ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ, УЧИТЫВАЮЩУЮ ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ИССЛЕДУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Петров Юрий Петрович, доктор технических наук, профессор Санкт-Петербургского государственного университета. Автор ряда монографий по теории управления, методам вычислений и истории науки.

Петров Игорь Анатольевич, специалист по разработке систем управления техническими средствами морских подвижных объектов.

Новые усовершенствованные методы расчета, изложенные в книге, относятся к разделам математики, которые учитывают неточности и погрешности в коэффициентах и параметрах исследуемых моделей технических объектов и объединены под названием «математика-2». Они позволяют рассчитывать и реализовывать более надежные технические объекты, чем это было достижимо ранее, сократить расход материалов и вес рассчитываемых конструкций, увеличить точность управления, тем самым уменьшить вероятность аварий и спасти жизни людей. Авторы призывают широко использовать эти методы в практике инженерных расчетов.

bhv®

БХВ-ПЕТЕРБУРГ
191036, Санкт-Петербург,
Гончарная ул., 20
Тел.: (812) 717-10-50,
339-54-17, 339-54-28
E-mail: mail@bhv.ru
Internet: www.bhv.ru

ISBN 978-5-9775-3473-4

Ю. П. Петров
И. А. Петров
Введение в теорию инженерных расчетов, учитывающую вариации параметров исследуемых объектов
bhv®

Ю. П. Петров, И. А. Петров

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ, УЧИТЫВАЮЩУЮ ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ИССЛЕДУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Введение в «математику-2»

bhv®

Ю. П. Петров
И. А. Петров

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ИНЖЕНЕРНЫХ РАСЧЕТОВ, УЧИТЫВАЮЩУЮ ВАРИАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ИССЛЕДУЕМЫХ ОБЪЕКТОВ

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2014

УДК 519.6
ББК 22.1
П30

Петров, Ю. П.

П30 Введение в теорию инженерных расчетов, учитывающую вариации параметров исследуемых объектов / Ю. П. Петров, И. А. Петров. — СПб.: БХВ-Петербург, 2014. — 272 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-3473-4

Изложены новые усовершенствованные методы расчета, относящиеся к разделам математики, которые учитывают неточности и погрешности в коэффициентах и параметрах исследуемых моделей технических объектов и объединены под названием "математика-2". Они позволяют рассчитывать и реализовывать более надежные технические объекты, чем это было достижимо ранее, сократить расход материалов и вес рассчитываемых конструкций, увеличить точность управления, тем самым уменьшить вероятность аварий и спасти жизни людей. Авторы призывают широко использовать эти методы в практике инженерных расчетов.

Для студентов, аспирантов, инженеров и научных работников

УДК 519.6
ББК 22.1

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зав. редакцией	*Екатерина Капалыгина*
Редактор	*Анна Кузьмина*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн обложки	*Марины Дамбиевой*

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Ю. Д. Максимов, д-р физ.-мат. наук, профессор Санкт-Петербургского государственного Политехнического университета

А. В. Ушаков, д-р техн. наук, профессор Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики

Подписано в печать 30.05.14.
Формат 70×100 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 21,93.
Тираж 1000 экз. Заказ № 277
"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

Первая Академическая типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12/28

ISBN 978-5-9775-3473-4

Оглавление

Предисловие

Эта книга является инновационным учебным пособием; в ней излагаются существенные для учебного процесса новые научные результаты (в основном полученные авторами), но излагаются они на уровне, доступном для студентов и всех тех, кто захочет использовать новые научные результаты для того, чтобы обеспечить надежность своих расчетов.

Под названием "математика-2" авторы предлагают объединить те разделы математики, в которых учитываются неточности и погрешности в коэффициентах и параметрах исследуемых математических моделей. "Математикой-1" авторы предлагают называть все те разделы математики, в которых коэффициенты и параметры математических моделей (или же законы их изменения) предполагаются известными и заданными.

Так, например, отыскание корней уравнения

$$x^2 + bx + c = 0 \tag{1}$$

при заданных значениях b и c — например, при $b = 2$; $c = 1$ — является задачей "математики-1". Если же о коэффициентах b и c известно лишь, что они заключены в пределах

$$\left.\begin{aligned} 1{,}98 \le b \le 2{,}02; \\ 0{,}99 \le c \le 1{,}01 \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

и нужно вычислить (или хотя бы дать оценку) всем возможным корням уравнения (1) при коэффициентах b и c, подчиненных условиям (2), то эта задача относится уже к типичным задачам "математики-2".

Точно так же вычисление решения уравнения Матьё

$$\frac{d^2u}{dz^2} + (a + b\cos z)u = 0 \tag{3}$$

(где функция $a + b\cos z$ с параметрами a и b описывает закон изменения коэффициента при переменной u) при заданных значениях параметров a и b относится к "математике-1". Если же относительно параметров a и b известно лишь то, что они удовлетворяют неравенствам, подобным неравенствам (2), то в этом случае задача оценки свойств возможных решений уравнения (3) (и, в частности, известная задача оценки их устойчивости) относится к "математике-2".

Очевидно, что "математика-2" лучше "математики-1" описывает реальный окружающий нас мир, поскольку коэффициенты и параметры математических моделей реальных объектов и явлений почти всегда известны лишь с конечной, ограниченной точностью, а кроме того, почти всегда не могут оставаться идеально постоянными и с течением времени испытывают малые отклонения, вариации. Поэтому чаще всего относительно коэффициентов и параметров математических моделей известны лишь интервалы, внутри которых они находятся, — интервалы, задаваемые, например, неравенствами, подобными неравенствам (2). Точное задание коэффициентов и параметров, используемое в "математике-1", — это почти всегда только идеализация.

Однако правильный учет неточных значений коэффициентов и параметров, учет возможных интервалов, внутри которых точные значения находятся, является (как увидим далее) во много раз более сложной задачей, чем просто отыскание решения при заданных коэффициентах. Методы решения этой задачи разработаны далеко не для всех математических моделей. Но это направление исследований интенсивно развивается, получены многие важные результаты, и авторы считают, что настало время выделить это направление исследований и назвать его "математикой-2". Хорошо известными разделами математики, которые можно отнести к "математике-2", могут служить методы приближенных вычислений (с этого раздела обычно начинаются курсы вычислительной математики — см., например, [1, 2]), интервальный анализ — [3, 4] и некоторые другие разделы. В этой книге будут приведены новые результаты в области "математики-2", полученные авторами.

Дополнительным доводом в пользу выделения "математики-2" в особый раздел (или подраздел) служит недавно обнаруженное [5] ее отличие от "математики-1" не только в предмете исследования, но и в методологии. В "математике-1" очень широко используются эквивалентные (их называют еще равносильными) преобразования, т. е. преобразования, упрощающие уравнения (или системы уравнений), но не изменяющие их решений. Неожиданно было обнаружено (см. публикацию [5]), что эти преобразования, не изменяющие самих решений как таковых, могут изменять многие важные *свойства* решений — такие, как непрерывная зависимость решений от параметров и ряд других свойств, а самое главное — могут коренным образом изменять степень зависимости решений от вариаций параметров. Это означает, что в "математике-2" эквивалентные (равносильные) преобразования можно применять лишь с большой осторожностью, что, конечно, затрудняет исследование.

Тем не менее "математику-2" очень желательно знать (и внедрять в учебный процесс), поскольку для достижения практических целей методы "математики-1" чаще всего недостаточны. Совершенно недостаточно ограничиться вычислением решений той или иной математической модели исследуемых объектов. Необходимо удостовериться в надежности этих решений, а для проверки надежности следует вычислить величину неизбежной и неустранимой погрешности решений, происходящей из-за почти всегда неизбежной ограниченной точности знания коэффициентов и параметров реальных объектов, из-за почти всегда неизбежного различия между истинными значениями коэффициентов и значениями, принятыми при расчете. В прежние времена этими различиями часто пренебрегали, вследствие чего происходило немало аварий и катастроф. Пренебрегали, конечно, не по злому умыслу, а потому, что еще не имели методов решения при параметрах, заданных лишь системой неравенств. В настоящее время, при широком применении вычислительных машин, настала пора перейти к более точным и надежным (пусть и более сложным) методам расчета, перейти к использованию методов "математики-2". Время для этого пришло.

Отметим, что погрешности расчета имеют разное происхождение. Есть погрешности, связанные с методами вычислений, — это погрешности, связанные с конечностью числа итераций в итерационных методах, с ошибками округления и т. п. Эти погрешности хорошо исследованы, и их можно уменьшить до приемлемого уровня за счет совершенствования методов расчета. В настоящей книге основное внимание уделено другим погрешностям, причиной которых являются неточное знание коэффициентов и параметров математической модели и непредсказуемые их вариации. Погрешности, зависящие от этих причин, никакими методами расчета нельзя ни уменьшить, ни устранить (поэтому их и называют неустранимыми погрешностями). Их можно только вычислить (или по крайней мере оценить), и эта оценка очень важна, поскольку без нее результаты расчета не будут надежными.

Книга состоит из двух частей. В *первой части* рассматриваются математические модели реальных объектов, имеющие форму систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), коэффициенты которых известны с ограниченной точностью и заданы системами неравенств.

Основной результат *первой части*: приведен и обоснован алгоритм точного вычисления неустранимой погрешности каждой из составляющих вектора решений СЛАУ, что коренным образом улучшает надежность расчета (до последнего времени использовались только приближенные оценки этой погрешности).

Одно из многочисленных приложений — увеличение надежности вычисления электростатического потенциала при испускании электронов с катодов различной формы и смежных задач электронной эмиссии, исследуемых под руководством профессора Егорова Н. В. на кафедре моделирования электромеханических и компьютерных систем (кафедра МЭКС) в Санкт-Петербургском государственном университете (СПбГУ).

Во *второй части* книги рассматриваются объекты, математическими моделями которых являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Основной результат этой части: показано, что широко используемые эквивалентные (равносильные) преобразования систем уравнений, не изменяя самих решений как таковых, могут в ряде случаев изменять многие важные свойства решений — такие как устойчивость, корректность, непрерывная зависимость решений от параметров и т. п.

До последних лет эти опасные свойства эквивалентных преобразований не замечались, и это служило причиной многих аварий и катастроф. Использование приведенных в книге методов позволяет повысить надежность расчетов и тем самым уменьшить вероятность аварий.

ЧАСТЬ I

Исследование неустранимых погрешностей решений систем линейных алгебраических уравнений

§ 1. Правила приближенных вычислений. Интервальный анализ

Как уже указывалось в *предисловии*, в прикладную "математику-2" входят как разделы хорошо известные и исследованные — такие, как, например, правила приближенных вычислений, интервальный анализ — так и разделы гораздо менее исследованные. В этом параграфе мы совсем коротко коснемся правил приближенных вычислений и интервального анализа, а затем перейдем к подробному разбору ранее почти неисследованной темы — изучению неустранимых погрешностей решений систем алгебраических уравнений, происходящих от неточности знания их коэффициентов, от вариаций коэффициентов.

Правила приближенных вычислений можно рассматривать как наиболее старый и хорошо известный раздел "математики-2". Они подробно излагаются в самых первых главах учебников по вычислительной математике. Там вводятся понятия об оценке абсолютной предельной погрешности приближенного числа a и оценке его относительной погрешности. Поскольку разность между приближенным числом a и его точным значением a_0 обычно неизвестна, то под оценкой абсолютной погрешности понимают установление наименьшего числа Δ_a, при котором выполняется неравенство

$$|a - a_0| \le \Delta_a. \qquad (4)$$

Можно также считать, что истинное число a_0 удовлетворяет неравенству:

$$a - \varepsilon_{\text{абс}} \le a_0 \le a + \varepsilon_{\text{абс}},$$

где a — число, используемое в дальнейших расчетах. Неизвестное нам точное значение этого числа лежит внутри интервала $[2\varepsilon_{\text{абс}}]$. Чаще используют оценку относительной погрешности, записывая ее в виде

$$a(1-\varepsilon) \le a_0 \le a(1+\varepsilon), \qquad (5)$$

где ε — число, малое в сравнении с единицей. В этом случае истинное, точное значение a_0 лежит в интервале $[2\varepsilon a]$.

В приближенных вычислениях учитывается (см., например, [1]), что относительная погрешность произведения близка к сумме относительных погрешностей сомножителей — если, разумеется, погрешности сомножителей независимы между собой. Если погрешности взаимно зависимы, то относительная погрешность произведения может быть много меньше суммы погрешностей сомножителей.

То же справедливо и относительно частного: при независимости погрешностей делимого и делителя относительная погрешность частного близка к сумме их относительных погрешностей. При наличии зависимости между погрешностями делимого и делителя относительная погрешность может быть много меньше их суммы.

Относительная погрешность разности двух чисел может быть во много раз больше суммы их относительных погрешностей, особенно если вычитаются числа, близкие по величине. Именно вычитание близких чисел часто служит основной причиной погрешности вычислений, и поэтому вычитаний близких чисел нужно избегать.

Если правила приближенных вычислений известны очень давно, то интервальный анализ начал разрабатываться в 60-х годах XX века. Первыми публикациями считаются работы американского математика Мура (Moore R. E.), в дальнейшем в разработке интервального анализа участвовали математики разных стран, в том числе Советского Союза и России. В библиографии книги [4] приведено 740 публикаций, посвященных интервальному анализу только за 1965–1982 гг.

Предметом исследования в интервальном анализе служат интервалы, которые называются интервальными числами. *Интервалом* (интервальным числом) A называют множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$\underline{a} \le x \le \overline{a}, \tag{6}$$

где $\underline{a}$ — левый конец интервала A; $\overline{a}$ — его правый конец. Интервал A записывают как $[\underline{a};\, \overline{a}]$.

Аналогично интервалом (интервальным числом) B называют множество чисел, удовлетворяющих неравенству

$$\underline{b} \le x \le \overline{b} \tag{7}$$

и записывают как $B = [\underline{b};\, \overline{b}]$.

Интервал с совпадающими концами, когда $\underline{a} = \overline{a} = a$, называют *вырожденным интервалом* и его отождествляют с обычным вещественным числом a.

Вводится также понятие *нульсодержащего интервала*, если $\underline{a} < 0 < \overline{a}$.

С использованием этих понятий строится интервальная арифметика, т. е. определяются операции сложения, вычитания, умножения и деления. Они определяются равенствами:

$$A + B = [\underline{a};\, \overline{a}] + [\underline{b};\, \overline{b}] = [\underline{a} + \underline{b};\, \overline{a} + \overline{b}]; \tag{8}$$

$$A - B = [\underline{a};\, \overline{a}] - [\underline{b};\, \overline{b}] = [\underline{a} - \overline{b};\, \overline{a} - \underline{b}]; \tag{9}$$

$$\begin{gathered} A \cdot B = [\underline{a};\, \overline{a}] \cdot [\underline{b};\, \overline{b}] = \\ = \left[\min\left(\underline{a}\cdot\underline{b};\, \overline{a}\cdot\underline{b};\, \underline{a}\cdot\overline{b};\, \overline{a}\cdot\overline{b}\right);\ \max\left(\underline{a}\cdot\underline{b};\, \overline{a}\cdot\underline{b};\, \underline{a}\cdot\overline{b};\, \overline{a}\cdot\overline{b}\right)\right]; \end{gathered} \tag{10}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{[\underline{a};\, \overline{a}]}{[\underline{b};\, \overline{b}]} = [\underline{a};\, \overline{a}] \cdot \left[\frac{1}{\overline{b}};\, \frac{1}{\underline{b}}\right]. \tag{11}$$

Операция деления невыполнима, если интервал B является нульсодержащим интервалом.

Если A и B — вырожденные интервалы, то равенства (8)–(11) совпадают с обычными арифметическими операциями над вещественными числами. Таким образом, интервальное число является обобщением вещественного числа, а интервальная арифметика — это обобщение обычной арифметики вещественных чисел.

Отметим сразу, что уже интервальная арифметика (не говоря уже об интервальном анализе) значительно сложнее обычной арифметики, не говоря уже о том, что в интервальной арифметике не выполняется важный закон дистрибутивности, т. е. в ней равенство

$$A(B+C)=AB+AC \tag{12}$$

не всегда справедливо, и это существенно затрудняет расчеты.

Все это приводит к тому, что интервальный анализ оказывается весьма сложным разделом математики и преподается даже не на всех математических факультетах университетов. Так, в Санкт-Петербургском государственном университете он преподавался на факультете прикладной математики — процессов управления (факультет ПМ-ПУ), но еще с 2004 г. перестал быть обязательным предметом — этот курс на факультете ПМ-ПУ перевели в факультативный, не обязательный.

Причина трудностей, возникающих при изучении интервального анализа, — слишком "широкий замах", слишком обширная и трудная поставлена задача. В интервальном анализе не предполагается малость интервала $[\underline{a}; \overline{a}]$ по сравнению с числом a. В то же время в подавляющем большинстве технических задач интервал, внутри которого заключены неизвестные нам истинные значения коэффициентов и параметров математической модели, почти всегда мал по сравнению с самими значениями. Малостью интервала можно воспользоваться для существенного упрощения решения.

Именно малость интервалов неопределенности в задании коэффициентов и параметров математической модели будет использоваться в дальнейшем изложении. Мы будем рассматривать системы уравнений, о коэффициентах которых известно только то, что они заключены в некоторых интервалах, но (в отличие от постановок задач интервального анализа) будем предполагать, что они заключены в интервалах, малых по сравнению с самими коэффициентами, и будем исследовать интервалы, в которых заключены решения исследуемых систем.

§ 2. Системы линейных алгебраических уравнений

Системами линейных алгебраических уравнений (коротко — СЛАУ) называют системы вида

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

которые записывают обычно в векторно-матричном виде

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \qquad (14)$$

где $\mathbf{A}$ — квадратная матрица коэффициентов a_{ij} размера $n \times n$; $\mathbf{b}$ — вектор-столбец правых частей; $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор-столбец решений $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Числа x_i будем называть составляющими вектора решений $\mathbf{x}$, иногда (для краткости) будем называть их решениями, хотя решением системы (14) является, разумеется, совокупность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращающая уравнение (14) в тождество.

С необходимостью вычислять решения СЛАУ приходится встречаться в самых различных областях физики и техники. Так, например, расчет разнообразных строительных конструкций непосредственно приводит к системам уравнений вида (14).

Расчет электрических цепей методом Кирхгофа также приводит к системам вида

$$\left.\begin{aligned} r_{11}i_1 + r_{12}i_2 + \ldots + r_{1n}i_n &= E_1; \\ r_{21}i_1 + r_{22}i_2 + \ldots + r_{2n}i_n &= E_2; \\ & \\ r_{n1}i_1 + r_{n2}i_2 + \ldots + r_{nn}i_n &= E_n, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

где r_{ij} — сопротивления; i_i — контурные токи; E_i — контурные электродвижущие силы.

Помимо объектов, математическими моделями которых с самого начала являются СЛАУ, они возникают при численном расчете объектов, математическими моделями которых являются уравнения в частных производных, или интегральные уравнения.

Так, например, расчет эмиссии электронов с катода приводит к уравнениям в частных производных, наиболее распространенным методом решения которых является метод сеток или метод конечных разностей, основанный на приведении исходного уравнения к системе линейных алгебраических уравнений.

Точно так же наиболее распространенным методом решения разнообразных интегральных уравнений (т. е. уравнений, в которых подлежащая определению функция находится под знаком интеграла) является приближенная замена интеграла интегральной суммой, что снова приводит к системе линейных алгебраических уравнений.

Так, например, в интегральном уравнении Фредгольма

$$\int_a^b K(x;\, s)\, y(s)\, ds = f(x)$$

искомой функцией будет $y(x)$. Функция $f(x)$ — известная функция (правая часть уравнения), функция $K(x;\, s)$ двух переменных x и s называется ядром.

Основной метод решения интегральных уравнений основан на замене интеграла конечной суммой. Для этого вводят равномерные сетки узлов с шагом Δs по переменной s и с шагом Δx по переменной x. Заменяя непрерывную функцию $K(x;\, s)$ ее значениями в узлах, приводим интегральное уравнение к системе алгебраических уравнений

$$A_{ij} y_i = f_i,$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Решив эту систему, получим таблицу значений y_i искомой функции $y(x)$.

Существует и немало других проблем и задач (некоторые из них рассмотрены в [6]), этапом в разрешении которых является вычисление решений той или иной СЛАУ. Автор известной публикации [7] вообще считает, что "в настоящее время более 70% всех математических расчетов приходится на вычисление решений систем алгебраических уравнений (СЛАУ)".

Отметим, что сами решения СЛАУ вычисляются сравнительно несложно. Наиболее часто используется алгоритм последовательного исключения переменных, разработанный еще Гауссом. Для вычисления всех составляющих решения от x_1 до x_n этот алгоритм требует примерно n^3 (точнее — $\frac{n^3}{3}$) операций умножения (где n — порядок системы). Широко используются также итерационные методы.

Главная трудность заключается не в самом вычислении решения, а в оценке той неустранимой погрешности, проистекающей из-за того, что все коэффициенты СЛАУ, как уже указывалось, известны почти всегда лишь с конечной, ограниченной точностью.

Хорошо известны примеры таких СЛАУ, в которых даже совсем малые (а значит — неизбежные) погрешности в коэффициентах приводят к большим погрешностям в решении.

Рассмотрим совсем простой пример.

Пример 1

Система

$$\left.\begin{aligned} 10{,}02x_1 + x_2 &= 11{,}02;\\ 10x_1 + x_2 &= 11 \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

имеет решения $x_1 = x_2 = 1$.

Если коэффициент при x_1 в первом уравнении изменится на 0,01, т. е. менее чем на одну тысячную от первоначального значения, то система (16) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} 10{,}01x_1 + x_2 &= 11{,}02;\\ 10x_1 + x_2 &= 11 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

и получит решения $x_1 = 2$; $x_2 = -9$, т. е. x_1 изменится вдвое, а x_2 в девять раз.

Уже само существование подобных систем говорит о том, что совершенно недостаточно вычислить решение СЛАУ. Нужно непременно проверить и убедиться в том, что это решение не изменится существенно или даже коренным образом при неизбежных малых погрешностях в коэффициентах системы. Без такой проверки решение СЛАУ нельзя признать надежным и достоверным. Некритическое отношение к решениям, отсутствие тщательной проверки величины неустранимой погрешности может приводить — и уже не раз приводило — к авариям и даже катастрофам. Примеры катастроф приводились в [6, 11].

В зависимости от чувствительности решений к вариациям коэффициентов системы уравнений традиционно делят на системы "хорошо обусловленные", в которых малые изменения коэффициентов приводят к малым изменениям решений, и системы "плохо обусловленные", в которых при тех же малых изменениях коэффициентов изменения решений могут быть большими.

Для того чтобы такое разделение систем можно было реально выполнить, нужно дополнительно определить, какие изменения коэффициентов и решений можно считать "малыми".

Предложим следующее определение: "малыми" изменениями (или вариациями) коэффициентов назовем те, которые не превосходят реальной неизбежной неопределенности в значениях коэффициентов реального объекта, возникающей от конечной точности измерений, от малых вариаций коэффициентов в ходе эксплуатации и от других подобных причин. "Малыми" изменениями решений назовем изменения, не приводящие к нарушению нормальной работы исследуемой конструкции. Если при таким образом определенных "малых" изменениях коэффициентов изменения решений будут "малыми" (в смысле приведенного выше определения), такие решения (числа x_i) будем называть надежными. Если при тех же "малых" изменениях коэффициентов изменения решений не будут "малыми" (в смысле приведенного выше определения), то такие решения будем считать ненадежными. Введенные определения уточняют широко распространенные, но довольно расплывчатые определения "хорошо обусловленных" и "плохо обусловленных" систем уравнений и их решений.

Мы убедимся далее, что существуют такие СЛАУ, у которых при "малых" изменениях коэффициентов решения могут стать как положительными, так и отрицательными и при этом сколь угодно большими по абсолютным значениям. Такие системы будем называть "очень плохо обусловленными". Решения подобных СЛАУ совершенно ненадежны, и поэтому объекты, математическими моделями которых являются такие СЛАУ, надо уметь выявлять и избегать.

Отметим, что до последнего времени (до 2009 года) не существовало надежных методов выявления подобных опасных систем и опасных технических объектов. Эти методы будут изложены в последующих параграфах книги (ранее их основы были опубликованы в монографии [6]).

§ 3. Оценки погрешностей решений по "числу обусловленности"

В теории систем линейных алгебраических уравнений известны и широко используются приближенные оценки погрешностей решений по величине определителя матрицы А и по ее "числу обусловленности". Мы коротко рассмотрим достоинства и недостатки этих оценок, а затем, в следующих параграфах, перейдем к более детальному изложению методики точного вычисления возможной погрешности — методики, предложенной Ю. Петровым и ранее коротко изложенной в [6].

Ввиду неизбежной неточности в задании коэффициентов системы (13) относительно ее коэффициентов можно лишь утверждать, что они находятся внутри некоторых интервалов

$$a_{ij}\left(1-\left|\varepsilon_{ij}\right|\right) \le \bar{a}_{ij} \le a_{ij}\left(1+\left|\varepsilon_{ij}\right|\right); \tag{18}$$

$$b_i\left(1-\left|\delta_i\right|\right) \le \bar{b}_i \le b_i\left(1+\left|\delta_i\right|\right), \tag{19}$$

где $\bar{a}_{ij}$ и $\bar{b}_i$ — это истинные, не известные нам, коэффициенты системы (13), а a_{ij} и b_i — значения, принятые при расчете (их называют обычно номинальными значениями), $\left|\varepsilon_{ij}\right|$ и $\left|\delta_i\right|$ — числа, малые в сравнении с единицей; они характеризуют относительную погрешность номинальных значений.

Если известна оценка не относительной, а абсолютной погрешности, то в этом случае истинные значения коэффициентов находятся внутри интервалов, определенных неравенствами:

$$a_{ij}-\left|\varepsilon_{ij}\right| \le \bar{a}_{ij} \le a_{ij}+\left|\varepsilon_{ij}\right|; \tag{20}$$

$$b_i-\left|\delta_i\right| \le \bar{b}_i \le b_i+\left|\delta_i\right|, \tag{21}$$

где на этот раз $\left|\varepsilon_{ij}\right|$ и $\left|\delta_i\right|$ — размерные величины, размерность которых совпадает с размерностью самих коэффициентов. Чаще приходится иметь дело с неравенствами (18)–(19), т. е. относительными погрешностями.

Оценка погрешностей решений СЛАУ состоит, естественно, из двух этапов: первый этап — это оценка наибольших возможных погрешностей коэффициентов, т. е. оценка величин ε_{ij} и δ_i в неравенствах (18)–(21). На втором этапе на основе оценок ε_{ij} и δ_i вычисляются погрешности решений.

Первый этап — это важная и сложная инженерная задача, которую должен решать руководитель проекта. Величины ε_{ij} и δ_i оцениваются для каждого конкретного объекта на основе глубокого знания его свойств и особенностей. Поэтому первый этап этой общей задачи оценки погрешностей в данной книге не будет рассматриваться. Будем предполагать, что величины ε_{ij} и δ_i известны и заданы.

Второй этап — по известным ε_{ij} и δ_i оценить погрешность решений. Это типичная задача прикладной математики. Разработанная Ю. Петровым методика ее решения (которая будет далее изложена) может быть применена к расчету любых объектов, математической моделью которых являются СЛАУ. Сложность второго этапа заключается в том, что погрешность решения зависит не только от абсолютных величин ε_{ij} и δ_i, но и от их знаков, а число возможных сочетаний знаков вариаций коэффициентов очень велико. В матрице **A** размером $n \times n$ число возможных сочетаний равно 2^{n^2}. Уже при $n = 10$ оно равно $2^{100} > 10^{30}$, поэтому прямое вычисление погрешностей при всех возможных сочетаниях знаков неосуществимо даже для самых быстродействующих вычислительных машин. Необходимо использовать косвенные методы.

Наиболее простым методом предварительной оценки возможной погрешности решений системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ является вычисление определителя матрицы **A**,

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{22}$$

Если $\det \mathbf{A}$ много меньше коэффициентов a_{ij}, то это говорит о том, что даже при малых вариациях коэффициентов погрешность решения может быть большой. Возвращаясь к ранее рассмотренной системе (16), отмечаем, что для нее

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 10{,}02 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}02 \tag{23}$$

в 50 раз меньше наименьшего из коэффициентов матрицы **A**. Поэтому неудивительно, что изменение коэффициента 10,02 всего на одну тысячную приводит к коренному изменению решений системы (16).

Вычисление определителей — операция несложная. Для вычисления определителей порядка выше третьего используют обычно приведение определителя к "треугольной" форме — поскольку такой определитель равен произведению своих элементов, стоящих на главной диагонали. Для приведения к "треугольной" форме последовательными умножениями и сложениями обращают в нуль все элементы, стоящие ниже главной диагонали. Такое приведение требует примерно n^3 умножений, т. е. по трудоемкости вычисление определителя порядка n и вычисление решения СЛАУ порядка n вполне сравнимы.

Однако малость определителя позволяет говорить лишь о возможности больших погрешностей в решениях, а для оценки их величины применяют методику, основанную на использовании "чисел обусловленности". Предварительно вводится понятие матрицы, обратной к матрице **A** (обозначается $\mathbf{A}^{-1}$). Вводится определение: произведение матрицы **A** на обратную к ней матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ равно единичной матрице **E**, т. е.

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}, \tag{24}$$

где **E** — матрица, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы — нули, т. е.

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 \\ \ldots & & & & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Из равенства (24) в линейной алгебре выводится формула для элементов обратной матрицы:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & & A_{n2} \\ & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{26}$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы **A**.

Обратная матрица может быть использована для вычисления решения **x** системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ по формуле

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \tag{27}$$

т. е. для вычисления **x** достаточно умножить матрицу $\mathbf{A}^{-1}$ на вектор правой части **b**. Но формулой (27) пользуются редко (чаще применяют метод Гаусса или итерационные методы), поскольку вычисление обратной матрицы трудоемко. Действительно, при использовании, например, формулы (26) для вычисления $\mathbf{A}^{-1}$ необходимо вычислить n^2 алгебраических дополнений, т. е. определителей порядка $n-1$. Вычисление каждого определителя требует, примерно, $(n-1)^3$ умножений, для вычисления всех определителей требуется $n^2(n-1)^3$ умножений, а это больше, чем требуется при использовании метода Гаусса.

Для матрицы второго порядка, размера 2×2:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{28}$$

обратной будет матрица

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \tag{29}$$

т. е. элементы a_{11} и a_{22}, стоящие на главной диагонали, переставляются, а элементы a_{12} и a_{21} сохраняют свои места, но изменяют знаки, а потом все делится на $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Важным понятием линейной алгебры является понятие нормы матрицы и вектора. *Норма матрицы (вектора)* — это число, вычисляемое по определенному правилу через элементы матрицы или вектора. Наиболее часто используется евклидова (или сферическая) норма, вычисляемая по правилу

$$\|\mathbf{b}\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \tag{30}$$

для вектора и по правилу

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\sum_{i=1;\,j=1}^{n} a_{ij}^2} \tag{31}$$

для матрицы.

Используются и другие нормы. Так, например, кубическая норма вектора (следуем терминологии учебника [8]) определяется формулой

$$\|\mathbf{b}\|_{\text{куб}} = \max_i |b_i|, \tag{32}$$

а его октаэдрическая норма — формулой

$$\|\mathbf{b}\|_{\text{окт}} = \sum_{i=1}^{n} |b_i|. \tag{33}$$

ПРИМЕЧАНИЕ

Следует особо отметить, что обозначения матриц и их норм еще не окончательно установлены, и в разных книгах и статьях можно встретить различные обозначения. Напомним, что матрицы мы будем обозначать вертикальными чертами с закруглениями сверху и снизу (формулы (25)–(29)), определитель матрицы **A** обозначается как $\det \mathbf{A}$, или вертикальными чертами слева и справа (формула (22)), нормы матрицы и вектора обозначаются двойными вертикальными чертами справа и слева (формулы (30) и (31)). В названиях евклидовой, кубической и октаэдрической норм мы следуем известному учебнику [8].

Свойства евклидовой нормы:

$$\|\mathbf{AX}\| \le \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{X}\|, \tag{34}$$

т. е. норма произведения не больше произведения норм.

Аналогично,

$$\|\mathbf{A}+\mathbf{X}\| \le \|\mathbf{A}\| + \|\mathbf{X}\|, \tag{35}$$

т. е. норма суммы не больше суммы норм слагаемых.

Из свойства (34) следует:

$$\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \ge \|\mathbf{E}\| = 1, \tag{36}$$

т. е. произведение норм прямой и обратной матриц всегда больше либо равно единице.

Используя свойства матриц, вычисляют оценку нормы погрешности решения. Учитывают, что если, например, в уравнении $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ коэффициенты правой части изменились и вместо вектора $\mathbf{b}$ появился вектор $\mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}$, то изменилось и решение, и вместо равенства

$$\mathbf{Ax}=\mathbf{b} \tag{37}$$

появится равенство

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) = \mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}, \tag{38}$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{Ax}+\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{b}+\Delta\mathbf{b}. \tag{39}$$

Вычитая из (39) почленно равенство (37), получим

$$\mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{b}, \tag{40}$$

откуда следует:

$$\Delta\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\Delta\mathbf{b}. \tag{41}$$

Переходя к нормам, имеем

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \|\Delta\mathbf{b}\|, \tag{42}$$

откуда следует, что

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}. \tag{43}$$

Произведение $\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$ называется *"числом обусловленности"*, и формула (43) показывает, что относительное изменение нормы решения не превышает относительного изменения правой части, умноженной на "число обусловленности".

Если вариации коэффициентов правой части удовлетворяют неравенствам (19), то формула (43) принимает вид

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \delta. \tag{44}$$

Пример 2

Рассмотрим простую систему

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 2; \\ x_1 + x_2 &= 1, \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

решением которой будут $x_1 = 1$; $x_2 = 0$. Для этой системы

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{2^2 + 1 + 1 + 1} = \sqrt{7},$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

и, следовательно, $\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| = \sqrt{1+1+1+2^2} = \sqrt{7}$ и "число обусловленности"

$$\|\mathbf{A}\| \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| = 7.$$

На основании формулы (44) можно утверждать, что поскольку $\|\mathbf{x}\| = 1$, то

$$\|\Delta\mathbf{x}\| \le 7 \cdot \delta,$$

и если, например, $\delta = 0,1$, то

$$\|\Delta\mathbf{x}\| = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2} \le 0,7. \tag{46}$$

Если правая часть первого из уравнений (45) изменилась на 10% и стала равной 2,2, а правая часть второго из уравнений (45) стала равной 1,1, то решениями системы (45) будут $x_1 = 1,1$; $x_2 = 0$. Это означает, что $\Delta x_1 = 0,1$; $x_2 = 0$; $\|\Delta\mathbf{x}\| = 0,1$ и неравенство (46) выполнено.

При $\delta = 0,1$ к наибольшим изменениям решения приведут — как было показано в [6] — значения правых частей уравнений (45), равные 2,2 и 0,9. Система (45) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 2,2; \\ x_1 + x_2 &= 0,9 \end{aligned}\right\}$$

и получит решения $x_1 = 1,3$; $x_2 = -0,4$. В этом случае значение $\|\Delta\mathbf{x}\|$ делается максимально возможным и равным $\sqrt{0,3^2 + 0,4^2} = 0,5$ и неравенство (46) выполнено.

Этот простой пример сразу показывает, что оценка по "числу обусловленности" чаще всего не является точной даже для максимально возможных погрешностей решений. Хотя в формуле (43) стоит знак $\le$, указывающий, что возможно равенство левой и правой частей формулы (43) (что соответствует точной оценке), но в действительности знак равенства может появиться лишь для некоторых матриц **A** и векторов **b**. Для большинства СЛАУ "число обусловленности" дает лишь приближенную, чаще всего — грубо приближенную оценку для нормы погрешностей решений.

Если необходимо учитывать как вариации коэффициентов правой части системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, так и вариации коэффициентов матрицы $\mathbf{A}$, то вместо формулы (43) используют ее обобщение — формулу

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot \left(\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|} + \frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|} \right). \tag{47}$$

Если коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{b}$ удовлетворяют неравенствам (18) и (19), то формула (47) принимает вид

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le \|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| \cdot (\delta + \varepsilon). \tag{48}$$

Подробный вывод формул (43), (44), (47), (48) приведен, например, в [9, 10] и многих других учебниках и руководствах.

Примечание

В публикациях [13; 14] приводятся оценки по "числу обусловленности", уточняющие простую формулу (48). Однако сути дела эти уточнения не меняют: оценки по "числам обусловленности" остаются оценками приближенными и обладают рядом недостатков, о которых будет рассказано в последующих параграфах.

§ 4. Недостатки оценок по "числу обусловленности"

Основной недостаток оценок решений СЛАУ по "числу обусловленности" заключается в том, что оценивается только норма $\|\mathbf{x}\|$ всех составляющих решений $\mathbf{x}$ — от x_1 до x_n. Это нечто вроде "средней температуры по больнице". На практике гораздо чаще необходимо оценивать погрешность конкретной составляющей x_i, поскольку часто большая погрешность в какой-либо конкретной составляющей x_i приводит к аварии, хотя погрешности других составляющих решения $\mathbf{x}$, а с ними и норма $\|\Delta\mathbf{x}\|$ могут при этом оставаться в допустимых пределах.

Пример 3

Рассмотрим простую систему

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &= 23; \\ x_1 + x_2 &= 11 \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

с решением $x_1 = 1$; $x_2 = 10$. Для нее матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

обратная матрица

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

поэтому $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1 + 1} = \sqrt{15}$, $\|\mathbf{A}^{-1}\| = \sqrt{1 + 2^2 + 1 + 3^2} = \sqrt{15}$ и "число обусловленности" $\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| = 15$.

Пусть теперь коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$ системы (49) испытали вариации и система (49) приняла вид:

$$\left.\begin{aligned} 3(1-\varepsilon)x_1 + 2(1+\varepsilon)x_2 &= 23; \\ (1+\varepsilon)x_1 + (1-\varepsilon)x_2 &= 11. \end{aligned}\right\}$$

Пользуясь известными формулами Крамера, согласно которым для системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ будет

$$x_i = \frac{D_i}{D}, \tag{50}$$

где D — определитель матрицы **A** (т. е. $D = \det \mathbf{A}$), а D_i — определитель той же матрицы, но у которого i-й столбец заменен на вектор-столбец **b** правой части, нетрудно вычислить, что

$$D = \begin{vmatrix} 3(1-\varepsilon) & 2(1+\varepsilon) \\ (1+\varepsilon) & (1-\varepsilon) \end{vmatrix} = 1 - 10\varepsilon + \varepsilon^2;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 23 & 2(1+\varepsilon) \\ 11 & (1-\varepsilon) \end{vmatrix} = 1 - 45\varepsilon;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3(1-\varepsilon) & 23 \\ (1+\varepsilon) & 11 \end{vmatrix} = 10 - 56\varepsilon;$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1-45\varepsilon}{1-10\varepsilon+\varepsilon^2};$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{10-56\varepsilon}{1-10\varepsilon+\varepsilon^2}.$$

Формулы для x_1 и x_2 сразу показывают, что даже в простейшей системе из двух уравнений зависимости x_1; x_2, а значит и $\|\Delta\mathbf{x}\|$, от ε существенно нелинейны.

Составим таблицу зависимости x_1 и x_2 от ε (табл. 1).

Таблица 1

1	ε	0,001	0,01	0,02	0,05	0,1	0,10102	0,15	0,2
2	D	0,99	09001	0,3004	0,5025	0,01	0	–0,4775	–0,96
3	x_1	0,965	0,6111	0,125	–2,49	–350	$\mp\infty$	12,04	8,333
4	x_2	10,05	10,499	11,1	14,32	440	$\pm\infty$	–3,35	1,25
5	Δx_1	0,035	0,389	0,875	–3,49	–349	$\mp\infty$	11,04	7,333
6	Δx_2	0,044	0,499	1,1	4,32	430	$\pm\infty$	13,35	8,75
7	$\|\Delta\mathbf{x}\|$	0,0565	0,635	1,405	5,55	555	∞	18,12	1,19
8	$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$	0,00562	0,0625	0,1398	0,552	55,1	∞	1,7237	1,136
9	$\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\|\cdot\varepsilon$	0,015	0,15	0,3	0,75	1,5	1,1515	2,25	3

Рассмотренный простой пример сразу выявляет основной недостаток оценки погрешности решений по "числу обусловленности". Посмотрим на третий столбец табл. 1. При $\varepsilon = 0{,}01$ оценка по "числу обусловленности" утверждает, что относительная норма погрешности решений x_1 и x_2 не превышает $15 \cdot 0{,}01 = 15\%$ от нормы x_1 и x_2. На самом деле эта оценка очень груба и действительная норма погрешности существенно меньше и равна всего 6,3% от нормы x_1 и x_2. Может показаться, что все хорошо. На самом же деле относительная погрешность x_1 составляет 38,9%, а относительная погрешность x_2 равна 4,99%.

Уже этот простой пример говорит о том, что оценка по "числу обусловленности" не совершенна и ее использование может стать причиной аварий и катастроф.

Отметим, что не оправдываются и ожидания тех, кто считает, что оценка по "числу обусловленности" дает хотя и грубую (завышенную), но гарантирующую оценку относительной нормы погрешности вектора решений $\mathbf{x}$. Сравнение восьмой и девятой строк табл. 1 показывает, что при $\varepsilon \le 0{,}05$ оценка по "числу обусловленности" действительно дает для относительной погрешности оценку сверху, но при приближении величины ε к значению, при котором $D = 0$, величина погрешностей x_1 и x_2 возрастает стремительно, и уже при $\varepsilon = 0{,}1$ оценка по "числу обусловленности" ничего не гарантирует.

В публикации [6] были отмечены дополнительные, ранее не замечаемые, недостатки оценок по "числу обусловленности". Перечислим их.

Зависимость "числа обусловленности" от эквивалентных преобразований уравнений

Рассмотрим совсем простую систему

$$2x_1 + x_2 = 1; \tag{51}$$

$$x_1 + x_2 = 1 \tag{52}$$

с решением $x_1 = 0$; $x_2 = 1$ и умножим все члены второго уравнения на число K. После умножения оно примет вид:

$$Kx_1 + Kx_2 = K, \tag{53}$$

и мы будем иметь дело с системой уравнений (51)–(53). Эта система имеет то же решение $x_1 = 0$; $x_2 = 1$, что и система (51)–(52). Так и должно быть, поскольку умножение всех членов на постоянное число K, не равное нулю, является эквивалентным преобразованием, не изменяющим решений. Отметим, что в данном случае это эквивалентное преобразование не изменяет и степень обусловленности решений. Действительно, уравнение (53) при любых K остается уравнением все той же прямой на плоскости с осями $0x_1$, $0x_2$. Угол между прямыми (51) и (53) для любых $K \ne 0$ остается одним и тем же, а это означает, что степень обусловленности решений от умножения на $K \ne 0$ не изменяется.

Теперь вычислим для системы (51)–(53) "число обусловленности". Для этого примера матрица **A** равна:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ K & K \end{pmatrix}, \tag{54}$$

определитель матрицы

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ K & K \end{vmatrix} = 2K - K = K, \tag{55}$$

обратная матрица

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{K}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \tag{56}$$

евклидова норма матрицы **A**

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{5 + 2K^2},$$

та же норма для обратной матрицы

$$\left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| = \frac{1}{K}\sqrt{5 + 2K^2},$$

и "число обусловленности"

$$\|\mathbf{A}\| \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\| = \frac{5}{K} + 2K$$

оказывается зависящим от K.

Имеем следующую зависимость "числа обусловленности" от K (табл. 2).

Таблица 2. Зависимость "числа обусловленности" системы (51)–(53) от K

K	0,1	1	1,5	2	10	100
$\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$	50,2	7	6,33	8,5	20,5	200,05

Это означает, что, имея дело с уравнением (53) для различных коэффициентов K, мы должны делать совершенно разные заключения об обусловленности решений системы (51)–(53). При $K = 1{,}5$ решения будут казаться хорошо обусловленными, при $K = 100$ они будут казаться плохо обусловленными. На самом же деле обусловленность решений системы (51)–(53) от K не зависит. Точно так же не будет зависеть обусловленность решений любой системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ от умножения всех членов любого из уравнений системы на любое число $K \neq 0$.

Методика оценки погрешности решений по "числу обусловлённости" может вести нас по неверному пути и приводить к неправильным заключениям.

Зависимость произведения $\|\mathbf{A}\| \cdot \left\|\mathbf{A}^{-1}\right\|$ от умножения всех членов любого из уравнений системы на постоянное число была отмечена в [9] на с. 212. Влияние этой зависимости на правильность оценки погрешности по "числу обусловленности" в [9] не обсуждалась и была рассмотрена впервые в [6] и [11].

Помимо "числа обусловленности" определитель системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ также сильно зависит от такого эквивалентного преобразования, как умножение всех членов на число $K \neq 0$. Так, определитель системы (51)–(53) равен $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ K & K \end{vmatrix} = K$, и в зависимости от числа K может стать и большим, и малым. Это подчеркивает ненадежность оценки степени обусловленности решений по величине определителя системы. Часто приходится встречать утверждение: "если определитель системы мал (по сравнению с нормой матрицы $\mathbf{A}$), то система плохо обусловлена; если определитель не мал, то система хорошо обусловлена". На самом деле такое утверждение очень ненадежно, поскольку $\det \mathbf{A}$ зависит от эквивалентных преобразований уравнений. Об этом уже говорилось в [9].

Отметим, что в [6], а ранее и в публикациях [5, 11] приводились примеры, когда эквивалентные преобразования, не изменяющие самих решений, действительно изменяли корректность и обусловленность решений, и было показано, что это явление (редко встречающееся, но возможное изменение ряда свойств решений при эквивалентных преобразованиях) играет очень важную роль как среди причин аварий и катастроф, так и в их предотвращении. Теперь мы убеждаемся, что встречается и обратное явление, когда некоторые из методик расчета погрешностей решений приводят к ложным выводам о зависимости этих погрешностей от эквивалентных преобразований.

Ложная зависимость "числа обусловленности" от масштабов измерения коэффициентов уравнений

Еще более существенным недостатком "чисел обусловленности" является их зависимость от выбора единиц измерения размерных коэффициентов уравнений.

Пример 4

Рассмотрим простую конструкцию: балка AB лежит на двух опорах, как это показано на рис. 1.

Длина балки левее левой опоры равна l_1 метров с удельной нагрузкой на единицу длины q_1 кН/м (килоньютонов на метр). Длина участка между опорами равна l_2

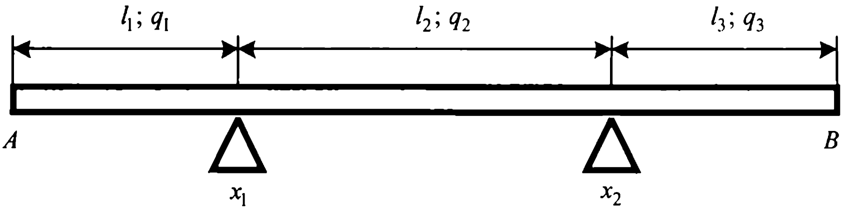

Рис. 1

метров с удельной нагрузкой q_2 кН/м. Длина балки правее правой опоры равна l_3 метров с удельной нагрузкой q_3 кН/м. Нагрузку на левую опору обозначим через x_1, на правую — через x_2. Опоры предполагаем неудерживающими. Это означает, что если, например, нагрузка x_1 оказалась отрицательной, то балка потеряет статическую устойчивость, соскользнет с правой опоры и упадет. Для отыскания x_1 и x_2 можно составить уравнения равновесия моментов сил относительно точек A и B. Относительно точки A получим уравнение:

$$l_1 x_1 + (l_1 + l_2) x_2 = (l_1 q_1 + l_2 q_2 + l_3 q_3) \cdot (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \frac{1}{2}. \tag{57}$$

Относительно точки B имеем:

$$(l_2 + l_3) x_1 + l_3 x_2 = (l_1 q_1 + l_2 q_2 + l_3 q_3) \cdot (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \frac{1}{2}. \tag{58}$$

Любое из уравнений равновесия моментов может быть для вычисления x_1 и x_2 заменено уравнением равновесия сил:

$$x_1 + x_2 = l_1 q_1 + l_2 q_2 + l_3 q_3. \tag{59}$$

Если длины измеряются в метрах, удельные нагрузки q_1; q_2; q_3 — в килоньютонах на метр, x_1 и x_2 — в килоньютонах, и $l_1 = l_2 = 2$ м, $l_3 = 3{,}8$ м, $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ кН/м, то уравнения (58) и (59) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} 5{,}8x_1 + 3{,}8x_2 &= 30{,}42; \\ x_1 + x_2 &= 7{,}8. \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

Если же длины измеряются в миллиметрах (как на технических чертежах), а нагрузки соответственно в 0,001 кН/мм, то уравнения (2) и (12) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} 5800x_1 + 3800x_2 &= 30420; \\ x_1 + x_2 &= 7{,}8. \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

Мы убеждаемся, что смена единиц измерения оказалась равнозначна умножению всех членов первого из уравнений (60) на 1000. Поэтому решения x_1 и x_2 у систем (60) и (61) будут одними и теми же, а вот "числа обусловленности" изменятся, поскольку только что было показано, что при умножении всех членов одного из уравнений системы на постоянную величину "число обусловленности" может измениться. Это обстоятельство говорит, разумеется, о серьезных (хотя, как было показано в [6], вполне устранимых) недостатках оценки по "числу обусловленности".

Однако надо отметить, что зависимость "числа обусловленности" от выбора единиц измерения будет возникать лишь при условии, что уравнения исследуемой системы имеют разную размерность. Так, все члены уравнения (59) системы (59)–(60) имеют размерность момента (сила, умноженная на длину), а все члены уравнения (60) имеют размерность силы.

Ошибочные суждения о влиянии параметров системы на обусловленность решений

Простота и универсальность вычисления "чисел обусловленности" позволяет применять их для оценки влияния тех или иных параметров объекта на обусловленность решений, а тем самым — и на надежность работы самого объекта. Однако и здесь возможны ошибочные суждения. Это особенно важно в ходе проектирования, когда надо быстро оценить много возможных проектных вариантов и выбрать из них тот, который обеспечит наименьшее изменение решений (а значит, и наименьшее изменение свойств проектируемого объекта) при неизбежных последующих изменениях параметров исследуемого объекта в ходе эксплуатации.

Пример 5

Рассмотрим простую систему:

$$\left.\begin{aligned}(1+m)x_1+x_2&=2;\\ x_1+x_2&=1\end{aligned}\right\} \tag{62}$$

с решениями $x_1=\dfrac{1}{m}$; $x_2=\dfrac{m-1}{m}$. Предположим, что коэффициенты системы (62) могут испытывать вариации и проследим зависимость степени обусловленности решений от параметра m.

Для системы (62) имеем:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix};\ \det\mathbf{A}=m;\ \|\mathbf{A}\|=\sqrt{(1+m)^2+3};\ \|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\|=\frac{4}{m}+m+2. \tag{63}$$

Зависимость "числа обусловленности" от m отражена в табл. 3.

Таблица 3

m	0,1	1	2	10	100
$\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\|$	42,1	7	6	12,4	102,04

Согласно формуле (63) получается, что при возрастании параметра m от $m=2$ обусловленность системы ухудшается и, например, при изменении m от $m=2$ до $m=10$ ухудшается более чем в два раза.

На самом деле, разумеется, ничего подобного не происходит. Действительно, уравнения системы (62) — это уравнения прямых линий на плоскости с осями $0x_1$; $0x_2$. Тангенс угла между прямыми легко вычисляется и равен

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{m}{m+2}. \tag{64}$$

Из формулы (64) следует, что угол между прямыми монотонно возрастает с ростом m, а тем самым и степень обусловленности решений тоже возрастает с увеличением m.

Методика, основанная на "числах обусловленности", дает неверный ответ.

Это можно подтвердить и прямым вычислением. Рассмотрим наиболее неблагоприятное сочетание знаков вариаций элементов матрицы коэффициентов системы (62), когда она переходит в систему:

$$\left.\begin{aligned}(1+m)(1-\varepsilon)x_1+(1+\varepsilon)x_2=2;\\ (1+\varepsilon)x_1+(1-\varepsilon)x_2=1.\end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

При $m=2$ и $\varepsilon=0$ решениями системы (65) будут $x_1=x_2=0,5$, а при $\varepsilon=0,1$ решениями станут $x_1=0,574$, $x_2=0,41$. Относительная вариация x_1 равна

$$\frac{\Delta x_1}{x_1}=\frac{0,574-0,5}{0,5}=0,148=1,48\varepsilon.$$

Для x_2 будет: $$\frac{\Delta x_2}{x_2}=\frac{0,41-0,5}{0,5}=-0,18=-1,8\varepsilon.$$

При $m=4$ получим:

- для $\varepsilon=0$ решением будет $x_1=0,25$, $x_2=0,75$;
- для $\varepsilon=0,1$ решением станет $x_1=0,247$, $x_2=0,81$.

Следовательно,

$$\frac{\Delta x_1}{x_1}=\frac{0,247-0,25}{0,25}=-0,12=-1,2\varepsilon;\quad \frac{\Delta x_2}{x_2}=\frac{0,81-0,75}{0,75}=0,08=0,8\varepsilon.$$

Этот расчет подтверждает, что при $m=4$ влияние вариаций коэффициентов на величину вариаций решений действительно меньше, чем при $m=2$. Кроме того, расчет показывает, насколько грубое приближение обеспечивает расчет по "числам обусловленности" по отношению к реальным изменениям решений при вариациях коэффициентов системы.

Пример 6

Рассмотрим систему из трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned}x_1+2x_2+3x_3=1;\\ 2x_1+x_2+3x_3=2;\\ 3x_1+x_2+2x_3=3\end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

с решениями $x_1=1$; $x_2=0$; $x_3=0$.

Для системы (66) имеем:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix};\quad \det\mathbf{A}=6;\quad \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\\ 2 & -7 & 3\\ -1 & 5 & -3\end{pmatrix};$$

$$\|\mathbf{A}\|=\sqrt{3(1+4+9)}=\sqrt{42}=6,48;$$

$$\|\mathbf{A}^{-1}\|=\frac{1}{6}\sqrt{108}=1,732;\qquad \|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\|=11,225.$$

Добавим к правой части, к вектору $\mathbf{b}$, вариацию $\delta\mathbf{b}$, причем каждую составляющую вектора $\mathbf{b}$ увеличим на 0,1 от исходного значения. При этом $\dfrac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}=0,1$.

Согласно основной формуле (35), должно выполняться неравенство

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}\le 11,225\cdot\frac{\|\Delta\mathbf{b}\|}{\|\mathbf{b}\|}=1,1225.$$

В то же время, решая непосредственно систему (66) с учетом вариаций правой части, т. е. решая систему:

$$\left.\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3&=1,1;\\ 2x_1+x_2+3x_3&=2,2;\\ 3x_1+x_2+2x_3&=3,3,\end{aligned}\right\}\tag{67}$$

получим решение: $x_1=1,1,\ x_2=x_3=0,$ и, следовательно,

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}=0,1.\tag{68}$$

Таким образом, оценка по "числу обусловленности" оказалась в данном случае в 11,225 раза больше истинной погрешности.

Отметим, что критика оценок по "числам обусловленности" совсем не означает отрицания той роли, которую эти оценки сыграли в истории развития вычислительных методов.

Хотя эти оценки приближенны, они все же часто позволяли распознать опасные плохо обусловленные объекты и описывающие их системы уравнений и тем самым помогли избежать немалого числа аварий и катастроф.

Поэтому большое удивление вызывает распространившийся в последние годы отказ ряда фирм от оценок по "числам обусловленности" и замена их эмпирическими "коэффициентами запаса", которые якобы позволяют "учитывать весь комплекс "факторов неопределенности", а именно:

- отсутствие данных об эксплуатационных условиях;
- неопределенности, связанные с геометрией и материалами конструкций;

- приближенность расчетных методов;
- технологические факторы;
- эксплуатационные факторы.

(цитируем рекомендации, выдвинутые сотрудниками авторитетного ЦНИИ им. Крылова).

Необходимо помнить, что среди технических объектов, чей статический расчет включает в себя в качестве этапа решение СЛАУ, существуют объекты, в которых неизбежные в ходе эксплуатации вариации их параметров на одну тысячную от номинального значения могут приводить к изменению нагрузок и в пять, и в десять, и в большее число раз (пример — объект, математической моделью которого является система уравнений (17)).

Поэтому никакие "коэффициенты запаса" не помогут избежать аварий и катастроф, не говоря уже о том, что завышенные коэффициенты запаса ведут к утяжелению конструкции и завышенному расходу материалов.

Поэтому совершенно необходимо иметь хорошие оценки неустранимых погрешностей СЛАУ. Первым шагом на этом пути были приближенные оценки по "числам обусловленности", а в следующих параграфах (см. §§ 5–12) будут приведены алгоритмы вычисления точных величин неустранимых погрешностей.

§ 5. Вычисление погрешности решений при вариациях правой части

Наиболее просто вычисляется погрешность решений системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ в том случае, если изменяются только коэффициенты правой части, коэффициенты вектора $\mathbf{b}$, а коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$ остаются неизменными, или же их изменения настолько малы, что такими изменениями можно пренебречь. Такие случаи нередко встречаются на практике. В строительной механике это тот случай, когда конструкция остается неизменной, но меняются нагрузки, при расчете электрических цепей — это та ситуация, когда изменяются электродвижущие силы, но не меняются сопротивления и т. п.

Методику вычисления погрешностей решений удобно пояснить на примере системы третьего порядка.

Пример 7

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 8; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}\right\} \tag{69}$$

и оценим величину погрешности решений при вариациях правой части, когда система (69) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 7(1+\delta_1); \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 8(1+\delta_2); \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9(1+\delta_3). \end{aligned}\right\} \tag{70}$$

Величина и знаки чисел $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ могут быть любыми. Понятно, что величина погрешности решений зависит от сочетания знаков вариаций коэффициентов, от сочетания знаков чисел $\delta_1, \delta_2, \delta_3$. Для системы третьего порядка (70) число возможных сочетаний знаков равно $2^3 = 8$, для системы n-го порядка число сочетаний знаков равно 2^n и очень быстро возрастает с ростом n.

Число необходимых вычислений может быть существенно уменьшено при разумном использовании формул Крамера (50).

Для системы (69) определитель D равен:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6, \qquad (71)$$

определитель D_1 равен:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 8\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7\cdot(-1) - 8\cdot 1 + 9\cdot 3 = 12 \qquad (72)$$

(мы разложили определитель D_1 по первому столбцу) и поэтому

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 2.$$

Для системы (70) определитель D не зависит от δ_i и остается прежним: $D = 6$, а определитель D_1 зависит от δ_i и равен:

$$D_{1\delta} = \begin{vmatrix} 7+7\delta_1 & 2 & 3 \\ 8+8\delta_2 & 1 & 3 \\ 9+9\delta_3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (7+7\delta_1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (8+8\delta_2)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (9+9\delta_3)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

или

$$D_{1\delta} = 12 + \left[7\delta_1\cdot(-1) - 8\delta_2\cdot 1 + 9\delta_3\cdot 3\right]. \qquad (73)$$

Из формулы (73) сразу видно, что изменение определителя D_1 (а значит, и изменение решения x_1) будет наибольшим, если δ_3 положительно, а δ_1 и δ_2 — отрицательны. Если $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ равны друг другу по абсолютной величине, т. е. $|\delta_1| = |\delta_2| = |\delta_3| = \delta$, то $D_{1\delta} = 12 + 42\delta$, и, следовательно,

$$x_{1\delta} = \frac{D_{1\delta}}{D} = 2 + 7\delta. \qquad (74)$$

Если вариации $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ имеют обратные знаки, т. е. если δ_1 и δ_2 — положительны, а δ_3 — отрицательна, то в этом случае при $|\delta_i| = \delta$ будет $D_{1\delta} = 12 - 42\delta$, и, следовательно,

$$x_{1\delta} = \frac{D_{1\delta}}{D} = 2 - 7\delta.$$

Аналогично вычисляются и определители $D_{2\delta}$ и $D_{3\delta}$, а по ним решения $x_{2\delta}$ и $x_{3\delta}$. Получаем

$$D_{2\delta} = \begin{vmatrix} 1 & 7+7\delta_1 & 3 \\ 2 & 8+8\delta_2 & 3 \\ 3 & 9+9\delta_3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(7+7\delta_1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (8+8\delta_2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - (9+9\delta_3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 + 35\delta_1 - 56\delta_2 + 27\delta_3 \tag{75}$$

и, следовательно, $x_{2\delta} = \dfrac{D_{2\delta}}{D} = x_2 + \left(\dfrac{35}{6}\delta_1 - \dfrac{56}{6}\delta_2 + \dfrac{27}{6}\delta_3\right).$

Здесь вариация решения x_2 будет наибольшей при положительных δ_1 и δ_3 и отрицательном δ_2. Если $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ равны друг другу по абсолютной величине, т. е. $|\delta_1| = |\delta_2| = |\delta_3| = \delta$, то $x_{2\delta} = 1 + 18\delta$. При обратных знаках вариаций δ, т. е. при отрицательных δ_1 и δ_3 и положительной δ_2 будет $x_{2\delta} = 1 - 18\delta$.

Аналогично получаем:

$$D_{3\delta} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7+7\delta_1 \\ 2 & 1 & 8+8\delta_2 \\ 3 & 1 & 9+9\delta_3 \end{vmatrix} =$$

$$= (7+7\delta_1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (8+8\delta_2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (9+9\delta_3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 6 - 7\delta_1 + 40\delta_2 - 27\delta_3 \tag{76}$$

и, следовательно,

$$x_{3\delta} = \frac{D_{3\delta}}{D} = 1 - \frac{7}{6}\delta_1 + \frac{40}{6}\delta_2 - \frac{27}{6}\delta_3. \tag{77}$$

Если $|\delta_1| = |\delta_2| = |\delta_3| = \delta$, то $x_{3\delta} = 1 + 12{,}33\delta$, а при обратных знаках δ_i будет $x_{3\delta} = 1 - 12{,}33\delta$.

Рассмотренный пример сразу проясняет порядок вычисления погрешности решения для системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ произвольного порядка, когда вектор-столбец правой части имеет вид:

$$\mathbf{b}_\delta = \begin{pmatrix} b_1 + \delta_1 b_1 \\ b_2 + \delta_2 b_2 \\ \\ b_n + \delta_n b_n \end{pmatrix}. \tag{78}$$

В этом случае для вычисления, например, величины x_1 используем формулы Крамера и разлагаем определитель D_1 по элементам первого столбца, т. е. в данном случае столбца (78). Получаем:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{(b_1 + \delta_1 b_1) \cdot A_{11} + (b_2 + \delta_2 b_2) \cdot A_{12} + \ldots + (b_n + \delta_n b_n) \cdot A_{1n}}{D}, \tag{79}$$

где $A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1n}$ — алгебраические дополнения, соответствующие элементам первого столбца. Из (79) следует, что

$$x_1 = x_{1\delta=0} + \Delta x_1, \tag{80}$$

где $x_{1\delta=0}$ — значение x_1, соответствующее $\delta = 0$ и вычисляемое при номинальных значениях коэффициентов b_i, а Δx_1 — это приращение x_1, произошедшее из-за вариаций этих коэффициентов. Из (79) следует, что

$$x_{1\delta=0} = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{n} b_i A_{1i}; \quad \Delta x_1 = \frac{1}{D}\sum_{i=1}^{n} b_i A_{1i}\delta_i, \tag{81}$$

где A_i — алгебраические дополнения элементов первого столбца определителя D_1.

Из формулы (81) сразу видно, что вариация решения x_1 будет наибольшей в том случае, если знаки вариаций $\delta_i b_i$ совпадают со знаками алгебраических дополнений. Отметим, что вариации решений линейно зависят от вариаций коэффициентов правой части. Это позволяет — если, например, вычислена вариация решения x_i при $|\delta_i| = 0{,}01$ — легко пересчитать величину вариации решения на любое другое значение $|\delta_i|$.

Пользуясь формулой (81), можно, например, легко оценить наибольшее возможное изменение решения x_1 в системе уравнений (66) из примера 6 для случая $|\delta_i| = 0{,}1$. Поскольку для системы (66) имеем

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_2 = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3, \tag{82}$$

то наибольшее изменение x_1 будет при $\delta_1 = -0{,}1$; $\delta_2 = -0{,}1$; $\delta_3 = +0{,}1$.

При этом

$$\Delta x_1 = \frac{1}{6}(0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}9) = 0{,}2, \tag{83}$$

вычисляя непосредственно определитель D_1 при изменившихся коэффициентах правой части и новую величину x_1:

$$D_{1\delta} = \begin{vmatrix} 1(1-0{,}1) & 2 & 3 \\ 2(1-0{,}1) & 1 & 3 \\ 3(1+0{,}1) & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7{,}2; \tag{84}$$

$$x_1 = \frac{D_{1\delta}}{D} = \frac{7,2}{6} = 1,2, \qquad (85)$$

убеждаемся, что изменение x_1 действительно равно 20% первоначального значения. Если все вариации коэффициентов правой части имеют одинаковые знаки, то изменение x_1, как это уже было вычислено в примере 6, будет при тех же $|\delta_i|$ в два раза меньше.

Отметим интересное и важное обстоятельство, непосредственно следующее из формулы (81): мы убеждаемся, что выражения для $x_{1\delta=0}$ и Δx_1 схожи и Δx_1 отличается от $x_{1\delta=0}$ только присутствием множителя δ_i в каждом члене суммы. Поскольку обычно вариации δ_i каждого из коэффициентов b_i правой части существенно меньше самого коэффициента b_i, то обычно вариация любого решения невелика. Однако из этого часто выполняющегося правила существуют важные и опасные исключения: наиболее опасными вариациями δ_i являются те, знак которых совпадает со знаком произведений $b_i A_i$, потому что тогда все члены суммы, входящей в Δx_1, положительны. В то же время сами произведения $b_i A_i$ у разных систем уравнений могут иметь разные знаки и могут компенсировать друг друга. Поэтому как бы не были малы δ_i, существуют системы, в которых они приводят к большим погрешностям одного или нескольких решений x_i системы уравнений. Таких систем может быть не очень много, но они существуют.

Отсюда следует, что при наличии погрешностей или вариаций правой части необходимо обязательно вычислять возможные максимальные погрешности всех решений x_i, тем более, что их легко вычислить по формуле (81) (либо можно попытаться доказать, что в исследуемой системе все произведения $b_i A_i$ имеют одинаковые знаки, или что взаимной их компенсации не происходит — но это гораздо сложней).

Мы убеждаемся, что если изменяются только коэффициенты правой части системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, то изменения решения x_i и максимально возможные изменения вычислить не сложно, и — что самое важное — они вычисляются *точно* (при известных δ_i). Значительно сложнее вычислить изменения решений при вариациях коэффициентов в матрице **A**. Здесь необходим принципиально новый подход, о котором будет рассказано в следующем параграфе.

§ 6. Новый подход к проблеме оценки погрешностей: подход через дифференциалы определителей и таблицы знаков

В этом параграфе мы перейдем к решению наиболее общей (и наиболее сложной) проблемы оценки погрешностей каждой из составляющих вектора решений $\mathbf{x}$ системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ при возможных вариациях коэффициентов матрицы $\mathbf{A}$ и вектора правой части $\mathbf{b}$.

В отличие от подхода через "числа обусловленности" $\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$ мы будем использовать формулы Крамера

$$x_i = \frac{D_i}{D} \tag{86}$$

и начнем с оценки возможных вариаций определителей D и D_i, происходящих от вариаций их коэффициентов.

Рассмотрим определитель матрицы $\mathbf{A}$:

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{87}$$

и будем учитывать, что о каждом из коэффициентов a_{ij} известен лишь интервал (18), внутри которого находятся его возможные значения. С учетом неравенств (18) определитель (87) можно записать в виде

$$D = \det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} + \varepsilon_{11}a_{11} & a_{12} + \varepsilon_{12}a_{12} & a_{1n} + \varepsilon_{1n}a_{1n}. \\ a_{21} + \varepsilon_{21}a_{21} & a_{22} + \varepsilon_{22}a_{22} & a_{2n} + \varepsilon_{2n}a_{2n} \\ & & \\ a_{n1} + \varepsilon_{n1}a_{n1} & a_{n2} + \varepsilon_{n2}a_{n2} & a_{nn} + \varepsilon_{nn}a_{nn} \end{vmatrix} \tag{88}$$

и рассматривать его как функцию n^2 переменных ε_{ij}, подчиненных неравенствам (18). Для того чтобы вычислить вариацию определителя (88), происходящую от вариаций его коэффициентов, вычислим сначала частную производную определителя (88), т. е. величину

$$\frac{\partial D}{\partial \varepsilon_{ij}}, \tag{89}$$

а затем и полный дифференциал, т. е. главную, линейную часть изменения определителя.

Разложив определитель (88) по минорам той строки, в которую входит член $a_{ij} + \varepsilon_{ij} a_{ij}$, убедимся, что единственным членом разложения, зависящим от ε_{ij}, является член

$$\varepsilon_{ij} a_{ij} A_{ij}, \tag{90}$$

где A_{ij} — это алгебраическое дополнение элемента a_{ij}, т. е. определитель порядка $n-1$, который образуется из определителя **A** вычеркиванием i-й строки и j-го столбца и умножением на $(-1)^{i+j}$. Отсюда следует, что частная производная (89) будет равна произведению $A_{ij} a_{ij}$, а полный дифференциал, т. е. главная, линейная часть изменения определителя $D = \det \mathbf{A}$ будет равна

$$\Delta_{\text{лин}} = \sum_{i=1;\, j=1}^{i=n;\, j=n} a_{ij} A_{ij} \Delta\varepsilon_{ij}, \tag{91}$$

где $\Delta\varepsilon_{ij}$ — это изменение переменной ε_{ij}, не выходящее из пределов, очерченных неравенствами (18).

