

В. П. ПИКУЛИН
С. И. ПОХОЖАЕВ

ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС

ПО УРАВНЕНИЯМ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ

МЦНМО

В. П. Пикулин

С. И. Похожаев

**ПРАКТИЧЕСКИЙ КУРС
ПО УРАВНЕНИЯМ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

2-е издание, стереотипное

Москва
Издательство МЦНМО
2004

ББК 22.161.6
УДК 517.958
П32

Пикулин В. П. Похожаев С. И.

П32 Практический курс по уравнениям математической физики.
2-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2004. — 208 с.
ISBN 5-94057-148-4

Книга представляет собой изложение (демонстрацию) основных методов решения некоторых задач классической математической физики. Рассматриваются метод Фурье, метод конформных отображений, метод функции Грина для уравнений Лапласа и Пуассона на плоскости и в пространстве, способы решения краевых задач для уравнений Гельмгольца, метод возмущений, методы интегральных преобразований (Фурье, Лапласа, Ханкеля) при решении нестационарных краевых задач, а также другие методы для решения эллиптических, гиперболических и параболических задач. В конце каждой главы приводятся задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

Для студентов высших учебных заведений, научных работников и инженеров.
Табл. 2. Ил. 31. Библиогр. 24 назв.

ББК 22.161.6

Учебное издание

*Пикулин Виктор Павлович
Похожаев Станислав Иванович*

Практический курс по уравнениям математической физики

Первое издание книги опубликовано в 1995 г. издательством «ФИЗМАТЛИТ»

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 30.03.2004 г.
Формат 60 × 90 ¹/₁₆. Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 13. Тираж 3000 экз.
Заказ № 10234

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ППП «Типография „Наука“».
119099, Москва, Шубинский пер., 6.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Большой Власьевский пер., д. 11 Тел. 241-72-85. E-mail: biblio@mccme.ru

ISBN 5-94057-148-4

© О. Н. Пикулина, С. И. Похожаев, 2004.
© МЦНМО, 2004.

Оглавление

Предисловие	5
Введение	7
Глава 1. Эллиптические задачи	13
§ 1.1. Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа	13
§ 1.2. Примеры задач Дирихле в кольце	16
§ 1.3. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле	18
§ 1.4. Интеграл Пуассона для круга. Запись в комплексной форме. Решение задачи Дирихле, когда граничное условие есть рациональная функция $R(\sin \varphi, \cos \varphi)$	21
§ 1.5. Внутренняя и внешняя задачи Неймана для круга	24
§ 1.6. Краевые задачи для уравнения Пуассона в кольце и круге	25
§ 1.7. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольнике	28
§ 1.8. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона в ограниченном цилиндре	32
§ 1.9. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона в шаре	38
§ 1.10. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца	47
§ 1.11. Краевая задача для уравнения Гельмгольца в цилиндре	49
§ 1.12. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в круге	50
§ 1.13. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в шаре	53
§ 1.14. Направленные электромагнитные волны	58
§ 1.15. Метод конформных отображений (решение краевых задач на плоскости)	60
§ 1.16. Метод функций Грина	65
§ 1.17. Другие методы	72
§ 1.18. Задачи для самостоятельного решения	77
§ 1.19. Ответы	80
Глава 2. Гиперболические задачи	84
§ 2.1. Метод бегущих волн	84
§ 2.2. Метод подбора частных решений	95
§ 2.3. Метод интегрального преобразования Фурье	98
§ 2.4. Метод интегрального преобразования Лапласа	114
§ 2.5. Метод интегрального преобразования Ханкеля	119

§ 2.6. Метод стоячих волн. Колебания ограниченной струны . . .	125
§ 2.7. Некоторые примеры смешанных задач для уравнения колебаний струны	128
§ 2.8. Метод Фурье. Колебания прямоугольной мембраны	134
§ 2.9. Метод Фурье. Колебания круглой мембраны	140
§ 2.10. Метод Фурье. Колебания балки	145
§ 2.11. Метод возмущений	148
§ 2.12. Задачи для самостоятельного решения	153
§ 2.13. Ответы	159
Глава 3. Параболические задачи	165
§ 3.1. Метод интегрального преобразования Фурье	166
§ 3.2. Метод интегрального преобразования Лапласа	175
§ 3.3. Метод Фурье (метод разделения переменных)	179
§ 3.4. Модификация метода разделения переменных для решения задачи Коши	194
§ 3.5. Задачи для самостоятельного решения	200
§ 3.6. Ответы	205
Список литературы	208

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для студентов технических вузов с относительно небольшим объемом курса математической физики, а также для инженеров и научных работников. Целью пособия является изложение (демонстрация) основных методов решения простейших задач классической математической физики.

Основным из рассматриваемых методов является метод суперпозиции. Этот метод позволяет на базе частных (атомарных) линейно независимых решений получать решение исходной линейной задачи. При этом «запас» атомарных решений должен быть полным. Этот метод развивает хорошо известный метод частных решений в теории линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В отличие от обыкновенного дифференциального уравнения, где число линейно независимых решений всегда конечно, для линейного уравнения с частными производными полный «запас» атомарных решений всегда является бесконечным. Причем это бесконечное множество решений может быть как дискретным (например, для регулярных краевых задач в ограниченной области), так и образовывать континуум (например, в случае задач во всем пространстве). В первом случае метод суперпозиции сводится к построению ряда с неизвестными коэффициентами при указанных атомарных решениях; во втором — к построению интеграла по соответствующим параметрам (переменным).

Этот первый шаг приводит нас к общему решению соответствующего однородного уравнения при условии, что запас атомарных решений является «полным». Следующий шаг, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, заключается в нахождении нужных коэффициентов по данным задачи.

Таким образом основой метода суперпозиции являются «атомарные» решения. Основным приемом нахождения таких решений является метод разделения переменных (при нулевых граничных условиях). К сожалению, этот метод оказывается применимым лишь для областей, обладающих определенной симметрией (например, для круга, прямоугольника, цилиндра, шара). В случае областей со сложной структурой найти эти «атомарные» решения не представляется возможным. В последнем случае можно использовать различные приближенные методы решения краевых задач, которых мы здесь не касаемся.

Другим методом, рассматриваемым в книге, является метод конформных отображений, позволяющий свести решение, например, задачи Дирихле для уравнения Лапласа в сложной области к рассмотрению задачи Дирихле для уравнения Лапласа в уже более простой области.

Наряду с этими методами мы излагаем методы интегральных преобразований (Фурье, Лапласа, Ханкеля) для нестационарных задач, которые также основываются на методе линейной суперпозиции.

Определенное место в пособии занимает круг задач, связанных с уравнениями четвертого порядка. Рассматриваются краевые задачи для бигармонического уравнения (в круге и полупространстве), для неоднородного уравнения четвертого порядка (в круге).

Дополнением к излагаемым методам решения эллиптических, гиперболических и параболических задач являются помещенные в конце каждой главы задачи для самостоятельного решения и ответы к ним. Отметим, что в главах 2 и 3 также имеются задачи для гиперболических и параболических уравнений четвертого порядка, к которым даны указания к решению.

Подчеркнем, что в связи с ориентацией книги на читателя, владеющего лишь дифференциальным и интегральным исчислением и некоторыми методами интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений, мы не затрагиваем вопросов существования решений и их принадлежности к подходящим функциональным пространствам.

Все изложение носит формальный характер, которому при желании нетрудно придать точный математический смысл, пользуясь общей теорией линейных уравнений с частными производными. Читателя, желающего более глубоко изучить демонстрируемые и другие методы, мы отсылаем к списку литературы, включающему известные задачки. В частности, для практиков мы рекомендуем книгу С. Фарлоу «Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров» [22].

Введение

Многие физические процессы в таких областях науки и техники, как механика, теплофизика, электричество и магнетизм, оптика, описываются с помощью уравнений с частными производными. Большинство уравнений самой математической физики есть уравнения с частными производными. В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых неизвестная функция зависит только от одной переменной, в уравнениях с частными производными неизвестная функция зависит от нескольких переменных (например, напряженность электрического поля $\vec{E}(x, y, z, t)$ зависит от пространственных координат x, y, z и времени t).

К основным уравнениям с частными производными относятся:

— трехмерное уравнение Лапласа

$$\Delta u = 0, \quad \text{или} \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0;$$

— волновое уравнение

$$u_{tt} = a^2 \Delta u;$$

— уравнение теплопроводности

$$u_t = a^2 \Delta u.$$

В этих уравнениях неизвестная функция $u = u(x, y, z)$ ($u = u(x, y, z, t)$) зависит от нескольких переменных. Количество независимых переменных определяется размерностью пространства, в котором происходит физическое явление, и временной переменной (в случае нестационарных явлений). Широкий класс образуют линейные уравнения с частными производными относительно функции, зависящей от двух переменных. Эти уравнения можно записать в виде

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f, \quad (\text{B.1})$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ — заданные функции независимых переменных x и y ; u — неизвестная функция.

Все линейные уравнения с частными производными второго порядка вида (B.1) при условии, что $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ в точке (x, y) , относятся к одному из трех типов: а) эллиптическому; б) гиперболическому; в) параболическому (в этой же точке (x, y)).

Уравнения эллиптического типа описывают стационарные процессы и определяются условием $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$.

Уравнения гиперболического типа описывают волновые процессы и определяются условием $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$.

Уравнения параболического типа описывают процессы распространения тепла, диффузии (и некоторые другие) и определяются условием $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$.

Заметим, что в уравнениях гиперболического и параболического типов переменная t носит характер временной переменной.

Таким образом, уравнения $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $u_t = a^2 u_{xx}$ есть соответственно уравнения эллиптического, гиперболического и параболического типа.

Понятие решения. *Решением (классическим) дифференциального уравнения с частными производными* называется функция (обладающая производными, входящими в уравнение), которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество по независимым переменным в рассматриваемой области. Например, функция $u(x, t) = \sin x \sin(at)$ — решение уравнения $a^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$ в области $-\infty < x, t < \infty$. Отметим, что у одного и того же уравнения существует много разных решений. Подобное мы уже наблюдали, изучая обыкновенные дифференциальные уравнения. В случае же уравнения с частными производными множество решений значительно шире. Например, множество решений уравнения $y'' = 0$ дается формулой $y = C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, а множество решений уравнения $a^2 u_{xx} = u_{tt}$ дается формулой $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$, где f и g — произвольные дважды дифференцируемые функции.

Отметим, что приведенное выше понятие решения не является единственно возможным. В настоящее время широко развита теория так называемых обобщенных решений (в разных смыслах). Однако мы в нашем элементарном курсе будем придерживаться данного классического определения.

Постановка задач. Для того чтобы выделить единственное решение из множества решений, необходимо задать дополнительные условия. Эти условия бывают разных видов — в зависимости от типа уравнения. Так мы приходим к постановке задач для уравнений с частными производными. Другими словами, задача — это уравнение с дополнительными условиями.

Для нестационарных процессов, изучаемых во всем пространстве, необходимо задавать начальные условия. В этом случае приходим к задаче Коши. Типичными примерами этой задачи являются следующие задачи:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & -\infty < x < +\infty; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < +\infty; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = f(x, y, z) \\ u_t(x, y, z, 0) = g(x, y, z) \end{cases} \quad -\infty < x, y, z < +\infty;$$

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = f(x, y, z), & -\infty < x, y, z < +\infty. \end{cases}$$

Задача Коши уже имеет единственное решение (при естественных условиях).

Если же физический процесс рассматривается в ограниченной области пространства, то приходим к краевой задаче для стационарных явлений и смешанной задаче для нестационарных явлений. Например, при изучении колебаний закрепленной на концах струны получаем смешанную задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & 0 \leq t < +\infty, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Возможны и другие виды граничных условий.

Аналогично ставится краевая задача для волнового уравнения в трехмерном случае (Ω — ограниченная область с границей $\partial\Omega$):

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u & \text{в цилиндре } \Omega \times (0, t) \text{ при } t > 0, \\ u = 0 & \text{на боковой поверхности } \partial\Omega \times (0, t), \\ u = f(x, y, z), \quad u_t = g(x, y, z) & \text{на нижнем основании } (t = 0) \text{ цилиндра.} \end{cases}$$

Далее, процесс распространения тепла в стержне длины l описывается одномерным уравнением теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty,$$

где $u(x, t)$ — температура стержня в момент времени t в точке x . Будем считать, что температура на концах $x = 0$ и $x = l$ все время поддерживается равной нулю, а в начальный момент задан температурный профиль $\varphi(x)$. Тогда получаем смешанную задачу для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad 0 < t < \infty, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

Вместо задания температуры на концах (границе) стержня можно задавать температуру окружающей среды или тепловой поток через границу.

Краевая задача для уравнения теплопроводности в трехмерном случае ставится аналогично:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u & \text{в цилиндре } \Omega \times (0, t) \text{ при } t > 0, \\ u = 0 & \text{на боковой поверхности } \partial\Omega \times (0, t), \\ u = f(x, y, z) & \text{на нижнем основании } (t = 0) \text{ цилиндра.} \end{cases}$$

Помимо физических явлений, развивающихся в пространстве и во времени, существует много явлений, которые не изменяются с течением времени. Эти явления в большинстве случаев описываются краевыми эллиптическими задачами. В отличие от гиперболического волнового уравнения или параболического уравнения теплопроводности, эллиптические краевые задачи не требуют начальных условий. Для них нужны только граничные (краевые) условия. Наиболее важны три типа граничных условий:

- 1) граничное условие первого рода (условие Дирихле);
- 2) граничное условие второго рода (условие Неймана);
- 3) граничное условие третьего рода (условие Робэна).

Например, краевая задача с граничными условиями первого рода (задача Дирихле) для уравнения Лапласа ставится так: требуется найти решение уравнения $\Delta u = 0$ в некоторой области пространства (плоскости), принимающее на границе заданные значения. В качестве примера можно привести задачу о нахождении стационарного распределения температуры внутри области Ω , если задана температура на ее границе $\partial\Omega$. Другой пример: найти распределение электрического потенциала внутри области, если известен потенциал на ее границе. Математическая модель обоих явлений:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в области } \Omega, \\ u = \varphi & \text{на границе } \partial\Omega, \end{cases}$$

где φ — заданная функция.

Краевая задача с граничными условиями второго рода (задача Неймана) для уравнения Лапласа ставится так: требуется найти решение уравнения в некоторой области пространства (плоскости), на границе которой задана внешняя нормальная производная $\partial u / \partial n$ (пропорциональная втекающему потоку тепла, вещества). Эта общая задача и для стационарной теплопроводности, и для электростатики, если на границе

задан поток, записывается так:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в области } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi & \text{на границе } \partial\Omega. \end{cases}$$

В отличие от задачи Дирихле для уравнения Лапласа задача Неймана имеет смысл только в том случае, когда полный поток через границу $\partial\Omega$ равен нулю, т. е. $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial s} ds = 0$. Например, внутренняя задача Неймана в единичном круге

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & 0 \leq \rho < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(1, \varphi) = 1, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$$

не имеет физического смысла, поскольку постоянный единичный поток внутри области не может обеспечить стационарность решения.

Аналогично ставятся краевые задачи Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона $\Delta u = f$. Отметим только, что для того, чтобы существовало решение задачи Неймана

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в области } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi & \text{на границе } \partial\Omega, \end{cases}$$

необходимо и достаточно, чтобы $\int_{\Omega} f dx = \oint_{\partial\Omega} \varphi ds$. Другой особенностью задачи Неймана для уравнения Пуассона, отличающей ее от других граничных задач, является неединственность решения.

Краевая задача с граничными условиями третьего рода (задача Робэна) для уравнения Пуассона ставится так: требуется найти решение $u(M)$ уравнения в некоторой области Ω пространства (плоскости), удовлетворяющее на границе $\partial\Omega$ условию $\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = \varphi$, где σ и φ — заданные функции на $\partial\Omega$. Эта задача записывается так:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в области } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u = \varphi & \text{на границе } \partial\Omega. \end{cases}$$

На разрешимость этой задачи существенно влияет поведение функции σ , в частности, ее знак.

Цель настоящей книги — рассмотреть некоторые методы решения задач математической физики. Различные методы описаны как формальные процедуры, без попытки их строгого математического обоснования.

От читателя не требуется понимания физической сути примеров, используемых для иллюстрации методов. Однако предполагается, что он знаком с основами математического анализа, а также с элементарными методами решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Рассмотрим кратко содержание предлагаемого пособия.

Глава 1 посвящена эллиптическим задачам. Рассмотрены метод Фурье для уравнений Лапласа и Пуассона в областях с определенной симметрией, метод Фурье для уравнения Гельмгольца (как в ограниченной, так и в неограниченной областях), метод функций Грина.

В главе 2 содержатся некоторые гиперболические задачи. Рассмотрено применение метода бегущих и стоячих волн в одномерном и многомерном случаях. Показано применение методов интегральных преобразований Фурье, Лапласа, Ханкеля для решения определенного круга задач. Здесь же иллюстрируется метод возмущений применительно к некоторым гиперболическим задачам.

Глава 3 посвящена параболическим задачам. Рассмотрено применение метода Фурье в областях с определенной симметрией. Приведены методы интегральных преобразований Фурье и Лапласа, а также метод разделения переменных для решения задачи Коши в случае неоднородного уравнения теплопроводности в одномерном и многомерном случаях.

В конце каждой главы приводятся задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

В заключение отметим, что в книге совсем не рассматриваются системы уравнений в частных производных, вероятностные методы решения краевых задач, численные методы, вариационный метод и другие ввиду ее ограниченного объема.

Глава 1

Эллиптические задачи

Эффективным методом решения краевых задач (в областях, обладающих определенной симметрией) для уравнений Лапласа и Гельмгольца является *метод разделения переменных*. Общая идея метода заключается в нахождении множества решений однородного уравнения с частными производными, удовлетворяющих определенным граничным условиям. Эти решения являются теми «атомами», из которых строится «общее» решение на основе принципа линейной суперпозиции. Поскольку каждый из «атомов» — решение соответствующего однородного уравнения, то их линейная комбинация также есть решение этого же уравнения. Решение нашей задачи дается рядом $\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x)$ ($u_n(x)$ — «атомы» решения; $x = (x_1, \dots, x_N)$ — точка из рассматриваемой области пространства; c_n — произвольные постоянные). Остается найти постоянные c_n так, чтобы удовлетворялись граничные условия.

§ 1.1. Задача Дирихле в кольце для уравнения Лапласа

Пусть требуется решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в области, заключенной между двумя концентрическими окружностями, L_1 и L_2 , радиусов R_1 и R_2 с центром в начале координат:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & R_1^2 < x^2 + y^2 < R_2^2, \\ u|_{L_1} = f_1, & u|_{L_2} = f_2. \end{cases}$$

Вводя полярные координаты (ρ, φ) , можно задачу Дирихле записать так:

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_{\rho} + u_{\varphi\varphi} = 0, & R_1 < \rho < R_2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(R_1, \varphi) = f_1(\varphi), \\ u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi), & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (1.1)$$

При этом граничные функции $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$ считаем периодическими функциями периода 2π .

Для решения задачи применим метод Фурье. Будем искать решения в виде $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$. Подставив выражение $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ в уравнение (1.1), получим

$$\Phi \rho^2 R'' + \Phi \rho R' + R \Phi'' = 0.$$

Разделим теперь обе части этого уравнения на $R\Phi$, в результате чего получим

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi}. \quad (1.2)$$

Про это уравнение говорят, что в нем переменные *разделены*, так как левая часть уравнения зависит только от ρ , а правая — только от φ . Поскольку переменные ρ и φ не зависят друг от друга, то каждая часть уравнения (1.2) должна быть константой. Обозначим эту константу через λ . Тогда будем иметь

$$\frac{\rho^2 R'' + \rho R'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda. \quad (1.3)$$

Ясно, что при изменении угла φ на величину 2π однозначная функция $u(\rho, \varphi)$ должна вернуться к исходному значению, т. е. $u(\rho, \varphi) = u(\rho, \varphi + 2\pi)$. Отсюда $R(\rho)\Phi(\varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi + 2\pi)$. Значит, $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$, т. е. функция $\Phi(\varphi)$ является периодической функцией с периодом 2π . Из уравнения $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$ следует, что $\Phi(\varphi) = A \cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + B \sin(\sqrt{\lambda}\varphi)$ (A и B — произвольные постоянные), и в силу периодичности $\Phi(\varphi)$ должно быть выполнено равенство $\lambda = n^2$, где $n \geq 0$ — целое число.

В самом деле, из равенства

$$A \cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + B \sin(\sqrt{\lambda}\varphi) = A \cos[\sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi)] + B \sin[\sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi)]$$

(обозначение: $\sin \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, $\cos \alpha = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$) следует, что $\sin(\alpha + \sqrt{\lambda}\varphi) = \sin(\alpha + \sqrt{\lambda}\varphi + 2\pi\sqrt{\lambda})$ и, значит, $\sin(\pi\sqrt{\lambda})\cos(\alpha + \sqrt{\lambda}\varphi + \pi\sqrt{\lambda}) = 0$, т. е. $\pi\sqrt{\lambda} = \pi n$, или $\lambda = n^2$, где $n \geq 0$ — целое число. Теперь из уравнения (1.3) получаем

$$\rho^2 R'' + \rho R' - n^2 R = 0. \quad (1.4)$$

Если $n \neq 0$, то решение этого уравнения ищем в виде $R(\rho) = \rho^\mu$. Подставляя это выражение в уравнение (1.4) и сокращая на ρ^μ , находим

$$\mu^2 = n^2, \quad \text{или} \quad \mu = \pm n \quad (n > 0).$$

При $n = 0$ уравнение (1.4) имеет два решения: 1 и $\ln \rho$. Итак, у нас есть теперь бесконечный набор функций («атомы» решения)

$1, \ln \rho, \rho^n \cos(n\varphi), \rho^n \sin(n\varphi), \rho^{-n} \cos(n\varphi), \rho^{-n} \sin(n\varphi)$
 $(n = 1, 2, \dots)$, удовлетворяющих исходному уравнению с частными производными. Поскольку сумма этих решений также является решением, то «общее» решение уравнения Лапласа в нашем случае имеет вид

$$u(\rho, \varphi) = a_0 + b_0 \ln \rho + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n \rho^n + b_n \rho^{-n}) \cos(n\varphi) + (c_n \rho^n + d_n \rho^{-n}) \sin(n\varphi)]. \quad (1.5)$$

Осталось найти только все коэффициенты в сумме (1.5) так, чтобы удовлетворить граничным условиям $u(R_1, \varphi) = f_1(\varphi)$, $u(R_2, \varphi) = f_2(\varphi)$. Полагая в формуле (1.5) $\rho = R_1$ и $\rho = R_2$, получим

$$\begin{aligned} u(R_1, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n R_1^n + b_n R_1^{-n}) \cos(n\varphi) + \\ &\quad + (c_n R_1^n + d_n R_1^{-n}) \sin(n\varphi)] + a_0 + b_0 \ln R_1, \\ u(R_2, \varphi) &= \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n R_2^n + b_n R_2^{-n}) \cos(n\varphi) + \\ &\quad + (c_n R_2^n + d_n R_2^{-n}) \sin(n\varphi)] + a_0 + b_0 \ln R_2. \end{aligned}$$

Вспоминая выражения для коэффициентов Фурье тригонометрического ряда, приходим к следующим системам уравнений:

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln R_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_1(s) ds, \\ a_0 + b_0 \ln R_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_2(s) ds \end{cases} \quad (1.6_1)$$

(решается относительно a_0 и b_0);

$$\begin{cases} a_n R_1^n + b_n R_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(s) \cos(ns) ds, \\ a_n R_2^n + b_n R_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(s) \cos(ns) ds \end{cases} \quad (1.6_2)$$

(решается относительно a_n и b_n);

$$\begin{cases} c_n R_1^n + d_n R_1^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(s) \sin(ns) ds, \\ c_n R_2^n + d_n R_2^{-n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(s) \sin(ns) ds \end{cases} \quad (1.6_3)$$

(решается относительно c_n и d_n).

Тем самым из этих систем уравнений находятся все неизвестные коэффициенты $a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n$. Теперь задача (1.1) полностью решена. Решение дается выражением (1.5), коэффициенты в котором определяются по формулам (1.6).

§ 1.2. Примеры задач Дирихле в кольце

Пример 1. Предположим, что потенциал на внутренней окружности кольца равен нулю, а потенциал на внешней — равен $\cos \varphi$. Найти потенциал в кольце.

Имеем задачу

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < \rho < 2, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = 0, \\ u(2, \varphi) = \cos \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$$

на определение потенциала $u(\rho, \varphi)$ в кольце.

Вообще говоря, для решения задачи нужно вычислить все интегралы в формулах (1.6), затем решить соответствующие системы уравнений, чтобы найти коэффициенты $a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n$. В данном случае проще попытаться подобрать такие частные решения, линейная комбинация которых удовлетворяет граничным условиям. Здесь такую роль играет линейная комбинация $u(\rho, \varphi) = a_1 \rho \cos \varphi + b_1 \rho^{-1} \cos \varphi$. Из граничных условий получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 0, \\ 2a_1 + \frac{b_1}{2} = 1, \end{cases}$$

из которой находим $a_1 = 2/3, b_1 = -2/3$. Таким образом, решение есть

$$u(\rho, \varphi) = \frac{2}{3} \left(\rho - \frac{1}{\rho} \right) \cos \varphi.$$

Пример 2. Рассмотрим задачу с постоянными потенциалами на границах кольца

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < \rho < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = 2, \\ u(2, \varphi) = 1, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

В этом случае решение ищем в виде функции, не зависящей от φ , т. е. $u(\rho) = a_0 + b_0 \ln \rho$. Подставляя эту функцию в граничные условия, получим систему уравнений

$$\begin{cases} a_0 + b_0 \ln 1 = 2, \\ a_0 + b_0 \ln 2 = 1, \end{cases}$$

откуда $a_0 = 2$, $b_0 = -\log_2 e$. Следовательно, решением будет функция

$$u(\rho) = 2 - \frac{\ln \rho}{\ln 2}.$$

Пример 3. Решим такую задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < \rho < 2, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = \cos \varphi, \\ u(2, \varphi) = \sin \varphi, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Можно проверить, что все коэффициенты $a_0, b_0, a_n, b_n, c_n, d_n$ ($n > 1$) равны нулю, а коэффициенты a_1, b_1, c_1, d_1 определяются из систем уравнений

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = 1, \\ 2a_1 + \frac{b_1}{2} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 + d_1 = 0, \\ 2c_1 + \frac{d_1}{2} = 1. \end{cases}$$

Решая эти системы, получим

$$a_1 = -\frac{1}{3}, \quad b_1 = \frac{4}{3}, \quad c_1 = \frac{2}{3}, \quad d_1 = -\frac{2}{3}.$$

Следовательно, решением задачи является функция

$$u(\rho, \varphi) = \left(-\frac{1}{3}\rho + \frac{4}{3\rho}\right) \cos \varphi + \frac{2}{3}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right) \sin \varphi.$$

Так как задача Дирихле для уравнения Лапласа в ограниченной области имеет единственное решение, то других решений, кроме указанных в примерах 1–3, быть не может.

§ 1.3. Внутренняя и внешняя задачи Дирихле

Рассмотрим два важнейших случая, когда кольцо обращается в круг и внешность круга. *Внутренняя* задача Дирихле ($R_1 = 0$, $R_2 = R$)

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_{\rho} + u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 \leq \rho < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(R, \varphi) = f(\varphi), & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$$

решается точно так же, как решалась задача Дирихле для кольца, с тем отличием, что теперь необходимо отбросить те «атомы» решения, которые не ограничены при стремлении ρ к нулю:

$$\ln \rho, \quad \rho^{-n} \cos(n\varphi), \quad \rho^{-n} \sin(n\varphi), \quad n = 1, 2, \dots$$

Следовательно, в качестве решения остается взять функцию

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)],$$

где коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, & a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi \quad (n > 0), \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Другими словами, мы просто разлагаем функцию $f(\varphi)$ в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)],$$

а затем каждый член этого ряда умножаем на коэффициенты $\left(\frac{\rho}{R}\right)^n$. Например, внутренняя задача

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 \leq \rho < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = \cos^2 \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$$

имеет решение

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\rho^2 \cos(2\varphi).$$

Внешняя задача Дирихле ($R_1 = R$, $R_2 = \infty$)

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_{\rho} + u_{\varphi\varphi} = 0, & R < \rho < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(R, \varphi) = f(\varphi), & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$$

решается аналогично предыдущей, с тем отличием, что теперь необходимо отбросить те «атомы» решения, которые не ограничены при стремлении ρ к бесконечности:

$$\ln \rho, \quad \rho^n \cos(n\varphi), \quad \rho^n \sin(n\varphi), \quad n = 1, 2, \dots$$

Следовательно, в качестве решения нужно взять функцию

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)],$$

где коэффициенты a_n и b_n вычисляются по формулам (1.7). Например, внешняя задача

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < \rho < +\infty, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(1, \varphi) = \sin^3 \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$$

имеет решение

$$u(\rho, \varphi) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\rho} \sin \varphi - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\rho^3} \sin(3\varphi).$$

Отметим, что ограниченное решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерной неограниченной области является единственным.

В заключение параграфа рассмотрим еще один пример, одно упражнение (интеграл Пуассона) и задачу, связанную с интегралом Пуассона.

Пример [1]. Найти стационарное распределение температуры в однородном секторе $0 \leq \rho \leq a$, $0 \leq \varphi \leq \alpha$, удовлетворяющее краевым условиям $u(\rho, 0) = u(\rho, \alpha) = 0$, $u(a, \varphi) = A\varphi$ ($A = \text{const}$) (см. рис. 1.1).

Решение. Нахождение стационарной температуры сводится к решению задачи Дирихле

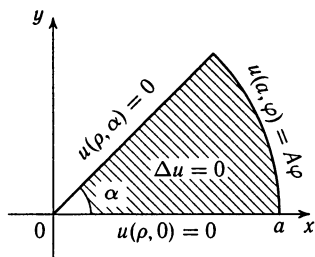


Рис. 1.1

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_{\rho} + u_{\varphi\varphi} = 0, & 0 < \rho < a, & 0 < \varphi < \alpha < 2\pi, \\ u(\rho, 0) = u(\rho, \alpha) = 0, & 0 \leq \rho \leq a, \\ u(a, \varphi) = A\varphi, & 0 \leq \varphi \leq \alpha. \end{cases}$$

Полагая $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ и проведя разделение переменных, получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0, \quad \Phi'' + \lambda \Phi = 0. \quad (1.8)$$

Из условий $0 = u(\rho, 0) = R(\rho)\Phi(0)$ и $0 = u(\rho, \alpha) = R(\rho)\Phi(\alpha)$ следует $\Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0$. Постоянную разделения λ определяем, решая задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, & 0 < \varphi < \alpha, \\ \Phi(0) = \Phi(\alpha) = 0. \end{cases}$$

Имеем $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2$ и $\Phi_n(\varphi) = \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)$, $n = 1, 2, \dots$. Функцию $R(\rho)$ ищем в виде $R(\rho) = \rho^\mu$. Подставляя это выражение в уравнение (1.8), найдем

$$\mu(\mu - 1) + \mu - \left(\frac{n\pi}{\alpha}\right)^2 = 0, \quad \text{откуда} \quad \mu = \pm \frac{n\pi}{\alpha}.$$

Учитывая ограниченность (по смыслу задачи) функции $R(\rho)$, пишем $R_n(\rho) = \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}}$. Атомы, из которых построим решение задачи, образуются функциями

$$u_n(\rho, \varphi) = \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Отсюда решение задачи есть

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \rho^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right).$$

Постоянные c_n ($n = 1, 2, \dots$) определяем из условия $u(a, \varphi) = A\varphi$. Имеем

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right).$$

Таким образом,

$$c_n a^{\frac{n\pi}{\alpha}} = \frac{2}{\alpha} \int_0^{\alpha} A\varphi \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right) d\varphi,$$

откуда

$$c_n = \frac{2A}{\alpha a^{\frac{n\pi}{\alpha}}} \int_0^{\alpha} \varphi \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right) d\varphi = (-1)^{n+1} \frac{2\alpha A}{n\pi}.$$

Итак, решение задачи записывается в виде

$$u(\rho, \varphi) = \frac{2\alpha A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{\rho}{\alpha}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)}{n}.$$

Отметим, что решение имеет особенность в граничной точке $\rho = a$, $\varphi = \alpha$ из-за несогласования граничных значений.

