основной целью предсказание хода явления путем анализа его математической модели и применения подходящего расчетного метода. Необходимость в охвате широкого круга газодинамических явлений привела к тому, что теоретическая газовая динамика образовала самостоятельную научную область со своей разветвленной системой понятий, с оригинальными методами исследования и конструкциями решений классов конкретных задач. Богатство теоретической газовой динамики заключено в большом

количестве различных математических моделей и подмоделей, в разнообразии применяемых математических методов, в многочисленных до конца решенных задачах, в ценности ее выводов для практических приложений.

Исторически становление теоретической газовой динамики послужило не только пониманию и описанию общей структуры происходящих в сжимаемых средах физических процессов. Газовая динамика оказала также заметное влияние на развитие математики, главным образом ее части, связанной с теорией дифференциальных уравнений. Она вдохнула жизнь в целые математические направления — теорию разрывных решений дифференциальных уравнений, теорию уравнений смешанного типа, теорию квазиконформных отображений. Она стимулировала развитие теории сингулярных интегральных уравнений, группового анализа дифференциальных уравнений, функционально-аналитических и топологических методов исследования краевых задач. Она обогатила математику рядом важных понятий, таких как вырождение типа дифференциальных уравнений, сильный и слабый разрывы в решениях, градиентная катастрофа, сильная и слабая нелинейности, инвариантное и частично инвариантное решения, автомодельное решение и т. п.

Основоположниками теоретической газовой динамики следует считать немецкого математика Б. Римана (1826–1866), впервые давшего теорию явления образования и распространения сильного разрыва в решениях дифференциальных уравнений газовой динамики, и замечательного русского ученого-механика С. А. Чаплыгина (1869–1942), разработавшего носящий ныне его имя метод исследования установившихся течений газа. Важные экспериментальные данные по эффектам сжимаемости при течении газа, послужившие основой для последующих теоретических обобщений, были получены еще в XIX веке многими исследователями, в частности, французскими учеными-инженерами Сен-Венаном, Гюгоньо и Жу-ге, русским ученым-артиллеристом Н. В. Маиевским, австрийским физиком Э. Махом. Развитие теоретической газовой динамики в текущем столетии связано с целым рядом имен выдающихся ученых, математиков и механиков, таких как Л. Прандтль, Т. Карман, А. Буземан, Г. Гудерлей, К. Фридрихс, М. А. Лаврентьев, Л. И. Седов, С. А. Христианович, М. В. Келдыш, А. А. Дородницын, Ф. И. Франкль и многих других, внесших признанный вклад в методологию исследования и конструктивные подходы к решению актуальных газодинамических задач.

Принципиальной особенностью газодинамических процессов, создающей значительные трудности для теоретического исследования, является их нелинейность, проявляющаяся в весьма разнообразных и иногда неожиданных формах. Отсюда и идет многообразие методов анализа и конкретных закономерностей, которые не укладываются в какую-либо одну стандартную схему. В теоретической газовой динамике особенно остро стоят проблемы адекватности модели явлению. Для большинства практически важных газо-

динамических задач до сих пор нет теорем существования, единственности и устойчивости решения. Поэтому и численные методы, получившие теперь с развитием быстродействующих ЭВМ новые возможности их применения, во многих конкретных случаях оказываются не обеспеченными надлежащим обоснованием и часто связаны с затратой больших усилий и средств при их разработке и реализации.

Все это вместе -- многообразие явлений, фактов и методов, и трудности анализа -- привело к тому, что в газовой динамике сложился целый ряд самостоятельных направлений со своими школами, литературой и преемственностью. Несомненно, что это обстоятельство накладывает определенный отпечаток и на преподавание газовой динамики в различных университетах. Здесь явно ощущается отсутствие достаточно простого и вместе с тем единого учебного пособия, опираясь на которое можно было бы развивать и надстраивать дальнейшие этажи стройного здания газовой динамики.

В настоящих лекциях делается попытка восполнения этого пробела. Лекции посвящены систематическому изложению основных математических моделей, конструкций и методов исследования, служащих для теоретического анализа газодинамических явлений. Как учебное пособие, они составляют содержание обязательного или специального годового курса лекций, который вместе с упражнениями должен быть изложен за 60–70 учебных часов. Это жесткое требование наложило отпечаток и на отбор материала, и на способ изложения.

В первую очередь, это выразилось в том, что предпочтение было отдано точным математическим результатам, которые возможно получить в рамках строго сформулированной математической модели газовой динамики. Приближенные методы, как правило, лишь намечены, и потому для обоснования получаемых выводов экспериментальный материал не привлекался. При прочих равных условиях, за основу взята дедуктивная манера изложения, позволяющая не только избежать многих повторов, но и выдвинуть на первое место предмет исследования при смещении его методов на второй план. Отбор фактически излагаемого материала опирался на принцип фундаментальной универсальности, согласно которому от каждого рассматриваемого факта требуется, чтобы он содержал новый элемент знания с достаточно широкой областью применения.

О предметном содержании настоящих лекций можно судить по оглавлению книги. Почти весь преподаваемый материал можно найти в ряде известных учебников и монографий, приведенных в списке литературы. Нетрадиционными являются, пожалуй, лишь фрагменты, касающиеся теоретико-группового подхода к точному моделированию и построению классов частных решений. В связи с этим уместно заметить, что в настоящее время совершенно ясна необходимость включения элементов группового анализа в преподавание прикладных дисциплин. Польза этого заключается

не столько в возможности продемонстрировать теоретико-групповой метод исследования на конкретном материале (хотя и это довольно важно), сколько в выработке у изучающего острого ощущения ценности свойства инвариантности рассматриваемых объектов при предельно возможной рационализации их изучения. При этом существенно подчеркнуть, что всякое упрощающее моделирование бывает полезно именно в силу того, что оно придает объекту дополнительную инвариантность и тем самым позволяет исследовать его более простыми средствами. Что же касается основной массы фрагментов, то данный в лекциях их перечень, конечно, не исчерпывает всего богатства фактов газовой динамики. Очевидно, однако, что удовлетворить все претензии по этому поводу в указанных выше рамках лекционного курса невозможно; тем не менее автор выражает готовность прислушаться к любым рекомендациям этого рода.

При использовании настоящих лекций как основы для фактического чтения лекционного курса можно ориентироваться на то, что материал каждого параграфа приблизительно соответствует содержанию одной-двух лекций. Отклонения возможны как за счет более детального и, значит, более длительного изложения отдельных вопросов, так и за счет сокращения некоторых элементов, которые могут быть уже известны аудитории. Этой схеме автор следовал как лектор в течение ряда лет в Новосибирском университете, где обязательный для специальности «прикладная математика» годовой курс газовой динамики предваряется небольшим (полугодовым) общим введением в механику сплошных сред. Конечно, подобная пропедевтика не обязательна, так как настоящие лекции содержат все необходимое для независимого изучения основ теоретической газовой динамики.

От изучающего газовую динамику в рамках настоящих лекций требуется определенная общая математическая культура и навыки в математическом анализе, развиваемые на первых двух курсах механико-математических и физических факультетов. Все специфические для газовой динамики понятия, термины и обозначения разъяснены непосредственно в тексте. Небольшое количество упражнений и задач, приведенных в конце глав, имеет целью проверку усвоения материала и возможностей самостоятельного решения изучающим частных вопросов, органически примыкающих к основному тексту.

При подготовке настоящих лекций к изданию существенную помощь автору оказали сотрудники кафедры гидродинамики НГУ В. М. Тешуков и В. М. Меньшиков, читающие курс лекций по газовой динамике в течение нескольких последних лет. Они внимательно просмотрели весь текст и приняли конструктивное участие в отшлифовке отдельных мест, а также в отборе упражнений и задач. Значительную работу по оформлению рукописи выполнил Э. З. Боровская. Всем упомянутым товарищам автор выражает свою искреннюю благодарность.

Основные обозначения

t	время
$\mathbf{x}$	— радиус-вектор
x, y, z	— координаты вектора $\mathbf{x}$
$\mathbf{u}$	— вектор скорости
u, v, w	— координаты вектора $\mathbf{u}$
$q = \mathbf{u} $	— модуль скорости
p	— давление
ρ	— плотность
$V = 1/\rho$	— удельный объем
S	— энтропия
ε	— удельная внутренняя энергия
i	— удельная энтальпия
c	— скорость звука
M	— число Маха
∇F	— градиент функции F
$\operatorname{div} \mathbf{a}$	— дивергенция вектора $\mathbf{a}$
$\det A$	— определитель матрицы A

Векторы выделяются полужирным шрифтом. Символ $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ обозначает скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Символ R^n для любого $n = 1, 2, 3, \dots$ обозначает n -мерное евклидово аффинное векторное пространство. Символ $R^n(\mathbf{a})$ обозначает пространство R^n с общим вектором $\mathbf{a}$. Координатное представление вектора $\mathbf{a}$ в ортогональном базисе записывается равенством $\mathbf{a} = (a^1, \dots, a^n)$; в этом случае вместо $R^n(\mathbf{a})$ пишется также $R^n(a^1, \dots, a^n)$. Концы доказательств обозначаются знаком. ■

Внутри каждого параграфа используется независимая нумерация формул, определений, теорем, рисунков и т. д. При ссылках на формулы, определения и т. д. из другого параграфа впереди номера формулы добавляется номер этого параграфа. Например, ссылки «теорема 4.5», «уравнение (11.14)» или «рис. 17.10» отсылают к теореме 5 из § 4, уравнению (14) из § 11 или рис. 10 из § 17. Ссылки на литературу даются в квадратных скобках.

Математическая модель газовой динамики

Согласно общим физическим представлениям всякий ограниченный объем газа ω состоит из конечного числа движущихся молекул μ_i ($i = 1, 2, \dots, N$). Каждая молекула μ_i имеет массу m_i , вектор скорости $\mathbf{u}_i$, импульс (количество движения) $m_i \mathbf{u}_i$, кинетическую энергию $(1/2)m_i |\mathbf{u}_i|^2$ и внутреннюю энергию ε_i . При неизменности массы каждой молекулы ее импульс и энергия изменяются в результате столкновений (соударений) с другими молекулами, что придает движению молекул в ансамбле ω свойство некоторой хаотичности.

Основной задачей газовой динамики является изучение движения газа как целого и его взаимодействия с другими физическими телами.

«Лобовой» способ математического описания этого движения и взаимодействия, состоящий в использовании дифференциальных уравнений движения всех молекул, неприемлем не только из-за очень большого их числа (в 1 см^3 воздуха при нормальных условиях содержится $2,7 \cdot 10^{19}$ молекул), но также ввиду невозможности указать точные начальные данные. Поэтому в газовой динамике используется *осредненное описание* движения и взаимодействия. При таком подходе наиболее изученными являются две математические модели - *газокинетическая* и *феноменологическая*.

В кинетической теории газов используется модель, основанная на статистическом (вероятностном) описании поведения совокупности молекул. Основную роль в этой модели играет уравнение Больцмана для функции распределения молекул по их положениям в пространстве и по скоростям. Газокинетическая модель существенна и успешно применяется для описания поведения сильно разреженных газов.

В механике сплошных сред используется феноменологическая модель, связанная с представлением о средних величинах, непрерывно распределенных по занимаемому газом объему, а законы изменения средних величин устанавливаются на основе дополнительных предположений, согласующихся с общими физическими законами. Эта модель всесторонне апробирована практикой и приемлема для описания поведения достаточно плотных газов. Она и принимается за основу в настоящих лекциях.

Процедура формирования средних величин такова. Основными физико-математическими характеристиками совокупности молекул в объеме ω являются масса газа

$$m = \sum_{i=1}^N m_i,$$

импульс (количество движения)

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{u}_i$$

и полная энергия

$$E = \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i |\mathbf{u}_i|^2 + \varepsilon_i \right).$$

Пусть $|\omega|$ есть величина объема ω . Тогда с помощью указанных величин определяются средняя плотность $\rho_{\text{ср}} = m/|\omega|$, средняя скорость $\mathbf{u}_{\text{ср}} = \mathbf{K}/m$ и средняя внутренняя энергия

$$\varepsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{|\omega|} \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{2} m_i |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{\text{ср}}|^2 + \varepsilon_i \right).$$

Отсюда масса, импульс и полная энергия газа в объеме ω выражаются через средние величины по формулам

$$\begin{aligned} m &= |\omega| \rho_{\text{ср}}, & \mathbf{K} &= |\omega| \rho_{\text{ср}} \mathbf{u}_{\text{ср}}, \\ E &= |\omega| \left(\frac{1}{2} \rho_{\text{ср}} |\mathbf{u}|^2 + \varepsilon_{\text{ср}} \right). \end{aligned} \quad (*)$$

Феноменологическая теория отождествляет любой достаточно малый (но все еще содержащий достаточно большое число молекул) физический объем газа ω с «материальной точкой», постулируя, что при стягивании к точке объема ω введенные средние величины имеют конечный предел и тем самым порождают сплошные распределения плотности, вектора скорости и внутренней энергии. Получаемые распределения и являются предметом изучения в математической модели газа как сплошной среды. Эта модель основана на том, что в пределе формулы (*) для любого конечного объема ω дают выражения основных физико-математических характеристик в виде интегралов по объему ω от указанных средних величин.

Целью первой главы является установление и общий предварительный анализ основных законов, управляющих упомянутыми распределениями.

§ 1. Интегральные законы сохранения

Движение газа происходит в трехмерном пространстве $R^3(\mathbf{x})$ точек (векторов) $\mathbf{x}$, причем состояние движения в точке $\mathbf{x}$ зависит от времени t . Поэтому *пространством* событий газовой динамики является четырехмерное пространство $R^4(\mathbf{x}, t)$.

Основные величины. Основными величинами, описывающими движение газа, являются

<i>вектор скорости</i>	$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t),$
<i>плотность</i>	$\rho = \rho(\mathbf{x}, t),$
<i>давление</i>	$p = p(\mathbf{x}, t),$
<i>удельная внутренняя энергия</i>	$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{x}, t).$

Величина $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ есть скорость частицы газа, занимающей положение $\mathbf{x} \in R^3$ в момент времени t . С другой стороны, само положение $\mathbf{x}$ частицы зависит от времени и скорость его изменения равна производной $d\mathbf{x}/dt$. Поэтому описание движения частиц газа дается дифференциальным уравнением

$$d\mathbf{x}/dt = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

В координатной форме, когда в одной и той же декартовой системе координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$ и $\mathbf{u} = (u, v, w)$, уравнение (1) может быть записано в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx/dt &= u(x, y, z, t), & dy/dt &= v(x, y, z, t), \\ dz/dt &= w(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Если векторное поле $\mathbf{u}$ задано в некоторой области $\Omega \subset R^4$, непрерывно в Ω и удовлетворяет условию Липшица по $\mathbf{x}$, то область Ω *однократно* покрыта семейством интегральных кривых уравнения (1). Эти кривые являются, таким образом, «мировыми линиями» частиц газа в пространстве событий $R^4(\mathbf{x}, t)$. Их проекции на пространство $R^3(\mathbf{x})$ называются *траекториями частиц*. Следует иметь в виду, что термин «траектории» часто употребляется и для самих мировых линий частиц, что обычно не приводит к недоразумениям.

Каждая интегральная кривая однозначно определена условием прохождения через заданную точку $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ в момент времени $t = 0$, т.е. *начальным условием* $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Поэтому решение уравнения (1) зависит от начального значения $\mathbf{x}_0$ и должно записываться в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0). \quad (2)$$

Это описание позволяет дать абстрактное определение понятия «частица газа»: этим термином называется точка $x \in R^3$, зависящая от времени t по формуле (2) при фиксированном x_0 . При этом (2) истолковывается как уравнение движения частицы по ее траектории. Значения x_0 отличают одну частицу от другой и являются, таким образом, лагранжевыми координатами.

Движущийся объем. Область $\omega(t) \subset R^3$, состоящая при всех t из одних и тех же частиц, называется *движущимся объемом* (иногда говорят — *материальным объемом*).

Абстрактное понятие частицы газа является математическим эквивалентом представления о том достаточно малом физическом объеме газа, с помощью которого еще можно сформировать средние значения скорости, плотности и т. д. Движущийся объем есть конечный объем, содержащий в процессе движения все время одну и ту же порцию газа.

В феноменологической теории каждый движущийся объем рассматривается как единое физическое тело, снабженное следующими физико-механическими характеристиками:

$$\begin{aligned} \text{масса} \quad & \iiint_{\omega(t)} \rho \, d\omega, \\ \text{импульс} \quad & \iiint_{\omega(t)} \rho \mathbf{u} \, d\omega, \\ \text{энергия} \quad & \iiint_{\omega(t)} \rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) d\omega, \end{aligned}$$

где $q = |\mathbf{u}|$ есть длина (модуль) вектора скорости. Импульс называется также *количеством движения* объема $\omega(t)$. Под энергией здесь понимается *полная энергия*, равная сумме *кинетической* и *внутренней* энергий.

Законы сохранения массы, импульса и энергии. В основу вывода уравнений, определяющих законы изменения этих характеристик, можно положить следующий *принцип отвердевания*: изменение массы, импульса и энергии любого движущегося объема $\omega(t)$ в каждый данный момент времени происходит (за счет воздействия извне) так же, как для твердого тела, занимающего объем $\omega(t)$ и имеющего те же самые физико-механические характеристики. Приняв этот принцип, можно написать законы изменения массы, импульса и энергии в следующей форме.

Масса неизменна, т. е. производная по t от массы движущегося объема равна нулю:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} \rho d\omega = 0.$$

Импульс меняется за счет приложенных сил; его производная по t равна сумме (главному вектору) $\mathbf{F}$ всех сил, приложенных к объему $\omega(t)$:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} \rho \mathbf{u} d\omega = \mathbf{F}.$$

Энергия меняется за счет работы внешних сил и дополнительного притока энергии; ее производная по t равна мощности W , развиваемой действующими силами, плюс скорость притока дополнительной энергии Q :

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} \rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) d\omega = W + Q.$$

В настоящих лекциях будет рассматриваться модель *невязкого нетеплопроводного газа*, движущегося в отсутствие внешних силовых полей и внешних источников энергии. В этой модели силами, действующими на объем $\omega(t)$, будут только поверхностные силы давления, направленные по нормали к поверхности этого объема. Следовательно, если $\gamma(t)$ — поверхность $\omega(t)$ и $\mathbf{n}$ — единичный вектор *внешней нормали* к $\gamma(t)$, то принимается, что

$$\mathbf{F} = - \iint_{\gamma(t)} p \mathbf{n} d\gamma.$$

Кроме того, в этой модели $Q = 0$, а W есть мощность, развиваемая силами давления $-p\mathbf{n}$ на γ , т. е.

$$W = - \iint_{\gamma(t)} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} d\gamma,$$

где точка обозначает скалярное произведение в R^3 .

Итак, исходные *интегральные законы сохранения массы, импульса и энергии* в рассматриваемой модели имеют вид

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} \rho d\omega &= 0, \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} \rho \mathbf{u} d\omega &= - \iint_{\gamma(t)} p \mathbf{n} d\gamma, \\ \frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} \rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) d\omega &= - \iint_{\gamma(t)} p \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\gamma.\end{aligned}\tag{3}$$

Необходимо помнить, что уравнения (3) должны выполняться для *любого* движущегося объема $\omega(t)$ (с достаточно гладкой границей $\gamma(t)$) и в *любой* момент времени t .

Балансовые уравнения. Возможен и другой подход к получению исходных интегральных законов сохранения, когда рассматривается изменение во времени массы, импульса и энергии в фиксированном (не зависящем от времени) объеме ω . В этом случае необходимо оперировать со скоростями притока основных физических количеств в данный объем. Тогда основные законы изменения массы, импульса и энергии принимают вид уравнений баланса этих количеств.

Скорость изменения массы в объеме ω равна скорости потока массы через его границу γ :

$$- \iint_{\gamma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\gamma.$$

Скорость изменения импульса в объеме ω равна действующей силе плюс скорость потока импульса через границу γ :

$$- \iint_{\gamma} (p \mathbf{n} + \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})) d\gamma.$$

Скорость изменения энергии в объеме ω равна мощности действующих сил плюс скорость потока энергии через границу γ :

$$- \iint_{\gamma} \left(p + \rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\gamma.$$

Это даст интегральные законы сохранения в виде следующих *балансовых уравнений*:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\omega} \rho d\omega &= - \iint_{\gamma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\gamma, \\ \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\omega} \rho \mathbf{u} d\omega &= - \iint_{\gamma} (p \mathbf{n} + \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})) d\gamma, \\ \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\omega} \rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) d\omega &= - \iint_{\gamma} \left(p + \rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\gamma\end{aligned}\quad (4)$$

Введенное здесь обозначение оператора дифференцирования $\partial/\partial t$ (вместо d/dt) подчеркивает, что ввиду независимости ω от t этот оператор может быть внесен под знак интеграла именно как оператор частной производной по t .

Очевидно, что обе системы законов сохранения (3) и (4) равносильны, так как они выражают одни и те же физические законы. Этот факт легко проверяется и путем вычислений, показывающих, что каждая из систем (3) и (4) равносильна одной и той же системе дифференциальных уравнений на гладких решениях и одной и той же системе соотношений на сильных разрывах. Система (4) удобна и часто используется на практике, например при анализе стационарных движений, когда левые части в равенствах (4) обращаются в нуль.

Из основных физических законов в систему (3) не вошел явно закон сохранения момента импульса, имеющий вид

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} \rho (\mathbf{u} \times \mathbf{x}) d\omega = - \iint_{\gamma(t)} p (\mathbf{n} \times \mathbf{x}) d\gamma. \quad (5)$$

Оказывается, однако, что соотношение (5) не является независимым и есть следствие первых двух законов сохранения (3). Проверка этого факта, которая должна быть выполнена отдельно для гладких и для разрывных движений, предоставляется читателю.

Система (3) содержит всего пять скалярных законов сохранения и связывает шесть искомых основных величин (три компоненты вектора скорости, плотность, давление и внутреннюю энергию). Следовательно, эта система уравнений является *недоопределенной*. Для ее пополнения требуется привлечение термодинамических свойств газа, обсуждаемых в следующем параграфе.

§ 2. Термодинамические свойства

При термодинамическом рассмотрении статистически равновесных процессов в газах, наряду с введенными выше *параметрами состояния* ρ , p , ε , используются еще два основных параметра состояния: *абсолютная температура* T и *удельная* (отнесенная к единице массы) *энтропия* S . В дальнейшем предполагается, что газ как термодинамическая система является *двухпараметрической* средой. Это означает, что его состояние вполне определяется заданием каких-либо двух параметров. Следовательно, упомянутые пять параметров должны быть связаны тремя соотношениями.

Первый закон термодинамики. Фундаментальное свойство эквивалентности тепловой и механической энергии выражается в виде *первого закона термодинамики*:

$$TdS = d\varepsilon + p dV, \quad (1)$$

где $V = 1/\rho$ — удельный объем (объем единицы массы газа). Левая часть равенства (1) равна количеству тепла, сообщаемому единице массы, а правая — приращению внутренней энергии плюс работа расширения этой порции газа. На самом деле, для двухпараметрических сред соотношение (1) является определением энтропии S .

Если рассматривать внутреннюю энергию как функцию удельного объема и энтропии, т. е. положить $\varepsilon = E(V, S)$, то (1) эквивалентно двум соотношениям:

$$p = -E_V(V, S), \quad T = E_S(V, S). \quad (2)$$

Следовательно, задание функции $E(V, S)$ полностью описывает всю термодинамику двухпараметрической среды. Однако на практике такое задание не всегда удобно и термодинамические свойства газа описываются другими соотношениями, рассматриваемыми ниже.

Идеальный газ. Газ называется *идеальным* (иногда говорят — *совершенным*), если выполнено уравнение Клапейрона, вытекающее из фундаментальных законов Бойля — Мариотта и Гей-Люссака:

$$pV = RT, \quad (3)$$

где R — газовая постоянная, определяемая химическим (молекулярным) составом газа.

Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры T . Действительно, если предположить, что $\varepsilon = \mathcal{E}(V, T)$ и $S = S(V, T)$, то из (1) получатся два соотношения, которые в силу (3) имеют вид

$$TS_V = \mathcal{E}_V + RT/V, \quad TS_T = \mathcal{E}_T.$$

Исключение энтропии S перекрестным дифференцированием приводит к соотношению $\mathcal{E}_V = 0$, т. е. $\varepsilon = \mathcal{E}(T)$. Если функция $\mathcal{E}(T)$ известна, то интегрирование предыдущих уравнений даст выражение (с точностью до произвольного постоянного слагаемого)

$$S = R \ln V + \int \mathcal{E}'(T) d \ln T. \quad (4)$$

Следовательно, описание термодинамики идеального газа сводится к задаче функции $\varepsilon = \mathcal{E}(T)$.

Политропный газ. Величина $c_V = \mathcal{E}_T$ называется *удельной теплоемкостью* газа при постоянном объеме. Очевидно, что для идеального газа c_V зависит только от T . Особенно важен частный случай, когда $c_V = \text{const}$.

Определение 1. Идеальный газ называется *политропным*, если функция $\mathcal{E}$ линейна по T , т. е. $\mathcal{E} = c_V T$ ($c_V = \text{const}$).

Для политропного газа формула (4) даст

$$S = R \ln V + c_V \ln T + S_0 \quad (S_0 = \text{const}),$$

откуда

$$T = \exp\left(\frac{S - S_0}{c_V}\right) \cdot V^{-R/c_V},$$

и из (3) получается соотношение

$$p = A(S) \rho^\gamma, \quad (5)$$

где

$$\gamma = 1 + \frac{R}{c_V}, \quad A(S) = R \exp \frac{S - S_0}{c_V}.$$

Безразмерная константа γ является важной характеристикой политропного газа и называется *показателем адиабаты* (или показателем политропы). Так как $R > 0$ и $c_V > 0$, то всегда $\gamma > 1$. Для внутренней энергии ε политропного газа из предыдущих соотношений получается выражение

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1} pV. \quad (6)$$

Модель политропного газа благодаря ее сравнительной аналитической простоте и подтвержденному опытом хорошему приближению к действительности получила широкое распространение в прикладных исследованиях.

Нормальный газ. Оказывается, что качественное исследование фундаментальных закономерностей в газовой динамике может быть выполнено без окончательной конкретизации основных уравнений состояния газа при условии, что участвующие в этих уравнениях функции удовлетворяют некоторым естественным требованиям. Такая обобщенная трактовка была впервые предложена Вейлем и затем повторялась в ряде монографий (см. [4, 6]). Формулируемое ниже определение понятия «нормального» газа несколько отличается от упомянутого прототипа в сторону сужения класса сред, но зато дает возможность описать более широкий класс процессов без каких-либо дополнительных предположений.

Уравнениями состояния называются зависимости

$$p = f(\rho, S) = g(V, S), \quad \varepsilon = e(V, p) = E(V, S), \quad (7)$$

где $V = 1/\rho$, удовлетворяющие уравнению (1).

Определение 2. Газ называется *нормальным*, если функции (7) обладают следующими свойствами 1^0 и 2^0 .

1^0 . Функция f определена, трижды непрерывно дифференцируема в области $\{0 < \rho < \infty, S_* < S < S^*\}$ (может быть $S_* = -\infty, S^* = +\infty$), всюду в этой области удовлетворяет неравенствам

$$(a) f > 0, \quad (b) f_\rho > 0, \quad (c) f_{\rho\rho} > 0, \quad (d) f_S > 0 \quad (8)$$

и предельным соотношениям

$$\lim_{S \rightarrow S_*} f(\rho, S) = 0, \quad \lim_{S \rightarrow S^*} f(\rho, S) = \infty. \quad (9)$$

2^0 . Функция e определена, трижды непрерывно дифференцируема в области $Q = \{0 < V < \infty, 0 < p < \infty\}$, всюду в Q удовлетворяет неравенствам

$$(a) e > 0, \quad (b) pe_p \geq e \quad (10)$$

и предельным соотношениям

$$\lim_{V \rightarrow 0} e(V, p) = 0, \quad \lim_{V \rightarrow \infty} E(V, S) = 0. \quad (11)$$

Легко проверяется, что политропный газ является нормальным. Свойства функции g в области $\{0 < V < \infty, S_* < S < S^*\}$ аналогичны свойствам функции f с очевидными изменениями, вытекающими из того что $V = 1/\rho$. Дифференцирование тождества $f(1/V, S) = g(V, S)$ по V и S дает соотношения

$$f_\rho = -V^2 g_V, \quad 2f_\rho + \rho f_{\rho\rho} = V^3 g_{VV}, \quad f_S = g_S,$$

в силу которых из (8) следуют неравенства

$$(a) g > 0, \quad (b) g_V < 0, \quad (c) g_{VV} > 0, \quad (d) g_S > 0. \quad (12)$$

Видно, что неравенство (8,с) сильнее, чем (12,с). Условия (12) определяют «газ Вейля». Данное выше определение 2 несколько сужает класс рассматриваемых сред, но зато расширяет совокупность закономерностей, которые, будучи справедливы для политропного газа, распространяются также и на нормальный газ. В частности, это относится к свойству взаимно однозначного соответствия между плотностью ρ и скоростью звука s (см. ниже определение 3), которое для «газа Вейля», вообще говоря, не имеет места.

Из соотношений (2) для нормального газа вытекает ряд важных свойств, которые указаны ниже.

Лемма 1. В нормальном газе функция $f(\rho, S)$ при любом фиксированном $S \in (S_*, S^*)$ и функция $e(V, p)$ обладают следующими свойствами:

$$(a) f \rightarrow 0, \quad f_\rho \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow 0;$$

$$(b) \text{интеграл } \int_0^p \frac{f_\rho(\rho', S)}{\rho'} d\rho' \text{ конечен};$$

$$(c) e_p > 0, \quad 2e_V + p > 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первая формула (2) равносильна интегральному равенству (зависимость от S явно не указана, т. к. $S = \text{const}$)

$$E(V) - E(V_1) = \int_{V_1}^V g(V') dV'. \quad (*)$$

Из него, в силу второго условия (11), при $V_1 \rightarrow \infty$ следует сходимость интеграла $\int_V^\infty g(V') dV'$, что влечет свойство $g(V) \rightarrow 0$ при $V \rightarrow \infty$,

равносильное первому (а). Ввиду монотонного убывания g с ростом V из (*) при $V_1 > V$ получается неравенство $E(V) - E(V_1) > (V_1 - V)g(V_1)$. Если в нем положить $V_1 = 2V$ и перейти к пределу при $V \rightarrow \infty$, то

получится также, что $Vg(V) \rightarrow 0$ при $V \rightarrow \infty$. Далее, интегрирование по частям в (*) дает равенство

$$E(V) - E(V_1) = V_1 g(V_1) - Vg(V) - \int_V^{V_1} g_V(V') V' dV'. \quad (**)$$

Так как $|g_V|$ убывает с ростом V , то отсюда при $V_1 > V$ получается неравенство $E(V) - E(V_1) > V_1 g(V_1) - Vg(V) + \frac{1}{2}(V_1^2 - V^2)g_V(V_1)$.

Снова положение $V_1 = 2V$ и переход в полученном неравенстве к пределу при $V \rightarrow \infty$ с учетом предыдущего приводит к свойству $V^2 g_V \rightarrow 0$ при $V \rightarrow \infty$, равносильному второму свойству (а). Кроме того, переход к пределу в (**) при $V_1 \rightarrow \infty$ дает равенство

$$E(V) + Vg(V) = - \int_V^{\infty} g_V(V') V' dV' \quad (13)$$

с конечным несобственным интегралом в правой части, который равен интегралу (b). Первое неравенство (с) следует из соотношения $e_p g_S = T$ и (12,d). Далее, дифференцирование равенства $e(V, g(V)) = E(V)$ дает соотношение $e_V + e_p g_V = -p$, из которого, в силу (10,b) следует неравенство $e_V + p > p^{-1}(g_V)e$. Наконец, функция $G(V) = 2g_V E + g^2 \rightarrow 0$ при $V \rightarrow \infty$ и $G_V = 2g_V V E' > 0$. Значит всюду $G(V) < 0$, что равносильно неравенству $2|g_V|e > p^2$, которое вместе с предыдущим дает второе неравенство (с) ■

Формулу (13), в силу (b), можно переписать в виде

$$e + pV = \int_0^p \frac{f_\rho}{\rho} d\rho, \quad (14)$$

где интеграл берется при постоянной S .

Указанные в Лемме 1 свойства позволяют ввести понятие вакуума путем доопределения функций f и e их предельными значениями при $\rho \rightarrow 0$. Состояние вакуума нормального газа определяется любым из следующих равенств (при $S_* < S < S^*$), влекущим выполнение остальных:

$$\rho = 0, \quad V = \infty, \quad p = 0, \quad e = 0. \quad (15)$$

Свойства адиабат. Последующее изучение термодинамических соотношений проводится на плоскости $R^2(V, p)$ в квадранте $Q = \{0 < V < \infty, 0 < p < \infty\}$. Кривые $S = \text{const}$ называются *адиабатами* (или *адиабатами Пуассона*, или *изэнтропами*). Адиабата, вдоль которой $S = S_0$, обозначается $a(S_0)$. Для каждого S_0 из интервала (S_*, S^*) рассматривается область $Q(S_0)$, определенная неравенством $S > S_0$; ее границей является адиабата $a(S_0)$.

Лемма 2. Семейство адиабат $\{a(S)\}$ обладает следующими свойствами:

- (a) через любую точку $(V_0, p_0) \in Q$ проходит одна и только одна адиабата $a(S_0)$;
- (b) $S_1 < S_2$, если и только если $a(S_2) \subset Q(S_1)$;
- (c) для любого S_0 область $Q(S_0)$ строго выпукла;
- (d) любая адиабата $a(S_0)$ имеет асимптоты $V = 0$ (при $p \rightarrow \infty$) и $p = 0$ (при $V \rightarrow \infty$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (12, d) и (9) при фиксированном V значение $p = g(V, S)$ монотонно возрастает вместе с S , пробегая весь интервал $(0, \infty)$, откуда следует (a). Итак, существует определенная на Q функция $S = \sigma(V, p)$, с которой выполнено тождество $g(V, \sigma(V, p)) = p$. Его дифференцирование дает соотношения

$$g_V + g_S \sigma_V = 0, \quad g_S \sigma_p = 1, \quad (16)$$

откуда, в силу (12), $\sigma_V > 0$ и $\sigma_p > 0$. Значит, градиент S в точках адиабаты $a(S_0)$ направлен строго внутрь области $Q(S_0)$, что влечет свойство (b). Далее, строгая выпуклость области $Q(S_0)$ гарантируется неравенством (12, c). Наконец, из (8, b, c) и определенности f при всех ρ, S следует, что $p \rightarrow \infty$ равносильно $\rho \rightarrow \infty$, откуда, вместе с (9), вытекает свойство (d). ■

Прямая с уравнением $p = kV + b$ называется прямой типа l_+ , если $k \geq 0$, и прямой типа l_- , если $k < 0$. Из леммы 2 следует, что вдоль любой прямой типа l_+ энтропия S меняется монотонно, возрастая с ростом p (или V) от S_* до S^* . Напротив, для каждой прямой типа l_- существует единственное значение S_0 , при котором она является опорной прямой для выпуклой области $Q(S_0)$, т.е. касательной к адиабате $a(S_0)$. Пусть (V_0, p_0) — соответствующая точка касания. В этом случае поведение энтропии S , рассматриваемой на l_- как функция от V согласно выражению $S = \sigma(V, kV + b)$, описывается следующим утверждением.

Лемма 3. На прямой типа l_- энтропия S имеет единственную стационарную точку $V = V_0$, в которой S достигает максимума, причем

$$\begin{aligned} dS/dV &> 0 \quad (V < V_0), \\ dS/dV &< 0 \quad (V > V_0). \end{aligned} \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из леммы 2 следует, что адиабата $a(S'')$ при $S'' > S_0$ не пересекает l_- и что любая адиабата $a(S')$ при $S' < S_0$ пересекает l_- ровно в двух точках 1 и 2, причем $V_1 < V_0$ и $V_2 > V_0$ (рис. 1). Дифференцирование формулы $S = \sigma(V, kV + b)$ по V дает $dS/dV = \sigma_V + k\sigma_p$, или, в силу (16),

$$dS/dV = (k - g_V)/g_S.$$

Так как $g_S > 0$ (см. (12, d)), то неравенства (17) являются следствием свойства строгой выпуклости адиабаты $a(S')$, гарантирующего, что $(g_V)_1 < k$ и $(g_V)_2 > k$. Действительно, если бы было, например, $(g_V)_1 = k$, то точка 1 была бы точкой перегиба для $a(S')$, в которой необходимо должно выполняться равенство $g_{VV}(V_1, S') = 0$, противоречащее (12, c). ■

Термодинамические функции. В дальнейшем будут играть важную роль некоторые термодинамические функции, определяемые заданными уравнениями состояния нормального газа (7).

Определение 3. Скоростью звука (термодинамической) называется величина $c > 0$, заданная формулой

$$c^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \rho} \right|_{S=\text{const}} = f_\rho(\rho, S); \quad (18)$$

удельной энтальпией (или теплосодержанием) называется величина, заданная формулой

$$i = e(V, p) + pV. \quad (19)$$

Из (18) и условия нормального газа (8, c) следует, что $\partial(c^2)/\partial \rho = f_{\rho\rho} > 0$, т. е. выполнено свойство взаимно однозначного соответствия между скоростью звука c и плотностью ρ . Состояние вакуума (15) также определяется равенством $c = 0$.

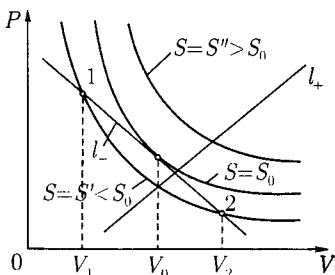


Рис. 1

Для политропного газа явные выражения этих функций легко находятся из уравнений (5) и (6) и имеют вид

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} = \gamma p V, \quad i = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{\gamma - 1} c^2. \quad (20)$$

Полезно отметить еще, что если удельная энтальпия i рассматривается как функция $i(\rho, S)$, то, в силу определения (18) и первого соотношения (2), для ее производной справедлива формула

$$\left. \frac{di}{d\rho} \right|_{S=\text{const}} = \frac{c^2}{\rho}. \quad (21)$$

При решении задач газовой динамики часто встречается также безразмерная функция состояния газа, определенная формулой

$$m := \rho f_{\rho\rho} / f_{\rho}. \quad (22)$$

В силу свойства (8, с) в нормальном газе всегда $m > 0$. Для политропного газа эта функция есть константа: $m = \gamma - 1$. В частности, с величинами (18) и (22) формулы (13) принимают вид

$$g_V = -\rho^2 c^2, \quad g_{VV} = (m + 2)\rho^3 c^2. \quad (23)$$

В силу (21) для величины m получается выражение

$$\left. \frac{d(c^2)}{di} \right|_{S=\text{const}} = m. \quad (24)$$

Величина ρc называется *импедансом*; согласно (23) она характеризует, как говорят, «жесткость» среды. Из (23) легко выводится формула

$$\frac{d(\rho c)}{d\rho} = \frac{m + 2}{2} c. \quad (25)$$

§ 3. Дифференциальные уравнения

С точки зрения рассматриваемой математической модели *движением* (или *течением*) газа в области $\Omega \subset R^4(x, t)$ называется набор функций u, ρ, p, ε , определенных в Ω и удовлетворяющих уравнениям (1.3).

Определение 1. Движение газа называется *гладким* в области $\Omega \subset R^4$, если функции u, ρ, p, ε непрерывны вместе с первыми производными всюду в Ω .

Дифференцирование интеграла по движущемуся объему. Гладкие движения удовлетворяют системе дифференциальных уравнений, равносильной системе законов сохранения (1.3). Для вывода этих уравнений удобно ввести абстрактный закон сохранения

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} f d\omega + \iint_{\gamma(t)} \varphi \cdot \mathbf{n} d\gamma = 0, \quad (1)$$

где функции f и φ определены в области Ω . Здесь предполагается, что движущийся объем $\omega(t)$ определен с помощью векторного поля вектора скорости $\mathbf{u}$ так, как это описано в § 1.

Лемма 1. Производная интеграла по движущемуся объему дается формулой

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} f d\omega = \iiint_{\omega(t)} (Df + f \operatorname{div} \mathbf{u}) d\omega, \quad (2)$$

где D есть дифференциальный оператор:

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Закон движения (1.2) позволяет сделать в интеграле по $\omega(t)$ замену переменных интегрирования $\mathbf{x}$ на $\mathbf{x}_0$. Если при этом область $\omega(t)$ перейдет в область ω_0 , то интеграл преобразуется по формуле

$$\iiint_{\omega(t)} f d\omega = \iiint_{\omega_0} f \delta d\omega_0,$$

где $\delta = \det(\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}_0)$ есть определитель матрицы Якоби из производных от старых переменных по новым. Теперь надо заметить, что если вектор $\mathbf{u}$ непрерывно дифференцируем, то решение (1.2) уравнения (1.1) также непрерывно дифференцируемо по $\mathbf{x}_0$. При этом производная $\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}_0$ (в координатах — матрица Якоби) удовлетворяет уравнению «в вариациях», выводимому из (1.1) дифференцированием по $\mathbf{x}_0$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \right) = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \right). \quad (4)$$

Отсюда для определителя $\delta(t, \mathbf{x}_0)$ получается формула Эйлера:

$$\partial \delta / \partial t = \delta \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (5)$$

Кроме того, для любой функции $F(\mathbf{x}, t)$ в силу уравнения (1.1) справедлива формула дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial t} F(\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0), t) = F_t + \mathbf{u} \cdot \nabla F = DF,$$

где символом F_t обозначена частная производная $(\partial/\partial t)F(\mathbf{x}, t)$. Теперь дифференцирование интеграла по движущемуся объему с использованием (5) выполняется автоматически:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} f \, d\omega &= \iiint_{\omega_0} \frac{\partial}{\partial t} (f\delta) \, d\omega_0 = \\ &= \iiint_{\omega_0} \left(\frac{\partial}{\partial t} f + f \operatorname{div} \mathbf{u} \right) \delta \, d\omega_0 = \iiint_{\omega(t)} (Df + f \operatorname{div} \mathbf{u}) \, d\omega. \end{aligned}$$

Применение формулы Остроградского–Гаусса к входящему в (1) интегралу по поверхности дает

$$\iint_{\gamma(t)} \varphi \cdot \mathbf{n} \, d\gamma = \iiint_{\omega(t)} \operatorname{div} \varphi \, d\omega.$$

Кроме того, полезно заметить еще, что

$$Df + f \operatorname{div} \mathbf{u} = f_t + \operatorname{div}(f\mathbf{u}).$$

Предыдущие соотношения и лемма показывают, что если $\mathbf{u}$, f и φ имеют непрерывные производные, то закон сохранения (1) оказывается равносильным следующему:

$$\iiint_{\omega(t)} (f_t + \operatorname{div}(f\mathbf{u} + \varphi)) \, d\omega = 0. \quad (6)$$

Отсюда, в силу произвольности объема $\omega(t)$, следует, что подынтегральное выражение равно нулю, т. е. что (6) равносильно дифференциальному уравнению

$$f_t + \operatorname{div}(f\mathbf{u} + \varphi) = 0. \quad (7)$$

Вывод основных дифференциальных уравнений. Теперь можно обратиться к конкретным законам сохранения (1.3) и заметить, что все они имеют вид (1) при специальных значениях f и φ . Для закона сохранения

массы надо принять $f = \rho$, $\varphi = 0$. Здесь (7) дает дифференциальное уравнение

$$\rho_t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (8)$$

которое называется *уравнением неразрывности*. Для закона сохранения импульса удобно ввести его проекции согласно представлению $\mathbf{u} = (u, v, w)$. Рассматривая проекцию на ось x , следует положить $f = \rho u$ и $\varphi = (p, 0, 0)$, и тогда из (7) получится уравнение

$$(\rho u)_t + \operatorname{div}(\rho u \mathbf{u}) + p_x = 0.$$

После преобразования с учетом равенств $(\rho u)_t = \rho u_t + u \rho_t$, $\operatorname{div}(\rho u \mathbf{u}) = u \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u$ и уже найденного соотношения (8) это уравнение упрощается до следующего:

$$\rho u_t + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla u + p_x = 0,$$

где индексом x обозначена частная производная $\partial/\partial x$. Аналогичное преобразование двух других проекций (на оси y и z), после свертывания полученных трех скалярных уравнений в одно векторное, приводит к уравнению

$$\mathbf{u}_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad (9)$$

которое называется *уравнением импульсов* (или уравнением количества движения). Наконец, для последнего из законов сохранения (1.3) следует взять $f = \rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right)$ и $\varphi = p \mathbf{u}$. В этом случае (7) дает уравнение

$$\left(\rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) \right)_t + \operatorname{div} \left(\rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) \mathbf{u} + p \mathbf{u} \right) = 0,$$

которое в силу (8) и (9) упрощается до следующего:

$$\varepsilon_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \varepsilon + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{u} = 0.$$

Дальнейшие преобразования связаны с использованием вытекающего из (8) выражения

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} D\rho,$$

после подстановки которого и замены $V = 1/\rho$ получается

$$D\varepsilon + pDV = 0.$$

Но в частице газа, движущейся по траектории, выполняется первый закон термодинамики:

$$TDS = D\varepsilon + pDV,$$

благодаря которому оказывается, что дифференциальное уравнение закона сохранения энергии вместе с (8) и (9) равносильно уравнению

$$DS = 0. \quad (10)$$

Из формулы (3) для оператора D видно, что он имеет смысл оператора дифференцирования по времени вдоль траектории частицы. Поэтому его называют *оператором дифференцирования в частице* (иногда говорят — *оператор полного дифференцирования*) *по t* .

Свойство движения газа, выражаемое уравнением (10), можно сформулировать так: при гладком движении газа энтропия сохраняется в частице.

Окончательно для гладкого движения получается следующая система дифференциальных уравнений газовой динамики:

$$\begin{aligned} D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ D\mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0, \\ DS &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

которая замыкается уравнением состояния $p = f(\rho, S)$.

Уравнения (11) записаны в инвариантных векторных операциях. Для их подробной скалярной записи в декартовых координатах $\mathbf{x} = (x, y, z)$, $\mathbf{u} = (u, v, w)$ используются, кроме (3), выражения операторов

$$\nabla p = (p_x, p_y, p_z), \quad \operatorname{div} \mathbf{u} = u_x + v_y + w_z.$$

Поэтому в декартовых координатах система (11) имеет вид

$$\begin{aligned} \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z + \rho(u_x + v_y + w_z) &= 0, \\ u_t + uu_x + vv_y + ww_z + \frac{1}{\rho}p_x &= 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + \frac{1}{\rho}p_y &= 0, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z + \frac{1}{\rho}p_z &= 0, \\ S_t + uS_x + vS_y + wS_z &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где индексами обозначены частные производные по соответствующим координатам, например: $\rho_t = \partial\rho/\partial t$, $u_x = \partial u/\partial x$ и т. д.

В различных вопросах газовой динамики система (11) может быть представлена в других равносильных формах. Например, можно исключить энтропию S , заметив, что $Dp = f_\rho D\rho + f_S DS$. Так как $f_\rho = c^2$, то уравнение $DS = 0$ равносильно уравнению

$$Dp = c^2 D\rho \quad (13)$$

или, с учетом первого уравнения (11), уравнению $Dp = -\rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{u}$. В этом представлении система принимает вид

$$\begin{aligned} D\mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0, \\ D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ Dp + \rho c^2 \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где величину ρc^2 следует рассматривать как функцию от ρ и p . Это представление особенно удобно в случае политропного газа, когда $\rho c^2 = \gamma p$.

Симметрическая форма. В общей качественной теории уравнений (11) (исследование характеристик, краевых задач и т. п.) целесообразна специальная запись системы с искомыми функциями $\mathbf{u}$, p , S . С этой целью из первого уравнения (11) с помощью соотношения (13) исключается $D\rho$, что приводит к равносильной системе

$$\begin{aligned} \rho D\mathbf{u} + \nabla p &= 0, \\ b Dp + \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0 \quad \left(b = \frac{1}{\rho c^2} \right), \\ DS &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь величины ρ и b рассматриваются как функции от p и S . Важное свойство системы (15) состоит в том, что она является *симметрической*. Этот термин означает, что в матричной записи системы (15) участвуют симметричные матрицы. Для перехода к матричной записи система (15) расписывается в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} \rho(u_t + uu_x + vv_y + ww_z) + p_x &= 0, \\ \rho(v_t + uv_x + vv_y + ww_z) + p_y &= 0, \\ \rho(w_t + uw_x + vw_y + ww_z) + p_z &= 0, \\ b(p_t + up_x + vp_y + wp_z) + u_x + v_y + w_z &= 0, \\ S_t + uS_x + vS_y + wS_z &= 0, \end{aligned} \quad (16)$$

и вводится вектор-функция $\mathbf{U} = (u, v, w, p, S)$ (рассматриваемая как вектор-столбец). Тогда с матрицами $A^j (j = t, x, y, z)$, элементами которых служат коэффициенты системы (16), эта система записывается в виде

$$A^t \mathbf{U}_t + A^x \mathbf{U}_x + A^y \mathbf{U}_y + A^z \mathbf{U}_z = 0, \quad (17)$$

где нижними индексами при $\mathbf{U}$ обозначены частные производные этого вектора по t, x, y, z и каждая матрица умножается на вектор-столбец по обычному правилу. Конкретный вид матриц A^j таков:

$$A^t = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^x = \begin{pmatrix} \rho u & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \rho u & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho u & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & bu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix},$$

$$A^y = \begin{pmatrix} \rho v & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho v & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \rho v & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & bv & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \quad A^z = \begin{pmatrix} \rho w & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho w & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho w & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & bw & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w \end{pmatrix}.$$

Непосредственно видно, что все матрицы A^j симметричны, причем A^t — положительно определенная.

Форма Громеки–Лэмба. Еще одна форма записи получается с использованием вектора вихря $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$, который в декартовых координатах имеет компоненты

$$\boldsymbol{\omega} = (w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y). \quad (18)$$

Переход к новой форме основан на тождестве

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla \left(\frac{1}{2} q^2 \right) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega},$$

где $\times$ — знак векторного умножения. С помощью этого тождества уравнение импульсов (второе из уравнений (11)) записывается в форме Громеки–Лэмба:

$$\mathbf{u}_t + \nabla \left(\frac{1}{2} q^2 \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (19)$$

§ 4. Уравнения сильного разрыва

В приложениях возникает необходимость в изучении классов движений, более широких по сравнению с классом гладких движений. Математическая модель таких движений может быть построена на основе интегральных законов сохранения (1.3). Вначале рассматривается абстрактный закон сохранения (3.1). В предыдущем параграфе было показано, что если величины u , f и φ обладают непрерывными производными, то (3.1) равносильно (3.6), откуда вытекало дифференциальное уравнение (3.7). Здесь (3.6) будет обобщено в другом направлении.

Обобщенные движения. Пусть $\Omega \subset R^4$ есть ограниченная область с кусочно-гладкой границей Γ и сечениями $\omega_\Omega(t)$ гиперплоскостями $t = \text{const}$. В соотношении (3.6) полагается $\omega(t) = \omega_\Omega(t)$, и оно интегрируется по t в интервале (t_1, t_2) , на который проектируется область Ω . Это даст

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_{\omega_\Omega(t)} (f_t + \text{div}(f\mathbf{u} + \varphi)) d\omega dt = 0.$$

Здесь подынтегральное выражение есть дивергенция четырехмерного вектора (если $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$)

$$\mathbf{g} = (f, f\mathbf{u} + \varphi_1, f\mathbf{v} + \varphi_2, f\mathbf{w} + \varphi_3).$$

Поэтому согласно теореме Остроградского–Гаусса предыдущее соотношение равносильно следующему:

$$\iiint_{\Gamma} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nu} d\Gamma = 0, \quad (1)$$

где $\boldsymbol{\nu}$ — орт внешней нормали к Γ . Если $\mathbf{l}$ — орт оси t и $\mathbf{n}$ — орт внешней нормали к сечению Γ гиперплоскостью $t = \text{const}$, то

$$\boldsymbol{\nu} = \mathbf{l} \cos(\boldsymbol{\nu}, t) + \mathbf{n} \sin(\boldsymbol{\nu}, t) \quad (2)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\nu} = f \cos(\boldsymbol{\nu}, t) + (f\mathbf{u} + \varphi) \cdot \mathbf{n} \sin(\boldsymbol{\nu}, t).$$

Поэтому соотношение (1) принимает вид

$$\iiint_{\Gamma} (f \cos(\boldsymbol{\nu}, t) + (f\mathbf{u} + \varphi) \cdot \mathbf{n} \sin(\boldsymbol{\nu}, t)) d\Gamma = 0. \quad (3)$$

Итак, для непрерывно дифференцируемых функций u, f, φ из выполнения (3.6) для любого объема $\omega(t) \subset R^3$ следует выполнение (3) для любой замкнутой гиперповерхности $\Gamma \subset R^4$. Ясно, что, и наоборот, специализируя Γ как цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси t в R^4 , и сечением $\omega \subset R^3$, легко вывести (3.6) из (3).

Однако если не предполагать функции u, f, φ непрерывно дифференцируемыми, то из (3) указанным путем уже не удастся вывести (3.6). В частности, такой вывод невозможен, если величины u, f, φ сами разрывны. В этом смысле закон сохранения (3) является обобщением закона сохранения (3.6).

Определение 1. Набор функций u, ρ, p, ε , определенных в $R^4(x, t)$, называется *обобщенным движением* газа, если для любой замкнутой кусочно-гладкой гиперповерхности $\Gamma \subset R^4(x, t)$ эти функции удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \iiint_{\Gamma} (\rho \cos(\nu, t) + \rho u \cdot n \sin(\nu, t)) d\Gamma &= 0, \\ \iiint_{\Gamma} (\rho u \cos(\nu, t) + (\rho(u \cdot n)u + pn) \sin(\nu, t)) d\Gamma &= 0, \\ \iiint_{\Gamma} \left(\rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) \cos(\nu, t) + \left(\rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) + p \right) u \cdot n \sin(\nu, t) \right) d\Gamma &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Соотношения (4) получаются из абстрактного (3) путем специализации функции f и φ соответственно законам сохранения (1.3). В силу предыдущего они равносильны дифференциальным уравнениям (3.11) в классе гладких движений газа.

Движение с сильным разрывом. Класс всех обобщенных движений газа до настоящего времени полностью не изучен. Фактически исследован только (во всяком случае, для многомерных движений) некоторый подкласс обобщенных движений, а именно класс движений с сильным разрывом.

Определение 2. Если в области определения обобщенного движения существует гиперповерхность $\Sigma \subset R^4$, на которой величины u, ρ, p, ε имеют разрыв первого рода и вне которой это движение гладкое, то такое движение называется *движением с сильным разрывом*, а сечение $B(t)$ гиперповерхности Σ гиперплоскостями $t = \text{const}$ называется *поверхностью сильного разрыва*.

Итак, поверхность сильного разрыва $B(t)$ есть двумерная поверхность в пространстве $R^3(x)$, которая перемещается с течением времени и на которой функции u , ρ , p , ε имеют разрыв первого рода, оставаясь гладкими с каждой стороны от $B(t)$. Оказывается, что величины разрывов (или, как говорят, скачков) этих функций не могут быть произвольными, но с необходимостью удовлетворяют некоторым соотношениям, которые и называются *уравнениями сильного разрыва*.

Вывод соотношений на сильном разрыве. Удобно вывести уравнение сильного разрыва сначала для абстрактного закона сохранения (3). С этой целью на гиперповерхности Σ выделяется некоторая (малая) область σ с гладкой границей γ и строится замкнутая гиперповерхность $\Gamma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, где σ_3 есть «боковая поверхность» цилиндра с направляющей γ , а σ_1 и σ_2 — куски «параллельных» к Σ поверхностей, находящихся на расстоянии h от Σ (рис. 1), вырезанные этим цилиндром. В соотношении (3) с так построенной гиперповерхностью Γ интеграл разобьется на сумму трех интегралов — по σ_1 , σ_2 и σ_3 . Затем выполняется предельный переход при $h \rightarrow 0$. Так как при этом мера $|\sigma_3| \rightarrow 0$ и подынтегральная функция ограничена, то интеграл по σ_3 в пределе дает нуль. Что же касается интегралов по σ_1 и σ_2 , то они в пределе перейдут в интегралы по разным сторонам σ с противоположными направлениями нормалей $\nu_1 = -\nu_2$.

Пусть ν — одно из этих направлений, и пусть символ скачка $[a] = a_2 - a_1$ дает разность предельных значений на Σ какой-либо величины a , которые существуют с каждой стороны Σ . При этих соглашениях в пределе получится соотношение

$$\iiint_{\sigma} [f \cos(\nu, t) + (f u_n + \varphi_n) \sin(\nu, t)] d\sigma = 0,$$

где $u_n = u \cdot n$ и $\varphi_n = \varphi \cdot n$. Отсюда, ввиду произвольности области $\sigma \subset \Sigma$ и непрерывности подынтегрального выражения на Σ , получается абстрактное уравнение сильного разрыва

$$[f \cos(\nu, t) + (f u_n + \varphi_n) \sin(\nu, t)] = 0. \quad (5)$$

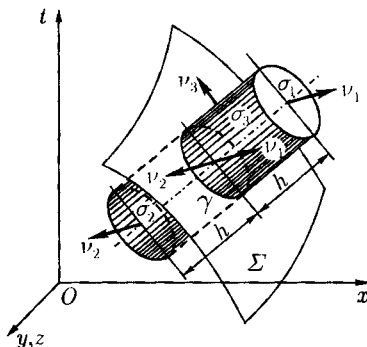


Рис. 1

Несколько неудобство этого уравнения состоит в том, что в него входит четырехмерная нормаль ν к гиперповерхности Σ . Однако нормаль ν можно исключить с помощью понятия скорости перемещения поверхности $B(t)$ и тем самым получить описание сильного разрыва в терминах только пространства $R^3(x)$.

Берется точка $M \in B(t)$ и находится точка N пересечения нормали в M к $B(t)$ с поверхностью $B(t + \Delta t)$. Пусть $H(\Delta t)$ есть длина отрезка MN , взятая со знаком «плюс», если вектор $\overrightarrow{MN}$ направлен так же, как орт нормали n к $B(t)$ в точке M , и со знаком «минус», если вектор $\overrightarrow{MN}$ направлен противоположно n .

Определение 3. Скоростью перемещения поверхности $B(t)$ в направлении нормали n называется предел

$$D_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{H(\Delta t)}{\Delta t}. \quad (6)$$

Связь D_n с четырехмерной нормалью ν обнаруживается, если заметить, что вектор (рис. 2)

$$D_n n + l,$$

где l — орт оси t , лежит в касательной плоскости к Σ и потому ортогонален вектору (2). Следовательно, искомая связь такова:

$$D_n \sin(\nu, t) + \cos(\nu, t) = 0. \quad (7)$$

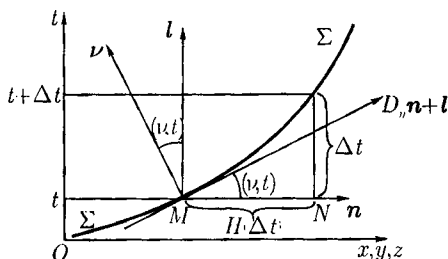


Рис. 2

В силу соотношения (7) уравнение (5) можно записать в виде

$$[f(u_n - D_n) + \varphi_n] \sin(\nu, t) = 0.$$

Естественно считать, что скорость перемещения D_n поверхности $B(t)$ конечна. Тогда из (7) следует, что $\sin(\nu, t) \neq 0$, и окончательно получается равносильное (5) абстрактное уравнение сильного разрыва

$$[f(u_n - D_n) + \varphi_n] = 0. \quad (8)$$

Применительно к конкретным уравнениям (4), в результате надлежащей специализации функций f и φ , из (8) получаются следующие уравнения *сильного разрыва* в газовой динамике (уравнения Гюгонио):

$$\begin{aligned} [\rho(u_n - D_n)] &= 0, \\ [\rho u(u_n - D_n) + p n] &= 0, \\ \left[\rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) (u_n - D_n) + p u_n \right] &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Классификация разрывов. Пусть u_σ есть ортогональная составляющая вектора u , лежащая в касательной плоскости к поверхности разрыва $B(t)$. Проектирование на эту плоскость второго из уравнений (9) дает соотношение

$$\rho(u_n - D_n)[u_\sigma] = 0, \quad (10)$$

которое позволяет дать следующую классификацию сильных разрывов (предполагается, что $\rho \neq 0$).

Первый тип разрыва: $u_n = D_n$. В этом случае скорость течения газа в направлении нормали n к $B(t)$ равна скорости перемещения самой поверхности $B(t)$ в том же направлении. Следовательно, через такой разрыв *газ не течет*. Из (9) следует, что на таком разрыве необходимо $[p] = 0$ и $[u_n] = 0$. Однако, вообще говоря, может быть $[\rho] \neq 0$, $[\varepsilon] \neq 0$ и $[u_\sigma] \neq 0$. Сильный разрыв этого типа называется *контактным разрывом*.

Второй тип разрыва: $u_n \neq D_n$. В этом случае $[u_\sigma] = 0$, но, вообще говоря, $[u_n] \neq 0$, $[\rho] \neq 0$, $[p] \neq 0$, $[\varepsilon] \neq 0$. Через такой разрыв *газ течет*. Сильный разрыв этого типа называется *ударной волной*.

Основное качественное различие двух указанных типов разрывов состоит в том, что контактный разрыв разделяет области, каждая из которых состоит все время из одних и тех же частиц газа, а ударная волна распространяется по частицам газа.

Ударные волны. Поверхность ударной волны принято также называть *фронтом* ударной волны.

Определение 4. Та сторона фронта ударной волны, с которой газ натекает на нее, называется *передней стороной* (или стороной *перед фронтом*) ударной волны. Противоположная сторона фронта называется *задней стороной* (или стороной *за фронтом*) ударной волны.

В дальнейшем (если не сделано специальных оговорок) принимается следующее соглашение: нормаль $\mathbf{n}$ к фронту ударной волны направлена в *переднюю сторону* (в область перед фронтом) ударной волны. Пусть индекс «1» отмечает значения газодинамических величин на передней стороне, а индекс «2» — на задней стороне ударной волны. Наконец, вводится *скорость течения газа относительно фронта* в направлении нормали $\mathbf{n}$:

$$v = u_n - D_n. \quad (11)$$

В последующих формулах используется также обозначение удельного объема $V = 1/\rho$.

После небольших преобразований исходные уравнения сильного разрыва для ударных волн принимают вид

$$\rho_2 v_2 = \rho_1 v_1, \quad (12)$$

$$p_2 + \rho_2 v_2^2 = p_1 + \rho_1 v_1^2, \quad (13)$$

$$\varepsilon_2 + p_2 V_2 + \frac{1}{2} v_2^2 = \varepsilon_1 + p_1 V_1 + \frac{1}{2} v_1^2. \quad (14)$$

Они выражают соответственно законы сохранения массы, импульса и энергии в ударных волнах. Эти уравнения связаны с изменением вектора скорости в направлении нормали к фронту; кроме них еще выполнено уравнение сохранения касательной к фронту составляющей вектора скорости:

$$u_{\sigma_2} = u_{\sigma_1}. \quad (15)$$

Из уравнений (12) и (13) можно найти выражения для относительных скоростей

$$v_1^2 = \frac{\rho_2 p_2 - p_1}{\rho_1 \rho_2 - \rho_1}, \quad v_2^2 = \frac{\rho_1 p_2 - p_1}{\rho_2 \rho_2 - \rho_1} \quad (16)$$

и получить соотношение

$$(v_2 - v_1)^2 = (p_2 - p_1)(V_1 - V_2). \quad (17)$$

Исключение относительных скоростей из (14) с помощью (16) дает

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \frac{1}{2}(p_2 + p_1)(V_1 - V_2). \quad (18)$$

Из определения 4 и соглашения о направлении нормали $\mathbf{n}$ в сторону перед фронтом следует, что $v_1 < 0$; в силу (12) и положительности плотности ρ также $v_2 \leq 0$. Кроме того, из (16) и (18) следует, что все скачки

$$[\rho] = \rho_2 - \rho_1, \quad [p] = p_2 - p_1, \quad [\varepsilon] = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$$

имеют один и тот же знак.

Адиабата Гюгонио. При исследовании ударных волн ключевым является уравнение (18), так как оно связывает только термодинамические величины. Более того, в силу уравнения состояния (2.7) верны выражения $\varepsilon_1 = e(V_1, p_1)$ и $\varepsilon_2 = e(V_2, p_2)$, благодаря чему уравнение (18) определяет термодинамическое состояние (V_2, p_2) газа за ударной волной только по термодинамическому состоянию (V_1, p_1) перед волной.

Определение 5. Функция переменных (V, p)

$$H = H(V, p; V_1, p_1) = e(V, p) - e(V_1, p_1) + \frac{1}{2}(V - V_1)(p + p_1) \quad (19)$$

называется *функцией Гюгонио*. Кривая на плоскости $R^2(V, p)$, заданная уравнением

$$H(V, p; V_1, p_1) = 0, \quad (20)$$

называется *адиабатой Гюгонио с центром (V_1, p_1)* .

Иногда вместо термина «адиабата Гюгонио» употребляется синоним «ударная адиабата». С функцией Гюгонио (19) уравнение (18) записывается в виде $H(V_2, p_2; V_1, p_1) = 0$.

Для политропного газа, в силу выражения (2.6), уравнение адиабаты Гюгонио (20) приводится к виду

$$\frac{p}{p_1} = \frac{(\gamma + 1)V_1 - (\gamma - 1)V}{(\gamma + 1)V - (\gamma - 1)V_1}. \quad (21)$$

Этому уравнению соответствует уравнение ударного перехода (18), записанное вместо удельных объемов V_i через плотности ρ_i :

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(\gamma + 1)\rho_2 - (\gamma - 1)\rho_1}{(\gamma + 1)\rho_1 - (\gamma - 1)\rho_2}. \quad (22)$$

§ 5. Основные свойства ударных волн

Здесь собраны фундаментальные свойства ударного перехода, т. е. изменения основных величин при переходе через ударную волну. Эти свойства являются общими и верны для любого нормального газа (определение 2.2). Ниже они фиксируются в виде ряда теорем и их следствий.

Форма адиабаты Гюгонио. Вначале устанавливается общая форма адиабаты Гюгонио (4.20) на плоскости $R^2(V, p)$.

Теорема 1. Для любой точки $(V_1, p_1) \in Q$ уравнение адиабаты Гюгонио с центром (V_1, p_1) может быть записано в виде

$$V = W(p) = W(p; V_1, p_1) \quad (1)$$

с трижды непрерывно дифференцируемой функцией $W(p)$, которая однозначно определена и является строго убывающей для всех $p \in (0, \infty)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы (2.1, с) справедливо неравенство

$$2\partial H/\partial V = 2e_V(V, p) + p + p_1 > 0.$$

Кроме того, поведение функции H при фиксированном p таково, что $H \rightarrow +\infty$ при $V \rightarrow \infty$ и, в силу (2.11), $H \rightarrow -e(V_1, p_1) - \frac{1}{2}V_1(p + p_1) < 0$ при $V \rightarrow 0$. Поэтому для каждого $p \in (0, \infty)$ существует единственное значение $V = W(p)$, при котором $H = 0$, т.е. справедливо представление адиабаты Гюгонио (1). Гладкость функции W следует из условия 2° определения 2.2 для нормального газа.

Далее, дифференцирование тождества $H(W(p), p; V_1, p_1) = 0$ по p дает соотношение

$$(2e_V + p + p_1) \frac{\partial W}{\partial p} + (2e_p + W(p) - V_1) = 0, \quad (2)$$

позволяющее установить знак производной $\partial W/\partial p$. Первая скобка в (2), как отмечено выше, строго положительна. Для оценки второй скобки используется неравенство (2.10, b), в силу которого вдоль $H = 0$ справедливы соотношения

$$\begin{aligned} 2e_p + W(p) - V_1 &= 2e_p - 2 \frac{e(V, p) - e(V_1, p_1)}{p + p_1} > \\ &> 2 \left(\frac{e}{p} - \frac{e - e_1}{p + p_1} \right) = 2 \frac{ep_1 + e_1p}{p(p + p_1)} > 0. \end{aligned}$$

Поэтому из (2) следует, что для $p \in (0, \infty)$ всюду $\partial W/\partial p < 0$. ■

Следствие 1. Вдоль адиабаты Гюгонио существуют предельные значения

$$\bar{V}_0 = \lim_{p \rightarrow 0} W(p) > V_1, \quad \bar{V}_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} W(p) < V_1. \quad (3)$$

Можно показать, что в нормальном газе всегда $\bar{V}_0 < \infty$.

Поведение вблизи центра. Следующие факты относятся к поведению адиабаты Гюгонио вблизи ее центра. Пусть $S(p) = \sigma(W(p), p)$ — значения энтропии вдоль адиабаты Гюгонио. В последующих формулах индексом «1» обозначаются значения величин в центре (V_1, p_1) , например: $S_1 = S(p_1)$ и т. п.

Теорема 2. *Справедливо предельное соотношение*

$$\lim_{p \rightarrow p_1} \frac{S(p) - S_1}{(p - p_1)^3} = k_1 > 0, \quad (4)$$

и в центре (V_1, p_1) адиабата Гюгонио имеет с изэнтропой $a(S_1)$ касание второго порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\tilde{e}(p) = e(W(p), p)$. Дифференцирование тождества $H(W(p), p; V_1, p_1) = 0$ по p приводит к выражению

$$2\tilde{e}' = -(p + p_1)W' - (W - V_1)$$

(здесь и ниже штрихами обозначены производные по p). С другой стороны, если в уравнении (2.1) взять производные всех величин по p вдоль адиабаты Гюгонио, то оно примет вид $TS' = \tilde{e}' + pW'$. Исключение величины $\tilde{e}'$ с помощью предыдущего выражения приводит к соотношению

$$2TS' = (p - p_1)W' - (W - V_1). \quad (5)$$

Отсюда следует, что $S'_1 = 0$. Дифференцирование (5) дает

$$2T'S' + 2TS'' = (p - p_1)W'',$$

откуда $S''_1 = 0$. Наконец, еще одно дифференцирование приводит к равенству

$$2T''S' + 4T'S'' + 2TS''' = W'' + (p - p_1)W''',$$

из которого получается, что $2T_1S'''_1 = W'''_1$. Для вычисления значений W'_1 и W''_1 используется тождество $g(W(p), S(p)) = p$, дифференцирование которого один и два раза даст

$$\begin{aligned} g_V W' + g_S S' &= 1, \\ g_{VV} W'^2 + 2g_{VS} W' S' + g_{SS} S'^2 + g_V W'' + g_S S'' &= 0. \end{aligned}$$

В силу предыдущего в точке (V_1, p_1) эти равенства принимают вид $g_V W'_1 = 1$, $g_{VV} W'^2_1 + g_V W''_1 = 0$. Итак, получаются следующие выражения для производных:

$$S'_1 = 0, \quad S''_1 = 0, \quad S'''_1 = -\frac{g_{VV}}{2Tg^3_V}; \quad (6)$$

$$W'_1 = \frac{1}{g_V}, \quad W''_1 = -\frac{g_{VV}}{g^3_V}, \quad (7)$$

где значения правых частей взяты в центре (V_1, p_1) . Теперь ясно, что формула (4) следует из (6), причем $k_1 = (1/6)S'''_1$. Кроме того, для производных функции $V(p)$, определенной уравнением $g(V, S_1) = p$ и задающей изэнтропу $a(S_1)$ в виде $V = V(p)$, справедливы соотношения

$$g_V V' = 1, \quad g_{VV} V'^2 + g_V V'' = 0, \quad (8)$$

из которых в силу (7) следует, что $W'_1 = V'_1$ и $W''_1 = V''_1$. ■

Следствие 2. Для ударных волн справедливы следующие предельные соотношения при $p_2 \rightarrow p_1$ вдоль адиабаты Гюгонио:

$$\begin{aligned} \lim \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} &= c_1^2, \quad \lim |u_{n_1} - D_n| = \lim |u_{n_2} - D_2| = c_1, \\ \lim \frac{u_{n_2} - u_{n_1}}{p_2 - p_1} &= \frac{1}{\rho_1 c_1}. \end{aligned} \quad (9)$$

Равенства (9) легко получаются с помощью (4) из определения (2.3) и формул (4.16), (4.17).

Величину скачка $p_2 - p_1 = [p]$ в ударной волне называют (абсолютной) *силой разрыва*. Предыдущие результаты можно описать, сказав, что скачок энтропии в ударной волне есть величина *третьего* порядка малости, а скачки плотности и нормальной составляющей вектора скорости (а также и внутренней энергии) суть величины первого порядка малости по сравнению с силой разрыва, когда последняя стремится к нулю. Второе соотношение (9) означает, что при этом относительная скорость движения газа по нормали к поверхности ударной волны стремится к скорости звука. Другими словами, «бесконечно слабые» ударные волны распространяются по газу со скоростью звука.

Возрастание энтропии. Соотношение (4) показывает, что локально, вблизи центра (V_1, p_1) , энтропия $S(p)$ монотонно возрастает с ростом p . Оказывается, что это свойство справедливо и в целом.

Теорема 3. *Вдоль адиабаты Гюгонио всюду*

$$S'(p) > 0 \quad (p \neq p_1). \quad (10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2 неравенство (10) выполнено в окрестности точки p_1 . Пусть $S'(p_2) = 0$ в некоторой точке $p_2 \neq p_1$. Тогда определена прямая l_{12} на плоскости $R^2(V, p)$, проходящая через точки (V_1, p_1) и (V_2, p_2) , где $V_2 = W(p_2)$. В силу теоремы 1 прямая l_{12} является прямой типа l_- , причем ее угловой коэффициент равен $k = dV/dp = (V_2 - V_1)/(p_2 - p_1)$. С другой стороны, из соотношения (5) в точке p_2 следует, что в этой точке $W'(p_2) = (W(p_2) - V_1)/(p_2 - p_1)$. Следовательно, прямая l_{12} касается адиабаты Гюгонио в точке (V_2, p_2) .

Теперь надо заметить, что наклон касательной к адиабате Гюгонио может быть вычислен дифференцированием тождества $\sigma(W(p), p) = S(p)$, т. е. из уравнения $\sigma_V W'(p) + \sigma_p = S'(p)$, которое, согласно сделанному предположению, в точке p_2 принимает вид $\sigma_V W'(p_2) + \sigma_p = 0$. Наклон же касательной к изэнтропе $a(S_2)$ вычисляется дифференцированием тождества $\sigma(V(p), p) = S_2$, что дает $\sigma_V V'(p_2) + \sigma_p = 0$. Сравнение этих соотношений показывает, что $V'(p_2) = W'(p_2)$, т. е. что изэнтропа $a(S_2)$ касается адиабаты Гюгонио, а значит, и прямой l_{12} в точке (V_2, p_2) . Согласно лемме 2.3 это означает, что энтропия S вдоль прямой l_{12} имеет в этой точке максимальное значение.

Однако если рассмотреть изменение функции Гюгонио (4.19) вдоль какой-нибудь прямой l , проходящей через точку (V_1, p_1) (например l_{12}), то для ее дифференцирования получится выражение

$$dH = d\varepsilon + \frac{1}{2}(V - V_1)dp + \frac{1}{2}(p + p_1)dV = d\varepsilon + p dV,$$

где последнее равенство выполнено в силу уравнения $V = V_1 + k(p - p_1)$ прямой l . Сравнение этого выражения с уравнением (2.1), в котором дифференциалы взяты вдоль прямой l , приводит к соотношению

$$T dS = dH, \quad (11)$$

справедливому, в частности, вдоль l_{12} . Функция H на прямой l_{12} обращается в нуль в точках (V_1, p_1) и (V_2, p_2) . По теореме Ролля в интервале (p_1, p_2) найдется точка p_3 , в которой $dH = 0$. Но тогда из (11) получится, что $dS(p_3) = 0$. Так как $p_3 \neq p_2$, то последнее равенство противоречит лемме 2.3. ■

Следствие 3. *Адиабата Гюгонио звезда относительно своего центра. Это означает, что каждый луч, выходящий из центра (V_1, p_1) , либо*

вообще не пересекает адиабату Гюгонио, либо пересекает ее только в одной точке. Образно выражаясь, можно сказать еще, что вся адиабата Гюгонио «видна» из своего центра. Свойство звездности вытекает непосредственно из соотношения (11) и леммы 2.3.

Уместно отметить, что звездность адиабаты Гюгонио следует только из условий 1° определения 2.2, более того, она справедлива и при выполнении лишь условий (2.12) для «газа Вейля». Условия 2° определения 2.2 использовались лишь для установления свойства монотонности адиабаты Гюгонио.

Из полученных фактов следует качественная картина расположения адиабаты Гюгонио среди семейства изэнтроп, показанная на рис. 1.

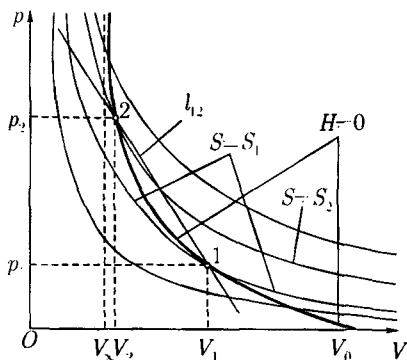


Рис. 1

Итак, вдоль всей адиабаты Гюгонио энтропия строго возрастает с ростом давления. Важность этого результата обусловлена тем, что с его помощью можно однозначно установить знаки скачков давления и плотности в ударной волне. Для этой цели привлекается второй закон термодинамики, согласно которому энтропия теплоизолированной системы не убывает. Так как в рассматриваемой здесь модели газовой динамики процессом теплопроводности пренебрегается, то каждую частицу газа следует считать теплоизолированной. Согласно предыдущему, если такая частица прошла через ударную волну с ненулевой силой разрыва, то в ней энтропия обязательно изменилась. В силу второго закона термодинамики это изменение должно быть возрастанием. Поэтому если состояние 1 находится перед фронтом ударной волны, то обязательно должно быть $S_2 > S_1$, и тогда из теоремы 3 следует, что $p_2 > p_1$ и $\rho_2 > \rho_1$. Если же состояние 1

находится за фронтом, то в том состоянии 2, из которого путем ударного перехода получилось состояние 1, необходимо должно быть $S_2 < S_1$ и, соответственно, $p_2 < p_1$ и $\rho_2 < \rho_1$. Итак, справедлив следующий вывод.

Следствие 4. Ударная волна всегда вызывает повышение давления и сжатие (уплотнение) газа; ударные волны разрежения невозможны.

Теорема Цемплена. Выражаемое следующей теоремой свойство ударного перехода фактически равносильно свойству возрастания энтропии вдоль адиабаты Гюгонио. В дальнейшем на него будут делаться ссылки как на теорему Цемплена.

Теорема 4. Абсолютная величина нормальной составляющей скорости движения газа относительно ударной волны больше скорости звука перед фронтом и меньше скорости звука за фронтом, т. е. если состояние 1 — перед фронтом, то

$$|u_{n1} - D_n| > c_1, \quad |u_{n2} - D_n| < c_2. \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматривается изменение энтропии S вдоль прямой $p - p_1 = k(V - V_1)$ типа l_- , проходящей через центр (V_1, p_1) адиабаты Гюгонио и какую-либо ее точку (V_2, p_2) , где $p_2 > p_1$, так что $k = (p_2 - p_1)/(V_2 - V_1) < 0$. Из соотношения (11), справедливого вдоль такой прямой, следует, что $dS = 0$ в некоторой точке, лежащей строго внутри интервала с концами (V_1, p_1) и (V_2, p_2) . В силу леммы 2.3 в этой точке S достигает максимума. Поэтому на концах интервала должно быть

$$(dS/dV)_1 < 0, \quad (dS/dV)_2 > 0. \quad (13)$$

Дифференцирование по V уравнения $p = g(V, S)$ вдоль прямой l_- даст соотношение $k = g_V + g_S(dS/dV)$, откуда в силу того, что $g_S > 0$, и неравенств (13) следуют неравенства

$$g_{V_1} > k > g_{V_2}.$$

Но формулы (2.13) и (2.18) дают выражение $g_V = -\rho^2 c^2$, в силу которого эти неравенства равносильны следующим:

$$\rho_2^2 c_2^2 > \frac{p_2 - p_1}{V_1 - V_2} > \rho_1^2 c_1^2.$$

Наконец, подстановка $V_i = 1/\rho_i$ ($i = 1, 2$) и учет уравнений сильного разрыва (4.16) приводят к неравенствам

$$c_2^2 > \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{p_2 - p_1}{p_2 - \rho_1} = v_2^2, \quad c_1^2 < \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{p_2 - p_1}{p_2 - \rho_1} = v_1^2,$$

которые равносильны (12).

Свойство определенности. Следующий факт, называемый *свойством определенности* ударной волны, нуждается в небольшом пояснении. Уравнения сильного разрыва для ударной волны (4.11)–(4.14) связывают семь величин

$$u_{n1}, \rho_1, p_1, u_{n2}, \rho_2, p_2, D_n. \quad (14)$$

Говорят, что ударная волна определена, если все эти величины известны. Так как для них имеется всего три уравнения — (4.12), (4.13), (4.14), то четыре из семи величин (14) могут быть заданы, а оставшиеся три должны находиться из этих уравнений. Возникает вопрос, можно ли такое определение осуществить. В сущности, это есть вопрос о существовании и единственности ударного перехода при различных заданиях четырех из параметров (14).

Здесь будет рассмотрено лишь такое задание четырех параметров, когда движение по одну сторону от ударной волны известно, т. е. когда заданы параметры

$$u_{n1}, \rho_1, p_1. \quad (15)$$

и, разумеется, фиксировано некоторое направление нормали к поверхности ударной волны. Ниже принимается, что нормаль n направлена в ту сторону, с которой находится заданное состояние (15). При этом не предполагается, что движение (15) находится перед фронтом. Вопрос ставится так: будет ли ударный переход определен, если кроме значений (15) задать еще одну из оставшихся величин (14)? В частности, можно ли определить, на какой стороне фронта находится движение (15)?

При такой постановке вопроса на величины (15) надо наложить некоторые необходимые ограничения. Данные (15) определяют адиабату Гюгонио с центром (V_1, p_1) , где $V_1 = 1/\rho_1$. В силу (3) значение ρ_2 не может быть задано произвольно. Именно, если движение (15) находится перед фронтом, то должно быть

$$\rho_1 < \rho_2 < \bar{\rho}_\infty = 1/\bar{V}_\infty, \quad (16)$$

а если движение (15) — за фронтом, то

$$\rho_1 > \rho_2 > \bar{\rho}_0 = 1/\bar{V}_0. \quad (17)$$

Далее, так как точка (V_2, p_2) , в силу (4.16), лежит на прямой

$$p - p_1 = -\rho_1^2 v_1^2 (V - V_1). \quad (18)$$

то в случае $p_2 < p_1$, т. е. когда движение (15) находится за фронтом, значение v_1^2 (связанное с заданием D_n) не может быть очень мало. Его нижняя грань определяется из условия прохождения прямой (18) через точку $(\bar{V}_0, 0)$ пересечения адиабаты Гюгонио с осью $p = 0$. Следовательно, в этом случае должно быть

$$v_1^2 \geq p_1 / \rho_1^2 (\bar{V}_0 - V_1). \quad (19)$$

Теорема 5. Для любого заданного движения (15) существует один и только один ударный переход, в котором одна из величин ρ_2 , p_2 или D_n имеет произвольно заданное значение (с ограничениями (16), (17), (19), причем этим заданием определяется и сторона фронта, с которой находится движение (15). Если же к движению (15) дополнительно задана величина u_{n_2} , то соответствующий ударный переход всегда существует, но, в зависимости от абсолютной величины скачка $[u_n]$, возможны одно или два решения. В последнем случае единственное решение выделяется указанием стороны фронта, с которой находится движение (15).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть дополнительно к данным (15) задано p_2 . Сравнение p_2 с p_1 и учет того, что ударные волны ведут к повышению давления, определяет, с какой стороны фронта находится движение (15). В обоих случаях по адиабате Гюгонио (4.20) однозначно определяется значение $V_2 = 1/\rho_2$, после чего можно найти D_n из уравнения (4.16), а именно:

$$D_n = u_{n_1} \pm \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{p_2 - p_1}{p_2 - p_1}}. \quad (20)$$

В силу соглашения о направлении нормали n в сторону движения (15), в формуле (20) следует взять знак «+», если движение (15) находится перед фронтом, и знак «-», если (15) — за фронтом. Наконец, u_{n_2} определяется из уравнения $\rho_2 v_2 = \rho_1 v_1$, что дает

$$u_{n_2} = D_n + \frac{\rho_1}{\rho_2} (u_{n_1} - D_n), \quad (21)$$

и тем самым случай заданного p_2 исчерпан.

Если дополнительно к (15) задано ρ_2 , то сравнение p_2 с p_1 определяет сторону фронта для движения (15), а по адиабате Гюгонио находится соответствующее значение p_2 (всегда существующее при выполнении огра-

ний (16) или (19)). После этого все делается так же, как и в первом случае.

Пусть дополнительно к (15) задана скорость перемещения ударной волны D_n . Тогда можно сравнить $v_1 = u_{n_1} - D_n$ со скоростью звука c_1 в движении (15), которая вычисляется по формуле

$$c_1^2 = -V_1^2 g_V(V_1, S_1),$$

и применить теорему 4. При $|v_1| > c_1$ движение (15) находится перед фронтом, а при $|v_1| < c_1$ — за фронтом. В последнем случае надо проверить условие (19), и если оно выполнено, то, без дальнейших ограничений, можно утверждать, что система уравнений (18) и $H(V, p; V_1, p_1) = 0$ имеет единственное решение (V_2, p_2) , отличное от (V_1, p_1) . Справедливость этого утверждения вытекает из следствия теоремы 3 (звездности адиабаты Гюгонио). После этого величина u_{n_2} определяется по формуле (21).

Наконец, пусть задана величина u_{n_2} . Здесь для определения величин V_2, p_2 имеется система из двух уравнений: (4.17) и (4.18) или

$$(p - p_1)(V_1 - V) = (u_{n_2} - u_{n_1})^2, \quad H(V, p; V_1, p_1) = 0. \quad (22)$$

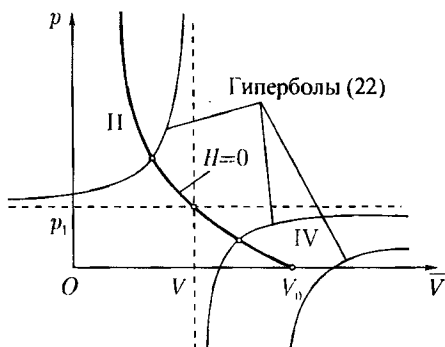


Рис. 2

Если начало координат на плоскости $R^2(V, p)$ поместить в точку (V_1, p_1) , то ветви гиперболы, описываемой первым уравнением (22), расположатся в тех же квадрантах II и IV, в которых лежит адиабата Гюгонио. Из свойств адиабаты Гюгонио (теорема 1) следует, что во II квадранте всегда есть одна и только одна точка пересечения ее с гиперболой (22), а в IV квадранте — или одна такая точка, или ни одной (рис. 2).

Ясно, что точки пересечения в IV квадранте нет при достаточно больших значениях $(u_{n_2} - u_{n_1})^2$ и что нижняя грань таких значений определяется прохождением гиперболы через точку $(\bar{V}_0, 0)$. Итак, в IV квадранте есть решение, если

$$(u_{n_2} - u_{n_1})^2 \leq p_1(\bar{V}_0 - V_1), \quad (23)$$

и нет решения в случае неравенства противоположного знака. В случае (23) указание стороны фронта для движения (15) определяет единственное решение, а именно решение, лежащее во II квадранте (если движение (15) находится перед фронтом), или решение в IV квадранте (если движение (15) находится за фронтом). В противоположном случае есть всего одно решение во II квадранте, соответствующее расположению движения (15) перед фронтом. ■

§ 6. Характеристики и слабые разрывы

Уравнения газовой динамики (3.16) образуют систему квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка из пяти уравнений для пяти искомых функций от четырех независимых переменных. Фундаментальное свойство этой системы состоит в ее *гиперболичности* и описывается с помощью характеристик. Поэтому вначале уместно напомнить ряд общих фактов, связанных с понятием характеристик.

Нормальные характеристические векторы; гиперболичность. Рассматривается система из m квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка для m искомых функций $u = (u^1, \dots, u^m)$ от n независимых переменных $x = (x^1, \dots, x^n)$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{kl}^i \frac{\partial u^k}{\partial x^i} = f_l \quad (l = 1, \dots, m). \quad (1)$$

где коэффициенты a_{kl}^i и правые части f_l являются заданными функциями переменных (x, u) . С помощью квадратных $m \times m$ -матриц A^i с элементами a_{kl}^i (k — номер столбца, l — номер строки) и обозначения $u_i = \partial u / \partial x^i$ систему (1) можно записать в матричной форме:

$$\sum_{i=1}^n A^i u_i = f. \quad (2)$$

Здесь введен вектор-столбец $f = (f_1, \dots, f_m)$ и предполагается, что каждая матрица A^i умножается на вектор-столбец с элементами $(u_i^1, \dots, u_i^m)$

по обычному правилу «строки на столбцы». Пусть $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ есть вспомогательный n -мерный вектор. Системе (1) или (2) сопоставляется ее *характеристическая матрица*

$$A(\xi) = \sum_{i=1}^n A^i \xi_i. \quad (3)$$

Элементы матрицы $A(\xi)$ даются формулами

$$A_{kl}(\xi) = \sum_{i=1}^n a_{kl}^i \xi_i \quad (k, l = 1, \dots, m). \quad (4)$$

Определение 1. Вектор ξ называется *нормальным характеристическим вектором* системы (1) в точке (x, u) , если

$$\det A(\xi) = 0; \quad (5)$$

при этом направление $(n-1)$ -мерной гиперплоскости в пространстве $R^n(x)$, заданной уравнением

$$\sum_{i=1}^n \xi_i x^i = \text{const},$$

называется *характеристическим направлением* для системы (1) в точке (x, u) . Уравнение (5) относительно вектора ξ называется *характеристическим уравнением*.