Из формулы (91) следует, что наибольшее изменение определителя (88) в направлении возрастания (в линейном приближении) будет в том случае, если для всех i и j будет $|\varepsilon_{ij}| = \varepsilon_{ij\,\text{макс}}$, а знак ε_{ij} совпадает со знаком произведения элемента a_{ij} на его алгебраическое дополнение A_{ij}.

Для удобного вычисления вариаций определителя полезно составить так называемую *таблицу знаков* (ее можно называть также *матрицей знаков*), элементами которой являются знаки "плюс", "минус" и цифра "ноль". Таблица знаков составляется по правилу: каждый ее элемент ("плюс" или "минус") совпадает со знаком произведения $A_{ij} a_{ij}$ и равен нулю, если это произведение равно нулю. Составляемые по этому правилу таблицы знаков впервые предложены в [6].

Пример 8

Для определителя

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{92}$$

алгебраические дополнения равны: $A_{11} = 1$; $A_{12} = -1$; $A_{21} = -1$; $A_{22} = 2$ и, следовательно, таблица знаков имеет вид:

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}. \tag{93}$$

Заметим, что для любого определителя второго порядка, у которого все элементы положительны, всегда будет $A_{11} > 0$; $A_{12} < 0$; $A_{21} < 0$; $A_{22} > 0$, и поэтому таблица знаков всегда имеет вид (93).

Пример 9

Для определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 8 \qquad (94)$$

имеем:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 4 \cdot 2 = -3; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -14 \qquad (95)$$

и аналогично

$$A_{13} = 13; \; A_{21} = 2; \; A_{22} = -1; \; A_{23} = 2; \; A_{31} = 1; \; A_{32} = 10; \; A_{33} = -7. \qquad (96)$$

Таблица знаков определителя (94) следует из равенств (95)–(96) и имеет вид

$$\begin{vmatrix} - & - & + \\ + & - & + \\ + & + & - \end{vmatrix}. \qquad (97)$$

Если вычислены алгебраические дополнения, то нетрудно вычислить и наибольшее (в линейном приближении) приращение определителя. Оно равно

$$\Delta_{\text{лин макс}} = \sum_{i=1;\,j=1}^{i=n;\,j=n} \left| a_{ij} \cdot A_{ij} \cdot \Delta\varepsilon_{ij} \right|. \qquad (98)$$

Если для всех i и j будет $\left|\Delta\varepsilon_{ij}\right| = \varepsilon_0$, то формула (98) упрощается:

$$\Delta_{\text{лин макс}} = \sum_{i=1;\,j=1}^{i=n;\,j=n} \left| a_{ij} A_{ij} \right| \varepsilon_0. \qquad (99)$$

Так, для определителя (92) будет

$$\Delta_{\text{лин макс}} = (2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2)\varepsilon_0 = 6\varepsilon_0, \qquad (100)$$

а для определителя (94):

$$\Delta_{\text{лин макс}} = $$
$$= (1 \cdot 3 + 2 \cdot 14 + 3 \cdot 13 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 7)\varepsilon_0 = 161\varepsilon_0. \qquad (101)$$

Относительное приращение определителя (94)

$$\frac{\Delta_{\text{лин макс}}}{\det \mathbf{A}} = \frac{161}{8}\varepsilon_0 = 20{,}125\varepsilon_0 \qquad (102)$$

или более чем в 20 раз больше, чем приращение каждого из коэффициентов.

Несложно вычисляется и величина наибольшего возможного убывания определителя (в линейном приближении). Она будет наибольшей, если знаки $\Delta\varepsilon_{ij}$ будут обратны знакам произведений $a_{ij}A_{ij}$. Таким образом, к наибольшему убыванию определителя, к наибольшему изменению в направлении убывания приведет так называемая *обратная таблица знаков*, знаки которой обратны знакам основной таблицы.

Для определителя (92) обратная таблица знаков имеет вид

$$\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix}, \tag{103}$$

(и такой же вид она будет иметь для всех определителей второго порядка с положительными элементами), а для определителя (94) "обратная таблица знаков" имеет вид

$$\begin{vmatrix} + & + & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{vmatrix}. \tag{104}$$

Величина наибольшего (в линейном приближении) изменения определителя и в направлении возрастания, и в направлении убывания одинакова и рассчитывается по формуле (99).

Таблицы знаков могут быть использованы не только для вычисления дифференциалов определителей, для вычисления определителей в линейном приближении. Они могут быть использованы и для *точных* оценок изменений определителей, происходящих от изменений их коэффициентов.

Для перехода к точным оценкам нужно учесть, что в практических задачах:

- алгебраические дополнения, равные нулю, встречаются очень редко;
- при вариациях коэффициентов ε_{ij}, малых в сравнении с единицей, знаки алгебраических дополнений изменяются редко.

Поэтому мы будем использовать два подхода к оценке возможных погрешностей решений.

Первый подход: предполагаем, что для рассматриваемой нами системы выполнены условия:

- ни одно из алгебраических дополнений не равно нулю;
- ни одно из алгебраических дополнений не изменяет своего знака при исследуемых нами вариациях коэффициентов рассматриваемого определителя, когда числа ε_{ij} малы по сравнению с единицей.

При выполнении этих условий можно легко вычислить, как будет показано далее, вариацию определителя не только в линейном приближении, но и точно, для любых интересующих нас значений вариаций коэффициентов a_{ij}.

Если любое из этих двух условий не выполнено, то рассматриваемый определитель относим к особым, и для вычисления его вариации необходимо использовать более сложный алгоритм, который будет изложен в последующих параграфах.

Если оговоренные условия выполняются, то для точного вычисления наибольшей возможной вариации определителя достаточно вычислить определитель с измененными коэффициентами $a_{ij} \pm \varepsilon_{ij} a_{ij}$, причем знаки ε_{ij} выбираются в соответствии с ранее вычисленной таблицей знаков — типа таблицы (97).

Пример 10

Рассмотрим снова простой определитель (94), для которого наиболее неблагоприятное сочетание знаков ε_{ij} соответствует, как уже было показано, таблице знаков (97).

Если для всех i и j будет $|\varepsilon_{ij}| = 0,01$, то при наиболее неблагоприятном сочетании знаков ε_{ij} определитель (94) перейдет в

$$\begin{vmatrix} 0,99 & 1,98 & 3,03 \\ 4,04 & 0,99 & 2,02 \\ 3,03 & 4,04 & 4,95 \end{vmatrix} = 9,6604.$$

Таким образом, вариации элементов определителя (94), величиной каждая $\pm 1\%$, при наиболее неблагоприятном сочетании их знаков могут привести к изменению величины определителя на $\Delta_+ = 1,6604$ или на $+20,76\%$. Можно вычислить и наибольшее возможное изменение величины определителя в отрицательную сторону. Для этого нужно в таблице знаков (97) поменять знаки "плюс" на "минус" и "минус" на "плюс". Тогда, если для всех i и j будет $|\varepsilon_{ij}| = 0,01$, определитель (94) перейдет в

$$\begin{vmatrix} 1,01 & 2,02 & 2,97 \\ 3,96 & 1,01 & 1,98 \\ 2,97 & 3,96 & 5,05 \end{vmatrix} = 6,3804.$$

В этом случае определитель уменьшился на $\Delta_- = -1,6196$ или на $-20,24\%$. Небольшое расхождение между $|\Delta_+|$ и $|\Delta_-|$ объясняется нелинейным характером зависимости величины определителя от ε_{ij}.

Таким образом, возможные изменения определителя (94) — обозначим их $\Delta_{\text{опр}}$ — при вариациях его элементов на $\pm 0,01$ подчинены неравенству

$$-1,6196 \le \Delta_{\text{опр}} \le 1,6604, \qquad (105)$$

или в относительных единицах:

$$-0,2024 \le \frac{\Delta_{\text{опр}}}{\det} \le 0,2076,$$

причем оценка (105) является точной, т. е. существуют такие комбинации вариаций элементов, при которых неравенства (105) превращаются в точные равенства.

Таким образом, в данном примере наибольшая вариация определителя (94) оказывается в 20,76 раза больше, чем наибольшая вариация каждого из его элементов.

Изложенная методика может быть использована и в тех случаях, когда некоторые из элементов определителя известны точно (их вариации $\varepsilon_{ij}a_{ij}$ равны нулю), или когда известны знаки вариаций некоторых элементов. В этом случае используется только часть таблицы знаков. Пусть, например, относительно определителя (94) известно, что только вариации элементов его первой строки отличны от нуля, и для первой строки $|\varepsilon_{ij}| = 0,01$, а для остальных строк $\varepsilon_{ij} = 0$. В этом случае используем только первую строку таблицы знаков (97). При наиболее неблагоприятном сочетании знаков вариаций элементов первой строки определитель принимает вид:

$$\begin{vmatrix} 0,99 & 1,98 & 3,03 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 8,7,$$

т. е. в данном случае вариации трех элементов определителя изменяют его величину на 0,7 или на 8,75% от его номинального значения.

Изложенная методика может быть использована при исследовании влияния не только относительных вариаций элементов определителя, но и вариаций "абсолютных", т. е. когда после вариации элемент a_{ij} переходит в элемент $a_{ij} + \varepsilon_{ij}$, причем знак числа ε_{ij} может быть любым.

Так, определитель общего вида (87) перейдет после подобных вариаций в определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\varepsilon_{11} & a_{12}+\varepsilon_{12} & a_{1n}+\varepsilon_{1n} \\ a_{21}+\varepsilon_{21} & a_{22}+\varepsilon_{22} & a_{2n}+\varepsilon_{2n} \\ & & \\ a_{n1}+\varepsilon_{n1} & a_{n2}+\varepsilon_{n2} & a_{nn}+\varepsilon_{nn} \end{vmatrix}, \tag{106}$$

а определитель (94) перейдет в

$$\begin{vmatrix} 1+\varepsilon_{11} & 2+\varepsilon_{12} & 3+\varepsilon_{13} \\ 4+\varepsilon_{21} & 1+\varepsilon_{22} & 2+\varepsilon_{23} \\ 3+\varepsilon_{31} & 4+\varepsilon_{32} & 5+\varepsilon_{33} \end{vmatrix}. \tag{107}$$

Для "абсолютных" вариаций составляется — как и для вариаций относительных — своя таблица знаков для наиболее неблагоприятного, ведущего к наибольшей вариации определителя, сочетания знаков вариаций коэффициентов ε_{ij}. Разлагая, как и ранее, определитель (106) по минорам строки, содержащей элемент $a_{ij} + \varepsilon_{ij}$, вычисляя, как и ранее, частную производную и полный дифференциал, убеждаемся, что главная линейная часть приращения определителя (107) — его полный дифференциал — равна в данном случае

$$\Delta_{\text{лин}} = \sum_{i=1;\,j=1}^{i=n;\,j=n} A_{ij} \Delta\varepsilon_{ij}, \tag{108}$$

и напоминает, как и следовало ожидать, формулу (91), отличаясь от нее лишь отсутствием множителя a_{ij}. Если все ε_{ij} по абсолютной величине равны одному числу ε_0, то формула (108) принимает вид

$$\Delta_{\text{лин макс}} = \sum_{i=1;\,j=1}^{i=n;\,j=n} \left|A_{ij}\right| \varepsilon_0 \tag{109}$$

(аналог формулы (99)).

Для определителя (107) таблица знаков сохраняет вид (97). Если для всех ε_{ij} будет $\left|\varepsilon_{ij}\right| = 0{,}01$, то при наиболее неблагоприятном сочетании знаков определитель (107) примет вид:

$$\begin{vmatrix} 0{,}99 & 1{,}99 & 3{,}01 \\ 4{,}01 & 0{,}99 & 2{,}01 \\ 3{,}01 & 4{,}01 & 4{,}99 \end{vmatrix} = 8{,}5628,$$

т. е. величина определителя увеличится на 0,5628 или на 7,06%.

Здесь также не трудно вычислить и наибольшее отклонение определителя в отрицательную сторону. Если заменить в таблице знаков (97) "плюсы" на "минусы", то придем к таблице знаков

$$\begin{vmatrix} + & + & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{vmatrix}$$

и к определителю

$$\begin{vmatrix} 1{,}01 & 2{,}01 & 2{,}99 \\ 3{,}99 & 1{,}01 & 1{,}99 \\ 2{,}99 & 3{,}99 & 5{,}01 \end{vmatrix} = 7{,}4428,$$

т. е. определитель (94) уменьшился на 0,5572 или на 6,96%. Для определителя (107) при $|\varepsilon_{ij}| \le 0,01$ выполняются неравенства:

$$\det_{\text{ном}} - 0,5572 \le \det_{\text{ист}} \le \det_{\text{ном}} + 0,5628.$$

Важно отметить, что в теории определителей и в теории линейных алгебраических уравнений можно по единой методике рассматривать как вариации отличных от нуля коэффициентов, так и вариации (абсолютные вариации) коэффициентов, номинальное значение которых равно нулю, т. е. рассматривать "вариации нуля". Напомним, что в теории дифференциальных уравнений исследование "вариаций нуля" старших коэффициентов требует особого математического аппарата, разрабатываемого в теории сингулярно возмущенных уравнений (см. также [5] на с. 67–68 и [11] на с. 18–19).

Для систем алгебраических уравнений все проще, хотя и здесь "вариации нуля" могут приводить к разным последствиям. Иногда малая "вариация нуля" может приводить к большим изменениям решений.

Рассмотрим простую систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= 1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{110}$$

при $a_{11} = 1$; $a_{12} = 0$; $a_{21} = 0$; $a_{22} = 0$. В этом случае $x_1 = 1$, а x_2 не существует. Пусть нулевой коэффициент a_{22} испытал вариацию и стал равным $a_{22} = \varepsilon$, где $0 \le \varepsilon \le 0,01$. В этом случае

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon; \; D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \varepsilon \end{vmatrix} = \varepsilon; \; D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1; \; x_1 = \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1; \; x_2 = \frac{1}{\varepsilon}. \tag{111}$$

Таким образом, "вариации нуля" привели в данном случае к тому, что определители D и D_1 изменились на малые величины (от значения 0 до значения ε), решение x_1 не изменилось, а решение x_2 теперь заключено в пределах от $x_2 = 1/\varepsilon$ до $x_2 \to +\infty$, или, иными словами, решение x_2 стало теперь заключено в неограниченном полуоткрытом интервале $(1/\varepsilon; +\infty)$.

Значительно чаще малые изменения нулевого элемента определителя не приводят к значительным изменениям его величины. Так, например, определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \tag{112}$$

при вариации его нулевого элемента переходит в определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & \varepsilon & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \varepsilon, \tag{113}$$

и вариация величины определителя при $\varepsilon \to 0$ сколь угодно мала.

Если произведена оценка вариаций определителей, входящих в формулы Крамера, то уже несложно оценить возможные вариации каждого из решений $x_1; x_2; ...; x_n$.

Появление методики точной оценки возможной вариации каждого из решений системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, происходящих из-за вариаций коэффициентов, точной оценки интервала, в котором может оказаться решение из-за вариаций коэффициентов, является большим шагом вперед. Теперь, располагая, разумеется, оценками точности коэффициентов, оценками их возможных вариаций, можно точно оценить: у каких систем уравнений решения надежны, а у каких — заведомо не надежны, причем не надежны при любых методах расчета.

Дело в том, что вариации коэффициентов, погрешности в их определении не являются, конечно, единственной причиной погрешности результатов расчета. Существуют еще погрешности методов вычислений, такие, как погрешности от округления промежуточных результатов, погрешности от конечного числа итераций в итерационных методах и т. п. Часто именно уменьшению этих погрешностей уделяют наибольшее внимание, не замечая того, что погрешность, происходящая от вариаций параметров, неустранима при любом совершенствовании методов вычислений. Если, например, при $|\varepsilon_{ij}| \le 0{,}01$ у определителя (94) его возможная погрешность, происходящая только из-за вариаций коэффициентов, подчинена неравенствам (105), то улучшить эти неравенства нельзя при любом совершенствовании методов вычислений.

Если, например, из-за вариаций коэффициентов интервал, внутри которого заключено решение x_1 системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, равен $\pm 0{,}1$, то нерационально вычислять решение с существенно большей точностью.

Отметим еще, что при тех же оценках на относительные (или абсолютные) вариации коэффициентов $|\varepsilon_{ij}| \le \varepsilon_0$ вариация величины определителя возрастает с ростом его порядка.

Это обстоятельство удобно пояснить на примере так называемых *треугольных определителей*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdots a_{nn},$$

у которых все элементы, лежащие выше главной диагонали (или наоборот — ниже главной диагонали), равны нулю. Такие определители равны произведению своих диагональных элементов. Пренебрегая всеми степенями выше первой малого в сравнении с единицей числа ε_0, получаем оценку:

$$\det\big|_{|\varepsilon_{ij}|=\varepsilon_0} - \det\big|_{|\varepsilon_{ij}|=0} =$$

$$= (a_{11} + \varepsilon_0 a_{11})(a_{22} + \varepsilon_0 a_{22}) \cdots (a_{nn} + \varepsilon_0 a_{nn}) - a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} > n\varepsilon_0 \det\big|_{|\varepsilon_{ij}|=0},$$

которая растет с увеличением порядка определителя n.

Возникает интересная ситуация: наибольшая возможная вариация величины определителя, а с ней и вариации решений x_i системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ при наиболее неблагоприятном сочетании знаков вариаций элементов определителя растут с ростом n. Вместе с тем вероятность реализации именно наиболее неблагоприятного сочетания знаков вариаций элементов определителя мала: она равна $\frac{1}{2^{n^2}}$ и очень быстро убывает с ростом n. Очевидно, что нужно учитывать величину вариации определителя не только при единственном и очень мало вероятном сочетании знаков вариаций элементов, но и при всех тех сочетаниях знаков, которые приводят к вариациям величины определителя, близким к максимальным значениям. Этот вопрос будет обсужден далее в § 7.

Отметим, что кроме таблиц знаков можно использовать таблицы алгебраических дополнений определителя. Так, для определителя (94) таблица алгебраических дополнений имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -3 & -14 & +13 \\ +2 & -1 & +2 \\ +1 & +10 & -7 \end{vmatrix}$$

и позволяет оценить, изменение какого элемента определителя приводит к его наибольшему возрастанию или наибольшему убыванию.

§ 7. Результаты численного эксперимента

Помимо вычисления наибольших вариаций определителей, происходящих из-за вариаций их элементов, интересно оценить, с какой вероятностью может появиться та или иная вариация.

Для ориентации в вероятностях различных вариаций удобно прибегнуть к численному эксперименту, который выполнил М. В. Волошин. Определитель третьего порядка содержит 9 элементов, поэтому для него возможны $2^9 = 512$ сочетаний положительных и отрицательных вариаций $\pm\varepsilon_{ij}$. Положив $|\varepsilon_{ij}| = 0,01$, вычислялись все 512 определителей вида (114) для $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{13} = 3$, $a_{21} = 4$, $a_{22} = 1$, $a_{23} = 2$, $a_{31} = 3$, $a_{32} = 4$, $a_{33} = 5$ и всех возможных сочетаний знаков чисел ε_{ij}. При $\varepsilon_{ij} = 0$ будет $\det_{\text{ном}} = 8$. Для данного определителя наиболее неблагоприятным будет следующее сочетание знаков вариаций: $\varepsilon_{11} = -0,01$; $\varepsilon_{12} = -0,01$; $\varepsilon_{13} = +0,01$; $\varepsilon_{21} = +0,01$; $\varepsilon_{22} = -0,01$; $\varepsilon_{23} = +0,01$; $\varepsilon_{31} = +0,01$; $\varepsilon_{32} = +0,01$; $\varepsilon_{33} = -0,01$. При этом сочетании знаков вариаций элементов исследуемый определитель принимает вид:

$$\det = \begin{vmatrix} 0,99 & 1,98 & 3,03 \\ 4,04 & 0,99 & 2,02 \\ 3,03 & 4,04 & 4,95 \end{vmatrix} = 9,6604. \tag{114}$$

Если элементы с положительной вариацией обозначить условно через "+", а элементы с отрицательной вариацией — через "–", то определитель можно условно обозначить как

$$\begin{vmatrix} - & - & + \\ + & - & + \\ + & + & - \end{vmatrix}. \tag{115}$$

Такое изображение особенно наглядно показывает, какое сочетание знаков вариаций в данном случае наиболее опасно.

Прямой расчет — с вычислением и сравнением между собой всех 512 определителей — подтверждает, что наихудшее сочетание знаков вариаций элементов действительно соответствует определителю (114), а наибольшая величина вариации исходного определителя действительно равна 1,6604.

Анализ всех 512 вычисленных вариаций (т. е. всех возможных вариантов) показывает, что 16 из них, т. е. 3,125%, заключены в пределах от $\Delta_{\text{макс}}$ до $0,9\Delta_{\text{макс}}$.

Для другого определителя с вариациями элементов — определителя:

$$\det_{\varepsilon=0} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -3; \quad \det_{\varepsilon} = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon_{11} & 2+2\varepsilon_{12} & 4+4\varepsilon_{13} \\ 1+\varepsilon_{21} & 3+3\varepsilon_{22} & 4+4\varepsilon_{23} \\ 2+2\varepsilon_{31} & 3+3\varepsilon_{32} & 5+5\varepsilon_{33} \end{vmatrix}$$

аналогичный численный эксперимент показал, что при $|\varepsilon_{ij}| = 0{,}01$ наибольшая вариация определителя равна $|\Delta_{\text{макс}}| = 0{,}503$, и она действительно достигается при следующем сочетании знаков вариаций элементов определителя:

$$\begin{vmatrix} - & - & + \\ - & + & - \\ + & + & - \end{vmatrix},$$

которое ранее было предсказано на основе теории, изложенной в предыдущем параграфе.

На этот раз прямой расчет показал, что только у двух определителей из 512 их вариации заключены в пределах от $\Delta_{\text{макс}}$ до $0{,}9\Delta_{\text{макс}}$ и у восьми в пределах от $\Delta_{\text{макс}}$ до $0{,}8\Delta_{\text{макс}}$.

Учитывая, что далеко не всегда вариация любого элемента определителя достигает своего наибольшего (по модулю) значения, следует признать, что вариация определителя очень редко достигает значений, близких к максимальным. Однако если такое редкое сочетание величин и знаков вариаций элементов определителя все же возможно, то его необходимо учитывать.

Из указанного обстоятельства вытекают важные следствия: пусть, например, усилия в каком-либо узле выпускаемого объекта численно равны решению x_1 системы из трех уравнений, и каждый из коэффициентов этой системы измеряется с точностью до $\pm 0{,}01$. Пусть выпущено 999 объектов и все они прекрасно работают. К сожалению, это не гарантирует, что тысячный выпущенный объект не сломается и не приведет к аварии — причем он может сломаться не сразу, не на испытаниях, а после некоторого периода эксплуатации, в ходе которой параметры объекта и коэффициенты его математической модели испытывают неизбежные малые вариации. Причиной аварии может оказаться то, что на предыдущих выпущенных 999 объектах еще ни разу не реализовывалось опасное сочетание величин и знаков вариаций, а на тысячном оно реализовалось.

Гарантию от опаснейших поломок и аварий, гарантию от гибели людей в этих авариях может дать только хороший, надежный и достоверный расчет.

Для иллюстрации приведем некоторые из вычисленных значений определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 8$$

при вариациях его элементов на одну сотую от номинальных значений, т. е. при $|\varepsilon_{ij}| = 0,01$. Приведем таблицы знаков и соответствующие этим таблицам значения определителей.

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{vmatrix} \to 8,242408; \quad \begin{vmatrix} + & + & + \\ + & + & - \\ + & + & + \end{vmatrix} \to 8,1608; \quad \begin{vmatrix} + & + & + \\ + & - & + \\ + & + & + \end{vmatrix} \to 8,32401;$$

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ + & - & + \\ + & + & - \end{vmatrix} \to 9,0401; \quad \begin{vmatrix} + & + & + \\ + & - & + \\ - & - & + \end{vmatrix} \to 7,44309; \quad \begin{vmatrix} + & + & + \\ + & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix} \to 7,28513;$$

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ - & + & + \\ - & + & + \end{vmatrix} \to 8,01798; \quad \begin{vmatrix} + & + & + \\ - & + & - \\ + & + & + \end{vmatrix} \to 7,99758; \quad \begin{vmatrix} + & + & - \\ + & + & + \\ + & - & + \end{vmatrix} \to 6,65004;$$

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ - & - & - \\ - & - & + \end{vmatrix} \to 7,21928; \quad \begin{vmatrix} + & + & - \\ - & + & + \\ + & + & - \end{vmatrix} \to 8,00081; \quad \begin{vmatrix} + & + & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{vmatrix} \to 6,38039;$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ + & - & + \\ + & + & - \end{vmatrix} \to 9,5952; \quad \begin{vmatrix} + & + & - \\ - & - & - \\ - & - & + \end{vmatrix} \to 6,4548; \quad \begin{vmatrix} + & - & + \\ + & - & + \\ - & - & + \end{vmatrix} \to 8,0192;$$

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & - & + \\ + & + & - \end{vmatrix} \to 9,4; \quad \begin{vmatrix} + & - & - \\ + & - & + \\ + & - & + \end{vmatrix} \to 7,29927; \quad \begin{vmatrix} + & - & - \\ + & - & + \\ + & - & - \end{vmatrix} \to 7,9992;$$

$$\begin{vmatrix} - & + & - \\ - & + & + \\ - & + & - \end{vmatrix} \to 7,9992; \quad \begin{vmatrix} - & + & - \\ - & + & + \\ - & - & + \end{vmatrix} \to 6,51835; \quad \begin{vmatrix} - & - & + \\ + & - & + \\ + & + & - \end{vmatrix} \to 9,6604.$$

Эти примеры показывают, как сильно может изменяться величина определителя при совсем небольших изменениях в таблице знаков, т. е. при изменениях знаков вариаций всего нескольких элементов определителя.

Разумеется, было бы очень желательно уметь вычислять вероятности попадания вариаций определителей в интервалы от $\Delta_{\text{макс}}$ до $0,9\Delta_{\text{макс}}$, от $0,9\Delta_{\text{макс}}$ до $0,8\Delta_{\text{макс}}$ и т. д. Это бы очень облегчило технические расчеты. К сожалению, методы вычисления этих вероятностей пока еще не разработаны.

Приведем дополнительно на рис. 2 и 3 вычисленные зависимости значений определителя (94) от ε_0 при выборе знаков вариаций его коэффициентов в соответствии с таблицей знаков (97) (верхняя кривая) и в соответствии с обратной таблицей знаков (таблица (104), нижняя кривая). Мы убеждаемся, что вплоть до $\varepsilon_0 = 0,07$ зависимости наибольших и наименьших значений определителя от ε_0 почти неотличимы от линейных (см. рис. 2), и лишь при больших ε (см. рис. 3) проявляется нелинейность.

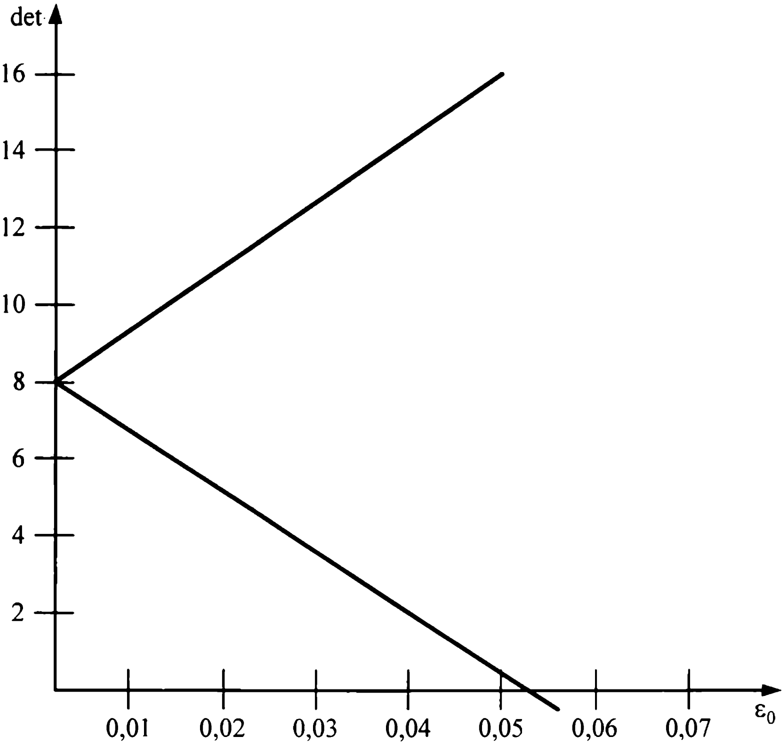

Рис. 2

Отметим, что если абсолютные и относительные значения вариаций всех элементов определителя n-го порядка равны между собой и равны ε_0, то вариации величины определителя при любой таблице знаков являются полиномами n-й степени от переменной ε_0. Это сразу следует из понимания определителя как суммы $n!$ произведений, составленных каждое из n элементов. Поскольку в каждый элемент определителей общего вида (88) и (106) входит ε_0 в первой степени, то каждое из $n!$ произведений — а значит и их сумма — будет полиномом n-й степени от ε_0. При ε_0, малых в сравнении с единицей (для относительных вариаций, соответствующих определителю (88)), или при ε_0, малых по сравнению с a_{ij}, соответствующих определителю (106), в вариации величины определителя будет доминировать член с первой степенью ε_0, и поэтому она будет примерно пропорциональна ε_0. Это позволяет, вычислив, например, вариацию определителя при $\varepsilon_0 = 0,01$, легко оценивать величину вариации определителя при $\varepsilon_0 = 0,001$, $\varepsilon_0 = 0,005$ и т. д.

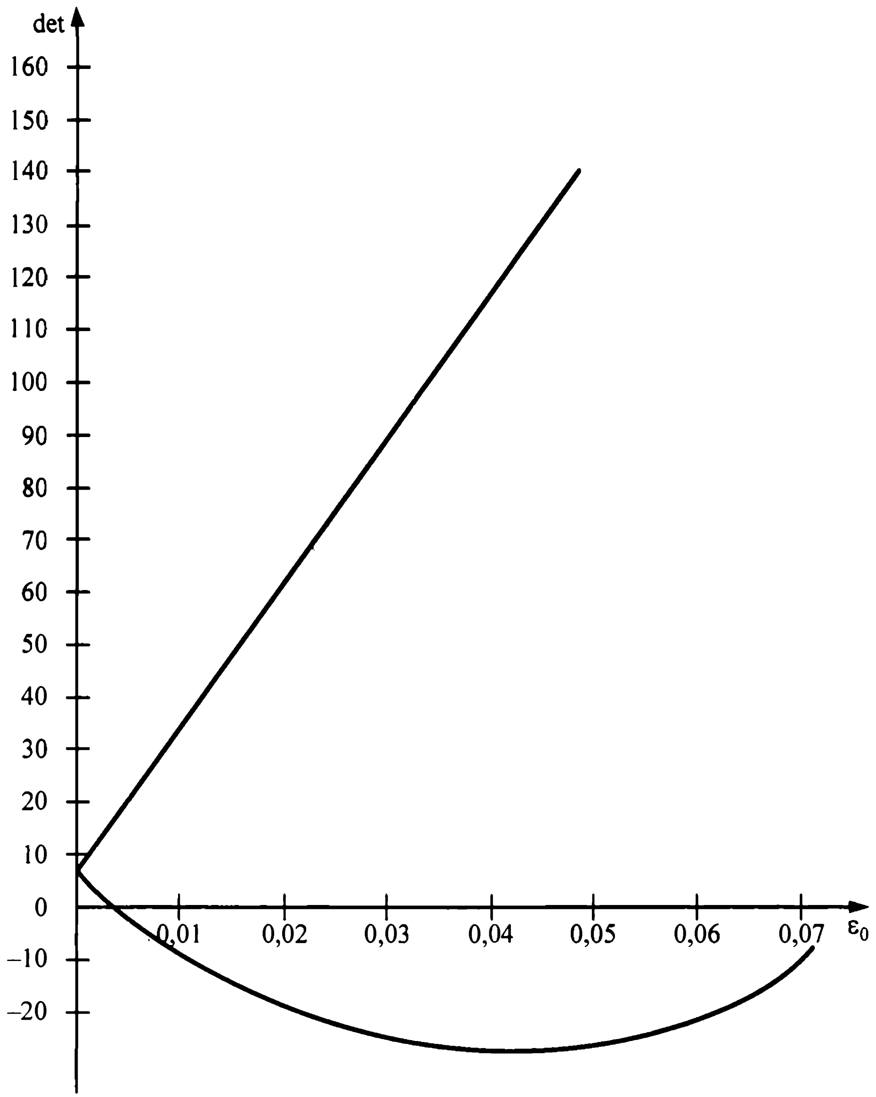

Рис. 3

Заметим: рис. 3 показывает, что зависимость вариации определителя от ε может быть не только нелинейной, но и немонотонной.

Что касается таблиц знаков для определителей высоких порядков, то они могут быть весьма причудливыми. Так, для определителя четвертого порядка

$$\begin{vmatrix} 1,8 & -3,8 & 0,7 & -3,7 \\ 0,7 & 2,1 & -2,6 & -2,8 \\ 7,3 & 8,1 & 1,7 & -4,9 \\ 1,9 & -4,3 & -4,9 & -4,7 \end{vmatrix} = 616,9496 \qquad (116)$$

она имеет вид

$$\begin{vmatrix} - & + & + & + \\ - & + & - & + \\ + & + & - & - \\ + & + & + & - \end{vmatrix}.$$

Если для всех i и j будет $\left|\varepsilon_{ij}\right| = 0{,}01$, то определитель (116) при наиболее неблагоприятном сочетании знаков вариаций его элементов перейдет в определитель

$$\begin{vmatrix} 1{,}8(1-0{,}01) & -3{,}8(1+0{,}01) & 0{,}7(1+0{,}01) & -3{,}7(1+0{,}01) \\ 0{,}7(1-0{,}01) & 2{,}1(1+0{,}01) & -2{,}6(1-0{,}01) & -2{,}8(1+0{,}01) \\ 7{,}3(1+0{,}01) & 8{,}1(1+0{,}01) & 1{,}7(1-0{,}01) & -4{,}9(1-0{,}01) \\ 1{,}9(1+0{,}01) & -4{,}3(1+0{,}01) & -4{,}9(1+0{,}01) & -4{,}7(1-0{,}01) \end{vmatrix} = 666{,}9333,$$

величина которого равна 108,1% от значения определителя при $\varepsilon_{ij} = 0$.

§ 8. Практические приложения. Выявление ненадежных и опасных объектов по их математическим моделям

Полученные нами методы вычисления наибольших возможных вариаций определителей в направлении возрастания и в направлении убывания могут быть использованы для выявления ненадежных и опасных объектов на основании исследования их математических моделей.

К ненадежным и опасным, безусловно, следует относить объекты, которые при тех величинах вариаций коэффициентов, которые наверняка будут встречаться в ходе эксплуатации, способны коренным образом изменять свои свойства и создать тем самым аварийную ситуацию.

Как уже указывалось ранее, первым шагом к решению проблемы влияния вариаций коэффициентов на свойства решений является оценка возможных величин вариаций коэффициентов. Это — чисто инженерная задача, поскольку возможная величина вариаций целиком зависит от свойств того или иного конкретного объекта исследования. Поэтому мы эту задачу рассматривать не будем, а приведем примеры расчета для значений $\varepsilon_{ij} = \pm 0{,}01$ и $\delta_i = \pm 0{,}01$, учитывая, что пересчитать на любые другие значения ε_{ij} и δ_i совсем несложно.

Наиболее ненадежными являются те объекты, в математической модели которых в форме системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ определитель матрицы $\mathbf{A}$ может обратиться в нуль при возможных в ходе нормальной эксплуатации вариациях своих коэффициентов.

Решающим этапом в надежном выделении опасных систем является построение обратной таблицы знаков для матрицы $\mathbf{A}$. Если эта таблица знаков построена, то уже совсем нетрудно вычислить, при каком значении ε определитель матрицы обратиться в нуль. Для этого достаточно вычислить $\det \mathbf{A}$ для ряда значений ε.

Вернемся к ранее рассмотренному в § 4 примеру 3 и обсудим еще раз систему уравнений (49), для которой матрица $\mathbf{A}$ равна

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \tag{117}$$

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \tag{118}$$

Поскольку в данном случае обратная матрица равна

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \tag{119}$$

то таблица знаков для определителя (118) равна

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}, \tag{120}$$

а обратная таблица знаков, соответственно:

$$\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix}. \tag{121}$$

Отсюда следует, что определитель (118) будет быстрее всего убывать в том случае, если знаки вариаций его коэффициентов будут соответствовать таблице знаков (121), и определитель (118) примет вид:

$$\det \mathbf{A}_\varepsilon = \begin{vmatrix} 3(1-\varepsilon) & 2(1+\varepsilon) \\ 1(1+\varepsilon) & 1(1-\varepsilon) \end{vmatrix} = 1 - 10\varepsilon - \varepsilon^2 \tag{122}$$

и обратится в нуль при

$$\varepsilon_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25-1} = 5 \pm 4{,}898979, \tag{123}$$

т. е. уже при $\varepsilon = 0{,}10102$.

При подходе вариаций к критическому значению $\varepsilon = 0{,}10102$ решения x_1 и x_2 резко возрастают (по абсолютной величине). Так, если при $\varepsilon = 0$ система (49) имела решения $x_1 = 1$, $x_2 = 10$, то при $\varepsilon = 0{,}1$ будет $x_1 = 350$, $x_2 = 440$, т. е. и x_1 и x_2 уже не будут иметь ничего общего с их значениями при $\varepsilon = 0$.

Значение ε, при котором определитель матрицы **A** обращается в нуль, будем называть *естественной границей вариаций.*

Другим источником ненадежности решений является изменение знака любой из составляющих x_i вектора решений **x**. Согласно формулам Крамера, изменение знака x_i происходит прежде всего из-за изменения знака определителя D_i.

Возвращаясь к системе (49) и предполагая, что вариации испытывают только коэффициенты матрицы **A**, а правые части остаются неизменными, получим, что в этом случае

$$D_1 = \begin{vmatrix} 23 & 2(1 \pm \varepsilon) \\ 11 & 1 \pm \varepsilon \end{vmatrix}. \tag{124}$$

Расставляя знаки ε в соответствии с обратной таблицей знаков определителя (124), получим

$$D_{1_\varepsilon} = \begin{vmatrix} 23 & 2(1+\varepsilon) \\ 11 & 1-\varepsilon \end{vmatrix} = 1 - 45\varepsilon. \qquad (125)$$

Это означает, что уже при $\varepsilon = 0{,}0222$ определитель D_1, а с ним и решение x_1 изменяет знак. Таким образом, решение x_1 — не надежно.

Для предварительного выделения опасных систем можно использовать формулу для главной, линейной части приращений определителя — формулу (91).

Примеры использования этой формулы будут приведены в следующем параграфе.

§ 9. Анализ расчета одной из конструкций

В этом параграфе воспользуемся методикой выявления ненадежных и опасных объектов для анализа расчета одной из конкретных конструкций, нагруженных сосредоточенной силой.

Пример 11

Рассмотрим пример расчета усилий в одной из простых конструкций, приведенный в хорошо известном учебнике [12] на с. 205. Там рассматривается нагруженная рама (рис. 4), где $l_1 = l_2 = l_3 = l$.

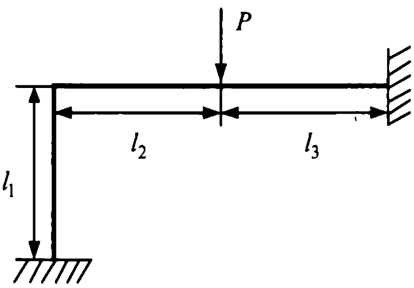

Рис. 4

Концы рамы заделаны, в середине горизонтального участка приложена сила P. Требуется рассчитать горизонтальную силу x_1, действующую на нижний конец рамы, вертикальную силу x_2 и изгибающий момент x_3.

Мы выбрали этот пример потому, что он представлен в известном, выдержавшем много изданий учебнике [12], приведен, безусловно, потому, что его автор и многочисленные преподаватели, пользовавшиеся учебником, считали расчет усилий x_1 и x_2 и момента x_3 достаточно показательным и достоверным.

В учебнике [12] на с. 205–206 для определения x_1, x_2, x_3 была составлена система из трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 14lx_1 + 12lx_2 + 15x_3 &= 3Pl; \\ 12lx_1 + 16lx_2 + 12x_3 &= 5Pl; \\ 5lx_1 + 4lx_2 + 6x_3 &= Pl, \end{aligned}\right\} \qquad (126)$$

имеющая решение $x_1 = -\frac{1}{4}P$, $x_2 = \frac{7}{16}P$, $x_3 = \frac{1}{12}Pl$.

Достоверность и надежность этого решения в [12] не проверялись, хотя все коэффициенты, входящие в систему (126), могут испытывать малые изменения — из-за неточного соответствия реальных длин l_1, l_2, l_3 проектному чертежу, из-за неточного знания модуля упругости на различных участках рамы и т. д.

Оценка надежности решений системы (126) по "числу обусловленности" не заставляет насторожиться: для системы (126) — принимая $P=1$ и $l=1$ — имеем:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}14 & 12 & 15\\ 12 & 16 & 12\\ 5 & 4 & 6\end{pmatrix};\quad \det\mathbf{A}=48;\quad \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{48}\begin{pmatrix}48 & -12 & -96\\ -12 & 9 & 12\\ -32 & 4 & 80\end{pmatrix}. \tag{127}$$

Евклидова норма матрицы **A** равна $\|\mathbf{A}\|=34,438$; та же норма обратной матрицы $\|\mathbf{A}^{-1}\|=2,907$ и "число обусловленности" $\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\|=100,111$ говорят о том, что система (126) достаточно хорошо обусловлена.

Произведем предварительную проверку с использованием формул для вариаций определителя в линейном приближении — формул (98) и (99), ранее опубликованных в [6].

Для системы уравнений (126), полагая для удобства дальнейших вычислений $P=1$ и $l=1$, нетрудно вычислить алгебраические дополнения всех элементов определителей и *вычислить* сами определители:

$$D=\begin{vmatrix}14 & 12 & 15\\ 12 & 16 & 12\\ 5 & 4 & 6\end{vmatrix}=48; \tag{128}$$

$$D_1=\begin{vmatrix}3 & 12 & 15\\ 5 & 16 & 12\\ 1 & 4 & 6\end{vmatrix}=12; \tag{129}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}14 & 3 & 15\\ 12 & 5 & 12\\ 5 & 1 & 6\end{vmatrix}=21; \tag{130}$$

$$D_3=\begin{vmatrix}14 & 12 & 3\\ 12 & 16 & 5\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}=4 \tag{131}$$

и их полные дифференциалы. С использованием формул (98) и (99) получим, что для определителя (128) будет

$$\Delta_{\text{лин}}=2630\varepsilon_0, \tag{132}$$

что по отношению к номинальному значению определителя составит $55\varepsilon_0$. Для определителя (129):

$$\Delta_{\text{лин}} = 1048\varepsilon_0, \tag{133}$$

для определителя (130):

$$\Delta_{\text{лин}} = 984\varepsilon_0, \tag{134}$$

для определителя (131):

$$\Delta_{\text{лин}} = -618\varepsilon_0, \tag{135}$$

или — по отношению к номинальному значению определителя — $\dfrac{\Delta_{\text{лин}}}{D_3} = 154{,}5\varepsilon_0$.

Теперь сразу видно, что наиболее чувствительной к величине неустранимой погрешности является составляющая x_3 вектора решений **x**. Действительно, если вычислять по линейному приближению, то уже при $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{154{,}5} = 0{,}0065$ определитель D_3, а с ним и решение x_3 обратятся в нуль, а при $\varepsilon_0 > 0{,}0065$ решение x_3 изменит знак (в то время как, например, определитель D обратится в нуль лишь при $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{55} = 0{,}0182$). Исследование определителей D, D_1 и D_2 будет продолжено в § 11.

Встретившееся в данном примере сочетание величин решений (x_1 и x_2 много больше x_3) и их погрешностей как раз и приводит к тому, что норма относительных погрешностей всех решений (x_1, x_2 и x_3) сравнительно невелика, в то время как у решения x_3 погрешность большая. Мы уже говорили о том, что "число обусловленности" позволяет оценить лишь норму всех составляющих — от x_1 до x_n — вектора решений, а не погрешность конкретного решения x_i. Именно поэтому проверка по "числу обусловленности" не позволила в данном примере выявить плохую обусловленность решения x_3.

Переходя от предварительной оценки в линейном приближении к точному решению, вычислим для определителя (131) обратную таблицу знаков. Она имеет вид

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ - & + & - \end{vmatrix}.$$

И вычисляя в соответствии с ней значения определителя (131) при вариациях его элементов, при которых определитель (131) переходит в

$$\begin{vmatrix} 14(1+\varepsilon_0) & 12(1-\varepsilon_0) & 3(1+\varepsilon_0) \\ 12(1-\varepsilon_0) & 16(1+\varepsilon_0) & 5(1-\varepsilon_0) \\ 5(1-\varepsilon_0) & 4(1+\varepsilon_0) & 1(1-\varepsilon_0) \end{vmatrix}, \tag{136}$$

получаем (уточняя линейное приближение) значение ε_0, а именно $\varepsilon_0 = 0,0075$, при котором определитель (131), а с ним и решение x_3 обращаются в нуль, а при $\varepsilon_0 > 0,0075$ решение x_3 изменит знак. То, что знак решения x_3 может измениться при столь малых вариациях коэффициентов системы, говорит о большой ненадежности решения x_3.

Отметим, что даже если изменятся не все двенадцать коэффициентов системы уравнений (126), а только три коэффициента определителя D_3, и он примет вид:

$$D_3 = \begin{vmatrix} 14(1-\varepsilon) & 12(1+\varepsilon) & 3(1-\varepsilon) \\ 12 & 16 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 308\varepsilon, \quad (137)$$

то уже при $\varepsilon > 1,3\%$ определитель D_3, а с ним и момент x_3 могут измениться коренным образом, могут изменить знак, стать отрицательными. Поэтому решение x_3 особенно ненадежно и практического смысла не имеет. Неизбежные в ходе эксплуатации малые изменения параметров конструкции могут привести к ее разрушению при изменении знака момента x_3.

Любопытно, что учебник [12] только к 1979 году выдержал восемь изданий большими тиражами. Рассмотренный пример с простой конструкцией, показанной на рис. 4, приведенный в [12] на с. 205, читали и решали десятки тысяч студентов. Тысячи преподавателей проверяли их решения. Тем не менее, никто не обратил внимания на то, что решение x_3, приведенное в [12], ненадежно.

§ 10. Исследование особых частных случаев

В предыдущих параграфах рассматривался наиболее часто встречающийся общий случай, когда при вариациях коэффициентов знаки алгебраических дополнений не изменяются. В этом параграфе будут исследованы весьма редко встречающиеся, но все же возможные частные случаи, когда некоторые из алгебраических дополнений могут изменять знак при вариациях элементов определителя, а также тот частный случай, когда некоторые алгебраические дополнения равны нулю.

При построении таблицы знаков особым частным случаем является равенство нулю одного или нескольких алгебраических дополнений A_{ij}. В этом частном случае методика, описанная в предыдущем параграфе, не позволяет выбрать в соответствующем месте таблицы знаков знак "плюс" или "минус".

Пример 12

Примером может служить простой определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \tag{138}$$

у которого $A_{11} = 1$, $A_{12} = 0$, $A_{13} = -1$, $A_{21} - 1$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = -1$, $A_{31} = -1$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = 3$.

Условимся в таблице знаков на места, соответствующие нулевым алгебраическим дополнениям, ставить пока цифру 0. Таблица знаков для определителя (138) примет вид:

$$\begin{vmatrix} + & 0 & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{vmatrix}. \tag{139}$$

Главная, линейная часть приращения определителя (138) не будет зависеть от величины вариации элемента a_{12} и от ее знака, поскольку в данном случае (рассматриваем "абсолютные" вариации, т. е. $a_{ij\varepsilon} = a_{ij} + \varepsilon_{ij}$) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{лин}} = {} & \varepsilon_{11} \cdot 1 + \varepsilon_{12} \cdot 0 + \varepsilon_{13} \cdot (-1) + \varepsilon_{21} \cdot (-1) + \\ & + \varepsilon_{22} \cdot 1 + \varepsilon_{23} \cdot (-1) + \varepsilon_{31} \cdot (-1) + \varepsilon_{32} \cdot (-1) + \varepsilon_{33} \cdot 3. \end{aligned} \tag{140}$$

Если все $|\varepsilon_{ij}| \le 0{,}01$, то наибольшее приращение определителя (139) в линейном приближении равно:

$$\Delta_{\text{лин. макс}} = 0{,}01(1+0+1+1+1+1+1+1+3) = 0{,}11 \tag{141}$$

и не зависит от ε_{12}. Однако полное приращение определителя за счет нелинейных эффектов может зависеть от ε_{12}. Если в таблице знаков (139) вместо нуля поставить "плюс", то при $|\varepsilon_{ij}| = 0{,}01$ вместо определителя (138) получим определитель

$$\begin{vmatrix} 2{,}01 & 1{,}01 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 2{,}01 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}99 & 1{,}01 \end{vmatrix} = 1{,}1308, \tag{142}$$

и, следовательно, $\Delta_+ = 0{,}1308$, а если в таблице знаков (139) вместо нуля поставить знак "минус", то получим определитель

$$\begin{vmatrix} 2{,}01 & 0{,}99 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 2{,}01 & 0{,}99 \\ 0{,}99 & 0{,}99 & 1{,}01 \end{vmatrix} = 1{,}1204, \tag{143}$$

и $\Delta_+ = 0{,}1204$.

Таким образом, с учетом нелинейностей, изменение определителя все же зависит от знака, соответствующего $A_{ij} = 0$, и в таблице знаков вместо нуля более правильно ставить двойной знак, т. е., например, таблицу (139) записывать в виде:

$$\begin{vmatrix} + & \pm & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{vmatrix} \tag{144}$$

и вычислять определитель как для одного, так и для другого знака, стоящего в таблице.

Пример 13

Рассмотрим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1, \tag{145}$$

у которого $A_{11} = 1$, $A_{12} = -3$, $A_{13} = 2$, $A_{21} = 3$, $A_{22} = -3$, $A_{23} = 1$, $A_{31} = 2$, $A_{32} = -1$, $A_{33} = 0$.

Если для всех i и j будет $\left|\varepsilon_{ij}\right| \le 0{,}01$, то наибольшее приращение определителя в линейном приближении:

$$\Delta_{\text{лин. макс}} = 0{,}01\left(1+2\cdot3+3\cdot2+2\cdot3+4\cdot3+5\cdot1+3\cdot2+5\cdot1+6\cdot0\right) = 0{,}47. \qquad (146)$$

Таблица знаков для определителя (145) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & \pm \end{vmatrix}. \qquad (147)$$

Вычислим проварьированный определитель при выборе знака "плюс" в таблице знаков (147), когда она принимает вид:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}, \qquad (148)$$

а проварьированный определитель равен:

$$\begin{vmatrix} 1{,}01 & 1{,}98 & 3{,}03 \\ -1{,}98 & -4{,}04 & -4{,}95 \\ 3{,}03 & 4{,}95 & 6{,}06 \end{vmatrix} = 1{,}4749.$$

Убеждаемся, что приращение определителя в этом случае достигает 0,4749 или 47,49% от номинального. Если же в таблице знаков (147) выбран знак "минус" и она приняла вид:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & - \end{vmatrix}, \qquad (149)$$

то определитель (145) станет равен

$$\begin{vmatrix} 1{,}01 & 1{,}98 & 3{,}03 \\ -1{,}98 & -4{,}04 & -4{,}95 \\ 3{,}03 & 4{,}95 & 5{,}94 \end{vmatrix} = 1{,}4934$$

и приращение станет равно 0,4934 или 49,34% от его номинального значения и 105% от максимального изменения в линейном приближении.

К наибольшему изменению определителя приводит в данном случае выбор знака "минус" в таблице знаков (147), и вариация определителя оказывается в этом случае в 49,34 раза больше наибольшей вариации каждого из его элементов.

При других сочетаниях знаков вариаций элементов определителя его вариация может быть много меньше. Так, при $\left|\varepsilon_{ij}\right| = 0{,}01$ и сочетании знаков вариаций, соответствующих таблице знаков

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ + & - & + \\ + & - & - \end{vmatrix}, \tag{150}$$

когда определитель (145) переходит в

$$\begin{vmatrix} 1{,}01 & 1{,}98 & 3{,}03 \\ -2{,}02 & -3{,}96 & -5{,}05 \\ 3{,}03 & 4{,}95 & 5{,}94 \end{vmatrix} = 1{,}099, \tag{151}$$

изменение определителя составит уже всего 9,9% от его номинального значения.

Отметим, что если в определителе много алгебраических дополнений, равных нулю (или близких к нулю), то величина вариации будет, в общем и целом, меньше, чем при неравных нулю алгебраических дополнениях.

Пример 14

Рассмотрим в качестве примера определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \tag{152}$$

у которого $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ и, аналогично, $A_{13} = 1$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 1$, $A_{23} = 0$, $A_{31} = 1$, $A_{32} = 0$, $A_{33} = -2$.

Если для всех i и j будет $\varepsilon_{ij} = \pm\varepsilon_0 = \pm 0{,}01$, то наибольшая вариация определителя в линейном приближении будет равна

$$\Delta_{\text{лин. макс}} = 0{,}01\left(0+2+1+2+1+0+1+0+2\right) = 0{,}09, \tag{153}$$

т. е. вариация в линейном приближении будет всего в 9 раз больше вариаций его элементов.

Таблица знаков с возможными вариантами в данном случае имеет вид

$$\begin{vmatrix} \pm & - & + \\ - & + & \pm \\ + & \pm & - \end{vmatrix}. \tag{154}$$

Непосредственное вычисление определителя для всех $2^9 = 512$ сочетаний положительных и отрицательных вариаций его девяти элементов приводит к любопытному результату: к одинаковой (с точностью до шестого знака) величине определителя, равной $-0{,}911897$ (и, тем самым, к наибольшей вариации определителя в направлении возрастания, $\Delta_+ = 0{,}088103$), приводят разные таблицы знаков, а именно

$$\text{первая: }\begin{vmatrix} - & - & + \\ - & + & - \\ + & + & - \end{vmatrix}, \text{ вторая: }\begin{vmatrix} - & - & + \\ - & + & + \\ + & - & - \end{vmatrix}, \text{ третья: }\begin{vmatrix} - & - & + \\ - & + & + \\ + & + & - \end{vmatrix};$$

$$\text{четвертая: }\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & + \\ + & - & - \end{vmatrix}, \text{ пятая: }\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & - \end{vmatrix}, \text{ шестая: }\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & + & - \end{vmatrix}. \tag{155}$$

Все они являются вариантами таблицы (154) и приводят к одному и тому же значению определителя: $-0,911897$.

Любопытно, что к наибольшему отрицательному значению определителя, к значению $-1,092695$, и, следовательно, к наибольшей вариации в направлении убывания, к $\Delta_- = -0,092695$, приводит всего одна таблица знаков, а именно таблица:

$$\begin{vmatrix} - & + & - \\ + & - & - \\ - & - & + \end{vmatrix}, \tag{156}$$

которая, как и следовало ожидать, является обратной по отношению к одному из вариантов таблицы (154), но (что интересно) не является обратной ни к одной из таблиц (155).

Для определителя (152) при $|\varepsilon_{ij}| \le 0,01$ наибольшая вариация определителя в 9,2695 раз больше вариации каждого из его элементов.

Для других таблиц знаков, отличных от таблиц (155) и (156), вариации определителя будут меньше.

Так, для таблицы знаков

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ + & + & + \\ + & + & + \end{vmatrix}$$

будет $\det = -1,030301$ и вариация определителя равна 0,030301.

Для таблиц

$$\begin{vmatrix} + & + & + \\ + & - & + \\ - & + & + \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} + & + & + \\ + & - & + \\ - & - & + \end{vmatrix}$$

будет одинаково $\det = -1,071509$.

Для таблицы

$$\begin{vmatrix} - & - & - \\ + & + & + \\ + & + & + \end{vmatrix}$$

имеем $\det = -1{,}009899$, т. е. вариация определителя будет в этом случае очень малой — даже меньшей, чем вариация каждого из элементов определителя. Еще меньшей будет вариация определителя при таблицах знаков

$$\begin{vmatrix} - & - & - \\ + & - & + \\ - & + & - \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} - & - & - \\ + & - & + \\ - & - & - \end{vmatrix},$$

для которых одинаково $\det = -1{,}0095$.

Таблицам

$$\begin{vmatrix} - & - & - \\ - & + & + \\ + & - & + \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} - & - & - \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

соответствует $\det = -0{,}98109$ и одинаковая малая вариация определителя в направлении возрастания, а именно $\Delta_+ = 0{,}010891$.

Пример 15

Рассмотрим теперь наиболее экзотический объект — определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (157)$$

у которого *все* алгебраические дополнения равны нулю. У подобных определителей при вариациях их элементов главная, линейная часть приращения определителя равна нулю и величина приращения будет зависеть только от членов высшего порядка.

Для такого экзотического объекта, как определитель (157), общая теория построения таблиц знаков для вычисления наибольшего отклонения определителя от его номинального значения не работает. Прямой перебор показал, что в данном случае существует не одна, а несколько таблиц знаков, приводящих (если для всех i и j будет $|\varepsilon_{ij}| = 0{,}01$) к одинаковым с точностью до четвертого знака максимальным вариациям определителя.

Так, к наибольшему отклонению в направлении возрастания, равному с точностью до четвертого знака 0,0012, приводят таблицы знаков

$$\begin{vmatrix} + & + & - \\ - & + & + \\ + & - & + \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} + & - & + \\ + & + & - \\ - & + & + \end{vmatrix}, \qquad (158)$$

а к наибольшему отклонению в направлении убывания, равному –0,0012, приводят таблицы знаков

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & + \\ + & + & - \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} + & + & - \\ + & - & + \\ - & + & + \end{vmatrix}.$$

Таким образом, для определителя (157) его наибольшая вариация не превысит всего 0,12 от наибольшей вариации каждого из элементов определителя.

Рассмотрим первую из таблиц знаков (158), когда определитель (157) при $|\varepsilon_{ij}| = \varepsilon_0$ принимает вид:

$$\begin{vmatrix} 1+\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 & 1-\varepsilon_0 \\ 1-\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 \\ 1+\varepsilon_0 & 1-\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 \end{vmatrix} = 12\varepsilon_0^2 + 4\varepsilon_0^3.$$

Эта формула особенно наглядно показывает, что вариация определителя целиком зависит от нелинейных членов.

Рассматривая вторую из таблиц знаков, когда определитель (157) после вариаций его элементов принимает вид

$$\begin{vmatrix} 1+\varepsilon_0 & 1-\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 \\ 1+\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 & 1-\varepsilon_0 \\ 1-\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 \end{vmatrix} = 12\varepsilon_0^2 + 4\varepsilon_0^3,$$

убеждаемся, что и для первой, и для второй из таблиц знаков (158) вариации определителей в точности равны друг другу. Зависимость величины определителей от ε_0 показана на рис. 5.

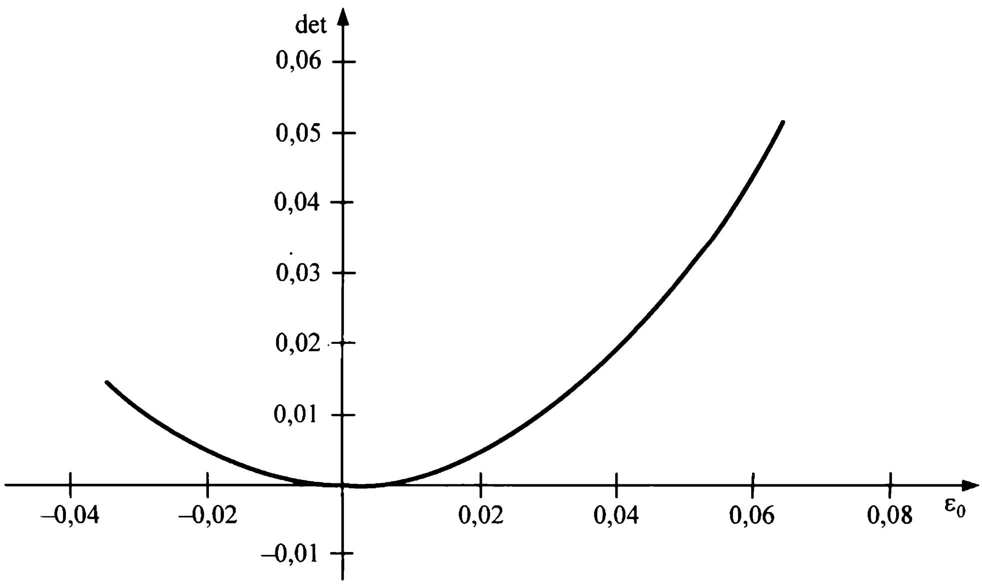

Рис. 5

Аналогично, составляя вариации элементов определителя (157) в соответствии с первой и второй таблицами знаков (158), убеждаемся, что

$$\begin{vmatrix} 1+\varepsilon_0 & 1-\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 \\ 1-\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 \\ 1+\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 & 1-\varepsilon_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 & 1-\varepsilon_0 \\ 1+\varepsilon_0 & 1-\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 \\ 1-\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 & 1+\varepsilon_0 \end{vmatrix} = -12\varepsilon_0^2 - 4\varepsilon_0^3.$$

Разумеется, определители, у которых все алгебраические дополнения равны нулю, на практике почти никогда не встречаются, но как особый экзотический объект они интересны.

Изложенный материал позволяет дать дополнительное обоснование достоверности оценки вариации определителя при малых, но конечных вариациях его элементов. Строго говоря, таблица знаков строится для сколь угодно малых вариаций ε_{ij}. Не изменится ли она, если вариации ε_{ij} малы, но конечны? Знак, стоящий в таблице знаков на пересечении i-й строки и j-го столбца, может измениться в том случае, если алгебраическое дополнение A_{ij} очень мало и может изменить знак при переходе от номинальных значений элементов определителя к проварьированным. Для получения точной величины максимальной вариации определителя нужно следить за возможными изменениями знаков алгебраических дополнений.

Пример 16

Рассмотрим вместо определителя (145) близкий к нему определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2+m & 3 \\ -2 & -4 & -5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1-3m,$$

где m — положительное число, малое в сравнении с единицей. Алгебраические дополнения элементов этого определителя равны $A_{11}=1$, $A_{12}=-3$, $A_{13}=2$, $A_{21}=3-6m$, $A_{22}=-3$, $A_{23}=1+3m$, $A_{31}=2-5m$, $A_{32}=-1$, $A_{33}=2m>0$, и поэтому его таблица знаков имеет вид

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Если все элементы определителя получили малые изменения $\pm\varepsilon$, знаки которых соответствуют выписанной таблице, то определитель принимает вид

$$\begin{vmatrix} 1+\varepsilon & (2+m)(1-\varepsilon) & 3(1+\varepsilon) \\ -2(1-\varepsilon) & -4(1+\varepsilon) & -5(1-\varepsilon) \\ 3(1+\varepsilon) & 5(1-\varepsilon) & 6(1+\varepsilon) \end{vmatrix}.$$

Для ε, малых в сравнении с единицей, знаки алгебраических дополнений от A_{11} до A_{32} не меняются, а дополнение A_{33}, равное определителю

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1+\varepsilon & (2+m)(1-\varepsilon) \\ -2(1+\varepsilon) & -4(1+\varepsilon) \end{vmatrix} = 2m - 16\varepsilon - 4m\varepsilon + 2m\varepsilon^2,$$

может при увеличении ε от исходного значения $\varepsilon = 0$ легко изменить знак. Если, например, $m = 0{,}01$, то знак A_{33} изменяется при $\varepsilon > 0{,}0124$, а при $m = 0{,}1$ знак A_{33} меняется при $\varepsilon > 0{,}122$. Поэтому если, например, $m = 0{,}01$, то при расчете вариации определителя при $\varepsilon > 0{,}0124$ нужно учесть, что таблица знаков изменилась и стала соответствовать $A_{33} < 0$.

Нужно также иметь в виду, что малые алгебраические дополнения мало влияют на вариацию исследуемого определителя, и поэтому с достаточной для практических целей точностью можно считать знаки алгебраических дополнений неизменными и для вычисления вариаций определителей пользоваться простым алгоритмом, приведенном в § 6, тем более, что сами величины вариаций коэффициентов системы уравнений, которая является математической моделью реального объекта, почти всегда можно оценить только приближенно.

§ 11. Вычисление точных значений вариаций каждой из составляющих вектора решений (предлагаемый алгоритм)

Методика вычисления вариаций определителей, изложенная в предыдущих параграфах, позволяет, основываясь на формулах Крамера:

$$x_i = \frac{D_i}{D} \quad (i = 1, 2, ..., n),$$

получить точные значения вариаций всех составляющих x_1, x_2, ..., x_n вектора решений. Однако здесь есть некоторые тонкости.

В общем и целом вариация x_i будет наибольшей (в направлении увеличения) в том случае, если определитель D получит наибольшую возможную вариацию в направлении уменьшения величины определителя, а определитель D_i испытает наибольшую возможную вариацию в направлении увеличения.

В первом приближении вариация x_i, вариация частного от деления определителя D_i на определитель D, является суммой вариаций D и D_i. Однако на самом деле вариация x_i меньше суммы вариаций D и D_i, поскольку нужно учитывать, что вариации элементов определителей D и D_i не являются независимыми, т. к. $n-1$ столбцов у определителей D и D_i совпадают.

Пример 17

Возникающие проблемы поясним на простом примере системы:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 1; \\ x_1 + x_2 &= 2. \end{aligned}\right\} \qquad (159)$$

Для этой системы

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad (160)$$

и, следовательно, $x_1 = \frac{3}{3} = 1$, $x_2 = \frac{3}{3} = 1$.

Остановимся на вычислении вариации x_2, предполагая, что относительные вариации всех шести коэффициентов системы (159) не превышают по модулю величину 0,01, но знаки их могут быть любыми.

Для определителя D наибольшая вариация в направлении убывания будет тогда, когда знаки вариаций элементов будут определяться его обратной таблицей знаков, которая для определителя D имеет вид

$$\begin{vmatrix} - & + \\ - & - \end{vmatrix}, \tag{161}$$

а сам определитель при этом переходит в определитель

$$\begin{vmatrix} 2(1-0{,}01) & -1(1+0{,}01) \\ 1(1-0{,}01) & 1(1-0{,}01) \end{vmatrix} = 2{,}96 \tag{162}$$

(здесь и в дальнейшем вычисления проводились с точностью до третьего знака).

Для определителя D_2 наибольшая вариация в направлении возрастания будет при таблице знаков

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}, \tag{163}$$

когда определитель D_2 примет вид

$$\begin{vmatrix} 2(1+0{,}01) & 1(1-0{,}01) \\ 1(1-0{,}01) & 2(1+0{,}01) \end{vmatrix} = 3{,}06. \tag{164}$$

Вариация определителя D_2 равна 0,06 или 2% от его номинального значения.

Вариация x_2 в первом приближении равна сумме вариаций D_2 и D и составляет — в первом приближении — три процента.

Однако вариации элементов первого столбца определителей D и D_2 одинаковы (это вариации элементов a_{11} и a_{12}; они одинаковы и у D, и у D_2). Поэтому возможны два варианта расчета.

Первый вариант. Ориентируемся в основном на таблицу знаков определителя D. В нем, а также в первом столбце определителя D_2, выбираем знаки в соответствии с таблицей знаков (161) и только во втором столбце определителя D_2 расставляем знаки вариаций в соответствии с его таблицей знаков, т. е. в соответствии с таблицей (163). Получаем:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2(1-0{,}01) & 1(1-0{,}01) \\ 1(1-0{,}01) & 2(1+0{,}01) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(1-0{,}01) & -1(1+0{,}01) \\ 1(1-0{,}01) & 1(1-0{,}01) \end{vmatrix}} = \frac{3{,}02}{2{,}96} = 1{,}0203, \tag{165}$$

т. е. вариация x_2 в направлении возрастания равна 0,0203.

Второй вариант. Ориентируемся на числитель, на определитель D_2. В нем, а также в первом столбце определителя D, выбираем знаки в соответствии с таблицей знаков для определителя D_2, т. е. с таблицей (163). И только во втором столбце определителя D выбираем знаки в соответствии с обратной таблицей знаков определителя D, т. е. в соответствии с таблицей (161).

Получаем:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2(1+0{,}01) & 1(1-0{,}01) \\ 1(1-0{,}01) & 2(1+0{,}01) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(1+0{,}01) & -1(1+0{,}01) \\ 1(1-0{,}01) & 1(1-0{,}01) \end{vmatrix}} = \frac{3{,}06}{3} = 1{,}02, \qquad (166)$$

т. е. вариация x_2 при втором варианте комбинаций знаков вариаций элементов матрицы $\mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{b}$ системы (159) равна 0,02 или 2% от его номинального значения.

В данном случае первый и второй варианты расчета привели к практически одинаковому результату.

Поясним: в первом варианте мы принимаем в расчет наибольшую возможную (в направлении убывания) вариацию определителя D. Вариация определителя D_i при этом варианте расчета может оказаться не максимально возможной.

Во втором варианте мы учитываем в расчете максимально возможную (в направлении возрастания) вариацию определителя D_2; при этом вариация определителя D может оказаться не максимально возможной. Теперь можно сформулировать общее правило вычисления наибольшей вариации любой составляющей x_i вектора решений $\mathbf{x}$.

Общее правило (алгоритм). Исходным материалом для расчета служат оценки максимальных абсолютных величин вариаций элементов a_i и b_i в виде неравенств:

$$|\varepsilon_{ij}| \le \varepsilon_{ij0}; \quad |b_i| \le b_{i0} \qquad (167)$$

и вычисленные таблицы знаков определителей D и D_i в формулах Крамера.