§ 1.4. Интеграл Пуассона для круга. Запись в комплексной форме. Решение задачи Дирихле, когда граничное условие есть рациональная функция $R(\sin \varphi, \cos \varphi)$

Напомним, что решение внутренней и внешней задач Дирихле для круга можно представить в интегральной форме (интеграл Пуассона):

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - \rho^2}{R^2 - 2\rho R \cos(\varphi - \alpha) + \rho^2} f(\alpha) d\alpha \quad (\rho < R),$$

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 - 2\rho R \cos(\varphi - \alpha) + R^2} f(\alpha) d\alpha \quad (\rho > R).$$

Покажем, что эти формулы — следствие общего метода суперпозиции.

Для определенности рассмотрим внутреннюю задачу, а для внешней запишем результат по аналогии.

Подставляя выражения для коэффициентов Фурье в формулу

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)],$$

будем иметь

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (\cos(n\varphi) \cos(n\alpha) + \sin(n\varphi) \sin(n\alpha)) \right] d\alpha = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \cos(n(\varphi - \alpha)) \right] d\alpha. \end{aligned}$$

Далее, учитывая, что $\cos(n(\varphi - \alpha)) = \frac{e^{in(\varphi - \alpha)} + e^{-in(\varphi - \alpha)}}{2}$, $q = \frac{\rho}{R} < 1$, и используя формулу суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} q^n \cos(n(\varphi - \alpha)) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} q^n [e^{in(\varphi - \alpha)} + e^{-in(\varphi - \alpha)}] = \\ &= \frac{1}{2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} [(qe^{i(\varphi - \alpha)})^n + (qe^{-i(\varphi - \alpha)})^n] \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{qe^{i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{i(\varphi-\alpha)}} + \frac{qe^{-i(\varphi-\alpha)}}{1-qe^{-i(\varphi-\alpha)}} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1-q^2}{1-2q \cos(\varphi-\alpha)+q^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho \cos(\varphi-\alpha)+\rho^2}.
 \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho \cos(\varphi-\alpha)+\rho^2} f(\alpha) d\alpha \quad (\rho < R).$$

Преобразуем формулу Пуассона к другому виду (комплексная запись). Заметим, что

$$\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho \cos(\varphi-\alpha)+\rho^2} = \frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\alpha}-z|^2} = \operatorname{Re} \frac{Re^{i\alpha}+z}{Re^{i\alpha}-z},$$

так как

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re} \frac{Re^{i\alpha}+z}{Re^{i\alpha}-z} &= \operatorname{Re} \frac{(Re^{i\alpha}+\rho e^{i\varphi})(\overline{Re^{i\alpha}}-\overline{\rho e^{i\varphi}})}{(Re^{i\alpha}-\rho e^{i\varphi})(\overline{Re^{i\alpha}}-\overline{\rho e^{i\varphi}})} = \\
 &= \operatorname{Re} \frac{R^2-|z|^2+\rho R[e^{i(\varphi-\alpha)}-e^{i(\alpha-\varphi)}]}{|Re^{i\alpha}-z|^2} = \frac{R^2-|z|^2}{|Re^{i\alpha}-z|^2}.
 \end{aligned}$$

Поэтому интеграл Пуассона запишется в виде

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\alpha) \frac{Re^{i\alpha}+z}{Re^{i\alpha}-z} d\alpha.$$

Полагая в этом интеграле $\zeta = Re^{i\alpha}$, откуда $d\alpha = d\zeta/i\zeta$, получим окончательно

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} f(\zeta) \frac{\zeta+z d\zeta}{\zeta-z \zeta}, \quad |z| < R. \quad (1.9)$$

Если граничная функция $f(\zeta)$ является рациональной функцией от $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$, то интеграл в формуле (1.9) вычисляется с помощью вычетов.

Пример. Решить задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & |z| < 2, \\ u|_{|z|=2} = \frac{2 \sin \varphi}{5+3 \cos \varphi}. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся формулой (1.9). Пусть $\zeta = 2e^{i\alpha}$, тогда $\sin \alpha = \frac{1}{2i} \left(\frac{\zeta}{2} - \frac{2}{\zeta} \right)$, $\cos \alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta}{2} + \frac{2}{\zeta} \right)$ и граничная функция примет вид

$$u(\zeta) = \frac{2 \sin \alpha}{5 + 3 \cos \alpha} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{\zeta^2 - 4}{2\zeta}}{5 + \frac{3}{2} \left(\frac{\zeta}{2} + \frac{2}{\zeta} \right)} = \frac{2}{i} \cdot \frac{\zeta^2 - 4}{3\zeta^2 + 20\zeta + 12} = \frac{2}{i} \cdot \frac{\zeta^2 - 4}{3(\zeta + 6) \left(\zeta + \frac{2}{3} \right)}.$$

Вычислим интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=2} \frac{2(\zeta^2 - 4)(\zeta + z)}{i \cdot 3(\zeta + 6) \left(\zeta + \frac{2}{3} \right) (\zeta - z) \zeta} d\zeta,$$

причем окружность $|z| = 2$ ориентирована против часовой стрелки. Подынтегральная функция $F(\zeta)$ в нашем случае в области $|\zeta| > 2$ имеет одну конечную особую точку $\zeta = -6$ — полюс первого порядка и устранимую особую точку $\zeta = \infty$. По теореме Коши о вычетах для расширенной комплексной плоскости

$$J = - \operatorname{res}_{\zeta=-6} F(\zeta) - \operatorname{res}_{\zeta=\infty} F(\zeta).$$

Находим вначале вычет в точке $\zeta = -6$:

$$\operatorname{res}_{\zeta=-6} F(\zeta) = \frac{2}{3i} \cdot \frac{32}{\left(-\frac{16}{3} \right)} \cdot \frac{z - 6}{(z + 6) \cdot 6} = -\frac{4}{i} \cdot \frac{z - 6}{(z + 6) \cdot 6} = \frac{2}{3i} \cdot \frac{6 - z}{6 + z}.$$

Далее, разложим $F(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = \infty$:

$$F(\zeta) = \frac{2}{3i} \cdot \frac{\left(1 - \frac{4}{\zeta^2} \right) \left(1 + \frac{z}{\zeta} \right)}{\left(1 + \frac{6}{\zeta} \right) \left(1 + \frac{2}{3\zeta} \right)} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} \cdot \frac{1}{\zeta} = \frac{2}{3i} \cdot \frac{1}{\zeta} + \dots$$

Отсюда

$$\operatorname{res}_{\zeta=\infty} F(\zeta) = -\frac{2}{3i}.$$

Значит,

$$\begin{aligned} J &= \frac{2}{3i} \cdot \frac{z - 6}{z + 6} + \frac{2}{3i} = \frac{2}{3i} \cdot \frac{2z}{z + 6} = \frac{4z}{3i(z + 6)} = \\ &= \frac{4}{3i} \cdot \frac{x + iy}{6 + x + iy} = \frac{4}{3i} \cdot \frac{(x + iy)(6 + x - iy)}{(6 + x)^2 + y^2}, \end{aligned}$$

откуда

$$\operatorname{Re} J = \frac{8y}{36 + 12x + x^2 + y^2}, \quad \text{или} \quad \operatorname{Re} J = \frac{8\rho \sin \varphi}{36 + 12\rho \cos \varphi + \rho^2}.$$

Таким образом, решение задачи Дирихле дается формулой

$$u(\rho, \varphi) = \frac{8\rho \sin \varphi}{36 + 12\rho \cos \varphi + \rho^2}.$$

§ 1.5. Внутренняя и внешняя задачи Неймана для круга

Очевидно, что в случае круга радиуса R с центром в начале координат внешняя нормальная производная есть $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=R} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R}$. Поэтому решение внутренней задачи Неймана ищется в виде ряда

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)],$$

где коэффициенты a_n и b_n определяются из краевого условия $\frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} = f(\varphi)$, т. е. имеем

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{R}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \\ b_n &= \frac{R}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

Решение внешней задачи Неймана ищется в виде ряда

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{-n} [a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)],$$

где коэффициенты a_n и b_n , определяемые из краевого условия $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=R} = f(\varphi)$, вычисляются по тем же формулам (1.10) (учтем, что $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=R} = -\frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R}$).

Пример. Найти установившуюся температуру внутри неограниченного цилиндра радиуса R , если на его боковой поверхности S задан тепловой поток $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = \cos^3 \varphi$.

Решение. Надо решить внутреннюю задачу Неймана

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < \rho < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=R} = \cos^3 \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Прежде всего необходимо проверить выполнение условия разрешимости данной задачи Неймана, т. е. убедиться, что $\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0$ (здесь C — окружность нашего круга).

В самом деле,

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi \cdot R d\varphi = \frac{R}{2} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + \frac{R}{4} \int_0^{2\pi} [\cos(3\varphi) + \cos \varphi] d\varphi = 0.$$

Далее, поскольку $\cos^3 \varphi = \frac{3}{4} \cos \varphi + \frac{1}{4} \cos(3\varphi)$, то $a_1 = \frac{3}{4}R$, $a_3 = \frac{1}{12}R$, а все остальные коэффициенты в ряде, дающем решение внутренней задачи Неймана, обращаются в нуль. Поэтому решение имеет вид

$$u(\rho, \varphi) = C + \frac{3\rho}{4} \cos \varphi + \frac{\rho^3}{12R^2} \cos(3\varphi),$$

где C — произвольная постоянная.

Замечание. Задача Неймана может быть решена и для кольца. Граничные условия в этом случае будут состоять в задании внешней нормальной производной:

$$-\frac{\partial u}{\partial \rho}(R_1, \varphi) = f_1(\varphi), \quad \frac{\partial u}{\partial \rho}(R_2, \varphi) = f_2(\varphi).$$

При этом решение задачи возможно только при выполнении условия

$$R_1 \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi = R_2 \int_0^{2\pi} f_2(\varphi) d\varphi$$

и определяется с точностью до произвольной постоянной.

§ 1.6. Краевые задачи для уравнения Пуассона в кольце и круге

При решении задачи Дирихле или Неймана (или смешанного типа) нужно найти какое-либо частное решение u_1 уравнения Пуассона $\Delta u = f(x, y)$ и с помощью замены $u = u_1 + v$ свести дело к решению краевой задачи для уравнения Лапласа $\Delta v = 0$.

Пример 1 [18]. Найти решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -xy$$

в круге радиуса R с центром в начале координат при условии $u(R, \varphi) = 0$.

Решение. Переходя к полярной системе координат, получаем задачу

$$\begin{cases} \rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_{\rho} + u_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2}\rho^4 \sin(2\varphi), & 0 \leq \rho < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(R, \varphi) = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (1.11)$$

Будем искать частное решение в виде

$$u_1(\rho, \varphi) = w(\rho) \sin(2\varphi).$$

Подставляя функцию $u_1(\rho, \varphi)$ в уравнение (1.11) и сокращая на $\sin(2\varphi)$, приходим к уравнению

$$\rho^2 w'' + \rho w' - 4w = -\frac{1}{2}\rho^4. \quad (1.12)$$

С помощью замены $\rho = e^t$ это уравнение приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$w''_{tt} - 4w = -\frac{1}{2}e^{4t}. \quad (1.13)$$

Видим, что $w(t) = -\frac{1}{24}e^{4t}$ — частное решение уравнения (1.13). Значит, $w(\rho) = -\frac{1}{24}\rho^4$ — частное решение уравнения (1.12). Таким образом, $u_1(\rho, \varphi) = -\frac{1}{24}\rho^4 \sin(2\varphi)$.

Введем функцию $v(\rho, \varphi) = u(\rho, \varphi) - u_1(\rho, \varphi)$. Очевидно, для определения функции $v(\rho, \varphi)$ имеем задачу Дирихле для уравнения Лапласа

$$\begin{cases} \rho^2 v_{\rho\rho} + \rho v_{\rho} + v_{\varphi\varphi} = 0, & 0 < \rho < R, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ v(R, \varphi) = \frac{1}{24}R^4 \sin(2\varphi), & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Решение этой задачи мы уже знаем:

$$v(\rho, \varphi) = \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 \cdot \frac{1}{24}R^4 \sin(2\varphi) = \frac{1}{24}\rho^2 R^2 \sin(2\varphi).$$

Итак, решение имеет вид

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{24}\rho^2 (R^2 - \rho^2) \sin(2\varphi).$$

Пример 2. Найти распределение потенциала в кольце $a < \rho < b$, если внутри него находятся электрические заряды с плотностью $\gamma(x, y) = A(x^2 - y^2)$, внутренняя окружность поддерживается при потенциале 1 и напряженность электрического поля на внешней окружности равна 0.

Решение. Задача сводится к решению уравнения Пуассона $\Delta u = A(x^2 - y^2)$ в кольце $a < \rho < b$ при краевых условиях $u|_{\rho=a} = 1$,

$\frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=b} = 0$. Переходя к полярным координатам, получаем задачу

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = A \rho^2 \cos(2\varphi), & a < \rho < b, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(a, \varphi) = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho}(b, \varphi) = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Решение ищем в виде $u(\rho, \varphi) = v(\rho, \varphi) + w(\rho)$, причем функция $w(\rho)$ есть решение вспомогательной задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) = 0, & a < \rho < b, \\ w(a) = 1, \quad w'(b) = 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

а функция $v(\rho, \varphi)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = A \rho^2 \cos(2\varphi), & a < \rho < b, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(a, \varphi) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \rho}(b, \varphi) = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (1.15)$$

Очевидно, что решение задачи (1.14) есть $w(\rho) = 1$. Решение задачи (1.15) ищем в виде $v(\rho, \varphi) = R(\rho) \cos(2\varphi)$. Подставляя $v(\rho, \varphi)$ в уравнение (1.15), найдем

$$\cos(2\varphi) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho R') - \frac{4}{\rho^2} R \cos(2\varphi) = A \rho^2 \cos(2\varphi),$$

или, сокращая на $\cos(2\varphi)$, будем иметь уравнение

$$\rho^2 R'' + \rho R' - 4R = A \rho^4$$

с дополнительными условиями $R(a) = 0$, $R'(b) = 0$. Это уравнение подстановкой $\rho = e^t$ преобразуется к уравнению с постоянными коэффициентами

$$R''_{tt} - 4R = A e^{4t}.$$

Его общее решение: $R(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{12} A e^{4t}$. Значит,

$$R(\rho) = C_1 \rho^2 + \frac{C_2}{\rho^2} + \frac{A}{12} \rho^4.$$

Постоянные C_1 и C_2 находим из условий $R(a) = 0$, $R'(b) = 0$. Имеем

$$C_1 = -\frac{A(a^6 + 2b^6)}{12(a^4 + b^4)}, \quad C_2 = \frac{Aa^4 b^4 (2b^2 - a^2)}{6(a^4 + b^4)}.$$

Следовательно, решение есть

$$u(\rho, \varphi) = 1 + \left[-\frac{A(a^6 + 2b^6)}{12(a^4 + b^4)} \rho^2 + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{Aa^4 b^4 (2b^2 - a^2)}{6(a^4 + b^4)} + \frac{A}{12} \rho^4 \right] \cos(2\varphi).$$

§ 1.7. Краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в прямоугольнике

Пример 1 [18]. Найти распределение потенциала электростатического поля $u(x, y)$ внутри прямоугольника $OACB$, у которого вдоль стороны OB потенциал равен V , а три другие стороны заземлены. Электрические заряды внутри прямоугольника отсутствуют (рис. 1.2).

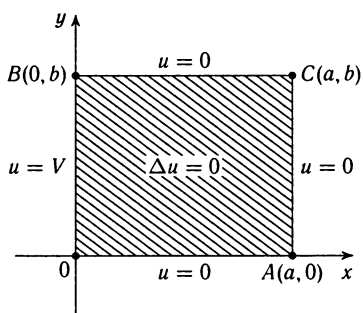


Рис. 1.2

Решение. Задача сводится к решению уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ внутри прямоугольника при крайних условиях

$$\begin{aligned} u(0, y) &= V, & u(a, y) &= 0, \\ u(x, 0) &= 0, & u(x, b) &= 0. \end{aligned}$$

Будем искать вначале нетривиальные частные решения уравнения Лапласа, удовлетворяющие только граничным условиям

$$u(x, 0) = u(x, b) = 0$$

в виде $u(x, y) = X(x)Y(y)$. Подставляя это выражение в уравнение $u_{xx} + u_{yy} = 0$, получим $X''Y + XY'' = 0$, откуда делением на XY найдем

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \lambda^2.$$

Учитывая, что $Y(0) = Y(b) = 0$, получим задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} Y'' + \lambda^2 Y = 0, & 0 < y < b, \\ Y(0) = Y(b) = 0, \end{cases}$$

для определения собственных значений и собственных функций нашей задачи. Имеем

$$\lambda_n^2 = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2, \quad Y_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Соответствующие функции $X_n(x)$ являются решениями уравнения $X'' - \lambda^2 X = 0$, откуда

$$X_n(x) = a_n \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n}{b}x\right) + b_n \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n}{b}x\right)$$

(a_n и b_n — произвольные постоянные). Значит, нетривиальные частные («атомы») решения будут иметь вид

$$u_n(x, y) = \left[a_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + b_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

В качестве решения исходной задачи возьмем ряд

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) + b_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right). \quad (1.16)$$

Постоянные a_n и b_n ($n = 1, 2, \dots$) находим из условий $u(0, y) = V$, $u(a, y) = 0$. Полагая в (1.16) $x = a$, получим

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{b}a\right) + b_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}a\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

откуда следует

$$a_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{b}a\right) + b_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}a\right) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Полагая теперь в (1.16) $x = 0$, будем иметь

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

откуда вытекает

$$a_n = \frac{2}{b} \int_0^b V \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy, \quad \text{или} \quad a_n = \begin{cases} 0, & n \text{ четное,} \\ \frac{4V}{n\pi}, & n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Таким образом, решение имеет вид

$$u(x, y) = \frac{4V}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\left[\frac{(2k+1)(a-x)\pi}{b}\right] \sin\left[\frac{(2k+1)\pi y}{b}\right]}{(2k+1) \operatorname{sh}\left[\frac{(2k+1)\pi a}{b}\right]}.$$

Пример 2 [18]. Две стороны, AC и BC , прямоугольной однородной пластинки $OACB$ (см. рис. 1.2) покрыты тепловой изоляцией, а две другие поддерживаются при температуре, равной нулю. Найти стационарное распределение температуры при условии, что в пластинке выделяется тепло $Q = \text{const}$.

Решение. Мы имеем краевую задачу для уравнения Пуассона с граничными условиями смешанного типа

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = -\frac{Q}{k}, & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \\ u(0, y) = 0, \quad u_x(a, y) = 0, & 0 \leq y \leq b, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, b) = 0, & 0 \leq x \leq a \end{cases} \quad (1.17)$$

(здесь k — коэффициент внутренней теплопроводности).

Собственные значения и собственные функции задачи найдем, решив вспомогательную краевую задачу (задачу Штурма—Лиувилля)

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, & 0 < x < a, \\ X(0) = X'(a) = 0. \end{cases}$$

Получим $\lambda_n^2 = \left[\frac{\pi(2n+1)}{2a} \right]^2$ и $X_n(x) = \sin \left[\frac{(2n+1)\pi}{2a} x \right]$, $n = 0, 1, \dots$. Решение данной задачи ищем в виде разложения по собственным функциям

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(y) \sin \left[\frac{\pi(2n+1)}{2a} x \right],$$

где $Y_n(y)$ — функции, подлежащие определению. Подставляя предпологаемую форму решения в уравнение (1.17), получим

$$\begin{aligned} - \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(y) \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4a^2} \sin \left[\frac{(2n+1)\pi}{2a} x \right] + \sum_{n=0}^{\infty} Y_n''(y) \sin \left[\frac{(2n+1)\pi}{2a} x \right] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cdot \sin \left[\frac{(2n+1)\pi}{2a} x \right], \end{aligned}$$

где коэффициенты Фурье α_n функции $-Q/k$ равны

$$\alpha_n = \frac{2}{a} \int_0^a \left(-\frac{Q}{k} \right) \sin \left[\frac{(2n+1)\pi}{2a} x \right] dx = -\frac{4Q}{k\pi(2n+1)}.$$

Отсюда для нахождения $Y_n(y)$ будем иметь следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} Y_n'' - \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4a^2} Y_n(y) = -\frac{4Q}{k\pi(2n+1)}, & 0 < y < b, \\ Y_n(0) = 0, \quad Y_n'(b) = 0, & n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

Решая эту задачу, найдем

$$Y_n(y) = a_n \operatorname{ch} \left[\frac{(2n+1)\pi}{2a} y \right] + b_n \operatorname{sh} \left[\frac{(2n+1)\pi}{2a} y \right] + \frac{16Qa^2}{k\pi^3(2n+1)^3},$$

где

$$a_n = -\frac{16Qa^2}{k\pi^3(2n+1)^3}, \quad b_n = \frac{16Qa^2}{k\pi^3(2n+1)^3} \operatorname{th} \left[\frac{(2n+1)\pi b}{2a} \right].$$

Окончательное решение есть

$$u(x, y) = \frac{16Qa^2}{k\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \left[\frac{(2n+1)(b-y)\pi}{2a} \right]}{\operatorname{ch} \left[\frac{(2n+1)\pi b}{2a} \right]} \right] \sin \left[\frac{(2n+1)\pi}{2a} x \right].$$

Пример 3 [18]. Найти решение уравнения Лапласа в полуполосе $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y < +\infty$, удовлетворяющее граничным условиям

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad u(x, 0) = A \left(1 - \frac{x}{a} \right), \quad u(x, +\infty) = 0.$$

Решение. Требуется решить краевую задачу

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < +\infty, \\ u(0, y) = u(a, y) = 0, & 0 \leq y < +\infty, \\ u(x, 0) = A \left(1 - \frac{x}{a} \right), & u(x, +\infty) = 0, \quad 0 \leq x \leq a. \end{cases} \quad (1.18)$$

Ищем решение вспомогательной задачи

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, & 0 < x < a, \quad 0 < y < +\infty, \\ v(0, y) = v(a, y) = 0, & 0 \leq y < +\infty, \end{cases}$$

в виде $v(x, y) = X(x)Y(y)$. Получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения: 1) $X'' + \lambda X = 0$; 2) $Y'' - \lambda Y = 0$.

Из условий $v(0, y) = 0$, $v(a, y) = 0$ следует, что $X(0) = X(a) = 0$. Поэтому задача Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < a, \\ X(0) = X(a) = 0 \end{cases}$$

дает $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2$ и $X_n(x) = \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right)$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда из уравнения $Y'' - \lambda Y = 0$ вытекает, что

$$Y_n(y) = A_n e^{-\frac{n\pi}{a} y} + B_n e^{\frac{n\pi}{a} y}, \quad v_n(x, y) = [A_n e^{-\frac{n\pi}{a} y} + B_n e^{\frac{n\pi}{a} y}] \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right).$$

Значит, решение задачи (1.18) дается рядом

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n e^{-\frac{n\pi}{a} y} + B_n e^{\frac{n\pi}{a} y}] \sin \left(\frac{n\pi}{a} x \right). \quad (1.19)$$

Из условия $u(x, +\infty) = 0$ находим, что $B_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Полагая в (1.19) $y = 0$, будем иметь

$$A\left(1 - \frac{x}{a}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right),$$

то есть

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a A\left(1 - \frac{x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = \frac{2A}{n\pi}.$$

Таким образом,

$$u(x, y) = \frac{2A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n\pi}{a}y} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Замечание 1. Сходным образом решается краевая задача для уравнения Лапласа (Пуассона) в прямоугольном параллелепипеде.

Замечание 2. Предположим, что математическая модель описываемого физического явления такова, что как само уравнение, так и граничные условия неоднородны. Тогда с помощью суперпозиции исходную задачу можно разложить на подзадачи, решить все подзадачи и, сложив полученные решения, найти решение данной задачи.

Например, решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в области } \Omega, \\ u = \varphi & \text{на границе } \partial\Omega, \end{cases}$$

является суммой решений более простых задач:

$$1) \begin{cases} \Delta u = f & \text{в области } \Omega, \\ u = 0 & \text{на границе } \partial\Omega, \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в области } \Omega, \\ u = \varphi & \text{на границе } \partial\Omega. \end{cases}$$

§ 1.8. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона в ограниченном цилиндре

Рассмотрение этих задач требует применения специальных функций — функций Бесселя.

Сначала рассмотрим краевую задачу для уравнения Лапласа в цилиндре.

Пример 1 [4, гл. IV, № 110]. Найти потенциал электростатического поля внутри цилиндрической коробки кругового сечения $\rho \leq a$, $0 \leq z \leq l$, оба основания которой заземлены, а боковая поверхность заряжена до потенциала V_0 . Определить напряженность поля на оси (рис. 1.3).

Решение. Требуется найти решение уравнения Лапласа внутри цилиндра с заданными граничными значениями:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & 0 < \rho < a, \quad 0 < z < l, \\ u(\rho, 0) = u(\rho, l) = 0, & 0 \leq \rho \leq a, \\ u(a, z) = V_0, & 0 \leq z \leq l \end{cases}$$

(решение $u = u(\rho, z)$ и не зависит от φ , так как граничные значения на зависят от φ). Воспользуемся методом разделения переменных. Подставляя выражение $u(\rho, z) = R(\rho)Z(z)$ в уравнение Лапласа

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

получим

$$Z \cdot \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho R') + R Z'' = 0,$$

откуда, деля на RZ , будем иметь

$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho R')}{R} + \frac{Z''}{Z} = 0,$$

или

$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho R')}{R} = -\frac{Z''}{Z} = \lambda, \quad (1.20)$$

где λ — постоянная разделения. Очевидно, из физических соображений следует, что $\lambda > 0$, иначе функция $Z(z)$, а с ней и потенциал не обращались бы в нуль на верхнем и нижнем основаниях цилиндрической коробки.

Из соотношений (1.20) вытекают два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$1) Z'' + \lambda Z = 0; \quad 2) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho R') - \lambda R = 0.$$

Учитывая, что $Z(0) = Z(l) = 0$, получаем стандартную задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} Z'' + \lambda Z = 0, & 0 < z < l, \\ Z(0) = Z(l) = 0. \end{cases}$$

Отсюда находим собственные функции $Z_n(z) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right)$, отвечающие собственным значениям $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$. Функцию $R(\rho)$ опреде-

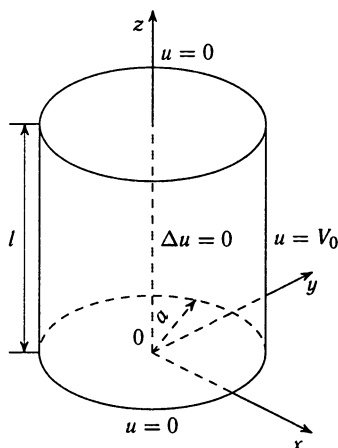


Рис. 1.3

ляем из уравнения

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho R') - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 R = 0, \quad (1.21)$$

являющегося уравнением Бесселя нулевого индекса мнимого аргумента. В самом деле, из уравнения (1.21) имеем

$$\rho^2 R'' + \rho R' - \rho^2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 R = 0.$$

Переходя в этом уравнении к новой независимой переменной $x = \rho \frac{n\pi}{l}$ и учитывая, что

$$R' = \frac{dR}{dx} \frac{n\pi}{l}, \quad R'' = \frac{d^2 R}{dx^2} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2,$$

придем к уравнению

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} - x^2 R = 0.$$

Его общее решение записывается в виде

$$R(x) = C_1 I_0(x) + C_2 K_0(x),$$

где $I_0(x)$ и $K_0(x)$ — функции Бесселя индекса нуль мнимого аргумента соответственно первого и второго рода; C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Так как (функция Макдональда) $K_0(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, то полагаем $C_2 = 0$ (в противном случае решение задачи является неограниченным на оси цилиндра). Таким образом,

$$R_n(\rho) = C I_0 \left(\frac{n\pi}{l} \rho \right).$$

«Атомами», из которых будет построено решение исходной задачи, являются функции

$$I_0 \left(\frac{n\pi}{l} \rho \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} z \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение нашей задачи представляется рядом

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I_0 \left(\frac{n\pi}{l} \rho \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} z \right).$$

Постоянные c_n находим из граничного условия $u(a, z) = V_0$. Имеем

$$V_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I_0 \left(\frac{n\pi}{l} a \right) \sin \left(\frac{n\pi}{l} z \right),$$

откуда

$$c_n I_0\left(\frac{n\pi}{l}a\right) = \frac{2}{l} \int_0^l V_0 \sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right) dz = \begin{cases} \frac{4V_0}{n\pi}, & n \text{ нечетное,} \\ 0, & n \text{ четное.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$u(\rho, z) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi}{l}\rho\right]}{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi}{l}a\right]} \cdot \frac{\sin\left[\frac{(2k+1)\pi}{l}z\right]}{2k+1}.$$

Поле на оси цилиндра есть

$$E_z(0, z) = -\frac{\partial u}{\partial z}(0, z) = -\frac{4V_0}{l} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left[\frac{(2k+1)\pi}{l}z\right]}{I_0\left[\frac{(2k+1)\pi}{l}a\right]},$$

ибо $I_0(0) = 1$.