С нормальным характеристическим вектором ξ ранг r матрицы $A(\xi)$ меньше m . Значит между ее строками есть линейная зависимость: существует хотя бы один *левый собственный вектор* λ , с которым справедливо равенство

$$\lambda A(\xi) = 0. \quad (6)$$

В общем случае для данного ξ определено векторное подпространство (пространства R^m) векторов λ , удовлетворяющих (6). В этих терминах формулируется фундаментальное понятие *гиперболичности* системы (1). Пусть $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ есть фиксированный единичный вектор, $|\eta| = 1$. Тогда ξ может быть разложен на две составляющие: по направлению η и по направлению, ортогональному η , т.е. представлен в виде

$$\xi = \eta z + \sigma \quad (\eta \cdot \sigma = 0).$$

В результате подстановки этого выражения $\det A(\xi)$ становится многочленом от z степени m с коэффициентами, зависящими от σ , а характеристическое уравнение принимает вид

$$\det A(\eta z + \sigma) = 0. \quad (7)$$

Определение 2. Система (1) называется *гиперболической*, если существует такой вектор η , что при любом векторе σ уравнение (7) имеет m вещественных корней (считаемых с их кратностью) и если в пространстве R^m существует базис из левых собственных векторов, соответствующих всем этим корням. Система (1) называется *эллиптической*, если ни при каком векторе η уравнение (7) не имеет вещественных корней.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. *Симметрические* системы (1), в которых все матрицы A^i симметричны и некоторая линейная комбинация $\theta_i A^i$ с вещественными θ_i является положительно определенной матрицей, являются гиперболическими.

Необходимо учитывать, что для нелинейных систем вида (1) свойство гиперболичности может зависеть от решения. Пусть набор функций

$$u^k = \varphi^k(x) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (8)$$

образует некоторое решение системы (1). Оно будет кратко называться «решением Φ ». На решении Φ точка $(x, u) = (x, \varphi(x))$ определяется точкой $x \in R^n$. В соответствии с этим очевидным образом определяются понятия нормального характеристического вектора, характеристического направления и гиперболичности системы (1) в точке x на решении Φ .

Определение 3. Пусть дано некоторое решение Φ . Гиперповерхность $\Gamma \subset R^n(x)$, в каждой точке которой касательная гиперплоскость имеет характеристическое направление на решении Φ , называется *характеристической поверхностью* (кратко: *характеристикой*) системы (1) на решении Φ .

Отыскание характеристик основано на том, что гиперповерхность Γ с уравнением $h(x) = \text{const}$ является характеристикой на решении Φ , если и только если вектор $\xi = \nabla h$ удовлетворяет характеристическому уравнению (5), т. е. уравнению

$$\det A(\nabla h) = 0, \quad (9)$$

в котором сделана подстановка (8). Само по себе уравнение (9) есть дополнительное уравнение с частными производными первого порядка (вообще говоря, нелинейное) относительно одной неизвестной функции h . Если на каком-нибудь решении Φ вещественные нормальные характеристические векторы существуют для целой области точек x , то уравнение (9) также имеет решения $h(x)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если коэффициенты системы (1) не зависят от переменных u , то в предыдущих формулировках можно опустить слова «на решении Φ ». В этом случае характеристики определяются независимо от решения.

Условия на характеристиках. Пусть $\lambda = (\lambda^1, \dots, \lambda^m)$ есть левый собственный вектор матрицы $A(\nabla h)$. В результате умножения l -го уравнения (1) на λ^l и суммирования по l получается соотношение

$$\sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m \lambda^l a_{kl}^i \frac{\partial u^k}{\partial x^i} \right) = \sum_{l=1}^m \lambda^l f_l. \quad (10)$$

Оказывается, что это соотношение обладает следующим важным свойством.

Теорема 1. Если функция $h(x)$ удовлетворяет уравнению (9) на некотором решении Φ и если в (10) положить $\lambda = \lambda(\nabla h)$, то каждое из выражений в круглых скобках равенства (10) есть производная от функции u^k вдоль некоторой кривой, лежащей на поверхности $h(x) = \text{const}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Производная от u^k вдоль кривой, заданной параметрически уравнениями $x^i = x^i(t)$ ($i = 1, \dots, n$), дается формулой

$$\frac{du^k}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial u^k}{\partial x^i}.$$

Поэтому достаточно показать, что для каждого фиксированного k кривая, определяемая системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{l=1}^m \lambda^l a_{kl}^i \quad (i = 1, \dots, n)$$

и проходящая чрез точку x_0 , принадлежащую поверхности $h(x) = \text{const}$, лежит на этой поверхности целиком. Но вдоль такой кривой

$$\begin{aligned} \frac{dh(x)}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial h}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^m \lambda^l a_{kl}^i \frac{\partial h}{\partial x^i} = \\ &= \sum_{l=1}^m \lambda^l \sum_{i=1}^n a_{kl}^i \frac{\partial h}{\partial x^i} = \sum_{l=1}^m \lambda^l A_{kl}(\nabla h) = 0, \end{aligned}$$

где последнее равенство выполнено по построению. Следовательно, вдоль всей этой кривой $h(x) = h(x_0) = \text{const}$. ■

Соотношения (10), получаемые для некоторой характеристики $h(x) = \text{const}$ со всевозможными векторами $\lambda = \lambda(\nabla h)$, определяемыми из (6), называются условиями на характеристике.

Важность факта существования условий на характеристиках обусловлена тем, что в условиях (10) дифференциальные операторы, действующие на каждую из искомых функций u^k , являются операторами *внутреннего дифференцирования* на характеристике $\Gamma(h(x) = \text{const})$. Это означает, что результат действия этих операторов (круглые скобки в (10) может быть вычислен, если искомые функции u^k заданы только на гиперповерхности Γ . Это свойство может быть положено в основу следующего определения понятия характеристик, эквивалентного определению 3.

Определение 3'. Гиперповерхность $\Gamma \subset R^n(x)$ называется *характеристикой* системы (1) (на решении Φ), если существует такая линейная комбинация уравнений (1), в которой дифференцирования всех искомых функций являются внутренними по отношению к Γ .

Задача Коши. Характеристики играют важную роль в качественной теории дифференциальных уравнений, в частности, при постановке, анализе и решении краевых задач. Например, *задача Коши* для системы (1) ставится так: на некоторой «начальной» гиперповерхности Γ задаются значения искомых функций (данные Коши)

$$u^k = \psi^k(x) \quad (k = 1, \dots, m; x \in \Gamma), \quad (11)$$

и требуется найти решение (7) в окрестности Γ , принимающее эти значения на Γ . Существование условий на характеристике означает, что данные Коши (11) нельзя задавать произвольно, если Γ является характеристикой системы (1). Эти данные должны быть связаны соотношениями (10). Кроме того, даже если данные (11) удовлетворяют соотношениям (10) на характеристике Γ , то решение задачи Коши, вообще говоря, не единственно. Действительно, если бы этими данными решение определялось однозначно, то по ним из системы (1) можно было бы найти значения производных по направлению нормали к Γ . Но это невозможно, так как в системе (1) имеется всего m уравнений и $m - r > 0$ из них равносильны уравнениям вида (10), в которых, согласно теореме 1, содержатся производные от всех u^k только вдоль Γ . Эти соображения показывают, что задача Коши с данными вида (11) на характеристике является недоопределенной.

Слабый разрыв. Развивая предыдущее рассуждение, можно рассмотреть следующую ситуацию. Пусть на некотором решении Φ существует характеристика Γ , делящая (локально) пространство $R^n(x)$ на две части, 1 и 2, и пусть сужение данного решения на часть 1 есть Φ_1 . Спрашивается, можно ли восстановить решение Φ в части 2, зная только Φ_1 ? Следует учесть, что решение Φ удовлетворяет условиям на характеристике Γ , и потому по данным на Γ все производные по нормали к Γ в части 2 найти нельзя. Поэтому возможно, что в части 2 существует другое реше-

ние $\Phi_2 \neq \Phi$, непрерывно примыкающее на Γ к решению Φ_1 . Отличие Φ_2 от Φ в точках Γ будет в том, что некоторые производные по нормали к Γ будут на Γ различными для Φ_2 и Φ . Образно говоря, решение, составленное из Φ_1 и Φ_2 , вдоль характеристики Γ имеет как бы излом. Это приводит к понятию слабого разрыва.

Определение 4. Гладкая гиперповерхность $\Gamma \subset R^n(x)$ называется *поверхностью слабого разрыва* решения Φ , если это решение, а также первые производные от него по касательным направлениям к Γ всюду непрерывны (включая Γ), а некоторые первые производные по нормали к Γ , будучи непрерывны вне Γ и односторонне непрерывны на Γ , имеют в точках Γ разрыв первого рода.

Предшествующее рассуждение показывает, что характеристика может быть поверхностью слабого разрыва (но может и не быть таковой). Обратное утверждение является точным.

Теорема 2. Если гиперповерхность Γ является поверхностью слабого разрыва решения Φ , то Γ — характеристика на решении Φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ξ — единичный вектор нормали к Γ . Рассуждая от противного, достаточно показать, что если в точках Γ на решении Φ будет $\det A(\xi) \neq 0$, то из системы (1) можно найти единственным образом первые производные всех функций u^k по направлению ξ , выразив их через значения самих функций u^k и их производных по касательным направлениям к Γ . Это будет означать, что на Γ разрыва нормальных производных нет, в противоречии с условием теоремы.

Пусть $\partial/\partial l$ есть дифференцирование по направлению нормали ξ к Γ . Для каждого направления l дифференцирование $\partial/\partial l$ можно разложить в сумму

$$\partial/\partial l = (\xi \cdot l) \partial/\partial \lambda + \partial/\partial s,$$

где $\partial/\partial s$ — дифференцирование в направлении, перпендикулярном ξ , т. е. касательном к Γ . В частности, для $\partial/\partial x^i$ в качестве l надо взять орт оси x^i , так что $\xi \cdot l = \xi_i$, и это разложение дает

$$\frac{\partial u^k}{\partial x^i} = \xi_i \frac{\partial u^k}{\partial \lambda} + \frac{\partial u^k}{\partial s^i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad (12)$$

В результате подстановки выражений (12) в уравнения (1) с учетом формул (4) получаются уравнения

$$\sum_{k=1}^m A_{kl}(\xi) \frac{\partial u^k}{\partial \lambda} = f_l - \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n a_{ki}^l \frac{\partial u^k}{\partial s^i} \quad (l = 1, \dots, m). \quad (13)$$

В силу определения 4 правые части равенств (13) являются функциями, непрерывными всюду, в том числе и на Γ . Так как матрицей из коэффициентов при $\partial u^k / \partial \lambda$ является характеристическая матрица $A(\xi)$, то неравенство $\det A(\xi) \neq 0$ позволяет определить все нормальные производные $\partial u^k / \partial \lambda$ однозначно. ■

Задача об отыскании характеристик сводится к построению решений уравнения (9) для одной искомой функции $h(x)$, которое само есть уравнение с частными производными первого порядка. Общая теория таких уравнений (см. напр. [9]) устанавливает возможность их решения методом характеристик. В свою очередь, характеристики уравнения (9) называются *бихарактеристиками* системы (1) (в общем случае — на решении Φ) и описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений. Существенное свойство бихарактеристик состоит в том, что вдоль них, по определенным законам, распространяются слабые разрывы (скачки производных) решений гиперболических систем вида (1). Законы распространения слабых разрывов задаются специально выводимыми *транспортными* уравнениями; они имеют большое значение для понимания и анализа структуры решений системы (1). Некоторые детали упомянутых здесь построений будут изложены ниже на ряде примеров различных газодинамических моделей.

Характеристики уравнений газовой динамики. Предыдущие понятия и факты существенны для понимания качественных закономерностей движения газа и должны учитываться при анализе уравнений газовой динамики. Для отыскания характеристик исходную систему удобно взять в виде системы (3.15) или (3.16), для которой соответствующая форма записи (2) уже получена в виде (3.17). Из нее следует, что *система уравнений газовой динамики является гиперболической*. Для вычисления вводится следующая запись искомого нормального характеристического вектора:

$$\xi = (\tau, \xi, \eta, \zeta), \quad (14)$$

соответственно обозначениям независимых переменных (t, x, y, z) . Характеристическая матрица $A^t \tau + A^x \xi + A^y \eta + A^z \zeta$ такова:

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} \rho\chi & 0 & 0 & \xi & 0 \\ 0 & \rho\chi & 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \rho\chi & \zeta & 0 \\ \xi & \eta & \zeta & b\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \chi \end{pmatrix}; \quad (15)$$

здесь введено обозначение

$$\chi = \tau + u\xi + v\eta + w\zeta. \quad (16)$$

Вычисление определителя с учетом обозначения (3.15) дает

$$\det A(\xi) = \rho^3 b \chi^3 (\chi^2 - c^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)). \quad (17)$$

Этот определитель, как многочлен пятой степени относительно τ , имеет пять вещественных корней, которые даются следующими формулами: один трехкратный корень

$$\chi = 0 \quad (18)$$

и два простых корня

$$\chi = \pm c \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \quad (19)$$

Соответственно корням определителя (17) характеристические поверхности, уравнения которых получаются, если положить в (18) или (19)

$$\xi = (\tau, \xi, \eta, \zeta) = (h_t, h_x, h_y, h_z), \quad (20)$$

подразделяются на два типа. Для наглядного представления об отличительных свойствах разных типов характеристик удобно вернуться в пространство $R^3(x)$ и представить каждую характеристику Γ как двумерную поверхность $C(t)$, перемещающуюся со временем в $R^3(x)$. Пусть n есть орт нормали к $C(t)$ и C_n — скорость перемещения поверхности в направлении нормали n (см. определение 4.3). Считая ξ единичным вектором, можно написать формулу, аналогичную (4.2):

$$\xi = l \cos(\xi, t) + n \sin(\xi, t),$$

в силу которой для величины (16) получается выражение

$$\chi = \cos(\xi, t) + u_n \sin(\xi, t).$$

С другой стороны, так же как и в § 4 (см. (4.7), для скорости перемещения C_n справедливо соотношение

$$C_n = \sin(\xi, t) + \cos(\xi, t) = 0.$$

Следовательно,

$$\chi = (u_n - C_n) \sin(\xi, t). \quad (21)$$

Кроме того, из представления ξ следует равенство

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \sin^2(\xi, t). \quad (22)$$

Классификация характеристик. Предполагая скорость перемещения C_n конечной, можно дать следующую классификацию типов характеристик.

Первый тип: $\chi = 0$ или $u_n = C_n$. Через такую характеристику газ не течет. Она отделяет одни частицы от других и, следовательно, в пространстве R^4 является геометрическим местом траекторий частиц. Характеристика этого типа называется *контактной характеристикой* (иногда говорят — *энтропийной характеристикой*).

Второй тип: χ дается формулой (19). В силу (21) и (22) эта формула равносильна такой:

$$u_n - C_n = \pm c. \quad (23)$$

Через такую характеристику газ течет, причем относительно характеристики по нормали к ней — со скоростью звука. Характеристики этого типа называются *звуковыми характеристиками*. Ясно, что скорость распространения звуковой характеристики, в направлении нормали к ней, по частицам газа равна скорости звука.

Слабый разрыв возможен как на контактной, так и на звуковой характеристике. Из предыдущего следует, что если слабый разрыв распространяется по частицам газа (т. е. если через поверхность слабого разрыва газ течет), то его скорость относительно частиц газа (по нормали к поверхности разрыва) всегда равна скорости звука.

Для отыскания уравнений характеристик в виде $h(t, x) = \text{const}$ следует, согласно общей теории, подставить выражение (20) в уравнения (18) и (19). В случае контактных характеристик это дает уравнение

$$h_t + uh_x + vh_y + wh_z = 0. \quad (24)$$

В случае звуковых характеристик соответствующее уравнение таково:

$$h_t + uh_x + vh_y + wh_z = \pm c \sqrt{h_x^2 + h_y^2 + h_z^2}. \quad (25)$$

Каждое из этих уравнений, в которых u, v, w, c надо считать известными функциями переменных (x, t) (характеристики ищутся на данном решении!), представляет собой дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка для одной искомой функции h . Для этих уравнений можно поставить задачу Коши: найти решение $h(t, x)$, если задана функция

$$h(0, x) = h_0(x). \quad (26)$$

Из общей теории дифференциальных уравнений этого вида следует, что если функции u, v, w, c являются достаточно гладкими, то для любой непре-

рывной начальной функции (26) существует единственное решение (во всяком случае, в малом по t). С геометрической точки зрения задание начальных данных (26) эквивалентно заданию начальной *двумерной* поверхности в $R^3(x)$ с уравнением $h_0(x) = \text{const}$, через которую и пройдут характеристики $h(t, x) = \text{const}$. Для одной и той же начальной поверхности таких характеристик будет три: одна контактная — решение уравнения (24) и две звуковые — решения уравнения (25) для разных знаков в правой части.

Полезно отметить, что уравнения (24) и (25) компактно записываются с помощью оператора дифференцирования в частице (3.3):

$$Dh = 0, \quad Dh \pm c|\nabla h| = 0. \quad (27)$$

В дальнейшем контактные характеристики будут обозначаться символом C_0 , а звуковые — символами C_+ или C_- соответственно выбору знака в (27).

Бихарактеристики. Решение задачи Коши (26) может быть построено методом характеристик применительно к каждому из уравнений (27). Характеристики этих уравнений называются *бихарактеристиками* исходных уравнений газовой динамики. Соответственно типам характеристик уравнений газовой динамики различаются контактные и звуковые бихарактеристики. Согласно общей теории они представляют собой кривые в пространстве $R^4(x, t)$, вдоль которых координаты точки и производные функции h удовлетворяют определенным обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые называются *уравнениями бихарактеристик*.

Уравнение (24) линейно относительно h . Поэтому его характеристики определяются просто как интегральные кривые системы

$$dx/dt = u.$$

Следовательно, контактные бихарактеристики совпадают с траекториями частиц в $R^4(x, t)$.

Для уравнения (25) характеристик C_+ соответствующие уравнения бихарактеристик имеют вид

$$\begin{aligned} dx/dt &= u + c\nabla h/|\nabla h|, \\ dh_j/dt &= -u_j \cdot \nabla h - c_j |\nabla h| \quad (j = t, x, y, z), \end{aligned} \quad (28)$$

где символами с нижним индексом j обозначены частные производные по указанным аргументам. Для характеристик C_- в этих уравнениях следует заменить c на $-c$.

При отыскании бихарактеристик путем интегрирования их дифференциальных уравнений следует учитывать, что начальные данные для

системы (28), включающие задание начальных значений всех производных h_j , должны быть согласованы с исходным уравнением (25) и с условием $h_0(\mathbf{x}) = \text{const}$.

Характеристический коноид. Особый вид характеристической поверхности получается, если образовать геометрическое место всех бихарактеристик, выходящих из данной точки $P(\mathbf{x}_0, t_0)$. Чтобы представить совокупность всех таких бихарактеристик, необходимо учесть начальные данные к системе (28):

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad h_j(t_0) = h_{j0} \quad (j = t, x, y, z). \quad (29)$$

Условие согласования (25) в этом случае имеет вид

$$h_{t_0} + u_0 h_{x_0} + v_0 h_{y_0} + w_0 h_{z_0} = -c_0 \sqrt{h_{x_0}^2 + h_{y_0}^2 + h_{z_0}^2}, \quad (30)$$

где u_0, v_0, w_0, c_0 — значения известных функций в точке P . Следовательно, если точка P фиксирована, то в начальных данных (29) есть всего три свободных параметра, например $h_{x_0}, h_{y_0}, h_{z_0}$. Однако если задавать искомую характеристическую поверхность уравнением $h(\mathbf{x}, t) = 0$, то функцию h достаточно определить с точностью до постоянного множителя. Можно заметить, кроме того, что замена h на ah ($a = \text{const}$) не меняет ни уравнений (28), ни условий (30). Это означает, что на самом деле в начальных данных (29) один из трех свободных параметров несуществен. Поэтому в результате решения задачи (28), (29) получится семейство кривых в R^4 , зависящих от двух параметров, например r и s , с уравнениями вида

$$x = X(t, r, s), \quad y = Y(t, r, s), \quad z = Z(t, r, s). \quad (31)$$

Исключение из этих уравнений параметров (r, s) и дает искомую характеристическую поверхность $h(\mathbf{x}, t) = 0$.

Полученная этим построением характеристическая поверхность называется *характеристическим коноидом* с вершиной P и будет обозначаться символом $K(P)$. Вблизи точки P этот коноид имеет вид искривленного конуса с вершиной P и состоит из двух полостей; одна из них, $K_+(P)$, раскрывается в сторону $dt > 0$, а другая, $K_-(P)$, — в сторону $dt < 0$. В целом форма характеристического коноида зависит от решения и может сильно искажаться вдали от его вершины P .

В качестве примера легко построить характеристический коноид на *постоянном решении*, когда $u = u_0 = \text{const}$ и $c = c_0 = \text{const}$. В этом случае вторая серия уравнений (28) принимает вид $dh_j/dt = 0$, откуда вдоль бихарактеристик $h_j = h_{j0} = \text{const}$ для всех j . Поэтому первая серия

уравнений (28) интегрируется тривиально и дает в качестве (31) семейство прямых

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - (\mathbf{u}_0 + c_0 \nabla h_0 / |\nabla h_0|)(t - t_0).$$

Исключение ∇h_0 приводит к уравнению характеристического коноида на постоянном решении

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 - \mathbf{u}_0(t - t_0)|^2 = c_0^2(t - t_0)^2. \quad (32)$$

На самом деле (32) есть уравнение *характеристического конуса* в пространстве $R^4(\mathbf{x}, t)$ с вершиной $P(\mathbf{x}_0, t_0)$. Сечение конуса (32) гиперплоскостями $t = \text{const}$ представляет собой сферу в $R^3(\mathbf{x})$, центр которой движется со скоростью $\mathbf{u}_0$ по прямой $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_0(t - t_0)$, а радиус растет (с ростом t) пропорционально времени и равен $c_0|t - t_0|$. Эта сфера и представляет собой перемещающуюся в $R^3(\mathbf{x})$ характеристику $C(t)$. Можно показать, что конус (32) аппроксимирует вблизи вершины P характеристический коноид $K(P)$ на любом гладком решении уравнений газовой динамики.

Характеристическая форма уравнений газовой динамики. Для определенности получаемых ниже условий на характеристиках уравнений газовой динамики уравнение характеристик C_0 будет записываться в виде $h^0(\mathbf{x}, t) = \text{const}$, а уравнения характеристик $C_{\pm}$ — в виде $h^{\pm}(\mathbf{x}, t) = \text{const}$.

На контактной характеристике (18) ранг матрицы $A(\xi)$ равен двум. Соответствующие левые собственные векторы $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \lambda^5)$ оказываются такими:

$$\lambda = (0, 0, 0, 0, 1),$$

и еще два независимых вектора λ_2 и λ_3 определяются соотношениями

$$\xi \lambda^1 + \eta \lambda^2 + \zeta \lambda^3 = 0, \quad \lambda^4 = \lambda^5 = 0.$$

Вектор λ_1 дает в качестве условия на C_0 уравнение $DS = 0$ (поэтому характеристики C_0 и называются «энтропийными»). Два оставшихся условия должны выражать факт коллинеарности вектора $(\xi, \eta, \zeta) = \nabla h^0$ вектору $\rho D\mathbf{u} + \nabla p$, что может быть записано в виде равенства нулю их векторного произведения. Следовательно, условия на контактных характеристиках C_0 таковы:

$$Dh^0 = 0, \quad DS = 0, \quad \nabla h^0 \times (\rho D\mathbf{u} + \nabla p) = 0. \quad (33)$$

Здесь последнее векторное условие на самом деле содержит лишь два независимых скалярных соотношения.

На звуковой характеристике C_{+} (соответствующей знаку «минус» в (19)) ранг матрицы $A(\xi)$ равен четырем. Соответствующий левый собственный вектор может быть взят в виде

$$\lambda = (\xi, \eta, \zeta, -\rho c \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, 0).$$

Это приводит к следующему условию на звуковых характеристиках C_+ :

$$\begin{aligned} Dh^+ + c|\nabla h^+| &= 0, \\ \rho c(\nabla h^+ \cdot Du - c|\nabla h^+| \operatorname{div} u) - (|\nabla h^+| Dp - c\nabla h^+ \cdot \nabla p) &= 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогичный вывод для характеристик C_- дает условия, получаемые из (34) заменой c на $-c$:

$$\begin{aligned} Dh^- - c|\nabla h^-| &= 0, \\ \rho c(\nabla h^- \cdot Du + c|\nabla h^-| \operatorname{div} u) + (|\nabla h^-| Dp + c\nabla h^- \cdot \nabla p) &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Полученная система из восьми (скалярных) дифференциальных уравнений (33), (34) и (35) для восьми искомых функций h^0 , h^+ , h^- , u , v , w , p , S вместе с уравнением состояния $p = f(\rho, S)$, образует *характеристическую формулу уравнений газовой динамики*.

§ 7. Краевые задачи

Каждое конкретное движение газа происходит в определенной обстановке, в некотором окружении газового потока другими физическими телами. Эта обстановка влияет на движение, формируя дополнительные условия, которым оно должно быть подчинено. С точки зрения дифференциальных уравнений это означает наложение соответствующих условий на искомое решение. К таким условиям предъявляется требование, чтобы с ними задача об отыскании конкретного решения была *поставлена корректно*: в определенном функциональном пространстве решение задачи должно существовать, быть единственным и непрерывно зависеть от дополнительных условий.

Особенно широко распространен способ задания дополнительных условий путем предписания значений искомых функций и их производных на некоторых границах, «краях» той области независимых переменных, в которой желательно определить решение. Такие задачи получили название *краевых задач*.

Ниже дается краткое описание постановок наиболее важных краевых задач для уравнений газовой динамики. Необходимо иметь в виду, что в полном объеме корректность большинства таких постановок, несмотря на всю их физическую естественность, к настоящему времени доказана лишь в очень редких случаях.

Задача Коши. Так называется задача, в которой дополнительное условие состоит в задании движения в некоторый начальный момент вре-

мени $t = t_0$ (без ограничения $t_0 = 0$). Состояние движения при $t = 0$ описывается набором функций — *начальных значений* основных величин

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x), \quad p(x, 0) = p_0(x), \quad (1)$$

которые можно считать заданными на всем пространстве $R^3(x)$. Задача Коши называется еще *задачей с начальными данными* (начальными условиями). В этих терминах формулируется следующая постановка задачи Коши: найти такое решение уравнений газовой динамики, которое при $t = 0$ принимает заданные начальные значения (1).

Задачу Коши можно рассматривать в различных функциональных классах, например (в порядке усложнения) в классе C_A аналитических функций, в классе C_∞ бесконечно дифференцируемых функций, в классах C_k (или H_k) функций конечной гладкости, в классе C непрерывных функций, в классе измеримых ограниченных функций, наконец, в классах обобщенных функций.

Для того чтобы уравнения газовой динамики можно было рассматривать в классе C_A , необходимо предположить, что входящая в термодинамическое уравнение состояния функция $f(\rho, S)$ является аналитической. Кроме того, для простоты формулировки результатов удобно считать значения плотности в начальном условии (1) ограниченными от нуля положительной константой, а именно:

$$\inf_{x \in R^3} \rho_0(x) = \rho_0 > 0. \quad (2)$$

При этих условиях к системе (3.14) применима *теорема Коши–Ковалевской*, гарантирующая корректность постановки задачи Коши в классе аналитических функций.

Теорема 1. *Для любых аналитических данных (1) существует единственное аналитическое решение системы уравнений (3.14), удовлетворяющее начальным условиям (1). Это решение определено в области вида $Q = \{x \in R^3, |t| < \alpha(x)\}$, где $\alpha(x) > 0$ для любого $x \in R^3$, и непрерывно зависит от начальных данных (1) в метрике пространства аналитических функций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы Коши–Ковалевской можно найти, например, в [9]. ■

В этой теореме можно заменить пространство R^3 любым множеством $M \subset R^3$, лишь бы данные (1) были аналитичны в окрестности M . Недостатком теоремы 1 является то, что она гарантирует существование решения задачи Коши только, как говорят, *в малом по t* в смысле ограничения $|t| < \alpha(x)$. Однако, как выяснится в дальнейшем, та-

кое ограничение необходимо присутствует даже при рассмотрении задачи в классе C . Это обстоятельство вызывает принципиальные трудности доказательства разрешимости задачи Коши в целом по t , которые для уравнений газовой динамики до настоящего времени не преодолены.

В классах функций конечной гладкости справедлив аналог теоремы 1, утверждающий корректность постановки задачи Коши в малом по t . Для приложений этих результатов к конкретным задачам особенно важно свойство единственности решения. Оно позволяет выяснить существенные структурные особенности движений газа.

Теорема об оценке решения. Пусть $U = (u, v, w, p, S)$ есть некоторое решение системы (3.16), определенное при $t \geq 0$. Рассматривается ограниченная область $\Omega \subset R^4$, граница которой состоит из трехмерной области ω_0 , лежащей в гиперплоскости $t = 0$, и из расположенной при $t > 0$ кусочно-гладкой гиперповерхности Γ , имеющей общую границу с областью ω_0 . Пусть $\xi = (\xi, \eta, \zeta, \tau)$ есть вектор внешней нормали к Γ . Утверждение о единственности решения U в области Ω тесно связано со свойством гиперболичности системы (3.16), которое проявляется в следующем наиболее существенном дополнительном предположении: в каждой точке гиперповерхности Γ выполнено неравенство

$$\tau + u\xi + v\eta + w\zeta \geq c\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}. \quad (3)$$

Требуемая для доказательства единственности решения оценка связана с рассмотрением сечений $\omega(t)$ области Ω гиперплоскостями $t = \text{const} > 0$ (не путать с движущимся объемом!) и с введением для любой заданной на Ω вектор-функции $W = \{W_i\}$ ее L_2 -нормы $\|W; t\|$ по таким сечениям, а именно:

$$\|W; t\|^2 = \iiint_{\omega(t)} |W|^2 d\omega, \quad (4)$$

где $|W|^2 = \sum_i W_i^2(\mathbf{x}, t)$. В обозначении нормы $\|W; t\|$ явно указывается на ее зависимость от времени t ; как функция переменного t эта норма определена при $t \geq 0$. Следующая теорема формулирует основной результат в виде сравнительной оценки разности двух решений. Как и в теореме 1, здесь для простоты предполагается, что плотность ρ ограничена от нуля положительной константой (на самом деле, для решений класса C_1 достаточно потребовать выполнения этого условия при $t = 0$), т. е. что

$$\inf \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_1 > 0. \quad (5)$$

Теорема 2. Если решение $U \in C_1(\bar{\Omega})$ и область Ω удовлетворяют условиям (3) и (5), то для любого другого решения $U' \in C_1(\bar{\Omega})$ найдется константа $k > 0$, с которой для разности $W = U' - U$ справедлива оценка

$$\|W; t\| \leq k \|W; 0\| \quad (t \geq 0). \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для сокращения записи удобно ввести символический индекс j , принимающий значения t, x, y, z , и матричный дифференциальный оператор (здесь и ниже $\partial_t = \partial/\partial t$ и т. д.)

$$A \cdot \partial = A^j \partial_j = A^t \partial_t + A^x \partial_x + A^y \partial_y + A^z \partial_z,$$

с которым система (3.16) или (3.17) переписывается в виде одного уравнения $A(U) \cdot \partial U = 0$. В результате вычитания этого уравнения из ему аналогичного для $U' = U + W$ получается уравнение вида

$$A(U) \cdot \partial W = B' W \quad (7)$$

с матрицей B' , определенной соотношением

$$B' W = (A(U) - A(U + W)) \cdot \partial U'.$$

Уравнение (7) умножается скалярно на вектор $2W$, и его левая часть преобразуется согласно тождеству

$$2W \cdot (A^j \partial_j W) = \partial_j (W \cdot A^j W) - 2W \cdot (\partial_j A^j W),$$

справедливому благодаря симметричности всех матриц A^j . Получается соотношение

$$\partial_j (W \cdot A^j W) = W \cdot B W,$$

где $B = 2B' - 2\partial_j A^j$. Это соотношение интегрируется по области Ω_t , остающейся после отсечения от области Ω гиперплоскостью $t = \text{const}$ той ее части, которая лежит выше этой гиперплоскости. Применение теоремы Гаусса–Остроградского к интегралу в левой части полученного соотношения приводит к равенству

$$\begin{aligned} \iiint_{\omega(t)} W \cdot A^t W d\omega - \iiint_{\omega(0)} W \cdot A^t W d\omega + \iiint_{\Gamma(t)} W \cdot A(\xi) W d\Gamma = \\ = \int_0^t \iiint_{\omega(t')} W \cdot B W d\omega dt', \end{aligned} \quad (8)$$

где $\Gamma(t)$ — часть гиперповерхности Γ , заключенная между гиперплоскостями $t = \text{const}$ и $t = 0$. Здесь

$$A(\xi) = \tau A^t + \xi A^x + \eta A^y + \zeta A^z$$

есть матрица (6.15), введенная при вычислении характеристик системы (3.16).

Утверждается, что в силу условия (3) подынтегральная квадратичная форма $W \cdot A(\xi)W$ неотрицательна, т. е. что

$$W \cdot A(\xi)W|_{\Gamma} \geq 0 \quad (9)$$

для любого вектора $W = (\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$. Действительно, вычисление дает

$$\begin{aligned} W \cdot A(\xi)W &= \rho\chi(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) + \\ &+ 2(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\delta + b\chi\delta^2 + \chi\varepsilon^2, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\chi = \tau + u\xi + v\eta + w\zeta$. Но всегда (неравенство Коши)

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta \geq -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cdot \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2},$$

и так как согласно (3) $\xi \geq c\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ на Γ , то

$$W \cdot A(\xi)W|_{\Gamma} \geq b\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}[(\rho c\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} - \delta)^2 + \rho c^3 \varepsilon^2] \geq 0.$$

Далее, утверждается, что с некоторыми положительными константами M, m, N равномерно по области $\bar{\Omega}$ справедливы неравенства

$$M|W|^2 \geq W \cdot A^t W \geq m|W|^2, \quad |W \cdot BW| \leq N|W|^2. \quad (11)$$

Здесь первые два справедливы в силу ограниченности (ввиду условия (5)) и положительной определенности матрицы A^t , а последнее — в силу того, что элементы матрицы B равномерно ограничены на $\bar{\Omega}$ (ввиду свойств нормального газа и принадлежности решений U и U' классу $C_1(\bar{\Omega})$).

Теперь видно, что благодаря неравенствам (9) и (11) из (8) следует неравенство (с учетом обозначения (4))

$$m\|W; t\|^2 \leq M\|W; 0\|^2 + N \int_0^t \|W; t'\|^2 dt', \quad (12)$$

справедливое для любого $t \in (0, T)$, где $T = \sup_t \Omega$. Если положить

$$\varphi(t) = \int_0^t \|W; t'\|^2 dt',$$

то (12) переписется в равносильной форме

$$m\varphi'(t) \leq M\varphi'(0) + N\varphi(t). \quad (13)$$

Для решения этого дифференциального неравенства вводится функция $\psi(t) = \varphi(t) \exp(-tN/m)$, с которой оно принимает вид

$$\psi'(t) \leq \frac{M}{m} \varphi'(0) \exp\left(-\frac{tN}{m}\right)$$

и интегрируется с начальным условием $\psi(0) = 0$:

$$\psi(t) \leq \frac{M}{N} \varphi'(0) \left(1 - \exp\left(-\frac{tN}{m}\right)\right).$$

Следовательно, $N\varphi(t) \leq M\varphi'(0)(\exp(tN/m) - 1)$, откуда видно, что правая часть в (13) удовлетворяет неравенству

$$M\varphi'(0) + N\varphi(t) \leq M\varphi'(0) \exp(tN/m).$$

Наконец, так как $\varphi'(t) = \|W; t\|^2$ и $\varphi'(0) = \|W; 0\|^2$, то (6) следует из (13) с константой

$$k = (M/m)^{1/2} \exp(TN/2m).$$

■

Единственность решения задачи Коши. Из этой теоремы вытекает ряд важных фактов. Прежде всего, надо заметить, что если дано решение U класса $C_1(t \geq 0)$, то для фиксированной области ω_0 , в пространстве $R^3(x)$ существует бесконечное множество областей с «основанием» ω_0 типа той области Ω , которая рассматривается в теореме 2, т. е. таких, что на их границе Γ выполнено неравенство (3). Пусть $\Omega(\omega_0)$ есть объединение всех таких областей. Справедлива следующая *теорема единственности* решения задачи Коши.

Теорема 3. Если равенство $U' = U$ выполнено на ω_0 при $t = 0$, то это равенство верно в любой точке $(x, t) \in \Omega(\omega_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует непосредственно из (6). ■

Тем самым единственность решения задачи Коши для системы (3.16) установлена в классе C_1 . Область $\Omega(\omega_0)$ называется *областью определенности* решения задачи Коши начальными данными на ω_0 .

Можно показать, что если граница $\Gamma(\omega_0)$ области $\Omega(\omega_0)$ является гладкой гиперповерхностью (класса C_1), то на ней (3) выполнено со знаком равенства, т. е. она есть характеристика системы (3.16) на решении U . В частности, если для некоторой точки $P = (x, t)$, где $t > 0$ существует характеристический коноид $K_-(P)$, направленный в сторону $dt < 0$ (см. § 6) и пересекающий гиперплоскость $t = 0$ по области ω_0 , то этот коноид совпадает с областью $\Omega(\omega_0)$.

В этом случае область $\omega_0 = \omega_0(P)$ называется *областью зависимости* точки P . Этот термин понимается в том смысле, что значение решения $U(P)$ определяется только его начальными значениями на области $\omega_0(P)$ и не зависит от значений начальных данных вне этой области (для решений класса C_1).

С другой стороны, если при $t = 0$ взято некоторое множество M_0 и в каждой точке $P_0 \in M_0$ построен характеристический коноид $K_+(P_0)$, направленный в сторону $dt > 0$, то объединение $K(M_0)$ всех таких (открытых) коноидов будет таким, что значение решения в каждой точке $P \in K(M_0)$ необходимо зависит от значений начальных данных на множестве M_0 . Поэтому $K(M_0)$ называется *областью влияния* множества M_0 . В частности, область влияния точки P_0 есть коноид $K_+(P_0)$.

Существование конечных областей определенности, областей зависимости и областей влияния открывает возможность предсказывать во многих задачах газовой динамики качественный характер движения без его детального построения или расчета.

Обобщения задачи Коши. Начальные данные, т. е. значения всех искоемых функций, можно задавать не только на гиперплоскости $t = \text{const}$. Если носителем начальных значений является некоторая гиперповерхность Σ , то говорят о постановке *общей задачи Коши*. Корректность такой краевой задачи можно гарантировать в том случае, когда Σ всюду *пространству подобна*, т. е. когда на Σ выполняется строгое неравенство вида (3). Если же некоторые бихарактеристики лежат в гиперповерхности Σ или даже только касаются ее, то общая задача Коши может быть некорректной. В каждом конкретном случае этот вопрос требует дополнительного исследования.

В *смешанной задаче Коши* наряду с начальными данными (например при $t = 0$) задаются граничные условия на некоторой времени подобной гиперповерхности Σ , примыкающей к гиперплоскости $t = 0$. При задании дополнительных данных на Σ необходимо принимать во внимание расположение Σ не только относительно звуковых бихарактеристик, но также и

относительно контактных бихарактеристик, т. е. траекторий частиц. В общем случае вопрос о корректности постановки таких задач довольно сложен и во многом до настоящего времени остается открытым. Один из важных частных случаев рассматривается ниже

Задача о поршне. Так называется специальная смешанная задача Коши, когда гиперповерхность Σ является контактной характеристикой, т. е. когда всюду на Σ выполнено равенство $\chi = 0$ или

$$\tau + u\xi + v\eta + w\zeta = 0, \quad (14)$$

где $\xi = (\xi, \eta, \zeta, \tau)$ — вектор нормали к Σ . В этом случае через Σ газ не течет. Совокупность сечений $\sigma(t)$ гиперповерхности Σ гиперплоскостями $t = \text{const}$ можно интерпретировать как движущуюся в пространстве $R^3(x)$ непроницаемую поверхность, которая оттесняет газ, расположенный от нее с одной стороны. Следовательно, $\sigma(t)$ действует на газ, как «поршень», форма которого меняется со временем.

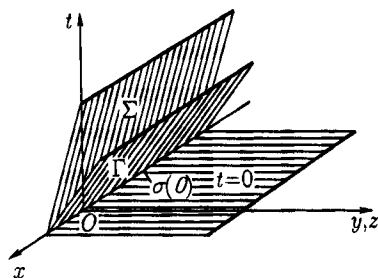


Рис. 1

Задача о поршне поставлена корректно, в частности, она разрешима в классах функций конечной гладкости (в малом по t) при выполнении некоторых условий согласования начальных данных с формой гиперповерхности Σ вблизи поверхности $\sigma(0)$, по которой Σ пересекается с гиперплоскостью $t = 0$. Эти условия связаны с тем, что область определенности решения начальными данными при $t = 0$ в задаче о поршне всегда отделена от Σ звуковой характеристикой Γ , проходящей через $\sigma(0)$ (рис. 1). Условия согласования

нулевого порядка состоят в равенстве значений скорости $u|_{\sigma(0)}$ и скорости перемещения поверхности Σ в точках $\sigma(0)$ в направлении вектора $u|_{\sigma(0)}$. Условия согласования первого порядка состоят, сверх того, в равенстве первых производных от этих скоростей (дифференцировать надо только вдоль Σ) и т. д. При этом характеристика Γ будет, вообще говоря, поверхностью слабого разрыва. Именно, если выполнены условия согласования только нулевого порядка, то вдоль Γ могут быть разрывны первые производные основных величин; если выполнены условия согласования только первого порядка, то первые производные на Γ непрерывны, но могут быть разрывны производные второго порядка и т. д.

Если же на $\sigma(0)$ условия согласования нулевого порядка не выполнены, то непрерывного в замкнутой области решения задачи о поршне не суще-

ствуется и вместо него реализуется движение с особенностями типа ударных волн и центрированных волн разрежения.

Теорема единственности решения в классе C_1 (с возможным слабым разрывом на Γ) и здесь доказывается с помощью теоремы 2 об оценке разности двух решений, которая для задачи о поршне верна дословно. Для проверки этого утверждения достаточно показать, что квадратичная форма (10) неотрицательна на Σ . Но ввиду (14) на Σ верно равенство

$$W \cdot A(\xi)W = 2(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\delta + \delta^2/\rho c^2,$$

и остается заметить, что компоненты α, β, γ вектора W имеют значения $\alpha = u' - u, \beta = v' - v, \gamma = w' - w$. Поэтому, если для решения U' на Σ верно равенство $\chi' = 0$, то равна нулю и разность $\chi' - \chi = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$ на Σ .

Задача о поршне является одной из наиболее распространенных краевых задач, встречающихся в приложениях. Например, ее частным случаем является задача о движении газа, формирующемся в результате перемещения в нем твердого тела или системы тел (вообще — твердых непроницаемых границ). При заданном законе движения тела положение его поверхности известно в любой момент времени. Эта поверхность является, таким образом, поверхностью типа $\sigma(t)$, следовательно, контактная характеристика Σ полностью задана.

Задача обтекания. Это частный случай задачи о поршне, выделяемый условием независимости сечения $\sigma(t)$ от времени t . В этом случае границей является неподвижная *непроницаемая* поверхность $\sigma \subset R^3(\mathbf{x})$, или, как говорят, *обтекаемая* потоком газа неподвижная твердая стенка. Если уравнение σ есть $h(\mathbf{x}) = 0$, то граничное условие (14) записывается в виде

$$\mathbf{u} \cdot \nabla h|_{\sigma} = 0. \quad (15)$$

К задаче обтекания сводится анализ течения, возникающего при равномерном поступательном движении ограниченного тела в безграничной массе газа, покоящейся на бесконечности. Если скорость движения тела равна $\mathbf{u}_0$, то можно применить *преобразование Галилея*, перейдя в систему координат, движущуюся со скоростью $\mathbf{u}_0$. Тогда, в силу инвариантности уравнений газовой динамики (см. § 8), система (3.16) не изменится, а тело станет неподвижным. Для определения движения газа получится задача обтекания данного неподвижного тела с дополнительным условием

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\mathbf{u}_0. \quad (16)$$

Задача со свободными границами. Контактная характеристика Σ называется *свободной границей*, если на ней заданы значения давления p .

Такое задание делает смешанную задачу Коши переопределенной и для восстановления «равновесия» необходимо одно из условий снять. С точки зрения описания реальных движений газа естественно считать неизвестной саму гиперповерхность Σ . Тогда задающая ее уравнение $h(x, t) = 0$ функция h становится новым искомым элементом задачи.

Задачу со свободной границей можно интерпретировать как задачу о поршне, форма которого заранее не задана, но на нем предписаны значения давления. Наиболее распространенной является такая постановка, когда заданное давление постоянно. В этом случае на искомой гиперповерхности Σ с уравнением $h(x, t) = 0$ должны быть выполнены граничные условия

$$h_1 + uh_x + vh_y + wh_z = 0, \quad p = \text{const.} \quad (17)$$

Пример такой постановки дает задача о волнах на поверхности водоема. Задачи со свободными границами очень трудны для анализа и к настоящему времени, за исключением простейших случаев, изучены слабо.

Задача Гурса. Существует несколько вариантов постановок краевых задач, когда все граничные данные задаются на характеристиках. Такие задачи называются *задачами Гурса*. Необходимость анализа задач Гурса возникает в вопросах примыкания решений, получаемых в разных областях с общей границей. При постановке какой-либо задачи Гурса существенно учитывать условия на характеристиках (см. § 6), которые накладывают ограничения на задаваемые значения основных величин. Ниже приводится пример такой постановки.

Пусть задана гладкая поверхность $\sigma_0 \subset R^3(x)$, расположенная на гиперплоскости $t = 0$, и две гиперповерхности Γ_+ и Γ_- , содержащие (в качестве границы) поверхность σ_0 и расположенные при $t \geq 0$. На Γ_+ и на Γ_- заданы наборы $U^+ = (u^+, \rho^+, p^+)$ и $U^- = (U^-, \rho^-, p^-)$ значений основных газодинамических величин как функции класса $C_1(\Gamma_{\pm})$. Предполагается, что со значениями U^+ и U^- гиперповерхности Γ^+ и Γ^- являются звуковыми характеристиками, причем разных семейств (см. § 6), и что условия на характеристиках $\Gamma_{\pm}$ выполнены. Требуется определить решение в области Ω , заключенной между Γ_+ и Γ_- .

Если решение этой задачи Гурса существует и принадлежит классу $C_1(\Omega)$, то в области Ω necessarily содержится контактная характеристика Σ , проходящая через поверхность σ_0 и делящая Ω на две части Ω_+ и Ω_- так, что Ω_+ примыкает к Γ_+ , а Ω_- — к Γ_- . На Σ , вообще говоря, образуется слабый разрыв, характер которого зависит от выполнения условий согласования граничных данных на поверхности σ_0 . Здесь ситуация аналогична той, которая была описана при рассмотрении задачи о поршне.

Если условия согласования нулевого порядка не выполнены, то решение класса $C_1(\Omega)$ не существует; в решении такой задачи Гурса необходимо

должны быть особенности. С условиями согласования нулевого порядка задача Гурса поставлена корректно (в малом по t), причем вдоль Σ может иметь место разрыв первых производных и т. д.

Задачи с особенностями. Если начальные данные (1) в задаче Коши не являются непрерывными, то в сколь угодно малой окрестности момента $t = 0$ в решении могут появиться особенности, характер и поведение которых зависят от структуры функций (1). Разрывные начальные данные могут порождать движение с сильными разрывами -- ударными волнами или контактными разрывами. К этому приводят задачи о взаимодействиях различных движений газа между собой или с внешними телами (например, задача о воздействии ударной волны на твердое тело). Сюда же относятся модельные задачи о последствиях сосредоточенных воздействий на газ, когда в некоторых точках, на линиях или поверхностях задаются интегральные характеристики движения газа — поток массы (расход), сосредоточенный импульс или мгновенно выделившаяся энергия (например задача о сильном взрыве). Особенностью является также поведение параметров движения газа в бесконечно удаленной точке пространства $R^3(x)$ или при $t \rightarrow \infty$.

При анализе задач с особенностями необходимо опираться на общие закономерности, определяющие характер движения газа вдали от особенностей, учитывать области определенности, влияния и зависимости решения. В таких задачах зачастую бывает полезно обращаться к исходным интегральным законам сохранения, которые справедливы без ограничений для всех физически осмысленных движений газа.

§ 8. Групповое свойство

Фундаментальную основу исследования какой-либо физической системы составляют ее свойства инвариантности относительно некоторых преобразований. В частности, в терминах инвариантности соответствующих объектов могут быть выражены основные законы природы (однородность и изотропность пространства-времени). Вообще, следует заметить, что свойства инвариантности используются в приложениях гораздо чаще, чем может показаться на первый взгляд.

Пусть, например, некоторый физический процесс *однороден во времени*; тогда можно искать его *состояния равновесия*. На языке дифференциальных уравнений процесса это означает, что уравнения не содержат явно времени t (оно участвует только в дифференцированиях типа $\partial u / \partial t$; состояние равновесия не должно зависеть от времени t , и его уравнения получаются из исходных путем приравнивания нулю производных типа $\partial u / \partial t$). В частности, так определяются стационарные точки в фазовом пространстве динамических систем. Теперь надо сделать важный шаг: заметить,

что в этом описании стандартной процедуры содержится элементарный алгебраический факт, состоящий в инвариантности уравнений относительно *группы переносов по времени*, т. е. совокупности преобразований $t \rightarrow t + a$, где a — произвольный вещественный параметр, причем функции, описывающие состояние равновесия, образуют инвариантное решение исходных дифференциальных уравнений. Этот факт можно было бы игнорировать, как тривиальный (что часто и делается), если бы не возникал естественный вопрос: можно ли с помощью какого-то алгоритма распознать групповое свойство заданных дифференциальных уравнений? Ответ оказывается положительным, причем в его общей форме далеко не тривиальным.

Надлежащее обобщение ряда фактов, аналогичных упомянутому выше, привело к созданию теории *группового анализа дифференциальных уравнений*, основы которой были заложены более 100 лет тому назад норвежским математиком Софусом Ли. Эта весьма общая и, в известном смысле, законченная теория дает алгоритмы выявления в полном объеме свойства инвариантности любых дифференциальных уравнений и использование этого свойства для отыскания классов частных решений путем упрощения исходных уравнений за счет понижения размерности (уменьшения числа независимых переменных).

Группа Галилея. В данном параграфе описывается групповое свойство инвариантности уравнений газовой динамики; его применение к построению классов частных решений излагается в § 12. Исходные уравнения газовой динамики здесь удобно взять в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_t + u \cdot \nabla u + \frac{1}{\rho} \nabla p &= 0, \\ \rho_t + u \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} u &= 0, \\ p_t + u \cdot \nabla p + \rho c^2 \operatorname{div} u &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρc^2 рассматривается как заданная функция переменных ρ, p , а именно:

$$\rho c^2 = \alpha(\rho, p). \quad (2)$$

Групповым свойством системы (1) называется ее свойство оставаться неизменной (инвариантной) при некоторых преобразованиях всех участвующих в (1) переменных

$$\sigma = (t, x, y, z, u, v, w, \rho, p).$$

рассматриваемых как координаты точки пространства $Z = R^9(\sigma)$. Если $f: Z \rightarrow Z$ есть такое преобразование, то образ точки $\sigma \in Z$ дается формулой $\sigma' = f(\sigma)$. Если при преобразовании f система (1) не меняется,

то говорят, что (1) допускает преобразование f . Задача описания группового свойства системы (1) состоит в определении всех допускаемых ею преобразований.

Эта задача имеет алгоритмическое решение, сводящееся к отысканию *однопараметрических локальных групп Ли* G^1 преобразований пространства Z . Каждая группа G^1 задается законом преобразования

$$\sigma' = f(\sigma, a), \quad (3)$$

где a — вещественный параметр, изменяющийся в некотором интервале Δ , содержащем точку $a = 0$. Групповой характер преобразования (3) выражается свойствами отображения f

$$f(\sigma, 0) = \sigma, \quad f(f(\sigma, a), b) = f(\sigma, a + b) \quad (4)$$

для любых σ , a и b и свойством гладкости, например — принадлежности f классу C_∞ . Согласно (4) групповой операцией является композиция преобразований; при этом обратный элемент есть преобразование, обратное к (3), а именно: $\sigma = f(\sigma', -a)$. В полном объеме решение задачи об определении всех групп G^1 , допускаемых системой (1), изложено в [5], а здесь приводится лишь окончательный результат, который можно проверить непосредственной подстановкой. Группа G^1 преобразований (3) будет обозначаться символом $G^1(f)$

Система (1) инвариантна относительно следующих групп $G^1(f^i)$ (штрихом обозначены координаты преобразованной точки σ' ; переменные, которые явно не написаны, в каждом случае преобразуются тождественно, например: $x' = x$, $p' = p$ и т. д.):

$$\begin{aligned} f^1 : x' &= x + a ; \\ f^2 : y' &= y + a ; \\ f^3 : z' &= z + a ; \\ f^4 : x' &= x + at, \quad u' = u + a ; \\ f^5 : y' &= y + at, \quad v' = v + a ; \\ f^6 : z' &= z + at, \quad w' = w + a ; \\ f^7 : y' + iz' &= (y + iz)e^{ia}, \quad v' + iw' = (v + iw)e^{ia}; \\ f^8 : z' + ix' &= (z + ix)e^{ia}, \quad w' + iu' = (w + iu)e^{ia}; \\ f^9 : x' + iy' &= (x + iy)e^{ia}, \quad u' + iv' = (u + iv)e^{ia}; \\ f^{10} : t' &= t + a . \end{aligned} \quad (5)$$

Каждое из преобразований f^1, f^2, f^3, f^{10} называется *переносом* (говорят также *трансляцией* или *сдвигом*), а именно f^1 — перенос по x , f^2 — по y и т. д. Преобразования f^4, f^5, f^6 называются *галилеевыми переносами*, f^4 — по x и т. д. Преобразования f^7, f^8, f^9 называются *вращениями*, причем f^7 — вращение вокруг оси x , f^8 — вокруг оси y и f^9 — вокруг оси z . Для краткости здесь они записаны в комплексной форме и для получения формул преобразования каждой координаты надо сравнить действительные и мнимые части.

Если взять два каких-либо преобразования (5) с разными значениями параметров, например f^1 с a и f^7 с b и составить их композицию, то получится некоторое комбинированное преобразование, точнее, двухпараметрическое семейство преобразований, также допускаемых системой (1). Неограниченное продолжение такого комбинирования приводит к группе Ли преобразований пространства Z , порожденное преобразованиями (5). Она называется *группой Галилея*. Общий элемент группы Галилея есть преобразование вида (3), где скалярный параметр a заменен векторным $a = (a^1, \dots, a^{10})$. Поэтому группа Галилея является 10-параметрической группой преобразований и обозначается символом G^{10} . Итак, система (1) допускает группу Галилея G^{10} , порожденную однопараметрическими группами (5).

Для построения общего группового преобразования (общего элемента группы Галилея) достаточно взять каждое из преобразований (5) со своим значением параметра, например 1° — с параметром a^1 , 2° — с параметром a^2 и т. д., 10° — с параметром a^{10} , и составить композицию этих десяти преобразований. В результате получится преобразование вида (3), но в нем уже параметр a будет векторным параметром $a = (a^1, a^2, \dots, a^{10})$. Следовательно, группа Галилея является 10-параметрической группой преобразований и потому обозначается символом G_{10} . Итак, система (1) допускает группу Галилея G_{10} , порожденную однопараметрическими группами (5).

Преобразования растяжения. Кроме того, система (1) может допускать преобразования растяжения всех переменных, которые следует искать в виде

$$t' = at, \quad x' = bx, \quad u' = mu, \quad \rho' = k\rho, \quad p' = lp. \quad (6)$$

где положительные параметры a, b, m, k, l подлежат определению. При преобразовании (6) первые производные преобразуются по простому правилу: каждая производная умножается на частное от деления параметра-множителя функции на параметр-множитель независимой переменной, например:

$$u'_t = \frac{m}{a} u_t, \quad p'_{x'} = \frac{l}{b} p_x, \dots$$

Требование инвариантности системы (1) относительно преобразования (6) сводится к сравнению множителей, появляющихся в отдельных слагаемых левой части каждого уравнения. В результате получается система уравнений относительно параметров $a, \dots, l$ и требуется найти ее общее решение.

Для первого уравнения (1) эта процедура даст соотношения

$$\frac{m}{a} = \frac{m^2}{b} = \frac{l}{kb},$$

откуда $b = am$ и $l = km^2$. С учетом этих соотношений второе уравнение (1) оказывается инвариантным без дополнительных ограничений. Наконец, третье уравнение инвариантно, если и только если функция (2) удовлетворяет функциональному уравнению

$$\alpha(k\rho, lp) = l\alpha(\rho, p) \quad (7)$$

при любых значениях параметров k и l . Ясно, что функция α общего вида может удовлетворять соотношению (7), только если $k = l = 1$. В этом случае будет $m = 1$ и $b = a$. Поэтому с функцией α общего вида система (1) допускает только одну группу G^1 растяжений:

$$f^{11} : t' = at, \quad x' = ax. \quad (8)$$

Добавление к (5) преобразований (8) расширяет группу Галилея до 11-параметрической группы G^{11} . Итак, группа G^{11} допускается системой уравнений газовой динамики для любого нормального газа.

Возможные дальнейшие расширения допускаемой группы связаны с решениями функционального уравнения (7). В частности, ему удовлетворяет при всех k и l функция $\alpha = \gamma p$ с любой постоянной γ . В этом случае из (2) получается $c^2 = \gamma p / \rho$, т.е. известное соотношение (2.20) для политропного газа. При этом пять параметров $a, \dots, l$ связаны только предыдущими двумя соотношениями и, следовательно, три из них свободны, например a, m, k . Это даст еще две независимые от (8) допускаемые группы растяжений:

$$\begin{aligned} f^{12} : x' &= ax, \quad u' = au, \quad p' = a^2 p; \\ f^{13} : \rho' &= a\rho, \quad p' = a\rho. \end{aligned} \quad (9)$$

Тем самым в случае политропного газа допускаемая группа расширяется до 13-параметрической группы G^{13} .

Необходимо учитывать, что в записи (8) и (9) групп G^1 растяжений групповой параметр меняется в интервале $(0, +\infty)$ и что групповое свойство, вместо соотношений (4), описывается соотношениями $f(\sigma, 1) = \sigma$,

$f(f(\sigma, a), b) = f(\sigma, ab)$. Для возвращения к описанию вида (4) достаточно сделать в (8) и (9) замену параметра $a \rightarrow \exp a$.

Замечательно, что для политропного газа с $\gamma = 5/3$ система (1) допускает еще одну группу G^1 , которую трудно «угадать» или найти путем общих рассуждений; для этого надо применить технику группового анализа, изложенную в [5],

$$\begin{aligned} f^{14} : t' &= \frac{t}{1-at}, & x' &= \frac{x}{1-at}, & u' &= u + a(x-tu), \\ \rho' &= (1-at)^3 \rho, & p' &= (1-at)^5 p. \end{aligned} \quad (10)$$

Этот результат справедлив для размерности физического пространства $n = 3$. Для уравнений вида (1) произвольной размерности n аналогичное преобразование допускается при $\gamma = (n+2)/n$. В частности, для плоскопараллельных движений оно существует при $\gamma = 2$ и для одномерных движений с плоскими волнами — при $\gamma = 3$.

Максимально широкая группа. Возникает вопрос: нет ли других, не сводящихся к комбинациям перечисленных выше, групп G^1 , допускаемых системой (1)? Оказывается, что нет: приведенными выше преобразованиями групповое свойство уравнений газовой динамики исчерпывается.

Теорема 1. *Максимально широкая локальная группа Ли преобразований, допускаемая системой уравнений газовой динамики (1), совпадает с G^{11} в случае произвольной функции (2), совпадает с G^{13} в случае политропного газа при любом показателе адиабаты γ и совпадает с G^{14} в случае $\gamma = 5/3$ (для трехмерных движений).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО этой теоремы можно найти в [5]. ■

Действие на множестве решений. Групповое свойство вносит в множество всех решений системы (1) алгебраическую структуру, определяемую следующим фактом: под действием любого допускаемого преобразования вида (3) каждое решение системы (1) переходит в некоторое решение этой же системы. Другими словами, допускаемая группа, например G^{11} , действует на множестве решений системы (1).

Этот факт позволяет производить новые решения из уже известных. Алгоритм преобразования решений в решения состоит в следующем. Пусть

$$u = u_0(x, t), \quad \rho = \rho_0(x, t), \quad p = p_0(x, t) \quad (11)$$

есть некоторое решение. Его надо записать с преобразованными (штриховыми) переменными:

$$u' = u_0(x', t'), \quad \rho' = \rho_0(x', t'), \quad p' = p_0(x', t'),$$

сделать подстановку выражений для штрихованных переменных согласно формулам преобразования вида (3) и затем разрешить полученные соотношения относительно переменных u , ρ , p . В результате получится набор функций

$$u = u_a(x, t), \quad \rho = \rho_a(x, t), \quad p = p_a(x, t), \quad (12)$$

которые образуют новое решение, зависящее от параметра a .

Например, с помощью галилеева переноса f^4 решение (11) преобразуется в решение

$$u = u_0(x + ae_1 t, t) - ae_1, \quad \rho = \rho_0(x + ae_1 t, t), \\ p = p_0(x + ae_1 t, t),$$

где e_1 — орт направления оси x .

Подгруппы и инварианты. Допускаемые группы эффективно используются для построения классов точных (частных) решений. Идея состоит в присоединении к системе (1) дополнительных соотношений, вводимых с помощью инвариантов подгрупп $H \subset G$.

Напомним, что подмножество $H \subset G$ называется *подгруппой группы* G , если вместе с любыми преобразованиями f и f' , принадлежащими H , обратное преобразование f^{-1} и композиция $f \circ f'$ также принадлежат H . Ясно, что любая подгруппа H группы G , допускаемой системой (1), является группой, допускаемой (1) и что любая группа H , допускаемая системой (1), необходимо есть подгруппа наиболее широкой группы G , допускаемой этой системой.

Определение 1. Не тождественно постоянная функция $J(\sigma)$ называется *инвариантом* группы H преобразований вида (3), если для всех $f \in H$ выполняется равенство

$$J(f(\sigma)) = J(\sigma). \quad (13)$$

Вообще говоря, группа H имеет бесконечное множество инвариантов, так как любая функция от инвариантов есть снова инвариант. Это множество описывается понятием базиса инвариантов.

Определение 2. Набор инвариантов $J = (J_1, \dots, J_q)$ называется *базисом инвариантов* группы H , если функции $J_k(\sigma)$ в совокупности функционально независимы и если любой инвариант $K(\sigma)$ группы H является функцией от инвариантов $J_1, \dots, J_q$:

$$K(\sigma) = F(J_1(\sigma), \dots, J_q(\sigma)). \quad (14)$$

Если ввести координаты вектора $\sigma \in Z$, положив $\sigma = (\sigma^1, \dots, \sigma^s)$ (для системы (1) $s = 9$), то всегда будет $q < s$, а условие функциональной неза-

висимости инвариантов выразится через $q \times s$ -матрицу Якоби $(\partial J_k / \partial \sigma^j)$ равенством

$$\text{ранг } (\partial J_k / \partial \sigma^j) = q. \quad (15)$$

Теорема 2. *Базис инвариантов существует для любой группы Ли преобразований конечномерного пространства $Z(\sigma)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО можно найти в [5]. ■

Инвариантно-групповые решения. Для построения класса решений системы (1) берется любая подгруппа $H \subset G$, находится ее базис инвариантов $(J_1, \dots, J_q)$ и к системе (1) добавляются соотношения вида

$$F_\beta(J_1, \dots, J_q) = 0 \quad (\beta = 1, \dots, b \leq q) \quad (16)$$

с некоторыми, заранее не фиксированными функциями F_β . В результате дифференцирования соотношений (16) по всем независимым переменным $t, \mathbf{x}$ (при этом u, ρ, p считаются функциями от $t, \mathbf{x}$) получается дополнительная к (1) система дифференциальных уравнений, связывающая производные $u_t, u_x, \dots, p_z$, присоединением которой к (1) образуется нераспределенная система Σ дифференциальных уравнений для искомых u, ρ, p . Для того чтобы система Σ имела решения, функции F_β , в свою очередь, должны удовлетворять некоторым новым дифференциальным уравнениям (условиям совместности уравнений Σ), совокупность которых называется *факторсистемой*.

С любым решением факторсистемы уравнения системы Σ совместны и, тем самым, имеют решения. Такие решения называются *инвариантно-групповыми решениями, произведенными группой H* или, коротко, *H -решениями*. Ясно, что это будут не все решения системы (1), они образуют лишь определенный класс решений, характеризуемый тем, что в нем искомые функции связаны инвариантными соотношениями (16).

Тем самым групповое свойство уравнений газовой динамики (1) открывает широкую возможность построения классов точных частных решений системы (1), так как допускаемые ею группы $G^{11} - G^{14}$ имеют бесконечное множество подгрупп.

Задачи и упражнения к главе I

1. Поле скоростей задано формулой

$$\mathbf{u} = \mathbf{x}/t + \mathbf{a} \quad (\mathbf{a} = \text{const}).$$

Найти форму и положение при любом t того движущегося объема, который при $t = 1$ является шаром радиуса R с центром $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

2. Показать, что в непрерывном движении газа справедлив интегральный закон сохранения энтропии движущегося объема

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\omega(t)} \rho S d\omega = 0.$$

3. Исходя из абстрактного закона сохранения в форме (4.3), дать строгий вывод балансовых уравнений (1.4).

4. Доказать справедливость закона сохранения момента импульса (1.5) для непрерывных движений и для движений с сильным разрывом.

5. Показать, что в идеальном газе квадрат скорости звука выражается через внутреннюю энергию $\epsilon = \mathcal{E}(T)$ формулой

$$c^2 = R\Gamma(1 + R/\mathcal{E}'(T)).$$

6. Показать, что внутренняя энергия $\epsilon = \mathcal{E}(V, T)$ имеет вид

$$\mathcal{E}(V, T) = \mathcal{E}_1(V) + \mathcal{E}_2(T),$$

если и только если давление $p = p(V, T)$ есть линейная функция температуры T .

7. Доказать формулу Эйлера (3.5).

8. Показать, что в лагранжевых координатах $(\mathbf{x}_0, t)$, введенных согласно (1.1) и (1.2), система уравнений газовой динамики (3.11) принимает вид

$$\frac{\partial(\rho\delta)}{\partial t} = 0, \quad M^* \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{x}_0} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}_0}$$

с матрицей $M = \partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}_0$, сопряженной матрицей M^* и $\delta = \det M$.

9. Показать, что скорость перемещения в направлении нормали $\mathbf{n}$ поверхности, заданной уравнением $F(\mathbf{x}, t) = 0$, равна

$$D_n = - \frac{F_t}{\mathbf{n} \cdot \nabla F}.$$

10. Пусть функция $\epsilon = e(V, p)$ удовлетворяет неравенству $e_p \leq bV$ ($b = \text{const}$ для всех p и $V < V_0$). Показать, что вдоль адиабаты Гюгонио будет $\lim_{p \rightarrow \infty} V = \bar{V}_\infty > 0$.

11. Показать, что скорость перемещения ударной волны D_n строго монотонно возрастает вместе с силой разрыва $[p]$, причем $D_n \rightarrow \infty$ при $[p] \rightarrow \infty$.

12. Пусть H_1 — адиабата Гюгонио с центром (V_1, p_1) , и пусть точка $(V_2, p_2) \in H_1$. Выяснить взаимное расположение кривой H_1 адиабаты $S = S_2$, хорды с концами (V_1, p_1) и (V_2, p_2) и адиабаты Гюгонио H_2 с центром (V_2, p_2) .

13. Выяснить, когда достигается большая плотность: при сжатии одной ударной волной, повышающей давление от p_1 до p_3 , или при последовательном сжатии двумя ударными волнами, если в первой давление повышается от p_1 до $p_2 < p_3$, а во второй — от p_2 до p_3 .

14. Показать, что в случае слабой ударной волны справедлива оценка (предполагается, что $D_n > u_{n_1}$)

$$u_{n_1} + c_1 + u_{n_2} + c_2 - 2D_n = O(|p|^2).$$

15. Проверить, что в уравнениях (6.33)–(6.35) характеристической формы уравнений газовой динамики искомые функции u , p , S дифференцируются только в касательном направлении к соответствующей характеристике.

16. Пусть начальные значения при $t = 0$ некоторого непрерывного решения уравнений плоскопараллельного движения (12.7) (см. пример 12.2) постоянны в квадрате $\{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$. В пространстве событий $R^3(x, y, t)$ найти область, в которой решение постоянно.

17. Для уравнений плоскопараллельного движения (12.17) (см. пример 12.2) построить характеристические поверхности $C_{\pm}$ на решении $u = 0$, $c = c_0$ (покой), проходящие через кривую, образованную лучами $\{x = -1, 0 \leq y < \infty\}$, $\{0 \leq x < \infty, y = -1\}$ и дугой окружности $\{x^2 + y^2 = 1, x \leq 0, y \leq 0\}$.

18. Показать, что величины ∇p и $\operatorname{div} u$ при переходе через слабый контактный разрыв меняются непрерывно.

19. Непосредственной подстановкой (заменой переменных) проверить, что система уравнений (8.1) допускает каждое из преобразований (8.5) f^1 – f^{10} .

20. Проверить, что функции

$$u = \frac{x + F(y)}{t}, \quad v = w = 0, \quad \rho = \frac{1}{t}, \quad S = S_0,$$

где $S_0 = \text{const}$ и $F(y)$ — произвольная функция, дают точное решение уравнений газовой динамики (3.11). Найти общий вид решения, получаемого из данного преобразованиями группы G^2 , порожденной преобразованиями (8.5) f^9 и (8.8) f^{11} .

21. Показать, что система уравнений (8.1) в случае политропного газа допускает преобразование (8.10) только при $\gamma = 5/3$.

Специальные модели движения газа

Основные проблемы теоретического исследования движений газа связаны с отысканием решений полученной в главе I системы дифференциальных уравнений с условиями на сильных разрывах и дополнительными начальными и граничными условиями. Большие математические трудности, возникающие на пути решения таких проблем вследствие сложности самой модели движения, вынуждают к поиску более простых моделей, для которых можно было бы продвинуть исследование дальше, чем в общем случае. Не будет преувеличением, если сказать, что современный прогресс в решении многих проблем газовой динамики достигнут благодаря успешному использованию упрощенных постановок ее задач. В данной главе намечаются методы построения и приводится некоторый список таких упрощенных моделей и, коротко говоря, *подмоделей*.

Всякое движение газа неразрывно связано с идущим в нем термодинамическим процессом. При этом возможны такие ситуации, когда этот процесс является однопараметрическим. Отсюда возникают термодинамические подмодели, среди которых наиболее важной и часто эксплуатируемой является модель изэнтропического движения. Далее, большое место в газовой динамике занимает теория установившихся течений (в том числе безвихревых). В этой подмодели пространство событий отходит на второй план, каждое событие является «вечным», застывшим во времени. В пространстве течения процесс утрачивает, вообще говоря, свойство детерминированности, что влечет целый ряд новых эффектов. К ним относится, например, переход через скорость звука и связанное с ним изменение типа основных дифференциальных уравнений.

Очевидно, что упомянутые выше и многие другие случаи подмоделирования сводятся к выделению и описанию тех или иных классов точных решений уравнений газовой динамики. При этом естественна постановка вопроса о наиболее широком раскрытии возможностей, предоставляемых для этой цели самой исходной моделью. Здесь решающим является ее групповое свойство, возможности которого иллюстрируются многочисленными примерами классов инвариантных и частично инвариантных решений.

В газовой динамике, особенно при решении конкретных практических задач, широко используются также различные методы приближенного под-

моделирования. Здесь характерно сочетание предварительного физического анализа (учитывающего экспериментальные данные) с надлежащим формально-математическим введением малого параметра и последующим предельным переходом.

Конечно, приведенный в этой главе список упрощенных моделей далеко не исчерпывает всех случаев точного и тем более приближенного подмоделирования уравнений и задач газовой динамики. Цель главы — дать общее представление о богатстве множества конкретных подмоделей и о некоторых основах и методах их построения.

§ 9. Термодинамические модели

Вынесенное в заголовок название специального класса математических моделей газовой динамики означает, что в таких моделях делаются дополнительные предположения о характере термодинамического процесса в газе. В простейшей форме они сводятся к условию постоянства в рассматриваемом движении какой-либо из термодинамических величин. Эти предположения в действительности обычно выполняются приближенно, в зависимости от конкретных условий движения газа. Использование таких предположений на практике требует каждый раз тщательного анализа и экспериментального подтверждения. Привлекательной стороной применения различных термодинамических моделей является то, что в них обычно достигается определенное упрощение описания движения газа и облегчается получение результирующих аналитических формул и выполнение численных расчетов. Здесь в сжатой форме рассматриваются некоторые из таких моделей с целью показать основные особенности в получаемых уравнениях движения газа.

Изэнтропическое движение. Движение газа называется *изэнтропическим*, если в этом движении энтропия S тождественно постоянна

$$S = \text{const.} \quad (1)$$

Основание для изучения изэнтропических движений дает следующий, уже отмеченный в § 3 факт: энтропия сохраняется в частице газа. Поэтому, если в некоторой массе газа в какой-то момент времени распределение энтропии по частицам газа было постоянным, то оно будет постоянным в этой массе газа и в последующее время. Конечно, это утверждение безоговорочно справедливо лишь для непрерывных движений. Если же по массе газа пройдет ударная волна, то, согласно выводам § 5, энтропия в ней изменится и может стать уже не постоянной по частицам. В случае ударных волн малой интенсивности можно, однако, принимать

свойство сохранения энтропии приближенно, учитывая, что скачок энтропии есть величина третьего порядка малости по сравнению с силой разрыва (теорема 5.2).

В случае изэнтропического движения уравнение $DS = 0$ выпадает из системы дифференциальных уравнений (3.11). Кроме того, при этом будет $\nabla p = c^2 \nabla \rho$ согласно определению 2.3. Поэтому дифференциальные уравнения изэнтропических движений газа принимают вид

$$\begin{aligned} D\rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \rho D\mathbf{u} + c^2 \nabla \rho &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где $c^2 = c^2(\rho)$ рассматривается как заданная функция.

Модель изэнтропического движения особенно проста для политропного газа, в котором в силу (2.5) и (2.18) справедливо соотношение

$$\frac{dc}{c} = \frac{\gamma - 1}{2} \frac{d\rho}{\rho}, \quad (3)$$

позволяющее исключить плотность ρ из системы (2). В результате получаются уравнения изэнтропического движения политропного газа

$$\begin{aligned} Dc + \frac{\gamma - 1}{2} c \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ D\mathbf{u} + \frac{2}{\gamma - 1} c \nabla c &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где γ — показатель адиабаты.

Уместно отметить, что в ряде работ по газовой динамике встречается термин «баротропный газ». Обычно под этим подразумевается, что давление p является однозначной функцией плотности ρ , и пишется «уравнение состояния» вида $p = f(\rho)$. Однако необходимо помнить, что уравнение $p = f(\rho)$ отражает не свойство газа как физической среды, а лишь свойство движения газа, при котором такая связь давления с плотностью реализуется. Но эта связь и есть следствие предположения об изэнтропичности исследуемого движения газа, который в других условиях вполне может проявлять и те свойства, которые связаны с изменением энтропии (например при прохождении сильных ударных волн).

При решении задач об изэнтропическом движении газа с относительно слабыми ударными волнами, когда изменением энтропии в ударных волнах пренебрегается, уравнения ударного перехода (4.12) и (4.13) остаются прежними, а вместо уравнения адиабаты Гюгонио (4.14) или (4.18) к ним добавляется уравнение адиабаты Пуассона $S = S_0 = \text{const}$. Последнее при

записи исходного уравнения состояния в виде $p = f(\rho, S)$ равносильно уравнениям

$$p_1 = f(\rho_1, S_0), \quad p_2 = f(\rho_2, S_0). \quad (5)$$

При этом необходимо допускать только такие ударные переходы, для которых скачки давления и плотности положительны, т.е. (если (ρ_1, p_1) — состояние перед волной)

$$[p] = p_2 - p_1 > 0, \quad [\rho] = \rho_2 - \rho_1 > 0,$$

хотя здесь эти неравенства уже не следуют из закона возрастания энтропии.

Изотермическое движение. Движение газа называется *изотермическим*, если в этом движении температура T тождественно постоянна

$$T = \text{const.}$$

Если рассматривать давление как термодинамическую функцию от температуры и энтропии, то для изотермического движения $p = p(S)$, в силу чего давление должно сохраняться в частице. Тем же свойством должна обладать и плотность ρ . При этих предположениях из (3.11) получится система уравнений

$$D\rho = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0, \quad \rho D\mathbf{u} + c^2 \nabla \rho = 0 \quad (6)$$

(где $c^2 = c^2(\rho)$), которая оказывается *переопределенной*. В ней имеется пять скалярных уравнений для четырех искоемых функций u, v, w, ρ . Хотя эта система и не противоречива, ее общее решение до настоящего времени не получено.

Использование модели изотермического движения можно связать с возможностью сохранения температуры за счет подвода (отвода) некоторой энергии к каждой частице газа извне, например за счет действия какого-либо излучения (см., например, [6]). Конечно, в получаемой модели энтропия в частице сохраняться не будет и уравнение энергии должно принять другой вид, связанный с учетом механизма внешнего притока энергии. Обычно, однако, уравнение энергии отбрасывается и предполагается просто, что давление есть однозначная функция плотности, $p = f(\rho)$, как это имело бы место при условии $T = \text{const}$ без учета подвода энергии.

При этом соглашении дифференциальные уравнения снова приводятся к (2), однако с другим характером связи $c^2 = c^2(\rho)$. Например, для идеального газа согласно (2.3) получается, что давление просто пропорционально плотности, откуда следует постоянство скорости звука:

$$c = \text{const.} \quad (7)$$

Условие (7) можно рассматривать как предположение, эквивалентное изотермическому характеру движения газа. В этом случае связь давления с плотностью имеет вид

$$p = c^2 \rho, \quad (8)$$

где постоянная c называется *изотермической скоростью звука*.

Система основных дифференциальных уравнений здесь снова имеет вид (2), но с постоянным коэффициентом c^2 . Что же касается условий на ударной волне, то в них также отбрасывается уравнение адиабаты Гюгонио, которое заменяется вытекающим из (7) и (8) уравнением *изотермы*

$$p_2 V_2 = p_1 V_1. \quad (9)$$

Здесь возможен также учет изменения изотермической скорости звука при переходе через ударную волну, но тогда скачок $[c] = c_2 - c_1$ должен либо быть задан непосредственно, либо определяться из других соображений (например из точных уравнений ударного перехода).

Изобарическое движение. Движение газа называется *изобарическим*, если в этом движении давление p тождественно постоянно:

$$p = \text{const}. \quad (10)$$

Для нормального газа в таком движении должно быть $\rho = \rho(S)$ (заданная функция) и потому плотность должна сохраняться в частице. Следовательно, система дифференциальных уравнений изобарического движения имеет вид

$$D\rho = 0, \quad D\mathbf{u} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (11)$$

Таким образом, в изобарическом движении все газодинамические величины сохраняются в частицах и потому полностью определяются их распределениями в некоторый момент времени, например при $t = 0$. Для описания таких движений удобно ввести лагранжевы координаты $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$ как значения координат частиц газа в момент $t = 0$. Тогда решение первых двух уравнений (11) дается равенствами

$$\rho = \rho(\xi), \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}(\xi). \quad (12)$$

В силу (12) каждая частица ξ движется по своей траектории с постоянной скоростью, и потому ее траектория есть прямая линия

$$\mathbf{x} = \xi + \mathbf{u}(\xi)t. \quad (13)$$

Однако получаемое этим путем поле скоростей должно удовлетворять еще и последнему уравнению (11). Несложное вычисление показывает, что это

уравнение будет выполнено, если и только если входящие в (12) компоненты вектора скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} u_{\xi} + v_{\eta} + w_{\zeta} &= 0, \\ \begin{vmatrix} u_{\xi} & u_{\eta} \\ v_{\xi} & v_{\eta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} u_{\xi} & u_{\zeta} \\ w_{\xi} & w_{\zeta} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} v_{\eta} & v_{\zeta} \\ w_{\eta} & w_{\zeta} \end{vmatrix} &= 0, \\ \begin{vmatrix} u_{\xi} & u_{\eta} & u_{\zeta} \\ v_{\xi} & v_{\eta} & v_{\zeta} \\ w_{\xi} & w_{\eta} & w_{\zeta} \end{vmatrix} &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Это означает, что изобарическое движение возможно только при некотором специальном начальном распределении скоростей. Уравнения (14) интегрируются; их общее решение зависит от трех произвольных функций двух независимых переменных. Выделение класса изобарических решений уравнений газовой динамики полезно, такие решения часто встречаются при изучении других классов подмоделей. Примером служат решения с линейным полем скоростей $\mathbf{u} = A\xi$ с постоянной матрицей A .

Существенным обобщением изобарических являются *барохронные* движения газа, выделяемые зависимостью давления только от времени:

$$p = p(t). \quad (15)$$

В настоящее время барохронные движения также достаточно хорошо изучены [16].

Изохорическое движение. Движение газа называется *изохорическим*, если в этом движении плотность ρ тождественно постоянна:

$$\rho = \text{const}. \quad (16)$$

Предположение (16) в дифференциальных уравнениях законов сохранения массы и импульса (3.11) приводит к системе уравнений движения *идеальной несжимаемой жидкости*

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \rho D\mathbf{u} + \nabla p = 0. \quad (17)$$

При изохорическом движении нормального газа должно быть, кроме того, $Dp = f_S DS = 0$, т. е. давление должно сохраняться в частице. Добавление к (17) уравнения $Dp = 0$ приводит к системе уравнений изотермического движения газа (6).

Тем не менее модель несжимаемой жидкости можно использовать для приближенного описания движений газа. Эта модель должна быть хороша

в тех случаях, когда малые изменения плотности вызывают конечные изменения давления. Так как $Dp = c^2 D\rho$, то это означает, что величина Dp мала по сравнению с величиной ρc^2 . В частности, для политропного газа из соотношений (2.20) вытекают равенства

$$\frac{Dp}{\rho c^2} = \frac{1}{\gamma} \frac{Dp}{p} = \frac{D\rho}{\rho}.$$

Поэтому движение несжимаемой жидкости можно трактовать как предельное для движения политропного газа, когда $\gamma \rightarrow \infty$. Если исходные уравнения взяты в форме (3.14), то и для произвольного нормального газа модель (17) формально получается как предельная при условии, что

$$Dp/\rho c^2 \rightarrow 0.$$

Уместно заметить, что если при этом не предполагать $\rho = \text{const}$, то останется еще уравнение $D\rho = 0$. С этим дополнительным уравнением система (17) описывает движение *неоднородной* несжимаемой жидкости.

На практике приближение, связанное с использованием модели идеальной несжимаемой жидкости, широко применяется в аэрогидромеханике, например при решении задач обтекания тел стационарным потоком. Здесь применимость обсуждаемой модели определяется малостью величины отношения скорости потока к скорости звука по сравнению с единицей. Для ориентира можно напомнить, что скорость звука в воздухе (при нормальных условиях) $c \approx 340$ м/с, а в воде $c \approx 1500$ м/с.

§ 10. Установившиеся движения

Движение газа называется *установившимся* (или *стационарным*), если основные величины не зависят от времени:

$$u_t = 0, \quad \rho_t = 0, \quad p_t = 0, \quad S_t = 0, \quad (1)$$

и являются, таким образом, функциями только точки x пространства $R^3(x)$.

В литературе принято называть установившиеся движения также установившимися (стационарными) *течениями* газа. Этот термин хорошо отражает свойство неизменности во времени, «вечности» таких движений и будет также использоваться в дальнейшем изложении.

Модель установившегося течения систематически используется при решении конкретных задач благодаря тому, что она приближенно описывает широкий класс реальных движений газа. Типичным примером приближенно

установившегося течения газа является движение, реализуемое при истечении газовой струи из большого сосуда через относительно малое отверстие. Установившееся течение получается в пределе, когда размеры сосуда бесконечны и параметры газа в нем (на бесконечности) фиксированы, а процесс истечения длится неограниченно долго.

Другой важный пример дает равномерно-поступательное движение твердого тела в безграничном, покоящемся на бесконечности газе. Возникающее при этом неустановившееся движение газа сводится к установившемуся с помощью преобразования Галилея (см. § 8) так, как это описано в § 7 (см. «Задача обтекания»). В системе координат, движущейся вместе с телом, последнее неподвижно. Равномерный на бесконечности и имеющий там заданную скорость поток газа обтекает это неподвижное тело и, в силу неизменности граничного условия на теле, может рассматриваться как установившееся течение.

Исходные уравнения. Установившиеся движения естественно рассматривать безотносительно к времени, только на пространстве течения $R^3(\mathbf{x})$. Оказывается, что при этом их уравнения приобретают особые свойства, которые необходимо учитывать при постановке и решении краевых задач. Описанию и анализу специфики уравнений установившихся течений и посвящено последующее изложение. При записи различных соотношений в декартовых координатах будут, как всегда, использоваться представления $\mathbf{x} = (x, y, z)$ и $\mathbf{u} = (u, v, w)$.

Исходные интегральные законы сохранения, взятые в балансовой форме (1.4), принимают вид уравнений нулевых суммарных потоков массы, импульса и энергии через границу γ любой области $\omega \subset R^3(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \iint_{\gamma} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma &= 0, \\ \iint_{\gamma} (p\mathbf{n} + \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})) \, d\gamma &= 0, \\ \iint_{\gamma} \left(p + \rho \left(\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon \right) \right) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Дифференциальные уравнения гладких установившихся течений могут быть взяты в прежней форме, например (3.11), но с заменой оператора производной в частице (3.3) «укороченным» оператором

$$D' = \mathbf{u} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}. \quad (3)$$

Следовательно, система дифференциальных уравнений установившихся течений такова:

$$\begin{aligned} D' \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \rho D' \mathbf{u} + \nabla p &= 0, \\ D' S &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Линии тока. Специфика кинематики установившегося течения отражается следующим фундаментальным понятием.

Определение 1. Линии в пространстве $R^3(\mathbf{x})$, определенные как интегральные кривые системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{u(x, y, z)} = \frac{dy}{v(x, y, z)} = \frac{dz}{w(x, y, z)}, \quad (5)$$

называются *линиями тока* установившегося течения с вектором скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$. В дальнейшем линии тока обозначаются символом $\mathcal{L}$.

Сравнение (5) с уравнениями траекторий (1.1) показывает, что линии тока являются траекториями частиц в $R^3(\mathbf{x})$. Однако необходимо иметь в виду, что, в отличие от общих движений газа, когда траектории частиц образуют трехпараметрическое семейство кривых, совокупность линий тока установившегося течения является лишь двухпараметрическим семейством.

В силу определения 1 оператор D' является оператором дифференцирования вдоль линий тока. Это позволяет получить два важнейших интеграла системы уравнений (4).

Первый из них есть *интеграл энтропии*, вытекающий из уравнения $D'S = 0$ и означающий, что энтропия вдоль линии тока постоянна:

$$S = S_0(\mathcal{L}). \quad (6)$$

Величина $S_0(\mathcal{L})$ зависит только от линии тока $\mathcal{L}$: для каждой фиксированной линии тока она постоянна, но, вообще говоря, меняется с изменением $\mathcal{L}$.

Интеграл Бернулли. Второй интеграл есть следствие (6) и уравнения импульсов. Для его получения уравнение импульсов в форме Громеки–Лэмба (3.19)

$$\nabla \left(\frac{1}{2} q^2 \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$$

скалярно умножится на вектор скорости $\mathbf{u}$. В силу (3) и известного свойства векторного произведения это даст

$$D' \left(\frac{1}{2} q^2 \right) + \frac{1}{\rho} D' p = 0.$$

Но из уравнения первого закона термодинамики (2.1), в котором надо положить $d = D'$ и ввести удельную энтальпию $i = \varepsilon + pV$, следуют равенства

$$D'i = TD'S + VD'p = \frac{1}{\rho}D'p,$$

где принято во внимание, что $D'S = 0$ и $V = 1/\rho$. Поэтому предыдущее уравнение переписывается в виде

$$D'(q^2 + 2i) = 0.$$

Отсюда, аналогично интегралу (6), и следует искомый интеграл

$$q^2 + 2i = 2i_0(\mathcal{L}), \quad (7)$$

где величина $i_0(\mathcal{L})$ зависит только от линии тока $\mathcal{L}$.

Соотношение (7) называется *интегралом Бернулли*. Следует иметь в виду, что в общем случае установившегося течения интеграл Бернулли (в отличие от интеграла энтропии) не равносильен дифференциальному уравнению импульсов (и потому не может полностью заменить это уравнение); он представляет собой лишь необходимое следствие уравнений энергии и импульсов. Тем не менее интеграл Бернулли является ключевым для понимания основных закономерностей установившихся течений газа.

Удобно записать интеграл Бернулли в несколько иной форме. Так как в нормальном газе удельная энтальпия дается формулой (2.14), то можно определить величину

$$I = 2 \int_0^p \frac{c^2}{\rho} d\rho, \quad (8)$$

которая отличается от $2i$ самым большим постоянным слагаемым (зависящим от S).