Выполняем два варианта расчета.

Первый вариант ориентирован на определитель D в формуле $x_i = \dfrac{D_i}{D}$. Вычисляем наименьшее возможное значение определителя D по его обратной таблице знаков. После этого вычисляем значение определителя D_i с учетом вариаций его элементов. При этом знаки вариаций элементов всех столбцов определителя, кроме i-го столбца определителя (этот столбец, напомним, совпадает со столбцом b_1, b_2, ..., b_n правой части), выбираем в соответствии с таблицей знаков определителя D. Далее делим получившиеся с учетом вариаций значения определителей D и D_i друг на друга и получаем значение x_i.

Второй вариант ориентирован на определитель D_i. Знаки вариаций всех элементов определителя D_i выбираются в соответствии с его таблицей знаков. После этого вычисляем определитель D_i и получаем его наибольшее возможное значение (при данной величине вариаций коэффициентов). Затем приступаем к вычислению определителя D с учетом вариаций его элементов. При этом знаки вариаций элементов всех столбцов определителя D, кроме i-го столбца, выбираем в соответствии с таблицей знаков определителя D_i. После того как вычислены определители D_i и D, вычисляем $x_i = \frac{D_i}{D}$ и сравниваем с результатом расчета x_i по первому варианту.

Заметим, что используя приведенное правило, мы вычисляем наибольшую возможную вариацию x_i в положительном направлении — в направлении возрастания. Если необходимо вычислить наибольшую возможную вариацию x_i в отрицательном направлении, в направлении убывания, то нужно учитывать, что эта вариация будет наибольшей при условии, что вариация определителя D_i будет наибольшей в направлении убывания (т. е. знаки вариаций элементов будут соответствовать обратной таблице знаков определителя D_i), а вариация определителя D будет наибольшей в направлении возрастания (т. е. знаки вариаций элементов будут соответствовать прямой таблице знаков определителя D). Поскольку определители D и D_i имеют $n-1$ общих столбцов, то совместить эти противоречивые требования невозможно — и нужно, как и ранее, использовать два варианта расчета для вычисления наименьшего возможного значения x_i.

Первый вариант. Как и ранее, он ориентирован на определитель D. В определителе D выбираем знаки всех его вариаций в соответствии с его таблицей знаков, после чего вычисляем определитель с учетом вариаций. Затем в определителе D_i знаки вариаций элементов всех столбцов, кроме i-го столбца, расставляем в соответствии с таблицей знаков определителя D, а знаки вариаций i-го столбца расставляем в соответствии с обратной таблицей знаков определителя D_i. Потом вычисляем определитель D_i с учетом вариаций его элементов и делим D_i на D.

Второй вариант. Как и ранее, он ориентирован на определитель D_i. Знаки вариаций всех элементов которого выбираем в соответствии с его обратной таблицей знаков, после чего вычисляем определитель D_i с учетом вариаций его элементов. В определителе D знаки вариаций всех его столбцов, кроме i-го, расставляем в соответствии с обратной таблицей знаков определителя D_i, а знаки вариаций i-го столбца расставляем в соответствии с таблицей знаков определителя D. Затем вычисляем определитель D с учетом вариаций его элементов и делим D_i на D. Далее сравниваем, в каком варианте расчета вариация x_i больше.

В целом общее правило вычисления вариаций x_i в направлении возрастания и в направлении убывания с учетом двух вариантов расчета получилось довольно громоздким. Для реального использования этого правила необходимо составить программу для вычислений на ЭВМ.

Продолжение примера 17

Рассмотрим ту же самую систему (159) и рассчитаем наибольшую возможную вариацию x_2 в направлении ее убывания.

Первый вариант. Учитывая таблицы знаков (161) и (162), получим, что для первого варианта, когда за основу берется таблица знаков определителя D и только во втором столбце определителя D_2 знаки вариаций проставляются в соответствии с его обратной таблицей знаков, будет:

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2(1+0{,}01) & 1(1+0{,}01) \\ 1(1+0{,}01) & 2(1-0{,}01) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(1+0{,}01) & -1(1-0{,}01) \\ 1(1+0{,}01) & 1(1+0{,}01) \end{vmatrix}} = \frac{2{,}98}{3{,}03} = 0{,}983.$$

Второй вариант. Здесь за основу берется определитель D_2, знаки вариаций в котором расставляются в соответствии с его обратной таблицей знаков. В соответствии с той же таблицей приходится расставлять знаки вариаций и в первом столбце определителя D. И только во втором его столбце знаки вариаций расставляются в соответствии с таблицей знаков определителя D, т. е. таблицей:

$$\begin{vmatrix} + & - \\ + & + \end{vmatrix}. \tag{168}$$

Таким образом,

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2(1-0{,}01) & 1(1+0{,}01) \\ 1(1+0{,}01) & 2(1-0{,}01) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2(1-0{,}01) & -1(1-0{,}01) \\ 1(1+0{,}01) & 1(1+0{,}01) \end{vmatrix}} = 0{,}967. \tag{169}$$

В данном случае к наибольшей величине вариации x_2 в направлении убывания приводит второй вариант и сочетание знаков вариаций элементов a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}; b_1, b_2, показанное в формуле (169), т. е. вариация a_{11} имеет знак "минус", a_{12} — знак "минус", a_{21} — знак "плюс", a_{22} — знак "плюс", b_1 — знак "плюс", b_2 — знак "минус".

Окончательно устанавливаем: составляющая x_2 вектора решений простой системы уравнений (159), вследствие вариаций коэффициентов системы не превышающих 0,01 от их номинальных значений, подчинена неравенствам:

$$0{,}967 \le x_2 \le 1{,}02, \tag{170}$$

причем оценка (170) является точной, поскольку можно указать такое конкретное сочетание знаков вариаций коэффициентов системы (159), при которых неравенства (170) превращаются в точные равенства.

Приведенный пример показывает, что точная оценка погрешности решений системы линейных алгебраических уравнений является несколько более сложной задачей, чем вычисление самого решения.

Пример 18

Вернемся к уже рассмотренной системе уравнений (126). Ранее уже было показано, что составляющая решения x_3 совершенно ненадежна. Это выявлялось уже на стадии исследования определителя D_3, поскольку при очень малых вариациях коэффициентов определителя D_3, при $\varepsilon_0 \geq 0{,}0065$, определитель D_3, а с ним и x_3 (т. е. момент, приложенный к концу рамы) меняет знак. Исследуем теперь x_1 и x_2.

Составляющие решения x_1 и x_2, определяемые по формулам Крамера через определители D_1, D_2 и D, равны:

$$x_{1\text{ном}} = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 12 & 15 \\ 5 & 16 & 12 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 14 & 12 & 15 \\ 12 & 16 & 12 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix}} = -\frac{12}{48} = -\frac{1}{4};$$

$$x_{2\text{ном}} = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 14 & 3 & 15 \\ 12 & 5 & 12 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 14 & 12 & 15 \\ 12 & 16 & 12 \\ 5 & 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{21}{48} = 0{,}4375. \qquad (171)$$

Для предварительной оценки возможных вариаций составляющих вектора решений x_1 и x_2 вычислим вариации определителей, входящих в формулы (171), в линейном приближении.

Вычисляя алгебраические дополнения для определителя D, получаем:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 16 & 12 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 48; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 12 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -12; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 12 & 16 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -32, \qquad (172)$$

и, аналогично, $A_{21} = -12$, $A_{22} = 9$, $A_{23} = 4$, $A_{31} = -96$, $A_{32} = 4$, $A_{33} = 80$.

Таблица знаков определителя D принимает вид:

$$\begin{vmatrix} + & - & - \\ - & + & + \\ - & + & + \end{vmatrix}. \tag{173}$$

Если абсолютные величины вариаций всех элементов определителя D равны $\left|\varepsilon_{ij}\right| \le \varepsilon_0$, то наибольшая вариация определителя при наиболее неблагоприятном сочетании знаков вариаций его элементов будет (в линейном приближении) равна:

$$\begin{aligned} &\Delta_{\text{лин}} = \\ &= \varepsilon_0 (14 \cdot 48 + 12 \cdot 12 + 15 \cdot 32 + 12 \cdot 12 + 16 \cdot 9 + 12 \cdot 4 + 5 \cdot 96 + 4 \cdot 12 + 6 \cdot 80) = \\ &= 2630\varepsilon_0, \end{aligned} \tag{174}$$

и определитель D удовлетворяет (в линейном приближении) неравенствам

$$D_{\text{ном}} - 2630\varepsilon_0 \le D \le D_{\text{ном}} + 2630\varepsilon_0,$$

или в относительных единицах

$$1 - 54{,}79\varepsilon_0 \le \frac{D}{D_{\text{ном}}} \le 1 + 54{,}79\varepsilon_0, \tag{175}$$

где $D_{\text{ном}}$ — номинальное значение определителя D.

Для учета слабой нелинейной зависимости вариации определителя от вариаций его элементов следует вычислить определитель D с проварьированными элементами, причем знаки вариаций соответствуют таблице знаков (173). Если для всех i и j будет $\left|\varepsilon_{ij}\right| = 0{,}01$, то определитель D переходит в

$$\begin{aligned} D_{\max} &= \begin{vmatrix} 14(1+0{,}01) & 12(1-0{,}01) & 15(1-0{,}01) \\ 12(1-0{,}01) & 16(1+0{,}01) & 12(1+0{,}01) \\ 5(1-0{,}01) & 4(1+0{,}01) & 6(1+0{,}01) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 14{,}14 & 11{,}88 & 14{,}85 \\ 11{,}88 & 16{,}16 & 12{,}12 \\ 4{,}95 & 4{,}04 & 6{,}06 \end{vmatrix} = 74{,}665 = D_{\text{ном}} + 26{,}665. \end{aligned} \tag{176}$$

Формула (176) показывает, что для определителя D будет $\Delta_+ = 26{,}665$ и очень мало отличается от $\Delta_{\text{лин}}$, поскольку при $\varepsilon_0 = 0{,}01$ будет $\Delta_{\text{лин}} = 26{,}3$.

Для вычисления наибольшей вариации определителя D в направлении убывания знаки вариаций элементов следует выбирать в соответствии с таблицей знаков, обратной по отношению к таблице (173), т. е. таблицей

$$\begin{vmatrix} - & + & - \\ + & - & - \\ + & - & - \end{vmatrix}, \tag{177}$$

когда определитель D переходит в определитель

$$D_{\min} = \begin{vmatrix} 14(1-0{,}01) & 12(1+0{,}01) & 15(1+0{,}01) \\ 12(1+0{,}01) & 16(1-0{,}01) & 12(1-0{,}01) \\ 5(1+0{,}01) & 4(1-0{,}01) & 6(1-0{,}01) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 13{,}86 & 12{,}12 & 15{,}15 \\ 12{,}12 & 15{,}84 & 11{,}88 \\ 5{,}05 & 3{,}96 & 5{,}94 \end{vmatrix} = 21{,}863. \quad (178)$$

Снова убеждаемся, что $\Delta_{-} = 48 - 21{,}863 = 27{,}137$ мало отличается от $\Delta_{\text{лин}}$.

Те же вычисления проделаем для определителя D_2, для которого

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 18; & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 12 & 12 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -12; & A_{13} &= \begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -13; \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -3; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 14 & 15 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 9; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 1; \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 3 & 15 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = -39; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 14 & 15 \\ 12 & 12 \end{vmatrix} = 12; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = 34, \end{aligned} \quad (179)$$

таблица знаков имеет вид

$$\begin{vmatrix} + & - & - \\ - & + & + \\ - & + & + \end{vmatrix},$$

и, следовательно, если для всех i и j будет $|\varepsilon_{ij}| \le |\varepsilon_0|$, то наибольшая возможная вариация определителя D_2 в линейном приближении равна

$$\begin{aligned} &\Delta_{\text{лин}} = \\ &= \varepsilon_0 (14 \cdot 18 + 3 \cdot 12 + 15 \cdot 13 + 12 \cdot 3 + 5 \cdot 9 + 12 \cdot 1 + 5 \cdot 39 + 1 \cdot 9 + 6 \cdot 34) = \\ &= 984\varepsilon_0. \end{aligned} \quad (180)$$

Следовательно, определитель D_2 в линейном приближении удовлетворяет неравенствам

$$D_{2\text{ном}} - 984\varepsilon_0 \le D_2 \le D_{2\text{ном}} + 984\varepsilon_0, \quad (181)$$

или в относительных единицах

$$1 - 47\varepsilon_0 \le \frac{D_2}{D_{2\text{ном}}} \le 1 + 47\varepsilon_0. \quad (182)$$

Из формул (175) и (182) следует простая "оценка сверху" в линейном приближении для вариации x_2 в предположении, что вариации D и D_2 независимы:

$$1-47\varepsilon_0-49,7\varepsilon_0 \le \frac{x_2}{x_{2\text{ном}}} \le 1+47\varepsilon_0+49,7\varepsilon_0, \tag{183}$$

и, следовательно

$$1-96,7\varepsilon_0 \le \frac{x_2}{x_{2\text{ном}}} \le 1+96,7\varepsilon_0,$$

но достигать верхней и нижней граней этой оценки отношение $\frac{x_2}{x_{2\text{ном}}}$ могло бы лишь в случае независимости вариаций определителей D и D_2. На самом деле эти вариации зависимы, и это позволяет дать более точную оценку.

Неравенства (175) и (182) показывают, что исследование определителя D_2 еще не позволяет вынести окончательное заключение о надежности или ненадежности составляющей решения x_2, и необходимо более детальное исследование вариации x_2 с учетом возможных сочетаний вариаций определителей D и D_2.

Вариация x_2 в направлении возрастания будет наибольшей в том случае, если определитель D_2, стоящий в числителе, в наибольшей степени возрастет, а определитель D в знаменателе в наибольшей степени уменьшится. Величина составляющей решения x_2 в наибольшей степени уменьшится, если определитель D_2 как можно более уменьшится, а определитель D как можно более возрастет при вариациях своих элементов. Однако вариации D и D_2 не являются независимыми и поэтому необходимо, как уже указывалось ранее, учитывать два варианта сочетания вариаций элементов определителей D и D_2.

Первый вариант расчета. Ориентируемся на знаменатель, на наибольшую (в направлении возрастания и направлении убывания) вариацию определителя D. В линейном приближении она, как показывает формула (175), равна $\pm 2630\varepsilon_0$ и соответствует либо прямой, либо обратной таблице знаков определителя D, а именно, либо таблице (173), либо обратной к ней таблице (177).

В определителе D_2 первый и третий столбцы при первом варианте расчета совпадают с соответствующими столбцами определителя D, и поэтому знаки их вариаций не произвольны, а обязаны соответствовать таблице знаков определителя D. Знаки вариаций элементов второго столбца определителя D_2 произвольны, и к наибольшему возрастанию D_2 приведут вариации, знаки которых соответствуют таблице знаков (180). В целом таблица знаков определителя D_2, обеспечивающая его наибольшее возрастание при выборе первого варианта расчета, принимает вид

$$\begin{vmatrix} - & - & + \\ + & + & - \\ + & + & - \end{vmatrix}. \tag{184}$$

Вычисляя определитель D_2 при $|\varepsilon_{ij}| = 0,01$ и таблице знаков (184), получаем, что в данном случае

$$D_2' = \begin{vmatrix} 13,86 & 2,97 & 15,15 \\ 12,12 & 5,05 & 11,88 \\ 5,05 & 1,01 & 5,94 \end{vmatrix} = 12,91. \tag{185}$$

Поделив D_2' на определитель (178), получаем

$$x_{2\max} = \frac{12,91}{21,863} = 0,5905. \tag{186}$$

Это — максимальное значение x_2, достигаемое при комбинации знаков вариаций, соответствующей первому варианту расчета.

Теперь приступим к вычислению изменения x_2 в направлении убывания. Это изменение будет наибольшим, если определитель D_2 станет как можно меньше, а определитель D, стоящий в знаменателе, как можно больше. Таким образом, изменение x_2 в направлении убывания будет наибольшим, если знаки вариаций элементов определителя D, а также первого и третьего столбцов определителя D_2 будут соответствовать таблице знаков (173), а знаки вариаций второго столбца определителя D_2 будут соответствовать обратной таблице знаков для D_2. В целом таблицы знаков для дроби

$$x_2 = \frac{D_2}{D}, \tag{187}$$

обеспечивающие наибольшее изменение x_2 в направлении убывания, имеют вид:

$$x_2 \to \frac{\begin{vmatrix} + & + & - \\ - & - & + \\ - & - & + \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} + & - & - \\ - & + & + \\ - & + & + \end{vmatrix}}. \tag{188}$$

Вычисляя определители D и D_2 при вариациях $|\varepsilon_{ij}| = 0,01$ и таблицах знаков вариаций, указанных в формуле (188), получаем:

$$x_{2\min} = \frac{\begin{vmatrix} 14,14 & 3,03 & 14,85 \\ 11,88 & 4,95 & 12,12 \\ 4,95 & 0,99 & 6,06 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 14,14 & 11,88 & 14,85 \\ 11,88 & 16,16 & 12,12 \\ 4,95 & 4,04 & 6,06 \end{vmatrix}} = \frac{28,93}{74,665} = 0,38746. \qquad (189)$$

Это — минимальное значение x_2, достигаемое при комбинации знаков вариаций, соответствующих той, что показана в формуле (188). Перейдем теперь ко второму варианту расчета.

Второй вариант расчета. В этом варианте ориентируемся прежде всего на числитель, на определитель D_2, и учитываем, что вариация x_2 в направлении возрастания будет наибольшей тогда, когда D_2 примет наибольшее значение, а определитель D — наименьшее из возможных. Определитель D_2 будет наибольшим при знаках вариаций его элементов, соответствующим таблице знаков (180). В определителе D знаки вариаций первого и третьего столбцов должны соответствовать той же таблице (180), и только во втором столбце знаки вариаций не связаны этим условием, и к минимальной величине D приводят знаки, соответствующие обратной таблице знаков для D, т. е. таблице (177).

В целом таблицы знаков для вычисления $x_{2\max}$ можно записать в виде:

$$x_2 \rightarrow \frac{\begin{vmatrix} + & - & - \\ - & + & + \\ - & + & + \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} + & + & - \\ - & - & + \\ - & - & + \end{vmatrix}}, \qquad (190)$$

и тогда,

$$x_{2\max} = \frac{\begin{vmatrix} 14,14 & 2,97 & 14,85 \\ 11,88 & 5,05 & 12,12 \\ 4,95 & 1,01 & 6,06 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 14,14 & 12,12 & 14,85 \\ 11,88 & 15,84 & 12,12 \\ 4,95 & 3,96 & 6,06 \end{vmatrix}}. \qquad (191)$$

Вычислив определители, получим:

$$x_{2\max} = \frac{30,878}{67,484} = 0,45756. \qquad (192)$$

Переходя к вычислению наименьшего возможного при втором варианте расчёта значения x_2, отметим, что это наименьшее значение будет достигаться, если числитель D_2 будет минимален, знаменатель D — максимален. Поскольку во втором варианте расчета начинаем с числителя, с D_2, то для D_2 учитываем его обратную таблицу знаков, т. е. таблицу

$$\begin{vmatrix} - & + & + \\ + & - & - \\ + & - & - \end{vmatrix}, \tag{193}$$

обратную к таблице (180).

В таблице знаков для знаменателя, для определителя D, первый и третий столбцы совпадают с соответствующими столбцами таблицы (193), и только второй столбец может быть выбран как обеспечивающий наибольшее возможное значение D. Это значение обеспечит столбец, совпадающий со вторым столбцом таблицы (173). В целом таблица знаков для знаменателя, для определителя D, имеет вид

$$\begin{vmatrix} - & - & + \\ + & + & - \\ + & + & - \end{vmatrix}. \tag{194}$$

Вычисляя определители D и D_2 с вариациями, у которых $|\varepsilon_{ij}| = 0,01$ и имеющими знаки, соответствующие таблицам (193) и (194), получаем:

$$x_{2\min} = \frac{\begin{vmatrix} 13,86 & 3,03 & 15,15 \\ 12,12 & 4,95 & 11,88 \\ 5,05 & 0,99 & 5,94 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 13,86 & 11,88 & 15,15 \\ 12,12 & 16,16 & 11,88 \\ 5,05 & 4,04 & 5,94 \end{vmatrix}} = \frac{11,23}{28,124} = 0,39766. \tag{195}$$

Сопоставляя неравенства (186), (189), (192) и (195), окончательно определяем интервал, внутри которого может находиться составляющая x_2 вектора решений $\mathbf{x}$ системы уравнений (126):

$$0,38746 \le x_2 \le 0,5905, \tag{196}$$

или в относительных единицах

$$0,886 \le \frac{x_2}{x_{2\text{ном}}} \le 1,3497. \tag{197}$$

При этом оценки (196) и (197) являются оценками точными, т. е. всегда можно указать такую комбинацию вариаций коэффициентов исследуемой системы уравнений, при которой левое или правое неравенство вида (196) выполняется со знаком равенства.

Так, например, равенство

$$x_2 = 0{,}38746 \tag{198}$$

выполняется, если вариации матрицы коэффициентов системы уравнений (126) (при $|\varepsilon_{ij}| = 0{,}01$) соответствуют таблице знаков

$$\begin{vmatrix} + & - & - \\ - & + & + \\ - & + & + \end{vmatrix}, \tag{199}$$

а вариации коэффициентов вектора-столбца правой части удовлетворяют таблице знаков

$$\begin{vmatrix} + \\ - \\ - \end{vmatrix}. \tag{200}$$

Примечание

Формулы (179) показывают, что у D_2 алгебраические дополнения A_{21} и A_{23} малы, поэтому учет возможности изменения их знаков при $\varepsilon_0 = 0{,}01$, о котором говорилось в § 10, может немного уточнить значения $x_{2\max}$ и $x_{2\min}$.

§ 12. Общий алгоритм точной оценки погрешностей каждой из составляющих вектора решений

Материал предыдущего параграфа показывает, что точная оценка возможной погрешности каждой из составляющих x_1, x_2, ..., x_n вектора $\mathbf{x}$ требует довольно громоздких вычислений.

Сперва для построения таблицы знаков необходимо вычислить алгебраические дополнения определителей D и D_i в формулах Крамера. Каждое из алгебраических дополнений у системы, состоящей из n уравнений, является определителем $n-1$ порядка, и его вычисление требует, как известно [9, 10], примерно $(n-1)^3$ умножений. Всего вычисление всех n^2 алгебраических дополнений требует примерно n^5 умножений. Однако для построения таблицы знаков можно обойтись и без непосредственного вычисления алгебраических дополнений, а использовать обратную матрицу $\mathbf{A}^{-1}$, для вычисления которой существуют удобные и хорошо разработанные программы, поскольку каждый из элементов обратной матрицы является частным от деления соответствующего алгебраического дополнения на определитель матрицы.

Кроме того, далеко не всегда необходимо использовать все вычисления, изложенные в предыдущем параграфе. Можно начать с вычисления вариаций определителей D и D_i в линейном приближении. Если эти вариации велики по сравнению с номинальными их значениями, то это говорит о плохой обусловленности исследуемой системы, если малы — то о хорошей обусловленности.

Можно также вычислить "естественную границу вариаций", т. е. вариации матрицы $\mathbf{A}$, знаки которых соответствуют обратной таблице знаков, а их абсолютные величины таковы, что определитель матрицы $\mathbf{A}$ обращается в нуль.

Далее, если в ходе вычисления вариаций определителей D_1, D_2, ..., D_n выявляется, что для интересующей нас составляющей вектора решения x_i определитель D_i при тех вариациях его элементов, которые реально могут встретиться при его эксплуатации, меняет свой знак, а определитель D знака не меняет, то и x_i будет менять знак, а это сразу говорит о ненадежности решения, и вычисления на этом можно закончить. Так, в § 9 при разборе примера 11 уже исследование вариации определителя D_3 сразу показало, что вычисление составляющей x_3 вектора решения $\mathbf{x}$ системы уравнений (126) заведомо ненадежно.

Если же исследование определителей D_i не говорит сразу о надежности или ненадежности решения, то необходимо провести исследование точных интервалов, внутри которых находятся интересующие нас составляющие x_1, x_2, ..., x_n вектора решения **x**, используя методику, приведенную в § 11.

Отметим, что хотя в примерах, рассмотренных в § 11, мы ограничивались вычислением вариаций составляющих вектора решения **x**, для $\varepsilon_0 = 0,01$, это не снижает общности исследования. Действительно, ранее было показано, что при малых ε_0 зависимость вариаций определителя от ε_0 с очень хорошей степенью точности близка к линейной (иллюстрацией могут служить рис. 2 и 3). Поэтому, когда, например, было вычислено, что при $\varepsilon_0 = 0$ будет $x_2 = 0,4375$, а при $\varepsilon_0 = 0,01$ имеем $x_2 = 0,6824 = 0,4375 + 0,2449$, то можно утверждать, что с хорошей точностью при $\varepsilon_0 = 0,001$ будет $x_2 \le 0,4375 + 0,02449 = 0,462$ и т. д.

Далее отметим, что хотя в приведенных примерах при вариациях коэффициентов a_{ij}, удовлетворяющих неравенствам $|\varepsilon_{ij}| \le \varepsilon_0$, расчет проводился для предельного, наихудшего варианта, когда для всех i и j было $\varepsilon_{ij} = \pm\varepsilon_0$, не представляет труда вычислить вариации определителей для любых конкретных значений ε_{ij}, разумеется, если эти значения нам известны. Главная трудность заключается в построении таблицы знаков. Если она построена, то вариация определителя при любых ε_{ij} вычисляется легко.

Вернемся к примеру 17, где рассматривалась система (159) с определителем

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \tag{201}$$

для которого таблица знаков имеет вид

$$\begin{vmatrix} - & + \\ - & - \end{vmatrix}. \tag{202}$$

Для определителя (201) и $|\varepsilon_{ij}| = 0,01$ было вычислено по формуле (162) его наименьшее возможное значение, равное 2,96. Если известно, что для элемента a_{11} будет $|\varepsilon_{11}| = 0$, а для остальных i и j остается $|\varepsilon_{ij}| = 0,01$, то наименьшее возможное значение определителя D можно вычислить по формуле (аналогу формулы (162)):

$$D_\varepsilon = \begin{vmatrix} 2 & -1,01 \\ 0,99 & 0,99 \end{vmatrix} = 2,98. \tag{203}$$

Известные дополнительные сложности вносит наличие согласованных знаков вариаций некоторых коэффициентов. Вернемся к примеру 4, рассмотренному в § 4. Предположим, что балка сместилась немного вправо по сравнению с ее проектным размещением. В этом случае параметр l_3 (длина балки правее правой опоры) получит вариацию положительного знака, но тогда параметр l_1 (длина балки слева от левой опоры) будет иметь вариацию непременно отрицательного знака.

Наличие согласованных вариаций уменьшает величину вариаций определителей и составляющих x_1, x_2, ..., x_n вектора решений **x** по сравнению со случаем полностью независимых вариаций.

Вернемся к рассмотренной в примере 17 системе уравнений (159) и приведем определитель D_2:

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \tag{204}$$

для которого таблица знаков имеет вид:

$$\begin{vmatrix} + & - \\ - & + \end{vmatrix}. \tag{205}$$

Если для всех i и j будет $|\varepsilon_{ij}| = 0,01$, а знаки вариаций ε_{ij} не зависят друг от друга и могут быть любыми, то наибольшее возможное значение определителя (как уже вычислялось в примере 17) равно

$$\begin{vmatrix} 2,02 & 0,99 \\ 0,99 & 2,02 \end{vmatrix} = 3,06. \tag{206}$$

Теперь предположим, что вариации коэффициентов второго столбца зависимы друг от друга и могут быть либо обе положительными, либо обе отрицательными (напомним, что коэффициенты второго столбца определителя (204) — это коэффициенты правой части системы уравнений (159), так что подобная зависимость между вариациями возможна). Если обе вариации элементов второго столбца положительны, то определитель принимает вид

$$\begin{vmatrix} 2,02 & 1,01 \\ 0,99 & 2,02 \end{vmatrix} = 3,04. \tag{207}$$

Если обе вариации отрицательны, то определитель будет равен

$$\begin{vmatrix} 2,02 & 0,99 \\ 0,99 & 1,98 \end{vmatrix} = 3,02. \tag{208}$$

В обоих случаях вариации определителя, как и следовало ожидать, меньше, чем при независимых вариациях элементов.

Таким образом, учет зависимости между собой вариаций коэффициентов системы уравнений может уменьшить вариации входящих в формулы Крамера определителей и, в конечном счете, может сузить интервалы, внутри которых находятся интервалы исследуемой системы уравнений.

Однако существует важный частный случай, заслуживающий отдельного рассмотрения — это случай симметричных матриц **A** в системах уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. С этим частным случаем приходится нередко встречаться в задачах строительной механики, но он не вносит каких-либо осложнений в общий алгоритм.

Частный случай симметричных матриц

В строительной механике многие задачи расчета сводятся к вычислению решений таких систем алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, у которых матрица коэффициентов $\mathbf{A}$ симметрична, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$.

Пример 19

Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 &= 4; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}\right\}$$

имеет симметричную матрицу, поскольку $a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$. Определитель системы

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7,$$

естественно, тоже симметричен, а, например, определитель D_1

$$D_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$$

уже несимметричен, поскольку $a_{12} \neq a_{21}$.

Составляющая x_1 вектора решений $\mathbf{x}$ равна

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{9}{7}.$$

Для вычисления вариаций x_1, происходящих из-за вариаций коэффициентов a_{ij} и b_i, можно использовать изложенную ранее методику, первым шагом которой является построение таблиц знаков для определителей D и D_1. У определителя D построение таблицы знаков облегчает симметричность определителя: достаточно вычислить наиболее неблагоприятные знаки вариаций не для девяти, а, в данном случае, только для шести элементов — для элементов, лежащих на главной диагонали и выше нее. Для элементов, лежащих ниже главной диагонали, знаки расставляются по принципу симметрии — действительно, если, например, $a_{12} = a_{21}$, то и $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$.

Поскольку у определителя D будет

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5,$$

то его таблица знаков имеет вид:

$$D \to \begin{vmatrix} + & - & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{vmatrix}.$$

Для определителя D_1 имеем:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 6,$$

и его таблица знаков имеет вид:

$$D_1 \to \begin{vmatrix} + & - & \pm \\ - & + & - \\ - & - & + \end{vmatrix}.$$

Располагая таблицами знаков и используя уже изложенную методику, можно найти интервал, внутри которого находится x_1 при тех или иных вариациях ε_{ij} и b_i. Чтобы не повторять довольно громоздких вычислений, ограничимся вычислением вариаций определителей D и D_1 в линейном приближении для $|\varepsilon_{ij}| = \varepsilon_0 = 0{,}01$. Для определителя D будет

$$\Delta_{\text{лин}} = 0{,}01(3 \cdot 3 + 1 + 1 + 1 + 2 \cdot 5 + 2 + 1 + 2 + 10) = 0{,}37,$$

для D_1 имеем

$$\Delta_{\text{лин}} = 0{,}01(4 \cdot 3 + 3 + 2 + 3 + 1 + 2 + 2 \cdot 6) = 0{,}49.$$

Этих данных уже достаточно для заключения о том, что вариации x_1 будут небольшими и рассматриваемая в примере 19 система уравнений хорошо обусловлена. Можно, разумеется, вычислить точную величину наибольших вариаций x_1 и найти интервал, внутри которого находится x_1 при тех или иных вариациях коэффициентов.

В заключение отметим, что предлагаемый алгоритм вычисления точных величин неустранимых погрешностей каждой из составляющих x_i вектора решений системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ требует довольно большого объема вычислений. Поэтому желательно иметь программы их вычисления. Такие программы составлены и получили государственную регистрацию (свидетельство № 2009613251 от 23.06.09 г.), несколько отличные программы приведены в публикациях К. Ф. Ивановой [26].

§ 13. Использование оценок вариаций при вычислении решений обыкновенных дифференциальных уравнений

В предыдущих параграфах оценки вариаций решений систем линейных алгебраических уравнений иллюстрировались на примерах из строительной механики, из сопротивления материалов. Здесь все просто: задачи расчета усилий и нагрузок в тех или иных конструкциях непосредственно сводятся к вычислению составляющих x_1, x_2, ..., x_n вектора $\mathbf{x}$ решения систем алгебраических уравнений вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Однако необходимость решать подобные уравнения появляется и в других задачах физики и техники — возникает уже как один из необходимых этапов решения задачи в целом, и в этих случаях знание возможных вариаций каждого из компонентов вектора $\mathbf{x}$ системы вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ является необходимой предпосылкой надежности решения.

Важным примером является проблема вычисления решений обыкновенных дифференциальных уравнений различных порядков или систем таких уравнений. Одним из этапов вычисления решения часто является определение постоянных интегрирования, входящих в общее решение дифференциального уравнения или в решение системы уравнений, а для определения постоянных интегрирования обычно приходится составлять и решать систему алгебраических уравнений.

Пример 20

Требуется найти решение $x(t)$ дифференциального уравнения

$$\ddot{x} - 3\dot{x} + 2 = 0, \tag{209}$$

удовлетворяющее начальным условиям: $x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0$.

Характеристический полином уравнения (209)

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 \tag{210}$$

имеет корни: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$, поэтому общее решение имеет вид

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t}, \tag{211}$$

и, следовательно, $\dot{x}(t) = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}$.

Из начального условия $x(0)=1$ следует, что

$$C_1+C_2=1. \tag{212}$$

Из второго начального условия $\dot{x}(0)=0$ следует, что

$$C_1+2C_2=0. \tag{213}$$

Равенства (212) и (213) образуют систему двух уравнений для определения двух постоянных интегрирования C_1 и C_2.

Для больших систем дифференциальных уравнений порядок системы алгебраических уравнений, которой удовлетворяют постоянные интегрирования C_i, может быть большим.

Так, в учебном пособии [11] на с. 83 были рассмотрены уравнения системы управления частотой вращения электропривода. Поведение двух переменных x_1 и x_2 (где x_1 — это отклонение частоты вращения от номинальной, x_2 — отклонение вращающего момента от номинального значения) описывается двумя уравнениями, одно из которых третьего, а одно первого (относительно x_2) порядка. Общие решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ такой системы имеют вид:

$$x_1(t)=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+C_3e^{\lambda_3 t}+C_4e^{\lambda_4 t}, \tag{214}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ — корни характеристического полинома — полинома четвертой степени. Аналогичный вид имеет и решение $x_2(t)$.

Для определения произвольных постоянных из начальных условий здесь необходимо найти решение системы, состоящей из четырех уравнений для неизвестных C_1, C_2, C_3, C_4.

При этом надо иметь в виду, что корни характеристического полинома любой системы могут быть вычислены лишь с конечной, ограниченной точностью, и уже поэтому все коэффициенты системы уравнений, из которых определяются постоянные интегрирования, несут в себе неизбежные погрешности. Для того чтобы вычисленное решение системы дифференциальных уравнений было надежным, нужно обязательно установить, как связаны неизбежные погрешности вычисления постоянных интегрирования с погрешностями коэффициентов системы, которой эти постоянные удовлетворяют. Это можно сделать методами, описанными в предыдущих параграфах. Поскольку существуют многочисленные примеры (продемонстрированные в предыдущих параграфах), когда малые погрешности в коэффициентах приводят к большим погрешностям в составляющих решения $x_1, x_2, ..., x_n$ (а значит, и в постоянных интегрирования $C_1, C_2, ..., C_n$), то для получения надежного решения системы дифференциальных уравнений необходимо использовать методику расчета возможных вариаций составляющих решения, изложенную в предыдущих параграфах.

Отметим, что если исследуемая система приведена к нормальной форме Коши, т. е. к системе из n уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, t); \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, t); \\ &\ldots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \end{aligned}\right\} \tag{215}$$

то, на первый взгляд кажется, что трудностей в определении постоянных интегрирования можно избежать: действительно, если известны начальные условия для всех переменных в системе (215), известны величины $x_i(0)$, то решения системы (215) можно непосредственно получить одним из численных методов, в том числе и с использованием вычислительной техники.

Однако, как это было подробно показано в [5], если первоначальные дифференциальные уравнения математической модели исследуемого объекта не имели формы системы, состоящей из n уравнений первого порядка, а состояли из системы нескольких уравнений различных порядков, то приведение подобной системы к нормальной форме Коши, к форме уравнений (215), может совершенно исказить реальную зависимость решений математической модели объекта от вариаций коэффициентов, исказить реальную зависимость поведения исследуемого объекта от вариаций его параметров. Поэтому для получения надежного решения, которое правильно отражает реальное поведение исследуемого объекта, к преобразованиям математической модели, в том числе и к преобразованию ее к нормальной форме Коши, следует относиться осторожно, проверять его правомерность, проверять — не исказилось ли влияние вариаций параметров объекта на его истинное поведение. Обо всем этом более подробно рассказано в [5].

Отметим также, что необходимость составлять системы алгебраических уравнений, решать и оценивать погрешности решения возникает при решении краевых задач, когда условия для искомых функций и их производных задаются не в одной, а в нескольких точках (краевые условия).

Необходимость составлять и решать системы алгебраических уравнений возникает и при решении дифференциальных уравнений методами операционного исчисления.

§ 14. Применения к решению интегральных уравнений

Хорошо известно (см., например, [2]), что решение многих проблем техники и физики сводится к вычислению решений интегральных уравнений различных типов (уравнения Фредгольма первого и второго рода, уравнения Вольтерра первого и второго рода, сингулярные уравнения, уравнения с вырожденным ядром и др.).

В интегральных уравнениях искомая функция находится под знаком интеграла. Так, в уравнении Фредгольма второго рода:

$$y(x)-\lambda\int_a^b K(x;\, s)\,y(s)\,ds=f(x) \tag{216}$$

искомой функцией будет $y(x)$. Функция $f(x)$ — известная функция (правая часть), функция $K(x;\, s)$ двух переменных x и s называется *ядром*, а постоянное число λ — *параметром* уравнения.

Основной метод решения интегральных уравнений основан на замене интеграла конечной суммой с помощью одной из квадратурных формул (формул приближенного интегрирования), т. е. на замене

$$\int_a^b F(x)\,dx\approx\sum_{j=1}^{n}A_jF(x_j), \tag{217}$$

где x_j — абсциссы точек отрезка $[a,\, b]$, A_j $(j=1,\,2,\,...,\,n)$ — коэффициенты квадратурной формулы (прямоугольников, трапеций или др.). Заменяя приближенно интеграл в уравнении (216) по формуле (217), получим

$$y_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}A_jK_{ij}y_j=f_i, \tag{218}$$

где $y_i=y(x_i)$, $K_{ij}=K(x_i;\, y_j)$, $f_i=f(x_i)$, т. е. получим систему линейных алгебраических уравнений относительно y_i. Решив эту систему, получим таблицу приближенных значений y_i в точках x_i. Это позволит записать приближенное решение уравнения (216) в виде

$$y(x)=f(x)+\lambda\sum_{j=1}^{n}A_jK(x;\, x_j)\,y_j. \tag{219}$$

Приведем пример (заимствованный из [2], с. 294): используя квадратурную формулу Симпсона при $n = 2$, найти приближенное решение уравнения

$$y(x) + \int_0^1 x e^{xs} y(s)\,ds = e^x. \tag{220}$$

Решение: поскольку для квадратурной формулы Симпсона $A_0 = A_2 = \frac{1}{6}$, $A_1 = \frac{2}{3}$, $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}5$, $x_2 = 1$, то для уравнения (220) при использовании формулы Симпсона можем записать:

$$y(x) + \frac{1}{6}\left(x e^{0\cdot x} y_0 + 4 x e^{0{,}5\cdot x} y_1 + x e^{1\cdot x} y_2\right) = e^x. \tag{221}$$

Полагая в этом равенстве последовательно $x = x_0 = 0$, $x = x_1 = 0{,}5$, $x = x_2 = 1$, получаем систему из трех уравнений для y_0, y_1, y_2:

$$y_0 = 1;$$
$$y_1 + \frac{0{,}5}{6}\left(y_0 + 4e^{0{,}25} y_1 + e^{0{,}5} y_2\right) = e^{-0{,}5};$$
$$y_2 + \frac{1}{6}\left(y_0 + 4e^{0{,}5} y_1 + e y_2\right) = e,$$

решив которую находим: $y_0 = 1$, $y_1 = 1{,}0002$, $y_2 = 0{,}9995$, после чего приближенное решение уравнения (220) записывается в виде

$$y(x) = e^x - \frac{x}{6}\left(1 + 4{,}001 e^{\frac{x}{2}} + e^x\right).$$

Другие примеры сведения решения интегральных уравнений к системам алгебраических уравнений приведены в [2] на с. 295–303.

Надежность решений интегральных уравнений зависит, таким образом, от надежности решений систем алгебраических уравнений, все коэффициенты которых уже вследствие приближенности замены интеграла на конечную сумму известны лишь с конечной, ограниченной точностью. Поскольку мы теперь располагаем методикой точной оценки погрешности (вариации) каждой из составляющих $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектора решений $\mathbf{x}$ системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ в зависимости от погрешностей (вариаций) коэффициентов, то это позволяет существенно улучшить надежность вычисления решений интегральных уравнений, а тем самым и надежность решения многочисленных задач техники и физики, сводящихся к интегральным уравнениям.

Не менее часто к системам линейных алгебраических уравнений приводят численные методы решения уравнений в частных производных. Им будет посвящен отдельный § 19.

§ 15. Другие критерии оценки степени обусловленности систем линейных алгебраических уравнений

Помимо алгоритма вычисления точной величины неустранимой погрешности решений систем линейных алгебраических уравнений, изложенного в предыдущих параграфах, полезно располагать простыми критериями различения хорошо и плохо обусловленных систем.

До недавних лет в качестве такого критерия использовалось "число обусловленности" $\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$, т. е. произведение норм прямой и обратной матриц системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Многочисленные недостатки этого критерия рассмотрены в § 4, а более подробно — в [6].

Поэтому рассмотрим другие критерии степени обусловленности и, в частности, величину *естественной границы вариаций*, т. е. то значение вариаций элементов матрицы **A**, при котором ее определитель равен нулю и, следовательно, значения любой из составляющих x_i вектора решений **x** могут быть (по модулю) сколь угодно велики.

Если естественная граница вариаций меньше тех вариаций, которые могут встретиться в ходе эксплуатации объекта, математическую модель которого (в виде системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$) мы исследуем, то это означает, что исследуемая система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ очень плохо обусловлена, значения любого x_i в такой системе могут быть любыми и объект, математической моделью которого эта система является, в высшей степени ненадежен. При вполне возможной комбинации знаков вариаций коэффициентов (при комбинации соответствующей обратной таблице знаков матрицы **A** при $\det \mathbf{A} > 0$ и прямой таблице знаков, если $\det \mathbf{A} < 0$) значения x_i могут быть любыми, а это означает, что исследуемый объект может сломаться, перекоситься и т. п., т. е. может создать опасную аварийную ситуацию.

Если естественная граница вариаций лишь немного больше, чем те вариации, которые могут встретиться в ходе эксплуатации, то такую систему стоит считать плохо обусловленной и опасной, поскольку оценки вариаций коэффициентов системы, которые могут встретиться в ходе эксплуатации исследуемого объекта, являются приближенными.

И, наконец, если естественная граница вариаций существенно (на порядок) больше, чем вариации, которые могут встретиться в ходе эксплуатации, то такую систему можно обычно считать хорошо обусловленной, особенно если составляющие x_i вектора решений **x** мало отличаются друг от друга. Частный случай, когда одно или несколько из составляющих вектора решений **x** много меньше остальных, требует отдельного исследования, которое далее будет приведено.

Вычисление естественной границы вариаций довольно громоздко: сперва нужно составить для матрицы **A** обратную таблицу знаков при $\det \mathbf{A} > 0$ и прямую при $\det \mathbf{A} < 0$, а затем, пользуясь соответствующей знаку **A** таблицей, найти значения ε, обращающие определитель матрицы в нуль.

Для приближенной оценки естественной границы вариаций (оценки в линейном приближении) можно пользоваться формулой для наибольшего значения главной, линейной, части приращения (убывания) определителя:

$$\Delta_{\text{лин.макс}} = \sum_{i=1;j=1}^{i=n;j=n} \left|a_{ij} A_{ij}\right| \varepsilon_0. \tag{222}$$

Вывод формулы (222) приводился в § 6. Из формулы (222) следует, что исследуемый определитель обратится в нуль при

$$\varepsilon_{0\text{лин}} = \frac{\det \mathbf{A}}{\sum\limits_{i=1;j=1}^{i=n;j=n} \left|a_{ij} A_{ij}\right|}. \tag{223}$$

Пример 21

Вычислим $\varepsilon_{0\text{лин}}$ для ранее рассмотренного определителя (94), для которого $A_{11} = -3$, $A_{12} = -14$, $A_{13} = 13$, $A_{21} = 2$, $A_{22} = -1$, $A_{23} = 2$, $A_{31} = 1$, $A_{32} = 10$, $A_{33} = -7$, поскольку

$$\sum_{i=1;j=1}^{i=3;j=3} \left|a_{ij} A_{ij}\right| = 161$$

и, следовательно,

$$\varepsilon_{0\text{лин}} = \frac{8}{161} = 0{,}0496.$$

Ранее вычисленное с учетом нелинейных членов (с точностью до трех значащих цифр) значение ε_0 равно 0,0525; расхождение невелико.

Данный расчет показывает, что для всех уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, у которых определитель матрицы **A** совпадает с определителем (94) (при условии что для всех i и j имеем $\left|\varepsilon_{ij}\right| \le \varepsilon_0$), естественной границей вариаций будет число 0,0525.

При $\varepsilon_0 = 0{,}01$ наибольшее возможное уменьшение определителя (94) (как было ранее вычислено в § 6) будет равно 20,24% от номинального значения.

Легко вычисляемое по формуле (223) приближенное значение естественной границы вариаций может использоваться для предварительной оценки степени обусловленности различных систем уравнений, для сравнения их между собой и т. п., т. е.

для тех же целей, для которых до последнего времени использовалось "число обусловленности".

Для лучшей аналогии с хорошо известным и привычным "числом обусловленности" можно использовать для оценки обусловленности систем число $\dfrac{1}{\varepsilon_{0\text{лин}}}$, обратное естественной границе вариаций. Тогда все будет привычно: чем меньше это число, тем лучше обусловленность исследуемой системы (точно так же, как и при использовании привычных чисел обусловленности: чем они меньше, тем лучше обусловленность).

Однако оценка по естественной границе вариаций лучше отражает реальные качества системы, чем привычная оценка по "числу обусловленности".

Вернемся к рассмотренной ранее в § 4 системе (62), для которой в § 4 было показано, что "числа обусловленности" неверно отражают реальную зависимость обусловленности системы от коэффициента m.

Для определителя матрицы **A** системы (62), т. е. для определителя

$$\begin{vmatrix} 1+m & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = m \tag{224}$$

имеем $A_{11} = 1$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 1+m$. Следовательно,

$$\sum_{i=1;j=1}^{i=2;j=2} \left| a_{ij} A_{ij} \right| = 4 + 2m, \tag{225}$$

$$\varepsilon_{0\text{лин}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{m+2}, \tag{226}$$

т. е. естественная граница вариаций в линейном приближении, величина $\varepsilon_{0\text{лин}}$, равна половине тангенса угла φ между прямыми, уравнения которых записаны в виде системы (62). С ростом угла степень обусловленности монотонно растет и столь же монотонно растет $\varepsilon_{0\text{лин}}$. Таким образом, критерий $\varepsilon_{0\text{лин}}$ (в отличие от "чисел обусловленности") правильно отражает реальную зависимость степени обусловленности от коэффициента m, а оценка по "числу обусловленности" — как было показано в § 4 — дает для $m > 2$ неверный ответ.

Для системы (62) нетрудно вычислить точное значение $\varepsilon_{0\text{гр}}$. Оно равно

$$\varepsilon_{0\text{гр}} = \frac{1}{m}\left(m + 2 - 2\sqrt{m+1}\right)$$

и тоже монотонно возрастает с ростом m. Зависимости $\varepsilon_{0\text{лин}}$ и $\varepsilon_{0\text{гр}}$ отражены в табл. 4.

Таблица 4

m	0,5	1	2	4	10
$\varepsilon_{0гр}$	0,101	0,172	0,268	0,382	0,5366
$\varepsilon_{0лин}$	0,1	0,166	0,25	0,333	0,416
$\varepsilon_{0лин} / \varepsilon_{0гр}$	0,99	0,972	0,934	0,875	0,774

Еще одним недостатком "чисел обусловленности" является их зависимость от умножения любого из уравнений системы на постоянное число. Такое умножение не изменяет решений и часто используется для упрощения системы. В § 4 на примере простой системы

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1; \\ kx_1 + kx_2 &= k \end{aligned}\right\} \qquad (227)$$

было показано, что для нее "число обусловленности"

$$\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| = \frac{5}{k} + 2k$$

сильно зависит от k.

В то же время естественная граница вариаций — как точная, так и в линейном приближении — не зависит от k и поэтому гораздо лучше характеризует степень обусловленности реальных систем.

Действительно, для системы (227) будет $\det \mathbf{A} = k$, $A_{11} = k$, $A_{12} = -k$, $A_{21} = -1$, $A_{22} = 2$, и поэтому

$$\varepsilon_{0лин} = \frac{k}{2k + k + k + 2k} = \frac{1}{6} = 0{,}166,$$

а точное значение естественной границы вариаций равно $\varepsilon_0 = 3 - \sqrt{8} = 0{,}172$ для всех k.

Ни точное, ни приближенное (в линейном приближении) значения естественной границы вариаций (в отличие от "чисел обусловленности") не зависят от эквивалентных (равносильных) преобразований любых уравнений исследуемой системы. Не зависят они и от выбора единиц измерения — об этой зависимости для "чисел обусловленности", которая может ввести в заблуждение, уже говорилось в § 4.

В целом можно сделать следующий вывод: естественная граница вариаций — это число, которое является простым наглядным критерием оценки обусловленности систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), т. е. критерием, свободным от многих недостатков, присущих известным "числам обусловленности".

Не отменяя вычислений точной величины погрешностей решений систем линейных алгебраических уравнений, этот критерий удобен для предварительных оценок обусловленности СЛАУ.

Для вычисления естественной границы вариаций в линейном приближении достаточно вычислить алгебраические дополнения элементов определителя матрицы **A**, а затем воспользоваться формулой (223). Для точного вычисления этой границы достаточно (на основе вычисленных значений алгебраических дополнений A_{ij} элементов определителя D) составить таблицу знаков этого определителя — прямую таблицу знаков, если $D<0$, и обратную таблицу знаков, если $D>0$. С помощью этих таблиц вычисляется точное значение естественной границы вариаций, т. е. значение ε_0, при котором определитель D впервые обращается в нуль.

Так же как и в предыдущих параграфах, естественную границу можно вычислять как для независимых друг от друга вариаций элементов определителя D, так и для вариаций, связанных зависимостями, например, для симметричных матриц **A** в уравнениях $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$.

Дополнение

Иногда полезно кроме естественной границы вариаций вычислить величину вариаций, изменяющих знак составляющей x_i вектора решений **x** системы $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ (разумеется, если эти вариации меньше естественной границы вариаций). Дело в том, что у многих СЛАУ чувствительность к вариациям элементов матрицы **A** системы $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ для разных x_i различна. Обычно особенно чувствительны те x_i, которые меньше других по абсолютной величине. Тем же методом, которым вычислялась естественная граница вариаций, нетрудно вычислить и величину вариаций, при которых интересующее нас решение x_i изменяется настолько, что обращается в нуль, а при дальнейшем возрастании вариаций коэффициентов системы $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ решение x_i меняет знак. Для этого достаточно вычислить таблицу знаков для определителя D_i в формулах Крамера (если $D_i<0$) или вычислить обратную таблицу знаков, если $D_i>0$. После этого легко вычисляются вариации, обращающие D_i в нуль.

Возвращаясь к рассмотренной ранее в § 4 системе (49), убеждаемся, что хотя естественная граница вариаций для системы (49) равна $\varepsilon_{\text{гр}}=0{,}10102$, но уже при $\varepsilon=0{,}0222$ решение x_1 обращается в нуль, а при $\varepsilon>0{,}0222$ оно изменяет знак. Решение x_2 — в отличие от x_1 — менее чувствительно к вариациям элементов матрицы **A**. В то же время при $0{,}0222\le\varepsilon\le 0{,}10102$ мы можем столкнуться с тем, что решение x_1 изменится очень сильно, более чем на 100%, и поэтому все характеристики исследуемого объекта, зависящие от x_1, могут оказаться совсем другими, чем при $\varepsilon=0$.

Учитывая все сказанное, можно рекомендовать в качестве первого шага исследования систем линейных алгебраических уравнений вычислить естественную границу вариаций определителей D и D_i. Это позволит сразу выделить очень плохо обусловленные опасные системы и избавит от излишних вычислений.

В то же время надо отметить, что если составляющие x_i вектора решений **x** сильно отличаются друг от друга, то и естественная граница вариаций (как и "число обусловленности") не позволяет оценить "степень обусловленности" каждой из составляющих x_i вектора решений **x**, и особенно для тех x_i, которые меньше остальных.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 2; \\ x_1 + x_2 &= 1,5 \end{aligned}\right\} \qquad (228)$$

с решениями: $x_1 = 0,5$, $x_2 = 1$.

В этой системе определитель матрицы **A** равен:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

его обратная таблица знаков

$$\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix}$$

и для вычисления естественной границы вариаций достаточно вычислить, при каком значении ε обратится в нуль определитель

$$\begin{vmatrix} 2(1-\varepsilon) & 1+\varepsilon \\ 1+\varepsilon & 1-\varepsilon \end{vmatrix} = 1 - 6\varepsilon + \varepsilon^2. \qquad (229)$$

Вычисляя наименьшее из решений $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ получившегося квадратного уравнения, находим, что естественная граница вариаций равна $\varepsilon_0 = 3 - \sqrt{8} = 0,172$.

Если рассмотреть решения исследуемой системы при значении $|\varepsilon| = 0,01$, которое в 17,2 раза меньше естественной границы вариаций, то можно ожидать, что составляющие x_1 и x_2 вектора решений **x** изменятся мало. Действительно, при $\varepsilon = 0,01$ исследуемая система принимает вид

$$\left.\begin{aligned} 1,98x_1 + 1,01x_2 &= 2; \\ 1,01x_1 + 0,99x_2 &= 1,5 \end{aligned}\right\} \qquad (230)$$

и имеет решения: $x_1 = 0,4947$, $x_2 = 1,009564$.

Таким образом, решение x_1 уменьшилось на 1,06%, а решение x_2 возросло на 0,9564%.

Рассмотрим теперь для сравнения похожую систему уравнений (та же матрица **A**, но другие правые части) — систему

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 1,02; \\ x_1 + x_2 &= 1,01 \end{aligned}\right\} \qquad (231)$$

с решениями: $x_1 = 0,01$, $x_2 = 1$.

При том же значении $\varepsilon = 0{,}01$ она переходит в систему

$$\left.\begin{aligned} 1{,}98x_1 + 1{,}01x_2 &= 1{,}02; \\ 1{,}01x_1 + 0{,}99x_2 &= 1{,}01 \end{aligned}\right\} \tag{232}$$

с решениями: $x_1 = -0{,}1143$, $x_2 = 1{,}03138$.

Таким образом, уже при $\varepsilon = 0{,}01$ решение x_1 изменилось на 214% и даже поменяло знак. Если для объекта, математической моделью которого является система (231), вариации коэффициентов, соответствующие $\varepsilon = \pm 0{,}01$, возможны, то такой объект (как и описывающую его систему (231)) следует отнести к плохо обусловленным.

Отметим, что "число обусловленности" $\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$ системы (231) равно семи, так что традиционная оценка по "числу обусловленности" отнесла бы систему (231) к хорошо обусловленным, что, разумеется, неверно.

Таким образом, будучи свободным от ряда недостатков, присущих оценкам по "числам обусловленности", оценка по естественной границе вариаций разделяет с "числами обусловленности" такой недостаток, как возможность неверной оценки конкретных составляющих x_i вектора решений **x**. Поэтому столь важен алгоритм вычисления неустранимой погрешности каждой из составляющих x_i вектора **x**, приведенный в § 12, а ранее — в публикациях [6] и [22].

Еще одним методом оценки степени обусловленности является изложенный в публикациях [6, 21] *метод модульных определителей*. Как известно, любой определитель порядка n может быть представлен в виде суммы $n!$ произведений n элементов определителя, взятых в определенном порядке. Так, определитель второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

является суммой $2! = 2$ произведений двух элементов, определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

равен сумме шести произведений (поскольку $3! = 6$) из трех элементов, определитель четвертого порядка равен сумме 24 произведений (поскольку $4! = 24$) из четырех элементов каждое и т. д.

Знаки произведений зависят, естественно, от знаков элементов. Если эти знаки не учитывать, а рассматривать определитель как сумму модулей произведений, то такой определитель было предложено в [6] называть *модульным определителем*. Так, модульный определитель второго порядка имеет вид:

$$|a_{11}a_{22}| + |a_{12}a_{21}|,$$

модульный определитель третьего порядка равен

$$|a_{11}a_{22}a_{33}|+|a_{12}a_{23}a_{31}|+|a_{13}a_{21}a_{32}|+|a_{13}a_{22}a_{31}|+|a_{11}a_{23}a_{32}|+|a_{12}a_{21}a_{33}|. \qquad (233)$$

Аналогично записываются и модульные определители четвертого, пятого и других порядков.

С помощью модульных определителей в [6] и [22] оценивались обусловленность систем уравнений и величина неустранимой погрешности. Для систем линейных уравнений умеренного порядка метод модульных определителей работает хорошо, но для систем, состоящих из большого числа уравнений, возникают вычислительные трудности. Дело в том, что величина $n!$ очень быстро (примерно как n^n) возрастает с ростом n. Уже при $n=10$ будет $10!=3628800>3\cdot10^6$, а при $n=20$ будет $20!>2\cdot10^{18}$.

Поэтому для вычисления определителей при $n>7$ уже не пользуются представлением определителя как суммы $n!$ произведений из n элементов, а применяют метод Гаусса, аналогичный методу вычисления решений СЛАУ, т. е. путем последовательных умножений и сложений приводят определитель к "треугольному виду", после чего его вычисляют как произведение элементов, стоящих на главной диагонали. Для вычисления определителя порядка n требуется примерно n^3 умножений.

Однако к модульным определителям метод Гаусса непосредственно не применим, а прямое вычисление $n!$ слишком громоздко. При первом знакомстве с "модульными определителями" в 2007 году математики-вычислители полагали, что могут быстро разработать для их вычисления аналог метода Гаусса. Однако эти задачи оказались трудней, чем первоначально предполагали, и пока еще не решены.

Поэтому в настоящей книге мы не излагаем методику модульных определителей. Если будет разработан удобный метод их вычисления, то они могут найти широкое применение, и тогда с методикой модульных определителей можно будет познакомиться по публикациям [6] и [21].

Рассмотрим теперь оценку степени обусловленности для таких систем $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$, у которых необходимо учитывать только вариации коэффициентов правой части, а вариации коэффициентов матрицы $\mathbf{A}$ можно считать равными нулю и записать систему в виде

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1(1+\delta_1);\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2(1+\delta_2);\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n(1+\delta_n). \end{array}\right\} \qquad (234)$$

Как уже было показано в § 5, в таких системах любую составляющую x_i вектора решений $\mathbf{x}$ можно вычислить по формуле:

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}K_jb_j, \qquad (235)$$

где K_j — частное от деления алгебраического дополнения A_{ij} на определитель матрицы **A**. В то же время максимально возможная величина неустранимой погрешности вычисляется по формуле

$$\Delta x_i = \sum_{j=1}^{n} \left| K_j b_j \delta_j \right|, \tag{236}$$

а если относительно δ_j известна лишь общая оценка:

$$\left| \delta_j \right| \le \delta_0,$$

то по формуле:

$$\Delta x_i = \sum_{j=1}^{n} \left| K_j b_j \right| \delta_0. \tag{237}$$

Поскольку возможны любые сочетания знаков коэффициентов b_i и алгебраических дополнений A_{ij}, то в сумме (235) возможна компенсация положительных и отрицательных членов, и поэтому абсолютная величина x_i может быть очень малой — настолько малой, что неустранимая погрешность Δx_i даже при малых δ_i может быть сравнима и даже больше, чем x_i, причем вероятность такого сочетания знаков не будет очень малой величиной.

Отсюда следует важный вывод: даже если мы учитываем только вариации (или погрешности) правой части систем вида $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, погрешности δ_i коэффициентов b_i, то всегда есть возможность столкнуться с очень плохо обусловленными системами, у которых неустранимая погрешность отдельных составляющих x_i вектора решений **x** сравнима (или даже больше) самой составляющей x_i.

Понятно, что традиционная оценка по "числу обусловленности" $\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$ о возможности встречи с такого рода плохо обусловленными системами ничего не скажет. Проверка по "числу обусловленности" — если при этой проверке оказалось, что произведение $\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\|$ невелико — будет говорить о том, что исследуемая система хорошо обусловлена и, казалось бы, погрешности решений x_i тоже невелики. На самом деле все может быть не так, и некоторые из оставляющих x_i вектора решений **x** могут оказаться совершенно ненадежными.

Вернемся, например, к системе (45), для которой мы уже вычисляли "число обусловленности" $\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| = 7$. Если в системе (45) заменить правые части на $b_1 = 101$ и $b_2 = 100$, то решениями станут числа $x_1 = 1$, $x_2 = 99$. А если правые части изменить на сотые доли от прежних значений, изменить до значений $b_1 = 102$, $b_2 = 99$, то решениями станут, как легко проверить, $x_1 = 3$, $x_2 = 96$, т. е., несмотря на хорошее "число обусловленности", x_1 изменилось в три раза.

В то же время плохая обусловленность решений систем $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, происходящая из-за вариаций (погрешностей) их правых частей, очень легко устанавливается: как само значение x_i, так и величина его неустранимой погрешности вычисляются по простым формулам, и достаточно, вычислив x_i и Δx_i, проверить, не существует ли у исследуемой системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ таких x_i, для которых величина $|\Delta x_i|$ сравнима (или больше) с $|x_i|$.

Общий случай. Мы рассматривали частный случай проверки степени обусловленности, предполагая, что вариации (погрешности) коэффициентов матрицы **A** системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ равны нулю. Однако поскольку учет вариаций коэффициентов матрицы **A** может только ухудшить степень обусловленности, то сделанный нами вывод остается справедливым и в общем случае: если среди составляющих x_i вектора решений **x** найдутся такие x_i, для которых величина $|\Delta x_i|$, вычисляемая по формулам (236) или (237), окажется сравнимой или больше, чем само $|x_i|$, то такое x_i плохо обусловлено и совершенно ненадежно.

Простота расчетов по формулам (236) и (237) говорит о том, что проверку надежности решений систем линейных алгебраических уравнений следует начинать именно с использования этих формул. Только если оказалось, что расчет по этим формулам не выявил явно ненадежных x_i, можно переходить к более сложным методам расчета, учитывающим вариации a_{ij} матрицы **A** системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

§ 16. Оценка вычислительной сложности алгоритма вычисления точного значения неустранимой погрешности СЛАУ. Примеры расчетов

В этом параграфе мы оценим вычислительную сложность предлагаемого алгоритма вычисления неустранимой погрешности, т. е. оценим количество вычислительных операций, необходимых для расчета погрешности СЛАУ в зависимости от n, где n — это число уравнений в системе.

Первый этап алгоритма вычисления погрешности решения x_i — это составление таблицы знаков для определителей D и D_i в формулах Крамера. Для построения таблиц нужно вычислить (или, по крайней мере, оценить знаки) всех алгебраических дополнений A_{ij} у двух определителей — D_i и D; количество этих дополнений равно $2n^2$, а каждое из них — это определитель порядка $n-1$.

Хорошо известно, что при $n \geq 4$, определители вычисляются чаще всего путем приведения к треугольному виду, и это вычисление требует (примерно, числовой коэффициент опускаем) n^3 операций умножения (где n — порядок определителя). Следовательно, построение таблиц знаков для определителей D и D_i в формулах Крамера потребует $2n^2(n-1)^3$ операций.

Далее по ходу алгоритма для оценки изменения x_i при заданном ε в сторону возрастания нужно два раза вычислить проварьированные определители D и D_i (по первому и по второму варианту расчета), а потом проделать то же самое для оценки изменения x_i в сторону убывания. Всего требуется выполнить примерно

$$2n^2(n-1)^3 + 8n^3 \tag{238}$$

операций. Если же требуется вычислить погрешности всех составляющих x_i вектора решений $\mathbf{x}$ от $i=1$ до $i=n$, то число операций возрастает до

$$2n^2(n-1)^3 + 8n^4. \tag{239}$$

Формулы (238) и (239) показывают, что количество вычислительных операций с увеличением числа уравнений в системе растет не слишком быстро, пропорционально полиному от переменной n. Это является очень благоприятным обстоятельством для практического применения предлагаемого алгоритма, особенно по сравнению со многими другими алгоритмами, в которых количество вычислительных операций растет экспоненциально, пропорционально 2^n, 4^n и даже $2^{(n^2+n)}$ (об этих алгоритмах рассказано в [16], с. 106).

Отметим, что для частного случая, когда вариации элементов матрицы **A** системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ равны нулю или пренебрежимо малы и существенную роль играют вариации правой части, вариации вектора **b**, количество необходимых вычислительных операций сильно сокращается. В этом частном случае необходимо вычислить только n алгебраических дополнений (или — миноров), что потребует примерно

$$n(n-1)^3 \tag{240}$$

операций.

Уменьшается число необходимых вычислительных операций и в тех случаях, когда вариации коэффициентов СЛАУ не являются независимыми (симметричные матрицы **A**, рассмотренные в § 11) и т. п.

Заметим, что из формул (239) и (240) следует, что вычисление точных величин погрешностей всех составляющих вектора решения **x** системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ требует существенно больше вычислительных операций, чем вычисление самого вектора **x** при номинальных значениях коэффициентов матрицы **A** и вектора **b** (без учета их погрешностей). Но этому не следует удивляться, поскольку вычисление погрешностей решения почти всегда оказывается много сложней, чем вычисление самого решения. Здесь отражается общее правило: задачи "математики-2" всегда сложнее аналогичных задач "математики-1". Именно поэтому "математика-2" развивалась позже и медленнее, чем "математика-1", и многие ее разделы до сегодняшнего дня еще не разработаны, или недостаточно разработаны.

Примеры вычисления неустранимой погрешности

Пример 22

Для одной из известных систем А. Ноймайера (A. Neumaier), т. е. системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, в которой

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 8,5 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 8,5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 8,5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 8,5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 8,5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 8,5 \end{pmatrix}, \tag{241}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{242}$$

вычисление погрешности решения при вариациях всех коэффициентов в пределах $\pm 0,01$ от их номинальных значений выполнил В. В. Лапицкий на персональном компьютере, языке C++ в среде Visual Studio 2010 Express (отметим, что системы А. Ноймайера различных порядков неоднократно использовались как тестовые задачи; они рассматривались в [16], с. 105).

Было установлено, что вследствие симметрии системы все x_i равны между собой и при номинальных значениях коэффициентов имеем $x_{iN} = 0,0741$, в то время как при $\varepsilon_0 = \pm 0,01$ будет $x_{i\max} = 0,0741 + 0,0032$, $x_{i\min} = 0,0741 - 0,0032$ или

$$\frac{x_{i\max}}{x_{iN}} = 1 + 0,0432; \quad \frac{x_{i\min}}{x_{iN}} = 1 - 0,0432, \tag{243}$$

т. е. при изменении коэффициентов на 1%, решения изменились на 4,32%. Время вычисления $x_{i\min}$ и $x_{i\max}$ — менее 1 секунды.

Таблица знаков определителя матрицы (241) — диагональная:

$$\begin{vmatrix} + & - & - & - & - & - \\ - & + & - & - & - & - \\ - & - & + & - & - & - \\ - & - & - & + & - & - \\ - & - & - & - & + & - \\ - & - & - & - & - & + \end{vmatrix}. \tag{244}$$

Определитель матрицы **A** равен $\det \mathbf{A} = 320361$, алгебраические дополнения матрицы **A** равны: $A_{ij} = 39550$ при $i = j$ и $A_{ij} = -3164$ при $i \neq j$. Естественная граница вариаций (в линейном приближении) равна:

$$\varepsilon_{\text{гр}} = \frac{\det \mathbf{A}}{\sum\limits_{i=1;j=1}^{i=6;j=6} \left| a_{ij} A_{ij} \right|} = \frac{320361}{334220} = 0,959,$$

это говорит о том, что система (241)–(242) хорошо обусловлена; при вариациях коэффициентов, не превышающих $\varepsilon_0 = 0,01 = 0,01043\varepsilon_{\text{гр}}$, вариации решений не будут большими (хотя они все же в 4,32 раза больше вариаций коэффициентов).

Вычисляя евклидовы нормы матрицы **A** и обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$, получаем "число обусловленности" $\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\| = 20,4$. Используя формулу (48) из § 3, получаем оценку по "числу обусловленности":

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le 20,4\cdot(0,01+0,01) = 0,408. \tag{245}$$

На самом же деле $\dfrac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le 0,0432$, так что оценка по "числу обусловленности" оказывается очень грубой.