Пример 2 [18]. Цилиндр, радиус основания которого R и высота h , имеет температуру нижнего основания и боковой поверхности, равную нулю, а температура верхнего основания есть определенная функция от ρ . Найти стационарную температуру внутренних точек цилиндра.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & 0 < \rho < R, \quad 0 < z < h, \\ u(\rho, 0) = 0, \quad u(\rho, h) = f(\rho), & 0 \leq \rho \leq R, \\ u(R, z) = 0, & 0 \leq z \leq h. \end{cases}$$

Вновь полагая $u(\rho, z) = r(\rho)Z(z)$ и подставляя в уравнение Лапласа (как в предыдущем случае), получим два уравнения:

$$1) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho r') + \lambda r = 0; \quad 2) Z'' - \lambda Z = 0. \quad (1.22)$$

Отметим, что здесь $\lambda > 0$ (это будет ясно из решения). Из граничного условия $u(a, z) = 0$ следует $r(R) = 0$. Уравнение (1.22) можно записать в виде

$$\rho^2 r'' + \rho r' + \lambda \rho^2 r = 0. \quad (1.23)$$

Переходя к новой независимой переменной $x = \sqrt{\lambda} \rho$, придем к уравнению Бесселя нулевого порядка

$$x^2 \frac{d^2 r}{dx^2} + x \frac{dr}{dx} + x^2 r = 0.$$

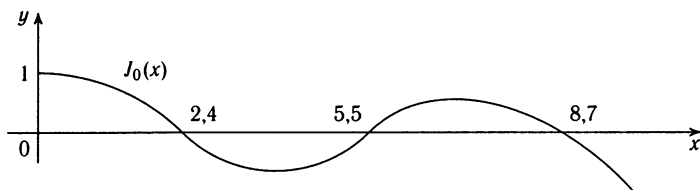


Рис. 1.4

Общее решение имеет вид

$$r(x) = C_1 J_0(x) + C_2 B_0(x),$$

где $J_0(x)$ и $B_0(x)$ — функции Бесселя порядка нуль соответственно первого и второго рода; C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Возвращаясь к старой переменной ρ , будем иметь

$$r(\rho) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} \rho) + C_2 B_0(\sqrt{\lambda} \rho).$$

Итак, в нашем случае задача Штурма—Лиувилля

$$\begin{cases} \rho^2 r'' + \rho r' + \lambda \rho^2 r = 0, & 0 < \rho < R, \\ |r(0)| < +\infty, & r(R) = 0, \end{cases}$$

приводится к решению уравнения Бесселя с указанными граничными условиями. Поскольку $B_0(\sqrt{\lambda} \rho) \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow 0$, то $r(\rho) = C J_0(\sqrt{\lambda} \rho)$ (полагаем $C_2 = 0$). Из условия $r(R) = 0$ следует $J_0(\sqrt{\lambda} R) = 0$. Обозначая через $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n, \dots$ положительные корни функции Бесселя $J_0(x)$ (рис. 1.4), определяем собственные значения $\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2$, которым соответствуют собственные функции $J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \rho\right)$, $n = 1, 2, \dots$. Далее, из уравнения $Z'' - \lambda Z = 0$ при $\lambda = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2$ находим

$$Z_n(z) = A_n \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_n}{R} z\right) + B_n \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n}{R} z\right),$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные. Из граничного условия $u(\rho, 0) = 0$ следует, что $Z(0) = 0$, т. е. $A_n = 0$. Таким образом, «атомы» решения суть функции

$$J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \rho\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n}{R} z\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Решение задачи представляется рядом

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \rho\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n}{R} z\right).$$

Постоянные B_n находим из граничного условия $u(\rho, h) = f(\rho)$. Имеем

$$u(\rho, h) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n h}{R}\right), \quad \text{или} \quad f(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n h}{R}\right).$$

Умножая обе части полученного равенства на $\rho J_0\left(\frac{\mu_m \rho}{R}\right)$ и интегрируя результат по отрезку $[0, R]$, получим

$$\int_0^R \rho f(\rho) J_0\left(\frac{\mu_m \rho}{R}\right) d\rho = B_m \operatorname{sh}\left(\frac{\mu_m h}{R}\right) \int_0^R \rho J_0^2\left(\frac{\mu_m \rho}{R}\right) d\rho.$$

Но

$$\int_0^R \rho J_0^2\left(\frac{\mu_m \rho}{R}\right) d\rho = \frac{R^2}{2} J_1^2(\mu_m),$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя первого рода первого порядка. Следовательно, решение задачи имеет вид

$$u(\rho, z) = \frac{2}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n z}{R}\right) J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n h}{R}\right) J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \rho f(\rho) J_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right) d\rho.$$

Пример 3. Найти потенциал во внутренних точках заземленного цилиндра с радиусом основания R и высотой h , если в цилиндре распределены электрические заряды с плотностью $\gamma = Az J_0\left(\frac{\mu_3 \rho}{R}\right)$ ($A = \text{const}$).

Решение. Нужно найти решение уравнения Пуассона с нулевыми граничными условиями

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi A z J_0\left(\frac{\mu_3 \rho}{R}\right), & 0 < \rho < R, \quad 0 < z < h, \\ u(\rho, 0) = u(\rho, h) = 0, & 0 \leq \rho \leq R, \\ u(R, z) = 0, & 0 \leq z \leq h. \end{cases} \quad (1.24)$$

Ищем решение в виде $u(\rho, z) = J_0\left(\frac{\mu_3 \rho}{R}\right) f(z)$, где функция $f(z)$ подлежит определению. Подставляя функцию $u(\rho, z)$ в уравнение (1.24), получим

$$f(z) \cdot \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{d}{d\rho} \left(J_0\left(\frac{\mu_3 \rho}{R}\right) \right) \right] + J_0\left(\frac{\mu_3 \rho}{R}\right) f''(z) = -4\pi A z J_0\left(\frac{\mu_3 \rho}{R}\right). \quad (1.25)$$

Заметим теперь, что функция $J_0\left(\frac{\mu_3 \rho}{R}\right)$ есть собственная функция уравнения Бесселя, т. е.

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left[\rho \frac{d}{d\rho} J_0\left(\frac{\mu_3 \rho}{R}\right) \right] + \frac{\mu_3^2}{R^2} J_0\left(\frac{\mu_3 \rho}{R}\right) = 0.$$

Поэтому (1.25) дает

$$(-1)f\left(\frac{\mu_3}{R}\right)^3 J_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right) + J_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right) f''(z) = -4\pi A z J_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right),$$

откуда получаем обыкновенное дифференциальное уравнение для определения $f(z)$

$$f'' - \left(\frac{\mu_3}{R}\right)^2 f = -4\pi A z, \quad 0 < z < h,$$

причем $f(0) = f(h) = 0$. Решая эту краевую задачу, находим

$$f(z) = -\frac{4\pi A R^2 h}{\mu_3^2} \cdot \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_3}{R}z\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_3}{R}h\right)} + \frac{4\pi A R^2}{\mu_3^2} z.$$

Следовательно, решение имеет вид

$$u(\rho, z) = J_0\left(\frac{\mu_3}{R}\rho\right) \cdot \frac{4\pi A R^2}{\mu_3^2} \left[h \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_3}{R}z\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_3}{R}h\right)} - z \right].$$

§ 1.9. Краевые задачи для уравнения Лапласа и Пуассона в шаре

Рассмотрение этих задач требует применения сферических и шаровых функций.

Напомним, что общее решение уравнений Лапласа имеет вид $((\rho, \theta, \varphi) — сферические координаты):$

$$1) u(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n Y_n(\theta, \varphi) \text{ внутри сферы радиуса } a;$$

$$2) u(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{\rho}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi) \text{ вне сферы радиуса } a;$$

$$3) u(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(A_n \rho^n + \frac{B_n}{\rho^{n+1}} \right) Y_n(\theta, \varphi) \text{ в шаровом слое.}$$

$$\text{Здесь } Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cos(m\varphi) + B_{nm} \sin(m\varphi)] P_n^{(m)}(\cos \theta), \quad \text{где}$$

$P_n^{(m)}(x)$ — так называемые присоединенные функции Лежандра.

Пример 1. Найти решение $u(\rho, \theta, \varphi)$ внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре при граничном условии

$$u(a, \theta, \varphi) = \sin(3\theta) \cos \varphi.$$

Решение. В сферической системе координат постановка задачи имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, \\ 0 < \rho < a, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(a, \theta, \varphi) = \sin(3\theta) \cos \varphi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (1.26)$$

Полагая $u(\rho, \theta, \varphi) = R(\rho)Y(\theta, \varphi)$ и подставляя это выражение в уравнение (1.26), получим

$$Y \frac{d}{d\rho} (\rho^2 R') + R \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right] = 0,$$

откуда в результате деления на RY получаем

$$\frac{\frac{d}{d\rho} (\rho^2 R')}{R} + \frac{\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}}{Y} = 0,$$

или

$$\frac{\frac{d}{d\rho} (\rho^2 R')}{R} = - \frac{\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}}{Y} = \lambda,$$

где λ — постоянная разделения. Отсюда следуют два уравнения:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0, \\ 2) \quad & \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \lambda Y = 0, \end{aligned} \quad (1.27)$$

причем функция $Y(\theta, \varphi)$ должна быть ограничена на всей сфере.

При этом функция $Y(\theta, \varphi)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} Y(\theta, \varphi) = Y(\theta, \varphi + 2\pi), \\ |Y(0, \varphi)| < +\infty, \quad |Y(\pi, \varphi)| < +\infty. \end{cases} \quad (1.28)$$

Как известно, ограниченные решения уравнения (1.27), обладающие непрерывными до второго порядка производными, называются *сферическими функциями*.

Решение задачи (1.27), (1.28) для $Y(\theta, \varphi)$ также ищем методом разделения переменных, полагая $Y(\theta, \varphi) = T(\theta)\Phi(\varphi)$. Подставляя $Y(\theta, \varphi)$ в уравнение (1.27), будем иметь

$$\Phi \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta T') + \frac{1}{\sin^2 \theta} T \Phi'' + \lambda T \Phi = 0,$$

откуда

$$\frac{\sin \theta \frac{d}{d\theta}(\sin \theta T')}{T} + \lambda \sin^2 \theta = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \mu.$$

Функцию $\Phi(\varphi)$ находим, решая задачу

$$\begin{cases} \Phi'' + \mu\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{cases}$$

Такую задачу мы решали, рассматривая уравнение Лапласа в круге, и нашли, что $\mu = m^2$ и $\Phi_m(\varphi) = C_1 \cos(m\varphi) + C_2 \sin(m\varphi)$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные; $m = 0, 1, \dots$

Функция $T(\theta)$ определяется из уравнения

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta}(\sin \theta T') + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) T = 0 \quad (1.29)$$

и условий ограниченности при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Вводя новую переменную $x = \cos \theta$ и учитывая, что

$$T' = \frac{dT}{dx} \frac{dx}{d\theta} = \frac{dT}{dx} (-\sin \theta), \quad T'' = \frac{d^2 T}{dx^2} \sin^2 \theta - \frac{dT}{dx} \cos \theta,$$

из уравнения (1.29) получим краевую задачу на собственные функции и собственные значения

$$\begin{cases} (1-x^2) \frac{d^2 T}{dx^2} - 2x \frac{dT}{dx} + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-x^2} \right) T = 0, & -1 < x < 1, \\ |T(-1)| < +\infty, & |T(+1)| < +\infty. \end{cases}$$

Собственные функции полученной задачи:

$$T_n^{(m)}(x) = P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x),$$

— присоединенные функции Лежандра. Отсюда решение уравнения (1.29) есть функция $T_n^{(m)}(\theta) = P_n^{(m)}(\cos \theta)$.

Комбинируя решения уравнения (1.29) с решением уравнения $\Phi'' + \mu\Phi = 0$, получим $2n+1$ сферических функций:

$$P_n(\cos \theta), \quad P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos(m\varphi), \quad P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin(m\varphi), \\ n = 0, 1, \dots; \quad m = 1, 2, \dots$$

Общее решение уравнения (1.27) при $\lambda = n(n+1)$ запишется в виде

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n [A_{nm} \cos(m\varphi) + B_{nm} \sin(m\varphi)] P_n^{(m)}(\cos \theta).$$

Вернемся к отысканию функции $R(\rho)$. Полагая $R(\rho) = \rho^\sigma$ и подставляя в уравнение $\rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0$, получим $\sigma(\sigma + 1) - n(n + 1) = 0$, откуда $\sigma_1 = n$, $\sigma_2 = -(n + 1)$. Следовательно, «атомами» решения являются функции

$$\begin{aligned} \rho^n P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos(m\varphi), & \quad \rho^n P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin(m\varphi), \\ \rho^{-(n+1)} P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos(m\varphi), & \quad \rho^{-(n+1)} P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin(m\varphi). \end{aligned}$$

Но решения $\rho^{-(n+1)} P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos(m\varphi)$, $\rho^{-(n+1)} P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin(m\varphi)$ необходимо отбросить, поскольку они не ограничены при $\rho \rightarrow 0$. Следовательно, в качестве решения берем ряд

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \rho^n [A_{nm} \cos(m\varphi) + B_{nm} \sin(m\varphi)] P_n^{(m)}(\cos \theta).$$

Осталось подобрать постоянные A_{nm} и B_{nm} так, чтобы выполнялось граничное условие

$$u(a, \theta, \varphi) = \sin(3\theta) \cos \varphi.$$

Имеем

$$u(a, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a^n [A_{nm} \cos(m\varphi) + B_{nm} \sin(m\varphi)] P_n^{(m)}(\cos \theta),$$

т. е. имеет место равенство

$$\sin(3\theta) \cos \varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a^n [A_{nm} \cos(m\varphi) + B_{nm} \sin(m\varphi)] P_n^{(m)}(\cos \theta).$$

Отсюда следует, что в сумме $\sum_{m=0}^n [\dots]$ нужно взять лишь одно слагаемое, соответствующее $m = 1$. Таким образом, получаем

$$\sin(3\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a^n A_{n1} P_n^{(1)} \cos \theta.$$

Коэффициенты A_{n1} можно найти, следуя общей формуле: если

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n P_n^{(1)} \cos(\theta),$$

то

$$b_n = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{(n-1)!}{(n+1)!} \int_0^\pi f(\theta) P_n^{(1)}(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

коэффициентов разложения:

$$1) \quad \begin{cases} C_{21}R_1^2 + \frac{D_{21}}{R_1^3} = 1, \\ A_{21}R_1^2 + \frac{B_{21}}{R_1^3} = 0, \\ C_{21}R_2^2 + \frac{D_{21}}{R_2^3} = 0, \\ A_{21}R_2^2 + \frac{B_{21}}{R_2^3} = 0, \end{cases} \quad 2) \quad \begin{cases} A_{53}R_1^5 + \frac{B_{53}}{R_1^6} = 0, \\ C_{53}R_1^5 + \frac{D_{53}}{R_1^6} = 0, \\ A_{53}R_2^5 + \frac{B_{53}}{R_2^6} = 1, \\ C_{53}R_2^5 + \frac{D_{53}}{R_2^6} = 0. \end{cases}$$

Все остальные коэффициенты равны нулю. Решая записанные системы уравнений, найдем

$$A_{21} = B_{21} = 0, \quad C_{53} = D_{53} = 0, \quad C_{21} = -\frac{R_1^3}{R_2^2(R_2^5 - R_1^5)},$$

$$D_{21} = \frac{(R_1 R_2)^3}{R_2^5 - R_1^5}, \quad A_{53} = -\frac{R_2^6}{R_1^5(R_2^{11} - R_1^{11})}, \quad B_{53} = \frac{(R_1 R_2)^6}{R_2^{11} - R_1^{11}}.$$

Итак, гармоническая функция имеет вид

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \left(C_{21}\rho + \frac{D_{21}}{\rho^2} \right) P_2^{(1)}(\cos \theta) \sin \varphi + \left(A_{53}\rho^5 + \frac{B_{53}}{\rho^6} \right) P_5^{(3)}(\cos \theta) \cos(3\varphi).$$

Пример 3 [6, 16.25(1)]. Найти функцию u , гармоническую внутри сферического слоя $1 < \rho < 2$ и такую, что

$$\left(3u + \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=1} = 5 \sin^2 \theta \sin(2\varphi) \quad \text{и} \quad u|_{\rho=2} = -\cos \theta.$$

Решение. Математическая запись задачи:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 1 < \rho < 2, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \left(3u + \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \Big|_{\rho=1} = 5 \sin^2 \theta \sin(2\varphi), & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u|_{\rho=2} = -\cos \theta, & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Имеем

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left[\left(A_{nm}\rho^n + \frac{B_{nm}}{\rho^{n+1}} \right) \cos(m\varphi) + \right. \\ \left. + \left(C_{nm}\rho^n + \frac{D_{nm}}{\rho^{n+1}} \right) \sin(m\varphi) \right] P_n^{(m)}(\cos \theta).$$

Из граничных условий следует, что в этой сумме нужно взять только слагаемые, соответствующие индексам $n = 2, m = 2$ и $n = 1, m = 0$.

Другими словами, решение удобно искать в виде

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \left(a\rho + \frac{b}{\rho^2}\right) \cos \theta + \left(c\rho^2 - \frac{d}{\rho^3}\right) \sin^2 \theta \sin(2\varphi).$$

Используя граничные условия, получим следующие уравнения для определения коэффициентов a, b, c, d :

$$4a + b = 0, \quad 5c = 5, \quad 2a + b/4 = -1, \quad 4c - d/8 = 0.$$

Из них находим $a = -1, b = 4, c = 1, d = 32$. Тогда решение есть

$$u(\rho, \theta, \varphi) = \left(-\rho + \frac{4}{\rho^2}\right) \cos \theta + \left(\rho^2 - \frac{32}{\rho^3}\right) \sin^2 \theta \sin(2\varphi).$$

Пример 4 [4, гл. IV, № 125]. Найти решение задачи Неймана для уравнения Лапласа внутри сферы радиуса a при условии

$$\frac{\partial u}{\partial n}(a, \theta, \varphi) = A \cos \theta \quad (A = \text{const}).$$

Решение. Здесь мы сталкиваемся с осесимметричным случаем решения задачи Неймана для уравнения Лапласа, так как граничное условие не зависит от φ и, таким образом, решение $u = u(\rho, \theta)$ не зависит от φ .

Прежде всего, легко убедиться в выполнении необходимого условия разрешимости данной задачи. Имеем

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial n} ds = 0, \quad \text{или} \quad \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi A \cos \theta \sin \theta a^2 d\theta = 0.$$

Уравнение Лапласа в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0, \quad 0 \leq \rho < a, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Полагая $u(\rho, \theta) = R(\rho)T(\theta)$ и подставляя это выражение в уравнение, получим после разделения переменных два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$1) \quad \rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0; \tag{1.30}$$

$$2) \quad \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \cdot T') + \lambda T = 0. \tag{1.31}$$

Переходя в уравнении (1.31) к новой переменной $x = \cos \theta$, приходим к уравнению Лежандра

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dT}{dx} \right] + \lambda T = 0, \quad -1 < x < 1, \tag{1.32}$$

при условии $|T(\pm 1)| < \infty$. Ограниченными решениями уравнения Лежандра (1.32) на интервале $(-1, 1)$ являются полиномы Лежандра

$P_n(x)$ при $\lambda_n = n(n+1)$. Отсюда следует, что ограниченными решениями уравнения (1.31) на интервале $(0, \pi)$ являются функции $P_n(\cos \theta)$. Ограниченными решениями уравнения (1.30) являются функции $R_n(\rho) = \rho^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Тогда

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \rho^n P_n(\cos \theta),$$

где постоянные C_n определяются из граничного условия $\frac{\partial u}{\partial \rho} = A \cos \theta$.

Имеем $\frac{\partial u}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n \rho^{n-1} P_n(\cos \theta)$, или, полагая $\rho = a$,

$$A \cos \theta = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n a^{n-1} P_n(\cos \theta),$$

откуда, применяя формулу

$$C_n = \frac{2n+1}{2na^{n-1}} \int_0^{\pi} A \cos \theta P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

найдем $C_1 = 1$, $C_n = 0$, $n = 2, 3, \dots$ Таким образом, решение имеет вид

$$u(\rho, \theta) = C + A\rho \cos \theta,$$

где C — произвольная постоянная.

Пример 5. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в шаре радиуса a с центром в начале координат

$$\begin{cases} \Delta u = xz & \text{внутри шара,} \\ u|_{\rho=a} = 1. \end{cases}$$

Решение. Переходя к сферическим координатам, будем искать решение в виде суммы

$$u(\rho, \theta, \varphi) = v(\rho, \theta, \varphi) + w(\rho),$$

где функция $v(\rho, \theta, \varphi)$ определяется как решение задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} = \frac{\rho^2}{2} \cos \varphi \sin(2\theta), \\ 0 < \rho < a, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ v(a, \theta, \varphi) = 0, \end{cases} \quad (1.33)$$

а функция $w(\rho)$ — как решение задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 w') = 0, & 0 < \rho < a, \\ w(a) = 1, & |w(0)| < +\infty. \end{cases} \quad (1.34)$$

Решим вначале задачу (1.33). Ищем решение в виде

$$v(\rho, \theta, \varphi) = R(\rho)P_2^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi,$$

где $P_2^{(1)}(x)$ — присоединенная функция Лежандра с индексами $n=2$, $m=1$. Подставляя $v(\rho, \theta, \varphi)$ в уравнение задачи (1.33), будем иметь (обозначая $P_2^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi = Y_2^{(1)}(\theta, \varphi)$)

$$Y_2^{(1)} \frac{d}{d\rho}(\rho^2 R') + R \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_2^{(1)}}{\partial \theta} \right) + R \cdot \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_2^{(1)}}{\partial \varphi^2} = \frac{\rho^4}{6} \cdot Y_2^{(1)}(\theta, \varphi).$$

Но по определению сферической функции $Y_2^{(1)}(\theta, \varphi)$ имеет место равенство

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y_2^{(1)}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y_2^{(1)}}{\partial \varphi^2} + 6Y_2^{(1)} = 0, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi.$$

Поэтому

$$Y_2^{(1)} \frac{d}{d\rho}(\rho^2 R') - 6RY_2^{(1)} = \frac{\rho^4}{6} Y_2^{(1)},$$

откуда получим уравнение

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^2 R') - 6R = \frac{\rho^4}{6}, \quad 0 < \rho < a,$$

с граничными условиями $|R(0)| < +\infty$, $R(a) = 0$. Итак, для определения функции $R(\rho)$ имеем задачу

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + 2\rho R' - 6R = \rho^4/6, & 0 < \rho < a, \\ |R(0)| < +\infty, & R(a) = 0. \end{cases}$$

Решая ее, найдем $R(\rho) = \frac{1}{84}\rho^2(\rho^2 - a^2)$. Решение задачи (1.34) есть $w(\rho) = 1$. Таким образом,

$$u(\rho, \theta, \varphi) = 1 + \frac{1}{84}\rho^2(\rho^2 - a^2)P_2^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi.$$

Замечание 1. В общем случае при решении внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа с условием $u|_{\partial\Omega} = f(\theta, \varphi)$ (Ω — шар радиуса a с центром в начале координат, $\partial\Omega$ — его граница) имеем соотношение

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n a^n [A_{nm} \cos(m\varphi) + B_{nm} \sin(m\varphi)] P_n^{(m)}(\cos \theta),$$

где коэффициенты A_{nm} и B_{nm} находятся по формулам

$$A_{nm} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2 a^n} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos(m\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

$$B_{nm} = \frac{1}{\|Y_n^{(m)}\|^2 a^n} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin(m\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

причем

$$\|Y_n^{(m)}\|^2 = \frac{2\pi \epsilon_m (n+m)!}{2n+1(n-m)!}, \quad \epsilon_m = \begin{cases} 2, & \text{если } m = 0, \\ 1, & \text{если } m > 0. \end{cases}$$

Замечание 2. Решение упомянутой внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в точке $(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ можно представить в интегральной форме (интеграл Пуассона)

$$u(\rho_0, \theta_0, \varphi_0) = \frac{a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \frac{a^2 - \rho_0^2}{(a^2 - 2a\rho_0 \cos \gamma + \rho_0^2)^{3/2}} \sin \theta d\theta d\varphi,$$

где $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$.

§ 1.10. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца

Уравнения Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = f$ и $\Delta u - k^2 u = f$ являются наряду с уравнениями Лапласа и Пуассона важным видом эллиптических уравнений второго порядка. Однородное уравнение ($f = 0$), например, естественно возникает (в многомерном случае) в методе разделения переменных для гиперболических и параболических задач. Нахождение собственных функций и собственных значений сводится к разрешимости соответствующей граничной задачи для уравнения Гельмгольца с $f \equiv 0$.

Пример [4, гл. VII, № 29(a)]. Найти собственные колебания мембраны, имеющей форму кольцевого сектора ($a \leq \rho \leq b$, $0 \leq \varphi \leq \varphi_0$), со свободной границей.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda u = 0, & a < \rho < b, \quad 0 < \varphi < \varphi_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \rho}(a, \varphi) = \frac{\partial u}{\partial \rho}(b, \varphi) = 0, & 0 \leq \varphi \leq \varphi_0, \\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, 0) = \frac{\partial u}{\partial \varphi}(\rho, \varphi_0), & a \leq \rho \leq b. \end{cases} \quad (1.35)$$

Решение задачи ищем в виде

$$u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi).$$

Подставляя эту функцию в уравнение (1.35) и разделяя переменные, получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$1) \quad \Phi'' + \nu\Phi = 0; \quad 2) \quad \rho \frac{d}{d\rho}(\rho R') + (\lambda\rho^2 - \nu)R = 0.$$

Для определения ν имеем задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} \Phi'' + \nu\Phi = 0, & 0 < \varphi < \varphi_0, \\ \Phi'(0) = 0, & \Phi'(\varphi_0) = 0. \end{cases}$$

Отсюда $\nu_n = \left(\frac{\pi n}{\varphi_0}\right)^2$, $n = 0, 1, \dots$; $\Phi_n(\varphi) = \cos\left(\frac{\pi n}{\varphi_0}\varphi\right)$. Функцию $R(\rho)$ находим из уравнения Бесселя

$$\rho \frac{d}{d\rho}(\rho R') + (\lambda\rho^2 - \nu)R = 0, \quad a < \rho < b, \quad (1.36)$$

с учетом граничных условий $R'(a) = R'(b) = 0$.

Общее решение уравнения (1.36) имеет вид

$$R(\rho) = C_1 J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\sqrt{\lambda}\rho) + C_2 N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\sqrt{\lambda}\rho),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, $N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\sqrt{\lambda}\rho)$ — функция Бесселя второго рода. Значения λ определяются с помощью граничных условий $R'(a) = R'(b) = 0$. Запишем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\sqrt{\lambda}a) + C_2 N'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\sqrt{\lambda}a) = 0, \\ C_1 J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\sqrt{\lambda}b) + C_2 N'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\sqrt{\lambda}b) = 0. \end{cases}$$

Она имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель

$$\begin{vmatrix} J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\sqrt{\lambda}a) & N'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\sqrt{\lambda}a) \\ J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\sqrt{\lambda}b) & N'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\sqrt{\lambda}b) \end{vmatrix}$$

равен нулю. Тогда $\lambda_{m,n} = [\mu_{m,n}^{(n)}]^2$, где $\mu_{m,n}^{(n)}$ — корень уравнения

$$\frac{J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu a)}{J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu b)} = \frac{N'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu a)}{N'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu b)}.$$

Значит, радиальная функция имеет вид

$$R_{m,n}(\rho) = J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)} \rho) N'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)} a) - J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)} a) N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)} \rho).$$

Итак, собственные колебания описываются функциями

$$\begin{aligned} u_{m,n}(\rho, \varphi) &= R_{m,n}(\rho) \Phi_n(\varphi) = \\ &= \left[J_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)} \rho) N'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)} a) - J'_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)} a) N_{\frac{\pi n}{\varphi_0}}(\mu_m^{(n)} \rho) \right] \cos\left(\frac{\pi n}{\varphi_0} \varphi\right). \end{aligned}$$

§ 1.11. Краевая задача для уравнения Гельмгольца в цилиндре

Пример [4, гл. VII, № 10]. Найти стационарное распределение концентрации неустойчивого газа внутри бесконечного цилиндра кругового сечения, если на поверхности цилиндра поддерживается постоянная концентрация u_0 .

Решение. Известно, что задача о диффузии неустойчивого газа, распадающегося в процессе диффузии, описывается уравнением

$$\Delta u - \kappa^2 u = 0 \quad (\kappa^2 > 0).$$

Таким образом, в полярной системе координат получим задачу

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} - \kappa^2 u = 0, & 0 < \rho < a, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \\ u(a, \varphi) = u_0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (1.37)$$

(здесь a — радиус цилиндра).

Ищем решение в виде $u(\rho, \varphi) = R(\rho) \Phi(\varphi)$. Подставив это выражение в уравнение (1.37), получим

$$\Phi \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho R') + \frac{R}{\rho^2} \Phi'' - \kappa^2 R \Phi = 0,$$

или

$$\frac{\rho \frac{d}{d\rho} (\rho R')}{R} - \kappa^2 \rho^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda.$$

Отсюда следуют два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$1) \quad \Phi'' + \lambda \Phi = 0; \quad 2) \quad \rho \frac{d}{d\rho} (\rho R') - (\kappa^2 \rho^2 + \lambda) R = 0.$$

Из первого уравнения, учитывая, что $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$, получаем $\lambda = n^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и $\Phi_n(\varphi) = A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)$, где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Далее, из второго уравнения вытекает

$$\rho^2 R'' + \rho R' - (\kappa^2 \rho^2 + n^2) R = 0.$$

После замены $x = \kappa\rho$ получим уравнение

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} - (x^2 + n^2)R = 0.$$

Это уравнение Бесселя мнимого аргумента порядка n . Его общее решение имеет вид

$$R(x) = C_1 I_n(x) + C_2 K_n(x),$$

где $I_n(x)$ и $K_n(x)$ — цилиндрические функции мнимого аргумента первого и второго рода соответственно. Очевидно, надо полагать $C_2 = 0$ в силу ограниченности решения на оси цилиндра (ведь $K_n(x)$ имеет логарифмическую особенность при $x \rightarrow 0$). Возвращаясь к старой переменной, записываем

$$R(\rho) = C I_n(\kappa\rho),$$

где C — произвольная постоянная.

Значит,

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)] I_n(\kappa\rho),$$

где постоянные A_n и B_n находим из граничного условия. Имеем

$$u(a, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)] I_n(\kappa a).$$

Так как $u(a, \varphi) = u_0$, получим $A_0 = u_0 / I_0(\kappa a)$ и все остальные постоянные ряда обращаются в нуль. Итак, решение есть

$$u(\rho, \varphi) = u_0 \frac{I_0(\kappa\rho)}{I_0(\kappa a)}.$$

§ 1.12. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в круге

Пример 1. Решить краевую задачу для уравнения Гельмгольца в круге

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 < \rho < a, \\ u(a, \varphi) = f(\varphi), & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

(здесь $k^2 \neq \lambda$, где λ — собственное значение однородной задачи Дирихле для уравнения $\Delta u + \lambda u = 0$).

Решение. Воспользуемся снова методом разделения переменных. Полагая $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$ и подставляя предполагаемую форму реше-

ния в уравнение Гельмгольца, получаем

$$\Phi \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho R') + R \frac{1}{\rho^2} \Phi'' + k^2 R \Phi = 0.$$

Откуда

$$\frac{\rho \frac{d}{d\rho}(\rho R')}{R} + k^2 \rho^2 = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda$$

(λ — постоянная разделения).