Утверждается, что (при постоянной S) величина (8) есть однозначная возрастающая функция от квадрата скорости звука, $I = I(c^2)$, и такая, что

$$I(c^2) \rightarrow 0, \quad (c^2 \rightarrow 0), \quad I(c^2) \rightarrow \infty \quad (\rho \rightarrow \infty). \quad (9)$$

Действительно, в силу (2.24) справедлива формула

$$dI/d(c^2) = 2/m > 0.$$

Далее, согласно Лемме (2.1) $I \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow 0$, что равносильно первому соотношению (9). Наконец, из неравенства $f_{\rho\rho} > 0$ следует, что с некоторым $\rho_1 > 0$ при $\rho > \rho_1$ будет $c^2 = f_\rho > a > 0$ ($a = \text{const}$), откуда

$$I > a_1 + 2 \int_{\rho_1}^{\rho} \frac{a}{\rho} d\rho = a_1 + 2a \ln \left(\frac{\rho}{\rho_1} \right) \rightarrow \infty \quad (\rho \rightarrow \infty).$$

Максимальная и критическая скорости. С функцией (8) интеграл Бернулли записывается в виде

$$q^2 + I(c^2) = q_m^2, \quad (10)$$

где $q_m = q_m(\mathcal{L})$ есть максимально возможная скорость на данной линии тока $\mathcal{L}$ (всегда $q \leq q_m$). Значение $q = q_m$ достигается, в силу (9), лишь в состоянии вакуума, когда $c^2 = 0$ и $\rho = 0$.

Определение 2. Критической скоростью называется величина $c_* > 0$, определяемая как корень уравнения

$$c_*^2 + I(c_*^2) = q_m^2. \quad (11)$$

Очевидно, что при любом данном q_m^2 уравнение (11) имеет единственный корень c_*^2 , так как его левая часть возрастает вместе с c_*^2 и принимает, в силу (9), все положительные значения.

Для политропного газа эти соотношения сильно упрощаются. Из (2.20) сразу следует, что $I(c^2) = 2c^2/(\gamma - 1)$, так что интеграл Бернулли имеет вид

$$q^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c^2 = q_m^2, \quad (12)$$

а критическая скорость дается выражением

$$c_* = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} q_m. \quad (13)$$

До- и сверхзвуковые течения. Наиболее важные динамические свойства установившихся течений связаны с различием их по следующему признаку.

Определение 3. Установившееся течение газа в области $\Omega \subset R^3$ называется *дозвуковым*, если всюду в Ω

$$q < c; \quad (14)$$

оно называется *сверхзвуковым*, если всюду в Ω

$$q > c. \quad (15)$$

Важно заметить, что дозвуковой или сверхзвуковой характер течения можно обнаружить путем сравнения модуля скорости q только с критической скоростью c_* . Это следует из того, что если $q \neq c$, то величина c_* всегда лежит внутри интервала (q, c) . Действительно, если $q < c$, то в силу монотонности функции $I(c^2)$ и определения (11)

$$q^2 + I(q^2) < q^2 + I(c^2) = q_m^2 = c_*^2 + I(c_*^2) < c^2 + I(c^2),$$

откуда $q < c_* < c$. Если $q > c$, то все знаки неравенств замещаются на противоположные. Это свойство легко усматривается из рис. 1, на котором качественно показана зависимость $c(q)$, определяемая интегралом Бернулли.

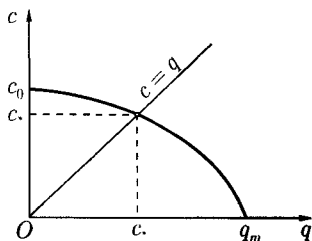


Рис. 1

Установленное с помощью интеграла Бернулли различие дозвуковых и сверхзвуковых течений не является формальным. На самом деле оно связано с зависимостью типа системы дифференциальных уравнений (4) от характера установившегося течения, когда это течение рассматривается не в пространстве событий $R^4(x, t)$, а лишь в «своем» пространстве $R^3(x)$. Такое рассмотрение оправдано постановкой краевых задач стационарного обтекания или стационарного течения со свободными границами, для которых каждое

событие является «вечным». Поэтому вместо характеристик общих уравнений на решениях — установившихся течениях необходимо изучить поведение характеристик самих уравнений (4) в пространстве $R^3(x)$.

Характеристики. С этой целью удобно взять исходные уравнения в виде, соответствующем матричной записи (3.17), с учетом того, что для установившихся течений отсутствует слагаемое с A^t , так как $U_t = 0$. В отличие от общего случая (6.14), нормальные характеристические векторы ищутся в $R^3(x)$:

$$\xi = (\xi, \eta, \zeta).$$

Тогда характеристическая матрица $A(\xi)$ снова будет иметь вид (6.15), но с укороченным выражением вспомогательной величины χ , а именно с величиной

$$\chi' = u\xi + v\eta + w\zeta.$$

Здесь, не нарушая общности анализа, можно считать ξ единичным вектором, $|\xi| = 1$. Тогда величина $\chi' = \mathbf{u} \cdot \xi$ будет равна проекции вектора скорости на направление ξ . Но вектор ξ совпадает с нормалью $\mathbf{n}$ к характеристике $C(t)$, которая на самом деле неподвижна в $R^3(\mathbf{x})$. Поэтому просто

$$\chi' = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u_n.$$

Далее, выражение для определителя характеристической матрицы (6.17) здесь будет тем же самым (с заменой χ на χ') и его корни даются равенствами $\chi' = 0$ или $\chi' = \pm c$.

Итак, для уравнений установившегося течения возможны два типа характеристик: *контактные*, на которых $u_n = 0$, и *звуковые*, на которых

$$u_n = \pm c. \quad (16)$$

Уравнение $u_n = 0$ означает, что вектор скорости ортогонален нормали к характеристике, т. е. является касательным к характеристической поверхности. Так как это верно в любой ее точке, то вместе с каждой точкой P данной характеристики принадлежит целая линия тока, проходящая через P . Следовательно, *всякая контактная характеристика является геометрическим местом линий тока*.

Уравнение (16) означает, что ортогональная проекция вектора $\mathbf{u}$ на нормаль $\mathbf{n}$ равна (по абсолютной величине) скорости звука. Но величина проекции $|U_n|$ вектора $\mathbf{u}$ не может быть больше его модуля $q = |\mathbf{u}|$. Поэтому равенство (16) возможно, только если выполнено неравенство (15), т. е. если течение сверхзвуковое. Следовательно, *звуковые характеристики существуют только в сверхзвуковых течениях*. Для них всегда абсолютная величина проекции вектора скорости на нормаль к характеристике равна скорости звука.

В соответствии с определением 6.2 эти выводы показывают, что система уравнений установившихся течений является гиперболической, только если течение сверхзвуковое. На дозвуковых течениях существуют лишь контактные характеристики.

Интересно взглянуть на эту ситуацию с точки зрения пространства событий $R^4(\mathbf{x}, t)$ на примере постоянного решения $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$, $c = c_0$, которое описывает установившееся течение. На этом решении в $R^4(\mathbf{x}, t)$ существует характеристический конус (6.32), внутренность которого (при $t > t_0$), согласно рассмотрению § 7 (см. текст после теоремы 7.3), является областью влияния его вершины $P(\mathbf{x}_0, t_0)$. Здесь характеристики $C(t) \subset R^3(\mathbf{x})$ суть сферы, центр которых перемещается со скоростью $q_0 = |\mathbf{u}_0|$, а радиус растет со скоростью c_0 . Поэтому, если $q_0 < c_0$, то вершина P во все моменты времени $t > t_0$ остается внутри сферы $C(t)$ (рис. 2, а). Если же $q_0 > c_0$, то сферы $C(t)$ не содержат точку P и огибают прямой круговой

конус $K_0 \subset R^3(x)$ с вершиной P и углом раствора 2α , определяемым из соотношения (рис. 2, б)

$$\sin \alpha = c_0/q_0.$$

Таким образом, если течение дозвуковое, то его возмущение в точке P со временем охватит все пространство $R^3(x)$. Если же течение сверхзвуковое, то возмущение в точке P локализуется внутри конуса K_0 . Из рис. 2, б непосредственно видно, что проекция вектора u_0 на нормаль к конусу K_0 равна скорости звука c_0 . Следовательно, K_0 — характеристический конус рассматриваемого сверхзвукового установившегося течения.

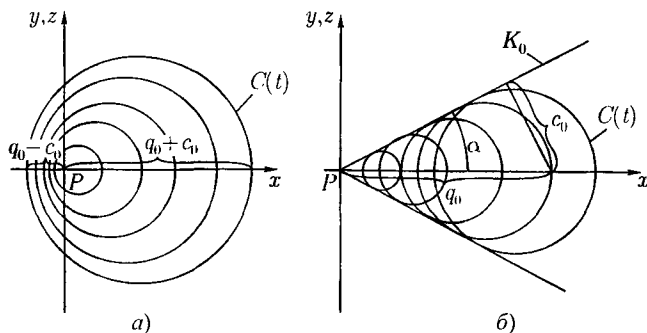


Рис. 2

Определение 4. Величина

$$M = q/c \quad (17)$$

называется *числом Маха*.

Для дозвуковых течений число Маха $M < 1$, а для сверхзвуковых течений $M > 1$.

Трубки тока. Следующая особенность установившихся течений связана с понятием *трубки тока*. Этот объект формируется так. Берется некоторая трубообразная область T_r , образованная линиями тока, проходящими через некоторый «начальный» диск K_r малого радиуса r с центром в некоторой точке $P \in R^3$, перпендикулярный вектору скорости $u(P)$. Пусть K — какое-нибудь сечение T_r , и пусть Σ — боковая поверхность отрезка области T_r , заключенного между K_r и K (рис. 3). Ясно, что Σ образована линиями тока, т. е. является контактной характеристикой. Поэтому $u \cdot n = 0$

на Σ и применение интегрального закона сохранения массы (2) к области с границей $\gamma = K_r + \Sigma + K$ дает соотношение

$$Q(T_r) = \iint_{K_r} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\gamma = \iint_K \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\gamma, \quad (18)$$

если нормаль $\mathbf{n}$ выбрана так, чтобы было $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} > 0$. Следовательно, входящий в (18) интеграл не зависит от выбора сечения K . Поэтому величина $Q(T_r)$ называется *расходом газа* через сечения трубообразной области T_r . Пусть $\mathcal{L}$ есть линия тока, проходящая через точку P , и пусть сечение K выбрано плоским, перпендикулярным к $\mathcal{L}$. Площадь сечения диска K_r обозначается через σ_r , а площадь сечения диска K — через σ . Предполагается, что отношение σ/σ_r имеет конечный предел

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma/\sigma_r = F. \quad (19)$$

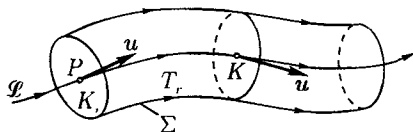


Рис. 3

Тогда будет существовать также конечный предел

$$Q = \lim_{r \rightarrow 0} Q(T_r)/\sigma_r = \rho q F, \quad (20)$$

называемый *расходом вдоль линии тока* $\mathcal{L}$. Предельный переход в (18) с учетом (19) и (20) дает объект $(\mathcal{L}, Q, \rho, q, F)$, который и называется (абстрактной) *трубкой тока*. Он состоит из линии тока $\mathcal{L}$ с расходом Q и распределенных вдоль нее значений плотности ρ , скорости q и *площади сечения* F , связанных соотношением

$$\rho q F = Q = \text{const.} \quad (21)$$

Произведение ρq называется *удельным расходом*. Говорят о *расширяющейся* (*сужающейся*) трубке тока, если ее площадь сечения F растет (убывает) при перемещении вдоль линии тока $\mathcal{L}$ в направлении вектора скорости $\mathbf{u}$. Оказывается, что поведение течения в трубке тока существенно зависит от до- или сверхзвукового характера течения. Это поведение описывается следующим утверждением.

Теорема 1. *В расширяющейся трубке тока дозвуковая скорость убывает, а сверхзвуковая скорость возрастает; в сужающейся трубке тока, наоборот, дозвуковая скорость возрастает, а сверхзвуковая убывает. Равносильная формулировка: при замедлении дозвукового течения трубки тока расширяются, а при замедлении сверхзвукового течения — сужаются; при ускорении дозвукового течения трубки тока сужаются, а при ускорении сверхзвукового течения — расширяются.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Изменение удельного расхода ρq в зависимости от q вдоль линии тока $\mathcal{L}$ описывается легко выводимым из (8) и (9) соотношением

$$d(\rho q)/dq = \rho(1 - M^2), \quad (22)$$

где использовано обозначение (17). В силу (22) дифференцирование соотношения (21) приводит к равенству

$$\frac{dF}{F} = (M^2 - 1) \frac{dq}{q}. \quad (23)$$

Из (23) вытекает следующая таблица, строки которой дают все возможные сочетания знаков:

$$\begin{array}{lll} dF > 0, & M < 1, & dq < 0; \\ dF > 0, & M > 1, & dq > 0; \\ dF < 0, & M < 1, & dq > 0; \\ dF < 0, & M > 1, & dq < 0, \end{array}$$

равносильная совокупности всех утверждений о свойствах трубок тока. ■

Ударные волны. В установившемся течении поверхность ударной волны необходимо должна быть неподвижной в пространстве $R^3(x)$. Таковую «стоячую» ударную волну принято называть *скачком уплотнения*. Так как скорость перемещения скачка уплотнения $D_n = 0$, то теорема Цемплена 5.4 для состояния «1» перед скачком и состояния «2» за скачком дает неравенства

$$|u_{n1}| > c_1, \quad |u_{n2}| < c_2. \quad (24)$$

Тем более должно быть $q_1 > c_1$. Следовательно, *перед скачком уплотнения всегда находится сверхзвуковое течение*. Другими словами, скачки уплотнения могут существовать только в сверхзвуковых течениях. При этом течение за скачком может быть как сверхзвуковым, так и дозвуковым.

Следующее свойство скачков уплотнения связано с интегралом Бернулли. Из последнего уравнения (4.9) или, что равносильно, из уравнений (4.14) и (4.13) следует соотношение

$$\left[\frac{1}{2} q^2 + \varepsilon + pV \right] = 0$$

или, с удельной энтальпией $i = \varepsilon + pV$,

$$[q^2 + 2i] = 0.$$

Сравнение этого соотношения с (7) показывает, что $[i_0] = 0$, т.е. *константа в интервале Бернулли при переходе через скачок уплотнения меняется непрерывно*. В силу (10) это свойство справедливо и для максимальной скорости:

$$[q_m] = 0. \quad (25)$$

Для критической скорости c_* аналогичное свойство, вообще говоря, неверно, так как интеграл (8) зависит также и от энтропии S , скачок которой всегда отличен от нуля. Можно заметить, однако, что в случае политропного газа, в силу прямой связи (13) критической скорости с максимальной, из (25) следует также, что $[c_*] = 0$.

Различают *прямые* и *косые* скачки уплотнения. Скачок уплотнения называется *прямым*, если вектор скорости ортогонален поверхности скачка. При переходе через прямой скачок направление вектора скорости не меняется, линия тока проходит через точку скачка гладко.

Скачок уплотнения называется *косым*, если вектор скорости образует ненулевой угол с нормалью к поверхности скачка. При переходе через косой скачок вектор скорости скачкообразно меняет свое направление, линия тока в точке скачка имеет излом. Эти эффекты регулируются условием сохранения касательной к поверхности скачка составляющей вектора скорости (4.15). Более подробно они будут рассмотрены в § 25.

В заключение следует отметить, что предположение об изэнтропичности установившегося течения существенных изменений, отличных от уже обсуждавшихся в § 9, не вносит. Наибольшие упрощения получаются в тех случаях (например в задаче обтекания), когда свойство изэнтропичности дополняется свойством независимости константы в интеграле Бернулли от линии тока. Установившиеся течения с единой для всего потока константой Бернулли иногда называют *изоэнергетическими*. Свойство изоэнергетичности сохраняется при переходе через скачки уплотнения, хотя при этом изэнтропичность течения может нарушаться.

Преобразование Мунка — Прима. Замечательное свойство симметрии установившихся течений газа состоит в том, что для широкого класса уравнений состояния «с разделенной плотностью» такие течения эквивалентны изэнтропическим. Эти уравнения состояния задаются заменяющим первое (2.7) соотношением

$$\rho = a(S)b(p) \quad (26)$$

с функциями $a(S) > 0$ ($a'(S) < 0$) и $b(p) > 0$ ($b'(p) > 0$). Легко проверить, что в результате преобразования $(u, \rho, p) \rightarrow (u_1, \rho_1, p_1)$ по формулам

$$u_1 = \sqrt{a(S)}u, \quad \rho_1 = \rho/a(S), \quad p_1 = p \quad (27)$$

система (4) останется неизменной, а уравнение состояния (26) примет вид $\rho_1 = b(p_1)$, т.е. давление p_1 будет зависеть только от плотности ρ_1 . При этом, в силу (5), линии тока исходного и преобразованного течений будут одни и те же. В частности, классу (26) принадлежит и политропный газ (2.5).

Класс уравнений состояния (26) обнаружили М. Munk и R. Prim еще в 1947 г. Преобразование (27) (и даже более общее свойство симметрии) есть следствие того, что система (4) при уравнении состояния (26) допускает бесконечномерную группу преобразований с оператором

$$Y = \mu(x)(u^i \partial_{u^i} - 2\rho \partial_\rho), \quad (28)$$

где $\mu(x)$ — любая функция, удовлетворяющая уравнению $D'\mu = 0$. В частности, можно взять $\mu = \Phi(B, S)$ с произвольной функцией Φ , где B есть левая часть интеграла Бернулли (10), т.е. $B = q^2 + I(c^2)$ (сообщение Ю. А. Чиркунова, 1990 г.).

§ 11. Безвихревые движения

Здесь обсуждается поведение важной кинематической характеристики поля скоростей — его вихря и рассматривается специальная модель движения, когда вихрь равен нулю. Эта модель заслуживает внимания благодаря сильному упрощению основных уравнений, особенно в соединении с другими предположениями об изэнтропичности, стационарности и т.д.

Вихрем вектора скорости u называется вектор $\omega = \text{rot } u$.

В декартовых координатах $x = (x, y, z)$ и $u = (u, v, w)$ вихрь может быть записан в форме символического определителя:

$$\text{rot } u = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ u & v & w \end{vmatrix},$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — орты осей x, y, z , или в компонентах:

$$\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u} = (w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y). \quad (1)$$

Движение газа называется *безвихревым*, если в этом движении вихрь $\boldsymbol{\omega}$ равен нулю:

$$\text{rot } \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

Условия безвихревого движения. Необходимое условие безвихревого характера движения дается следующим предложением.

Лемма 1. При непрерывном безвихревом движении нормального газа выполняется соотношение

$$\nabla \rho \times \nabla S = 0. \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. К уравнению импульсов в форме Громски–Лэмба (3.19) применяется дифференциальная операция rot , и используются формулы векторного анализа

$$\begin{aligned} \text{rot}(f\mathbf{a}) &= f \text{rot } \mathbf{a} + \nabla f \times \mathbf{a}, \\ \text{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a} \text{div } \mathbf{b} - \mathbf{b} \text{div } \mathbf{a}. \end{aligned}$$

В результате для вектора $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ с учетом тождества $\text{div } \boldsymbol{\omega} = 0$ получается уравнение

$$D\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \text{div } \mathbf{u} + \rho^{-2} \nabla \rho \times \nabla p. \quad (4)$$

Здесь последнее слагаемое, в силу равенства $\nabla p = c^2 \nabla \rho + f_S \nabla S$, пропорционально векторному произведению $\nabla \rho \times \nabla S$. Поэтому, если $\boldsymbol{\omega} = 0$, то из (4) следует (3). ■

Движение газа, при котором верно соотношение $\nabla \rho \times \nabla p = 0$, называется *баротропным*. Оно характерно тем, что в нем поверхности уровня плотности и давления совпадают. Для нормального газа свойство баротропности движения равносильно выполнению соотношения (3).

Так как уравнение (4) справедливо для любых движений газа, то для баротропных движений (4) превращается в *уравнение вихря*:

$$D\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \boldsymbol{\omega} \text{div } \mathbf{u}. \quad (5)$$

Замечательно, что это уравнение может быть проинтегрировано вдоль траекторий частиц в $R^4(\mathbf{x}, t)$. Если принять обозначения (1.2) и ввести значение вихря при $t = 0$

$$\boldsymbol{\omega}_0(\mathbf{x}_0) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}_0, 0),$$

то решение дается формулой

$$\omega(\mathbf{x}_0, t) = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}_0} \right) \omega_0(\mathbf{x}_0), \quad (6)$$

которая проверяется прямой подстановкой в уравнение (5) с учетом уравнения (3.4) и формулы Эйлера (3.5) для производной от детерминанта $\delta = \det(\partial \mathbf{x} / \partial \mathbf{x}_0)$. Этот факт приводит к следующей формулировке условия, при котором движение является безвихревым.

Теорема (Лагранжа). *Если движение газа непрерывно и баротропно и если в некоторый момент времени в какой-либо частице (в какой-либо массе газа) вихрь равен нулю, то он будет равен нулю в этой частице (в этой массе газа) во все моменты времени.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из формулы (6). ■

Соотношение (3) всегда справедливо для изэнтропического движения. Кроме того, оно может быть выполнено в силу специальной геометрии движения газа, когда поверхности уровня плотности и энтропии или давления совпадают (например, в одномерных движениях с плоскими, цилиндрическими или сферическими волнами).

Предположение (2) о безвихревом характере движения равносильно факту существования *потенциала скоростей* $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$, т. е. такой функции, что

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi. \quad (7)$$

Поэтому безвихревое движение называется также *потенциальным* движением. Необходимо иметь в виду, что равенством (7) потенциал определен лишь с точностью до постоянного слагаемого, которое может зависеть от времени t .

Интеграл Коши–Лагранжа. Основная особенность модели безвихревого изэнтропического движения состоит в том, что в ней уравнение импульсов может быть проинтегрировано. Действительно, в силу определения удельной энтальпии (2.19), при $S = \text{const}$ уравнение первого закона термодинамики (2.1) превращается в соотношение

$$dp = \rho di \quad (8)$$

с любым дифференцированием d . В частности, если взять $d = \nabla$, то будет $\nabla p = \rho \nabla i$ и с учетом (7) уравнение Громеки–Лэмба (3.19) может быть записано в виде

$$\nabla \left(\varphi_t + \frac{1}{2} q^2 - i \right) = 0.$$

Отсюда и получается интеграл Коши – Лагранжа

$$\varphi_t + \frac{1}{2}q^2 + i(\rho) = b, \quad (9)$$

где постоянная интегрирования $b = b(t)$ может произвольной функцией времени. Так как потенциал φ сам определен лишь с точностью до слагаемого, зависящего от t , то без нарушения общности можно записывать интеграл Коши – Лагранжа (9) с правой частью $b = 0$.

Очевидно, что при $S = \text{const}$ и $\omega = 0$ уравнение (9) равносильно векторному уравнению импульсов (с учетом определения (7)). Поэтому безвихревое изэнтропическое движение газа описывается системой, состоящей из уравнения неразрывности и интеграла Коши – Лагранжа для двух неизвестных функций — плотности ρ и потенциала скоростей φ . С учетом равенства (7) и определения оператора Лапласа

$$\Delta\varphi = \text{div}(\nabla\varphi)$$

эти уравнения таковы:

$$\begin{aligned} \rho_t + \nabla\varphi \cdot \nabla\rho + \rho\Delta\varphi &= 0, \\ \varphi_t + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 + i(\rho) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнение для потенциала скоростей. Из уравнений (10) можно исключить плотность ρ и получить одно независимое уравнение для потенциала φ . С этой целью используется справедливое при $S = \text{const}$ равенство $D\rho = c^2 D\rho$, в силу которого из (8) при $d = D$ следует

$$c^2 D\rho = \rho Di.$$

Поэтому первое уравнение (10) после умножения на c^2 переписывается в виде

$$Di + c^2 \Delta\varphi = 0.$$

Наконец, применение оператора D ко второму уравнению (10) и исключение Di дает требуемый результат:

$$D\left(\varphi_t + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2\right) - c^2 \Delta\varphi = 0. \quad (11)$$

Это уравнение называется *уравнением для потенциала скоростей* безвихревого изэнтропического движения. В нем через первые производные от потенциала φ выражаются как оператор

$$D = \partial/\partial t + \nabla\varphi \cdot \nabla, \quad (12)$$

так и входящая в определенную уравнением состояния газа зависимость $c^2 = c^2(i)$ энтальпия i , значения которой даются вторым уравнением (10). С расшифровкой оператора D согласно (12) уравнение для потенциала скоростей (11) принимает вид

$$\varphi_{tt} + 2\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi_t + \nabla\varphi \cdot \nabla \left(\frac{1}{2} |\nabla\varphi|^2 \right) - c^2 \Delta\varphi = 0. \quad (13)$$

Наконец, в декартовых координатах, когда $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$, уравнение (11) в подробной записи выглядит так:

$$\begin{aligned} \varphi_{tt} + 2u\varphi_{xt} + 2v\varphi_{yt} + 2w\varphi_{zt} + \\ + (u^2 - c^2)\varphi_{xx} + (v^2 - c^2)\varphi_{yy} + (w^2 - c^2)\varphi_{zz} + \\ + 2uv\varphi_{xy} + 2uw\varphi_{xz} + 2vw\varphi_{yz} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $(u, v, w) = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$. Уравнение (14) является *квазилинейным* дифференциальным уравнением с частными производными второго порядка.

Характеристики уравнения (14) определяются через нормальные характеристические векторы аналогично тому, как это делалось для системы уравнений газовой динамики в § 6. Роль характеристической матрицы (6.15) здесь играет *характеристическая квадратичная форма*, которая составляется по следующему правилу: берется вектор $\xi = (\tau, \xi, \eta, \zeta)$, и в уравнении (14) каждая производная второго порядка заменяется произведением соответствующих координат этого вектора, например, на место φ_{tt} подставляется τ^2 , на место φ_{xt} подставляется $\xi\tau$ и т. д. В результате для уравнения (14) характеристическая квадратичная форма оказывается такой:

$$\begin{aligned} Q(\xi) = \tau^2 + 2u\xi\tau + 2v\eta\tau + 2w\zeta\tau + (u^2 - c^2)\xi^2 + \\ + (v^2 - c^2)\eta^2 + (w^2 - c^2)\zeta^2 + 2uv\xi\eta + 2uw\xi\zeta + 2vw\eta\zeta. \end{aligned}$$

Очевидно, что ее можно записать компактно:

$$Q(\xi) = \chi^2 - c^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2), \quad (15)$$

где $\chi = \tau + u\xi + v\eta + w\zeta$ — уже встречавшееся выражение (6.16). Нормальные характеристические векторы ξ определяются как векторы, обращающие в нуль форму $Q(\xi)$. Из (15) видно, что они совпадают с теми, которые определялись равенствами (6.19), т. е. дают две звуковые характеристики разных семейств. Это означает, что уравнение (14) на любом решении имеет *гиперболический тип*. Отыскание самих характеристических поверхностей путем задания их уравнением вида $h(x, t) = \text{const}$ выполняется так же, как это делалось для общих уравнений в § 6.

Из этого построения следует одна из особенностей описания безвихревых изэнтропических движений с помощью уравнения для потенциала: здесь не получаются контактные характеристики. Это означает, что слабый разрыв решения уравнения для потенциала (14), определяемый, естественно, как разрыв некоторых производных *второго порядка* от потенциала φ , может иметь место только на звуковых характеристиках. Так как тем не менее контактные характеристики существуют (они есть на любом решении уравнений газовой динамики), то отсюда следует важный вывод.

В безвихревом изэнтропическом движении газа *слабый разрыв на контактных характеристиках невозможен*. Другими словами, всякий разрыв на контактной характеристике необходимо является сильным разрывом.

Необходимо заметить, что этот вывод справедлив, только если непрерывное движение является безвихревым изэнтропическим *по обе стороны* контактной характеристики. Если же по одну сторону движение *безвихревое*, а по другую — *вихревое*, то на такой контактной характеристике обязательно будет слабый разрыв. Это следует, например, из формулы вихря (6). Поэтому в общем случае область безвихревого изэнтропического движения всегда отделена от области, в которой этот характер движения нарушен, некоторым сильным или слабым контактным разрывом.

Другая замечательная особенность уравнения для потенциала скоростей (14) состоит в том, что оно является *уравнением Эйлера* для экстремалей функционала над φ вида

$$l(\varphi, \Omega) = \iiint_{\Omega} \Phi(i) d\Omega, \quad (16)$$

где вместо удельной энтальпии i надо подставить ее выражение из (10), интеграл берется по любой области $\Omega \subset R^4(x, t)$, а функция Φ есть решение дифференциального уравнения (штрихами обозначены производные по i)

$$c^2(i) \Phi''(i) + \Phi'(i) = 0. \quad (17)$$

В частности, для политропного газа $c^2 = (\gamma - 1)i$, уравнение (17) легко интегрируется и функция Φ , с точностью до несущественных постоянных, оказывается такой:

$$\Phi(i) = i^{\frac{\gamma-2}{\gamma-1}} \quad (\gamma \neq 2), \quad \Phi(i) = \ln i, \quad (\gamma = 2). \quad (18)$$

Вывод отмеченной связи уравнения (14) с функционалом (16) для функции Φ , определенной формулами (18), выполняется стандартным методом.

Это свойство уравнения (14) позволяет рассматривать некоторые краевые задачи газовой динамики для безвихревых изэнтропических движений как задачи вариационного исчисления.

Модель установившегося течения. Модель безвихревого изэнтропического установившегося течения ввиду ее относительной простоты получила широкое применение на практике, особенно при решении задач аэродинамики летательных аппаратов. Ее особенности вытекают из объединения тех фактов, которые установлены выше в данном параграфе и в § 10.

Здесь потенциал скорости φ не зависит от времени t , т. е. $\varphi = \varphi(\mathbf{x}) = \varphi(x, y, z)$. Поэтому константа b в (9) также не зависит от t , в силу чего интеграл Коши – Лагранжа совпадает с интегралом Бернулли

$$q^2 + I(c^2) = q_m^2. \quad (19)$$

Следовательно, в этой модели интеграл Бернулли (19) *равносилен* уравнению импульсов и максимальная скорость q_m не зависит от линии тока, а является характерной константой всего движения в целом. То же самое верно и для критической скорости c_* (в области непрерывного течения). Уравнение для потенциала скоростей (14) укорачивается до следующего:

$$(u^2 - c^2)\varphi_{xx} + (v^2 - c^2)\varphi_{yy} + (w^2 - c^2)\varphi_{zz} + 2uv\varphi_{xy} + 2uw\varphi_{xz} + 2vw\varphi_{yz} = 0. \quad (20)$$

Соответствующая характеристическая квадратичная форма (15) для единичного вектора $\xi = (\xi, \eta, \zeta)$, $|\xi| = 1$, принимает вид

$$Q(\xi) = (\mathbf{u} \cdot \xi)^2 - c^2. \quad (21)$$

Так как $\mathbf{u} \cdot \xi = q \cos(\mathbf{u}, \xi)$, то всегда $|\mathbf{u} \cdot \xi| \leq q$. Поэтому характеристическое уравнение $Q(\xi) = 0$ при $q < c$ не имеет вещественных корней, причем форма $Q(\xi)$ является (отрицательно) определенной. Это означает, что в области дозвуковых скоростей уравнение (20) имеет эллиптический тип.

Если же $q > c$, то характеристическое уравнение $Q(\xi) = 0$ имеет два вещественных корня, соответствующих двум различным характеристическим направлениям. Это означает, что в области сверхзвуковых скоростей уравнение (20) имеет гиперболический тип.

Корни характеристического уравнения в случае $q > c$ можно наглядно представить геометрически, если (в данной точке пространства) ввести в рассмотрение угол α между характеристическим направлением и вектором скорости $\mathbf{u}$ (рис. 1). Так как $\cos(\mathbf{u}, \xi) = \sin \alpha$, то положительный корень характеристического уравнения дается формулой

$$\sin \alpha = \frac{1}{M}, \quad (22)$$

где M — число Маха (см. § 10). Второй корень получается из (22) заменой α на $-\alpha$. Определенный формулой (22) угол α ($0 < \alpha \leq \pi/2$) называется *углом Маха*.

Итак, характеристические направления сверхзвукового течения в каждой точке наклонены к вектору скорости под углом Маха.

В общем случае течение рассматриваемого вида может содержать как области дозвуковых, так и области сверхзвуковых скоростей. Переход через скорость звука осуществляется на звуковой поверхности, характеризуемой равенством $q = c$ или $M = 1$. Такие течения называются *смешанными* до- и сверхзвуковыми или *транззвуковыми*. В области транззвукового течения уравнение для потенциала скоростей (20) имеет *смешанный* (эллипτικο-гиперболический) тип.

Специальный интерес представляют течения, в которых величина $|M - 1|$ мала по сравнению с единицей. Такие течения называются *околозвуковыми*; некоторые их особенности будут рассмотрены в § 26.

Течение типа источника. Как и в несжимаемой жидкости, существуют чисто радиальные течения газа, когда на каждой из семейства концентрических сфер плотность, давление и модуль скорости постоянны, а частицы движутся по радиусам (аналог источника или стока). В таком течении вектор скорости имеет представление вида

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{r} a(r, t) \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}). \quad (23)$$

Легко проверяется, что векторное поле вида (23) всегда безвихревое, причем его потенциал φ зависит только от переменных (r, t) . Очень простым оказывается описание непрерывного изэнтропического установившегося течения типа источника, которое сводится к анализу конечных (алгебраических) уравнений.

В этом случае $\varphi = \varphi(r)$ и вектор скорости имеет вид

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{r} \varphi'(r). \quad (24)$$

Знак производной $\varphi'(r)$ указывает направление течения: если $\varphi' > 0$, то течение от центра (источник); если $\varphi' < 0$, то течение к центру (сток). Анализ обоих случаев, по существу, одинаков, и для определенности далее предполагается, что $\varphi'(r) = q > 0$.

Разными способами можно убедиться в том, что уравнение (20) для потенциала $\varphi = \varphi(r)$ имеет интеграл

$$\rho q r^2 = Q \quad (Q = \text{const}), \quad (25)$$

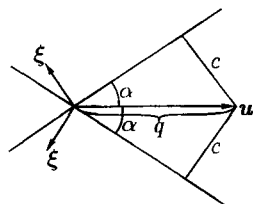


Рис. 1

где $4\pi Q$ есть расход газа через сферу радиуса r . Итак, дело сводится к совместному анализу двух уравнений: интеграла Бернулли (19) и уравнения расхода (25), определяющих функцию $q(r)$. Для этого достаточно заметить, что в силу (19) характер зависимости удельного расхода ρq от q определяется соотношениями

$$d(\rho q)/dq = \rho(1 - M^2), \quad \rho q(0) = 0, \quad \rho q(q_m) = 0. \quad (26)$$

Поэтому получаемый из (25) график зависимости $r(q)$ имеет вид, показанный на рис. 2, где

$$r_* = \sqrt{Q/\rho_* c_*}. \quad (27)$$

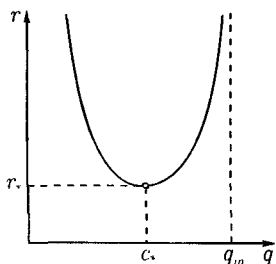


Рис. 2

Следовательно, возможны два вида непрерывного течения типа источника: чисто дозвуковое и чисто сверхзвуковое. В случае дозвукового источника скорость течения q убывает с ростом r и стремится к нулю, когда $r \rightarrow \infty$. В случае сверхзвукового источника скорость q возрастает с ростом r и стремится к максимальной q_m , когда $r \rightarrow \infty$; при этом на бесконечности достигается состояние вакуума.

Важной особенностью газового источника является то, что он не может иметь точечный характер: по данным значениям величин Q и q_m однозначно определяется минимальный радиус (27)

той сферы, из которой еще может «бить» источник газа с расходом Q при данном q_m .

Возможны также течения рассмотренного типа с сильными разрывами. Анализ возможных здесь ситуаций для источника или стока предоставляется читателю.

§ 12. Классы инвариантных решений

Рассматривается широко распространенный частный случай инвариантно-групповых решений, в котором добавление дополнительных соотношений вида (8.16) к исходной системе не влечет переопределенности результирующей системы дифференциальных уравнений, а сразу приводит к определенной факторсистеме. Приводимое ниже построение применимо для любых систем дифференциальных уравнений; здесь оно обсуждается применительно к системе (8.1). Временно, для краткости записи формул, используются сокращенные обозначения независимых переменных $(x, y, z, t) = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathbf{x}$ и искомых функций $(u, v, w, \rho, p) = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = \mathbf{u}$.

Инвариантные решения. Предполагается, что базис инвариантов группы H состоит из скалярных инвариантов двух видов. Первый составляют инварианты-функции только от независимых переменных. Число k таких (функционально независимых) инвариантов может быть не более четырех; пусть это будут

$$\lambda_i = J_i(x) \quad (i = 1, \dots, k < 4). \quad (1)$$

Второй вид образуют остальные инварианты, число которых равно числу искомых функций (для системы (8.1) — пять):

$$r_l = J_{k+l}(x, u) \quad (l = 1, \dots, 5), \quad (2)$$

причем 5×5 — матрица Якоби не вырождена, т. е.

$$\text{ранг } (\partial J_{k+l} / \partial u_j) = 5. \quad (3)$$

В этом случае дополнительные соотношения (8.16) для инвариантов группы H , вводимых с целью построения H -решений, задаются в виде

$$r_l = U_l(\lambda) \quad (l = 1, \dots, 5). \quad (4)$$

Условие (3) позволяет разрешить уравнения (2) относительно всех искомых u_j и записать (2) в равносильной форме

$$u_j = f_j(x, r) \quad (j = 1, \dots, 5)$$

с конкретными известными функциями f_j . Тем самым из (4) следует представление H -решений.

$$u_j = f_j(x, U(\lambda)) \quad (j = 1, \dots, 5). \quad (5)$$

В результате подстановки выражений (5) в систему (8.1) получается факторсистема из уравнений первого порядка для искомых $U_l(\lambda)$, содержащая *только* величины U_l , переменные λ_i и производные $\partial U_l / \partial \lambda_i$. Доказательство этого факта, справедливого для любых исходных систем дифференциальных уравнений, допускающих группы H с требуемым базисом инвариантов, можно найти в [5].

Определение 1. Решения, получаемые вышеописанным построением, называются *инвариантными H -решениями* ранга k . Соответствующая факторсистема называется *инвариантной подмоделью* ранга k исходной «большой модели» (8.1).

Специфика инвариантной подмодели состоит в том, что в ней участвуют лишь $k < 4$ независимых переменных. Поэтому инвариантные решения находить и анализировать, вообще говоря, проще, чем решения исходной системы (8.1).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В случае $k = 0$ инвариантов J_i нет, и тогда в представлении (5) величины U_i считаются искомыми константами, а уравнения подмодели (факторсистема) сводятся к системе конечных соотношений для этих констант.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для произвольных исходных систем дифференциальных уравнений возможна такая ситуация, когда факторсистема оказывается противоречивой (т. е. не имеет решений). Однако, для системы (8.1) эта ситуация встречается только при отыскании инвариантных H -решений ранга нуль.

Итак, для построения инвариантных H -подмоделей системы (8.1) надо выполнить четыре операции: (а) выделить те подгруппы H допускаемой группы, для которых существует базис инвариантов со свойствами (1)–(3); (б) вычислить эти инварианты; (в) сформировать представление решений вида (5) и (г) выполнить подстановку этого представления в систему (8.1). Методы выполнения пунктов (а) и (б) с достаточной подробностью изложены в Приложении, а пункты (в) и (г) выполняются автоматически.

Далее в этом разделе перечисляются все инвариантные подмодели ранга 3 для случая общего уравнения состояния газа и рассматриваются примеры подмоделей меньших рангов.

Подмодели ранга три. Эти подмодели порождаются однопараметрическими подгруппами. Для группы G^{11} в оптимальной системе ее подгрупп (см. Приложение) содержится всего 13 представителей классов подгрупп $H = G^1$. Они порождают 13 различных подмоделей, описывающих все неэквивалентные классы инвариантных движений газа ранга три. В нижеследующем перечне этим классам движений присвоены названия (не всегда традиционные) и указаны представления соответствующих решений вида [5]. При этом, наряду с обычными декартовыми координатами $(D) = (t, x, y, z, u, v, w)$ используются также *цилиндрические* координаты $(C) = (t, x, r, \theta, u_c, v_c, w_c)$, вводимые следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} x &= x; & y &= r \cos \theta, & z &= r \sin \theta; & r &= \sqrt{y^2 + z^2}, & \theta &= \arctg(z/y), \\ u_c &= u, & v_c &= v \cos \theta + w \sin \theta, & w_c &= -v \sin \theta + w \cos \theta, \\ u &= u_c, & v &= v_c \cos \theta - w_c \sin \theta, & w &= v_c \sin \theta + w_c \cos \theta, \end{aligned} \quad (6)$$

где v_c и w_c — радиальная и окружная компоненты вектора скорости $\mathbf{u}_c = (u_c, v_c, w_c)$. В координатах (C) исходная система уравнений газовой динамики имеет вид

$$\begin{aligned} D_c \mathbf{u}_c + \rho^{-1} \nabla_c p &= r^{-1} (0, w_c^2, -v_c w_c), \\ D_c \rho + \rho \operatorname{div}_c \mathbf{u}_c &= 0, & D_c p + \rho c^2 \operatorname{div}_c v_c &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где $D_c = \partial_t + \mathbf{u}_c \cdot \nabla_c$, $\nabla_c = (\partial_x, \partial_r, r^{-1} \partial_\theta)$, $\operatorname{div}_c \mathbf{u}_c = u_{cx} + v_{cr} + r^{-1} v_c + r^{-1} w_{c\theta}$.

Перечень подмоделей идет в порядке, обратном указанному в таблице П. 1 (см. Приложение). Инвариантный вектор скорости всюду обозначается символом $\mathbf{U} = (U, V, W)$. Так как подмодели рассматриваются только для уравнения состояния газа общего вида, то плотность ρ и давление p — инварианты любой подгруппы $H \subset G^{11}$ и потому здесь явно не указываются; они должны быть функциями тех же независимых переменных, что и вектор $\mathbf{U}$.

13⁰. Двумерные движения ($\mathcal{D}$): $\mathbf{u} = \mathbf{U}(t, y, z)$. При $U = 0$ получается подмодель плоскопараллельных движений.

12⁰. Галилеево-инвариантные движения ($\mathcal{D}$):

$$\mathbf{u} = (x/t + U, V, W); \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(t, y, z).$$

11⁰. Сдвиговые движения ($\mathcal{D}$):

$$\mathbf{u} = (z + U, V, W); \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(t, \lambda, y); \quad \lambda = x - tz.$$

10⁰. Установившиеся течения ($\mathcal{D}$): $\mathbf{u} = \mathbf{U}(x, y, z)$.

9⁰. Стационарные течения в однородном поле сил ($\mathcal{D}$):

$$\mathbf{u} = (t + U, V, W); \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(t, \lambda, z); \quad \lambda = x - t^2/2.$$

8⁰. Конические движения ($\mathcal{D}$):

$$\mathbf{u} = \mathbf{U}(\lambda); \quad \lambda = x/t.$$

7⁰. Обобщенные конические движения ($\mathcal{D}$):

$$\mathbf{u} = (x/t + U, V, W); \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3); \\ \lambda_1 = x/t - \beta \ln t, \quad \lambda_2 = y/t, \quad \lambda_3 = z/t;$$

$\beta \neq 0$ — произвольный параметр.

6⁰. Вращательные движения ($\mathcal{C}$): $\mathbf{u}_c = \mathbf{U}(\lambda, x, r)$, $\lambda = t - \theta$.

5⁰. Обобщенные вращательные движения ($\mathcal{C}$):

$$\mathbf{u}_c = (t + U, V, W); \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}(\lambda_1, \lambda_2, r);$$

$\lambda_1 = t - \beta\theta$, $\lambda_2 = x - t^2/2$, $\beta \neq 0$ — произвольный параметр.

4⁰. Винтовые движения (C): $u_c = U(t, \lambda, r), \lambda = x - \theta$.

3⁰. Вращательно-симметричные движения (C):

$$u_c = U(t, x, r).$$

2⁰. Обобщенные вращательно-симметричные движения (C):

$$u_c = (\beta\theta + U, V, W); \quad U = U(t, \lambda, r) \lambda = x - \beta t\theta; \\ \beta \neq 0 \text{ -- произвольный параметр.}$$

1⁰. Квазиконические спиральные движения (C):

$$u_c = (\beta\theta + U, V, W); \quad U = U(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3); \\ \lambda_1 = x/t - \beta\theta, \quad \lambda_2 = r/t, \quad \lambda_3 = \theta - \alpha^{-1} \ln t;$$

$\alpha \neq 0, \beta$ — произвольные параметры. При $\beta = 0$ получается подмодель конических спиральных движений.

Вывод уравнений соответствующих подмоделей (факторсистем) делается просто подстановкой указанных представлений для (D) в систему (8.1) или для (C) в систему (7).

Подмодели 1⁰–13⁰ остаются в силе и для политропного газа, когда $\rho c^2 = \gamma p$. Однако следует иметь в виду, что в этом случае есть 30 подходящих подгрупп G^1 , порождающих подмодели ранга три, и среди них имеются не эквивалентные приведенным в данном списке.

Подмодели ранга два. Порождаются двухпараметрическими подгруппами H^2 . В группе G^{11} имеется всего 27 классов таких подгрупп (см. Приложение). Все 27 соответствующих инвариантных подмоделей ранга два описаны и изучены их общие свойства. К ним относятся, в частности, подмодели одномерных движений, подробно рассматриваемые в главах III и IV, а здесь обсуждается лишь происхождение этих подмоделей.

Подмодель одномерных движений газа с плоскими волнами порождается подгруппой переносов (в системе координат (D)) по каким-либо двум координатам, например $H^2\{f^2, f^3\}$. Инвариантами являются независимые переменные t, x и искомые u, ρ, p . Уравнения факторсистемы имеют вид

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \rho^{-1} p_x &= 0, \\ v_t + uv_x &= 0, \\ w_t + uw_x &= 0, \\ \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \\ p_t + up_x + \rho c^2 u_x &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Решения, в которых $v = w = 0$ описывают *одномерные движения с плоскими волнами, перпендикулярными оси x* .

Подмодель одномерных движений газа с цилиндрическими волнами порождается подгруппой переносов вдоль одной из осей и вращений вокруг этой оси, например $H^2\{f^1, f^7\}$. Инвариантами (в координатах (C)) являются независимые переменные t, r и искомые $u_c = U, \rho, p$. Уравнения факторсистемы имеют вид (см. (7))

$$\begin{aligned} U_t + VU_r &= 0, \\ V_t + VV_r + \rho^{-1}p_r &= r^{-1}W^2, \\ W_t + VW_r &= -r^{-1}VW, \\ \rho_t + V\rho_r + \rho(V_r + r^{-1}V) &= 0, \\ p_t + Vp_r + \rho c^2(V_r + r^{-1}V) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Её решения описывают подкласс вращательно-симметричных движений (см. 3^0) и получаются, если искомые величины не зависят от x . Решения, в которых $U = W = 0$ описывают *одномерные движения с цилиндрическими волнами с осью x (осесимметричные движения)*.

Подмодель одномерных движений газа со сферическими волнами порождается подгруппой всех вращений $H^3\{f^7, f^8, f^9\}$. Это — особая инвариантная подмодель ввиду того, что для неё не выполняется условие (3). Действительно, группа H^3 имеет базис инвариантов всего из шести скалярных величин: независимые переменные $t, r = |x|$ и зависящие от искомых $\rho, p, q = |u|$ и $s = x \cdot u$. Однако на *особом инвариантном многообразии* этой группы (см. Приложение), заданном уравнением $x \times u = 0$, инвариантов хватает, так как добавляется соотношение вида $u = \mu x$, где $\mu = q/r$, и получается представление инвариантного H^3 -решения

$$u = \frac{x}{r} q(t, r), \quad \rho = \rho(t, r), \quad p = p(t, r). \quad (10)$$

Прямая подстановка выражений (10) в уравнения (8.1) дает факторсистему (три уравнения импульсов сводятся к одному)

$$\begin{aligned} q_t + qq_r + \rho^{-1}p_r &= 0, \\ \rho_t + q\rho_r + \rho(q_r + 2r^{-1}q) &= 0, \\ p_t + qp_r + \rho c^2(q_r + 2r^{-1}q) &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Решения этой системы описывают *одномерные движения газа со сферическими волнами (сферически симметричные движения)*.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Если в факторсистемах (8), (9) оставить только радиальную часть, положив $v = w = 0$ в (8) и $U = W = 0$ в (9), а также ввести единое обозначение скорости $u = q$ в (8) и $V = q$ в (9), то все три полученные подмодели запишутся единообразно в виде

$$\begin{aligned} q_t + qq_r + \rho^{-1} p_r &= 0, \\ \rho_t + q\rho_r + \rho(q_r + \nu r^{-1}q) &= 0, \\ p_t + qp_r + \rho c^2(q_r + \nu r^{-1}q) &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

с параметром геометрии ν , имеющим значение $\nu = 0$ для плоских волн, $\nu = 1$ для цилиндрических волн и $\nu = 2$ для сферических волн.

Подмодели ранга один. Порождаются, как правило, трехпараметрическими подгруппами H^3 . В группе G^{11} содержатся всего 47 классов таких подгрупп (см. Приложение). В этих подмоделях все искомые функции-инварианты зависят от одного независимого переменного-инварианта, а факторсистема является системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пример. Берется подгруппа $H^3\{f^4, f^7, f^{11}\}$ совместных преобразований галилеевых переносов f^4 вдоль оси x , вращений f^7 вокруг этой оси и растяжений f^{11} всех независимых переменных. Базис инвариантов этой группы образуют (в координатах (C)) независимый переменный инвариант $\lambda = r/t$ и набор инвариантов $u_c = x/t$, v_c , w_c , ρ , p . Подстановка представления H^3 -решения

$$u_c = x/t + U(\lambda), \quad v_c = V(\lambda), \quad w_c = W(\lambda), \quad \rho = \rho(\lambda), \quad p = p(\lambda); \quad \lambda = r/t$$

в систему (7) приводит к факторсистеме

$$\begin{aligned} (U - \lambda)U' + U &= 0, \\ (V - \lambda)V' + \rho^{-1}p' &= \lambda^{-1}W^2, \\ (V - \lambda)W' &= -\lambda^{-1}VW, \\ (V - \lambda)\rho' + (V' + \lambda^{-1}V + 1)\rho &= 0, \\ (V - \lambda)S' &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

где пятое уравнение записано через энтропию $S = S(\lambda)$, а штрихом обозначены производные по λ . Физически содержательными будут только такие решения, в которых $V \neq \lambda$, а тогда $S = \text{const}$. Значит эта подмодель описывает класс изэнтропических движений. Полный анализ всех возможных видов решений системы (13) весьма не прост. Уместно заметить

лишь, что есть решения с $U = W \equiv 0$, отыскание которых для политропного газа сводится к одному автономному уравнению первого порядка и квадратурам.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Оказывается, что большинство классов подгрупп $H^3 \subset G^{11}$ не удовлетворяет условию (3). Более плодотворным является массив инвариантных подмоделей ранга один в случае политропного газа, для которого в группе G^{13} содержится 207 серий классов подгрупп H^3 . Однако обсуждение всего массива возможных здесь подмоделей выходит за рамки данных «Лекций».

Некоторые частные случаи инвариантных решений ранга один (в основном — автомодельные решения) рассматриваются в главах III, IV.

Подмодели ранга нуль. Порождаются, как правило, четырехмерными подгруппами H^4 . В G^{11} имеется 50 различных классов таких подгрупп. В подмоделях ранга нуль независимых переменных-инвариантов нет, все искомые величины-инварианты являются константами, а факторсистемы сводятся к системе конечных (алгебраических) уравнений. Ясно, что в случае уравнения состояния газа общего вида все подмодели ранга нуль описывают изобарические движения.

Простейшим примером является подмодель *постоянного решения*, когда все искомые u, ρ, p суть константы; она порождается подгруппой переносов по всем независимым переменным t, x, y, z . По аналогии с этим решения инвариантных подмоделей ранга нуль называются «простыми» решениями. Для политропного газа массив классов подалгебр $H^4 \subset G^{13}$ состоит из 290 представителей и имеется много нетривиальных «простых» H^4 -решений, причем все они найдены. В качестве примера не изобарических решений здесь выбран следующий.

П р и м е р. Одна из серий подгрупп $H^4(a) \subset G^{13}$, зависящих от параметра a и представляющих собой комбинацию галилеевых переносов по осям y, z и растяжений имеет инварианты

$$tu/x, \quad (tv - y)/x, \quad (tw - z)/x, \quad t^{-a-2}x^{a+2}\rho, \quad t^{-a}x^ap.$$

Соответствующее представление «простых» решений таково:

$$u = Ux/t, \quad v = (y + Vx)/t, \quad w = (z + Wx)/t, \\ \rho = (x/t)^{-a-2}R, \quad p = (x/t)^{-a}P,$$

где U, V, W, R, P — некоторые константы. Подстановка в систему (8.1) в случае политропного газа, когда $\rho c^2 = \gamma p$, приводит к факторсистеме

$$U^2 - U = aP/R, \quad UV = 0, \quad UW = 0, \\ a(1 - U) = U - 4, \quad a(1 - U) = -\gamma(U + 2). \quad (14)$$

Возможность $U = 0$ дает изобарические решения. Наряду с этим есть решение с $V = W = 0$. В этом случае для констант a , U и P/R получаются выражения через показатель адиабаты γ

$$a = -\frac{2\gamma}{\gamma-1}, \quad U = \frac{2(2-\gamma)}{\gamma+1}, \quad \frac{P}{R} = 3 \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)^2 (2-\gamma). \quad (15)$$

Следовательно, здесь физически осмысленные не изобарические «простые» решения получаются при $\gamma < 2$. Легко проверить, что эти решения описывают изэнтропические движения газа.

§ 13. Простые волны

Частично инвариантные решения. Теория группового анализа позволяет выделять и изучать в качестве упрощенных моделей не только классы инвариантных решений. Одно из возможных обобщений понятий инвариантного решения достигается за счет отказа от полной инвариантности и использования *частичной инвариантности* многообразия относительно группы преобразований основного пространства. Это приводит к понятию и алгоритму отыскания так называемых *частично инвариантных решений*.

Такие решения возможны либо когда базис инвариантов группы H (Определение 8.2) не удовлетворяет условию (12.3), либо когда ищутся решения ранга большего, чем число k в (12.1). Применительно к уравнениям газовой динамики это означает, что получится меньше пяти независимых инвариантных соотношений вида (8.16). Поэтому инвариантов нехватает для выражения из этих соотношений всех пяти искомых величин (u, v, w, ρ, p) — среди них есть «лишние». Последние должны считаться функциями от всех независимых переменных (t, x) . Требование совместности соотношений (8.16) с уравнениями газовой динамики в этом случае приводит к объединению факторсистемы (связывающей только инварианты группы H) с дополнительной системой уравнений для «лишних» функций. Число независимых переменных — инвариантов в факторсистеме и здесь называется *рангом* подмодели (и также рангом класса искомых решений). В результате анализа совместности этой объединенной системы и получаются искомые решения. Общая теория частично инвариантных решений изложена в [5].

Число существенно различных классов частично инвариантных решений значительно больше, чем инвариантных, так как они зависят не только от выбора подгруппы H основной группы, но также и от выбора «лишних»

функций. В полном объеме совокупность всех классов частично инвариантных решений уравнений газовой динамики пока еще не изучена. Ниже рассматривается один из простейших классов таких решений, дающий пример хорошо известной и полезной модели.

Кратные волны. В качестве H берется группа H^5 , порожденная всеми переносами f^1, f^2, f^3, f^{10} и растяжением f^{11} (см. (8.5)). Ее базис инвариантов состоит только из всех искомым величин

$$J = (u, v, w, \rho, p); \quad (3)$$

а число $k = 0$. Инвариантное H^5 -решение ранга нуль есть «простое» постоянное решение

$$u = u_0, \quad \rho = \rho_0, \quad p = p_0. \quad (4)$$

Нетривиальными могут быть лишь частично инвариантные H^5 -решения ранга n , где $0 < n < 4$.

Определение 1. Частично инвариантные H^5 -решения уравнений газовой динамики (3.11) ранга n называются n -кратными волнами. При этом 1-кратная волна называется *простой волной*, 2-кратная волна — *двойной волной* и 3-кратная волна — *тройной волной*.

Представление n -кратной волны должно состоять из $5 - n$ соотношений между величинами (3). Законченные результаты удастся получить лишь для простых волн, описание которых приводится ниже.

Отыскание простых волн. Простая волна описывается $5 - 1 = 4$ независимыми соотношениями между величинами (3). Путем разрешения таких соотношений можно получить выражения четырех из переменных (3) через одну из них. Для более симметричной записи получаемых выражений удобно ввести вспомогательный *параметр простой волны* α , назначив величины (3) функциями от этого параметра. Тогда этот параметр и будет играть роль той «лишней» функции, которая определяет дефект инвариантности $\delta = 1$ простой волны. Итак, всякая простая волна описывается следующим представлением решения системы (3.11):

$$u = u(\alpha), \quad \rho = \rho(\alpha), \quad p = p(\alpha), \quad S = S(\alpha), \quad (5)$$

где $\alpha = \alpha(x, t)$ — новая неизвестная функция, подлежащая определению вместе с функциями (5).

Область пространства $R^4(x, t)$, в которой определена простая волна, покрыта однопараметрическим семейством гиперповерхностей $\alpha = \text{const}$, вдоль каждой из которых все основные величины постоянны. Эти гиперповерхности называются *поверхностями уровня* простой волны.

В результате подстановки представления (5) в систему уравнений (3.11), с учетом соотношений вида

$$Du = u'D\alpha, \quad \operatorname{div} u = u' \cdot \nabla \alpha, \quad \nabla p = p' \nabla \alpha,$$

где штрихом обозначены производные по α , эта система примет вид

$$\begin{aligned} \rho' D\alpha + \rho u' \cdot \nabla \alpha &= 0, \\ \rho u' D\alpha + p' \nabla \alpha &= 0, \\ S' D\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Пять уравнений этой системы содержат четыре производных первого порядка от «лишней» функции α . Их исключение приведет к уравнениям, связывающим только инвариантные величины и их производные; это будет часть инвариантной факторсистемы. Кроме того, полученные выражения для производных от α должны быть совместны. Очевидно, что условия совместности породят новые соотношения между инвариантными величинами и их производными. Эти соотношения составят вторую часть инвариантной факторсистемы. Что же касается теперь уже совместных выражений для производных от α , то они образуют дополнительную пассивную (т. е. не порождающую каких-либо новых уравнений) систему P . Весь этот путь реализации представления системы (6) в виде объединения инвариантной факторсистемы и пассивной системы P фактически будет проделан при доказательстве нижеследующей теоремы, дающей описание основных свойств простых волн.

Последнее из уравнений (6) является классифицирующим, так как приводит к альтернативе: либо $S' \neq 0$, и тогда $D\alpha = 0$, либо $S' = 0$.

Если в простой волне $D\alpha = 0$, то поверхности уровня являются контактными характеристиками. Так как при этом $\nabla \alpha \neq 0$ (иначе получилось бы, что $\alpha = \text{const}$ тождественно, т. е., согласно (5), просто постоянное решение), то из (6) следует, что $p' = 0$ или $p = \text{const}$. Следовательно, простая волна этого типа представляет собой изобарическое движение (см. § 9).

Основные свойства простых волн. Простая волна, в которой $D\alpha = 0$, будет называться вырожденной, а простая волна, в которой $D\alpha \neq 0$, будет называться невырожденной простой волной.

Теорема 1. *Невырожденная простая волна есть изэнтропическое безвихревое движение. Поверхности уровня такой волны являются звуковыми характеристиками и представляют собой гиперплоскости в $R^4(x, t)$.*

Доказательство. В невырожденной простой волне должно быть $S' = 0$, откуда $S = \text{const}$. Далее, здесь $p' \neq 0$, так как в противном случае из (6)

получилось бы, что $\mathbf{u}' = 0$ и $\rho' = 0$, т.е. постоянное решение. Поэтому в результате векторного умножения второго уравнения (6) на $\mathbf{u}'$ получается равенство

$$\mathbf{u}' \times \nabla \alpha = 0. \quad (7)$$

Но в силу представления (5) справедливо выражение

$$\text{rot } \mathbf{u} = -\mathbf{u}' \times \nabla \alpha.$$

Поэтому равенство (7) равносильно $\text{rot } \mathbf{u} = 0$. Далее, в результате скалярного умножения второго уравнения (6) на $\nabla \alpha$ и использования первого уравнения (6) получается соотношение

$$\rho' (D\alpha)^2 - \rho' |\nabla \alpha|^2 = 0,$$

откуда с учетом равенства $p' = c^2 \rho'$, следует уравнение

$$(D\alpha)^2 - c^2 |\nabla \alpha|^2 = 0. \quad (8)$$

Сравнение этого уравнения с (6.27) показывает, что гиперповерхности $\alpha = \text{const}$ являются звуковыми характеристиками. Далее, в результате скалярного умножения второго уравнения (6) на $\mathbf{u}'$ и исключения величины $\mathbf{u}' \cdot \nabla \alpha$ с помощью первого уравнения (6) получается равенство

$$\rho^2 |\mathbf{u}'|^2 = \rho' p'. \quad (9)$$

Теперь надо заметить, что равенство (7) равносильно соотношению

$$\nabla \alpha = k \mathbf{u}' \quad (10)$$

с некоторой функцией $k = k(\mathbf{x}, t) \neq 0$. Так как $D\alpha = \alpha_t + \mathbf{u} \cdot \nabla \alpha$, то исключение из первого уравнения (6) величины $\nabla \alpha$ дает выражение для производной α_t :

$$\rho' \alpha_t = -k(\rho' \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' + \rho |\mathbf{u}'|^2).$$

Это выражение, с учетом равенства (9) и того, что с модулем вектора скорости $q = |\mathbf{u}|$ верна формула $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = qq'$, упрощается до следующего:

$$\alpha_t = -k \left(qq' + \frac{1}{\rho} p' \right). \quad (11)$$

Из (10) и (11) следует, что нормаль к каждой данной гиперповерхности $\alpha = \text{const}$ имеет одно и то же направление для всех ее точек. Поэтому каждая поверхность уровня невырожденной простой волны есть гиперплоскость в $R^4(\mathbf{x}, t)$. ■

Здесь инвариантная факторсистема образована уравнениями $S' = 0$ и (9), а пассивная система P — уравнениями (10) и (11) для «лишней» функции α . Легко проверить, что в силу совокупности этих уравнений исходные уравнения (6) удовлетворяются тождественно.

Параметр простой волны α находится путем интегрирования системы уравнений (10), (11). Для этого надо заметить, что дифференцирование вдоль любой кривой, лежащей на поверхности уровня $\alpha = \text{const}$, дает соотношение

$$d\alpha = \nabla\alpha \cdot d\mathbf{x} + \alpha_t dt = 0,$$

откуда, в силу (10) и (11), следует уравнение

$$\mathbf{u}' \cdot d\mathbf{x} - \left(qq' + \frac{1}{\rho} p' \right) dt = 0$$

с постоянными коэффициентами при дифференциалах $d\mathbf{x}$ и dt . Поэтому оно просто интегрируется в виде

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}' - t \left(qq' + \frac{1}{\rho} p' \right) = F, \quad (12)$$

где постоянная интегрирования F может быть произвольной функцией α (впрочем, несущественной, так как сам параметр α определен с однофункциональным произволом). Видно, что (12) есть уравнение однопараметрического семейства (с параметром α) гиперплоскостей — поверхностей уровня простой волны. При заданных функциях $\mathbf{u}(\alpha)$, $\rho(\alpha)$, $p(\alpha)$ и $F(\alpha)$ уравнение (12) неявным образом определяет параметр как функцию переменных $\mathbf{x}$, t .

В уравнении (12) величины $\mathbf{u}$, ρ , p , как функции переменного α , связаны только с уравнением состояния $p = f(\rho, S)$ при $S = \text{const}$ и уравнением (9). Поэтому совокупность всех простых волн зависит от трех произвольных функций одного независимого переменного.

Для двойных и тем более тройных волн — решений уравнений газовой динамики (3.11) — такого простого описания не получается. Симметричное параметрическое представление двойных волн имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\alpha, \beta), \quad \rho = \rho(\alpha, \beta), \quad p = p(\alpha, \beta), \quad S = S(\alpha, \beta), \quad (13)$$

где параметры α и β — «лишние» искомые функции переменных $\mathbf{x}$, t . Здесь факторсистема оказывается очень сложной и исчерпывающему анализу не поддается. Тем не менее теория частично инвариантных решений позволяет доказать, что двойные волны общего (в определенном смысле) характера являются изэнтропическими решениями (см. [5]).

Автомодельные кратные волны. Уместно обратить внимание на специальный случай кратных волн, которые сводятся к инвариантным решениям. Например, если в представлении простых волн (12) положить $F = 0$ и $v = w = 0$, то в качестве параметра волны можно взять $\alpha = x/t$. Это приводит к частным инвариантным решениям подмодели конических движений 12,8⁰. В общем случае решения, описываемые подмоделью 12,8⁰, можно рассматривать как тройную волну, которая сама себе подобна в том смысле, что все искомые величины остаются неизменными при равномерном растяжении пространства $R^4(x, t)$. Для установившихся течений также возможны аналогичные подмодели, в которых все искомые зависят только от отношений x/z , y/z или $x/\sqrt{y^2 + z^2}$, описывающие стационарные двойные или простые волны. Такие сами себе подобные решения принято называть *автомодельными*.

Существование таких кратных волн является типичным для любых дифференциальных уравнений, допускающих группу G^1 *равномерных растяжений* всех независимых переменных (аналогично группе (8.8)). Этот важный класс кратных волн заслуживает выделения специальным термином.

Определение 2. Решение дифференциальных уравнений, допускающих группу равномерных растяжений пространства независимых переменных, инвариантное относительно этой группы, называется *коническим автомодельным решением*.

Данный термин отражает тот факт, что в коническом автомодельном решении все искомые функции постоянны на лучах, выходящих из фиксированной точки (центра). Поэтому характерными областями определения таких решений являются внутренности прямолинейных конусов с общей вершиной в центре. В краевых задачах дополнительные данные, определяющие коническое автомодельное решение, должны задаваться на поверхности таких конусов и быть постоянными вдоль образующих.

Особенно важно обратное свойство: граничные значения в краевой задаче, заданные на поверхностях конусов с общей вершиной и постоянные вдоль образующих, совместимы с предположением о конической автомодельности искомого решения. Поэтому краевые задачи, в которых данные обладают указанными свойствами, называются *конически автомодельными задачами*.

Итак, если задача конически автомодельна, то можно искать ее коническое автомодельное решение. Конечно, вообще говоря, ниоткуда не следует, что такое решение существует. Этот вопрос связан с корректностью постановки краевой задачи в неограниченной области и должен решаться индивидуально для каждой конкретной задачи. На практике обычно используется именно возможность построения решения, которое ищется в надлежащем

виде, с последующей проверкой всех граничных условий и, если это возможно, доказательством единственности решения.

В важном частном случае уравнений с двумя независимыми переменными, например x и y , коническое автомодельное решение имеет вид (для любой искомой величины F)

$$F = F(\lambda), \quad \lambda = x/y, \quad (14)$$

и тем самым постоянно на лучах $x = \lambda y$ ($\lambda = \text{const}$). Такое решение изображается на плоскости $R^2(x, y)$ в виде «веера» лучей $\lambda = \text{const}$, разбивающих эту плоскость на ряд угловых областей (плоских конусов), в которых решение $F(\lambda)$ меняется непрерывно (в частности, может быть постоянным). Эти области примыкают друг к другу вдоль некоторых особых лучей (которые могут быть носителями дополнительных условий, линиями сильного или слабого разрыва).

Следовательно, если граничные значения величин F заданы и постоянны вдоль некоторых лучей $\lambda = \text{const}$, то решение такой краевой задачи можно искать в классе конических автомодельных решений вида (14). При этом для искомых функций $F(\lambda)$ получится система обыкновенных дифференциальных уравнений. Примеры такого построения для различных конкретных уравнений и задач газовой динамики рассматриваются в главах III и IV.

§ 14. Приближенные модели

Предыдущие специальные математические модели газовой динамики давали точные решения исходных уравнений. Здесь будут рассмотрены некоторые случаи такого упрощения уравнений, которое приводит к приближенным решениям. Этот метод заслуживает внимания, так как он широко применяется в приложениях при решении сложных практических задач.

Основой приближенного моделирования является глубокое изучение особенностей поведения движения газа, направленное на выяснение определенных закономерностей, которые могут быть достаточно просто описаны в аналитической форме. С точки зрения исходных уравнений, эти закономерности принадлежат точным решениям, а приближенные решения выступают как их упрощенные асимптотические описания. Общая схема такого подхода состоит в том, что в уравнения и в решение вводится некоторый малый параметр δ , от которого описание рассматриваемой особенности не зависит, и учитываются порядки малости членов уравнений при $\delta \rightarrow 0$. Если в уравнениях возникают слагаемые с различными степенями δ , то в каждом уравнении удерживаются только те из них, которые имеют наименьшую степень малого параметра δ . Это и дает искомые приближенные уравнения.

Понятно, что указанная процедура является в значительной мере формальной. Математический идеал требует доказательства того, что решение полных уравнений при $\delta \rightarrow 0$ действительно имеет решение приближенных уравнений в качестве главного члена (хотя бы *асимптотически*).

На самом деле этот идеал достигается в весьма редких случаях; обычно исследователи ограничиваются формальным построением приближенной модели. Обоснование же предоставляется физической интуицией, для которой тем самым открывается широкий простор. Ясно, что при этом сильно возрастает роль критерия практики.

В этом параграфе метод формального приближенного моделирования иллюстрируется на четырех примерах. Последний из них (теория мелкой воды) интересен тем, что вскрывает несколько неожиданную связь между волнами на воде и газодинамическими процессами.

Линеаризация. Пусть известно некоторое *основное движение*, т. е. точное решение уравнений газовой динамики (3.11):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, t), \quad p = p_0(\mathbf{x}, t), \quad \rho = \rho_0(\mathbf{x}, t), \quad S = S_0(\mathbf{x}, t). \quad (1)$$

Ищется другое, мало отличающееся от (1), решение вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \delta \mathbf{u}', \quad p = p_0 + \delta p', \quad \rho = \rho_0 + \delta \rho', \quad S = S_0 + \delta S', \quad (2)$$

где штрихом обозначены новые неизвестные функции (добавки к основному решению или его возмущения) переменных $\mathbf{x}$ и t , а δ — некоторый параметр. При подстановке выражений (2) в уравнения (3.11) надо учесть, что оператор D производной в частице примет вид

$$D = D_0 + \delta \mathbf{u}' \cdot \nabla, \quad D_0 = \partial_t + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla$$

и что функции (1) образуют решение системы (3.11). После подстановки и сокращения на общий множитель δ получаются уравнения

$$\begin{aligned} D_0 \rho' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \rho_0 + \rho' \operatorname{div} \mathbf{u}_0 + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u}' + \delta \mathbf{u}' \cdot \nabla \rho' + \\ + \delta \rho' \operatorname{div} \mathbf{u}' = 0, \\ D_0 \mathbf{u}' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}_0 + \frac{\rho'}{\rho_0(\rho_0 + \delta \rho')} \nabla p_0 + \frac{1}{\rho_0 + \delta \rho'} \nabla p' + \\ + \delta \mathbf{u}' \cdot \nabla \mathbf{u}' = 0, \\ D_0 S' + \mathbf{u}' \cdot \nabla S_0 + \delta \mathbf{u}' \cdot \nabla S' = 0, \\ p' = \frac{1}{\delta} (f(\rho_0 + \delta \rho', S_0 + \delta S') - f(\rho_0, S_0)). \end{aligned} \quad (3)$$

Ясно, что на самом деле возмущения u' , p' и т. д. должны зависеть не только от переменных x , t , но также и от параметра δ . Главная трудность дальнейшего анализа состоит в оправдании следующего предположения: функции u' , p' , ρ' , S' как решения точных уравнений (3), а также входящие в эти уравнения их производные имеют конечные предельные значения при $\delta \rightarrow 0$.

Если это предположение оправдано, то переход к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в уравнениях (3) приводит к следующей системе уравнений для возмущений основного движения:

$$\begin{aligned} D_0 \rho' + \rho' \operatorname{div} u_0 + u' \cdot \nabla \rho_0 + \rho_0 \operatorname{div} u' &= 0, \\ D_0 u' + u' \cdot \nabla u_0 + \frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \nabla p_0 &= 0, \\ D_0 S' + u' \cdot \nabla S_0 &= 0, \\ p' &= c_0^2 \rho' + f_{s_0} S'. \end{aligned} \quad (4)$$

где $f_{s_0} = f_s(\rho_0, S_0)$.

Описанная процедура вывода уравнений (4) называется *линеаризацией* исходных уравнений (3.1), так как уравнения (4) являются *линейными* дифференциальными уравнениями относительно искоемых u' , p' , ρ' , S' . Необходимо иметь в виду, что при рассмотрении краевых задач дополнительные условия также подвергаются аналогичной процедуре линеаризации.

Важный частный случай системы (4) получается тогда, когда в качестве основного движения взято следующее *постоянное* решение (покоящийся газ):

$$u_0 = 0, \quad p_0 = \text{const}, \quad \rho_0 = \text{const}, \quad S_0 = \text{const}.$$

В этом случае $D_0 = \partial_t$. Пусть ищутся только изэнтропические возмущения, т. е. $S' = 0$. Тогда система (4) примет вид

$$\begin{aligned} \rho'_t + \rho_0 \operatorname{div} u' &= 0, \\ \rho_0 u'_t + \nabla p' &= 0 \quad (p' = c_0^2 \rho'). \end{aligned} \quad (5)$$

Это — классическая система *уравнений акустики* (для однородной среды). В частности, из (5) легко выводится одно уравнение для возмущения давления:

$$p'_{tt} = c_0^2 \Delta p', \quad (6)$$

где Δ — оператор Лапласа. Волновому уравнению (6) удовлетворяет также возмущение плотности ρ' , а в случае безвихревых возмущений (т. е. когда $\text{rot } \mathbf{u}' = 0$) — и вектор возмущения скорости $\mathbf{u}'$.

Околозвуковое приближение. Ради простоты рассматривается случай безвихревого установившегося движения, описываемого интегралом Бернулли (11.19) и уравнением для потенциала скоростей (11.20). Околозвуковое приближение предназначено для упрощенного описания течений, возникающих при малых возмущениях звукового потока, в котором

$$u = c_*, \quad v = w = 0, \quad c = c_*. \quad (7)$$

Если выполнить изложенную в предыдущем пункте операцию линеаризации с основным движением (7), то легко убедиться в том, что полученная модель оказывается неудовлетворительной. Формально правильное описание возмущений звукового потока получается, если принять следующие представления координат, потенциала и скорости звука:

$$\begin{aligned} x &= \delta^{1+k} x', & y &= \delta^k y', & z &= \delta^k z'; \\ \varphi &= c_* x + \delta^{3+k} \varphi', & c &= c_* + \delta^2 c' \end{aligned} \quad (8)$$

при любом выборе значения вещественного параметра k . С использованием обозначений

$$u' = \varphi'_{x'}, \quad v' = \varphi'_{y'}, \quad w' = \varphi'_{z'}, \quad (9)$$

для компонент вектора скорости $\mathbf{u}$ на основании (8) получаются выражения

$$u = c_* + \delta^2 u', \quad v = \delta^3 v', \quad w = \delta^3 w'. \quad (10)$$

После подстановки величин (10) и выражения для скорости звука (8) в интеграл Бернулли (11.19) последний принимает вид

$$c_*^2 + 2\delta^2 c_* u' + \delta^4 u'^2 + \delta^6 (v'^2 + w'^2) + I(c_*^2 + 2\delta^2 c_* c' + \delta^4 c'^2) = q_m^2.$$

Использование разложения по формуле Тейлора

$$I(c_*^2 + \eta) = I(c_*^2) + (2/m_*)\eta + O(\eta^2)$$

(где $m_* = m(\rho_*)$ есть величина (2.22)), справедливого в силу (2.24), и учет соотношения $c_*^2 + I(c_*^2) = q_m^2$ приводят после сокращения на $2\delta^2$, к уравнению

$$c_* u' + (2c_*/m_*)c' + O(\delta^2) = 0. \quad (11)$$

Теперь делается предположение, аналогичное тому, которое использовалось при линеаризации: функции u' , v' , w' , c' , как решения соответствующих точных уравнений, а также входящие в эти уравнения производные

при фиксированных конечных значениях переменных x' , y' , z' имеют конечные предельные значения при $\delta \rightarrow 0$. Выделенные здесь курсивом слова акцентируют внимание на нетривиальности данной ситуации, так как согласно (8), например, $y/x = \delta^{-1} y'/x'$ и при фиксированном отношении y'/x' будет $y/x \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$. Качественно это означает, что околзвукое движение слабо меняется в направлениях, перпендикулярных основному звуковому потоку, и потому для правильного описания этого изменения надо сокращать расстояния (как бы сжимать поток) в этих направлениях так, как предписывают формулы (8)–(10). Обоснование этого предположения для одного вида околзвукое течения дано в § 26.

В пределе при $\delta \rightarrow 0$ из (11) получается соотношение

$$m_* u' + 2c' = 0, \quad (12)$$

заменяющее интеграл Бернулли в околзвукоем приближении.

В уравнении для потенциала скоростей (11.20) представления отдельных слагаемых в силу (8), (9) и (10) имеют вид

$$\begin{aligned} (u^2 - c^2)\varphi_{xx} &= 2\delta^{3-k} c_*(u' - c')\varphi'_{x'x'} + O(\delta^{5-k}), \\ (v^2 - c^2)\varphi_{yy} + (w^2 - c^2)\varphi_{zz} &= -\delta^{3-k} c_*^2(\varphi'_{y'y'} + \varphi'_{z'z'}) + O(\delta^{5-k}), \\ 2uv\varphi_{xy} + 2uw\varphi_{xz} &= O(\delta^{5-k}), \quad 2vw\varphi_{yz} = O(\delta^{9-k}). \end{aligned}$$

Следовательно, после деления на δ^{3-k} и предельного перехода $\delta \rightarrow 0$ получается уравнение

$$2c_*(u' - c')\varphi'_{x'x'} - c_*^2(\varphi'_{y'y'} + \varphi'_{z'z'}) = 0.$$

Наконец, использование соотношения (12) и равенства $u' = \varphi'_{x'}$ приводит это уравнение к окончательному виду

$$\frac{m_* + 2}{c_*} \varphi'_{x'} \varphi'_{x'x'} - \varphi'_{y'y'} - \varphi'_{z'z'} = 0. \quad (13)$$

Выполненное моделирование показывает, что возмущения звукового потока приближенно описываются *нелинейным* уравнением, а именно квазилинейным уравнением (13). Этот нетривиальный факт делает теорию околзвукоев течений газа очень трудной, но вместе с тем и очень интересной для математического исследования.

Гиперзвукое приближение. Рассматриваются сверхзвуковые, равномерные в бесконечности вверх по потоку плоскопараллельные установившиеся течения газа. Пусть q_1 есть значение скорости в бесконечности и c_1 —

соответствующее значение скорости звука. Течение называется *гиперзвуковым*, если число Маха $M_1 = q_1/c_1$ является очень большим (по сравнению с единицей). Ясно, что если в такой поток вносятся относительно малые возмущения, то число Маха M будет большим и во всем потоке. Гиперзвуковое приближение предназначено для описания течений, получаемых относительно малыми возмущениями поступательного течения, в котором

$$u = q_1, \quad v = 0, \quad c = c_1 \quad (14)$$

при условии, что $\delta = c_1/q_1$ мало.

Правильное описание возмущений гиперзвукового течения получается при следующем представлении величин (подробности даны в § 27):

$$\begin{aligned} x &= x', & y &= \delta y', & u &= q_1 + \delta^2 u', & v &= \delta v', \\ p &= \delta^2 p', & \rho &= \rho', & S &= S'. \end{aligned} \quad (15)$$

В результате подстановки представления (15) в уравнения (3.11) последние принимают вид

$$\begin{aligned} \delta^2(q_1 + \delta^2 u')u'_{x'} + \delta^2 v' u'_{y'} + \delta^2 \frac{1}{\rho'} p'_{x'} &= 0, \\ \delta(q_1 + \delta^2 u')v'_{x'} + \delta v' v'_{y'} + \delta \frac{1}{\rho'} p'_{y'} &= 0, \\ (q_1 + \delta^2 u')\rho'_{x'} + v' \rho'_{y'} + \rho'(\delta^2 u'_{x'} + v'_{y'}) &= 0, \\ (q_1 + \delta^2 u')S'_{x'} + v' S'_{y'} &= 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Далее делается стандартное предположение: функции u' , v' , p' , ρ' , S' и их производные по x' , y' имеют при *фиксированных конечных значениях* переменных x' , y' конечные предельные значения при $\delta \rightarrow 0$. Здесь ситуация аналогична случаю околосвуковой модели. В этом предположении в результате сокращения второго уравнения (16) на δ и последующего предельного перехода при $\delta \rightarrow 0$ из (16) получается система уравнений

$$\begin{aligned} q_1 v'_{x'} + v' v'_{y'} + \frac{1}{\rho'} p'_{y'} &= 0, \\ q_1 \rho'_{x'} + v' \rho'_{y'} + \rho' v'_{y'} &= 0, \\ q_1 S'_{x'} + v' S'_{y'} &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

После замены $x' = q_1 t$ и переобозначения $v' \rightarrow u$, $y' \rightarrow x$ система (17) в точности совпадает с системой уравнений одномерного движения газа с плоскими волнами. В этом приближении величина u' остается неопределенной; она может быть вычислена в более высоком приближении, например из интеграла Бернулли.

Теория мелкой воды. Здесь дается вывод приближенных уравнений, описывающих динамику волнового движения идеальной несжимаемой жидкости на поверхности водоема конечной глубины при условии, что толщина слоя жидкости мала по отношению к характерному горизонтальному размеру (например к длине волны). Оказывается, что получаемая модель этой задачи, казалось бы не имеющей отношения к динамике, в точности совпадает с уравнениями движения политропного газа с показателем адиабаты $\gamma = 2$. Возникающая при этом гидродинамическая аналогия не только даст замечательный пример единства природы волновых явлений, но может быть полезной и при анализе конкретных движений.

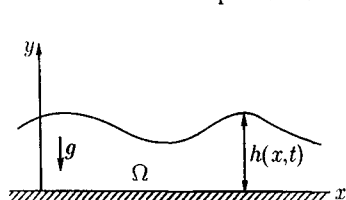


Рис. 1

Исходная задача ставится так: требуется определить потенциальное движение идеальной несжимаемой жидкости, на которую действует равномерное поле сил тяжести, в тонком слое над горизонтальным ровным дном с постоянным давлением на верхней свободной поверхности (рис. 1), возникающее под действием некоторого начального возмущения. Для простоты будет рассмотрена двумерная задача, хотя все почти дословно справедливо и для трехмерной задачи.

Пусть $\Phi = \Phi(x, y, t)$ есть потенциал скорости, g — ускорение сил тяжести, вектор которых направлен по оси y , дно водоема есть $y = 0$ и $y = h(x, t)$ — уравнение свободной границы. В области $\Omega = \{-\infty < x < \infty, 0 < y < h(x, t)\}$ потенциал Φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0 \quad (18)$$

и граничному условию непротекания на дне

$$\Phi_y(x, 0, t) = 0; \quad (19)$$

на свободной границе $y = h(x, t)$ выполняются два условия: кинематическое

$$h_t + \Phi_x h_x = \Phi_y \quad (20)$$

и динамическое (давление считается равным нулю)

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\Phi_x^2 + \Phi_y^2) + gh = 0. \quad (21)$$

Кроме того, для Φ и h задаются некоторые начальные значения при $t = 0$.

Для анализа удобно ввести в рассмотрение значение потенциала на свободной границе

$$\varphi(x, t) = \Phi(x, h(x, t), t). \quad (22)$$

Тогда входящие в уравнения (20) и (21) производные от Φ могут быть выражены через производные от φ и производную Φ_y . Последняя же может трактоваться как значение определенного оператора N над парой (φ, h) , действующего по правилу: в области Ω решается смешанная краевая задача для уравнения (18) с граничными условиями (19) и (22), после чего находится $N = \Phi_y|_{y=h} = N(\varphi, h)$. При этом N , очевидно, линеен относительно φ , но нелинеен относительно h .

Приближенное моделирование этой задачи выполняется путем введения малого параметра δ согласно формулам

$$\begin{aligned} x &= x', & y &= \delta y', & t &= \delta^{-1/2} t', & h &= \delta h', \\ \Phi &= \delta^{1/2} \Phi', & \varphi &= \delta^{1/2} \varphi'. \end{aligned} \quad (23)$$

Вначале приближенно решается красная задача в области Ω . В силу (23) уравнение (18) переходит в уравнение

$$\delta^2 \Phi'_{x'x'} + \Phi'_{y'y'} = 0.$$

Его решение ищется в виде ряда по степеням δ

$$\Phi' = \Phi_0 + \delta^2 \Phi_1 + \dots,$$

для членов которого получается рекуррентная система

$$\Phi_{0y'y'} = 0, \quad \Phi_{1y'y'} + \Phi_{0x'x'} = 0, \dots$$

Решение этой системы с граничным условием (19) имеет вид

$$\Phi_0 \equiv A(x', t'), \quad \Phi_1 = -\frac{1}{2} A_{x'x'}(x', t') y'^2, \dots$$

и дает представление потенциала

$$\Phi' = A - \frac{1}{2} \delta^2 A_{x'x'} y'^2 + \dots$$

Функция A находится из граничного условия (22), которое дает $A = \varphi' + \delta^2 \psi + \dots$. В итоге получается представление решения краевой задачи (с точностью до членов порядка δ^4)

$$\Phi' = \varphi' - \frac{1}{2} \delta^2 \varphi'_{x'x'} y'^2 + \dots \quad (24)$$

Уравнения (20) и (21) в результате подстановки (23) принимают вид

$$h'_{t'} + \Phi'_{x'} h'_{x'} = \delta^{-2} \Phi'_{y'}, \quad \Phi'_{t'} + \frac{1}{2} (\Phi'^2_{x'} + \delta^{-2} \Phi'^2_{y'}) + gh' = 0. \quad (25)$$

При обычном предположении о предельных значениях всех штрихованных величин при $\delta \rightarrow 0$ из (24) находится предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (\delta^{-2} \Phi'_{y'}|_{y'=h'}) = -h' \varphi'_{x'x'}. \quad (26)$$

В силу (26) формальный предельный переход $\delta \rightarrow 0$ в уравнениях (25) с учетом (24) приводит к уравнениям

$$h'_{t'} + \varphi'_{x'} h'_{x'} + h' \varphi'_{x'x'} = 0, \quad \varphi'_{t'} + \frac{1}{2} \varphi'^2_{x'} + gh' = 0. \quad (27)$$

Наконец, если ввести скорость $u' = \varphi'_{x'}$ и продифференцировать второе уравнение по x' , то получится система уравнений (штрихи опущены)

$$\begin{aligned} h_t + u h_x + h u_x &= 0, \\ u_t + u u_x + g h_x &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Это есть система уравнений одномерного с плоскими волнами изэнтропического движения газа (роль плотности ρ играет h) с уравнением состояния $p = \frac{1}{2} g h^2$. Легко показать, что начальным данным в исходной задаче соответствуют некоторые начальные данные для системы (28). Теория волновых движений несжимаемой жидкости, основанная на приближенной модели (28), получила название *теории мелкой воды*.

Задачи и упражнения к главе II

1. Доказать, что изобарическое движение является безвихревым, если и только если вектор скорости $\mathbf{u} = \text{const}$.

2. Показать, что матрица A определяет изобарическое движение с линейным полем скоростей (9.15), если и только если $A^3 = 0$.

3. Показать, что уравнения изэнтропического движения имеют решения, в которых плотность ρ зависит только от времени t (обобщение изобарических движений). Установить, что в этом классе решений удельный объем necessarily имеет вид (a_i — постоянные)

$$V = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

4. Показать, что в установившемся движении политропного газа приведенная скорость $\lambda = q/c_*$ выражается через число Маха $M = q/c$ по формуле

$$\lambda^2 = \frac{\gamma+1}{2} M^2 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-1}.$$

5. Пусть при установившемся обтекании тела политропным газом давление в точке торможения ($q = 0$) имеет значение p_0 . Вывести формулы

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \lambda^2 \right)^{\gamma/\gamma-1} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\gamma/\gamma-1}.$$

6. Выяснить, до каких скоростей полета вблизи земли можно считать воздух несжимаемой жидкостью при определении давления в критической точке с точностью 1% (скорость звука 1200 км/ч, $\gamma = 1,4$).

7. Показать, что установившееся сверхзвуковое течение типа источника возможно со скачком уплотнения, расположенным на любом заданном расстоянии $r_0 > r_*$.

8. Вычислить инварианты группы G^1 с оператором (8.10). Найти представление решения, инвариантного относительно этой группы.

9. Восстановить преобразования, образующие группу G^1 с оператором

$$\zeta \cdot \partial = t^2 \partial_t + tx \partial_x + ty \partial_y + (x - tu) \partial_u + (y - tv) \partial_v - 2t\rho \partial_\rho - 4tp \partial_p.$$

Показать, что система уравнений плоскопараллельного движения политропного газа (12.17) допускает эту группу только при $\gamma = 2$.

10. Доказать, что для системы уравнений (12.29) при $\nu > 0$ простые волны необходимо являются автомодельными решениями, т. е. имеют вид

$$u = u(\lambda), \quad p = p(\lambda), \quad \rho = \rho(\lambda),$$

где $\lambda = r/t$ с точностью до преобразования переноса по t .