Пример 23

Рассмотрим систему А.Ноймайера 10-го порядка, т. е. систему $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, в которой

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 11,7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 11,7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 11,7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 11,7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 11,7 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11,7 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11,7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11,7 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11,7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11,7 \end{pmatrix}, \tag{246}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0,8 \\ 0,8 \\ 0,8 \\ 0,8 \\ 0,8 \\ 0,8 \\ 0,8 \\ 0,8 \\ 0,8 \\ 0,8 \end{pmatrix}. \tag{247}$$

На том же компьютере В. В. Лапицкий для системы (246)–(247) вычислил решения x_i для номинальных значений коэффициентов матрицы (246) и вектора (247). Вследствие симметрии системы все x_i были равны $x_{iN} = 0,0386$. При относительных вариациях всех коэффициентов системы на $\pm 0{,}01$ вычисленная максимальная погрешность решений в направлении возрастания составила 0,0018 и в направлении убывания — 0,0019. Таким образом,

$$1-0{,}0494 \le \frac{x_i}{x_{iN}} \le 1+0{,}0467. \tag{248}$$

Вычисления заняли немного менее трех минут. Таблица знаков системы (246)–(247) оказалась диагональной:

$$\begin{vmatrix}
+ & - & - & - & - & - & - & - & - & - \\
- & + & - & - & - & - & - & - & - & - \\
- & - & + & - & - & - & - & - & - & - \\
- & - & - & + & - & - & - & - & - & - \\
- & - & - & - & + & - & - & - & - & - \\
- & - & - & - & - & + & - & - & - & - \\
- & - & - & - & - & - & + & - & - & - \\
- & - & - & - & - & - & - & + & - & - \\
- & - & - & - & - & - & - & - & + & - \\
- & - & - & - & - & - & - & - & - & +
\end{vmatrix}. \tag{249}$$

Алгебраические дополнения матрицы (246) оказались равными $A_{ij} = 3{,}38\cdot 10^9$ при $i=j$, $A_{ij} = -0{,}171\cdot 10^9$ при $i \ne j$. Определитель матрицы **A** оказался равным $\det \mathbf{A} = 38{,}058\cdot 10^9$.

Естественная граница вариаций (в линейном приближении) равна:

$$\varepsilon_{\text{гр}} = \frac{\det \mathbf{A}}{\sum\limits_{i=1;j=1}^{i=10;j=10} \left|a_{ij}A_{ij}\right|} = \frac{38{,}056\cdot 10^9}{49{,}2\cdot 10^9} = 0{,}773. \tag{250}$$

Рассматриваемые вариации коэффициентов системы (246)–(247), равные одной сотой от их номинальных значений ($\varepsilon = 0{,}01$), оказываются почти на два порядка меньше естественной границы вариаций. Поэтому система (246)–(247) по отношению к вариациям $\varepsilon = 0{,}01$ оказывается хорошо обусловленной, погрешности решений — как показывает формула (248) — невелики (но все же, вариации решений оказываются более чем в 4,5 раза больше вариаций коэффициентов системы).

Вычисляя евклидовы нормы матрицы **A**: $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{10\cdot 11{,}7^2 + 90\cdot 1} = 38{,}2$ и обратной к ней матрицы $\mathbf{A}^{-1}$: $\|\mathbf{A}^{-1}\| = 2{,}82$, находим "число обусловленности" $\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\| = 108$.

Используя формулу (48) из § 3, получаем оценку

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le 108 \cdot (0,01 + 0,01) = 2,16. \tag{251}$$

На самом деле, учитывая неравенство (248), имеем

$$\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} \le 0,0494, \tag{252}$$

т. е. оценка по "числу обусловленности" оказывается, как и следовало ожидать, очень грубой.

Пример 24

Рассматривается система:

$$\left.\begin{aligned} 20,9x_1 + 1,2x_2 + 2,1x_3 + 0,9x_4 &= 21,7;\\ 1,2x_1 + 21,2x_2 + 1,5x_3 + 2,5x_4 &= 27,46;\\ 2,1x_1 + 1,5x_2 + 19,8x_3 + 1,3x_4 &= 28,76;\\ 0,9x_1 + 2,5x_2 + 1,3x_3 + 32,1x_4 &= 49,72 \end{aligned}\right\} \tag{253}$$

(решение этой системы методом итераций без вычисления неустранимой погрешности — рассматривалось ранее в [2], с. 80).

Составляющие вектора решений системы (243): $x_1 = 0,8047$, $x_2 = 1,0171$, $x_3 = 1,2082$, $x_4 = 1,2478$.

Определитель матрицы **A** системы (253):

$$\det \mathbf{A} = 271554,18.$$

Обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ системы (253) имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0,0488 & -0,0023 & -0,0049 & -0,0010\\ -0,0012 & 0,0479 & -0,0033 & -0,0036\\ -0,0044 & -0,0032 & 0,0513 & -0,0017\\ -0,0102 & -0,0031 & -0,0008 & 0,0317 \end{pmatrix}. \tag{254}$$

Евклидова норма матрицы **A** равна:

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \ldots + a_{44}^2} = 48,8794. \tag{255}$$

Евклидова норма обратной матрицы:

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| = 0,0923. \tag{256}$$

"Число обусловленности":

$$\|\mathbf{A}\| \cdot \|\mathbf{A}^{-1}\| = 48,8794 \cdot 0,0923 = 4,5116 \tag{257}$$

(вычисления выполнены М. В. Волошиным).

Таблица знаков матрицы **A**:

$$\begin{vmatrix} + & - & - & - \\ - & + & - & - \\ - & - & + & - \\ - & - & - & + \end{vmatrix}. \qquad (258)$$

Обратная таблица знаков:

$$\begin{vmatrix} - & + & + & + \\ + & - & + & + \\ + & + & - & + \\ + & + & + & - \end{vmatrix}. \qquad (259)$$

Опираясь на таблицы знаков (258) и (259) и используя алгоритм вычисления точной величины неустранимой погрешности, приведенный в § 12, и предполагая, что относительные вариации всех коэффициентов системы (253) не превышают значений $\pm\varepsilon$, было вычислено:

Для $\varepsilon = 0,001$:

- по первому варианту расчета получалось: $x_{1\min} = 0,8052$, $x_{2\min} = 1,0179$, $x_{3\min} = 1,2087$, $x_{4\min} = 1,2451$;
- по второму варианту расчета: $x_{1\min} = 0,8044$, $x_{2\min} = 1,0169$, $x_{3\min} = 1,2079$, $x_{4\min} = 1,2444$.

Таким образом, для системы (243) и $\varepsilon = 0,001$ минимальные значения всех четырех составляющих вектора решений достигаются при втором варианте расчета, который и определяет окончательно минимальные значения всех x_i.

Аналогично вычисляются и максимальные значения x_i при $\varepsilon = 0,001$ (они снова достигаются при втором варианте расчета).

Повторяя расчеты для $\varepsilon = 0,001$, $\varepsilon = 0,002$, $\varepsilon = 0,005$, $\varepsilon = 0,01$, $\varepsilon = 0,02$, получаем окончательно сводную таблицу значений $x_{i\min}$ и $x_{i\max}$ для различных ε (табл. 5).

Приведем еще величины абсолютных и относительных погрешностей различных составляющих вектора решений, т. е. величин $x_{i\max} - x_{i\min}$ и $\dfrac{x_{i\max} - x_{i\min}}{x_{i\varepsilon=0}}$ для значения $\varepsilon = 0,001$:

$$x_{1\max} - x_{1\min} = 0,007; \quad \frac{x_{1\max} - x_{1\min}}{x_{1\varepsilon=0}} = \frac{0,007}{0,8047} = 0,87\%; \qquad (260)$$

$$x_{2\max} - x_{2\min} = 0,0032; \quad \frac{x_{2\max} - x_{2\min}}{x_{2\varepsilon=0}} = \frac{0,0032}{1,0171} = 0,315\%; \qquad (261)$$

$$x_{3\max} - x_{3\min} = 0,0058; \quad \frac{x_{3\max} - x_{3\min}}{x_{3\varepsilon=0}} = \frac{0,0058}{1,2082} = 0,47\%; \qquad (262)$$

$$x_{4\max} - x_{4\min} = 0,0743; \quad \frac{x_{4\max} - x_{4\min}}{x_{4\varepsilon=0}} = \frac{0,0743}{1,2478} = 6\%. \qquad (263)$$

Приведенные цифры еще раз показывают, что абсолютные и относительные вариации различных составляющих x_i вектора решения **x** могут сильно отличаться друг от друга и поэтому часто применяемая оценка по "числу обусловленности" и по величине отношения $\frac{\|\Delta\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ может дать неверные рекомендации. Так, для системы (243) при $\varepsilon = 0,01$ вариация x_4 в 6,92 раза больше, чем наибольшая из вариаций x_1, x_2 или x_3.

Таблица 5

x_i \ ε	**0**	**0,001**	**0,002**	**0,005**	**0,01**	**0,02**
$x_{1\min}$	0,8047	0,8044	0,8041	0,8030	0,8012	0,7977
$x_{2\min}$	1,0171	1,0169	1,0168	1,0163	1,0155	1,0139
$x_{3\min}$	1,2082	1,2079	1,2076	1,2067	1,2053	1,2023
$x_{4\min}$	1,2478	1,2441	1,2404	1,2293	1,2109	1,1746
$x_{1\max}$	0,8047	0,8051	0,8054	0,8065	0,8082	0,8116
$x_{2\max}$	1,0171	1,0173	1,0174	1,0179	1,0187	1,0203
$x_{3\max}$	1,2082	1,2085	1,2088	1,2096	1,2111	1,2139
$x_{4\max}$	1,2478	1,2515	1,2552	1,2664	1,2852	1,3232

Все это наглядно видно на рис. 6, где показаны зависимости $x_{1\max}$, $x_{1\min}$, а также $x_{4\max}$, $x_{4\min}$ от вариаций коэффициентов системы ε.

Для любой системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ зависимости $x_{i\max}$ и $x_{i\min}$ от ε являются функциями типа рациональной дроби, т. е. частного двух полиномов, причем как числитель, так и знаменатель являются полиномами степени n от переменной ε (при условии, что все коэффициенты матрицы **A** и вектора **b** имеют относительные или абсолютные вариации, равные $\pm\varepsilon$). Если вариации некоторых коэффициентов равны нулю, то степени полиномов от переменной ε в числителе и знаменателе могут быть меньше n). Зависимости $x_{i\max}$ и $x_{i\min}$ от ε являются непрерывными функциями, кроме тех значений ε, при которых знаменатель, т. е. определитель матрицы **A** с учетом вариаций ее коэффициентов, обращается в нуль.

Если максимальное значение ε, для которого строятся зависимости $x_{i\max}$ и $x_{i\min}$ от ε, мало по сравнению с естественной границей вариаций, то зависимости $x_{i\max}$ и $x_{i\min}$ от ε близки к прямым линиям (что и отражает рис. 6).

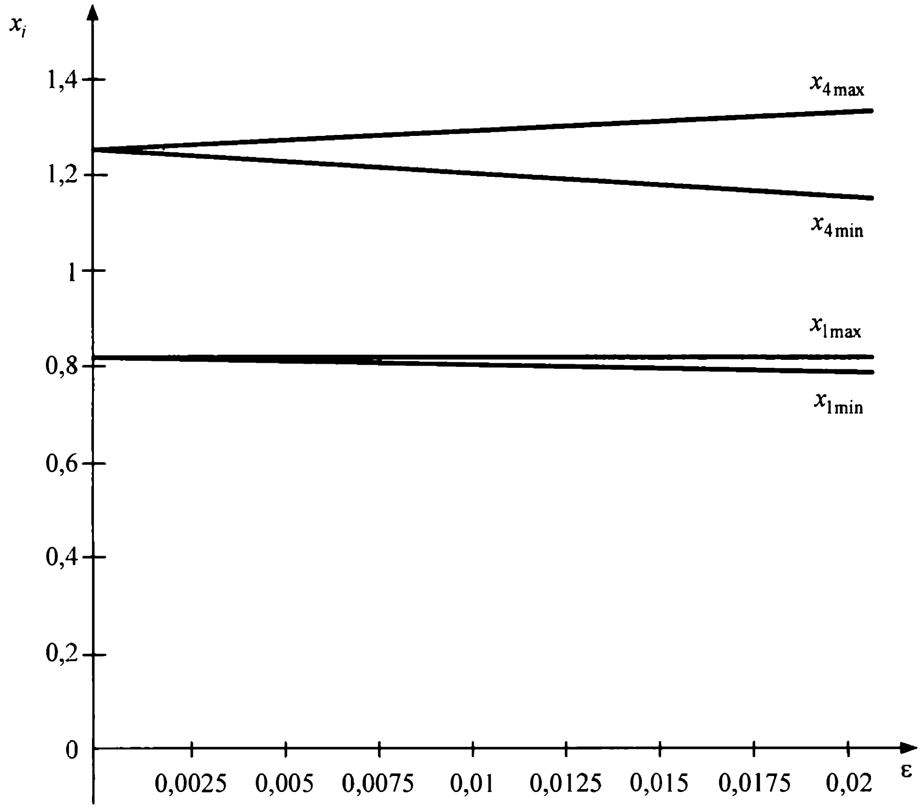

Рис. 6

Если максимальное значение ε, для которого строятся зависимости $x_{i\max}$ и $x_{i\min}$ от ε, соизмеримо с естественной границей вариаций (а это означает, что рассматриваемая система "плохо обусловлена"), то зависимости $x_{i\max}$ и $x_{i\min}$ от ε могут быть более сложными.

Пример 25

Рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} 14x_1 + 12x_2 + 15x_3 &= 3; \\ 12x_1 + 16x_2 + 12x_3 &= 5; \\ 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 1, \end{aligned}\right\} \qquad (264)$$

ранее уже исследованную в § 9, где было установлено, что для нее "число обусловленности" $\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\| = 100{,}12$, естественная граница вариаций $\varepsilon_{\text{гр}} = 0{,}018525$ и $\dfrac{1}{\varepsilon_{\text{гр}}} = 53{,}98$.

Зависимости $x_{3\max}$ и $x_{3\min}$ от ε показаны на рис. 7. Здесь сразу видно, что уже для $\varepsilon = 0{,}01$ система (264) по отношению к составляющей x_3 вектора решений очень плохо обусловлена: $x_{3\max}$ при $\varepsilon = 0{,}01$ в шесть раз больше исходного значения x_3, т. е. значения при $\varepsilon = 0$, а $x_{3\min}$ вообще даже изменило знак и стало отрицательным. Вычисление значений $x_{3\max}$ и $x_{3\min}$ при $\varepsilon > 0{,}01$ уже не имеет практического смысла.

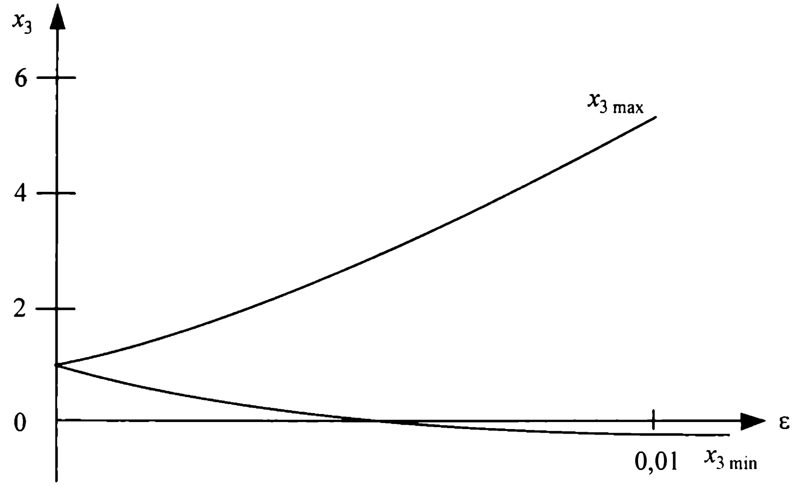

Рис. 7

В то же время составляющая вектора решений x_2 при $\varepsilon = 0{,}01$ обусловлена много лучше: как показывает расчет, ранее приведенный в [6] на с. 122–126, при $\varepsilon = 0{,}01$ величина $x_{2\max}$ всего на 34,97% больше исходного значения, т. е. значения при $\varepsilon = 0$, а величина $x_{2\min}$ всего на 11,4% меньше исходного значения, вычисленного при номинальных значениях коэффициентов системы (264).

§ 17. Сопоставление с методикой интервального анализа

В книгах, посвященных интервальному анализу (см., например, [3, 4, 15]), указывается на возможность использования его методики для отыскания неустранимой погрешности решений систем линейных алгебраических уравнений, происходящей из-за вариаций коэффициентов системы. Формулировка решаемой при этом задачи лишь немного отличается от уже рассмотренной нами в предыдущих параграфах. В интервальном анализе считаются заданными интервалы, внутри которых находятся коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$ и вектора $\mathbf{b}$ системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и отыскиваются интервалы, внутри которых находятся составляющие x_i вектора решений $\mathbf{x}$. Если эти интервалы вычислены, то тем самым вычислена и величина неустранимой погрешности.

Однако в практике инженерных расчетов оценка погрешностей СЛАУ методами интервального анализа практически не используется. Главная причина — сложность методов интервального анализа, его недоступность для широких кругов инженеров и вычислителей. Несмотря на то, что методы интервального анализа начали разрабатываться еще в 60-х годах XX века, он не вошел в программы обучения не только в технических вузах, но и в подавляющем большинстве математических факультетов университетов. Так, например, в Санкт-Петербургском государственном университете на математико-механическом факультете интервальный анализ не преподается, на факультете прикладной математики — процессов управления он преподавался до 2006 года, но потом был исключен из обязательной программы и переведен в разряд предметов, изучаемых студентами только факультативно, по их желанию. Исключением является, по-видимому, университет в Новосибирске, но исключение только подтверждает правило.

Иногда, правда, говорят, что поскольку разработаны программы для вычислительных машин, которые позволяют на основе интервального анализа вычислять интервалы, внутри которых заключены решения СЛАУ, то этими программами можно пользоваться и не зная интервального анализа. С этим утверждением согласиться нельзя. Конечно, для простейших систем уравнений можно, и не зная интервального анализа, получить правильный ответ. Но в более сложных случаях формальное использование готовых программ без понимания сущности решаемой задачи и методов ее решения может привести к ошибочному результату, а ошибки в расчете реальных объектов неизбежно ведут к авариям и катастрофам. Возможность роковой ошибки весьма вероятна, поскольку в интервальном анализе обнаружились серьезные недостатки.

Один из них был выявлен еще в 1979 году К. Райхманом и описан в [4] на с. 29–30 как "пример Райхмана" — пример системы линейных алгебраических уравнений, для которой методы интервального анализа не приводят к правильному решению. Существование подобного примера говорит о том, что имеется до конца неопределенный круг систем уравнений, для которых интервальный анализ не позволяет получить решение. А поскольку круг таких систем не определен, то пользователь готовых программ интервального анализа всегда может столкнуться с невозможностью решения и не будет знать, а что же ему делать?

Еще один недостаток был обнаружен совсем недавно, в ходе исследования естественной границы вариаций, о которой рассказывалось в предыдущих параграфах. Из этих исследований вытекает, что если исследуется система уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, в которой коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$ заданы своими интервалами и эти интервалы выходят за естественные границы вариаций, то конечных интервалов для решений не существует, решения могут быть (по абсолютной величине) сколь угодно велики. Но и это не все. Если для подобной системы искать интервалы решений методами интервального анализа, то мы можем получить для них конечные значения (и даже небольшие), но эти значения заведомо будут ошибочными. В результате будет сделан ошибочный вывод относительно обусловленности системы, а такой вывод может стать причиной аварий при реализации исследуемой системы "в металле".

Отметим, что в тех очень немногих примерах, которые приведены в руководствах по интервальному анализу [3, 4, 15], рассмотрены только интервалы, не выходящие за "естественные границы вариаций". Поэтому в этих примерах все верно. Однако если пользователь программ, написанных на основе интервального анализа, столкнется с системой уравнений, у которой естественная граница вариаций лежит внутри исследуемого интервала коэффициентов (а таких систем много), то такой пользователь может получить совершенно неправильный, ошибочный ответ, который может затем привести к авариям, если результаты расчета будут использованы при проектировании реального объекта промышленности или транспорта. Этой ошибки можно избежать, если перед вычислением интервалов, внутри которых лежат решения исследуемой системы уравнений по заданным интервалам коэффициентов системы, предварительно вычислить "естественную границу вариаций" и посмотреть, не выходит ли рассматриваемый интервал значений коэффициентов за ее пределы. Но для этого вычисления необходимо использовать методы, описанные в § 15, и прежде всего — вычислить обратную таблицу знаков матрицы $\mathbf{A}$ системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. В интервальном анализе подобных методов, позволяющих вычислить естественную границу вариаций или обратную таблицу знаков, по-видимому, нет.

Что касается приведенных в настоящей книге методов и алгоритмов вычисления как естественной границы вариаций, так и точной величины неустранимой погрешности каждой из составляющих x_i вектора решений $\mathbf{x}$ системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, то для их применения не является необходимым даже знание теории матриц. Фактически используется только теория определителей, которые, как известно, изучаются во всех технических высших учебных заведениях. Это позволяет самым широким кругам инженеров легко использовать описанные в книге методы, и тем самым повысить надежность очень многих расчетов, использующих — в качестве необходимого этапа — решение систем линейных алгебраических уравнений.

Еще одним серьезным недостатком методов вычисления неустранимой погрешности, основанных на интервальном анализе, является очень большой объем необходимых вычислений. А связано это с тем, что в интервальном анализе (применительно к системам линейных алгебраических уравнений) исследуется очень широкая, чрезмерно широкая задача: исследуются вариации решений не только при малых, но и при больших вариациях коэффициентов, и поэтому не используется возможность очень большого упрощения расчетов, связанная с малостью вариаций коэффициентов системы в реальных практических задачах.

Если же вариации коэффициентов не являются малыми (если, например, вариации сравнимы с самими коэффициентами), то и без всяких расчетов можно сразу сказать, что в этом случае решения изменятся очень существенно, и так же существенно изменятся и свойства объекта, математической моделью которого является исследуемая система уравнений, и поэтому почти всегда исследуемый объект свое назначение исполнять не будет.

Так, в учебнике по интервальному анализу [4] на с. 25 рассмотрен пример вычисления интервалов решений для системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, в которой

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2;3] & [0;1] \\ [1;2] & [2;3] \end{pmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} [0;120] \\ [60;240] \end{pmatrix} \tag{265}$$

(известный пример Хансена (Hansen)).

Систему (265) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} (2,5 \pm \varepsilon)x_1 + (0,5 \pm \varepsilon)x_2 &= (60 \pm \delta_1); \\ (1,5 \pm \varepsilon)x_1 + (2,5 \pm \varepsilon)x_2 &= (150 \pm \delta_2), \end{aligned}\right\} \tag{266}$$

где $\varepsilon = 0,5$, $\delta_1 = 60$, $\delta_2 = 90$.

Для этой системы номинальный вектор решений (при $\varepsilon = 0$, $\delta_1 = \delta_2 = 0$) будет равен $x_1 = 13,6$, $x_2 = 51,8$.

Если даже не учитывать вариации правых частей (принять $\delta_1 = \delta_2 = 0$), а учитывать только вариации коэффициентов матрицы **A**, то получим $x_{1\min} = -6$, $x_{1\max} = 45$, $x_{2\min} = -10$, $x_{2\max} = 90$.

Понятно, что объект с такими вариациями величин x_1 и x_2 вряд ли пригоден к какому-либо практическому использованию.

В ответ на подобные примеры приходится слышать возражения: если интервальный анализ способен вычислить вариации решений даже при больших вариациях коэффициентов системы уравнений, то он тем более справится с расчетом при малых вариациях, а увеличение объема вычислений по сравнению с методикой, основанной на таблицах знаков, для современных быстродействующих вычислительных машин не опасно.

На самом деле это не так. Объем вычислений часто оказывается критическим фактором, и исследованию этого вопроса была посвящена обширная статья [15, 16], написанная выдающимся специалистом по интервальному анализу С. П. Шарым.

Выводы, к которым приходит С. П. Шарый: отыскание точных интервалов решений систем линейных алгебраических уравнений (по терминологии статьи [15] — оптимального оценивания интервального вектора) является задачей трудно решаемой, ее трудоемкость растет пропорционально экспоненте от числа уравнений и часто превосходит возможности самых быстродействующих вычислительных машин. "Тем самым, — пишет С. П. Шарый в [15], — получено теоретическое обоснование того факта, что за последние тридцать — сорок лет (в течение которых интервальный анализ развивался скорее вширь, чем вглубь) достижения в деле создания алгоритмов точного вычисления искомых интервалов были скромными. Несмотря на многочисленные плодотворные применения интервальных методов в современном естествознании и внутри самой математики, алгоритмы для оптимального (т. е. точного. — *Ю. П.*) решения многих интервальных задач либо не найдены, либо по трудоемкости они оказываются ненамного лучше полного перебора" (см. [15], с. 95).

"Таким образом, — продолжает свои выводы С. П. Шарый в статье [16], — все подходы, разработанные к настоящему моменту для вычисления оптимальных (т. е. точных. — *Ю. П.*) оценок объединенного множества решений интервальных систем линейных алгебраических уравнений, имеют экспоненциальную трудоемкость в наихудшем случае. Как уже отмечалось, этот факт не является следствием "плохости" предложенных алгоритмов, а отражает глубокие свойства объединенного и других множеств интервальных линейных систем... Следовательно, экспоненциальная сложность всех рассмотренных алгоритмов существенна и не может быть устранена" (см. [16], с. 102–103). "Поэтому, — продолжает С. П. Шарый, — если размерность (т. е. число уравнений) интервальной линейной системы достаточно велика (больше нескольких десятков), то количество арифметических и логических операций начинает превосходить количество операций, выполнимое на сколь угодно мощном компьютере за любое разумное время (час, год и даже столетие)" (см. [16], с. 103).

В качестве примера в [16] на с. 102 приведена оценка сложности (количества необходимых операций) для одного из алгоритмов, равная числу $2^{(n^2+n)}$, где n — количество уравнений в системе. Уже при $n=10$ это число равно $2^{110} > 10^{36}$, что, безусловно, превышает возможности всех, не только сегодняшних, но и возможных в ближайшее десятилетие компьютеров.

Отметим, что все сказанное отнюдь не отрицает возможностей интервального анализа. Его методы постоянно совершенствуются и будут совершенствоваться далее.

Однако у интервального анализа имеются и неустранимые недостатки.

- Сложность изложения и изучения. В этом может убедиться каждый, кто познакомится как со сравнительно просто изложенными работами [3, 4, 15, 16], так и с работами [17–19] и др. Сложность изложения во многом связана с тем, что интервальный анализ опирается на достаточно непростую интервальную арифметику, в которой (что сразу усложняет все дальнейшее) не выполняется столь важный для обычной арифметики закон дистрибутивности.

- Интервальный анализ для систем линейных алгебраических уравнений вычисляет интервалы, внутри которых находятся решения сразу для любых (не обязательно малых) интервалов, внутри которых в свою очередь заключены коэффициенты системы, не пользуясь теми упрощениями, которые вносит малость этих интервалов, характерная почти для всех практических задач. В результате для алгоритмов, основанных на интервальном анализе, характерен очень быстрый, экспоненциальный рост числа необходимых операций с увеличением числа уравнений в системе. В то же время для излагаемого в книге метода вычисления неустранимой погрешности, основанного на таблицах знаков, характерен (как показано в § 16) гораздо менее медленный, пропорциональный полиному умеренной степени рост сложности решения в зависимости от числа уравнений в системе, что существенно упрощает все расчеты.
- При использовании методов интервального анализа необходимо проверить, не выходят ли рассматриваемые интервалы коэффициентов матрицы **A** системы уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ за рамки естественных границ вариаций. Если они выходят за эти границы, то искать интервалы решений бесполезно, ибо в этом случае интервалы решений сколь угодно велики. В то же время вычислять естественную границу вариаций все равно придется через построение обратной таблицы знаков для матрицы, используя алгоритм, предложенный ранее в монографии [6] и более подробно изложенный в настоящей книге.

Отметим также, что в тех случаях, когда интервалы коэффициентов системы уравнений не выходят за естественную границу вариаций, методы интервального анализа приводят к тем же интервалам решений, что и более простые и требующие меньшего объема вычислений методы, излагаемые в настоящей книге и основанные на использовании таблиц знаков.

§ 18. Практические рекомендации

Отметим сразу, что первым этапом в решении задачи о вычислении неустранимой погрешности СЛАУ является обязательная оценка величины возможных изменений (вариаций) параметров объекта, математической моделью которого является исследуемая СЛАУ, и оценка зависящих от диапазона изменений этих параметров изменений коэффициентов СЛАУ.

Отметим, что первый этап — это задача, которую должен решать опытный инженер, ведущий проект, и для ее решения нужно хорошо знать свойства и характеристики исследуемых объектов. Никаких общих рекомендаций, пригодных для любых объектов, дать нельзя, и поэтому в настоящей книге этот первый этап исследования не рассматривается, вариации коэффициентов СЛАУ предполагаются уже известными. Однако надо всегда помнить, что первый этап является не только первым, но и важнейшим. Без вычисления зависящих от параметров объекта вариаций коэффициентов СЛАУ, или хотя бы без хорошей оценки возможных пределов их изменения, все дальнейшие вычисления смысла не имеют.

Последующие этапы вычисления неустранимой погрешности — построение таблиц знаков, вычисление естественной границы вариаций матрицы **A** и т. п. — это уже типичные задачи прикладной математики, их можно решать уже не зная специфики исследуемого объекта, решать по единой методики для всех СЛАУ. Однако при вычислении вариаций определителей в формулах Крамера нужно учитывать возможные зависимости между элементами определителей — об этом ранее (в § 12) уже говорилось. Следует иметь в виду, что наличие зависимостей между элементами матриц и определителей (например, в случае симметричных матриц) уменьшает величину вариаций определителей, а значит, уменьшает величину неустранимой погрешности, увеличивает естественную границу вариаций. Поэтому рассматриваемый в большинстве приведенных примеров случай одинаковых по абсолютной величине вариаций коэффициентов дает наибольшие возможные, предельные величины вариаций составляющих x_i вектора решений **x** системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

Как уже отмечалось ранее, вероятность реализации именно этого, наиболее опасного сочетания вариаций коэффициентов системы очень и очень мала. Вычисленные по описанному в книге алгоритму величины $x_{i\max}$ и $x_{i\min}$ следует рассматривать как точную верхнюю грань x_i — грань, которая крайне редко достигается, но, все же, может достигаться. В то же время значения x_i, немного меньшие, чем $x_{i\max}$ или немного большие, чем $x_{i\min}$, имеют более существенную вероятность — как это на конкретном примере показано в [6] на с. 86.

Для практических целей, разумеется, было бы очень полезно иметь вычисленные вероятности различных вариаций x_i, вариаций меньших, чем $x_{i\max}$, и больших, чем $x_{i\min}$ — например, иметь вычисленные вероятности попадания x_i в интервал от $x_i = 0,9x_{i\max}$ до $x_{i\max}$ и в любой другой интервал.

Первые шаги в этом направлении исследований сделаны (см. [6], с. 85–89, а также доклад С. П. Шарого [20]). Однако до сегодняшнего дня еще не удалось выполнить главного — не удалось вычислить или оценить закон распределения вероятности различных значений неустранимой погрешности — от x_{iN} до $x_{i\max}$ и от $x_{i\min}$ до x_{iN}. Здесь остается возможность для хорошей, интересной и важной научно-исследовательской работы.

Малая вероятность опасных сочетаний знаков вариаций различных элементов конструкции (и тем самым — малая вероятность опасных сочетаний знаков вариаций коэффициентов системы уравнений, являющейся математической моделью данной конструкции) приводит к важным следствиям.

Предположим, что рассчитана и спроектирована некоторая конструкция без вычисления неустранимой погрешности расчета. Допустим, что изготовлена тысяча изделий, использующих эту конструкцию, и все они десять лет исправно работают (а это говорит о том, что неизбежные в ходе эксплуатации вариации параметров изделия не выходили за допустимые пределы). Гарантирует ли это, что на одиннадцатом году с одним из изделий не произойдет опасной аварии — даже при хорошей, безупречной эксплуатации изделия? К сожалению, нет, не гарантирует. Отсутствие аварий в течение 10 лет говорит лишь о том, что ни в одном из изделий за 10 лет эксплуатации еще не реализовалось маловероятное опасное сочетание знаков вариаций, но на одиннадцатый год оно может реализоваться. Настоящую гарантию надежной работы любого изделия дает только расчет — и, в частности, только расчет, содержащий в себе в качестве этапа вычисление величины неустранимой погрешности.

Расчет неустранимой погрешности целесообразно начинать с вычисления "естественной границы вариаций". Если эта граница меньше тех вариаций, которые характерны для исследуемого изделия, то это означает возможность очень больших вариаций решений. Дальнейший расчет уже не имеет смысла, исследуемое изделие не надежно, его надо заменить.

Еще до вычисления "естественной границы вариаций" полезно проверить — не окажутся ли некоторые из составляющих x_i вектора решений $\mathbf{x}$ системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ненадежными только из-за вариаций правых частей, вариаций коэффициентов b_i при неизменной матрице $\mathbf{A}$, т. е. при отсутствии вариаций коэффициентов a_{ij}.

Такая первоначальная проверка совсем не сложна: как указывалось в § 15, достаточно всего лишь проверить, не оказалась ли неустранимая погрешность x_i, вычисляемая в этом случае по формулам (236) или (237), сравнимой или большей, чем само решение x_i, вычисляемое по формуле (235).

Отметим, что мы все время говорили о вычислении неустранимой погрешности решений систем линейных алгебраических уравнений. Это не означает недооценки различных методов уменьшения устранимых погрешностей, происходящих, например, из погрешностей округления, конечного числа итераций при использовании итерационных методов вычисления решений и т. п. Исследованию методов уменьшения устранимых погрешностей посвящено большое число публикаций — таких, как [1, 2, 29–31]; из недавних работ отметим [32], к которым может обратиться читатель.

Начинать расчет целесообразно с вычисления неустранимой погрешности. Если она, например, такова, что можно гарантировать только третий знак решения, то бесполезно использовать методы уменьшения устранимых погрешностей для вычисления четвертого и последующих знаков решения.

§ 19. Применение к расчетам неустранимой погрешности решений уравнений в частных производных

Исследование погрешностей решений уравнений в частных производных имеет свою специфику, почему и выделено в отдельный параграф.

Как хорошо известно, многие задачи физики и техники приводят к необходимости вычислять решения дифференциальных уравнений в частных производных — таких, например, как уравнение Лапласа (Laplace):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \tag{267}$$

уравнение Пуассона (Poisson):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x;\, y) \tag{268}$$

и многие другие, называемые обычно уравнениями математической физики. Одним из современных примеров практических задач, приводящих к необходимости решать подобные уравнения и давать оценку неустранимой погрешности решений, является исследуемая на кафедре МЭКС Санкт-Петербургского государственного университета под руководством профессора Егорова Н. В. задача вычисления электростатического потенциала при испускании электронов с катодов различной формы (расчеты "электронных пушек", эмиссионных электрооптических систем, систем формирования электронных и ионных пучков и т. п. [23–26]). Поскольку аналитическое решение уравнений в частных производных удается получить лишь в отдельных исключительных случаях, то гораздо чаще используются численные методы. Одним из основных является метод сеток или метод конечных разностей, использующий приближенную замену производных конечно-разностными соотношениями и сводящий решение уравнений в частных производных к решению систем линейных алгебраических уравнений.

Если рассматриваются уравнения с двумя независимыми переменными x и y, то решением является функция $u(x;\, y)$, которая внутри некоторой области G с границей Γ на плоскости $x0y$ (рис. 8) удовлетворяет соответствующему уравнению в частных производных, а на границе Γ удовлетворяет граничным условиям.

В методе сеток на плоскости $x0y$ строятся два семейства параллельных прямых:

$$\begin{aligned} x &= x_0 \pm ih \quad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots); \\ y &= y_0 \pm kl \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \end{aligned} \tag{269}$$

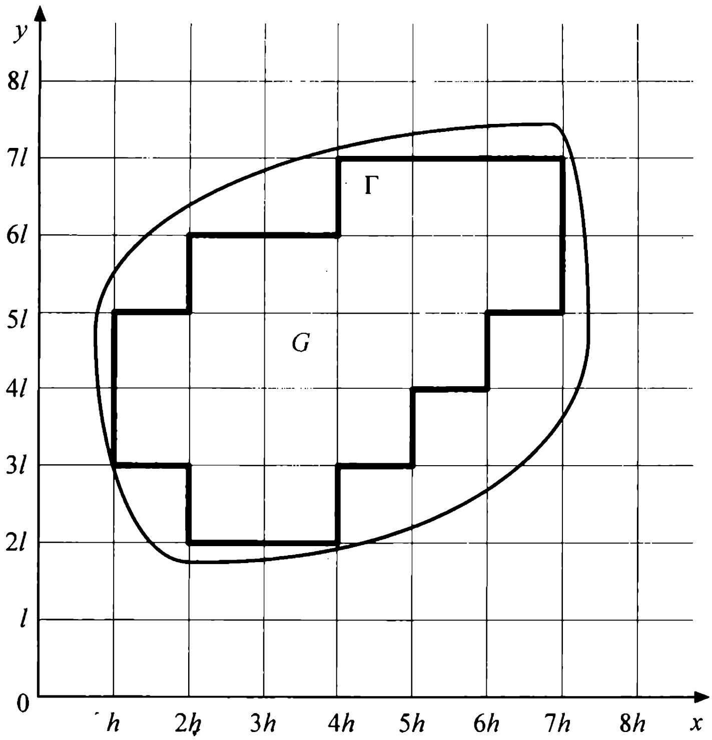

Рис. 8

Точки пересечения этих прямых называются *узлами*. Значения искомой функции в узлах сетки обозначаются через $u_{ik} = u(x_0 + ih;\ y_0 + kl)$ и в каждом внутреннем узле частные производные приближенно заменяются разностными отношениями:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1;k} - 2u_{ik} + u_{i-1;k}}{h^2}; \tag{270}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ik} \approx \frac{u_{i+1;k} - 2u_{ik} + u_{i-1;k}}{l^2}. \tag{271}$$

После такой замены исходное уравнение в частных производных переходит в систему линейных алгебраических уравнений для величин u_{ik}, т. е. значений функции $u(x;\ y)$ в узлах сетки (они здесь играют роль составляющих x_i вектора решений **x** в системах, рассматриваемых нами ранее).

В дальнейшем для начала ограничимся исследованием уравнения Лапласа, заданного на единичном квадрате размером $[0;\ 1]\times[0;\ 1]$, рассеченном сеткой с шагом дискретизации $h = l = \dfrac{1}{m+1}$.

Дифференциальное уравнение Лапласа во внутренних узлах сетки аппроксимируется конечными разностями

$$u_{i+1;j} + u_{i-1;j} + u_{i;j+1} + u_{i;j-1} - 4u_{i;j} = h^2 F_{ij}, \tag{272}$$

где F_{ij} зависят от граничных условий.

Всего внутренних узлов в квадрате будет m^2, поэтому рассматриваемое уравнение Лапласа на квадрате будет аппроксимироваться системой из m^2 уравнений для m^2 неизвестных (значений функции $u(x;\ y)$ в узлах) — от u_{11} до u_{mm}. Эту систему записывают обычно в матричной форме:

$$\mathbf{Au} = \mathbf{F}, \tag{273}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор-столбец неизвестных, подлежащих вычислению, размером $1 \times m^2$; $\mathbf{F}$ — вектор-столбец правых частей; $\mathbf{A}$ — матрица размером $m^2 \times m^2$, пятидиагональная, невырожденная, симметричная, многие коэффициенты матрицы равны нулю (подробнее о свойствах этой матрицы см. в [13]).

Для $m = 2$ матрица $\mathbf{A}$ имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{274}$$

Для $m = 3$ эта матрица принимает форму:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \tag{275}$$

При выбранной сетке, при выбранном значении m^2 матрица $\mathbf{A}$ остается неизменной и величины узлов u_{ij} зависят только от правых частей, от значений функции $u(x;\ y)$ на границе области. От погрешностей в задании этих значений — а они не могут быть заданы идеально точно — зависит и неустранимая погрешность вычисления величин узлов. Величину этой неустранимой погрешности мы будет в дальнейшем оценивать.

Пользуясь далее известными формулами Крамера и разлагая определители D_i в числителях формул Крамера по элементам i-го столбца, получаем формулу для вычисления величины любого из узлов. Так, для u_{11} имеем:

$$u_{11} = \sum_{m=1}^{m^2} \frac{A_{1;m}}{D} F_m, \tag{276}$$

где $A_{1;m}$ — алгебраические дополнения элементов первого столбца.

Поскольку алгебраические дополнения элементов любого столбца зависят только от матрицы **A** и не зависят от правых частей, то можно записать:

$$u_{ij} = \sum_{i=1}^{i=m^2} k_i F_i, \tag{277}$$

где $k_i = \dfrac{A_{ij}}{D}$.

Так, например, для $m = 2$ определитель D в формулах Крамера будет равен

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 75, \tag{278}$$

определитель D_1 будет равен

$$D_1 = \begin{vmatrix} F_1 & -1 & 0 & -1 \\ F_2 & 4 & -1 & 0 \\ F_3 & -1 & 4 & 0 \\ F_4 & 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} \tag{279}$$

и, следовательно,

$$u_{11} = \frac{1}{D}\left(F_1 A_{11} + F_2 A_{12} + F_3 A_{13} + F_4 A_{14}\right), \tag{280}$$

где

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 12, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 12,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{14} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 15,$$

и, таким образом,

$$u_{11} = \sum_{i=1}^{i=m^2} k_i F_i = 0{,}16F_1 + 0{,}16F_2 + 0{,}107F_3 + 0{,}2F_4. \tag{281}$$

Таким образом, для заданного размера сетки величина любого из узлов u_{ij} зависит только от правых частей.

Величина правых частей может быть известна нам только с неизбежной погрешностью:

$$F_i = F_{iN}\left(1 \pm \delta_i\right), \tag{282}$$

где F_{iN} — номинальное значение, используемое для вычисления значений узлов.

Наличие погрешности может либо увеличивать, либо уменьшать величину u_{ij} по сравнению с ее номинальным значением, соответствующим $\delta_i = 0$. Увеличение u_{ij} будет наибольшим, если знак ε_i совпадает со знаком произведения F_{iN} на $\frac{D_i}{D} = k_i$. Изменение величины u_{ij} в сторону уменьшения будет наибольшим, если знак ε_i противоположен знаку произведения F_{iN} на $\frac{D_i}{D} = k_i$.

Теперь можно ответить на главный вопрос: во сколько раз может измениться величина любого узла u_{ij} от присутствия погрешности в правой части?

Ответ: в любое число раз. Все зависит от правых частей. Если они знакопеременны, то даже если алгебраические дополнения A_{ij} имеют один знак, то величина u_{ij} может быть близкой к нулю, и тогда неустранимая погрешность, равная

$$\Delta u_{ij} = \sum_{i=1}^{i=m^2} \left|k_i F_i \delta_i\right|, \tag{283}$$

даже при малых δ_i может быть в любое число раз больше номинальной величины узла, равной

$$u_{ij\text{ном}} = \sum_{i=1}^{i=m^2} k_i F_{iN}. \tag{284}$$

Пример: для $m = 2$ вычисленные значения k_i для узла u_{11} (формула (281)) равны: $k_1 = 0{,}16$, $k_2 = 0{,}16$, $k_3 = 0{,}107$, $k_4 = 0{,}2$. Если $F_1 = 5$, $F_2 = 0$, $F_3 = 0$, $F_4 = -3{,}99$, то $u_{11} = 0{,}16 \cdot 5 - 0{,}2 \cdot 3{,}99 = 0{,}002$. Если $\delta_1 = 0{,}01$, а $\delta_4 = -0{,}01$, то $\Delta u_{11} = 0{,}01 \cdot \left(0{,}16 \cdot 5 + 0{,}2 \cdot 3{,}99\right) = 0{,}01598$, т. е. даже при погрешности в величине правой части, не превышающей одной сотой, неустранимая погрешность в значении узла u_{11} почти в 8 раз больше, чем номинальная величина u_{11}.

Отсюда следует важный вывод: при численном решении дифференциальных уравнений в частных производных путем сведения их к системам линейных алгебраических уравнений обязательным этапом решения должно быть вычисление неустранимых погрешностей решения, зависящих от неизбежных погрешностей в задании правых частей. Без вычисления возможной величины неустранимой погрешности решение ни в коей степени не может быть надежным, поскольку существуют такие правые части, для которых неустранимая погрешность может быть в любое число раз больше самого решения.

Все это относится, разумеется, и к исследуемым на кафедре МЭКС задачам вычисления электростатического потенциала при испускании электронов с катодов различной формы, систем формирования электронных и ионных пучков, эмиссионных электронно-оптических систем и т. п.

В то же время существование таких граничных условий, для которых их малая погрешность приводит к большим неустранимым погрешностям решений, не означает, разумеется, что для всех других граничных условий будет то же самое. Существуют и такие граничные условия, для которых погрешность в их задании не влияет существенно на решение. Все зависит от конкретных граничных условий.

Поэтому вычисление неустранимой погрешности величин узлов u_{ij} для заданных конкретных граничных условий по методике, изложенной в данном параграфе, делает результаты расчета надежными.

Отметим существенное различие между расчетом максимальной величины неустранимой погрешности для случая, когда она зависит от вариаций коэффициентов матрицы **A** и вектора **b** в системе уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, и рассматриваемым в настоящем параграфе частным случаем, когда неустранимая погрешность зависит только от вариаций граничных условий, т. е. в конечном счете от вариаций составляющих вектора **b**. При учете вариаций матрицы **A** комбинация вариаций, приводящая к наибольшей величине неустранимой погрешности решений, имеет очень малую вероятность. Комбинации вариаций, приводящие не к максимальному значению неустранимой погрешности, но к значениям, близким к максимальному, имеют уже более существенную вероятность, но методы вычисления вероятностей различных величин неустранимой погрешности решений СЛАУ к настоящему времени еще не разработаны.

Для частного случая, когда неустранимая погрешность зависит только от вариаций вектора **b** в системе, все проще. Сравнение формул (283) и (284) сразу говорит о том, что если F_{iN} таковы, что величина узла u_{ij} мала при не очень малых F_{iN}, то найдется много таких комбинаций знаков ε_i, при которых неустранимая погрешность в значении узла u_{ij} будет очень велика даже при малых $|\varepsilon_i|$, при малых по абсолютной величине вариациях граничных условий и правых частей систем $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Поэтому вероятность коренного изменения величины любого из узлов u_{ij} не будет малой даже при малых вариациях граничных условий.

Разумеется, было бы желательно вычислить точную величину этой вероятности, но пока эта весьма трудная задача еще не решена.

Рассмотрим теперь вопрос о трудоемкости вычисления неустранимой погрешности решений уравнений в частных производных. Будем использовать известные соотношения: для вычисления методом Гаусса всех составляющих вектора $\mathbf{x}$ решения системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, матрица $\mathbf{A}$ которой имеет размер $n \times n$, требуется примерно n^3 умножений. Столько же, примерно, умножений требуется и для вычисления определителя матрицы $\mathbf{A}$ с использованием того же метода Гаусса.

При вычислении неустранимой погрешности для каждого из узлов u_{ij} системы алгебраических уравнений, аппроксимирующих (в квадратной сетке) решение уравнения Лапласа, требуется (согласно формуле (283)) вычислить определитель D и все его алгебраические дополнения, входящие в формулы (276) и (277). Всего — с учетом формулы (283) — требуется примерно $n^3 + n^2(n-1)^3 + n^2$ умножений. Таким образом, число необходимых умножений с ростом числа уравнений возрастает примерно пропорционально пятой степени от числа уравнений n. А поскольку $n = m^2$, где m^2 — число узлов, то уже, например, при $m = 30$ (т. е. при сетке 30×30) число уравнений достигнет 900, а необходимое число умножений будет близко к $6 \cdot 10^{15}$.

Однако число необходимых вычислительных операций можно сильно сократить. Можно воспользоваться тем, что коэффициенты k_i в формулах (282) и (283) не зависят от граничных условий, вычислить их заранее и ввести в память машины.

Тогда для вычисления неустранимой погрешности при аппроксимации уравнения в частных производных системой из n алгебраических уравнений необходимое число умножений для вычисления всех n узлов u_{ij} будет равно (согласно формуле (283)) всего n^2.

Пусть, например, для аппроксимации уравнения Лапласа мы решили пользоваться квадратной сеткой 30×30 с 900 узлами. Если предварительно вычислить и ввести в память 900 коэффициентов k_i, то для вычисления неустранимой погрешности каждого из узлов для любых граничных условий потребуется всего $900 \times 900 = 8{,}1 \cdot 10^5$ умножений.

Отметим, что формулой (284) можно пользоваться для сокращения числа необходимых операций и при вычислении величин узлов при номинальных значениях граничных условий, без учета их вариаций. Формула (284) показывает, что для вычисления всех n узлов u_{ij} потребуется (после вычисления коэффициентов k_i) n^2 умножений, в то время как при использовании метода Гаусса в общем случае потребуется примерно n^3 умножений.

Таким образом, можно сделать следующие выводы общего характера, справедливые при вычислении решений уравнений в частных производных путем аппроксимации их системами линейных алгебраических уравнений:

- без вычисления неустранимой погрешности, происходящей из-за неизбежных неточностей и вариаций в граничных условиях, решения ни в коей мере не могут быть признаны надежными, поскольку возможны такие заранее не известные комбинации граничных условий и их вариаций, при которых даже малые по абсолютной величине вариации могут привести к большим (и даже коренным) изменениям решений;

- вычисление неустранимой погрешности может быть произведено при умеренном количестве необходимых вычислительных операций — даже для систем с большим числом уравнений, при достаточно густой сетке аппроксимации.

Поскольку выводы о возможной большой неустранимой погрешности решений СЛАУ даже при малых погрешностях правых частей (а тем самым и для СЛАУ, аппроксимирующих решения уравнений в частных производных, рассматриваемых в [23–25]) были опубликованы в 2009 году [6], можно было ожидать, что представляемые, например, в 2013 году работы, содержащие численные решения уравнений в частных производных без вычисления неустранимой погрешности решений, будут браковаться. На самом деле этого пока не происходит.

В то же время вычислить неустранимую погрешность совсем не сложно, и наличие такого вычисления сразу обеспечит надежность полученного результата.

§ 20. Об авариях, происходящих из-за неточностей в методиках расчета и проектирования

Как показывают все предыдущие параграфы, традиционные и широко используемые методы расчета далеко не всегда являются совершенными. Так, до 2009 года были далеки от совершенства методы вычисления неустранимой погрешности решений систем линейных алгебраических уравнений. Положение улучшила публикация [6]. Между тем — как указывалось, например, в [7] — расчеты, связанные с системами алгебраических уравнений, составляют до 70% всех расчетов.

Поэтому недостатки и неточности в методах расчета неизбежно становились источником аварий и даже катастроф. Об этих авариях и катастрофах мало известно, поскольку организации, осуществляющие проектирование и расчет, не заинтересованы в том, чтобы вскрылись сведения о недостатках используемых ими традиционных методов расчета, не торопятся использовать новые, более совершенные методы, а при расследовании аварий стараются выставить в качестве их причин плохое изготовление, "человеческий фактор" и т. п. — словом, все что угодно, кроме признания необходимости совершенствовать методы расчета и проектирования.

Наиболее известной ужасной катастрофой, причины которой не удалось полностью скрыть, была катастрофа аквапарка (водного парка) "Трансвааль", произошедшая 14 февраля 2004 года в Москве, когда погибло 27 человек, в том числе дети, а 113 человек получили различные травмы.

Аквапарк "Трансвааль", расположенный на окраине Москвы, был одним из любимейших мест отдыха москвичей. Плавательные бассейны, различные аттракционы — водные горки, бассейны с искусственно созданными морскими волнами и т. п. — все располагало к здоровому и беззаботному отдыху. Само здание аквапарка было оригинально и красиво. Крыша бассейна опиралась на целый ряд расположенных полукругом колонн, между которыми оставалось место для больших окон.

Поэтому в тот роковой день, 14 февраля 2004 года, аквапарк был полон беззаботно веселящимися в воде взрослыми и детьми. И вдруг одна из колонн, на которые опиралась крыша большого бассейна, внезапно сломалась под ее тяжестью, а вслед за ней стали ломаться получившие добавочную нагрузку другие колонны. Потерявшая опору крыша рухнула на головы беззаботно плавающих людей. Раздались крики раздавленных, погас свет, в кромешной тьме те, кто уцелел, пытались выбраться из-под рухнувших на них обломков. Затем прибыли спасатели, несколько часов разбирали завалы, спасали тех, кого еще можно было спасти. Потом наступило время подвести окончательный горький итог: погибло 27 человек, ранено 113, среди погибших и раненых — дети.

Конечно, катастрофа такого масштаба не могла остаться без тщательного расследования. Первой версией — как всегда — была версия о террористах, которые якобы подложили взрывчатку в одну из колонн, удерживающих крышу. Однако на месте взрыва всегда остаются малые следы взрывчатого вещества или продуктов его распада. Огромным давлением взрыва они накрепко "впечатываются" в поры бетона, и их легко найти методами современного точного химического анализа. Точнейшие анализы подтвердили: никаких следов взрывчатки нет.

В дальнейшем расследовании версия о террористическом акте была полностью опровергнута. Стали проверять качество строительства — не применялись ли некачественные или суррогатные материалы, соответствовало ли реальное строительство проектным требованиям и т. п. Проверка показала, что отступлений от проекта не было.

После всех исследований и экспертиз специалисты пришли к выводу, что единственной причиной катастрофы были допущенные ошибки при расчете и проектировании аквапарка. Проектировало его известное архитектурное бюро ЗАО "К", возглавляемое опытным и авторитетным архитектором Нодаром Вахтанговичем Канчели, руководившим до этого проектированием многих уникальных зданий Москвы. И вот 1 апреля 2005 года (т. е. более чем через год после катастрофы) Н. В. Канчели было предъявлено обвинение сразу по двум грозным статьям Уголовного кодекса РФ: статья 109, часть 3 ("Причинение смерти по неосторожности двум или более лицам"), и статья 118, часть 2 ("Причинение тяжкого вреда здоровью вследствие ненадлежащего исполнения профессиональных обязанностей"). Московской прокуратурой против Н. В. Канчели было возбуждено уголовное дело.

Но и сам Н. В. Канчели, и архитекторы, работавшие под его руководством, были опытными специалистами. Поэтому возможность элементарной ошибки в проектировании и расчете (взят не тот коэффициент, использована не та формула и т. п.), безусловно, исключается. Другое дело — вычисление неустранимой погрешности для математической модели здания. Ни в 2004 году, ни, тем более, в предыдущие годы, когда проектировался аквапарк "Трансвааль", надежных методов вычисления неустранимой погрешности не существовало. Использовались только приближенные оценки по "числу обусловленности" $\|\mathbf{A}\|\cdot\|\mathbf{A}^{-1}\|$, а эти оценки, как уже было показано в предыдущих параграфах, легко могут привести к ошибочным проектным решениям, влекущим аварии.

Вполне возможно и очень вероятно, что причиной катастрофы аквапарка "Трансвааль" стала неточная оценка неустранимой погрешности при расчете математической модели здания аквапарка. К сожалению, мы не можем утверждать это с абсолютной достоверностью. Дело в том, что расследование в рамках возбужденного уголовного дела — в ходе которого был бы дан полный ответ на все поставленные вопросы — было 5 августа 2006 года прекращено по амнистии. В связи со столетием со дня открытия Первой Государственной думы России в 1906 году была объявлена амнистия всем осужденным и подсудимым старше 60 лет. Н. В. Канчели попал под эту амнистию, и это помешало окончательно установить причину катастрофы аквапарка "Трансвааль". Если этой причиной (а это почти бесспорно) является неточность в оценке неустранимой погрешности, то Н. В. Канчели безусловно невиновен: в те годы, когда проектировался аквапарк, надежных методов вычисления неустранимой погрешности еще не было (более подробно о катастрофе "Трансвааля" и других техногенных катастрофах рассказано в книге [39]).

Гораздо хуже положение, сложившееся позже, в 2010 году. Перед этим, в 2009 году, в монографии [6] была опубликована методика точного вычисления величины неустранимой погрешности и рассмотрен ряд смежных вопросов. Книгу рецензировали доктора физико-математических и технических наук, профессора Блехман И. И., Игнатьев М. Б., Ушаков А. В. Более краткое изложение затронутых в монографии проблем было дано в статье [22], опубликованной в авторитетном научном журнале "Вестник гражданских инженеров".

Казалось бы, что если методика вычисления точной величины неустранимой погрешности, позволяющая существенно снизить вероятность аварий, опубликована и авторитетными специалистами признана, то она должна безотлагательно использоваться организациями, производящими расчеты и проектно-конструкторские разработки для повышения надежности результатов расчета, для уменьшения вероятности аварий (не говоря уже о том, что использование более обоснованных — на базе новых методов расчета — "коэффициентов запаса" может существенно снизить стоимость строительства, а это очень большие деньги). Поскольку методика вычисления неустранимой погрешности была разработана в Санкт-Петербургском государственном университете (СПбГУ), на кафедре моделирования электромеханических и компьютерных систем (заведующий кафедрой — профессор Егоров Н. В.), то СПбГУ обратился к ряду фирм, ведущих расчеты и проектирование, с предложением использовать опубликованные результаты и разработанные в СПбГУ программы для расчета для ЭВМ, получивших в 2009 году государственную регистрацию (свидетельство № 2009613251 от 23.06.09).

К сожалению, еще один лишний раз подтвердились слова тогдашнего Президента России Д. А. Медведева — его слова о том, что российские компании, российские предприниматели крайне медлительны в использовании любых научных достижений и очень не любят использовать что-то новое, передовое.

Тогда СПбГУ (в лице проректора СПбГУ по научной работе Н. Г. Скворцова) обратился в Службу государственного строительного надзора и экспертизы с письмом № 01-115 от 19.07.10 к начальнику Службы А. И. Орту. Обращение СПбГУ поддержали Российская академия наук (РАН) в лице председателя научного Совета РАН Я. Б. Данилевича. Ознакомившись ранее с результатами исследований СПбГУ, Я. Б. Данилевич в своей "служебной записке" А. И. Орту "настоятельно рекомендовал" "принять к сведению с последующим внедрением в экспертизу (...) инновационную методику и алгоритмы расчетов, разработанные в СПбГУ под руководством д. т. н. профессора Петрова Ю. П.", поскольку эта методика "построена на математическом анализе, позволяющем со значительно большей точностью, по сравнению с имеющимися методами оценок, гарантировать надежность и безопасность строительных конструкций и предотвратить аварии, имеющие место в современной практике строительства".

На эти обращения СПбГУ и Российской академии наук был получен следующий ответ от Службы государственного строительного надзора и экспертизы: "Служба не уполномочена на проведение экспертизы оценки состояния строительных объектов". Интересно — а на что же тогда уполномочена Служба надзора и экспертизы?

Ясно одно: участвовать в инновациях, в использовании более совершенных методов Служба государственного надзора и экспертизы не захотела. Это печально, поскольку главная задача этой Службы заключается, конечно, в обеспечении безопасности строительства путем выявления — еще на стадии экспертизы — опасных и плохо рассчитанных проектов, сделать это Служба может только при использовании достижений науки, но применять эти достижения Служба не хочет.

А между тем аварий и катастроф, происходящих из-за погрешностей и неточностей при проектировании и расчете много, слишком много. Точные цифры приведены в "Заключении" одного из научно-исследовательских институтов (ЦНИИ ПСК им. Н. П. Мельникова; заключение составлялось совместно с московским "Городским центром экспертиз"). В этом "Заключении", опубликованном в 2006 году, указывается, что 9,8% обрушений зданий, произошедших за последние годы, произошли из-за неточностей и ошибок проектирования и расчета. А это много, очень много. Наука может сократить число аварий, но для этого ее достижения нужно использовать.

ЧАСТЬ II

Системы дифференциальных уравнений и эквивалентные (равносильные) преобразования

§ 21. Примеры систем уравнений и эквивалентных преобразований

Еще одним разделом, в котором важную роль играют подходы и методы "математики-2", является теория дифференциальных уравнений. Здесь сравнительно недавно (опубликовано в [36], затем [37, 38, 5]) обнаружилось, что при малых изменениях коэффициентов может изменяться такое важнейшее свойство уравнений, как устойчивость решений, и это изменение тесно связано с повсеместно используемыми эквивалентными (равносильными) преобразованиями уравнений.

Напомним, что *дифференциальными уравнениями* называют уравнения, в которые входят производные искомых функций, а решениями дифференциальных уравнений называют функции, обращающие уравнение в тождество.

Простейшими — и в то же время наиболее часто встречающимися в практических приложениях — являются линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, такие, как, например,

$$a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = \sin t$$

— уравнение первого порядка, или

$$a_2 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = 0$$

— уравнение второго порядка.

В дальнейшем изложении мы будем исследовать изменения решений дифференциальных уравнений при вариациях их коэффициентов, т. е. будем учитывать, что реальные коэффициенты почти всегда известны лишь с ограниченной точностью и удовлетворяют неравенствам

$$a_i(1-\varepsilon_i) \le \overline{a}_i \le a_i(1+\varepsilon_i), \tag{1}$$

где $\overline{a}_i$ — неизвестные нам истинные значения; a_i — номинальные значения, используемые при расчете; $\varepsilon_i a_i$ — вариации коэффициентов. В дальнейшем мы будем исследовать влияние вариаций коэффициентов на решения уравнений. (Для удобства восприятия во *второй части* книги вводится новая нумерация формул, начиная с формулы (1).)

Важно отметить, что в дифференциальных уравнениях — как и ранее, в публикациях [6, 11] — мы рассматриваем только относительные вариации; если $a_i = 0$, то и $\varepsilon_i a_i = 0$, т. е. "нуль не варьируется". Тем самым автоматически исключаются из рассмотрения так называемые *сингулярно возмущенные уравнения*, уравнения с малыми коэффициентами при старших производных, типа уравнения

$$\varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 = f(t), \tag{2}$$

где ε — малый параметр, или системы подобных уравнений.

Сингулярно возмущенным уравнениям посвящена обширная литература (см., например, [45]), но это совсем другая область исследования, и в настоящей книге сингулярно возмущенные уравнения не рассматриваются (т. е. во второй части книги, в отличие от первой, "нуль не варьируется"). Это сделано потому, что в сингулярно возмущенных задачах изменение коэффициента при старшей производной от нуля до сколь угодно малой величины приводит, разумеется, к существенным изменениям решений. Это сразу понятно. В отличие от этого мы рассматриваем менее явные и ранее не замечаемые случаи, когда малые изменения больших коэффициентов могут привести к коренным изменениям решений.

Если обозначить оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ буквой D (т. е. $\frac{dx}{dt} = Dx$ и, соответственно, $\frac{d^n x}{dt^n} = D^n x$), то линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами любого порядка — уравнение

$$a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \tag{3}$$

можно записать в виде

$$\left(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0\right) x = f(t)$$

или

$$A(D) x = f(t), \tag{4}$$

т. е. в виде произведения искомой функции $x(t)$ на полином $A(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$ от оператора дифференцирования $\frac{d}{dt} = D$.

Системами линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называют системы вида:

$$\left.\begin{aligned} &A_{11}(D)x_1 + A_{12}(D)x_2 + \ldots + A_{1n}(D)x_n = f_1(t); \\ &A_{21}(D)x_1 + A_{22}(D)x_2 + \ldots + A_{2n}(D)x_n = f_2(t); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &A_{n1}(D)x_1 + A_{n2}(D)x_2 + \ldots + A_{nn}(D)x_n = f_n(t), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

т. е. системы, состоящие в общем случае из n уравнений, включающих в себя n неизвестных функций x_1, x_2, ..., x_n и n^2 полиномов A_{ij} различных степеней от оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$.

Таким образом, системы линейных дифференциальных уравнений являются обобщением систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), рассмотренных в *части первой*. Если в полиномах $A_{ij}(D)$ все члены, кроме членов с нулевой степенью оператора дифференцирования D, равны нулю, а функции $f_i(t)$ в правых частях системы (5) превращаются в постоянные числа, то система (5) превращается в систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), одну из тех, которые рассматривались в *части первой*. Таким образом, задачи, рассматриваемые во *второй части* книги являются более сложными, чем в *первой части*, но при решении их мы будем во многом опираться на результаты, полученные в *первой части*, а ранее — в публикациях [5, 11, 22] и др.

Одним из примеров систем дифференциальных уравнений, являющихся математической моделью реального объекта, служит система, описывающая переходные процессы, протекающие в системе регулирования частоты вращения электропривода постоянного тока, работающего на механизм с переменным моментом сопротивления. Эта система имеет вид:

$$\left(D^3 + 4D^2 + 5D + 2\right)x_1 - \left(D^2 + 2D + 1\right)x_2 = 0; \qquad (6)$$

$$\left(D^2 + 4D + 5\right)x_1 - (D + 1)x_2 = 0, \qquad (7)$$

и в ней переменная x_1 — это частота вращения электропривода (точнее, ее отклонение от номинального значения), переменная x_2 — это ток якоря, играющий роль управления. Уравнение (6) — это уравнение объекта управления, электропривода, уравнение (7) — это уравнение регулятора, отражающее процессы, происходящие в цепи обратной связи. Вывод уравнений (6) и (7) будет далее рассмотрен более подробно.

Перейдем теперь к эквивалентным преобразованиям. *Эквивалентными* (или *равносильными* — оба термина равноправны) преобразованиями уравнений называют преобразования, не изменяющие решений уравнений (или систем уравнений). Множества решений исходной и преобразованной систем уравнений должны быть тождественны между собой.

Примерами эквивалентных преобразований являются:

- приведение подобных членов;
- перенос членов из левой части уравнения в правую, и наоборот, с изменением знака;
- умножение всех членов уравнения на одно и то же число, не равное нулю;
- подстановка, т. е. замена любого из членов уравнения на член, равный ему;
- почленное дифференцирование всех членов уравнения.

Первые четыре примера эквивалентных преобразований относятся к преобразованиям, изучаемым еще в средней школе, и сомнений не вызывают. Понятно, что уравнение

$$3x+4x=14$$

после приведения подобных членов станет эквивалентным уравнению

$$7x=14,$$

которое, в свою очередь, эквивалентно (после умножения на 1/7) уравнению

$$x=2.$$

Пятый пример эквивалентных преобразований (почленное дифференцирование), возможно, потребует пояснений. Так, например, уравнение первого порядка

$$\dot{x}+x=0 \qquad (8)$$

с начальным условием

$$x(0)=0 \qquad (9)$$

имеет решение $x=0$. После почленного дифференцирования уравнение (8) превращается в уравнение второго порядка

$$\ddot{x}+\dot{x}=0 \qquad (10)$$

и для того, чтобы оно имело определенное решение, необходимо к одному начальному условию (9) добавить второе начальное условие, условие для $\dot{x}$ при $t=0$. Но это второе начальное условие не произвольно, а целиком вытекает из исходного уравнения (8) с начальным условием (9). Действительно, из (8) и (9) следует, что при $t=0$ будет

$$\dot{x}(0)=0, \qquad (11)$$

и это равенство как раз и является необходимым вторым начальным условием для уравнения (10). С его учетом уравнение (10) будет иметь решение $x=0$. Таким образом, при правильном назначении дополнительных начальных условий почленное дифференцирование не изменяет решений и является эквивалентным (равносильным) преобразованием. Отсюда следует, что умножение всех членов уравнения на любой операторный полином $A(D)$ также является (при правильном назначении дополнительных начальных условий) эквивалентным преобразованием.

Против этого утверждения иногда выставляют возражение, связанное с понятием общего решения дифференциального уравнения, т. е. решения, содержащего постоянные интегрирования, определяемые затем из начальных (или граничных) условий. Общее решение уравнения (8) имеет вид

$$x=C_1e^{-t}$$

с одной постоянной интегрирования C_1, а общее решение уравнения (10), полученное из уравнения (8) путем почленного дифференцирования, имеет вид:

$$x=C_3+C_2e^{-t} \qquad (12)$$

и не совпадает с общим решением уравнения (8). Отсюда часто делается ошибочный вывод: поскольку общее решение изменилось, то почленное дифференцирование не является эквивалентным преобразованием. Ошибка проистекает из неверного понимания термина "общее решение", который исторически сложился еще в XVIII веке [46, 47]. По сути дела, "общее решение" гораздо правильнее называть "семейством решений", семейством функций, зависящих от постоянных интегрирования, которые, в свою очередь, зависят от начальных условий. Поэтому нет ничего удивительного в том, что при эквивалентных преобразованиях семейства решений (по традиции называемых "общими решениями") могут изменить свой вид, но конкретные решения, удовлетворяющие конкретным начальным условиям, при почленном дифференцировании не изменяются.

Так, определяя постоянную интегрирования в решении (11) из начального условия $x(0)=0$, получим $C_1=0$ и $x(t)=0$. Определяя постоянные интегрирования C_3 и C_2 из начальных условий $x(0)=0$ и $\dot{x}(0)=0$, получаем $C_3=0$, $C_2=0$ и поэтому снова имеем $x(t)=0$. Эквивалентность такого преобразования, как почленное дифференцирование, в данном примере подтверждается; то же самое справедливо и в общем случае.

Используя эквивалентные преобразования, можно линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами любого порядка (уравнение (4)), а также почти любую систему подобных уравнений (систему (5)) привести к так называемой *нормальной форме Коши* (Cauchy, 1789–1857), т. е. к системе n уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

(рассматривая преобразование системы общего вида (5) в форму (13) ограничимся в дальнейшем случаем $f_i(t)=0$).

Если в нормальную форму Коши преобразуется уравнение n-го порядка, то число уравнений в системе (13) равно порядку уравнения, а сама система (13), например, для уравнения

$$a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = 0 \qquad (14)$$

принимает вид (считаем, что $x = x_1$):

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{a_0}{a_2}x_1 - \frac{a_1}{a_2}x_2. \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Если к нормальной форме Коши приводится система из нескольких дифференциальных уравнений различных порядков, типа системы (5), то число уравнений первого порядка в нормальной форме в общем случае равно сумме порядков дифференциальных уравнений для каждой из переменных. В особых случаях (при так называемом вырождении системы) число дифференциальных уравнений первого порядка в эквивалентной нормальной форме Коши может быть меньше.