Собственные значения и собственные функции определяются как решения уже хорошо известной задачи

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda \Phi = 0, & -\infty < \varphi < +\infty, \\ \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{cases}$$

Имеем $\lambda = n^2$, $\Phi_n(\varphi) = C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi)$, $n = 0, 1, \dots$

Так как

$$\frac{\rho \frac{d}{d\rho}(\rho R')}{R} + k^2 \rho^2 = \lambda,$$

то для определения $R(\rho)$ получаем уравнение

$$\rho \frac{d}{d\rho}(\rho R') + R(k^2 \rho^2 - n^2) = 0. \quad (1.38)$$

Обозначив $x = k\rho$, перепишем уравнение (1.38) в виде

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + R(x^2 - n^2) = 0.$$

Это уравнение Бесселя порядка n . Его общее решение есть

$$R(x) = C_1 J_n(x) + C_2 Y_n(x),$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка n ; $Y_n(x)$ — функция Бесселя второго рода порядка n ; C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Значит, решение уравнения (1.38) имеет вид

$$R(\rho) = C_1 J_n(k\rho) + C_2 Y_n(k\rho).$$

Поскольку $Y_n(k\rho) \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow 0$, а мы имеем дело с ограниченными решениями, то полагаем $C_2 = 0$. Таким образом, $R_n(\rho) = J_n(k\rho)$. Решение нашей задачи представляется рядом

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)] J_n(k\rho). \quad (1.39)$$

Постоянные A_n и B_n находим из граничного условия. Полагая в (1.39) $\rho = a$, получаем

$$f(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)] J_n(ka),$$

откуда

$$A_n = \frac{1}{2\pi J_n(ka)} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$B_n = \frac{1}{2\pi J_n(ka)} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots$$

В частности, при $f(\varphi) = A \sin(3\varphi)$ будем иметь

$$B_3 = \frac{A}{J_3(ka)}, \quad A_n = 0 \quad (n = 0, 1, \dots); \quad B_n = 0 \quad (n \neq 3),$$

и в этом случае решение имеет вид

$$u(\rho, \varphi) = \frac{A}{J_3(ka)} J_3(k\rho) \sin(3\varphi).$$

Пример 2. Внешняя задача Дирихле для уравнения Гельмгольца.

$$\begin{cases} \Delta u + k^2 u = 0, & 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad \rho > a, \\ u|_{\rho=a} = f(\varphi), & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ u_\rho + ik\rho = o(\rho^{-1/2}) & \text{при } \rho \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

Решение. Здесь, как и в предыдущем примере, решение задачи находится методом разделения переменных. Но только теперь для выделения единственного решения требуется учитывать при $n = 2$ условие излучения (условие Зоммерфельда)

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} + ik\rho = o\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right), \quad \rho \rightarrow +\infty.$$

Решение уравнения (1.38) надо теперь записать в виде

$$R(\rho) = C_1 H_n^{(1)}(k\rho) + C_2 H_n^{(2)}(k\rho),$$

где $H_n^{(1)}(x)$ и $H_n^{(2)}(x)$ — функции Ханкеля индекса n соответственно первого и второго рода. На бесконечности ($\rho \rightarrow \infty$) поведение функций Ханкеля определяется асимптотическими формулами

$$H_n^{(1)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right],$$

$$H_n^{(2)}(x) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Ясно, что условию излучения удовлетворяет функция $H_n^{(2)}(k\rho)$ (проверяется непосредственно).

Значит, решение внешней задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца дается рядом

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi)] H_n^{(2)}(k\rho),$$

где коэффициенты A_n и B_n находятся по формулам

$$A_n = \frac{1}{2\pi H_n^{(2)}(ka)} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos(n\varphi) d\varphi, \quad n = 0, 1, \dots,$$

$$B_n = \frac{1}{2\pi H_n^{(2)}(ka)} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin(n\varphi) d\varphi, \quad n = 1, 2, \dots$$

§ 1.13. Краевые задачи для уравнения Гельмгольца в шаре

Рассмотрим несколько примеров на решение внутренних и внешних задач Дирихле и Неймана для шара.

Пример 1 [4, гл. VII, № 12]. Найти стационарное распределение концентрации неустойчивого газа внутри сферы радиуса a , если на поверхности сферы поддерживается концентрация $u|_{\partial\Omega} = u_0 \cos \theta$ ($u_0 = \text{const}$).

Решение. Математическая постановка задачи:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \kappa^2 u = 0, \\ 0 < \rho < a, \quad 0 < \theta < \pi, \\ u(a, \theta) = u_0 \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (1.40)$$

Как обычно, ищем решение в виде

$$u(\rho, \theta) = R(\rho)T(\theta).$$

Подставим это решение в уравнение (1.40). Получим

$$T \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 R') + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \cdot R \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot T') - \kappa^2 R T = 0,$$

или (разделив на TR)

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 R')}{R} - \kappa^2 \rho^2 = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta \cdot T') = \lambda.$$

Отсюда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$1) \frac{d}{d\rho}(\rho^2 R') - (\kappa^2 \rho^2 + \lambda)R = 0; \quad 2) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta \cdot T') + \lambda T = 0.$$

Из второго уравнения заменой $x = \cos \theta$ (с учетом $|T(0)| < \infty$, $|T(\pi)| < \infty$) находим

$$\lambda_n = n(n+1), \quad n = 0, 1, \dots, \quad T_n(\theta) = P_n(\cos \theta),$$

где $P_n(x)$ — полиномы Лежандра.

Первое уравнение заменой $v(\rho) = \sqrt{\rho} R(\rho)$ легко привести к виду

$$\rho^2 v'' + \rho v' - \left[(\kappa \rho)^2 + \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] v = 0.$$

Ограниченное решение этого уравнения есть

$$v_n(\rho) = C I_{n+1/2}(\kappa \rho)$$

($I_{n+1/2}(x)$ — функция Бесселя полуцелого порядка мнимого аргумента).

Тогда

$$R_n(\rho) = \frac{I_{n+1/2}(\kappa \rho)}{\sqrt{\rho}}.$$

Таким образом, решение представляется рядом

$$u(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n I_{n+1/2}(\kappa \rho)}{\sqrt{\rho}} P_n(\cos \theta),$$

где постоянные C_n находим из граничного условия. Имеем равенство

$$u_0 \cos \theta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{I_{n+1/2}(\kappa a)}{\sqrt{a}} P_n(\cos \theta).$$

Отсюда $C_1 = \frac{u_0 \sqrt{a}}{I_{3/2}(\kappa a)}$ (все остальные коэффициенты ряда равны нулю).

Значит, решение имеет вид

$$u(\rho, \theta) = u_0 \frac{\sqrt{a} I_{3/2}(\kappa \rho)}{\sqrt{\rho} I_{3/2}(\kappa a)} \cos \theta.$$

Пример 2 [6, гл. V, 18.51]. Решить задачу Неймана для уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ внутри и вне сферы $\rho = R$ при условии $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=R} = A$ ($A = \text{const}$).

Решение. а) Внутреннюю задачу Неймана можно записать так:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + k^2 u = 0, & 0 < \rho < R, \quad 0 < \theta < \pi, \\ & 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=R} = A, & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases} \quad (1.41)$$

Поскольку $\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) = (u\rho)''$, то уравнение (1.41) можно переписать так:

$$v'' + k^2 v = 0, \quad v(\rho) = \rho u(\rho).$$

Общее решение этого уравнения есть

$$v(\rho) = C_1 \cos(k\rho) + C_2 \sin(k\rho)$$

и, значит,

$$u(\rho) = C_1 \frac{\cos(k\rho)}{\rho} + C_2 \frac{\sin(k\rho)}{\rho}.$$

В силу ограниченности решения в центре шара мы должны считать $C_1 = 0$. Поэтому

$$u(\rho) = C \frac{\sin(k\rho)}{\rho}.$$

Найдем теперь нормальную производную:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial \rho} = C \frac{k \cos(k\rho) \cdot \rho - \sin(k\rho)}{\rho^2}.$$

Используя граничное условие (1.42), получим

$$C \frac{Rk \cos(kR) - \sin(kR)}{R^2} = A,$$

откуда

$$C = \frac{AR^2}{kR \cos(kR) - \sin(kR)}$$

и, следовательно, решение имеет вид

$$u(\rho) = \frac{AR^2}{kR \cos(kR) - \sin(kR)} \cdot \frac{\sin(k\rho)}{\rho}.$$

б) Внешняя задача Неймана записывается так:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + k^2 u = 0, & \rho > R, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \end{cases} \quad (1.43)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=R} = A, & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \end{cases} \quad (1.44)$$

$$\begin{cases} u_\rho - iku = o(\rho^{-1}) & \text{при } \rho \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (1.45)$$

По аналогии с а) уравнение (1.43) можно переписать так:

$$v'' + k^2 v = 0, \quad \text{где } v(\rho) = \rho u(\rho).$$

Общее решение этого уравнения есть

$$v(\rho) = C_1 e^{ik\rho} + C_2 e^{-ik\rho} \quad (\rho \rightarrow +\infty)$$

и, значит,

$$v(\rho) = C_1 \frac{e^{ik\rho}}{\rho} + C_2 \frac{e^{-ik\rho}}{\rho}.$$

Покажем, что функция $u_1 = \frac{e^{ik\rho}}{\rho}$ удовлетворяет условию Зоммерфельда

$$\frac{\partial u_1}{\partial \rho} - iku_1 = o\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (\rho \rightarrow \infty),$$

т. е. что

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \left[\rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial \rho} - iku_1 \right) \right] = 0.$$

Действительно,

$$\rho \left(\frac{\partial u_1}{\partial \rho} - iku_1 \right) = \rho \left(iku_1 - \frac{1}{\rho} u_1 - iku_1 \right) = -\frac{e^{ik\rho}}{\rho}, \quad \left| \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \right| \leq \frac{1}{\rho}.$$

Следовательно, для выделения единственного решения надо положить $C_2 = 0$ и тогда $u(\rho) = C \frac{e^{ik\rho}}{\rho}$.

Вычислим теперь нормальную производную:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \left(C \frac{e^{ik\rho}}{\rho} \right).$$

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{C e^{ik\rho}}{\rho^2} (1 - ik\rho).$$

Из граничного условия (1.44) следует, что

$$C = \frac{AR^2}{e^{ikR}(1 - ikR)}.$$

Значит, решение внешней задачи Неймана дается формулой

$$u(\rho) = \frac{AR^2}{e^{ikR}(1 - ikR)} \frac{e^{ik\rho}}{\rho}.$$

Пример 3 [6, гл. V, 18.53]. Решить задачу Дирихле для уравнения $\Delta u - k^2 u = 0$ внутри и вне сферы $\rho = R$ при условии $u|_{\rho=R} = A$ ($A = \text{const}$).

Решение. а) Решаем сначала внутреннюю задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u - k^2 u = 0, & 0 < \rho < R, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u|_{\rho=R} = A, & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

По аналогии с примером 2 имеем уравнение

$$v'' - k^2 v = 0, \quad \text{где } v(\rho) = \rho u(\rho).$$

Его общее решение имеет вид

$$v(\rho) = C_1 \operatorname{sh}(k\rho) + C_2 \operatorname{ch}(k\rho)$$

и, значит,

$$u(\rho) = C_1 \frac{\operatorname{sh}(k\rho)}{\rho} + C_2 \frac{\operatorname{ch}(k\rho)}{\rho},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Заметим, что $\frac{\operatorname{ch}(k\rho)}{\rho} \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow \infty$. Поэтому мы должны считать $C_2 = 0$. Таким образом,

$$u(\rho) = C \frac{\operatorname{sh}(k\rho)}{\rho}.$$

Постоянную C определяем из граничного условия $u(R) = A$, т. е. $C \frac{\operatorname{sh}(kR)}{R} = A$, откуда

$$C = A \frac{R}{\operatorname{sh}(kR)}.$$

Следовательно, решение есть

$$u(\rho) = A \frac{R \operatorname{sh}(k\rho)}{\rho \operatorname{sh}(kR)}.$$

б) Решаем внешнюю задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u - k^2 u = 0, & \rho > R, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u|_{\rho=R} = A, & 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u(\rho) \rightarrow 0 & \text{при } \rho \rightarrow \infty. \end{cases}$$

В этом случае $u(\rho) = C_1 \frac{e^{k\rho}}{\rho} + C_2 \frac{e^{-k\rho}}{\rho}$. Поскольку для внешней задачи $u(\rho) \rightarrow 0$ при $\rho \rightarrow \infty$, то мы должны считать $C_1 = 0$. Поэтому

$$u(\rho) = C \frac{e^{-k\rho}}{\rho}.$$

Из граничного условия $u|_{\rho=R} = A$ находим постоянную $C = AR/e^{-kR}$.

Следовательно, решение есть

$$u(\rho) = A \frac{R e^{-k\rho}}{\rho e^{-kR}}.$$

§ 1.14. Направленные электромагнитные волны

В этом параграфе мы рассмотрим задачи, связанные с установившимися процессами распространения электромагнитных волн вдоль систем, обладающих свойством создавать условия, при которых распространение волн происходит, в основном, в заданном направлении. Такие волны называются *направленными*, а направляющие их системы называются *волноводами*.

Основным приемом, которым мы будем пользоваться для упрощения рассмотрения этих задач, является представление электромагнитного поля в виде наложения волн нескольких типов.

Пусть ось x_3 проходит вдоль направления распространения волны. Электромагнитное поле волны определяется шестью компонентами, $E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3$, электрического и магнитного векторов. Представим его в виде суммы двух матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & E_2 & 0 \\ H_1 & 0 & H_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & E_3 \\ 0 & H_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ясно, что электрический вектор $(0, E_2, 0)$ ортогонален направлению распространения волны, тогда как магнитный вектор $(H_1, 0, H_3)$ имеет отличную от нуля компоненту вдоль направления распространения. В матрице B вектор $(E_1, 0, E_3)$ имеет отличную от нуля компоненту вдоль оси x_3 , в то время как вектор $(0, H_2, 0)$ ортогонален оси x_3 . В связи с этим волны, характеризуемые матрицей A , называются *поперечно-электрическими* (*ТЕ-волны*), а характеризуемые матрицей B — *поперечно-магнитными* (*ТМ-волны*).

Электромагнитную волну удобно считать *ТЕ-* или *ТМ-волной*, если $E_3 = 0$ или $H_3 = 0$ соответственно.

Имеется еще третий тип волн, характеризуемый матрицей

$$C = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & 0 \\ H_1 & H_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Это так называемые *поперечно-электромагнитные* волны или *ТЕМ-волны*.

Пример (*ТМ-волны в волноводе круглого сечения*).

Рассмотрим распространение *ТМ-волн* в цилиндре радиуса неограниченной длины. Известно, что эта задача связана с разрешимостью задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца (δ^2 — вещественная постоянная)

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial E_3}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_3}{\partial \varphi^2} + \delta^2 E_3 = 0, & 0 < \rho < a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ E_3(a, \varphi) = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Разделяя переменные с помощью подстановки $E_3 = R(\rho)\Phi(\varphi)$, приходим к уравнению

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \rho^2 R'' + \rho R' + (\delta^2 \rho^2 - \lambda)R = 0, \end{cases} \quad (1.46)$$

где λ — постоянная разделения. Так как $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$, то $\lambda = n^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Второе уравнение в (1.46) с помощью введения новой независимой переменной $x = \delta\rho$ приводится к уравнению Бесселя n -го порядка. Поскольку $|R(0)| < \infty$, $R(a) = 0$, то

$$R(\rho) = J_n(\delta_{nm}\rho).$$

Здесь $\delta_{nm} = \frac{\mu_{nm}}{a}$, причем μ_{nm} — m -й положительный корень функции Бесселя $J_n(x)$ первого рода n -го порядка.

Таким образом, частные решения нашей задачи имеют вид

$$E_{3,nm} = J_n(\delta_{nm}\rho)[A_{nm} \cos(n\varphi) + B_{nm} \sin(n\varphi)],$$

где A_{nm} и B_{nm} — произвольные постоянные. Каждое из решений соответствует определенной TM -волне, которая может без затухания распространяться в данном волноводе.

Замечание 1. Распространение TE -волны в цилиндре неограниченной длины связано с разрешимостью задачи Неймана для уравнения Гельмгольца

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial H_3}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 H_3}{\partial \varphi^2} + \delta^2 H_3 = 0, & 0 < \rho < a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ \frac{\partial H_3}{\partial \vec{n}}(a, \varphi) = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{cases}$$

(здесь $\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль цилиндрического волновода).

По аналогии с предыдущим примером получаем

$$H_{3,nm} = J_n(\delta_{nm}\rho)[A_{nm} \cos(n\varphi) + B_{nm} \sin(n\varphi)],$$

где $\delta_{nm} = \frac{\lambda_{nm}}{a}$, причем λ_{nm} — положительный корень уравнения $\frac{dJ_n(x)}{dx} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Замечание 2. Если известна компонента E_3 (или H_3), то остальные компоненты электрического и магнитного векторов находим одним лишь дифференцированием (это следует из уравнений Максвелла для электромагнитного поля).

§ 1.15. Метод конформных отображений (решение краевых задач на плоскости)

Методы теории функций комплексной переменной широко и эффективно применяются для решения большого числа математических задач, возникающих в различных областях естествознания. В частности, применение аналитических функций дает во многих случаях достаточно простые способы решения краевых задач для уравнения Лапласа. Это определяется тесной связью, существующей между аналитическими функциями комплексной переменной и гармоническими функциями двух действительных переменных, а также инвариантностью уравнения Лапласа при конформном отображении.

Предположим, что мы желаем решить уравнение Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ с каким-то граничным условием в области сложной формы в плоскости переменных x и y . Эту краевую задачу можно трансформировать в новую краевую задачу, в которой требуется решить уравнение Лапласа $\tilde{u}_{\xi\xi} + \tilde{u}_{\eta\eta} = 0$ в более простой области переменных ξ и η , причем вторая область получена из первой с помощью конформного отображения $\zeta = f(z)$, где $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, а $\tilde{u}(\zeta) = u(z)$ при $\zeta = f(z)$ (рис. 1.6).

После того как решение уравнения Лапласа $\tilde{u}(\xi, \eta)$ в простой области (круге, полуплоскости, прямоугольнике) найдено, достаточно подставить в это решение выражения $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, и мы получим решение исходной задачи $u(x, y)$, выраженное через исходные переменные.

Приведем несколько примеров, в которых будет показано, как решать краевые задачи для уравнения Лапласа (на плоскости) с помощью конформных отображений.

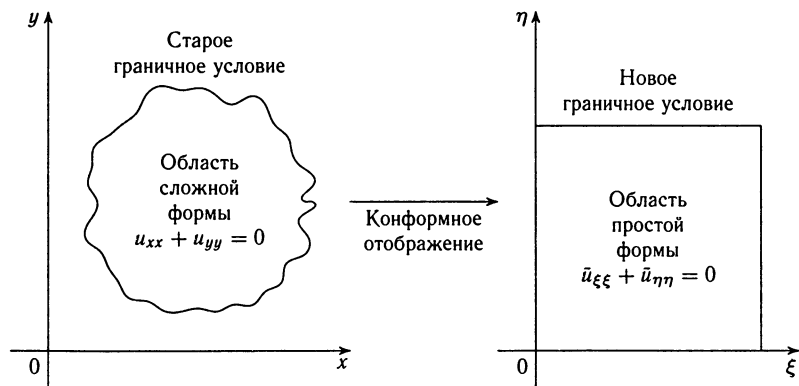


Рис. 1.6

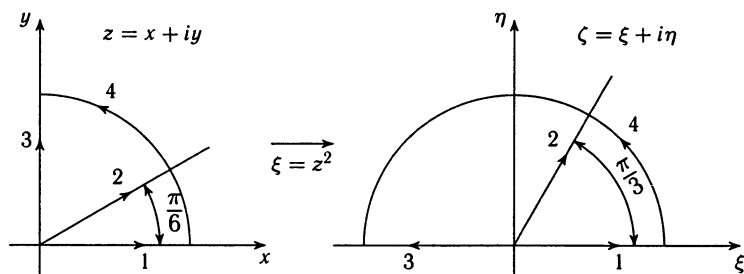


Рис. 1.7

Пример 1 [6, гл. V, 17.13(4)]. Найти решение уравнения $\Delta u = 0$ в первом квадранте $x > 0, y > 0$ с краевыми условиями $u|_{x=0} = 0, u|_{y=0} = \theta(x-1)$, где $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ — функция Хевисайда.

Решение. Очевидно, комплексная функция $\zeta = z^2$, определенная в первом квадранте комплексной плоскости z , будет отображать эту область на всю полуплоскость $\eta > 0$ в комплексной плоскости ζ (рис. 1.7) так, что:

- положительная полуось x переходит в положительную действительную полуось ξ ;
- положительная полуось y переходит в отрицательную действительную полуось ξ .

Таким образом, приходим к следующему выводу.

Краевая задача на плоскости (x, y)	→	Краевая задача на плоскости (ξ, η)
$\begin{cases} \Delta u = 0, & x > 0, y > 0, \\ u _{x=0} = 0, & y \geq 0, \\ u _{y=0} = \theta(x-1), & x \geq 0, \end{cases}$		$\begin{cases} \Delta \bar{u} = 0, & \eta > 0, \\ \bar{u} _{\eta=0} = \begin{cases} 1, & \xi > 1, \\ 0, & \xi \leq 1. \end{cases} \end{cases}$

Отметим еще, что из равенства $\zeta = z^2$, т. е. из равенства $\xi + i\eta = (x + iy)^2$, следует, что

$$\xi = x^2 - y^2, \quad \eta = 2xy.$$

Решение задачи Дирихле на плоскости (ξ, η) дается интегралом Пуассона

$$\bar{u}(\xi, \eta) = \frac{\eta}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{u}(t, 0) dt}{(t - \xi)^2 + \eta^2}.$$

Учитывая начальное условие $\bar{u}(\xi, 0)$, будем иметь

$$\begin{aligned}\bar{u}(\xi, \eta) &= \frac{\eta}{\pi} \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t-\xi)^2 + \eta^2} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{t-\xi}{\eta} \Big|_1^{\infty} = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1-\xi}{\eta} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1-\xi}{\eta}.\end{aligned}$$

Отсюда, написав $x^2 - y^2$ вместо ξ и $2xy$ вместо η , получим решение исходной задачи

$$u(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y^2 - x^2 + 1}{2xy}.$$

Пример 2 [6, гл. V, 17.14(2)]. Найти решение задачи Дирихле для уравнения $\Delta u = 0$ в полосе $0 < y < \pi$ при краевых условиях $u|_{y=0} = \theta(x)$, $u|_{y=\pi} = 0$.

Решение. Комплексная функция $\zeta = e^z$, определенная в полосе $0 < y < \pi$, отображает эту полосу на всю полуплоскость $\eta > 0$ в комплексной плоскости ζ (рис. 1.8) так, что:

- положительная ось x переходит в положительную полуось $[1, +\infty)$;
- отрицательная полуось x переходит в интервал $(0, 1)$;
- прямая $y = \pi$ переходит в отрицательную полуось ξ . Таким образом, приходим к следующему выводу.

Краевая задача
на плоскости (x, y)

Краевая задача
на плоскости (ξ, η)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u = 0, \\ -\infty < x < +\infty, \quad 0 < y < \pi, \\ u|_{y=0} = \theta(x), \quad -\infty < x < +\infty, \\ u|_{y=\pi} = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \end{array} \right. \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta \bar{u} = 0, \quad \eta > 0, \\ \bar{u}|_{\eta=0} = \begin{cases} 1, & \xi \geq 1, \\ 0, & \xi < 1. \end{cases} \end{array} \right.$$

Отметим еще, что $\xi = e^x \cos y$, $\eta = e^x \sin y$. По предыдущему (при-

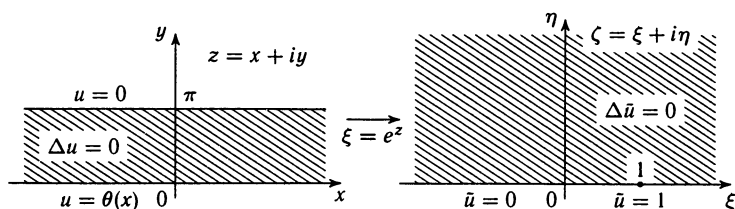


Рис. 1.8

мер 1) имеем

$$\bar{u}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1-\xi}{\eta},$$

и поэтому решение имеет вид

$$u(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{e^{-x} - \cos y}{\sin y}.$$

Пример 3 [6, гл. V, 17.18]. Найти решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \operatorname{Re} z > 0, \\ |z - 5| > 3, & u|_{\operatorname{Re} z = 0} = 0, \quad u|_{|z-5|=3} = 1. \end{cases}$$

Решение. Изобразим вначале область D , где требуется решить задачу Дирихле (рис. 1.9). Ее можно считать неконцентрическим кольцом (прямая — окружность бесконечного радиуса). Найдем конформное отображение области D на концентрическое кольцо. Для этого найдем две точки, симметричные одновременно относительно прямой $\operatorname{Re} z = 0$ и относительно окружности $|z - 5| = 3$. Очевидно, что эти точки должны лежать на общем перпендикуляре к прямой и окружности, т. е. на действительной оси. Из симметрии относительно прямой $\operatorname{Re} z = 0$ следует, что это суть точки $x_1 = a$, $x_2 = -a$ ($a > 0$). Из симметрии относительно окружности $|z - 5| = 3$ получаем $(5 + a)(5 - a) = 9$, откуда $a = 4$.

Покажем, что искомое конформное отображение задается дробно-линейной функцией

$$\zeta = \frac{z-4}{z+4}. \quad (1.47)$$

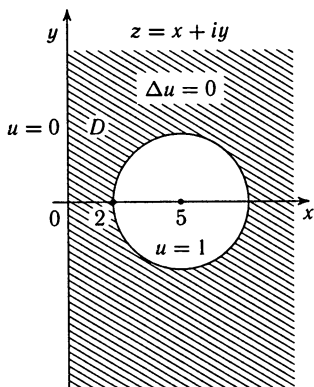


Рис. 1.9

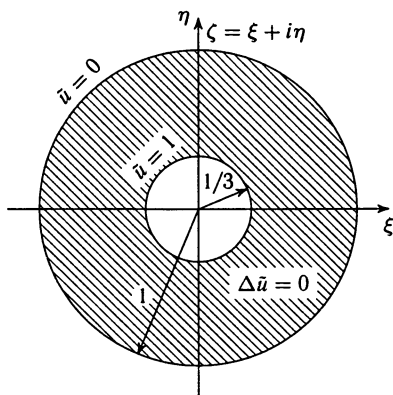


Рис. 1.10

Действительно, при этом отображении прямая $\operatorname{Re} z = 0$ переходит в окружность γ . По свойству сохранения симметрии точки $z_1 = 4$ и $z_2 = -4$ переходят в точки $\zeta = 0$ и $\zeta = \infty$, симметричные относительно окружности γ . Следовательно, $\zeta = 0$ — центр окружности γ . Далее, так как точка $z = 0$ переходит в точку $\zeta = 1$, то γ — окружность $|\zeta| = 1$ (рис. 1.10).

Покажем, что окружность $|z - 5| = 3$ при указанном отображении переходит в окружность $|\zeta| = 1/3$. В самом деле, окружность $|z - 5| = 3$ при дробно-линейном отображении переходит в окружность и ее радиус

$$|\zeta| = \left| \frac{2-4}{2+4} \right| = 1/3.$$

Таким образом, функция (1.47) конформно отображает область D на концентрическое кольцо $1/3 < |\zeta| < 1$. При этом отображении приходим к следующему выводу.

Краевая задача
на плоскости (x, y)

Краевая задача
на плоскости (ξ, η)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \operatorname{Re} z > 0, |z - 5| > 3, \\ u|_{\operatorname{Re} z = 0} = 0, \\ u|_{|z-5|=3} = 1, \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} \Delta \bar{u} = 0, 1/3 < |\zeta| < 1, \\ \bar{u}|_{|\zeta|=1} = 0, \\ \bar{u}|_{|\zeta|=1/3} = 1. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.48) \\ (1.49) \end{matrix}$$

Решим задачу в кольце $1/3 < |\zeta| < 1$ (на плоскости (ξ, η)). Поскольку граничные условия (1.49) не зависят от полярного угла φ , то естественно предположить, что решение $\bar{u}(\zeta)$ зависит только от переменной ρ (у нас $\xi = \rho \cos \varphi$, $\eta = \rho \sin \varphi$). Найдем это решение, переписав уравнение Лапласа $\Delta \bar{u} = 0$ в виде

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \bar{u}}{\partial \rho} \right) = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$\bar{u}(\zeta) = c_1 + c_2 \ln \rho$$

(c_1 и c_2 — произвольные постоянные). Из условий (1.49) находим $c_1 = 0$, $c_2 = -\frac{1}{\ln 3}$. Значит,

$$\bar{u}(\zeta) = -\frac{1}{\ln 3} \ln |\zeta|, \quad \text{ибо} \quad \rho = |\zeta|.$$

Для нахождения решения исходной задачи достаточно вернуться к переменной z , используя (1.47). Окончательно получим

$$u(z) = \frac{1}{\ln 3} \ln \left| \frac{z+4}{z-4} \right|.$$

§ 1.16. Метод функций Грина

Определение функции Грина. Будем рассматривать краевые задачи

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{в области } \Omega, \\ \left(\alpha_1 u + \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial n} \right) = g & \text{на границе } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.50)$$

Считаем функцию $u(x)$ непрерывной вместе с первыми частными производными в замкнутой области $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, ограниченной достаточно гладкой поверхностью $\partial\Omega$, и имеющей вторые частные производные в Ω , интегрируемые в этой области Ω . Здесь $\vec{n}$ — единичная внешняя нормаль к поверхности $\partial\Omega$, а α_1 и α_2 — вещественные числа такие, что $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$; $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Метод функций Грина решения таких задач состоит в следующем. Сначала решаем вспомогательную задачу [1]

$$\begin{cases} \Delta G = -\delta(x, x_0), & x_0 \in \Omega, \\ \left(\alpha_1 G + \alpha_2 \frac{\partial G}{\partial n} \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \quad (1.51)$$

где $\delta = \delta(x, x_0)$ — δ -функция, которую можно формально определить при помощи соотношений

$$\delta(x, x_0) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \neq x_0, \\ \infty, & \text{если } x = x_0, \end{cases} \quad \int_{\Omega} \delta(x, x_0) dx = \begin{cases} 1, & \text{если } x_0 \in \Omega, \\ 0, & \text{если } x_0 \notin \Omega, \end{cases}$$

$x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ (обозначение dx ясно). Основным свойством δ -функции является равенство

$$\int_{\Omega} \delta(x, x_0) f(x) dx = \begin{cases} f(x_0), & \text{если } x_0 \in \Omega, \\ 0, & \text{если } x_0 \notin \Omega, \end{cases}$$

где $f(x)$ — произвольная непрерывная функция точки x .

Определение. Решение задачи (1.51) называется *функцией Грина задачи* (1.50).