11. Вычислить характеристики системы уравнений стационарных конических движений газа (12.25). Дать описание класса решений, на которых эта система имеет гиперболический тип.

12. Найти характеристическую форму уравнений акустики (5) в случае одномерных движений с плоскими волнами. Использовать ее для решения задачи Коши с произвольными начальными данными при $t = 0$.

13. Найти преобразования растяжения, допускаемые уравнением (13) для потенциала скоростей в околосзвуковом приближении.

14. Показать, что уравнения теории мелкой воды на непрерывных решениях равносильны интегральным законам сохранения

$$\oint_{\Gamma} (h dx - h u dt) = 0, \quad \oint_{\Gamma} \left(h u dx - \left(h u^2 + \frac{1}{2} g h^2 \right) dt \right) = 0,$$

где Γ — произвольный замкнутый контур на плоскости $R^2(x, t)$.

15. Найти уравнения сильного разрыва в теории мелкой воды исходя из интегральных законов сохранения предыдущей задачи.

ГЛАВА III

Одномерные неустановившиеся движения

Модель одномерного неустановившегося движения представляет собой одну из наиболее полно изученных газодинамических подмоделей. Исторически начало теоретического изучения движений этого класса восходит к Риману, почти 150 лет тому назад замстившему наиболее важные особенности явления распространения волн конечной амплитуды. Это явление сопровождается такими существенно нелинейными эффектами, как градиентная катастрофа, образование ударных волн, распад произвольного разрыва и рядом других.

Предположение об одномерном характере движения является привлекательным и полезным по ряду причин. Прежде всего, оно приближенно оправдывается для многих случаев реальных движений газа. Даже если некоторое движение в целом и не одномерно, отдельные его пространственно-временные подобласти часто могут быть описаны в рамках одномерного движения. Таковы движения в трубах, при взрывах и ударах и т. д. Далее, уравнения и задачи этой модели являются сравнительно доступными для качественного анализа и численного расчета благодаря тому, что здесь основные величины зависят лишь от двух независимых переменных. При этом не последнюю роль играет также и возможность предельно наглядного изображения различных газодинамических ситуаций на плоскости событий. Далее, многие выявленные в рамках одномерного приближения особенности движения оказываются качественно присущими и более сложным движениям, позволяя изучать последние на основе оправданной аналогии. Очень важно и то, что в теории одномерных движений имеется много до конца решенных конкретных задач, образующих, в их совокупности, «золотой фонд» теоретической и прикладной газовой динамики.

Несомненно, что значение фактов и эффектов, выявленных при изучении одномерных движений, выходит за рамки этой теории. Они послужили отправным пунктом для развития ряда направлений современной математической физики. Например, прогресс в теории квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений во многом обусловлен пред-

ставлениями и результатами, почерпнутыми из области одномерной газодинамики.

Настоящая глава и предназначена для ознакомления читателя с основными свойствами и методами исследования одномерных неустановившихся движений газа.

§ 15. Плоские, цилиндрические и сферические волны

Основные уравнения и их характеристики. Дифференциальные уравнения одномерного движения с плоскими, цилиндрическими или сферическими волнами уже были получены в виде (12.12). С заменой обозначения скорости q на u эти уравнения таковы:

$$\begin{aligned} u_t + uu_r + \frac{1}{\rho} p_r &= 0, \\ \rho_t + u\rho_r + \rho u_r + \frac{\nu}{r} \rho u &= 0, \\ p_t + up_r + \rho c^2 u_r + \frac{\nu}{r} \rho c^2 u &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $c^2 = c^2(\rho, p)$ рассматривается как заданная функция. Параметр геометрии ν имеет значение $\nu = 0$ для плоских волн, $\nu = 1$ для цилиндрических волн и $\nu = 2$ для сферических волн. В случае $\nu = 0$ координата $r = x$ меняется на всей оси $(-\infty, \infty)$, а если $\nu > 0$, то координата r меняется лишь в интервале $(0, \infty)$. Первое из уравнений (1) есть уравнение импульса, второе — уравнение неразрывности и третье — одна из форм уравнения энергии.

Общие качественные свойства гладких решений системы (1) выясняются с помощью ее характеристик. Хотя для этой цели и можно было бы воспользоваться выводами § 6 и перенести их на систему (1) с учетом того, что она описывает лишь класс частных решений уравнений газовой динамики, моделируя уравнения (3.14), однако здесь уместно провести независимый анализ. Для системы (1) пространством событий является плоскость $R^2(r, t)$. На этой плоскости событий и рассматривается картина одномерного движения газа, «частицы» которого можно считать перемещающимися по оси r . Здесь характеристики будут просто линиями на плоскости $R^2(r, t)$.

Нормальные характеристические векторы ищутся в виде $\xi = (\xi, \tau)$. С величиной $\chi = \tau + u\xi$ характеристическая матрица (см. § 6) системы (1) такова:

$$A(\xi) = \begin{pmatrix} \chi & 0 & \frac{1}{\rho}\xi \\ \rho\xi & \chi & 0 \\ \rho c^2 \xi & 0 & \chi \end{pmatrix}.$$

и ее определитель равен

$$\det A(\xi) = \chi(\chi^2 - c^2\xi^2).$$

Очевидно, что характеристическое уравнение $\det A(\xi) = 0$ здесь всегда имеет три вещественных корня: $\chi = 0$ и $\chi = \pm c\xi$, соответствующих контактной и звуковым характеристикам. Следовательно, система (1) является *гиперболической*. Разыскивая уравнения характеристик на плоскости $R^2(r, t)$ в виде $r = r(t)$, удобно взять в качестве задающей их функции $h(r, t) = r - r(t)$. Тогда нормальный характеристический вектор запишется в виде $\xi = (1, -r'(t))$, а величина χ будет равна $\chi = u - r'(t)$, где $r'(t) = dr(t)/dt$. Отсюда получаются следующие *дифференциальные уравнения характеристик* системы (1):

$$\begin{aligned} (C_0) \quad dr/dt &= u, \\ (C_+) \quad dr/dt &= u + c, \\ (C_-) \quad dr/dt &= u - c. \end{aligned} \quad (2)$$

Всюду в дальнейшем будет использоваться именно эта, указанная в (2), маркировка характеристик: C_0 для контактных и $C_{\pm}$ для звуковых.

Для получения условий на характеристиках находятся соответствующие левые собственные векторы λ матрицы $A(\xi)$. Они оказываются такими: $\lambda_0 = (0, -c, 1)$ для характеристик C_0 и $\lambda_{\pm} = (\pm \rho c, 0, 1)$ для характеристик $C_{\pm}$. По правилам, изложенным в § 6, это даст следующие условия на характеристиках:

$$\begin{aligned} (C_0) \quad p_t + up_r - c^2(\rho_t + u\rho_r) &= 0, \\ (C_{\pm}) \quad \rho c(u_t + (u \pm c)u_r) \pm (p_t + (u \pm c)p_r) \pm \frac{\nu}{r}\rho c^2 u &= 0, \end{aligned}$$

где одновременно берутся верхние или нижние знаки. Более компактно эти условия записываются с помощью *операторов дифференцирования вдоль характеристик*

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r}, \quad D_+ = \frac{\partial}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial}{\partial r}, \\ D_- &= \frac{\partial}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial}{\partial r} \end{aligned} \quad (3)$$

в следующем виде

$$\begin{aligned} (C_0) \quad D_0 p &= c^2 D_0 \rho \quad (D_0 S = 0), \\ (C_+) \quad D_+ u + \frac{1}{\rho c} D_+ p &= -\frac{\nu}{r} cu, \\ (C_-) \quad D_- u - \frac{1}{\rho c} D_- p &= \frac{\nu}{r} cu. \end{aligned} \quad (4)$$

Совокупность соотношений (4) образует *характеристическую форму* системы уравнений (1) и равносильна этой системе.

Как и в § 3, *гладким движением* газа здесь называются такие решения $U = (u, p, \rho)$ системы (1), в которых все искомые функции непрерывно дифференцируемы. В области гладкого движения через каждую точку $M \in R^2(r, t)$ проходит одна и только одна характеристика каждого семейства. При этом, как это видно непосредственно из уравнений (2), в силу положительности скорости звука c направление характеристики C_0 всегда разделяет направления характеристик C_+ и C_- (если все направления берутся в одну и ту же сторону: $dt > 0$ или $dt < 0$).

Лемма о плотности. Для дальнейшего анализа полезна следующая лемма (которая на самом деле верна для произвольных, а не только для одномерных непрерывных движений газа).

Лемма 1. Если движение гладкое и если $\rho = 0$ в некоторой точке M (в которой $r \neq 0$ при $v > 0$), то $\rho = 0$ вдоль всей характеристики $C_0(M)$ (траектории), проходящей через точку M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение неразрывности (1) с использованием оператора D_0 переписывается в виде обыкновенного дифференциального уравнения для величины ρ вдоль C_0 :

$$D_0 \rho = - \left(u_r + \frac{v}{r} u \right) \rho.$$

Так как коэффициент при ρ в правой части этого линейного однородного уравнения непрерывен, то из $\rho(M) = 0$ следует $\rho(C_0(M)) = 0$ в силу единственности решения. ■

В нормальном газе аналогичное свойство справедливо для скорости звука c и для давления p . Из него вытекает также, что если какая-либо из величин ρ, c, p отлична от нуля в точке M , то все они будут отличны от нуля вдоль всей линии $C_0(M)$. Если назвать *точкой вакуума* такую точку, в которой $\rho = c = p = 0$, то на основании предыдущего можно сделать вывод: *линией вакуума* может быть только характеристика C_0 (траектория). Кроме того, из уравнений (2) следует, что вдоль линии вакуума характеристика C_0 сливается с характеристиками $C_{\pm}$. Поэтому никакая звуковая характеристика C_+ или C_- , сама не являющаяся линией вакуума, не может пройти через точку вакуума.

Теорема единственности. Пусть гладкое движение определено в полуполосе $\Pi = \{0 \leq t \leq T, r > 0\}$, и пусть точка $M \in \Pi$ не есть точка вакуума и выбрана так, что все проходящие через M характеристики достигают оси $t = 0$. Тогда образуется (криволинейный) *характеристический*

треугольник AMB (рис. 1) с основанием AB . При $v > 0$ предполагается, что замкнутый треугольник $\overline{AMB}$ лежит в области $r > 0$.

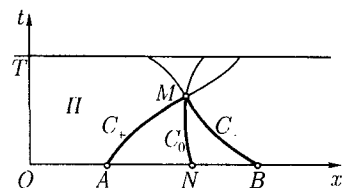


Рис. 1

Утверждается, что в треугольнике AMB нет точек вакуума. Действительно, в противном случае в нем содержалась бы некоторая линия вакуума C_0 , которая непременно пересекла бы одну из боковых сторон AM или BM . Это означало бы, что эта боковая сторона — звуковая характеристика — достигла точки вакуума. По предыдущему она должна совпадать с C_0 , а тогда лежащая на ней точка M была бы точкой вакуума, в противоречии с предположением.

Пусть $U = (u, p, p)$ есть то решение системы (1), для которого построен характеристический треугольник AMB . Справедлива следующая теорема единственности решения U .

Теорема 1. Если решение U непрерывно дифференцируемо и если другое, непрерывно дифференцируемое в характеристическом треугольнике AMB решение U' совпадает с U на основании AB , то $U' = U$ во всем треугольнике AMB .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Систему уравнений (1) можно заменить равносильной ей симметрической системой, аналогичной (3.16):

$$\begin{aligned} \rho u_t + \rho u u_r + p_r &= 0, \\ b p_t + b u p_r + u_r &= -\frac{v}{r} u \quad \left(b = \frac{1}{\rho c^2} \right), \\ S_t + u S_r &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

В равносильной (5) матричной записи (здесь $U = (u, p, S)$)

$$A^t U_t + A^r U_r = A_0 U \quad (6)$$

матрицы A^t и A^r симметричны. Так как в замкнутом треугольнике AMB , в силу сделанных предположений, справедливы равномерные оценки снизу вида

$$\rho \geq \rho_0 > 0, \quad b \geq b_0 > 0, \quad r \geq r_0 > 0$$

с некоторыми постоянными ρ_0 , b_0 и r_0 , то матрица A^t положительно определена, а матрица A_0 непрерывна. С учетом этих замечаний доказательство проводится по схеме доказательства теорем 7.2, 7.3 (правая часть в (6) существенного влияния не оказывает). ■

Как и в § 7, важным следствием теоремы единственности является существование *областей определенности, зависимости и влияния*. Характерные примеры таких областей показаны на рис. 2.

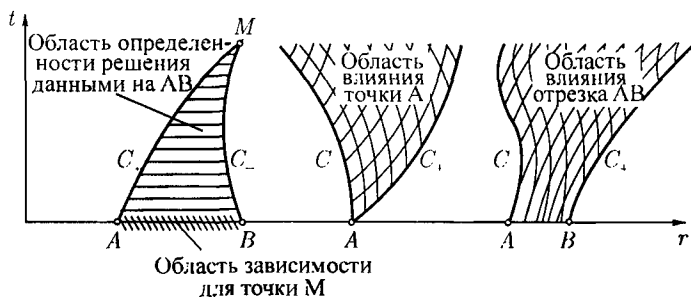


Рис. 2

Теорема 1 допускает различные обобщения. Одно из них заключается в отказе от требования непрерывной дифференцируемости решения. Ее утверждение остается справедливым и для решений, в которых функции u , ρ , p предполагаются лишь удовлетворяющими условию Липшица. Это дает возможность использовать теорему единственности применительно к движениям со слабыми разрывами.

Времени и пространству подобные направления. Другое обобщение, тесно связанное с корректностью постановок краевых задач для системы (1), состоит в рассмотрении случаев совпадения значений двух решений не только на прямых $t = \text{const}$. Можно указать широкий класс таких кривых в плоскости $R^2(r, t)$, что совпадение двух решений на какой-либо из этих кривых влечет совпадение этих решений в соответствующей области определенности. В следующем определении характеристики рассматриваются на некотором данном решении U .

Определение 1. Направлением l в точке $M \in R^2(r, t)$ называется *времени подобным*, если l разделяет направления касательных к характеристикам $C_+(M)$ и $C_-(M)$, выходящих из M в сторону $dt > 0$. Направление называется *пространству подобным*, если l не разделяет (оставляет по одну сторону) направлений касательных к характеристикам $C_+(M)$ и $C_-(M)$, выходящих из M в сторону $dt > 0$. Кривая $\mathcal{L}$ называется *времени подобной* (пространству подобной), если во всех ее точках направление касательной к $\mathcal{L}$ является времени подобным (пространству подобным) (рис. 3).

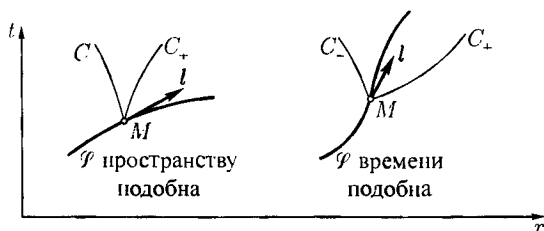


Рис. 3

Вышеупомянутое обобщение теоремы 1 состоит в следующем. Пусть на решении U дана пространству подобная кривая $\mathcal{L}$, и пусть характеристики C_+ и C_- , проведенные из некоторой не лежащей на $\mathcal{L}$ точки M , отсекают на $\mathcal{L}$ дугу AB , образуя криволинейный треугольник AMB . Тогда, если решение U' определено в $\bar{AMB}$ и $U' = U$ на AB , то $U' = U$ во всем треугольнике AMB .

Уместно отметить, что любая прямая $t = \text{const}$ является пространству подобной и что любая контактная характеристика, не являющаяся линией вакуума, времени подобна.

Теорема существования решения задачи Коши, поставленной для системы (1) с начальными данными на гладкой пространству подобной кривой, справедлива (в малом, т. е. в некоторой окрестности начальной кривой), если начальные данные непрерывно дифференцируемы.

Слабые разрывы. Характеристическая форма (4) исходных уравнений удобна для анализа поведения и распространения слабых разрывов вдоль характеристик (теорема 6.2). Согласно определению 6.4 характеристика C является линией слабого разрыва, если решение всюду непрерывно и по каждую сторону от C (включая саму линию C) непрерывно дифференцируемо, но на C некоторые производные основных величин терпят разрыв первого рода — при переходе через C меняются скачком. В этих условиях при переходе через C производные по касательному направлению к C меняются непрерывно. Поэтому разрывными могут быть только производные по направлениям, трансверсальным к C (образующим с касательной к C ненулевой угол).

Очевидно, что в условиях слабого разрыва на плоскости $R^2(r, t)$ для описания скачков производных по любому направлению достаточно знать величину скачка по какому-нибудь одному трансверсальному направлению. Для уравнений (4), учитывая уравнения характеристик (2), в качестве универсального трансверсального направления можно взять, напримср, направление оси r (скорости u и s предполагаются конечными). Тогда слабый

разрыв будет полностью описываться величинами разрыва значений производных u_r , p_r , S_r . Более удобно, как это будет видно из дальнейшего, взять равносильный этому набору производных набор их комбинаций

$$R = u_r + \frac{1}{\rho c} p_r, \quad L = u_r - \frac{1}{\rho c} p_r, \quad M = S_r. \quad (7)$$

Для каждого семейства характеристик выполняются свои условия на слабом разрыве. Для вывода этих условий полезны соотношения между дифференциальными операторами (3)

$$\begin{aligned} D_+ &= D_0 + cD_r, & D_- &= D_0 - cD_r, \\ D_+ + D_- &= 2D_0, & D_+ - D_- &= 2cD_0, \end{aligned} \quad (8)$$

где $D_r = \partial/\partial r$. Ниже используется также символ скачка $[f] = f_2 - f_1$ для записи величины разрыва любой функции f при переходе через линию слабого разрыва. В частности, по условию $[u] = [\rho] = [p] = [S] = [c] = 0$. Операция взятия скачка линейна, т. е. для любых непрерывных функций $f(u, p, S)$ и $g(u, p, S)$ справедливы формулы вида

$$[fu_r + gp_r] = f[u_r] + g[p_r].$$

Кроме того, необходимо учитывать, что для характеристики C_0 касательным дифференцированием является D_0 , и потому для любой функции $f(u, p, S)$ на C_0 будет $[D_0 f] = 0$. Для характеристики C_+ касательным дифференцированием является D_+ , следовательно, на C_+ всегда $[D_+ f] = 0$. Аналогично, на C_- всегда $[D_- f] = 0$.

С учетом этих замечаний и соотношений (8) применение операции взятия скачка к уравнениям (4) даст для каждой из характеристик (2) следующие условия на слабых разрывах:

$$\begin{aligned} (C_0) \quad & [R] = 0, \quad [L] = 0, \quad [M] \neq 0; \\ (C_+) \quad & [R] \neq 0, \quad [L] = 0, \quad [M] = 0; \\ (C_-) \quad & [R] = 0, \quad [L] \neq 0, \quad [M] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Транспортные уравнения. Итак, на слабом разрыве для каждого типа характеристик две из комбинаций трансверсальных производных (7) меняются непрерывно. Что же касается той комбинации производных, которая имеет ненулевой скачок, то для нее из уравнений (4) может быть получено так называемое *транспортное уравнение*, которое представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее эволюцию этой величины вдоль соответствующей характеристики. Для величины M

дифференцирование D_r первого уравнения (4) дает соотношение $D_0 M = -u_r M$, которое, с учетом вытекающего из (7) равенства $2u_r = R + L$, записывается в виде

$$D_0 M = -\frac{1}{2}(R + L)M. \quad (10)$$

Это и есть транспортное уравнение вдоль характеристики C_0 для производной $S_r = M$. Его принципиальная особенность состоит в том, что коэффициент при M в правой части (10) при переходе через C_0 меняется непрерывно, как это следует из (9).

Для получения транспортного уравнения величины R вдоль характеристики C_+ надо применить оператор D_r ко второму уравнению (4). С учетом формулы коммутации

$$D_r D_+ = D_+ D_r + D_r(u + c)D_r$$

это даст

$$D_+ R + D_r(u + c) \cdot R + D_r \left(\frac{1}{\rho c} \right) \cdot D_+ p - D_+ \left(\frac{1}{\rho c} \right) \cdot D_r p = -D_r \left(\frac{\nu}{r} c u \right). \quad (11)$$

Здесь величины ρ и c следует рассматривать как функции термодинамических параметров p и S . Если уравнение состояния газа взято в виде $p = f(\rho, S)$, то легко найти, что производные от функций $c^2(p, S)$ и $\rho c(p, S)$ выражаются через функцию f по формулам

$$(c^2)_p = \frac{f_{\rho\rho}}{f_\rho}, \quad (c^2)_S = f_\rho \left(\frac{f_S}{f_\rho} \right), \quad (\rho c)_S = \frac{\rho^3 c}{2} \left(\frac{f_S}{\rho^2 f_\rho} \right). \quad (12)$$

С учетом формул (12), после выражения всех производных по r через величины (7), окончательно транспортное уравнение для величины R вдоль характеристики C_+ приводится к виду

$$\begin{aligned} D_+ R = & -\frac{m+2}{4} R^2 \left(\frac{m-2}{4} L - \frac{2n_1+n_2}{4} cM - \right. \\ & \left. - \frac{\nu}{4r} (2c + mu) \right) R - \left(\frac{n_2}{4} cLM + \frac{\nu}{2r} (n_1+n_2) cuM + \right. \\ & \left. + \frac{\nu}{4r} (2c - mu)L - \frac{\nu}{r^2} cu \right), \end{aligned} \quad (13)$$

где величина m определена в (2.22) и введены обозначения

$$n_1 = \left(\frac{f_S}{f_\rho} \right)_\rho, \quad n_2 = \rho^2 \left(\frac{f_S}{\rho^2 f_\rho} \right)_\rho. \quad (14)$$

Транспортное уравнение для величины L выводится аналогично, дифференцированием D_r последнего из уравнений (4). Формально оно может быть получено из (13) просто заменой c на $-c$ и L на R , а R на L :

$$D_- L = -\frac{m+2}{4}L^2 + \left(\frac{m-2}{4}R + \frac{2n_1+n_2}{4}cM + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{4r}(2c - mu)\right)L + \left(\frac{n_2}{4}cRM + \frac{\nu}{2r}(n_1+n_2)cuM + \right. \\ \left. + \frac{\nu}{4r}(2c + mu)R - \frac{\nu}{r^2}cu\right). \quad (15)$$

Непосредственно видно, что коэффициенты при степенях R в правой части уравнения (13) при переходе через характеристику C_+ меняются непрерывно. Поэтому, если на C_+ есть слабый разрыв, то эволюция вдоль C_+ комбинации R производных с каждой стороны от C_+ описывается одним и тем же уравнением (13), но, вообще говоря, с разными начальными данными. В частности, если в некоторой точке слабый разрыв отсутствует, то его не будет и вдоль всей характеристики C_+ . Другая важная особенность уравнения (13) состоит в том, что оно нелинейно, точнее, является уравнением Риккати. Из теории уравнения Риккати известно, что его решение может обращаться в бесконечность на конечном интервале изменения независимого переменного. Этот факт имеет большое значение для понимания структуры решений уравнений газовой динамики. В более простой ситуации он будет подробно изучен в § 16.

Задача о распаде слабого разрыва. С помощью уравнений (9) можно решить задачу о распаде произвольного слабого разрыва. Как задача Коши для системы (1) с начальными данными при $t = 0$

$$u(r, 0) = u_0(r), \quad p(r, 0) = p_0(r), \quad S(r, 0) = S_0(r) \quad (16)$$

эта задача ставится так. Пусть начальные данные всюду непрерывно дифференцируемы, кроме точки $r = r_0 > 0$, в которой первые производные функций (16) имеют разрыв первого рода. Вдоль характеристик C_0 , C_+ и C_- , выходящих из точки $(r_0, 0)$, решение задачи Коши с такими данными (16) будет иметь, вообще говоря, слабый разрыв. Требуется определить начальные значения величин (7), распространяющиеся вдоль каждой из трех характеристик.

Для решения задачи о распаде слабого разрыва удобно ввести показанную на рис. 4 нумерацию областей, на которые характеристики разбивают полуокрестность точки $(r_0, 0)$, лежащую со стороны $t > 0$. В каждой из этих областей первые производные основных величин непрерывны и поэтому имеют конечные предельные значения, когда точка (r, t) стремится

к точке $(r_0, 0)$. Для величин (7) эти предельные значения отмечаются соответствующим нижним индексом. Например, из начальных данных (16) сразу находятся значения

$$\begin{aligned} R_1 &= u'_0(r_0 - 0) + \frac{1}{\rho_0 c_0} p'_0(r_0 - 0), \\ L_1 &= u'_0(r_0 - 0) - \frac{1}{\rho_0 c_0} p'_0(r_0 - 0), \quad M_1 = S'_0(r_0 - 0); \\ R_2 &= u'_0(r_0 + 0) + \frac{1}{\rho_0 c_0} p'_0(r_0 + 0), \\ L_2 &= u'_0(r_0 + 0) - \frac{1}{\rho_0 c_0} p'_0(r_0 + 0), \quad M_2 = S'_0(r_0 + 0), \end{aligned} \quad (17)$$

где штрихом обозначены производные по r и $\rho_0 c_0$ есть значение ρc в точке разрыва $(r_0, 0)$. Остается заметить, что из условий (9) следуют равенства

$$R_1 = R_3 = R_4, \quad L_2 = L_3 = L_4, \quad M_1 = M_3, \quad M_2 = M_4, \quad (18)$$

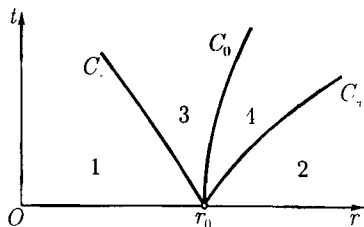


Рис. 4

которые и решают поставленную задачу. Действительно, в каждой серии равенств (18) есть величина, известная из начальных данных (17). Поэтому в совокупности формулы (17) и равенства (18) дают выражения всех искомых величин. Кроме того, из соотношений (17) и (18) легко находятся предельные значения всех производных u_r , p_r и S_r в точке $(r_0, 0)$ для каждой из областей, показанных на рис. 4.

Уравнения в лагранжевых координатах. Для одномерных движений газа принимается следующее определение лагранжевой координаты.

Определение 2. Лагранжевой координатой ξ называется дифференцируемая функция $\xi(r, t)$, удовлетворяющая уравнению

$$\xi_t + u \xi_r = 0 \quad (19)$$

и условию монотонности по r для любого фиксированного t . В более слабой форме это условие выражается неравенством

$$\xi_r \neq 0 \quad (20)$$

Из этого определения вытекает характерное свойство лагранжевой координаты: она *сохраняется в каждой частице газа* и отличает частицы одну от другой. В частности, если энтропия $S(r, t)$ удовлетворяет условию (20), то ее можно взять в качестве лагранжевой координаты. Очевидно, что во всех случаях энтропия зависит только от лагранжевой координаты, т. е. справедлив *интеграл энтропии*

$$S = S(\xi). \quad (21)$$

Лемма 2. Для производных любой лагранжевой координаты $\xi(r, t)$ справедливы формулы вида

$$\xi_r = r^\nu \rho \varphi(\xi), \quad \xi_t = -r^\nu \rho u \varphi(\xi) \quad (22)$$

с функцией $\varphi(\xi)$, определяемой заданием начального распределения

$$\xi(r, 0) = \xi_0(r). \quad (23)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дифференцирование уравнения (19) по r дает уравнение для производной ξ_r :

$$D_0 \xi_r + u_r \xi_r = 0.$$

В силу этого уравнения и уравнения неразрывности (1) справедливы равенства

$$D_0 \left(r^{-\nu} \frac{\xi_r}{\rho} \right) = -\nu r^{-\nu-1} u \frac{\xi_r}{\rho} + r^{-\nu} \frac{\xi_r}{\rho^2} \left(\rho u_r + \frac{\nu}{r} \rho u \right) - r^{-\nu} u_r \frac{\xi_r}{\rho} = 0.$$

Отсюда следует, что $r^{-\nu} \rho^{-1} \xi_r = \varphi(\xi)$, т. е. первая из формул (22). Вторая формула (22) вытекает из уравнения (19) в силу первой. Если удовлетворяющая содержащемуся в определении 2 условию монотонности функция (23) задана, то известна и ей обратная функция $r = \xi_0^{-1}(\xi)$. Тогда функция φ дается вытекающей из (22) при $t = 0$ формулой

$$\varphi(\xi) = (\xi_0^{-1}(\xi))^{-\nu} (\rho(\xi_0^{-1}(\xi), 0))^{-1} \xi'_0(\xi_0^{-1}(\xi)),$$

где штрихом обозначена производная функции (23) по r . ■

Лемма 2 показывает, что на данном движении лагранжева координата определена с точностью до замены ξ на $F(\xi)$ с любой монотонной функцией F . Если устранить этот произвол путем конкретизации функции φ в (22), например, положить $\varphi = 1$, то уравнениями (22) функция $\xi(r, t)$

будет определена однозначно (с точностью до несущественного постоянного слагаемого). В этом случае $\xi(r, t)$ называется *массовой лагранжевой координатой*.

С другой стороны, если лагранжева координата $\xi(r, t)$ задана, то при $\varphi = 1$ формулы (22) определяют величины

$$\rho = r^{-\nu} \xi_r, \quad u = -\xi_t / \xi_r. \quad (24)$$

Следовательно, при заданной функции (21) движение газа полностью определено, так как давление дается уравнением состояния

$$p = f(\rho, S). \quad (25)$$

Однако построенное по формулам (21), (24), (25) движение автоматически удовлетворяет лишь уравнениям неразрывности и энергии. Требование того, чтобы это движение удовлетворяло также и уравнению импульсов (1), приводит к уравнению относительно функции $\xi(r, t)$:

$$\xi_r \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\xi_t}{\xi_r} \right) - \frac{\xi_t}{\xi_r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\xi_t}{\xi_r} \right) \right) = r^\nu \frac{\partial}{\partial r} f(r^{-\nu} \xi_r, S(\xi)). \quad (26)$$

Для данного уравнения состояния (25) это уравнение является *универсальным* — оно описывает всевозможные лагранжевы координаты, которые можно ввести на каком-нибудь движении газа. После выполнения дифференциальных операций и введения скорости звука согласно формуле $c^2 = f_\rho(\rho, S)$ уравнение (26) переписывается в следующей форме:

$$\xi_r^2 \xi_{tt} - 2\xi_r \xi_t \xi_{rt} + (\xi_t^2 - c^2) \xi_{rr} + \frac{\nu}{r} c^2 \xi_r^3 = \xi_r^3 f_S S'. \quad (27)$$

Итак, система уравнений (1) одномерных движений газа сводится к одному квазилинейному дифференциальному уравнению с частными производными второго порядка (27) для лагранжевой координаты $\xi = \xi(r, t)$, содержащему произвольное распределение энтропии (21).

Класс точных решений. Лемма 2 имеет также интересное применение для построения одного класса частных решений системы уравнений (1) в случае *политропного* газа. Этот класс выделяется предположением о *линейной* зависимости лагранжевой координаты от геометрической координаты r :

$$\xi(r, t) = \frac{r}{a(t)}. \quad (28)$$

В силу (28), соотношения (22), в которых для упрощения дальнейших формул сделана замена функции $\varphi = 1/\psi$, дают следующее представление скорости и плотности:

$$u = \frac{a'}{a} r = a' \xi, \quad \rho = \frac{1}{a} r^{-\nu} \psi \left(\frac{r}{a} \right) = a^{-\mu} \xi^{-\nu} \psi(\xi), \quad (29)$$

где $\mu = \nu + 1$ и штрихом обозначена производная по t . В политропном газе уравнение состояния дается соотношением (2.5) и для давления справедлива формула вида $p = B(\xi) \rho^\gamma$ или, в силу (29),

$$p = a^{-\mu\gamma} \xi^{-\nu\gamma} \psi^\gamma(\xi) B(\xi), \quad (30)$$

где функция $B(\xi)$ определяет распределение энтропии по частицам газа. Необходимо заметить, что в силу соотношения (28) для производных по r и ξ справедлива формула связи $\partial/\partial\xi = a\partial/\partial r$. Поэтому в результате подстановки выражений (29) в уравнение импульсов (1) оно приводится к следующему:

$$p_\xi = -a^{-\nu} a'' \xi^{1-\nu} \psi(\xi),$$

и интегрируется:

$$p = a^{-\nu} a'' (B_0 - \int \xi^{1-\nu} \psi(\xi) d\xi) \quad (31)$$

с константой B_0 , которая предполагается не зависящей от t . Сравнение формул (30) и (31) показывает, что *переменные* (t, ξ) *разделяются*. Это приводит к соотношениям

$$B(\xi) = a_0 \xi^{\nu\gamma} \psi^{-\gamma}(\xi) \left(B_0 - \int \xi^{1-\nu} \psi(\xi) d\xi \right), \quad (32)$$

$$a'' = a_0 a^{\nu-\mu\gamma}, \quad (33)$$

где a_0 — новая константа, возникающая при разделении переменных. Подстановка (32) в (30) даст окончательное представление давления:

$$p = a_0 a^{-\mu\gamma} \left(B_0 - \int \xi^{1-\nu} \psi(\xi) d\xi \right). \quad (34)$$

Что же касается уравнения (33), то его решение сводится к квадратуре. Если принять в качестве начальных условий значения

$$a(0) = 1, \quad a'(0) = a_1, \quad (35)$$

то решение можно представить в виде равенства

$$\int_1^{a(t)} \frac{a^{\mu(\gamma-1)/2} da}{\sqrt{b_0 a^{\mu(\gamma-1)} - a_0}} = \pm \frac{2}{\mu(\gamma-1)} t, \quad (36)$$

где введена константа

$$b_0 = a_0 \pm \frac{1}{2} \mu(\gamma-1) a_1^2.$$

Формулы (28), (29), (32), (35) и (36) дают семейство частных решений уравнений (1) одномерного движения газа. Решение зависит от одной произвольной функции $\psi(\xi)$ и нескольких произвольных постоянных. При различном выборе констант a_0 и b_0 это решение может описывать разлет газа от центра, его схождение к центру или определенного вида пульсации. Полная классификация получаемых типов движения приведена в [7]. Особый интерес представляет решение, соответствующее выбору $\psi(\xi) = \xi^\nu$. Оно описывает разлет в вакуум массы газа, в которой давление и температура распределены по параболическому закону (с максимумом в центре), а плотность постоянна по пространству и убывает со временем.

§ 16. Изэнтропические движения с плоскими волнами

Изэнтропические одномерные движения газа с плоскими волнами представляют собой одну из простейших моделей неустановившихся движений газа. Она наиболее богата как конкретными фактами, так и разнообразными до конца решенными задачами. Исторически на этой модели отрабатывались не только многие понятия и аналитические построения нестационарной газовой динамики, но также и алгоритмы численного расчета ее основных краевых задач. Условие изэнтропичности, конечно, является сильно ограничительным, так как оно не позволяет во всей общности рассматривать движения с ударными волнами, в результате прохождения которых по газу энтропия меняется и, вообще говоря, становится переменной по частицам. Однако и здесь возможно искусственное моделирование сильных разрывов, на которые надо наложить определенные условия устойчивости (см., например, [6]).

Исходные уравнения. В этом параграфе будут рассматриваться только *гладкие движения*. Пространственная координата обозначается через x и принимает значения на всей оси, $-\infty < x < +\infty$. Поэтому плоскостью событий здесь является вся плоскость $R^2(x, t)$. Исходные дифференциальные уравнения можно взять в виде (15.1), где надо положить $\nu = 0$, $r = x$

и отбросить третье уравнение, которое есть следствие второго ввиду того, что условие $S = S_0 = \text{const}$ влечет равенство $dp = c^2 d\rho$ с любым дифференцированием d . Итак, в качестве исходных берутся уравнения

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + \frac{c^2}{\rho} \rho_x &= 0, \\ \rho_t + u\rho_x + \rho u_x &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $c^2 = c^2(\rho) = f_\rho(\rho, S_0)$.

Уравнения (1) могут быть преобразованы ко многим равносильным формам, удобным для анализа различных ситуаций. Например, в координатах (ξ, t) , где лагранжева координата $\xi = \xi(x, t)$ вводится уравнениями (частный случай (15.22))

$$\xi_x = \rho, \quad \xi_t = -\rho u,$$

для скорости u и удельного объема $V = 1/\rho$ легко получается равносильная (1) простейшая *сильно нелинейная* (см. [6]) квазилинейная система из двух уравнений:

$$u_t + (p(V))_\xi = 0, \quad V_t - u_\xi = 0, \quad (2)$$

где функция $p(V)$ связана с уравнением состояния газа $p = g(V, S)$ формулой $p(V) = g(V, S_0)$. При этом существенно, что ее производная удовлетворяет условию

$$p'(V) < 0, \quad (3)$$

так как согласно (2.23) она равна $-\rho^2 c^2$. Система (2) с условием (3) была предметом многих тонких математических исследований, начало которым положил еще Б. Риман в середине XIX столетия. Эти исследования привели к созданию современной математической теории разрывных решений квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений, особенно сильно продвинутой за последние 30 лет.

Инварианты Римана. Наиболее ценную информацию о поведении решений системы (1) даст ее характеристическая форма, которая может быть получена из (15.2) и (15.4) при $\nu = 0$. В силу условия $S = \text{const}$ здесь исчезают контактные характеристики и остаются только звуковые. Это не значит, конечно, что исчезают траектории частиц — они есть в любом движении газа; пропадает лишь свойство траекторий быть возможными линиями слабого разрыва. Кроме того, условия (15.4) на звуковых характеристиках здесь интегрируются. Действительно, при любом дифференцировании d для величины $dp/\rho c$ можно написать представление

$$\frac{1}{\rho c} dp = \frac{c}{\rho} d\rho = d \int \frac{c}{\rho} d\rho,$$

где интеграл можно рассматривать как стандартную функцию σ скорости звука c . Итак, с функцией

$$\sigma(c) = \int_0^c \frac{c}{\rho} d\rho \quad (4)$$

при любом дифференцировании d выполнено равенство

$$dp = \rho c d\sigma(c).$$

Если уравнение состояния $p = f(\rho, S)$ таково, что при $S = S_0$ интеграл (4) не сходится, то можно заменить нижний предел интегрирования любым фиксированным значением $\rho_0 > 0$. В силу предыдущего равенства соотношения (15.4) на звуковых характеристиках принимают вид

$$D_+(u + \sigma(c)) = 0, \quad D_-(u - \sigma(c)) = 0. \quad (5)$$

Определение 1. Величины $u \pm \sigma(c)$ называются *инвариантами Римана*. Для них вводятся обозначения

$$r = u + \sigma(c), \quad l = u - \sigma(c). \quad (6)$$

В этих обозначениях и в силу (5) характеристическая форма системы (1) принимает вид

$$\begin{aligned} (C_+) \quad dx/dt &= u + c, & r &= u + \sigma(c) = \text{const}; \\ (C_-) \quad dx/dt &= u - c, & l &= u - \sigma(c) = \text{const}. \end{aligned} \quad (7)$$

Другими словами, вдоль каждой характеристики C_+ сохраняет постоянное значение инвариант Римана r и вдоль каждой характеристики C_- сохраняет постоянное значение инвариант Римана l .

В случае политропного газа функция (4) вычисляется на основании уравнения состояния $p = A\rho^\gamma$ ($A = \text{const}$) и оказывается такой:

$$\sigma(c) = \frac{2}{\gamma - 1} c. \quad (8)$$

Следовательно, инварианты Римана в политропном газе даются формулами

$$r = u + \frac{2}{\gamma - 1} c, \quad l = u - \frac{2}{\gamma - 1} c. \quad (9)$$

В общем случае справедливо выражение для производной $\sigma'(c) = 2/m$ с величиной m , определенной в (2.22). Поэтому для нормального газа $\sigma'(c) > 0$ и функция σ имеет обратную, обозначаемую σ^{-1} . С ее помощью скорость u и скорость звука c находятся из уравнений (6) и выражаются через инварианты Римана:

$$u = \frac{1}{2}(r + l), \quad c = \sigma^{-1} \left(\frac{1}{2}(r - l) \right). \quad (10)$$

В частности, в политропном газе

$$u = \frac{1}{2}(r + l), \quad c = \frac{\gamma - 1}{4}(r - l) \quad (11)$$

и справедливы формулы

$$u + c = \frac{\gamma + 1}{4}r + \frac{3 - \gamma}{4}l, \quad u - c = \frac{3 - \gamma}{4}r + \frac{\gamma + 1}{4}l. \quad (12)$$

На каждом движении газа инварианты Римана являются функциями переменных (x, t) , т.е. $r = r(x, t)$ и $l = l(x, t)$. Условие их сохранения вдоль соответствующих характеристик может быть записано, в обозначениях (15.3), в виде равенств $D_+ r = 0$ и $D_- l = 0$ или, в развернутой форме,

$$\begin{aligned} r_t + (u + c)r_x &= 0, \\ l_t + (u - c)l_x &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как величины $u \pm c$ выражаются, согласно (10), через переменные r и l , то равенства (13) образуют систему дифференциальных уравнений с двумя искомыми функциями, $r(x, t)$ и $l(x, t)$. Ясно, что система (13) равносильна исходной (1). Поэтому система (13) называется *системой уравнений в инвариантах Римана* одномерных изэнтропических движений газа.

Простые волны. В терминах инвариантов Римана явно описываются простые волны как специальные типы рассматриваемых движений газа. Непосредственный перенос результатов § 13 дает лишь следующую информацию о простой волне: это такое движение, в котором основные величины зависят от одной функции $\alpha(x, t)$ — параметра простой волны, причем линии уровня $\alpha(x, t) = \text{const}$ являются прямыми и образуют семейство характеристик на плоскости $R^2(x, t)$. Однако здесь о простых волнах можно сказать больше.

Теорема 1. В каждой простой волне, если она не есть постоянное движение, один и только один из инвариантов Римана, r или l , сохраняет тождественно постоянное значение. Если в простой волне $r \equiv \text{const}$, то ее линиями уровня являются прямолинейные характеристики семейства C_- . Если в простой волне $l \equiv \text{const}$, то ее линиями уровня являются прямолинейные характеристики семейства C_+ . Обратно, если в некоторой области движение не постоянно и один из инвариантов Римана тождественно постоянен, то движение в этой области есть простая волна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению простой волны и в силу формул (7) инварианты Римана должны быть функциями одного параметра — функции $\alpha = \alpha(x, t)$, т. е.

$$r = r(\alpha), \quad l = l(\alpha). \quad (14)$$

Подстановка представления (14) в уравнения (13) приводит к равенствам

$$r'(\alpha)D_+\alpha = 0, \quad l'(\alpha)D_-\alpha = 0, \quad (15)$$

где штрихом обозначены производные по α . Очевидно, что априори возможны четыре способа удовлетворить этим двум равенствам одновременно. Однако предположение

$$r'(\alpha) = 0, \quad l'(\alpha) = 0$$

означает, что оба инварианта, r и l , одновременно тождественно постоянны, что в силу формул (10) дает не простую волну, а постоянное движение. Предположение

$$D_+\alpha = 0, \quad D_-\alpha = 0$$

также не годится, так как оно равносильно равенствам $\alpha_t = 0$ и $\alpha_x = 0$, т. е. приводит к тому, что $\alpha \equiv \text{const}$ тождественно. В этом случае величина α не может быть параметром простой волны. Поэтому остаются только две возможности. Первая из них

$$r'(\alpha) = 0, \quad D_-\alpha = 0$$

означает, что в простой волне $r = \text{const}$ тождественно и что параметр волны α постоянен вдоль характеристик C_- . Но так как вдоль каждой характеристики C_- всегда постоянен инвариант Римана l , то вдоль каждой характеристики C_- , в силу формул (10), постоянны также величины u и c , а с ними и угловой коэффициент (7) этой характеристики $dx/dt = u - c$. Это означает, что характеристика C_- есть прямая линия. Аналогично, последняя возможность

$$l'(\alpha) = 0, \quad D_+\alpha = 0$$

приводит к такому же заключению с заменой r на l и C_- на C_+ . Тем самым первая часть теоремы доказана. Обратно, пусть в некоторой области непостоянного движения тождественно постоянен один из инвариантов Римана, например $r \equiv r_0$. Тогда инвариант l не тождественно постоянен и обе величины u и c являются, в силу формул (10), функциями только от l . Согласно определению движение в рассматриваемой области есть простая волна. ■

Простая волна, в которой тождественно постоянен инвариант Римана r (соответственно l), называется коротко r -волной (соответственно l -волной).

Уравнения прямолинейных характеристик для простых волн легко интегрируются. Например, в случае r -волны в уравнении характеристик C_-

$$dx - (u - c)dt = 0$$

коэффициент $u - c$ на C_- постоянен, в силу чего вдоль этих характеристик $x - (u - c)t = \text{const}$. При переходе от одной характеристики C_- к другой константа интегрирования может меняться и потому должна рассматриваться как функция параметра волны α . Вместо этого ее можно считать функцией любой непостоянной величины, например u , c или инварианта l , — все эти предположения равносильны. Для определенности эта константа интегрирования будет считаться функцией скорости u . Аналогично интегрируется уравнение характеристик C_+ в простой l -волне. Итак, уравнения простых волн могут быть записаны в следующем виде.

Уравнения r -волны:

$$r = u + \sigma(c) \equiv r_0 = \text{const}, \quad x - (u - c)t = F(u). \quad (16)$$

Уравнения l -волны:

$$l = u - \sigma(c) \equiv l_0 = \text{const}, \quad x - (u + c)t = F(u). \quad (17)$$

Отсюда следует, в частности, что совокупность всевозможных простых r -волн (а также l -волн) зависит от одной произвольной функции. В качестве таковой может рассматриваться, например, функция $F(u)$ в уравнениях (16) и (17).

Теорема о примыкании. В связи с понятием простых волн возникает важная задача об их распознавании, т. е. о формулировке таких признаков, по которым можно было бы судить о том, что в некоторой области движения газа есть простая волна. Общее достаточное условие существования простой волны дано в нижеследующей теореме, в которой одномерное движение с плоскими волнами заранее не предполагается изэнтропическим.

Теорема 2. Если в непрерывном (одномерном, с плоскими волнами) движении газа есть характеристика C_+ (соответственно C_-), не являющаяся линией вакуума, вдоль которой величины u , p , r постоянны, то

в окрестности этой характеристики, с каждой ее стороны, данное движение является изэнтропическим и либо постоянным, либо простой l -волной (соответственно r -волной). В частности, непостоянное изэнтропическое движение, непрерывно примыкающее к постоянному, всегда есть простая волна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть вдоль характеристики C_+ величины u, ρ, p постоянны. Тогда вдоль нее также постоянна и энтропия S . Пусть $\Omega_0 \subset R^2(x, t)$ есть множество, состоящее из точек всех траекторий C_0 , пересекающих данную характеристику C_+ . Так как C_+ не есть линия вакуума, то Ω_0 является областью. Ясно, что в области Ω_0 энтропия тождественно постоянна. Пусть $\Omega_- \subset R^2(x, t)$ есть множество, состоящее из точек всех характеристик C_- , пересекающих данную характеристику C_+ . Ясно, что Ω_- тоже является областью. Так как инвариант Римана l постоянен вдоль данной C_+ и постоянен вдоль каждой C_- , то он тождественно постоянен в области Ω_- . Следовательно, если на пересечении областей Ω_0 и Ω_- движение не постоянно (хотя бы с одной стороны от C_+), то в силу теоремы 1 это движение есть простая l -волна. Аналогично рассматривается случай, когда величины u, ρ, p постоянны вдоль некоторой характеристики C_- .

Если не постоянное изэнтропическое движение примыкает к постоянному движению вдоль некоторой линии $\mathcal{L}$, то вдоль этой линии должен быть слабый разрыв. По теореме 6.2 линия $\mathcal{L}$ должна быть характеристикой. В силу изэнтропичности движения линия $\mathcal{L}$ может быть только звуковой характеристикой, например C_+ . Так как она принадлежит находящемуся по одну сторону от нее постоянному решению, то вдоль этой характеристики C_+ все величины u, ρ, p постоянны. Согласно первой части теоремы по другую сторону от C_+ движение есть простая волна. ■

Если во второй части теоремы отказаться от требования изэнтропичности непостоянного движения, примыкающего к постоянному, то утверждение будет, вообще говоря, неверным. Действительно, примыкание может происходить вдоль траектории (характеристики C_0), а не постоянное движение может быть изобарическим (см. § 9). Однако если дополнительно предположить, что примыкание происходит по звуковой характеристике, то вторая часть теоремы будет верна и без требования изэнтропичности (впрочем, в этом случае она фактически совпадает с первой частью теоремы).

Центрированные простые волны. Выделяется важный специальный тип простых волн.

Определение 2. Простая r -волна (или l -волна) называется *центрированной* в точке (x_0, t_0) , если все ее прямолинейные характеристики C_- (соответственно C_+) пересекаются в точке (x_0, t_0) .

Пусть простая r -волна центрирована в точке (x_0, t_0) . Тогда в ее уравнении (16), переписанном в виде

$$x - x_0 - (u - c)(t - t_0) = F(u), \quad (18)$$

коэффициент $u - c$ и правая часть постоянны вдоль любого принадлежащего r -волне луча с уравнением $x - x_0 = k(t - t_0)$. Но если вдоль этого луча $(x, t) \rightarrow (x_0, t_0)$, то левая часть в (18) стремится к нулю. Следовательно, на каждом таком луче $F(u) = 0$, т. е. функция F равна нулю тождественно. Аналогичный вывод справедлив и для l -волны, центрированной в точке (x_0, t_0) . Таким образом, из уравнений (16) и (17) получаются следующие уравнения центрированных простых волн (для простоты записи в качестве центра взята точка $(x_0, t_0) = (0, 0)$).

Уравнения центрированной r -волны:

$$r = u + \sigma(c) \equiv r_0 = \text{const}, \quad u - c = \frac{x}{t}. \quad (19)$$

Уравнения центрированной l -волны:

$$l = u - \sigma(c) \equiv l_0 = \text{const}, \quad u + c = \frac{x}{t}. \quad (20)$$

Очевидно, что величины u и c , определенные уравнениями (19) (или уравнениями (20)) как функции переменных (x, t) , зависят только от отношения $\lambda = x/t$. Это означает, что каждая центрированная простая волна описывается *автомодельным решением* уравнений (1). Из определения простых волн (см. § 13) следует, что, и наоборот, любое автомодельное решение системы уравнений одномерного движения с плоскими волнами с автомодельной независимой переменной $\lambda = x/t$, должно быть простой волной. Используя уравнения (13), легко показать, что любое их автомодельное решение этого типа является либо постоянным, либо дается формулами (19) или (20). Следовательно, совокупность всех автомодельных решений упомянутых уравнений (в частности, уравнений (1)) с параметром автомодельности $\lambda = x/t$ описывается соотношениями (19) и (20).

В случае политропного газа с помощью выражений (9) решение находится в явном виде, а именно для центрированной r -волны

$$u = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} r_0 + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{x}{t}, \quad c = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(r_0 - \frac{x}{t} \right) \quad (21)$$

и для центрированной l -волны

$$u = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} l_0 + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{x}{t}, \quad c = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left(\frac{x}{t} - l_0 \right). \quad (22)$$

Простые волны, центрированные в произвольной точке (x_0, t_0) , описываются теми же формулами (21) и (22) с заменой дроби x/t дробью $(x - x_0)/(t - t_0)$.

Центрированные простые волны дают пример решений с особенностью. Из формул (19), (20) видно, что в «центре» волны (точка $(0, 0)$) основные величины разрывны, а область существования решения есть некоторый сектор, не содержащий оси x . Пример следующей задачи поясняет, что центрированные простые волны образуются тем не менее вполне естественно.

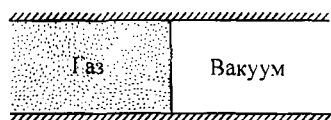


Рис. 1

Задача об истечении газа в вакуум. Пусть левая часть цилиндрической трубы заполнена покоящимся газом, удерживаемым заслонкой в сечении $x = 0$, справа от которой находится вакуум (рис. 1). В момент времени $t = 0$ заслонка мгновенно убирается, и начинается процесс истечения газа в вакуум. Тре-

буется найти возникающее одномерное, с плоскими волнами движение газа, в частности, определить скорость истечения, если известна скорость звука c_0 в покоящемся газе и его уравнение состояния (функция $\sigma(c)$).

Решение этой задачи основано на использовании предыдущих результатов. Для области $x < 0$ начальные данные при $t = 0$ к уравнениям (1) имеют вид $u = 0, c = c_0$. В силу теоремы единственности 15.1 в области определенности решения этими начальными данными, ограниченной справа характеристикой C_- с уравнением $x = -c_0 t$, газ покоится и $c = c_0$ при всех $t > 0$. Непостоянное движение, примыкающее к этой области покоя вдоль указанной характеристики C_- , должно быть простой волной, а именно r -волной (теорема 2). Однако в области $x > 0$ при $t = 0$ находится вакуум и в ней $c = 0$. Поэтому никакая прямая характеристика C_- , не будучи линией вакуума, не может достичь полуоси $\{t = 0, x > 0\}$ и имеется единственная возможность: простая r -волна должна быть центрированной в точке $(0, 0)$. Поэтому решение должно даваться формулами (19), в которых величина r_0 определяется условием на граничной характеристике C_- , где $u = 0$. Отсюда получается значение $r_0 = \sigma(c_0)$. Следовательно, решение задачи дается соотношениями

$$u + \sigma(c) = \sigma(c_0), \quad u - c = x/t.$$

На границе истекающего газа с вакуумом должно быть $c = 0$, и из первого соотношения находится скорость истечения $u_m = \sigma(c_0)$.

В случае политропного газа $r_0 = \frac{2}{\gamma-1}c_0$ и формулы (21) дают решение в явном виде:

$$u = \frac{2}{\gamma+1} \left(c_0 + \frac{x}{t} \right), \quad c = \frac{2}{\gamma+1} c_0 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{x}{t}. \quad (23)$$

В частности, скорость истечения политропного газа в вакуум оказывается равной

$$u_m = \frac{2}{\gamma-1} c_0. \quad (24)$$

Картина течения на плоскости событий показана на рис. 2.

В задаче об истечении газа в вакуум интересен и важен тот факт, что начальные значения разрывны в точке $x = 0$, так как скорость звука $c = c_0 > 0$ при $x < 0$ и $c = 0$ при $x > 0$. Таким образом, эта задача дает пример того, как из разрывных начальных данных при $t = 0$ может вырабатываться движение газа, непрерывное при $t > 0$.

Волны сжатия и разрежения.

Процесс распространения простой волны по частицам газа приводит к тому, что плотность ρ в каждой частице увеличивается (возрастает, растет) или уменьшается (убывает, падает). Ясно, что направление изменения плотности в частице со временем характеризуется знаком производной $D_0\rho$.

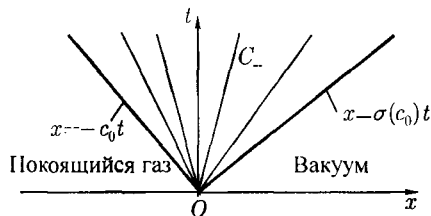


Рис. 2

Определение 3. Простая волна называется *волной сжатия* (соответственно *волной разрежения*), если плотность ρ в частице с течением времени возрастает, т. е. $D_0\rho > 0$ (соответственно убывает, т. е. $D_0\rho < 0$).

Оказывается, что простые волны сжатия и разрежения можно различать с помощью их наглядного изображения в виде картины соответствующих прямолинейных характеристик на плоскости событий $R^2(x, t)$. Так как наклон этих прямых при переходе от одной из них к другой изменяется, то все семейство прямых образует как бы «веер». При этом «ручка веера», т. е. та его часть, где прямые характеристики расположены теснее, ближе друг к другу, может быть как сверху, со стороны больших значений времени, так и снизу, со стороны меньших значений времени. В общем случае простая волна может состоять из различных участков, как с «ручкой веера» сверху, так и с «ручкой веера» снизу. Ясно, что расположение «ручки веера» может

быть однозначно описано направлением изменения, с ростом координаты x , величины углового коэффициента

$$k = u \pm c \quad (25)$$

наклона соответствующего семейства прямолинейных характеристик к оси t . Именно, очевидно, что если $k_x > 0$, то «ручка веера» находится снизу, а если $k_x < 0$, то сверху.

Теорема 3. Простая волна является волной сжатия (соответственно волной разрежения), если и только если «ручка веера» ее прямолинейных характеристик находится сверху (соответственно снизу).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для производной от углового коэффициента наклона (25) прямолинейных характеристик простой волны, с величиной m из (2.22), справедлива формула

$$\frac{\partial k}{\partial x} = -\frac{m+2}{2\rho} D_0 \rho. \quad (26)$$

Так как в нормальном газе всегда $m > 0$, то из этой формулы, с учетом предыдущих замечаний, следуют все утверждения теоремы. Для вывода формулы (26) в случае простой r -волны, когда прямолинейны характеристики семейства C_- с угловым коэффициентом $k = u - c$, используется уравнение (16), из которого следует равенство

$$\rho u_x + c \rho_x = 0.$$

Далее, так как в силу определения (2.22) величины m

$$2cc_x = (c^2)_x = (f_\rho)_x = f_{\rho\rho} \rho_x = (mc^2/\rho) \rho_x,$$

то с помощью предыдущего равенства находится

$$c_x = -\frac{m}{2} u_x.$$

Это дает выражение для производной $k_x = u_x - c_x$:

$$2k_x = (m+2)u_x. \quad (27)$$

С другой стороны, непосредственно из уравнения неразрывности (1) следует равенство

$$D_0 \rho = -\rho u_x. \quad (28)$$

Исключение величины u_x из соотношений (27) и (28) и дает формулу (26) для простых r -волн. В случае простой l -волны те же выкладки опять дают выражение (27) для величины $k_x = u_x + c_x$, откуда снова вытекает формула (26). ■

Иллюстрация к теореме 3 дана на рис. 3. В частности, построенное выше решение задачи об истечении газа в вакуум, согласно рис. 2, есть волна разрежения.

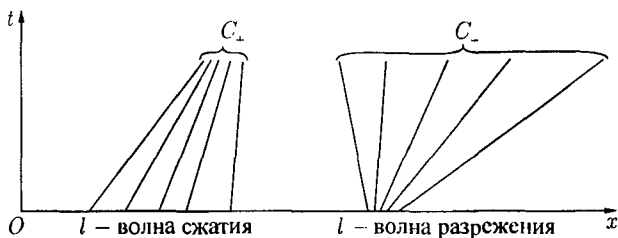


Рис. 3

Градиентная катастрофа. В простых волнах сжатия непрерывное движение газа, возникающее из сколь угодно гладких начальных данных (скажем, заданных при $t = 0$), не может существовать как угодно долго (при всех $t > 0$). Действительно, при «ручке веера» сверху сближающиеся с ростом t прямолинейные характеристики должны пересечься при конечном значении t . Тогда предположение о непрерывной дифференцируемости и даже вообще о непрерывности решения в окрестности точки пересечения приходит в противоречие с теоремой единственности решения обыкновенных дифференциальных уравнений характеристик. Из соотношений типа (27) видно, что при сближении характеристик (когда необходимо $|k_x| \rightarrow \infty$) происходит *неограниченный рост градиентов* основных величин — абсолютных значений производных u_x , p_x , и т. д., которые в точке пересечения характеристик обращаются в бесконечность. Существование таких решений типично вообще для нелинейных гиперболических уравнений.

Явление неограниченного роста градиентов основных величин называется *градиентной катастрофой*.

Разумеется, градиентная катастрофа может произойти не только в простой волне, но и в гладком движении общего характера. Для выяснения этого вопроса надо обратиться к транспортным уравнениям, как раз и описывающим эволюцию трансверсальных производных (градиентов основных величин) вдоль соответствующих характеристик.

Полученные в § 15 для любых одномерных движений транспортные уравнения (15.13) и (15.15) в случае изэнтропических движений существенно упрощаются и, как оказывается, могут быть проинтегрированы. Прежде всего, из сравнения формул (15.7) и (6) видно, что здесь ве-

величины R и L просто равны производным по x от инвариантов Римана:

$$R = r_x, \quad L = l_x. \quad (29)$$

Кроме того, в уравнении (15.13) надо положить $\nu = 0$, а также, в силу постоянства энтропии, $M = 0$. В результате транспортное уравнение для величины R вдоль характеристики C_+ принимает вид

$$D_+ R = -\frac{m+2}{4} R^2 + \frac{m-2}{4} L R. \quad (30)$$

Аналогично выглядит транспортное уравнение для величины L вдоль характеристики C_- ; оно может быть получено из (30) заменой D_+ на D_- и R на L , а L на R . Конечно, уравнение (30) (и ему аналогичное для L) нетрудно получить и непосредственно, применив оператор D_x к уравнению $D_+ r = 0$ (или $D_- l = 0$).

Уравнение Бернулли (30) приводится к линейному подстановкой $R = 1/z$:

$$D_+ z = -\frac{m-2}{4} L z + \frac{m+2}{4}. \quad (31)$$

Для его интегрирования следует заметить, что коэффициент при z может быть записан в виде

$$\frac{m-2}{4} L = D_+ \ln \sqrt{\frac{\rho}{c}}. \quad (32)$$

Действительно, во-первых, из формулы $2cD_x = D_+ - D_-$ и того, что $D_- l = 0$, следует равенство $2cL = D_+ l$. Кроме того, определение (6) и соотношение $D_+ r = 0$ влекут равенства

$$D_+ l = D_+ (l - r) = -2D_+ \sigma(c) = -\frac{2c}{\rho} D_+ \rho.$$

Вместе с предыдущим это дает другое выражение для величины L (аналогично получается и выражение для R):

$$L = -\frac{1}{\rho} D_+ \rho, \quad R = -\frac{1}{\rho} D_- \rho. \quad (33)$$

Во-вторых, в силу определения (2.22) величины m справедливы равенства

$$\frac{m-2}{4\rho} = \frac{f_{\rho\rho}}{4f_\rho} - \frac{1}{2\rho} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \frac{f_\rho}{\rho^2} = \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \sqrt{\frac{c}{\rho}}. \quad (34)$$

Теперь очевидно, что из (33) и (34) следует (32). С помощью выражения (32) уравнение (31) легко приводится к следующему:

$$D_+ \left(z \sqrt{\frac{\rho}{c}} \right) = \frac{m+2}{4} \sqrt{\frac{\rho}{c}}. \quad (35)$$

При решении этого уравнения необходимо помнить, что производная D_+ берется вдоль характеристики C_+ . Без потери общности можно считать, что интегрирование вдоль C_+ по t начинается от точки $t = 0$. Пусть значения величин при $t = 0$ отмечаются индексом нуль. С этим соглашением интегрирование уравнения (35) даст соотношение

$$z \sqrt{\frac{\rho}{c}} = z_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{c_0}} + \int_{0(C_+)}^t \frac{m+2}{4} \sqrt{\frac{\rho}{c}} dt.$$

Наконец, возвращение к величине $R = 1/z$ дает окончательно следующую явную формулу для решения транспортного уравнения (30):

$$R = \frac{R_0 \sqrt{\frac{\rho c_0}{\rho_0 c}}}{1 + R_0 \int_{0(C_+)}^t \frac{m+2}{4} \sqrt{\frac{\rho c_0}{\rho_0 c}} dt}. \quad (36)$$

Формула (36) описывает изменение трансверсальной производной $R = r_x$ инварианта Римана r вдоль любой характеристики C_+ . Аналогичная формула справедлива для описания изменения трансверсальной производной $L = l_x$ инварианта Римана l вдоль любой характеристики C_- :

$$L = \frac{L_0 \sqrt{\frac{\rho c_0}{\rho_0 c}}}{1 + L_0 \int_{0(C_-)}^t \frac{m+2}{4} \sqrt{\frac{\rho c_0}{\rho_0 c}} dt}. \quad (37)$$

Формулы (36) и (37) показывают, что если $R_0 \geq 0$ и $L_0 \geq 0$, то при всех $t > 0$ будет также $R \geq 0$ и $L \geq 0$. Значит, если начальные распределения инвариантов Римана

$$r(x, 0) = r_0(x), \quad l(x, 0) = l_0(x) \quad (38)$$

удовлетворяют неравенствам

$$r'_0(x) \geq 0, \quad l'_0(x) \geq 0, \quad (39)$$

то в решении задачи Коши с такими начальными данными *градиентная катастрофа невозможна*. Если же в некоторой точке x_0 будет, например, $r'(x_0) = R_0(x_0) < 0$, то вдоль выходящей из точки $(x_0, 0)$ характеристики C_+ все время будет $R < 0$ до тех пор, пока знаменатель в (36) не обратится в нуль. Там, где это случится, и произойдет градиентная катастрофа. Момент наступления градиентной катастрофы t_k определяется уравнением

$$\int_{0(C_+)}^{t_k} \frac{m+2}{4} \sqrt{\frac{\rho c_0}{\rho_0 c}} dt = -\frac{1}{R_0} \quad (R_0 < 0). \quad (40)$$

Для моментов времени $t \geq t_k$ непрерывное движение невозможно. В действительности оно продолжается, но уже как движение с сильными разрывами. Отсюда становится понятной одна из важнейших особенностей движения газа: *в первоначально непрерывном движении со временем могут возникать сильные разрывы*.

Применение этих выводов к простым волнам дает особенно красивые результаты. Например, в простой l -волне вдоль прямолинейных характеристик семейства C_+ подынтегральное выражение в (36) сохраняет постоянное значение, равное его значению при $t = 0$, в силу чего эта формула упрощается до следующей:

$$R = \frac{R_0}{1 + R_0 \frac{m_0 + 2}{4} t}. \quad (41)$$

Здесь при $R_0 < 0$ градиентная катастрофа неизбежна, причем в момент времени, определяемый непосредственно по начальным данным:

$$t_k = -\frac{4}{(m_0 + 2)R_0} \quad (R_0 < 0). \quad (42)$$

Этот результат согласуется с выводами о поведении простых волн, полученными вслед за теоремой 3. Неравенство $R = r_x < 0$ в простой l -волне равносильно неравенству $(u + c)_x < 0$. В силу теоремы 3 это означает, что характеристика C_+ , на которой в момент времени (42) наступает градиентная катастрофа, принадлежит волне сжатия. Аналогичные результаты справедливы для простых r -волн.

Плоскость инвариантов Римана. При изучении гладких изэнтропических движений газа с плоскими волнами, носящих общий характер,

иногда с успехом используется метод перехода в уравнениях (13) к независимым переменным — инвариантам Римана. Это возможно, если на данном (или на искомом) решении из системы уравнений

$$r = r(x, t), \quad l = l(x, t)$$

можно однозначно выразить величины x и t как функции переменных r и l :

$$x = x(r, l), \quad t = t(r, l). \quad (43)$$

В таких случаях говорят о преобразовании плоскости событий $R^2(x, t)$ в плоскость инвариантов Римана $R^2(r, l)$:

$$R^2(x, t) \rightarrow R^2(r, l). \quad (44)$$

Достаточным условием локальной взаимной однозначности преобразования (44) является отличис от нуля якобиана

$$j = \frac{\partial(r, l)}{\partial(x, t)} = \begin{vmatrix} r_x & r_t \\ l_x & l_t \end{vmatrix}.$$

В силу уравнений (13) для этого якобиана получается выражение

$$j = 2cr_x l_x. \quad (45)$$

Отсюда видно, что на данном движении газа при $c \neq 0$ тождественное равенство $j = 0$ возможно для трех типов движения. Если $r_x = 0$, то из (13) следует, что также $r_t = 0$, в силу чего инвариант r тождественно постоянен. По теореме 1 непостоянное движение этого типа есть простая r -волна. Аналогично, если $l_x = 0$, то непостоянное движение есть простая l -волна. Наконец, если одновременно $r_x = 0$ и $l_x = 0$, то движение является постоянным. Эти выводы согласуются с тем, что область на плоскости событий, занятая простой r -волной, изображается на плоскости инвариантов Римана линией $r = r_0$, область простой l -волны — линией $l = l_0$, а область постоянного движения — одной точкой $(r, l) = (r_0, l_0)$. За исключением этих особых случаев, преобразование (44) отображает область движения на некоторую область плоскости $R^2(r, l)$.

Вывод уравнений для функций (43) можно выполнить разными способами. Проще всего заметить, что так как вдоль характеристики C_+ меняется только инвариант Римана l , то ее уравнение $dx = (u + c)dt$ равносильно уравнению $x_l = (u + c)t_l$. Аналогично, вдоль C_- меняется только r и

получается уравнение $x_r = (u - c)t_r$. Следовательно, искомые уравнения движения на плоскости инвариантов Римана таковы:

$$\begin{aligned}x_l &= (u + c)t_l, \\x_r &= (u - c)t_r,\end{aligned}\tag{46}$$

где индексами обозначены частные производные по r и l , а величины u и c являются, согласно (10), известными функциями независимых переменных (r, l) . Так как система уравнений (46) *линейна*, то тем самым установлен важный факт: уравнения одномерных изэнтропических движений с плоскими волнами допускают *точную линеаризацию*; она достигается преобразованием на плоскость инвариантов Римана.

После исключения величины x (путем перекрестного дифференцирования и вычитания) система (46) сводится к специального вида линейному однородному дифференциальному уравнению с частными производными второго порядка — *уравнению Дарбу*:

$$t_{rl} - H(r \cdot l)(t_r - t_l) = 0.\tag{47}$$

Здесь известная функция $H(z)$ определена параметрически:

$$z = 2\sigma(c), \quad H(z) = \frac{m(c) + 2}{8c},\tag{48}$$

с параметром c , где $m = m(c)$ есть величина (2.22), рассматриваемая как функция от c . Для политропного газа справедлива формула

$$H(r \cdot l) = \frac{\beta}{r - l}, \quad \beta = \frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)},\tag{49}$$

причем уравнение (47) становится *уравнением Эйлера – Пуассона*:

$$t_{rl} - \frac{\beta}{r - l}(t_r - t_l) = 0.\tag{50}$$

При решении краевых задач для уравнения (47) полезно иметь в виду следующие формулы, справедливые с величиной $h = \rho c$, которая рассматривается как функция от $z = r \cdot l$:

$$\frac{\partial}{\partial r}(u + c) = \frac{\partial}{\partial l}(u - c) = c \frac{\partial}{\partial z} \ln h, \quad H = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \ln h.\tag{51}$$

Здесь существенно то, что в силу последней из этих формул уравнение (47) записывается в *самосопряженной* форме:

$$(ht_l)_r + (ht_r)_l = 0.\tag{52}$$

Взаимодействие центрированных волн. Рассматривается задача о взаимодействии, дающая пример применения метода расчета движения газа путем решения уравнения (52). Простейшая постановка задачи такова. При $t = 0$ на интервале $x_1 \leq x \leq x_2$ задано постоянное решение $u = u_0$, $c = c_0$; простые волны, которые согласно теореме 2 должны примыкать к этому постоянному движению, предполагаются центрированными в точках $A(x_1, 0)$ и $B(x_2, 0)$. Требуется описать движение газа после того, как эти центрированные простые волны вступят во взаимодействие.

Качественная геометрическая картина движения на плоскости событий показана на рис. 4. Характеристики AM и BM с уравнениями, соответственно,

$$x = x_1 + (u_0 + c_0)t, \quad x = x_2 + (u_0 - c_0)t$$

ограничивают область постоянного решения. В области AMP находится простая l -волна, центрированная в точке A , а в области BMQ — простая r -волна, центрированная в точке B . В этих областях решение описывается формулами вида (19), (20). Областью взаимодействия является криволинейный четырехугольник $PMQR$, в котором и надо найти решение. Так как характеристики MP и MQ и распределения вдоль них искомых величин известны из описания центрированных волн, то рассматриваемая задача сводится к задаче Гурса (см. § 7).

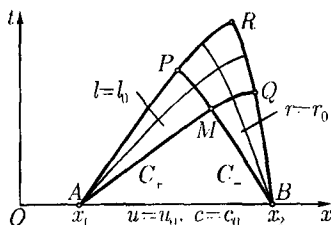


Рис. 4

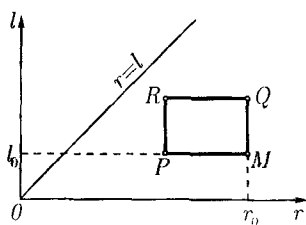


Рис. 5

Для ее решения необходимо построить образ движения при отображении (44) на плоскость инвариантов Римана. Координаты точки $M(r_0, l_0)$ таковы:

$$r_0 = u_0 + \sigma(c_0), \quad l_0 = u_0 - \sigma(c_0).$$

Вдоль MP справедливы равенства

$$l = l_0, \quad r = l_0 + 2\sigma(c).$$

и так как эта характеристика принадлежит волне разрежения («ручка всера» снизу), то скорость звука c , а потому и инвариант r убывают при перемещении от M к P . Аналогично, вдоль MQ

$$r = r_0, \quad l = r_0 - 2\sigma(c),$$

и по тем же соображениям при перемещении от M к Q инвариант l возрастает. Кроме того, $r = \text{const}$ вдоль PR , так как это — характеристика C_+ , и $l = \text{const}$ вдоль QR , так как это — характеристика C_- . Следовательно, образ области $PMQR$ на плоскости $R^2(r, l)$ есть прямоугольник, показанный на рис. 5.

Граничные условия для функции $t = t(r, l)$ определены на характеристиках MP и MQ , вдоль которых искомое решение примыкает к известному. В точках пересечения линии MP с характеристиками C_+ простой l -волны

$$x = x_1 + (u + c)t.$$

Дифференцирование этого уравнения вдоль MP по переменному r с учетом того, что MP есть характеристика C_- и вдоль нее $x_r = (u - c)t_r$, дает уравнение

$$(u - c)t_r = (u + c)t_r + t(u + c)_r,$$

которое в силу (51) упрощается до следующего:

$$2t_r = -t \frac{\partial}{\partial t} \ln h,$$

и с начальным условием $t = t_0$ при $r = r_0$ интегрируется явно:

$$t(r, l_0) = t_0 \sqrt{\frac{h(r_0 - l_0)}{h(r - l_0)}}, \quad (53)$$

где $t_0 = t(r_0, l_0)$ есть значение t в точке M . Аналогично, вдоль MQ

$$x = x_2 + (u - c)t$$

и $x_l = (u + c)t_l$, так что после дифференцирования по l

$$(u + c)t_l = (u - c)t_l + t(u - c)_l,$$

и в результате упрощения с использованием (51) получается уравнение

$$2t_l = -t \frac{\partial}{\partial l} \ln h,$$

которое с начальным условием $t = t_0$ при $l = l_0$ тоже интегрируется явно:

$$t(r_0, l) = t_0 \sqrt{\frac{h(r_0 - l_0)}{h(r_0 - l)}}. \quad (54)$$

Метод Римана. Итак, требуется найти решение уравнения (52) в прямоугольнике $PMQR$, если значения решения заданы на двух его сторонах — характеристиках этого уравнения: значения (53) на характеристике MP и значения (54) на характеристике MQ . Следовательно, задача свелась к задаче Гурса для линейного уравнения (52). Решение этой красивой задачи следует из общей теории линейных уравнений второго порядка гиперболического типа и может быть получено, например, *методом Римана*, если для уравнения (52) известна *функция Римана*.

Оказывается, что в данном случае решение задачи (53), (54) просто совпадает с функцией Римана уравнения (52) с точностью до постоянного множителя. Действительно, функция Римана $W(r, l; r_0, l_0)$ должна быть, как функция переменных (r, l) , решением того же уравнения (52) в силу его самосопряженности и должна удовлетворять следующим красивым условиям: на характеристике $r = r_0$ — условию

$$2hW_l + h_l W = 0$$

и на характеристике $l = l_0$ — условию

$$2hW_r + h_r W = 0.$$

Эти условия легко интегрируются и, если еще принять во внимание условие нормировки $W(r_0, l_0; r_0, l_0) = 1$, то дают значения

$$\begin{aligned} W(r_0, l; r_0, l_0) &= \sqrt{\frac{h(r_0 - l_0)}{h(r_0 - l)}}, \\ W(r, l_0; r_0, l_0) &= \sqrt{\frac{h(r_0 - l_0)}{h(r - l_0)}}, \end{aligned} \quad (55)$$

которые совпадают, с точностью до множителя t_0 , соответственно с (54), (53). Поэтому в силу единственности решения задачи Гурса функция

$$t(r, l) = t_0 W(r, l; r_0, l_0) \quad (56)$$

даст решение поставленной задачи о взаимодействии центрированных волн.

Конечно, функцию Римана еще надо построить. Для этого существуют различные методы, изложение и применение которых выходит за рамки данных лекций. Полезно отметить лишь то, что в случае политропного газа, когда основное уравнение имеет вид (50), функцию Римана можно найти в явной аналитической форме:

$$W(r, l; r_0, l_0) = \frac{(r_0 - l_0)^{2\beta}}{(r - l_0)^\beta (r_0 - l)^\beta} F\left(\beta, \beta; 1; \frac{(r_0 - r)(l - l_0)}{(r - l_0)(r_0 - l)}\right), \quad (57)$$

где $F(\beta, \beta; 1; y)$ есть гипергеометрическая функция Гаусса, представляемая в виде сходящегося ряда. Если использовать формулу преобразования

$$F(\beta, \beta; 1; y) = (1 - y)^{-\beta} F\left(\beta, 1 - \beta; 1; \frac{y}{y - 1}\right),$$

то можно усмотреть, что при целых положительных значениях числа β этот ряд представляет элементарную функцию. С учетом выражения (49) для β отсюда следуют значения показателя адиабаты

$$\gamma = \frac{2k + 1}{2k - 1} \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (58)$$

для которых функция Римана, а потому и решение задачи о взаимодействии выражаются через элементарные функции.

§ 17. Распад произвольного разрыва

Возникновение градиентной катастрофы в неравномерных движениях газа является скорее правилом, чем исключением. Как было выяснено в предыдущем параграфе, для ее предотвращения должны выполняться специальные ограничения, связанные со знаками градиентов инвариантов Римана. Так или иначе, в момент наступления градиентной катастрофы основные величины становятся разрывными и при дальнейшем продолжении движения оно будет, вообще говоря, содержать сильные разрывы. Тем самым возникает необходимость изучить и описать обобщенные движения газа (см. определение 4.1), определяемые разрывными начальными данными. В ее полном объеме эта большая задача газовой динамики на решена до настоящего времени даже для одномерных движений с плоскими волнами.

Простейшая из такого сорта задач — когда в начальных данных имеется всего одна точка разрыва первого рода основных величин, которые по обе стороны от точки разрыва постоянны, различны и не связаны априори

никакими соотношениями. В связи с тем, что сложное движение, возникающее из таких начальных данных, содержит несколько распространяющихся в разные стороны сильных и слабых разрывов, эта задача получила название *задачи о распаде произвольного разрыва*. Следует отметить, что эта простейшая задача интересна не только сама по себе. На самом деле, исторически (ссылки можно найти, например, в [6]) она послужила тем элементом, на основе которого были созданы высокоэффективные методы численного расчета произвольных одномерных движений газа и развиты качественные математические методы доказательства теорем существования и единственности более широких классов обобщенных решений. Ниже дается полное решение этой задачи для одномерных движений с плоскими волнами.

Постановка задачи. Для уравнений одномерного движения газа с плоскими волнами задаются при $t = 0$ начальные данные вида

$$\begin{aligned} u(x, 0) = u_1, \quad \rho(x, 0) = \rho_1, \quad p(x, 0) = p_1 \quad (x < 0); \\ u(x, 0) = u_2, \quad \rho(x, 0) = \rho_2, \quad p(x, 0) = p_2 \quad (x > 0), \end{aligned} \quad (1)$$

где $u_1, \rho_1, p_1, u_2, \rho_2, p_2$ — заданные постоянные. При этом допускается, что газ в состоянии «1» ($x < 0$) и газ в состоянии «2» ($x > 0$) имеют различную физическую природу, т. е. разные уравнения состояния. Предполагается, что оба газа являются нормальными (определение 2.2). Требуется найти решение (вообще говоря, обобщенное) при $t > 0$.

Задача (1), очевидно, конически автомодельна (см. § 13). Поэтому ее можно решать в классе *автомодельных* решений (см. § 13 и § 20), имеющих представление

$$u = u(\lambda), \quad \rho = \rho(\lambda), \quad p = p(\lambda); \quad \lambda = x/t. \quad (2)$$

Согласно (2) распределения основных величин по пространству (по координате x) в любой момент времени $t > 0$ получаются из одного такого распределения при $t = 1$ простым изменением масштаба по оси x (растяжением координаты x). Так как в решении вида (2) основные величины постоянны вдоль каждого луча $\lambda = \text{const}$, то его изображение на плоскости событий $R^2(x, t)$ должно состоять из секторов с вершиной в начале координат, определяемых неравенствами вида $\lambda' < \lambda < \lambda''$, внутри которых движение гладкое, а границы представляют собой линии сильного или слабого разрыва. При этом, если гладкое движение в некотором секторе не постоянно, то оно должно быть простой волной, линиями уровня которой являются лучи $x = \lambda t$. Следовательно, такой сектор с необходимостью образован центрированной (в точке $(0, 0)$) простой волной разрежения. Один из возможных типов решения показан на рис. 1.

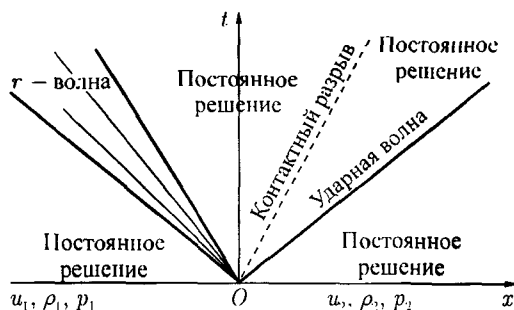


Рис. 1

Направление обращения волн. В связи с тем что решение может включать простые и ударные волны, бегущие в разных направлениях, для дальнейшего анализа целесообразно фиксировать некоторые конкретные правила и термины, учитывающие специфику одномерного движения. Прежде всего, ось x считается расположенной горизонтально и направленной слева направо. Нормаль к фронту ударной волны (в пространстве R^3 — к плоскости, перпендикулярной оси x) выбирается раз навсегда направленной в положительном направлении оси x . Поэтому в уравнениях ударного перехода всегда будет $u_n = u$ и $D_n = D$. Если состояние перед фронтом находится справа (соответственно, слева) от него, то говорят, что *ударная волна обращена вправо* (соответственно, *обращена влево*). Далее, так как через любую звуковую характеристику газ течет, то у нее также есть передняя сторона и задняя сторона и можно различать состояния перед характеристикой и за характеристикой (соответственно, справа и слева от нее). Очевидно, что всякая характеристика C_+ всегда обращена вправо, а всякая характеристика C_- всегда обращена влево. Простая волна называется *обращенной вправо* (обращенной влево), если ее прямолинейные характеристики обращены вправо (соответственно, влево). Согласно предыдущему выводу, всегда простая l -волна *обращена вправо*, а простая r -волна *обращена влево*. Ввиду того, что каждая простая волна имеет конечную протяженность в направлении оси x , говорят также о состоянии движения *перед простой волной* и о состоянии движения *за простой волной*.

Метод (u, p) -диаграмм. При решении задачи о распаде разрыва (а также и в некоторых других вопросах) используется специальный метод построения и анализа так называемых (u, p) -диаграмм как для простых, так

и для ударных волн. Эти диаграммы описывают *состояния движения* (u, p) , в которые может перейти данное состояние движения (u_0, p_0) в результате прохождения какой-либо волны, в предположении, что фиксировано также некоторое значение энтропии S_0 . При этом плоскость $R^2(u, p)$ называется *плоскостью состояний движения*.

Определение 1. (u, p) -диаграммой *простых волн*, с центром (u_0, p_0) называется геометрическое место точек плоскости состояний движения, изображающих всевозможные состояния (u, p) за простыми волнами, имеющими состояние (u_0, p_0) перед волной.

Уравнения простых волн (16.16) и (16.17) показывают, что (u, p) -диаграмма простых волн есть некоторая линия, уравнение которой получается, если величину σ рассматривать как функцию давления p , т. е. $\sigma = \sigma(p)$. Тогда уравнение (u, p) -диаграммы с центром (u_0, p_0) простых r -волн запишется в виде

$$u + \sigma(p) = u_0 + \sigma(p_0), \quad (3)$$

а для простых l -волн — в виде

$$u - \sigma(p) = u_0 - \sigma(p_0). \quad (4)$$

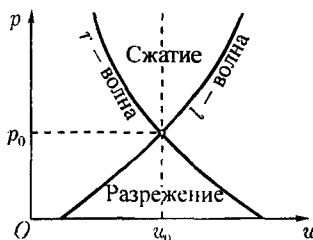


Рис. 2

Полная (u, p) -диаграмма простых волн показана на рис. 2. Ветви, на которых $p > p_0$, соответствуют волнам сжатия, а ветви, на которых $p < p_0$, — волнам разрежения. Ясно, что эта диаграмма симметрична относительно прямой $u = u_0$. Важные для дальнейшего выражения первой и второй производных от u по p легко вычисляются исходя из определения (16.4) и, с величиной m из (2.22), даются формулами

$$\frac{du}{dp} = \frac{1}{\rho c}, \quad \frac{d^2 u}{dp^2} = -\frac{m+2}{2\rho^2 c^3}. \quad (5)$$

Определение 2. (u, p) -диаграммой *ударных волн* с центром (u_0, p_0) называется геометрическое место точек плоскости состояний движения, изображающих всевозможные состояния (u, p) , в которые состояние (u_0, p_0) (при фиксированном значении энтропии S_0) может перейти в ударных волнах. При этом не предполагается, что состояние (u_0, p_0) находится перед волной.

Уравнения (u, p) -диаграммы ударных волн вытекают из уравнения ударного перехода (4.17) и уравнения адиабаты Гюгонио. В уравнении (4.17)

надо индекс «1» заменить индексом «0», убрать индекс «2» и заметить, что $v - v_0 = u - u_0$ в силу определения (4.11), после чего это уравнение примет вид

$$(u - u_0)^2 = (p - p_0)(V_0 - V).$$

Входящая сюда величина V является функцией p , определяемой адиабатой Гюгонио с центром (V_0, p_0) . Эта функция, введенная равенством (5.1) и исследованная в § 5, здесь имеет вид

$$V = W(p; V_0, p_0). \quad (6)$$

Подстановка выражения (6) в предыдущее уравнение и дает уравнение (u, p) -диаграммы ударных волн

$$(u - u_0)^2 = (p - p_0)(V_0 - W(p; V_0, p_0)). \quad (7)$$

Входящая сюда величина V_0 однозначно определяется значением p_0 из уравнения состояния $p_0 = g(V_0, S_0)$, так как значение S_0 предполагается закрепленным.

Необходимо иметь в виду, что (u, p) -диаграммы простых волн и ударных волн с данным центром (u_0, p_0) меняются при изменении энтропии S_0 (или удельного объема V_0) и, следовательно, образуют однопараметрическое семейство (с параметром S_0 или V_0).

Непосредственно из (7) видно, что (u, p) -диаграмма ударных волн симметрична относительно прямой $u = u_0$. Дифференцирование уравнения (7) один и два раза дает соотношения

$$2(u - u_0) \frac{du}{dp} = V_0 - W - (p - p_0) \frac{dW}{dp}, \quad (8)$$

$$2(u - u_0) \frac{d^2 u}{dp^2} + 2 \left(\frac{du}{dp} \right)^2 = -2 \frac{dW}{dp} - (p - p_0) \frac{d^2 W}{dp^2}. \quad (9)$$

Соотношение (9) в точке (u_0, p_0) приводит к формуле

$$\left(\frac{du}{dp} \right)_0^2 = - \left(\frac{dW}{dp} \right)_0 = \frac{1}{\rho_0^2 c_0^2}, \quad (10)$$

где последнее равенство следует из (5.7). Это дает два различных, отличающихся знаком, значения для производной du/dp в центре (u_0, p_0) . Поэтому (u, p) -диаграмма (7) состоит из двух ветвей, пересекающихся в ее

центре под конечным углом. Далее, в силу (7), из (8) получается неравенство

$$(u - u_0)(p - p_0) \frac{du}{dp} > 0. \quad (11)$$

Отсюда и из теоремы 5.1 следует, что каждая из ветвей есть монотонная кривая, вдоль которой принимаются все значения давления, $0 < p < \infty$. Кинематическое различие этих ветвей выясняется с помощью закона сохранения массы в ударном переходе

$$(u - D)V_0 = (u_0 - D)V, \quad (12)$$

который можно преобразовать к следующему виду:

$$(u - u_0)V_0 = (D - u_0)(V_0 - V).$$

Отсюда следует, что знак произведения $(u - u_0)(p - p_0)$ совпадает со знаком величины $D - u_0$, который определяется тем, куда обращена ударная волна. Именно, всегда $D > u_0$ для волн, обращенных вправо, и $D < u_0$ для волн, обращенных влево. В силу неравенства (11) это означает, что ветвь (u, p) -диаграммы, на которой $du/dp > 0$, соответствует волнам, обращенным вправо, а ветвь $du/dp < 0$ — волнам, обращенным влево. Полная (u, p) -диаграмма ударных волн показана на рис. 3.

Значение производной d^2u/dp^2 в центре (u_0, p_0) вычисляется путем дифференцирования соотношения (9) и после преобразований с учетом формулы (5.7) и обозначения (2.22) оказывается таким (для ветви с $du/dp > 0$):

$$\left(\frac{d^2u}{dp^2} \right)_0 = -\frac{m_0 + 2}{2\rho_0^2 c_0^2}. \quad (13)$$

Сравнение формул (10) и (13) с (5) показывает, что (u, p) -диаграммы простых и ударных волн с общим центром (u_0, p_0) имеют в точке (u_0, p_0) одинаковый наклон и одинаковую кривизну, т. е. имеют касание второго порядка.