Пример 1

Система уравнений (6) и (7) имеет в уравнении (6) третий порядок относительно x_1, а в уравнении (7) относительно переменной x_2 имеет первый порядок. Поэтому нормальная форма Коши для системы (6)–(7) должна состоять из четырех уравнений первого порядка для четырех переменных: x_1, x_2, x_3, x_4. Переменные x_1 и x_2 — это те, что уже присутствуют в уравнениях (6) и (7), а x_3 и x_4 — дополнительные переменные. Поскольку на самом деле система (6)–(7), как мы покажем в следующем параграфе, является вырожденной, то для нее одно из четырех дифференциальных уравнений вырождается в конечное уравнение, не содержащее производных (или — что то же самое — содержащее производные нулевого порядка, т. е. функции x_1; x_2 и т. п.), и нормальная форма Коши для системы (6)–(7) состоит из трех уравнений первого порядка.

Для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами уравнения в нормальной форме Коши (13) обычно записывают в векторно-матричной форме:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{16}$$

где $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор, составляющими которого являются искомые функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$; $\mathbf{A}$ — матрица коэффициентов a_{ij}.

Отметим, что поскольку преобразования, переводящие систему уравнений общего вида (5) в нормальную форму Коши, являются преобразованиями эквивалентными, то в рамках "математики-1" (предполагающей точное знание и неизменность коэффициентов уравнений), математические модели изучаемых объектов и процессов в форме систем уравнений (5) и (16) равнозначны, а поскольку форма (16) проще, то именно она преобладает и в современных учебниках по теории дифференциальных уравнений (см., например, [33, 34]), и в практике вычислений.

В частности, пакеты прикладных программ, используемые при численном решении систем дифференциальных уравнений и при проверке устойчивости решений (пакеты MATLAB, Mathcad и др.), составлены для систем в нормальной форме на основе допущения, что преобразование исходной системы в нормальную форму "ничего не меняет". На самом деле, как мы убедимся в следующем параграфе, это далеко не всегда так. Существуют особые случаи, когда эквивалентные преобразования — и, в частности, эквивалентные преобразования систем уравнений различных порядков в нормальную форму — могут изменить некоторые важные свойства уравнений (в частности — устойчивость решений). Эти особые случаи заслуживают самого внимательного учета и изучения, поскольку они могут стать (и не раз уже становились! — см., например, [39]) — причиной ошибок в расчетах и, тем самым, — причиной аварий и катастроф. Совершенно недопустимо формально применять программы из пакетов MATLAB, Mathcad и любых других, выполнять в них расчеты без учета допущений, использованных при составлении этих программ и не всегда ясно формулируемых.

Отметим, что это простое, но важное замечание, высказанное (и опубликованное) еще в 1994 году [37] и потом неоднократно повторенное в [38, 5, 52] и др., далеко не сразу было введено в практику технических расчетов.

Фактически впервые оно было широко использовано в 2007–2010 гг. в Московском государственном техническом университете им. Баумана (МГТУ) и в научно-производственных объединениях при МГТУ. Учет особых случаев в эквивалентных преобразованиях позволил научно-производственным объединениям при МГТУ существенно сократить число аварий разрабатываемого ими сложного оборудования.

В 2011 году на сайте МГТУ в блоге от 30.01.2011 Владимир Борисович Маничев обратился "ко всем вузам и научным учреждениям России" с настоятельным призывом широко использовать в расчетах и проектировании проверку на выделение "особых" систем и эквивалентных преобразований, изменяющих параметрическую устойчивость. Для реализации подобных проверок, способных существенно сократить число последующих аварий и катастроф, в МГТУ было разработано хорошее программное обеспечение (программный комплекс FMS PA 10 и библиотека программ SADEL), см. также публикации [32] и [80].

§ 22. Характеристические полиномы и проверка устойчивости

Известно, что решение линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (4) является суммой частного решения, зависящего от правой части уравнения (4), от функции $f(t)$, и общего решения однородного уравнения:

$$\left(a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_0\right) x = A(D) x = 0, \tag{17}$$

решение которого имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t}, \tag{18}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — корни характеристического полинома уравнения (17), полинома

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \ldots + a_0 = A(\lambda). \tag{19}$$

Характеристический полином (19) образуется из уравнения (17) простой заменой оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$ на любую переменную величину, которую по традиции обозначают буквой λ.

Если среди корней характеристического полинома (19) имеются комплексные, то они могут входить только сопряженными парами:

$$\lambda_{i,\,i+1} = \alpha \pm j\beta. \tag{20}$$

В формуле (20) и в дальнейшем тексте будем считать, что $j = \sqrt{-1}$, т. е. мнимую единицу обозначаем буквой j (часто используют обозначение $\sqrt{-1} = i$, но в электротехнике буквой i обозначают электрический ток; во избежание недоразумений лучше пользоваться известным обозначением $\sqrt{-1} = j$).

Каждой паре комплексных корней в общем решении уравнения (17) (а точнее — в семействе его решений) будет соответствовать член вида

$$e^{-\alpha t}\left(C_1 \sin \beta t + C_2 \cos \beta t\right). \tag{21}$$

Если все корни характеристического полинома имеют отрицательные вещественные части, то любое решение однородного уравнения при любых начальных условиях с течением времени стремится к нулю. На этот вывод не влияет и наличие кратных корней — их наличие приводит к тому, что в общем решении могут появиться члены вида

$$C_i t^m e^{\lambda_i t}, \tag{22}$$

но все равно, если только все корни λ_i имеют отрицательные вещественные части, то любые решения — в том числе и решения вида (22) — стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Для систем линейных дифференциальных уравнений их характеристический полином равен определителю системы уравнений, в котором оператор дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$ заменен буквой λ (можно, разумеется, оператор D заменить и любой другой буквой, но по традиции используют букву λ).

Так, например, для системы уравнений (6)–(7) ее характеристический полином равен определителю

$$\begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 & -(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^4 + 6\lambda^3 + 14\lambda^2 + 14\lambda + 5 - \lambda^4 - 5\lambda^3 - 9\lambda^2 - 7\lambda - 2 =$$

$$= (\lambda + 3)(\lambda + 1)^2 \qquad (23)$$

(члены с четвертой степенью λ взаимно сокращаются).

Характеристический полином (23) имеет корни $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, и поэтому общее решение системы (6)–(7) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{-3t} + (C_2 t + C_3) e^{-t}. \qquad (24)$$

Равенство (23) показывает, что члены с четвертой степенью λ в характеристическом полиноме взаимно сокращаются, поэтому его степень оказывается не четвертой, а третьей. Это говорит о том, что система (6)–(7) является вырожденной.

Для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентам сохраняет силу то же правило: если все корни характеристического полинома имеют отрицательные вещественные части, то все решения системы стремятся к нулю при $t \to \infty$ и такие решения называют *устойчивыми* (точнее — асимптотически устойчивыми).

Если хотя бы один корень характеристического полинома системы (или хотя бы одна пара комплексно-сопряженных корней) имеет положительную вещественную часть, то решения системы могут возрастать неограниченно при $t \to \infty$.

Если все корни характеристического полинома системы с постоянными коэффициентами имеют отрицательные вещественные части, то устойчивы *все* решения системы. Поэтому часто говорят не об устойчивости решений, а об устойчивости той или иной системы. Так, например, систему уравнений (6)–(7) называют устойчивой системой, поскольку устойчивы все ее решения (устойчивы все решения, образующие семейство решений (24); по традиции это семейство решений называют *общим решением*).

Отметим, что для нелинейных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений все сложней: там одно решение может быть устойчивым, а другое — неустойчивым. Поэтому там нельзя говорить об устойчивости системы уравнений, а только об устойчивости того или иного решения.

В теории линейных систем дифференциальных уравнений давно разработаны критерии, позволяющие судить об устойчивости или неустойчивости непосредственно по коэффициентам характеристического полинома, не вычисляя его корней. Простейший — и наиболее важный — это критерий Стодолы (Stodola, 1859–1942): для устойчивости системы необходимо (но не достаточно!), чтобы все коэффициенты характеристического полинома имели один и тот же (например, положительный) знак и среди них не было нулевых коэффициентов.

Достаточные условия устойчивости были найдены немецким математиком А. Гурвицем (Hurwitz, 1859–1919) еще в 1895 году. В честь А. Гурвица полиномы, у которых вещественные части всех корней отрицательны, называют *гурвицевыми полиномами*. Необходимое и достаточное условие отрицательности вещественных частей всех корней полинома

$$a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_0, \tag{25}$$

как известно, состоит в положительности всех диагональных миноров следующей матрицы (матрицы Гурвица), составленной из коэффициентов полинома (25) и содержащей n строк и n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & & 0 & 0 \\ & & & & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & a_2 & a_0 \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Правило составления матрицы Гурвица таково: по главной диагонали выписывают коэффициенты полинома (25) от a_{n-1} до a_0. Каждый столбец потом дополняется так, чтобы индексы коэффициентов убывали на единицу снизу вверх при переходе от строки к строке. Коэффициенты с индексами меньше нуля и больше n заменяются нулями.

Выписывая последовательно диагональные миноры матрицы (26), убеждаемся, что для гурвицевости полиномов первой и второй степени необходима и достаточна положительность всех их коэффициентов (коэффициентов a_1 и a_0).

Для гурвицевости полинома третьей степени

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0$$

помимо положительности всех коэффициентов необходимо и достаточно выполнение дополнительного условия

$$a_2 a_1 > a_3 a_0,$$

т. е. произведение средних коэффициентов должно быть больше произведения крайних.

В целом теория устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами (в рамках "математики-1") давно и хорошо разработана, и в предыдущем изложении мы только кратко напомнили те основные положения, которые будут использоваться в дальнейшем.

Однако для практических целей совершенно недостаточно, чтобы исследуемый объект был устойчив. Необходимо еще, чтобы его устойчивость сохранялась хотя бы при малых — а значит, и неизбежных на практике — отклонениях параметров объекта от расчетных значений.

Определение

Свойство сохранения устойчивости при отклонениях параметров объекта от расчетных значений, при сколь угодно малых вариациях параметров и порожденных вариациями параметров изменениях коэффициентов математической модели объекта называется *параметрической устойчивостью*.

При исследовании параметрической устойчивости совсем недавно (публикации [5, 36, 37]) были обнаружены неожиданные и парадоксальные явления, о которых в последующих параграфах будет рассказано более подробно.

Заметим, что только параметрическую устойчивость можно считать настоящей, реальной устойчивостью. Системы, которые устойчивы при номинальных значениях параметров, но теряют устойчивость при сколь угодно малых, а значит, неизбежных на практике вариациях параметров, ничуть не лучше неустойчивых и даже опаснее их — особенно если потеря устойчивости происходит, как увидим далее, только при вариациях определенного знака.

§ 23. Изменение параметрической устойчивости при эквивалентных преобразованиях

Система дифференциальных уравнений (6)–(7) является устойчивой системой, поскольку ее характеристический полином, равный определителю (23), имеет все корни с отрицательными вещественными частями. Действительно, как показывает формула (24), все решения системы (6)–(7) стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Однако система (6)–(7) не является параметрически устойчивой. Действительно, если мы изменим на сколь угодно малую величину ε некоторые из коэффициентов системы, например коэффициент при Dx_2 в уравнении (7), и система (6)–(7) примет вид

$$\left(D^3 + 4D^2 + 5D + 2\right)x_1 - \left(D^2 + 2D + 1\right)x_2 = 0; \tag{27}$$

$$\left(D^2 + 4D + 5\right)x_1 - \left[(1+\varepsilon)D + 1\right]x_2 = 0, \tag{28}$$

то ее характеристический полином будет равен

$$\begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 & -\left(\lambda^2 + 2\lambda + 1\right) \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & -\left[(1+\varepsilon)\lambda + 1\right] \end{vmatrix} =$$

$$= -\varepsilon\lambda^4 + (1 - 4\varepsilon)\lambda^3 + (5 - 5\varepsilon)\lambda^2 + (7 - 2\varepsilon)\lambda + 3, \tag{29}$$

и, следовательно, при сколь угодно малых положительных ε полином (29) уже не будет гурвицевым, поскольку нарушено необходимое условие Стодолы; система (26)–(27) при сколь угодно малых $\varepsilon > 0$ уже не будет устойчивой.

В семействе ее решений, кроме трех экспоненциально убывающих членов, отраженных в формуле (24), появится четвертый, экспоненциально возрастающий член, приближенно (при малых ε) равный $C_4 e^{\frac{t}{\varepsilon}}$ и растущий тем быстрее, чем меньше ε.

Важно отметить, что при малых отрицательных ε система (27)–(28) остается устойчивой.

Таким образом, система уравнений (6)–(7) параметрической устойчивостью не обладает.

Преобразуем теперь систему (6)–(7) к нормальной форме Коши путем введения, например, дополнительных переменных x_3 и x_4, определенных равенствами

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= \dot{x}_1 + 2x_1 - x_2; \\ x_4 &= \dot{x}_3. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Относительно новых переменных уравнение (6) перейдет в следующую систему трех уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_3; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

а уравнение (7) в новых переменных станет вырожденным, перейдет в уравнение нулевого порядка, не содержащее производных. Действительно, уравнение (7) можно записать в виде

$$\left[\left(D^2 + 2D\right)x_1 - Dx_2\right] + \left[(2D+4)x_1 - 2x_2\right] + x_1 + x_2 = 0. \tag{32}$$

Теперь, сопоставляя (32) с равенствами (30), убеждаемся, что первой квадратной скобке соответствует переменная x_4, второй квадратной скобке — $2x_3$, и в целом уравнение (32) — оно же уравнение (7) — в новых переменных принимает вид

$$x_2 = -x_1 - 2x_3 - x_4, \tag{33}$$

т. е. в новых переменных оно вырождается, перестает быть дифференциальным уравнением (или, что то же самое, становится дифференциальным уравнением нулевого порядка — уравнением, не содержащим производных).

Характеристический полином системы уравнений (31)–(33), равный определителю

$$\begin{vmatrix} 2+\lambda & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3, \tag{34}$$

совпадает с ранее полученным полиномом (23) и общее решение системы (31)–(33) относительно, например, переменной x_1 сохраняет вид (24). Таким образом, системы (6)–(7) и (31)–(33) эквивалентны между собой.

Можно, разумеется, воспользовавшись уравнением (33), подставить выражение x_2 через x_1, x_3, x_4 в (31) и получить систему трех уравнений первого порядка относительно трех переменных x_1, x_3 и x_4:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -3x_1 - x_3 - x_4; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Легко убедиться, что характеристический полином системы (35), равный определителю

$$\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+3)\cdot\begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda+1)^2 = \lambda^3+5\lambda^2+7\lambda+3, \qquad (36)$$

совпадает с полиномом (23) и полиномом (34), а общее решение системы (35) относительно, например, переменной x_1 сохраняет вид (24). Следовательно, системы (6)–(7), (31)–(33) и (35) эквивалентны между собой.

Однако (как легко проверить) системы (31)–(33) и (35) — в отличие от системы (6)–(7) — параметрически устойчивы, т. е. при достаточно малых изменениях любых своих коэффициентов они остаются устойчивыми.

Таким образом, преобразование системы (6)–(7) в систему (31)–(33) или в систему (35) является примером эквивалентного (равносильного) преобразования, изменяющего параметрическую устойчивость.

Обратные преобразования — преобразования системы (31)–(33) или системы (35) в систему (6)–(7) — также являются примерами эквивалентных преобразований, изменяющих параметрическую устойчивость (у исходных систем она есть, у системы (6)–(7) ее нет).

Многочисленные примеры подобных эквивалентных преобразований, изменяющих параметрическую устойчивость и другие свойства преобразуемых систем, были ранее приведены в публикации [5].

Отметим, что существование подобных примеров совершенно естественно, хотя очень долго этого не замечали. Действительно, в самом определении эквивалентных (равносильных) преобразований содержится лишь требование сохранения неизменными решений преобразуемых систем, но ничего не говорится о том, что остаются неизменными все *свойства* решений (в том числе и такое важное свойство, как параметрическая устойчивость).

Тем не менее появление публикаций [36–38], где впервые было указано, что эквивалентные преобразования могут изменять многие важные свойства преобразуемых систем, первоначально вызвало большое удивление и острые дискуссии. Дело в том, что очень многие математики и инженеры привыкли считать, что эквивалентные преобразования — это те, "которые ничего не меняют", и от этого ставшего привычкой представления было трудно сразу избавиться. Приведенные в публикациях [36–38] примеры многим казались странными и парадоксальными, вызывали часто недоумение и даже неприятие опубликованных результатов. Признание пришло далеко не сразу. Частично это было связано с тем, что в рамках привычной всем "математики-1", имеющей дело только с фиксированными значениями коэффициентов уравнений, эквивалентные преобразования действительно "ничего не меняют" (кроме того, что упрощают уравнения и облегчают их исследование). В рамках "математики-2", учитывающей неизбежные малые вариации коэффициентов и параметров (и тем самым лучше, чем "математика-1" учитывающей специфику прикладных задач), все обстоит уже по-другому. В "математике-2" эквивалентными преобразованиями можно пользоваться лишь с большой осторожностью. Неосторожное использование эквивалентных преобразований может приводить (и уже много раз приводило!) к авариям и катастрофам, некоторые из которых описаны, например, в публикации [39].

Появление в публикациях [36–38], а затем — в [5], примеров эквивалентных преобразований, изменяющих многие важные свойства решений, способствовало давно назревшему выделению "математики-2" в отдельное направление исследований, в отдельную подобласть науки. Стало ясно, что "математика-2" отличается от "математики-1" не только кругом исследуемых объектов, но и методологией, в частности — значительно более осторожным использованием эквивалентных (равносильных) преобразований, которые в "математике-1" используются очень широко и без ограничений, что и приводит иногда к ошибкам при решении практических задач, которые обычно лучше описываются "математикой-2", чем "математикой-1".

Для избежания ошибок, для избежания неприятия новых результатов исследований (а иногда и враждебности к ним) необходимо лишний раз подчеркивать существование "математики-2" и ее отличия от привычной всем "математики-1", подчеркивать то, что "математика-2" лучше отражает особенности расчета конкретных объектов техники и физики.

§ 24. Изменение устойчивости по Ляпунову при эквивалентных преобразованиях

Отметим, что при эквивалентных преобразованиях может изменяться не только параметрическая устойчивость, но также и классическая устойчивость по Ляпунову (сформулированная великим русским ученым А. М. Ляпуновым (1856–1918) еще в 1892 году). Напомним, что решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t;\, x_1;\, x_2;\, ...;\, x_n), \quad i = 1, 2, ..., n$$

с начальными условиями $y_i(0) = y_{i0}$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если малые изменения начальных условий не могут вызвать больших изменений решений; строгое определение устойчивости по Ляпунову приведено, например, в [33] на с. 316–327, в [34] на с. 138–142 и в других публикациях.

Вернемся к уравнению (8) с начальным условием $x(0) = 0$ и решением $x(t) = 0$. Для начального условия $x(0) = \delta$ решением станет $x(t) = \delta e^{-t}$, что и говорит об устойчивости по Ляпунову решения $x(t) = 0$. Умножим левую и правую части уравнения (8) на операторный полином $D - 1$. После этого умножения уравнение (8) перейдет в уравнение

$$(D+1)(D-1)x = \ddot{x} - x = 0, \tag{37}$$

т. е. в уравнение второго порядка. Для того чтобы получить определенное решение уравнения, мы должны учесть второе начальное условие для уравнения (37), т. е. помимо уже заданного первого начального условия $x(0) = 0$, нужно найти второе начальное условие — условие для $\dot{x}(0)$. Из уже полученного ранее решения уравнения (8), решения $x(t) = 0$, следует, что вторым начальным условием уравнения (37) может быть только условие $\dot{x}(0) = 0$ (и никакое другое!).

Общее решение уравнения (37), а при более точной формулировке — не "общее решение", а семейство решений, зависящее от постоянных интегрирования, будет иметь вид:

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t}. \tag{38}$$

Определяя постоянные интегрирования C_1 и C_2 из начальных условий $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, получаем, что $C_1 = C_2 = 0$, и единственным решением, удовлетворяющим начальным условиям, является решение $x(t) = 0$, совпадающее с ранее полученным решением уравнения (8). Таким образом, уравнение (8) и уравнение (37) эквивалентны, но решение $x = 0$ уравнения (8) устойчиво по Ляпунову, а то же решение $x = 0$ уравнения (37) неустойчиво (неустойчиво в классическом смысле, по Ляпунову). Действительно, при нулевых начальных условиях $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ будет $x(t) = 0$, но если начальные условия отклонятся от нулевых даже на сколь угодно малые величины δ_1 и δ_2 и вместо $x(0) = 0$ станет $x(0) = \delta_1$, вместо $\dot{x}(0) = 0$ станет $\dot{x}(0) = \delta_2$, то будет

$$x(t) = 0{,}5(\delta_1 - \delta_2)e^{-t} + 0{,}5(\delta_1 + \delta_2)e^{t} \tag{39}$$

и разность между решением (39) и решением $x(t) = 0$ может неограниченно возрастать с течением времени.

Таким образом, некоторые из эквивалентных преобразований могут изменять не только параметрическую устойчивость, но и классическую устойчивость по Ляпунову.

Однако это явление (обнаруженное еще в 30-е годы XX века) не насторожило исследователей. Умножение на негурвицев операторный полином рекомендовали не использовать, объявили его неэквивалентным преобразованием (хотя на самом деле это не так) и продолжали считать, что эквивалентные преобразования "ничего не меняют". Это застарелое предубеждение затем привело — уже в 60-е годы XX века — к серии аварий при реализации методики "аналитического конструирования оптимальных регуляторов", предложенной известным русским исследователем А. М. Летовым (1911–1974) и опубликованным сперва в серии статей [48], а затем в монографии [49]. Более подробно об этих авариях (и других знаменитых авариях и катастрофах) рассказано в публикации [39], один из разделов которой называется "Трагедия Александра Михайловича Лётова" (заметим, что его фамилию правильнее писать через букву "ё" (А. М. Лётов), но во всех его прижизненных публикациях его фамилия — по тогдашнем правилам — писалась через букву "е").

Отметим, что возможное изменение устойчивости по Ляпунову при эквивалентных преобразованиях связано с тем, что А. М. Ляпунов в своих исследованиях рассматривал поведение решений дифференциальных уравнений не только при жестко заданных начальных условиях, но и при малых изменениях этих условий, т. е. А. М. Ляпунова можно считать одним из тех, кто фактически вышел уже на проблемы "математики-2". Однако в те годы это еще не осознавалось, а последующее обнаружение примеров изменений устойчивости по Ляпунову при эквивалентных преобразованиях, как уже указывалось, исследователей не насторожило.

Спокойное отношение к изменению устойчивости по Ляпунову при умножении правой и левой частей уравнения на негурвицев полином было связано с тем, что это изменение легко распознается и к неприятностям не приводит (неприятностей легко избежать простым запретом умножения на негурвицев операторный полином). В то же время изменение параметрической устойчивости при эквивалентных преобразованиях, о котором говорилось в предыдущем параграфе, гораздо опаснее и уже не раз приводило к авариям и катастрофам (см. [5] на с. 27–29, [11] на с. 88–92 и 139–148, [39] на с. 30–48 и др.).

§ 25. Изменение корректности при эквивалентных преобразованиях. Третий класс математических моделей — промежуточных между корректными и некорректными

Ранее (в *первой части* книги) уже рассматривались плохо обусловленные системы уравнений, решения которых существенно изменялись при малых (но обязательно конечных!) изменениях коэффициентов.

Однако система уравнений (6)–(7) может коренным образом изменять свои решения, как мы убедились в этом в предыдущем параграфе, не только при малых конечных, но и при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов.

Системы дифференциальных уравнений, способные при сколь угодно малых (относительных) изменениях (вариациях) коэффициентов изменять решения на конечные величины (или даже изменять их коренным образом), будем называть *некорректными* (напомним, что "вариации нуля" исключаются). В таких системах может отсутствовать непрерывная зависимость решений от коэффициентов.

Системы уравнений, в которых решения зависят от коэффициентов (или от параметров, от которых в свою очередь зависят коэффициенты) и зависят непрерывно, называют *корректными*.

Существование класса корректных и класса некорректных систем уравнений известно давно. Понятие о корректных и некорректных уравнениях математической физики было введено впервые французским математиком Адамаром (Hadamard, 1865–1963) еще в 1902 году и в дальнейшем оказалось очень важным математическим понятием (см., например, известную публикацию [40] и обширную библиографию к ней).

В 1998 году (публикация [41]) было обнаружено существование еще одного, третьего класса задач физики и техники, промежуточного между корректными и некорректными. Действительно, система уравнений (6)–(7) некорректна. Однако если решение этой системы искать путем предварительного преобразования к нормальной форме Коши — к системе (35), то окажется, что преобразованная система корректна.

Таким образом, задача вычисления решения системы уравнений (6)–(7) относится к третьему классу — классу задач, меняющих свою корректность в ходе эквивалентных преобразований, используемых при их решении.

Обнаружение третьего класса задач физики и техники (более подробно рассмотренного в [42]), промежуточного между ранее известными классами корректных и некорректных задач, помимо теоретического интереса оказалось имеющим большое практическое значение, поскольку позволило найти способ выделения очень опасных "особых" объектов, которые неоднократно становились (и до сих пор, к сожалению, становятся) причинами аварий и катастроф.

Дело в том, что помимо некорректных систем уравнений существуют, естественно, и некорректные объекты (математическими моделями которых эти системы являются).

Примером некорректного объекта может служить твердое тело, у которого центр масс лежит точно над краем опоры. При сколь угодно малом изменении координат центра масс такое тело может упасть.

Другой пример: система автоматического управления, описываемая системой дифференциальных уравнений, характеристический полином которой имеет кроме корней с отрицательными вещественными частями хотя бы один нулевой корень. Такая система теоретически устойчива по Ляпунову, но некорректна — уже сколь угодно малое изменение коэффициентов может сделать ее неустойчивой (поскольку сколь угодно малое — и, значит, на практике неизбежное — изменение некоторых коэффициентов может превратить нулевой корень характеристического полинома в корень с положительной вещественной частью).

Некорректные объекты, разумеется, опасны, и их нельзя допускать к реализации для предотвращения почти неизбежных аварий и катастроф. На стадии проектирования и расчета некорректные объекты отсеивают на основе анализа их математических моделей. Если математическая модель проектируемого объекта некорректна, то объект необходимо отвергнуть, к реализации "в металле" ни в коем случае не допускать. Если на стадии проектирования некорректный объект пропущен, то это почти неизбежно ведет к последующей аварии, поскольку уже "воплощенный в металл" некорректный (или "плохо обусловленный") объект выявить на испытаниях очень трудно, а в ходе последующей эксплуатации он доставит массу неприятностей.

Но если некорректный объект относится к третьему классу, то и анализ его математической модели может не выявить его некорректность, и тогда последующая авария почти неизбежна. Характерный пример — система управления электроприводом, математическими моделями которого могут служить как уравнения (6)–(7), так и уравнения (31)–(33), имеющие один и тот же характеристический полином. Если судить по уравнениям (31)–(33), то система управления параметрически устойчива и корректна, если судить по уравнениям (6)–(7), то она некорректна и параметрически неустойчива. Будет ли корректным объект, математическими моделями которого могут служить как уравнения (6)–(7), так и уравнения (31)–(33), по этим уравнениям не определить. Надо исследовать более тонкие свойства проектируемого объекта — об их учете будет рассказано далее.

На основе подобных примеров еще в 1994 году, в статье [37], был опубликован основной вывод: никакое исследование характеристического полинома системы уравнений или исследование матрицы коэффициентов при записи уравнений в нормальной форме Коши не может дать правильного ответа о параметрической устойчивости проектируемой системы и, значит, не может гарантировать, что эта система в ходе последующей эксплуатации в самый неожиданный момент не потеряет устойчивости и не станет причиной аварии и даже катастрофы. Для избежания аварий исследования характеристического полинома мало (хотя, до 1994 года считалось достаточным). Необходимо исследовать, какие эквивалентные преобразования использовались при получении математической модели, какие из эквивалентных математических моделей с одним и тем же характеристическим полиномом в наибольшей степени соответствуют физической сущности проектируемого объекта и позволяют правильно судить о его параметрической устойчивости.

Так, например, в системе управления электродвигателем, математической моделью которого являются уравнения (31), управляющее воздействие x_2 для получения хороших переходных процессов можно формировать — в соответствии с рекомендациями "аналитического конструирования оптимальных регуляторов" — в виде линейной комбинации переменных x_1, x_2, x_3 с постоянными коэффициентами усиления, т. е. в виде

$$x_2 = -k_1 x_2 - k_2 x_2 - k_3 x_3. \qquad (40)$$

Если выбрано $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 1,$ то уравнение (40) принимает вид (33), и в этом случае структурная схема системы управления принимает вид, показанный на рис. 9. Реальное поведение проектируемой системы управления в этом случае отражает параметрически устойчивая математическая модель в виде уравнений (31)–(33). "Воплощенная в металле" проектируемая система со структурной схемой, показанной на рис. 9, также будет параметрически устойчивой.

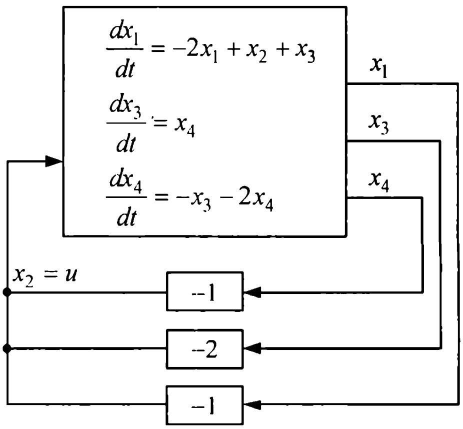

Рис. 9

Однако формирование обратной связи в виде комбинации всех переменных часто затруднительно (не все переменные, как известно, легко измерить), и поэтому обратную связь часто видоизменяют, заменяя трудно измеряемые переменные на комбинации легко измеряемых переменных и их производных (заменяют, конечно, путем эквивалентных преобразований).

Конкретно, для рассматриваемого нами электропривода затруднительны для измерения переменные x_3 и x_4. Исключая их путем эквивалентных преобразований, получаем зависимость между управлением x_2 и частотой вращения x_1 в виде уравнения (7), а уравнения электродвигателя (31) в переменных x_1 и x_2 перейдут в уравнение (6). Структурная схема системы в этом случае принимает вид, показанный на рис. 10 (и отличный от схемы, приведенной на рис. 9), а реальное поведение системы управления при вариациях ее параметров будут лучше отражать уравнения (6)–(7), чем уравнения (31)–(33). Хотя уравнения (6)–(7) имеют тот же самый характеристический полином, что и уравнения (31)–(33), обладают одними и теми же решениями, но параметрическая устойчивость этих решений (как ранее уже было показано) различна. Это означает, что в реальных условиях эксплуатации, при неизбежных малых вариациях параметров, поведение объектов, описываемых уравнениями (6)–(7) и (31)–(33), будет совершенно различным, что легко проверяется при практических испытаниях.

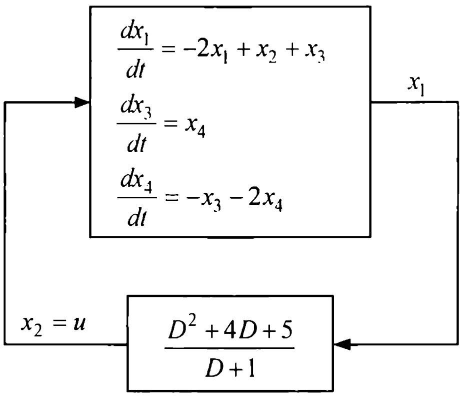

Рис. 10

Между тем с точки зрения "математики-1", описывающей поведение объектов при неизменных, заданных значениях коэффициентов и параметров (или заданных законах их изменения), математические модели в виде уравнений (6)–(7) и (31)–(33) — неразличимы.

Мы еще раз убеждаемся, что "математика-2" лучше отражает реальное поведение исследуемых объектов и практические требования к ним, чем "математика-1".

Отметим в заключение, что в известной публикации [40] и ряде других публикаций используется несколько другой подход к проблеме некорректности. В основу там кладется не определение некорректной математической модели, а определение некорректной задачи.

Задачами некорректными (или — что то же самое — некорректно поставленными) в этих публикациях называют те, которые не удовлетворяют хотя бы одному из трех условий:

- решение существует;
- решение единственно;
- решение зависит от исходных данных непрерывно.

Это определение нельзя признать удачным, поскольку оно растворяет действительно некорректные задачи в необъятном море задач, не имеющих решений или имеющих неединственное решение. Уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решений в поле действительных чисел. Уравнение $\sin x = 0$ имеет бесчисленное множество решений: $x_n = n\pi$, где $n = 0, \pm 1, ..., \pm n$, однако задачу вычисления его решений не отнесешь к некорректным. Для того чтобы избежать противоречия с уже привычным определением, использованным в [40], мы опираемся — как уже было ранее показано — не на определение некорректной задачи, а на определение некорректной математической модели. Более подробно все это обосновано в публикации [11].

§ 26. Существование функции Ляпунова не гарантирует устойчивости

В данном параграфе будет исследоваться устойчивость и параметрическая устойчивость систем как линейных, так и нелинейных дифференциальных уравнений.

В отличие от рассмотренных в предыдущих разделах систем линейных уравнений с постоянными коэффициентами, устойчивость (или неустойчивость) решений нелинейных систем проверяется много сложней.

Наиболее надежным методом проверки устойчивости решений нелинейных систем является построение так называемых *функций Ляпунова*. Построение этих функций очень сложно, требует основательной исследовательской работы, но ранее считалось, что уж если функция Ляпунова после больших трудов построена, то она гарантирует устойчивость исследуемого решения. В рамках "математики-1" все это верно. Однако исследование, проведенное в рамках "математики-2", более полно учитывающей реальные требования к исследуемым объектам, доказало, что на самом деле это не так. В публикации [5] было показано, что система, для которой построена функция Ляпунова, может потерять устойчивость при сколь угодно малых (и, значит, неизбежных на практике) вариациях коэффициентов и параметров. Разумеется, для практических приложений устойчивость, теряющаяся при сколь угодно малых вариациях параметров, равнозначна неустойчивости. Поэтому существование функции Ляпунова реальной устойчивости не гарантирует.

Поскольку функциям Ляпунова (названным так в честь великого русского математика А. М. Ляпунова, который ввел их в рассмотрение в своей известной публикации 1892 года, переизданной в 1959 году [50]) посвящено большое количество исследований и публикаций, и очень многие уверены в том, что существование функции Ляпунова гарантирует устойчивость. Дадим небольшие пояснения.

Пусть рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1; x_2; \ldots; x_n); \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1; x_2; \ldots; x_n); \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1; x_2; \ldots; x_n), \end{aligned}\right\} \qquad (41)$$

где $f_i(x_1; x_2; ...; x_n)$ — функции аргументов $x_1, x_2, ..., x_n$, в общем случае — нелинейные. Известно, что соответствующей заменой переменных вопрос об устойчивости любого решения системы (41) можно свести к исследованию нулевого решения: $x_1(t) = x_2(t) = ... = x_n(t) = 0$.

Введем в рассмотрение функцию V переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, которая равна нулю только тогда, когда все переменные равны нулю, и положительна при всех других значениях переменных. Примером такой функции может служить функция

$$V_1 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2. \tag{42}$$

Вычислим теперь полную производную функции V по времени на решениях системы (41). Такую производную по терминологии, принятой в теории устойчивости, называют *производной функции V в силу системы* (41). Для вычисления этой производной "в силу системы" используют известную формулу для полной производной:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot \frac{dx_2}{dt} + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt} \tag{43}$$

и подставляют затем вместо каждой из производных $\frac{dx_i}{dt}$ их значения из системы (41). После такой подстановки для "производной в силу системы" получается формула:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdot f_1(x_1; x_2; ...; x_n) + \frac{\partial V}{\partial x_2} \cdot f_2(x_1; x_2; ...; x_n) + ... + \frac{\partial V}{\partial x_n} \cdot f_n(x_1; x_2; ...; x_n). \tag{44}$$

Пусть теперь функция V такова, что производная (44) для всех $x_i \neq 0$ отрицательна. Такую функцию принято называть *функцией Ляпунова*. В 1892 году А. М. Ляпунов доказал, что если такая функция существует, то нулевое решение системы (41) устойчиво.

Доказательство А. М. Ляпунова допускает наглядную интерпретацию: если "производная в силу системы" (44) отрицательна, то функция V может только убывать, стремясь к своему наименьшему значению, равному нулю, и достигает его при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Но это означает, что все переменные $x_i(t)$ будут при $t \to \infty$ стремиться к нулю, и тем самым разность между любым решением системы (41) и ее нулевым решением будет при $t \to \infty$ стремиться к нулю, что и доказывает устойчивость нулевого решения.

Вот простой пример: для системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1; \\ \dot{x}_2 &= -x_2 \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

в качестве функции Ляпунова можно испробовать функцию

$$V = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2\right) \tag{46}$$

(частный случай квадратичной формы переменных x_1 и x_2).

Ее полная производная

$$\frac{dV}{dt} = x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} \tag{47}$$

в силу системы (45) принимает вид

$$\frac{dV}{dt} = -\left(x_1^2 + x_2^2\right) \tag{48}$$

и для любых переменных x_1 и x_2, кроме значений $x_1 = 0, x_2 = 0,$ является отрицательной. Тем самым доказано, что функция (46) действительно является для системы (45) функцией Ляпунова, и, следовательно, ее нулевое решение устойчиво.

Для такой простой системы, как (45), можно непосредственно найти решения: $x_1 = C_1 e^{-t}$, $x_2 = C_2 e^{-t}$ и убедиться, что решение $x_1 = 0, x_2 = 0$ действительно устойчиво, и это совпадает с выводом, полученным на основании функции Ляпунова.

Изложенный материал составляет наиболее простую часть теории А. М. Ляпунова. Разработаны и более тонкие методы, использующие, например, функции Ляпунова, производные которых "в силу системы" не обязательно отрицательны, а только не положительны. Все эти — и многие другие — вопросы рассмотрены во многих сотнях работ, посвященных теории Ляпунова (см., например, публикации [43, 44] и обширную библиографию в них).

Отметим, что найти функцию Ляпунова для конкретной системы уравнений чаще всего очень трудно. Тем не менее, усилия сотен исследователей десятки лет были направлены на поиски этих функций, поскольку считалось, если найдена функция Ляпунова, то решен вопрос об устойчивости.

К сожалению, все это верно только в рамках "математики-1". Более детальное исследование, использующее методы "математики-2", сразу показало (см. публикацию [5]), что существование функции Ляпунова не гарантирует от потери устойчивости при сколь угодно малых вариациях параметров. Действительно, давно доказано, что любая система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и гурвицевым характеристическим полиномом имеет функцию Ляпунова. Значит, имеет ее и система (35), полученная эквивалентными преобразованиями из системы (6)–(7), которая параметрической устойчивостью не обладает. Но если существование функции Ляпунова не гарантирует реальной (т. е. параметрической) устойчивости даже для линейных систем, то тем более ее существование не может ничего гарантировать для систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Разумеется, все сказанное ничуть не порочит выдающихся результатов А. М. Ляпунова. При неизменных значениях коэффициентов рассматриваемых систем уравнений (т. е. в рамках "математики-1") все его результаты, безусловно, верны. Однако если мы хотим использовать результаты А. М. Ляпунова для решения практических задач, где малые (и уж во всяком случае, сколь угодно малые) вариации коэффициентов неизбежны, то для надежного суждения о реальной устойчивости необходимо дополнительно проверить эквивалентные преобразования, которые использовались при получении функции Ляпунова. Если такой проверки не делать, то и построив функцию Ляпунова можно получить ошибочное суждение о реальной устойчивости исследуемого объекта. Пример: при исследовании электропривода, структурная схема которого показана на рис. 10, а математической моделью является система уравнений (6)–(7), можно эту систему эквивалентными преобразованиями привести к системе уравнений (31) и построить для нее функцию Ляпунова — для системы (31) функция Ляпунова, безусловно, существует. Однако суждение об устойчивости рассматриваемого электропривода на основании существования этой функции будет ошибочным: как уже было показано, система (6)–(7) способна терять устойчивость при неизбежных на практике сколь угодно малых вариациях некоторых своих коэффициентов, а такая система равнозначна системе неустойчивой, реальной устойчивости нет. Суждение об устойчивости на основании существования функции Ляпунова в данном случае ошибочно, а причина в том, что эквивалентное преобразование системы (6)–(7) в систему (31) изменило параметрическую устойчивость исследуемой системы.

§ 27. Всегда ли справедлива теорема о непрерывной зависимости решений систем дифференциальных уравнений от параметров?

Теорема о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений от параметров справедливо считается одной из важнейших теорем теории дифференциальных уравнений. Она лежит в основе всех практических приложений теории, поскольку, разумеется, коэффициенты и параметры различных объектов, а значит и параметры их математических моделей, не могут в точности соответствовать расчетным значениям и почти всегда не остаются идеально постоянными в ходе эксплуатации. Вариации параметров, их малые изменения неизбежны, и если нет непрерывной зависимости решений от параметров, то даже их сколь угодно малые вариации могут привести к большим изменениям решений, и результаты расчета могут оказаться совершенно недостоверными и ненадежными.

В учебниках по обыкновенным дифференциальным уравнениям приводятся доказательства теоремы о непрерывной зависимости решений от параметров, поэтому теорема считается доказанной, справедливой для всех систем уравнений, удовлетворяющих условиям, использованным при ее доказательстве. Эти условия в [33] и других учебниках сформулированы следующим образом: рассматривается система дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши (в форме n уравнений первого порядка), записанная в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(t;\, x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n;\, \lambda\right), \quad \left(i = 1, 2, \ldots, n\right), \tag{49}$$

где λ — параметр, и доказывается, что если функции $f_i\left(t;\, x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n;\, \lambda\right)$ непрерывны, ограничены, т. е.

$$\left|f_i\left(t;\, x_1;\, x_2;\, \ldots;\, x_n;\, \lambda\right)\right| \le M, \tag{50}$$

(где M не зависит от параметра λ) и удовлетворяют известным условиям Липшица (Lipschitz, 1832–1903), то все решения $x_i(t)$ зависят от параметра λ непрерывно. Существует и доказательство для одного дифференциального уравнения n-го порядка.

Важно отметить, что для систем уравнений, состоящих из уравнений разных порядков, доказательства непрерывной зависимости решений от параметров не приводились и не публиковались.

По-видимому, авторы учебников считали такие доказательства излишними, поскольку систему, состоящую из уравнений различных порядков, можно эквивалентными (равносильными) преобразованиями, не изменяющими решений, привести к нормальной форме Коши, для которой уже все доказано.

Однако в [5] было показано, что эквивалентные (равносильные) преобразования, не изменяя самих решений как таковых, могут изменять многие свойства исследуемых систем, в том числе и свойство непрерывной зависимости решений от параметров.

Рассмотрим для примера дифференциальные уравнения регулируемого электропривода. Основное уравнение электропривода — уравнение равновесия моментов на валу, как известно, может быть записано в виде:

$$T_{\text{м}} \frac{d\nu}{dt} = M_{\text{дв}} - M_{\text{с}}, \tag{51}$$

где $M_{\text{дв}}$ — момент электродвигателя; $M_{\text{с}}$ — момент сопротивления исполнительного механизма; ν — частота вращения; $T_{\text{м}}$ — механическая постоянная времени электропривода, равная времени разгона двигателя от нулевой частоты вращения до номинальной при моменте двигателя, равном номинальному, и моменте сопротивления, равном нулю.

Уравнения регулируемых электроприводов записывают обычно в отклонениях от номинальных значений, а время измеряют в долях от $T_{\text{м}}$. Тогда уравнение (51) принимает вид:

$$m\dot{x}_1 = -k_0 x_1 + x_2 + x_3, \tag{52}$$

где x_1 — это отклонение частоты вращения от номинальной; x_2 — отклонение момента двигателя, оно играет роль управления; x_3 — отклонение момента сопротивления от номинального значения; k_0 — коэффициент вязкого трения; m — параметр, пропорциональный механической постоянной времени электропривода и в номинальном режиме равный единице. Однако в ходе эксплуатации из-за малых колебаний напряжения и других причин этот параметр может отклоняться от значения $m = 1$ и может быть равен $m = 1 + \varepsilon$, где ε — малое число.

Если момент сопротивления является стационарным случайным процессом, и спектральная плотность мощности переменной x_3 может быть записана в виде

$$S_{x_3} = \frac{1}{\left(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2\right)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \tag{53}$$

где ω — переменная, имеющая размерность частоты, 1/с; α и β — параметры стационарного процесса, то уравнение (52), как известно, дополняют уравнениями

$$\dot{x}_3 = x_4; \tag{54}$$

$$\dot{x}_4 = -\left(\alpha^2 + \beta^2\right)x_3 - 2\alpha x_4, \tag{55}$$

а для уменьшения колебаний частоты вращения ставят регулятор, работающий, например, по закону

$$x_2 = -k_1x_1 - k_3x_3 - k_4x_4. \tag{56}$$

За счет выбора коэффициентов k_1, k_2, k_3 — "коэффициентов усиления" регулятора — добиваются хорошего качества регулирования.

Система четырех уравнений (52), (54)–(56), которую можно, исключив одну из переменных с помощью соотношения (56), свести к трем дифференциальным уравнениям первого порядка, описывает переходные процессы, протекающие в электроприводе.

Решения системы уравнений (52), (54)–(56) зависят от любого из параметров непрерывно, поскольку ограниченность правых частей и условия Липшица выполнены.

Для упрощения дальнейших выкладок рассмотрим частный случай, когда $k_0 = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_4 = 1$ и система уравнений принимает вид

$$\left.\begin{aligned} m\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_3; \\ x_2 &= -x_1 - 2x_3 - x_4; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4 \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

(в системе (57) второе уравнение является дифференциальным уравнением нулевого порядка, не содержащим производных).

Характеристический полином системы (57) равен определителю

$$\begin{vmatrix} m\lambda+2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = m\lambda^3 + (3+2m)\lambda^2 + (6+m)\lambda + 3 = (m\lambda+3)(\lambda+1)^2, \tag{58}$$

и при номинальном значении параметра $m = 1$ характеристический полином равен

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 = (\lambda+3)(\lambda+1)^2. \tag{59}$$

Общее решение системы (57) принимает вид

$$x_i(t) = C_1e^{-\frac{3}{m}t} + C_2te^{-t} + C_3e^{-t}, \tag{60}$$

где C_1, C_2, C_3 — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий.

Уравнение (56) показывает, что управляющее воздействие регулятора (переменная x_2) формируется в функции переменных x_1, x_3, x_4. Однако использование переменных x_3 и x_4 в регуляторе затруднительно, и поэтому систему (57) с помощью эквивалентных преобразований обычно преобразуют к системе, состоящей из двух уравнений:

$$\left[mD^3 + (2+2m)D^2 + (4+m)D + 2\right]x_1 = (D+1)^2 x_2; \tag{61}$$

$$(D+1)x_2 = \left(D^2 + 4D + 5\right)x_1. \tag{62}$$

Уравнение (62) показывает, что теперь управляющее воздействие x_2 формируется в функции от одной доступной переменной x_1, как решение x_2 уравнения (62), а это решение легко реализуется технически.

Характеристический полином системы (61)–(62) равен определителю:

$$\begin{vmatrix} m\lambda^3 + (2+2m)\lambda^2 + (4+m)\lambda + 2 & -(\lambda+1)^2 \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & -(\lambda+1) \end{vmatrix} =$$

$$= (1-m)\lambda^4 + (4-3m)\lambda^3 + (8-3m)\lambda^2 + (8-m)\lambda + 3. \tag{63}$$

При $m = 1$, т. е. при номинальном значении параметра m, характеристический полином (63) будет равен полиному

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 \tag{64}$$

и совпадет с полиномом (59). Это говорит о том, что преобразование системы (57) в систему (61)–(62) было преобразованием эквивалентным (равносильным). Общее решение системы (61)–(62) при $m = 1$ примет вид:

$$x_i(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-t} + C_3 e^{-t}. \tag{65}$$

Можно, разумеется, в системе (57) положить $m = 1$ и эквивалентными преобразованиями превратить ее в систему двух уравнений с двумя переменными x_1 и x_2. Получим систему

$$\left.\begin{aligned} &\left(D^3 + 4D^2 + 5D + 2\right)x_1 = (D+1)^2 x_2; \\ &(D+1)x_2 = \left(D^2 + 4D + 5\right)x_1, \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

(которую мы уже рассматривали в § 21), с характеристическим полиномом (59), что еще раз подтвердит эквивалентность (равносильность) преобразования.

А теперь поставим решающий вопрос: если параметр m отклонится от номинального значения $m = 1$ на сколь угодно малую величину ε, станет равным $1 + \varepsilon$, то будут ли решения системы (61)–(62) зависеть от параметра m непрерывно всюду, в том числе и при $m = 1$? Подставив в уравнения (61)–(62) значение $m = 1 + \varepsilon$, вычисляя характеристический полином, получим его в виде:

$$-\varepsilon\lambda^4 + (1-3\varepsilon)\lambda^3 + (5-3\varepsilon)\lambda^2 + (7-\varepsilon)\lambda + 3. \tag{67}$$

Полином (67) при малых ε будет иметь, во-первых, три отрицательных корня, мало отличающихся от корней $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ полинома (64), а во-вторых, будет иметь очень большой положительный (при $\varepsilon > 0$) и отрицательный (при $\varepsilon < 0$) корень, приближенно (для малых ε) равный $\frac{1}{\varepsilon}$. Это означает, что при $\varepsilon > 0$ в общем решении системы (61)–(62) появится четвертый, очень быстро растущий член (растущий тем быстрее, чем меньше ε), приближенно, для малых ε, равный $C_4 e^{\frac{t}{\varepsilon}}$, где C_4 — четвертая постоянная интегрирования, а при $\varepsilon < 0$ этот четвертый член будет очень быстро убывать.

В результате у системы (61)–(62) при $m = 1$ будет разрыв в зависимости решений от параметра m. Непрерывной зависимости решений от параметра не будет.

Мы провели подробный вывод системы уравнений (61)–(62), описывающих процессы, происходящие в регулируемом электроприводе, для того, чтобы показать: системы дифференциальных уравнений, в которых нет непрерывной зависимости решений от параметров, не являются исключительными, искусственно придуманными системами. Таких систем много, и они описывают действительное поведение многих вполне реальных объектов.

Возможный характеристический признак систем дифференциальных уравнений, не имеющих непрерывной зависимости решений от параметров, состоит в следующем: некоторые из уравнений системы являются так называемыми *неканоническими*, т. е. уравнениями, у которых порядок производных в правой части равен или больше порядка производных в левой части. В системе (61)–(62) уравнение (61) каноническое, уравнение (62) — неканоническое.

В учебной литературе на русском языке неканонические уравнения в последний раз рассматривались, по-видимому, в 1927 году в учебнике В. А. Стеклова (1864–1926) [51]. В дальнейшем стали почти исключительно рассматривать системы уравнений в нормальной форме Коши, в форме n канонических уравнений первого порядка, у которых в левой части стоят производные первого порядка, а в правой части — производные нулевого, на единицу меньшего порядка. Неканонические уравнения во многом были забыты — и, возможно, напрасно. Они встречаются в приложениях, и недаром им отдавал серьезное внимание выдающийся русский математик академик В. А. Стеклов.

Отметим, что приведенные факты не опровергают никаких доказанных теорем. Они, скорее, указывают на предрассудки, которые существуют, к сожалению, даже в математике. То, что в системе, состоящей из n дифференциальных уравнений первого порядка (а также в дифференциальном уравнении n-го порядка), решения зависят от параметров непрерывно — это доказанная теорема, и ее доказательство сомнений не вызывает. А вот распространенное убеждение (не опровергаемое в учебниках) в том, что в любой системе, состоящей из уравнений различных порядков (при выполнении, разумеется, условий ограниченности и условий Липшица), решения обязательно зависят от параметров непрерывно — это убеждение не подтверждено доказательством. Оно не доказано и неверно. Это просто очень широко распространенный предрассудок (ошибочное представление), основанный на другом предрассудке — на представлении о том, что эквивалентные (равносильные) преобразования систем уравнений, якобы, "ничего не меняют". На самом деле эти преобразования не изменяют решений уравнений, но могут изменять многие важные свойства решений — такие, как устойчивость, корректность, непрерывная зависимость от коэффициентов и параметров. Об этом было ранее рассказано в [5].

Заметим, что предрассудок о непрерывной зависимости решений от параметров у любых систем дифференциальных уравнений (как и многие другие предрассудки) далеко не безобиден. Инженер или вычислитель, столкнувшийся в ходе своей работы с математической моделью объекта, не имеющей непрерывной зависимости решений от параметров, и не проверивший это, может получить ошибочные результаты расчета, которые могут стать потом причиной аварий и даже катастроф. Отметим также, что популярные пакеты прикладных программ, включающие решение дифференциальных уравнений, такие как MATLAB, Mathcad и др., не выделяют систем, в которых нет непрерывной зависимости решений от параметров, и поэтому практическое применение этих программ, использование их без дополнительного исследования может привести к ошибочным результатам расчета со всеми вытекающими отсюда тяжелыми последствиями, о которых говорилось уже в [52] и [39].

Математику часто (и без достаточных оснований) считают безукоризненно строгой наукой, все утверждения которой строго доказаны и верны. На самом деле это не так. В истории математики ошибочных утверждений, ошибочно "доказанных" теорем было очень много. Примеры — и многочисленные примеры — приведены в [47, 54].

Да, в ходе исторического развития математики ее понятия уточняются, ошибочно считавшиеся доказанными теоремы отвергаются. Все это так. Но мы никак не можем утверждать, что на сегодня этот процесс закончился, в математике не осталось предрассудков и ошибочных утверждений. Процесс развития — и в том числе уточнения — математики продолжается, и не надо этому удивляться.

Удивляет скорее другое — появившееся только в последние десятилетия недостаточное внимание к "контрпримерам", т. е. к примерам, опровергающим теоремы, считавшиеся доказанными, но на самом деле неверные.

Вот иллюстрация из истории математики: в 1821 году в своем "Курсе анализа" великий французский математик О. Коши привел доказательство теоремы: "сумма сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна". С доказательством Коши были согласны его коллеги-математики. Однако в 1826 году Н. Абель (N. Abel, 1802–1829) построил контрпример: привел пример ряда

$$S = \sin\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha - \ldots, \tag{68}$$

который сходился, состоял из непрерывных функций, но его сумма имела разрывы. Заметим, что Абель не стал искать ошибку в доказательстве Коши. Он просто построил контрпример — и, несмотря на весь авторитет великого О. Коши, его теорема была сразу признана неверной. И лишь через много лет теорема получила уточненную (и на этот раз верную) формулировку: "сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна". В этой формулировке она входит в современные учебники — см., например, [53] на с. 442–449 (если равномерной сходимости нет, то сумма ряда может быть непрерывной, но может и не быть). Контрпримеры играют очень большую роль в прикладной математике, позволяя ее очистить от неверных и, тем самым, опасных при их практическом использовании теорем. Дело в том, что найти ошибку в доказательстве той или иной теоремы очень трудно. Реально математика очищает себя от неверных теорем чаще всего именно через контрпримеры. Недаром венгерский математик Д. Пойа (G. Polia, 1887–1985) считал, что "математика состоит из двух вещей — из теорем и контрпримеров". Более подробно о контрпримерах и их роли см. в [47] на с. 123–125 и в [54].

Однако контрпримеры могут играть свою важную (и очень важную!) роль там, где к ним прислушиваются, где после публикации контрпримера теорема признается неверной и срочно заменяется верной теоремой. До последнего десятилетия XX века в науке России так и происходило, и это было одной из необходимых составляющих ее успешного развития. Однако, начиная примерно с 1990 года, многое изменилось: сокращение финансирования науки, отъезд за границу многих ведущих ученых, тяжелое материальное положение оставшихся — все это привело к желанию части исследователей облегчить себе жизнь, не следить внимательно за текущими публикациями, не реагировать на публикуемые контрпримеры и даже не обсуждать их. В результате научное сообщество распалось, многие научные достижения остаются невостребованными, развитие науки сильно затормозилось (подробнее об этом см. в [55]).

Характерный пример: многие из положений, изложенных в настоящей книге, конкретно — те, которые уже были ранее опубликованы. Еще в 1991–1999 гг. было установлено и опубликовано, что:

- никакие исследования характеристического полинома или матрицы коэффициентов систем уравнений (без анализа эквивалентных преобразований, с помощью которых они были получены) не могут гарантировать правильного заключения об устойчивости системы;
- наличие функции Ляпунова у исследуемой системы не гарантирует ее устойчивости (реальной устойчивости, не исчезающей при сколь угодно малых — и, значит, неизбежных — отклонениях параметров от расчетных значений);
- не у всех систем дифференциальных уравнений (даже удовлетворяющих условиям ограниченности и условиям Липшица) решения непрерывно зависят от параметров (публикации [5, 36–38]). Несколько позже эти же вопросы обсуждались подробно в работах [41, 42, 55, 56, 11, 57, 58].

Тем не менее, вплоть до 2011 года только очень немногие фирмы использовали опубликованные результаты. Остальные продолжали вести расчеты и проектирование "по старинке", без учета этих публикаций, а в результате происходили аварии (и даже катастрофы!), которых вполне можно было бы избежать. Эти аварии рассмотрены более подробно в [39].

Во многом это связано с тем, что в России, начиная с 1990 года, была разрушена система научной информации, тиражи научных журналов упали в десятки и более раз, и поэтому даже бесспорные достижения ученых России практически почти недоступны для широких кругов инженеров и, значит, остаются без реализации.

В настоящей книге мы еще раз вернулись к проблемам, которые уже были частично рассмотрены в предыдущих публикациях, но теперь мы рассматриваем их по единой методике, как составные части "математики-2".

Приводя контрпримеры, доказывающие неверность некоторых популярных теорем или привычных методов расчета, желательно, разумеется, указывать — в чем надо изменить неверные теоремы или методы расчета для того, чтобы они стали верными и надежными. Это будет сделано в последующих параграфах.

Отдельно выделим теорему о непрерывной зависимости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров. В учебниках по дифференциальным уравнениям ([33, 34] и др.) утверждалось, что решения зависят от параметров непрерывно, если правые части непрерывны, ограничены и удовлетворяют условиям Липшица. Приведенный нами контрпример (ранее опубликованный в [5]) показал, что в такой формулировке теорема не верна, и поэтому нужно ввести дополнительные условия, которым должны удовлетворять исследуемые системы дифференциальных уравнений (в общем случае состоящие из уравнений различных порядков), для того чтобы их решения зависели от параметров непрерывно.

По-видимому, теорема станет верной, если к условиям непрерывности, ограниченности и Липшица добавить условие: система уравнений должна быть канонической в смысле определения академика В. А. Стеклова, приведенного в [51], т. е. в исследуемой системе порядок производных, стоящих в правой части каждого из уравнений системы, должен быть ниже порядка производных в левой части.

Однако в таком вопросе, как точная формулировка одной из важнейших теорем теории дифференциальных уравнений, авторы воздерживаются от безапелляционного суждения. Было бы желательно, если окончательная формулировка теоремы была согласована после обсуждения ее кругом заинтересованных специалистов.

§ 28. Зависимости между параметрами объекта и коэффициентами его математической модели

В предыдущих параграфах мы рассматривали системы уравнений, являющиеся математическими моделями реальных объектов, и выделяли те системы уравнений, которые теряют устойчивость при сколь угодно малых вариациях какого-либо из коэффициентов.

В реальных технических объектах в ходе их эксплуатации испытывают вариации параметры объекта, а уже как следствие вариаций параметров возникают вариации коэффициентов математической модели.

Зависимости вариаций коэффициентов от вариаций параметров могут быть весьма причудливыми. В предыдущем параграфе, на примере уравнений (57) и (61)–(62) можно увидеть зависимости коэффициентов в математических моделях электропривода от одного из параметров исследуемого объекта — от механической постоянной времени m. Можно проследить за коэффициентами математической модели и при учете других параметров регулируемого электропривода — зависимость их от коэффициента вязкого трения k_0 в уравнении (52), коэффициентов k_1, k_3, k_4 в уравнении (56).

При учете этих параметров математической моделью электропривода становятся уравнения (52), (54)–(56). Полагая, как и ранее, что $\alpha = 1, \beta = 0,$ получим, что характеристический полином системы станет равным определителю:

$$\begin{vmatrix} m\lambda + k_0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda + 2 \\ k_1 & 1 & k_2 & k_3 \end{vmatrix} = \left(m\lambda + k_0 + k_1\right)\left(\lambda + 1\right)^2 \qquad (69)$$

Из формулы (69) сразу видно, что при любых положительных коэффициентах m, k_0, k_1 все корни характеристического полинома вещественны и отрицательны. Это означает, что система устойчива и сохраняет эту устойчивость при вариациях параметров — механической постоянной времени m, коэффициентов k_0, k_1. Тем самым система обладает параметрической устойчивостью (напомним, что параметрически устойчивыми называют системы дифференциальных уравнений — и описываемые этими системами объекты — которые сохраняют устойчивость при вариациях параметров). Заметим, что коэффициенты k_2 и k_3 на устойчивость системы не влияют.

Совсем другая картина получается после эквивалентных преобразований, когда — при неизмеримости переменных x_3 и x_4 — их заменяют переменными x_1, x_2 и их производными. Замена переменных осуществляется так: из уравнения (52) следует (где $D = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования):

$$x_3 = (mD + k_0)x_1 - x_2. \tag{70}$$

С учетом уравнения (54) имеем:

$$x_4 = \left(mD^2 + k_0 D\right)x_1 - Dx_2. \tag{71}$$

Подставив (70) и (71) в уравнения (52) и (56), получим эквивалентную системе (57) систему уравнений

$$\left[mD^3 + (2m + k_0)D^2 + (m + 2k_0)D + k_0\right]x_1 = \left(D^2 + 2D + 1\right)x_2; \tag{72}$$

$$\left[k_3 mD^2 + (k_2 m + k_3 k_0)D + k_2 k_0 + k_1\right]x_1 = (k_3 D + k_2 - 1)x_2. \tag{73}$$

В системе (72)–(73) уравнение (72) — это уравнение объекта управления, уравнение электропривода, а уравнение (73) — это уравнение регулятора.

Важно отметить, что параметры электропривода в ходе его эксплуатации могут изменяться независимо от параметров регулятора — поскольку это два различных технических устройства.

Полезно начать с рассмотрения простейшего случая — предположим, что параметры регулятора остались неизменными и равными своим номинальным значениям (за номинальные значения параметров примем $m = 1$, $k_0 = 2$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$), а параметры электропривода изменились и стали равными: $m = 1 + \varepsilon$, $k_0 = 2 + \delta$, где ε и δ — числа, малые по сравнению с единицей. Если для этого простейшего, но вполне возможного сочетания вариаций параметров объекта управления и регулятора устойчивость исчезнет, то это означает, что система (72)–(73) заведомо не обладает параметрической устойчивостью. Напомним, что параметрически устойчивой называется система, в которой любое возможное сочетание вариаций коэффициентов и параметров не приводит к потере устойчивости.

Параметрическую устойчивость для рассматриваемого частного случая удобно проверить вычислением характеристического полинома системы (72)–(73) при условии, что параметры m, k_0, k_1, k_2, k_3 в уравнении (73) остались равными своим номинальным значениям. В этом случае характеристический полином будет равен определителю:

$$\begin{vmatrix} m\lambda^3 + (2m + k_0)\lambda^2 + (m + k_0)\lambda + k_0 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & \lambda + 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1 - m)\lambda^4 + (6 - 3m - k_0)\lambda^3 + (14 - 3m - 3k_0)\lambda^2 + (9 - m - 3k_0)\lambda + 5 - k_0. \tag{74}$$

Если $m = 1 + \varepsilon$, а $k_0 = 2 + \delta$, то характеристический полином (74) принимает вид:

$$-\varepsilon\lambda^4 + (1 - 3\varepsilon - \delta)\lambda^3 + (5 - 3\varepsilon - 3\delta)\lambda^2 + (7 - \varepsilon - 3\delta)\lambda + 3 - \delta \tag{75}$$

и подтверждает, что уже при сколь угодно малых вариациях параметра m устойчивость системы может исчезнуть, поскольку при $\varepsilon > 0$ нарушается необходимое условие устойчивости — положительность всех коэффициентов характеристического полинома (условие Стодолы).

При малых $\varepsilon > 0$ (т. е. при $m > 1$) в решениях уравнений (72)–(73) появляются стремительно растущие экспоненциальные члены вида $C_4 e^{t/\varepsilon}$. Отклонения частоты вращения и момента двигателя от номинальных значений (переменные x_1 и x_2) очень быстро нарастают.

В то же время при $\varepsilon = \delta = 0$ полином (75) является гурвицевым и совпадает с полиномом (69). Это еще раз подтверждает, что системы уравнений (52), (54)–(56) и (72)–(73) эквивалентны между собой (в классическом смысле) и получаются одна из другой эквивалентными преобразованиями.

В то же время задача проверки устойчивости для системы (52), (44), (55), (56) корректна, а для эквивалентной ей системы (72)–(73) — не корректна. Действительно, если в системе (72)–(73) будет $m = 1 + \varepsilon$, то при $\varepsilon < 0$ система устойчива, но уже при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ система неустойчива. Таким образом, эквивалентные преобразования изменили корректность решаемой задачи.

Этот пример (а в публикации [41] приведены и многие другие подобные примеры) сразу показывает, что существовавшее до 1998 года разделение всех задач математики, физики и техники на два класса — на класс корректных и класс некорректных задач — недостаточно. Существует еще один, причем очень коварный, третий класс — класс задач, меняющих свою корректность в ходе эквивалентных преобразований, используемых при их решении.

Коварство (и практическая значимость) третьего класса задач заключается в том, что для них традиционные методы решения, не учитывающие недавно открытых в СПбГУ новых свойств эквивалентных преобразований, почти всегда приводят к неверному, ошибочному результату, а следствием ошибок в расчетах могут стать — и становятся — аварии и даже катастрофы.

Действительно, рассмотрим систему управления электроприводом, математической моделью которой служат уравнения (72)–(73). Для исследования устойчивости (и параметрической устойчивости) этой системы рекомендуется (и реализуется в пакетах прикладных программ MATLAB, Mathcad и др.) следующий подход: привести систему к нормальной форме и исследовать ее параметрическую устойчивость проверкой знаков вещественных частей корней характеристического полинома (69) при "покачивании" параметров исследуемого объекта или при покачивании коэффициентов характеристического полинома. При таком (рекомендуемом!) методе проверки при любом исследовании полинома (69) неизбежно будет сделано заключение о хорошей параметрической устойчивости рассчитываемой системы, и она будет рекомендована к "воплощению в металле". На самом же деле запас устойчивости данной системы (запас по вариациям параметров) будет очень малым. Он будет определяться только малыми отклонениями реальных значений параметров от расчетных (если отклонений нет, то запас устойчивости обращается в нуль). В ходе эксплуатации, при неизбежном малом износе всех деталей, приводящем к малым изменениям коэффициентов математической модели, электропривод может в совершенно непредвиденный момент времени потерять устойчивость, "пойти вразнос" и привести к аварии, а то и к катастрофе, тот объект, на который он установлен. А ведь электроприводы устанавливаются на самых разных, в том числе и на очень ответственных объектах — на самолетах, кораблях, на атомных электростанциях и т. п. — и поэтому обеспечение надежности компьютерных вычислений и надежности технических расчетов в целом с учетом открытых в СПбГУ новых свойств эквивалентных преобразований является важной практической задачей, поскольку помогает предотвратить опасные аварии и катастрофы.

Отметим сразу, что технические объекты, при расчете которых традиционные методы расчета (не учитывающие недавно открытых новых свойств эквивалентных преобразований) приводят к ошибкам, встречаются редко — недаром их было предложено называть "особыми" объектами. Для большинства объектов традиционные расчеты дают верные результаты, что подтверждается и многолетней практикой. Точно так же эквивалентные (равносильные) преобразования, повсеместно используемые при расчетах, только в редких случаях изменяют корректность решаемой задачи. Именно поэтому "особые" объекты и новые свойства эквивалентных преобразований были открыты так поздно — лишь в конце XX века (первая публикация — это книга [35], с. 220–230, вышедшая в 1987 году).

Редкость "особых" объектов создает трудности при внедрении усовершенствованных методов расчета, которые учитывают недавно открытые свойства эквивалентных преобразований и не приводят к ошибкам при встрече с "особыми" объектами.

Дело в том, что многие инженеры и исследователи за всю свою предыдущую жизнь ни разу не встречались с "особыми" объектами, и они искренно не понимают, зачем нужно изучать усовершенствованные методы расчета, учитывающие возможность подобной встречи. Однако в последние десятилетия все шире применяются методы оптимизации технических объектов, при использовании которых "особые" объекты встречаются много чаще. В публикации [39] уже рассказывалось о многочисленных авариях, происходивших при использовании одного из первых методов оптимизации — "аналитического конструирования оптимальных регуляторов", предложенного А. М. Летовым в 1960 году (статьи [48]).

Несколько позже прекрасные оптимальные регуляторы, позволяющие существенно улучшить качество работы многих объектов, были предложены в работах В. Б. Ларина, К. И. Науменко, В. Н. Сунцева (публикация [58]), но непосредственная реализация этих регуляторов оказалась невозможной из-за того, что они часто приводили к появлению "особых" систем с неожиданными потерями устойчивости и прочими неприятностями, приводившими к авариям, и тем самым надолго подорвали репутацию оптимального управления в глазах инженеров.