Будем требовать, чтобы функция Грина $G(x, x_0)$ была непрерывной (вместе с частными производными первого порядка) всюду в замкнутой области $\bar{\Omega}$, кроме точки x_0 , в которой функция $G(x, x_0)$ может иметь особенность.

Если функция Грина найдена, то с ее помощью легко найти решение исходной задачи (1.50). Для этого воспользуемся второй формулой Грина

$$\int_{\Omega} (v \Delta u - u \Delta v) dx = \int_{\partial\Omega} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) ds. \quad (1.52)$$

Эта формула легко получается из формулы Гаусса—Остроградского

$$\int_{\partial\Omega} (\vec{a}, \vec{n}) ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} dx$$

($\vec{a}$ — векторное поле; $(\vec{a}, \vec{n})$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{n}$), если положить последовательно $\vec{a} = v \nabla u$ и $\vec{a} = u \nabla v$ и вычесть результаты. Действительно, имеем два равенства

$$\int_{\partial\Omega} v(\nabla u, \vec{n}) ds = \int_{\Omega} \operatorname{div}(v \nabla u) dx, \quad (1.53)$$

$$\int_{\partial\Omega} u(\nabla v, \vec{n}) ds = \int_{\Omega} \operatorname{div}(u \nabla v) dx. \quad (1.54)$$

Учитывая, что $(\nabla u, \vec{n}) = \partial u / \partial n$ и $(\nabla v, \vec{n}) = \partial v / \partial n$, $\operatorname{div}(v \nabla u) = (\nabla u, \nabla v) + v \Delta u$ и $\operatorname{div}(u \nabla v) = (\nabla u, \nabla v) + u \Delta v$, из равенств (1.53) и (1.54) вычитанием получим вторую формулу Грина.

Положим теперь в формуле Грина (1.52) $v = G$. Тогда, учитывая, что $\Delta u = f(x)$, $\Delta G = -\delta(x, x_0)$, получим

$$\int_{\Omega} f(x) G(x, x_0) dx + \int_{\Omega} u(x) \delta(x, x_0) dx = \int_{\partial\Omega} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds.$$

Но по основному свойству δ -функции

$$\int_{\Omega} u(x) \delta(x, x_0) dx = u(x_0).$$

Поэтому предыдущее равенство дает

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} \left(G \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds - \int_{\Omega} G(x, x_0) f(x) dx.$$

Из этой формулы получаем:

а) решение задачи Дирихле при

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad G|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{\partial\Omega} = g$$

в виде

$$u(x_0) = - \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial G}{\partial n} ds - \int_{\Omega} G(x, x_0) f(x) dx;$$

б) решение задачи Неймана при

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \frac{\partial G}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial\Omega} = g$$

в виде

$$u(x_0) = \int_{\partial\Omega} G g \, ds - \int_{\Omega} G(x, x_0) f(x) \, dx.$$

Замечание 1. Физическая интерпретация интеграла

$$\int_{\Omega} G(x, x_0) f(x) \, dx$$

состоит в том, что правая часть уравнения рассматривается как некоторое входное воздействие на систему и разлагается в непрерывную совокупность источников, распределенных на области Ω . Затем находится отклик системы на каждый такой источник и все отклики суммируются.

Построение функции Грина. Одним из методов построения функции Грина является *метод отражений*. Например, функция Грина задачи Дирихле для уравнения Пуассона в случае полупространства ($z > 0$) имеют вид

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi R_{MM_1}},$$

где: R_{AB} — расстояние между точками A и B ; $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — точка, лежащая в верхнем полупространстве ($z > 0$); $M_1(x_0, y_0, -z_0)$ — точка, симметричная точке M_0 относительно плоскости $z = 0$; $M(x, y, z)$ — произвольная точка полупространства $z > 0$.

С физической точки зрения функцию Грина можно интерпретировать как потенциал поля, созданного точечными зарядами, помещенными в точку M_0 (над заземленной проводящей плоскостью $z = 0$) и точку M_1 (рис. 1.11).

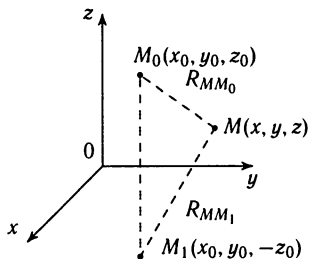


Рис. 1.11. Потенциал в точке

$M(x, y, z)$ равен

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi R_{MM_0}} - \frac{1}{4\pi R_{MM_1}}$$

($z = 0$ — заземленная проводящая плоскость)

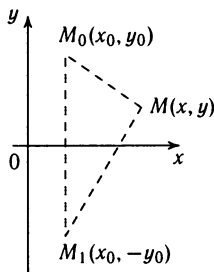


Рис. 1.12. Потенциал в точке $M(x, y)$

$$\text{равен } G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_1}}$$

Заметим, что в случае полуплоскости ($y > 0$) функция Грина примет вид (рис. 1.12)

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_0}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{R_{MM_1}}.$$

Примеры решения задач с помощью функции Грина. Пусть требуется решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & y > 0, & -\infty < x < +\infty, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Тогда решение этой задачи есть

$$u(x, y) = -\frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{\partial G}{\partial s} \Big|_{s=0} dt$$

(мы положили $M_0 = M_0(x, y)$, $M = M(t, s)$), где

$$G(x, y; t, s) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-t)^2 + (y-s)^2}} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-t)^2 + (y+s)^2}}.$$

Вычислив $\frac{\partial G}{\partial s} \Big|_{s=0}$, получим

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt. \quad (1.55)$$

Пример 1 [3, № 244]. Найти гармоническую в полуплоскости $y > 0$ функцию $u(x, y)$, если известно, что

$$u(x, 0) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Решение. Требуется вычислить интеграл

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)[(t-x)^2 + y^2]} dt.$$

По-видимому, проще всего это сделать, если воспользоваться теорией вычетов, а именно следующей формулой:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t dt}{(1+t^2)[(t-x)^2 + y^2]} = 2\pi i [\operatorname{res} f(i) + \operatorname{res} f(x+iy)],$$

где $f(z) = \frac{z}{(1+z^2)[(z-x)^2 + y^2]}.$

Поскольку

$$\operatorname{res} f(i) = \frac{1}{2[(i-x)^2 + y^2]}, \quad \operatorname{res} f(x+iy) = \frac{x+iy}{2iy[1+(x+iy)^2]},$$

выполнено равенство

$$\begin{aligned} \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \, dt}{(1+t^2)[(t-x)^2 + y^2]} &= \frac{iy}{(i-x)^2 + y^2} + \frac{x+iy}{1+(x+iy)^2} = \\ &= \frac{iy}{[(i-x)+iy][(i-x)-iy]} + \frac{x+iy}{(x+iy-1)(x+iy+1)} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{i-x-iy} - \frac{1}{i-x+iy} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x+iy-1} + \frac{1}{x+iy+1} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{i(1-y)-x} - \frac{1}{i(1+y)-x} + \frac{1}{x+i(y-1)} + \frac{1}{i(1+y)+x} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{i(1+y)+x} - \frac{1}{i(1+y)-x} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x-i(1+y)}{x^2 + (1+y)^2} + \frac{x+i(1+y)}{x^2 + (1+y)^2} \right] = \frac{x}{x^2 + (1+y)^2}. \end{aligned}$$

Итак, искомое решение задачи есть

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + (1+y)^2}.$$

Замечание 2. Решение рассмотренной задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \\ u|_{y=0} = \frac{x}{1+x^2} \end{cases}$$

можно получить, не прибегая к функции Грина.

В самом деле, используя тот факт, что функция $u = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}}$ ($a > 0$) является решением уравнения Лапласа в верхней полуплоскости ($y > 0$), можно написать

$$\Delta \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} = 0.$$

Дифференцируя это равенство по переменной x , будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} = 0, \quad \text{или} \quad \Delta \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2}} = 0,$$

т. е. $\Delta \left(\frac{x}{r^2} \right) = 0$, где $r = \sqrt{x^2 + (y+a)^2}$.

Таким образом, функция $u = \frac{x}{x^2 + (y+a)^2}$ является гармонической в верхней полуплоскости. В нашем случае с учетом граничного условия решением задачи Дирихле является функция

$$u = \frac{x}{x^2 + (y+1)^2}.$$

Пример 2 [6, гл. V, 17.4(2)]. Найти решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & -\infty < x, y < +\infty, \quad z > 0, \\ u|_{z=0} = \cos x \cos y, & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Известно, что искомая гармоническая функция находится по формуле

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \zeta \cos \eta d\zeta d\eta}{[(\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2 + z^2]^{3/2}}.$$

Для вычисления интеграла произведем замену $\zeta - x = u$, $\eta - y = v$ с якобианом, равным единице. Получим

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(u+x) \cos(v+y) du dv}{(u^2 + v^2 + z^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{z}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\cos u \cos x - \sin u \sin x)(\cos v \cos y - \sin v \sin y)}{(u^2 + v^2 + z^2)^{3/2}} du dv = \\ &= \frac{z}{2\pi} \cos x \cos y \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u \cos v}{(u^2 + v^2 + z^2)^{3/2}} du dv, \end{aligned}$$

ибо все остальные три интеграла равны нулю в силу нечетности соответствующей подынтегральной функции.

Теперь вычислим интеграл:

$$\begin{aligned} J &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u \cos v}{(u^2 + v^2 + z^2)^{3/2}} du dv = \\ &= \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(u+v) + \sin u \sin v}{(u^2 + v^2 + z^2)^{3/2}} du dv = \iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(u+v)}{(u^2 + v^2 + z^2)^{3/2}} du dv, \end{aligned}$$

так как другой интеграл равен нулю.

Сделаем замену независимых переменных

$$p = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v), \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v),$$

что соответствует повороту плоскости на угол 45° против часовой стрелки. Тогда будем иметь

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{2}p)}{(p^2+q^2+z^2)^{3/2}} dp dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\sqrt{2}p) dp \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{(p^2+q^2+z^2)^{3/2}}.$$

Но $J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{(p^2+q^2+z^2)^{3/2}}$ с помощью подстановки $q = \sqrt{p^2+z^2} \operatorname{tg} t$ преобразуется к виду

$$J_1 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{|\cos t|}{p^2+z^2} dt = \frac{2}{p^2+z^2}.$$

Значит, интеграл

$$J = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{2}p)}{p^2+z^2} dp$$

по теореме Коши о вычетах равен

$$J = 2 \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\sqrt{2}p}}{p^2+z^2} dp = 4\pi i \operatorname{res} \frac{e^{i\sqrt{2}p}}{p^2+z^2} \Big|_{p=zi} = 4\pi i \cdot \frac{e^{-z\sqrt{2}}}{2zi} = \frac{2\pi}{z} e^{-z\sqrt{2}}.$$

Итак, решение есть $u(x, y, z) = e^{-z\sqrt{2}} \cos x \cos y$.

Замечание 3. Так как $\frac{y}{(t-x)^2+y^2} = \operatorname{Re} \frac{1}{i(t-z)}$, где $z = x + iy$, то формулу Пуассона (1.55) можно записать в виде

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(t)}{t-z} dt. \quad (1.56)$$

Рассмотрим теперь задачу Дирихле для уравнения Лапласа в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ (т. е. при $y > 0$)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \\ u|_{y=0} = R(x), & -\infty < x < +\infty, \end{cases}$$

где рациональная функция $R(z)$ действительна, не имеет полюсов на действительной оси и $R(z) \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$. Решением указанной задачи Дирихле в силу (1.56) является функция

$$u(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R(t) dt}{t - z}.$$

Этот интеграл можно вычислить с помощью вычетов по теореме Коши

$$u(z) = -2 \operatorname{Re} \sum_{\operatorname{Im} \zeta_k < 0} \operatorname{res}_{\zeta = \zeta_k} \frac{R(\zeta)}{\zeta - z}, \quad (1.57)$$

где вычеты берутся по всем полюсам функции $R(z)$, лежащим в нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$.

Пример 3. Решить задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad y > 0, \\ u|_{y=0} = \frac{k}{1+x^2}, & k = \text{const}, \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Решение. По формуле (1.57) получим

$$u(z) = -2 \operatorname{Re} \operatorname{res}_{\zeta = -i} \frac{k}{(1+\zeta^2)(\zeta - z)} = -2 \operatorname{Re} \frac{k}{2i(z+i)} = \frac{k(y+1)}{x^2 + (y+1)^2}.$$

§ 1.17. Другие методы

В этом параграфе рассмотрим способы решения краевых задач для бигармонического уравнения и уравнения

$$\Delta^2 u = f,$$

а также краевые задачи для уравнений Лапласа и Пуассона в полупространстве (без использования функции Грина).

Бигармоническое уравнение.

Пример 1. Решить краевую задачу в круге $\{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{в круге,} \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=a} = A \cos \varphi & \text{на границе круга} \end{cases}$$

($\vec{n}$ — внешняя единичная нормаль на границе круга).

Решение. Указанная задача — задача Дирихле для бигармонического уравнения. Известно, что она имеет единственное решение, даваемое формулой (здесь $f = u|_{\rho=a}$, $g = \frac{\partial u}{\partial n}|_{\rho=a}$)

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi a}(\rho^2 - a^2)^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{-g d\alpha}{\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \alpha)} + \right. \\ \left. + \int_0^{2\pi} \frac{f[a - \rho \cos(\varphi - \alpha)] d\alpha}{[\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \alpha)]^2} \right]. \quad (1.58)$$

В нашем случае $f = 0$, $g = A \cos \varphi$. Поэтому решение есть

$$u(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi a}(\rho^2 - a^2)^2 \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^{2\pi} \frac{A \cos \alpha d\alpha}{\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \alpha)} = \\ = -\frac{A(\rho^2 - a^2)^2}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha d\alpha}{\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \alpha)},$$

или

$$u(\rho, \varphi) = -\frac{A}{2a}(a^2 - \rho^2) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho^2) \cos \alpha d\alpha}{\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \alpha)}.$$

Чтобы вычислить последний интеграл, заметим, что он дает решение следующей задачи Дирихле для уравнения Лапласа в данном круге:

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{внутри круга,} \\ v|_{\rho=a} = \cos \varphi & \text{на границе круга.} \end{cases}$$

Но решение этой задачи, очевидно, $v = \frac{\rho}{a} \cos \varphi$. Тогда в силу единственности решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа будем иметь тождество

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - \rho^2) \cos \alpha d\alpha}{\rho^2 + a^2 - 2a\rho \cos(\varphi - \alpha)} = \frac{\rho}{a} \cos \varphi.$$

Следовательно, решение нашей задачи дается формулой

$$u(\rho, \varphi) = \frac{A\rho(\rho^2 - a^2)}{2a^2} \cos \varphi.$$

Пример 2. Решить краевую задачу в круге $\{(\rho, \varphi) : 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 1 & \text{в круге,} \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=a} = 0 & \text{на границе круга.} \end{cases} \quad (1.59)$$

Решение. Можно считать, что решение нашей задачи зависит только от переменной ρ , т. е. $u = u(\rho)$. Далее, заметим, что

$$\Delta^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2 u = \left(\frac{\partial^4}{\partial \rho^4} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) u,$$

и, таким образом, получим задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \frac{d^4 u}{d\rho^4} + \frac{2d^3 u}{\rho d\rho^3} + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 u}{d\rho^2} = 1, & 0 < \rho < a, \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = 0. \end{cases} \quad (1.61)$$

$$\begin{cases} \frac{d^4 u}{d\rho^4} + \frac{2d^3 u}{\rho d\rho^3} + \frac{1}{\rho^2} \frac{d^2 u}{d\rho^2} = 1, & 0 < \rho < a, \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=a} = 0. \end{cases} \quad (1.62)$$

Из уравнения (1.61) имеем

$$\rho^2 \frac{d^4 u}{d\rho^4} + 2\rho \frac{d^3 u}{d\rho^3} + \frac{d^2 u}{d\rho^2} = \rho^2.$$

Обозначим $v = d^2 u / d\rho^2$. Тогда будем иметь уравнение второго порядка относительно функции $v = v(\rho)$

$$\rho^2 v'' + 2\rho v' + v = \rho^2.$$

Это хорошо известное уравнение Эйлера. Его общее решение есть функция

$$v(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left[C_1 \cos\left(\frac{3}{2} \ln \rho\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{2} \ln \rho\right) \right] + \frac{1}{7} \rho^2.$$

Мы полагаем $C_1 = 0, C_2 = 0$, в противном случае функция $v(\rho)$ становится неограниченной в центре круга (при $\rho \rightarrow 0$). Следовательно, $d^2 u / d\rho^2 = \frac{1}{7} \rho^2$, откуда

$$u(\rho) = \frac{1}{84} \rho^4 + A + B\rho.$$

Постоянные A и B находим из граничных условий (1.62). Таким образом, решение есть

$$u(\rho) = \frac{1}{84} \rho^4 - \frac{1}{21} a^3 \rho + \frac{1}{28} a^4,$$

или

$$u(\rho) = \frac{a^4}{7} \left[\frac{1}{12} \left(\frac{\rho}{a} \right)^4 - \frac{1}{3} \left(\frac{\rho}{a} \right) + \frac{1}{4} \right].$$

Пример 3. Решить краевую задачу в полуплоскости $\{(x, y) : -\infty < x < +\infty, y > 0\}$

$$\begin{cases} \Delta^2 u = e^{-2y} \sin x & \text{в полуплоскости,} \end{cases} \quad (1.63)$$

$$\begin{cases} u|_{y=0} = 0, & \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \end{cases} \quad \text{на границе полуплоскости.} \quad (1.64)$$

Решение. Уравнение (1.63) перепишем в виде

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = e^{-2y} \sin x. \quad (1.65)$$

Будем считать, что $u(x, y) = f(y) \sin x$, где функция $f(y)$ подлежит определению. Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение (1.65), получим

$$f(y) \sin x + 2f''(y)(-\sin x) + f^{(IV)}(y) \sin x = e^{-2y} \sin x,$$

откуда

$$f^{(IV)} - 2f'' + f = e^{-2y}. \quad (1.66)$$

Общее решение уравнения (1.66) имеет вид

$$f(y) = C_1 e^y + C_2 y e^y + C_3 e^{-y} + C_4 y e^{-y} + \frac{1}{9} e^{-2y}.$$

Постоянные: $C_1 = 0, C_2 = 0$, иначе $f(y) \rightarrow \infty$ при $y \rightarrow +\infty$. Поэтому

$$f(y) = C_3 e^{-y} + C_4 y e^{-y} + \frac{1}{9} e^{-2y}.$$

Постоянные C_3 и C_4 находим из граничных условий (1.64) (ведь из условий (1.64) следует $f(0) = 0, f'(0) = 0$). Имеем

$$f(y) = -\frac{1}{9} e^{-y} + \frac{1}{9} y e^{-y} + \frac{1}{9} e^{-2y}.$$

Таким образом, решение нашей задачи есть

$$u(x, y) = \frac{1}{9} (e^{-2y} - e^{-y} + y e^{-y}) \sin x.$$

Уравнения Лапласа и Пуассона.

Пример 4. Решить краевую задачу в полупространстве $\{(x, y, z) : -\infty < x, y < +\infty, z > 0\}$

$$\begin{cases} \Delta u = z e^{-z} \sin x \sin y & \text{в полупространстве,} \\ u|_{z=0} = 0. \end{cases}$$

Решение. Ищем функцию $u = u(x, y, z)$ в виде $u = f(z) \sin x \sin y$, где функция $f(z)$ подлежит определению. Тогда получим

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -f \sin x \sin y - f \sin x \sin y + f'' \sin x \sin y$$

и, следовательно, имеет место равенство

$$-2f \sin x \sin y + f'' \sin x \sin y = ze^{-z} \sin x \sin y,$$

откуда имеем обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $f(z)$

$$f'' - 2f = ze^{-z}.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$f(z) = C_1 e^{\sqrt{2}z} + C_2 e^{-\sqrt{2}z} + e^{-z}(2 - z).$$

Найдем постоянные C_1 и C_2 из граничных условий. Отметим вначале, что $C_1 = 0$, так как если $C_1 \neq 0$, то при $z \rightarrow +\infty$ мы бы имели $f(z) \rightarrow \infty$. Поэтому

$$f(z) = C_2 e^{-\sqrt{2}z} + e^{-z}(2 - z).$$

Полагая здесь $z = 0$, находим $f(0) = C_2 + 2$. Но $f(0) = 0$, значит, $C_2 = -2$.

Таким образом, решение задачи есть

$$u(x, y, z) = [e^{-z}(2 - z) - 2e^{-\sqrt{2}z}] \sin x \sin y.$$

Пример 5. Решить краевую задачу в полупространстве $\{(x, y, z): -\infty < x, y < +\infty, z > 0\}$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{в полупространстве,} \\ u|_{z=0} = \frac{x^2 + y^2 - 2}{(1 + x^2 + y^2)^{5/2}}. \end{cases}$$

Решение. Заметим, что функция

$$u(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 1)^2}}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа во всем полупространстве $z > 0$ (фундаментальное решение), т. е.

$$\Delta \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 1)^2}} = 0.$$

Теперь продифференцируем обе части этого равенства по переменной z . Получим

$$\Delta \frac{z + 1}{[(z + 1)^2 + x^2 + y^2]^{3/2}} = 0.$$

Дифференцируя это равенство еще раз по переменной z , будем иметь

$$\Delta \frac{x^2 + y^2 - 2(z+1)^2}{[x^2 + y^2 + (z+1)^2]^{5/2}} = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$u(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 - 2(z+1)^2}{[x^2 + y^2 + (z+1)^2]^{5/2}}$$

Она гармонична во всем полупространстве $z > 0$ (так как $\Delta u = 0$ по предыдущему) и при $z = 0$ имеем

$$u|_{z=0} = \frac{x^2 + y^2 - 2}{(1 + x^2 + y^2)^{5/2}}.$$

Следовательно, решением задачи является функция

$$u(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 - 2(z+1)^2}{[x^2 + y^2 + (z+1)^2]^{5/2}}.$$

§ 1.18. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти распределение потенциала внутри бесконечно длинного $(-\infty < z < +\infty)$ цилиндрического конденсатора, если внутренняя его обкладка $\rho = a$ заряжена до потенциала u_1 , а внешняя $\rho = b$ — до потенциала u_2 .

2. Найти распределение потенциала внутри сферического конденсатора, если сфера $\rho = a$ поддерживается при потенциале u_1 , сфера $\rho = b$ — при потенциале u_2 .

3. Одна грань прямоугольного параллелепипеда находится под потенциалом V , остальные грани заземлены. Найти распределение потенциала внутри параллелепипеда.

4. Бесконечный $(-\infty < z < +\infty)$ проводящий цилиндр заряжен до потенциала

$$V = \begin{cases} 1, & 0 < \varphi < \pi, \\ 0, & \pi < \varphi < 2\pi. \end{cases}$$

Найти распределение потенциала внутри цилиндрической полости.

5. Найти распределение температуры в бесконечно длинном $(-\infty < z < +\infty)$ круглом цилиндре, если на его поверхности на единицу длины задан тепловой поток $Q = q \cos \varphi$.

6. По бесконечному $(-\infty < z < +\infty)$ коаксиальному цилиндрическому кабелю $a < \rho < b$ протекает постоянный ток I . Найти распределение температуры внутри провода, если поверхность $\rho = a$ поддерживается при температуре, равной нулю, а внешняя поверхность теплоизолирована.

7. Найти распределение потенциала в тонкой пластинке в форме полукруга, причем диаметр полукруга заряжен до потенциала V_1 , остальная часть — до потенциала V_2 .

8. Найти распределение температуры внутри прямоугольной тонкой пластинки, если к одной из ее сторон подводится постоянный поток Q , а остальные три стороны поддерживаются при нулевой температуре.

9. Найти распределение температуры внутри бесконечного $(-\infty < z < +\infty)$ круглого цилиндра, если на его поверхности поддерживается температура $A \cos \varphi + B \sin \varphi$ (A и B — постоянные).

10. Найти распределение потенциала внутри полого цилиндра радиуса R и высоты h , оба основания которого заземлены, а боковая поверхность имеет потенциал V .

11. Определить стационарное распределение температуры внутри круглого ограниченного цилиндра, если к нижнему основанию $z = 0$ подводится постоянный тепловой поток q , а боковая поверхность $\rho = a$ и верхнее основание поддерживаются при нулевой температуре.

12. Найти стационарное распределение температуры внутри однородного изотропного шара, если на его поверхности поддерживается температура $A \sin^2 \theta$ ($A = \text{const}$).

13. Найти распределение потенциала в сферическом конденсаторе $1 < r < 2$, если внутренняя и внешняя обкладки имеют потенциал соответственно $V_1 = \cos^2 \theta$ и $V_2 = \frac{1}{8}(\cos^2 \theta + 1)$.

14. Найти распределение температуры внутри сферического слоя $1 < r < 2$, если на внутренней сфере поддерживается температура $T_1 = \sin \theta \sin \varphi$, а внешняя поддерживается при температуре тающего льда.

15. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = e^y \sin x$ в квадрате $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ при нулевых граничных условиях.

16. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = x^4 - y^4$ в круге единичного радиуса при нулевом граничном условии.

17. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = z$ в шаре единичного радиуса при нулевом граничном условии.

18. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = J_0 \left(\frac{\mu_1}{R} \rho \right)$ в цилиндре радиуса R и высоты h при нулевых граничных условиях.

19. Найти собственные колебания прямоугольной мембраны, когда две противоположные стороны закреплены, а две другие свободны.

20. Найти собственные колебания круглого цилиндра при нулевых граничных условиях первого рода.

21. Найти стационарное распределение концентрации неустойчивого газа внутри сферы радиуса a , если на поверхности сферы поддерживается постоянная концентрация u_0 .

22. Решить задачу Дирихле для уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ внутри и вне сферы $\rho = R$ при условии $u|_{\rho=R} = A$.

23. Решить задачу Неймана для уравнения $\Delta u - k^2 u = 0$ внутри и вне сферы $\rho = R$ при условии $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=R} = A$ ($A = \text{const}$).

24. Найти стационарное распределение потенциала в первом квадранте $x > 0$, $y > 0$, если полуось $y = 0$ заземлена, а полуось $x = 0$ поддерживается при потенциале V .

25. Найти стационарное распределение температуры в полосе $0 < y < \pi$, если на нижней границе $y = 0$ температура равна $A \cos x$, а верхняя находится при температуре тающего льда ($A = \text{const}$).

26. Найти стационарное распределение потенциала в полуполосе $0 < y < \pi$, $x > 0$, если горизонтальные стороны полосы заземлены, а вертикальная имеет потенциал V .

27. Найти распределение потенциала в бесконечно длинном эллиптическом цилиндрическом конденсаторе, если внутренняя обкладка $|z + 1| = 9$ имеет потенциал 1, а внешняя — $|z + 6| = 16$ заземлена.

28. Найти решение задачи Дирихле $\Delta u = 0$ в области $\text{Im } z < 0$, $|z + 5i| > 3$, если

$$u|_{\text{Im } z=0}, \quad u|_{|z+5i|=3} = 1.$$

29. Найти распределение температуры в нижней полуплоскости $y < 0$, если на ее границе $y = 0$ поддерживается температура $A \sin x$ ($A = \text{const}$).

30. Найти распределение температуры в верхней полуплоскости, если на ее границе $y = 0$ поддерживается температура $\theta(-x)$, где $\theta(x)$ — функция Хевисайда.

31. Найти распределение потенциала в верхнем полупространстве $z > 0$, если его граница $z = 0$ имеет потенциал $\frac{1}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}$.

32. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = -e^{-z} \times \sin x \cos y$ в полупространстве $z > 0$ при нулевом граничном условии.

33. Найти установившееся распределение температуры вне ограниченного кругового цилиндра ($\rho > 1$, $-\infty < z < +\infty$), если боковая поверхность ($\rho = 1$) поддерживается при температуре $u|_{\rho=1} = A \cos(2\varphi) + B \cos(5\varphi) + C \cos(10\varphi)$, где A, B, C — постоянные.

34. Решить задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < \rho < 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \\ u|_{\rho=1} = \frac{\sin \varphi}{5 + 4 \cos \varphi}, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

35. Решить задачу Неймана для уравнения Лапласа в шаровом слое $1 < \rho < 2$

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{внутри слоя,} \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=1} = P_2(\cos \theta), \\ \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=2} = P_3(\cos \theta). \end{cases}$$

36. Решить краевую задачу в круге $\{0 \leq \rho < a, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$

$$\begin{cases} \Delta^2 u = x^2 + y^2 & \text{в круге,} \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=a} = 0. \end{cases}$$

37. Решить краевую задачу в круге $\{0 \leq \rho < a, 0 \leq \varphi < 2\pi\}$

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{в круге,} \\ u|_{\rho=a} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=a} = \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

38. Решить краевую задачу в шаре $\{0 \leq \rho < a\}$

$$\begin{cases} \Delta^2 u = x^2 + y^2 + z^2 & \text{в шаре,} \\ u|_{\rho=a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\rho=a} = 0. \end{cases}$$

39. Решить краевую задачу в полупространстве

$$\begin{cases} \Delta^2 u = e^{-z} \sin x \cos y, & -\infty < x, y < +\infty, \quad z > 0, \\ u|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0. \end{cases}$$

40. Решить краевую задачу в нижней полуплоскости ($y < 0$)

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & -\infty < x < +\infty, \quad y < 0, \\ u|_{y=0} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}. \end{cases}$$

§ 1.19. Ответы

1. $u = u_2 + (u_1 - u_2) \frac{\ln b/\rho}{\ln b/a}.$

2. $u = u_2 + (u_1 - u_2) \frac{1/r - 1/b}{1/a - 1/b}.$

$$3. u = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{\pi n}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) \operatorname{sh}\left(\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}z\right), \quad \text{причем}$$

$$A_{nm} = \begin{cases} \frac{16V}{\pi^2 nm \operatorname{sh}\left(\pi\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}c\right)}, & n \text{ и } m \text{ нечетные,} \\ 0, & n \text{ или } m \text{ четное;} \end{cases}$$

a, b, c — ребра параллелепипеда.

$$4. u = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{2a\rho \sin \varphi}{a^2 - \rho^2}, \text{ где } a \text{ — радиус цилиндра.}$$

5. $u = -\frac{q}{k}\rho \cos \varphi + c$, где k — коэффициент теплопроводности цилиндра.