В политропном газе, в силу уравнения (4.21), функция (6) такова:

$$V = V_0 \frac{(\gamma - 1)p + (\gamma + 1)p_0}{(\gamma + 1)p + (\gamma - 1)p_0}, \quad (14)$$

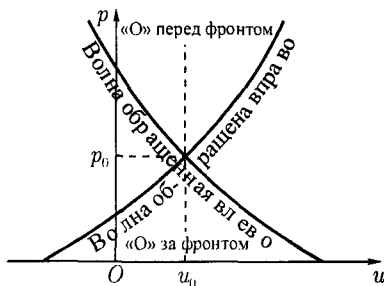


Рис. 3

Поэтому в политропном газе (u, p) -диаграмма ударных волн описывается элементарными уравнениями каждой из ветвей

$$u = u_0 \pm (p - p_0) \sqrt{\frac{2V_0}{(\gamma - 1)p + (\gamma - 1)p_0}}, \quad (15)$$

где знак «+» берется для волн, обращенных вправо, и знак «-» для волн, обращенных влево.

Существование и единственность автомодельного решения. Основной качественный результат формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Задача о распаде произвольного разрыва в нормальном газе при любых начальных данных (1) имеет одно и только одно автомодельное решение вида (2).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме единственности 15.1 в некоторой окрестности полуоси $x < 0$ решение постоянно: $u = u_1$, $\rho = \rho_1$, $p = p_1$. Это решение может измениться либо непрерывным образом в некоторой центрированной r -волне разрежения, либо через ударную волну, обращенную влево. Этим изменениям соответствуют (u, p) -диаграммы, состоящие из правой нижней ветви на рис. 2 и левой верхней ветви на рис. 3. Их совмещение на одном чертеже дает (u, p) -диаграмму возможных состояний, в которые может перейти состояние 1 (рис. 4). Аналогично строится (u, p) -диаграмма возможных состояний, в которые может перейти состояние 2 посредством волн, обращенных вправо (рис. 5). Если обе эти диаграммы совместить на одном чертеже, то они обязательно пересекутся, и притом только в одной точке. Этот факт вытекает из свойств нормального газа и адиабаты Гюгонио (теорема 5.1), в силу которых эти диаграммы определены в интервале $0 < p < \infty$ и монотонны, причем вдоль (u, p) -диаграммы ударных волн $|u| \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$. Исключением является лишь тот случай, когда точка a_1 оказывается лежащей левее точки a_2 . Всего имеется 10 типов случаев в зависимости от того, на какие части (ударного У или непрерывного П перехода) (u, p) -диаграмм возможных состояний попадет точка пересечения.

Утверждается, что точка пересечения (u_3, p_3) даст решение. Действительно, оба газа после переходов 1-3 или 2-3 имеют в состоянии 3 одинаковую скорость u_3 и одинаковое давление p_3 . Поэтому их можно связать контактным разрывом, идущим по лучу $x = u_3 t$, вдоль которого могут претерпевать разрыв плотность ρ и энтропия S . Полный перечень всех 10 возможных типов конфигураций распада произвольного разрыва дан на рис. 6-15, где пунктиром на плоскости $R^2(x, t)$ показана траектория $x = u_3 t$. Необходимо доказать еще, что луч $\lambda = u_3$ всегда идет в секторе между задними фронтами волн, осуществляющих переходы 1-3 и 2-3.

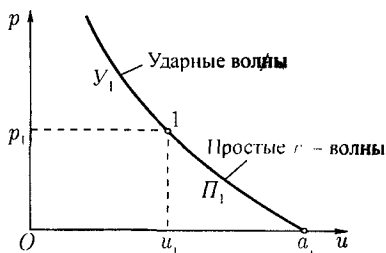


Рис. 4

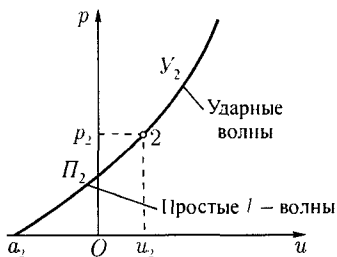


Рис. 5

Это проверяется непосредственно для каждого из типов распада разрыва. Например, в случае, показанном на рис. 7, ударная волна обращена влево и потому для нее $D < u_1$. Поэтому из соотношения $\rho_1(D - u_1) = \rho_3(D - u_3)$ следует, что $D < u_3$. Далее, на задней стороне центрированной l -волны $\lambda_3 = u_3 - c_3 > u_3$, и этот случай исчерпан.

В предыдущих рассуждениях предполагалось, что $\rho_1 > 0$ и $\rho_2 > 0$. Однако, если $\rho_1 = 0$, то состояние 1 есть состояние вакуума, и тогда решение дается правой половиной рис. 15. Аналогично, если $\rho_2 = 0$, то решение дается левой половиной рис. 15 (пунктиром показаны граничные линии вакуума). Тем самым существование решения доказано.

Доказательство единственности автомодельного решения основано на замечании, что в таком решении не может быть двух различных характеристик C_0 (траекторий) в виде лучей $x = \lambda t$. Точнее, две контактные характеристики этого вида возможны только в том случае, если между ними находится область вакуума (рис. 15). Действительно, если $x = \lambda' t$ и $x = \lambda'' t$ — две траектории и $\lambda' < \lambda''$, то заключенная между ними масса равна

$$\int_{\lambda' t}^{\lambda'' t} \rho \left(\frac{x}{t} \right) dx = t \int_{\lambda'}^{\lambda''} \rho(\lambda) d\lambda.$$

Согласно интегральному закону сохранения массы (1.3) эта величина не должна зависеть от t , что возможно, только если интеграл равен нулю, т. е. $\rho(\lambda) = 0$ в интервале $\lambda' < \lambda < \lambda''$. Но если есть лишь одна C_0 -характеристика $x = u_3 t$, то состояния по каждую ее сторону (различные, если вдоль нее есть сильный контактный разрыв) могут получиться из состояния 1 только с помощью волн, обращенных влево, а из состояния 2 — только с помощью волн, обращенных вправо. Утверждается, что в автомодельном решении не может быть двух последовательных волн (простых

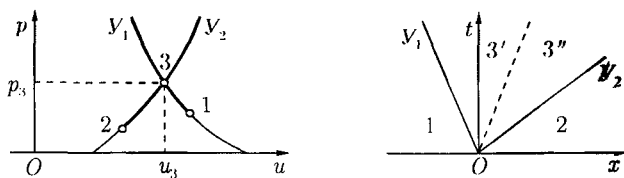


Рис. 6

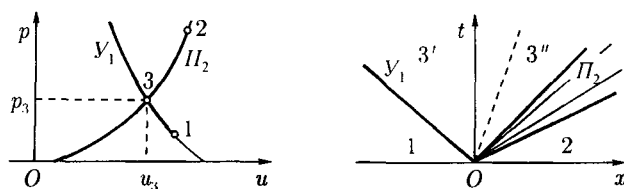


Рис. 7

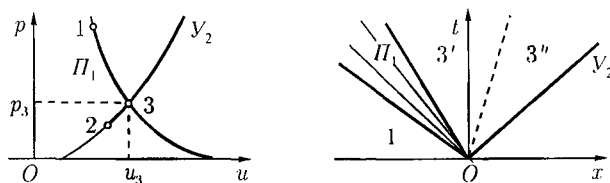


Рис. 8

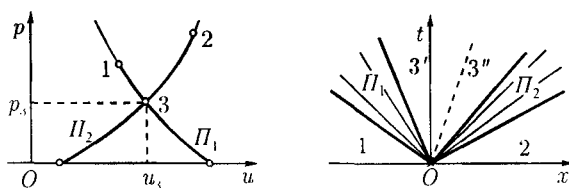


Рис. 9

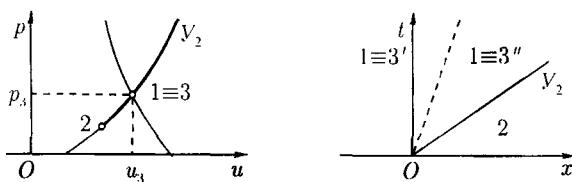


Рис. 10

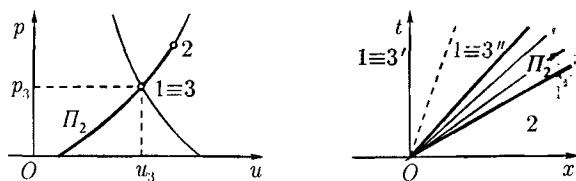


Рис. 11

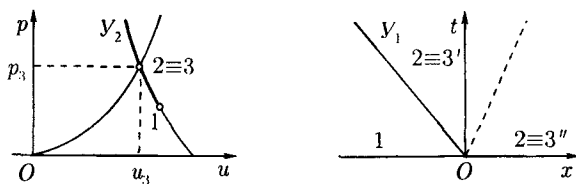


Рис. 12

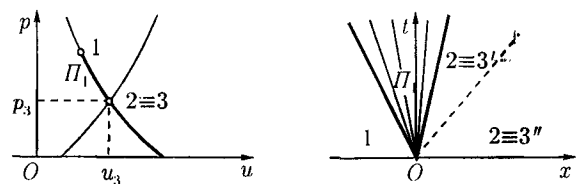


Рис. 13

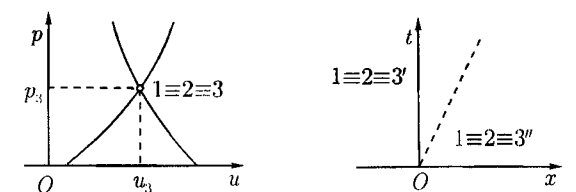


Рис. 14

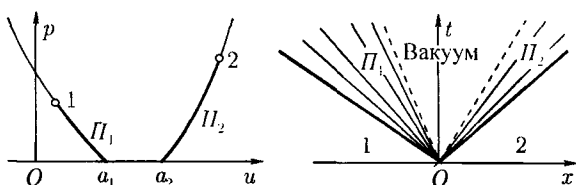


Рис. 15

или ударных), обращенных в одну сторону. Например (рис. 16), если бы существовали две ударные волны, обращенные вправо, идущие со скоростями $D_1 > D'_1$, то должны были бы выполняться неравенства

$$D_1 > u'_1, \quad D'_1 > u'_1.$$

Тогда в силу теоремы Цемплена (теорема 5.4) было бы

$$D_1 - u'_1 < c'_1, \quad D'_1 - u'_1 > c'_1,$$

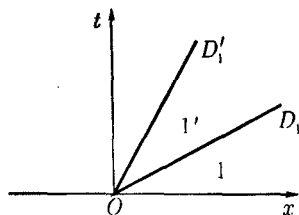


Рис. 16

откуда $D_1 < D'_1$, что противоречит предположению. Остальные возможные комбинации рассматриваются аналогично. Но если с каждой стороны от траектории $x = u_3 t$ возможна лишь одна волна, то она должна определяться точкой 3 пересечения (u, p) -диаграмм переходов из состояния 1, обращенных влево, и из состояния 2, обращенных вправо. В противном случае были бы нарушены условия на контактном разрыве $x = u_3 t$. Поэтому нет никаких других, кроме перечисленных выше, конфигураций распада произвольного разрыва. ■

Фактически расчет распада разрыва выполняется с помощью уравнений (u, p) -диаграмм (3), (4) и (7). С этой целью рассматриваются функции, описывающие соответствующие ветви (u, p) -диаграмм: для переходов из состояния 1 (рис. 4)

$$F_1(p) = \begin{cases} u_1 - \sqrt{(p - p_1)(V_1 - W(p; V_1, p_1))} & (p \geq p_1), \\ u_1 + \sigma(p, V_1) - \sigma(p_1, V_1) & (p \leq p_1) \end{cases}$$

и для переходов из состояния 2 (рис. 5)

$$F_2(p) = \begin{cases} u_2 + \sqrt{(p - p_2)(V_2 - W(p; V_2, p_2))} & (p \geq p_2), \\ u_2 - \sigma(p, V_2) + \sigma(p_2, V_2) & (p \leq p_2). \end{cases}$$

Тогда значение $p = p_3$ определяется как единственный корень уравнения

$$F_1(p) = F_2(p). \quad (16)$$

после чего находится величина $u_3 = F_1(p_3)$.

Акустическое приближение. Метод (u, p) -диаграмм применим для анализа и решения многих конкретных задач с сильными разрывами. При относительно небольших значениях скачков $[u]$, $[\rho]$ и $[p]$ на практике успешно используется *акустическое приближение*. Оно состоит в том, что кривая (u, p) -диаграммы заменяется прямой — касательной к ней в ее центре. При этом важно, что (u, p) -диаграммы простых и ударных волн касаются друг друга, в силу чего угловой коэффициент аппроксимирующих прямых одинаков для обоих типов волн. В акустическом приближении с величиной импеданса $h = \rho c$ уравнения (u, p) -диаграмм с центром (u_0, p_0) , в силу формул (5) или (10), записываются в следующем виде: для волн, *обращенных вправо*,

$$p - h_0 u = p_0 - h_0 u_0 \quad (17)$$

и для волн, *обращенных влево*,

$$p + h_0 u = p_0 + h_0 u_0, \quad (18)$$

где $h_0 = \rho_0 c_0$ есть значение импеданса в центре (u, p) -диаграммы.

§ 18. Семь задач

Одномерное движение с плоскими волнами можно, интерпретировать как модель движения газа в цилиндрической трубе, в каждом сечении которой в любой фиксированный момент времени основные величины постоянны по сечению. С точки зрения ее практического использования такая интерпретация, конечно, нуждается в оговорке насчет трения о стенки трубы, которого нет в модели невязкого газа, но которое есть в природе. Эксперимент показывает, что для быстротекающих процессов и на коротких участках трубы это приближение является удовлетворительным. Так или иначе, принятая в данном параграфе трактовка одномерного движения газа как его движения в трубе может рассматриваться как формальная, вводимая для большей наглядности получаемых результатов.

Здесь дается анализ и решение простейших задач с участием распадов разрывов, объединяемых общим понятием *задач о взаимодействиях*. Описываемые в них ситуации часто встречаются на практике в качестве элементов более сложных газодинамических процессов. Используется развитый в § 17 метод (u, p) -диаграмм. Без дальнейших оговорок труба предполагается расположенной горизонтально, вдоль оси x , а все газы — нормальными, с известными уравнениями состояния.

Работа ударной трубы. Два покоящихся газа разделены заслонкой в сечении $x = 0$. Газ 1 с параметрами ρ_1, p_1 находится под высоким давлением, а газ 2 с параметрами ρ_2, p_2 — под низким, так что $p_1 > p_2$ (рис. 1).

В момент времени $t = 0$ заслонка мгновенно убирается. Требуется описать последующее движение газов и дать расчет его параметров для $t > 0$.

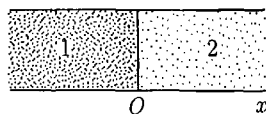


Рис. 1

В этой постановке задача об ударной трубе является частным случаем задачи о распаде произвольного разрыва. Соответствующие (u, p) -диаграмма и возникающая на плоскости событий конфигурация волн аналогичны случаю рис. 17.8 и в уточненном виде показаны на рис. 2. Расчет должен дать скорость ударной волны D , идущей по газу низкого давления, скорость u_3 и

давление p_3 в постоянном движении за этой ударной волной, а также плотности газов ρ'_3 и ρ''_3 в этой области по разные стороны контактного разрыва.

Согласно (u, p) -диаграмме рис. 2 точка (u_3, p_3) находится из уравнений (17.3) и (17.7), точнее, в результате решения системы конечных уравнений

$$\begin{aligned} u_3 + \sigma(p_3) &= \sigma(p_1), \\ u_3 &= \sqrt{(p_3 - p_2)(V_2 - W(p_3; V_2, p_2))}. \end{aligned} \quad (1)$$

Затем по адиабате Пуассона для состояния 1 определяется удельный объем V'_3 и по адиабате Гюгонио с центром (V_2, p_2) — удельный объем V''_3 :

$$p_3 = g(V'_3, S_1), \quad V''_3 = W(p_3; V_2, p_2). \quad (2)$$

Наконец, скорость ударной волны находится из закона сохранения массы (17.12), который в данном случае приводит к формуле

$$D = \frac{V_2}{V_2 - V''_3} u_3. \quad (3)$$

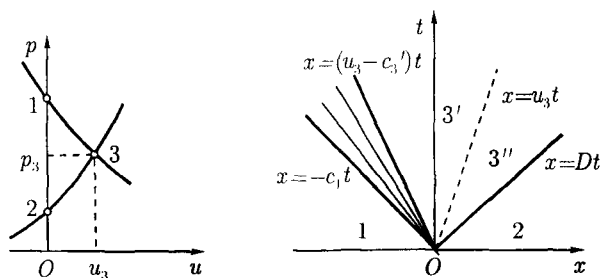


Рис. 2

Ударные трубы широко применяются в газодинамических экспериментах для создания высокоскоростного потока, который получается в области 3. В акустическом приближении с помощью уравнений (17.17) и (17.18) для скорости u , получается значение

$$u_3 = (p_1 - p_2)/(h_1 + h_2),$$

где h_1 и h_2 — импедансы (17.16) газов 1 и 2. Увеличение скорости потока за счет повышения давления p_1 затрудняется тем, что с ростом p_1 , вообще говоря, растет и импеданс h_1 . Однако влияние этого фактора может быть уменьшено, если в состоянии 1 одновременно с повышением давления газ сильно охлаждать.

Задача о поршне. В сечении $x = 0$ труба перекрыта поршнем, справа от которого находится покоящийся газ с параметрами ρ_1, p_1 (рис. 3). В момент времени $t = 0$ поршень начинает двигаться с постоянной скоростью U . Требуется описать последующее движение и дать расчет его параметров для $t > 0$.

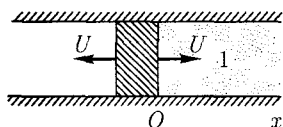


Рис. 3

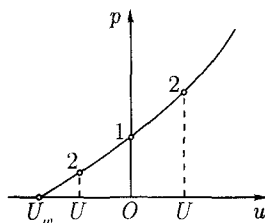


Рис. 4

Эта задача, в отличие от рассмотренных ранее, является задачей с граничным условием, так как скорость частиц газа, прилегающих к поршню, должна быть равна скорости поршня (см. §, 7):

$$u(Ut, t) = U. \quad (4)$$

Здесь постоянное значение (4) задано на прямой $x = Ut$, в силу чего задача конически автомодельна (см. § 13) и ее решение можно искать в виде $u = u(\lambda)$, $p = p(\lambda)$, где $\lambda = x/t$. Единственность такого решения доказывается с помощью тех же соображений, которые были использованы в доказательстве теоремы 17.1.

Так как переход из состояния 1 в составе 2 должен осуществляться волнами, обращенными вправо, то (u, p) -диаграмма этого перехода будет

такой, как на рис. 4. Характер возникающего движения определяется знаком величины U . Если $U > 0$ (поршень движется в сторону газа), то в газ идет опережающая поршень ударная волна, за которой образуется область постоянного движения газа со скоростью, равной скорости поршня U . Если же $U < 0$ (поршень выдвигается, отходя от газа), то газ переводится из состояния покоя в состояние постоянного движения со скоростью поршня посредством центрированной l -волны разрежения. Плоскость событий для обоих вариантов показана на рис. 5.

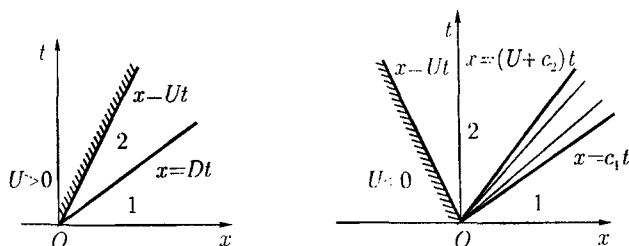


Рис. 5

Для расчета первого варианта используется уравнение (u, p) -диаграммы ударных волн (17.7), в котором надо положить $u_0 = 0$, $u = U$, $(V_0, p_0) = (V_1, p_1)$ и рассматривать его как уравнение для $p = p_2 > p_1$:

$$(p_2 - p_1)(V_1 - W(p_2; V_1, p_1)) = U^2 \quad (p_2 > p_1). \quad (5)$$

После определения p_2 удельный объем находится по формуле $V_2 = W(p_2; V_1, p_1)$, а скорость ударной волны — из уравнения вида (17.12), что даст

$$D = \frac{V_1}{V_1 - V_2} U. \quad (6)$$

Для расчета второго варианта используется уравнение (u, p) -диаграммы простой l -волны (17.4), здесь принимающее вид

$$\sigma(p_2) = \sigma(p_1) + U \quad (U < 0). \quad (7)$$

По известному p_2 термодинамические величины находятся из уравнения состояния газа:

$$p_2 = g(V_2, S_1), \quad \rho_2 = 1/V_2, \quad c_2^2 = f_p(\rho_2, S_1). \quad (8)$$

Если скорость поршня $|U|$ достаточно велика, то, как это видно на (u, p) -диаграмме рис. 4, поршень оторвется от газа. Движение газа будет таким же, как при истечении в вакуум (см. § 16). Максимально возможная скорость поршня, не теряющего контакта с газом, равна

$$U_m = -\sigma(p_1). \quad (9)$$

В случае политропного газа уравнение (5) в силу (17.14) сводится к квадратному и решается явно, что даст возможность детально проанализировать зависимости давления на поршень и скорости ударной волны от скорости поршня. В варианте выдвигающегося поршня также можно получить достаточно простые окончательные формулы.

На практике задача о поршне находит применение в вопросах, связанных с предварительным быстрым сжатием газа, а также с явлениями удара и откола.

Отражение ударной волны от жесткой стенки. По трубе, заполненной покоящимся газом с параметрами ρ_1, p_1 и закрытой справа (в сечении $x = 0$) жесткой стенкой, идет ударная волна, перемещающаяся слева направо с постоянной скоростью D (рис. 6). В момент времени $t = 0$ ударная волна достигает закрытого конца. Требуется описать и рассчитать движение газа для $t > 0$.

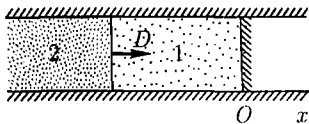


Рис. 6

Это также задача с граничным условием. Предположение о наличии жесткой стенки означает, что на ней должно быть выполнено условие

$$u(0, t) = 0. \quad (10)$$

Здесь в состоянии 2 за ударной волной можно считать известными все основные величины, т. е. u_2, ρ_2 и p_2 (теорема 5.5). Поэтому для $t \geq 0$ снова получается конически автомодельная красная задача (см. § 13) с граничным условием на контактной характеристике $x = 0$, имеющая единственное автомодельное решение. Здесь (u, p) -диаграмма и конфигурация на плоскости событий будут такими, как показано на рис. 7. Характерными элементами решения являются падающая на стенку и отраженная от стенки ударные волны.

Поскольку состояние 2 известно, то за основу расчета можно взять (u, p) -диаграмму ударных волн с центром (u_2, p_2) . Тогда оба давления, p_1 и p_3 , должны быть корнями одного и того же уравнения (вытекающего из (17.7))

$$(p - p_2)(V_2 - W(p; V_2, p_2)) = u_2^2. \quad (11)$$

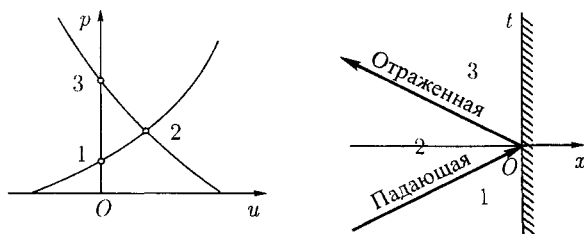


Рис. 7

При этом величина p_1 удовлетворяет уравнению (11) автоматически, причём $p_1 < p_2$, так как состояние 1 находится перед падающей ударной волной, которая, по предположению, рассчитана по состоянию 1 и ее скорости D . Поэтому уравнение (11) служит для определения давления $p_3 > p_2$. После того как p_3 найдено, остальные величины определяются обычным путем. В частности, для скорости D_0 отраженной ударной волны с помощью уравнения сохранения массы (17.12) выводится формула

$$D_0 = -\frac{p_2 - p_1}{p_3 - p_2} D. \quad (12)$$

Наиболее существенная особенность явления отражения ударной волны от жесткой стенки состоит в том, что действие падающей волны после отражения усиливается. Коэффициент усиления характеризует отношение избыточного давления $\Delta p_3 = p_3 - p_1$, получаемого после отражения, к избыточному давлению $\Delta p_2 = p_2 - p_1$ в падающей ударной волне:

$$k = \Delta p_3 / \Delta p_2. \quad (13)$$

Если падающая волна слабая, т. е. в ней относительное изменение давления $a = \Delta p_2 / p_1$ мало, то для отыскания величины (13) можно воспользоваться акустическим приближением (см. § 17). В этом приближении криволинейный треугольник 1-2-3 на (u, p) -диаграмме рис. 7 аппроксимируется равнобедренным прямолинейным треугольником (с равными сторонами 1-2 и 2-3). Это означает, что $p_3 - p_2 = p_2 - p_1$ и формула (13) даст значение $k = 2$. Следовательно, при отражении слабой ударной волны избыточное давление удваивается.

Оказывается, что если падающая волна очень сильная, т. е. $a = \Delta p_2 / p_1$ велико, то коэффициент усиления (13) может быть значительно больше

двух. Оценка легко выполняется для политропного газа, когда уравнение (11) в силу (17.15) принимает вид

$$\frac{(p_3 - p_2)^2}{(\gamma + 1)p_3 + (\gamma - 1)p_2} = \frac{(p_2 - p_1)^2}{(\gamma + 1)p_1 + (\gamma - 1)p_2}$$

и после элементарного решения относительно p_3 дает величину коэффициента усиления

$$k = \frac{(3\gamma - 1)a + 4\gamma}{(\gamma - 1)a + 2\gamma} \quad \left(a = \frac{\Delta p_2}{p_1} \right). \quad (14)$$

Из (14) следует, что $k = 2$ при $a = 0$ и возрастает с ростом a . При $a \rightarrow \infty$ предельное значение k_∞ коэффициента усиления есть

$$k_\infty = 2 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}. \quad (15)$$

Например, для воздуха $\gamma = 1,4$ и формула (15) дает возрастание избыточного давления после отражения в $k_\infty = 8$ раз. Этим объясняется известное из практики большое разрушительное действие сильных ударных волн.

Преломление ударной волны. В трубе, заполненной двумя покоящимися газами 1 (при $x < 0$) и 2 (при $x > 0$) с данными значениями ρ_1 и ρ_2 и с одинаковыми давлениями $p_1 = p_2$, по газу 1 слева направо идет ударная волна с заданной постоянной скоростью D (рис. 8). В момент времени $t = 0$ эта ударная волна достигает границы раздела сред в сечении $x = 0$. Требуется дать описание и расчет последующего движения газа для $t > 0$.

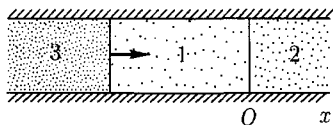


Рис. 8

Ясно, что в момент времени $t = 0$ в сечении $x = 0$ образуется произвольный разрыв, в силу чего задача сводится к задаче о распаде разрыва со следующими начальными данными:

$$\begin{aligned} u &= u_3 > 0, & \rho &= \rho_3, & p &= p_3 & (x < 0); \\ u &= 0, & \rho &= \rho_2, & p &= p_2 & (x > 0), \end{aligned}$$

в которых состояние 3 может считаться известным (теорема 5.5).

Как показывает (u, p) -диаграмма рис. 9, в результате распада этого разрыва в газ 2 всегда пойдет ударная волна, соответствующая переходу 2-4. Ее можно назвать *преломленной*, получаемой в результате преломления прошедшей на границу раздела падающей ударной волны. Остаточный позади

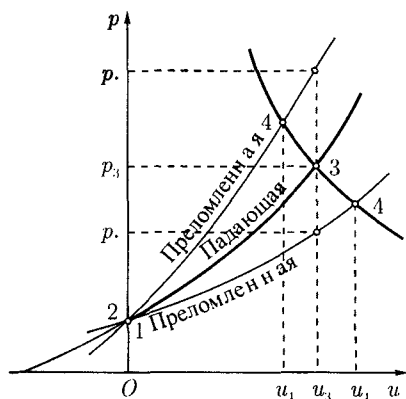


Рис. 9

преломленной ударной волны контактный разрыв между данными газами всегда приходит в движение со скоростью u_4 . Преломленная ударная волна будет сильнее или слабее падающей в зависимости от того, какую ветвь (u, p) -диаграммы с центром (u_3, p_3) пересечет (u, p) -диаграмма ударных переходов с центром $(0, p_2)$.

В акустическом приближении, когда падающая ударная волна слабая (отношение $(p_3 - p_1)/p_1$), эти две возможности различаются величиной импеданса (17.16) исходных состояний газов. Если газ 2 является более жестким, чем газ 1, т.е. импе-

данс $h_2 > h_1$, то на (u, p) -диаграмме линия перехода 2-4 пойдет выше линии 1-3. В этом случае после преломления ударная волна усиливается, скорость потока за ней уменьшается, а по левому состоянию газа 3 идет отраженная от границы раздела ударная волна. Если же газ 2 более мягкий, чем газ 1, т.е. импеданс $h_2 < h_1$, то после преломления ударная волна ослабевает, скорость потока за ней увеличивается, а по левому состоянию газа 3 распространяется простая r -волна разрежения. Конфигурации на плоскости событий для этих двух случаев аналогичны тем, которые изображены, соответственно, на рис. 17.6 и рис. 17.8.

Критерий для точного различения двух возможностей выводится на основании (u, p) -диаграммы рис. 9. Пусть известна скорость за падающей ударной волной. Тогда можно вычислить вспомогательную величину p_* как больший корень уравнения

$$(p_* - p_2)(V_2 - W(p_*; V_2, p_2)) = u_3^2, \quad (17)$$

равный давлению за фиктивной ударной волной, которая шла бы по состоянию 2 со скоростью u_3 , за фронтом. Сравнение величины p_* с p_3 приводит к следующим выводам. Неравенство $p_* > p_3$ соответствует случаю усиления ударной волны после преломления, когда назад по газу 3 идет отраженная от границы раздела ударная волна. Неравенство $p_* < p_3$ соответствует случаю ослабления ударной волны после преломления, когда назад по газу 3 идет волна разрежения.

Взаимодействие ударных волн. По трубе, заполненной покоящимся газом с параметрами ρ_1, p_1 идет ударная волна с постоянной скоростью D_2 .

Имеется вторая ударная волна, которая перемещается также с постоянной скоростью D_3 (рис. 10). Требуется дать описание и расчет движения после момента встречи этих волн.

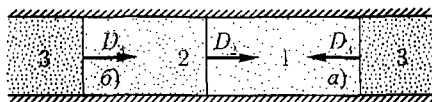


Рис. 10

Возможны два случая: а) ударные волны движутся *навстречу* друг другу и, значит, обе идут по состоянию 1, и б) ударные волны движутся *в одну и ту же сторону*, например слева направо, и значит, ударная волна D_3 идет по состоянию 2 за ударной волной D_2 . В обоих случаях встреча этих двух волн неизбежна, что в случае б) следует из теоремы Цемплена 5.4, в силу которой в области 2 справедливы неравенства

$$D_3 > u_2 + c_2 > D_2.$$

Ясно, что в момент встречи (скажем, в точке $x = 0$ при $t = 0$) в распределении основных величин образуется произвольный разрыв с известными параметрами при $x < 0$ и при $x > 0$. Дальнейшее движение для $t > 0$ будет распадом этого разрыва, который определяется (u, p) -диаграммами, показанными на рис. 11 сплошными линиями для случаев а) и б).

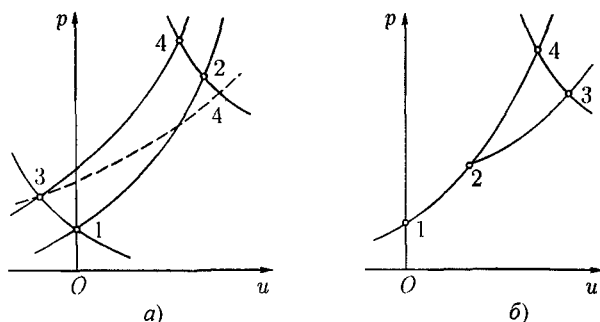


Рис. 11

В действительности может оказаться, что положение точки 4 на (u, p) -диаграмме будет другим, например положением $4'$ (пунктирная линия

на рис. 11, а). Здесь также можно дать критерий различения разных возможностей (которых на самом деле больше, чем показано на рис. 11), опираясь на тот же принцип, с помощью которого был получен критерий (17) в задаче о преломлении ударной волны. Если положение точки 4 на (u, p) -диаграмме определено, то дальнейший расчет процесса взаимодействия выполняется по стандартной методике расчета распада произвольного разрыва (см. § 17).

При решении задачи в акустическом приближении для слабых ударных волн D_2 и D_3 адиабата Гюгонио заменяется касательной к ней в точке (ρ_1, p_1) :

$$p - p_1 = c_1^2(\rho - \rho_1). \quad (18)$$

Уравнения ударного перехода 1-2 в этом случае сведутся к следующим:

$$\begin{aligned} p_2 - \rho_1 c_1 u_2 &= p_1, \\ \rho_2(D_2 - u_2) &= \rho_1 D_2, \\ p_2 - p_1 &= c_1^2(\rho_2 - \rho_1), \end{aligned} \quad (19)$$

которые элементарно решаются, определяя состояние 2:

$$u_2 = D_2 - c_1, \quad p_2 = p_1 + \rho_1 c_1(D_2 - c_1), \quad \rho_2 = \rho_1 D_2 / c_1. \quad (20)$$

В случае а) уравнения ударного перехода 1-3 имеют аналогичный вид и определяют состояние 3 (здесь $D_3 < 0$):

$$u_3 = D_3 + c_1, \quad p_3 = p_1 - \rho_1 c_1(D_3 + c_1), \quad \rho_3 = -\rho_1 D_3 / c_1. \quad (21)$$

Теперь для решения задачи о распаде разрыва между состояниями (20) и (21) необходимо найти состояние 4 путем совместного решения уравнений (u, p) -диаграмм переходов 2-4 и 3-4, которые, соответственно, таковы (здесь предполагается, что изменениями импеданса можно пренебречь):

$$\begin{aligned} p_4 + \rho_1 c_1 u_4 &= p_2 + \rho_1 c_1 u_2, \\ p_4 - \rho_1 c_1 u_4 &= p_3 - \rho_1 c_1 u_3. \end{aligned} \quad (22)$$

В результате решения этой системы, в силу формул (20), (21) и (18), определяется состояние 4:

$$\begin{aligned} u_4 &= D_2 + D_3, \quad p_4 = p_1 + \rho_1 c_1(D_2 - D_3 - 2c_1), \\ \rho_4 &= \rho_1(D_2 - D_3 - c_1)/c_1. \end{aligned} \quad (23)$$

Итак, в случае лобового столкновения двух слабых ударных волн, в результате их взаимодействия, в обе стороны пойдут ударные волны, между которыми образуется область постоянного движения с параметрами (23).

Тем же способом исследуется в акустическом приближении случай б), когда одна волна догоняет другую. Оказывается, что если изменением импеданса пренебречь, то в этом случае после взаимодействия остается просто одна ударная волна, которая идет по газу 1 со скоростью D_3 . Другими словами, догоняющая ударная волна как бы поглощает ударную волну, идущую впереди нее в том же направлении.

Взаимодействие ударной и простой волн. По трубе, заполненной покоящимся газом с параметрами ρ_1, p_1 слева направо идет ударная волна с постоянной скоростью D . Навстречу ей распространяется простая r -волна конечной протяженности с заданным распределением параметров (рис. 12). В некоторый момент времени t_0 в сечении $x = x_0$ ударная волна приходит в контакт с простой волной. Требуется дать описание и расчет процесса взаимодействия ударной и простой волн для $t > t_0$.

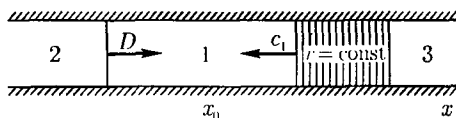


Рис. 12

Качественное отличие этой задачи от предыдущих состоит в том, что возникающее при $t > t_0$ движение уже не состоит только из ударных и простых волн. Процесс взаимодействия ударной и простой волны происходит в течение конечного промежутка времени и в конечной массе газа. За время взаимодействия по этой массе проходит ударная волна переменной интенсивности, оставляя за собой *энтропийный след* — область с переменной энтропией. В итоге вырабатывается движение, элементами которого являются идущая вправо преломленная ударная волна и идущая влево преломленная простая волна.

На основании изложенных в § 15 общих соображениях об областях определенности, влияния и зависимости решения вырабатывается качественное представление о возникающей конфигурации на плоскости событий, показанной на рис. 13.

На отрезке взаимодействия MP линия ударной волны искривляется, а характеристики C_- простой r -волны претерпевают излом. Выше линии MP образуется область переменной энтропии, которая показана на рис. 13 семейством траекторий C_0 , нанесенных пунктиром. Область $QMFR$ представляет преломленную простую волну, идущую по газу в состоянии 2 с энтропией $S = S_2$. В областях 1, 2, 3 и 5 движение является постоянным, а область 4 с границей $KPFG$ представляет собой энтропийный след.

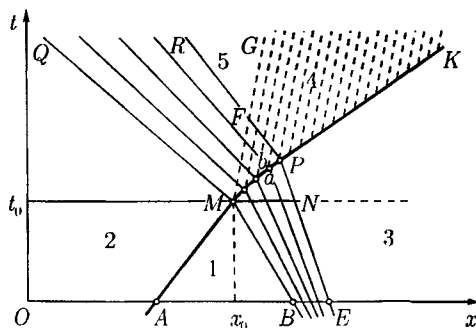


Рис. 13

На рис. 14 показана (u, p) -диаграмма этого процесса, где линия 1–3 изображает данную простую r -волну, а линия 2–4 есть геометрическое место состояний движения за ударной волной на участке взаимодействия MP .

Эта линия отнюдь не совпадает с (u, p) -диаграммой возможных переходов из состояния 2; на самом деле она заранее неизвестна. Поэтому здесь для расчета процесса взаимодействия надо непосредственно решать довольно сложную задачу Коши с начальными данными при $t = t_0$, постоянными при $x < x_M$, разрывными в точке M и известными, но не постоянными на интервале MN . Решение этой задачи уже не сводится к алгебраическим уравнениям и может быть найдено только численным расчетом (см. также [6]). Возможные здесь приближенные методы связаны с предположением о том, что ударная волна слабая.

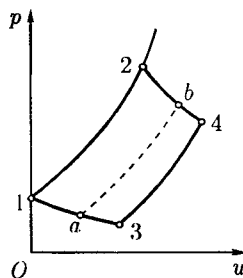


Рис. 14

Акустическое приближение. В этом приближении решение строится элементарно. Здесь предполагается, что ширина простой r -волны мала и она изображается на плоскости событий одной характеристикой C_- , а область взаимодействия сводится к одной точке (см. рис. 14). Основными малыми величинами можно считать изменение скорости в простой волне $u_3 = U$ и отклонение скорости ударной волны от скорости звука $D - c_1$. Состояние 2 определяется формулами (20), где надо положить $D_2 = D$, а давление в состоянии 3 — из перехода 1–3 в простой волне:

$$p_3 = p_1 - \rho_1 c_1 U. \quad (24)$$

Решение уравнений (u, p)-диаграмм переходов 2-4 и 3-4, которые имеют, соответственно, вид

$$\begin{aligned} p_4 + h_1 u_4 &= p_2 + h_1 u_2, \\ p_4 - h_1 u_4 &= p_3 - h_1 u_3, \end{aligned} \quad (25)$$

и использование формул (20) и (24) даст значения величин за фронтом:

$$u_4 = D + U - c_1, \quad p_4 = p_1 + \frac{1}{2} \rho_1 c_1 (D - U - c_1). \quad (26)$$

Для качественного анализа решения можно сравнить давление в областях 2 и 3 с давлением в области 4. С помощью формул (20) и (26) из (25) получаются выражения

$$p_4 - p_3 = \rho_1 c_1 (D - c_1), \quad p_4 - p_2 = -\rho_1 c_1 U. \quad (27)$$

Первое из них, в силу теоремы Цемплена 5.4, показывает, что в газ 3 всегда идет ударная волна. Из второй формулы (27) следует, что взаимодействие сохраняет характер простой волны: если до взаимодействия была волна разрежения, для которой $U > 0$ (или волна сжатия, для которой $U < 0$), то и после взаимодействия простая волна останется волной разрежения ввиду неравенства $p_4 < p_2$ (соответственно, волной сжатия ввиду неравенства $p_4 > p_2$).

Задача о безударном сжатии. Этой задаче посвящен большой цикл работ А. Ф. Сидорова [14]. Здесь она рассматривается в классе одномерных изэнтропических движений политропного газа с плоскими волнами. В этом случае задача решается в явном виде.

Постановка такова: пусть на отрезке $0 \leq x \leq a$ находится покоящийся политропный газ с известными параметрами ρ_0 , c_0 и пусть в момент времени $t = 0$ в этот газ из положения $x = 0$ начинает двигаться поршень с нулевой начальной скоростью. На плоскости событий (x, t) из точки O выходит прямолинейная характеристика OB , разделяющая области возмущенного и покоящегося газа, которая приходит в точку B в момент времени $b = a/c_0$. Требуется найти такой закон движения поршня $x = X(t)$, чтобы его траектория соединяла точки O и B и чтобы в области OAB не возникла градиентная катастрофа (см. рис. 15).

Оказывается, что при заданном значении $a > 0$ эта задача имеет единственное решение. Действительно, из теоремы 10.2 следует, что область $OABO$ должна покрываться простой l -волной, т. е. в ней скорость газа u и скорость звука c связаны (см. (16.9)) соотношением $(\gamma - 1)u - 2c = -2c_0$, откуда

$$c = c_0 + \frac{\gamma - 1}{2} u. \quad (28)$$

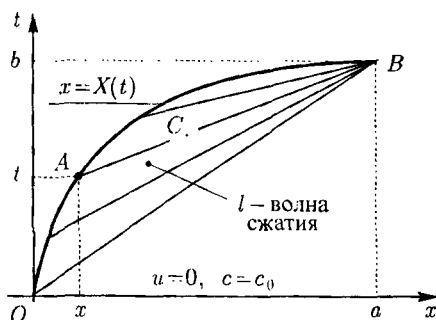


Рис. 15

Возникающая l -волна необходимо должна быть центрирована в точке B , так как иначе не будет выполнено либо условие безударности движения (отсутствие градиентной катастрофы), либо условие направленности движения поршня в сторону газа (детальная проверка предоставляется читателю).

В l -волне, центрированной в точке B , для любой (прямолинейной!) характеристики C_+ типа AB (рис. 15) с уравнением $dx/dt = u + c$ выполнено равенство (с учетом (28) и $a = c_0 b$)

$$\frac{c_0 b - x}{b - t} = u + c = \frac{\gamma + 1}{2} u + c_0,$$

которое в точке A поршня переписывается в виде дифференциального уравнения для искомой функции $X(t)$

$$\frac{c_0 b - X(t)}{b - t} = \frac{\gamma + 1}{2} X'(t) + c_0.$$

Интегрирование с начальным условием $X(0) = 0$ приводит к искомому результату

$$X(t) = c_0 b + \frac{2c_0}{\gamma - 1}(b - t) - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c_0 b^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} (b - t)^{\frac{2}{\gamma+1}}. \quad (29)$$

Полезно отметить, что после растяжения переменных x, t

$$t = b\tau, \quad X(t) = c_0 b Y(\tau)$$

формула (29) приобретает стандартный вид

$$Y(\tau) = 1 + \frac{2}{\gamma + 1}(1 - \tau) - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}(1 - \tau)^{\frac{2}{\gamma + 1}}, \quad (30)$$

дающий решение «эталонной» задачи о безударном сжатии для значений параметров $a = b = c_0 = 1$.

В результате движения поршня по закону (29) вся масса газа $m = a\rho_0$, первоначально распределенная по отрезку $(0, a)$, при $t = b$ сжимается (коллапсирует) в одну точку $x = a$, где достигается бесконечная плотность.

Аналогичные одномерные задачи о цилиндрическом или сферическом безударном сжатии также решались, но лишь численными методами.

§ 19. Асимптотическое поведение ударных волн

В приложениях часто встречается такой вид движения, когда под действием некоторого локализованного во времени и пространстве возмущения покоящегося газа с данными параметрами p_1 , p_1 формируется ударная волна, которая затем распространяется до бесконечности. При этом ввиду прекращения внешнего воздействия движение ударной волны происходит так, что ее амплитуда, вообще говоря, убывает и стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Например, такое движение может быть произведено поршнем, который, начиная с момента времени $t = 0$, движется с постоянной скоростью, а затем в момент времени $t_0 > 0$ внезапно останавливается и покоится при $t > t_0$. Оно может быть вызвано также взрывом, когда при $t = 0$ в области $r < r_0$ возникает высокое давление $p_0 > p_1$, которое при $t > 0$ производит, в результате распада разрыва на границе $r = r_0$, уходящую от центра взрыва ударную волну.

Итак, воздействия на газ, вызывающие ударную волну, могут быть различны и начальные условия не являются строго фиксированными. Тем не менее оказывается справедливым замечательный факт, имеющий большое познавательное и практическое значение, состоящий в том, что при предположениях достаточно общего характера асимптотическое поведение одномерной ударной волны при $t \rightarrow \infty$ оказывается, с точностью до одной постоянной, вполне определенным. Здесь будет дан вывод этого закона «затухания» для плоских, цилиндрических и сферических ударных волн.

Амплитуда слабых ударных волн. Вначале выводятся формулы ударного перехода, удобные для анализа слабых ударных волн. Пусть индекс «1» обозначает постоянное состояние перед фронтом и индекс «2» — со-

стояние на задней стороне фронта ударной волны. Вводится безразмерная величина

$$z = \frac{p_2 - p_1}{\rho_1 c_1^2}, \quad (1)$$

называемая *амплитудой ударной волны*. Если амплитуда z задана, то согласно теореме 5.5 все остальные величины на задней стороне фронта однозначно определены. Для вывода асимптотики достаточно найти их разложения по степеням z до определенного порядка. В дальнейшем будет использовано обозначение часто встречающейся величины (2.25)

$$B = \frac{\partial(\rho c)}{\partial \rho} = \frac{m+2}{2}c. \quad (2)$$

Непосредственно из определения (1) следует

$$p_2 = p_1 + \rho_1 c_1^2 z. \quad (3)$$

Далее, в силу теоремы 5.2 справедливо представление

$$S_2 = S_1 + O(z^3). \quad (4)$$

Удельный объем V_2 находится с помощью адиабаты Гюгонио с центром (V_1, p_1) . В силу теоремы 5.2 в разложении функции $V = W(p)$ по формуле Тэйлора две первые производные достаточно вычислить вдоль изэнтропы $S = S_1$, что даст (см. аналогичные формулы (5.7))

$$W'(p_1) = -\frac{1}{\rho_1^2 c_1^2}, \quad W''(p_1) = \frac{2}{\rho_1^3 c_1^3} \frac{1}{c_1^2} \left(\frac{\partial(\rho c)}{\partial \rho} \right)_1 = \frac{2B_1}{\rho_1^3 c_1^5}.$$

Следовательно,

$$V_2 = V_1 - V_1 z + \frac{B_1}{\rho_1 c_1} z^2 + O(z^3). \quad (5)$$

Скорость u_2 находится из уравнения (4.17) и дается формулой

$$u_2 = \sqrt{(p_2 - p_1)(V_1 - V_2)},$$

откуда в силу (3) и (5) следует представление

$$u_2 = c_1 z - \frac{1}{2} B_1 z^2 + O(z^3). \quad (6)$$

Кроме того, полезно найти инвариант Римана $l_2 = u_2 - \sigma(c_2)$. Так как

$$\frac{\partial \sigma}{\partial p} = \frac{1}{\rho c}, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial p^2} = -\frac{1}{\rho^2 c^4} \frac{\partial(\rho c)}{\partial p} = -\frac{B}{\rho^2 c^4},$$

то в силу (3)

$$\sigma_2 = \sigma_1 + c_1 z - \frac{1}{2} B_1 z^2 + O(z^3), \quad (7)$$

где $\sigma_1 = \sigma(c_1)$. Сравнение формул (6) и (7) дает важное соотношение (так как $u_1 = 0$)

$$l_2 = l_1 + O(z^3). \quad (8)$$

Другими словами, скачок инварианта Римана $l = u - \sigma(c)$ есть величина *третьего порядка малости* по сравнению с амплитудой ударной волны, когда амплитуда стремится к нулю.

Наконец, скорость перемещения ударной волны D находится из уравнения (4.12), т. е. здесь $(u_2 - D)V_1 = -DV_2$, и после подстановки выражений (5) и (6) оказывается такой:

$$D = c_1 + \frac{1}{2} B_1 z + O(z^2). \quad (9)$$

Постоянство энтропии и инварианта Римана. Для вывода асимптотики на плоскости $R^2(r, t)$ рассматривается область $\Omega = \{r_0 < r < r_\Phi, t > 0\}$, где постоянная $r_0 > 0$ и $r = r_\Phi(t)$ есть уравнение ударной волны (фронта), причем $r_\Phi(0) = r_0$. Вывод основан на приближении, связанном с отбрасыванием, ввиду их относительной малости, величин $O(z^3)$ в соотношениях (4) и (8), а также с условием конечности суммарного расхода через границу $r = r_0$. Эти соглашения формулируются ниже как предположения *A* и *B*.

Предположение А. *Всюду в области Ω энтропия S и инвариант Римана l постоянны, $S = S_1$ и $l = l_1 = -\sigma(c_1)$, или*

$$u = \sigma(c) - \sigma(c_1). \quad (10)$$

Кроме того, считается, что движение в Ω непрерывно и все величины мало отличаются от их значений перед фронтом.

Из предположения *A* следует, что все газодинамические величины в области Ω являются функциями одной из них, т. е. движение в Ω есть простая волна. При этом уравнение (15.4) вдоль характеристик C_- можно отбро-

силь (оно заменяется соотношением (10)) и движение описывается ~~таким же~~ уравнениями характеристик C_+ :

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= u + c, \\ \frac{\partial}{\partial t}(u + \sigma(c)) + (u + c) \frac{\partial}{\partial r}(u + \sigma(c)) &= -\frac{\nu}{r} cu. \end{aligned} \quad (11)$$

Оказывается, что при условии (10) уравнения (11) интегрируются точно. Для этого вводится дифференциальный оператор

$$\partial_r^+ = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{u + c} \frac{\partial}{\partial t}$$

и (11) переписывается в виде

$$(u + c) \partial_r^+(u + \sigma(c)) + \nu r^{-1} cu = 0.$$

Применение оператора ∂_r^+ к тождеству (10) дает $\rho \partial_r^+ = c \partial_r^+ \rho$, в силу чего

$$\begin{aligned} (u + c) \partial_r^+(u + \sigma(c)) &= u \partial_r^+ u + u \frac{c}{\rho} \partial_r^+ \rho + c \partial_r^+ u + c \frac{c}{\rho} \partial_r^+ \rho = \\ &= 2u \frac{c}{\rho} \partial_r^+ \rho + 2c \partial_r^+ u = 2 \frac{c}{\rho} \partial_r^+ (\rho u). \end{aligned}$$

Поэтому предыдущее уравнение равносильно уравнению

$$2r \partial_r^+ (\rho u) + \nu \rho u = 0,$$

интегрирование которого дает

$$r^{\nu/2} \rho u = \alpha, \quad (12)$$

где величина α постоянна вдоль C_+ -характеристик и является параметром, отличающим одну характеристику от другой.

Каждая из этих характеристик соединяет некоторую точку $t_0(\alpha)$ на прямой $r = r_0$ с точкой (r_Φ, t_Φ) , лежащей на ударной волне

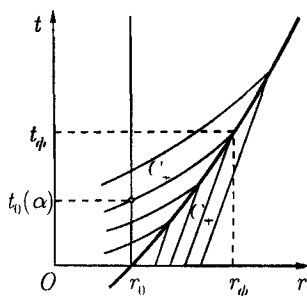


Рис. 1

(рис. 1). Интегрирование первого из уравнений (11) вдоль C_+ дает

$$t_\Phi = t_0(\alpha) \int_{r_0}^{r_\Phi} \frac{1}{u + c} dr.$$

Дифференцирование этого соотношения по α с учетом того, что $dt_\Phi/d\alpha = = D^{-1}dr_\Phi/d\alpha$, приводит к уравнению

$$\left(\frac{1}{D} - \frac{1}{u+c}\right) \frac{dr_\Phi}{d\alpha} = t'_0(\alpha) + \int_{r_0}^{r_\Phi} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{u+c}\right) dr. \quad (13)$$

В силу предположения *A* величины D и $u+c$ можно рассматривать как функции от ρu . С помощью формул (5), (6) и (9) получаются достаточные для вывода асимптотики приближенные выражения

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{c_1} - \frac{1}{2} \frac{B_1}{\rho_1 c_1^3} \rho u, \quad \frac{1}{u+c} = \frac{1}{c_1} - \frac{B_1}{\rho_1 c_1^3} \rho u, \quad (14)$$

второе из которых можно считать справедливым не только на фронте, но и всюду в области Ω . Если положить $k = B_1/(2\rho_1 c_1^3)$, то в результате подстановки (14) и использования (12) уравнение (13) упростится до следующего:

$$k\alpha r_\Phi^{-\nu/2} \frac{dr_\Phi}{d\alpha} = t'_0(\alpha) - 2k \int_{r_0}^{r_\Phi} r^{-\nu/2} dr.$$

Пусть $J(\alpha) = \int_{r_0}^{r_\Phi} r^{-\nu/2} dr$; тогда это уравнение переписывается так:

$$k\alpha J'(\alpha) + 2kJ(\alpha) = t'_0(\alpha),$$

или равносильно:

$$k \frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha^2 J(\alpha)) = \alpha t'_0(\alpha),$$

и проинтегрируется в виде

$$k\alpha^2 J(\alpha) = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \beta t'_0(\beta) d\beta, \quad (15)$$

где предполагается, что $r_\Phi = r_0$ при $\alpha = \alpha_0$, т. е. $t_0(\alpha_0) = 0$. Последний интеграл можно преобразовать с учетом соотношения (12):

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} \beta t'_0(\beta) d\beta = r_0^{\nu/2} \int_0^{t_0} \rho u(r_0, t) dt.$$

Предположение В. Интеграл

$$\int_0^{\infty} \rho u(r_0, t) dt = Q \quad (16)$$

конечен и положителен.

Асимптотические формулы. В силу предположения В из (15) получается асимптотическое представление интеграла $J(\alpha)$:

$$J(\alpha) = r_0^{\nu/2} \frac{Q}{k} \frac{1}{\alpha^2}. \quad (17)$$

С другой стороны, интеграл $J(\alpha)$ берется явно, и для различных значений ν получаются формулы

$$\begin{aligned} (\nu = 0) \quad J(\alpha) &= r_\Phi - r_0; \\ (\nu = 1) \quad J(\alpha) &= 2(\sqrt{r_\Phi} - \sqrt{r_0}); \\ (\nu = 2) \quad J(\alpha) &= \ln(r_\Phi/r_0). \end{aligned} \quad (18)$$

Сравнение (17) с (18) дает асимптотическую зависимость $r_\Phi(\alpha)$ или $\alpha(r_\Phi)$, а значит, и величины $(\rho u)_\Phi$ в зависимости от r_Φ в силу (12).

В заключение надо заметить еще, что в силу формул (5) и (6) справедливо соотношение

$$\rho_2 u_2 = \rho_1 c_1 z + O(z^2),$$

позволяющее представить амплитуду z асимптотической формулой

$$z = (\rho u)_\Phi / \rho_1 c_1. \quad (19)$$

Отсюда и получается искомое асимптотическое представление амплитуды z через r_Φ при $r_\Phi \rightarrow \infty$. При этом в формулах (18) слагаемыми r_0 и $\sqrt{r_0}$ можно пренебречь. Окончательно, с учетом (2) и выражения $B_1 = 2k\rho_1 c_1^3$, асимптотика амплитуды z записывается через относительный радиус ударной волны $\xi = r_\Phi/r_0$ и дается следующими формулами:

$$\begin{aligned} (\nu = 0, \text{ плоские волны}) \quad z &= H \xi^{-1/2}; \\ (\nu = 1, \text{ цилиндрические волны}) \quad z &= \frac{1}{\sqrt{2}} H \xi^{-3/4}; \\ (\nu = 2, \text{ сферические волны}) \quad z &= H \xi^{-1} (\ln \xi)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (20)$$

где ~~безразмерная~~ величина H дается формулой

$$H = \frac{2}{\sqrt{m_1 + 2}} \left(\frac{Q}{\rho_1 r_0} \right)^{1/2}. \quad (21)$$

На основе асимптотики (20), (21) и предыдущих выводов легко получаются формулы, описывающие асимптотическое поведение на ударной волне величины давления (3), плотности (5), массовой скорости (6) и скорости ударной волны (9) для каждого значения параметра симметрии ν .

§ 20. Автомоделные движения

Термин «автомоделность» уже встречался в § 13 для описания частных случаев кратных волн, обладающих конической автомоделностью. В более широкой трактовке, применительно к физическому содержанию решаемых задач, автомоделными принято называть решения, которые получаются путем анализа размерностей всех участвующих величин. С точки зрения теоретико-группового подхода это равносильно использованию допускаемых уравнениями групп растяжений. Однако свойство некоторой группы преобразований быть группой растяжений зависит от выбора системы координат в пространстве основных переменных. На самом деле единственным инвариантным характеристическим свойством групп растяжений является то, что они *абелевы* (коммутативны). Поэтому рационально использовать термин «автомоделный» применительно к любым решениям, инвариантным относительно абелевых подгрупп основной группы. При этом представление решения в той системе координат, в которой группа является группой растяжений, удобно называть *автомоделным в узком смысле*.

Уравнения автомоделных движений. В этом параграфе речь пойдет об автомоделных в узком смысле решениях уравнений одномерных движений политропного газа (12.12). Эти решения выделяются тем, что они полезны и часто используются в приложениях; кроме того, они наиболее хорошо изучены (см. [7]). Общее представление таких решений и соответствующая факторсистема имеют следующий вид:

$$q = \frac{r}{t} U(\lambda), \quad \rho = t^\beta R(\lambda), \quad p = t^{\beta-2} r^2 P(\lambda); \quad \lambda = r t^{-\alpha}; \quad (1)$$

здесь α и β — *показатели автомоделности*, а функции U , R , P удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихом

обозначены производные по λ)

$$\begin{aligned}(U - \alpha)\lambda U' + \lambda \frac{P'}{R} - U + U^2 + 2\frac{P}{R} &= 0, \\ (U - \alpha)\lambda R' + R\lambda U' + (\mu U + \beta)R &= 0, \\ (U - \alpha)\lambda P' + \gamma P\lambda U' + ((\mu\gamma + 2)U + \beta - 2)P &= 0,\end{aligned}\quad (2)$$

где положено $\mu = 1 + \nu$, так что $\mu = 1$ для плоских волн, $\mu = 2$ для цилиндрических волн и $\mu = 3$ для сферических волн.

Замечательная особенность системы (2) состоит в том, что она сводится к одному независимому уравнению первого порядка и двум квадратурам. Этот факт не случаен, он имеет групповую природу и связан с тем, что исходные уравнения (12.12) допускали трехпараметрическую группу растяжений, а для определения решений вида (1) использована только одна ее однопараметрическая подгруппа; оставшиеся два независимых растяжения должны допускаться системой (2). Здесь эти преобразования видны непосредственно:

$$(a) \bar{\lambda} = a\lambda; \quad (b) \bar{R} = bR, \quad \bar{P} = bP. \quad (3)$$

Преобразование (3, а) позволяет избавиться от явного вхождения независимого переменного λ за счет замены $\xi = \ln \lambda$, а преобразование (3, б) показывает, что единственным независимым уравнением должно быть уравнение, связывающее инварианты этого преобразования U и $Z = P/R$. Вывод последнего требует лишь выполнения ряда тождественных преобразований, в итоге которых получается уравнение

$$\frac{dZ}{dU} = \frac{Z}{U - \alpha} \frac{M}{N}, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}M &= (2\gamma U - (\gamma - 1)(2\alpha + \beta) - 2)Z - \\ &\quad - (U - \alpha)((\omega - \gamma + 1)U^2 + (\gamma - \alpha\omega - 3)U + 2\alpha), \\ N &= (\mu\gamma U + 2\alpha + \beta - 2)Z - (U - \alpha)(U^2 - U),\end{aligned}\quad (5)$$

и введено обозначение $\omega = \mu(\gamma - 1) + 2$. По известной зависимости $Z(U)$ функция $U(\lambda)$ находится квадратурой из уравнения

$$\lambda \frac{dU}{d\lambda} = \frac{(\mu\gamma U + 2\alpha + \beta - 2)Z - (U - \alpha)(U^2 - U)}{(U - \alpha)^2 - \gamma Z}, \quad (6)$$

после чего еще одной квадратурой находится $R(\lambda)$ из второго уравнения (2):

$$\frac{\lambda}{R} \frac{dR}{d\lambda} = -\frac{\lambda U' + \mu U + \beta}{U - \alpha}. \quad (7)$$

Наконец, функция P находится из определения Z :

$$P = ZR. \quad (8)$$

Полезно заметить еще, что для скорости звука из формулы $c^2 = \gamma p / \rho$ (газ политропный) в силу представления (1) и определения (8) получается выражение

$$c = \frac{r}{t} C(\lambda), \quad C^2 = \gamma Z. \quad (9)$$

Линии уровня. Линии $\lambda = \text{const}$ называются *линиями уровня* решения (1); на плоскости $R^2(r, t)$ они имеют уравнение $r = r_\lambda(t) = \lambda t^\alpha$. Картины расположения линий уровня для $\alpha > 0$ показаны на рис. 1. Скорость движения точки вдоль линии уровня дается формулой

$$\frac{dr_\lambda}{dt} = \alpha \frac{r_\lambda}{t}. \quad (10)$$

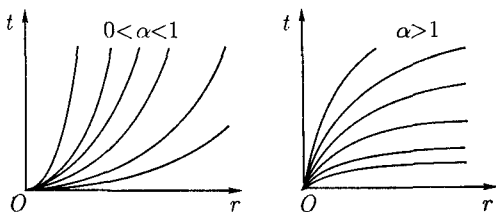


Рис. 1

Поэтому из формул (1) и (9) следует вывод: линия уровня является траекторией частицы, если и только если на ней $U = \alpha$; линия уровня есть $C_+(C_-)$ -характеристика, если и только если на ней $U + C = \alpha$ ($U - C = \alpha$). Кроме того, в решениях с ударными волнами, движущимися по закону $r = r_\Phi(t)$, участвует скорость волны D , которую удобно здесь представить в виде $D = \frac{r_\Phi}{t} D_\Phi(\lambda)$; тогда ударная волна является линией уровня, если и только если $D_\Phi = \alpha$.

С помощью уравнений (4)–(9) могут быть рассмотрены задачи об автомодельном разлете газа, о вытеснении газа поршнем, о движении в результате сосредоточенного в точке $r = 0$ воздействия на газ путем приложения мгновенного импульса или путем мгновенного выделения энергии и т. п. В таких задачах необходимо учитывать различные особенности исследуемого движения, связанные с заданием тех или иных дополнительных условий. Такие условия следует интерпретировать, в первую очередь,

как дополнительные к ключевому уравнению (4). Эти условия могут быть связаны с отысканием интегральных кривых, проходящих через его особые точки. Так как характер и расположение особых точек уравнения (4) зависят от четырех параметров — показателей автомодельности α и β , размерности пространства μ и показателя адиабаты γ , то в общем виде нарисовать поле интегральных кривых этого уравнения затруднительно. Это приходится делать в каждой конкретной задаче после того, как все или хотя бы некоторые из параметров фиксированы. При этом следует иметь в виду, что иногда показатели автомодельности удается определить только на основе очень глубокого качественного анализа искомого решения. В этом вопросе могут оказаться полезными выводимые ниже интегральные законы сохранения, которые для автомодельных решений принимают специальную форму.

Интегральные законы сохранения. Рассматривая объем ω , ограниченный поверхностями $r_0 = \text{const}$ и $r = \text{const}$ (при $\nu > 0$ надо взять в качестве ω соответствующий сектор слоя (r_0, r)), можно привести балансовые уравнения (1.4) для одномерных движений к следующим интегральным законам сохранения массы, импульса и энергии

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{r_0}^r \rho r^\nu dr + [\rho q r^\nu]_{r_0}^r &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{r_0}^r \rho q r^\nu dr + [(p + \rho q^2) r^\nu]_{r_0}^r &= \nu \int_{r_0}^r p r^{\nu-1} dr; \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{r_0}^r \left(\frac{1}{2} \rho q^2 + \frac{1}{\gamma-1} p \right) r^\nu dr + \left[q \left(\frac{1}{2} \rho q^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p \right) r^\nu \right]_{r_0}^r &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где символ $[f]_{r_0}^r$ означает разность $f(r) - f(r_0)$. Здесь в законе сохранения энергии принято во внимание выражение (2.6) для внутренней энергии политропного газа.

Для автомодельных движений (1) все выражения и интегралы (после замены переменных $r \rightarrow \lambda = r t^{-\alpha}$) в (11) принимают вид произведения некоторой степени t на функцию от λ , например

$$[\rho q r^\nu]_{r_0}^r = t^{\beta+\alpha\mu-1} [\lambda^{\nu=1} R U]_{\lambda_0}^\lambda, \quad \int_{r_0}^r \rho r^\nu dr = t^{\beta+\alpha\mu} \int_{\lambda_0}^\lambda \lambda^\nu R d\lambda$$

и т. д. Так как в (11) производные берутся при постоянном r , то для производных по t от $t^m f(\lambda) = t^m f(r t^{-\alpha})$ справедливо выражение

$$\frac{\partial}{\partial t} t^m f(\lambda) = t^{m-1} (m f(\lambda) - \alpha \lambda f'(\lambda)). \quad (12)$$

Применение формулы (12) в уравнениях (11) даст следующую систему интегральных законов сохранения для автомодельных движений (1):

Закон сохранения массы

$$(\beta + \alpha\mu) \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda^{\mu-1} R d\lambda + [\lambda^{\mu} R(U - \alpha)]_{\lambda_0}^{\lambda} = 0; \quad (13)$$

Закон сохранения импульса

$$\begin{aligned} (\beta + \alpha(\mu + 1) - 1) \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda^{\mu} R U d\lambda + [\lambda^{\mu+1} (P + R U(U - \alpha))]_{\lambda_0}^{\lambda} = \\ = (\mu - 1) \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda^{\mu} P d\lambda. \end{aligned} \quad (14)$$

Закон сохранения энергии

$$\begin{aligned} (\beta + \alpha(\mu + 2) - 2) \int_{\lambda_0}^{\lambda} \lambda^{\mu+1} \left(\frac{1}{2} R U^2 + \frac{1}{\gamma - 1} P \right) d\lambda + \\ + \left[\lambda^{\mu+2} \left((U - \alpha) \left(\frac{1}{2} R U^2 + \frac{1}{\gamma - 1} P \right) + U P \right) \right]_{\lambda_0}^{\lambda} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Дифференцирование по λ соотношений (13)–(15) дает систему уравнений для U , r , p , эквивалентную (2). Если параметры α , β , μ обращают в нуль какой-нибудь из коэффициентов при интегралах, то соответствующий закон сохранения дает *конечный первый интеграл* системы уравнений (2). Например, при $\beta + \alpha\mu = 0$ из (13) получается интеграл массы

$$\lambda^{\mu} R(U - \alpha) = A_M; \quad (16)$$

при $\beta + \alpha(\mu + 2) = 2$ из (15) получается интеграл энергии

$$\lambda^{\mu+2} \left[(U - \alpha) \left(\frac{1}{2} R U^2 + \frac{1}{\gamma - 1} P \right) + U P \right] = A_E. \quad (17)$$

Конечный интеграл импульса получается из (14) только при $\mu = 1$ (плоские волны) и $\beta + 2\alpha = 1$

$$\lambda^2 [P + RU(U - \alpha)] = A_I. \quad (18)$$

Здесь A_M , A_E , A_I — константы, равные значениям левых частей при $\lambda = \lambda_0$.

Свойства примыкания. При решении конкретных задач существенно знать, с какими другими решениями можно сопрягать автомодельное решение непрерывным образом или через сильный разрыв. В общей постановке этот вопрос очень сложен и конструктивно не решается. Однако если ограничиться случаем примыкания двух автомодельных решений, то можно заметить следующее. Во-первых, такое примыкание возможно, только если показатели автомодельности α и β для обоих решений одни и те же. Во-вторых, во всех случаях сопряжения линия примыкания должна быть линией уровня $\lambda = \text{const}$. Действительно, в противном случае возникли бы два дополнительных тождественных соотношения между величинами U , R , P , не вытекающих из законов сохранения, а диктуемых только формой линии примыкания. Вообще говоря, такие соотношения несовместимы с системой уравнений (2) ввиду того, что ее общее решение зависит лишь от трех произвольных постоянных, подбором которых удовлетворить «лишнему» тождественному соотношению невозможно.

Далее, если примыкание осуществляется по линии уровня $\Lambda \{ \lambda = \text{const} \}$, то эта линия должна быть либо характеристикой (в случае непрерывного примыкания), либо линией сильного разрыва (ударной волной). В первом случае на Λ необходимо выполняется одно из соотношений

$$U = \alpha, \quad U + C = \alpha, \quad U - C = \alpha, \quad (19)$$

в зависимости от того, является ли Λ траекторией или характеристикой семейства C_+ или C_- . Во втором случае на Λ выполнено соотношение для скорости перемещения ударной волны

$$D = \alpha \frac{r}{t}. \quad (20)$$

Полезно заметить, что точки, в которых выполнено одно из соотношений (19), являются, вообще говоря, особыми для уравнений (2); это видно непосредственно из уравнений (6) и (7), если учесть соотношение (9).

Простейший случай сопряжения разных решений — примыкание к постоянному решению. В силу предыдущего возникает вопрос, является ли автомодельным постоянное решение

$$q = q_0, \quad \rho = \rho_0, \quad p = p_0. \quad (21)$$

Из представления (1) видно, что решение (21) может быть автомодельным только при значениях параметров $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ (при этом исключается случай вакуума, когда $\rho_0 = p_0 = 0$). Следовательно, здесь $\lambda = r/t$ и полученные из (1) выражения

$$U = q_0 \lambda^{-1}, \quad R = \rho_0, \quad P = p_0 \lambda^{-2} \quad (22)$$

должны удовлетворять системе (2). Простая проверка показывает, что (22) есть решение только в двух случаях: (а) $q_0 \neq 0$, $\nu = 0$ и (б) $q_0 = 0$, ν произвольно. Итак, можно сформулировать следующий вывод.

При скорости $q_0 \neq 0$ постоянное решение автомодельно только в одномерном движении с плоскими волнами; если же $q_0 = 0$, то постоянное решение всегда автомодельно; во всех случаях показатели автомодельного постоянного решения имеют значения $\alpha = 1$, $\beta = 0$.

Соотношения на ударной волне. В случае политропного газа соотношения (4.12)–(4.14) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} [\rho(q - D)] &= 0, \\ [p + \rho(q - D)^2] &= 0, \\ \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}(q - D)^2 \right] &= 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где [...] — символ скачка. В предположении, что показатели α и β в формулах представления (1) и (20) по обе стороны ударной волны одни и те же, соотношения (23) могут быть переписаны в терминах величин U , R , P :

$$\begin{aligned} [R(U - \alpha)] &= 0, \\ [P + R(U - \alpha)^2] &= 0, \\ \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{R} + \frac{1}{2}(U - \alpha)^2 \right] &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

Введение величины Z согласно (9) дает возможность выделить из системы (24) два уравнения, связывающие только U и Z :

$$\begin{aligned} \left[\frac{Z}{U - \alpha} + U - \alpha \right] &= 0, \\ \left[\frac{\gamma}{\gamma - 1} Z + \frac{1}{2}(U - \alpha)^2 \right] &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Уравнения (25) удобны тем, что они позволяют интерпретировать ударный переход на той же плоскости $R^2(U, Z)$, где расположены интегральные кривые основного уравнения автомодельных решений (4).

В важном частном случае, когда рассматриваются автомодельные ударные волны, идущие по неподвижному газу с постоянными параметрами состояния $q_1 = 0$, ρ_1 , p_1 , второе и третье соотношения (23) принимают вид

$$\begin{aligned} \left(\frac{r}{t}\right)^2 \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_2}{R_2} + \frac{1}{2}(U_2 - \alpha)^2 \right) &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{1}{2} \alpha^2 \left(\frac{r}{t}\right)^2, \\ t^\beta \left(\frac{r}{t}\right)^2 (P_2 + R_2(U_2 - \alpha)^2) &= p_1 + \alpha^2 \rho_1 \left(\frac{r}{t}\right)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Как уже было отмечено выше, соотношениям (26) можно удовлетворить вдоль линии уровня $rt^{-\alpha} = \text{const}$, только если $\beta = 0$ и $\alpha = 1$.

Случай сильной ударной волны. Здесь возможна приближенная постановка для *очень сильных* ударных волн, когда значение давления перед волной p_1 много меньше давления за волной p_2 . В предельном случае $p_1/p_2 \rightarrow 0$ это приводит к приближению, уравнения которого получаются из (26), если просто положить $p_1 = 0$. Следует заметить, что, строго говоря, состояние политропного газа с $p_1 = 0$ и $\rho_1 \neq 0$ достигается, только если в нем обращается в нуль температура T_1 . Хотя реально абсолютный нуль недостижим, как приближение такое предположение является приемлемым. В приближенной постановке, когда $p_1 = 0$ и $\rho_1 \neq 0$, соотношения (26) могут быть удовлетворены при $\beta = 0$ и при произвольном α . Следовательно, для очень сильных автомодельных ударных волн (с показателями автомодельности $\beta = 0$ и любым α), идущих по неподвижному газу с плотностью ρ_1 , приближенно справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} R_2(U_2 - \alpha) &= -\alpha \rho_1, \\ \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P_2}{R_2} + \frac{1}{2}(U_2 - \alpha)^2 &= \frac{1}{2} \alpha^2, \\ P_2 + R_2(U_2 - \alpha)^2 &= \alpha^2 \rho_1. \end{aligned}$$

Решение этих уравнений относительно величин с индексом «2» находится элементарно:

$$\begin{aligned} U_2 &= \frac{2\alpha}{\gamma+1}, \quad Z_2 = \frac{2(\gamma-1)}{(\gamma+1)^2} \alpha^2, \\ R_2 &= \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_1, \quad P_2 = \frac{2\alpha^2}{\gamma+1} \rho_1. \end{aligned} \quad (27)$$

Третье из равенств (27) показывает, что в рассматриваемой постановке за ударной волной достигается предельное сжатие. Очевидно, что этот факт находится в полном соответствии с исходным предположением.

Общие соображения и подходы к изучению одномерных автомодельных движений газа развиты в монографии Л. И. Седова [7], где приведен также подробный анализ и дано решение многих конкретных задач. Две из них рассматриваются более подробно в следующем параграфе.

§ 21. Задачи о поршне и о сильном взрыве

Задача о поршне, уже рассмотренная в § 18 для одномерных движений с плоскими волнами, представляет интерес и для движений с цилиндрической или сферической симметрией. В этих случаях сравнительно простое — автомодельное — решение существует лишь тогда, когда поршень вдвигается в покоящийся газ, *расширяясь из точки* (начала координат) с постоянной скоростью; для других краевых условий задача о поршне неавтомодельна. Тем не менее исследование решения задачи о поршне полезно для понимания общей методики отыскания таких решений.

Постановка задачи о поршне. В неподвижный политропный газ с показателем адиабаты γ и с постоянными параметрами состояния ρ_1, p_1 , заполняющий все пространство R^3 , в момент времени $t = 0$ из точки $r = 0$ начинает вдвигаться с заданной скоростью q_0 поршень, форма которого соответствует цилиндрической или сферической симметрии. Впереди поршня возникает ударная волна, идущая по покоящемуся газу. Требуется определить скорость перемещения ударной волны, а также движение газа между ней и поршнем в предположении автомодельности; в частности, представляет интерес величина давления на поршень.

Из результатов § 20 следует, что автомодельность движения газа за ударной волной возможна только для показателей автомодельности $\alpha = 1$ и $\beta = 0$. В этом случае представление решения (20.1) таково:

$$q = \frac{r}{t} U(\lambda), \quad \rho = R(\lambda), \quad p = \frac{r^2}{t^2} P(\lambda); \quad \lambda = \frac{r}{t}. \quad (1)$$

Здесь основное дифференциальное уравнение (20.4) упрощается до следующего:

$$\frac{dZ}{dU} = \frac{Z}{U} \frac{2\gamma Z - (U-1)(\kappa U - 2)}{\mu\gamma Z - (U-1)^2}, \quad (2)$$

где

$$\kappa = (\mu - 1)(\gamma - 1) + 2$$

и величина Z дается формулой (20.9). Если уравнение (2) имеет решение $Z = Z(U)$, удовлетворяющее граничным условиям на поршне и на удар-

ной волне, то зависимость $U(\lambda)$ находится квадратурой из уравнения (20.6), которое здесь упрощается и может быть записано в виде

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = - \frac{\gamma Z - (U - 1)^2}{\mu \gamma Z - (U - 1)^2} \frac{dU}{U}. \quad (3)$$

Граничные условия на поршне и на ударной волне дают начальные данные для решения уравнений (2) и (3). На поршне, закон движения которого есть $r = q_0 t$, известно значение $\lambda = q_0$ и, согласно (20.19), должно выполняться условие

$$U(q_0) = 1.$$

Так как точка $(\lambda, U) = (q_0, 1)$ не является особой для уравнения (3), то условием (4) его решение определено однозначно.

Условие на ударной волне вытекает из (20.25). Пусть индекс «ф» отмечает значения величин на фронте (за волной). Тогда с учетом того, что скорость перед фронтом $U_1 = 0$ и $\alpha = 1$ уравнения (20.25) упрощаются и равносильны следующим:

$$\begin{aligned} Z_\phi &= (1 - U_\phi)(Z_1 + U_\phi), \\ Z_\phi &= Z_1 + \frac{\gamma - 1}{2\gamma} U_\phi(2 - U_\phi), \end{aligned}$$

где Z_1 есть значение величины Z перед фронтом. Эти уравнения легко решаются относительно величин за фронтом и дают

$$\begin{aligned} U_\phi &= \frac{2}{\gamma + 1} (1 - \gamma Z_1), \\ Z_\phi &= \frac{2\gamma(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)^2} \left(\frac{\gamma - 1}{2\gamma} + Z_1 \right) \left(\frac{2}{\gamma - 1} - Z_1 \right). \end{aligned} \quad (5)$$

При переменном Z_1 формулы (5) определяют на плоскости $R^2(U, Z)$ линию — геометрическое место всевозможных состояний за фронтом. Эта линия ударной волны после исключения из (5) параметра Z_1 дается явным уравнением

$$\gamma Z = (1 - U) \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} U \right). \quad (6)$$

Значение параметра Z_1 , определяющего положение точки (5) на линии ударной волны (6), связано с постоянной (в силу (20.20)) скоростью D_ϕ перемещения ударной волны через соотношения (20.9). Именно, так как закон

движения фронта есть $\tau = D_\Phi t$, то из (20.9) следует равенство

$$\gamma Z_1 = c_1^2 / D_\Phi^2, \quad (7)$$

где c_1 есть скорость звука в покоящемся газе.

Структура плоскости (U, Z) . Картина расположения особых линий уравнений (2) и (3) на плоскости $R^2(U, Z)$ (нули числителя и знаменателя) и линии ударной волны (6) показана на рис. 1. Из нее следует, что в области полосы $0 < U \leq 1$, лежащей выше линии ударной волны (6), производная dZ/dU в (2) непрерывна и всюду положительна. Поэтому каждая интегральная кривая уравнения (2), выходящая в этой области из какой-либо точки Φ линии ударной волны, necessarily достигает линии поршня $U = 1$ в некоторой точке Π . Эта интегральная кривая и дает искомую зависимость Z от U , в которой еще присутствует неопределенный параметр Z_1 , т. е. на самом деле функцию $Z = Z(U, Z_1)$. В частности, определяется значение величины $Z = Z_\Pi$ на поршне.

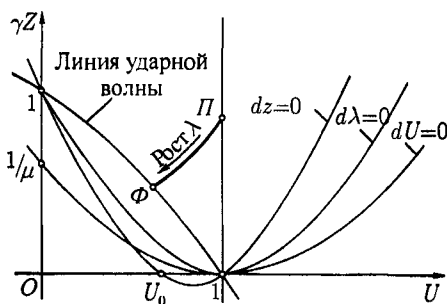


Рис. 1

После этого зависимость $U(\lambda)$ находится квадратурой из уравнения (3) и оказывается однозначной, так как в рассматриваемой области всюду $d\lambda/dU < 0$. Интеграл от (3), взятый по всему промежутку $(U_\Phi, 1)$, позволяет учесть условие (4) и, в силу равенства $\lambda_\Phi = D_\Phi$, дает соотношение

$$\ln \frac{D_\Phi}{q_0} = \int_{U_\Phi}^1 \frac{\gamma Z(U, Z_1) - (U-1)^2}{\mu \gamma Z(U, Z_1) - (U-1)^2} \frac{dU}{U}. \quad (8)$$

Это соотношение, с учетом выражений (5) и (7), следует рассматривать как уравнение относительно оставшегося до сих пор неопределенным парамет-

ра Z_1 . Соотношение (8) можно также рассматривать как уравнение, неявно определяющее зависимость вида

$$M_\Phi = F(M_0) \quad (9)$$

между числом Маха поршня $M_0 = q_0/c_1$ и числом Маха ударной волны $M_\Phi = D_\Phi/c_1$. Входящая сюда функция F определяется расчетом, включающим численное интегрирование уравнения (2) и выполнение квадратуры (8). Очевидно, что функция F является стандартной, зависящей только от показателя адиабаты γ и размерности пространства μ . Выполненные расчеты (см. [7]) показывают, что при прочих равных условиях порожденная поршнем сферическая ударная волна перемещается медленнее, чем плоская.

Давление на поршень. Для определения давления на поршень необходимо обратиться к уравнению (20.7), которое в данном случае после комбинирования с уравнением (3) принимает вид дифференциальной связи R с U :

$$\frac{dR}{R} = (\mu - 1) \frac{(1 - U)dU}{\mu\gamma Z - (1 - U)^2}. \quad (10)$$

Начальное условие к нему вытекает из первого условия (20.24) на ударной волне, которое приводится к виду

$$R_\Phi = (1 - U_\Phi)\rho_1. \quad (11)$$

Интегрирование уравнения (10) вдоль всей кривой ФП (см. рис. 1) с учетом условия (11) приводит к формуле

$$\ln \frac{\rho_n}{\rho_1(1 - U_\Phi)} = (\mu - 1) \int_{U_\Phi}^1 \frac{(1 - U)dU}{\mu\gamma Z(U, Z_1) - (1 - U)^2}, \quad (12)$$

которая определяет значение плотности ρ_n на поршне. Так как значение Z_n величины Z на поршне известно (оно уже получено при интегрировании уравнения (2)), то давление p_n на поршне определяется вытекающей из соотношений (20.9) формулой

$$p_n = q_0^2 \rho_n Z_n.$$

Учитывая, что $\gamma p_1 = c_1^2 \rho_1$, ее можно записать в безразмерной форме:

$$\frac{p_n}{p_1} = \gamma Z_n M_0^2 \frac{\rho_n}{\rho_1}. \quad (13)$$

Очевидно, что правая часть формулы (13) зависит только от числа Маха поршня M_0 . Расчет показывает (см. [7]), что, при прочих равных условиях, давление газа на сферический поршень меньше, чем на плоский.

Следует заметить, что хотя наиболее интересными значениями параметра μ здесь являются $\mu = 2$ и $\mu = 3$, приведенное решение задачи о поршне годится и для $\mu = 1$. Тогда получаются результаты, которые уже обсуждались в § 18. Проверка этого факта предоставляется читателю.

Задача о сильном взрыве представляет большой интерес не только в связи с практической возможностью оценивать энергию взрыва, например при атомных взрывах в воздухе или в воде, но также ввиду достигаемого здесь изящного описания сложного неустановившегося движения газа посредством относительно простых конечных формул.

Постановка задачи о сильном взрыве. В покоящемся политропном газе с показателем адиабаты γ и параметрами состояния ρ_1, p_1 , заполняющем все пространство R^3 , в момент времени $t = 0$ в точке $r = 0$ мгновенно выделилась большая (по сравнению с внутренней энергией газа) *конечная энергия* E_0 (произошел взрыв). При $t > 0$ в газ распространяется ударная волна, вызывающая одномерное движение с плоскими, цилиндрическими или сферическими волнами. Требуется найти закон перемещения ударной волны и движение газа за ее фронтом.

На основании рассмотрений § 20 легко устанавливается, что точное автомодельное решение этой задачи не существует. Действительно, так как фронт ударной волны должен быть поверхностью уровня $\lambda = \lambda_\Phi$, то выражение для полной энергии, заключенной в шаре радиуса $r_\Phi = \lambda_\Phi t^\alpha$, дается формулой (см. (20.12), (20.15):

$$E(t) = t^{\beta + (\nu + 3)\alpha - 2} \int_0^{\lambda_\Phi} \left(\frac{1}{2} R U^2 + \frac{1}{\gamma - 1} P \right) \lambda^{\nu + 2} d\lambda. \quad (14)$$

Если здесь показатель степени при t отличен от нуля, то при $t \rightarrow 0$ для $E(t)$ в пределе получится либо значение нуль, либо бесконечность. Ясно, что это противоречит постановке задачи, так как при $t \rightarrow 0$ должна получиться конечная энергия E_0 . Поэтому необходимо

$$\beta + (\nu + 3)\alpha - 2 = 0. \quad (15)$$

С другой стороны, ударная волна идет по покоящемуся газу и потому показатели автомодельности должны быть $\alpha = 1$ и $\beta = 0$. Однако при этих значениях соотношение (15) не выполняется ни при каком $\nu \geq 0$.

По этой причине автомодельное решение задачи о сильном взрыве возможно лишь в приближенной постановке, которая уже обсуждалась в § 20.

Она годится как приближение для *очень сильных* ударных волн, что хорошо согласуется с предположением о большой величине выделенной энергии E_0 . Так как эта постановка возможна при $\beta = 0$ и любом значении α , то требование (15) конечности энергии $E(t)$ является уравнением, определяющим величину показателя автомодельности α . Он необходимо должен быть равен

$$\alpha = \frac{2}{\nu + 3}. \quad (16)$$

Следовательно, приближенное автомодельное решение задачи о сильном взрыве можно получить только с показателем автомодельности (16), а именно $\alpha = 2/3$ для плоских волн, $\alpha = 1/2$ для цилиндрических волн и $\alpha = 2/5$ для сферических волн. Ниже излагается решение этой задачи для сферического случая.

Для сферической ударной волны, когда $\alpha = 2/5$, значения основных величин на фронте, согласно формулам (20.27), таковы:

$$\begin{aligned} U_\Phi &= \frac{4}{5(\gamma + 1)}, & Z_\Phi &= \frac{8(\gamma - 1)}{25(\gamma + 1)^2}, \\ R_\Phi &= \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}\rho_1, & P_\Phi &= \frac{8}{25(\gamma + 1)}\rho_1. \end{aligned} \quad (17)$$

Интеграл Седова. Как было замечено впервые Л.И.Седовым (см. ссылки в [7]), эта задача имеет конечный интеграл энергии. Он следует из интеграла (20.17) при $\lambda_0 = 0$; тогда будет $A_E = 0$ и получится равенство

$$PU + \left(\frac{1}{2}RU^2 + \frac{1}{\gamma - 1}P \right) \left(U - \frac{2}{5} \right) = 0. \quad (18)$$

Это и есть *интеграл Седова*. После деления на R и введения, согласно (20.8), величины Z равенство (18) принимает вид

$$UZ + \left(\frac{1}{2}U^2 + \frac{1}{\gamma - 1}Z \right) \left(U - \frac{2}{5} \right) = 0,$$

откуда получится простое выражение Z через U :

$$Z = \frac{\gamma - 1}{2\gamma} U^2 \frac{\frac{2}{5} - U}{U - \frac{2}{5\gamma}}. \quad (19)$$

Поскольку соотношение (19) есть точное следствие законов сохранения, то определяемая им функция $Z(U)$ должна быть точным решением соответ-

ствующего уравнения (20.4). В этом нетрудно убедиться прямой подстановкой выражения (19) в уравнение с учетом значений показателей автомодельности $\beta = 0$, $\alpha = 2/5$ и числа $\mu = 3$. Легко проверить также, что интегральная кривая (19) проходит через нужную точку на фронте (U_Φ, Z_Φ) , координаты которой даются формулами (17).

Следует заметить, что интеграл Седова (18) является *частным интегралом* соответствующего дифференциального уравнения (20.4): он не содержит произвольных постоянных.

Анализ решения. Имея интеграл (19), можно найти зависимость $U(\lambda)$. Соответствующее уравнение (20.6), после подстановки в него функции (19), принимает вид

$$\frac{1}{\lambda} \frac{d\lambda}{dU} = \frac{\gamma+1}{3\gamma-1} \frac{\left(U - \frac{2}{5\gamma}\right)^2 + \frac{4(\gamma-1)}{25\gamma^2(\gamma+1)}}{U \left(U - \frac{2}{5\gamma}\right) \left(\frac{2}{3\gamma-1} - U\right)}. \quad (20)$$

Для того чтобы разобраться в ходе искомой интегральной кривой, необходимо заметить, что для положительности величины Z согласно (19) требуется, чтобы величина U менялась в интервале (с учетом того, что всегда $\gamma > 1$)

$$\frac{2}{5\gamma} < U < \frac{2}{5}. \quad (21)$$

Нетрудно убедиться в том, что точка U_Φ из (17) при любом $\gamma > 1$ лежит в интервале (21). Но уравнение (20) имеет еще одну особую точку $U_* = 2/(3\gamma - 1)$. Сравнение ее с U_Φ показывает, что при $\gamma < 7$ справедливо неравенство $U_\Phi < U_*$, а при $\gamma > 7$, наоборот, $U_* < U_\Phi$. При этом всегда $2/5\gamma < U_*$.