Отказываться от оптимизации технических объектов, разумеется, не следует. Оптимизация позволяет создавать технические объекты с наилучшим возможным качеством их работы. А трудности, связанные с тем, что среди оптимальных систем более часто встречаются "особые" объекты, следует преодолевать на основе методов, предложенных в настоящей книге, а ранее — публикациях [5, 11, 35–38, 41, 42, 55, 57]. Отметим, что если ранее "особые" объекты помогала выявлять интуиция опытных инженеров, то после передачи расчетов на компьютеры встречи с "особыми" объектами стали наиболее опасными. "Особые" объекты встречаются редко, но почти каждая неожиданная встреча с подобным объектом приводит к аварии, а то и к катастрофе. Аварии и катастрофы тоже встречаются не очень часто, далеко не каждый день. Но мириться с ними нельзя. И уж тем более нельзя мириться с теми авариями, причина которых установлена и легко устранима. Именно так обстоит дело с авариями, происходящими из-за погрешностей в проектировании и расчете. Для их устранения достаточно использовать усовершенствованные методы расчета, что не требует сколько-нибудь существенных финансовых затрат. И, тем не менее, усовершенствованные методы применяются в настоящее время гораздо реже, чем это нужно (хотя, например, в Московском государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана (МГТУ) они используются широко и успешно; будет хорошо, если другие вузы и научные учреждения последуют его примеру).

Возможность проверки корректности по коэффициентам математической модели

Наиболее надежным методом проверки корректности является анализ воздействия на решение параметров исследуемого объекта (для рассмотренного примера с системой управления электроприводом параметрами являются механическая постоянная времени m, коэффициенты усиления регулятора k_1, k_3, k_4). Однако коэффициенты окончательно выбранной математической модели, рассчитываемой на компьютере, могут довольно сложным образом зависеть от этих параметров (пример — зависимость коэффициентов уравнений (72)–(73) математической модели электропривода от параметров m, k_0, k_1, k_3, k_4).

Поэтому возникает вопрос: нельзя ли проверку корректности произвести просто, проверив влияние на решение уже не вариаций параметров объекта, а вариаций коэффициентов математической модели. Пусть поведение исследуемого объекта зависит от l параметров $(m_1; m_2; ...; m_l)$, а уравнения математической модели приведены к виду, зависящему от k коэффициентов $(n_1; n_2; ...; n_k)$. Пример: поведение рассмотренной в предыдущем разделе системы управления электроприводом зависит от пяти параметров: m, k_0, k_1, k_3, k_4, а в уравнения его математической модели — уравнения (72)–(73) — входят 13 коэффициентов. Каждый из коэффициентов $n_1, n_2, ..., n_k$ может оказаться функцией f_k от всех параметров объекта, т. е.

$$n_i = f_k(m_1; m_2; ...; m_l). \tag{76}$$

Продифференцировав любое из равенств (76), получим равенства для первых дифференциалов:

$$dn_i = \sum_{j=1}^{l} \frac{df_k}{dm_j} dm_j. \tag{77}$$

Если все функции (76) непрерывны по всем переменным, то из равенств (76) следует, что сколь угодно малым вариациям параметров соответствуют сколь угодно малые вариации коэффициентов n_i (то же справедливо и для частного случая, когда $\frac{df_i}{dm_j} = 0$ и коэффициент n_i не зависит от параметров; в этом случае его вариация и дифференциал dn_i равен нулю). Поэтому если при сколь угодно малом изменении хотя бы одного из коэффициентов решение изменяется на конечную (или, тем более, на сколь угодно большую) величину, то решение почти наверняка некорректно. Для обеспечения большей надежности полезно, разумеется, проверить поведение решения при вариациях параметров объекта. Если же хотя бы одна из функций f_i не является непрерывной и при сколь угодно малых изменениях аргумента изменяется на конечную или на сколь угодно большую величину, то это означает, что сколь угодно малым изменениям параметров объекта соответствуют конечные (или сколь угодно большие) изменения коэффициентов математической модели, и это снова говорит о некорректности решения.

Таким образом, корректность решения может быть проверена по коэффициентам математической модели. Плохую или хорошую обусловленность решения проверить уже трудней, поскольку относительные изменения коэффициентов могут быть существенно больше (или меньше) изменений параметров объекта. Пример: при изменении коэффициента m в системе управления электроприводом от значения $m = 1$ до $m = 1{,}01$, т. е. на 1%, первый коэффициент в уравнении (73) изменится от величины k_3 до $k_3 + 0{,}01k_3$, т. е. изменится на k_3%, или в k_3 раз больше, чем параметр m.

§ 29. Аварии и катастрофы, связанные с несовершенством методов вычислений. Их особенности

Причин аварий много. Одна из причин (как уже говорилось) — погрешности и неточности при проектировании и расчете. Какую долю составляют аварии, происходящие по этой причине, в общем количестве всех возникающих аварий? К сожалению, этот важнейший вопрос пока еще плохо исследован. Только недавно авторитетные специалисты из ЦНИИ ПСК имени Н. П. Мельникова и московского "Городского центра экспертиз" провели подробное исследование в области строительства. Они установили, что 9,3% всех обрушившихся зданий обвалились из-за ошибок при проектировании и расчете (опубликовано в "Приложении" к № 192 газеты "Известия" от 17.10.06).

9,3% от общего числа аварий — это совсем не мало. Заметим, что это происходит в области гражданского строительства, где все конструкции сравнительно простые, методы расчета давно отработаны. В области автоматики, а также в авиации, доля аварий, происходящих из-за погрешностей и неточностей методов расчета, гораздо выше. Поскольку сейчас большинство расчетов выполняется на компьютерах, то в настоящей книге говорится, прежде всего, о погрешностях и ошибках компьютерных вычислений и об обеспечении их надежности.

Одним из источников ошибок в компьютерных вычислениях является недооценка возможности существенного изменения запасов устойчивости решений при эквивалентных преобразованиях. До сегодняшних дней широко распространен не основанный ни на каких доказательствах предрассудок: якобы "эквивалентные преобразования ничего не меняют". Поэтому математическую модель проектируемого объекта с помощью эквивалентных преобразований спокойно приводят к наиболее удобной для исследования форме и уже по ней рассчитывают запасы устойчивости и надежной работы объекта при неизбежных в ходе эксплуатации объекта малых отклонениях его параметров от расчетных значений. При таком подходе нередко возникали ошибочные оценки допустимых отклонений параметров — об этом уже говорилось в предыдущих параграфах, а ошибочные оценки приводили потом к авариям и катастрофам.

Проанализируем характерные черты таких аварий. Рассмотрим, для наглядности, частный случай — влияние на работу исследуемого объекта *двух* параметров — a_1 и a_2 (для электропривода это могут быть, например, механическая постоянная времени m и коэффициент усиления регулятора k_1 в уравнениях (72) и (73)). Рассмотрим координатную плоскость, где по осям $0x$ и $0y$ отложены отклонения этих параметров εa_1 и εa_2 от их номинальных значений (рис. 11). Поскольку отклонения реальных параметров объекта от номинальных неизбежны и в ходе эксплуатации они с течением времени обычно постепенно возрастают, то поведение объекта на рис. 11 будет изображаться траекторией, выходящей из начала координат, из точки $\varepsilon a_1 = 0$, $\varepsilon a_2 = 0$, но которая с течением времени будет постепенно "раскручиваться" и все больше удаляться от начала координат.

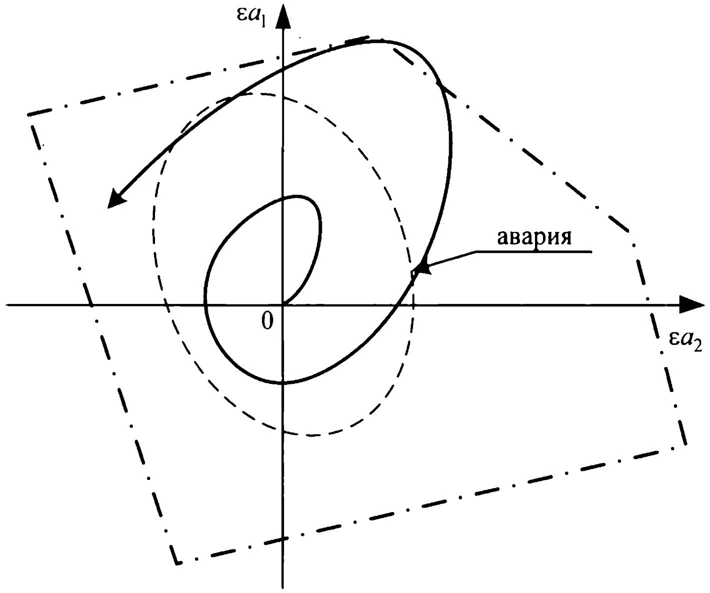

Рис. 11

Поэтому при проектировании и расчете любого ответственного объекта рассчитывают область допустимых отклонений параметров a_1 и a_2 — таких отклонений, которые еще не приводят к нарушению нормальной работы объекта за нормативное время его эксплуатации. На рис. 11 эта область очерчена штрихпунктирной кривой. Величину этой области рассчитывают так, чтобы за нормативное время работы объекта (например, за 30 лет) отклонения $a_1 - a_{1\text{ном}}$ и $a_2 - a_{2\text{ном}}$ заведомо не вышли за пределы этой области. Однако при неучете недавно открытых новых свойств эквивалентных преобразований расчет может оказаться ошибочным (в предыдущих параграфах приводились примеры) и реальная область надежной работы проектируемого объекта может оказаться много меньше расчетной. На рис. 11 реальная область очерчена пунктиром. Как только траектория, изображающая на рис. 11 поведение объекта во времени, выйдет за пределы реальной области нормальной работы, очерченной пунктиром, произойдет авария. Если эта авария не перерастет в катастрофу (например, будет отключена защитой) и объект продолжит работу, то к моменту проверки объекта после аварии может оказаться, что траектория за это время снова войдет в безопасную область, очерченную на рис. 11 пунктиром, и тогда проверка покажет, что объект исправен и работает нормально!

Таким образом, существует очень характерная особенность, выделяющая аварии, происходящие по причине неучета недавно открытых новых свойств эквивалентных преобразований от аварий, происходящих по другим причинам.

Другая характерная особенность: потеря устойчивости у "особых" объектов сопровождается очень быстрым, стремительным отклонением регулируемых величин от их нормальных значений. При анализе уравнений (72)–(73) (которые являются математической моделью одного из "особых" объектов) уже отмечалось, что после потери устойчивости в решениях x_1 и x_2 появляются стремительно растущие члены вида $C_4e^{t/\varepsilon}$.

С учетом этих особенностей рассмотрим известные аварии аэробусов типа А-310. Это большие пассажирские самолеты, изготовленные на заводах объединенной франко-германской авиастроительной компании, головной офис которой расположен в г. Тулуза.

Одна из наиболее известных аварий самолетов этого типа произошла 22 марта 1994 года над городом Междуреченском (Россия), когда погибли все пассажиры и экипаж. Так называемые "черные ящики" (их правильнее называть бортовыми самописцами), в которых записываются параметры полета и переговоры экипажа, были найдены и расшифрованы. Это позволило установить, что до аварии и во время нее самолет шел в автоматическом режиме под управлением автопилота. Внезапно у самолета стали очень быстро нарастать отклонения крена и тангажа от нормальных значений. Пока экипаж пытался перейти с автоматического режима на ручное управление, отклонения возросли настолько, что ввести их в нормальные рамки уже не было возможности. Аэробус упал и разбился.

Несколько месяцев спустя другой аэробус А-310 летел вблизи Бухареста тоже в автоматическом режиме, под управлением автопилота. Так же внезапно стали нарастать отклонения крена и тангажа самолета от их нормальных значений. Однако на этот раз летчик сумел правильно отреагировать, быстро отключил автопилот и в режиме ручного управления успел выровнять самолет. Когда после благополучной посадки стали проверять автопилот и систему управления, то оказалось, что они в полном порядке и работают исправно.

Сопоставление этих фактов позволяет сделать вывод: система автоматического управления полетом (автопилот) аэробуса А-310 оказалась "особой" системой, имеющей малые запасы устойчивости по вариациям параметров автопилота, и эти вариации стали причиной двух потерь устойчивости, одна из которых (над Междуреченском) закончилась гибелью пассажиров и экипажа. Как можно догадываться, расчет автопилота и системы управления производился на компьютерах с преобразованием уравнений его математической модели к нормальной форме Коши, что не позволило выявить опасные свойства проектируемой системы.

Расследование причин катастрофы над Междуреченском проводила комиссия Межгосударственного авиационного комитета (МАК), поскольку самолет был построен франко-германской компанией, но в том роковом полете его вел российский экипаж. От заключения МАК зависело, кто будет платить большие денежные компенсации родственникам погибших (примерно 70 млн долларов). Если МАК признает причиной аварии недостатки самолетных систем, то платить будет франко-германская фирма, если причиной катастрофы объявят ошибки экипажа, то платить будет Россия, ее бюджет. Поэтому расследование этой катастрофы (как, впрочем, и расследование почти всех других аварий и катастроф — см. об этом книгу [39]) осложняется корыстной заинтересованностью влиятельных организаций и лиц, оказывающих серьезное влияние на расследующих — вплоть до дачи крупных взяток. Поэтому в ходе расследования часто не ищут истину, а ищут — кого удобнее обвинить. Чаще всего стараются возлагать вину на пилотов, особенно если они погибли и возразить не могут.

Так произошло и при расследовании катастрофы А-310 над Междуреченском. Расследующие сумели найти зацепку: по записям бортовых самописцев было установлено, что экипаж пустил в кабину пилотов детей и, якобы, их "игры со штурвалом" стали причиной катастрофы. Но ведь те же бортовые самописцы неопровержимо показали, что самолет до аварии и во время нее шел под управлением автопилота, и только поэтому экипаж пустил в пилотскую кабину детей и разрешил им "поиграть" с бездействующим в тот момент штурвалом. Хотя это было, разумеется, грубым нарушением летных правил и инструкций, но причиной катастрофы это стать не могло. Тем не менее, МАК объявил виновным российский экипаж, более 70 млн долларов пришлось заплатить России. Но главное, разумеется, не в деньгах. Главное в том, что, списав всю вину на погибших пилотов, разработчики самолета ушли от необходимости усовершенствовать методы расчета самолетных систем (с использованием уже открытых тогда новых свойств эквивалентных преобразований). А это привело к целой серии аварий самолетов А-310 и А-320. Эти аварии и катастрофы подробно описаны в [5] на с. 28–29. Это были катастрофы, которые вполне можно было предотвратить, жизни людей, которые можно было спасти.

А дальше идет самое интересное: после того, как в 1999 году вышло в свет первое издание книги [5], где была подробно, с доказательствами, раскрыта истинная причина катастрофы 1994 года над Междуреченском, МАК изменил свое заключение. Не имея возможности оспорить приведенную в [5] аргументацию и не желая остаться уж слишком явно пристрастной организацией, МАК снял вину с пилотов, признал, что причиной катастрофы были дефекты самолетных систем, малые запасы устойчивости в них. Но это признание МАК ото всех скрыл и держал в тайне до 2006 года. Тайну раскрыли журналисты (не знаю, как сумели они это сделать) и рассказ об изменившемся решении МАК был опубликован в газете "Известия" № 139 от 3 августа 2006 года. Но поскольку новое "заключение" МАК было в свое время тщательно скрыто, то на методику расчета и проектирования оно не оказало влияния и катастрофы самолетов продолжались.

Авторы остановились столь подробно на расследовании катастроф потому, что читателю этой книги не один раз придется читать или смотреть и слушать по телевизору различные "заключения" о причинах аварий, и нужно помнить об их частой пристрастности, односторонности. Нужно помнить, какие могущественные силы давят на специалистов, расследующих аварии, как трудно даже очень грамотным и опытным специалистам сохранять беспристрастность. Поэтому обычно истинные причины аварий и катастроф выявляются лишь через годы, иногда — через много лет. Характерный пример — гибель 3 июня 1973 года сверхзвукового пассажирского самолета ТУ-144. Этот самолет был гордостью тогдашнего руководства Советского Союза, должен был превзойти англо-французский "Конкорд", был послан для показа и демонстрации своих возможностей на крупнейший авиасалон под Парижем — и при первом же демонстрационном полете с аэродрома в Ле-Бурже потерял устойчивость и разбился. Каких только причин этой катастрофы не выдвигали в те годы! И лишь через 34 года Н. Упоров и А. Бурцев, много лет проработавшие в КБ Туполева, рассказали об истинной причине — о сбое в работе автоматики самолета, из-за чего самолет — подобно А-310 над Междуреченском — вошел в резкое пике, а при выходе из него получил критические перегрузки и разрушился в воздухе (их рассказ опубликован в газете "Известия" от 06.07.2002); еще раз причиной стал сбой в системах управления. Вполне возможно, что для ТУ-144 эти системы проектировались на основе методики "аналитического конструирования" А. М. Летова, очень популярной в те годы. При ее использовании, как уже рассказывалось в публикации [39], особенно часто возникали "особые" системы с малыми запасами устойчивости, не выявляемые при расчете, поскольку новые свойства эквивалентных преобразований, и в частности их способность изменять запасы устойчивости решений и запасы устойчивости самолетных систем, в те годы еще не были открыты.

§ 30. Объяснение трудностей выявления новых свойств эквивалентных преобразований и существования "особых" систем

Читателю может показаться странным — почему новые свойства эквивалентных преобразований, возможность изменения важных свойств решений при этих преобразованиях были открыты так поздно — лишь в конце XX века. Главная причина заключалась в том, что хотя эквивалентными преобразованиями уравнений математики пользовались еще с IX века (да, именно с IX века, еще со времен аль-Хорезми (787–850)), очень долго обращалось внимание только на то, что эквивалентные преобразования не изменяют решений уравнений. Постепенно сложилось даже распространенное до сих пор убеждение, что "эквивалентные преобразования ничего не меняют" и поэтому ими можно пользоваться безо всяких оговорок. Очень долго — до последнего десятилетия XX века — не замечалось, что, не изменяя самих решений как таковых, эквивалентные преобразования могут изменить многие важные свойства решений, такие, как корректность, параметрическая устойчивость, запасы устойчивости и т. д.

А не замечалось все это так долго просто потому, что чаще всего эквивалентные преобразования действительно "ничего не меняют" (поэтому и сложилось убеждение в этом), а преобразования, изменяющие корректность, параметрическую устойчивость и т. п., встречаются редко. Именно поэтому их долго не замечали.

Затем опасные аварии, происходившие в 60-х годах XX века с объектами, на которых устанавливались "аналитически сконструированные" регуляторы, заставили особенно внимательно изучить явления, происходящие при таких эквивалентных преобразованиях, как замены неизмеряемых переменных систем управления на комбинации измеряемых переменных. Возникавшие при этих преобразованиях сложности поясним на примере систем управления третьего порядка вида:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u;\\
\dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u;\\
\dot{x}_3 &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3u;\\
u &= -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3.
\end{aligned}\right\} \qquad (78)$$

В системе (78) первые три уравнения — это уравнения объекта управления, четвертое уравнение — это уравнение регулятора, выбранного согласно методике "аналитического конструирования" как линейная функция всех трех переменных

x_1, x_2, x_3, описывающих состояние объекта управления. Конкретные величины коэффициентов k_1, k_2, k_3 выбираются по методике, предложенной А. М. Летовым в работе [49].

Если не все переменные x_1, x_2, x_3 были доступны для измерения и использования в регуляторе, то их, как уже говорилось, исключали из уравнений (78) путем эквивалентных преобразований и приходили к регуляторам, использующим только доступные переменные.

При этом неожиданно оказалось, что разные эквивалентные преобразования, разные пути исключения переменных ведут к системам управления, различающимся по запасам устойчивости при вариациях параметров. В этом нет противоречия — различные эквивалентные преобразования приводят к эквивалентным системам управления, к системам с одним и тем же характеристическим полиномом, с одними и теми же решениями $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $u(t)$. Это бесспорно. Но эти эквивалентные системы, полученные различными эквивалентными преобразованиями, могут различаться между собой по свойствам решений и, в частности, по параметрической устойчивости, по запасам устойчивости при вариациях параметров.

Это обстоятельство очень затрудняло исследование свойств эквивалентных преобразований и признание результатов этих исследований.

Часто возникала такая ситуация, когда один исследователь применял какой-либо из методов исключения неизмеряемых переменных и приходил к системе управления, не обладающей параметрической устойчивостью. Второй исследователь, изучая тот же технический объект, использовал другой метод исключения неизмеряемых переменных, получал систему управления, обладающую прекрасной параметрической устойчивостью, и объявлял, что первый исследователь ошибся (а первый отвечал, что ошибся не он, а второй исследователь). Возникала путаница, и распутать в те годы ее было нелегко. Кроме того, обнаружилось существование таких систем управления вида (78), в которых самые различные методы исключения переменных не влияли на конечный результат и всегда приводили к замкнутым системам, одинаково не обладающим параметрической устойчивостью (все зависело от величины коэффициентов a_{ij} и b_i в уравнениях (78)). Более подробно эти тонкие вопросы, долго затруднявшие получение ясных и понятных результатов исследования, изложены в книге [5] на с. 88–111.

Еще одна существенная трудность возникла при анализе влияния изменения параметров различных математических моделей на их устойчивость. В § 28 при исследовании влияния параметров электропривода на его параметрическую устойчивость было с полной очевидностью установлено, что формальное математическое исследование эквивалентного преобразования (исключения переменных x_3 и x_4) и его влияния на параметрическую устойчивость приводит к совершенно неверному заключению. Для получения верного результата необходимо правильно учитывать взаимные отношения возможных вариаций коэффициентов математических моделей различных частей и элементов рассматриваемого технического объекта (в частном случае, рассмотренном в § 28, следовало учитывать возможную независимость вариаций таких элементов, как исполнительный электропривод и его регулятор).

Таким образом, хотя исследование свойств эквивалентных преобразований является вопросом прикладной математики, и решение его требует, прежде всего, математических знаний, но правильное решение вопроса предусматривает наличие также и технических знаний. Математики чаще всего техническими знаниями не обладают — возможно, что этим и объясняется столь позднее обнаружение новых свойств эквивалентных преобразований.

Еще одним затрудняющим фактором стала путаница с так называемыми "сингулярно возмущенными" уравнениями. Вернемся еще раз к уравнениям (72)–(73) и напомним, что уравнение (72) описывает электродвигатель, а уравнение (73) — его регулятор. Рассмотрим, как и ранее, тот вполне возможный случай, когда параметры регулятора остались равными своим расчетным значениям (т. е. $k_1 = 1$, $m = 1$, $k_3 = 2$, $k_4 = 1$), в уравнении электродвигателя (72) коэффициент k_0 остался прежним ($k_0 = 2$), а параметр m (механическая постоянная времени) изменился на малую величину ε и стал равным $1+\varepsilon$. Исключив переменную x_2 из системы (72)–(73), получим следующее дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\left[-\varepsilon D^4 + (1-3\varepsilon)D^3 + (5-3\varepsilon)D^2 + (7+\varepsilon)D + 3\right]x_1 = 0, \qquad (79)$$

т. е. получим уравнение с малым коэффициентом при старшей производной. К подобным уравнениям часто приходим в процессе промежуточных преобразований и для многих других "особых" объектов. Но уравнения с малыми коэффициентами (малыми параметрами) при старших производных изучаются давно и получили специальное название — *сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения*.

Это обстоятельство направило многих исследователей по ложному пути. Дело в том, что решения сингулярно возмущенных уравнений, соответствующие $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon \neq 0$ (каким бы малым не было ε), часто различаются очень сильно, и это понятно, поскольку переход от нулевого значения коэффициента при старшей производной к значению $\varepsilon \neq 0$ изменит порядок уравнения, а решения уравнений разных порядков чаще всего отличаются друг от друга коренным образом — и это совершенно понятно, и сомнений не вызывает. Простейший пример: уравнение

$$\varepsilon\dot{x} - x = 0 \qquad (80)$$

является уравнением первого порядка и имеет решение:

$$x = C_0 e^{\frac{t}{\varepsilon}}. \qquad (81)$$

При малых ε это решение является очень быстро растущей функцией. В то же время при $\varepsilon = 0$ уравнение (80) переходит в дифференциальное уравнение нулевого порядка (уравнение, не содержащее производных, можно считать и называть уравнением нулевого порядка), переходит в уравнение

$$-x = 0, \qquad (82)$$

и решение $x = 0$ уравнения (82) не имеет, естественно, ничего общего с решением (81) уравнения (80) даже при самых малых значениях параметра ε. Точно так же решения уравнения второго порядка

$$\varepsilon\ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \qquad (83)$$

при $\varepsilon \neq 0$ имеют очень мало общего с решениями уравнения первого порядка

$$\dot{x} + x = 0 \qquad (84)$$

(в которое уравнение (83) переходит при $\varepsilon = 0$), какой бы малой не была величина ε.

В то же время решения уравнения

$$(1+\varepsilon)\dot{x} + x = 0,$$

не являющегося сингулярно возмущенным, имеют вид

$$x = C_0 e^{\frac{t}{1+\varepsilon}},$$

и при малых ε они очень мало (для любых t) отличаются от решений, соответствующих $\varepsilon = 0$.

Во избежание недоразумений нужно очень четко различать малые абсолютные вариации и малые относительные вариации, т. е. вариации, малые по отношению к начальному значению коэффициента или параметра. Так, например, вариация $\varepsilon = -9 \cdot 10^{-8}$ мала в сравнении с единицей, но если начальное значение коэффициента $a_0 = 10^{-7}$, то вариация $\varepsilon = -9 \cdot 10^{-8}$ изменит этот коэффициент в 10 раз — по отношению к a_0 это будет не малое, а большое изменение.

Если же начальное значение коэффициента было равно нулю, то прибавление к нему малой по абсолютной величине вариации ε изменит коэффициент (условно говоря) в "бесконечно большое число раз".

Отсутствие четкого различения относительных и абсолютных вариаций ведет к путанице (которая и проявилась наглядно при первых обсуждениях публикации [5]), именно поэтому с самого начала в § 21 было строго оговорено (такая же оговорка ранее была сделана и в публикации [5]), что в дальнейшем изложении не будут рассматриваться "вариации нуля" и те объекты, в которых какой-либо коэффициент исходной математической модели равен нулю, а после вариации принял хоть малое, но не равное нулю значение. Такие объекты существуют, но в настоящей книге они не обсуждаются. Рассматриваются только относительные вариации, обсуждаются только такие объекты, в математической модели которых если исходное значение какого-либо коэффициента или параметра равно, например, a_i, то его значение после вариации равно $a_i(1+\varepsilon_i)$, где ε_i — число, малое в сравнении с единицей. Такое ограничение в предмете исследования связано с тем, что когда какой-либо нулевой коэффициент математической модели объекта станет ненулевым (пусть даже малым), то свойства и поведение объекта, как уже говорилось, могут измениться очень существенно — в этом нет ничего удивительного; это давно известно и исследовалось, в частности и на основе теории "сингулярно возмущенных" уравнений. В то же время, при относительной вариации при переходе от значений коэффициентов a_i к значениям $a_i(1+\varepsilon_i)$ естественно ожидать, что при малых ε_i свойства объекта изменятся мало. И чаще всего это действительно так. Собственно, на этом и держится вся современная техника, поскольку переход от значений коэффициентов и параметров a_i к значениям $a_i(1+\varepsilon_i)$ в ходе эксплуатации объекта почти всегда неизбежен. Если бы при таких переходах свойства многих объектов менялись коренным образом, вся сегодняшняя техника развалилась бы. Однако опасные объекты, которые при малых относительных вариациях параметров (именно относительных, а не абсолютных!) при переходах от значения a_i к значению $a_i(1+\varepsilon_i)$ существенно меняют свои свойства, все же существуют, хотя и встречаются не часто. Их поведение, действительно, похоже на поведение "сингулярно возмущенных" систем, хотя "сингулярно возмущенными" они не являются и то, что уравнения, похожие на "сингулярно возмущенные", возникают в ходе промежуточных преобразований математических моделей "особых" объектов, не должно вводить в заблуждение.

Кроме того, у ряда подобных объектов их описанные свойства не выявляются традиционными методами расчета. Такие объекты, которые, во-первых, могут существенно изменять свое поведение при малых относительных вариациях, и во-вторых, это опасное свойство не выявляется традиционными методами расчета, не учитывающими недавно открытых новых свойств эквивалентных преобразований, были названы "особыми" объектами.

Встречаются эти объекты не очень часто, поэтому и были открыты поздно. Но они заслуживают самого серьезного внимания и изучения, поскольку каждая неожиданная встреча с подобным объектом может стать — и уже не раз становилась — причиной аварий и катастроф. Об этом более подробно рассказано в [5].

Детальное исследование и четкое понимание коренных отличий между относительными и абсолютными вариациями коэффициентов и параметров важно потому, что даже в серьезных и аргументированных книгах и пособиях, посвященных точности и надежности вычислений, относительные и абсолютные вариации иногда не различаются (что и приводит к путанице), а их надо обязательно различать. Математические модели, в которых допускаются "вариации нуля", и модели, где "вариации нуля" не допускаются, описывают разные классы объектов. Эти классы объектов обладают существенно различающимися свойствами, поэтому и методы исследования не совпадают и не могут совпадать. Смешение этих совершенно различных объектов и их математических моделей надолго задержало открытие "особых" объектов и открытие новых свойств эквивалентных преобразований.

§ 31. Неточности в расчетах устойчивости по части переменных

Завершая анализ ошибок и неточностей, содержащихся в традиционных методах расчета устойчивости, рассмотрим проблему устойчивости по части переменных, которой были посвящены работы многих исследователей (публикации [59, 60] и многие другие). Важность этой проблемы связана с тем, что не всегда требуется устойчивость по всем переменным, и в этих случаях представляется возможность спроектировать более простую систему, устойчивую не по всем переменным, а только по части их. Примером может служить движение ракеты, симметричной относительно продольной оси. Пространственное движение ракеты, как и любого другого твердого тела, описывается шестью переменными — тремя координатами центра масс и тремя углами поворота ракеты относительно трех взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр масс. Одну из этих осей можно совместить с продольной осью симметрии, и тогда устойчивость одной из переменных — угла поворота относительно этой оси — несущественна для попадания ракеты в цель.

Методику проверки устойчивости по части переменных покажем на примере системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - 2x_3; \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + x_2; \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 + x_2 - x_3, \end{aligned}\right\} \tag{85}$$

рассмотренной ранее в работе [59].

Характеристический полином системы (85) равен

$$\det = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 2 \\ -4 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda+1)^2(\lambda-1) \tag{86}$$

и имеет как положительные, так и отрицательные корни. Поэтому все решения системы (85) устойчивыми быть не могут. Для суждения об устойчивости, например, переменной x_1 можно использовать известный метод "μ-преобразований". Этот метод заключается в том, что часть старых переменных системы заменяется посредством эквивалентных преобразований новыми (которые по традиции обозначают буквами μ_i — отсюда и название метода). Замену эту стараются провести так, чтобы новая система, состоящая из части старых переменных x_i и новых переменных μ_i, была бы устойчива по всем переменным. Это будет означать, что переменные x_i были устойчивы и в исходной системе.

Для системы (85) в известной монографии [59] было предложено ввести новую переменную $\mu = x_2 - 2x_3$, и тогда, поскольку $\dot{\mu} = \dot{x}_2 - 2\dot{x}_3$, то из второго и третьего уравнений системы (85) следует, что $\dot{\mu} = -\mu$. Окончательно, для переменных x_1 и μ получаем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 + x_1 &= \mu; \\ \dot{\mu} + \mu &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{87}$$

Система (87) имеет характеристический полином

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 \tag{88}$$

с корнями $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Поэтому решения $x_1(t)$ и $\mu(t)$ являются устойчивыми для любых начальных условий. А поскольку преобразования, переведшие систему (85) в систему (87), являются эквивалентными (в классическом смысле) относительно переменной x_1, то это означает, что переменная x_1 устойчива и в исходной системе (83).

В данном случае это заключение можно проверить непосредственным интегрированием системы (85) с начальными условиями $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$, $x_3(0) = x_{30}$. Получим:

$$x_1(t) = x_{10}e^{-t} + (x_{20} - 2x_{30})te^{-t}; \tag{89}$$

$$x_2(t) = 2(x_{10} + x_{20} - 2x_{30})e^{t} + (4x_{30} - 2x_{20})te^{-t} + (2x_{30} - x_{20} - 2x_{10})e^{-t}; \tag{90}$$

$$x_3(t) = (x_{10} + x_{20} - x_{30})e^{t} + (2x_{30} - x_{20})te^{-t} + (2x_{30} - x_{10} - x_{20})e^{-t}; \tag{91}$$

$$\mu(t) = x_2 - 2x_3 = (x_{20} - 2x_{30})e^{-t}. \tag{92}$$

Формулы (89) и (92) подтверждают, что решения $x_1(t)$ и $\mu(t)$ устойчивы, а $x_2(t)$ и $x_3(t)$ — не устойчивы.

Если прямое интегрирование какой-либо системы затруднительно, то заключение об устойчивости той или иной переменной можно сделать на основании методики "μ-преобразований".

Однако это заключение, как и его частный случай — заключение об устойчивости переменной x_1 в системе (85) на основании исследования устойчивости системы (87), будет неполным. На самом деле устойчивость переменной x_1 в системе (85) может теряться при сколь угодно малых — а значит, неизбежных на практике — вариациях параметров системы (85). Параметрической устойчивостью переменная x_1 в системе (85) не обладает, хотя в эквивалентной ей относительно переменной x_1 системе (87) решение x_1 обладает параметрической устойчивостью. Отметим, что в монографии [59], откуда и взят пример с системой (85), потеря устойчивости

x_1 при сколь угодно малых вариациях параметров была замечена, но причина явления объяснялась неправильно. Автор монографии [59] объяснял его тем, что "свойство асимптотической устойчивости по отношению к части переменных обладает повышенной чувствительностью по отношению к вариациям коэффициентов". На самом деле, "повышенная чувствительность" здесь ни при чем. Просто "μ-преобразование", как и любое другое эквивалентное в классическом (но не в расширенном) смысле преобразование, может изменять свойство параметрической устойчивости решений как у всех переменных, так и у части их.

Поскольку система устойчивая, но теряющая устойчивость даже при сколь угодно малых — а значит, неизбежных на практике — вариациях параметров ничуть не лучше неустойчивой системы, практический смысл имеют лишь те "μ-преобразования", которые эквивалентны не только в классическом смысле, но и в расширенном (подробнее об эквивалентности в расширенном смысле см. в следующем параграфе). Если эквивалентности в расширенном смысле нет, то суждение об устойчивости той или иной системы уравнений "по части переменных" на основе "μ-преобразования" может ввести в заблуждение.

Исследование проблемы "устойчивости по части переменных" еще раз подчеркивает различие подходов и результатов в "математике-1" и в "математике-2".

В рамках "математики-1", предполагающей неизменность точно заданных коэффициентов, вывод об устойчивости решения x_1 системы (85) имеет смысл и значимость.

Однако "математика-2", более точно отражающая практические требования к результатам математического исследования, сразу обнаруживает, что вывод об устойчивости x_1 практического смысла не имеет: устойчивость, которая теряется при сколь угодно малых — и, значит, неизбежных на практике — вариациях параметров, ничуть не лучше неустойчивости.

Но это означает, что большая часть исследований устойчивости по части переменных практического смысла не имеет. А ведь сколько было истрачено труда на эти исследования (публикации [59] и [60] являются лишь малой частью огромного числа работ, посвященных устойчивости по части переменных)!

Пример системы (85) показывает, в числе прочего, что изменение устойчивости при эквивалентных преобразованиях может происходить не только в "вырожденных" системах. Причины потери устойчивости многообразны, и это заставляет с особенным вниманием отнестись к вопросу о надежности технических расчетов и вычислительных алгоритмов, которому будет посвящен следующий параграф.

Среди многочисленных систем, устойчивых по части переменных, надо выделять системы, в которых устойчивость по части переменных сохраняется хотя бы при сколь угодно малых вариациях коэффициентов. Только такие системы (если они существуют) имеют практический смысл. А системы, в которых устойчивость по части переменных может исчезнуть при сколь угодно малых вариациях коэффициентов (как это происходит в системе (85)), практического смысла не имеют. Они ничуть не лучше систем, изначально неустойчивых по всем переменным.

§ 32. Обеспечение надежности вычислительных алгоритмов

Обнаружение эквивалентных (равносильных) преобразований, способных изменять многие важные свойства преобразуемых систем — такие, как параметрическая устойчивость, корректность и т. д. — заставляет с особым вниманием отнестись к вопросу об обеспечении надежности различных вычислительных алгоритмов.

Без использования эквивалентных преобразований уравнений не обойтись. Поэтому нужно следить, чтобы использованные эквивалентные преобразования не привели к ошибкам расчета.

Первоначально в работе [5] была сделана попытка выделить два класса эквивалентных преобразований:

- преобразования, эквивалентные в классическом смысле, т. е. не изменяющие решений преобразуемых систем;
- преобразования, эквивалентные в расширенном смысле, которые, во-первых, эквивалентны в классическом смысле, а во-вторых, не изменяют корректность решаемой задачи.

Если бы удалось выделить второй класс эквивалентных преобразований и пользоваться только им, то в проблеме надежности расчетов удалось бы сделать большой шаг вперед.

Однако оказалось, что в зависимости от решаемых задач и рассматриваемых математических моделей даже самые простые и "невинные" преобразования могут оказаться эквивалентными в классическом смысле, но не в расширенном.

Вот простой пример: система уравнений

$$\left(D^3+4D^2+5D+2\right)x_1=\left(D^2+2D+1\right)x_2; \tag{93}$$

$$\left(D^2+4D+5\right)x_1=\left(D+1\right)x_2 \tag{94}$$

описывает, как уже указывалось ранее, переходные процессы в системе управления частотой вращения электропривода, причем x_1 — это отклонение частоты вращения от номинальной, x_2 — отклонение вращающего момента от номинального.

Введем теперь новые переменные, определив их равенствами

$$x_3=\dot{x}_1+2x_1-x_2; \tag{95}$$

$$x_4=\dot{x}_3. \tag{96}$$

Относительно новых переменных уравнение (93) перейдет в систему трех уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_3;\\ \dot{x}_3 &= x_4;\\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4.\end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Теперь преобразуем уравнение (94). Преобразования будут заключаться только в разбиении членов — член $4Dx_1$ будет преобразован в сумму $2Dx_1 + 2Dx_1$ — и переносе членов из одной части равенства в другую с изменением знака. Эквивалентность этих простейших преобразований никаких сомнений не вызывает. Проделав их, преобразуем уравнение (94) к виду:

$$\left[\left(D^2 + 2D\right)x_1 - Dx_2\right] + \left[(2D + 4)x_1 - 2x_2\right] + x_1 = -x_2. \tag{98}$$

Теперь, сопоставляя (98) с равенствами (95) и (96), убеждаемся, что стоящее в первой квадратной скобке соответствует переменной x_4, второй квадратной скобке соответствует $2x_3$, а в целом уравнение (98) может быть записано в виде:

$$x_2 = -x_1 - 2x_3 - x_4, \tag{99}$$

т. е. оно переходит в дифференциальное уравнение нулевого порядка, в соотношение между переменными, не содержащее производных.

Подставив значение x_2 из (99) в первое из уравнений (97), получим для переменных x_1, x_3 и x_4 нормальную форму Коши:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -3x_1 - x_3 - x_4;\\ \dot{x}_3 &= x_4;\\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4,\end{aligned}\right\} \tag{100}$$

т. е. систему из трех уравнений первого порядка для трех переменных x_1, x_3 и x_4.

Таким образом, уравнения системы управления электроприводом могут быть записаны либо в виде системы уравнений (93)–(94), либо в виде эквивалентной ей системы из уравнений (97) и (98), или в виде системы (100), эквивалентной и той, и другой системам. Все три системы уравнений имеют один и тот же характеристический полином. Действительно, для системы (93)–(94) это будет полином:

$$\begin{vmatrix}\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 & \lambda^2 + 2\lambda + 1\\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & \lambda + 1\end{vmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3.$$

Для системы (97)–(99) это будет тот же полином:

$$\begin{vmatrix}\lambda + 2 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & 1 & \lambda + 2\\ 1 & 1 & 2 & 1\end{vmatrix} = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 = (\lambda + 3)(\lambda + 1)^2,$$

а для системы (100) снова имеем тот же самый характеристический полином:

$$\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+3)(\lambda+1)^2 = \lambda^3+5\lambda^2+7\lambda+3.$$

Можно и непосредственно проверить, что, например, решение $x_1(t)$ и для системы (93)–(94), и для системы (97)–(99), и для системы (100) одинаково имеет вид

$$x_1 = C_1e^{-3t} + (C_2t + C_3)e^{-t},$$

где постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 зависят от начальных условий и определяются ими. Однако решения системы (93)–(94), как уже было ранее показано, некорректны, а решения системы (97)–(99) корректны.

Таким образом, мы убеждаемся, что совершенно элементарные, безусловно, эквивалентные (в классическом смысле) и не вызывающие никаких сомнений простейшие преобразования (разбивка члена $4Dx_1$ на сумму $2Dx_1 + 2Dx_1$; перенос членов из левой части уравнения в правую с изменением знака) могут изменить корректность решения и относятся к преобразованиям, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном.

Поэтому вряд ли можно надеяться найти простой критерий выделения преобразований, эквивалентных в расширенном смысле. Большие усилия в поисках этого критерия, предпринимавшиеся в 1994–2003 гг., не привели к успеху.

Для обеспечения надежности компьютерных вычислений нужно проверять корректность решений у математической модели в наибольшей мере соответствующей физическому смыслу решаемой задачи. Проверка корректности по математической модели, приведенной эквивалентными преобразованиями к наиболее удобной для исследования форме, может дать неверный ответ — даже если эта форма получена из исходной совершенно эквивалентными (в классическом смысле) преобразованиями.

Так, например, корректность решения задачи об устойчивости частоты вращения $x_1(t)$ в системе управления электроприводом необходимо исследовать по математической модели в виде системы уравнений (93)–(94). Исследование по математической модели в виде системы уравнений (100) не дает правильного результата, несмотря на то, что системы (93)–(94) и (100) эквивалентны (в классическом смысле) по отношению к переменной $x_1(t)$ и решения $x_1(t)$ в системах (93)–(94) и (100) — тождественны.

Это обстоятельство важно подчеркнуть потому, что оно до сих пор не оговаривается в учебных курсах, посвященных инженерным расчетам и компьютерным вычислениям. Не используется оно и при составлении компьютерных программ и пакетов таких программ. Корректность решений проверяют (если вообще проверяют) по наиболее удобной для исследования форме математической модели, и это может приводить к ошибочным заключениям.

Непосредственная проверка корректности решения конкретной системы уравнений может потребовать (как об этом уже говорилось в *первой части*) большого объема вычислений и поэтому желательно выделить такие классы задач, для которых корректность уже проверена, и значит, корректность каждой отдельной конкретной задачи можно не проверять.

Это можно сделать в рамках "триады". *Триадой* (как было ранее предложено в [11]) мы будем называть совокупность из следующих трех элементов:

- исследуемая математическая модель;
- поставленная при ее исследовании задача;
- используемый метод решения.

Диадой назовем совокупность из математической модели и поставленной при ее решении задачи (для случаев, когда метод решения можно не учитывать).

Первая триада: проверка устойчивости

Элементы триады:

- исследуемая математическая модель — система линейных дифференциальных уравнений различных порядков с постоянными коэффициентами;
- поставленная задача — проверить устойчивость этой системы;
- метод решения — вычисляется характеристический полином системы и его корни. Если у всех корней вещественные части отрицательны, то традиционно делается заключение об устойчивости системы.

В данной триаде заключение будет надежным и достоверным не всегда, не для всех систем, поскольку существуют, как уже было показано, такие "особые" системы, у которых все корни имеют отрицательные вещественные части и которые, тем не менее, становятся неустойчивыми при сколь угодно малых, неизбежных на практике, отклонениях коэффициентов от расчетных значений.

Заметим, что формально, с чисто математической точки зрения заключение об устойчивости будет верным всегда: отрицательные вещественные части у всех корней говорят о том, что если коэффициенты системы идеально точно равны своим расчетным значениям, то решения устойчивы. Однако система, способная терять устойчивость при сколь угодно малых, а значит, неизбежных на практике вариациях параметров, ничуть не лучше неустойчивой и даже опаснее нее.

Вторая триада: проверка устойчивости другим методом

Математическая модель и поставленная задача — те же, что и в первой триаде.

Метод решения — вычисление характеристического полинома и его корней дополняются проверками:

- не является ли степень характеристического полинома ниже, чем порядок системы (проверка вырожденности);

- не является ли какой-либо из коэффициентов характеристического полинома малой разностью больших чисел — настолько малой, что при неизбежных на практике величинах вариаций этих больших чисел коэффициент характеристического полинома может изменить свой знак.

Только в том случае, если обе проверки дали отрицательный результат, компьютерное вычисление характеристического полинома приводит к надежному заключению об устойчивости системы. Традиционные методы расчета устойчивости, без упомянутых дополнительных проверок, надежности и достоверности компьютерных вычислений не обеспечивают.

Третья триада: использование функций Ляпунова

Математическая модель — система нелинейных дифференциальных уравнений различных порядков.

Поставленная задача — определить, устойчивы ли решения этой системы.

Метод решения — преобразовав систему к нормальной форме Коши, пытаемся построить функцию Ляпунова для данной системы. Если функция Ляпунова построена, то традиционно делается заключение об устойчивости нулевого решения системы, а исследование любого решения может быть сведено к исследованию устойчивости нулевого решения.

В данной триаде традиционное заключение об устойчивости нулевого решения, как ранее было показано, не всегда, не для всех систем является надежным, поскольку существуют системы, для которых построена функция Ляпунова, но которые становятся неустойчивыми при сколь угодно малых, неизбежных на практике, вариациях коэффициентов системы уравнений или параметров объекта, математическая модель которого исследуется.

Четвертая триада: вычисление собственных значений

Задача вычисления собственных значений является одной из важных задач вычислительной математики, ее решение излагается во многих учебниках, и, тем не менее, остаются незамеченными те системы, для которых задача вычисления собственных значений некорректна.

Так, при вычислении собственных значений (они же — корни характеристического полинома) для системы дифференциальных уравнений ограничиваются частным случаем, когда исследуемая система приведена к системе n уравнений первого порядка. В этом случае собственные числа определяются из уравнения

$$\det\left(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}\right) = 0,$$

где $\mathbf{A}$ — матрица коэффициентов исследуемой системы; $\mathbf{E}$ — единичная матрица, и решение этого уравнения будет корректно.

Однако для систем, состоящих из уравнений различных порядков, например для системы (93)–(94), собственные значения будут корнями определителя

$$\begin{vmatrix} \lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2 & \lambda^2+2\lambda+1 \\ \lambda^2+4\lambda+5 & \lambda+1 \end{vmatrix},$$

но задача вычисления его корней некорректна.

Приведение исследуемой системы к системе n уравнений первого порядка маскирует возможную некорректность, но не отменяет ее, а незамеченная некорректность ведет к ошибкам в расчете.

Еще один пример некорректности — тот нередко встречающийся на практике случай, когда часть уравнений содержит параметр λ, а часть не содержит, и исследуемая математическая модель имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n &= \lambda x_1; \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n &= \lambda x_2; \\ & \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Отметим, что в систему (101) входит $n-r$ уравнений с правыми частями, содержащими параметр λ, а также r уравнений, не содержащих параметра λ, их правые части равны нулю.

При исследовании дифференциальных уравнений подобные системы возникают тогда, когда исследуемые переменные удовлетворяют как линейным дифференциальным уравнениям, так и уравнениям алгебраическим, не содержащим производных.

В векторно-матричных обозначениях систему равнений (101) можно записать в виде:

$$\left(\mathbf{A}-\lambda\bar{\mathbf{E}}\right)\mathbf{x}=0, \tag{102}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $\mathbf{A}$ — квадратная матрица коэффициентов; $\bar{\mathbf{E}}$ — квазиединичная матрица, т. е. матрица, у которой все элементы, кроме стоящих на главной диагонали, — нули, а на главной диагонали стоят $n-r$ единиц и r нулей. При $r=0$ матрица $\bar{\mathbf{E}}$ переходит в известную единичную матрицу $\mathbf{E}$.

Поставленная задача: найти собственные значения параметра λ, т. е. значения, при которых система (101) имеет ненулевые решения x_i.

Метод решения: последовательное исключение переменных из системы (101) до тех пор, пока не останется последнее уравнение для переменной x_n:

$$M(\lambda)x_n=0, \tag{103}$$

где $M(\lambda)$ — полином, среди корней которого находятся собственные значения.

Данная триада приводит (как показано в [5]) к некорректным заключениям о собственных значениях системы (101).

Если изменить третий пункт триады, т. е. метод решения, а именно, пользуясь уравнениями, не содержащими λ, выразить одни переменные через другие и прийти в результате к системе из меньшего числа уравнений, но в которой уже каждое из уравнений содержит параметр λ, и лишь затем приступать к последовательному исключению переменных, то в этом случае собственные значения будут (как показано в [5]), корректны.

Данный пример иллюстрирует необходимость уточнения используемых алгоритмов при переходе на компьютерные вычисления: в "эпоху ручного счета" при встрече с системами типа (101) начинали, разумеется, с уравнений, не содержащих параметра λ. Пользуясь ими, уменьшали число переменных и число уравнений, приходили к системе из меньшего числа уравнений, в каждое из которых входил параметр λ, и лишь затем начинали последовательно исключать переменные. Такой метод вычислений был удобен при ручном счете и к некорректностям не приводил. Поэтому задача о вычислении собственных значений традиционно считалась корректной.

Однако для машинного счета этот метод не очень удобен, поскольку требует использования двух разных программ. Для компьютера удобнее по единой программе исключать переменные одну за другой из исходной системы. Не сразу было замечено, что этот, удобный для компьютера алгоритм, приводит к некорректным собственным значениям, как это более подробно рассмотрено в [5].

Заметим, что если параметр λ входит в каждое из уравнений системы, то задача об отыскании собственных значений λ называется классической задачей о собственных значениях, а если в некоторые из уравнений параметр λ не входит, то та же задача называется обобщенной задачей об отыскании собственных значений. И классическая, и обобщенная задачи о собственных значениях часто встречаются в приложениях. Они подробно изучались еще в XIX веке. Однако некорректность решения обобщенной задачи при прямолинейном использовании компьютера для последовательного исключения переменных из исходной системы была замечена совсем недавно (см. [5]). Для обеспечения надежности компьютерных вычислений в данном случае достаточно свести обобщенную задачу о собственных значениях к классической. Если предметом исследования является система из n линейных однородных алгебраических уравнений, из которых $n-r$ уравнений содержат параметр λ, а r уравнений его не содержат, то нужно преобразовать эту систему в систему из $n-r$ уравнений, каждое из которых содержит λ. Приходим тем самым к классической задаче о собственных значениях, которую можно решать путем последовательного исключения переменных. При таком методе вычислений некорректности решений (как показано в [5]) не будет.

Пятая триада: численное решение систем дифференциальных уравнений

Математическая модель: система обыкновенных дифференциальных уравнений различных порядков, в общем случае — нелинейных.

Поставленная задача: нахождение численного решения системы при заданных начальных условиях.

Метод решения: после приведения системы к нормальной форме Коши используются готовые программы численного решения, приведенные в MATLAB, Mathcad или других пакетах.

Полученное данным методом решение не всегда будет корректным. Для некоторых, заранее не известных, систем реальное поведение объекта исследования может коренным образом отличаться от рассчитанного при сколь угодно малых, неизбежных на практике, отклонениях коэффициентов системы от принятых при расчете. Для обеспечения надежности вычислений необходимо предварительно проверить, не являются ли решения исследуемой системы некорректными или плохо обусловленными.

Шестая триада: решение с дополнительными проверками

Математическая модель и поставленная задача остаются теми же, что для пятой триады. Метод решения дополняется проверками:

- не является ли исследуемая система вырожденной;
- не оказался ли определитель, составленный из старших членов уравнений системы, малой величиной, настолько малой, что он может изменить знак при возможных вариациях коэффициентов.

Подобная проверка существенно уменьшает возможность появления неожиданных некорректных решений.

Седьмая триада: дифференциальные уравнения, частные случаи

Математическая модель: системы, состоящие из n уравнений первого порядка или одно уравнение n-го порядка. Правые части непрерывны, ограниченны и удовлетворяют условиям Липшица.

Поставленная задача: найти численное решение при заданных начальных условиях.

Метод решения: использование стандартных компьютерных программ.

В этом частном случае решения корректны, зависят от коэффициентов и параметров непрерывно.

В то же время для более общей математической модели — системы, состоящей из n уравнений различных порядков (пример — система (93)–(94)), использование стандартных компьютерных программ может привести к совершенно неверным результатам вычислений.

Восьмая триада: интегральные уравнения

Математическая модель: интегральное уравнение Вольтерра первого рода, т. е. уравнение

$$\int_a^x K(x;s)\,y(s)\,ds = f(x). \tag{104}$$

Как известно, к математической модели в виде уравнения (102) сводятся многие важные задачи физики и техники.

Поставленная задача: решить уравнение (104), т. е. найти искомую функцию $y(s)$ по заданной правой части $f(x)$ и ядру $K(x;s)$.

Метод решения: переход путем эквивалентных преобразований от уравнения Вольтерра к более простому уравнению Фредгольма с последующим решением этого уравнения.

Профессор В. С. Сизиков впервые обнаружил, что в данной триаде получается некорректное решение, и причина некорректности кроется в том, что преобразование уравнения Вольтерра в уравнение Фредгольма является преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном. Это преобразование изменяет корректность решения.

Более подробно эта триада и методика получения надежного результата компьютерных вычислений при решении интегральных уравнений рассмотрены проф. В. С. Сизиковым в учебном пособии [42] на с. 145–147.

Первая диада: вещественные корни полиномов

Для ряда частных случаев корректность или некорректность решения не зависит от используемого метода. В этом случае достаточно сформулировать результат исследования для комплекса из двух элементов:

- математическая модель;
- поставленная при ее решении задача.

Этот комплекс (как было ранее предложено в [11]) будем называть диадой.

Первый пример диады:

- математическая модель — полином степени n с вещественными коэффициентами;
- поставленная задача — вычисление вещественных (и только вещественных!) корней полинома. Значимость этой задачи определяется тем, что для многих объектов исследования физический смысл имеют только вещественные корни.

Наличие одних комплексных корней говорит в данном случае о том, что поставленная задача не имеет решения.

Нетрудно проверить, что если вещественные корни не являются кратными, то решение корректно. Если же корни кратные, то решение не корректно и физического смысла чаще всего не имеет: при сколь угодно малых вариациях коэффициентов любая пара вещественных кратных корней может исчезнуть, корни станут комплексными.

Об этом простом и в общем известном обстоятельстве полезно напомнить потому, что даже в подробных руководствах по методике вычислений часто забывают упомянуть о некорректности решения в случае кратных корней.

Вторая диада: комплексные корни полиномов

Математическая модель та же, что и в первой диаде.

Поставленная задача — вычисление корней, вещественных или комплексных.

Решение этой задачи всегда корректно. При малых изменениях коэффициентов полинома положение его корней на комплексной плоскости изменяется мало. Проверку корректности решения для каждого отдельного полинома можно не производить.

Третья диада: задача на максимум и минимум

Математическая модель в данном случае может быть любой.

Поставленная задача — найти максимум или минимум.

Разнообразным задачам на максимумы и минимумы и методам их решения при обучении студентов уделяется большое внимание (и это правильно), но нередко забывают указать, что привычные формулировки решений часто не имеют физического смысла и на практике могут привести к конфузу.

Вот простой пример: надо найти минимум длины изгороди, способной огородить участок произвольной формы площадью S. Это известная "задача Дидоны", решение которой было известно еще в Древней Греции. Действительно, из всех замкнутых кривых заданной длины наибольшую площадь ограничивает окружность. Поэтому если требуется огородить участок площадью S, то лучше всего, если этот участок имеет форму круга и наименьшая длина изгороди в этом случае равна $L_{\min} = 2\sqrt{\pi}\sqrt{S}$. Если $S = 100$ м^2, то $L = 35{,}448$ м (если участок имеет форму квадрата, то $L_{\min} = 40$ м).

Однако это совсем не значит, что минимальный элемент — изгородь, длиной 35,448 метра — даст реальное решение поставленной задачи.

Дело в том, что исходные данные — в нашем случае $S = 100$ м^2 — как и почти во всех практических задачах, известны с ограниченной точностью. Фактически исходным является условие $S = (1+\varepsilon)\cdot 100$ м^2, где величина ε зависит от точности измерений площади; она может быть малой величиной, но почти никогда не выполняется точное равенство $\varepsilon = 0$. А если $\varepsilon > 0$, то длины $L_{\min} = 35,448$ м не хватит для замыкания изгороди и поставленная задача решена не будет.

Для получения реального решения надо изменить формулировку задачи, например, так: задан участок произвольной формы с площадью S, измеренной с точностью ε. Требуется найти минимальную длину изгороди, способной гарантированно огородить участок при тех или иных значениях ε. Решение дает формула:

$$L_{\text{гар}} = 2\sqrt{\pi}\sqrt{S}\sqrt{1+\varepsilon}. \tag{105}$$

Если $\varepsilon = 0,05$, то $L_{\text{гар}} = 36,167$ м и $L_{\text{гар}} - L_{\min} = 0,727$ м.

Рассмотренный простой пример типичен для очень многих задач на минимум (максимум). Поскольку исходные условия задачи известны почти всегда лишь с ограниченной точностью, то рассчитанный для фиксированных значений исходных данных минимальный элемент в реальных условиях оказывается недостаточным. Для того чтобы получить практически пригодное решение, надо учитывать возможные отклонения реальных исходных данных этих расчетных значений. Без учета этих возможных отклонений в задачах на максимум и минимум рассчитанный минимальный или максимальный элемент дает обычно некорректное решение при любом методе вычисления. Учет возможных вариаций исходных данных восстанавливает корректность решения и его надежность.

Иногда говорят: некорректную задачу можно решать с помощью методов регуляризации, изложенных, например, в [40]. Это — неточное высказывание. На самом деле, некорректные задачи при учете неизбежных на практике малых отклонений параметров от расчетных значений в принципе не могут иметь надежных решений. Регуляризация — это не метод решения. Это, фактически, замена некорректной задачи другой, корректной, но в чем-то близкой к исходной.

Иногда это прямая переформулировка исходной задачи, когда, например, вместо поиска минимальной длины изгороди, огораживающей участок площадью S, ищем длину, гарантирующую огораживание участка с учетом оценки максимально возможной погрешности ε в оценке его площади (формула (105)).

Часто регуляризация сводится к использованию дополнительной информации о решении. Но переход к задаче с дополнительной информацией — это тоже переход от одной задачи к другой, от некорректной задачи к корректной.

В заключение рассмотрим алгоритм решения одной из задач синтеза оптимального закона управления, которая в исходной своей постановке некорректна, но может быть сделана корректной за счет малого изменения исходных данных.

Синтез оптимального закона управления

Рассматривается объект управления, математической моделью которого является дифференциальное уравнение порядка n:

$$A(D)x = u + \varphi(t). \tag{106}$$

в котором $A(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \ldots + a_1 D + a_0$ — полином от оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$; x — регулируемая переменная, скаляр; u — управляющее воздействие, скаляр; $\varphi(t)$ — возмущающее воздействие, стационарная случайная функция времени, относительно которой известны экспериментальные данные об ее спектральной плотности мощности, т. е. о четной функции $S_\varphi(\omega)$ переменной ω, имеющей физический смысл частоты. Эти экспериментальные данные затем аппроксимируют рациональной дробью:

$$S_\varphi(\omega) = \frac{a_p \omega^{2p} + a_{p-1} \omega^{2p-2} + \ldots + a_1 \omega^2 + a_0}{b_q \omega^{2q} + b_{q-1} \omega^{2q-2} + \ldots + b_1 \omega^2 + b_0}. \qquad (107)$$

Степени p и q и коэффициенты a_i и b_i полиномов, входящих в дробь (107), подбирают, стремясь к тому, чтобы при умеренных p и q расхождение между экспериментальными данными и аналитической аппроксимацией (107) было не слишком большим. Регулятор, который, прежде всего, должен обеспечить устойчивость замкнутой системы, предполагаем линейным. Его математической моделью является уравнение:

$$W_1(D)x = W_2(D)u, \qquad (108)$$

где $W_1(D)$ и $W_2(D)$ — полиномы от оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$. Желательно найти такие степени и коэффициенты полиномов $W_1(D)$ и $W_2(D)$ в формуле (49), чтобы, помимо устойчивости замкнутой системы, регулятор обеспечивал наилучшее из возможных качество управления, которое оценивается по величине интеграла:

$$J = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(m^2 x^2 + u^2\right) dt. \qquad (109)$$

Если полиномы $W_1(D)$ и $W_2(D)$ вычислены, то задача технической реализации регулятора по его математической модели (108) затруднений не представляет. Математическая модель в виде уравнения (106) хорошо описывает многие важные объекты промышленности и транспорта.

Для вычисления полиномов $W_1(D)$ и $W_2(D)$ был разработан сравнительно простой алгоритм, подробно описанный в публикациях [35] и [61]. Основные этапы алгоритма:

1. В аналитической аппроксимации (107) производится замена: $j\omega = s$, после чего спектральная плотность факторизуется:

$$S_\gamma(s) = S_1(s) \cdot S_1(-s), \qquad (110)$$

т. е. разлагается на произведение двух симметричных множителей $S_1(s)$ и $S_1(-s)$, один из которых является функцией от s, а второй — от $-s$. Поскольку и числитель, и знаменатель дроби (107) являются четными функциями, то они имеют соответственно $2p$ и $2q$ симметричных корней: λ_1 и $-\lambda_1$; λ_2 и $-\lambda_2$, и т. д.

В множитель $S_1(s)$ войдут все корни с отрицательными вещественными частями, а в множитель $S_1(-s)$ — все корни с положительными вещественными частями. Таким образом, $S_1(s)$ вычисляется по формуле:

$$S_1(s) = \frac{\sqrt{a_p}\left(s-\lambda_{p_1}\right)\left(s-\lambda_{p_2}\right)\cdots\left(s-\lambda_{p_p}\right)}{\sqrt{b_q}\left(s-\lambda_{q_1}\right)\left(s-\lambda_{q_2}\right)\cdots\left(s-\lambda_{q_q}\right)}, \tag{111}$$

при этом и числитель, и знаменатель дроби (111) оказываются гурвицевыми полиномами.

2. На втором этапе алгоритма в уравнении (106) оператор дифференцирования D заменяется переменной s и производится факторизация полинома $A(s)A(-s)+m^2$:

$$A(s)A(-s)+m^2 = G(s)G(-s), \tag{112}$$

при этом $G(s)$ будет гурвицевым полиномом, а $G(-s)$ — негурвицевым.

3. На третьем этапе выполняется разложение (сепарация):

$$\frac{A(-s)}{G(-s)}S_1(s) = M_0 + M_+ + M_-, \tag{113}$$

где M_0 — целый полином; M_+ — правильная дробь с полюсами в левой полуплоскости комплексного переменного s; а M_- — правильная дробь с полюсами в правой полуплоскости.

4. На четвертом этапе строится функция

$$\frac{\Phi_1(s)}{\Phi_2(s)} = \frac{M_0+M_+}{G(s)S_1(s)}, \tag{114}$$

с помощью которой уже непосредственно находятся полиномы $W_1(D)$ и $W_2(D)$ в оптимальном регуляторе (108):

$$\frac{W_1(D)}{W_2(D)} = A(D) - \frac{\Phi_2(D)}{\Phi_1(D)}. \tag{115}$$

Аналогичный, но немного более сложный алгоритм был разработан для объектов управления вида

$$A(D)x = B(D)u + \varphi(t), \tag{116}$$

где $B(D) = b_m D^m + b_{m-1} D^{m-1} + \ldots + b_1 D + b_0$.

Разработанные алгоритмы обеспечивали устойчивость замкнутой системы, но быстро обнаружилось, что эта устойчивость довольно часто нарушалась даже при сколь угодно малых вариациях параметров, что привело к ряду аварий на первых этапах применения оптимальных систем в технике в 60-х годах XX века. Доверие к методам оптимизации было тогда подорвано, их применение застопорилось. Для успешного использования оптимальных регуляторов необходимо было решить две задачи:

- найти критерий, позволяющий выявить, для каких объектов управления и возмущающих воздействий происходит потеря устойчивости при вариациях параметров (фактически, как это выяснилось уже позже, нужно было разработать метод выявления "особых" объектов в данной области расчетов);
- найти, какие изменения необходимо внести в алгоритм синтеза оптимальных регуляторов для того, чтобы при вариациях параметров потери устойчивости не происходило.

Обе задачи были успешно решены, и их решение опубликовано в [61] и [35]. Оказалось, что важнейшую роль играет неравенство

$$p \geq m + q - 1, \tag{117}$$

где p и q берутся из формулы (107) для аналитической аппроксимации спектральной плотности мощности возмущающего воздействия $\varphi(t)$, а m — это степень полинома $B(D)$ в математической модели объекта управления (116). Если неравенство (117) выполнено, то система управления параметрически устойчива, если оно не выполнено, то система управления может потерять устойчивость при сколь угодно малых вариациях параметров объекта управления или регулятора. За неравенством (117) постепенно закрепилось название "неравенство Ю. П. Петрова" или "критерий Ю. П. Петрова". Оно широко используется для проверки параметрической устойчивости оптимальных систем управления.

Приведем простой пример, ранее рассмотренный в [35].

Математическая модель объекта управления имеет вид:

$$4Dx = (D+1)u + \varphi(t), \tag{118}$$

коэффициент m^2 в критерии качества (109) равен $m^2 = 9$, спектральная плотность мощности возмущающего воздействия аппроксимирована формулой:

$$S_\varphi(\omega) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1+\omega^2}. \tag{119}$$

Выполнив вычисления, необходимые для синтеза оптимального регулятора, убедимся, что его математическая модель имеет вид:

$$12(D+4)x=(3D-5)u. \tag{120}$$

Замкнув регулятором (120) объект управления (118), найдем уравнение замкнутой системы:

$$4(20D+12)x=(3D-5)\varphi(t), \tag{121}$$

подтверждающее, что замкнутая система устойчива. Регулятор (120) обеспечивает критерию качества (109) значение $J_{\min}=0,4336$ — наименьшее из всех возможных. Однако критерий Ю. П. Петрова (117) для объекта управления (118) и спектральной плотности мощности возмущающего воздействия (119) не выполняется. В данном случае, степень полинома $B(D)$ равна единице, поэтому $m=1$, а из формулы (119) следует, что $p=0$, $q=1$ и неравенство (117) не выполнено. Это означает, что устойчивость может исчезнуть при сколь угодно малых вариациях параметров.

Действительно, если изменится даже всего один из коэффициентов объекта управления, и его математическая модель примет вид

$$4D(1+\varepsilon)x=(D+1)u+\varphi(t), \tag{122}$$

то, замкнув объект (122) регулятором (120), убедимся, что характеристический полином замкнутой системы принял вид

$$-3\varepsilon\lambda^2+(20+5\varepsilon)\lambda+12. \tag{123}$$

Уже при сколь угодно малых $\varepsilon>0$ он перестает быть гурвицевым, и устойчивость теряется.

Для обеспечения параметрической устойчивости в монографии [35] было предложено изменять аналитическую аппроксимацию спектра плотности мощности возмущающего воздействия, используемую при расчете оптимального регулятора, причем изменять так, чтобы неравенство Ю. П. Петрова (117) оказалось выполненным. В рассматриваемом примере для выполнения неравенства (117) достаточно перейти от $p=0$ к $p=1$, т. е. заменить аппроксимацию (119) на

$$S_\varphi(\omega)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1+k^2\omega^2}{1+\omega^2}, \tag{124}$$

которая при умеренных k мало отличается от аппроксимации (119).

Синтезируя оптимальный регулятор теперь уже для объекта управления (122) и спектральной плотности (124), получаем регулятор

$$12\left[(1+3k)D+4\right]x=\left[(3-11k)D-(5+3k)\right]u. \tag{125}$$

(Сравните с регулятором (120)!) А характеристический полином замкнутой системы превращается в полином

$$\left(20k-3\varepsilon+11\varepsilon k\right)\lambda^2+\left(20+12k+5\varepsilon+3\varepsilon k\right)\lambda+12. \qquad (126)$$

(Сравните с полиномом (123)!) Анализируя полином (126), убеждаемся, что он остается гурвицевым не только при сколь угодно малых, но и при конечных значениях ε, тем больших, чем больше k. Так, уже при $k=0{,}01$ устойчивость сохранится при всех $|\varepsilon|\le 0{,}69$, а при $k=0{,}1$ — при $|\varepsilon|\le 1{,}05$.

Вместе с тем, удовлетворение дополнительного требования к системе — ее параметрической устойчивости — не обходится без некоторой "жертвы" в величине критерия качества (109). Так, при $k=0$ имеем, как уже говорилось, $J=0{,}4336$, а при $k=0{,}1$ будет $J=0{,}4374$ или на 0,88% больше. Конечно, такое небольшое увеличение критерия качества практически неощутимо.

Таким образом, проблема обеспечения надежности вычислений при синтезе оптимальных систем управления получила полное и исчерпывающее решение: найден простой и легко проверяемый критерий возможной некорректности задачи синтеза — критерий Ю. П. Петрова — в виде неравенства (117).

Предложен и обоснован метод подхода к некорректным задачам синтеза — изменение аналитической аппроксимации экспериментальных данных о спектральной плотности мощности возмущающего воздействия, — а именно такое изменение, при котором неравенство (117) начинает выполняться. Как показывает рассмотренный пример, при таком подходе исходная некорректная задача, не имеющая практического смысла, заменяется последовательностью корректных задач, которые в пределе, при $k\to 0$, перестают быть корректными и совпадают с исходной некорректной задачей.

Обеспечение надежности расчета и проектирования оптимальных систем управления позволило успешно решить ряд практических задач оптимизации, улучшения качества функционирования различных технических объектов. Об этом рассказано в публикациях [35, 61, 62].