6. $u = -\frac{q}{4}(\rho^2 - a^2) - \frac{qb^2}{2} \ln \frac{\rho}{a}$, где $q = -\frac{q_0}{k}$, $q_0 = 0,24J^2R$, R — сопротивление единицы длины провода, k — коэффициент теплопроводности.

$$7. u = V_1 + \frac{2}{\pi}(V_2 - V_1) \operatorname{arctg} \frac{a\rho \sin \varphi}{\rho^2 - a^2}.$$

$$8. u = -\frac{4qa}{k\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2m+1)\pi}{a}y}{\operatorname{ch} \frac{(2m+1)\pi}{a}b} \cdot \frac{\sin \frac{(2m+1)\pi}{a}x}{(2m+1)^2}.$$

9. $u = A\frac{\rho}{a} \cos \varphi + B\frac{\rho}{a} \sin \varphi$, где a — радиус цилиндра.

$$10. u = \frac{4V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin \frac{(2n+1)\pi z}{h}}{2n+1} \cdot \frac{I_0\left(\frac{(2n+1)\pi\rho}{h}\right)}{I_0\left(\frac{(2n+1)\pi R}{h}\right)}.$$

$$11. u = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_m}{a}(l-z)}{\operatorname{ch} \frac{\mu_m}{a}l} J_0\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right), \text{ где } A_m = \frac{2aq}{k\mu_m^2 J_1(\mu_m)}, \quad k \text{ — коэф-}$$

фициент теплопроводности, μ_m — m -й положительный корень уравнения $J_0(x) = 0$.

$$12. u = \frac{2}{3}A - A\left(\frac{r}{a}\right)^2 \cdot \frac{3\cos^2 \theta - 1}{3}, \text{ где } a \text{ — радиус шара.}$$

$$13. u = \frac{1}{3r} + \frac{3\cos^2 \theta - 1}{3r^3}.$$

$$14. u = \frac{1}{7}\left(-r + \frac{8}{r^2}\right) \sin \theta \sin \varphi.$$

$$15. u = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \pi} (ye^y \operatorname{sh} \pi - \pi e^{\pi} \operatorname{sh} y) \sin x.$$

$$16. u = \frac{1}{32} \rho^2 (\rho^4 - 1) \cos(2\varphi).$$

$$17. u = \frac{1}{10} (r^3 - r) \cos \theta.$$

$$18. u = \left\{ \frac{R^2}{\mu_1^2} \left[\operatorname{ch} \left(\frac{\mu_1}{R} z \right) - 1 \right] + \frac{R^2}{\mu_1^2} \left[1 - \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_1}{R} h \right) \right] \frac{\sin \frac{\mu_1}{R} z}{\sin \frac{\mu_1}{R} h} \right\} J_0 \left(\frac{\mu_1}{R} \rho \right).$$

$$19. \lambda_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad m = 1, 2, \dots; \quad n = 0, 1, \dots; \quad a \text{ и } b — \text{стороны мембраны, } u_{m,n} = \sin \left(\frac{\pi m}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right).$$

$$20. \lambda_{m,n,k} = \left(\frac{\pi k}{h} \right)^2 + \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \right)^2, \quad n = 0, 1, \dots; \quad m, k = 1, 2, \dots; \quad \mu_m^{(n)} — m\text{-й положительный корень уравнения } J_n(x) = 0,$$

$$v_{n,m,k} = \sin \left(\frac{\pi k}{h} z \right) J_n \left(\frac{\mu_m^{(n)}}{a} \rho \right) \begin{cases} \cos(n\varphi) \\ \sin(n\varphi) \end{cases},$$

h — высота, a — радиус цилиндра.

$$21. u = u_0 \frac{a \operatorname{sh}(k\rho)}{\rho \operatorname{sh}(ka)}, \text{ где } k \text{ берется из уравнения } \Delta u - k^2 u = 0.$$

$$22. u = \frac{AR \sin(k\rho)}{\rho \sin(kR)} \text{ при } \rho \leq R; \quad u = \frac{AR e^{ik\rho}}{\rho e^{ikR}} \text{ при } \rho \geq R.$$

$$23. u = \frac{AR^2 \operatorname{sh}(k\rho)}{\rho(kR \operatorname{ch}(kR) - \operatorname{sh}(kR))} \text{ при } \rho \leq R; \quad u = -\frac{aR^2 e^{k(R-\rho)}}{\rho(1+kR)} \text{ при } \rho \geq R.$$

$$24. u = \frac{2V}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

$$25. u = \frac{A}{\operatorname{sh} \pi} \cos x \operatorname{sh}(\pi - y).$$

$$26. u = \frac{V}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{2 \operatorname{sh} x \sin y}{\operatorname{sh}^2 x - \sin^2 y} \right).$$

$$27. u = \frac{1}{\ln 2/3} \left(\ln 2 + \ln \left| \frac{z-2}{2-26} \right| \right).$$

$$28. u = \frac{1}{\ln 3} \ln \left| \frac{z+4i}{z-4i} \right|.$$

$$29. u = A e^y \sin x.$$

$$30. u = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y}.$$

$$31. u = \frac{z+1}{(x^2 + (z+1)^2 + y^2)^{3/2}}.$$

$$32. u = (e^{-\sqrt{2}z} - e^{-z}) \sin x \cos y.$$

$$33. u = \frac{A}{\rho^2} \cos(2\varphi) + \frac{B}{\rho^5} \cos(5\varphi) + \frac{C}{\rho^{10}} \cos(10\varphi).$$

$$34. u = \frac{\rho \sin \varphi}{\rho^2 + 4\rho \cos \varphi + 4}.$$

$$35. u = \frac{1}{31} \left(\frac{\rho^2}{2} + \frac{32}{2} \cdot \frac{1}{\rho^3} \right) P_2(\cos \theta) + \frac{1}{47} \left(4\rho^3 + \frac{3}{\rho^4} \right) P_3(\cos \theta) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

$$36. u = a^6 \left[\frac{1}{630} \left(\frac{\rho}{a} \right)^6 - \frac{1}{105} \left(\frac{\rho}{a} \right) + \frac{1}{126} \right].$$

$$37. u = 1 - \frac{a^2 - \rho^2}{2a} \left[\frac{3}{4} \left(\frac{\rho}{a} \right) \sin \varphi - \frac{1}{4} \left(\frac{\rho}{a} \right)^3 \sin(3\varphi) \right].$$

$$38. u = \frac{a^6}{32} \left[\frac{1}{30} \left(\frac{\rho}{a} \right)^6 - \frac{1}{5} \left(\frac{\rho}{a} \right) + \frac{1}{6} \right].$$

$$39. u = \left[A e^{-\sqrt{2+\sqrt{2}}z} + (1-A) e^{-\sqrt{2-\sqrt{2}}z} - e^{-z} \right] \sin x \cos y,$$

где $A = \frac{1}{2} \sqrt{1 + 1/\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - 1/\sqrt{2}} - 1/\sqrt{2}$.

$$40. u = \frac{2x(1-y)}{[x^2 + (1-y)^2]^2}.$$

Глава 2

Гиперболические задачи

До сих пор мы занимались установившимися физическими процессами, которые описывались эллиптическими уравнениями. Теперь приступим к изучению еще одного класса уравнений с частными производными — гиперболических уравнений. Начнем с одномерного волнового уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, которое описывает, в частности, поперечное колебание струны.

§ 2.1. Метод бегущих волн

Одномерный случай (одна пространственная переменная). Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < +\infty, \\ u_t(x, 0) = g(x), & -\infty < x < +\infty, \end{cases}$$

т. е. функция $u(x, t)$ ищется в верхней полуплоскости $t > 0$ на плоскости xt (рис. 2.1).

Хорошо известно, что эта задача описывает движение бесконечной струны с заданными начальными условиями. Ее решение представляется

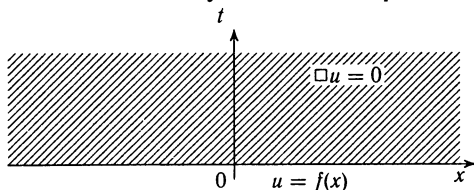


Рис. 2.1. $\square u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

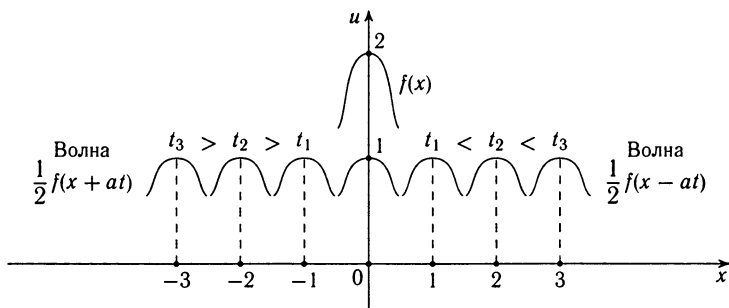


Рис. 2.2

формулой Даламбера

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\zeta) d\zeta.$$

Эту формулу можно переписать так:

$$u(x, t) = \frac{f(x - at) + f(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} [G(x + at) - G(x - at)],$$

где $G'(\zeta) = g(\zeta)$.

С физической точки зрения это решение интересно тем, что оно представляет сумму двух бегущих волн, движущихся в противоположных направлениях со скоростью a (рис. 2.2).

Дадим пространственно-временную интерпретацию формулы Даламбера. Возьмем на xt -плоскости (рис. 2.3) произвольную точку (x_0, t_0) и проведем из нее две прямые: $x - at = x_0 - at_0$ и $x + at = x_0 + at_0$ (указанные прямые называются *характеристиками волнового уравнения* $u_{tt} = a^2 u_{xx}$). Тогда решение $u(x, t)$ в точке (x_0, t_0) можно интерпретировать как среднее значение функции $f(x)$ в точках $x_1 = x_0 - at_0$ и $x_2 = x_0 + at_0$ плюс интеграл с точностью до множителя $1/(2a)$ от начальной скорости $g(x)$ в пределах от x_1 до x_2 .



Рис. 2.3

Замечание. Если мы рассматриваем неоднородную задачу Коши с однородными начальными условиями

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ u_t(x, 0) = 0, \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty,$$

то, используя метод толчков (метод Дюамеля), можно получить ее решение в виде

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\zeta, \tau) d\zeta.$$

Пример 1 [4, гл. II, № 57]. По неограниченной струне бежит волна $\varphi(x - at)$. Приняв эту волну за начальное возмущение струны в момент $t = 0$, найти состояние струны при $t > 0$.

Решение. В рассматриваемой задаче бегущая волна в момент $t = 0$ характеризуется отличными от нуля «начальными» отклонениями и скоростями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = -a\varphi'(x), \quad -\infty < x < +\infty.$$

Таким образом, получаем задачу Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = -a\varphi'(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

По формуле Даламбера получаем

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} [-a\varphi'(\zeta)] d\zeta = \\ &= \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} + \frac{1}{2a} [-a\varphi(x + at) + a\varphi(x - at)] = \varphi(x - at). \end{aligned}$$

Пример 2 [6, гл. VI, 21.23]. Найти состояние нагруженной полуограниченной струны в задаче

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - 6, & t > 0, \quad x > 0, \\ u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0; \\ u_t(0, t) + 2u_x(0, t) = -4t, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

т. е. функция $u(x, t)$ ищется в первом квадранте $x > 0, t > 0$ (рис. 2.4) на плоскости xt .

Решение. Найдём вначале частное решение уравнения $u_{tt} = u_{xx} - 6$, не обращая внимания на начальные и граничные условия. Будем считать, что это частное решение $u_1 = u_1(x)$, т. е. оно зависит только от x . Тогда для его нахождения получим уравнение $d^2 u_1 / dx^2 = 6$, откуда $u_1(x) = 3x^2$. Перейдем теперь к новой функции $v(x, t) = u(x, t) - u_1(x)$. Тогда из урав-

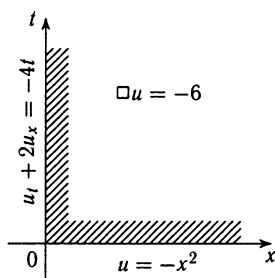


Рис. 2.4

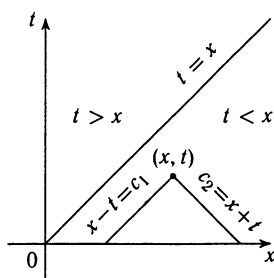


Рис. 2.5

нения (2.1) получим уравнение $v_{tt} = v_{xx}$ и задачу для определения $v(x, t)$:

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, & x > 0, \quad t > 0, \\ v(x, 0) = -2x^2, \quad v_t(x, 0) = 0, & x \geq 0 \\ v_t(0, t) + 2v_x(0, t) = -4t, & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Очевидно, что решение $v(x, t)$ при $t < x$ можно записать по формуле Даламбера (рис. 2.5) в виде

$$v(x, t) = -(x-t)^2 - (x+t)^2 = -2(x^2 + t^2).$$

Решение задачи (2.2) при $t > x$ ищем в виде

$$v(x, t) = f(t+x) + g(t-x).$$

Функции $f(x)$ и $g(x)$ найдем, используя непрерывность решения $v(x, t)$ на характеристике $t = x$ и граничное условие $v_t(0, t) + 2v_x(0, t) = -4t$. В самом деле, на характеристике $t = x$ имеем равенство $f(2t) + g(0) = -4t^2$, откуда $f(t) = -t^2 - g(0)$. Далее, из граничного условия (2.2) имеем $g'(t) + f'(t) + 2f'(t) - 2g'(t) = -4t$, откуда интегрированием получим $3f(t) - g(t) = -2t^2 + 3f(0) - g(0)$. Ясно, что $f(0) + g(0) = 0$. Итак, мы пришли к системе двух уравнений с двумя неизвестными функциями $f(t)$ и $g(t)$:

$$\begin{cases} f(t) = -t^2 + f(0), \\ 3f(t) - g(t) = -2t^2 + 4f(0). \end{cases}$$

Отсюда $g(t) = -t^2 - f(0)$. Тогда при $t > x$

$$v(x, t) = -(t+x)^2 + f(0) - (t-x)^2 - f(0) = -2(x^2 + t^2).$$

Следовательно, искомое решение при $t > 0, x > 0$ есть

$$u(x, t) = v(x, t) + u_1(x) = x^2 - 2t^2.$$

Пример 3 [4, гл. II, № 78]. Неограниченный упругий стержень получен соединением в точке $x = 0$ двух полуограниченных однородных стержней. При $x < 0$ плотность массы, модуль упругости стержня и скорость распространения малых продольных возмущений соответственно равны ρ_1 , E_1 , a_1 , а при $x > 0$ они равны ρ_2 , E_2 , a_2 . Пусть из области $x < 0$ по стержню бежит волна $u_1(x, t) = f(t - x/a_1)$. Найти отраженную и преломленную волны. Исследовать решение при $E_2 \rightarrow 0$ и при $E_2 \rightarrow \infty$.

Решение. Для отклонения точек стержня можно записать уравнения

$$\begin{cases} u_{1tt} = a_1^2 u_{1xx}, & -\infty < x < 0, \quad t > 0, \\ u_{2tt} = a_2^2 u_{2xx}, & 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

и начальные условия

$$\begin{cases} u_1(x, 0) = f\left(-\frac{x}{a_1}\right), & u_{1t}(x, 0) = f'\left(-\frac{x}{a_1}\right), & -\infty < x < 0, \\ u_2(x, 0) = 0, & u_{2t}(x, 0) = 0, & 0 < x < +\infty. \end{cases} \quad (2.4)$$

К этим уравнениям и начальным условиям нужно добавить еще условие сопряжения

$$\begin{cases} u_1(0, t) = u_2(0, t) & \text{— непрерывность смещений,} \\ E_1 u_{1x}(0, t) = E_2 u_{2x}(0, t) & \text{— непрерывность напряжений.} \end{cases}$$

Искомые функции ищем в виде

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= f_1\left(t - \frac{x}{a_1}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{a_1}\right), & -\infty < x < 0, & \quad t > 0, \\ u_2(x, t) &= f_2\left(t - \frac{x}{a_2}\right) + g_2\left(t + \frac{x}{a_2}\right), & 0 < x < +\infty, & \quad t > 0. \end{aligned}$$

Функции $f_1(s)$, $g_1(s)$, $f_2(s)$, $g_2(s)$ определим из начальных условий и условий сопряжения. Прежде всего, используя (2.3), можно записать

$$\begin{cases} f_1\left(-\frac{x}{a_1}\right) + g_1\left(\frac{x}{a_1}\right) = f\left(-\frac{x}{a_1}\right), \\ f_1'\left(-\frac{x}{a_1}\right) + g_1'\left(\frac{x}{a_1}\right) = f'\left(-\frac{x}{a_1}\right), \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} f_2\left(-\frac{x}{a_2}\right) + g_2\left(\frac{x}{a_2}\right) = 0, \\ f_2'\left(-\frac{x}{a_2}\right) + g_2'\left(\frac{x}{a_2}\right) = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

или, интегрируя вторые уравнения в (2.5), (2.6) и обозначая $x/a_1 = s$, $x/a_2 = z$,

$$\begin{cases} f_1(-s) + g_1(s) = f(-s), \\ -f_1(-s) + g_1(s) = -f(-s), \end{cases} \quad \text{где } s < 0, \quad (2.7)$$

$$\begin{cases} f_2(-z) + g_2(z) = 0, \\ -f_2(-z) + g_2(z) = 0, \end{cases} \quad \text{где } z > 0. \quad (2.8)$$

Решив систему (2.7), найдем

$$f_1(-s) = f(-s), \quad g_1(s) = 0, \quad s < 0.$$

Значит,

$$u_1(x, t) = \begin{cases} f\left(t - \frac{x}{a_1}\right) + g_1\left(t + \frac{x}{a_1}\right), & \text{если } t + x/a_1 > 0, \\ f\left(t - \frac{x}{a_1}\right), & \text{если } t + x/a_1 < 0. \end{cases}$$

Решив систему (2.8), найдем

$$f_2(-z) = 0, \quad g_2(z) = 0, \quad z > 0.$$

Отсюда

$$u_2(x, t) = \begin{cases} f_2\left(t - \frac{x}{a_2}\right), & \text{если } t > x/a_2, \\ 0, & \text{если } t < x/a_2. \end{cases}$$

Теперь из условия сопряжения определим функции $f_2(s)$ и $g_1(s)$. Из равенства $u_1(0, t) = u_2(0, t)$ следует, что

$$f(t) + g_1(t) = f_2(t),$$

а из равенства $E_1 u_{1x}(0, t) = E_2 u_{2x}(0, t)$ следует, что

$$E_1 \left[-\frac{1}{a_1} f'_1(t) + \frac{1}{a_1} g'_1(t) \right] = E_2 \left[-\frac{1}{a_2} f'_2(t) + \frac{1}{a_2} g'_2(t) \right].$$

Учитывая, что $a_1 = \sqrt{E_1/\rho_1}$, $a_2 = \sqrt{E_2/\rho_2}$, получим

$$\sqrt{E_1 \rho_1} [-f'(t) + g'_1(t)] = \sqrt{E_2 \rho_2} [-f'_2(t)];$$

интегрируя, будем иметь

$$\sqrt{E_1 \rho_1} [-f(t) + g_1(t)] = \sqrt{E_2 \rho_2} [-f_2(t)].$$

Таким образом, для нахождения $f_2(t)$ и $g_1(t)$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} f(t) + g_1(t) = f_2(t), \\ \sqrt{E_1 \rho_1} [-f(t) + g_1(t)] = \sqrt{E_2 \rho_2} [-f_2(t)]. \end{cases}$$

Отсюда

$$g_1(t) = \frac{\sqrt{E_1 \rho_1} - \sqrt{E_2 \rho_2}}{\sqrt{E_1 \rho_1} + \sqrt{E_2 \rho_2}} f(t), \quad f_2(t) = \frac{2\sqrt{E_1 \rho_1}}{\sqrt{E_1 \rho_1} + \sqrt{E_2 \rho_2}} f(t).$$

Итак, решение представляется парой функций

$$u_1(x, t) = \begin{cases} f\left(t - \frac{x}{a_1}\right) + \frac{\sqrt{E_1\rho_1} - \sqrt{E_2\rho_2}}{\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}} f\left(t + \frac{x}{a_1}\right), & \text{если } t + x/a_1 > 0, \\ f\left(t - \frac{x}{a_1}\right), & \text{если } t + x/a_1 < 0, \end{cases}$$

$$u_2(x, t) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{E_1\rho_1}}{\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}} f\left(t - \frac{x}{a_2}\right), & \text{если } t - x/a_2 > 0, \\ 0, & \text{если } t - x/a_2 < 0. \end{cases}$$

Слагаемое

$$\frac{\sqrt{E_1\rho_1} - \sqrt{E_2\rho_2}}{\sqrt{E_1\rho_1} + \sqrt{E_2\rho_2}} f\left(t + \frac{x}{a_1}\right)$$

в $u_1(x, t)$ при $t + x/a_1 > 0$ является отраженной волной. Очевидно, эта волна отсутствует, если $E_1\rho_1 = E_2\rho_2$. Если $E_2 = 0$, то отраженная волна есть $f(t + x/a_1)$; если же $E_2 = \infty$, то отраженная волна есть $-f(t + x/a_1)$.

Преломленная волна есть $u_2(x, t)$. Если $E_2 = 0$, то эта волна имеет амплитуду, в два раза большую, чем падающая волна; если $E_2 = \infty$, то преломленной волны нет.

Пример 4 [4, гл. III, № 442]. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + x \sin t, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = \cos x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Применим формулу Даламбера

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\zeta, \tau) d\zeta,$$

дающую решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

В нашем случае $\varphi(x) = \sin x$, $\psi(x) = \cos x$, $f(x, t) = x \sin t$, $a = 1$.

Искомое решение имеет вид

$$u(x, t) = \frac{\sin(x-t) + \sin(x+t)}{2} + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \cos \zeta d\zeta + \frac{1}{2} \int_0^t d\tau \int_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} \zeta \sin \tau d\zeta =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin(x-t) + \sin(x+t)}{2} + \frac{\sin(x+t) - \sin(x-t)}{2} + \frac{1}{2} \int_0^t \sin \tau \, d\tau \cdot \frac{\zeta^2}{2} \Big|_{x-(t-\tau)}^{x+(t-\tau)} = \\
 &= \sin(x+t) + x \int_0^t (t-\tau) \sin \tau \, d\tau = \sin(x+t) + x(t - \sin t).
 \end{aligned}$$

Двумерный случай (две пространственные переменные). Здесь мы рассмотрим двумерное волновое уравнение. Эти уравнения описывают процессы распространения звука в газе, колебаний мембраны, распространения электромагнитных волн и т. д.

Задачей Коши для двумерного волнового уравнения называется задача нахождения функции $u(x, y, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0,$$

и начальным условиям

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = \psi(x, y), \quad -\infty < x, y < +\infty,$$

т. е. функция $u(x, y, t)$ ищется в верхнем полупространстве $t > 0$ (рис. 2.6).

Решение этой задачи существует, единственно и выражается формулой Пуассона

$$\begin{aligned}
 u(x, y, t) = & \frac{1}{2\pi a} \left[\frac{\partial}{\partial t} \iint_{K_{at}} \frac{\varphi(\zeta, \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - \rho^2}} d\zeta d\eta + \right. \\
 & \left. + \iint_{K_{at}} \frac{\psi(\zeta, \eta)}{\sqrt{a^2 t^2 - \rho^2}} d\zeta d\eta + \int_0^t d\tau \iint_{K_{a(t-\tau)}} \frac{f(\zeta, \eta, \tau)}{\sqrt{a^2 (t-\tau)^2 - \rho^2}} d\zeta d\eta \right],
 \end{aligned}$$

где $\rho^2 = (\zeta - x)^2 + (\eta - y)^2$; K_{as} — круг радиуса as с центром в точке (x, y) (рис. 2.7).

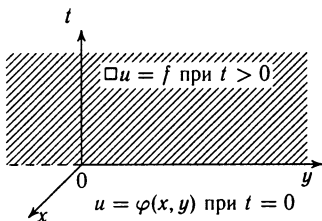


Рис. 2.6

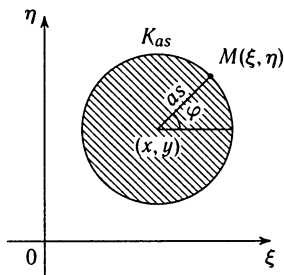


Рис. 2.7

Пример 5 [6, гл. IV, 12, 37(2)]. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + 6xyt, & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) = x^2 - y^2, \quad u_t(x, y, 0) = xy, & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Применим формулу Пуассона, полагая

$$\varphi(x, y) = x^2 - y^2, \quad \psi(x, y) = xy, \quad f(x, y, t) = 6xyt, \quad a = 1.$$

Имеем

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = & \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{K_t} \frac{\zeta^2 - \eta^2}{\sqrt{t^2 - (\zeta - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\zeta d\eta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \iint_{K_t} \frac{\zeta\eta}{\sqrt{t^2 - (\zeta - x)^2 - (\eta - y)^2}} d\zeta d\eta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \iint_{K_{t-\tau}} \frac{6\zeta\eta\tau d\zeta d\eta}{\sqrt{(t-\tau)^2 - (\zeta - x)^2 - (\eta - y)^2}}. \end{aligned}$$

Интегрирование проводится по кругам K_t и $K_{t-\tau}$. Очевидно, что

$$\begin{cases} \zeta = x + \rho \cos \varphi, \\ \eta = y + \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad \text{где} \quad 0 \leq \rho \leq s = \begin{cases} t, \\ t - \tau, \end{cases} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Вычислим отдельно каждый из записанных интегралов:

$$\begin{aligned} J_1 = & \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{(x + \rho \cos \varphi)^2 - (y + \rho \sin \varphi)^2}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\varphi = \\ = & \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\varphi + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{2x\rho^2 d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi - \\ - & \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{2y\rho^2 d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \int_0^{2\pi} \cos(2\varphi) d\varphi = \\ = & \frac{x^2 - y^2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} 2\pi \int_0^t \frac{\rho d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} = x^2 - y^2; \end{aligned}$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^t \frac{(x + \rho \cos \varphi)(y + \rho \sin \varphi)}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\varphi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{xy\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{x\rho^2 d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi + \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{y\rho^2 d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^t \frac{\rho^2 d\rho}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi = xyt.
\end{aligned}$$

Наконец,

$$\begin{aligned}
J_3 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_0^{2\pi} \int_0^{t-\tau} \frac{6\tau(x + \rho \cos \varphi)(y + \rho \sin \varphi)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \rho^2}} \rho d\rho d\varphi = \\
&= \frac{3}{\pi} \int_0^t \tau d\tau \int_0^{t-\tau} \frac{xy\rho d\rho}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \rho^2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = 6xy \int_0^t \tau d\tau \int_0^{t-\tau} \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \rho^2}} = \\
&= 6xy \int_0^t (t-\tau)\tau d\tau = xyt^3.
\end{aligned}$$

Следовательно, искомое решение есть

$$u(x, y, t) = J_1 + J_2 + J_3 = xyt(1 + t^2) + x^2 - y^2.$$

Трехмерный случай (три пространственные переменные). Задачей Коши для трехмерного волнового уравнения называется задача нахождения функции $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющей уравнению

$$u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t), \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0,$$

и начальным условиям

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, 0) &= \varphi(x, y, z), \quad u_t(x, y, z, 0) = \psi(x, y, z), \\
-\infty &< x, y, z < +\infty.
\end{aligned}$$

Решение этой задачи существует, единственно и выражается формулой Кирхгофа

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi a^2} \left[\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_{at}} \frac{\varphi(\xi, \eta, \zeta)}{t} d\sigma + \right. \\
&\quad \left. + \iint_{S_{at}} \frac{\psi(\xi, \eta, \zeta)}{t} d\sigma + \int_0^t d\tau \iint_{S_{a(t-\tau)}} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, \tau)}{t-\tau} d\sigma \right],
\end{aligned}$$

где S_{ap} — сфера радиуса ap с центром в точке (x, y, z) (рис. 2.8).

Пример 6 [6, гл. IV, 12.38(1)]. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2xyz, & -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = x^2 + y^2 - 2z^2, & -\infty < x, y, z < +\infty. \\ u_t(x, y, z, 0) = 1, \end{cases}$$

Решение. Применим формулу Кирхгофа, полагая

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= x^2 + y^2 - 2z^2, & \psi(x, y, z) &= 1, \\ f(x, y, z, t) &= 2xyz, & a &= 1. \end{aligned}$$

Получим

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_t} \frac{\xi^2 + \eta^2 - 2\zeta^2}{t} d\sigma + \frac{1}{4\pi} \iint_{S_t} \frac{1}{t} d\sigma + \frac{1}{4\pi} \int_0^t d\tau \iint_{S_{t-\tau}} \frac{2\xi\eta\zeta}{t-\tau} d\sigma.$$

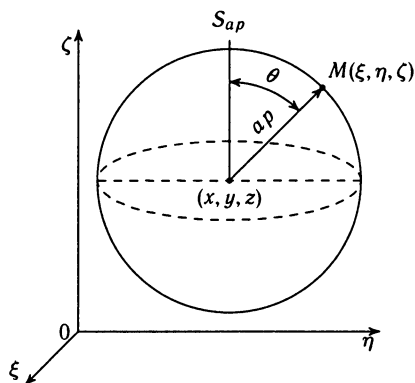


Рис. 2.8

Здесь интегрирование проводится по сферам S_t и $S_{t-\tau}$ радиусов t и $t-\tau$ с центром в точке (x, y, z) (см. рис. 2.8). Ясно, что если $M(\xi, \eta, \zeta) \in S_t$, то

$$\xi = x + t \sin \theta \cos \varphi,$$

$$\eta = y + t \sin \theta \sin \varphi,$$

$$\zeta = z + t \cos \theta,$$

где $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$.

Вычислим отдельно каждый из записанных интегралов:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{(x + t \sin \theta \cos \varphi)^2 + (y + t \sin \theta \sin \varphi)^2}{t} - \frac{2(x + t \cos \theta)^2}{t} \right] t^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (x^2 + 2tx \sin \theta \cos \varphi + t^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi) t^2 \sin \theta d\theta d\varphi + \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (y^2 + 2ty \sin \theta \sin \varphi + t^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi) t^2 \sin \theta d\theta d\varphi + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\pi\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (-2z^2 - 4zt \cos \theta - 2t^2 \cos^2 \theta) t^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\
& = \frac{1}{4\pi\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t^2 (x^2 + y^2 - 2z^2) \sin \theta d\theta d\varphi + \\
& \quad + \frac{1}{4\pi\partial t} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t^3 (\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta d\varphi + \\
& \quad + \frac{1}{4\pi\partial t} \int_0^\pi 2t^2 x \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{4\pi\partial t} \int_0^\pi 2t^2 y \sin^2 \theta d\theta \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi - \\
& \quad - \frac{1}{4\pi\partial t} \int_0^\pi 2zt^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = x^2 + y^2 - 2z^2, \\
J_2 & = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{t} t^2 \sin \theta d\theta d\varphi = t, \\
J_3 & = \frac{1}{4\pi} \int_0^t d\tau \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{2(x + (t - \tau) \sin \theta \cos \varphi)(y + (t - \tau) \sin \theta \sin \varphi)}{t - \tau} \times \\
& \quad \times (z + (t - \tau) \cos \theta)(t - \tau)^2 \sin \theta d\theta d\varphi = \\
& = \frac{1}{2\pi} \int_0^t (t - \tau) d\tau \int_0^{2\pi} \int_0^\pi xyz \sin \theta d\theta d\varphi = 2xyz \int_0^t (t - \tau) d\tau = t^2 xyz.
\end{aligned}$$

Итак, решение задачи Коши есть

$$u(x, y, z, t) = x^2 + y^2 - 2z^2 + t + t^2 xyz.$$

§ 2.2. Метод подбора частных решений

Иногда удобно, не применяя общей формулы, дающей решение задачи Коши для волнового уравнения, найти решение этой задачи, используя специфику правой части уравнения и начальных условий. Действительно, даламбертиан $\square u = \partial^2 u / \partial t^2 - \Delta u$, определенный на дважды непрерывно дифференцируемых функциях, отображает, например, функции вида $u(x, y, z, t) = e^{ax} \sin(by) \cos(cz) P_m(t)$ ($P_m(t)$ — многочлен степени m) в функции того же вида. Заметив это, легко подобрать нужное частное решение задачи Коши.