Пусть сначала $\gamma < 7$. Тогда из (20) следует, что $d\lambda/dU > 0$ в интервале $2/5\gamma < U < U_\Phi$, в силу чего величина U возрастает с ростом λ . При этом $\lambda \rightarrow 0$, когда $U \rightarrow 2/5\gamma$. Отсюда вытекает качественный график зависимости $U(\lambda)$, показанный на рис. 2,а. Этот график описывается аналитически после взятия квадратуры в (20), которая выполняется явно и дает

$$\frac{\lambda}{\lambda_\Phi} = A_\Phi U^{-2/5} \left(U - \frac{2}{5\gamma}\right)^m \left|\frac{2}{3\gamma-1} - U\right|^{-n}, \quad (22)$$

где

$$m = \frac{\gamma-1}{2\gamma+1}, \quad n = \frac{13\gamma^2 - 7\gamma + 12}{5(2\gamma+1)(3\gamma-1)},$$

а константа A_Φ зависит только от γ и получается из (22) при $\lambda = \lambda_\Phi$ и $U = U_\Phi$. Получаемое здесь решение определено во всей области, от центра $r = 0$ до фронта ударной волны $r_\Phi = \lambda_\Phi t^{2/5}$.

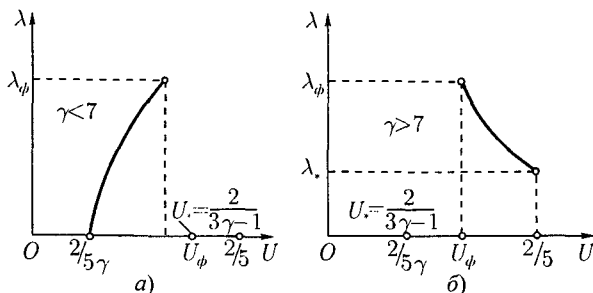


Рис. 2

Если же $\gamma > 7$, то в окрестности и справа от точки U_Φ будет $d\lambda/dU < 0$, т. е. с убыванием λ величина U растет. Отсюда вытекает качественный график зависимости $U(\lambda)$, показанный на рис. 2, б. Этот график описывается аналитически той же зависимостью (22), но теперь в интервале $U_\Phi < U < 2/5$. При этом, когда $U = 2/5$, то $\lambda = \lambda_* > 0$. Это означает, что получаемое здесь решение не определено вплоть до центра $r = 0$. Так как при $U = 2/5$ из (19) получается, что $Z = 0$, то все эти факты приводят к следующему выводу. Если $\gamma > 7$, то область движущегося газа заключена между сферами $r_* = \lambda_* t^{2/5}$ и $r_\Phi = \lambda_\Phi t^{2/5}$, а внутри сферы $r = r_*$ находится *состояние вакуума*.

Рис. 3

Вытекающее из этих рассмотрений поведение величин Z , U и λ показано на рис. 3, где дан график зависимости (19) и стрелками обозначено направление изменения этих величин от фронта ударной волны к центру для случаев $\gamma < 7$ и $\gamma > 7$. При $\gamma = 7$ в области за фронтом величины U и Z постоянны; анализ этого решения предоставляется читателю.

Вычисление зависимости $R(\lambda)$ выполняется с использованием функции (22) и соответствующего уравнения (20.7). При этом фактически полу-

чается функция $R(U)$, которая выписывается явно, аналогично (22). Наконец, зависимость $P(\lambda)$ находится просто по формуле $P = ZR$.

Расчет движения фронта. В полученном решении остается один неопределенный параметр — входящее в (22) значение λ_Φ . Эта величина определяется условием заданной энергии взрыва E_0 . Действительно, в силу (15) в формуле (14) следует положить $E(t) = E_0$. Кроме того, необходимо заметить, что, как это следует из (22), на самом деле величины U , R , P зависят только от отношения λ/λ_Φ . Поэтому после подстановки

$$U = \bar{U}(\xi), \quad R = \rho_1 \bar{R}(\xi), \quad P = \rho_1 \bar{P}(\xi), \quad \xi = \lambda/\lambda_\Phi, \quad (23)$$

и перехода к переменной интегрирования ξ равенство (14) примет вид

$$E_0 = e_0 \rho_1 \lambda_\Phi^5, \quad (24)$$

где величина

$$e_0 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + \bar{R}\bar{U}^2 + \frac{1}{\gamma-1} \bar{P} \right) \xi^4 d\xi \quad (25)$$

зависит только от показателя адиабаты γ .

Формулой (24) и определяется искомое значение

$$\lambda_\Phi = \left(\frac{E_0}{e_0 \rho_1} \right)^{1/5}. \quad (26)$$

Тем самым задача о сильном взрыве полностью решена. Закон движения фронта ударной волны дается уравнением

$$r_\Phi = \lambda_\Phi t^{2/5}, \quad (27)$$

а распределение параметров газа за фронтом — формулами

$$\begin{aligned} \frac{q}{q_\Phi} &= \frac{5(\gamma+1)}{4} \xi \bar{U}(\xi), & \frac{\rho}{\rho_\Phi} &= \frac{\gamma+1}{\gamma+1} \bar{R}(\xi), \\ \frac{p}{p_\Phi} &= \frac{25(\gamma+1)}{8} \xi^2 \bar{P}(\xi); & \xi &= \frac{r}{r_\Phi}. \end{aligned} \quad (28)$$

Качественный характер распределений скорости, плотности и давления за ударной волной, описываемых формулами (28), показан на рис. 4.

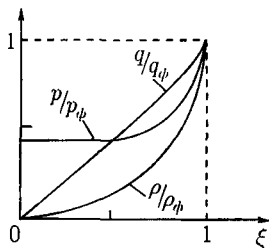


Рис. 4

Можно заметить еще, что если выразить скорость фронта ударной волны D_Φ через его радиус r_Φ и использовать значение (26), то получится формула

$$D_\Phi = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{E_0}{\epsilon_0 \rho_1}} r_\Phi^{-3/2}. \quad (29)$$

Сравнение (29) с асимптотикой (19.19) показывает, что при сильном взрыве скорость распространения ударной волны с ростом ее расстояния от места взрыва убывает быстрее, чем в случае слабых ударных волн. Поэтому область применимости формул (28) решения задачи о сильном взрыве ограничена теми расстояниями, на которых ударная волна остается достаточно сильной.

Задачи и упражнения к главе III

1. Показать, что стационарные решения уравнений одномерного движения (15.1) описывают течения типа источника (см. § 11).

2. Показать, что с массовой лагранжевой координатой ξ (см. § 15) система (15.1) в лагранжевых координатах (ξ, t) имеет вид $(V = 1/\rho)$

$$u_t + r^\nu p_\xi = 0, \quad V_t - r^\nu u_\xi = \frac{\nu}{r} V u, \quad S_t = 0.$$

3. Найти характеристическую форму уравнений одномерного движения газа в лагранжевых координатах (см. задачу 2).

4. Для уравнений одномерного изэнтропического движения с плоскими волнами политропного газа при $\gamma = 3$ найти класс точных решений, для которых массовая лагранжева координата имеет вид $\xi = \xi(\lambda)$, где $\lambda = r/t$.

5. Найти явные окончательные формулы и дать анализ точного решения вида (15.29), (15.30) системы (15.1) в случае $\psi(\xi) = \xi^\nu$ для показателя адиабаты $\gamma = (\mu + 2)/\mu$.

6. Поршень, занимавший в момент времени $t = 0$ положение $x = 0$, выдвигается по закону $x = at^2$ ($a < 0$) из трубы, заполненной покоящимся политропным газом (при $x > 0$), в котором скорость звука равна c_0 . Описать движение газа в классе простых волн.

7. При условиях предыдущей задачи поршень вдвигается в трубу по закону $x = at^2$ ($a > 0$). Показать, что момент наступления градиентной катастрофы дается формулой

$$t_k = c_0/(\gamma + 1)a.$$

8. Найти закон движения свободного поршня массы M в неограниченной трубе с площадью сечения F под действием давления расширяющегося политропного газа, первоначально находившегося в состоянии покоя, если по другую сторону поршня давление равно нулю (вакуум).

9. Показать, что если при отражении простой волны от жесткой стенки получается снова простая волна, то падающая и отраженная волны являются одновременно либо волнами сжатия, либо волнами разрежения.

10. Показать, что для политропного газа с $\gamma = 3$ уравнение Эйлера–Пуассона (16.50) имеет общее решение вида

$$t = \frac{F(r) - G(l)}{r - l},$$

где F и G — произвольные функции. Используя этот факт, найти явное решение задачи о взаимодействии центрированных волн разрежения (см. § 16).

11. Закрытая с двух концов труба длины L заполнена покоящимся политропным газом с $\gamma = 3$. В момент времени $t = 0$ один конец открывается и через него начинается истечение в вакуум. Найти распределение основных величин в трубе для всех $t > 0$.

12. Ударная волна падает на контактный разрыв, разделяющий два состояния покоя одного и того же политропного газа. Найти условия, при которых контактный разрыв исчезает в результате взаимодействия.

13. Поршень, вдвигающийся с постоянной скоростью в покоящийся политропный газ, внезапно останавливается. Показать, что давление на поршне положительно (т. е. что газ не отрывается от поршня).

14. Доказать, что в политропном газе после встречи ударных волн, идущих навстречу друг другу, всегда образуются две ударные волны.

15. Показать, что при столкновении одинаковых политропных газов с параметрами c_0 , T_0 , двигавшихся навстречу со скоростью q_0 каждый, образуется область с температурой

$$T = T_0 H \frac{\gamma + 1 - (\gamma - 1)H}{(\gamma + 1)H - (\gamma - 1)},$$

где

$$H = 1 + \frac{\gamma + 1}{4} M_0^2 - \sqrt{\left(\frac{\gamma + 1}{4}\right)^2 M_0^4 + M_0^2}, \quad M_0 = q_0/c_0.$$

16. Построить графики распределения (функции от x) основных величин (u , p , ρ , S) для некоторого момента времени $t > 0$ при распаде произвольного разрыва (10 конфигураций).

17. Вывести формулы для решения задачи о распаде произвольного разрыва в акустическом приближении.

18. Проинтегрировать дифференциальное уравнение траекторий $dx/dt = u$ в центрированной простой волне при одномерном движении политропного газа с плоскими волнами.

19. При условиях предыдущей задачи проинтегрировать дифференциальное уравнение характеристик непрямолинейного семейства.

20. Показать, что при определении результата преломления ударной волны на контактном разрыве (см. § 18) в случае, когда по обе стороны разрыва находятся

политропные газы с одинаковым показателем адиабаты, будет $p_* > p_3$, если $\rho_2 > \rho_1$ и $p_* < p_3$, если $\rho_2 < \rho_1$.

21. Вывести формулу для отношения плотностей ρ_3/ρ_1 при отражении ударной волны от жесткой стенки в случае политропного газа (см. § 18). Показать, что предельное значение этого отношения при $p_2/p_1 \rightarrow \infty$ таково:

$$\lim \frac{\rho_3}{\rho_1} = \frac{\gamma(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)^2}.$$

22. Найти и проанализировать точное решение системы (20.2) при $\beta = -1$, $\alpha = \mu = 1$.

23. Показать, что точное решение (20.18) совместимо с условиями на автомодельной ударной волне (20.24) в том смысле, что оно может описывать движение по обе стороны от разрыва.

24. Бесконечная труба с площадью сечения F заполнена покоящимся политропным газом с известными параметрами и разделена на две части невесомым поршнем. Найти силу, которую надо приложить к поршню для того, чтобы мгновенно привести его в движение с заданной скоростью U .

25. Построить решение задачи о сильном сферическом взрыве в газе с показателем адиабаты $\gamma = 7$.

26. Дать анализ решения задачи о сильном взрыве для одномерного движения с плоскими волнами.

27. Показать, что решение задачи о поршне в случае одномерного движения с плоскими волнами, описанное в § 21, совпадает с решением, полученным в § 18.

Двумерные установившиеся течения

Теория двумерных — плоскопараллельных и осесимметричных — установившихся течений составляет обширный и богатый конкретными фактами раздел газовой динамики. Исторически эта теория выросла из потребностей аэродинамики самолета и снаряда. При этом ограничение двумерной моделью оправдано примерно теми же соображениями, которые уже высказывались в начале главы III по поводу одномерных движений.

Внешне модель двумерных установившихся течений имеет много общего с моделью одномерных движений газа. Их роднит, например, наличие лишь двух независимых переменных и возможность наглядного изображения газодинамических ситуаций на *плоскости течения*. Кроме того, сверхзвуковые установившиеся течения обладают определенным свойством эволюционности и для них плоскость течения (точнее, плоскость потенциала) может трактоваться как плоскость событий.

Для двумерных установившихся течений газ с уравнением состояния «с разделенной плотностью» (10.26), в частности — для политропного газа, справедливо преобразование Мунка — Прима (10.27). В этом случае можно ограничиться рассмотрением изэнтропических течений.

Радикальное отличие от модели одномерных движений состоит в том, что основные дифференциальные уравнения уже не являются гиперболическими для всех возможных течений. Это влечет подразделение установившихся течений на дозвуковые (эллиптический тип уравнений), сверхзвуковые (гиперболический тип) и транзвуковые или околозвуковые (смешанный тип). Для каждого типа течения характерны свои постановки корректных краевых задач и свои методы исследования.

До определенного предела теория развивается одинаково для плоскопараллельных и осесимметричных течений. Однако более богатая результатами (за счет более широкого группового свойства) теория плоскопараллельных течений излагается в этой главе и более детально. Для нее развивается один из основных методов изучения и решения конкретных задач о безвихревых течениях — метод годографа. Разработанный еще в начале текущего

столетия С. А. Чаплыгиным метод годографа и сегодня остается наиболее эффективным в этой области газовой динамики. Его ценность не только в том, что он позволяет получать аналитические решения ряда конкретных задач, но также в возможности выявления с его помощью качественных закономерностей течений.

Одним из наиболее ярких достижений современной газовой динамики явилось познание закономерностей перехода через скорость звука. Трансзвуковая газодинамика дала толчок развитию новой области математической физики — теории уравнений смешанного типа. Вместе с тем модели околосвуковых, а также гиперзвуковых течений особенно тесно примыкают к практическим задачам. Однако сегодня их разработку вряд ли можно считать законченной. Теоретическая газовая динамика еще далеко не разрешила всех своих проблем и нуждается в дальнейшем развитии.

§ 22. Уравнения безвихревого течения

Плоскопараллельные и осесимметричные течения. Изучаемые в этом параграфе плоскопараллельные и осесимметричные течения газа обладают общими свойствами. Основными величинами здесь являются компоненты вектора скорости $\mathbf{u} = (u, v)$, плотность ρ , давление p и энтропия S , причем последние связаны уравнением состояния $p = f(\rho, S)$ и газ предполагается нормальным (см. § 2). Основные величины рассматриваются как функции декартовых координат (x, y) . При этом некоторого разъяснения требует изображение осесимметричных течений. Прежде всего, безоговорочно принимается, что ось симметрии совпадает с прямой $y = 0$. Далее, физическая картина осесимметричного течения восстанавливается в трехмерном пространстве R^3 путем вращения меридиональной полуплоскости $y > 0$ вокруг оси $y = 0$. При повороте на угол 180° эта полуплоскость становится продолжением исходной, а любое изображение — зеркально симметричным исходному. Ясно, что этим же свойством обладает *преобразование симметрии*

$$x' = x, \quad y' = -y, \quad u' = u, \quad v' = -v, \quad (1)$$

причем остальные основные величины сохраняются. Следовательно, условие симметрии (1) является необходимым для правильного описания осесимметричных течений на всей плоскости $R^2(x, y)$. Во всех случаях плоскость $R^2(x, y)$ называется *плоскостью течения*. Используется координатная форма записи различных соотношений, причем частные производные обозначаются соответствующими индексами.

Исходные дифференциальные уравнения для основных величин следуют, например, из уравнений (12.17), (12.19):

$$\begin{aligned} u u_x + v u_y + \frac{1}{\rho} p_x &= 0, \\ u v_x + v v_y + \frac{1}{\rho} p_y &= 0, \\ u \rho_x + v \rho_y + \rho \left(u_x + v_y + \frac{\nu}{y} v \right) &= 0, \\ u S_x + v S_y &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где параметр $\nu = 0$ для плоскопараллельных течений и $\nu = 1$ для осесимметричных течений. Здесь первые два уравнения описывают закон сохранения импульса, третье есть уравнение неразрывности и последнее — одна из форм закона сохранения энергии (см. § 3). Легко проверяется, что уравнения (2) допускают преобразование (1). Поэтому требование выполнения условия симметрии (1) означает, что в случае $\nu = 1$ рассматриваются только такие решения, которые *инвариантны* относительно этого преобразования. Следовательно, если область непрерывного осесимметричного течения содержит ось $y = 0$ (или некоторый ее интервал), то необходимо должно выполняться условие

$$v(x, 0) = 0, \quad (\nu = 1). \quad (3)$$

Линии тока. Основным качественным элементом при анализе и графическом наглядном представлении решений системы (2) являются *линии тока*, которые для любых установившихся течений уже были введены определением 10.1. С учетом специфики двумерности течения они определяются здесь как интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{u(x, y)} = \frac{dy}{v(x, y)}. \quad (4)$$

Это определение равносильно тому, что в каждой точке вектор скорости $\mathbf{u} = (u, v)$ направлен по касательной к линии тока, проходящей через эту точку. В симметричной записи (4) не предопределяется, какая из переменных, x или y , является независимой, а какая — зависимой. Область течения, в которой вектор скорости удовлетворяет условию Липшица по обшим переменным и $u^2 + v^2 \neq 0$, однократно покрыта семейством линий тока. Их изображение на плоскости $R^2(x, y)$ дает наглядное представление о течении газа, частицы которого как раз и движутся вдоль линии тока.

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к границе Γ области Ω . Здесь граница Γ состоит из четырех кривых: сечений A_1A_2 и B_1B_2 и отрезков линий тока $A_1B_1 \subset \mathcal{L}_1$ и $A_2B_2 \subset \mathcal{L}_2$. Очевидно, что в силу определения линий тока $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ на A_1B_1 и A_2B_2 . Пусть $\mathbf{s}$ — касательный вектор к A_1A_2 или B_1B_2 , указывающий направление перемещения от A_1 к A_2 или от B_1 к B_2 . Удобно изменить направление орта нормали $\mathbf{n}$, выбрав его так, чтобы оно после поворота на 90° против часовой стрелки совпадало с направлением $\mathbf{s}$. При таком выборе нормали $\mathbf{n}$ равенство (9) принимает вид

$$Q(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \int_{A_1A_2} y^\nu \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{B_1B_2} y^\nu \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds. \quad (10)$$

Величина $Q(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ называется *расходом* газа между линиями тока $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$. Равенство (10) показывает, что это определение корректно, так как в силу (10) расход $Q(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ не зависит от выбора сечения.

Ясно, что благодаря принятому соглашению о направлении нормали $\mathbf{n}$ из представления из $ds = (dx, dy)$ следует представление $\mathbf{n} ds = (dy, -dx)$. Значит, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = -v dx + u dy$ и в силу определения (7) подынтегральное выражение в (10) оказывается совпадающим с дифференциалом функции тока:

$$y^\nu \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = y^\nu \rho (-v dx + u dy) = \psi_x dx + \psi_y dy = d\psi.$$

Поэтому равенство (10) равносильно следующему:

$$Q(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \psi(\mathcal{L}_2) - \psi(\mathcal{L}_1). \quad (11)$$

Соотношение (11) и выражает второе свойство функции тока: *расход газа между двумя линиями тока равен приращению функции тока*. Из него следует, что в области непрерывного течения функция тока различает линии тока в том смысле, что на разных линиях тока она necessarily имеет разные значения.

В § 10 уже были получены два интеграла, (10.6) и (10.10), основных дифференциальных уравнений движения газа, справедливые для любого установившегося течения. В силу свойств функции тока, для уравнений (2) они могут быть записаны в уточненной форме, подчеркивающей зависимость констант интегрирования от ψ . Это *интеграл энтропии*

$$S = S(\psi) \quad (12)$$

и *интеграл Бернулли*

$$q^2 + I(c^2) = q_m^2(\psi), \quad (13)$$

причем здесь $q^2 = u^2 + v^2$.

Вектор вихря ω в случае двумерных течений легко подсчитывается по формуле (11.1). При этом в случае $\nu = 1$ надо перейти к полярным координатам в плоскости (y, z) и принять во внимание, что в настоящем параграфе ν обозначает y -компоненту вектора скорости в той меридиональной плоскости, в которой $w = 0$. Вычисление показывает, что во всех случаях ω имеет только одну ненулевую компоненту, равную (в обозначениях данного параграфа) величине $\omega = v_x - u_y$.

Изэнтропичность безвихревых течений. Дальнейший анализ двумерных течений связан с предположением о безвихревом характере движения (см. § 11). При этом система (2) дополняется уравнением $\omega = 0$ или

$$v_x - u_y = 0. \quad (14)$$

В таком течении, согласно лемме 11.1, должно выполняться соотношение (11.3), которое здесь сводится к одному скалярному и переписывается в виде

$$\rho_x S_y - \rho_y S_x = 0. \quad (15)$$

Очевидно, что соотношение (15) может быть справедливо лишь в следующих трех случаях: (а) $S = \text{const}$ тождественно; (б) $\rho = \text{const}$ тождественно; (с) функции ρ и S связаны функциональной зависимостью $\rho = \rho(S)$. Предположение (а) об изэнтропичности течения является основным; такие течения в дальнейшем будут изучаться подробно. Предположение (б) приводит к классическим уравнениям безвихревых течений несжимаемой жидкости, которые в газовой динамике играют роль приближенной предельной модели (см. § 9). Что же касается случая (с), то он требует специального исследования, результаты которого приводятся ниже.

Если $S \neq \text{const}$ и $\rho = \rho(S)$, то все термодинамические параметры становятся функциями только энтропии S . В силу интеграла (12) это равносильно тому, что все они являются функциями только величины функции тока ψ . Но тогда из интеграла Бернулли следует, что и модуль скорости q тоже является функцией только ψ . Кроме того, в силу равенства $D_t \rho = \rho'(\psi) D_t \psi = 0$ уравнение неразрывности (2) упрощается до следующего:

$$u_x + v_y + \frac{\nu}{y} v = 0. \quad (16)$$

Для удобства дальнейшего анализа вместо ψ вводится новая величина ξ , определяемая интегралом

$$\xi = \int_0^\psi \frac{d\psi}{\rho(\psi)}, \quad (17)$$

а ее производные получаются из формул (7):

$$\xi_x = -y^\nu v, \quad \xi_y = y^\nu u. \quad (18)$$

В силу представления модуля скорости $q = q(\xi)$ дифференцирование соотношения $u^2 + v^2 = q^2$ по x и по y с учетом равенств (14) и (18) дает уравнения

$$\begin{aligned} uu_x + vv_y &= -y^\nu qq'v, \\ uv_x + vv_y &= y^\nu qq'u, \end{aligned} \quad (19)$$

равносильные уравнениям импульса (2). Здесь штрихом обозначена производная по ξ . Итак, для трех функций, $u(x, y)$, $v(x, y)$, и $\xi(x, y)$, получилась система из шести дифференциальных уравнений первого порядка (14), (16), (18) и (19), в которые еще входит пока неопределенная функция $q(\xi)$. Так как из этой системы получаются выражения для всех производных первого порядка (для функции ξ они даются формулами (18)), то при данной функции $q(\xi)$ ее общее решение может зависеть самое большее от двух произвольных постоянных. Однако вопрос о существовании решений этой системы нетривиален, так как получаемые выражения для производных должны удовлетворять условиям совместности. Легко заметить только, что всегда существует *постоянное решение*

$$u = u_0 = \text{const}, \quad v = v_0 = \text{const},$$

причем в случае $\nu = 1$ в силу (3) должно быть $v_0 = 0$.

Теорема 1. *Всякое осесимметричное безвихревое течение с переменной энтропией есть поступательное движение в направлении оси симметрии. Не постоянное плоскопараллельное безвихревое течение с переменной энтропией описывается формулами*

$$u = -ayq^2, \quad v^2 = q^2 - a^2y^2q^4, \quad q = \exp(a\xi), \quad (20)$$

где $a = \text{const}$, причем линии тока этого течения образуют семейство концентрических окружностей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\xi = \xi(y)$, то $v = 0$ и $u_x = u_y = 0$, что приводит к постоянному решению. В противном случае можно взять y и ξ в качестве независимых переменных. Тогда, если временно положить $u = \tilde{u}(y, \xi)$, $v = \tilde{v}(y, \xi)$, то уравнения (19) приведутся к виду

$$\tilde{u}_y = -y^\nu qq', \quad \tilde{v}\tilde{v}_y = y^\nu qq'\tilde{u}.$$

Интегрирование по y даст выражения

$$\begin{aligned} u &= -\frac{y^{\nu+1}}{\nu+1} qq' + f(\xi), \\ v^2 &= -\frac{y^{2\nu+2}}{(\nu+1)^2} (qq')^2 + \frac{2y^{\nu+1}}{\nu+1} qq' f(\xi) + h(\xi), \end{aligned} \quad (21)$$

где f и h — произвольные функции только ξ . По построению найденные функции u и v удовлетворяют уравнениям (19). Легко проверить, что с этими функциями обращается в тождество также и уравнение (14). Остается удовлетворить уравнению (16). После подстановки в него найденных из (21) производных от u и v и сравнения членов с одинаковыми степенями y получаются следующие результаты. В случае $\nu = 1$ необходимо $h = 0$ и либо $f = 0$, либо $q' = 0$ и $f = \text{const}$. Обе возможности приводят к постоянному решению. В случае $\nu = 0$ существует нетривиальное решение

$$h = q^2 - f^2, \quad f = bq^2, \quad q' = aq$$

с постоянными a и b . Отсюда, с точностью до незначительного переноса по переменной y , получаются формулы (20). В силу этих формул дифференциальное уравнение линий тока (4) принимает вид

$$\sqrt{q^{-2} - a^2 y^2} dx = -ay dy$$

и сводится к квадратуре, так как $q = \text{const}$ вдоль линии тока. В интеграле этого уравнения

$$(ax - x_0)^2 + a^2 y^2 = q^{-2}(\xi) \quad (22)$$

константа интегрирования x_0 , вообще говоря, может зависеть от переменной ξ . Однако дифференцирование соотношения (22) по y с учетом формул (18) и (20) приводит к равенству $x'_0(\xi) = 0$, т.е. $x_0 = \text{const}$. Следовательно, уравнение (22) описывает семейство концентрических окружностей, радиус которых зависит от ξ . ■

Этот результат означает, что достаточно широкий класс двумерных установившихся безвихревых течений образуют лишь течения с постоянной энтропией. Однако необходимо помнить, что если в течении присутствует скачок уплотнения (см. § 10), то за ним образуется, вообще говоря, вихревое течение с переменной энтропией. В оставшейся части данного параграфа течение предполагается безвихревым и изэнтропическим.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Каждое безвихревое изэнтропическое течение является *изоэнергетическим* (см. § 10), т.е. в нем константа q_m^2 в интеграле Бернулли (13) не зависит от ψ . Этот факт легко проверяется непосредственно, дифференцированием соотношения (13) по x и y с использованием уравнений (2) и (14).

Основные уравнения. Важное свойство рассматриваемых течений состоит в том, что они описываются системой из двух уравнений для компонент вектора скорости. Первое из них есть уравнение (14), а второе выводится путем исключения производных ρ_x и ρ_y , из уравнения неразрывности (2). Для этого используются выражения этих производных, из уравнении импульса (2) в силу равенства $dp = c^2 d\rho$:

$$c^2 \rho_x = -\rho(uu_x + vv_y), \quad c^2 \rho_y = -\rho(uv_x + vv_y).$$

Окончательно получается следующая система уравнений *двумерных безвихревых изэнтропических течений*:

$$\begin{aligned} u_y - v_x &= 0, \\ (u^2 - c^2)u_x + 2uvu_y + (v^2 - c^2)v_y &= \frac{\nu}{y}c^2v, \end{aligned} \quad (23)$$

где квадрат скорости звука c^2 выражается через $q^2 = u^2 + v^2$ из интеграла Бернулли

$$q^2 + I(c^2) = q_m^2 \quad (24)$$

с постоянной, в силу замечания 1, величиной q_m^2 .

В случае политропного газа интеграл Бернулли (10.12) удобно записывать с критической скоростью (10.13):

$$q^2 + \frac{2}{\gamma - 1}c^2 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}c_*^2. \quad (25)$$

Уместно вспомнить, что анализ *типа* уравнений любых установившихся течений уже был выполнен в § 10. Он легко повторяется для системы (23) и показывает, что она имеет эллиптический тип на дозвуковых течениях и гиперболический тип на сверхзвуковых течениях (см. определение 10.3). Это различие существенно, оно с необходимостью влечет различие в постановках, методах исследования и решениях краевых задач. Более подробный анализ каждого типа течений и соответствующих задач будет проводиться в следующих параграфах. Здесь же внимание концентрируется на тех фактах, которые априори с типом системы (23) не связаны.

Уравнениям (23) можно придать множество равносильных форм, каждая из которых имеет свои преимущества при анализе тех или иных конкретных задач об отыскании газовых течений. Дальнейшее изложение посвящено выводу и предварительному изучению наиболее важных эквивалентных форм записи основных уравнений (23).

Потенциал скоростей. Первое из уравнений (23) равносильно существованию функции $\varphi = \varphi(x, y)$, производные которой даются формулами

$$\varphi_x = u, \quad \varphi_y = v. \quad (26)$$

Эта функция φ называется *потенциалом скоростей*. Ясно, что данным безвихревым полем скоростей (u, v) его потенциал определен единственным образом с точностью до постоянного слагаемого. Из сравнения определений (7) и (26) вытекает следующая связь функции тока с потенциалом скоростей:

$$\psi_x = -y^\nu \rho \varphi_y, \quad \psi_y = y^\nu \rho \varphi_x, \quad (27)$$

где плотность ρ выражается через $q^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$ с помощью интеграла Бернулли (24). Поэтому соотношения (27) образуют независимую систему из двух дифференциальных уравнений первого порядка для искомого потенциала скоростей φ и функции тока ψ , равносильную системе (23).

При наглядном графическом изображении течений на плоскости $R^2(x, y)$ наряду с линиями тока полезны также линии равного потенциала $\varphi(x, y) = \text{const}$, или *экипотенциали*. Так как $|\nabla \varphi| = q$, то расстояния между двумя экипотенциалами характеризуют величину скорости течения q . Кроме того, из (27) следует равенство $\nabla \psi \cdot \nabla \varphi = 0$, а это значит, что в любой точке плоскости течения проходящие через нее экипотенциаль и линия тока взаимно ортогональны. Следовательно, линии тока и экипотенциали всегда образуют на плоскости течения *ортогональную сеть*. Вытекающее из (27), в силу определения операторов (5), равенство

$$D_n \psi = y^\nu \rho D_l \varphi$$

дает представление о соотношении сторон прямоугольных ячеек этой сети.

После подстановки выражений для u и v из (26) во второе уравнение (23) последнее становится уравнением для φ . Разумеется, оно должно совпадать с уравнением (11.20), которое надо только взять в соответствующем двумерном варианте. Любым из этих двух способов получается *следующее уравнение для потенциала скоростей*:

$$(u^2 - c^2)\varphi_{xx} + 2uv\varphi_{xy} + (v^2 - c^2)\varphi_{yy} = \frac{\nu}{y}c^2\varphi_y, \quad (28)$$

которое, конечно, надо рассматривать одновременно с интегралом Бернулли (24). В частности, в случае политропного газа уравнение для потенциала

скоростей ~~также~~ таково:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\gamma+1}{2}(u^2 - c_*^2) + \frac{\gamma-1}{2}v^2 \right] \varphi_{xx} + 2uv\varphi_{xy} + \\ & + \left[\frac{\gamma-1}{2}u^2 + \frac{\gamma+1}{2}(v^2 - c_*^2) \right] \varphi_{yy} = \\ & = \frac{\nu}{y} \left[\frac{\gamma+1}{2}c_*^2 - \frac{\gamma-1}{2}(u^2 + v^2) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Метод годографа. Существует специальный метод исследования двумерных безвихревых изэнтропических течений газа, имеющий большое теоретическое и практическое значение, — так называемый *метод годографа*. Он основан на том, что описание таких течений сводится к отысканию отображения $R^2(x, y) \rightarrow R^2(u, v)$, определяемого формулами

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \quad (30)$$

Определение 1. Плоскость $R^2(u, v)$ называется *плоскостью годографа*. Для каждого течения, заданного формулами (30), годографом любого, содержащегося в области течения, множества точек плоскости $R^2(x, y)$ называется образ этого множества при отображении (30) на плоскость $R^2(u, v)$. В частности, определен годограф любой *точки, линии или области*.

На плоскости годографа вектор скорости u изображается радиус-вектором точки (u, v) , приложенным в начале координат. Ясно, что в силу интеграла Бернулли (24) годограф любого течения содержится внутри круга радиуса q_m с центром в начале координат (рис. 2). При этом все дозвуковые течения попадают внутрь круга радиуса c_* , а все сверхзвуковые течения — в кольцо $c_* < q < q_m$ (см. замечание после определения 10.3). Окружность $q = q_m$ является *годографом состояний вакуума*.

Отображение (30) будет взаимно однозначным не для любого течения. Например, каждая область постоянного течения имеет своим годографом одну точку. Исследование локальной взаимной однознач-

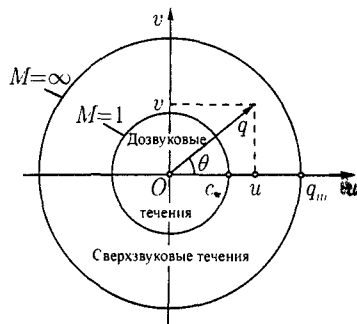


Рис. 2

ности этого отображения сводится к выяснению того, обращается ли якобиан

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x \quad (31)$$

в нуль или нет. Как известно, тождество $J = 0$ равносильно существованию функциональной зависимости между функциями (30). Но если в некотором течении $u = F(v)$ (или $v = F(u)$), то согласно определению 13.1 это течение есть простая волна. Поэтому важно найти и исследовать все решения — простые волны системы (23). В случае $\nu = 0$ множество простых волн достаточно обширно и будет подробно изучено в § 24.

Простые волны осесимметричных течений. В случае $\nu = 1$ система (23) имеет точное решение $u = 0$, $v = v(y)$, принадлежащее классу простых волн. Оно описывает *двумерный источник* газа и получается с помощью интеграла уравнения неразрывности (2) в виде соотношения, аналогичного (11.25), а именно, $u v v' = Q = \text{const}$. Качественная картина течения в двумерном источнике такая же, как и для сферического (см. рис. 11.2).

Все остальные простые волны описываются следующей теоремой, в которой предполагается, что решение не является постоянным или решением типа источника.

Теорема 2. *Всякая осесимметричная простая волна есть автомодельное решение системы (23) и, с точностью до переноса по координате x , дается формулами*

$$u = u(\lambda), \quad v = v(\lambda); \quad \lambda = x/y. \quad (32)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть простая волна определена зависимостью $u = F(v)$. Тогда, после подстановки в систему (23) получаемых из этого равенства выражений для производных, она примет следующий вид:

$$\begin{aligned} v_x &= F' v_y, \\ [(u^2 - c^2)F'^2 + 2uvF' + (v^2 - c^2)]yv_y &= c^2 v, \end{aligned} \quad (33)$$

где штрих обозначает производную функции F по v . Выражение в квадратной скобке не может быть тождественно равно нулю, так как иначе получилось бы, что $v = 0$ и $u = F(0) = \text{const}$, т.е. постоянное течение. Поэтому из второго уравнения (33) можно найти величину yv_y как функ-

цию только v , например $uv_y = G(v)$. Здесь удобно заменить переменную v вспомогательной переменной w , определив последнюю формулой

$$\ln w = - \int \frac{dv}{G(v)}.$$

Тогда соотношение $uv_y = G(v)$ преобразуется в соотношение $uw_y + w = 0$, которое интегрируется и дает интеграл $uw = \xi(x)$, где $\xi(x)$ — некоторая, пока произвольная функция. Но ясно, что для величины w , так же как и для v , справедливо уравнение вида первого уравнения (33), а именно:

$$w_x = -a(w)w_y.$$

Подстановка сюда найденного выше выражения $w = \xi(x)/y$ дает соотношение с разделенными переменными $\xi'(x) = wa(w)$, которое, в силу независимости переменных x и w , может быть справедливым, только если $\xi'(x) = b$ и $wa(w) = b$ с постоянной $b \neq 0$ (при $b = 0$ получается двумерный источник). Поэтому, с точностью до переноса по x , будет $\xi(x) = bx$, и, значит, $w = bx/y$. ■

Ясно, что во всех случаях годограф области, занимаемой простой волной, на плоскости течения есть линия на плоскости годографа. Поэтому в области простой волны отображение (30) не однолистно. Следовательно, за исключением постоянных течений и простых волн, течение общего характера отображается на плоскость годографа локально взаимно однозначно. В таких течениях величины u и v могут быть приняты в качестве независимых переменных.

Уравнения на плоскости годографа. Метод годографа и состоит в рассмотрении определяющих течение величин как функций переменных *годографа* (u, v) . Существует несколько вариантов получения преобразованных уравнений (23) на плоскости годографа, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки. Ниже излагаются два наиболее часто используемых варианта такого преобразования.

Имея в виду охват единым анализом как плоскопараллельных, так и осесимметричных течений, целесообразно принять в качестве искомых величин координаты точки (x, y) . Использование свойств якобианов позволяет выполнить преобразование производных с помощью цепочки равенств вида

$$u_x = \frac{\partial(u, y)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(u, y)}{\partial(u, v)} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = Jy_v,$$

где использовано обозначение (31). Аналогично преобразуются остальные производные, что приводит к стандартным формулам перемены ролей зависимых и независимых переменных:

$$u_x = Jy_v, \quad u_y = -Jx_v, \quad v_x = -Jy_u, \quad v_y = Jx_u. \quad (34)$$

В результате подстановки выражений (34) в систему (23) и получается иско-
мая система уравнений на плоскости годографа:

$$\begin{aligned} x_v - y_u &= 0, \\ (u^2 - c^2)y_v - 2uvx_v + (v^2 - c^2)x_u &= \frac{\nu}{y}c^2v(x_u y_v - x_v y_u). \end{aligned} \quad (35)$$

Непосредственно видно, что система дифференциальных уравне-
ний (35) в случае $\nu = 0$ является *линейной*, но остается нелинейной, ес-
ли $\nu = 1$. В этом факте коренится принципиальное различие описания
плоскопараллельных и осесимметричных течений.

Введение *потенциала Лежандра* $\Phi = \Phi(u, v)$ с помощью соотношений

$$x = \Phi_u, \quad y = \Phi_v \quad (36)$$

позволяет удовлетворить первому из уравнений (35). При этом второе при-
нимает форму *уравнения Монжа-Ампера*:

$$(u^2 - c^2)\Phi_{vv} - 2uv\Phi_{uv} + (v^2 - c^2)\Phi_{uu} = \frac{\nu c^2 v}{\Phi_v}(\Phi_{uu}\Phi_{vv} - \Phi_{uv}^2). \quad (37)$$

Дифференцированием по x и y легко проверяется, что потенциал Лежан-
дра Φ связан с потенциалом скоростей φ соотношением

$$\varphi = xu + yv - \Phi. \quad (38)$$

Переход от φ к Φ согласно равенству (38) называется *преобразованием Лежандра*.

Особенно простую форму принимает уравнение (37) в случае плоско-
параллельных течений (когда $\nu = 0$) после перехода к полярным координатам
(q, θ) на плоскости годографа (см. рис. 2):

$$u = q \cos \theta, \quad v = q \sin \theta. \quad (39)$$

После небольших вычислений уравнение для потенциала Лежандра
 $\Phi = \Phi(q, \theta)$ плоскопараллельных течений оказывается таким:

$$(M^2 - 1)\Phi_{\theta\theta} - q^2\Phi_{qq} + (M^2 - 1)q\Phi_q = 0, \quad (40)$$

где использовано обозначение числа Маха $M = q/c$. Важное свойство урав-
нения (40) состоит в том, что оно не только линейно, но в нем перемен-
ные q и θ разделяются. Это дает возможность строить его решения *методом*
разделения переменных. Очевидно также, что уравнение (40) имеет гипер-
болический тип, если $M > 1$ (сверхзвуковое течение), и эллиптический

тип, если $M < 1$ (дозвуковое течение). Рассматриваемое для всевозможных скоростей $0 \leq M < \infty$, т. е. в максимально широкой области плоскости годографа (см. рис. 2), уравнение (40) является уравнением смешанного типа. Кроме того, это уравнение вырождается (в смысле его типа) также на окружности вакуума $M = \infty$, где $c = 0$.

В случае политропного газа, в силу вытекающей из интеграла Бернулли (25) формулы

$$M^2 - 1 = \frac{q^2 - c_*^2}{c_*^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} q^2}, \quad (41)$$

уравнение для потенциала Лежандра таково:

$$(q^2 - c_*^2) \Phi_{\theta\theta} - \left(c_*^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} q^2 \right) q^2 \Phi_{qq} + (q^2 - c_*^2) q \Phi_q = 0. \quad (42)$$

Уравнения С. А. Чаплыгина. Другой вариант преобразования системы (23) на плоскость годографа состоит в том, что в качестве искомых величин берутся потенциал скоростей φ и функция тока ψ . Это преобразование особенно эффективно в случае плоскопараллельных течений, для которых оно и дается ниже.

Непосредственно из определения потенциала скоростей (26) и функции тока (7) следуют равенства (для $\nu = 0$)

$$d\varphi = u dx + v dy, \quad d\psi = -\rho v dx + \rho u dy.$$

После разрешения относительно dx и dy и перехода к полярным координатам (39) эти равенства принимают вид

$$dx = \frac{\cos \theta}{q} d\varphi - \frac{\sin \theta}{\rho q} d\psi, \quad dy = \frac{\sin \theta}{q} d\varphi + \frac{\cos \theta}{\rho q} d\psi. \quad (43)$$

Если считать q и θ функциями переменных φ и ψ , то условие полного дифференциала для dx

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{\cos \theta}{q} \right) = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(-\frac{\sin \theta}{\rho q} \right)$$

в раскрытой форме приводится к соотношению

$$\sin \theta \left[\frac{1}{q} \theta_\psi - \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{\rho q} \right) q_\varphi \right] + \cos \theta \left[\frac{1}{q^2} q_\psi - \frac{1}{\rho q} \theta_\varphi \right] = 0.$$

Аналогично, условие полного дифференциала для dy дает

$$\cos \theta \left[\frac{1}{q} \theta_\psi - \frac{d}{dq} \left(\frac{1}{\rho q} \right) q_\varphi \right] - \sin \theta \left[\frac{1}{q^2} q_\psi - \frac{1}{\rho q} \theta_\varphi \right] = 0.$$

Совместное рассмотрение этих соотношений показывает, что выражение в каждой квадратной скобке должно равняться нулю. Входящая сюда величина $d(1/\rho q)/dq$ вычисляется с помощью интеграла Бернулли (24) и оказывается такой (фактически она уже вычислена в (10.22)):

$$\frac{d}{dq} \left(\frac{1}{\rho q} \right) = \frac{M^2 - 1}{\rho q^2}. \quad (44)$$

Поэтому из предыдущих соотношений следуют уравнения

$$\theta_\psi = \frac{M^2 - 1}{\rho q} q_\varphi, \quad q_\psi = \frac{q}{\rho} \theta_\varphi. \quad (45)$$

С помощью стандартных формул перемены ролей зависимых и независимых переменных (аналогичных (34)) из (45) окончательно получается искомая система уравнений на плоскости годографа:

$$\varphi_q = \frac{M^2 - 1}{\rho q} \psi_\theta, \quad \varphi_\theta = \frac{q}{\rho} \psi_q. \quad (46)$$

Исключение из этих уравнений потенциала скоростей φ дает одно независимое уравнение для функции тока ψ :

$$\frac{1 - M^2}{\rho q} \psi_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{q}{\rho} \psi_q \right) = 0. \quad (47)$$

Уравнения (46) и (47) называются *уравнениями Чаплыгина*.

В случае политропного газа, с использованием формул (44) и (41), уравнение Чаплыгина (47) для функции тока приводится к следующему:

$$(c_*^2 - q^2) \psi_{\theta\theta} + \left(c_*^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} q^2 \right) q^2 \psi_{qq} + \left(c_*^2 - \frac{\gamma - 3}{\gamma + 1} q^2 \right) q \psi_q = 0. \quad (48)$$

Особенно простую форму принимает уравнение (47) после введения вместо модуля скорости q новой независимой переменной $\zeta = \zeta(q)$, определенной формулой

$$\zeta = k_0 \int_q^{c_*} \frac{\rho}{q} dq, \quad (49)$$

где k_0 — некоторая положительная константа. С этой переменной уравнение Чаплыгина (47) для функции тока преобразуется в следующее:

$$K(\zeta)\psi_{\theta\theta} + \psi\zeta = 0. \quad (50)$$

Входящая сюда функция Чаплыгина K определена формулой

$$K(\zeta) = \frac{1 - M^2}{k_0^2 \rho^2}. \quad (51)$$

Плоскость независимых переменных $R^2(\theta, \zeta)$ называется *модифицированной плоскостью годографа*. Так как в силу определения (49) величина ζ является монотонной функцией q , причем

$$\lim_{q \rightarrow 0} \zeta(q) = +\infty, \quad \lim_{q \rightarrow q_m} \zeta(q) = \zeta_m < 0, \quad (52)$$

то полная область годографа $\{0 < q < q_m, 0 \leq \theta < 2\pi\}$ отображается на полуполосу $\{\zeta_m < \zeta < \infty, 0 \leq \theta < 2\pi\}$. Обычно эту полуполосу продолжают, используя условие периодичности по θ с периодом 2π , на всю полуплоскость $\zeta > \zeta_m$. При этом окружность критических скоростей $q = c_*$ переходит в ось $\zeta = 0$. Следовательно, на плоскости $R^2(\theta, \zeta)$ дозвуковым течениям соответствует полуплоскость $\zeta > 0$, а сверхзвуковым — полоса $\zeta_m < \zeta < 0$ (рис. 3).



Рис. 3

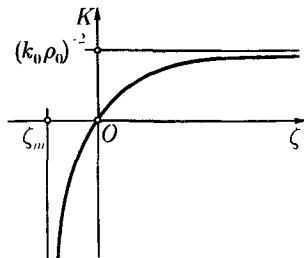


Рис. 4

Поведение функции Чаплыгина $K(\xi)$ определяется тем, что ее производная всюду положительна, и дается формулой (величина m определена в (2.22))

$$K'(\zeta) = \frac{m+2}{k_0} M^4 \rho^{-3}, \quad (53)$$

а также предельными значениями

$$K(0) = 0, \quad K(+\infty) = (k_0 \rho_0)^{-2}, \quad K(\zeta_m) = -\infty,$$

где ρ_0 — значение плотности в «точке торможения», т. е. при $q = 0$. График функции Чаплыгина приведен на рис. 4. Можно показать, что в случае политропного газа $K(\zeta)$ является аналитической функцией во всем интервале $\zeta_m < \zeta < \infty$. Вспомогательная константа k_0 используется для той или иной *нормировки*. Обычно она выбирается так, чтобы было либо $K(+\infty) = 1$, либо $K'(0) = 1$.

Групповое свойство. Представляет интерес рассмотрение системы (23) с групповой точки зрения. При этом выявляется принципиальное различие в случаях $\nu = 0$ и $\nu = 1$. Так как при $\nu = 0$ система (23) становится линейной в переменных годографа, то она допускает бесконечную группу преобразований, действие которой сводится к сложению и умножению на числа любых решений уравнения (40) или (47). Именно это свойство и делает метод годографа эффективным при исследовании плоскопараллельных течений. Кроме того, в случае $\nu = 0$ система (23) допускает однопараметрическую группу *вращений* (8.5.7°). Следствием этого является тот факт, что коэффициенты уравнений С. А. Чаплыгина (45)–(47) не содержат угловой координаты θ . В случае же $\nu = 1$ система (23) не допускает ни бесконечной группы, ни группы вращений. Если эти группы преобразований во внимание не принимать, то при любом ν остаются допускаемые системой (23) однопараметрические группы *переносов* по x (в случае $\nu = 0$ также и переносов по y) и *растяжений* с одним параметром a (здесь штрихом обозначены координаты преобразованной точки)

$$x' = ax, \quad y' = ay, \quad u' = u, \quad v' = v. \quad (54)$$

Эти группы можно использовать как для преобразований одних решений в другие (см. § 8), так и для отыскания классов инвариантных решений (см. § 12) системы (23). Например, группа переносов по x порождает (в случае $\nu = 1$) течение, аналогичное рассмотренному в § 11 течению от источника. Поэтому нетривиальным может быть только решение, инвариантное относительно группы (54). В соответствии с определением 13.2 эта группа порождает коническое автомodelьное решение вида (32), которое является простой волной. Тем самым при любом ν у системы (23) существуют решения, которые будут называться *автомodelьными простыми волнами*. Эти решения и исследуются ниже.

Подстановка выражений (32) в уравнения (23) дает систему обыкновенных дифференциальных уравнений, к решению которой сводится описание автомодельных простых волн:

$$\begin{aligned} v' + \lambda u' &= 0, \\ [(u - \lambda v)^2 - (\lambda^2 + 1)c^2]u' &= \nu c^2 v, \end{aligned} \quad (55)$$

где штрихом обозначены производные по λ . Здесь необходимо рассмотреть отдельно случаи $\nu = 0$ и $\nu = 1$.

Течение Прандтля–Мейера. Пусть $\nu = 0$. Возможности, когда тождественно $v' = 0$ или $u' = 0$, следует исключить, так как они приводят к постоянному решению. Но при $v' \neq 0$ система (55) принимает вид

$$\lambda = -dv/du, \quad (u - \lambda v)^2 = (\lambda^2 + 1)c^2. \quad (56)$$

В силу неравенства Коши $(u - \lambda v)^2 \leq (1 + \lambda^2)q^2$ из (56) следует, что течение является сверхзвуковым. Кроме того, из (56) вытекает, что описание решения сводится к одному обыкновенному дифференциальному уравнению на плоскости годографа. Оказывается, что последнее сводится к квадратуре. Для вывода этого уравнения надо перейти к полярным координатам (39), в которых величина λ равна

$$\lambda = -\frac{\operatorname{tg} \theta + q d\theta/dq}{1 - \operatorname{tg} \theta \cdot q d\theta/dq}.$$

В результате подстановки этого выражения во второе уравнение (56) оно приводится к такому:

$$q^2 = c^2(1 + (qd\theta/dq)^2),$$

или, после разрешения относительно производной, к уравнению

$$\frac{d\theta}{dq} = \pm \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{q}. \quad (57)$$

Для интеграла от правой части вводится стандартное обозначение

$$\mu(q) = \int_{c_*}^q \sqrt{M^2 - 1} \frac{dq}{q}, \quad (58)$$

которое будет играть важную роль в § 24 при анализе характеристик системы (23). С помощью функции (58) решение уравнения (57) с начальным условием $\theta(c_*) = \theta_0$ дается формулой

$$\theta = \theta_0 \pm \mu(q). \quad (59)$$

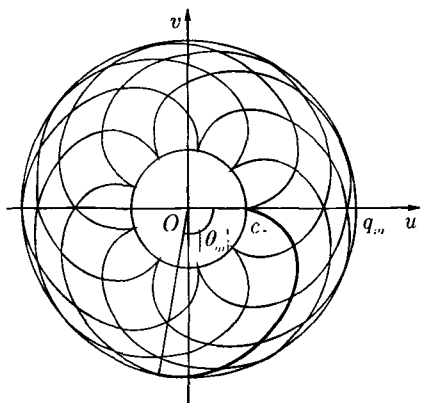


Рис. 5

показана жирной линией, а остальные кривые семейства (59) — тонкими линиями.

Введение угла Маха α (11.22), с которым $\sqrt{M^2 - 1} = \operatorname{ctg} \alpha$ позволяет упростить выражение для λ и привести его к виду

$$\lambda = \operatorname{ctg}(\theta \mp \alpha),$$

откуда следует более удобная запись уравнения прямых $\lambda = \operatorname{const}$:

$$y = x \operatorname{tg}(\theta \mp \alpha), \quad (60)$$

причем в (59) и (60) берутся либо верхние, либо нижние знаки. Так как угол Маха α зависит только от q , то угол $\beta = \theta \pm \alpha$ есть угол наклона к оси x того луча $\lambda = \operatorname{const}$, вдоль которого принимаются постоянные значения величин q и θ , т. е. вектора скорости $\mathbf{u} = (u, v)$. Тем самым формулами (59) и (60) искомое решение полностью определено. Указанные соотношения позволяют построить картину течения газа на плоскости $R^2(x, y)$, показанную для стандартной кривой $\theta = -\mu(q)$ на рис. 6.

Плоскопараллельное течение, описываемое полученным решением, — автомодельной простой волной, называется *течением Прандтля–Мейера*.

Одно из полных течений Прандтля–Мейера и дано на рис. 6. Все остальные течения этого типа получаются из него поворотом на произвольный угол вокруг начала координат (константа θ_0 в (59)) и переносом центра течения в любую точку плоскости $R^2(x, y)$ (групповое свойство системы (23) при $\nu = 0$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Когда $q \rightarrow q_m$, то $M \rightarrow 0$ и интеграл (58) по интервалу (c_*, q_m) является несобственным. Вообще говоря, он может быть и расходящимся. В случае политропного газа интеграл (58) вычисляется явно. Для этого надо сделать подстановку $M^2 = 1 + z^2$ и заметить, что $z = 0$ при $q = c_*$. Этим путем получается формула

$$\int_{c_*}^q \sqrt{M^2 - 1} \frac{dq}{q} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}} (M^2 - 1) - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1}. \quad (61)$$

Следовательно, в политропном газе предельный угол θ_m поворота потока в полном течении Прандтля – Мейера конечен и равен

$$\theta_m = \frac{\pi}{2} \left(\sqrt{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} - 1 \right). \quad (62)$$

Обтекание выпуклого угла. С помощью течения Прандтля – Мейера решается конически автомодельная (см. § 13) задача обтекания заданного выпуклого угла. В этой задаче требуется найти сверхзвуковое течение, которое было бы непрерывно всюду в области над угловой стенкой AOB с заданным углом $\theta_2 < 0$ (рис. 7) и удовлетворяло бы условию обтекания этой стенки. Скорость течения вверх по потоку вдали от угла задана и равна $q_1 > c_1$.

Решение основано на том, что в течении Прандтля – Мейера вдоль каждого луча $\beta = \text{const}$ вектор скорости постоянен и потому часть течения, заключенная в любом секторе $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$ может быть непрерывно продолжена постоянными течениями в обе стороны. Для фактического построения решения надо найти угол $\theta_1 = -\mu(q_1)$, а затем вычислить величину q_2 из уравнения $\theta_1 + \theta_2 = -\mu(q_2)$ и взять ту часть полного течения Прандтля – Мейера, показанного на рис. 6, которая заключена между лучами $\beta_1 = \alpha_1 + \theta_1$ и $\beta_2 = \alpha_2 + \theta_1 + \theta_2$, где углы Маха известны: $\sin \alpha_1 = c_1/q_1$, $\sin \alpha_2 = c_2/q_2$. Непрерывное продолжение этой части в обе стороны постоянным течением и даст искомое решение (см. рис. 7).

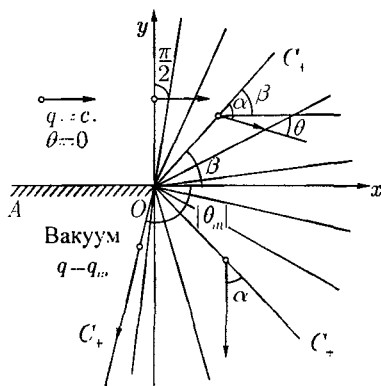


Рис. 6

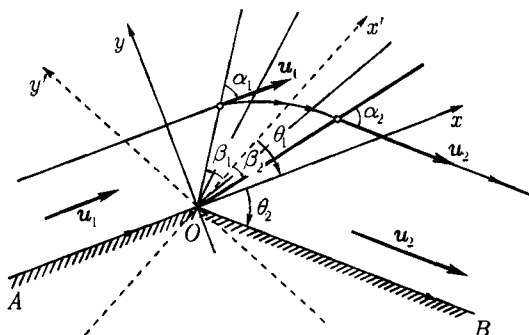


Рис. 7

Течения Буземана. В случае $\nu = 1$ необходим качественный анализ решений системы из двух уравнений (55). С введением вспомогательной величины N она переписывается в виде

$$v' = -\lambda u', \quad Nu' = c^2 v, \quad N = (u - \lambda v)^2 - (\lambda^2 + 1)c^2. \quad (63)$$

Осесимметричные автомодельные простые волны, описываемые уравнениями (63), называются *течениями Буземана*.

К системе (63) добавляются начальные данные вида $u(\lambda_0) = u_0$, $v(\lambda_0) = v_0$. Если при этом $N(\lambda_0) = (u_0 - \lambda_0 v_0)^2 - (\lambda_0^2 + 1)c_0^2 \neq 0$, то система (63) с такими начальными данными имеет единственное решение в некотором интервале, содержащем точку λ_0 . Анализ всего семейства так получаемых решений не прост ввиду *неавтономности* системы (63): правые части содержат независимую переменную λ . Если же $N(\lambda_0) = 0$, то при $c_0 \neq 0$ и конечной u'_0 будет $v_0 = 0$. В этом случае луч $\lambda = \lambda_0$ будет характеристикой системы (23) на решении вида (32) и для построения решения системы (63) требуются дополнительные условия.

В частности, система (63) имеет *постоянное решение* $u = u_0$, $v = 0$. Представляет интерес вопрос о существовании *не постоянного течения Буземана*, примыкающего к данному постоянному через слабый или сильный разрыв (последняя возможность будет обсуждаться в § 25). Здесь рассматривается случай слабого разрыва.

Итак, пусть со стороны $\lambda < \lambda_0$ имеется постоянное течение с $u = u_0 > 0$, $v = 0$, к которому вдоль луча $\lambda = \lambda_0$ непрерывно примыкает не постоянное течение Буземана. Так как этот луч должен быть характеристикой (теорема 6.2), то необходимо выполнение равенства $N(\lambda_0) = 0$ и точка λ_0 будет особой точкой системы (63). Здесь $N(\lambda_0) = u_0^2 - (\lambda_0^2 + 1)c_0^2 = 0$, откуда следует $q_0 = u_0 > c_0$, т. е. течение необходимо должно быть

сверхзвуковым. Вычисление производных в точке λ_0 путем дифференцирования второго уравнения (63) с учетом $N(\lambda_0) = 0$ дает необходимые и достаточные дополнительные условия

$$u'_0 = \frac{\lambda_0}{m_0 + 2} \frac{c_0^4}{u_0^3}, \quad v'_0 = -\frac{\lambda_0^2}{m_0 + 2} \frac{c_0^4}{u_0^3}, \quad N'_0 = -\lambda_0 c_0^2, \quad (64)$$

где $m_0 > 0$ есть значение величины (2.22) в точке λ_0 . Возможны два варианта течения в зависимости от того, будет $\lambda_0 > 0$ или $\lambda_0 < 0$.

Первый вариант: $\lambda_0 > 0$. Из (64) следует, что $u'_0 > 0$, $v'_0 < 0$ и $N'_0 < 0$. Поэтому с ростом λ вблизи точки λ_0 величина u возрастает, а v убывает, становясь отрицательной, т.е. $|v|$ также растет. Значит модуль скорости q растет, а c убывает, причем величина $N(\lambda) < 0$. Утверждается, что последнее неравенство невозможно при всех λ , $\lambda_0 < \lambda < +\infty$. Действительно, если $N(\lambda) < 0$, то $|N(\lambda)| < (\lambda^2 + 1)c^2$ и из первого уравнения (63) следует, что

$$(\lambda^2 + 1)|v'| > \lambda|v|. \quad (65)$$

Интегрирование (65) от некоторой точки $\lambda_1 > \lambda_0$ до переменного $\lambda > \lambda_1$ дает неравенство

$$\lambda^2 + 1 < k_1|v|^2 \quad (66)$$

с некоторой постоянной $k_1 > 0$. Так как $|v|^2 < q_m^2$, то из (66) следует, что неравенство $N(\lambda) < 0$ возможно лишь до некоторого конечного значения $\lambda = \lambda_*$, с которым $N(\lambda_*) = 0$. Из уравнений (63) получается, что $u'(\lambda_*) = +\infty$ и $v'(\lambda_*) = -\infty$, т.е. при $\lambda = \lambda_*$ происходит градиентная катастрофа.

Окончательно получается, что в варианте с $\lambda_0 > 0$ течение Буземана, непрерывно примыкающее к постоянному, является автомодельной волной разрежения, заканчивающейся на луче $\lambda = \lambda_*$. Это течение может быть интерпретировано как продольное обтекание части тела вращения, имеющего вид сужающегося цилиндра (А. А. Никольский, 1957). Распределение величин u и v в зависимости от λ и плоскость течения с линиями тока показаны на рис. 8.

Второй вариант: $\lambda_0 < 0$. Из (64) следует, что здесь $u'_0 < 0$, $v'_0 < 0$ и $N'_0 > 0$. С ростом λ вблизи точки λ_0 обе величины u и v убывают, т.е. $|v|$ возрастает и будет $N > 0$. Это направление изменения величин u , v сохраняется во всем интервале $(\lambda_0, 0)$. Из (63) следует, что $v'(0) = 0$, а при $\lambda > 0$ будет $v' > 0$, т.е. $|v|$ будет убывать. Как далеко (по λ) может существовать такое решение?

Для ответа на этот вопрос сначала устанавливается, что при всех $\lambda > 0$ пока существует гладкое решение системы (63), знаки неравенств

$$u' < 0, \quad v' > 0, \quad v < 0, \quad N > 0, \quad w = u - \lambda v > 0 \quad (67)$$

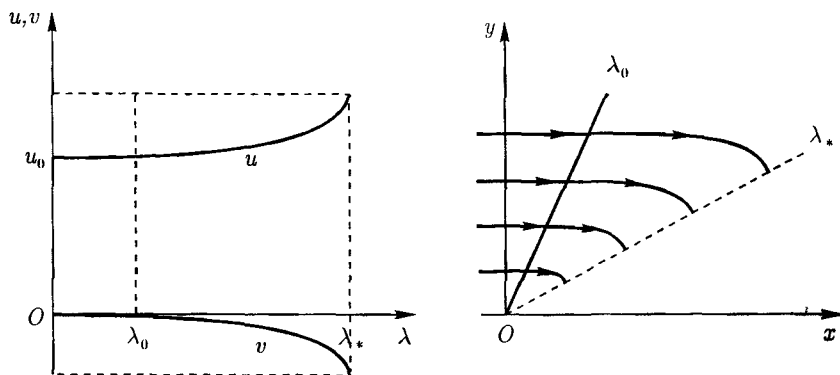


Рис. 8

будут сохраняться. Действительно, пусть λ_1 ($0 < \lambda_1 < \infty$) есть наибольшее значение λ , при котором в открытом интервале $(0, \lambda_1)$ выполнены все неравенства (67). Тогда они будут выполнены и при $\lambda = \lambda_1$: нарушение хотя бы одного из них ведет к противоречию с определением точки λ_1 . Именно, если $v(\lambda_1) = 0$, то при $N(\lambda_1) \neq 0$ слева от точки λ_1 решение системы (63) должно быть постоянным (теорема единственности), а при $N(\lambda_1) = 0$ из формул (64), с заменой λ_0 на λ_1 , следует $v'(\lambda_1) < 0$ и, в силу непрерывности, $v'(\lambda) < 0$ для близких к λ_1 значений $\lambda < \lambda_1$. Если $u'(\lambda_1) = 0$, или $v'(\lambda_1) = 0$, или $N(\lambda_1) = 0$, то из (63) снова следует $v(\lambda_1) = 0$. Наконец, если $w(\lambda_1) = 0$, то будет $N(\lambda_1) = -(\lambda_1^2 + 1)c_1^2 < 0$ и значит величина N должна быть равна нулю при некотором λ_2 , $0 < \lambda_2 < \lambda_1$.

Полезно заметить еще, что из (63), (67) следуют соотношения

$$(q^2)' = 2wu' < 0. \quad (68)$$

В частности с ростом λ модуль скорости q убывает, а значит скорость звука c растет, т. е. имеет место течение сжатия.

Однако на весь интервал $(0, \infty)$ гладкое решение продолжено быть не может. Это следует из интеграла Бернулли, предписывающего ограниченность скорости звука, а значит и плотности ρ ее максимальным значением. Именно, из интеграла Бернулли и уравнений (63), (68) выводится уравнение для плотности $\rho(\lambda)$

$$\rho'/\rho = 2w|v|/N. \quad (69)$$

Так как $N < w^2$, то из (69) следует неравенство

$$\rho'/\rho > 2|v|/w. \quad (70)$$

Но в силу $N > 0$ будет $w^2 > (\lambda^2 + 1)c^2$ и значит при $\lambda \rightarrow \infty$ будет $w = u + \lambda|v| \rightarrow \infty$, т.е. $|\lambda| \rightarrow \infty$. Поэтому для достаточно больших $\lambda > \lambda_1 > 0$ дробь $\lambda|v|/w$ будет ограничена снизу положительной константой k_1 , т.е. $\lambda|v| > k_1 w$. Значит неравенство (70) при $\lambda > \lambda_1$ приводит к неравенству $\rho'/\rho > 2k_1/\lambda$, интегрирование которого дает конечное неравенство

$$\rho(\lambda) > k_2 \lambda^{2k_1}$$

с некоторой константой $k_2 > 0$. Поэтому при $\lambda \rightarrow \infty$ будет $\rho \rightarrow \infty$, что невозможно.

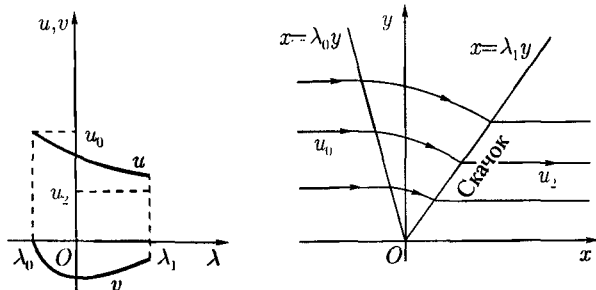


Рис. 9

Оказывается, что здесь существует течение с сильным разрывом (коническим скачком уплотнения, см. § 25), через который поток переводится в постоянный, идущий вдоль полуоси $x > 0$. Линия этого разрыва совпадает с некоторым лучом $\lambda = \lambda_1$ (рис. 9). Следовательно, в варианте с $\lambda_0 < 0$ течение Бузмана является автомоделной волной сжатия, состоящей из непрерывной волны и конического скачка уплотнения, посредством которых постоянный сверхзвуковой поток со скоростью u_0 преобразуется снова в постоянный поток со скоростью $u_2 < u_0$. При этом результирующее течение может быть как дозвуковым, так и сверхзвуковым.

§ 23. Дозвуковые течения

В теории дозвуковых установившихся безвихревых изэнтропических (значит — изоэнергетических) двумерных течений газа предполагается, что во всем рассматриваемом течении модуль скорости q меньше соответствующей скорости звука c , т.е. всюду в потоке число Маха $M < 1$. В зависимости от характера краевых задач в качестве исходных дифференциальных уравне-

ний, описывающих такие течения, берутся либо система уравнений (22.23), либо уравнение для потенциала скоростей (22.28), либо система уравнений метода годографа (22.35), (22.46) и (22.50) или некоторые их модификации. Каждый раз эти дифференциальные уравнения надо рассматривать совместно с интегралом Бернулли (22.24), причем уравнение состояния (которое в теории таких течений принято называть также уравнением адиабаты) $p = f(\rho, S_0)$, энтропия S_0 и константа Бернулли q_m^2 считаются фиксированными.

Благодаря строго эллиптическому типу исходных дифференциальных уравнений теория дозвуковых течений с точки зрения постановок ее основных краевых задач во многом аналогична теории течений идеальной несжимаемой жидкости. Здесь будут рассмотрены два класса задач, наиболее хорошо изученных в этой теории: задачи о струях и задачи обтекания. Исторически именно на этих задачах разрабатывались и отшлифовывались математические методы исследования дозвуковых течений газа. Уместно отметить, что первые задачи о дозвуковых плоских газовых струях были решены С. А. Чаплыгиным еще в начале текущего столетия [10].

Задачи о струях. Характерным признаком таких задач является наличие так называемых *свободных границ*. Этим термином принято называть такие части границы области течения, которые сами заранее неизвестны, но на которых задается два граничных условия: кинематическое и динамическое. *Кинематическое условие* состоит в требовании, чтобы свободная граница была контактной линией, т. е. состояла все время из одних и тех же частиц. Для установившихся течений это равносильно тому, что свободная граница является линией тока. *Динамическое условие* заключается в задании распределения давления вдоль свободной границы. Обычно заданное давление считается постоянным. Это позволяет интерпретировать струйное течение как такое, которое происходит в некотором окружающем изобарически покоящемся газе, линия раздела с которым и представляет собой свободную границу. Действительно, тогда линия раздела является контактным разрывом, при переходе через который на ней выполнено условие непрерывности давления. Кроме свободных границ в задачах о струях могут быть и другие участки границы течения, которые считаются заданными твердыми непроницаемыми стенками. На таких участках задается *условие обтекания* (говорят также: условие непротекания), равносильное условию, что и эта часть границы является линией тока (заранее заданной). Таким образом, каждая струя, имеющая конечную величину поперечного сечения, течет между двумя линиями тока, и потому расход газа (см. § 22) в ней постоянен. Наконец, в струях, уходящих в бесконечность и имеющих либо обе границы свободными, либо одну из них в виде твердой прямолинейной стенки, требуется вы-

полнение условия выравнивания струи в бесконечности. Оно заключается в том, что вдоль каждой принадлежащей струе линии тока вектор скорости при удалении на бесконечность стремится к одному и тому же предельному значению, не зависящему от выбора линии тока. Другими словами, на бесконечности течение в струе асимптотически стремится к некоторому постоянному течению. При этом модуль скорости q в бесконечно удаленной части струи, так же как и на ее свободной границе, известен: он определяется, через интеграл Бернулли, заданным значением внешнего давления.

Анализ и решение задач о струях сильно облегчаются, если все участвующие твердые стенки являются прямолинейными. Действительно, в этом случае каждый участок границы, вообще говоря, имеет известный годограф: свободная граница, на которой известно постоянное значение модуля скорости q , изображается дугой окружности радиуса q , а прямолинейная твердая стенка, на которой известен постоянный угол наклона θ вектора скорости, — отрезком радиуса. Если при этом годограф всей границы ограничивает область на плоскости годографа, то соответствующая задача о струях может быть поставлена, вообще говоря, как некоторая задача для какой-либо из форм основных дифференциальных уравнений на плоскости годографа.

В каждой такой задаче необходим специальный анализ вопросов *единственности решения и однолистности отображения* плоскости течения на плоскость годографа. Единственность решения обычно устанавливается с помощью *принципа максимума* и *леммы Зарембы* о положительности нормальной производной в граничной точке максимума для решений эллиптических уравнений второго порядка. Этими же средствами доказывается отличие от нуля якобиана отображения. Тем самым гарантируется *локальная однолистность отображения*. Для установления *глобальной однолистности* используются достаточные условия топологического характера из общей теории дифференцируемых отображений плоских областей. Одним из них является *условие односвязности*, согласно которому если при непрерывно дифференцируемом отображении с не равным нулю якобианом односвязная область переходит в односвязную, то в этой области отображение взаимно однозначно. Другое условие дается *принципом соответствия границ*, в котором предполагается, что граница Γ области Ω при непрерывно дифференцируемом отображении замкнутой области $\bar{\Omega}$ с не равным нулю якобианом переходит в кривую Γ' , ограничивающую некоторую область Ω' (или ее дополнение Ω''). Тогда, если Γ отображается на Γ' взаимно однозначно, то образом Ω является Ω' (или Ω'') и отображение $\Omega \rightarrow \Omega'$ (или $\Omega \rightarrow \Omega''$) также взаимно однозначно. Имеются и другие, более тонкие достаточные условия глобальной однолистности. Так как поместить более подробное изложение всего этого математического аппарата в данном тексте

не представляется возможным, то читатель отсылается к соответствующим руководствам по уравнениям математической физики. Здесь же приходится ограничиться утверждением о том, что в рассматриваемых ниже задачах о газовых струях свойства единственности решения и глобальной однолистности отображения плоскости течения на плоскость годографа могут быть доказаны вышеупомянутыми методами и на самом деле справедливы.

Истечение симметричной струи. Одной из простейших «эталонных» задач о газовых струях является *задача об истечении симметричной струи* из бесконечного угловидного (или конусовидного) сосуда. Качественная картина всей конфигурации на плоскости течения показана на рис. 1. Здесь AB и $A'B'$ — стенки симметричного относительно оси x сосуда, BC и $B'C'$ — свободные границы газовой струи, а сечение BB' представляет собой отверстие, через которое и вытекает газ в окружающее пространство. Заданы ширина (диаметр) отверстия $2h_0$ и угол θ_0 наклона стенок к оси x , причем $0 < \theta_0 \leq \pi$. В бесконечности вверх по течению, т. е. в сосуде вдали от отверстия, газ покоится и имеет заданные параметры ρ_0, p_0 (значит, известна и скорость звука c_0). Тем самым определена константа $q_m^2 = I(c_0^2)$, интеграл Бернулли (22.24) становится конкретным:

$$q^2 + I(c^2) = I(c_0^2), \quad (1)$$

и известны также критическая скорость c_* (определение 10.2), соответствующие *критическая плотность* ρ_* и *критическое давление* p_* . На свободных границах задано постоянное давление $p_1 < p_0$, а следовательно, и скорость звука c_1 . Поэтому из (1) находится постоянное значение q_1 модуля скорости на свободных границах, определяемое формулой

$$q_1^2 + I(c_1^2) = I(c_0^2).$$

При этом предполагается, что $q_1 < c_1$, что равносильно (см. § 10) неравенствам $q_1 < c_*$ или $p_* < p_1 < p_0$. Требуется дать аналитическое описание (расчет) этого течения, в частности, найти величину расхода газа $2Q$.

Для построения годографа области искомого течения достаточно заметить, что вдоль стенки AB (или $A'B'$) модуль скорости q монотонно возрастает от значения $q = 0$ до $q = q_1$, а вдоль свободной границы BC угол наклона вектора скорости θ монотонно убывает от значения $\theta = \theta_0$ до $\theta = 0$. Поэтому годографом области течения является круговой сектор, показанный на рис. 2, где соответствующие рис. 1 точки обозначены одинаковыми буквами. Эта область годографа одинакова как для плоскопараллельной, так и для осесимметричной струи.

Пусть $2h_\infty$ — величина сечения (диаметр) струи в бесконечности вниз по течению (сечение CC'). Так как там должно быть асимптотически по-

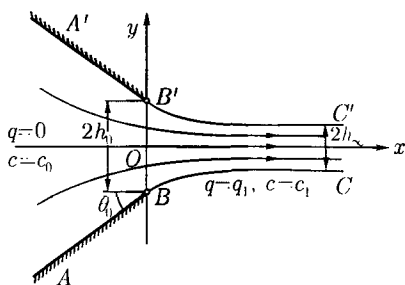


Рис. 1

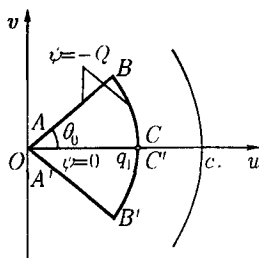


Рис. 2

стоянное течение, то расход газа в струе может быть выражен через величину h_∞ и, согласно формуле (22.10), имеет значение

$$2Q = \frac{2\pi^\nu}{\nu+1} h_\infty^{\nu+1} \rho_1 q_1. \quad (2)$$

Согласно (22.11) приращение функции тока при переходе от нижней границы струи к верхней равно $2Q$, и поэтому граничные значения функции тока могут быть взяты такими:

$$\psi|_{ABC} = -Q, \quad \psi|_{A'B'C'} = Q. \quad (3)$$

Тем самым задача об истечении струи сводится к отысканию функции тока $\psi = \psi(q, \theta)$ как решения соответствующего дифференциального уравнения в заданном секторе $ABB'A'$ плоскости годографа с краевым условием (2), т.е. как решения задачи Дирихле. В силу очевидной симметрии значение ψ на оси симметрии равно нулю, и потому достаточно найти решение задачи Дирихле в половине ABC указанного сектора с граничными условиями

$$\psi(q, \theta_0) = -Q, \quad \psi(q_1, \theta) = -Q, \quad \psi(q, 0) = 0. \quad (4)$$

Эта постановка краевой задачи для функции тока одна и та же как для плоскопараллельной, так и для осесимметричной струи. Однако решение ее сравнительно просто только в случае плоскопараллельной струи, когда уравнение для функции тока на плоскости годографа (22.47) линейно; этот случай и рассматривается ниже.

Для построения решения вводится вспомогательная функция

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{Q} + \frac{\theta}{\theta_0}, \quad (5)$$

которая, так же как и ψ , удовлетворяет уравнению (22.47) и, кроме того, в силу (4) обращается в нуль при $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$. Далее, методом разделения переменных q и θ в уравнении (22.47) находятся частные решения, тоже равные нулю при $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$:

$$\bar{\psi}_n = z_n(q) \sin(\nu_n \theta), \quad \nu_n = \frac{\pi}{\theta_0} n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (6)$$

где $z_n(q)$ есть решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d}{dq} \left(\frac{q}{\rho} \frac{dz_n}{dq} \right) - \nu_n^2 \frac{1 - M^2}{\rho q} z_n = 0, \quad (7)$$

ограниченное в точке $q = 0$. Затем из решений (6) образуется ряд

$$\bar{\psi} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n(q) \sin(\nu_n \theta), \quad (8)$$

который в случае достаточно хорошей сходимости также представляет решение уравнения (22.47), равное нулю при $\theta = 0$ и $\theta = \theta_0$. Наконец, остается удовлетворить второму краевому условию (4), которое в силу представлений (5) и (8) приводит к соотношению

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n(q_1) \sin(\nu_n \theta) = \frac{\theta}{\theta_0} - 1 \quad (0 \leq \theta \leq \theta_0), \quad (9)$$

левая часть которого должна быть разложением в ряд Фурье функции, находящейся в правой части. Поэтому коэффициенты a_n в (9) определяются по формулам Фурье

$$a_n z_n(q_1) = \frac{2}{\theta_0} \int_0^{\theta_0} \left(\frac{\theta}{\theta_0} - 1 \right) \sin(\nu_n \theta) d\theta$$

и оказываются такими:

$$a_n = -\frac{2}{\pi} \frac{1}{n z_n(q_1)} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (10)$$

С коэффициентами (10) по формуле (8) определяется функция $\bar{\psi}$, а затем из соотношения (5) — и искомая функция тока

$$\psi = Q \left(-\frac{\theta}{\theta_0} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n(q)}{z_n(q_1)} \frac{\sin(\nu_n \theta)}{n} \right), \quad (11)$$

где величины ν_n даны в (6).

Как всегда в методе Фурье, полученное представление решения нуждается в обосновании с точки зрения сходимости ряда (11). С этой целью необходимо выяснить характер асимптотического поведения функций Чаплыгина $z_n(q)$ при $n \rightarrow \infty$. Известным из теории обыкновенных дифференциальных уравнений приемом получается следующее представление:

$$z_n(q) = R(q) \left(1 + \frac{b_n(q)}{n} \right) q^{\nu_n}, \quad (12)$$

где

$$R(q) = \exp \left(\frac{1}{2} \left(\frac{q}{\sqrt{1-M^2}} - \int_0^q \frac{1+M^2}{\sqrt{1-M^2}} dq \right) \right),$$

а функции $b_n(q)$ ограничены в интервале $0 \leq q \leq c_*$ равномерно относительно $n = 1, 2, \dots$. Кроме того, представление (12) можно дифференцировать по q . Отсюда следует, что ряд (11) абсолютно сходится в области $ABV'A'$ и его можно дифференцировать почленно один и два раза по переменным q и θ . Поэтому формула (11) дает решение уравнения (22.47). Легко проверяются также и граничные условия (4).

Итак, решение задачи на плоскости годографа дается формулой (11). Отсюда с помощью *формул перехода* (22.43) можно вычислить любые величины на плоскости течения. Например, для отыскания расхода согласно (2) достаточно найти величину h_∞ . Это делается интегрированием дифференциала dy вдоль линии BC , так как (см. рис. 1)

$$\int_{BC} dy = h_0 - h_\infty.$$

Для дифференциала dy имеется выражение (22.43), которое на линии BC принимает вид $dy = (\sin \theta / q) \varphi_0 d\theta$ и, в силу второго уравнения (22.46), оказывается таким:

$$dy|_{BC} = \rho_1^{-1} \sin \theta \cdot \psi_q(q_1, \theta) d\theta.$$

В результате подстановки сюда представления (11) и почленного интегрирования получается соотношение

$$h_0 - h_\infty = \frac{Q}{\rho_1} \frac{2 \sin \theta_0}{\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z'_n(q_1)}{z_n(q_1)} \frac{(-1)^n \nu_n}{\nu_n^2 - 1}.$$

Так как в случае плоскопараллельного течения формула (2) принимает вид $Q = h_\infty \rho_1 q_1$, то из этого соотношения следует равенство, определяющее искомую величину h_∞ :

$$h_0 = h_\infty (1 + \Phi(q_1, \theta_0)), \quad (13)$$

где

$$\Phi(q_1, \theta_0) = \frac{2 \sin \theta_0}{\theta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_1 z'_n(q_1)}{z_n(q_1)} \frac{(-1)^n \nu_n}{\nu_n^2 - 1}.$$

Для некоторых конкретных значений угла θ_0 это решение описывает характерные течения. Например, при $\theta_0 = \pi/2$ — истечение струи газа из полупространства через щель в плоской стенке, а при $\theta_0 = \pi$ — истечение струи газа из всего пространства в плоский *насадок Борда*. Решение пригодно для любого $q_1 < c_*$. Можно показать, что оно справедливо и при $q_1 = c_*$, причем в этом случае струя выравнивается на конечном расстоянии от отверстия.

Тем же методом, с небольшим усложнением, решается задача об истечении *несимметричной струи*, когда сечение выходного отверстия не перпендикулярно оси сосуда. Для построения такого решения проще всего задать угол, образуемый вектором скорости в бесконечности вниз по течению с осью сосуда. На годографе рис. 2 это сведется к смещению точки разрыва граничных данных (3) $C \equiv C'$ по дуге окружности $q = q_1$ от ее симметричного положения в сторону точки B или B' . При совпадении C с B получится задача об истечении струи газа вдоль прямолинейной стенки из-под щита, решение которой фактически дается формулой (11).

Струйное обтекание клина. Аналогично рассматривается задача о симметричном *струйном обтекании клиновидной* (или конусовидной) *стенки* конечной длины. Качественно картина течения показана на рис. 3, где CD и $C'D'$ — уходящие струи, на которые натекающая струя EE' разделяется твердой стенкой BAB' . Заданы параметры $q_0 < c_0$ в натекающей струе, ее ширина (диаметр) $2h_0$, угол θ_0 и ширина (диаметр) основания клина $2h$. Требуется определить силу давления струи на клин и угол θ_1 ,

а также заметить, что разность $y_D - y_C$ конечна и равна $h_0 \cos \theta_1$. Этим путем, с учетом того, что сила X по определению равна

$$X = 2 \int_{AB} p dy,$$

в результате элементарного подсчета получается формула

$$X = 2hp_0 + 2(1 - \cos \theta_1)h_0\rho_0q_0^2. \quad (15)$$

Что же касается угла θ_1 , то его можно определить лишь как корень трансцендентного уравнения через решение $\psi(q, \theta; \theta_1)$ упомянутой красной задачи. Для этого надо вычислить величину h , например, по формуле $h = \int_{AB} dy$,

которая в силу (22.43) и (22.46) преобразуется к виду

$$h = \sin \theta_0 \int_0^{q_0} \frac{1 - M^2}{\rho q^2} \psi_\theta(q, \theta_0; \theta_1) dq. \quad (16)$$

Соотношение (16) при известной h и есть уравнение относительно θ_1 , определяющее этот угол.

Для специальных исходных данных в этой задаче получаются некоторые характерные течения. Например, решение с $\theta_0 = \pi/2$ описывает струйное обтекание пластинки. Можно также сделать клин бесконечным ($h = \infty$) и получить обтекание угла (в этом случае $\theta_1 = \theta_0$). Кроме того, смещая точки C , C' и E по окружности $q = q_0$ на годографе рис. 4, можно тем же методом найти решения целого класса задач о несимметричном обтекании клина. Во всех получаемых течениях точка A является *точкой торможения* потока; в ней скорость обращается в нуль, т. е. $q = 0$.

Свободные струи. Представляет интерес также класс *свободных* струйных течений газа, в которых твердые стенки отсутствуют. Примером служит симметричное течение, возникающее при *лобовом столкновении двух свободных струй* (рис. 5). Здесь заданы параметры $q_0 < c_0$ и ширина $2h_1$ струи AA' , текущей слева направо, и те же параметры и ширина $2h_2$ струи DD' , текущей справа налево. В результате столкновения этих струй возникает точка торможения O и две боковые струи, BC и $B'C'$. При этом образуется *разделяющая линия тока* $E'OE$, слева от которой остается весь газ, принесенный струей AA' , а справа — весь газ, принесенный струей DD' . Требуется дать описание течения, в частности, найти угол θ_1 наклона боковых струй к оси x , а также разделяющую линию тока $E'OE$.

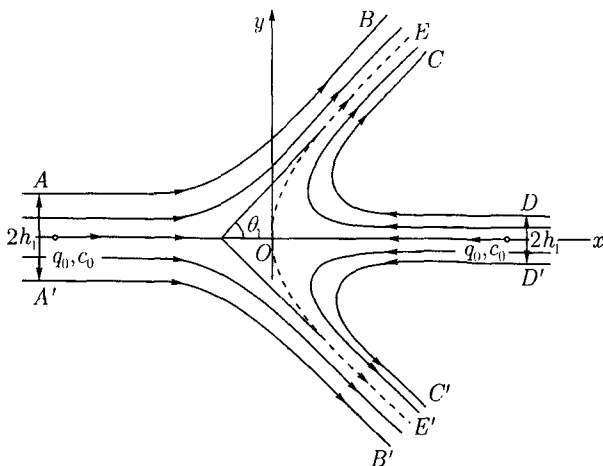


Рис. 5

Оказывается, что в этой задаче угол θ_1 очень просто выражается через исходные данные, а именно справедлива формула

$$\cos \theta_1 = \frac{h_1 - h_2}{h_1 + h_2}. \quad (17)$$

Формула (17) выводится применением интегрального закона сохранения потока импульса (1.4) аналогично тому, как это было сделано в предыдущей задаче. Что же касается разделяющей линии тока, то ее можно найти только в результате решения краевой задачи. Область годографа рассматриваемого течения представляет собой круг радиуса q_0 , показанный на рис. 6. В силу симметрии соответствующую задачу Дирихле достаточно рассмотреть в полукруге DBA с граничными данными

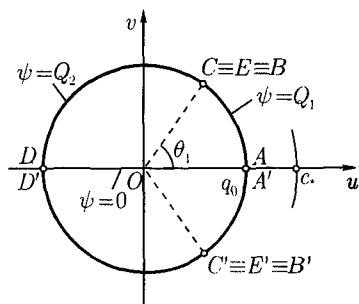


Рис. 6

$$\begin{aligned} \psi|_{DC} &= -h_2 \rho_0 q_0, \\ \psi|_{BA} &= h_1 \rho_0 q_0, \quad \psi|_{DA} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Эта задача легко решается изложенным выше методом, в результате чего определяется функция $\psi(q, \theta)$. С ней годограф разделяющей линии тока дается уравнением

$$\psi(q, \theta) = 0. \quad (19)$$

Дифференциальные уравнения разделяющей линии тока согласно определению (22.4) могут быть записаны в виде

$$\frac{dx}{d\theta} = H \cos \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = H \sin \theta \quad (20)$$

с некоторой функцией $H = H(\theta)$. Вычисление с помощью уравнений (22.43) и (22.46) дает для H выражение

$$H = \frac{1}{\rho q^2 \psi_q} (q^2 \psi_q^2 + (1 - \mathbf{M}^2) \psi_\theta^2). \quad (21)$$

Функция $H(\theta)$ получается подстановкой в формулу (21) зависимости $q = q(\theta)$, определяемой уравнением (19).

Довольно сложные струйные течения возникают при несимметричном столкновении свободных струй. Решения этого типа могут быть получены смещением точек B , D , B' по окружности $q = q_0$ (см. рис. 6) и рассмотрением возникающей задачи Дирихле во всем круге. При этом надо следить за соблюдением интегральных законов сохранения массы и импульса на плоскости течения.

Задачи обтекания. Здесь будут рассмотрены задачи обтекания конечного тела безграничным потоком. Этот класс задач играет важную роль в аэродинамике крыла и снаряда. Результаты анализа и расчета задач обтекания используются при решении ряда актуальных проблем высокоскоростной (реактивной) авиации и внешней баллистики. Общая постановка задачи обтекания уже упоминалась в § 7 и формулируется следующим образом.