Отметим сразу, что пока еще не для всех вычислительных алгоритмов, ненадежность которых обнаруживалась при исследовании открытых в СПбГУ новых свойств эквивалентных преобразований, удалось исчерпывающе решить обе задачи:

- выявление возможной некорректности решений (при этом желательно найти общий метод выявления возможной некорректности);
- обеспечение надежности результатов вычислений с учетом возможных вариаций коэффициентов и параметров.

§ 33. Дополнительные примеры

В этом параграфе будут рассмотрены дополнительные примеры, позволяющие лучше разобраться в методах получения надежных решений, удовлетворяющих стандартам "математики-2", т. е. учитывающих неизбежные вариации параметров объекта и коэффициентов его математической модели, их неизбежные малые отклонения от расчетных значений.

Пример 2. Математическая модель особого объекта

Найти общее решение (семейство решений) системы уравнений:

$$\left(D^2+2D+1\right)x_1+(D+1)x_2=0; \tag{127}$$

$$Dx_1+x_2=0. \tag{128}$$

Для системы (127)–(128) можно вычислить характеристический полином:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+2\lambda+1 & \lambda+1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}=\lambda+1, \tag{129}$$

имеющий единственный корень $\lambda_1=-1$.

Из (129) следует, что общее решение имеет вид:

$$x_1=C_0e^{-t}. \tag{130}$$

Можно непосредственно, подставив в (127) значение $x_2=-Dx_1$ из уравнения (126), сразу получить уравнение

$$(D+1)x_1=0, \tag{131}$$

общим решением которого снова будет семейство функций (130), зависящих от одной постоянной интегрирования C_0. Оба метода решения приводят к одному и тому же результату.

Однако решение (130) не будет корректным. Действительно, если например, коэффициент при Dx_2 в уравнении (127) вместо значения 1 примет значение $(1+\varepsilon)$, то характеристический полином будет равен определителю:

$$\begin{vmatrix} \lambda^2+2\lambda+1 & (1+\varepsilon)\lambda+1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}=-\varepsilon\lambda^2+(1-\varepsilon)\lambda+1 \tag{132}$$

и будет иметь два корня — λ_1 и λ_2, причем при малых $\varepsilon>0$ один из корней оказывается большим положительным, а второй — близким к -1. Так, если $\varepsilon=0{,}01$, то с точностью до четвертого знака после запятой будет $\lambda_1 = +100$, $\lambda_2 = -1$ и общее решение принимает вид:

$$x_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{100t}. \tag{133}$$

Вообще, с точностью до членов порядка ε^2, общее решение будет иметь вид:

$$x_1 = C_1 e^{-t} + C_2 e^{\frac{1}{\varepsilon}t}. \tag{134}$$

В данном случае все просто: система (127)–(128) является вырожденной. Ее характеристический полином должен в общем случае иметь вторую степень, но при конкретных значениях коэффициентов системы со второй степенью λ взаимно сокращаются, и характеристический полином становится полиномом первой степени. Понятно, что такое понижение порядка происходит лишь при коэффициентах, в точности равных расчетным. Поэтому, несмотря на простоту системы, ее решение (130) будет некорректным, и практического смысла иметь не будет. Уже при неизбежных на практике сколь угодно малых отклонениях коэффициентов системы от расчетных значений решение может измениться коренным образом — перейти, например, в решение (134), которое даже при самых малых ε не имеет ничего общего с решением (130).

Математическая модель (127)–(128) описывает "особый" объект. Для правильного подхода к отысканию и исследованию решения надо проверить вырождение системы. Система (127)–(128) является вырожденной, ее решение практического смысла не имеет. Традиционные методы вычисления решения, не предполагающие проверки вырожденности или невырожденности системы, не обеспечат правильного ответа на вопрос о поведении объекта, описываемого системой (127)–(128).

Разумеется, в такой простой системе, как (127)–(128), все ясно, и исследователь ошибки наверняка не сделает. Этот пример приведен для того, чтобы показать: даже в самых простых системах возможно изменение корректности решения при самых простых эквивалентных преобразованиях. Действительно, решения системы (127)–(128) некорректны, а после эквивалентного преобразования — замены в уравнении (127) величины x_2 равной ей величиной Dx_1 из уравнения (128) — получается уравнение (131), решения которого корректны. Исходная некорректность в преобразованной математической модели исчезает, поэтому работник, производящий вычисления, может не заметить некорректности, может не заметить, что он столкнулся с опасным "особым" объектом. Конечно, относительно такой простой системы, как (127)–(128), никто ошибок не сделает, но в сложных системах, состоящих из многих уравнений, ошибку допустить очень легко, и подобные ошибки часто происходили.

Пример 3. Проверка устойчивости и ее сохранения при вариациях коэффициентов

Для той же системы уравнений (127)–(128) требуется проверить устойчивость и сохранение устойчивости при вариациях коэффициентов исследуемой системы.

Традиционный метод исследования — исследование корней характеристического полинома (129) — даст ответ: система устойчива и сохраняет устойчивость не только при малых, но и при больших вариациях коэффициентов характеристического полинома. Этот ответ, разумеется, неверен, но достоверность результата исследования легко восстанавливается с помощью рекомендованной ранее дополнительной проверки — не является ли исследуемая система вырожденной. Эта простая проверка восстановит надежность и достоверность результатов исследования. Правильный ответ с учетом проверки на возможное вырождение: система (127)–(128) параметрической устойчивостью не обладает. Система может стать неустойчивой при сколь угодно малых вариациях коэффициентов.

Пример 4. Проверка устойчивости невырожденной системы

Пусть задано: проверить устойчивость и параметрическую устойчивость системы уравнений

$$\left(D^3+4D^2+5D+2\right)x_1=\left(D^2+2D+1\right)x_2; \tag{135}$$

$$\left(D^2+4D+5\right)x_1=\left(0{,}96D+1\right)x_2. \tag{136}$$

Традиционным методом проверки устойчивости является вычисление характеристического полинома системы и проверка положительности диагональных определителей матрицы Гурвица.

Для системы (135)–(136) характеристический полином равен

$$\begin{vmatrix} \lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2 & -\left(\lambda^2+2\lambda+1\right) \\ \lambda^2+4\lambda+5 & -\left(0{,}96\lambda+1\right) \end{vmatrix}=0{,}04\lambda^4+1{,}16\lambda^3+5{,}2\lambda^2+7{,}08\lambda+3. \tag{137}$$

Для полинома (137) матрица Гурвица принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1{,}16 & 7{,}08 & 0 & 0 \\ 0{,}04 & 5{,}2 & 3 & 0 \\ 0 & 1{,}16 & 7{,}08 & 0 \\ 0 & 0{,}04 & 5{,}2 & 3 \end{pmatrix}. \tag{138}$$

Вычисляя диагональные определители:

$$\det_1=3;\ \det_2=\begin{vmatrix} 7{,}08 & 0 \\ 5{,}2 & 3 \end{vmatrix}=21{,}24;\ \det_3=\begin{vmatrix} 5{,}2 & 3 & 0 \\ 1{,}16 & 7{,}08 & 0 \\ 0{,}04 & 5{,}2 & 3 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 5{,}2 & 3 \\ 1{,}16 & 7{,}08 \end{vmatrix}=97{,}008;$$

$$\det_4=\begin{vmatrix} 1{,}16 & 7{,}08 & 0 & 0 \\ 0{,}04 & 5{,}2 & 3 & 0 \\ 0 & 1{,}16 & 7{,}08 & 0 \\ 0 & 0{,}04 & 5{,}2 & 3 \end{vmatrix}=106{,}5135,$$

убеждаемся, что все они положительны, поэтому система (135)–(136) — устойчива.

Для проверки параметрической устойчивости традиционно проверяют знак диагональных определителей матрицы Гурвица, составленной с учетом возможных вариаций коэффициентов полинома (137), т. е. проверяют знаки диагональных определителей матрицы

$$\begin{pmatrix} 1{,}16(1\pm\varepsilon_2) & 7{,}08(1\pm\varepsilon_4) & 0 & 0 \\ 0{,}04(1\pm\varepsilon_1) & 5{,}2(1\pm\varepsilon_3) & 3 & 0 \\ 0 & 1{,}16(1\pm\varepsilon_2) & 7{,}08(1\pm\varepsilon_4) & 0 \\ 0 & 0{,}04(1\pm\varepsilon_1) & 5{,}2(1\pm\varepsilon_3) & 3(1\pm\varepsilon_5) \end{pmatrix}. \tag{139}$$

В матрице (139) индекс вариации ε соответствует порядковому номеру коэффициента в полиноме (137), а величины вариаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_5$, вообще говоря, различны и требуют отдельного исследования. Обычно используют приближенную методику, считая, что все модули вариаций ограничены сверху одним числом: $|\varepsilon_i| \le m$.

Возможен и другой подход к проверке устойчивости и параметрической устойчивости: исследуемую систему приводят к нормальной форме, к системе n уравнений первого порядка, после чего используют стандартные программы для вычисления корней характеристического полинома — они будут совпадать с собственными значениями матрицы коэффициентов.

Уравнение (135) похоже на уравнение электропривода (72), рассмотренного в § 8 и соответствует значениям $m = 1$, $k_0 = 2$ в равенстве (72). В нормальной форме это уравнение будет иметь вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -2x_1 + x_2 + x_3; \\ \dot{x}_3 &= x_4; \\ \dot{x}_4 &= -x_3 - 2x_4. \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

Уравнение (136) по своей структуре соответствует уравнению регулятора (формула (73) из § 8), но с измененными коэффициентами. При использованных в § 8 значениях $m = 1$; $k_1 = 1$, $k_2 = 2$; $k_3 = 1$ уравнение регулятора (73) из § 8 принимало бы вид

$$\left(D^2 + 4D + 5\right)x_1 = (D+1)x_2. \tag{141}$$

Но в уравнении регулятора (136) коэффициент 1 при Dx_2 заменен на 0,96, что делает систему (135)–(136) невырожденной. Поэтому с учетом равенств, определяющих новые переменные x_3 и x_4:

$$x_3 = \dot{x}_1 + 2x_1 - x_2; \tag{142}$$

$$x_4 = \dot{x}_3, \tag{143}$$

уравнение (134) принимает вид:

$$\left[\left(D^2 + 2D\right)x_1 - Dx_2\right] + \left[(2D+4)x_1 - 2x_2\right] + 0{,}04\dot{x}_2 + x_2 + x_1 = 0. \tag{144}$$

С учетом равенств (142) и (143) в первой квадратной скобке из равенства (144) узнаем переменную x_4, второй квадратной скобке соответствует $2x_3$. Поэтому уравнение (144) можно записать в виде:

$$0,04\dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4. \tag{145}$$

В целом система уравнений (135)–(136) приводится к следующей нормальной форме:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 + x_3;\\ &\dot{x}_2 = -25x_1 - 25x_2 - 50x_3 - 25x_4;\\ &\dot{x}_3 = x_4;\\ &\dot{x}_4 = -x_3 - 2x_4. \end{aligned}\right\} \tag{146}$$

Нормальная форма (146), состоящая из четырех уравнений первого порядка, доказывает, что исходная система (135)–(136) не является вырожденной. Вычисляя характеристический полином системы в нормальной форме (146), равный определителю:

$$\begin{vmatrix} \lambda+2 & -1 & -1 & 0\\ \lambda+25 & 25 & 50 & 25\\ 0 & 0 & \lambda & -1\\ 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = 0,04\lambda^4 + 1,16\lambda^3 + 5,2\lambda^2 + 7,08\lambda + 3, \tag{147}$$

убеждаемся, что он совпадает с полиномом (137). Это еще раз подтверждает, что преобразование системы (135)–(137) в систему (146) было эквивалентным (в классическом смысле) преобразованием. Об устойчивости и параметрической устойчивости системы (146) судят обычно по коэффициентам характеристического полинома. Удобно пользоваться условием устойчивости для полинома четвертой степени

$$a_4\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0, \tag{148}$$

которое приводится в учебниках по автоматическому управлению и формулируется так: необходимым и достаточным условием устойчивости системы, имеющей характеристический полином (148), является положительность всех его коэффициентов и выполнение неравенства

$$\Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_2^2a_4 - a_0a_3^2 > 0. \tag{149}$$

Для системы (146) и характеристического полинома (147) будет

$$\Delta_3 = 7,08\cdot5,2\cdot1,16 - 5,2^2\cdot0,04 - 3\cdot1,16^2 = 47 - 1,08 - 4,04 = 41,88 > 0. \tag{150}$$

Для полинома (147) положительные члены в неравенстве (149) много больше отрицательных. Это говорит о том, что система (146) устойчива и сохранит устойчивость при достаточно малых отклонениях коэффициентов от расчетных значений. Для того чтобы более точно определить, при каких "малых" вариациях система сохранит устойчивость, примем, что вариации всех коэффициентов полинома (147) не превышают по модулю числа m: $|\varepsilon_i| \le m$, а знак их может быть любым. Наиболее опасным в отношении возможной потери устойчивости сочетанием знаков вариаций коэффициентов в неравенстве (150) будет следующее: у коэффициентов 7,08; 5,2; 1,16 вариации отрицательны, а у коэффициентов 0,04 и 3 — положительны. С учетом этих вариаций имеем:

$$\Delta_3 = 7{,}08\cdot 5{,}2\cdot 1{,}16(1-m)^3 - 5{,}2^2(1-m)^2\cdot 0{,}04(1+m) - \\ -3(1-m)^2\cdot 1{,}16^2(1-m)^2. \qquad (151)$$

Даже при $m = 0{,}5$, т. е. когда коэффициенты 7,08; 5,2; 1,16 уменьшатся вдвое, будет $\Delta_3 = 2{,}57$ и устойчивость сохранится.

К тому же результату придем и при использовании методики, основанной на результатах В. Л. Харитонова [63]. Они не использовались в данном примере потому, что для систем четвертого порядка исследование влияния вариаций коэффициентов характеристического полинома на устойчивость проще вести непосредственно, не прибегая к результатам, опубликованным в [63], которые полезны при $n > 4$.

Таким образом, традиционные методы исследования, не учитывающие возможного изменения корректности и обусловленности при эквивалентных преобразованиях, дают ответ: система (135)–(136) устойчива и параметрически устойчива. Она сохраняет устойчивость не только при малых, но и при больших (более чем на 50%) отклонениях коэффициентов характеристического полинома от расчетных значений.

Этот результат не верен. Исследуя непосредственно систему (135)–(136) без преобразования ее к нормальной форме и вычисляя старший член характеристического полинома системы (135)–(136) с учетом возможных вариаций коэффициентов (точками обозначим члены низших степеней)

$$\begin{vmatrix} (1+\varepsilon)\lambda^3 + \ldots & -\left[(1-\varepsilon)\lambda^2 + \ldots\right] \\ (1-\varepsilon)\lambda^2 + \ldots & -\left[0{,}96(1+\varepsilon) + \ldots\right] \end{vmatrix} = \left[(1-\varepsilon)^2 - 0{,}96(1+\varepsilon)^2\right]\lambda^4 + \ldots, \qquad (152)$$

убедимся, что уже при $\varepsilon \geq 0{,}011$ старший член характеристического полинома делается отрицательным, нарушается необходимое условие Стодолы, устойчивость теряется.

Таким образом, система (135)–(136) обладает очень малым запасом устойчивости: устойчивость теряется при изменениях некоторых коэффициентов всего на 1,1%. Эквивалентное преобразование системы к нормальной форме завышает истинные запасы устойчивости в 50 раз.

Если не сделать простой дополнительной проверки — проверки возможного изменения знака старшего члена характеристического полинома при вариациях коэффициентов исходных уравнений, то результаты проверки устойчивости по коэффициентам характеристического полинома или по матрице коэффициентов нормальной формы могут оказаться совершенно ненадежными и не достоверными. По расчету будет казаться, что все хорошо, запасы устойчивости достаточны и поэтому проектируемый объект будет много лет работать хорошо и надежно. А на самом деле спроектированный объект будет хорошо работать только первое время, затем малые запасы устойчивости быстро исчерпаются, и в самый неожиданный момент времени произойдет авария, а то и катастрофа. Подобные аварии и катастрофы, порожденные недостаточной разработанностью теории эквивалентных преобразований, неоднократно происходили в прошлом и происходят, к сожалению, до сих пор, хотя их легко можно предотвратить с помощью совсем несложных дополнительных проверок при расчете. Эти дополнительные проверки восстанавливают надежность компьютерных вычислений (подобные примеры ранее приводились в [11]).

Пример 5. Вычисление решений системы дифференциальных уравнений

Задана уже рассмотренная в предыдущем примере система уравнений (135)–(136). Требуется найти ее решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$, удовлетворяющие начальным условиям. Традиционный метод решения: введение новых переменных x_3 и x_4, определяемых формулами (142) и (143). При этом система (135)–(136) приводится к нормальной форме (146), для нахождения численного решения которой достаточно использовать стандартные компьютерные программы.

Однако традиционный метод не приведет к надежному результату: как уже было показано при рассмотрении примера 4, при изменениях коэффициентов системы всего на 1,1% в характеристическом полиноме могут произойти коренные изменения: его старший член сделается из положительного отрицательным и малым по абсолютной величине. А это означает, что в характеристическом полиноме появится большой положительный корень λ_4, а в общем решении системы (135)–(136)

$$x_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + C_3 e^{\lambda_3 t} + C_4 e^{\lambda_4 t} \qquad (153)$$

возникнет стремительно растущий четвертый член. Таким образом, при $\varepsilon \geq 0{,}011$ может произойти коренное изменение решения. Решение, которое может коренным образом измениться при изменении исходных данных всего на 1,1%, является совершенно ненадежным. Использование такого решения для каких-либо практических целей очень опасно, может привести к авариям и катастрофам. А самое неприятное заключается в том, что этой опасности мы не увидим после преобразования системы (135)–(136) в нормальную форму, в форму системы (146). У системы (146) решения зависят от коэффициентов непрерывно (согласно известной теореме теории дифференциальных уравнений, которая для систем из n уравнений первого порядка верна). При изменениях любых коэффициентов системы (146) на $\pm 2\%$ решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ изменятся (как легко проверить) очень мало. В то же время исходная система (135)–(136) является еще одним примером системы, в которой этой непрерывной зависимости нет.

Все это удобно проследить для случая, когда в системе (135)–(136) изменяется один коэффициент, она принимает вид:

$$\left.\begin{aligned}\left(D^3+4D^2+5D+2\right)x_1&=\left(D^2+2D+1\right)x_2;\\ \left(D^2+4D+5\right)x_1&=\left[(1+\varepsilon)\cdot 0{,}96D-1\right]x_2\end{aligned}\right\} \tag{154}$$

и имеет характеристический полином

$$\begin{vmatrix}\lambda^3+4\lambda^2+5\lambda+2 & -\left(\lambda^2+2\lambda+1\right)\\ \lambda^2+4\lambda+5 & -\left[(1+\varepsilon)\cdot 0{,}96D+1\right]\end{vmatrix}=$$

$$=\left[1-0{,}96(1+\varepsilon)\right]\lambda^4+\left[5-3{,}84(1+\varepsilon)\right]\lambda^3+$$

$$+\left[10-4{,}8(1+\varepsilon)\right]\lambda^2+\left[9-1{,}92(1+\varepsilon)\right]\lambda+3. \tag{155}$$

Теперь сразу видно, что как только величина ε превысит значение $\varepsilon=0{,}04166$, старший член полинома (155) изменит знак, четвертый его корень λ_4 из отрицательного станет большим положительным, все решение резко, разрывно, изменится.

Для иллюстрации на рис. 12 показана для примера зависимость величины x_1 при $t=1$ от ε для случая, когда постоянные интегрирования в решении (153) равны единице ($C_1=C_2=C_3=C_4=1$).

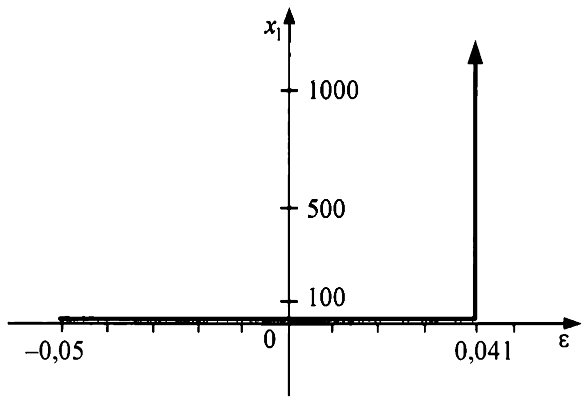

Рис. 12

Сразу видно, что при $\varepsilon=0{,}04166$ решение имеет разрыв, а значение $x_1(1)$ при $\varepsilon>0{,}04166$ не помещается на графике (при $\varepsilon=0{,}4167$ будет $x_1(1)>10^5$).

Для обеспечения надежности и достоверности результатов расчета необходимо перед преобразованием системы уравнений в нормальную форму проверить, не является ли какой-либо из коэффициентов характеристического полинома малой разностью больших коэффициентов исходной системы и не изменит ли он знак при возможных изменениях этих коэффициентов.

На примере системы (135)–(136) мы еще раз убеждаемся, что:

- существуют системы дифференциальных уравнений, не имеющие непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров. В то же время после приведения системы к нормальной форме с помощью эквивалентных преобразований те же самые решения приобретают непрерывную зависимость от коэффициентов нормальной формы (146), и это может ввести в заблуждение;
- существуют системы дифференциальных уравнений, для которых традиционный метод вычисления решения через преобразование в нормальную форму и использование стандартных программ может привести к ошибочным заключениям о поведении объекта, математической моделью которого является исследуемая система. В частности, может оказаться ошибочным заключение о величине запасов устойчивости исследуемой системы. Эти ошибочные заключения могут стать (как уже не раз становились) причиной аварий и даже катастроф.

Пример 6. Дополнительные проверки, восстанавливающие надежность и достоверность компьютерных вычислений

Рассматривается еще раз система дифференциальных уравнений (135)–(136). На ее примере проиллюстрируем дополнительные проверки, позволяющие повысить обоснованность суждений о свойствах решений системы.

Первая (и простейшая) проверка — не является ли система вырожденной. Для этой проверки достаточно вычислить характеристической полином (137) и убедиться, что его степень равна порядку системы (135)–(136). Система невырожденная, поэтому заключение об устойчивости будет достоверным и сохранит силу, по крайней мере, при сколь угодно малых вариациях коэффициентов. Надежность и достоверность заключения при малых конечных вариациях первая проверка не гарантирует.

Вторая проверка. Наличие в полиноме (137) коэффициента 0,04 при старшем члене, который более чем на порядок меньше наименьшего из остальных коэффициентов, требует проверить, не оказался ли он малой разностью немалых величин и не изменит ли он знак при тех величинах вариаций коэффициентов, которые неизбежны в ходе эксплуатации.

Для проведения этой проверки достаточно при вычислении характеристического полинома (137) выписать только те составляющие, которые влияют на величину коэффициента при старшем члене, т. е. достаточно выписать определитель

$$\det = \begin{vmatrix} (1\pm\varepsilon_1)\lambda^3 & -(1\pm\varepsilon_2)\lambda^2 \\ (1\pm\varepsilon_3)\lambda^2 & -0{,}96(1\pm\varepsilon_4)\lambda \end{vmatrix}. \tag{156}$$

Далее достаточно найти наиболее неблагоприятное сочетание знаков вариаций $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ (здесь можно использовать результаты, полученные в *первой части* книги; для определителя (156) наиболее неблагоприятно, когда ε_1 и ε_4 — положительны, а ε_2 и ε_3 — отрицательны), а затем вычислить, при каком значении $\varepsilon \geq |\varepsilon_i|$

и наиболее неблагоприятном сочетании знаков ε_i определитель (156) станет отрицательным. Для этого достаточно решить уравнение

$$(1-\varepsilon)^2 = 0{,}96(1+\varepsilon)^2.$$

Решив его, найдем $\varepsilon = 0{,}011$. Отсюда следует (как уже было показано в примере 5), что вариации коэффициентов системы, превышающие 1,1% от номинальных значений, могут привести к коренным изменениям решений. Поскольку подобные величины вариаций коэффициентов в ходе эксплуатации вполне возможны, то первоначальное суждение об устойчивости системы дополнительной проверки не выдерживает. После дополнительной проверки следует сделать заключение о малых запасах устойчивости. В ходе эксплуатации устойчивость системы может утратиться в любой заранее непредсказуемый момент времени.

Пример показывает, что дополнительная проверка, существенно повышающая достоверность результатов расчета, не является сложной и может быть сведена к вычислению простого определителя (156).

Пример 7. Возможное изменение знака коэффициентов при младших членах характеристического полинома

Задана система уравнений:

$$(D+1)x_1 + (D+3{,}98)x_2 = 0; \tag{157}$$

$$Dx_1 + 2Dx_2 + 2x_2 = 0. \tag{158}$$

Требуется проверить устойчивость и сохранение устойчивости при возможных вариациях коэффициентов этой системы.

С помощью эквивалентных преобразований, выразив x_2 через x_1 с помощью уравнения (158) и подставив в уравнение (157), получим эквивалентное системе (157)–(158) в отношении переменной x_1 следующее уравнение второго порядка:

$$\left(D^2 + 0{,}02D + 2\right)x_1 = 0 \tag{159}$$

(говорящее о том, что исходная система (157)–(158) не вырождена) с характеристическим полиномом

$$\lambda^2 + 0{,}02\lambda + 2. \tag{160}$$

Для переменной x_2 получаем такое же уравнение:

$$\left(D^2 + 0{,}02D + 2\right)x_2 = 0. \tag{161}$$

Исследуя характеристический полином (160) при вариациях его коэффициентов, т. е. исследуя полином

$$(1\pm\varepsilon_1)\lambda^2 + 0{,}02(1\pm\varepsilon_2)\lambda + (1\pm\varepsilon_3)\cdot 2, \tag{162}$$

нетрудно установить, что полином (162) остается гурвицевым не только при сколь угодно малых вариациях своих коэффициентов, но и при больших вариациях — вплоть до $|\varepsilon_i| < 1$.

Однако это совсем не означает сохранения устойчивости исходной системы (157)–(158) при малых вариациях ее коэффициентов, поскольку дополнительная проверка показывает, что коэффициент при первой степени λ в полиноме (160) оказался разностью чисел, каждое из которых больше его на два порядка. Поэтому если коэффициенты исходной системы изменятся всего на $|\varepsilon_i| \geq 0{,}0025$, то коэффициент при λ в характеристическом полиноме (160) может стать отрицательным и система потеряет устойчивость.

Заключение о параметрической устойчивости системы (157)–(158), полученное, например, на основе известной методики исследования характеристического полинома, предложенной в [63], не будет надежным и достоверным. Дополнительная проверка показывает, что устойчивость сохранится лишь при $|\varepsilon_i| < 0{,}25\%$. Для большинства практических приложений система с таким малым запасом устойчивости равнозначна неустойчивой системе. К правильному заключению о запасах устойчивости можно прийти только на основе исходных уравнений (157)–(158). Эквивалентное преобразование системы (157)–(158) в эквивалентную ей систему уравнений (159)–(161), не изменяя самих решений как таковых, сильно изменяет величину запасов устойчивости. Реально система (157)–(158) теряет устойчивость при изменениях коэффициентов всего на 0,25%, а исследование преобразованной системы (159)–(161) говорит о больших запасах устойчивости, что не соответствует реальности.

Заметим, что если при вариациях коэффициентов исходной системы уравнений изменяется (делается отрицательным) любой из коэффициентов характеристического полинома, то это одинаково говорит о потере устойчивости решений. Однако процессы, происходящие после потери устойчивости, зависят от того, какой из членов характеристического полинома изменил знак. Если изменил знак, стал отрицательным и малым по абсолютной величине старший член характеристического полинома, то решения системы начинают очень быстро, стремительно возрастать (по абсолютной величине). Мы уже видели это на примере системы (154), а ранее об этом говорилось в § 3 при исследовании системы уравнений (27)–(28). Если же изменяет знак любой из младших коэффициентов в характеристическом полиноме и делается малым отрицательным, то решения тоже начинают неограниченно возрастать по абсолютной величине, но возрастают медленно. Так, например, решения уравнения

$$\left(D^2 - \varepsilon D + 1\right)x = 0 \tag{163}$$

с характеристическим полиномом

$$\lambda^2 - \varepsilon\lambda + 1 \tag{164}$$

имеют вид

$$x(t)=e^{\frac{\varepsilon}{2}t}\left(C_1\sin\sqrt{\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)}t+C_2\cos\sqrt{\left(1-\frac{\varepsilon^2}{4}\right)}t\right), \qquad (165)$$

и при малых ε они возрастают с течением времени не ограниченно, но очень медленно.

Пример 8. Система из трех дифференциальных уравнений с тремя переменными

Задана система из трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned}&\left(D^3+2{,}15D^2+1{,}23D+0{,}98\right)x_1+\left(1{,}05D^2+0{,}95D+1{,}12\right)x_2+\\&\quad+\left(1{,}08D^2+2{,}7D+3{,}23\right)x_3=0;\\&\left(1{,}07D^2+2{,}12D+3{,}75\right)x_1+\left(1{,}09D+2{,}98\right)x_2+\left(2{,}5D+2{,}08\right)x_3=0;\\&\left(1{,}16D+3{,}63\right)x_1+1{,}18x_2+1{,}15x_3=0.\end{aligned}\right\} \qquad (166)$$

Требуется проверить устойчивость этой системы и сохранение устойчивости при вариациях коэффициентов.

Традиционный путь — вычисляется характеристический полином

$$\text{Х.П.}=\begin{vmatrix}\lambda^3+2{,}15\lambda^2+1{,}23\lambda+0{,}98 & 1{,}05\lambda^2+0{,}95\lambda+1{,}12 & 1{,}08\lambda^2+2{,}7\lambda+3{,}23\\ 1{,}07\lambda^2+2{,}12\lambda+3{,}75 & 1{,}09\lambda+2{,}98 & 2{,}5\lambda+2{,}08\\ 1{,}16\lambda+3{,}63 & 1{,}18 & 1{,}15\end{vmatrix} \qquad (167)$$

и затем его корни. Если у всех корней вещественные части отрицательны, то система устойчива.

Однако полезнее предварительно проверить, не окажется ли коэффициент при старшем члене характеристического полинома нулем или малой разностью больших чисел. Проверка не очень сложна, поскольку старший член (член четвертой степени) будет зависеть только от старших членов полиномов, стоящих в определителе (167) и будет равен определителю:

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}1 & 1{,}05 & 1{,}08\\ 1{,}07 & 1{,}09 & 2{,}5\\ 1{,}16 & 1{,}18 & 1{,}15\end{vmatrix}=\\&=1\cdot1{,}09\cdot1{,}15+1{,}05\cdot2{,}5\cdot1{,}16+1{,}08\cdot1{,}07\cdot1{,}18-\\&-1{,}08\cdot1{,}09\cdot1{,}16-1\cdot2{,}5\cdot1{,}18-1{,}05\cdot1{,}07\cdot1{,}15=\\&=0{,}1-0{,}09=0{,}01.\end{aligned} \qquad (168)$$

Равенство (168) сразу показывает, что уже при малых вариациях коэффициентов системы (166), при $\varepsilon < 0,01$, старший коэффициент характеристического полинома может изменить знак, и сразу нарушится необходимое условие устойчивости Стодолы. Запасы устойчивости малы, заключение об устойчивости решений — не надежно.

В сравнительно простой системе (166) этот вывод сразу очевиден, а в более сложных системах уравнений полезно воспользоваться результатами, полученными в *первой части* книги. Обратная таблица знаков определителя, описанная там, позволит легко вычислить, при каких вариациях коэффициентов старший член характеристического полинома изменит знак, и система потеряет устойчивость.

Численное интегрирование системы (166), вычисление ее решений также ненадежно, поскольку при изменениях знака старшего члена может происходить коренное изменение всех решений, как об этом уже говорилось при рассмотрении примера 5.

Пример 9. Обеспечения надежности расчета технических объектов

Мы привели ряд примеров математических моделей, для которых результаты расчета не надежны и не достоверны.

На практике, разумеется, важно не просто констатировать ненадежность расчета, но и найти пути обеспечения его надежности.

Это можно сделать за счет изменения математической модели объекта, в том числе, если поведение модели явно не отражает реальных процессов в объекте управления. Хорошо известно, что один и тот же технический объект может быть описан различными математическими моделями, с разными степенями точности и детальности описания процессов, происходящих в объекте. Поэтому после проверки, которая показала, что результаты вычислений первоначально выбранной математической модели ненадежны, можно перейти к другой модели, которая лучше отражает реальное поведение объекта.

Если причина ненадежности решений, их чрезмерной зависимости от малых вариаций параметров лежит не в неудачном выборе математической модели, а в свойствах самого объекта, то нужно использовать другой путь — надо изменить параметры проектируемого технического объекта, при этом автоматически изменится и его математическая модель. Это изменение параметров (а иногда — и конструкции) проектируемого технического объекта следует проводить так, чтобы математическая модель измененного объекта гарантировала надежность вычислений, гарантировала совпадение результатов расчета с реальным поведением исследуемого объекта при возможных малых изменениях его параметров.

Пример 10. Оптимальное управление судами

Для судов — танкеров типа "Казбек" (водоизмещение 16 000 тонн, скорость — 14 узлов) математической моделью движения на курсе под действием руля и возмущающих сил от ветра и морского волнения является следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\left(690D^2 + 17,2D\right)\theta = u + \varphi(t), \tag{169}$$

В уравнении (169) время t выражено в секундах, θ — угол отклонения судна от заданного курса в градусах, u — угол отклонения руля от диаметрали в градусах, $\varphi(t)$ — возмущающее воздействие от ветра и морского волнения, стационарный случайный процесс, спектральная плотность мощности (спектр) которого может быть аппроксимирована различными аналитическими уравнениями. Обычно рекомендуют аппроксимировать спектр формулой Рахманина — Фирсова:

$$S_\varphi(\omega) = \langle\varphi^2\rangle \cdot \frac{4\alpha}{\pi} \cdot \frac{\alpha^2+\beta^2}{\left(\alpha^2+\beta^2+\omega^2\right)^2 - 4\beta^2\omega^2}, \tag{170}$$

где $\langle\varphi^2\rangle$ — средний квадрат возмущающего воздействия; ω — частота, ее размерность — рад/с; α и β — размерные коэффициенты (размерность — 1/с), зависящие от интенсивности волнения. Для волнения средней интенсивности часто принимают $\beta = 1$ с$^{-1}$ и $\alpha = 0,21\beta$.

Потеря скорости судна, как известно, пропорциональна интегралу

$$\Delta v = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left(k^2\theta^2 + u^2\right)dt, \tag{171}$$

где k^2 — безразмерный коэффициент, зависящий от обводов корпуса судна. Для танкера "Казбек" он равен 6,25 (обоснование формулы (171) и ее вывод приведены в [35, 62]).

Закон управления рулевой установкой, т. е. закон зависимости отклонения руля $u(t)$ от отклонения судна от заданного курса $\theta(t)$ — желательно выбирать так, чтобы потеря скорости была минимальной. Для отыскания оптимального закона управления рулевой установкой и проектирования оптимального авторулевого, автоматически реализующего этот закон, можно воспользоваться теорией оптимизации среднеквадратичных функционалов, изложенной в публикациях [35, 61].

Для танкера "Казбек" оптимальный закон управления рулевой установкой имеет вид:

$$u = \left[690D^2 + 17,2D - \frac{690D^2 + 61,2D + 2,5}{0,973 - 0,06D}\right]\theta. \tag{172}$$

Подробный вывод формулы (172) приведен в книге [35]. Там показано, что закон управления (172) действительно обеспечивает устойчивое движение судна на курсе (при условии, что параметры судна равны расчетным) и наименьшую возможную потерю скорости. Однако параметрической устойчивости закон управления (172) не обеспечивает.

Действительно, предположим, что параметры судна отклонились от расчетных на малые величины и его математическая модель (169) приняла вид:

$$\left[690(1+\varepsilon_1)D^2 + 17,2(1+\varepsilon_2)D\right]\theta = u + \varphi(t). \tag{173}$$

Подставив в формулу (173) вместо u его выражение (172), получим

$$\left[-41,4\varepsilon_1 D^3+\left(690+660\varepsilon_1+1,03\varepsilon_2\right)D^2+\left(61,2+16,7\varepsilon_2\right)D+2,5\right]\theta=\left(973-0,06D\right)\varphi. \tag{174}$$

Из формулы (174) сразу следует, что уже при сколь угодно малом $\varepsilon_1>0$ устойчивость теряется, поскольку нарушается необходимое условие устойчивости Стодолы. Закон управления (172) для практического использования непригоден. Результат расчета при номинальных значениях параметров, для которых движение судна по курсу устойчиво, коренным образом разойдется с действительным движением. Уже при сколь угодно малых $\varepsilon_1>0$ движение станет неустойчивым.

Для обеспечения надежности результатов расчета можно немного изменить параметры математической модели спектра возмущающего воздействия (при этом получим, естественно, другой закон управления). Такое изменение вполне законно, поскольку хорошо известно, что различные аналитические аппроксимации экспериментальных данных по спектрам морского волнения с примерно одинаковой степенью приближения описывают реальные возмущающие воздействия на морские суда.

Для оптимального управления вопрос обеспечения параметрической устойчивости в публикациях [35] и [61] разработан подробно: если задан объект управления в виде математической модели

$$A(D)x=B(D)u+\varphi(t), \tag{175}$$

где x — управляемая величина; u — управляющее воздействие; $A(D)$ и $B(D)$ — произвольные полиномы от оператора дифференцирования $D=\frac{d}{dt}$, причем степень полинома $A(D)$ равна n, степень полинома $B(D)$ равна m, а спектр возмущающего воздействия $\varphi(t)$ аппроксимирован четной рациональной дробью

$$S_\varphi=\frac{a_p\omega^{2p}+a_{p-1}\omega^{2p-2}+\ldots+a_0}{b_q\omega^{2q}+b_{q-1}\omega^{2q-2}+\ldots+b_0}, \tag{176}$$

то закон управления, обеспечивающий минимум среднеквадратического функционала будет обеспечивать параметрическую устойчивость только в том случае, если выполняется критерий Ю. П. Петрова:

$$p\geq m+q-1, \tag{177}$$

где m — это степень полинома $B(D)$ в математической модели объекта управления (175); p — половинная степень числителя в аналитической аппроксимации спектра (176); q — половина степени знаменателя в аппроксимации (176).

Для математической модели танкера "Казбек" (169) будет $m=0$. Для спектра Рахманина — Фирсова (170) имеем $p=0$, $q=2$. Поскольку $0<0+2-1$, то критерий

Ю. П. Петрова не выполнен, и сразу можно сказать, что закон управления (172), доставляющий минимум функционалу (171) при возмущающем воздействии со спектром (170), параметрической устойчивости заведомо не обеспечит.

Для обеспечения параметрической устойчивости удобно изменить аналитическую аппроксимацию спектра, а тем самым и закон управления. Поскольку частотная характеристика танкера "Казбек" почти целиком располагается в той части спектра (171), где он еще почти постоянен и очень слабо зависит от частоты ω, то можно (как было предложено еще в [64]) аппроксимировать спектр возмущающего воздействия просто постоянной величиной:

$$S_{\varphi}(\omega) = C. \tag{178}$$

Такой аппроксимации соответствует $p = 0$ и $q = 0$. Для этих значений p и q критерий Ю. П. Петрова (177) выполняется. Спектру (178) соответствует закон управления

$$u_2 = -[43{,}6D + 2{,}5]\theta. \tag{179}$$

Разумеется, упрощение аналитической аппроксимации спектра может увеличить потерю скорости, но не намного. В публикации [64] на с. 137 произведен расчет, показывающий, что если истинный спектр возмущающего воздействия точно соответствует формуле (170), то даже в этом предельном случае при расчете регулятора замена спектра (170) спектром (178) увеличит потерю скорости всего на 9,7%.

Для того чтобы учесть медленно изменяющиеся составляющие в возмущающем воздействии $\varphi(t)$, не учитываемые спектром (178), авторулевой дополняют интегрирующим звеном с малым коэффициентом усиления, и закон управления принимает окончательный вид:

$$u_3 = -\left[43{,}6D + 2{,}5 + \frac{0{,}005}{D}\right]\theta. \tag{180}$$

На основе формулы (180) многие годы (до появления цифровых систем управления) реализовывалась структура авторулевого: в ее основе лежало параллельное соединение дифференцирующего, усилительного и интегрирующего звена. Эта структура ранее часто использовалась при проектировании авторулевых. Конкретные числовые значения коэффициентов усиления в авторулевых зависят от водоизмещения судна, его скорости, обводов корпуса и вычислялись по методике, приведенной в публикации [64], с. 132–149. Дополнительные материалы о проектировании и расчете авторулевых, обеспечивающих малое число перекладок руля, точность отслеживания движения по речному фарватеру и т. д. — и в то же время неизменно сохраняющих параметрическую устойчивость — приведены в [62] на с. 215–226 и в [35] на с. 243–248. Там же представлены примеры обеспечения параметрической устойчивости и надежности вычислительных алгоритмов для многих других оптимальных систем управления.

Надо отметить, что именно в теории оптимальных систем управления особенно остро стоит проблема обеспечения надежности вычислительных алгоритмов, используемых при проектировании. Действительно, стремясь обеспечить оптимальное, наилучшее качество работы систем управления, мы неизбежно приближаемся к границам устойчивости, и об этом всегда нужно помнить.

Опыт проектирования и расчета надежно работающих оптимальных систем может быть использован и при расчете других технических объектов, не обязательно оптимальных.

§ 34. Проверка сохранения устойчивости систем вида $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ при конечных вариациях элементов матрицы коэффициентов

В этом параграфе мы перейдем к исследованию устойчивости различных объектов при конечных (не сколь угодно малых) вариациях параметров. Эти вариации приводят к вариациям коэффициентов математических моделей реальных объектов. При анализе влияния этих вариаций на устойчивость мы будем широко использовать методы, изложенные в *первой части* книги — и, конкретно, "таблицы знаков" определителей, позволяющие установить наибольшие скорости возрастания или убывания определителя.

Хорошо известно (см., например, [66]), что исследование устойчивости очень многих объектов может быть сведено к исследованию их математических моделей в линейном приближении.

Наиболее удобная и наиболее часто используемая форма записи системы уравнений объекта в линейном приближении — это векторно-матричная форма:

$$\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{A}\mathbf{x} = 0, \tag{181}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор исследуемых переменных $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$, описывающих поведение объекта; $\mathbf{A}$ — квадратная размера $n \times n$ матрица коэффициентов системы.

Не менее часто используется равносильная форма записи:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{182}$$

Элементы матрицы $\mathbf{A}$ зависят от параметров объекта и определяются ими.

В § 7 в качестве объекта был рассмотрен регулируемый электропривод (уравнения (52)–(56)), математическая модель которого в нормальной форме Коши может быть записана в виде следующих трех уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\left(\frac{k_0 + k_1}{m}\right)x_1 - \frac{k_3}{m}x_2 - \frac{k_4}{m}x_3; \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= -\left(\alpha^2 + \beta^2\right)x_2 - 2\alpha x_3, \end{aligned}\right\} \tag{183}$$

где x_1 — это отклонение частоты вращения электропривода от номинальной; x_2 и x_3 — вспомогательные переменные, вводимые для учета спектра возмущающего воздействия согласно формулам (53)–(55) *первой части*; k_0 — коэффициент вязкого трения; k_1, k_2 и k_3 — коэффициенты усиления регулятора (56) (для приведения к нормальной форме Коши уравнений (52)–(56) исключена переменная x_2, фигурирующая в уравнении (56), переменные x_3 и x_4 переименованы в x_2 и x_3).

Для системы (183) матрица **A** имеет вид

$$\begin{pmatrix} -\frac{k_0+k_1}{m} & -\frac{k_3}{m} & -\frac{k_4}{m} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\left(\alpha^2+\beta^2\right) & -2\alpha \end{pmatrix}, \qquad (184)$$

при котором отчетливо видна зависимость элементов матрицы от параметров объекта.

Другой пример: в [65] на с. 255 показано, что уравнения электрической цепи, состоящей из последовательного соединения активного сопротивления R, индуктивности L и емкости C могут быть записаны в виде уравнений

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{LC}x_2; \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \frac{R}{L}x_2, \end{aligned}\right\} \qquad (185)$$

где x_1 — напряжение на емкости, а x_2 — потокосцепление индуктивности. В этом случае матрица **A** принимает вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{LC} \\ 1 & \frac{R}{L} \end{pmatrix}. \qquad (186)$$

Примеры построения систем уравнений в нормальной форме и матриц **A** для более сложных систем приведены во многих других учебниках.

Как уже указывалось в предыдущих параграфах, нормальная форма записи уравнений может быть получена из различных исходных систем уравнений путем эквивалентных преобразований. Поэтому нужно следить, не изменились ли при этих преобразованиях некоторые важные свойства решений, и в частности — параметрическая устойчивость. Ранее уже было показано, что если система (183) была получена эквивалентными преобразованиями из уравнений, соответствующих структурной схеме (см. рис. 10), то эти преобразования изменили параметрическую устойчивость: исходная система (а значит, и реальный объект) теряет устойчивость при сколь угодно малых отклонениях параметров от расчетных значений, а уравнения (183) этим свойством не обладают, и поэтому реального поведения объекта при сколь угодно малых вариациях параметров не отражают.

Поэтому первым шагом в исследовании систем вида (181) должна быть проверка, не изменилось ли при эквивалентных преобразованиях исходной системы к форме (181) свойство ее параметрической неустойчивости. Об этом необходимом первом шаге исследования подробно рассказано в предыдущих параграфах.

Предположим теперь, что первый шаг проверки выполнен, и мы убедились, что потери устойчивости при сколь угодно малых отклонениях параметров от расчетных значений не происходит, и поэтому можно переходить ко второму шагу расчета устойчивости — исследованию сохранения (или несохранения) устойчивости систем вида (181) при малых (но конечных) вариациях коэффициентов матрицы **A**.

Эти малые конечные вариации неизбежны, поскольку из-за конечной точности изготовления любых реальных технических объектов их реальные параметры неизбежно будут отличаться от расчетных значений на конечные величины, а в ходе эксплуатации объекта возникнут дополнительные вариации.

Результирующие вариации параметров объекта (а значит, и элементов матрицы **A**) различны по величине и по знаку (они могут быть и положительными, и отрицательными). Абсолютную величину возможной вариации коэффициентов обычно можно хотя бы оценить сверху, проанализировав точность изготовления объекта и возможные максимальные значения вариаций его параметров в ходе эксплуатации. В то же время знак вариаций коэффициентов чаще всего совершенно непредсказуем.

В целом относительно каждого из элементов матрицы **A** в уравнениях (181) мы можем, как правило, лишь утверждать, что они заключены в интервалах:

$$a_{ij}\left(1-\varepsilon_{ij}\right) \le \overline{a}_{ij} \le a_{ij}\left(1+\varepsilon_{ij}\right), \tag{187}$$

где $\overline{a}_{ij}$ — истинное, неизвестное нам значение элементов a_{ij}; a_{ij} — значение, принятое при расчете; ε_{ij} — число, малое в сравнении с единицей.

Исследование начнем с простейшего (но наиболее опасного) частного случая, когда все ε_{ij} равны по абсолютной величине (т. е. для всех i и j $\left|\varepsilon_{ij}\right| = \varepsilon$), а знаки их не зависят один от другого.

Мы убедимся далее, что при неизменном ε устойчивость или неустойчивость системы (181) сильно зависит от конкретного сочетания знаков вариаций ε_{ij}. Поэтому для обоснованного суждения об устойчивости системы (181) нужно исследовать ее при наиболее неблагоприятном сочетании знаков ε_{ij}, которое предварительно нужно найти. Найти это неблагоприятное сочетание нелегко, т. к. число возможных сочетаний знаков вариаций ε_{ij} очень быстро растет с увеличением порядка n системы (181), поскольку число сочетаний K равно 2^{n^2}. При $n = 2$ будет $K = 2^4 = 16$, при $n = 3$ будет $K = 2^9 = 512$, при $n = 4$ станет $K = 2^{16} = 65\,536$, при $n = 5$ будет уже $K = 2^{25} > 3 \cdot 10^7$, при $n = 6$ станет $K = 2^{36} > 10^{12}$.

Понятно, что при тех порядках n матрицы $\mathbf{A}$ в системе $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, которые встречаются в технических задачах, прямой перебор часто неосуществим даже для самых сверхбыстродействующих вычислительных машин.

Поэтому вместо исследования матрицы $\mathbf{A}$ обычно прибегали к исследованию ее характеристического полинома, который, как известно, равен определителю

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{2n} \\ & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}. \qquad (188)$$

Характеристический полином матрицы $\mathbf{A}$ (он же определитель вида (188)) является полиномом степени n, коэффициенты которого являются функциями от элементов матрицы $\mathbf{A}$. В частности, свободный член характеристического полинома равен определителю матрицы $\mathbf{A}$, т. е. определителю n-го порядка, а коэффициенты перед остальными членами могут быть выражены через определители меньших порядков, составленных из элементов матрицы $\mathbf{A}$.

Характеристический полином матрицы размера 2×2, т. е. определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}$$

можно записать в виде:

$$\lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

(коэффициент при λ можно рассматривать как сумму определителей первого порядка, чисел a_{11} и a_{22}).

Характеристический полином матрицы размера 3×3, т. е. определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} \qquad (189)$$

может быть записан в виде:

$$-\lambda^3 + (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 -$$
$$-\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\right)\lambda + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (190)$$

Характеристический полином матрицы размера 4×4 можно записать в виде:

$$\lambda^4 - (a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44})\lambda^3 +$$
$$+\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}\right)\lambda^2 -$$
$$-\left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}\right)\lambda +$$
$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}. \qquad (191)$$

Аналогично для матрицы любого порядка $n \times n$ коэффициенты при всех степенях λ можно выразить через определители; как известно (см., например, [70] на с. 400), "коэффициент при λ^{n-r} равен взятой с множителем $(-1)^r$ сумме главных миноров r-го порядка определителя матрицы".

Если элементы матрицы **A** испытали вариации и заданы интервалами своих возможных значений, т. е. неравенствами (187), то и коэффициенты ее характеристического полинома

$$(-1)^n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 \qquad (192)$$

будут также находиться в некоторых интервалах:

$$\underline{a}_i \le a_i \le \overline{a}_i, \qquad (193)$$

где $\underline{a}_i$ — наименьшее возможное значение коэффициента a_i характеристического полинома; $\overline{a}_i$ — наибольшее из возможных.

Задача проверки устойчивости системы (181) при вариациях элементов матрицы **A** сводится теперь к проверке гурвицевости полинома (192), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (193). Здесь тоже можно действовать прямым перебором, осуществляя проверку гурвицевости всех возможных сочетаний коэффициентов $\underline{a}_i$ и $\overline{a}_i$. Число всех возможных сочетаний равно 2^n. Это меньше, чем 2^{n^2}, но все же слишком много.

Решающий прорыв в упрощении решения был сделан в 1978 году сотрудником факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета В. Л. Харитоновым. В статье [63] он показал, что для проверки устойчивости интервального полинома, а так же и любого полинома вида $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$, коэффициенты которого удовлетворяют условиям

(193), достаточно проверить гурвицевость всего лишь четырех полиномов, а именно полиномов:

$$\overline{a}_n\lambda^n + \underline{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \underline{a}_{n-2}\lambda^{n-2} + \overline{a}_{n-3}\lambda^{n-3} + \ldots; \quad (194)$$

$$\underline{a}_n\lambda^n + \overline{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \overline{a}_{n-2}\lambda^{n-2} + \underline{a}_{n-3}\lambda^{n-3} + \ldots; \quad (195)$$

$$\overline{a}_n\lambda^n + \overline{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \underline{a}_{n-2}\lambda^{n-2} + \underline{a}_{n-3}\lambda^{n-3} + \ldots; \quad (196)$$

$$\underline{a}_n\lambda^n + \underline{a}_{n-1}\lambda^{n-1} + \overline{a}_{n-2}\lambda^{n-2} + \overline{a}_{n-3}\lambda^{n-3} + \ldots, \quad (197)$$

которые называют иногда "вершинными" или "угловыми" полиномами.

Статья В. Л. Харитонова получила заслуженную известность. Появилось немало работ (публикации [67–69] и многие другие), посвященных той же тематике, продолжающих и развивающих результаты В. Л. Харитонова.

Большие усилия были направлены на попытки решить аналогичную проблему проверки устойчивости для систем (181) или (182) при вариациях коэффициентов матрицы **A** (не прибегая к исследованию характеристического полинома матрицы). Дело в том, что коэффициенты характеристического полинома связаны слишком сложными соотношениями с коэффициентами большинства математических моделей реальных объектов. У систем (181) и (182) эти соотношения проще, поэтому решение проблемы проверки устойчивости непосредственно для этих систем с учетом вариаций их параметров было на протяжении многих лет заманчивой целью очень многих исследователей (авторы публикаций [67–69] и многие другие). Однако задача оказалась очень трудной, и методика, использованная В. Л. Харитоновым для полиномов, в этом случае к успеху не приводила.

Примечание

Для решения этой трудной задачи мы используем результаты, приведенные в *первой части* книги.

Будем (как это используется в ряде учебников) записывать характеристический полином матрицы **A** системы (181) (равный определителю (188)) так, чтобы коэффициент при его старшем члене, при λ^n, был равен +1. Для этого достаточно умножить характеристический полином (188) на $(-1)^n$, что не изменит ни его корней, ни условий устойчивости. Тогда необходимое условие устойчивости системы (181) (условие Стодолы) при такой форме записи характеристического полинома примет простой вид: коэффициенты при всех его членах, в том числе и его свободный член (коэффициент при λ в нулевой степени), равный определителю матрицы **A**, умноженному на $(-1)^n$, должны быть положительны (при использовании записи характеристического полинома в форме определителя (188), без умножения на $(-1)^n$, условие Стодолы записывается сложнее и труднее запоминается студентами).

При используемой нами форме записи у гурвицевого характеристического полинома его свободный член $(-1)^n a_0$, равный определителю

$$(-1)^n \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{198}$$

обязательно положителен. При вариациях элементов определителя (198) устойчивость характеристического полинома может потеряться и потеряться тем быстрее, чем быстрее будет убывать свободный член. Как только он достигнет значения 0, устойчивость потеряется. Но в *первой части* книги (а ранее — в публикации [6]) мы установили, что при одних и тех же абсолютных величинах вариаций определитель (198) будет убывать с наибольшей скоростью в том случае, если знаки вариаций его элементов будут соответствовать его обратной таблице знаков.

Отсюда сразу следует простой алгоритм проверки необходимых условий устойчивости систем (181) и (182) при вариациях элементов матрицы **А**: используя оценки абсолютных величин чисел ε_{ij} ($|\varepsilon_{ij}| \le \varepsilon_{ij\max}$) в неравенствах (187), мы расставляем их знаки в соответствии с "обратной таблицей знаков" определителя (198) и вычисляем определитель

$$(-1)^n \cdot \begin{vmatrix} a_{11}(1 \pm \varepsilon_{11}) & a_{12}(1 \pm \varepsilon_{12}) & a_{1n}(1 \pm \varepsilon_{1n}) \\ a_{21}(1 \pm \varepsilon_{21}) & a_{22}(1 \pm \varepsilon_{22}) & a_{2n}(1 \pm \varepsilon_{2n}) \\ & \dots & \\ a_{n1}(1 \pm \varepsilon_{n1}) & a_{n2}(1 \pm \varepsilon_{n2}) & a_{nn}(1 \pm \varepsilon_{nn}) \end{vmatrix} \tag{199}$$

с учетом знаков ε_{ij}, соответствующих "обратной таблице". Если при этом определитель (199) окажется не положителен, то система (182), безусловно, может потерять устойчивость при неблагоприятных сочетаниях абсолютных величин (в пределах $|\varepsilon_{ij}| \le \varepsilon_{ij\max}$) и знаков вариаций элементов матрицы **А**.

Если определитель (199) положителен, то желательно дополнительно исследовать вариации определителей, входящих в коэффициенты остальных членов характеристического полинома — от члена с первой степенью λ до члена с λ^{n-1}. Теоретически возможно, что при положительном свободном члене характеристического полинома какой-либо из его остальных членов (вычисленный с учетом вариаций элементов a_{ij}) станет не положительным, но это — редкое явление, поскольку, как было установлено в *первой части*, при тех же абсолютных величинах вариаций элементов скорость убывания определителя возрастает с увеличением его порядка.

Поэтому наиболее чувствителен к вариациям элементов свободный член характеристического полинома, и на практике часто довольствуются проверкой того, что его знак при вариациях параметров не изменился.

Рассмотрим примеры.

Пример 11

Дана система уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -7x_1 - 6x_2; \\ \dot{x}_2 &= -8x_1 - 7x_2 \end{aligned}\right\} \tag{200}$$

с характеристическим полиномом

$$\lambda^2 + (7+7)\lambda + \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 14\lambda + 1, \tag{201}$$

имеющим отрицательные корни $\lambda_{1,2} = -7 \pm \sqrt{49-1}$; $\lambda_1 = -0{,}0718$, $\lambda_2 = -13{,}422$.

При номинальных значениях коэффициентов система (200) устойчива, но может потерять устойчивость при их вариациях. Если вариации всех элементов матрицы не превышают $\pm\varepsilon_m$ от их номинальных значений, то наиболее неблагоприятным сочетанием их знаков будет то, которое соответствует обратной таблице знаков определителя

$$\begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 1, \tag{202}$$

которая имеет вид

$$\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix} \tag{203}$$

(обратную таблицу знаков для определителя (202), как и единую для всех определителей второго порядка с положительными элементами, мы уже вычисляли в *первой части* книги).

Вычисляя определитель с учетом вариаций

$$\begin{vmatrix} 7(1-\varepsilon_m) & 6(1+\varepsilon_m) \\ 8(1+\varepsilon_m) & 7(1-\varepsilon_m) \end{vmatrix} = 1 - 194\varepsilon_m + \varepsilon_m^2, \tag{204}$$

устанавливаем, что он впервые обратится в нуль при $\varepsilon_m = 0{,}005155$. Это означает, что уже при $\varepsilon_m \geq 0{,}005155$ система (200) может потерять устойчивость.

Вычисляя величину второго члена характеристического полинома при вариациях параметров, устанавливаем, что при наиболее неблагоприятном сочетании знаков вариаций коэффициент при втором члене будет равен

$$14 - 2\varepsilon_m \tag{205}$$

и изменит знак лишь при $\varepsilon_m = 0{,}1428$, что гораздо больше вариации, изменяющей знак свободного члена. Как уже указывалось ранее, наиболее опасными в отношении возможной потери устойчивости оказались вариации элементов свободного члена характеристического полинома.

Таким образом, при $\varepsilon_m < 0{,}005155$ система заведомо сохранит устойчивость, при $\varepsilon_m \geq 0{,}005155$ устойчивость может исчезнуть.

Если вариации получили только элементы верхней строки определителя (202) и он — с учетом все той же наиболее опасной для устойчивости обратной таблицы знаков (201) — примет вид

$$\begin{vmatrix} 7(1-\varepsilon_m) & 6(1+\varepsilon_m) \\ 8 & 7 \end{vmatrix} = 1 - 97\varepsilon_m, \tag{206}$$

то в этом случае система (200) может потерять устойчивость при $\varepsilon_m \geq 1/97 = 0{,}0103$ и сохранит устойчивость при $\varepsilon_m < 0{,}0103$.

Аналогично можно проверить сохранение устойчивости не при относительных, а при абсолютных вариациях элементов a_{ij} матрицы **A** в системе (181), когда они, например, подчинены неравенствам:

$$a_{ij} - \left|\varepsilon_{ij}\right| \leq \overline{a_{ij}} \leq a_{ij} + \left|\varepsilon_{ij}\right|, \tag{207}$$

где $\overline{a_{ij}}$ — истинные, неизвестные нам значения коэффициентов; a_{ij} — номинальные значения, используемые при расчетах; ε_{ij} удовлетворяют неравенствам

$$\left|\varepsilon_{ij}\right| \leq \varepsilon_{ijm}, \tag{208}$$

где ε_{ijm} — величины, малые в сравнении с a_{ij}.

Пример 12

Для системы (200) при учете неравенств (207) и (208) обратная таблица знаков сохранит вид (203), и если все элементы матрицы **A** получили вариации $\pm\varepsilon_m$, то с учетом таблицы знаков (203) определитель матрицы примет вид

$$\begin{vmatrix} 7-\varepsilon_m & 6+\varepsilon_m \\ 8+\varepsilon_m & 7-\varepsilon_m \end{vmatrix} = 1 - 28\varepsilon_m, \tag{209}$$

и система может потерять устойчивость при $\varepsilon_m \geq 1/28 = 0{,}0357$.

Если сочетание знаков вариаций не будет наиболее неблагоприятным для сохранения устойчивости, не будет соответствовать обратной таблице знаков, то при тех же абсолютных величинах вариаций устойчивость сохранится. Так, например, если все вариации элементов матрицы имеют один и тот же отрицательный знак, то определитель матрицы примет вид:

$$\begin{vmatrix} 7-\varepsilon_m & 6-\varepsilon_m \\ 8-\varepsilon_m & 7-\varepsilon_m \end{vmatrix} = 1 \tag{210}$$

и вообще не будет зависеть от ε_m, а коэффициент при втором члене характеристического полинома, равный $(7-\varepsilon+7-\varepsilon)$, изменит знак при $\varepsilon_m = 1/7$.

Пример 13

Рассмотрим систему (180) с матрицей **A** размера 3×3:

$$\mathbf{A} = -\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}. \tag{211}$$

При номинальных значениях коэффициентов свободный член характеристического полинома равен

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 8, \tag{212}$$

но при вариациях элементов определителя он может изменить знак (в этом примере снова рассматриваем относительные вариации, подчиненные неравенствам (187)). Определитель (212) уже рассматривался нами в § 6. Там же были вычислены его прямая и обратная таблицы знаков. Обратная таблица знаков для определителя (212) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} + & + & - \\ - & + & - \\ - & - & + \end{vmatrix}. \tag{213}$$

В § 7 было установлено, что если все вариации элементов определителя равны по абсолютной величине, т. е. $|\varepsilon_{ij}| = \varepsilon_m$, а знаки их соответствуют обратной таблице знаков (213), то определитель (212) впервые обратится в нуль при $\varepsilon_m = 0{,}0515$.

Это означает, что при $\varepsilon_m \geq 0{,}0515$ устойчивость системы $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ с матрицей (211) может исчезнуть.

Отметим, что как уже было показано в *первой части*, при одних и тех же ε_m скорость убывания определителя будет наибольшей в том случае, если знаки вариаций всех элементов определителя независимы. Если знаки вариаций связаны между собой любыми зависимостями, то определитель убывает медленнее и потеря устойчивости системой (182) происходит позднее.

Выпишем теперь полностью характеристический полином матрицы (211), опираясь на формулу (190), но приводя полином умножением на $(-1)^n$ к форме, оставляющей старший член положительным.

Получим:

$$\lambda^3 + (1+1+5)\lambda^2 - \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \right)\lambda + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^3 + 7\lambda^2 + 14\lambda + 8. \tag{214}$$

Снова нетрудно убедиться, что изменение знака коэффициентов при λ^2 и при λ может произойти лишь при значительно более крупных (по абсолютной величине) вариациях элементов матрицы (211) по сравнению с вариациями, способными изменить знак коэффициента при нулевой степени λ (свободного члена).

Это связано с тем, что — как было показано в *первой части* — при одних и тех же абсолютных величинах вариаций элементов определителя он изменяется тем быстрее, чем выше его порядок. Поэтому, как уже указывалось, при проверке сохранения необходимых условий устойчивости часто ограничиваются проверкой свободного члена, хотя желательно, конечно, проверить и коэффициенты при остальных степенях λ.

Отметим также, что при независимых вариациях элементов матрицы **A** в системе (182) очень мала вероятность того, что реализуется сочетание знаков вариаций, соответствующее именно обратной таблице знаков и наибольшему возможному уменьшению определителя.

Эта вероятность равна $1/2^{n^2}$ и очень быстро убывает с ростом n.

Поэтому, когда при исследовании в данном примере мы установили, что при $\varepsilon_m = 0{,}0515$ свободный член матрицы может быть равен нулю и устойчивость потеряется, но потеря устойчивости здесь маловероятна (вероятность равна $1/2^9 = \frac{1}{512}$). Однако, например, уже при $\varepsilon_m = 2 \cdot 0{,}0515$ и таблице знаков (213) определитель (212) примет уже значение, близкое к -10. А это означает, что такая величина свободного члена может быть реализована уже не только одним-единственным сочетанием возможных знаков вариаций (сочетанием, соответствующим таблице знаков (213)), а может быть реализовано очень многими сочетаниями, и поэтому (это важно!) потеря устойчивости теперь уже будет иметь совсем немалую вероятность.

Было бы очень полезно вычислить точные величины вероятностей потери устойчивости при ε_m, которые в k раз превышают те ε_m, при которых свободный член впервые достиг значения 0, но это предмет дальнейших исследований.

Разумеется, если при вариациях параметров стал отрицательным или равным нулю любой из коэффициентов характеристического полинома (умноженного на $(-1)^n$) системы (182), то это означает, что нарушено необходимое условие Стодолы и система заведомо неустойчива. Однако система (182) при $n \geq 3$ может быть неустойчивой и при всех положительных коэффициентах характеристического полинома (умноженного на $(-1)^n$).

Для более твердой уверенности в сохранении или не сохранении устойчивости систем вида (182) при вариациях элементов матрицы **A** желательно проверить выполнение необходимых и достаточных условий гурвицевости характеристического полинома. В этой проверке помогают изложенные в *первой части* книги методы вычисления наибольших и наименьших величин определителей, входящих в формулы (190), (191) (и подобные им для $n > 4$) при вариациях элементов определителей.

Пример 14

Рассмотрим снова систему (182) с матрицей (211), предположим, что все элементы матрицы могут испытывать вариации, равные одной сотой от исходного значения (т. е. $\varepsilon_m = 0{,}01$), и поставим вопрос: сохранит ли устойчивость исследуемая система при таких вариациях?

Пользуясь методикой, изложенной в *первой части*, и используя построенные там прямую и обратную таблицы знаков для определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \tag{215}$$

и определителей

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \tag{216}$$

входящих в формулу (214), легко вычислим, что при $\varepsilon_m = 0{,}01$ будет:

$$6{,}3804 \le \begin{vmatrix} 1(1 \pm 0{,}01) & 2(1 \pm 0{,}01) & 3(1 \pm 0{,}01) \\ 4(1 \pm 0{,}01) & 1(1 \pm 0{,}01) & 2(1 \pm 0{,}01) \\ 3(1 \pm 0{,}01) & 4(1 \pm 0{,}01) & 5(1 \pm 0{,}01) \end{vmatrix} \le 9{,}6604 \tag{217}$$

и аналогично:

$$\left.\begin{aligned} -7{,}1207 &\le \begin{vmatrix} 1(1 \pm 0{,}01) & 2(1 \pm 0{,}01) \\ 4(1 \pm 0{,}01) & 1(1 \pm 0{,}01) \end{vmatrix} \le -6{,}8007; \\ -4{,}2804 &\le \begin{vmatrix} 1(1 \pm 0{,}01) & 3(1 \pm 0{,}01) \\ 3(1 \pm 0{,}01) & 5(1 \pm 0{,}01) \end{vmatrix} \le -3{,}7204; \\ -3{,}2603 &\le \begin{vmatrix} 1(1 \pm 0{,}01) & 2(1 \pm 0{,}01) \\ 4(1 \pm 0{,}01) & 5(1 \pm 0{,}01) \end{vmatrix} \le -2{,}7403, \end{aligned}\right\} \tag{218}$$

и, следовательно, коэффициент при третьем члене характеристического полинома при вариациях параметров будет находиться в пределах:

$$13{,}2614 \le -\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}\right) \le 14{,}7214. \tag{219}$$

Коэффициент при втором члене характеристического полинома (при члене с λ^2) буден заключен в пределах

$$6{,}93 \le \left[1(1 \pm 0{,}01) + 1(1 \pm 0{,}01) + 5(1 \pm 0{,}01)\right] \le 7{,}07. \tag{220}$$

Таким образом, при вариациях параметров коэффициенты при всех членах характеристического полинома (умноженного на $(-1)^n$) остаются положительными, необходимое условие Стодолы выполнено. Остается проверить последнее условие (которое совместно с условием Стодолы будет необходимым и достаточным): произведение средних членов характеристического полинома должно быть больше произведения крайних. Достаточно проверить такое сочетание знаков вариаций, при котором средние члены, наименьшие из возможных, а крайние — наибольшие, т. е. проверить выполнение неравенства

$$6{,}93 \cdot 13{,}2614 > 1 \cdot 9{,}6604.$$

Его выполнение означает, что система (182) с матрицей (211) при относительных вариациях ее элементов, удовлетворяющих условию $|\varepsilon_{ij}| \le 0{,}01$, сохраняет устойчивость.

Отметим, что проверка, проделанная нами, является "очень жесткой": мы допустили возможность такого сочетания знаков вариаций, при котором одновременно второй и третий члены характеристического полинома достигают минимально возможных значений, а четвертый член достигает максимально возможного значения. Однако это допущение (упрощая расчеты) идет в запас надежности вывода о сохранении устойчивости.

С учетом этого замечания можно предложить следующий алгоритм проверки сохранения устойчивости систем (182) для матриц **A** размера 3×3 при вариациях ее элементов: в характеристическом полиноме (умноженном на $(-1)^3$) вычислить при известных оценках $|\varepsilon_{ij}|$ наибольшие и наименьшие значения определителей, входящих в формулу (190). Если наименьшие значения коэффициентов при всех членах полинома положительны, а произведение наименьших значений коэффициентов при средних членах полинома больше наибольшего значения свободного члена, то система заведомо сохранит устойчивость.

Аналогичные алгоритмы можно составить и для систем вида (182) с матрицами размера большего, чем 3×3.