Пример 1. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + te^{5x} \sin(3y) \cos(4z), & -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = e^{6x+8y} \cos(10z), \\ u_t|_{t=0} = e^{3y+4x} \sin(5x), \end{cases} \quad -\infty < x, y, z < +\infty.$$

Решение. Разобьем эту задачу на две подзадачи:

$$a) \quad \begin{cases} v_{tt} = \Delta v + te^{5x} \sin(3y) \cos(4z), & -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = 0, & -\infty < x, y, z < +\infty; \end{cases}$$

$$б) \quad \begin{cases} w_{tt} = \Delta w, & -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ w|_{t=0} = e^{6x+8y} \cos(10z), \\ w_t|_{t=0} = e^{3y+4x} \sin(5x), \end{cases} \quad -\infty < x, y, z < +\infty.$$

Легко видеть, что решением задачи а) является функция

$$v(x, y, z, t) = \frac{1}{6}t^3 e^{5x} \sin(3y) \cos(4z).$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{6}t^3 [25e^{5x} \sin(3y) \cos(4z) - \\ &\quad - 9e^{5x} \sin(3y) \cos(4z) - 16e^{5x} \sin(3y) \cos(4z)] = 0, \\ v_{tt} &= te^{5x} \sin(3y) \cos(4z). \end{aligned}$$

Далее, функции $\varphi(x, y, z) = e^{6x+8y} \cos(10z)$ и $\psi(x, y, z) = e^{3y+4x} \sin(5x)$ являются решениями уравнения Лапласа (т. е. гармоничны во всем трехмерном пространстве), так как, например,

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \\ &= 36e^{6x+8y} \cos(10z) + 64e^{6x+8y} \cos(10z) - 100e^{6x+8y} \cos(10z) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция

$$w(x, y, z, t) = e^{6x+8y} \cos(10z) + te^{3y+4x} \sin(5x)$$

есть решение задачи б).

Таким образом, решение исходной задачи есть

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= v(x, y, z, t) + w(x, y, z, t) = \\ &= \frac{1}{6}t^3 e^{5x} \sin(3y) \cos(4z) + e^{6x+8y} \cos(10z) + e^{3y+4x} \sin(5x). \end{aligned}$$

Пример 2. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \cos(bx + cy), \\ u_t|_{t=0} = \sin(bx + cy), \end{cases} \quad -\infty < x, y < +\infty.$$

Решение. Разобьем задачу на две:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \begin{cases} u_{tt}^{(1)} = a^2 \Delta u^{(1)}, & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u^{(1)}|_{t=0} = \cos(bx + cy), \\ u_t^{(1)}|_{t=0} = 0, \end{cases} & -\infty < x, y < +\infty. \\ 2) \quad & \begin{cases} u_{tt}^{(2)} = a^2 \Delta u^{(2)}, & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u^{(2)}|_{t=0} = 0, \\ u_t^{(2)}|_{t=0} = \sin(bx + cy), \end{cases} & -\infty < x, y < +\infty. \end{aligned}$$

Решение задачи 1) ищем в виде

$$u^{(1)}(x, y, t) = \varphi(t) \cos(bx + cy),$$

причем $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$ (для выполнения начальных условий 1)). Подставляя $\varphi(t) \cos(bx + cy)$ в уравнение $u_{tt}^{(1)} = a^2 \Delta u^{(1)}$, получим

$$\varphi'' \cos(bx + cy) = -a^2(b^2 + c^2)\varphi \cos(bx + cy).$$

Отсюда приходим к задаче Коши

$$\begin{cases} \varphi'' + a^2(b^2 + c^2)\varphi = 0, & t > 0, \\ \varphi(0) = 1, & \varphi'(0) = 0. \end{cases}$$

Ее решение есть $\varphi(t) = \cos(a\sqrt{b^2 + c^2}t)$. Значит,

$$u^{(1)}(x, y, t) = \cos(bx + cy) \cos(a\sqrt{b^2 + c^2}t).$$

Аналогично, решение задачи 2) ищем в виде

$$u^{(2)}(x, y, t) = \psi(t) \sin(bx + cy),$$

причем $\psi(0) = 0$, $\psi'(0) = 1$.

По аналогии со случаем 1) приходим к задаче Коши

$$\begin{cases} \psi'' + a^2(b^2 + c^2)\psi = 0, & t > 0, \\ \psi(0) = 0, & \psi'(0) = 1. \end{cases}$$

Ее решение имеет вид $\psi(t) = \frac{\sin(a\sqrt{b^2+c^2}t)}{a\sqrt{b^2+c^2}}$. Значит,

$$u^{(2)}(x, y, t) = \sin(bx + cy) \frac{\sin(a\sqrt{b^2+c^2}t)}{a\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Следовательно, решение исходной задачи есть

$$u(x, y, t) = u^{(1)}(x, y, t) + u^{(2)}(x, y, t) = \cos(bx + cy) \cos(a\sqrt{b^2+c^2}t) + \frac{1}{a\sqrt{b^2+c^2}} \sin(bx + cy) \sin(a\sqrt{b^2+c^2}t).$$

§ 2.3. Метод интегрального преобразования Фурье

Одномерный случай (одна пространственная переменная). Известно, что если функция $f(x)$ ($-\infty < x < +\infty$) удовлетворяет определенным условиям, то справедлива интегральная формула Фурье

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) e^{i\lambda(x-\zeta)} d\zeta.$$

Назовем *образом Фурье функции* $f(x)$ функцию

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

в силу интегральной формулы Фурье функция $f(x)$ может быть восстановлена с помощью формулы

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Переход от $f(x)$ к $\bar{f}(\lambda)$ называется *интегральным преобразованием Фурье*, а переход от $\bar{f}(\lambda)$ к $f(x)$ называется *обратным преобразованием Фурье*.

Если же функция $f(x)$ задана на полупрямой ($0 < x < +\infty$), то можно рассматривать *косинус-образ Фурье*

$$\bar{f}^c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(\lambda x) dx,$$

переход от которого к оригиналу $f(x)$ осуществляется по формуле

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{f}^c(\lambda) \cos(\lambda x) d\lambda,$$

и синус-образ Фурье

$$\tilde{f}^s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(\lambda x) dx,$$

переход от которого к оригиналу $f(x)$ осуществляется по формуле

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{f}^s(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda.$$

Основными свойствами преобразования Фурье являются:

1) линейность, т. е. $(c_1 \tilde{f} + c_2 \tilde{g}) = c_1 \tilde{f} + c_2 \tilde{g}$ (c_1 и c_2 — произвольные постоянные);

2) преобразование частных производных, т. е. если $u = u(x, t)$ и преобразование Фурье проводится по переменной x , то

$$\tilde{u}_x = i\lambda \tilde{u}, \quad \tilde{u}_{xx} = (i\lambda)^2 \tilde{u}, \quad \dots, \quad \underbrace{\tilde{u}_{x\dots x}}_{n \text{ раз}} = (i\lambda)^n \tilde{u}$$

(это доказывается интегрированием по частям), а образы частных производных по t даются формулами

$$\tilde{u}_t = \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t}, \quad \tilde{u}_{tt} = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2}, \quad \dots, \quad \underbrace{\tilde{u}_{t\dots t}}_{n \text{ раз}} = \frac{\partial^n \tilde{u}}{\partial t^n}$$

Таблица 2.1. Преобразование Фурье некоторых функций

Функция $f(x)$ ($a > 0$)	Функции $\tilde{f}(\lambda)$	Функция $f(x)$ ($a > 0$)	Функции $\tilde{f}(\lambda)$
1, если $ x \leq a$ 0, если $ x > a$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(\lambda a)}{\lambda}$	$\frac{1}{x^2 + a^2}$	$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a \lambda }$
e^{-ax^2}	$\frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{\lambda^2}{4a}}$	$f(ax)$	$\frac{1}{a} \tilde{f}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$
$e^{-a x }$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \lambda^2}$	$f(x - a)$	$e^{-ia\lambda} \tilde{f}(\lambda)$

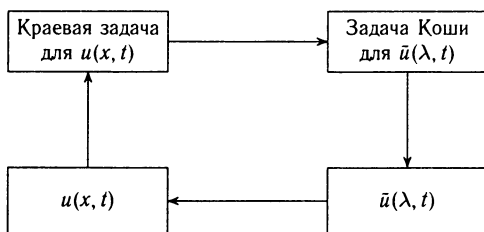


Рис. 2.9. Блок-схема преобразования Фурье

(в предположении, что указанные частные производные по t удовлетворяют определенным условиям).

Мы видим, что под действием преобразования Фурье операция дифференцирования по x заменяется умножением. Этот важный факт используется при решении граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

Есть много других интересных свойств преобразований Фурье, на которых мы не останавливаемся. Примеры преобразования Фурье см. в табл. 2.1.

Вернемся к решению граничных задач для одномерного волнового уравнения. Чтобы решить такую задачу для $u(x, t)$, переходят по переменной x с помощью преобразования Фурье к задаче для образа $\bar{u}(\lambda, t)$. Решив эту, более простую задачу, находят функцию $u(x, t)$ с помощью обратного преобразования Фурье (рис. 2.9).

Пример 1 [4, гл. II, № 178]. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \\ u_x(0, t) = 0, & 0 \leq t < +\infty, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Применим косинус-преобразование Фурье по переменной x . Пусть

$$\bar{u}^c(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(\zeta, t) \cos(\lambda \zeta) d\zeta.$$

Сразу проверим выполнение граничного условия $u_x(0, t) = 0$. Имеем

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \bar{u}^c(\lambda, t) \cos(\lambda x) d\lambda.$$

Дифференцирование по x дает

$$u_x(x, t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \lambda \int_0^{+\infty} \tilde{u}^c(\lambda, t) \sin(\lambda, x) d\lambda,$$

откуда следует, что $u_x(0, t) = 0$. Тогда, учитывая, что

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt}^c(\lambda, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u_{tt}(\zeta, t) \cos(\lambda\zeta) d\zeta, \\ -\lambda^2 \tilde{u}^c(\lambda, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u_{\zeta\zeta}(\zeta, t) \cos(\lambda\zeta) d\zeta, \end{aligned}$$

$$\tilde{f}^c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\zeta) \cos(\lambda\zeta) d\zeta, \quad \tilde{g}^c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\zeta) \cos(\lambda\zeta) d\zeta,$$

приходим к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{u}^c(\lambda, t)}{dt^2} + a^2 \lambda^2 \tilde{u}^c(\lambda, t) = 0, & t > 0, \\ \tilde{u}^c(\lambda, 0) = \tilde{f}^c(\lambda), & \tilde{u}_t^c(\lambda, 0) = \tilde{g}^c(\lambda), \end{cases}$$

для определения функции $\tilde{u}^c(\lambda, t)$. Решение этой задачи имеет вид

$$\tilde{u}^c(\lambda, t) = \tilde{f}^c(\lambda) \cos(a\lambda t) + \tilde{g}^c(\lambda) \frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda}.$$

Искомую функцию $u(x, t)$ находим с помощью обратного косинус-преобразования Фурье:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{u}^c(\lambda, t) \cos(\lambda x) d\lambda = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[\tilde{f}^c(\lambda) \cos(a\lambda t) + \tilde{g}^c(\lambda) \frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda} \right] \cos(\lambda x) d\lambda = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{f}^c(\lambda) \cos(a\lambda t) \cos(\lambda x) d\lambda + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \frac{\sin(a\lambda t)}{a\lambda} \cos(\lambda x) d\lambda. \end{aligned}$$

Рассмотрим два случая.

1) $x - at > 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \tilde{f}^c(\lambda) [\cos \lambda(x + at) + \cos \lambda(x - at)] d\lambda + \\
 &\quad + \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \frac{[\sin \lambda(x + at) - \sin \lambda(x - at)] d\lambda}{\lambda} = \\
 &= \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \int_{x-at}^{x+at} \cos(\lambda s) ds \right] d\lambda = \\
 &= \frac{f(x + at) + f(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(s) ds.
 \end{aligned}$$

2) $x - at < 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{f}^c(\lambda) [\cos \lambda(x + at) + \cos \lambda(at - x)] d\lambda + \\
 &\quad + \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \frac{[\sin \lambda(x + at) + \sin \lambda(at - x)] d\lambda}{\lambda} = \\
 &= \frac{f(x + at) + f(at - x)}{2} + \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \left(\int_{x-at}^{x+at} \cos(\lambda s) ds \right) d\lambda.
 \end{aligned}$$

Поскольку функция $g(x)$ определена только для положительных значений x , то нужно преобразовать последний интеграл:

$$\begin{aligned}
 \int_{x-at}^{x+at} \cos(\lambda s) ds &= \int_{x-at}^0 \cos(\lambda s) ds + \int_0^{x+at} \cos(\lambda s) ds = \\
 &= - \int_{at-x}^0 \cos(\lambda s) ds + \int_0^{x+at} \cos(\lambda s) ds = \int_0^{at-x} \cos(\lambda s) ds + \int_0^{x+at} \cos(\lambda s) ds.
 \end{aligned}$$

Теперь

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \left(\int_{x-at}^{x+at} \cos(\lambda s) ds \right) d\lambda =$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\int_0^{x+at} ds \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \cos(\lambda s) d\lambda \right) + \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{at-x} ds \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{g}^c(\lambda) \cos(\lambda s) d\lambda \right) \right] = \int_0^{x+at} g(s) ds + \int_0^{at-x} g(s) ds.
\end{aligned}$$

Итак, искомое решение есть

$$u(x, t) = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \left[\int_0^{x+at} g(s) ds - \operatorname{sgn}(x-at) \int_0^{|x-at|} g(s) ds \right],$$

где

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Замечание 1. В качестве функций $f(x)$ и $g(x)$ могут быть, например, взяты функции e^{-ax^2} , e^{-ax} ($a > 0$), $1/(a^2 + x^2)$ и т. д.

Замечание 2. Для решения задач на полуограниченной прямой с граничным условием $u(0, t) = 0$ нужно воспользоваться синус-преобразованием Фурье, так как, если

$$\tilde{u}^s(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(\zeta, t) \sin(\lambda \zeta) d\zeta,$$

то

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \tilde{u}^s(\lambda, t) \sin(\lambda x) d\lambda,$$

откуда получаем $u(0, t) = 0$.

Рассмотрим более сложную задачу на применение преобразования Фурье.

Пример 2 [4, гл. II, № 176]. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + c^2 u + f(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Применим к левой и правой частям уравнения с частными производными преобразование Фурье по переменной x . Получим обыкновенное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с

нулевыми начальными условиями

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt}(\zeta, t) + (a^2\zeta^2 - c^2)\tilde{u}(\zeta, t) = \tilde{f}(\zeta, t), & t > 0, \\ \tilde{u}(\zeta, 0) = \tilde{u}_t(\zeta, 0) = 0. \end{cases}$$

Воспользуемся методом Дюамеля решения этой задачи Коши. Именно, решим вспомогательную задачу Коши.

$$\begin{cases} v_{tt} + (a^2\zeta^2 - c^2)v = 0, & v = v(\zeta, t, \tau), & t > \tau, \\ v|_{t=\tau} = 0, & v_t|_{t=\tau} = \tilde{f}(\zeta, \tau). \end{cases}$$

Тогда решение исходной преобразованной задачи дается формулой

$$\tilde{u}(\zeta, t) = \int_0^t v(\zeta, t; \tau) d\tau,$$

где

$$v(\zeta, t; \tau) = C_1 \cos\left(\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}t\right).$$

Отсюда

$$\begin{cases} 0 = C_1 \cos\left(\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}\tau\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}\tau\right), \\ \tilde{f}(\zeta, \tau) = -C_1 \sqrt{a^2\zeta^2 - c^2} \sin\left(\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}\tau\right) + \\ \quad + C_2 \sqrt{a^2\zeta^2 - c^2} \cos\left(\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}\tau\right). \end{cases}$$

Обозначим $\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2} = b$. Тогда

$$\begin{cases} C_1 \cos(b\tau) + C_2 \sin(b\tau) = 0, \\ C_1(-\sin(b\tau)) + C_2 \cos(b\tau) = \frac{\tilde{f}(\zeta, \tau)}{b}, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin(b\tau) \\ \frac{\tilde{f}(\zeta, \tau)}{b} & \cos(b\tau) \end{vmatrix} = -\frac{\tilde{f}(\zeta, \tau)}{b} \sin(b\tau),$$

$$C_2 = \begin{vmatrix} \cos(b\tau) & 0 \\ -\sin(b\tau) & \frac{\tilde{f}(\zeta, \tau)}{b} \end{vmatrix} = \frac{\tilde{f}(\zeta, \tau)}{b} \cos(b\tau).$$

Значит,

$$\begin{aligned} v(\zeta, t; \tau) &= -\frac{\tilde{f}(\zeta, \tau)}{b} \sin(b\tau) \cos(bt) + \frac{\tilde{f}(\zeta, \tau)}{b} \cos(b\tau) \sin(bt) = \\ &= \frac{\tilde{f}(\zeta, \tau)}{b} \sin b(t - \tau) = \frac{\tilde{f}(\zeta, \tau)}{\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}} \sin \sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}(t - \tau), \end{aligned}$$

т. е.

$$\bar{u}(\zeta, t) = \int_0^t d\tau \cdot \bar{f}(\zeta, \tau) \frac{\sin\left((t-\tau)\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}\right)}{\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}}.$$

По формуле обращения преобразования Фурье

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(\zeta, t) e^{i\zeta x} d\zeta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\zeta, \tau) e^{i\zeta x} \frac{\sin\left((t-\tau)\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}\right)}{\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}} d\zeta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, \tau) \frac{\sin\left((t-\tau)\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}\right)}{\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}} e^{i\zeta(x-\lambda)} d\lambda. \end{aligned}$$

В теории функций Бесселя имеет место формула

$$\frac{\sin r}{r} = \frac{1}{2} \int_0^\pi J_0(r \sin \varphi \sin \theta) e^{ir \cos \varphi \cos \theta} \sin \theta d\theta.$$

Сделаем в этом равенстве замену

$$r \cos \varphi = -a\zeta(t-\tau), \quad r \sin \varphi = ic(t-\tau).$$

Отсюда $r^2 = (t-\tau)^2(a^2\zeta^2 - c^2)$.

Теперь будем иметь

$$\frac{\sin\left((t-\tau)\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}\right)}{(t-\tau)\sqrt{a^2\zeta^2 - c^2}} = \frac{1}{2} \int_0^\pi J_0(ic(t-\tau) \sin \theta) e^{-ia\zeta(t-\tau) \cos \theta} \sin \theta d\theta.$$

Сделаем в интеграле замену переменной $\cos \theta = \frac{\beta}{a(t-\tau)}$, откуда $-\sin \theta d\theta = \frac{d\beta}{a(t-\tau)}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\pi J_0(ic(t-\tau) \sin \theta) e^{-ia\zeta(t-\tau) \cos \theta} \sin \theta d\theta &= \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} J_0\left(ic(t-\tau) \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{a^2(t-\tau)^2}}\right) \frac{e^{-i\zeta\beta}}{t-\tau} d\beta = \\ &= \frac{1}{2a} \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} I_0\left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{\beta^2}{a^2}}\right) \frac{e^{-i\zeta\beta}}{t-\tau} d\beta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi a} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f(\lambda, \tau) \int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} I_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{\beta^2}{a^2}} \right) e^{i\zeta(x-\lambda-\beta)} d\beta \right] d\lambda.$$

Положим $g(\beta) = \begin{cases} I_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{\beta^2}{a^2}} \right), & \text{если } |\beta| \leq a|t-\tau|, \\ 0, & \text{если } |\beta| \geq a|t-\tau|. \end{cases}$

Тогда $\int_{-a(t-\tau)}^{a(t-\tau)} I_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{\beta^2}{a^2}} \right) e^{i\zeta(x-\beta)} d\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\beta) e^{i\zeta(x-\beta)} d\beta.$

В силу интегральной формулы Фурье

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} g(\beta) e^{i\zeta(x-\lambda-\beta)} d\beta = g(x-\lambda).$$

Отсюда (в силу определения функции $g(\beta)$) получаем

$$g(x-\lambda) = \begin{cases} I_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(x-\lambda)^2}{a^2}} \right), & \text{если } x-a(t-\tau) < \lambda < x+a(t-\tau), \\ 0, & \text{если } -\infty < \lambda < x-a(t-\tau) \text{ или} \\ & x+a(t-\tau) < \lambda < +\infty. \end{cases}$$

Окончательно

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\lambda, \tau) I_0 \left(c \sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{(x-\lambda)^2}{a^2}} \right) d\lambda.$$

Двумерный случай (две пространственные переменные).

Пример 3 [4, гл. IV, № 106]. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Применяя преобразование Фурье к уравнению по переменным x и y и начальным условиям рассматриваемой задачи с учетом того, что

$$\bar{u}(\lambda, \mu, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\lambda x + \mu y)} u(x, y, t) dx dy,$$

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\lambda x + \mu y)} \bar{u}(\lambda, \mu, t) d\lambda d\mu,$$

$$\bar{f}(\lambda, \mu, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\lambda x + \mu y)} f(x, y, t) dx dy,$$

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) e^{-i(\lambda x + \mu y)} dx dy = -(\lambda^2 + \mu^2) \bar{u}(\lambda, \mu, t)$$

(последнее равенство устанавливается с помощью интегрирования по частям с использованием обращения в нуль на бесконечности по x и y функции $u(x, y, t)$ и ее частных производных u_x и u_y), получим задачу Коши

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt}(\lambda, \mu, t) + a^2(\lambda^2 + \mu^2) \bar{u}(\lambda, \mu, t) = \bar{f}(\lambda, \mu, t), & t > 0, \\ \bar{u}(\lambda, \mu, t) = 0, & \bar{u}_t(\lambda, \mu, t) = 0. \end{cases}$$

Решив эту задачу методом Дюамеля (или методом вариации произвольных постоянных), найдем

$$\bar{u}(\lambda, \mu, t) = \int_0^t \bar{f}(\lambda, \mu, \tau) \frac{\sin(a(t-\tau)\sqrt{\lambda^2 + \mu^2})}{a\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} d\tau.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, имеем

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda, \mu, \tau) \frac{\sin(a(t-\tau)\sqrt{\lambda^2 + \mu^2})}{a\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} e^{i(\lambda x + \mu y)} d\lambda d\mu.$$

Подставляя сюда значения $\bar{f}(\lambda, \mu, t)$ и обозначая $\nu = \sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$, придем к равенству

$$u(x, y, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^t d\tau \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta, \eta, \tau) \frac{\sin(a\nu(t-\tau))}{a\nu} e^{i[\lambda(x-\zeta) + \mu(y-\eta)]} d\zeta d\eta d\lambda d\mu.$$

Вычислим четырехкратный несобственный интеграл, вводя полярные координаты соотношениями

$$\begin{cases} \zeta - x = \rho \cos \varphi, \\ \eta - y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \nu \cos \theta, \\ \mu = \nu \sin \theta. \end{cases}$$

Отсюда немедленно следует равенство

$$\lambda(\zeta - x) + \mu(\eta - y) = \rho\nu \cos(\theta - \varphi) = \rho\nu \cos \psi,$$

где $\psi = \theta - \varphi$. Теперь имеем

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \int \int \int f(\zeta, \eta, \tau) \frac{\sin(a\nu(t - \tau))}{a\nu} e^{i[\lambda(x - \zeta) + \mu(y - \eta)]} d\zeta d\eta d\lambda d\mu = \\ &= \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{+\infty} d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} f(\zeta, \eta, \tau) \frac{\sin(a\nu(t - \tau))}{a\nu} e^{-i\rho\nu \cos \psi} \rho\nu d\psi. \end{aligned}$$

Но справедливо равенство (интегральное представление функций Бесселя)

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \cos \psi + in\psi} d\psi,$$

откуда получим

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \cos \psi} d\psi,$$

или (считая x вещественным)

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ix \cos \psi} d\psi.$$

Это дает

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{+\infty} d\nu \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} f(\zeta, \eta, \tau) \frac{\sin(a\nu(t - \tau))}{a\nu} e^{-i\rho\nu \cos \psi} \rho\nu d\psi = \\ &= \frac{2\pi}{a} \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{+\infty} d\nu \int_0^{2\pi} f(\zeta, \eta, \tau) \sin(a\nu(t - \tau)) J_0(\rho\nu) d\varphi. \end{aligned}$$

Учтем еще, что

$$\int_0^{+\infty} J_0(\rho\nu) \sin(a\nu(t-\tau)) d\nu = \begin{cases} 0, & \text{при } a(t-\tau) < \rho, \\ \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}}, & \text{при } a(t-\tau) > \rho. \end{cases}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{+\infty} d\nu \int_0^{2\pi} f(\zeta, \eta, \tau) \sin(a\nu(t-\tau)) J_0(\rho\nu) d\varphi = \\ = \int_0^{a(t-\tau)} \int_0^{2\pi} f(\zeta, \eta, \tau) \frac{\rho d\rho d\varphi}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}}. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \int_0^{a(t-\tau)} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta, \eta, \tau) \rho d\rho d\varphi}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}},$$

или

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \iint_{\rho \leq a(t-\tau)} \frac{f(\zeta, \eta, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}} d\zeta d\eta.$$

Трехмерный случай (три пространственные переменные).

Пример 4 [4, гл. IV, № 107]. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \\ \quad \quad \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x, y, z < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Применяя преобразование Фурье по переменным x, y и z к уравнению и начальным условиям, получим задачу Коши

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt}(\lambda, \mu, \nu, t) + a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) \bar{u}(\lambda, \mu, \nu, t) = \bar{f}(\lambda, \mu, \nu, t), \quad t > 0, \\ \bar{u}(\lambda, \mu, \nu, t)|_{t=0} = \bar{u}_t(\lambda, \mu, \nu, t)|_{t=0} = 0, \end{cases}$$

где

$$\bar{u}(\lambda, \mu, \nu, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\lambda x + \mu y + \nu z)} u(x, y, z, t) dx dy dz,$$

$$\bar{f}(\lambda, \mu, \nu, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\lambda x + \mu y + \nu z)} f(x, y, z, t) dx dy dz.$$

Решение указанной задачи (по аналогии с предыдущим) дается интегралом

$$\bar{u}(\lambda, \mu, \nu, t) = \int_0^t \bar{f}(\lambda, \mu, \nu, \tau) \frac{\sin(a\rho(t-\tau))}{a\rho} d\tau,$$

где $\rho^2 = \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2$.

По формуле обращения преобразования Фурье имеем

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^t d\tau \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta, \tau) \frac{\sin(a\rho(t-\tau))}{a\rho} \times \\ \times e^{i[\lambda(x-\xi)+\mu(y-\eta)+\nu(z-\zeta)]} d\xi d\eta d\zeta d\lambda d\mu d\nu.$$

Для вычисления шестикратного интеграла перейдем к полярным координатам по формулам

$$\begin{cases} \xi - x = r \sin \theta \cos \varphi, & \eta - y = r \sin \theta \sin \varphi, & \zeta - z = r \cos \theta, \\ \lambda = \rho \sin s \cos \psi & \mu = \rho \sin s \sin \psi, & \nu = \rho \cos s, \end{cases}$$

(здесь s — угол между векторами $\vec{r} = (\xi - x)\vec{i} + (\eta - y)\vec{j} + (\zeta - z)\vec{k}$ и $\vec{\rho} = \lambda\vec{i} + \mu\vec{j} + \nu\vec{k}$). Тогда

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^t d\tau \times \\ \times \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + r \sin \theta \cos \varphi, y + r \sin \theta \sin \varphi, z + r \cos \theta, \tau) \times \\ \times \frac{\sin(a\rho(t-\tau))}{a\rho} \rho^2 r^2 \sin \theta \sin s e^{-i\rho r \cos s} d\rho dr d\theta ds d\varphi d\psi = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3 a} \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x + r \sin \theta \cos \varphi, y + r \sin \theta \sin \varphi, z + r \cos \theta) \times \\ \times \sin(a\rho(t-\tau)) \rho r^2 \sin \theta d\rho dr d\theta d\varphi \int_0^\pi e^{-i\rho r \cos s} \sin s ds \int_0^{2\pi} d\psi;$$

учитывая, что

$$\int_0^\pi e^{-i\rho r \cos s} \sin s ds = \frac{2 \sin(\rho r)}{\rho r}, \quad \int_0^{2\pi} d\psi = 2\pi,$$

будем иметь

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) &= \\
 &= \frac{1}{2\pi^2 a} \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x + r \sin \theta \cos \varphi, y + r \sin \theta \sin \varphi, z + r \cos \theta, \tau) \times \\
 &\quad \times \sin(a\rho(t - \tau)) \sin(\rho r) \sin \theta r d\rho dr d\theta d\varphi = \\
 &= \frac{1}{4\pi^2 a} \int_0^t d\tau \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x + r \sin \theta \cos \varphi, y + r \sin \theta \sin \varphi, z + r \cos \theta, \tau) \times \\
 &\quad \times r [\cos \rho(r - a(t - \tau)) - \cos \rho(r + a(t - \tau))] \sin \theta d\rho dr d\theta d\varphi.
 \end{aligned}$$

Заметим теперь, что верно равенство (интеграл Фурье)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{+\infty} g(r) \cos(\rho(r - s)) dr = g(s),$$

если $g(r) = 0$ при $r \leq 0$.

Следовательно, положив

$$g(r) = \begin{cases} rf(x + r \sin \theta \cos \varphi, y + r \sin \theta \sin \varphi, z + r \cos \theta, \tau), & \text{если } r \geq 0, \\ 0, & \text{если } r \leq 0, \end{cases}$$

найдем

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{+\infty} rf(x + r \sin \theta \cos \varphi, y + r \sin \theta \sin \varphi, z + r \cos \theta, \tau) \times \\
 &\quad \times \cos \rho(r - a(t - \tau)) dr = a(t - \tau) \times \\
 &\quad \times f(x + a(t - \tau) \sin \theta \cos \varphi, y + a(t - \tau) \sin \theta \sin \varphi, z + a(t - \tau) \cos \theta, \tau).
 \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{+\infty} rf(x + r \sin \theta \cos \varphi, y + r \sin \theta \sin \varphi, z + r \cos \theta, \tau) \times \\
 &\quad \times \cos \rho(r + a(t - \tau)) dr = \\
 &= \begin{cases} [-a(t - \tau)] f(x - a(t - \tau) \sin \theta \cos \varphi, y - a(t - \tau) \times \\ \quad \times \sin \theta \sin \varphi, z - a(t - \tau) \cos \theta, \tau), & \text{если } t \leq r, \\ 0, & \text{если } t \geq r. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$u(x, y, z, t) = \frac{a}{4\pi} \int_0^t (t - \tau) d\tau \times \\ \times \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x + a(t - \tau) \sin \theta \cos \varphi, y + a(t - \tau) \sin \theta \sin \varphi, \\ z + a(t - \tau) \cos \theta, \tau) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Выполнив в последнем интеграле замену переменной $r = a(t - \tau)$, откуда $r = t - r/a$, и переходя от поверхностного интеграла к объемному, окончательно получим

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{r \leq at} \frac{f(\xi, \eta, \zeta, t - r/a)}{r} d\xi d\eta d\zeta,$$

где $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$.