Требуется найти непрерывное в замкнутой области $\bar{\Omega}$ решение системы уравнений (22.23) и (22.24), определенное во внешности Ω заданного простого замкнутого контура $T \subset R^2(x, y)$, удовлетворяющее условию на бесконечности с заданным вектором $\mathbf{u}_\infty$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}(x, y) = \mathbf{u}_\infty \quad (22)$$

и условию обтекания контура T

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_T = 0, \quad (23)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\mathbf{n}$ — нормаль к T . Кроме того, предполагаются заданными уравнение состояния $p = f(\rho, S_0)$ (ищется изэнтропическое течение) и давление p_∞ на бесконечности. Тем самым заданы также скорость звука c_∞ и число Маха $M_\infty = q_\infty/c_\infty$, где $q_\infty = |\mathbf{u}_\infty|$.

Очевидно, что такое задание условий на бесконечности позволяет найти константу в интеграле Бернулли (22.24), который в силу этого становится вполне определенным. Возможна и другая постановка, когда константа в интеграле Бернулли считается заданной; тогда величина c_∞ однозначно определяется условием (22).

Из-за специфики рассматриваемых в этом параграфе двумерных дозвуковых течений эта постановка нуждается в уточнении. Прежде всего, требуется, чтобы в любой точке было $q < c$ или, в терминах числа Маха, $M < 1$. Для этого необходимо выполнение неравенства

$$M_\infty < 1, \quad (24)$$

которое, однако, не является достаточным. Поэтому условие дозвукового обтекания $M < 1$ есть дополнительное ограничение, накладываемое на искомое решение. Далее, если на обтекаемом контуре T есть три угловые точки, представляющие собой вершины выпуклых углов, то непрерывное решение задачи обтекания контура T не существует. Этот факт аналогичен известному в теории двумерной задачи обтекания тела потенциальным потоком невязкой несжимаемой жидкости. Дело в том, что непрерывное решение в окрестности выпуклого угла обладает следующим свойством: вершина такого угла всегда является *точкой разветвления* проходящей через нее линии тока. Однако наличие трех (или большего числа) точек разветвления невозможно согласовать одновременно с условием непрерывности решения и условием на бесконечности. Основным является тот случай, когда на контуре T находятся две точки ветвления, в которых разделяется, а затем соединяется в одну линия тока, образующая T . Поэтому общая качественная картина течения должна быть такой, как на рис. 7, где показаны линии тока и направление движения частиц вдоль их. Здесь B и C — точки ветвления линии тока $ABCD$, часть которой образует контур T .

Циркуляция. Следующая особенность двумерной задачи обтекания состоит в том, что в случае гладкого контура T ее решение заведомо не единственно; вообще говоря, она имеет однопараметрическое семейство решений. Роль произвольного параметра играет *циркуляция* вектора скорости по любому простому замкнутому контуру T' , окружающему T :

$$\Gamma = \int_{T'} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \int_{T'} u dx + v dy, \quad (25)$$

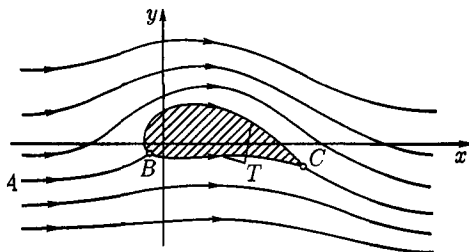


Рис. 7

где контурный интеграл берется в направлении против часовой стрелки; очевидно, что его величина от выбора контура T' не зависит. Эта неединственность решения, также хорошо известная в теории несжимаемой жидкости, вытекает из возможной неоднозначности потенциала скоростей в силу его особого поведения на бесконечности. Величина циркуляции Γ связана с положением точек ветвления на T . Априори можно задать положение только одной из них; тогда положение другой и циркуляция Γ определяются однозначно. В частности, если на T есть одна угловая точка (типа точки C на рис. 7), то необходимо потребовать, чтобы она была точкой ветвления. Это условие, по аналогии с несжимаемой жидкостью, называется *условием Жуковского*. Оно определяет величину циркуляции Γ однозначно.

В осесимметричной задаче возможны два типа обтекаемых контуров, показанные на рис. 8. Первый из них является сечением односвязного тела вращения (типа снаряда). Обтекание такого контура является *бесциркуляционным* ($\Gamma = 0$), а точки ветвления линии тока всегда лежат на оси симметрии. Второй тип представляет кольцевидное (торообразное) тело вращения, от которого на плоскости течения остается лишь его меридиональный профиль (с учетом отмеченной в § 22 симметрии). В этом случае положение с циркуляцией и точками ветвления такое же, как и для плоскопараллельной задачи. К сожалению, по осесимметричной задаче обтекания пока еще нет таких результатов, которые можно было бы достаточно просто изложить в данном тексте. Поэтому нижеследующее относится только к плоскопараллельному обтеканию.

Аналог теоремы Жуковского. Ввиду отмеченных выше особенностей решения задачи обтекания принципиальное значение имеет вопрос об *асимптотическом поведении* дозвукового течения на бесконечности. Знание асимптотики позволяет также, как выяснится ниже, вычислить важ-

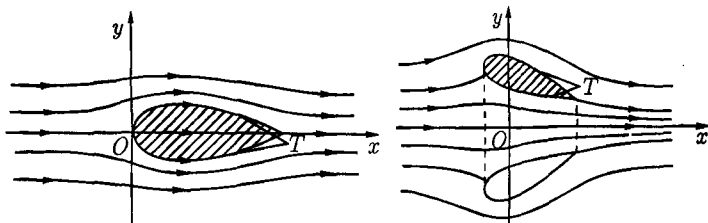


Рис. 8

ную для приложений величину силы, действующей на T . Получение этой асимптотики — задача довольно трудная, решенная до конца сравнительно недавно, лишь в конце 50-х годов. Оказывается, что асимптотическое поведение потенциала φ и вектора скорости $\mathbf{u}$ при $r \rightarrow \infty$ в системе координат, в которой направление оси x совпадает с направлением вектора $\mathbf{u}_\infty$ (т. е. когда $\mathbf{u}_\infty = (u_\infty, 0)$), описывается формулами

$$\begin{aligned}\varphi &= u_\infty x + \frac{\Gamma}{2\pi} \arctg(k \operatorname{tg} \beta) + O(r^{-1+\epsilon}), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}_\infty + \frac{k\Gamma}{2\pi} \frac{(-y, x)}{x^2 + k^2 y^2} + O(r^{-2+\epsilon}).\end{aligned}\quad (26)$$

Здесь (r, β) — полярные координаты, вводимые равенствами

$$x = r \cos \beta, \quad y = r \sin \beta, \quad (27)$$

Γ — циркуляция (25), а $\epsilon > 0$ — любое сколь угодно малое число. Символом k обозначена величина

$$k = \sqrt{1 - M_\infty^2}, \quad (28)$$

а символ $O(r^\alpha)$ означает функцию, которая после деления на r^α остается ограниченной при $r \rightarrow \infty$. Явно выписанные слагаемые асимптотики (26) можно найти сравнительно просто формальным путем, если заметить, что при больших r уравнение для потенциала скоростей (22.28) (с $\nu = 0$) приближенно имеет вид

$$k^2 \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

с величиной k из (28) и после замены переменной $x = kx'$ превращается в уравнение Лапласа, для которого асимптотика решений известна. Одна-

ко выражения (26) для порядков остаточного члена таким путем получить затруднительно.

Вектор $\mathbf{X}$ силы давления газа на контур T определяется формулой

$$\mathbf{X} = \int_T p \mathbf{n} ds \quad (29)$$

с нормалью $\mathbf{n}$, направленной внутрь T . Замечательно, что для силы $\mathbf{X}$ получаются такие же формулы, как и в случае обтекания несжимаемой жидкостью, а именно справедлив следующий аналог *теоремы Жуковского*.

Теорема 1. Компоненты силы $\mathbf{X} = (X, Y)$ даются формулами

$$X = 0, \quad Y = -\rho_\infty u_\infty \Gamma. \quad (30)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применение интегрального закона сохранения потока импульса (1.4) к области ω , заключенной между контуром T и окружностью T_R большого радиуса $r = R$, с учетом равенства $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ на T даст для интеграла (29) выражение

$$\mathbf{X} = - \int_{T_R} (p \mathbf{n} + \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})) ds,$$

где $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к окружности T_R , причем в полярных координатах (27) справедлива формула $\mathbf{n} = (\cos \beta, \sin \beta)$. На основании асимптотического представления вектора скорости (26) с помощью интеграла Бернулли выводятся соответствующие представления давления и плотности:

$$\begin{aligned} p &= p_\infty + \rho_\infty u_\infty \frac{k\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + k^2 y^2} + O(r^{-2}), \\ \rho &= \rho_\infty + \frac{\rho_\infty u_\infty}{c_\infty^2} \frac{k\Gamma}{2\pi} \frac{y}{x^2 + k^2 y^2} + O(r^{-2}). \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда следует представление подынтегрального выражения в полярных координатах (27) на окружности T_R :

$$\begin{aligned} p \mathbf{n} + \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) &= ((p_\infty + \rho_\infty u_\infty^2) \cos \beta, p_\infty \sin \beta) + \\ &+ \rho_\infty u_\infty \Gamma \frac{k(M_\infty^2 \sin \beta \cos \beta, 1)}{2\pi R(\cos^2 \beta + k^2 \sin^2 \beta)} + O(R^{-2}). \end{aligned}$$

С учетом равенства вида

$$\int_{T_R} F(x, y) ds = R \int_0^{2\pi} F(R \cos \beta, R \sin \beta) d\beta$$

в результате элементарного вычисления интегралов от слагаемых предыдущего выражения и предельного перехода $R \rightarrow \infty$ получаются формулы (30). ■

Некоторые качественные результаты. Для любых дозвуковых безвихревых течений справедлив принцип максимума модуля скорости: максимальное значение величины $q = |\mathbf{u}|$ достигается только на границе области течения. Применительно к задаче обтекания контура T это означает, что величина q принимает свое наибольшее значение q_E в некоторой точке $E \in T$. Поэтому дозвуковой характер течения во всей области Ω гарантируется, если $q_E < c_*$.

Теорема единственности решения задачи обтекания справедлива в следующей формулировке: условиями (22) и (23) течение определено единственным образом в случае контура T с одной угловой точкой; то же верно и для гладкого контура при дополнительном условии, что задана циркуляция Γ .

Эта теорема служит основой для моделирования течений. Именно, пусть контур T_1 геометрически подобен контуру T и относительно подобно расположен, т. е. получается из T преобразованием растяжения

$$x' = ax, \quad y' = ay \quad (a > 0).$$

Тогда при одинаковых условиях на бесконечности поле скоростей $\mathbf{u}_1$, будет подобно полю $\mathbf{u}$ в том смысле, что

$$\mathbf{u}_1(ax, ay) = \mathbf{u}(x, y),$$

а циркуляции будут связаны соотношением $\Gamma_1 = a\Gamma$.

Теоремы существования решения задачи обтекания справедливы во всем диапазоне входных данных (включая задание циркуляции Γ в случае гладкого контура), гарантирующих неравенство $q_E \leq c_*$.

Упомянутые результаты являются итогом очень глубокого и трудного анализа, использующего современные методы теории функций, функционального анализа и квазиконформных отображений. Подробности можно найти в журнальных статьях, цитированных в [8].

§ 24. Характеристики и простые волны

В этом параграфе изучаются свойства гладких чисто сверхзвуковых двумерных безвихревых изэнтропических течений. Здесь определяющим является свойство гиперболичности основных уравнений и связанные с ним факты локализации возмущений в областях, ограниченных характеристиками. Теория чисто сверхзвуковых течений во многом аналогична теории одномерных движений, рассмотренных в §§ 15, 16. Исследованию возможных вырождений сверхзвукового течения при переходе через звуковые линии или скачки уплотнения будут посвящены дальнейшие параграфы.

Исходные уравнения. Основные уравнения (22.23) здесь удобнее взять в первоначальном виде

$$u_y - v_x = 0, \quad (\rho u)_x + (\rho v)_y = -\frac{\nu}{y} \rho v, \quad (1)$$

присоединяя к ним интеграл Бернулли (22.24) с постоянной константой q_m . Согласно (10.8) его дифференциальная форма имеет вид

$$\frac{dp}{dq} = -\frac{\rho q}{c^2}. \quad (2)$$

Из рассмотрений § 10 вытекает, что при $q > c$ (или $M > 1$) система (1) является гиперболической. Поэтому для нее важно найти характеристики и условия на них, а также построить транспортные уравнения для описания распространения слабых разрывов вдоль характеристик и выяснения возможности градиентной катастрофы. Необходимые для выполнения этой программы выкладки будут более компактными, если сразу ввести в качестве независимых переменных потенциал скоростей φ и функцию тока ψ :

$$d\varphi = u dx + v dy, \quad d\psi = -y^\nu \rho v dx + y^\nu \rho u dy. \quad (3)$$

В дальнейшем плоскость $R^2(\varphi, \psi)$ будет называться *плоскостью потенциала*. Для возвращения в плоскость течения служат вытекающие из (3) уравнения

$$\rho q^2 dx = \rho u d\varphi - y^{-\nu} v d\psi, \quad \rho q^2 dy = \rho v d\varphi + y^{-\nu} u d\psi. \quad (4)$$

В последующих формулах будет использоваться угол Маха $\alpha = \arcsin(1/M)$, связанный с числом Маха $M = q/c$ соотношениями

$$\sin \alpha = \frac{1}{M}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \sqrt{M^2 - 1} \quad \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right). \quad (5)$$

Наконец, наряду с декартовым представлением искомого вектора скорости $\mathbf{u} = (u, v)$ будет рассматриваться его полярное представление через модуль q и угол наклона θ к оси x (полярные координаты на плоскости годографа, уже введенные в § 22):

$$u = q \cos \theta, \quad v = q \sin \theta. \quad (6)$$

Естественно, что в этих переменных получится аналог уравнений Чаплыгина (22.45). Однако для охвата также и осесимметричных течений уместно дать краткий вывод преобразованных уравнений. С помощью формул (3), (6) и с учетом соотношений (2), (5) для левых частей уравнений (1) получаются выражения

$$\begin{aligned} u_y - v_x &= u_\varphi v - u v_\varphi + y^\nu \rho (u u_\psi + v v_\psi) = -q^2 \theta_\varphi + y^\nu \rho q q_\psi, \\ (\rho u)_x + (\rho v)_y &= \\ &= u(\rho u)_\varphi + v(\rho v)_\varphi + y^\nu \rho (-v(\rho u)_\psi + u(\rho v)_\psi) = \\ &= q^2 \rho_\varphi + \rho q q_\varphi + y^\nu \rho^2 q^2 \theta_\psi = -\rho q \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot q_\varphi + y^\nu \rho^2 q^2 \theta_\psi. \end{aligned}$$

Следовательно, после преобразования на плоскость потенциала система (1) оказывается такой:

$$\begin{aligned} y^\nu \rho q_\psi - q \theta_\varphi &= 0, \\ \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot q_\varphi - y^\nu \rho q \theta_\psi &= \frac{\nu}{y} \sin \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Характеристики. На плоскости потенциала характеристики задаются дифференциальным уравнением вида

$$d\psi/d\varphi = \kappa. \quad (8)$$

Тогда нормальный характеристический вектор с проекциями на оси декартовых координат (φ, ψ) есть $(-\kappa, 1)$ и по правилам, изложенным в § 6, находится характеристическая матрица системы (7)

$$A(\kappa) = \begin{pmatrix} y^\nu \rho & q \kappa \\ -\operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \kappa & -y^\nu \rho q \end{pmatrix}.$$

Ее определитель

$$\det A(\kappa) = q \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \kappa^2 - y^{2\nu} \rho^2 q$$

дает следующее характеристическое уравнение:

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \kappa^2 - y^{2\nu} \rho^2 = 0,$$

всегда имеющее два вещественных корня (для $\nu = 1$ в области $y > 0$):

$$\kappa_+ = y^\nu \rho \operatorname{tg} \alpha, \quad \kappa_- = -y^\nu \rho \operatorname{tg} \alpha. \quad (9)$$

Для построения условий на характеристиках находятся соответствующие корням $\kappa_\pm$ левые собственные векторы матрицы $A(\kappa)$, которые могут быть взяты в виде $(1, \pm \operatorname{tg} \alpha)$. Поэтому условия на характеристиках получаются почленным сложением первого уравнения (7) со вторым, умноженным на $\pm \operatorname{tg} \alpha$, и после небольшого преобразования оказываются такими:

$$\left(\theta_\varphi \mp \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{q} q_\varphi \right) \pm y^\nu \rho \operatorname{tg} \alpha \left(\theta_\psi \mp \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{q} q_\psi \right) = \mp \frac{\nu}{yq} \operatorname{tg} \alpha \sin \theta, \quad (10)$$

где верхние знаки берутся для корня κ_+ , а нижние — для κ_- . В условиях (10) участвует уже рассматривавшаяся в (22.58) вспомогательная функция

$$\mu(q) = \int_{c_*}^q \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{q} dq. \quad (11)$$

С этой функцией образуются величины, аналогичные инвариантам Римана для одномерных движений (16.6), производные от которых естественно возникли в условиях (10):

$$r = \theta - \mu(q), \quad l = \theta + \mu(q). \quad (12)$$

В последующем изложении величины r и l будут также называться *инвариантами Римана*. С ними условия на характеристиках (10) принимают вид

$$r_\varphi + \kappa_+ r_\psi = -\frac{\nu}{yq} \operatorname{tg} \alpha \sin \theta, \quad l_\varphi + \kappa_- l_\psi = \frac{\nu}{yq} \operatorname{tg} \alpha \sin \theta.$$

Наконец, вводятся операторы дифференцирования по φ вдоль характеристик каждого из семейств

$$D_+ = \frac{\partial}{\partial \varphi} + \kappa_+ \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad D_- = \frac{\partial}{\partial \varphi} + \kappa_- \frac{\partial}{\partial \psi}, \quad (13)$$

и окончательно получается следующая характеристическая форма системы уравнений (7):

$$\begin{aligned}(C_+) \quad \frac{d\psi}{d\varphi} &= y^\nu \rho \operatorname{tg} \alpha, \quad D_+ r = -\frac{\nu}{yq} \operatorname{tg} \alpha \sin \theta; \\(C_-) \quad \frac{d\psi}{d\varphi} &= -y^\nu \rho \operatorname{tg} \alpha, \quad D_- l = \frac{\nu}{yq} \operatorname{tg} \alpha \sin \theta.\end{aligned}\quad (14)$$

В дальнейшем будет соблюдаться указанная в (14) маркировка семейств характеристик $C_\pm$. Уравнения (14) показывают, что r и l действительно являются инвариантами в случае плоскопараллельного течения: при $\nu = 0$ величина r постоянна вдоль каждой характеристики C_+ , а величина l — вдоль C_- .

Для отыскания характеристик на плоскости течения надо просто пересчитать производную $d\psi/d\varphi$ и операторы $D_\pm$ согласно формулам (4). Тогда для характеристических направлений получатся выражения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho v + y^{-\nu} u \kappa_\pm}{\rho u - y^{-\nu} v \kappa_\pm} = \frac{\operatorname{tg} \theta \pm \operatorname{tg} \alpha}{1 \mp \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \alpha} = \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha).$$

Операторы $D_\pm$ оказываются такими:

$$D_\pm = \frac{1}{\cos \alpha} \left(\cos(\theta \pm \alpha) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta \pm \alpha) \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Поэтому если ввести еще модифицированные операторы дифференцирования вдоль характеристик на плоскости $R^2(x, y)$

$$\tilde{D}_\pm = \cos(\theta \pm \alpha) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta \pm \alpha) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (15)$$

то окончательно получится следующая характеристическая форма системы уравнений (1) на плоскости течения:

$$\begin{aligned}(C_+) \quad \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg}(\theta + \alpha), \quad \tilde{D}_+ r = -\frac{\nu}{y} \sin \alpha \sin \theta; \\(C_-) \quad \frac{dy}{dx} &= \operatorname{tg}(\theta - \alpha), \quad \tilde{D}_- l = \frac{\nu}{y} \sin \alpha \sin \theta.\end{aligned}\quad (16)$$

Отсюда следует качественная картина расположения направлений характеристик относительно вектора скорости в каждой точке A плоскости течения, показанная на рис. 1. Здесь AB_1 и AB_2 — направления характеристик в точке A и подчеркнуто важное свойство (уже упоминавшееся в § 10), которое очевидным образом следует из формул (16) и (5): *абсолютная величина проекции вектора скорости на нормаль к характеристике равна скорости звука*.

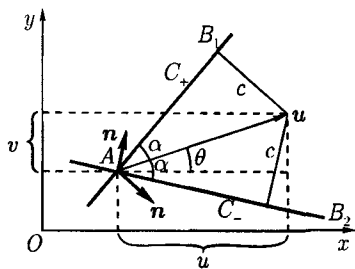


Рис. 1

Уравнения (14) или (16) указывают на еще одно принципиальное различие между плоскопараллельными и осесимметричными течениями. В случае плоскопараллельных течений ($\nu = 0$) годографы характеристик являются стандартными кривыми $r = \text{const}$ или $l = \text{const}$ независимо от конкретного решения. Для этого случая сетка характеристик на плоскости годографа показана на рис. 22.5. Для осесимметричных течений ($\nu = 1$) это свойство неверно из-за наличия ненулевых правых частей в уравнениях (16),

в силу чего годографы характеристик не совпадают с линиями $r = \text{const}$ или $l = \text{const}$ и существенно зависят от индивидуального решения.

Транспортные уравнения. В качестве производных по направлению, трансверсальному к любым характеристикам, можно взять производные по φ

$$R = r_\varphi, \quad L = l_\varphi. \quad (17)$$

Общий ход вывода уравнений для этих величин вдоль характеристик аналогичен изложенному в § 15. Ниже для простоты этот вывод дается в случае плоскопараллельных течений (осесимметричный случай предоставляется читателю). Дело сводится к преобразованию уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} D_+ r = r_{\varphi\varphi} + \rho \operatorname{tg} \alpha \cdot r_{\varphi\psi} + (\rho \operatorname{tg} \alpha)_\varphi r_\psi = 0.$$

Это преобразование выполняется с использованием равенств

$$r_{\varphi\varphi} + \rho \operatorname{tg} \alpha r_{\varphi\psi} = D_+ R,$$

$$(\rho \operatorname{tg} \alpha)_\varphi = (\rho \operatorname{tg} \alpha)_q q_\varphi = (\rho \operatorname{tg} \alpha)_q \cdot \frac{1}{2} q \operatorname{tg} \alpha \cdot (L - R),$$

$$r_\psi = -\frac{1}{\rho \operatorname{tg} \alpha} R,$$

в силу которых предыдущее уравнение и дает транспортное уравнение, описывающее изменение величины R вдоль характеристики C_+ :

$$D_+ R + \frac{q}{2\rho}(\rho \operatorname{tg} \alpha)_q (R - L) R = 0. \quad (18)$$

Аналогично получается транспортное уравнение, описывающее изменение величины L вдоль характеристики C_- :

$$D_- L + \frac{q}{2\rho}(\rho \operatorname{tg} \alpha)_q (R - L) L = 0. \quad (19)$$

Каждое из уравнений (18), (19) есть *уравнение Риккати*. Благодаря специальному виду они интегрируются в квадратурах. Более того, аналогично случаю одномерных движений (см. § 16), здесь можно обойтись одной квадратурой. Для этого надо заметить, что справедливы формулы

$$R = -D_- \mu(q) = -\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{q} D_- q, \quad L = D_+ \mu(q) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{q} D_+ q. \quad (20)$$

Действительно, например, первая из формул (20) вытекает из очевидных равенств

$$\begin{aligned} D_- r &= D_- (r - l) = -2D_- \mu(q), \\ D_- r &= (D_+ + D_-)r = 2r_\varphi = 2R, \end{aligned}$$

и аналогично получается вторая.

Для интегрирования уравнения (18) делается подстановка $R = 1/z$, в результате которой оно становится линейным:

$$D_+ z + \frac{q}{2\rho}(\rho \operatorname{tg} \alpha)_q L z = \frac{q}{2\rho}(\rho \operatorname{tg} \alpha)_q.$$

С учетом (20) коэффициент при z преобразуется к виду

$$\frac{q}{2\rho}(\rho \operatorname{tg} \alpha)_q L = \frac{D_+ \sqrt{\rho \operatorname{tg} \alpha}}{\sqrt{\rho \operatorname{tg} \alpha}}.$$

Поэтому предыдущее уравнение упрощается до следующего:

$$D_+ (z \sqrt{\rho \operatorname{tg} \alpha}) = \frac{q}{2\rho} \sqrt{\rho \operatorname{tg} \alpha} (\rho \operatorname{tg} \alpha)_q.$$

Для входящей в правую часть производной нетрудно получить выражение

$$\frac{d}{dq}(\rho \operatorname{tg} \alpha) = -\frac{m+2}{2} \frac{\rho}{c \cos^3 \alpha}, \quad (21)$$

где m — величина, введенная в (2.22). Поэтому правая часть равна

$$-\frac{m+2}{4} \frac{\sqrt{\rho \operatorname{tg} \alpha}}{\sin \alpha \cos^3 \alpha}.$$

Теперь интегрирование вдоль характеристики C_+ от некоторого значения φ_0 (при котором все величины отмечаются индексом нуль) до переменного значения φ дает

$$z \sqrt{\rho \operatorname{tg} \alpha} = z_0 \sqrt{\rho_0 \operatorname{tg} \alpha_0} - \int_{\varphi_0(C_-)}^{\varphi} \frac{m+2}{4} \frac{\sqrt{\rho \operatorname{tg} \alpha}}{\sin \alpha \cos^3 \alpha} d\varphi.$$

Для приложений иногда удобнее иметь результат с интегрированием вдоль характеристики C_+ по переменной ψ . При такой замене переменной интегрирования будет $d\varphi = d\psi / \rho \operatorname{tg} \alpha$. Наконец, возвращение к $R = 1/z$ дает следующее представление решения транспортного уравнения (18):

$$R = \frac{R_0 \sqrt{\rho \operatorname{tg} \alpha}}{\sqrt{\rho_0 \operatorname{tg} \alpha_0} - R_0 \int_{\psi_0(C_+)}^{\psi} \frac{m+2}{4\sqrt{\rho}} (\sin \alpha)^{-3/2} (\cos \alpha)^{-5/2} d\psi}. \quad (22)$$

Точно такой же вид имеет решение уравнения (19); оно получается из (22) просто заменой R на L и C_+ на C_- .

На основании (22) можно сделать вывод о том, что неравенства $R_0 \leq 0$ и $L_0 \leq 0$ достаточны для того, чтобы первые производные решения оставались ограниченными при движении в сторону $d\psi > 0$. Напротив, если хотя бы одна из величин, R_0 или L_0 , положительна, то со стороны $\psi > \psi_0$ можно ожидать наступления градиентной катастрофы в точке, определяемой условием обращения знаменателя в нуль.

Качественные свойства. Очевидно, что гиперболическая система (7) является симметрической (см. § 7). Поэтому для нее справедливы все выводы, полученные для уравнений одномерного движения в § 15. В частности, верны теоремы единственности решения задач Коши и Гурса, а также некоторых смешанных задач. Теорема существования гладкого решения,

например, задачи Коши справедлива, вообще говоря, лишь в малом, т. е. в достаточно малой окрестности носителя начальных данных.

Необходимо обратить внимание на то, что система уравнений (7) гиперболична и относительно направления оси φ , и относительно направления оси ψ . Поэтому для нее корректна задача Коши как с начальными данными при $\varphi = \text{const}$, так и при $\psi = \text{const}$. Это означает, что непрерывные безвихревые сверхзвуковые течения обладают свойством эволюционности как по переменной φ , так и по переменной ψ . Однако при рассмотрении течений в целом необходимо учитывать возможность возникновения сильных разрывов, в том числе и контактных, и областей вихревого течения, причем свойства эволюционности могут нарушаться. Для правильного ответа на вопрос об эволюционности следует рассмотреть исходную систему (22.2) без предположений о потенциальности и изэнтропичности.

С этой целью надо заметить, что для любого данного семейства линий тока существует ортогональное семейство кривых, которые могут быть определены как линии уровня функции $\tau = \tau(x, y)$, удовлетворяющей уравнениям вида

$$\tau_x = uN, \quad \tau_y = vN \quad (23)$$

с некоторой функцией $N > 0$, определяемой полем скоростей. Так как якобиан $\tau_x \psi_y - \tau_y \psi_x = y^\nu \rho q^2 N$ всюду положителен, то можно перейти к системе уравнений, эквивалентной (22.2), рассматривая искомый вектор $U = (u, v, p, S)$ как функцию переменных (τ, ψ) :

$$\begin{aligned} N\rho q^2 u_\tau + Nup_\tau - y^\nu \rho v p_\psi &= 0, \\ N\rho q^2 v_\tau + Nvp_\tau + y^\nu \rho u p_\psi &= 0, \\ Nbq^2 p_\tau + Nuu_\tau + Nvv_\tau - y^\nu \rho v u_\psi + y^\nu \rho u v_\psi &= -\frac{\nu}{y}v, \\ NS_\tau &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

В записи системы (24) в матричной форме (здесь U считается вектором-столбцом)

$$A^\tau U_\tau + A^\psi U_\psi = F$$

матрицы-коэффициенты таковы:

$$A^\tau = N \begin{pmatrix} \rho q^2 & 0 & u & 0 \\ 0 & \rho q^2 & v & 0 \\ u & v & bq^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^\psi = y^\nu \rho \begin{pmatrix} 0 & 0 & -v & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 \\ -v & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь обе матрицы, A^τ и A^ψ , симметричны, но только матрица A^τ является положительно определенной при условии, что $M > 1$, т. е. для сверхзвуко-

вых течений. Поэтому для системы (24) задача Коши с данными при $\tau = \text{const}$ корректна, а с данными при $\psi = \text{const}$, вообще говоря, некорректна. Следовательно, система (24) является эволюционной только по переменной τ .

Попутно стоит заметить, что условие совместности уравнений (23) после несложных преобразований приводится к виду

$$N_\psi = q^{-2} q_m q'_m N, \quad (25)$$

где N рассматривается как функция от (τ, ψ) , а функция $q_m = q_m(\psi)$ взята из интеграла Бернулли (22.13). Поэтому функция N в (23) определена однозначно, с точностью до несущественного произвольного множителя, зависящего только от τ , если заданы ее значения на какой-нибудь одной линии тока $\psi = \text{const}$. В частности, если течение изоэнергетическое, т. е. константа q_m^2 не зависит от ψ , то уравнение (25) имеет простое решение $N = 1$, и тогда из (23) следует, что можно принять $\tau = \varphi$. Этот вывод тем более справедлив для безвихревых изэнтропических течений.

Для иллюстрации указанного выше свойства эволюционности системы (24) можно вернуться к уже решенной в § 22 задаче обтекания выпуклого угла и интерпретировать ее как задачу Коши с начальными данными при $x = 0$, $y > 0$, задавая их в виде $q = q_1 > c_1$, $\theta = 0$ (см. рис. 22.7). Тогда, проводя аналогию с одномерными движениями, можно трактовать отклоняющуюся часть OB обтекаемой стенки как «поршень, выдвигающийся из газа», на котором задано «условие непротекания» $\theta = \theta_1 = \text{const}$. Подобная аналогия уместна и полезна также в ряде других задач о сверхзвуковых течениях.

Простые волны. В § 22 уже были изучены простые волны для осесимметричных течений и было показано, что все они суть автомодельные решения, зависящие от $\lambda = x/y$. Поэтому здесь будут рассматриваться простые волны только для плоскопараллельных течений. В этом случае свойства простых волн вполне аналогичны таковым для одномерных изэнтропических движений с плоскими волнами, рассмотренных в § 16. Так как, согласно общей теореме 13.1, простые волны должны быть изэнтропическими потенциальными течениями, то их можно искать сразу для уравнений (7) с $\nu = 0$.

Теорема 1. *В каждой простой волне, если она не есть постоянное течение, один и только один из инвариантов Римана, r или l , сохраняет тождественно постоянное значение. Если в простой волне $r = \text{const}$ (или $l = \text{const}$), то ее линиями уровня являются характеристики C_- (соответственно C_+). В обоих случаях характеристики — линии уровня простой волны — прямолинейны как на плоскости течения, так и на плоскости*

потенциала. Обратно, если в некоторой области течение не постоянно и один из инвариантов Римана тождественно постоянен, то течение в этой области есть простая волна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Основное предположение, выделяющее простые волны, здесь выглядит так: $q = q(\lambda)$, $\theta = \theta(\lambda)$, где $\lambda = \lambda(\varphi, \psi)$. Подстановка этого представления в (7) дает систему уравнений (штрихом обозначены производные по λ)

$$\begin{aligned} q\theta'\lambda_\varphi - \rho q'\lambda_\psi &= 0, \\ \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot q'\lambda_\varphi - \rho q\theta'\lambda_\psi &= 0, \end{aligned} \quad (26)$$

которая может иметь ненулевое решение $(\lambda_\varphi, \lambda_\psi)$, только если

$$q^2\theta'^2 - \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot q'^2 = 0.$$

В силу определения (12) это равенство равносильно соотношению $r'l' = 0$. Значит, один из инвариантов Римана, r или l , должен быть тождественно постоянен. Предположение о том, что постоянны они оба, приводит, очевидно, к постоянному течению.

Если $r = \operatorname{const}$, то $q\theta' = \operatorname{ctg} \alpha \cdot q'$ и уравнения (26) сводятся к одному $\lambda_\varphi - \rho \operatorname{tg} \alpha \cdot \lambda_\psi = 0$ или, в обозначениях (13), к уравнению $D_- \lambda = 0$. Это означает, что параметр простой волны λ постоянен вдоль характеристик семейства C_- . Но на каждой характеристике C_- сохраняет постоянное значение также инвариант Римана l . Из постоянства инвариантов r и l вдоль C_- следует также постоянство величин q и θ , а значит, ρ и α . Поэтому в дифференциальном уравнении характеристик C_- на плоскости потенциала правая часть постоянна вдоль C_- . Следовательно, эти характеристики суть прямые линии на плоскости потенциала с уравнением вида

$$\psi + \varphi \operatorname{tg} \alpha = F(q),$$

где $F(q)$ — произвольная функция. Точно так же в дифференциальном уравнении характеристик C_+ на плоскости течения

$$dy/dx = \operatorname{tg}(\theta - \alpha)$$

правая часть постоянна вдоль C_+ . Следовательно, эти характеристики — прямые линии и на плоскости течения с уравнением вида

$$y - x \operatorname{tg}(\theta - \alpha) = F(q).$$

Аналогично рассматривается случай $l = \operatorname{const}$, в котором вместо характеристик C_- прямолинейными будут характеристики C_+ . Наконец, если

в некотором непостоянном течении (заранее не предполагаемом простой волной) выполнено равенство $r \equiv \text{const}$ (или $l \equiv \text{const}$, то это означает, что величина θ зависит только от q . Значит, если положить $q = \lambda$, то будет $\theta = \theta(\lambda)$, т. е. выполнено основное предположение, выделяющее простые волны. ■

Простая волна, в которой тождественно постоянен инвариант Римана r (соответственно l), называется коротко r -волной (соответственно l -волной).

В процессе доказательства теоремы 1 получились соотношения, позволяющие дать следующее полное описание всех простых волн.

Уравнения r -волны:

$$\begin{aligned} r = \theta - \mu(q) = r_0, \quad y - x \operatorname{tg}(\theta - \alpha) = F(q), \\ \psi + \varphi \rho \operatorname{tg} \alpha = F(q). \end{aligned} \quad (27)$$

Уравнения l -волны:

$$\begin{aligned} l = \theta + \mu(q) = l_0, \quad y - x \operatorname{tg}(\theta + \alpha) = F(q), \\ \psi - \varphi \rho \operatorname{tg} \alpha = F(q). \end{aligned} \quad (28)$$

Входящие сюда произвольные функции $F(q)$ в разных уравнениях (27) и (28) могут быть различными.

Для распознавания простых волн служит следующая теорема о примыкании, дающая, аналогично теореме 16.2, достаточное условие существования простой волны.

Теорема 2. Если в непрерывном безвихревом изэнтропическом плоскопараллельном течении есть характеристика C_+ (соответственно C_-), вдоль которой вектор скорости тождественно постоянен, то в окрестности этой характеристики, с каждой ее стороны, данное течение является либо постоянным, либо простой l -волной (соответственно r -волной). В частности, непостоянное течение, примыкающее к постоянному, всегда есть простая волна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. С несущественными изменениями повторяется доказательство теоремы 16.2. ■

Теорема о примыкании справедлива и в усиленной формулировке, без требования потенциальности и изэнтропичности течения в целом, но с дополнительным предположением о том, что вдоль данной характеристики C_+ (или C_-) вихрь равен нулю и энтропия постоянна.

Простая волна называется *центрированной*, если все ее прямолинейные характеристики пересекаются в одной точке.

Рассуждение, аналогичное приведенному в § 16 по тому же поводу для простых волн в одномерных движениях, показывает, что справедливо

следующее описание центрированных простых волн (для упрощения записи в качестве центра взяты точки $(x, y) = (0, 0)$ и $(\varphi, \psi) = (0, 0)$; все другие случаи получаются отсюда преобразованиями переноса).

Уравнения центрированной r -волны:

$$\theta - \mu(q) = r_0, \quad \operatorname{tg}(\theta - \alpha) = \frac{\nu}{x}, \quad \rho \operatorname{tg} \alpha = -\frac{\psi}{\varphi}. \quad (29)$$

Уравнения центрированной l -волны:

$$\theta + \mu(q) = l_0, \quad \operatorname{tg}(\theta + \alpha) = \frac{y}{x}, \quad \rho \operatorname{tg} \alpha = \frac{\psi}{\varphi}. \quad (30)$$

Итак, центрированные простые волны описываются автомодельными решениями исходных дифференциальных уравнений (1) или (7) (при $\nu = 0$). Полная центрированная простая волна уже была найдена в § 22; она называется *течением Прандтля – Мейера* и на плоскости течения показана на рис. 22.6. Эта картина здесь дополняется ее изображением на плоскости потенциала, приведенным на рис. 2.

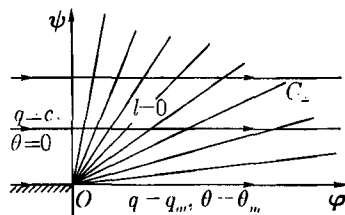


Рис. 2

Волны сжатия и разрежения. В частности, движущейся вдоль линии тока, плотность газа может возрастать или убывать. Если плотность газа возрастает, то имеет место *течение сжатия*; если плотность газа убывает — то *течение разрежения*. Эти понятия в применении к простым волнам приводят к следующему определению (аналогичному 16.3).

Определение 1. Простая волна называется *волной сжатия* (соответственно *волной разрежения*), если при движении в направлении вектора скорости вдоль пересекающих эту волну линий тока плотность ρ возрастает (соответственно убывает).

Так как при указанном направлении движения всегда $d\varphi > 0$, то различающей величиной является производная ρ_φ : течение сжатия (разрежения) характеризуется неравенством $\rho_\varphi > 0$ (соответственно $\rho_\varphi < 0$).

При наглядном изображении простых волн в виде «всера» их прямолинейных характеристик можно различать волны сжатия и разрежения по расположению «ручки всера» аналогично тому, как различались такие волны в одномерных движениях (см. § 16). Специфика здесь состоит в том, что положение «ручки всера» определяется по отношению к направлению

течения: говорят, что «ручка веера» находится *спереди*, если сближение прямолинейных характеристик происходит при движении *вниз по потоку* (в направлении вектора скорости), т. е. со стороны больших значений потенциала φ ; «ручка веера» находится *сзади*, если сближение прямолинейных характеристик происходит при движении *вверх по потоку* — со стороны меньших значений потенциала φ . Ясно, что расположение «ручки веера» однозначно описывается направлением изменения, с ростом потенциала φ , углового коэффициента наклона соответствующих прямолинейных характеристик. Важно, что это направление изменения всегда одинаково на плоскости течения и на плоскости потенциала.

Лемма 1. *Угловые коэффициенты dy/dx и $d\psi/d\varphi$ прямолинейных характеристик в простой волне с ростом φ всегда изменяются в одном и том же направлении (либо оба возрастают, либо оба убывают).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для простой r -волны

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \operatorname{tg}(\theta - \alpha) = \frac{1}{\cos^2(\theta - \alpha)} (\theta_\varphi - \alpha_\varphi),$$

где, как нетрудно вычислить с помощью (2),

$$\alpha_\varphi = -\frac{m + 2 \sin^2 \alpha}{2c \cos \alpha} q_\varphi.$$

Так как здесь $\theta - \mu(q) = \text{const}$, то $\theta_\varphi = \operatorname{ctg} \alpha \cdot q_\varphi/q$. Следовательно,

$$\theta_\varphi - \alpha_\varphi = \frac{\cos \alpha}{q \sin \alpha} q_\varphi + \frac{m + 2 \sin^2 \alpha}{2c \cos \alpha} q_\varphi = \frac{m + 2}{2q \sin \alpha \cos \alpha} q_\varphi. \quad (31)$$

С другой стороны, в силу (21)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{d\psi}{dx} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (-\rho \operatorname{tg} \alpha) = \frac{m + 2}{2c \cos^3 \alpha} \rho q_\varphi. \quad (32)$$

Сравнение (31) с (32) показывает, что для простой r -волны утверждение леммы верно. Аналогичные вычисления для l -волны дают те же выражения (31) и (32), но со знаком минус. ■

Из этой леммы вытекает, что геометрический критерий для различения простых волн сжатия или разрежения на плоскости течения и на плоско-

сти потенциала формулируется одинаково. Он дается следующей теоремой о «ручке веера».

Теорема 3. Простая волна является волной сжатия (соответственно разрежения), если и только если «ручка веера» ее прямолинейных характеристик находится спереди (соответственно сзади).

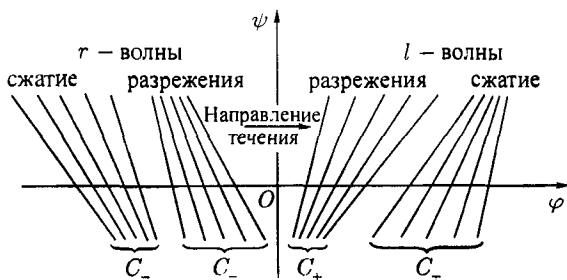


Рис. 3

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что (рис. 3) на плоскости потенциала «ручка веера» в любой простой волне находится спереди, если и только если $|d\psi/d\varphi|_\varphi > 0$, и находится сзади, если и только если $|d\psi/d\varphi|_\varphi < 0$. Так как в любой простой волне для наклона прямолинейных характеристик справедлива формула $|d\psi/d\varphi| = \rho \operatorname{tg} \alpha$, то из выражений (32) и (2) следует соотношение

$$\left| \frac{d\psi}{d\varphi} \right|_\varphi = \frac{m+2}{2} \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} \rho_\varphi.$$

Поэтому «ручка веера» спереди, если и только если $\rho_\varphi > 0$, и сзади, если и только если $\rho_\varphi < 0$. ■

Например, течение Прандтля–Мейера (см. рис. 2) является простой волной разрежения.

Различение простых волн сжатия и разрежения существенно с точки зрения возможности непрерывного продолжения течения. Нетрудно убедиться в том, что при неограниченном продолжении течения вниз по потоку градиентная катастрофа не наступит в волнах разрежения, но неизбежна в волнах сжатия. Геометрически последнее очевидно, так как в волне сжатия прямые характеристики рано или поздно начнут пересекаться и будут приносить в точку пересечения значения величин q и θ . Аналитический вывод основан на замечании, что для простых волн в решении вида (22) транспортное уравнение вдоль прямолинейных характеристик подынтегральное

выражение постоянно вдоль пути интегрирования. Поэтому формула (22) упрощается до следующей:

$$R = \frac{R_0}{1 - R_0 \frac{m_0 + 2}{\rho_0 \sin^2 2\alpha_0} (\psi - \psi_0)}. \quad (33)$$

Но в простой l -волне для величины R справедливо выражение

$$R = r_\varphi = -2 \frac{\operatorname{ctg} \alpha}{q} q_\varphi = 2 \frac{c^2}{\rho q^2} \operatorname{ctg} \alpha \cdot \rho_\varphi.$$

Поэтому в l -волне разрежения будет $R_0 < 0$ и при всех $\psi > \psi_0$ величина R остается ограниченной. Напротив, в l -волне сжатия $R_0 > 0$ и знаменатель в (33) обращается в нуль при конечном ψ .

Плоскость инвариантов Римана. Для анализа сверхзвуковых течений общего характера иногда целесообразно рассматривать величины φ и ψ как искомые функции независимых переменных r и l . Плоскость $R^2(r, l)$ называется *плоскостью инвариантов Римана* (фактически она является деформированной плоскостью годографа). Ясно, что соответствующие дифференциальные уравнения могут быть выведены непосредственно из уравнений Чаплыгина (22.46) в области их гиперболичности путем перехода к характеристическим переменным (12). Однако проще всего вывести их из уравнений характеристик (14) (при $\nu = 0$) тем же приемом, каким были получены уравнения (16.46).

Для этого достаточно заметить, что так как вдоль характеристики C_+ меняется только инвариант Римана l , то ее дифференциальное уравнение $d\psi = \rho \operatorname{tg} \alpha d\varphi$ равносильно уравнению $\psi_l = \rho \operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi_l$. Аналогично преобразуются уравнения характеристик C_- , и окончательно получается следующая система линейных дифференциальных уравнений сверхзвукового течения на плоскости инвариантов Римана:

$$\begin{aligned} \psi_l &= \rho \operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi_l, \\ \psi_r &= -\rho \operatorname{tg} \alpha \cdot \varphi_r. \end{aligned} \quad (34)$$

Так как величины ρ и α зависят только от q , то их можно рассматривать как известные функции разности $l - r$. Исключение из системы (34) потенциала φ (путем перекрестного дифференцирования) даст одно линейное дифференциальное уравнение второго порядка для функции тока ψ :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\rho} \psi_l \right) + \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{\rho} \psi_r \right) = 0. \quad (35)$$

Одним из преимуществ записи уравнения (35) является его *самосопряженная* форма. В раскрытой форме это уравнение принимает вид *уравнения Дарбу*:

$$\psi_{lr} - G(l-r)(\psi_l - \psi_r) = 0, \quad (36)$$

где функция $G(z)$ определена параметрически:

$$z = 2\mu(q), \quad G(z) = \frac{m(q) + 2}{8 \sin \alpha(q) \cos^3 \alpha(q)}. \quad (37)$$

В отличие от его аналога (16.47), уравнение (36) не упрощается сколь-нибудь существенно даже в случае политропного газа. С этим связаны значительные аналитические трудности в исследованиях сверхзвуковых течений.

Задача об истечении струи. Из прямолинейной трубы ширины $2y_0$, в которой течет постоянный сверхзвуковой поток газа с известным уравнением состояния и заданными параметрами $\rho_0, p_0, q > c_0$, газ вытекает в окружающую среду (покоящийся газ), в которой задано давление $p_1 < p_0$. Требуется найти установившееся течение газа вне трубы, считая границу с окружающей средой контактным разрывом.

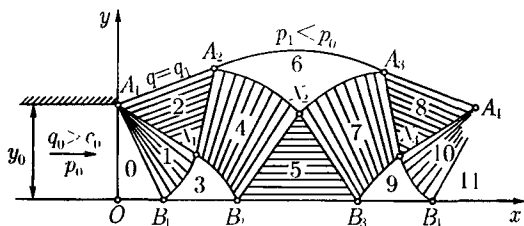


Рис. 4

До тех пор, пока течение в струе остается непрерывным, оно является безвихревым и изэнтропическим. Данные задачи определяют константу q_m^2 в интеграле Бернулли и тем самым все функции параметров состояния от модуля скорости q . Так как при переходе через контактный разрыв давление должно меняться непрерывно, то давление в струе на ее границе также равно p_1 . Следовательно, вдоль границы известны плотность ρ_1 и скорость звука c_1 , а значит, и постоянное значение модуля скорости q_1 , определяемое интегралом Бернулли

$$q_1^2 + I(c_1^2) = q_m^2.$$

Граничные условия симметричны относительно оси трубы. Из единственности решения следует, что если непрерывное решение существует, то оно должно быть также симметричным. Поэтому можно ограничиться рассмотрением «верхней» половины течения, изображенной на рис. 4. Граница струи и ось симметрии должны быть линиями тока, причем $\psi = 0$ на оси и $\psi = \psi_0 = \rho_0 q_0 y_0$ на границе. Следовательно, задача ставится на плоскости потенциала в полуполосе $\Pi = \{0 \leq \psi \leq \psi_0, \varphi \geq 0\}$ как смешанная задача Коши с начальными данными при $\varphi = 0$

$$q(0, \psi) = q_0, \quad \theta(0, \psi) = 0 \quad (0 \leq \psi \leq \psi_0) \quad (38)$$

и граничными условиями

$$\theta(\varphi, 0) = 0, \quad q(\varphi, \psi_0) = q_1 \quad (\varphi \geq 0). \quad (39)$$

При движении вниз по течению в вытекающей струе образуется последовательность характерных областей 0, 1, ..., 10, ..., показанных на рис. 4. К области 0 постоянного решения $q = q_0, \theta = 0$ вдоль прямой $A_1 B_1$ (характеристика C_-) примыкает центрированная простая волна 1 с центром в A_1 и уравнением $r = r_0$. Это течение описывается уравнениями

$$\theta - \mu(q) = -\mu(q_0), \quad y - y_0 = x \operatorname{tg}(\theta - \alpha). \quad (40)$$

В области 2 формируется постоянное течение с параметрами $q = q_1, \theta = \theta_2$, где угол θ_2 определяется из (40):

$$\theta_2 = \mu(q_1) - \mu(q_0).$$

К области 2 вдоль прямой $N_1 A_2$ (характеристика C_+) примыкает простая l -волна 4, уже не являющаяся центрированной, с уравнением

$$\theta + \mu(q) = \theta_2 + \mu(q_1). \quad (41)$$

Она заканчивается характеристикой $B_2 N_2$, вдоль которой $\theta = 0$ в силу первого граничного условия (39). Поэтому вдоль $B_2 N_2$ постоянное значение $q = q_5$ находится из уравнения (41):

$$\mu(q_5) = \theta_2 + \mu(q_1).$$

В области 5 снова образуется постоянное течение с параметрами $q = q_5, \theta = 0$, к которому вдоль $N_2 B_3$ примыкает простая r -волна 7 с уравнением

$$\theta - \mu(q) = -\mu(q_5).$$

Область 8 снова есть область постоянного течения, причем так как $q = q_1$ на A_3N_3 , то

$$\theta_8 = \mu(q_1) - \mu(q_5) = -\theta_2.$$

В области 10 снова формируется простая l -волна с уравнением

$$\theta + \mu(q) = -\theta_2 + \mu(q_1),$$

переводящая течение в постоянное в области 11 и т. д. В областях 3, 6, и 9 образуются течения общего характера. Для их расчета требуется решать некоторые краевые задачи, которые могут быть поставлены на плоскости инвариантов Римана. Например, в области 3 вдоль характеристики B_1N_1 семейства C_+ дано $r = -\mu(q_1)$, вдоль отрезка B_1B_2 оси симметрии $\theta = 0$, т. е. $r + l = 0$, и вдоль характеристики N_1B_2 семейства C_- дано $l = \mu(q_5)$. Поэтому на плоскости инвариантов Римана область $B_1N_1B_2$ имеет вид треугольника, показанного на рис. 5. В нем надо найти решение уравнения (36) по граничным условиям на линиях B_1B_2 , где просто $\psi = 0$, и B_1N_1 , где функция тока известна из описания централизованной простой волны в области 1. Этими данными искомое решение определяется единственным образом, так как в силу симметрии возникающая красная задача на самом деле сводится к задаче Гурса в квадрате $B_1N_1B_2N'_1$ с данными на характеристиках B_1N_1 и $B_1N'_1$. Постановка на плоскости инвариантов Римана краевых задач, возникающих в областях 6 и 9, предоставляется читателю.

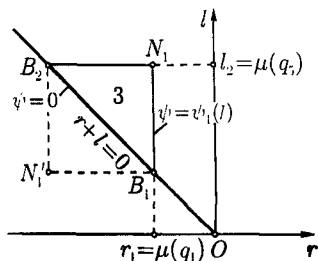


Рис. 5

Важная особенность построенного течения состоит в том, что простые волны 1 и 4 суть волны разрежения, а простые волны 7 и 10 являются волнами сжатия. Поэтому не исключено, что в них произойдет градиентная катастрофа и дальнейшее непрерывное продолжение течения будет невозможно. Однако окончательное решение этого вопроса до настоящего времени не получено.

§ 25. Косые скачки уплотнения

Установленные в § 5 свойства ударного перехода связаны с нормальной к фронту ударной волны составляющей вектора скорости. Эти результаты являются окончательными, если движение газа таково, что направление вектора скорости перед волной ортогонально фронту. Однако в общем случае вектор скорости образует с фронтом ударной волны

острый угол, и тогда для полного описания движения за волной необходимо учитывать касательную составляющую вектора скорости. Это особенно важно в модели установившегося течения газа, когда за ударной волной могут получаться как сверхзвуковые, так и дозвуковые скорости. В § 10 уже сообщены предварительные сведения о стационарных ударных волнах — скачках уплотнения в установившихся течениях. Они используются в данном параграфе для более детального анализа поведения течения в косых скачках уплотнения (для краткости в дальнейшем слово «уплотнения» опускается).

Основная задача заключается в том, чтобы описать все состояния движения, достигаемые за возможными *косыми скачками*, через которые может преобразоваться некоторое фиксированное состояние движения перед скачком. При этом, как показано в § 10, течение перед скачком необходимо должно быть сверхзвуковым.

Ударная поляря. Легко сообразить, что упомянутая совокупность состояний за косыми скачками образует однопараметрическое семейство. Действительно, если угол между вектором скорости и поверхностью скачка задан, то состояние движения за скачком полностью определено, так как касательная к поверхности скачка составляющая вектора скорости при переходе через скачок меняется непрерывно, а нормальная составляющая и термодинамические параметры газа однозначно определяются условием $D_n = 0$ (теорема 5.5). Кроме того, векторы скорости перед и за скачком и нормаль к поверхности скачка всегда лежат в одной плоскости. Поэтому для описания упомянутого однопараметрического семейства состояний достаточно рассмотреть косые скачки в плоскопараллельном течении (в частности, этим объясняется отнесение обсуждаемых вопросов в раздел двумерных установившихся течений).

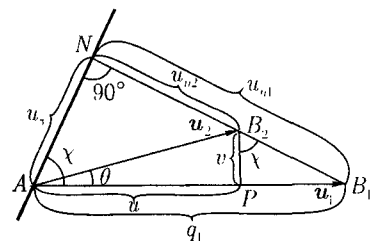


Рис. 1

Конфигурация направлений в косом скачке показана на рис. 1. Здесь A — точка течения, лежащая на линии скачка, и AN — касательная к этой линии в точке A . Предполагается, что передняя сторона скачка (как ударной волны) находится слева от AN , а его задняя сторона — справа от AN . Отрезок AB_1 длины $q_1 > c_1$, изображает вектор скорости u_1 перед скачком. Отрезок AB_2 изображает вектор скорости u_2 за скачком. Условие равенства касательных составляющих вектора скорости до и после

скачка равносильно перпендикулярности прямой B_1B_2 к AN . В системе координат, в которой ось x направлена по вектору скорости u_1 , справедливы представления векторов скорости в компонентах $u_1 = (q_1, 0)$ и $u_2 = (u, v)$. Тем самым рис. 1 можно рассматривать как совмещение плоскости течения и плоскости годографа с началом координат в точке A . Через χ обозначен угол между направлениями линии скачка и вектора скорости в точке A . Отрезки B_1N и B_2N равны, соответственно, величинам нормальных составляющих u_{n_1} и u_{n_2} , а отрезок AN — величине касательной составляющей u_0 .

Изложенные выше соображения показывают, что для заданного угла χ положение точки B_2 определено однозначно. Поэтому при изменении χ точка B_2 опишет некоторую кривую, которая называется *ударной полярой*. На плоскости годографа точки B_1 и B_2 являются годографами одной и той же точки A плоскости течения: они соответствуют разным сторонам скачка в точке A . Поэтому ударную поляру можно назвать также *годографом косых скачков*.

Аналитическое представление. Для получения аналитического представления ударной поляры используются все соотношения в ударных волнах, полученные в § 4. В случае установившихся движений соотношения (4.12) и (4.13) могут быть переписаны в виде

$$\rho_1 u_{n_1} = \rho_2 u_{n_2}, \quad p_2 - p_1 = \rho_1 u_{n_1} (u_{n_1} - u_{n_2}).$$

Для компактности дальнейшей записи вводится *амплитуда скачка* (19.1), а именно величина

$$z = (p_2 - p_1) / \rho_1 c_1^2,$$

с которой предыдущие уравнения равносильны таким:

$$c_1^2 z = u_{n_1} (u_{n_1} - u_{n_2}) = u_{n_1}^2 (1 - V_2/V_1), \quad (1)$$

где $V = 1/\rho$ — удельный объем. К уравнениям (1) надо добавить уравнение адиабаты Гюгонио (4.20) или (5.1), которому здесь целесообразно придать следующую форму:

$$V_2 = V_1 (1 - \Gamma(z)). \quad (2)$$

Вводимая уравнением (2) функция $\Gamma(z)$ представляет адиабату Гюгонио в безразмерном виде. Ее график, вытекающий из установленных в § 5 свойств адиабаты Гюгонио в нормальном газе, показан на рис. 2, где $z_1 = p_1/\rho_1 c_1^2$.

Уравнения ударного перехода по нормали к скачку (1) и (2) замыкаются геометрическими соотношениями, вытекающими из конфигураций рис. 1. Из подобия треугольников B_1PB_2 и B_1NA следуют равенства

$$\frac{v}{u_\sigma} = \frac{q_1 - u}{u_{n_1}} = \frac{u_{n_1} - u_{n_2}}{q_1}. \quad (3)$$

Второе равенство (3) в силу первого уравнения (1) дает выражение

$$z = M_1^2 \frac{q_1 - u}{q_1}, \quad (4)$$

где введено число Маха течения перед скачком $M_1 = q_1/c_1$. Так как $u_\sigma^2 = q_1^2 - u_{n_1}^2$, то первое равенство (3) с использованием (1) и (2) приводится к виду

$$\frac{v^2}{(q_1 - u)^2} = M_1^2 \frac{\Gamma(z)}{z} - 1. \quad (5)$$

Наконец, подстановка (4) в (5) дает искомое уравнение ударной поляры:

$$\frac{v^2}{(q_1 - u)^2} = \frac{\Gamma(M_1^2(q_1 - u)/q_1)}{(q_1 - u)/q_1} - 1. \quad (6)$$

Из уравнений (4) и (5) вытекает также следующее параметрическое представление ударной поляры:

$$u = q_1(1 - M_1^{-2}z), \quad v^2 = c_1^2(z\Gamma(z) - M_1^{-2}z^2). \quad (7)$$

Геометрическая форма ударной поляры определяется свойствами монотонности и звездности адиабаты Гюгонио, которые равносильны таким же свойствам функции $\Gamma(z)$. Из них следует, что уравнение

$$\Gamma(z_0) = M_1^{-2}z_0 \quad (8)$$

при любом $M_1 > 1$ имеет единственный корень $z_0 = z_0(M_1)$ (см. рис. 2). Поэтому ударная поляра определена в интервале $0 \leq z \leq z_0$. Из звездности функции $\Gamma(z)$ следует, что ударная поляра также звезда относительно точки B_1 . Наконец, наклон касательной к ударной поляре в точке B_1 определяется из уравнения (5) предельным переходом

$$\lim_{z \rightarrow 0} |dv/du| = \sqrt{M_1^2 - 1} = \operatorname{ctg} \alpha_1. \quad (9)$$

В политропном газе функция $\Gamma(z)$ дробно-линейна:

$$\Gamma(z) = \frac{2z}{2 + (\gamma + 1)z}, \quad (10)$$

и ударная поляра является кривой третьего порядка, которая известна как *строфоида*:

$$\left(1 + \frac{\gamma + 1}{2} M_1^2 \frac{q_1 - u}{q_1}\right) (v^2 + (q_1 - u)^2) = M_1^2 (q_1 - u)^2. \quad (11)$$

Наряду с формулами (6) и (7) полезно отметить еще аналитическую зависимость между углами θ и χ в косом скачке. Она выводится с помощью равенства $u_{n1} = q_1 \sin \chi$, в силу которого из (1) следует уравнение

$$z = M_1^2 \sin^2 \chi \Gamma(z). \quad (12)$$

Подстановка получаемого отсюда выражения для $\Gamma(z)$ в (7) и замечание, что $v/u = \operatorname{tg} \theta$, дают соотношение

$$(M_1^2 \dots z) \operatorname{tg} \theta = z \operatorname{ctg} \chi, \quad (13)$$

которое вместе с (12) и определяет искомую зависимость после исключения амплитуды z . Для политропного газа с помощью (10) получается формула

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{ctg} \chi \frac{\sin^2 \chi - M_1^{-2}}{\frac{\gamma + 1}{2} - \sin^2 \chi + M_1^{-2}}. \quad (14)$$

Обтекание вогнутого угла. Постоянное плоскопараллельное сверхзвуковое течение над стенкой $B_1 A$ отклоняется, обтекая угол $B_1 A B_2$, меньший 180° (рис. 4). Задача состоит в построении течения во всей области внутри этого угла. Как краевая задача для системы уравнений (22.23) (при $\nu = 0$) с постоянными граничными данными вдоль лучей

$$\theta|_{AB_1} = 0, \quad q|_{AB_1} = q_1 > c_1, \quad \theta|_{AB_2} = \theta_0 > 0,$$

она является конически автомодельной (см. § 13). При этом одной из искомых величин будет *постоянная* скорость $q_2 = q|_{AB_2}$. Можно также поставить эту задачу и как задачу Коши на плоскости потенциала в области $\{\varphi \geq 0, \psi \geq 0\}$ с начальными данными при $\varphi = 0$

$$\theta(0, \psi) = 0, \quad q(0, \psi) = q_1 > c_1$$

и граничным условием $\theta(\varphi, 0) = \theta_0 > 0$. Рассматриваемая задача альтернативна задаче обтекания выпуклого угла (см. § 22); она также является аналогом задачи о поршне, но на этот раз *вдвигающемся* в газ.

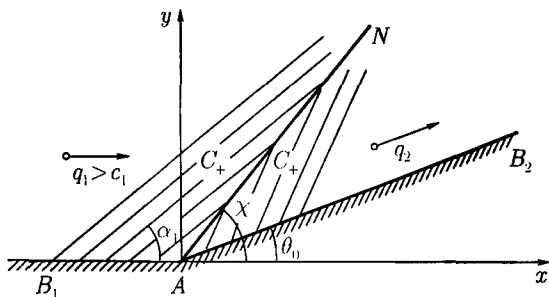


Рис. 4

Непрерывное решение этой задачи не существует. Действительно, в случае непрерывного течения к заданному постоянному сверхзвуковому потоку вдоль выходящей из вершины угла характеристики C_+^0 должна примыкать простая l -волна (теорема 24.2). Она обязана быть центрированной в вершине угла, так как иначе вдоль некоторой принадлежащей ей характеристики C_+ будет сильный разрыв. Но такая центрированная l -волна может быть только волной разрежения (теорема 24.3), и потому она должна вырабатывать на стенке AB_2 скорость $q_2 > q_1$. Однако это противоречит факту сохранения инварианта Римана l , в силу которого $\mu(q_1) = \theta_0 + \mu(q_2)$ и должно быть $q_2 < q_1$, так как $\theta_0 > 0$.

Можно найти решение, в котором постоянное течение вдоль B_1A переводится в постоянное течение вдоль AB_2 посредством косо́го скачка уплотнения. Для этой цели надо по данным q_1, c_1, ρ_1 построить ударную поляру и провести луч из начала координат под заданным углом θ_0 (см. рис. 3). Точка пересечения B_2 этого луча с ударной полярой дает искомое решение, в котором AN есть линия косо́го скачка. Это решение и показано на рис. 4, где также изображены (тонкими линиями) характеристики C_+ до и после скачка.

Найденное решение используется в задачах обтекания клиновидных тел равномерным сверхзвуковым потоком. Например, в случае бесконечного клина, обращенного острием A навстречу потоку (рис. 5), течение разделяется прямой линией тока B_1A на два течения — обтекания вогнутых углов B_1AB_2 и B_1AB_3 .

Здесь возникают следующие важные обстоятельства. Во-первых, пересекающий луч может встречать ударную поляру как минимум дважды, например в точках B_2 и B'_2 , что дает два возможных решения (см. рис. 3). То, которое соответствует точке B_2 , называется *слабым* решением, а соответствующее точке B'_2 — *сильным* решением. При этом для отбора един-

ственного решения требуются какие-то дополнительные условия, которые в настоящее время точно не сформулированы. Во-вторых, указанные решения существуют, только если угол θ_0 достаточно мал, точнее, если $\theta_0 \leq \theta_{\text{пред}}$. Для углов $\theta_0 > \theta_{\text{пред}}$ решение (если оно вообще существует) должно резко отличаться от найденного. Здесь положение таково, что решение в точной постановке неизвестно.

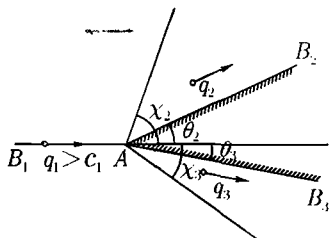


Рис. 5

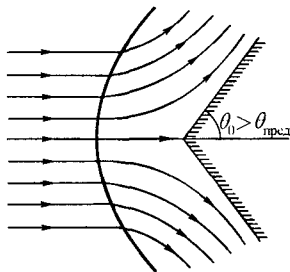


Рис. 6

Эксперименты с обтеканием конечных клиновидных тел показывают, что при $\theta_0 < \theta_{\text{пред}}$ обычно реализуется слабое решение. Если же $\theta_0 > \theta_{\text{пред}}$, то возникает так называемый *отошедший скачок*, линия которого располагается впереди тела, не соприкасаясь с ним (рис. 6). За отошедшим скачком реализуется сложное до- и сверхзвуковое вихревое течение с переменной энтропией, описание которого в настоящее время может быть дано только численными методами.

Отражение косога скачка от стенки. Явление отражения ударной волны от жесткой стенки, рассмотренное в § 18 для падающего фронта, параллельного стенке (нормальное отражение), представляет большой интерес и в случае *наклонно падающего фронта*. При этом и *отраженная волна* также будет наклонной. Возникающая здесь задача об описании движения газа за падающим и отраженным фронтами в общем случае достаточно сложна. В ее простейшем варианте предполагается, что падающий фронт и стенка являются плоскими и что газ перед фронтом покоится. Тогда движение может рассматриваться как плоскопараллельное.

Пусть D_n — скорость перемещения падающей ударной волны, A — точка пересечения линии фронта со стенкой и χ_1 — угол между ними (предполагается, что $0 \leq \chi_1 \leq \pi/2$). Тогда скорость перемещения точки A вдоль стенки равна

$$q_1 = D_n / \sin \chi_1.$$

В системе координат, перемещающейся в ту же сторону вдоль стенки со скоростью q_1 , точка пересечения, а с ней и падающий фронт покоятся. В этой системе координат наблюдатель видит движущийся со скоростью q_1 вдоль стенки постоянный поток, который отклоняется наклонным ему навстречу косым скачком уплотнения, образующим со стенкой угол χ_1 . Предполагается, что и дальнейшее течение газа за скачком в этой системе координат является установившимся. Требуется описать это течение при условии, что от точки A отходит второй скачок, приводящий поток за первым скачком к направлению, параллельному стенке (рис. 7).

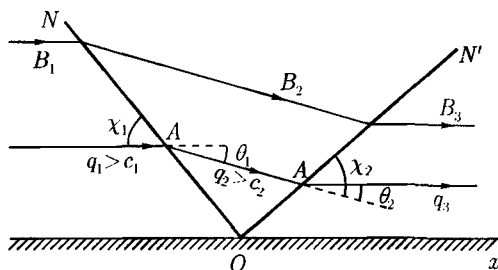


Рис. 7

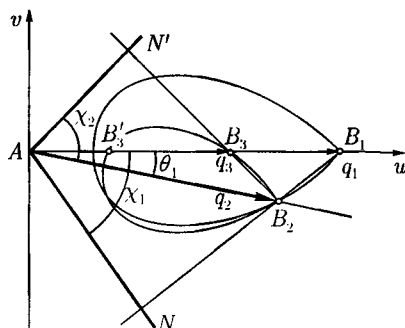


Рис. 8

Решение ищется с помощью ударных поляр. В заданном состоянии газа перед падающим фронтом, согласно предыдущему, известна скорость q_1 . Тем самым известна и ударная поляра с вершиной B_1 (рис. 8). Поэтому за-

дание угла падения χ_1 однозначно определяет угол поворота потока θ_1 в падающем скачке. За ним все параметры течения, в частности вектор u_2 и скорость q_2 , становятся вполне определенными. Тем самым известна и ударная поляра с вершиной B_2 для состояния за падающим скачком. Ее точки пересечения с осью $v = 0$ определяют ударный переход в отраженном скачке, за которым вектор скорости u_3 направлен параллельно стенке. При этом точка B_3 даст слабый отраженный скачок, а точка B'_3 — сильный. Эксперимент показывает, что обычно реализуется слабый отраженный скачок. Такое отражение, картина которого показана на рис. 7, называется *правильным отражением*.

Правильное отражение возможно не при любых значениях амплитуды падающей волны z_1 и угла падения χ_1 . Его реализация лимитируется тем, что ударная поляра с вершиной B_2 может не пересечь ось $v = 0$. Исследование этой ситуации для политропного газа приводит к следующему результату. Если угол χ_1 достаточно мал, то всегда существует правильное отражение. Для каждого заданного z_1 имеется такое предельное значение $\chi_* = \chi_*(z_1)$, что при $\chi_1 > \chi_*$ правильное отражение невозможно.

Качественная зависимость χ_* от z_1 показана на рис. 9. Предельное значение $\chi_*(z_1)$ при $z_1 \rightarrow \infty$ для воздуха ($\gamma = 1,4$) приблизительно равно 40° .

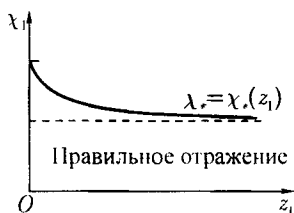


Рис. 9

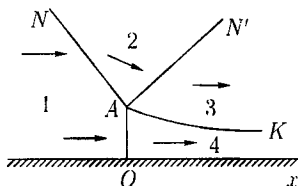


Рис. 10

Если $\chi_1 > \chi_*(z_1)$, то картина отражения ударной волны существенно усложняется. В опыте при этом наблюдается так называемое *маховское отражение* с «тройной» точкой A пересечения более чем двух линий сильного разрыва. Качественная картина маховского отражения показана на рис. 10, где OA — «почти прямой» скачок, AN и AN' — косые скачки, а AK — линия контактного разрыва. Однако при этом линии скачков в окрестности точки A , вообще говоря, искривляются и течения в областях 2, 3 и 4 не являются постоянными. Это создает значительные трудности при исследовании маховского отражения, и до сих пор неизвестно, существует ли решение вообще (без учета вязкости и теплопроводности). Более подробные сведения

по вопросам, связанным с отражением наклонно падающих ударных волн, можно найти в [4] и в цитированной там литературе.

Оссимметричное обтекание конуса. Бесконечный круговой конус с осью x и полууглом раствора θ_1 обращен вершиной навстречу равномерному сверхзвуковому потоку, текущему со скоростью $u_1 = (q_1, 0)$. Требуется построить оссимметричное течение — обтекание конуса. Граничное условие на конусе имеет вид

$$u - \lambda_1 v = 0 \quad (\lambda_1 = \operatorname{ctg} \theta_1). \quad (15)$$

Ясно, что так же, как и в случае обтекания клина плоскопараллельным потоком, эта задача принадлежит к классу конически автомодельных (см. § 13) и должна решаться с сильным разрывом — косым скачком уплотнения. Однако есть существенное отличие, так как здесь течение между поверхностями скачка и конуса не может быть постоянным (постоянные оссимметричные течения возможны только в направлении оси x , см. § 22). Поэтому в случае конуса решение усложняется. Оно основано на следующем качественном представлении о геометрии течения (см. рис. 11). К вершине конуса присоединен конический косой скачок ON с уравнением $\lambda = \lambda_0$, где $\lambda_0 = \operatorname{ctg} \chi_0 < \lambda_1$, в котором заданное сверхзвуковое течение поворачивает на угол $\theta_0 < \theta_1$. В интервале $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ реализуется некоторое коническое течение Буземана (см. § 22), *доворачивающее* поток до нужного направления вдоль поверхности обтекаемого конуса.

Для расчета этого конического течения надо обратиться к системе уравнений (22.63). Ее можно свести к одному уравнению второго порядка для функции $v = v(u)$. В этом представлении первое уравнение (22.63) переходит в равенство

$$\lambda = -v_u, \quad (16)$$

а второе приводится к виду

$$vv_{uu} = 1 + v_u^2 - \frac{(u + vv_u)^2}{c^2}. \quad (17)$$

Уравнение (17) удобно тем, что его интегральные кривые располагаются непосредственно на плоскости годографа. Искомое решение дастся инте-

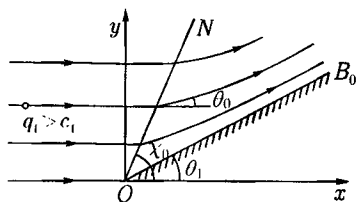


Рис. 11

гальной кривой B_2B_0 (рис. 12), которую при заданной точке B_2 на ударной поляре надо искать, решая задачу Коши для уравнения (17) с начальными условиями

$$v(u_2) = v_2, \quad v_u(u_2) = -\frac{v_2}{q_1 - u_2}. \quad (18)$$

Второе равенство (18) следует из уравнения (16) в силу того, что точка B_2 лежит на задней стороне линии косого скачка, на котором $\lambda = \operatorname{ctg} \chi_0$, и из равенства касательных составляющих вектора скорости до и после скачка (рис. 12). Эта интегральная кривая должна дойти до конечной точки B_0 , где выполнено условие обтекания (15), которое в силу (16) можно переписать в виде

$$v(u_0)v_u(u_0) + u_0 = 0. \quad (19)$$

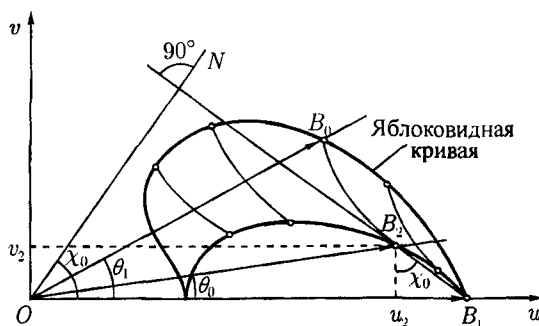


Рис. 12

Совокупность всех конечных точек B_0 , получаемых, когда точка B пробегает линию ударной поляры, образует яблоковидную кривую, показанную на рис. 12. Ясно, что яблоковидная кривая и семейство интегральных кривых B_2B_0 , получаемые численным решением задачи (17), (18), (19), зависят только от данного невозмущенного сверхзвукового потока и могут считаться известными (см. [3]).

Окончательно решение задачи обтекания конуса сводится к следующему. Заданный луч OB_0 образующей поверхности конуса пересекает построенную для данного набегающего потока яблоковидную кривую в точке B_0 , которой однозначно соответствует точка B_2 на ударной поляре с вершиной B_1 . Нормаль ON к прямой B_1B_2 дает направление луча образующей поверхности конического скачка. Вектор OB_0 равен вектору скорости течения на поверхности конуса. Коническое течение между поверхностями

скачка и конуса описывается известными из расчета кривой B_2B_0 зависимостями $v(u)$ и $\lambda(u)$.

В задаче обтекания конуса возникают те же обстоятельства, связанные с единственностью решения и с существованием решения при больших углах θ_1 , которые отмечены выше по поводу обтекания клина.

§ 26. Околозвуковые течения

Переход через скорость звука представляет собой одно из важнейших газодинамических явлений. С точки зрения теории интерес к этому явлению вызван тем, что основные уравнения модели установившихся течений приобретают дополнительную особенность, связанную с изменением их типа в области определения решения.

Определение 1. Установившееся течение газа называется *околозвуковым*, если всюду в области этого течения величина $|M-1|$ мала по сравнению с единицей.

Околозвуковое течение может быть чисто дозвуковым или чисто сверхзвуковым. Однако наибольший интерес представляют *трансзвуковые течения*, в которых происходит переход через скорость звука. Здесь будут рассматриваться именно такие гладкие околозвуковые течения в рамках модели плоскопараллельного безвихревого изэнтропического течения. Тем не менее надо иметь в виду, что многие из отмеченных ниже фактов и свойств верны и для осесимметричных течений (см. упражнения 20, 21).

Звуковая линия. В плоскопараллельном течении переход через скорость звука осуществляется на некоторой линии, которая называется *звуковой линией*. Расположение и форма звуковой линии на плоскости течения зависят от решения. На данном решении ее уравнение может быть записано в любой из равносильных форм:

$$q(x, y) = c(x, y); \quad q(x, y) = c_*; \quad M(x, y) = 1. \quad (1)$$

Ясно, что годограф звуковой линии всегда принадлежит фиксированной окружности $q = c_*$ (см. рис. 22.2). К звуковой линии может примыкать как дозвуковое, так и сверхзвуковое течение. Прежде всего устанавливаются некоторые особенности такого примыкания.

Если к звуковой линии Z примыкает сверхзвуковое течение, то в каждой точке $A \in Z$ выходящие из A характеристики C_+ и C_- образуют с вектором скорости угол 90° и, следовательно, касаются друг друга (рис. 1). Этот факт очевидным образом следует из определения угла Маха (11.22) и равенства $\sin \alpha_A = 1$.

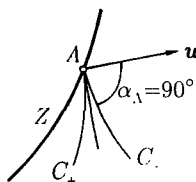


Рис. 1

Теорема А. А. Никольского и Г. И. Таганова.

Пусть к звуковой линии Z примыкает дозвуковое течение. Предполагается, что Z не является линией тока. Простой, но весьма важный факт выражается следующим свойством монотонности изменения направления вектора скорости при перемещении вдоль такой звуковой линии.

Теорема 1. Если при перемещении вдоль звуковой линии область дозвукового течения останется слева, то вектор скорости монотонно (может быть, не строго монотонно) поворачивается по часовой стрелке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В точках звуковой линии Z уравнения (22.45) принимают вид

$$\theta_\psi = 0. \quad \theta_\psi = \frac{\rho}{q} q_\psi,$$

и, следовательно, при перемещении вдоль Z

$$d\theta = \frac{\rho}{q} q_\psi d\varphi.$$

С другой стороны, из второго уравнения (1) следует, что вдоль Z справедливо равенство $dq = 0$, и так как Z не является линией тока (т. е. вдоль нее $d\psi \neq 0$), то

$$q_\psi = -q_\varphi d\varphi / d\psi.$$

Подстановка этого выражения в предыдущее показывает, что при перемещении вдоль Z выполнено соотношение

$$d\theta = -\frac{\rho}{q} \left(\frac{d\varphi}{d\psi} \right)^2 q_\varphi d\psi. \quad (2)$$

Пусть Ω есть дозвуковая область течения, частью границы которой является Z . Следует рассмотреть два случая: а) вектор скорости u в точках $A \in Z$ направлен вовне Ω и б) вектор u направлен в область Ω (рис. 2, а, б).

В случае а) при перемещении вдоль Z в направлении, указанном в условии теоремы (показано стрелкой на рис. 2), верно неравенство $d\psi > 0$. Действительно, в местной системе координат с началом в A и осью x , направленной по u_A , в представлении $u_A = (u, v)$ будет $u = q$ и $v = 0$. Поэтому здесь $d\psi = \rho q dy$, причем $dy > 0$. Далее, так как $q < c_*$ слева от A и $q = c_*$ в точке A , то в этой точке производная $q_\varphi \geq 0$. Следовательно,

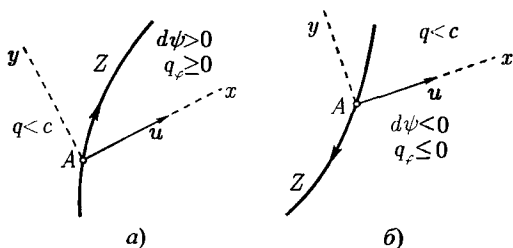


Рис. 2

соотношение (2) влечет неравенство $d\theta \leq 0$. Аналогично, в случае б) при обусловленном направлении перемещения вдоль Z (показано стрелкой на рис. 2, б) будет $d\psi < 0$, $q_r \leq 0$, и из (2) снова получается $d\theta \leq 0$. ■

Очевидно, что утверждение теоремы 1 верно и в том случае, когда к звуковой линии Z примыкает сверхзвуковое течение и перемещение вдоль Z происходит так, что область сверхзвукового течения остается справа.

Следствие. Если по обе стороны звуковой линии Z находится дозвуковое (или по обе стороны сверхзвуковое) течение, причем Z не является линией тока, то вдоль Z необходимо $\theta = \text{const}$; и линия Z совпадает с эквипотенциалью.

Примыкание простой волны. Другой важный факт обнаруживается при изучении вопроса о том, когда к звуковой линии может примыкать простая волна сверхзвукового течения.

Теорема 2. Пусть в области Ω гладкого течения есть звуковая линия Z , к которой примыкает простая волна. Тогда Z является двойной характеристикой $C_{\pm}$, причем линия Z — прямая на плоскости течения. Никакая другая характеристика не пересекает Z в области Ω . В точках Z вектор скорости ортогонален прямой линии Z .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть к Z примыкает r -волна с уравнением $\theta - \mu(q) = r_0$. Так как $\mu(c_*) = 0$, то $\theta = r_0$ вдоль Z . Поэтому Z есть линия уровня простой r -волны и необходимо должна совпадать с некоторой характеристикой $C_{\pm}$. Это означает, что вдоль нее справедливы равенства

$$dy/dx = \operatorname{tg}(\theta - \alpha) = \operatorname{tg}(r_0 - \pi/2) = -\operatorname{ctg} r_0.$$

Следовательно, если начало координат выбрано в точке $A \in Z$, то линия Z есть прямая $y = -x \operatorname{ctg} r_0$, совпадающая с характеристикой C_{-} .

Характеристика C_+ , проходящая через точку A , определяется дифференциальным уравнением

$$dy/dx = \operatorname{tg}(\theta(x, y) + \alpha(x, y))$$

и начальным условием $y(0) = 0$. Но прямая $y = -x \operatorname{ctg} r_0$ удовлетворяет этому условию и по построению такова, что вдоль нее

$$\theta(x, -x \operatorname{ctg} r_0) = r_0, \quad \alpha(x, -x \operatorname{ctg} r_0) = \pi/2.$$

Поэтому вдоль этой прямой

$$dy/dx = -\operatorname{ctg} r_0 = \operatorname{tg}(\theta(x, -x \operatorname{ctg} r_0) + \alpha(x, -x \operatorname{ctg} r_0)),$$

т.е. предыдущее дифференциальное уравнение превращается в тождество. Следовательно, в силу единственности, решение совпадает с $y = -x \operatorname{ctg} r_0$, т.е. C_+ совпадает с Z .

Это же рассуждение показывает, что никакая другая характеристика, проходящая в области Ω , не может иметь общих точек с Z . Наконец, в силу предыдущего касательный вектор к Z есть $\mathbf{l} = (\sin r_0, \cos r_0)$, а вектор скорости в точках Z имеет вид $\mathbf{u} = c_*(\cos r_0, \sin r_0)$. Следовательно, $\mathbf{l} \cdot \mathbf{u} = 0$. ■

Итак, примыкание простой волны к звуковой линии возможно, только если последняя есть *прямая* звуковая линия. В дальнейшем этот вид звуковой линии будет изучен более детально.

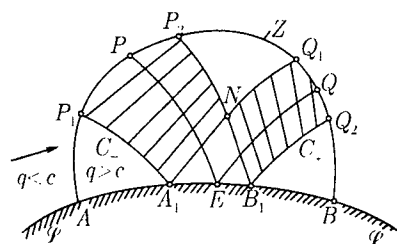


Рис. 3

Местная сверхзвуковая зона.

Пусть течение определено по одну сторону от некоторой линии тока $\mathcal{L}$ (которую можно считать обтекаемой твердой стенкой) и имеет следующую структуру. Течение всюду дозвуковое, кроме области Ω , ограниченной участком AB линии $\mathcal{L}$ и звуковой линией Z с концами в точках A и B (рис. 3), причем в Ω течение сверхзвуковое. Такие *местные сверхзвуковые зоны* могут возникать, например, на теле при

его обтекании безграничным дозвуковым на бесконечности потоком, когда число Маха $M_\infty > M_E$ (см. § 23). Оказывается, что непрерывное течение в местной сверхзвуковой зоне неустойчиво в том смысле, что оно может разрушаться при сколь угодно малом изменении границы $\mathcal{L}$. Это разрушение связано с появлением скачков уплотнения и нарушением безвихревого

изэнтропического характера течения. В частности, справедлив следующий факт: если на сверхзвуковом участке AB стенки $\mathcal{L}$ имеется сколь угодно малый прямолинейный отрезок, то *непрерывное течение в Ω невозможно*.

Действительно, пусть $A_1B_1 \subset AB$ — отрезок прямой и точка $E \in A_1B_1$. Характеристики C_- и C_+ , выходящие из E , не могут пересечься второй раз внутри Ω . Этот общий факт следует, например, из того, что угловой коэффициент (24.14) каждой характеристики на плоскости потенциала всегда имеет один и тот же знак, в силу чего никакая характеристика не может дважды пересечь одну и ту же эквипотенциаль. Поэтому они должны достигать звуковой линии Z , соответственно, в точках P и Q (см. рис. 3). Свойство сохранения значений инварианта l вдоль EP и инварианта r вдоль EQ приводит к равенствам

$$\theta_P = \theta_E + \mu_E, \quad \theta_Q = \theta_E - \mu_E, \quad (3)$$

из которых вытекает соотношение

$$\theta_P + \theta_Q = 2\theta_E. \quad (4)$$

Так как $\theta_E = \text{const}$ при перемещении вдоль прямолинейного участка A_1B_1 , то соотношение (4), в силу теоремы 1, возможно, только если $\theta_P = \text{const}$ и $\theta_Q = \text{const}$. Тогда из (3) получается, что $\mu_E = \mu(q_E) = \text{const}$, т. е. $q_E = \text{const}$. Значит, на отрезке A_1B_1 скорость постоянна. Из теоремы единственности (см. § 24) следует, что во всем характеристическом треугольнике A_1NB_1 течение является постоянным. По теореме 24.2 к этому постоянному течению должна примыкать вдоль C_+ -характеристики A_1N простая l -волна. Следовательно, область течения $A_1P_1P_2N$ есть простая волна, примыкающая к участку P_1P_2 звуковой линии Z . Но тогда факт пересечения C_- -характеристики EP со звуковой линией в точке P противоречит теореме 2.

Из соотношения (4) и теоремы 1 следует также невозможность непрерывного течения в местной сверхзвуковой зоне около стенки, на которой есть участки, вогнутые в сторону потока.

Окрестность центра течения. Наиболее замечательные свойства околозвукового течения связаны с его поведением в окрестности так называемого центра течения.

Определение 2. *Центром околозвукового течения называется такая точка на звуковой линии Z , в которой вектор скорости ортогонален к Z .*

Структура окрестности центра течения рассматривается в предположении, что в этой окрестности компоненты вектора скорости $u(x, y)$ и $v(x, y)$

трижды непрерывно дифференцируемы. В качестве исходной берется система уравнений на плоскости течения (22.23) при $\nu = 0$:

$$\begin{aligned} u_y - v_x &= 0, \\ (u^2 - c^2)u_x + 2uvu_y + (v^2 - c^2)v_y &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Система координат (x, y) выбирается так, чтобы начало координат совпадало с центром течения O и ось x была направлена по вектору скорости u_0 (в дальнейшем значения всех величин в центре течения отмечаются индексом ноль). В этой системе координат компоненты вектора скорости в центре течения таковы:

$$u_0 = c_*, \quad v_0 = 0. \quad (6)$$

Как вскоре выяснится, ответственной за поведение околзвучового потока в окрестности его центра является величина ускорения течения в центре $(dq/dt)_0 = (uq_x + vq_y)_0$. Для него в силу (6) справедливо представление $(dq/dt)_0 = c_* u_{x_0}$. Поэтому величину

$$u_{x_0} = a \quad (7)$$

также можно назвать ускорением (относительным) околзвучового течения в его центре.

Пусть $y = Y(x)$ есть уравнение проходящей через O линии тока, $x = Z(y)$ — уравнение звуковой линии и $x = X(y)$ — уравнение проходящей через O характеристики. В выбранной системе координат $Y(0) = Z(0) = X(0) = 0$ и из определения центра течения следует, что равны нулю также первые производные:

$$Y'_0 = 0, \quad Z'_0 = 0, \quad X'_0 = 0. \quad (8)$$

Особый характер гладкого решения уравнений (5) в окрестности центра течения выявляется при оценке разных слагаемых в степенных разложениях вида

$$u(x, y) = c_* + \sum_{i+j>0} \alpha_{ij} x^i y^j, \quad v(x, y) = \sum_{i+j>0} \beta_{ij} x^i y^j. \quad (9)$$

Для выделения главной части разложений (9) используется моделирование с помощью преобразования растяжения всех переменных

$$x \rightarrow Ax, \quad y \rightarrow By, \quad (u - c_*) \rightarrow P(u - c_*), \quad v \rightarrow Qv,$$

где A, B, P, Q — параметры преобразования. Требование инвариантности первого уравнения (5) приводит к соотношению

$$AP = BQ.$$

Далее, с учетом пропорциональности величины $u^2 - c^2$ разности $u - c_*$ (в силу интеграла Бернулли), выделение главной части второго уравнения (5) вблизи точки O даст

$$R_*(u - c_*)u_x - c_*v_y = F \quad (R_* > 0). \quad (10)$$

Поэтому требование инвариантности главной (левой) части уравнения (10) влечет соотношение

$$BP^2 = AQ.$$

Кроме того, надо потребовать, чтобы величина ускорения (7) при таком моделировании не менялась. Для этого должно быть $P = A$. Следовательно, все параметры выражаются через один из них, например B , и требуемое моделирование, с малым параметром $B = \delta$, определяется формулами

$$x \rightarrow \delta^2 x, \quad y \rightarrow \delta y, \quad (u - c_*) \rightarrow \delta^2 (u - c_*), \quad v \rightarrow \delta^3 v. \quad (11)$$

В результате подстановки (11) в разложения (9) и сравнения членов с одинаковыми степенями δ легко устанавливается, что *главная часть* этих разложений имеет вид

$$u(x, y) = c_* + \alpha_{10}x + \alpha_{02}y^2, \quad v(x, y) = \beta_{11}xy + \beta_{03}y^3, \quad (12)$$

если только выполнены равенства

$$\alpha_{01} = \beta_{01} = \beta_{10} = \beta_{02} = 0. \quad (13)$$

После этих предварительных замечаний устанавливается следующий точный результат, в формулировке которого участвует положительная величина

$$k_* = \frac{m_* + 2}{2c_*}, \quad (14)$$

где функция m определена в (2.22) и $m_* = m(\rho_*)$.