Отметим также, что при вычислениях устойчивости нужно учитывать оговорку, сделанную в *первой части* книги: таблицы знаков при вариациях элементов определителей сохраняют свой вид до тех пор, пока не изменили свой знак алгебраические дополнения элементов. Хотя для большинства определителей алгебраические дополнения сохраняют свой знак при вариациях элементов, но существуют и особые случаи, когда даже при небольшом увеличении вариаций алгебраические дополнения изменяют знаки, а это приводит к изменению таблиц знаков. Хотя эти особые случаи встречаются редко, для гарантии правильности вычислений их необходимо учитывать.

Изложенный материал показывает, что таблицы знаков матрицы **A** системы (182) могут существенно помочь в решении двух задач:

- выделить системы, которые уже по результатам проверки знака определителя матрицы **A** заведомо могут потерять устойчивость при тех или иных вариациях элементов матрицы **A** (если при вариациях элементов матрицы оказывается, что

$(-1)^n \cdot \det \mathbf{A} > 0$, то система после вариаций элементов может быть и устойчивой, и неустойчивой);

- выделить системы, которые при заданных максимальных (по абсолютной величине) вариациях элементов матрицы **A** сохраняют устойчивость.

Первая задача решается легко, вторая — значительно труднее. Поэтому таблицы знаков можно использовать прежде всего для уменьшения объема вычислений, применяя более сложные методы выделения систем, сохраняющих устойчивость при вариациях элементов матрицы **A** только для систем, не выдержавших простой проверки по сохранению знака ее определителя.

Отметим, что используемые алгоритмы могут быть существенно упрощены при использовании результатов В. Л. Харитонова, опубликованных в [63]. Там было показано, что проверку сохранения устойчивости при вариациях параметров можно легко выполнить, если располагать оценками наибольших и наименьших значений коэффициентов характеристического полинома (188) линейной системы (182) при вариациях ее коэффициентов.

Однако вычисление этих наибольших и наименьших возможных значений коэффициентов характеристического полинома долгое время казалось трудоемкой и трудновыполнимой операцией, и поэтому методика В. Л. Харитонова при ее теоретической привлекательности редко использовалась на практике. Действительно, если рассмотреть, например, свободный член характеристического полинома системы вида (182) шестого порядка, то этот свободный член, будучи определителем из шести строк и шести столбцов, будет иметь при вариациях элементов определителя 2^{36} возможных значений, среди которых нужно найти наибольшее и наименьшее. Поскольку $2^{36} > 10^{12}$, то прямой перебор всех значений определителя был бы вряд ли возможен даже для быстродействующих вычислительных машин.

Однако в 2009 году, в монографии [6] был предложен и описан простой алгоритм вычисления наибольших и наименьших значений определителей при вариациях их элементов (а тем самым и сумм определителей, из которых складываются коэффициенты характеристического полинома). Этот алгоритм описан и в §§ 6–12 этой книги.

Таким образом, сочетание методик, изложенных в монографии [6] и статье В. Л. Харитонова [63], позволяет просто и удобно решить важную проблему о сохранении (или не сохранении) устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений при вариациях параметров исследуемого объекта.

Отметим еще одно важное уточнение: система линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами наиболее общего вида может быть записана в форме

$$\left.\begin{array}{l} A_{11}(D)x_1 + A_{12}(D)x_2 + \ldots + A_{1n}(D)x_n = k_1(t); \\ A_{21}(D)x_1 + A_{22}(D)x_2 + \ldots + A_{2n}(D)x_n = k_2(t); \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n1}(D)x_1 + A_{n2}(D)x_2 + \ldots + A_{nn}(D)x_n = k_n(t), \end{array}\right\} \qquad (221)$$

где $A_{ij}(D)$ — полиномы различных степеней от оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$; $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ — искомые переменные; $k_1(t)$, $k_2(t)$, ..., $k_n(t)$ — правые части.

Характеристический полином системы равен определителю

$$\begin{vmatrix} A_{11}(\lambda) & A_{12}(\lambda) & & A_{1n}(\lambda) \\ A_{21}(\lambda) & A_{22}(\lambda) & & A_{2n}(\lambda) \\ & & & \\ A_{n1}(\lambda) & A_{n2}(\lambda) & & A_{nn}(\lambda) \end{vmatrix}.$$

Примером может служить рассмотренная ранее система (27)–(28) из § 23, описывающая переходные процессы в одном из электроприводов. Рассмотрим системы, близкие к (27)–(28), т. е. системы, у которых, например, коэффициенты при D^3 в уравнении (27) и при D^2 в уравнении (28) не равны единице, но близки к ней, т. е. рассмотрим систему

$$\left.\begin{aligned} \left[(1+\delta_1)D^3 + 4D^2 + 5D + 2\right]x_1 - \left(D^2 + 2D + 1\right)x_2 = 0; \\ \left[(1+\delta_2)D^2 + 4D + 5\right]x_1 - (D+1)x_2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

где δ_1 и δ_2 — числа, малые в сравнении с единицей. Характеристический полином этой системы равен

$$[(1+\delta_1)\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2]\cdot(\lambda+1) - [(1+\delta_2)\lambda^2 + 4\lambda + 5]\cdot(\lambda^2 + 2\lambda + 1) =$$
$$= (\delta_2 - \delta_1)\lambda^4 + (1 + 2\delta_2 - \delta_1)\lambda^3 + (5 + \delta_2)\lambda^2 + 7\lambda + 3.$$

Предположим (это вполне возможно), что δ_1 и δ_2 близки друг к другу, т. е. $\delta_2 = \delta_1 + \varepsilon$, где ε — число, малое по сравнению с δ_1 и δ_2. Если δ_2 больше, чем δ_1 и поэтому $\varepsilon > 0$, то характеристический полином, как легко проверить, является гурвицевым и система устойчива. Если δ_2 меньше, чем δ_1 и поэтому $\varepsilon < 0$, то система неустойчива, поскольку знак коэффициента при старшем члене характеристического полинома в этом случае противоположен знаку остальных членов и нарушается необходимое условие устойчивости — условие Стодолы.

При $\varepsilon > 0$ система устойчива, но параметрической устойчивости нет: при малых изменениях параметров исследуемого объекта, ведущих к малым изменениям чисел δ_1 и δ_2, устойчивость может потеряться, поскольку может измениться знак ε.

Этот пример показывает, что для обоснованного суждения о сохранении устойчивости при малых изменениях параметров исследуемого объекта необходимо исследование возможного изменения знака старшего члена характеристического полинома.

Отметим, что систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами общего вида (систему (221)) можно, как известно, эквивалентными преобразованиями (введением, если нужно, новых переменных) привести к нормальной форме, к форме (182). Но у системы (182) старший член характеристического полинома, равного определителю (188) всегда равен либо плюс единице, либо минус единице и не зависит от вариаций коэффициентов a_{ij} матрицы **A** уравнения (182).

Таким образом, исследуя параметрическую устойчивость какого-либо объекта на основе его модели в виде системы линейных дифференциальных уравнений, приведенных к форме (182), мы можем в некоторых случаях прийти к ошибочному заключению о сохранении устойчивости при вариациях параметров. Систему, записанную в форме (221) можно эквивалентными преобразованиями привести к форме (182), но эквивалентные преобразования могут (как уже ранее было показано в [5]) изменить параметрическую устойчивость.

Если при исследовании различных объектов мы предполагаем, что их параметры неизменны, то мы находимся в рамках "математики-1" и эквивалентные преобразования можно использовать спокойно. Но предположение о неизменности параметров исследуемого объекта — это слишком сильная и неоправданная идеализация. На практике малые изменения параметров, малые отклонения их от номинальных значений почти всегда неизбежны и существует немало объектов, в которых малые изменения параметров могут приводить к большим изменениям поведения объекта, и в том числе — к опасным авариям и катастрофам.

Если мы хотим, чтобы наши расчеты правильно предсказывали реальное поведение исследуемых объектов и предупреждали возможные аварии, то мы должны постепенно переходить от "математики-1" к "математике-2", к математике, которая учитывает неизбежные малые вариации параметров реальных объектов и систем. Методы "математики-2" еще далеко не до конца разработаны, но они разрабатываются и совершенствуются. Некоторые новые результаты изложены в [5, 6, 11, 36, 37, 56] и в настоящей книге.

Примером различия между подходами и методами "математики-1" и "математики-2" являются эквивалентные преобразования. В "математике-1" ими можно пользоваться спокойно, в "математике-2" надо учитывать, что они могут изменить некоторые важные свойства исследуемых объектов, и в частности — параметрическую устойчивость. Напомним о целой серии аварий, которые происходили в 70-х годах XX века, когда при реализации "аналитически сконструированных регуляторов" заменяли непосредственно неизмеряемые переменные эквивалентными комбинациями измеряемых переменных и их производных. Эта серия аварий наглядно показала, насколько опасно игнорировать неизбежные в ходе эксплуатации малые вариации параметров, и она же послужила толчком к исследованию новых неожиданных свойств эквивалентных (равносильных) преобразований. Начало этих исследований отражено в публикациях [5, 36–38, 42, 52, 56].

Интересные следствия вытекают из частного случая рассмотренной нами системы двух уравнений при точном равенстве чисел δ_1 и δ_2, $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, когда $\varepsilon = 0$, и характеристический полином системы принимает вид

$$(1+\delta)\lambda^3 + (5+\delta)\lambda^2 + 7\lambda + 3.$$

Нетрудно проверить, что при малых δ этот полином является гурвицевым, и рассматриваемый электропривод с формальной точки зрения, или с точки зрения "математики-1", предполагающей неизменность коэффициентов уравнений системы (26)–(27), является устойчивым.

С точки зрения "математики-2" эта система не является устойчивой, поскольку при сколь угодно малых, а значит, совершенно неизбежных вариациях коэффициентов она может стать неустойчивой. Сразу видно, что именно "математика-2", а не "математика-1" дает такие рекомендации и предсказания, которые выполняются в действительности и которые необходимы в любом реальном деле.

Теперь отметим, что при переходе от $\varepsilon = 0$ к $\varepsilon < 0$ не просто происходит переход от устойчивой системы к неустойчивой, но и коренным образом меняются решения системы и все ее поведение. При $\varepsilon = 0$ в общее решение системы (26)–(27) входят лишь экспоненциально затухающие члены C_1e^{-3t}, C_2e^{-t}, C_3te^{-t}, а при $\varepsilon < 0$ добавляется стремительно растущий четвертый член, увеличивающийся тем быстрее, чем меньше ε. Поэтому система (26)–(27) является примером системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющих условиям ограниченности правых частей и условиям Липшица, но решения которой не имеют непрерывной зависимости от параметров.

И таких систем много. Так, например, все системы

$$\left.\begin{aligned}\left(a_1D^3+4D^2+5D+2\right)x_1-\left(D^2+2D+1\right)x_2&=0;\\ \left(D^2+2D+5\right)x_1-\left(a_2D+1\right)x_2&=0\end{aligned}\right\}$$

при $a_1 = a_2$, а также многие другие, приведенные, например, в [5], не имеют непрерывной зависимости решений от коэффициентов и параметров.

Таким образом, известная теорема о непрерывной зависимости решений от параметров, приводимая почти во всех учебниках по дифференциальным уравнениям (например, [33, 34]), неверна. Она неверна в тех формулировках, которые приводятся в учебниках. Для получения верной теоремы необходимо наложить дополнительные условия на рассматриваемые системы дифференциальных уравнений.

Отметим, что неверность теоремы вместе с подтверждающими примерами были опубликованы в [5], т. е. еще в 1999 году. Несмотря на это, в учебниках по дифференциальным уравнениям, в том числе и совсем недавно вышедших в свет, эта теорема приводится в прежней неверной формулировке. Между тем ошибка в столь важной теореме уже не раз приводила к ошибочным техническим решениям и, как следствие их, к авариям и катастрофам. Неисправленная ошибка может привести к новым катастрофам.

Отметим, что решение задач "математики-2" много труднее, чем аналогичных задач "математики-1". Далеко не всегда легко найти решение какой-либо трудной задачи даже в предположении, что все параметры исследуемого объекта и коэффициенты его математической модели известны и неизменны. Но во много раз трудней решать ту же задачу с учетом почти всегда неизбежных на практике малых вариаций коэффициентов и параметров, их неизбежных малых отклонений от номинальных значений, используемых при расчете.

Поэтому объем накопленного материала решенных задач в "математике-2" во много раз меньше, чем в "математике-1". Поэтому часто приходится сталкиваться с утверждениями о том, что "математику-2" нельзя рассматривать как равноправную с "математикой-1", а следует рассматривать ее лишь как маленький "довесок" к традиционной математике. На сегодняшний день это, безусловно, так. Но "математика-2" будет быстро развиваться и в дальнейшем, возможно, достигнет равноправия с "математикой-1" (поскольку потребность в ней велика и обычное допущение: "примем, что коэффициенты математической модели исследуемого объекта *известны* и *неизменны*" для очень многих практических задач является недопустимой идеализацией). А большие трудности, стоящие на пути развития более приближенной к потребностям практики "математики-2", подчеркиваются известными неудачами "интервального анализа" (см. публикации [15, 16]). Постановка задач в "интервальном анализе" в целом совершенно правильная, но в ней пропущено важное обстоятельство: в практических задачах интервалы, внутри которых задаются коэффициенты, малы по сравнению с самими коэффициентами, а эта малость позволяет очень существенно упростить решение. В интервальном анализе малость рассматриваемых интервалов не оговаривается и не используется. В результате, несмотря на то, что первые публикации по интервальному анализу относятся еще к 60-м годам XX века, в последующие десятилетия над ним работали многие сотни исследователей, но практических результатов еще очень и очень мало.

Более существенные результаты достигнуты в "теории чувствительности" (публикации [68, 76] и др.), но достигнуты они за счет вычисления изменения решений при вариации одного из параметров системы ("чувствительности к вариации данного параметра"). Это — важный случай общей проблемы, но, все же, случай частный и более легко решаемый по сравнению с рассмотренным в настоящей книге общим случаем одновременной вариации нескольких параметров (или нескольких коэффициентов математической модели).

§ 35. Синтез систем управления с хорошими запасами устойчивости

Напомним, что *оптимальной системой управления* называется система, наилучшая из всех возможных по какому-либо определенному критерию качества. Критериев качества много — это может быть быстродействие системы, скорость затухания переходного процесса, малое перерегулирование и т. п. Все эти вопросы подробно рассматриваются в учебниках и монографиях по автоматическому управлению, оптимальному управлению и, в частности, в книгах [35, 42, 49, 58, 61, 62, 64, 65, 67–69] и др.

Любой реальный объект управления должен, разумеется, удовлетворять не одному, а нескольким критериям качества. Поскольку практически всегда объект, наилучший из всех возможных по одному критерию качества, не может, как известно, быть одновременно лучшим и по другому критерию, то обычно поступают так: выделяют главный, наиболее важный для данного объекта критерий качества, вычисляют управление, достаточно хорошее (или оптимальное) по данному критерию, а затем смотрят — в какой мере это управление обеспечивает приемлемую величину других критериев качества. Если значение какого-либо из критериев оказалось неприемлемым, то управление видоизменяют, жертвуя частью величины главного критерия, и стараются добиться хорошего компромисса между разными критериями качества. Более подробно данный вопрос был рассмотрен ранее в [35] на с. 132–158 и 206–234, а также в ряде других монографий.

Существуют объекты управления, для которых главным (хотя, разумеется, не единственным) критерием качества является величина запасов устойчивости (сюда относятся, например, объекты, у которых их параметры могут очень существенно изменяться в ходе эксплуатации). Мы будем рассматривать объекты управления, математическими моделями которых являются системы уравнений (179)–(180), но к которым приложены управляющие воздействия, поэтому их математические модели имеют хорошо известный в теории управления вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{u}, \tag{222}$$

где $\mathbf{u}$ — вектор-столбец управлений; $\mathbf{b}$ — вектор-столбец коэффициентов при управлениях. Эти системы в исходном состоянии, без управления, могут быть устойчивыми или неустойчивыми.

Управление должно, во-первых, обеспечить устойчивость системы, если без управления она неустойчива, а во-вторых, обеспечить устойчивость при вариациях параметров матрицы $\mathbf{A}$.

Рассмотрим управление, формируемое по принципу обратной связи и линейно зависящее от $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{k}\mathbf{x}, \tag{223}$$

где $\mathbf{k}$ — вектор-строка коэффициентов усиления в каждом из каналов обратной связи. Объект, математической моделью которого является уравнение (223), называют *линейным регулятором с обратной связью*.

Замкнув систему (222) управлением (223), получим уравнения замкнутой системы управления:

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{bk})\mathbf{x}, \tag{224}$$

где $\mathbf{bk}$ — матрица размера $n \times n$ (произведение вектора-столбца на вектор-строку). Структурная схема одной из систем вида (224) была показана ранее на рис. 11.

За счет выбора элементов вектора $\mathbf{k}$, которые находятся в распоряжении инженера, проектирующего систему управления, можно обеспечить любые величины элементов матрицы $\mathbf{bk}$. Поэтому рассмотрим, каким образом следует распорядиться выбором их величин для обеспечения сохранения устойчивости при вариациях параметров, наибольших по абсолютной величине и при наиболее неблагоприятном сочетании их элементов.

Вернемся к исследованию системы (200) с характеристическим полиномом (201). В предыдущем разделе мы уже убедились, что система устойчива, но может потерять устойчивость при вариациях элементов матрицы $\mathbf{A}$, равных всего лишь 0,5155% от их номинальных значений. Такие запасы устойчивости, разумеется, нельзя считать достаточными; объект, математическая модель которого имеет вид (200), будет работать ненадежно, и запасы устойчивости желательно существенно увеличить. Это можно сделать, как уже указывалось, за счет управления с обратной связью и выбора величин элементов матрицы $\mathbf{bk}$ в уравнениях (224). Для системы (200), состоящей из двух уравнений, эта матрица имеет всего четыре элемента:

$$\mathbf{bk} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \tag{225}$$

но уже в этом простейшем случае выбор величин c_{ij}, увеличивающих устойчивость, совсем нетривиален.

Устанавливая за счет выбора коэффициентов усиления регулятора (223) различные величины элементов c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22} матрицы (225), мы можем как увеличить запасы устойчивости, так и уменьшить их (а можем и вообще сделать проектируемый объект управления неустойчивым).

Пример 15

Если матрица (225) выбрана в виде:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{226}$$

то с учетом нее объект управления (200), замкнутый регулятором, обеспечивающим матрицу (226), станет описываться уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1 &= (-7+1)x_1 + (-6-1)x_2 = -6x_1 - 7x_2;\\ \dot{x}_2 &= (-8+1)x_1 + (-7+1)x_2 = -9x_1 - 6x_2\end{aligned}\right\} \tag{227}$$

с характеристическим полиномом

$$\lambda^2 + 12\lambda + \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 12\lambda - 27, \tag{228}$$

и вместо повышения запасов устойчивости станет неустойчивым.

Разумеется, для систем, состоящих из двух уравнений, можно сравнительно легко, даже простым перебором установить вид матрицы (225), обеспечивающей увеличение запасов устойчивости, но уже для систем из трех, четырех и более уравнений трудности стремительно возрастают. Простым перебором здесь заведомо не обойтись.

Для решения поставленной задачи решающую помощь оказывают описанные в *первой части* книги прямая и обратная таблицы знаков определителей, обеспечивающие наибольшие скорости возрастания (прямая таблица) и убывания (обратная таблица) определителей при изменении его элементов.

Пример 16

В предыдущем параграфе мы установили, что наиболее опасным в смысле потери устойчивости при вариациях параметров объекта управления является изменение знака свободного члена его характеристического полинома — определителя матрицы **A** системы (182). (Напомним, как это сказано в предыдущем параграфе, что мы рассматриваем характеристические полиномы, приведенные к "стандартному" виду, когда коэффициент при старшем члене положителен, и поэтому необходимым условием устойчивости является положительность свободного члена.) Отсюда следует, что для повышения запаса устойчивости полезно увеличить свободный член за счет управляющих воздействий, а с точки зрения математики — увеличить определитель матрицы **A** системы (182) за счет добавления к матрице **A** матрицы **bk**, как это отражает формула (224). Нужно лишь следить, чтобы добавление матрицы **bk**, стоящей в формуле (224), обязательно увеличивало определитель матрицы $\mathbf{A}+\mathbf{bk}$ по сравнению с определителем матрицы **A** (только что рассмотренный пример 15 показывает, что от добавления матрицы **bk** определитель может не увеличиться, а уменьшиться).

Для правильного выбора матрицы **bk** заметим, что прямая таблица знаков для определителя матрицы **A** системы (200), т. е. определителя

$$\begin{vmatrix} -7 & -6 \\ -8 & -7 \end{vmatrix} \tag{229}$$

имеет вид

$$\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix}. \tag{230}$$

Следовательно, для увеличения свободного члена необходимо, чтобы в матрице (225) элементы c_{11} и c_{22} были положительными, а элементы c_{12} и c_{21} — отрицательными. Для удобства сопоставления с уже рассмотренным примером 15 выберем матрицу (225) в виде:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{231}$$

В этом случае уравнения системы (200) с учетом управляющего воздействия примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (-7-1)x_1 + (-6+1)x_2 = -8x_1 - 5x_2; \\ \dot{x}_2 &= (-8+1)x_1 + (-7-1)x_2 = -7x_1 - 8x_2. \end{aligned}\right\} \tag{232}$$

Характеристический полином системы (232) будет равен

$$\lambda^2 + 16\lambda + \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 16\lambda + 29, \tag{233}$$

что говорит о том, что система (232) устойчива.

Вычислим теперь ее запасы устойчивости при вариациях элементов матрицы **A** исходной системы (200). Предположим, что относительные вариации всех ее элементов по абсолютной величине равны ε.

С учетом этих вариаций и с учетом управления, уравнения системы (200) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (-7(1\pm\varepsilon)-1)x_1 + (-6(1\pm\varepsilon)+1)x_2; \\ \dot{x}_2 &= (-8(1\pm\varepsilon)+1)x_1 + (-7(1\pm\varepsilon)-1)x_2. \end{aligned}\right\} \tag{234}$$

Теперь для вычисления запасов устойчивости нужно найти наиболее неблагоприятное сочетание знаков вариаций $\pm\varepsilon$ в системе (234) — оно соответствует таблице знаков

$$\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix}, \tag{235}$$

при которой свободный член характеристического полинома системы (234) при наиболее неблагоприятных знаках вариаций своих элементов принимает вид:

$$\begin{vmatrix} 8-7\varepsilon & 5+6\varepsilon \\ 7+8\varepsilon & 8-7\varepsilon \end{vmatrix} = 29 - 194\varepsilon + \varepsilon^2. \tag{236}$$

Из формулы (236) следует, что при

$$0 \le \varepsilon \le 87 - \sqrt{87^2 - 29} = 0{,}1668 \tag{237}$$

свободный член будет положительным, и лишь при $\varepsilon > 0{,}1668$ он может стать отрицательным, и тогда устойчивость системы (234) может исчезнуть.

В предыдущем параграфе мы уже рассматривали запасы устойчивости системы (199) без управления и убедились, что без управления устойчивость сохранится лишь при вариациях коэффициентов, удовлетворяющих неравенству

$$0 \le \varepsilon \le 0{,}005155. \tag{238}$$

Таким образом, правильно направленное управляющее воздействие совсем небольшой интенсивности увеличило запас устойчивости более чем в 32 раза — от $\varepsilon = 0{,}5155\%$ до $\varepsilon = 16{,}68\%$.

Разумеется, надо еще проверить, при каких ε может измениться знак при втором члене характеристического полинома системы (234) — при члене с первой степенью λ. Но этот член равен

$$(8 - 7\varepsilon + 8 - 7\varepsilon)\lambda \tag{239}$$

и может изменить знак лишь при $\varepsilon \ge 0{,}875$, что много больше вариации, способной изменить знак свободного члена характеристического полинома и тем самым изменить устойчивость системы. В данном примере, как и во всех предыдущих, наиболее опасным источником потери устойчивости является изменение знака свободного члена при вариациях параметров объекта управления.

Заметим, что в рассмотренных примерах мы не учитывали вариаций параметров регулятора $\mathbf{u} = \mathbf{kx}$. Можно, разумеется, учитывать и их, но вариации параметров регулятора почти всегда много меньше вариаций параметров объекта управления и поэтому на первом этапе исследования их можно полагать равными нулю.

Рекомендации по синтезу управления, увеличивающего запасы устойчивости

Изложенный материал позволяет дать следующие рекомендации по синтезу управления, обеспечивающего повышение запасов устойчивости и улучшающего безопасность работы объектов, параметры которых могут существенно изменяться в ходе эксплуатации:

1. Первый шаг — это построение прямой таблицы знаков для определителя матрицы $\mathbf{A}$ объекта управления, математическая модель которого имеет вид $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu}$ и к которому можно приложить управляющее воздействие, вырабатываемое линейным регулятором с обратной связью $\mathbf{u} = \mathbf{kx}$, где $\mathbf{k}$ — вектор коэффициентов управления, после чего процессы в системе управления будут описываться системой уравнений $\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} + \mathbf{bk})\mathbf{x}$.

2. Учитывая, что за счет выбора коэффициентов усиления регулятора $\mathbf{u} = \mathbf{kx}$ можно реализовать самые различные матрицы $\mathbf{bk}$, следует выбрать такую $\mathbf{bk}$, чтобы она увеличивала элементы матрицы $\mathbf{A}$, соответствующие знакам "плюс" прямой таблицы знаков определителя матрицы $\mathbf{A}$, и уменьшала элементы, соответствующие знакам "минус" этой таблицы. Отметим, что если за счет реализации

матрицы **bk** будут увеличены элементы матрицы **A**, соответствующие знакам "минус" прямой таблицы знаков определителя матрицы **A**, то запасы устойчивости будут уменьшаться, и объект управления может даже потерять устойчивость (что и было продемонстрировано в примере 15).

Поэтому использование таблиц знаков, подробно рассмотренных в *первой части* книги, играет большую роль и в теории управления. Эти "таблицы" позволяют правильно распорядиться ограниченными ресурсами управляющих воздействий для увеличения запасов устойчивости.

Пример 17

Рассмотрим объект управления, описываемый системой уравнений $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$, у которого свободный член характеристического полинома является определителем третьего порядка и после умножения на $(-1)^3$ имеет вид:

$$\begin{vmatrix} 14 & 12 & 3 \\ 12 & 16 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4. \tag{240}$$

Для определителя (240) обратная таблица знаков равна

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ - & + & - \end{vmatrix}. \tag{241}$$

Пользуясь методикой, изложенной в *первой части*, можно вычислить, что если все элементы определителя (240) имеют одинаковые относительные вариации $\pm\varepsilon$, то при наиболее неблагоприятном сочетании знаков вариаций (сочетании, соответствующем обратной таблице знаков) определитель (240) может стать отрицательным уже при $|\varepsilon| \geq 0{,}0075$. Это говорит о том, что рассматриваемая нами система со свободным членом характеристического полинома (240) имеет очень малые запасы устойчивости. Уже при $\varepsilon \geq 0{,}75\%$ устойчивость может потеряться.

Даже если вариации испытывают не все элементы определителя (240), а только его первая строка, и определитель (240) принимает вид

$$\begin{vmatrix} 14(1+\varepsilon) & 12(1-\varepsilon) & 3(1+\varepsilon) \\ 12 & 16 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 308\varepsilon \tag{242}$$

(вариации элементов первой строки соответствуют обратной таблице знаков), то и в этом случае уже при $\varepsilon > 1{,}3\%$ определитель может стать отрицательным и устойчивость рассматриваемого объекта потеряется.

Мы убеждаемся, что запасы устойчивости исследуемой системы недостаточны (даже если вариации испытывают только элементы первой строки) и что запасы устойчивости желательно увеличить. Это можно сделать, если с помощью управления, т. е. с помощью матрицы **bk** увеличить те элементы определителя, которые способствуют его возрастанию, или же уменьшить те элементы, которые способствуют его убыванию. А определить, какие элементы определителя увеличивают его и какие — уменьшают, можно очень легко — достаточно использовать прямую или обратную таблицы знаков. При увеличении элемента определителя, стоящего на месте знака "плюс" в прямой таблице знаков, или при уменьшении элемента, стоящего на месте знака "плюс" в обратной таблице знаков, определитель увеличивается.

Воспользуемся этим правилом для увеличения запасов устойчивости исследуемой нами системы. Из таблицы знаков (241) сразу видно, что уменьшение элемента 14, стоящего на первом месте в первой строке определителя (240), увеличит величину определителя и тем самым — при сохранении тех же вариаций первоначальных элементов — увеличит запасы устойчивости.

Пусть, например, выбраны такие коэффициенты усиления регулятора с обратной связью $\mathbf{u} = \mathbf{kx}$, чтобы она привела к матрице **bk**, имеющей вид:

$$\mathbf{bk} = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{243}$$

В этом случае свободный член характеристического полинома исследуемой системы будет равен определителю

$$\begin{vmatrix} 14-\alpha & 12 & 3 \\ 12 & 16 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4\alpha, \tag{244}$$

а с учетом вариаций коэффициентов первой строки определителя (240) — при наиболее неблагоприятном сочетании знаков этих вариаций, соответствующих обратной таблице знаков определителя (240), определитель (244) примет вид:

$$\begin{vmatrix} 14-\alpha+14\varepsilon & 12-12\varepsilon & 3+3\varepsilon \\ 12 & 16 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 4\alpha - 308\varepsilon. \tag{245}$$

В следующей табл. 6 для различных величин α приведены значения абсолютных величин вариаций ε, превышение которых может нарушить устойчивость исследуемой системы.

Таблица 6

α	−1	0	1	10
ε	0	0,013	0,026	0,143

Мы убеждаемся, что за счет выбора достаточно больших отрицательных значений α в матрице (243) можно обеспечить любую желаемую величину запасов устойчивости.

В то же время ошибка в правильном выборе абсолютных величин или знаков матрицы **bk** весьма опасна. Так, в рассматриваемом нами примере выбор матрицы (243), в которой α равно $\alpha = -1$, сразу приводит исследуемую систему на границу устойчивости (запас устойчивости равен нулю), а при $\alpha < -1$ система теряет устойчивость даже при отсутствии вариаций параметров объекта управления.

Правильный выбор знаков элементов матрицы **bk**, обеспечивающих увеличение запасов устойчивости системы управления, легко выполняется при использовании таблиц знаков определителя матрицы **A** в системе управления $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{u}$, $\mathbf{u} = \mathbf{k}\mathbf{x}$.

Отметим, что в теории управления вопросы синтеза систем с хорошими запасами устойчивости неоднократно рассматривались (см. публикации [67, 68, 72, 73] и многие другие).

Однако, поскольку в те годы еще не было методов, позволяющих непосредственно синтезировать регуляторы, оптимальные по запасам устойчивости, и правильно выбирать матрицу **bk**, то прибегали к косвенным методам — к оценке "запасов устойчивости по амплитуде, по фазе" и т. п., что, конечно, гораздо менее удобно. Использование таблиц знаков, подробно описанных в *первой части* книги, позволяет по-новому и гораздо более плодотворно подойти к проблеме синтеза систем управления с хорошими запасами устойчивости.

В то же время необходимо учитывать, что рассматриваемый прием увеличения запасов устойчивости хорошо работает лишь в наиболее часто встречающихся системах вида $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}\mathbf{u}$, в которых потеря устойчивости при вариациях параметров матрицы **A** происходит по причине изменения знака определителя матрицы **A** (он же — свободный член характеристического полинома матрицы). Возможны (хотя и встречаются редко) такие матрицы **A**, у которых знак определителя матрицы $\mathbf{A} + \mathbf{bk}$ не изменяется при исследуемых вариациях ее элементов матрицы **A**, но устойчивость все же теряется из-за нарушения других условий устойчивости. Поэтому необходимо дополнительно проверить гурвицевость характеристического полинома матрицы $\mathbf{A} + \mathbf{bk}$ при вариациях ее элементов.

Таблицы алгебраических дополнений

Отметим, что немного усовершенствованные таблицы знаков могут помочь в выборе матрицы **bk**, наилучшим образом увеличивающей запасы устойчивости. Напомним, что в *первой части* было показано: при изменении элемента a_{ij} любого определителя на величину α определитель возрастает (или убывает) на величину $a_{ij} \cdot A_{ij}$, где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij}. Поскольку для наилучшего распоряжения ограниченными ресурсами управления важно учитывать не только знак алгебраического дополнения, но и его величину, полезно кроме уже описанных ранее таблиц знаков использовать таблицу алгебраических дополнений определителей.

Так, для определителя (240) легко вычислить, что

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 16 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -4; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = +13; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 12 & 16 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -32;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 14 & 12 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 16 & 5 \end{vmatrix} = +12; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 14 & 3 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = -34; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 16 \end{vmatrix} = 80,$$

и таблица алгебраических дополнений принимает вид:

$$\begin{vmatrix} -4 & +13 & -32 \\ 0 & -1 & -4 \\ +12 & -34 & +80 \end{vmatrix}. \tag{246}$$

Отсюда сразу следует, что если матрица **bk** равна

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \tag{247}$$

но величины элементов и их количество ограничены, то нужно в первую очередь использовать элемент c_{33}. Если матрица **bk** состоит из одного элемента и имеет вид

$$\mathbf{bk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}, \tag{248}$$

то приращение определителя (240) от прибавления матрицы (248) к исходной матрице

$$\begin{pmatrix} 14 & 12 & 3 \\ 12 & 16 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{249}$$

будет равно $80 \cdot c_{33}$, а если

$$\mathbf{bk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{250}$$

то приращение будет равно $12 \cdot c_{31}$, т. е. при одних и тех же величинах c_{31} и c_{33} приращение определителя будет в $\frac{12}{80} = \frac{3}{20}$ раза меньше, а это означает, что и приращение запаса устойчивости будет меньше.

Если же матрица **bk** такова, что в ней отличен от нуля только один из элементов первой строки, то лучше всего выбрать ее в виде

$$\mathbf{bk} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{251}$$

Опираясь на прямую таблицу знаков определителя (240), заключаем, что для увеличения определителя знак элемента c_{13} матрицы (251) должен быть отрицательным. Если $c_{13} = -\gamma$, то при наиболее неблагоприятном сочетании знаков вариаций элементов первой строки определителя (240) — при сочетании знаков, соответствующем его обратной таблице знаков — определитель (240) примет вид:

$$\begin{vmatrix} 14(1+\varepsilon) & 12(1-\varepsilon) & -\gamma+3(1+\varepsilon) \\ 12 & 16 & 5 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 32\gamma - 308\varepsilon. \tag{252}$$

Если, например, $c_{13} = -1$, то определитель (252) равен $36 - 308\varepsilon$ и запас устойчивости по вариациям элементов первой строки будет равен $\varepsilon = 0{,}117$, т. е. вырастет в девять раз по сравнению с $\gamma = 0$. Ранее мы убедились, что при той же абсолютной величине единственного элемента матрицы **bk**, но при матрице **bk**, соответствующей матрице (243), запас устойчивости возрастает только вдвое.

Таким образом, таблица алгебраических дополнений определителя матрицы **A** системы (222) позволяет наилучшим образом распорядиться ограниченными ресурсами управления для повышения запаса устойчивости.

При этом, однако, надо учитывать, что при прибавлении к матрице **A** матрицы **bk** алгебраические дополнения могут измениться, и это может ограничивать возможность увеличения определителя матрицы **A** (и соответствующего запаса устойчивости) за счет прибавления к ней матрицы **bk**.

Пример 18

Для матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{253}$$

с определителем

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5 \tag{254}$$

таблица алгебраических дополнений имеет вид

$$\begin{vmatrix} +3 & -2 \\ -2 & +3 \end{vmatrix} \tag{255}$$

и показывает, что определитель может быть увеличен, например, за счет прибавления к матрице **A** матрицы

$$\mathbf{bk} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix} \tag{256}$$

с отрицательными элементами на вспомогательной диагонали.

Действительно, при $\alpha = 1$ будет

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{bk}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

при $\alpha = 2$ будет

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{bk}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9,$$

но при дальнейшем увеличении α, например до $\alpha = 3$, будет

$$\det(\mathbf{A} + \mathbf{bk}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8,$$

т. е. определитель уменьшится. Это связано с тем, что при $\alpha = 3$ таблица алгебраических дополнений матрицы $\mathbf{A} + \mathbf{bk}$ примет вид

$$\begin{vmatrix} +3 & +1 \\ +1 & +3 \end{vmatrix} \tag{257}$$

и будет отличаться от таблицы (255).

Исследование зависимости знаков алгебраических дополнений матрицы $\mathbf{A} + \mathbf{bk}$ от $\mathbf{bk}$ показывает, что знаки алгебраических дополнений A_{12} и A_{21} изменяются при $\alpha = 2$: при $\alpha < 2$ они отрицательны, при $\alpha > 2$ они становятся положительными.

Отсюда следует, что если мы выбрали регулятор $\mathbf{u} = \mathbf{kx}$ таким, что матрица $\mathbf{bk}$ имеет вид (256), то не следует увеличивать абсолютные значения элементов a_{12} и a_{21} в матрице $\mathbf{bk}$ больше, чем до $\alpha = 2$.

Аналогичные проверки — не изменились ли знаки алгебраических дополнений матрицы $\mathbf{A} + \mathbf{bk}$ по сравнению с матрицей **A** — следует проводить и для матриц более значительных размеров, чем простая матрица (253) размера 2×2 в рассмотренном нами примере.

Для матриц **A** любых размеров $n \times n$ в системах управления вида $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{bu}$ с регулятором $\mathbf{u} = \mathbf{kx}$ использование таблиц алгебраических дополнений помогает выбрать управление $\mathbf{u} = \mathbf{kx}$, обеспечивающее наилучшее увеличение запасов устойчивости системы управления.

§ 36. Грубые и робастные системы. Возможности регуляризации

В *первой части* книги мы отмечали публикации, в которых ранее уже исследовались системы линейных алгебраических уравнений при вариациях их коэффициентов. В области систем, описываемых дифференциальными уравнениями с неполностью известной математической моделью, в качестве первой и наиболее важной публикации следует отметить монографию [74], опубликованную в 1937 году, а также статью [75].

В указанной монографии, начиная с первых страниц ее введения, подчеркивалось, что любое теоретическое исследование реальных объектов и процессов неизбежно требует идеализации, отбрасывания ряда факторов, которые в том или ином смысле "мало" влияют на исследуемый объект.

Простейший случай — это когда математическая модель исследуемого объекта или процесса в виде дифференциального уравнения или системы уравнений достаточно хорошо отражает характер процессов, протекающих в исследуемом объекте. Но даже в этом простейшем случае необходимо помнить, что коэффициенты уравнений определяются почти всегда из опыта, и уже поэтому не могут идеально точно описывать исследуемый объект. Кроме того, с течением времени параметры объекта, а значит, и коэффициенты математической модели не могут оставаться идеально точно неизменными. Малые вариации коэффициентов неизбежны, и их необходимо учитывать, тем более, что даже малые изменения коэффициентов могут приводить к большим последствиям.

В более сложных случаях необходимо учитывать, что выбранная в качестве первого этапа исследования математическая модель заведомо не полно, не точно описывает объект исследования. В этих случаях необходимо проверить, в какой мере изменяется поведение математической модели при малом изменении вида дифференциальных уравнений, описывающих исследуемую систему. Здесь следствия "малых" изменений могут быть еще более разительны.

В 1937 году в монографии [74] был впервые поставлен важный вопрос: какими свойствами должна обладать математическая модель для того, чтобы она могла (по крайней мере — могла!) правильно отражать поведение реальных объектов физики и техники? Какие математические модели нужно сразу отсеивать, как заведомо не отражающие поведения реальных объектов?

Вот ответ, который дали авторы монографии [74]: реальный физический интерес имеют лишь "грубые" системы, т. е. системы, которые не изменяют существенно своего поведения при малых изменениях вида дифференциальных уравнений, описывающих систему. Только "грубые" системы могут служить теоретическими моделями реальных систем ([74], с. 33). Однако в [74] на той же странице 33 сделана важная оговорка: "эти малые изменения будем предполагать такими, которые не меняют порядка дифференциального уравнения (или, что то же самое, не меняют числа дифференциальных уравнений первого порядка, если рассматривается система из n уравнений первого порядка), т. е. рассматривается "нормальная форма Коши" записи дифференциальных уравнений".

Как уже указывалось в § 21, уравнение

$$\varepsilon\ddot{x} + \dot{x} + x = 0, \tag{258}$$

в котором ε мало, можно рассматривать как малое изменение уравнения

$$0 \cdot \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \tag{259}$$

(коэффициент 0 в уравнении (257) при $\ddot{x}$ изменился на малую величину ε), а систему

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon\dot{x}_1 &= x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2; \end{aligned}\right\} \tag{260}$$

при малом ε можно рассматривать как малое изменение системы

$$\left.\begin{aligned} 0 &= x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2, \end{aligned}\right\} \tag{261}$$

эквивалентной одному уравнению

$$\dot{x}_2 = x_2. \tag{262}$$

Однако уже на примере уравнений (258)–(262) — простейших линейных уравнений с постоянными коэффициентами — сразу видно, что, например, решения уравнения (258) даже при очень малых ε совсем не похожи на решения того же уравнения при $\varepsilon = 0$, когда оно переходит в уравнение $\dot{x} + x = 0$.

Уравнения с малыми коэффициентами при старших производных называют *сингулярно возмущенными уравнениями*. Их решения — даже при малых возмущениях, при малых ε — существенно отличаются от решений невозмущенных уравнений (или систем). Поэтому в настоящей книге сингулярно возмущенные уравнения не рассматриваются.

Это важно лишний раз подчеркнуть потому, что при малых вариациях больших коэффициентов могут возникать уравнения, внешне похожие на сингулярно возмущенные. Так, например, в ранее исследованной системе уравнений (27)–(28) при малом изменении коэффициента при Dx_2 в уравнении (28), равного единице, при переходе от единицы к $(1+\varepsilon)$ возникала система с характеристическим полиномом (29), которая эквивалентна дифференциальному уравнению

$$\left[-\varepsilon D^4 + (1-4\varepsilon)D^3 + (5-5\varepsilon)D^2 + (7-2\varepsilon)D + 3\right]x = 0, \tag{263}$$

действительно являющемуся "сингулярно возмущенным" по отношению к уравнению

$$\left(D^3 + 5D^2 + 7D + 3\right)x = 0, \tag{264}$$

но не к системе (27)–(28).

Это внешнее сходство приводило к недоразумениям при обсуждении первых изданий книги [5]. Некоторые из участников обсуждения считали, что ответы на все возникающие вопросы можно найти в хорошо исследованной области сингулярно возмущенных уравнений. На самом деле, оснований для недоразумений и путаницы нет. Надо просто иметь в виду, что предметом исследования является не уравнение (264), а система уравнений (27)–(28), в которой никаких "сингулярностей" или "вариаций нуля" нет, а малые изменения претерпевает лишь коэффициент при Dx_2 в уравнении (28) — коэффициент, равный единице и не являющийся малым по отношению к другим коэффициентам системы (27)–(28).

Кроме того, в теории сингулярно возмущенных уравнений исследуются, разумеется, только устойчивые решения уравнений — для уравнения (263) это решения, соответствующие $\varepsilon \leq 0$. Неустойчивые решения по сути дела не требуют исследования, в них все ясно: неустойчивые решения стремительно возрастают (по абсолютной величине) и возрастают тем быстрее, чем меньше модуль малой величины ε.

Нас же интересует как раз возможность появления неустойчивых и стремительно растущих решений; мы исследуем, при каких условиях и для каких систем эти стремительно растущие решения появляются. Подобные системы, не отсеянные на стадии проектирования и "воплощенные в металле", приводят — и уже не раз приводили — к авариям и катастрофам.

Исследуемые нами системы не относятся к "негрубым", они подпадают под оговорку, сделанную в [74] на с. 33, но они столь же опасны, как и "негрубые", и так же должны отсеиваться еще на стадии проектирования. Однако рассматриваемые нами системы, не являясь "негрубыми", не стали в свое время предметом многочисленных исследований, посвященных "грубым" и "негрубым" системам. Эти важные исследования развернулись сперва в СССР вскоре после публикаций [74] и [75], а затем были продолжены за рубежом. Исследователи США вместо терминов "грубость", "грубые системы" предпочитали термины "робастность", "робастные системы" — от английского слова *"robust"*, т. е. крепкий, дюжий. Постепенно термины "робастность", "робастные системы" стали использоваться и российскими исследователями (см., например, книгу [68] и многие другие).

Такой перекос в терминологии нельзя считать правильным. Во-первых, забывается приоритет русских ученых — авторов публикаций [74] и [75], впервые открывших новую область исследований, а во-вторых, в определении понятия "робастность" пропущена важная оговорка, сделанная в [74] на с. 33. Отсутствие этой оговорки не способствует полноте и ясности понимания рассматриваемого круга явлений.

Отметим, что погрешности решений различных инженерных задач при учете вариаций параметров исследуемых объектов делятся на погрешности неустранимые, устранимые и частично устранимые.

В настоящей книге основное внимание уделено неустранимым погрешностям решений, т. е. таким, единственной причиной которых являются вариации реальных параметров исследуемого объекта, их отклонения от номинальных значений, принятых при расчете (если расчет ведется в рамках "математики-1", предполагающей, что параметры объекта известны и неизменны). Эти погрешности не устранимы путем усовершенствования методов расчета. Они присущи самому объекту исследования, и для их уменьшения нужно изменить сам объект, сделать его, например, менее чувствительным к вариациям параметров. Расчет не может устранить или изменить неустранимую погрешность, он может ее вычислить, выявить и тем самым предсказать, как будет себя вести рассчитываемый и проектируемый объект в ходе эксплуатации, когда малые вариации параметров объекта почти всегда неизбежны. Расчет по предложенным в книге методикам позволяет выявить еще на стадии проектирования опасные "плохо обусловленные" объекты и предотвратить тем самым аварии и катастрофы.

Допустим теперь, что параметры объекта и коэффициенты его математической модели точно известны и неизменны (конечно, такое допущение является идеализацией, но такая идеализация сотни лет использовалась при расчетах). В этом случае единственной причиной погрешности в результатах расчета являются погрешности вычислений, и конечная (неидеальная) точность методов расчета. Эта погрешность может быть уменьшена, а иногда даже полностью устранена за счет совершенствования методов расчета, поэтому ее и называют *устранимой погрешностью*. Примеры: если погрешность возникает, например, из-за конечного числа итераций при использовании итерационных методов, то погрешность можно уменьшить за счет увеличения числа итераций; если используется суммирование конечного числа членов бесконечных рядов, то погрешность можно уменьшить за счет увеличения числа учитываемых малых членов ряда и т. п.

Мы не рассматриваем в настоящей книге устранимые погрешности, поскольку они достаточно хорошо и подробно рассмотрены во многих руководствах и учебниках по вычислительной математики и методам вычислений (например, [1, 2, 7, 9, 10, 13, 14, 27, 29–31, 71]), а сосредоточили внимание на анализе и вычислении неустранимых погрешностей.

Отметим также, что при расчете многих объектов устранимые и неустранимые погрешности могут встречаться совместно. Пусть, например, один из коэффициентов a_i математической модели исследуемого объекта (отражающий, разумеется, величину реальных параметров объекта), во-первых, испытывает в ходе эксплуатации реальные вариации величиной $\pm\varepsilon_1$ и, во-вторых, известен нам только с ограниченной точностью $\pm\varepsilon_2$. В этом случае истинное и неизвестное нам значение коэффициента $\overline{a}_i$ лежит внутри интервала:

$$a_i\left(1-|\varepsilon_1|-|\varepsilon_2|\right)\le\overline{a}_i\le a_i\left(1+|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|\right),$$

где a_i — значение, принятое при расчете.

В этом случае погрешности являются частично устранимыми; за счет улучшения методов оценки величины $\overline{a}_i$ можно уменьшить величину $|\varepsilon_2|$. Величину $|\varepsilon_1|$ методами расчета изменить нельзя. Наличие ее ведет к неустранимой погрешности расчета, которую можно только вычислить.

Если $|\varepsilon_2|>0$, то для уменьшения его влияния на точность расчетов иногда прибегают к своеобразной методике — так называемой регуляризации [40], впервые предложенной академиком А. Н. Тихоновым в 1943 году. Проиллюстрируем методику регуляризации на простом примере объекта, математической моделью которого является система уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{aligned}\right\} \tag{265}$$

Если известно, что, например, $a_{11} = 7$, $a_{12} = 8$, $a_{21} = 6$, $a_{22} = 7$, $b_1 = 15$, $b_2 = 13$, то $x_1 = x_2 = 1$. Предположим теперь, что относительно a_{11} известно лишь то, что этот коэффициент заключен в пределах

$$7 - |\varepsilon| \le a_{11} \le 7 + |\varepsilon|, \tag{266}$$

а остальные коэффициенты известны точно.

В этом случае, как нетрудно подсчитать, будет

$$x_1 = \frac{1}{1 \pm 7|\varepsilon|}. \tag{267}$$

Если $\varepsilon > 0$, то $x_1 = x_{1\,\min} = \dfrac{1}{1 + 7|\varepsilon|}$, если $\varepsilon < 0$, то $x_1 = x_{1\,\max} = \dfrac{1}{1 - 7|\varepsilon|}$. Погрешность ε существенно влияет на решение, особенно на величину $x_{1\,\max}$. Уже при $|\varepsilon| = 0{,}01$ будет $x_{1\,\max} = 1{,}075$, при $|\varepsilon| = 0{,}1$ будет $x_{1\,\max} = 3{,}333$, а при $|\varepsilon| = 0{,}13$ будет $x_{1\,\max} = 11{,}11$.

Для уменьшения влияния погрешностей коэффициентов на решения систем линейных алгебраических уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ А. Н. Тихонов предложил к матрице $\mathbf{A}$ (или к другим матрицам, встречающимся в близких задачах) добавлять единичную матрицу, умноженную на постоянную величину α, называемую "параметром регуляризации". Применительно к уравнению (265) нужно будет добавить матрицу:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \tag{268}$$

и система уравнений (265) перейдет в систему

$$\left.\begin{aligned} (7 + \alpha)x_1 + 8x_2 = 15; \\ 6x_1 + (7 + \alpha)x_2 = 13, \end{aligned}\right\} \tag{269}$$

решения которой мы и будем искать. Конечно, добавляя регуляризующую матрицу (268), мы переходим к другой задаче, отличной от исходной, от решения системы (265), и далеко не очевидно, что эта новая задача даст нам что-либо хорошее для решения задачи исходной. Однако А. Н. Тихонов показал, что добавление регуляризующей матрицы может уменьшить зависимость решения от погрешностей в коэффициентах системы (хотя именно *может* уменьшить, а *не обязательно* уменьшает).

Действительно, решение x_1 системы уравнений (269) с учетом неравенств (266), как легко вычислить, имеет вид

$$x_1 = \frac{1+15\alpha}{1+14\alpha+\alpha^2+7\varepsilon+\alpha\varepsilon}, \qquad (270)$$

и нетрудно проверить, что для многих (но не всех!) значений α и ε влияние погрешности коэффициента a_{11} на решение уменьшается по сравнению с $\alpha = 0$. Если, например, $\alpha = 0{,}1$ и $|\varepsilon| = 0{,}1$, то без регуляризации будет $x_{1\,\min} = \frac{1}{1+0{,}7} = 0{,}588$ и $x_{1\,\max} = \frac{1}{1-0{,}7} = 3{,}333$ (т. е. относительно x_1 можно лишь утверждать, что $0{,}588 \le x_1 \le 3{,}333$), а после регуляризации имеем $x_{1\,\min} = 0{,}812$, в то время как $x_{1\,\max} = 1{,}47$ (таким образом, $0{,}812 \le x_1 \le 1{,}47$). Размах возможных при наличии погрешности в a_{11} значений x_1 уменьшился от $x_{1\,\max} - x_{1\,\min} = 2{,}745$ до 0,668, величины $x_{1\,\max}$ и $x_{1\,\min}$ приблизились к истинной (но при наличии погрешностей неизвестной) величине $x_1 = 1$.

В то же время, если рассмотреть другие величины параметра регуляризации α и максимальной величины погрешности $|\varepsilon|$, то можно (как показывает формула (270)) не только улучшить, но даже ухудшить нерегуляризованное решение. Поэтому к регуляризации систем линейных алгебраических уравнений следует подходить осторожно. Перед тем как выбрать величину параметра регуляризации α, нужно проверить и просчитать различные значения α и иметь в виду, что наилучшее значение α зависит от оценок максимальных величин ε_{ij} погрешностей коэффициентов.

Отметим также, что регуляризацию имеет смысл применять только для уменьшения влияния устранимых или частично устранимых погрешностей коэффициентов. Неустранимые погрешности путем расчета можно только выявить и вычислить.

Методы регуляризации применимы, разумеется, не только к системам линейных алгебраических уравнений, но и ко многим другим инженерным расчетам. Об этом рассказано, например, в публикации [40]. В настоящей книге эти вопросы подробно не рассматриваются. Основное внимание (в первой части и частично во второй) уделено выявлению и вычислению неустранимых погрешностей.

Заключение

В этой книге приведен, во-первых, критический обзор (с анализом достоинств и недостатков) некоторых уже известных методов расчета при учете неточно заданных параметров исследуемого объекта и вариаций этих параметров (методы интервального анализа, оценки по "числам обусловленности"), а во-вторых, и это главное, предложены и разработаны новые методы, получены новые результаты.

Перечислим коротко основные из них.

1. Было обнаружено, что большие погрешности решений при вариациях правых частей систем уравнений возможны и в хорошо обусловленных системах, предложена простая формула для оценки этой погрешности для каждой составляющей x_i вектора решения $\mathbf{x}$ системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (см. §§ 5, 15).

2. Предложен алгоритм вычисления точной величины погрешности каждой составляющей x_i вектора решения $\mathbf{x}$ системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ при учете вариаций элементов матрицы $\mathbf{A}$ и вектора правых частей $\mathbf{b}$ (см. § 12).

3. Доказано, что эквивалентные (равносильные) преобразования систем уравнений, не изменяющие самих решений, могут изменять многие важные свойства решений, такие, как параметрическая устойчивость, корректность и т. д. (см. §§ 23–25).

4. Доказано, что существование функции Ляпунова не всегда гарантирует устойчивость решений исследуемой системы дифференциальных уравнений (см. § 26).

5. Показано, что известная теорема о непрерывной зависимости решений систем дифференциальных уравнений в той формулировке, в которой она приводится в учебниках ([33, 34] и др.), неверна. Для обеспечения справедливости теоремы необходимо введение дополнительных условий в ее формулировку (см. § 27).

6. Предложены методы, обеспечивающие надежность вычислений при учете вариаций параметров математических моделей объектов, представляемых в виде систем дифференциальных уравнений (см. § 32).

7. На основе методики таблиц знаков предложен метод проверки сохранения устойчивости линейных систем управления при вариациях параметров объекта управления и регулятора; предложен метод увеличения запасов устойчивости (см. §§ 34, 35).

Вопросы, поднятые в настоящей книге, ранее частично получили решение в монографиях [5, 6, 11, 78] и ряде журнальных статей [22, 36–38, 56] (подробное изложение истории вопроса дано в [31] и в [47]). Опубликованные там и в этой книге решения и алгоритмы создали возможность вести более надежные расчеты различных технических систем, математическими моделями которых являются системы линейных алгебраических уравнений и системы дифференциальных уравнений. Эту тематику подхватил и ряд других авторов — см. публикации [21, 26, 32, 42, 52, 56, 68, 77, 80–86]. Эти публикации открыли возможность повысить качество работы многих технических систем и устройств, сократить число аварий и катастроф, спасти жизни людей. Но между "открытием возможности" осуществить все эти хорошие вещи и реальным их осуществлением, как известно, пролегает неизбежный временной промежуток. К сожалению, из-за тяжелого положения, сложившегося в российской науке за последние десятилетия, этот временной промежуток неоправданно затянулся. Практических реализаций предложений и алгоритмов расчета, предложенных в упомянутых публикациях, все еще мало, хотя с первого издания монографии [5] прошло уже 15 лет, и немало новых статей и книг было за это время опубликовано.

Одним из первых подхватил предложения, изложенные в [5] и [11], Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (МГТУ). На сайте МГТУ 29.01.2011 года был размещен составленный В. Б. Маничевым призыв "ко всем преподавателям и студентам технических университетов России". Они призывались знать и использовать опубликованные результаты проф. Ю. П. Петрова, которые расценивались в "призыве" как "важнейшее на рубеже веков научное открытие в математическом моделировании реальных систем". Далее на сайте говорилось, что многие широко используемые программы (назывались программы ANSYS, NASTRAN, MATLAB, Simulink и др.) не учитывают, по-видимому, существования "особых" систем, в результате чего рушатся многие построенные недавно объекты. Далее указывалось, что в МГТУ началась работа по пересмотру и совершенствованию методик инженерных расчетов с учетом последних научных открытий.

Этот опубликованный в 2011 году "призыв" "ко всем преподавателям и студентам всех технических университетов России", а также активная работа сотрудников МГТУ, результаты которой частично опубликованы в [32, 80], способствовали некоторому расширению использования опубликованных ранее научных результатов. Они стали, например, широко использоваться в Балтийском государственном техническом университете "Военмех" им. Д. Ф. Устинова (под руководством д-ра техн. наук В. Т. Шароватова).

Будем надеяться, что настоящая книга, в которой подведены наиболее полные, полученные к 2014 году, итоги исследований по совершенствованию методики инженерных расчетов, поможет их дальнейшей практической реализации.

Отметим, что одной из важнейших областей приложения изложенных методов является проектирование и расчет сложной подвижной техники и современных конструкций (особенно — в области оборонной промышленности). Действительно, недостатки и грубо приближенный характер традиционных методов расчета (использование "чисел обусловленности" и т. п.) хорошо известны, и для повышения надежности обычно используют расчет с "запасом", что позволяет частично компенсировать ненадежность вычислений. Однако расчеты с "запасом" неизбежно ведут к утяжелению механических конструкций, к ухудшению качества систем управления, когда из опасения потери устойчивости при малых вариациях параметров объекта загрубляют коэффициенты усиления устройств управления.

Усовершенствованные методы расчета могут и должны применяться в промышленности, в строительстве, на транспорте. Использование этих методов обеспечит сокращение расхода материалов, уменьшение стоимости строительства, снижение вероятности аварий и катастроф, спасение жизни людей. Надо лишь обеспечить, чтобы новые, более совершенные методы проектирования и расчета применялись скорее и шире.

Отметим еще, что авторы первоначально планировали издать настоящую книгу не в двух, а в трех частях, посвятив третью часть программам расчета по предложенным алгоритмам, примерам расчета и техническим приложениям. По ряду причин авторы ограничились двумя частями и намереваются в скором времени опубликовать третью часть отдельной книгой.

Вопросы, замечания и пожелания по содержанию книги можно направлять на e-mail: **petrov1930@mail.ru**.

Литература

1. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики: учеб. пособие. — СПб.: Издательство "Лань", 2007. — 664 с.
2. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах: учеб. пособие. — СПб.: Издательство "Лань", 2008. — 367 с.
3. Шокин Ю. И. Интервальный анализ. — Новосибирск: Наука, 1981. — 112 с.
4. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. — Новосибирск: Наука, 1986. — 221 с.
5. Петров Ю. П., Петров Л. Ю. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. — СПб.: БХВ-Петербург, 1999. — 109 с.; 4-е изд., расшир. и доп. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 224 с.
6. Петров Ю. П. Как получать надежные решения систем уравнений. — СПб.: БХВ-Петербург, 2009. — 175 с.
7. Махмутов М. М. Лекции по численным методам. Институт компьютерных вычислений. — М., Ижевск, 2007. — 236 с.
8. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. — М.: Наука, 1978. — 302 с.
9. Мышкис А. Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы. — 3-е изд. — М.: Физматлит, 2007. — 687 с.
10. Ализняк В. Е. Основы научных вычислений. — М., Ижевск, 2006. — 264 с.
11. Петров Ю. П. Обеспечение достоверности и надежности компьютерных расчетов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 160 с.
12. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов: учебник для вузов. — 8-е изд. — М.: Наука, 1979. — 559 с.
13. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. — М.: Мир, 2001. — 429 с. (перевод издания Demmel J. W. Applied Numerical Linear Algebra, SJAM, Philadelphia, 1997).
14. Устинов С. М., Зимницкий В. А. Вычислительная математика. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 160 с.
15. Шарый С. П. Оптимальное внешнее оценивание множеств решений интервальных систем уравнений. Часть первая // Вычислительные технологии. — 2002. — Т. 7. — № 6. — С. 90–113.
16. Шарый С. П. Оптимальное внешнее оценивание множеств решений интервальных систем уравнений. Часть вторая // Вычислительные технологии. — 2003. — Т. 8. — № 1. — С. 84–109.
17. Hansen E. Global Optimization Using Interval Analysis. — N. Y.: Marcel Dekker, 1992.

18. Moore R. E. Methods and Applications of Interval Analysis. — SIAM, Philadelphia, 1979.

19. Neumaier A. Interval Methods for System of Equations. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.

20. Шарый С. П. Интервальный анализ или методы Монте-Карло? / Расширенные тезисы докладов Всероссийского совещания по интервальному анализу "Интервал-06". Петергоф, Россия, 1–4 июля 2006 г. — С. 140–144.

21. Петров И. А., Петров Ю. П. Анализ различных подходов к оценке погрешности расчета усилий в строительных конструкциях. Недостатки метода оценки по числу обусловленности // Вестник гражданских инженеров. — 2008. — № 4 (17). — С. 33–38.

22. Петров Ю. П. Получение точных оценок погрешностей решений систем линейных алгебраических уравнений // Вестник гражданских инженеров. — 2010. — № 1 (22). — С. 68–73.

23. Егоров Н. В., Овсянников Д. А. Математическое моделирование систем формирования электронных и ионных пучков. — СПб.: Издательство СПбГУ, 1998. — 274 с.

24. Виноградова Е. М., Егоров Н. В., Кримская К. А. Расчет электростатического поля системы сферических сегментов // Журнал технической физики. — 2008. — Т. 78. — Вып. 8. — С. 155–159.

25. Виноградова Е. М. Математическое моделирование электронно-оптических систем. — СПб.: Издательство СПбГУ, 2005. — 112 с.

26. Иванова К. Ф. Оценка погрешности численного решения уравнений Пуассона под воздействием флуктуаций входных параметров в среде Matlab. Препринт. — СПб.: СПбГУ, 2010. — 34 с.

27. Панов Д. Ю. Справочник по численному интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: Гостехиздат, 1951.

28. Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. — М.: Наука, 1971.

29. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. — М.: Физматгиз, 1966.

30. Вержбицкий В. М. Основы численных методов. — М.: Высшая школа, 2002. — 840 с.

31. Петров Ю. П. Очерки истории теории управления. — СПб.: БХВ-Петербург, 2007. — 266 с.

32. Жук Д. М., Маничев В. Б., Ильицкий А. О. Методы и алгоритмы решения дифференциально-алгебраических уравнений для моделирования систем и объектов во временной области // Информационные технологии. — 2010. — № 7, 8.

33. Матвеев Н. М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — СПб.: Специальная литература, 1996. — 371 с.

34. Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1975. — 239 с.

35. Петров Ю. П. Синтез оптимальных систем управления при не полностью известных возмущающих силах. — Л.: Издательство Ленинградского государственного университета, 1989. — 289 с.

36. Петров Ю. П. О скрытых опасностях, содержащихся в традиционных методах проверки устойчивости // Известия ВУЗ. Электромеханика. — 1991. — № 11. — С. 106–108.

37. Петров Ю. П. Устойчивость линейных систем при вариациях параметров // Автоматика и телемеханика. — 1994. — № 11. — С. 186–189.

38. Петров Ю. П. Предотвращение аварийности в системах управления // Известия ВУЗ. Электромеханика. — 1994. — № 1–2. — С. 37–40.

39. Петров Ю. П. Расследование и предупреждение техногенных катастроф. — СПб.: БХВ-Петербург, 2007. — 104 с.

40. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — 3-е изд. — М.: Наука, 1986. — 287 с.

41. Петров Ю. П. Третий класс задач физики и техники — промежуточных между корректными и некорректными. — СПб.: НИИХ СПбГУ, 1998. — 29 с.

42. Петров Ю. П., Сизиков В. С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями. — СПб.: Политехника, 2003. — 261 с. (Есть перевод на английский язык: Petrov Yuri P., Valery S. Sizikov. Well posed, ill-posed and intermediate problems with applications. Boston/Leiden: VSP, 2005. — 234 с.)

43. Зубов В. И. Методы А. М. Ляпунова и их применение. — Л.: Издательство Ленинградского университета, 1957. — 241 с.

44. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970. — 240 с.

45. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические разложения сингулярно-возмущенных уравнений. — М.: Наука, 1973.

46. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. — М.: Наука, 1978. — 335 с. (Перевод с издания: Von Dirk J. Struik. Abriss ger geschichte der matematik. — Berlin, 1963.)

47. Петров Ю. П. История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 441 с.

48. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов // Автоматика и телемеханика. — 1960. — № 4–6. — 1961. — № 4.

49. Летов А. М. Динамика полета и управление. — М.: Наука, 1969. — 359 с.

50. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М.: Физматгиз, 1959.

51. Стеклов В. А. Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.-Л.: ГИЗ, 1927.

52. Шароватов В. Т., Петров Ю. П. Об ошибках пакета MATLAB; Чертков К. Г., Петров Ю. П. Ошибки, обнаружившиеся в пакете MATLAB / Труды Второй Всероссийской конференции "Проектирование научных и инженерных прило-

жений в среде MATLAB". — Институт проблем управления Российской академии наук. — 2004. — С. 318–327.

53. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: т. 2. — М.-Л.: ОГИЗ, ГИТТЛ, 1948. — 860 с.
54. Лакатос И. Доказательства и опровержения. — М.: Наука, 1967. — 151 с.
55. Петров Ю. П. О "грамматике" науки. — СПб.: ООП СПбГУ, 2003. — 40 с.
56. Академик Данилевич Я. Б., Петров Ю. П. О необходимости расширения понятия эквивалентности математических моделей / Доклады Академии наук. — 2000. — Т. 371. — № 4. — С. 473–475.
57. Шароватов В. Т. Обеспечение стабильности показателей качества автоматических систем. — Л.: Энергоатомиздат, 1987. — 176 с.
58. Ларин В. Б., Науменко К. И., Сунцев В. Н. Синтез оптимальных линейных систем с обратной связью. — Киев: Наукова думка, 1973. — 150 с.
59. Воротников В. И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. — М.: Наука, 1991. — 284 с.
60. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. — Л.: Машиностроение, 1974. — 335 с.
61. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления. — 2-е изд. — Л.: Энергия, 1977. — 280 с.
62. Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. — Л.: Энергоатомиздат, 1985. — 240 с.
63. Харитонов В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства линейных дифференциальных уравнений / Дифференциальные уравнения. — 1978. — № 11. — С. 2086–2088.
64. Петров Ю. П. Оптимизация управляемых систем, испытывающих воздействие ветра и морского волнения. — Л.: Судостроение, 1973. — 216 с.
65. Первозванский А. А. Курс теории автоматического управления. — М.: Наука, 1986. — 615 с.
66. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения. — М.: Наука, 1971.
67. Поляк Б. Т., Щербаков П. С. Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 303 с.
68. Никифоров В. О., Ушаков А. В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. — СПб.: СПбИТМО (ТУ), 2002. — 232 с.
69. Зубов Н. В. Математические методы исследования динамической безопасности. — М.: Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, 2007. — 105 с.
70. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1973. — 831 с.
71. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. — М.: Наука, 1984.

72. Александров А. Г. Синтез регуляторов многомерных систем. — М.: Машиностроение, 1986. — 272 с.

73. Афанасьев В. Н., Колмановский В. Б., Носов В. Р. Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высшая школа, 1989. — 447 с.

74. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1937. — 568 с. (Переиздана в 1959 и 1981 гг.)

75. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы / Доклады Академии наук СССР. — 1937. — Т. 14. — № 5. — С. 247–250.

76. Розенвассер Е. Н., Юсупов Р. М. Чувствительность систем управления. — М.: Наука, 1981. — 464 с.

77. Иванова К. Ф. Знаковый подход к оценке решений интервальных линейных систем // Интервальные технологии. — 2012. — № 9. — С. 46–52.

78. Петров Ю. П. Обеспечение надежности решений систем уравнений. — LAP Lambert Academic Publishing, 2013. — 256 с.

79. Петров Ю. П. Новые научные открытия в прикладной математике; Рассказ для школьников и студентов. URL: http://n1.insu.ru/files/stbook/new_in_math.pdf.

80. Маничев В. Б. Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейных и линейных алгебраических уравнений с гарантированной достоверностью и точностью: лекция. URL: http://pa10.ru/doc/manichev-oap-lection.pdf.

81. Петров Ю. П., Орлов В. Б. Расширение исследований А. М. Ляпунова на проблему параметрической устойчивости / Труды конференции, посвященной 150-летию А. М. Ляпунова, 4–8 июня 2007 г.

82. Петров Ю. П., Петров И. А. О возможных неточностях при использовании вычислительных систем типа MATLAB / Труды Третьей Всероссийской конференции "Проектирование в среде MATLAB", 23–26 октября 2007 г.

83. Петров Ю. П., Орлов В. Б. К вопросу о достоверности инженерных расчетов и компьютерных вычислений // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. — 2010. — Вып. 1 (33). — Т. 16. — С. 124–133.

84. Петров Ю. П., Жигалова В. В. Оценка погрешностей решений систем линейных алгебраических уравнений / Труды XL международной конференции. Санкт-Петербург, 6–9 апреля 2009 г. — С. 172–177.

85. Петров Ю. П., Волошин М. В., Жигалова В. В. Зависимости между погрешностями коэффициентов и погрешностями решений линейных алгебраических уравнений // Вестник гражданских инженеров. — 2011. — № 2 (27). — С. 71–77.

86. Петров Ю. П., Волошин М. В. О критериях степени обусловленности систем линейных алгебраических уравнений // Вестник гражданских инженеров. — 2012. — № 3 (32). — С. 131–136.

Именной указатель

Предметный указатель

У

Ф

Ч