Теорема 3. Если решение системы уравнений (5) в окрестности центра течения трижды непрерывно дифференцируемо, то для него верны равенства (13), а коэффициенты в представлении (12) таковы:

$$\alpha_{10} = a, \quad \alpha_{02} = k_* a^2, \quad \beta_{11} = 2k_* a^2, \quad \beta_{03} = \frac{2}{3} k_*^2 a^3. \quad (15)$$

Кроме того, справедливы формулы

$$Z''_0 = -2k_* a, \quad Y''_0 = 0, \quad c_* Y''_0 = 2\beta_{20}, \quad (16)$$

а величина X_0'' имеет два значения:

$$X_0'' = -k_* a, \quad X_0'' = 2k_* a \quad (17)$$

для характеристик разных семейств.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как коэффициенты разложений (9) пропорциональны значениям соответствующих частных производных от u и v в точке O , то они получаются в результате дифференцирования уравнений (5) по x и y с последующим переходом в точку O . Например, для получения последней из формул (15) надо дифференцировать второе уравнение (5) трижды по y . При этом используется вытекающее из интеграла Бернулли соотношение

$$d(c^2) = -mq \, dq,$$

справедливое при любом дифференцировании d . Кроме того, вдоль Z верно равенство $u^2 + v^2 = c_*^2$, дифференцирование которого один и два раза по y дает в точке O соотношения

$$u_{y0} = 0, \quad u_{x0} Z_0'' + u_{yy0} = 0.$$

Отсюда получается первая формула (16). Далее, дифференцирование уравнения линии тока $v = uY'$ один и два раза по x и учет равенств (13) дает вторую и третью формулы (16). Наконец, для вычисления величины X_0'' проще всего исходить непосредственно из характеристического уравнения системы (5), которое для характеристик, заданных уравнением $x = X(y)$, можно записать в виде (нормальный характеристический вектор есть $(1, -X')$)

$$(M^2 - 1)(u - vX')^2 = (v + uX')^2.$$

Двукратное дифференцирование этого уравнения по y с учетом того, что $u = u(X(y), y)$ и т.д., и переход в точку O , в силу формул (13) и (15), приводят к соотношению

$$c_*(m_* + 2)(2k_* a^2 + aX_0'') = 2c_*^2 X_0''^2.$$

С величиной z , вводимой равенством $X_0'' = k_* a z$, а также с учетом (14) это соотношение принимает вид квадратного уравнения

$$z^2 - z - 2 = 0.$$

Его корни $z = -1$ и $z = 2$ и дают формулы (17). ■

Теорема 3 имеет ряд важных следствий. Точка O называется *точкой распрямления* проходящей через нее линии тока, если $Y_0''' = 0$. Первое следствие вытекает из формул (16), где $2\beta_{20} = v_{xx0}$.

Следствие 1. В центре течения кривизна линии тока равна нулю. Центр течения является точкой распрямления проходящей через него линии тока, если и только если $v_{xx_0} = 0$.

Далее, если ускорение $a \neq 0$, то звуковая линия Z делит окрестность центра течения на две части, в одной из которых течение дозвуковое, а в другой — сверхзвуковое. Второе следствие вытекает из первой формулы (16).

Следствие 2. Кривизна звуковой линии в центре течения пропорциональна ускорению. Если ускорение отлично от нуля, то в окрестности центра звуковая линия всегда выпукла в сторону сверхзвукового течения.

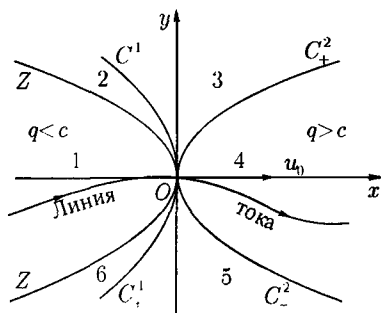


Рис. 4

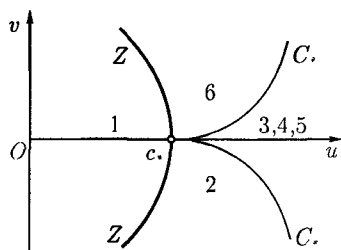


Рис. 5

Выявленное этими результатами расположение основных линий в окрестности центра течения показано на рис. 4 в случае $a > 0$. Здесь обращает на себя внимание тот факт, что характеристика C_+ (а также характеристика C_-) имеет точку O своей точкой перегиба, в которой, как это следует из формул (17), кривизна этой характеристики меняется скачком.

Трехлистность годографа. Еще одно существенное свойство окрестности центра течения выявляется при рассмотрении ее годографа. Из рассмотрения рис. 4 следует, что сверхзвуковая часть годографа не может быть однолистной. Действительно, при однократном обходе вокруг точки O на плоскости течения проходящая через O характеристика C_+ встречается дважды (то же верно и для C_-). Точная формулировка этого свойства такова.

Следствие 3. Если ускорение $a \neq 0$, то годограф сверхзвуковой части течения, расположенной вниз по потоку от первых проходящих через O характеристик, является трехлистным. Каждая из трех областей 3, 4 и 5

на рис. 4 отображается взаимно однозначно на одну и ту же область плоскости годографа (рис. 5).

Этот факт устанавливается совсем просто, если ограничиться *главной частью* отображения $R^2(x, y) \rightarrow R^2(u, v)$, определенной формулами (12). С учетом (15) эти формулы переписываются в виде

$$\begin{aligned} u(x, y) &= c_* + ax + k_* a^2 y^2, \\ v(x, y) &= 2k_* a^2 xy + \frac{2}{3} k_*^2 a^3 y^3. \end{aligned} \quad (18)$$

В этом же приближении, в силу (16), уравнение звуковой линии есть

$$(Z) \quad x = -k_* a y^2, \quad (19)$$

а уравнения *центральных* характеристик $C_{\pm}$, в силу (12), таковы:

$$(C_{\pm}^1) \quad x = -\frac{1}{2} k_* a y^2; \quad (C_{\pm}^2) \quad x = k_* a y^2. \quad (20)$$

Исследование отображения $R^2(x, y) \rightarrow R^2(u, v)$, заданного формулами (18), можно выполнить, заметив, что каждой квадратной параболы на плоскости $R^2(x, y)$, определяемой заданием вспомогательного параметра λ :

$$x = \lambda k_* a y^2,$$

соответствует полукубическая парабола на плоскости $R^2(u, v)$, определяемая заданием вспомогательного параметра μ :

$$v^2 = \mu \frac{4}{9} k_*^2 (u - c_*)^3.$$

Действительно, в результате подстановки выражения для x в формулы (18) задаваемое ими отображение сводится к конкретной зависимости μ от λ :

$$\mu = \frac{(3\lambda + 1)^2}{(\lambda + 1)^3}. \quad (21)$$

График функции (21) показан на рис. 6. Значениям $\lambda < -1$ соответствуют значения $\mu < 0$ и $u < c_*$. Это есть дозвуковая область течения, в которой отображение (18) взаимно однозначно. Звуковой линии, согласно (19), соответствует значение $\lambda = -1$ и $\mu = \infty$. При переходе в сверхзвуковую

область, где $\lambda > -1$, взаимно однозначный характер соответствия сохраняется до тех пор, пока $\lambda < -1/2$, $\mu > 2$. Точка $\lambda = -1/2$ дает, в силу (20), характеристику $C_{\pm}^1$. Значение $\mu = 2$ получается также при $\lambda = 1$, причем это — двукратное значение, которое даст, согласно (20), характеристику $C_{\pm}^2$. При $\mu < 2$ соответствие трехзначно: каждое значение μ получается при трех различных значениях λ . Поэтому вся область плоскости годографа, определяемая неравенствами $0 \leq \mu < 2$, оказывается трижды покрытой образом сверхзвуковой части плоскости течения, соответствующей значениям $\lambda > -1/2$. Это и утверждается в следствии 3.

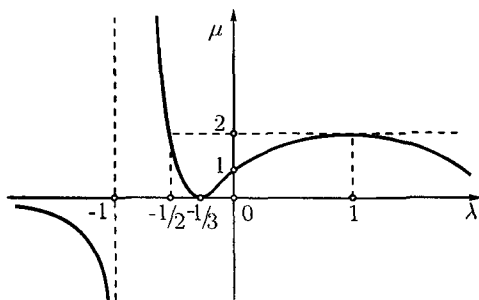


Рис. 6

Указанный характер отображения связан с тем, что якобиан отображения (18) в сверхзвуковой части течения меняет знак, обращаясь в нуль на характеристиках $C_{\pm}^2$. Действительно, из (18) для якобиана следует выражение

$$u_x v_y - u_y v_x = 2k_* a^3 (x - k_* a y^2) = 2k_* a^4 y^2 (\lambda - 1).$$

Замечание о моделировании. Моделирование (11), использованное при построении главной части течения в окрестности центра, имеет на самом деле более широкое значение. Оно используется для изучения особенностей, которые могут появляться на звуковых линиях в решениях красивых задач о трансзвуковых течениях. Иногда это моделирование даст вполне удовлетворительное приближенное решение задачи в целом.

Необходимая для этого система дифференциальных уравнений получается, если заметить, что первое уравнение (5) инвариантно относительно преобразования (11), а второе имеет вид (10) с инвариантной левой частью. Простое подробное вычисление показывает, что правая часть в (10) после подстановки (11) имеет более высокий порядок малости по сравнению

с левой частью при $\delta \rightarrow 0$. Это же вычисление дает величину $R_* = 2k_*$ в формуле (10). Поэтому после введения новых переменных

$$u' = 2k_*(u - c_*), \quad v' = 2k_*v \quad (22)$$

и последующего «стирания штрихов» окончательно получается система уравнений *околозвукового приближения* (для плоскопараллельных течений)

$$u_y - v_x = 0, \quad uu_x - v_y = 0. \quad (23)$$

В частности, формулы (18) после подстановки (22), растяжения независимых переменных

$$x' = k_*ax, \quad y' = k_*ay \quad (24)$$

и «стирания штрихов» принимают стандартный вид:

$$u = 2x + 2y^2, \quad v = 4xy + \frac{4}{3}y^3. \quad (25)$$

Легко проверить, что формулы (25) дают *точное решение* системы (23).

С помощью стандартных формул перемены ролей зависимых и независимых переменных (22.24) система (23) линеаризуется:

$$x_v = y_u, \quad x_u = u y_v, \quad (26)$$

и, после исключения x , приводится к уравнению *Трикоми* для $y(u, v)$:

$$u y_{vv} - y_{uu} = 0. \quad (27)$$

Оно является простейшим стандартным уравнением смешанного типа. Для уравнения (27) областью эллиптичности (дозвуковые течения) является полуплоскость $u < 0$, а областью гиперболичности (сверхзвуковые течения) — полуплоскость $u > 0$. При этом линия вырождения типа есть ось $u = 0$, изображающая звуковую линию. Соответствие с физическими переменными осуществляется путем «восстановления штрихов» и обращения к формулам (22) и (24).

Прямая звуковая линия. Важная особенность околозвукового течения обнаруживается в случае специального вида звуковой линии, когда все ее точки суть центры течения, а сама она — прямая линия. Именно такого вида течение должно реализоваться, если к звуковой линии примыкает простая волна (теорема 2).

Определение 3. Звуковая линия Z называется *прямой звуковой линией*, если на плоскости течения Z есть прямая линия и вектор скорости во всех ее точках перпендикулярен Z .

Прежде всего, справедливо следующее замечательное достаточное условие реализации прямой звуковой линии.

Теорема 4. Пусть в окрестности центра течения O решение системы (5) трижды непрерывно дифференцируемо. Если O есть точка распрямления проходящей через нее линии тока и если в O ускорение равно нулю, то точка O принадлежит прямой звуковой линии.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система координат (x, y) выбрана так же, как и выше при анализе окрестности центра течения. Рассматривается вектор-функция $g = g(x, y)$ с пятью компонентами:

$$g = (u - c_*, v, u_x, v_x, v_{xx}). \quad (28)$$

Утверждается, что для любого трижды непрерывно дифференцируемого решения системы (5) при каждом фиксированном x вектор g , как функция величины y , удовлетворяет линейному обыкновенному дифференциальному уравнению вида

$$\frac{\partial g}{\partial y} = Hg, \quad (29)$$

где H есть 5×5 -матрица с элементами, непрерывными в окрестности точки O . В силу предыдущего анализа окрестности центра течения из условий теоремы следует, что $g(0, 0) = 0$. Но единственным решением уравнения (29) с нулевым начальным условием является тождественный нуль, т. е. $g(0, y) = 0$. Следовательно, на некотором интервале оси y , содержащем точку O , необходимо $u = c_*$ и $v = 0$, т. е. этот интервал есть прямая звуковая линия. Итак, все сводится к доказательству представления (29). Оно выводится последовательным дифференцированием уравнений (5) и справедливо благодаря специальной структуре нелинейных членов во втором уравнении. Для экономии места здесь этот результат приводится для модельной системы (23), где роль $u - c_*$ играет u . Именно, для системы (23) соответствующая матрица H получается тривиально и оказывается такой:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ u_{xx} & 0 & u_x & 0 & 0 \\ u_{xxx} & 0 & 3u_{xx} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Из теорем 3 и 4 следует, что на прямой звуковой линии Z производные второго порядка

$$u_{xy}, v_{yy}, v_{xx}, v_{xy} \cdot v_{yy}$$

все обращаются в нуль. Это не так, вообще говоря, для производной u_{xx} . Она характеризует скорость изменения ускорения течения в точках Z , так как простой подсчет даст $d^2u/dt^2|_Z = c_*^2(u_{xx}|_Z, 0)$. Ее удобно заменить величиной

$$w = k_* u_{xx}(0, y), \quad (30)$$

которая будет называться *скоростью ускорения* течения на прямой звуковой линии. С предположением, что решение в окрестности Z четырежды непрерывно дифференцируемо, для нее устанавливается следующий замечательный факт.

Теорема 5. *Скорость ускорения течения на прямой звуковой линии удовлетворяет уравнению*

$$w'' = 6w^2. \quad (31)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Результат получается трехкратным дифференцированием второго уравнения (5) по x , заменой производных $v_x, v_{xx}, v_{xy}, \dots$ производными от u в силу первого уравнения (5) и переходом на Z с учетом предыдущих равенств. Для экономии места здесь этот вывод выполняется для модельной системы (23). В этом случае определение скорости ускорения w надо заменить, согласно (22), таким: $2w = u_{xx}$. Дифференцирование второго уравнения (23) по x приводит, в силу первого, к равенству

$$u_{yy} = u_x^2 + uu_{xx}.$$

Еще двукратное дифференцирование по x дает

$$u_{xxyy} = 3u_{xx}^2 + 4u_x u_{xxx} + uu_{xxxx},$$

откуда на Z для $w = (1/2)u_{xx}$ получается уравнение (31). ■

Решениями уравнения (31) являются *эллиптические функции*, и его полная теория связана с рассмотрением поведения решения на плоскости комплексного переменного y . Для приложений к газовой динамике достаточно заметить, что после умножения на $2w'$ и интегрирования получается первый интеграл

$$w'^2 = 4w^3 - 4bw^2 \quad (b = \text{const}). \quad (32)$$

Отсюда зависимость между w и y находится квадратурой. Если $b \neq 0$, то решение симметрично относительно точки, где $w = b$ и $w' = 0$, в качестве которой можно взять $y = 0$.

При $b > 0$ квадратура имеет вид

$$2\sqrt{by} = \pm \int_1^{w/b} \frac{dz}{\sqrt{z^3 - 1}}. \quad (33)$$

Интеграл (33) сходится, когда $w \rightarrow \infty$, и если положить

$$2\omega = \int_1^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^3 - 1}}, \quad (34)$$

то становится ясным, что функция $w(y)$ определена на интервале $|y| < \omega/\sqrt{b}$ и имеет график, показанный на рис. 7, а. При $b < 0$ квадратура имеет вид

$$2\sqrt{|b|y} = \pm \int_{-1}^{w/|b|} \frac{dz}{\sqrt{z^3 + 1}}. \quad (35)$$

Можно показать, что с числом ω из (34) верны равенства

$$\int_{-1}^0 \frac{dz}{\sqrt{z^3 + 1}} = \frac{\omega}{\sqrt{3}}, \quad \int_{-1}^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{z^3 + 1}} = \omega\sqrt{3}.$$

Поэтому здесь функция $w(y)$ определена на интервале $|y| < \omega\sqrt{3}/\sqrt{|b|}$ и имеет график, показанный на рис. 7, б. Если же $b = 0$, то решение уравнения (32) дается элементарной функцией (с точностью до переноса по y)

$$w = 1/y^2. \quad (36)$$

В силу теоремы 5 приближенное (главная часть) представление вектора скорости в окрестности прямой звуковой линии $x = 0$ имеет вид

$$u = c_* + \frac{1}{2k_*} w(y)x^2, \quad v = \frac{1}{6k_*} w'(y)x^3. \quad (37)$$

Легко проверить с учетом преобразования (22), что формулы (37) дают точное решение системы уравнений (23).

Существование решений (37) указывает на принципиальную особенность течений с прямой звуковой линией: на ней на конечном расстоянии,

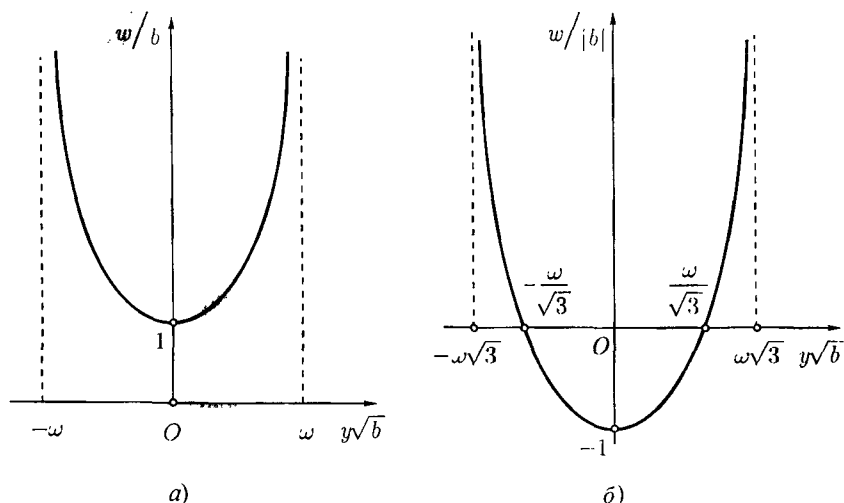


Рис. 7

вообще говоря, существуют *особые точки* течения, соответствующие обращению функции $w(y)$ в бесконечность. В решениях с $b \neq 0$ таких особых точек всегда две, а при $b = 0$ — одна. Только для нулевого решения ($w \equiv 0$) уравнения (31) (т. е. когда скорость ускорения равна нулю) особых точек на прямой звуковой линии может не быть.

При $b > 0$ решение (37) описывает поведение сверхзвукового течения, возникающего при истечении равномерного *звукового* потока из трубы в пространство с пониженным давлением. Особым точкам соответствуют края отверстия, что позволяет найти скорость ускорения по известной ширине трубы. При $b = 0$ решение с функцией (36) является *авто-модельной простой волной* и представляет собой не что иное, как главную часть течения Прандтля–Мейера, начинающегося со скорости звука (см. рис. 22.6).

Из предыдущих рассмотрений следует еще один важный вывод: прямая звуковая линия Z всегда является *двукратной* характеристикой $C_{\pm}$, и никакая другая характеристика не может пересечь Z в области непрерывного течения.

Сопло Лавалья. Именем шведского инженера П. Лавалья называется вначале сужающийся, а затем расширяющийся канал, предназначенный для *непрерывного* преобразования дозвукового течения в сверхзвуковое. Такие

каналы используются в конструкциях турбин, ракет и аэродинамических труб.

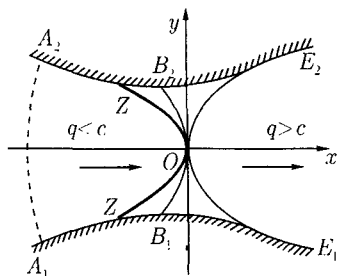


Рис. 8

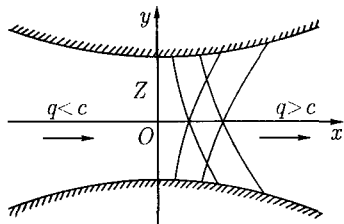


Рис. 9

Симметричное относительно продольной оси сопло Лаваля показано на рис. 8. Переход течения через скорость звука происходит на звуковой линии Z , пересекающей все линии тока и достигающей стенок сопла. Точка пересечения звуковой линии Z с осью симметрии является центром околозвукового течения и называется также *центром сопла*. Априори возможны два типа течений: с положительным ускорением в центре сопла (структура течения показана на рис. 8) и с нулевым ускорением и прямой звуковой линией (рис. 9). Во втором случае примыкание дозвукового течения к сверхзвуковому вдоль Z происходит, вообще говоря, со слабым разрывом, а именно с разрывом скорости ускорения (30). Возможность такого примыкания обеспечена существованием как дозвукового, так и сверхзвукового решения вида (37) и тем фактом, что прямая звуковая линия Z является характеристикой. Некоторый недостаток сопел Лаваля с прямой звуковой линией заключается в малости продольных градиентов скорости, ввиду чего такие сопла имеют относительно большую длину.

Течение через сопло Лаваля с положительным ускорением в центре сопла определяется, вообще говоря, его заданными стенками A_1E_1 и A_2E_2 и заданным распределением модуля скорости на входе в сопло (сечение A_1A_2 на рис. 8). Следует заметить, что область влияния участков стенок B_1E_1 и B_2E_2 совпадает с областью сверхзвукового течения, лежащей вниз по потоку от характеристик B_1OB_2 (соответствующих характеристикам $C_{\pm}^1$ на рис. 4). Поэтому течение в дозвуковой области и в части сверхзвуковой области, расположенной вверх по потоку от характеристик B_1OB_2 , не зависит от формы частей стенок B_1E_1 и B_2E_2 . Следовательно, линия $A_1B_1OB_2A_2$ ограничивает область независимого (от остальной части сопла) трансзвукового течения. Именно эта область и подлежит

расчету при решении основной задачи об отыскании течения через *заданное* сопло. Эта задача оказывается очень трудной и, несмотря на имеющиеся разработанные приближенные методы расчета, до настоящего времени удовлетворительного решения не получила. Одна из трудностей здесь состоит в том, что годограф стенок сопла не может быть построен до решения задачи, ввиду чего неизвестна область плоскости годографа, в которой можно было бы ставить и решать красную задачу для линейного уравнения (22.47).

Истечение сверхзвуковой струи. Рассмотренная в § 23 задача об истечении струи из бесконечного угловидного сосуда допускает постановку на плоскости годографа и в том случае, когда внешнее давление меньше критического, т. е. $p_1 < p_*$. Впервые эта задача была поставлена и изучена Ф. И. Франклем.

Постановка такой задачи на плоскости течения аналогична той, которая была дана в § 23 для дозвуковой струи. Однако здесь скорость на свободной границе струи сверхзвуковая, $q_1 > c_*$, и потому в струе должен произойти переход через скорость звука на некоторой звуковой линии Z с центром течения на оси симметрии. Концы линии Z должны совпадать с краями отверстия, так как они не могут лежать ни на свободной границе, где $q_1 > c_*$, ни на прямолинейной стенке, ибо это несовместимо с предположением о непрерывности течения (аналогично течению в местной сверхзвуковой зоне). Поэтому конфигурация на плоскости течения имеет вид, показанный на рис. 10.

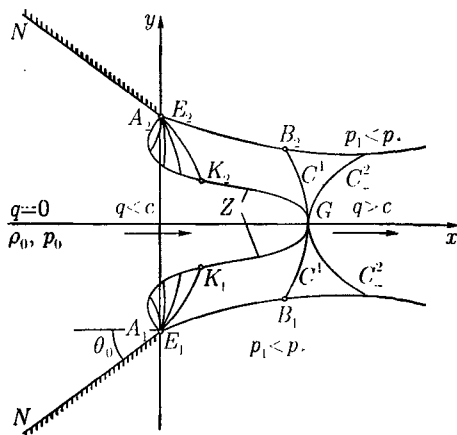


Рис. 10

то точки E_1 и B_1 (а также E_2 и B_2) сливаются в одну точку $\hat{E}_1$ (соответственно $\hat{E}_2$). Поэтому дальнейшее понижение внешнего давления уже не влияет на область независимого течения, в частности на его расход. Получаемое течение при $q_1 = \hat{q}$ называется *течением с максимальным расходом*.

Для течения с максимальным расходом задача (39) несколько упрощается и сводится к следующей: найти решение уравнения (22.47) в области $NA_1\hat{E}_1GN$ по граничным условиям

$$\psi|_{NG} = 0, \quad \psi|_{NA_1\hat{E}_1} = -Q. \quad (41)$$

Красная задача (41) называется *задачей Трикоми* (для уравнения Чаплыгина (22.47)). В послевоенных работах Ф. И. Франкля и его последователей эта задача получила исчерпывающее решение, причем оказалось, что для нее, как и для задач об истечении дозвуковых струй, эффективен метод Фурье (разделение переменных с последующим представлением решения в виде рядов по частным решениям). Напротив, задача (39) при $q_1 < \hat{q}$, принадлежащая к классу так называемых *обобщенных задач Трикоми*, оказывается очень трудной, хотя и решалась приближенно численными методами рядом авторов. Здесь необходимы дальнейшие аналитические исследования. В частности, представляет большой интерес асимптотическое поведение трансзвукового течения, когда $q_1 \rightarrow c_*$ со стороны $q_1 > c_*$.

§ 27. Гиперзвуковые течения

Аэродинамические явления, происходящие при полете управляемых снарядов, ракет и высокоскоростных самолетов, определяются тем, что числа Маха полета достигают довольно больших значений, порядка 5–10–20. Течения с такими числами Маха получили название *гиперзвуковых*. Основной задачей теории гиперзвуковых течений является задача обтекания конечного тела сверхзвуковым потоком при больших числах Маха. При установившемся гиперзвуковом обтекании перед телом возникает сильный, вообще говоря, отошедший скачок уплотнения (головная ударная волна), отделяющий невозмущенный набегающий поток от области неравномерного течения между скачком и телом.

В действительности за головной ударной волной образуется область высоких температур (тысячи градусов), вызывающих изменения физико-химических свойств газа (воздуха). Здесь происходят процессы диссоциации и рекомбинации молекул, ионизация и химические реакции. В этих условиях могут быть существенны диффузионные процессы, а также перенос энергии излучением. Может происходить также абляция материала поверхности — его испарение и снос вниз по потоку, — вызывающая изменения

формы тела. При расчете движения реальных объектов (например вход спускаемого аппарата в атмосферу) указанные процессы и явления необходимо принимать во внимание. Ясно, что это обстоятельство приводит к существенному усложнению математической модели и делает ее труднодоступной для качественного анализа. В настоящее время гиперзвуковая аэродинамика сформировалась в самостоятельное научное направление с достаточно большим накопленным опытом исследования и обширной литературой (см. [11]).

Тем не менее существенно, что упомянутые сложные физико-химические процессы в газе происходят на общем фоне чисто газодинамического течения, свойства которого во многом являются определяющими и подлежат независимому изучению. Основы такой теории, не учитывающей осложняющие физико-химические факторы, излагаются ниже для модели *политропного газа* с фиксированным показателем адиабаты γ .

Вопрос о том, за счет какого фактора число Маха невозмущенного сверхзвукового течения $M_1 = q_1/c_1$ оказывается большим, для теории не очень существен. Для определенности в дальнейшем принимается, что скорость q_1 фиксирована, а скорость звука c_1 относительно мала.

Формулы скачка в политропном газе. Для теории гиперзвуковых течений характерно использование различных приближенных моделей, одна из которых, на формальном уровне, изложена в § 14. Ее обоснование и другие важные особенности гиперзвуковых течений связаны с детальным рассмотрением соотношений в косом скачке уплотнения.

Пусть индекс «1» отмечает значения параметров газа перед скачком. Тогда полученные в § 25 соотношения в косом скачке могут быть переписаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{p - p_1}{\rho_1 c_1^2} &= \frac{2}{\gamma + 1} (M_1^2 \sin^2 \chi - 1), \quad \frac{\rho}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1) M_1^2 \sin^2 \chi}{2 + (\gamma - 1) M_1^2 \sin^2 \chi}, \\ \frac{u}{q_1} &= 1 - \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_1^2} (M_1^2 \sin^2 \chi - 1), \\ \frac{v}{q_1} &= \frac{2}{\gamma - 1} \frac{\cos \chi}{M_1} \frac{M_1^2 \sin^2 \chi - 1}{M_1 \sin \chi}, \\ M_1 \operatorname{tg} \theta &= \frac{\cos \chi}{M_1 \sin \chi} \frac{M_1^2 \sin^2 \chi - 1}{\frac{\gamma + 1}{2} - \sin^2 \chi + M_1^{-2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Первая формула (1) следует из определения амплитуды скачка z и выражения для нее согласно (25.10) и (25.12). Вторая формула (1) следует из

уравнения адиабаты Гюгонио в политропном газе (25.2) и (25.10). Третья и четвертая формулы (1) следуют из соотношений (25.7) и (25.10). Наконец, последняя формула (1) есть переписанное в другом виде соотношение (25.14).

Параметры гиперзвукового подобия. В связи с формулами (1) обращает на себя внимание ряд важных обстоятельств. Во-первых, в соотношения (1) входит характерное произведение $M_1 \sin \chi$. Далее, если M_1 велико, то для *слабого скачка* его угол наклона χ мал, причем $\chi \rightarrow 0$, когда $M_1 \rightarrow \infty$. Последний факт легко устанавливается путем анализа ударной поляры (25.11) при фиксированном q_1 и при $M_1 \rightarrow \infty$. Кроме того, всегда выполнено неравенство $\theta < \chi$, в силу которого малость угла χ влечет и малость угла поворота потока θ . Наконец, для малых углов χ и θ можно принять, что $\sin \chi = \chi$, $\cos \chi = 1$ и $\operatorname{tg} \theta = \theta$ с относительной погрешностью $O(\chi^2)$.

Эти факты наводят на мысль о введении характерных величин

$$K = M_1 \theta, \quad K_c = M_1 \chi. \quad (2)$$

Они называются *параметрами гиперзвукового подобия*. Геометрическое истолкование этих параметров вытекает из того, что $1/M_1 = \sin \alpha$ при больших M_1 приближенно равно углу Маха α . Поэтому $K \approx \theta/\alpha$ характеризует относительную величину угла наклона вектора скорости по отношению к углу Маха α , а параметр $K_c \approx \chi/\alpha$ — относительную величину угла наклона скачка.

Параметры K и K_c зависимы. Предельный переход $M_1 \rightarrow \infty$ в последнем уравнении (1) при фиксированных параметрах (2) дает соотношение

$$KK_c = \frac{2}{\gamma+1} (K_c^2 - 1). \quad (3)$$

Решение этого квадратного уравнения относительно K_c даст

$$K_c = \frac{\gamma+1}{4} K + \sqrt{\left(\frac{\gamma+1}{4} K\right)^2 + 1}. \quad (4)$$

В силу определения параметров (2), уравнения (1) с относительной точностью $O(\chi^2 + M_1^{-2})$ могут быть переписаны так (здесь использовано соотношение $\rho_1 c_1^2 = \gamma p_1$ для политропного газа):

$$\begin{aligned} \frac{p}{p_1} &= 1 + \gamma K K_c, & \frac{\rho}{\rho_1} &= \frac{(\gamma+1)K_c^2}{2 + (\gamma-1)K_c^2}, \\ M_1^2 \left(\frac{u}{q_1} - 1 \right) &= -K K_c, & M_1 \frac{v}{q_1} &= K. \end{aligned} \quad (5)$$

Формулы (5) выражают следующее свойство *гиперзвукового подобия* косых скачков: стоящие слева величины зависят только от параметра подобия K , но не от значений M_1 и θ в отдельности. Другими словами, для всех косых скачков с разными M_1 и θ , но с одним и тем же значением параметра K величины в левых частях равенств (5) одинаковы (с относительной точностью $O(\chi^2 + M_1^{-2})$).

Классификация моделей. В общем случае головная ударная волна не прямолинейна, а течение между ней и телом не постоянное. При этом параметр подобия K , вычисленный по значению угла θ в данной точке, будет переменным. В зависимости от экстремальных значений K в теории гиперзвуковых течений различаются следующие случаи моделирования.

(а) Величина K порядка единицы. Этот случай является основным и приводит к *гиперзвуковому приближению*, которое уже рассматривалось в § 14 и будет еще изучаться ниже.

(б) Величина K мала по сравнению с единицей. Это означает, что углы наклона вектора скорости много меньше углов Маха. Кроме того, здесь $K_c \sim 1$, т.е. углы наклона скачков уплотнения близки к соответствующим углам Маха. Поэтому сила разрывов относительно невелика (это видно и из формул (5)). В этом случае применима *линейная теория* сверхзвукового обтекания тонкого тела.

(в) Величина K велика по сравнению с единицей. Здесь углы наклона линий тока велики по сравнению с углами Маха. Такая модель называется приближением *сильных ударных волн*. Она может быть рассмотрена в рамках модели (а) гиперзвукового приближения как ее возможный предельный случай.

(г) Величина K велика, а показатель адиабаты γ близок к единице. Предельное состояние, достигаемое, когда одновременно $K \rightarrow \infty$ и $\gamma \rightarrow 1$, приводит к так называемой *теории Ньютона*.

Обтекание заостренного тела. Рассматривается задача обтекания тела сверхзвуковым потоком в предположении, что углы наклона поверхности тела к направлению невозмущенного течения всюду малы, а число Маха M_1 велико, причем параметр подобия K имеет величину порядка единицы. В этом случае головной скачок уплотнения присоединен к переднему острию (рис. 1) и течение между скачком и телом описывается уравнениями *гиперзвукового приближения*. Для получения этих уравнений вводится малый параметр $\delta = 1/M_1$ и представление основных величин формируется с учетом предельных формул (5). При этом надо еще учесть, что вдоль линий тока $dy = \tan \theta dx$ или, в рассматриваемом приближении, $dy = \delta K dx$. Поэтому для правильного представления наклонов линий тока необходимо увеличить ординаты y в $1/\delta$ раз. Эти соображения приводят к следующим форму-

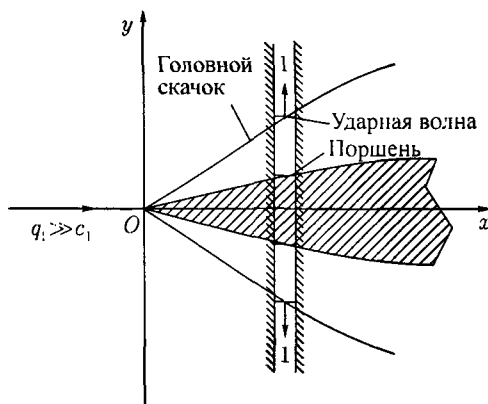


Рис. 1

лам моделирования (для простоты рассматривается плоскопараллельная задача):

$$\begin{aligned} x &= x', & y &= \delta y', & u &= q_1 + \delta^2 u', & v &= \delta v', \\ p &= \delta^2 p', & \rho &= \rho', \end{aligned} \quad (6)$$

в точности совпадающим с формулами (14.15). Здесь формула для давления p получается из (5) в силу того, что в политропном газе

$$\gamma p_1 = \rho_1 c_1^2 = \frac{1}{M_1^2} \rho_1 q_1^2. \quad (7)$$

Как было показано в § 14, моделирование (6) приводит к системе уравнений, которая после переобозначения

$$x' \rightarrow q_1 t, \quad y' \rightarrow x, \quad v' \rightarrow u, \quad p' \rightarrow p, \quad \rho' \rightarrow \rho \quad (8)$$

совпадет с уравнениями одномерного неустановившегося движения с плоскими волнами (газ политропный)

$$\begin{aligned} u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} p_x &= 0, \\ \rho_t + u \rho_x + \rho u_x &= 0, \\ p_t + u p_x + \gamma p u_x &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом величина u' вычисляется с помощью интеграла Бернулли

$$q^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c^2 = q_1^2 + \frac{2}{\gamma - 1} c_1^2,$$

который в результате моделирования (6) принимает приближенную предельную форму

$$2q_1 u' + v'^2 + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p'}{\rho'} = \frac{2}{\gamma - 1} q_1^2. \quad (10)$$

Здесь возникает вопрос о том, к какой краевой задаче для уравнений (9) сводится при этом исходная задача обтекания. С этой целью надо выяснить соответствующую моделированию (6) предельную форму граничных условий на скачке уплотнения и на теле.

Пусть граница тела задана уравнением $y = \delta Y(x)$. В результате моделирования (6) и переобозначения (8) оно переходит в уравнение

$$x = Y(q_1 t) \quad (11)$$

и тем самым задает линию на плоскости событий $R^2(x, t)$ — одну из границ области определения решения системы (9). Кроме того, условие обтекания $u dy = v dx$ после моделирования (6) и переобозначения (8) принимает вид

$$dx/dt = u. \quad (12)$$

Это показывает, что линия (11) является контактной характеристикой системы (9), т. е. может рассматриваться как поршень.

Аналогично, пусть линия скачка задана уравнением $y = \delta R(x)$. В модели это уравнение примет вид $x = R(q_1 t)$, т. е. станет уравнением второй границы области определения решения системы (9). На линии скачка выполнено уравнение $dy/dx = \tan \chi$, которое в модели принимает вид $dx/dt = q_1 K_c$. Поэтому скорость перемещения точки $x = R(q_1 t)$ равна

$$D_n = q_1 K_c. \quad (13)$$

В этой точке имеет место разрыв основных (для уравнений (9)) величин u , ρ , p . Утверждается, что в силу моделирования (6) и переобозначения (8) значения этих величин по разные стороны разрыва удовлетворяют уравнениям сильного разрыва (ударной волны), перемещающегося со скоростью (13). Действительно, если ввести скорость перемещения частиц по нормали к разрыву u_{n_1} и u_{n_2} , то будет $u_{n_1} = v'_1 = 0$ (перед разрывом). Кроме того, в силу (6) и последнего уравнения (5) будет $u_{n_2} = v' = \delta^{-1} v = q_1 K$ (за разрывом). Следовательно, для системы (9) значения нормальных скоростей на разрыве таковы:

$$u_{n_1} = 0, \quad u_{n_2} = q_1 K. \quad (14)$$

Что же касается давления и плотности за разрывом, то они даются непосредственно формулами (5).

Легко проверить, что с этими значениями законы сохранения массы и импульса

$$\begin{aligned}\rho_2(u_{n_2} - D_n) &= \rho_1(u_{n_1} - D_n), \\ p_2 - p_1 &= \rho_1(u_{n_1} - D_n)(u_{n_1} - u_{n_2})\end{aligned}$$

выполнены тождественно в силу соотношения (3) и формулы (7), которая после моделирования (6) принимает вид $\gamma p'_1 = \rho'_1 q_1^2$. Уравнение адиабаты Гюгонио в политропном газе также легко проверяется и оказывается тождеством в силу соотношения (3).

Итак, задача обтекания заостренного тела в гиперзвуковом приближении оказывается равносильной задаче о неустановившемся движении газа, возникающем под действием поршня, вдвигающегося в покоящийся газ по заданному закону (11) и порождающего впереди себя ударную волну. В этом смысле говорят о *поршневой аналогии* (или поршневом приближении) при гиперзвуковом обтекании тонких тел. Эта аналогия поясняется на рис. 1, где выделена полоса, играющая роль трубы, в которой по состоянию 1 распространяется ударная волна (элемент головного скачка), когда поршень (элемент поверхности тела) вдвигается в газ 1. При этом полоса считается неподвижной, а тело — движущимся в отрицательном направлении оси x со скоростью q_1 . Можно показать (см. [11]), что поршневая аналогия справедлива не только для плоскопараллельного обтекания, но также и в общем случае пространственного обтекания с большим числом Маха тонкого тела сложной конфигурации. При этом требуется выполнение только одного условия: всюду в потоке параметр K конечен и имеет порядок единицы.

Отсюда следует важный для приложений закон подобия при гиперзвуковом обтекании тонких тел: описание поля течения в штрихованных переменных (вводимых согласно (6)) для семейства *аффинно-подобных* тел, определяемых значением угла наклона θ_1 , в фиксированной характерной точке и обтекаемых с различными (большими) числами Маха M_1 , зависит только от величины $K = M_1 \theta_1$. Поэтому K и называется *параметром гиперзвукового подобия*.

С точки зрения красной задачи для дифференциальных уравнений упрощение, достигаемое при использовании поршневой аналогии, не очень значительно. Оно сводится к тому, что уравнения (9) содержат на одну искомую функцию меньше, а из граничных условий на ударной волне исключена касательная составляющая вектора скорости. Вообще говоря, решить задачу о поршне не легче, чем исходную задачу обтекания. Поэтому основной выигрыш от перехода к гиперзвуковому приближению заключается в возможности использования накопленного более богатого опыта и многочисленных примеров решения нестационарных задач.

Влияние затупления. Носовая часть реального объекта (тела) по многим причинам не может быть идеально острой. Обтекание такого тела имеет существенно другой характер по сравнению с заостренным телом, так как скачок уплотнения отходит от тела и за ним образуется зона дозвукового течения. В этой зоне параметр K принимает любые значения, $0 \leq K < \infty$.

Качественная картина течения (точнее, его половины для случая симметричного обтекания) показана на рис. 2. Дозвуковое течение в области $TOANT$ заканчивается на звуковой линии AN и переходит в сверхзвуковое. При этом формируется область Ω независимого трансзвукового течения $TOABT$, где AB есть характеристика C_+ , приходящая в точку A (аналогично течению через сопло Лавала, см. § 26.). Вообще говоря, форма тела BP вниз по потоку от характеристики AB не влияет на поле течения в области Ω . Анализ и расчет независимого трансзвукового течения весьма сложны из-за того, что линия скачка OA заранее неизвестна, а энтропия за этим криволинейным скачком переменна.

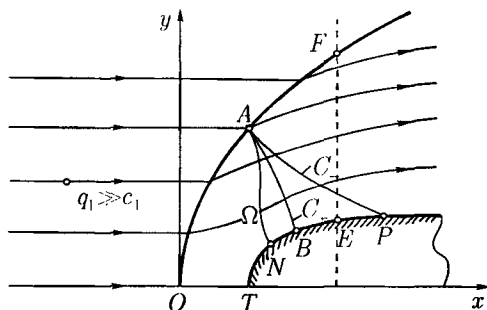


Рис. 2

Тем не менее, если число Маха M_1 велико, а характерный размер затупления относительно мал, то область Ω также мала и ее влияние на течение в целом может быть учтено приближенно. Одно из таких приближений связано с изложенной выше нестационарной аналогией, которую можно считать приемлемой, начиная с некоторого сечения EF , расположенного за линией AB . Правила выработки начальных данных на линии EF при этом основываются на интерпретации действия затупления как продукта нестационарного течения, возникающего в результате сосредоточенного воздействия на газ путем выделения некоторой энергии E , импульса I и внешнего движения поршня со скоростью U . Эти вспомогательные параметры должны определяться только формой затупления. Поэтому для данного

затупления их можно находить другими методами, например экспериментально, или путем численного расчета, или с использованием других приемлемых приближений. Подробный анализ имеющихся здесь возможностей дан в [11].

Например, если известна полная сила $X = (X, Y)$, действующая на затупление, то можно принять, что в слое единичной ширины выделилась энергия $E = X \cdot 1$ и ему сообщен импульс $I = q_1^{-1} Y$.

Приближение Ньютона. Когда параметр K , а с ним и K_c является большим, то согласно (5) плотность газа за скачком близка к предельно возможному значению $\rho_1(\gamma + 1)/(\gamma - 1)$. Если при этом γ близко к единице, то почти вся масса газа, прошедшего через скачок, концентрируется в тонком слое вблизи поверхности скачка — образуется так называемый *ударный слой*. С другой стороны, при $K \rightarrow \infty$ и $\gamma \rightarrow 1$ из соотношения (3) следует, что $K/K_c \rightarrow 1$. Это означает, что в таком пределе поверхность скачка совпадает с поверхностью обтекаемого тела (равенство $K_c = K$ равносильно равенству $\chi = \theta$). При этом из формулы (1) получается, что давление на теле (совпадающее с давлением за скачком) дается формулой

$$p = \rho_1 q_1^2 \sin^2 \theta, \quad (15)$$

которая называется *формулой Ньютона*. Она была получена знаменитым ученым на основании следующих соображений.

Предполагается, что частицы газа, встречаясь с поверхностью тела, полностью отдают ему свой нормальный к поверхности импульс и затем продолжают двигаться вдоль поверхности, уже не оказывая давления на тело. Пусть σ есть элемент площади поверхности тела, наклоненный к набегающему потоку под углом θ . Тогда масса газа, сталкивающаяся с площадью σ за единицу времени, равна $m = \rho_1 q_1 \sigma \sin \theta$, а ее импульс есть $m u_1$. Его нормальная составляющая к поверхности равна

$$m q_1 \sin \theta = \sigma \rho_1 q_1^2 \sin^2 \theta.$$

Следовательно, импульс, передаваемый единице площади поверхности тела в направлении нормали, который и равен давлению, дается формулой (15).

Известно, что приближение Ньютона может рассматриваться как предельное также и при газокинетическом подходе к обтеканию тел разреженным газом. Оно справедливо, если течение является свободно-молекулярным (т. е. молекулы между собой не взаимодействуют), а граничное условие взаимодействия молекул с поверхностью тела сводится к неупругому удару. Тем самым изложенная в настоящих лекциях феноменологическая модель газовой динамики в вопросах теории гиперзвуковых течений смыкается с газокинетической моделью.

Задачи и упражнения к главе IV

1. Найти функцию тока и потенциал скоростей течения Праудтля – Мейера в случае политропного газа.

2. Найти линии тока течения (на плоскости $R^2(x, y)$), описываемого частным решением уравнения Чаплыгина (22.47) вида

$$\psi = a\theta + b(q) \quad (a = \text{const}).$$

Рассмотреть случаи $a = 0$ и $b(q) = 0$.

3. Показать, что при преобразовании

$$\zeta' = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}, \quad \psi = (c\zeta + d)\psi'$$

с постоянными a, b, c, d ($ad - bc \neq 0$) уравнение Чаплыгина (22.50) переходит в уравнение того же вида с функцией Чаплыгина K' , определяемой формулой

$$K'(\zeta') = \frac{(c\zeta + d)^4}{(ad - bc)^2} K(\zeta).$$

4. Используя уравнения (22.45), доказать следующий аналог теоремы 20.1 (Никольского и Таганова); если в дозвуковом течении при движении вдоль линии $q = \text{const}$ область меньших скоростей находится слева, то вектор скорости монотонно поворачивается по часовой стрелке.

5. Равномерный поток политропного газа, движущийся со скоростью $q_1 > c_1$ вдоль прямолинейной стенки AB (см. рисунок), обтекает полуокружность BC . Выяснить, при каких значениях параметров q_1, c_1 и γ происходит отрыв потока от стенки с образованием зоны вакуума. Найти точку отрыва.

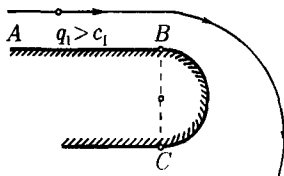
6. Прямолинейная стенка $\{x \leq 0, y = 0\}$, вдоль которой в направлении оси x движется равномерный сверхзвуковой поток (расположенный при $y > 0$), при $x > 0$ гладко переходит в искривленную стенку $y = f(x)$. Показать, что если на искривленной стенке есть вогнутость ($f''(x) > 0$), то при продолжении потока неизбежна градиентная катастрофа.

7. Найти максимальный угол поворота потока политропного газа $\theta_{\text{пред}}$ в косом скачке в зависимости от M_1 (использовать соотношение (25.14)).

8. Показать, что в случае политропного газа скорость за косым скачком с предельным углом поворота потока $\theta_{\text{пред}}$ всегда дозвуковая.

9. Доказать соотношение Праудтля для косых скачков в политропном газе

$$u_{n1} u_{n2} = c_*^2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} u_\sigma^2.$$



К задаче 5

10. Показать, что если вдоль звуковой линии $\theta = \text{const}$, то она является прямой на плоскости течения.

11. Найти характеристики уравнения Трикоми (26.27).

12. Показать, что линии $y = \text{const}$ (линии тока в околосзвуковом приближении) для решения (26.25) на плоскости $R^2(u, v)$ образуют семейство прямых, огибающих характеристики

$$v = \pm \frac{2}{3} u^{3/2}.$$

13. Показать, что в полярных координатах (r, θ) , вводимых соотношениями

$$v = r \cos \theta, \quad \frac{2}{3}(-u)^{3/2} = r \sin \theta,$$

уравнение Трикоми (26.27) принимает вид

$$y_{\theta\theta} + r^2 y_{rr} + \frac{4}{3} r y_r = 0.$$

14. Найти преобразования растяжения, допускаемые уравнением Трикоми (26.27).

15. Найти предельную форму ударной поляры в случае политропного газа, когда $M_1 \rightarrow \infty$ при фиксированном q_1 .

16. Решить задачу обтекания политропным газом выпуклого угла в гиперзвуковом приближении.

17. Решить задачу симметричного обтекания тонкого ромба равномерным сверхзвуковым потоком политропного газа, направленным вдоль большой диагонали. В гиперзвуковом приближении найти силу сопротивления ромба.

18. Доказать, что в плоскопараллельном установившемся течении политропного газа невозможна конфигурация из трех прямолинейных скачков уплотнения, выходящих из одной точки, если в каждом секторе течение является постоянным.

19. Доказать, что если равномерный сверхзвуковой поток проходит через криволинейный скачок, то течение за скачком вихревое. Вывести формулу для величины вихря, образующегося на скачке:

$$\omega = \kappa u_\sigma \frac{(\Gamma(z))^2}{1 - \Gamma(z)},$$

где u_σ — касательная составляющая вектора скорости, κ — кривизна линии скачка, а функция $\Gamma(z)$ определена равенством (25.2).

20. Показать, что для осесимметричного течения уравнения околосзвукового приближения, аналогичные (26.23), имеют вид

$$u_y = v_x, \quad uu_x = v_y + v/y.$$

Проверить, что эти уравнения имеют точное решение

$$u = 2x + y^2, \quad v = 2xy + \frac{1}{2}y^3$$

и выяснить свойства отображения $(x, y) \rightarrow (u, v)$.

21. Показать, что на звуковой плоскости $x = 0$ осесимметричного течения скорость ускорения $w(y) = (1/2)u_{xx}(0, y)$ удовлетворяет аналогу уравнения (26.31)

$$w'' + w'/y = 6w^2.$$

Доказать наличие особых точек у решения этого уравнения с начальными данными $w(0) = b$, $w'(0) = 0$.

Приложение

Основным инструментом использования групп Ли в теории дифференциальных уравнений, в частности, для построения классов точных решений, является соответствие между группами Ли и алгебрами Ли операторов, кратко изложенное здесь с применением к уравнениям газовой динамики (УГД). Доказательства всех формулируемых утверждений можно найти в [5].

Группы и алгебры Ли. Рассматривается N -мерное пространство $R^N(z)$ точек (векторов) $z = (z^1, \dots, z^N)$. Пусть $a \in R$ — вещественный параметр. Отображение $F : R^N \times R \rightarrow R^N$, действующее по формуле

$$z' = f(z, a), \quad (1)$$

называется *однопараметрической группой* Ли $G^1(f)$, если $f \in C_\infty(R^N \times R)$ и обладает свойствами

$$f(z, 0) = z, \quad f(f(z, a), b) = f(z, a + b). \quad (2)$$

Векторное поле ζ на пространстве $R^N(z)$, вводимое равенством

$$\zeta(z) = \left. \frac{\partial f(z, a)}{\partial a} \right|_{a=0} \quad (3)$$

с координатами $\zeta = (\zeta^1, \dots, \zeta^N)$, записывается в виде линейного дифференциального оператора

$$X = \sum_{k=1}^N \zeta^k(z) \frac{\partial}{\partial z^k}. \quad (4)$$

Дифференцирование (2) по параметру b в точке $b = 0$, с учетом обозначения (3), приводит к уравнению Ли

$$\left. \frac{\partial z'}{\partial a} \right|_{a=0} = \zeta(z'), \quad z' \Big|_{a=0} = z, \quad (5)$$

в силу которого для любой (гладкой) функции $F(z)$ верно равенство

$$\frac{\partial}{\partial a} F(z') = X F(z'). \quad (6)$$

Решение уравнения Ли (5) дает отображение (1), обладающее свойствами (2). Тем самым между группами $G^1(f)$ и операторами X существует взаимно однозначное соответствие, которое выражается записью $G^1(X)$.

Коммутатором операторов X и Y называется оператор $[X, Y]$, определенный (в смысле действия на любую функцию $F(z)$) формулой

$$[X, Y] = XY - YX. \quad (7)$$

Конечномерная (r -мерная) группа Ли G^r есть множество однопараметрических групп G^1 , обладающее свойством

$$\{G^1(X) \subset G^r, \quad G^1(Y) \subset G^r\} \implies G^1([X, Y]) \subset G^r. \quad (8)$$

Операторы (4) можно складывать и умножать на вещественные числа, образуя их линейные комбинации и векторные пространства (или подпространства) операторов.

Векторное пространство L^r операторов называется r -мерной алгеброй Ли операторов, если выполнено свойство

$$\{X \in L^r, Y \in L^r\} \implies [X, Y] \in L^r. \quad (9)$$

Векторное подпространство $K \subset L^r$ называется подалгеброй в L^r , если для любых $X, Y \in K$ также $[X, Y] \in K$.

Число r означает размерность L^r как векторного пространства. Поэтому в L^r существует базис из r линейно независимых операторов Y_α ($\alpha = 1, \dots, r$). В силу (9) их коммутаторы должны быть линейными комбинациями базисных операторов, т. е. выполняются соотношения (сумма по $\gamma = 1, \dots, r$)

$$[Y_\alpha, Y_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma Y_\gamma \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, r), \quad (10)$$

где $C_{\alpha\beta}^\gamma$ — вещественные числа, называемые структурными константами алгебры Ли L^r . Соотношения (10) определяют таблицу коммутаторов («таблицу умножения») в L^r . Задание структурных констант $C_{\alpha\beta}^\gamma$ вполне определяет алгебру Ли операторов с базисом $\{Y_\alpha\}$, но эти константы не произвольны: они необходимо удовлетворяют соотношениям (любые $\alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, \dots, r$; суммы по $\sigma = 1, \dots, r$)

$$C_{\alpha\beta}^\gamma = -C_{\beta\alpha}^\gamma, \quad C_{\alpha\beta}^\sigma C_{\sigma\gamma}^\delta - C_{\beta\gamma}^\sigma C_{\sigma\alpha}^\delta + C_{\gamma\alpha}^\sigma C_{\sigma\beta}^\delta = 0, \quad (11)$$

второе из которых следует из тождества Якоби

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0,$$

справедливого для любых операторов X, Y, Z вида (4).

Определения (8) и (9) устанавливают соответствие между группами G^r и алгебрами Ли операторов L^r . Это соответствие является взаимно однозначным и продолжается на подгруппы $H \subset G^r$ и подалгебры $K \subset L^r$.

Применительно к дифференциальным уравнениям вместо «допускаемая группа Ли» говорят также «допускаемая алгебра Ли операторов». Допускаемые операторы вычисляются алгоритмически (см. [5]).

Алгебры Ли, допускаемые УГД. Для УГД пространство $R^N(z)$ есть пространство $R^9(t, x, y, z, u, v, w, \rho, p)$. Соответственно указанному в § 8 перечню групп $G^1(f^i)$, допускаемых УГД, получается следующий список допускаемых операторов

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= \partial_x \\ X_2 &= \partial_y \\ X_3 &= \partial_z \end{aligned} \right\} \text{операторы переносов по } x, y, z$$

$$\left. \begin{aligned} X_4 &= t\partial_x + \partial_u \\ X_5 &= t\partial_y + \partial_v \\ X_6 &= t\partial_z + \partial_w \end{aligned} \right\} \text{операторы галилеевых переносов}$$

$$\left. \begin{aligned} X_7 &= y\partial_z - z\partial_y + v\partial_w - w\partial_v \\ X_8 &= z\partial_x - x\partial_z + w\partial_u - u\partial_w \\ X_9 &= x\partial_y - y\partial_x + u\partial_v - v\partial_u \end{aligned} \right\} \text{операторы вращений} \quad (12)$$

$$X_{10} = \partial_t \quad \left. \right\} \text{оператор переноса по } t$$

$$\left. \begin{aligned} X_{11} &= t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z \\ X_{13} &= t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w + 2\rho\partial_\rho \\ X_{14} &= \rho\partial_\rho + p\partial_p \end{aligned} \right\} \text{операторы растяжений}$$

$$\left. \begin{aligned} X_{12} &= t^2\partial_t + tx\partial_x + ty\partial_y + tz\partial_z + \\ &+ (x - tu)\partial_u + (y - tv)\partial_v + \\ &+ (z - tw)\partial_w - 3t\rho\partial_\rho - 5tp\partial_p \end{aligned} \right\} \text{«проективный» оператор}$$

Базис в L^{11} образуют операторы $\{X_1, \dots, X_{11}\}$, в L^{13} — операторы $\{X_1, \dots, X_{11}, X_{13}, X_{14}\}$ и в L^{14} — операторы $\{X_1, \dots, X_{14}\}$.

В нижеследующей таблице 1 коммутаторов для алгебры Ли L^{11} , для краткости записи, вместо символов операторов X_k написаны только их

номера k ($-k$ означает оператор $-X_k$). В коммутаторе $[X_k, X_l]$ оператор X_k берется слева, а оператор X_l — сверху.

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	0	0	0	0	0	0	-3	2	0	1
2	0	0	0	0	0	0	3	0	-1	0	2
3	0	0	0	0	0	0	-2	1	0	0	3
4	0	0	0	0	0	0	0	-6	5	-1	0
5	0	0	0	0	0	0	6	0	-4	-2	0
6	0	0	0	0	0	0	-5	4	0	-3	0
7	0	-3	2	0	-6	5	0	-9	8	0	0
8	3	0	-1	6	0	-4	9	0	-7	0	0
9	-2	1	0	-5	4	0	-8	7	0	0	0
10	0	0	0	1	2	3	0	0	0	0	10
11	-1	-2	-3	0	0	0	0	0	0	-10	0

Инварианты. Функция $J(z)$ называется *инвариантом* группы G^r , если для любой подгруппы $G^1(f) \subset G^r$ выполнено равенство $J(f(z, a)) = J(z)$. В силу уравнения (6) это равносильно тому, что для любого оператора $X \in L^r$ будет $XJ(z) = 0$. Последнее имеет место если и только если для всех базисных операторов $Y_\alpha \in L^r$ выполнены равенства

$$Y_\alpha J(z) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, r). \quad (13)$$

В совокупности равенства (13) образуют систему из r линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка для одной функции $J(z)$. В силу соотношений (10) эта система *всегда совместна*. Широта ее общего решения зависит от ранга $r \times N$ матрицы из координат операторов Y_α

$$M = \begin{pmatrix} \zeta_1^1 & \dots & \zeta_1^N \\ \dots & \dots & \dots \\ \zeta_r^1 & \dots & \zeta_r^N \end{pmatrix}.$$

Так как $M = M(z)$, то ее ранг зависит от точки z . *Общим рангом* матрицы $M(z)$ (обозначается буквами о. р.) называется её максимальный ранг (который ввиду непрерывности функций $\zeta_{\alpha}^k(z)$ всегда достигается на некотором открытом множестве в $R^N(z)$). Если о. р. $M = m$, то система (13) имеет $N - m$ функционально независимых решений $J_q(z)$ ($q = 1, \dots, N - m$), а ее общее решение есть произвольная функция этих решений.

Многообразие $\Psi \subset R^N$ называется *неособым* многообразием группы G^r , если $\text{ранг } M \Big|_{\Psi} = m$; если же $\text{ранг } M \Big|_{\Psi} < m$, то Ψ называется *особым* многообразием группы G^r .

Гладкое многообразие $\Psi \subset R^N$ называется *инвариантным* многообразием группы G^r , если для любой точки $z \in \Psi$ также $z' = f(z, a) \in \Psi$ с любым элементом $f \in G^r$. Если Ψ задано неявно системой уравнений

$$\Psi : \psi_{\sigma}(z) = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, s), \quad (14)$$

то *критерий* его инвариантности состоит в выполнении равенств

$$Y\psi_{\sigma}(z) \Big|_{\Psi} = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, s) \quad (15)$$

для любого оператора $Y \in L^r$. Говорят, что уравнениями (14) многообразие задано *регулярно*, если

$$\text{о. р. } \left(\partial \psi_{\sigma} / \partial z^k \right) \Big|_{\Psi} = s. \quad (16)$$

Справедлива следующая *теорема о представлении*: регулярно заданное уравнениями (14) неособое инвариантное многообразие группы G^r может быть задано системой уравнений

$$J_{\sigma}(z) = 0 \quad (\sigma = 1, \dots, s), \quad (17)$$

где J_{σ} — инварианты G^r .

Подобие подалгебр. Так как при построении H -решений нужны только инварианты, то достаточно использовать лишь подалгебры H допускаемой алгебры Ли L^r . В бесконечномерном множестве Ω подалгебр $H \subset L^r$ существует важное отношение подобия, позволяющее «сократить» Ω до обозримого подмножества.

Автоморфизмом алгебры Ли L^r называется *линейное преобразование* A векторного пространства L^r , действующее по формуле $X' = AX$ и обладающее свойством

$$A[X, Y] = [AX, AY]. \quad (18)$$

Каждый фиксированный оператор $X \in L^r$ порождает линейное отображение $L^r \rightarrow L^r$, обозначаемое символом $\text{ad } X$ и действующее на векторы $Y \in L^r$ по формуле $(\text{ad } X)Y = [X, Y]$.

Экспонента $\exp(\text{ad } X)$, где t — вспомогательный параметр, является преобразованием L^r , обладающим при любом $t \in R$ свойством (18). Преобразования

$$A = \exp(t \text{ad } X) \quad (19)$$

называются *внутренними автоморфизмами* алгебры Ли L^r . Множество внутренних автоморфизмов, получаемое, когда оператор X пробегает всю L^r , образуют группу, называемую *группой внутренних автоморфизмов* алгебры Ли L^r и обозначается символом $\text{Int } L^r$. В силу (18) автоморфизм $A \in \text{Int } L^r$ переводит каждую подалгебру $H \subset L^r$ в подалгебру $AH \subset L^r$.

Подалгебры $H, K \subset L^r$ называются *подобными* (говорят также *сопряженными*), если существует автоморфизм $A \in \text{Int } L^r$, с которым $K = AH$.

Формула (1) для преобразований пространства R^N , принадлежащих группе $G^1(X)$, может рассматриваться как переход от системы координат (z) в R^N к системе координат (z') . Для любого оператора $Y \in L^r$, записанного в координатах (z) формулой вида (4) символом Y' , будет обозначаться тот же оператор, преобразованный к координатам (z') . Пусть A — внутренний автоморфизм (19) и $J: R^N \rightarrow R$ фиксированная функция.

Лемма. Если функция $J(z)$ есть инвариант оператора Y , то $J(z')$ есть инвариант оператора $(AY)'$.

Другими словами, операторы Y и AY имеют одни и те же инварианты, но записанные в разных системах координат, определяемых формулой (1). То же верно и для подалгебр.

Переход от координат (z) к координатам (z') можно выполнить и в системе дифференциальных уравнений, допускающих L^R . При таком переходе эта система должна сохраниться (так как $X \in L^r$), т. е. будет допускать алгебру Ли $L^{r'}$. Из леммы следует, что любое H -решение данной системы, которое определяется набором инвариантов подалгебры $H \subset L^r$ (см. § 8), замной переменных (1) будет переводиться в H' -решение преобразованной системы относительно того же самого набора инвариантов. Следовательно, *подобные подалгебры производят подобные подмодели*.

Оптимальные системы подалгебр. Отношение подобия подалгебр $H \subset L^r$ является теоретико-множественным признаком эквивалентности, по которому множество Ω всех подалгебр однозначно разбивается на классы подобных. Список этих классов, идентифицируемых их представителями (по одному от каждого класса), называется *оптимальной системой подалгебр* и обозначается символом ΘL^r . Вообще говоря, ΘL^r состоит также из бесконечного множества представителей, но они объединяются в

конечное число *серий*, выделяемых нижеследующими понятиями и фактами.

Подалгебра $H \subset L^r$ называется *идеалом подалгебры* $K \subset L^r$, если для любого $Y \in H$ и любого $X \in K$ также $[X, Y] \in H$ (при этом, очевидно, $H \subseteq K$). Для каждого $X \in K$ отображение $H \rightarrow [X, H]$ линейно и сохраняет коммутатор. Операторы $X_1, X_2 \in K$ называются эквивалентными, если $X_1 - X_2 \in H$. По этому признаку подалгебра K разбивается на классы эквивалентных операторов. Множество таких классов называется *факторалгеброй* алгебры K по ее идеалу H и обозначается символом K/H . Факторалгебра K/H рассматривается как алгебра Ли операторов $X \pmod{H}$. В эти терминах справедливо следующее утверждение.

Если H есть идеал в K , то H -подмодель системы уравнений, допускающей алгебру Ли L^r , допускает факторалгебру K/H .

Подалгебра $K \subset L^r$ максимальной размерности, для которой данная подалгебра H является ее идеалом, называется *нормализатором* H в L^r и обозначается символом $\text{Nor}H$. Нормализатор любой подалгебры H определен однозначно и вычисляется алгоритмически. Предыдущее утверждение означает, что H -подмодель допускает (как минимум) факторалгебру $\text{Nor}H/H$. Тем самым симметрия подмодели автоматически оказывается известной (хотя бы частично). Поэтому при построении оптимальной системы подалгебр ΘL^r важно, чтобы вместе с любой подалгеброй H в ΘL^r содержался также ее нормализатор $\text{Nor}H$. Такая оптимальная система называется *нормализованной*. Для любой конечномерной алгебры Ли L^r нормализованная ΘL^r существует.

Объединение подалгебр в *серии подалгебр*, зависящие от нескольких параметров, диктуется тем, что при любых значениях этих параметров (с возможными ограничениями) все входящие в серию подалгебры имеют один и тот же нормализатор (быть может зависящий от тех же параметров).

Нормализованная ΘL^{11} . В таблице 2 приведена нормализованная оптимальная система подалгебр ΘL^{11} для алгебры Ли L^{11} с базисом (12), допускаемой УГД (всего 223 серии представителей).

Представители классов подобных подалгебр (серии представителей) перечисляются в порядке убывающей размерности $r = 11, 10, \dots, 1$.

В первом столбце (i) для каждого r указаны порядковые номера $i = 1, 2, \dots$, подалгебр размерности r . Тем самым каждый представитель индексируется парой чисел (r, i) .

Во втором столбце (Базис) приведены базисы подалгебр-представителей, записанные через операторы (12) в аббревиатурной форме: вместо оператора X_k указывается только его номер k ; запись вида $\alpha k + \beta l$ означает оператор $\alpha X_k + \beta X_l$ и т. п. Здесь же указаны возможные ограничения значений параметров $\alpha, \beta, \dots$, серии подалгебр (если для какого-либо параметра ограничений нет, то он может быть любым вещественным числом).

Таблица 2

i	Базис	Nor
-----	-------	-----

 $r = 11$

1	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9; 10; 11	= 11, 1
---	-----------------------------------	---------

 $r = 10$

1	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9; 11	= 10, 1
2	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9; 10	11, 1

 $r = 9$

1	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7; 10; 11	= 9, 1
2	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7, 8, 9	11, 1

 $r = 8$

1	1, 2, 3; 7, 8, 9; 10; 11	= 8, 1
2	1, 2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 7$; 10; $\beta 4 + 11$	9, 1
3	1, 2, 3; 4, 5, 6; $7 + \alpha 11$; 10	9, 1
4	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7; 11	= 8, 4
5	1, 2, 3; 4, 5, 6; 10; 11	11, 1

 $r = 7$

1	1, 2, 3; 7, 8, 9; 11	= 7, 1
2	4, 5, 6; 7, 8, 9; 11	= 7, 2
3	2, 3; 5, 6; 7; 10; 11	= 7, 3
4	1, 2, 3; 4; 7; 10; 11	= 7, 4
5	1, 2, 3; 5, 6; 10; $\alpha 4 + 7 + \beta 11$	9, 1
6	2, 3; 4, 5, 6; 7; 11	= 7, 6
7	1, 2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 7$; $\beta 4 + 11$	8, 4
8	1, 2, 3; 4, 5, 6; $7 + \alpha 11$; $\alpha \neq 0$	8, 4
9	1, 2, 3; 7, 8, 9; 10	8, 1
10	1, 2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 7$; $4 + 10$	8, 3; $\alpha = 0$
11	1, 2, 3; 4, 5, 6; $7 + 10$	8, 3; $\alpha = 0$
12	1, 2, 3; 5, 6; 10; $\alpha 4 + 11$	9, 1
13	1, 2, 3; 4, 5, 6; 11	10, 1
14	1, 2, 3; 4, 5, 6; 10	11, 1

продолжение таблицы 2

i	Базис	Nor
15	1, 2, 3; 4, 5, 6; 7	9,1

 $r = 6$

1	1, 2, 3; $\alpha 4 + 7$; 10; $\beta 4 + 11$	7,4
2	2, 3; 5, 6; 10; $7 + \alpha 11$; $\alpha \neq 0$	7,3
3	1, 2, 3; 4; 10; $7 + \alpha 11$	7,4
4	1; 4, 5, 6; 7; 11	= 6,4
5	1, 2, 3; 4; 7; 11	= 6,5
6	2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 7$; $\beta 4 + 11$	7,6
7	2, 3; 4, 5, 6; $7 + \alpha 11$; $\alpha \neq 0$	7,6
8	1, 2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 7 + \beta 11$; $\beta \neq 0$	8,4
9	4, 5, 6; 7, 8, 9	7,2
10	1, 2, 3; 7, 8, 9	8,1
11	2, 3; 5, 6; $1 + 7$; 10	7,5; $\alpha = \beta = 0$
12	2, 3; 5, 6; $\alpha 1 + 7$; $4 + 10$	7,10
13	2, 3; 5, 6; 7; 10	8,2; $\alpha = \beta = 0$
14	2, 3; 4, 5, 6; $1 + 7$	7,15
15	2, 3; 4, 5, 6; 7	8,4
16	1, 2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 7 + 10$	7,5; $\alpha = \beta = 0$
17	2, 3; 5, 6; 10, 11	7,3
18	1, 2, 3; 4; 10; $\alpha 6 + 11$; $\alpha \neq 0$	8,5
19	1, 2, 3; 4; 10; 11	9,1
20	1, 2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 11$	8,4
21	2, 3; 4, 5, 6; 11	7,6
22	1, 2, 3; 5, 6; 10	9,1
23	1, 2, 3; 5, 6; $4 + 10$	8,3; $\alpha = 0$
24	1, 2, 3; 4, 5, 6	11,1
25	1, 2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 7$	9,1

 $r = 5$

1	7, 8, 9; 10; 11	= 5,1
---	-----------------	-------

продолжение таблицы 2

i	Базис	Nor
2	1; 4; 7; 10; 11	= 5,2
3	2, 3; 7; 10; 11	= 5,3
4	1, 2, 3; 10; $\alpha 4 + 7 + \beta 11$	7,4
5	4, 5, 6; 7; 11	= 5,5
6	2, 3; 4; 7; 11	= 5,6
7	1; 5, 6; $\alpha 4 + 7; \beta 4 + 11$	6,4
8	1, 2, 3; $\alpha 4 + 7; \beta 4 + 11$	6,5
9	1; 4, 5, 6; $7 + \alpha 11$	6,4
10	2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 7 + \beta 11; \beta \neq 0$	7,6
11	1, 2, 3; 4; $7 + \alpha 11; \alpha \neq 0$	6,5
12	1, 2, 3; $\alpha 4 + 7; 4 + 10$	6,3; $\alpha = 0$
13	2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 7; \alpha \neq 0$	8,4
14	2, 3; 5, 6; 7	9,1
15	1, 2, 3; 4; 7	7,4
16	1; 4, 3 + 5, 2 - 6; 7	= 5,16
17	2, 3; 5, 6; 1 + 7	8,3; $\alpha = 0$
18	2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 7 + \alpha 10; \alpha \neq 0$	7,10; $\alpha = 0$
19	2, 3; 5, 6; 7 + 10	7,5; $\alpha = \beta = 0$
20	1, 2, 3; 4; 7 + 10	6,3; $\alpha = 0$
21	2, 3; 5; 10; $\alpha 6 + 11$	6,17
22	1, 2, 3; 10; $4 + \alpha 11$	9,1
23	1, 2, 3; 10; 11	11,1
24	1; 4, 5, 6; 11	6,4
25	2, 3; $\alpha 4 + 5, 6; \beta 4 + 11; \alpha \neq 0$	6,21
26	2, 3; 5, 6; $\alpha 4 + 11$	7,6
27	2, 3; 4, 6; $\alpha 5 + 11$	6,21
28	1, 2, 3; 6; $\alpha 4 + 11; \alpha \neq 0$	7,13
29	1, 2, 3; 4; 11	8,4
30	2, 3; $\alpha 1 + 5, 6; 4 + 10; \alpha \neq 0$	6,23

продолжение таблицы 2

i	Базис	Nor
31	2, 3; 5, 6; 4 + 10	7, 10; $\alpha = 0$
32	2, 3; 1 + 5, 6; 10	6, 22
33	2, 3; 5, 6; 10	8, 2; $\alpha = \beta = 0$
34	1, 2, 3; 6; 4 + 10	7, 14
35	2, 3; 4, 5, 6	8, 4
36	2, 3; 4, 5; 1 + 6	6, 24
37	1, 2, 3; 5, 6	9, 1

 $r = 4$

1	7, 8, 9; 11	= 4, 1
2	1; $\alpha 4 + 7$; 10; $\beta 4 + 11$	5, 2
3	2, 3; 10; 7 + $\alpha 11$; $\alpha \neq 0$	5, 3
4	1; 4; 10; 7 + $\alpha 11$	5, 2
5	5, 6; $\alpha 4 + 7$; $\beta 4 + 11$	5, 5
6	1; 4; 7; 11	= 4, 6
7	2, 3; $\alpha 4 + 7$; $\beta 4 + 11$	5, 6
8	4, 5, 6; 7 + $\alpha 11$; $\alpha \neq 0$	5, 5
9	1; 5, 6; $\alpha 4 + 7 + \beta 11$	6, 4
10	2, 3; 4; 7 + $\alpha 11$	5, 6
11	1, 2, 3; $\alpha 4 + 7 + \beta 11$; $\beta \neq 0$	6, 5
12	1, 2, 3; $\alpha 4 + 7$	7, 4
13	7, 8, 9; 10	5, 1
14	2, 3; 7; 10	6, 1; $\alpha = \beta = 0$
15	2, 3; 1 + 7; 10	5, 4; $\alpha = \beta = 0$
16	2, 3; $\alpha 1 + 7$; 4 + 10	5, 12; $\alpha = 0$
17	4, 5, 6; 7	6, 4
18	$\alpha 1 + 4, 5, 6$; $\beta 1 + 7$; $\alpha^2 + \beta^2 = 1$	5, 9; $\alpha = 0$
19	$\alpha 1 + 4, 3 + 5, 2 - 6$; $\beta 1 + 7$	5, 16
20	1; 3 + 5, 2 - 6; $\alpha 4 + 7$	5, 16
21	2, 3; 4; 1 + 7	5, 15

продолжение таблицы 2

i	Базис	Nor
22	1, 2, 3; $\alpha 4 + 7 + 10$	6,3; $\alpha = 0$
23	1; 4; 10; 11	5,2
24	2, 3; 10; $\alpha 6 + 11$; $\alpha \neq 0$	6,17
25	2, 3; 10; 11	7,3
26	4, 5, 6; 11	7,2
27	1; $\alpha 4 + 5, 6$; $\beta 4 + 11$; $\alpha \neq 0$	5,24
28	1; 5, 6; $\alpha 4 + 11$	6,4
29	1; 4, 6; $\alpha 5 + 11$	5,24
30	2, 3; $\alpha 4 + 6$; $\beta 4 + \delta 5 + 11$	6,21
31	2, 3; 4; $\alpha 5 + 11$; $\alpha \neq 0$	6,21
32	2, 3; 4; 11	7,6
33	1, 2, 3; $\alpha 4 + 11$; $\alpha \neq 0$	8,4
34	1, 2, 3; 11	10,1
35	2, 3; $\alpha 1 + 5$; $4 + \beta 6 + 10$	6,23
36	2, 3; $\alpha 1 + 5$; $6 + 10$	6,22
37	2, 3; $1 + 5$; 10	6,22
38	2, 3; 5; 10	7,12; $\alpha = 0$
39	1, 2, 3; $4 + 10$	8,3; $\alpha = 0$
40	1, 2, 3; 10	11,1
41	1; $\alpha 2 + \beta 3 + 4$, $\sigma 3 + 5$, $\tau 2 + 6$ $\alpha^2 + \beta^2 + (\sigma + \tau)^2 = 1$	6,24
42	1; $4, 3 + 5, 2 - 6$	7,15
43	1; 4, 5, 6	8,4
44	2, $\alpha 1 + 3$; $1 + 5, 6$; $\alpha \neq 0$	6,24
45	2, 3; $1 + 5, 6$	7,14
46	2, $1 + \alpha 3$; 5, 6	7,13
47	2, 3; 5, 6	9,1
48	1, 2; $3 + 5, 6$	6,24
49	1, 2, 3; 4	9,1

продолжение таблицы 2

i	Базис	Nor
$r = 3$		
1	7; 10; 11	= 3,1
2	1; 10; $\alpha 4 + 7 + \beta 11$	5,2
3	4; 7; 11	= 3,3
4	1; $\alpha 4 + 7$; $\beta 4 + 11$	4,6
5	5,6; $\alpha 4 + 7 + \beta 11$; $\beta \neq 0$	5,5
6	1; 4; $7 + \alpha 11$; $\alpha \neq 0$	4,6
7	2,3; $\alpha 4 + 7 + \beta 11$; $\beta \neq 0$	5,6
8	7,8,9	5,1
9	1; $\alpha 4 + 7$; $4 + 10$	4,4; $\alpha = 0$
10	5,6; $\alpha 4 + 7$	6,4
11	1; 4; 7	5,2
12	2,3; $\alpha 4 + 7$; $\alpha \neq 0$	6,5
13	2,3; 7	7,4
14	5,6; $1 + \alpha 4 + 7$	5,9; $\alpha = 0$
15	$3 + 5, 2 - 6$; $\alpha 1 + \beta 4 + 7$	5,16
16	2,3; $1 + 7$	6,3; $\alpha = 0$
17	1; 4; $7 + 10$	4,4; $\alpha = 0$
18	2,3; $\alpha 4 + 7 + \alpha 10$; $\alpha \neq 0$	5,12; $\alpha = 0$
19	2,3; $7 + 10$	5,4; $\alpha = \beta = 0$
20	1; 10; $\alpha 4 + 11$	5,2
21	5,6; $\alpha 4 + 11$	5,5
22	1; $\alpha 4 + 6$; $\beta 4 + \delta 5 + 11$	5,24
23	1; 4; $\alpha 6 + 11$; $\alpha \neq 0$	5,24
24	1; 4; 11	6,4
25	2,3; $\alpha 4 + \beta 5 + 11$; $\beta \neq 0$	6,21
26	2,3; $\alpha 4 + 11$	7,6
27	3; $\alpha 1 + \beta 2 + 6$; $4 + 10$	5,34
28	1; $2 + 4$; 10	5,22; $\alpha = 0$

продолжение таблицы 2

i	Базис	Nor
29	1; 4; 10	7,4
30	2,3; 4 + $\alpha 6 + 10$; $\alpha \neq 0$	6,23
31	2,3; 4 + 10	7,10; $\alpha = 0$
32	2,3; 6 + 10	6,22
33	2,3; 10	8,2; $\alpha = \beta = 0$
34	$-\delta 2 + \beta 3 + 4, \delta 1 + \sigma 2 - \alpha 3 + 5,$ $-\beta 1 + \alpha 2 + \tau 3 + 6$ $\sigma^2 + \tau^2 = 1, \beta^2 + \delta^2 + (\sigma - \tau)^2 \neq 0$ $\alpha^2 + \delta^2 + \tau^2 \neq 0, \alpha^2 + \beta^2 + \sigma^2 \neq 0$	6,24
35	$\alpha 1 + 4, 3 + 5, 2 - 6$	7,15
36	1 + 4, 5, 6	7,15
37	4, 5, 6	10,1
38	$\alpha 1 + 3; \beta 1 + 5, \sigma 1 + \tau 2 + 6$ $\beta^2 + \sigma^2 + \tau^2 = 1$	6,24
39	$\alpha 1 + 3; 5, 6$	7,13
40	1; 3 + 5, $\alpha 2 + 6$; $\alpha \neq -1$	6,24
41	1; 3 + 5, 2 - 6	7,15
42	1; 5, 6	8,4
43	$\alpha 1 + 3, 2; 4$	7,13
44	2,3; 4	8,4
45	1,2; 3 + 4	7,14
46	1,2; 4	8,5
47	1,2,3	11,1

 $r = 2$

1	10; 7 + $\alpha 11$; $\alpha \neq 0$	3,1
2	$\alpha 4 + 7; \beta 4 + 11$	3,3
3	4; 7 + $\alpha 11$; $\alpha \neq 0$	3,3
4	1; $\alpha 4 + 7 + \beta 11$; $\beta \neq 0$	4,6
5	7; 10	4,2; $\alpha = \beta = 0$

продолжение таблицы 2

i	Базис	Nor
6	$1 + 7; 10$	$3,2; \alpha = \beta = 0$
7	$\alpha 1 + 7; 4 + 10$	$3,9; \alpha = 0$
8	$4; 7$	$4,6$
9	$1; \alpha 4 + 7$	$5,2$
10	$4; 1 + 7$	$3,11$
11	$1; \alpha 4 + 7 + 10$	$4,4; \alpha = 0$
12	$10; 11$	$5,1$
13	$4; 11$	$5,5$
14	$4; \alpha 5 + 11; \alpha \neq 0$	$4,26$
15	$1; \alpha 4 + \beta 5 + 11; \beta \neq 0$	$5,24$
16	$1; \alpha 4 + 11$	$6,4$
17	$1; 10$	$7,4$
18	$3; 4 + \alpha 6 + 10$	$5,34$
19	$1; 4 + 10$	$6,3; \alpha = 0$
20	$\alpha 1 + \sigma 3 + 5, \beta 1 + \tau 2 + 6$ $\alpha^2 + \beta^2 + (\sigma + \tau)^2 = 1$	$6,24$
21	$3 + 5, 2 - 6$	$7,15$
22	$5, 6$	$8,4$
23	$\alpha 1 + 2; 3 + 4$	$6,24$
24	$\alpha 1 + 2; 4$	$7,13$
25	$1; 3 + 4$	$7,14$
26	$1; 4$	$9,1$
27	$2, 3$	$9,1$

 $r = 1$

1	$\alpha 4 + 7 + \beta 11; \beta \neq 0$	$3,3$
2	$\alpha 4 + 7; \alpha \neq 0$	$4,6$
3	7	$5,2$
4	$1 + 7$	$4,4; \alpha = 0$
5	$\alpha 4 + 7 + \alpha 10; \alpha \neq 0$	$3,9; \alpha = 0$

продолжение таблицы 2

i	Базис	Nor
6	$7 + 10$	$3,2; \alpha = \beta = 0$
7	$\alpha 4 + 11; \alpha \neq 0$	5,5
8	11	7,2
9	$4 + 10$	$5,12; \alpha = 0$
10	10	8,1
11	$3 + 4$	6,24
12	4	8,4
13	1	9,1

В третьем столбце (Nor) указан нормализатор каждой подалгебры (серии подалгебр). В силу нормализованности данной ΘL^{11} нормализатор содержится в этой же таблице и потому написан только его индекс (r, i) ; он может указывать на серию подалгебр, зависящую от «своих» параметров; отмечено, что для получения нормализатора их следует положить равными нулю. Знак « $\Rightarrow$ » означает, что данная подалгебра *самонормализована* (т. е. совпадает со своим нормализатором).

Справочно: ΘL^{11} , приведенная в [13], здесь исправлена. Вычислены также нормализованные оптимальные системы подалгебр ΘL^{13} (политропный газ), состоящие из 1342 представителей [12] и ΘL^{14} (политропный газ с $\gamma = 5/3$), содержащие 1826 представителей [15].

Литература

- [1] БИРКГОФ Г. Гидродинамика.— М.: ИЛ, 1954 (к §§ 8, 12–14).
- [2] ГУДЕРЛЕЙ К. Г. Теория околосзвуковых течений.— М.: ИЛ, 1960 (к § 26).
- [3] КОЧИН Н. Е., КИБЕЛЬ И. А., РОЗЕ Н. В. Теоретическая гидромеханика. Т. II.— М.: Гостехиздат, 1948 (к §§ 1, 3, 4, 6, 10, 11, 15–17, 22–25).
- [4] КУРАНТ Р., ФРИДРИХС К. Сверхзвуковое течение и ударные волны.— М.: ИЛ, 1950 (к §§ 2–7, 15–18, 24, 25).
- [5] ОВСЯННИКОВ Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978 (к §§ 8, 12, 13, 20, 26).
- [6] РОЖДЕСТВЕНСКИЙ Б. Л., ЯНЕНКО Н. Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике.— М.: Наука, 1978 (к §§ 2, 15–17, 22, 24).
- [7] СЕДОВ Л. И. Методы подобия и размерности в механике.— М.: Наука, 1981 (к §§ 15, 19–21).
- [8] СЕРРИН Дж. Математические основы классической механики жидкости.— М.: ИЛ, 1963 (к §§ 10, 11, 22, 23).
- [9] СМЕРНОВ В. И. Курс высшей математики. Т. IV.— М.: Гостехиздат, 1951, (к §§ 7, 12).
- [10] ЧАПЛЫГИН С. А. О газовых струях.— М.: Гостехиздат, 1949 (к §§ 22, 23).
- [11] ЧЕРНЫЙ Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью.— М.: Физматгиз, 1959 (к § 27).

Дополнительная (к 2-му изданию)

- [12] ГОЛОВИН С. В. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики в случае политропного газа // Новосибирск, 1996 (Препр. / СО РАН, Ин-т гидродинамики; № 5–96).

- [13] Овсянников Л.В. Программа «Подмодели». Газовая динамика // ПММ. 1994. Т. 58. Вып. 4. С. 30–55.
- [14] Сидоров А. Ф. Избранные труды. Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
- [15] Черевко А. А. Оптимальная система подалгебр для алгебры Ли операторов, допускаемых уравнениями газовой динамики с уравнением состояния $p = f(S)\rho^{5/3}$ // Новосибирск, 1996 (Препр. / СО РАН, Ин-т гидродинамики; № 4–96).
- [16] Чулахин А.П. О барохронных движениях газа // Докл. РАН. 1997. Т. 352, № 5. С. 624–626.

Интересующие Вас книги нашего издательства можно заказать почтой или электронной почтой:

subscribe@rcd.ru

Внимание: дешевле и быстрее всего книги можно приобрести через наш Интернет-магазин:

http://shop.rcd.ru

Книги также можно приобрести:

1. Москва, ФТИАН, Нахимовский проспект, д. 36/1, к. 307, тел.: 332-48-92 (почтовый адрес: Нахимовский проспект, д. 34).
2. Москва, ИМАШ, ул. Бардина, д. 4, корп. 3, к. 414, тел. 135-54-37.
3. МГУ им. Ломоносова (ГЗ, 1 этаж).
4. Магазины:

Москва: «Дом научно-технической книги»

(Ленинский пр., 40)

«Московский дом книги» (ул. Новый Арбат, 8)

«Библиоглобус» (м. Лубянка, ул. Мясницкая, 6)

С.-Пб.: «С.-Пб. дом книги» (Невский пр., 28)

Овсянников Лев Васильевич

ЛЕКЦИИ ПО ОСНОВАМ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Дизайнер М. В. Ботя

Технический редактор А. В. Ширококов

Компьютерная верстка Д. П. Вакуленко

Корректор М. А. Ложкина

Подписано в печать 31.12.02. Формат 60 × 84¹/₁₆.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 19,53. Уч. изд. л. 19,12.

Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1.

Тираж 1000 экз. Заказ № 1472.

АНО «Институт компьютерных исследований»

426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.

Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.

http://rcd.ru E-mail: borisov@rcd.ru

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных диапозитивов на ФГУИПП «Вятка».

610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