В заключение рассмотрим еще одну задачу на применение преобразования Фурье.

Пример 5 [4, гл. IV, № 108]. Решить краевую задачу (о колебаниях неограниченной пластины)

$$\begin{cases} u_{tt} + b^2 \Delta^2 u = 0, & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = f(x, y), \quad u_t|_{t=0} = 0, & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Применим преобразование Фурье по пространственным переменным к уравнению и начальным условиям. Предварительно найдем

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 u e^{-i(\lambda x + \mu y)} dx dy = \iint_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right) e^{-i(\lambda x + \mu y)} dx dy.$$

Интегрируя по частям (с учетом обращения в нуль внеинтегральных членов), получим

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 u e^{-i(\lambda x + \mu y)} dx dy + (\lambda^2 + \mu^2)^2 \tilde{u}(\lambda, \mu, t),$$

где, как обычно,

$$\tilde{u}(\lambda, \mu, t) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, t) e^{-i(\lambda x + \mu y)} dx dy.$$

Далее,

$$\tilde{f}(\lambda, \mu) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-i(\lambda x + \mu y)} dx dy.$$

Получим задачу Коши

$$\begin{cases} \bar{u}_{tt}(\lambda, \mu, t) + b^2(\lambda^2 + \mu^2)^2 \bar{u}(\lambda, \mu, t) = 0, & t > 0, \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{f}(\lambda, \mu), & \bar{u}_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Решение ее есть функция

$$\bar{u}(\lambda, \mu, t) = \bar{f}(\lambda, \mu) \cos(b(\lambda^2 + \mu^2)t).$$

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье, получим

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta, \eta) \cos(bt(\lambda^2 + \mu^2)) \times \\ &\quad \times e^{i[\lambda(x-\zeta) + \mu(y-\eta)]} d\zeta d\eta d\lambda d\mu = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta, \eta) \cos \lambda(x - \zeta) \cos \mu(y - \eta) \times \\ &\quad \times \cos(bt(\lambda^2 + \mu^2)) d\zeta d\eta d\lambda d\mu \end{aligned}$$

(здесь мы воспользовались формулой $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ и учли, что интегралы, содержащие $\sin \lambda(x - \zeta)$ и $\sin \mu(y - \eta)$, равны нулю).

Выполним в полученном четырехкратном интеграле интегрирование по λ и μ , применяя формулы

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(p\sigma^2) \cos(q\sigma) d\sigma &= \sqrt{\frac{\pi}{p}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{q^2}{4p}\right), \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(p\sigma^2) \cos(q\sigma) d\sigma &= \sqrt{\frac{\pi}{p}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{q^2}{4p}\right), \end{aligned} \quad p > 0.$$

Имеем

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda(x - \zeta) \cos \mu(y - \eta) \cos(bt(\lambda^2 + \mu^2)) d\lambda d\mu = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda(x - \zeta) \cos \mu(y - \eta) \times \\ &\quad \times [\cos(bt\lambda^2) \cos(bt\mu^2) - \sin(bt\lambda^2) \sin(bt\mu^2)] d\lambda d\mu = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda(x - \zeta) \cos(bt\lambda^2) d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \mu(y - \eta) \cos(bt\mu^2) d\mu - \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(bt\lambda^2) \cos \lambda(x - \zeta) d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(bt\mu^2) \cos \mu(y - \eta) d\mu = \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{bt}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{(x - \zeta)^2}{4bt}\right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{bt}} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{(y - \eta)^2}{4bt}\right) - \\
&\quad - \sqrt{\frac{\pi}{bt}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{(x - \zeta)^2}{4bt}\right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{bt}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{(y - \eta)^2}{4bt}\right) = \\
&= \frac{\pi}{bt} \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha^2\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta^2\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha^2\right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta^2\right) \right] = \\
&= \frac{\pi}{bt} \sin(\alpha^2 + \beta^2),
\end{aligned}$$

где обозначено $\alpha = \frac{\zeta - x}{2\sqrt{bt}}$, $\beta = \frac{\eta - y}{2\sqrt{bt}}$.

Переходя в интеграле

$$\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta, \eta) \frac{\pi}{bt} \sin(\alpha^2 + \beta^2) d\zeta d\eta$$

к переменным α и β , окончательно получим

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x + 2\alpha\sqrt{bt}, y + 2\beta\sqrt{bt}) \sin(\alpha^2 + \beta^2) d\alpha d\beta.$$

§ 2.4. Метод интегрального преобразования Лапласа

Мы уже видели, как применяется преобразование Фурье для решения некоторых задач. В этом параграфе мы познакомимся с преобразованием Лапласа. Пусть функция $f(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- $f(t)$ кусочно непрерывна на отрезке $[0, a]$ для любого $a > 0$;
- $f(t) = 0$ при $t < 0$;
- существуют числа $M > 0$ и $s_0 \geq 0$ такие, что $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$.

Тогда преобразованием Лапласа функции $f(t)$ называется функция

$$L[f(t)] \equiv F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt,$$

где $p = s + i\sigma$; обозначение: $f(t) \doteq F(p)$.

Очевидно, преобразование Лапласа существует, если $s > s_0$ (при этом несобственный интеграл сходится).

Основными свойствами преобразования Лапласа являются:

1) линейность, т. е. $L[C_1 f_1 + C_2 f_2] = C_1 L[f_1] + C_2 L[f_2]$, где C_1 и C_2 — постоянные;

2) преобразование частных производных по такому правилу: если $u = u(x, t)$ и преобразование Лапласа проводится по переменной t ($t \geq 0$), то, обозначив

$$L[u(x, t)] \equiv U(x, p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} u(x, t) dt,$$

можно (интегрированием по частям) установить соотношение

$$L\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = pU(x, p) - u(x, 0),$$

$$L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = p^2 U(x, p) - pu(x, 0) - \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0),$$

$$L\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right] = \frac{\partial U}{\partial x}(x, p), \quad L\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x, p)$$

при определенных условиях на функцию $u(x, t)$ и ее частные производные.

Имеется много других свойств преобразования Лапласа, на которых мы не останавливаемся.

Мы видим, что преобразование Лапласа заменяет операцию дифференцирования по временной переменной t умножением. Этот важный факт используется при решении дифференциальных уравнений с частными производными.

Блок-схема применения преобразования Лапласа к решению краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными вполне аналогична блок-схеме применения преобразования Фурье (рис. 2.10).

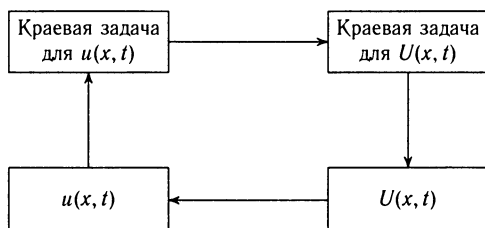


Рис. 2.10. Блок-схема преобразования Лапласа

Таблица 2.2. Преобразование Лапласа некоторых функций

Функция $f(t)$	Функции $F(p)=L[f(t)]$	Функция $f(t)$	Функции $F(p)=L[f(t)]$
Функция Хевисайда $\eta(t)$	$\frac{1}{p}, \operatorname{Re} p > 0$	$\operatorname{ch}(at)$	$\frac{p}{p^2 - a^2}, \operatorname{Re} p > a $
t^n ($n > 0$ целое)	$\frac{n!}{p^{n+1}}, \operatorname{Re} p > 0$	$e^{at} \sin(bt)$	$\frac{b}{(p-a)^2 + b^2}, \operatorname{Re} p > a$
e^{at}	$\frac{1}{p-a}, \operatorname{Re} p > a$	$e^{at} \cos(bt)$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + b^2}, \operatorname{Re} p > a$
$\sin(at)$	$\frac{a}{p^2 + a^2}, \operatorname{Re} p > 0$	$1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a/2\sqrt{x}} e^{-x^2} dx$	$\frac{1}{p} e^{-a\sqrt{p}}, a > 0$
$\cos(at)$	$\frac{p}{p^2 + a^2}, \operatorname{Re} p > 0$	$\frac{\sin(at)}{t}$	$\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{p}{a}, \operatorname{Re} p > 0$
$\operatorname{sh}(at)$	$\frac{a}{p^2 - a^2}, \operatorname{Re} p > a $	$J_0(\alpha t)$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + p^2}}$

В табл. 2.2 приведены преобразования Лапласа некоторых функций.

Рассмотрим теперь, как применяется преобразование Лапласа к решению гиперболических задач.

Пример 1 [3, № 838]. Начиная с момента $t = 0$ к концу $x = 0$ полубесконечной изолированной электрической линии подключена э. д. с. $E(t)$. Найти напряжение $u(x, t)$ для $t > 0$ в линии, если начальное напряжение и начальный ток в ней равны нулю, для случаев, когда:

- линия без потерь ($R = G = 0$);
- линия без искажения ($RC = LG$).

Решение. Математическая постановка задачи для случая а) имеет вид

$$а) \quad \begin{cases} u_{tt} = \frac{1}{LC} u_{xx}, & 0 < x, \quad t < +\infty, \\ u(0, t) = E(t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x < +\infty \end{cases}$$

(здесь L и C — соответственно индуктивность и емкость единицы длины провода).

Применим преобразование Лапласа по временной переменной t к левой и правой частям дифференциального уравнения с частными производными. Тогда, учитывая, что

$$u(x, t) \doteq U(x, p), \quad u_t(x, p) \doteq pU(x, p),$$

$$u_{tt}(x, t) \doteq p^2 U(x, p), \quad u_{xx}(x, t) \doteq U_{xx}(x, p), \quad E(t) \doteq F(p),$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$p^2 U(x, p) - \frac{1}{LC} U_{xx}(x, p) = 0, \quad 0 < x < +\infty,$$

с граничными условиями

$$U(0, p) = F(p), \quad U(+\infty, p) = 0$$

(второе граничное условие следует из физических соображений).

Итак, имеем граничную задачу

$$\begin{cases} U_{xx}(x, p) - p^2 LC U(x, p) = 0, & 0 < x < +\infty, \\ U(0, p) = F(p), & U(+\infty, p) = 0. \end{cases}$$

Общее решение нашего уравнения есть

$$U(x, p) = C_1 e^{p\sqrt{LC}x} + C_2 e^{-p\sqrt{LC}x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Сразу отметим, что нужно полагать $C_1 = 0$ (иначе $U(x, p) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow +\infty$). Поэтому

$$U(x, p) = C_2 e^{-p\sqrt{LC}x}.$$

Полагая здесь $x = 0$, находим $U(0, p) = C_2$. По условию $U(0, p) = F(p)$. Значит $C_2 = F(p)$. Следовательно,

$$U(x, p) = F(p) e^{-p\sqrt{LC}x}.$$

Отсюда, возвращаясь к оригиналу, получим

$$u(x, t) = \begin{cases} E(t - x\sqrt{LC}), & \text{если } t > x\sqrt{LC}, \\ 0, & \text{если } t < x\sqrt{LC}. \end{cases}$$

Рассмотрим случай б). Математическая постановка задачи имеет вид

$$\text{б) } \begin{cases} u_{xx} = a^2 u_{tt} + 2b u_t + c^2 u, & 0 < x, \quad t < +\infty, \\ u(0, t) = E(t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x < +\infty, \end{cases}$$

где $a^2 = LC$, $b = \frac{1}{2}(CR + LG)$, $c^2 = RG$ (здесь R и G — сопротивление и проводимость единицы длины провода).

Применяя преобразование Лапласа, получим граничную задачу

$$\begin{cases} U_{xx}(x, p) = a^2 p^2 U(x, p) + 2bp U(x, p) + c^2 U(x, p), & 0 < x < +\infty, \\ U(0, p) = F(p), & U(+\infty, p) = 0. \end{cases}$$

Общее решение уравнения имеет вид

$$U(x, p) = C_1 e^{a\left(p + \frac{b}{a^2}\right)x} + C_2 e^{-a\left(p + \frac{b}{a^2}\right)x}.$$

Из граничного условия $U(+\infty, p) = 0$ следует, что $C_1 = 0$. Значит,

$$U(x, p) = F(p) e^{-a\left(p + \frac{b}{a^2}\right)x} = F(p) e^{-\frac{b}{a}x} e^{-apx}.$$

Отсюда получаем, что напряжение в проводе есть

$$u(x, t) = \begin{cases} e^{-\frac{b}{a}x} E(t - ax), & \text{если } t > ax, \\ 0, & \text{если } t < ax. \end{cases}$$

Пример 2 [4, № 839]. Решить краевую задачу на полуограниченной прямой

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x, \quad t < +\infty, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x < +\infty, \\ u_x(0, t) - hu(0, t) = \varphi(t), & t \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Снова применяем к обеим частям данного уравнения и к граничным и начальным условиям преобразование Лапласа по переменной t . Получаем граничную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} U_{xx}(x, p) - \frac{p^2}{a^2} U(x, p) = 0, & 0 < x < +\infty, \\ U_x(0, p) - hU(0, p) = \Phi(p), \end{cases}$$

где $\Phi(p) \doteq \varphi(t)$.

По предыдущему $U(x, p) = Ce^{-\frac{p}{a}x}$, где C — произвольная постоянная.

В силу граничного условия пишем $-\frac{C}{a}p - hC = \Phi(p)$, откуда $C = -\frac{a\Phi(p)}{ah + p}$. Значит,

$$U(x, p) = -\frac{a\Phi(p)}{ah + p} e^{-\frac{p}{a}x}.$$

Следовательно, оригинал имеет вид

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x > at, \\ -ae^{h(x-at)} \int_0^{t-x/a} e^{h\tau} \varphi(\tau) d\tau, & \text{если } x < at. \end{cases}$$

§ 2.5. Метод интегрального преобразования Ханкеля

Пусть задана функция $f(\rho)$ ($0 < \rho < +\infty$). Если она удовлетворяет определенным условиям, то для нее можно определить преобразование Ханкеля (нулевого порядка) по формуле

$$\hat{f}(\lambda) = \int_0^{+\infty} \rho f(\rho) J_0(\lambda \rho) d\rho,$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода индекса нуль. При этом функция $f(\rho)$ восстанавливается с помощью обратного преобразования Ханкеля по формуле

$$f(\rho) = \int_0^{+\infty} \lambda \hat{f}(\lambda) J_0(\lambda \rho) d\lambda.$$

Функцию $\hat{f}(\lambda)$ часто называют *образом Фурье–Бесселя–Ханкеля*, а функцию $f(\rho)$ *оригиналом*.

Преобразование Ханкеля целесообразно применять, очевидно, в случае, когда оператор Лапласа Δu (или оператор $\Delta^2 u$) записан в полярных координатах и полярный радиус ρ изменяется от 0 до $+\infty$. Рассмотрим соответствующие примеры.

Пример 1 [4, гл. VI, № 109]. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right), & 0 < \rho, \quad t < +\infty, \\ u(\rho, 0) = \frac{A}{\sqrt{1 + \rho^2/b^2}}, \quad u_t(\rho, 0) = 0, & 0 \leq \rho < +\infty \end{cases}$$

(здесь a^2 , A , b^2 — некоторые константы).

Решение. Для вывода уравнения для образа $\hat{u}(\rho, t)$ применим преобразование Ханкеля (нулевого порядка) к исходному уравнению по переменной ρ . Имеем

$$\hat{u}(\lambda, t) = \int_0^{+\infty} \rho u(\rho, t) J_0(\lambda \rho) d\rho,$$

причем

$$u(\rho, t) = \int_0^{+\infty} \lambda \hat{u}(\lambda, t) J_0(\lambda \rho) d\lambda.$$

Для левой части этого уравнения имеем

$$u_{tt}(\rho, t) \rightarrow \hat{u}_{tt}(\lambda, t).$$

Для правой части уравнения имеем (применяя формулу интегрирования по частям)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \rho J_0(\lambda \rho) d\rho &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) J_0(\lambda \rho) d\rho = \\
 &= \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} J_0(\lambda \rho) \right) \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \lambda \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} J_0'(\lambda \rho) d\rho = -\lambda \int_0^{+\infty} \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} J_0'(\lambda \rho) d\rho = \\
 &= -\lambda \left(u \rho J_0'(\lambda \rho) \right) \Big|_0^{+\infty} + \lambda \int_0^{+\infty} u \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho J_0'(\lambda \rho)) d\rho = \\
 &= \lambda \int_0^{+\infty} (J_0'(\lambda \rho) + J_0''(\lambda \rho) \rho \lambda) u d\rho = \int_0^{+\infty} (\lambda^2 \rho J_0''(\lambda \rho) + \lambda J_0'(\lambda \rho)) u d\rho,
 \end{aligned}$$

поскольку внеинтегральные члены исчезают в силу условий $u(\infty, t) = u_\rho(\infty, t) = 0$.

По определению для функции Бесселя $J_0(x)$ имеем равенство

$$\lambda^2 J_0''(\lambda \rho) + \frac{\lambda}{\rho} J_0'(\lambda \rho) + \lambda^2 J_0(\lambda \rho) = 0,$$

откуда

$$\lambda^2 \rho J_0''(\lambda \rho) + \lambda J_0'(\lambda \rho) = -\rho \lambda^2 J_0(\lambda \rho).$$

Значит,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \rho J_0(\lambda \rho) d\rho = -\lambda^2 \int_0^{+\infty} \rho u J_0(\lambda \rho) d\rho = -\lambda^2 \hat{u}(\lambda, t).$$

Поэтому данное уравнение с частными производными переходит в уравнение вида

$$\hat{u}_{tt}(\lambda, t) + a^2 \lambda^2 \hat{u}(\lambda, t) = 0, \quad t > 0.$$

Далее, найдем образ Фурье–Бесселя–Ханкеля функции $u(\rho, 0) = \frac{A}{\sqrt{1 + \rho^2/b^2}}$. Имеем

$$\hat{u}(\lambda, 0) = \int_0^{+\infty} \frac{\rho A}{\sqrt{1 + \rho^2/b^2}} J_0(\lambda \rho) d\rho.$$

Известно, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-\omega \lambda} J_0(\rho \lambda) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \rho^2}},$$

откуда

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\omega\lambda}}{\lambda} \lambda J_0(\rho\lambda) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \rho^2}}.$$

Отсюда по формуле обращения

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + \rho^2}} \rho J_0(\lambda\rho) d\rho = \frac{e^{-\omega\lambda}}{\lambda},$$

или

$$\int_0^{+\infty} \frac{Ab}{\sqrt{b^2 + \rho^2}} \rho J_0(\lambda\rho) d\rho = Ab \frac{e^{-b\lambda}}{\lambda},$$

т. е. мы получили такую задачу Коши:

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt}(\lambda, t) + a^2 \lambda^2 \hat{u}(\lambda, t) = 0, & t > 0, \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \frac{Ab}{\lambda} e^{-b\lambda}, & \hat{u}_t(\lambda, 0) = 0. \end{cases}$$

Находим решение этой задачи:

$$\hat{u}(\lambda, t) = \frac{Ab}{\lambda} e^{-b\lambda} \cos(a\lambda t).$$

Решение же исходной задачи получаем с помощью обратного преобразования Ханкеля:

$$u(\rho, t) = \int_0^{+\infty} \lambda \hat{u}(\lambda, t) J_0(\lambda\rho) d\lambda = Ab \int_0^{+\infty} e^{-b\lambda} \cos(a\lambda t) J_0(\lambda\rho) d\lambda;$$

поскольку $\cos(a\lambda t) = \operatorname{Re} e^{-ia\lambda t}$, получим

$$u(\rho, t) = Ab \cdot \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(b+iat)} J_0(\lambda\rho) d\lambda = Ab \cdot \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (b+iat)^2}}.$$

Находим

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (b+iat)^2}} = \operatorname{Re} \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\rho^2 - a^2 t^2}{b^2} + i \frac{2at}{b}}} = \frac{1}{b} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{\alpha + i\beta}},$$

где обозначено $\alpha = 1 + \frac{\rho^2 - a^2 t^2}{b^2}$, $\beta = \frac{2at}{b}$. Имеем

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{\alpha + i\beta}} = \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)}$$

(берем первую ветвь $\sqrt{\alpha + i\beta}$, соответствующую $k = 0$ в выражении $\sqrt{\alpha + i\beta} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{2}}$, где $k = 0, 1$). Очевидно,

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{\alpha + i\beta}} = \frac{\cos \varphi/2}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

причем

$$\operatorname{tg} \varphi = \beta/\alpha,$$

$$\cos \varphi/2 = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \cos \varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}}.$$

Значит,

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{\alpha + i\beta}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Таким образом, решение есть

$$u(\rho, t) = \frac{A}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{\rho^2 - a^2 t^2}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{2at}{b}\right)^2}} + \frac{1 + \frac{\rho^2 - a^2 t^2}{b^2}}{\left(1 + \frac{\rho^2 - a^2 t^2}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{2at}{b}\right)^2} \right]^{1/2}.$$

Пример 2 [4, гл. VI, № 110]. Найти радиально симметричные поперечные колебания неограниченной пластинки, считая заданным (и зависящим только от радиуса) ее начальное положение (начальную скорость положить равной нулю).

Решение. Известно, что поперечные колебания неограниченной пластинки описываются уравнением

$$u_{tt} + b^2 \Delta^2 u = 0$$

с присоединением к нему начальных условий. В данном случае удобно перейти к полярной системе координат и записать математическую постановку задачи в виде

$$\begin{cases} u_{tt} + b^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2 u = 0, & 0 < \rho < +\infty, \quad t > 0, \\ u(\rho, 0) = f(\rho), \quad u_t(\rho, 0) = 0, & 0 \leq \rho < +\infty, \\ u(\infty, t) = u_\rho(\infty, t) = u_{\rho\rho}(\infty, t) = u_{\rho\rho\rho}(\infty, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Вычислим преобразование Ханкеля функции

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \right] \right].$$

Имеем (учитывая обращение в нуль внеинтегральных членов)

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \right] \right] \rho J_0(\lambda \rho) d\rho = \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \right] \right] J_0(\lambda \rho) d\rho = \\
 &= - \int_0^{+\infty} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \right) \frac{\partial}{\partial \rho} (J_0(\lambda \rho)) d\rho = \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (J_0(\lambda \rho)) \right) d\rho = \\
 &= - \int_0^{+\infty} \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (J_0(\lambda \rho)) \right) \right) d\rho = \\
 &= \int_0^{+\infty} u \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (J_0(\lambda \rho)) \right) \right) \right) d\rho.
 \end{aligned}$$

Однако

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} (J_0(\lambda \rho)) \right) \right) \right) = \\
 &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\lambda \rho J_0'(\lambda \rho)) \right) \right) = \lambda \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} (J_0'(\lambda \rho) + \lambda \rho J_0''(\lambda \rho)) \right) \right) = \\
 &= \lambda \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} J_0'(\lambda \rho) + \lambda J_0''(\lambda \rho) \right) \right).
 \end{aligned}$$

Но из уравнения Бесселя

$$\lambda^2 \rho^2 J_0''(\lambda \rho) + \lambda \rho J_0'(\lambda \rho) + \lambda^2 \rho^2 J_0(\lambda \rho) = 0$$

следует

$$\frac{1}{\rho} J_0'(\lambda \rho) + \lambda J_0''(\lambda \rho) = -\lambda J_0(\lambda \rho).$$

Значит,

$$\begin{aligned}
 & \lambda \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} J_0'(\lambda \rho) + \lambda J_0''(\lambda \rho) \right) \right) = \\
 &= -\lambda^3 \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho J_0'(\lambda \rho)) = -\lambda^3 [J_0'(\lambda \rho) + \lambda \rho J_0''(\lambda \rho)] = \lambda^4 \rho J_0(\lambda \rho).
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \right)^2 u \rho J_0(\lambda \rho) d\rho = \lambda^4 \int_0^{+\infty} u(\rho, t) \rho J_0(\lambda \rho) d\rho = \lambda^4 \hat{u}(\lambda, t),$$

и наша исходная задача трансформируется в следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt}(\lambda, t) + b^2 \lambda^4 \hat{u}(\lambda, t) = 0, & t > 0, \\ \hat{u}(\lambda, 0) = \hat{f}(\lambda), & \hat{u}_t(\lambda, 0) = 0, \end{cases}$$

где $\hat{f} = \int_0^{+\infty} f(\rho) \rho J_0(\lambda \rho) d\rho$.

Очевидно, ее решение есть функция

$$\hat{u}(\lambda, t) = \hat{f}(\lambda) \cos(b \lambda^2 t).$$

Решение исходной задачи восстанавливается по формуле обращения:

$$\begin{aligned} u(\rho, t) &= \int_0^{+\infty} \lambda \hat{f}(\lambda) \cos(b \lambda^2 t) J_0(\lambda \rho) d\lambda = \\ &= \int_0^{+\infty} \lambda \cos(b \lambda^2 t) J_0(\lambda \rho) \left(\int_0^{+\infty} \mu f(\mu) J_0(\lambda \mu) d\mu \right) d\lambda = \\ &= \int_0^{+\infty} \mu f(\mu) \left(\int_0^{+\infty} \lambda \cos(b \lambda^2 t) J_0(\lambda \rho) J_0(\lambda \mu) d\lambda \right) d\mu. \end{aligned}$$

Последний интеграл преобразуем следующим образом

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \lambda \cos(b \lambda^2 t) J_0(\lambda \rho) J_0(\lambda \mu) d\lambda &= \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \lambda e^{ibt \lambda^2} J_0(\lambda \rho) J_0(\lambda \mu) d\lambda = \\ &= \operatorname{Re} \frac{1}{-2ibt} e^{\frac{\rho^2 + \mu^2}{4ibt}} J_0\left(\frac{\rho \mu}{-2ibt}\right) = \operatorname{Re} \frac{1}{2bt} \left(i \cos \frac{\rho^2 + \mu^2}{4bt} + \sin \frac{\rho^2 + \mu^2}{4bt} \right) I_0\left(\frac{\rho \mu}{2bt}\right) = \\ &= \frac{1}{2bt} \sin \frac{\rho^2 + \mu^2}{4bt} I_0\left(\frac{\rho \mu}{2bt}\right). \end{aligned}$$

Итак, решение имеет вид

$$u(\rho, t) = \frac{1}{2bt} \int_0^{+\infty} \mu f(\mu) \sin \frac{\rho^2 + \mu^2}{4bt} I_0\left(\frac{\rho \mu}{2bt}\right) d\mu.$$

§ 2.6. Метод стоячих волн. Колебания ограниченной струны

Мы знаем, как решать волновое уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ на всей прямой $-\infty < x < +\infty$ (задача Коши). Формула Даламбера представляет решение в виде суммы двух бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Если же рассматривать это уравнение на ограниченном промежутке $0 < x < l$, то бегущих волн уже не будет, так как они будут взаимодействовать с границами. Вместо них возникают другие волны, которые называются *стоячими волнами*. Посмотрим, например, что случится, если струну, закрепленную в точках $x = 0$ и $x = l$, привести в движение. Для ответа на этот вопрос нам необходимо решить следующую смешанную гиперболическую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, & 0 < t < +\infty, \\ u(x, 0) = f(x), & u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq l, \\ u(0, t) = 0, & u(l, t) = 0, & 0 \leq t < +\infty \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.9) \\ (2.10) \\ (2.11) \end{matrix}$$

(где (2.9) — уравнение с частными производными, (2.10) — начальные условия, (2.11) — граничные условия). Оказывается, что в этом случае бегущие волны отражаются от границ таким образом, что результирующие колебания становятся не бегущими, а сохраняющими форму в одном положении, т. е. превращаются в стоячие волны.

Например, решение $u(x, t) = \sin x \sin(at)$ уравнения $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ является стоячей волной.

Задачу (2.9)–(2.11) будем решать методом Фурье (методом разделения переменных). Сущность метода с достаточной полнотой изложена в ряде учебников (например, [1, 5, 22]). Мы напомним лишь идею метода. В предположении, что решение $u(x, t) = X(x)T(t)$ удовлетворяет только граничным условиям (2.11) от уравнения с частными производными $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ переходят к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + \lambda a^2 T = 0,$$

где $\lambda > 0$ — постоянная разделения. Комбинируя решения этих уравнений, находим частные решения задачи (2.9)–(2.11) в виде $X_n(x)T_n(t)$, где $n = 1, 2, \dots$

По принципу суперпозиции решением задачи (2.9)–(2.11) является ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) T_n(t) \quad (C_n \text{ — произвольные постоянные}),$$

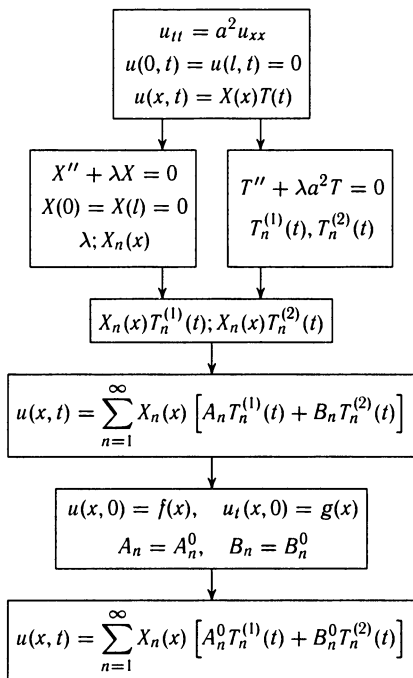


Рис. 2.11. Блок-схема разделения переменных

дающий «общее» решение задачи (2.9)–(2.11). Используя начальные условия, определяем коэффициенты C_n . Сказанное иллюстрируется блок-схемой на рис. 2.11.

Таким образом, решением задачи (2.9)–(2.11) является ряд

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \quad (2.12)$$

Полагая вначале здесь $t = 0$, получим

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Но $u(x, 0) = f(x)$. Поэтому имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Мы получили разложение в ряд Фурье по синусам функции $f(x)$ в интер-

вале $(0, l)$. Как известно, коэффициенты a_n вычисляются по формулам

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx.$$

Дифференцируя теперь ряд (2.12) по переменной t , получим

$$u_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-a_n \frac{n\pi a}{l} \sin\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) + b_n \frac{n\pi a}{l} \cos\left(\frac{n\pi a}{l}t\right) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right). \quad (2.13)$$

Полагая в (2.13) $t = 0$, будем иметь

$$u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Но $u_t(x, 0) = g(x)$. Поэтому

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi a}{l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

Отсюда

$$b_n \frac{n\pi a}{l} = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx,$$

т. е.

$$b_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx.$$

Итак, коэффициенты a_n и b_n определены из начальных условий.

Замечание 1. Отметим, что при решении нестационарной задачи методом разделения переменных существенна однородность граничных условий. Другими словами, если граничные условия ненулевые, то задачу надо предварительно свести к случаю однородных (нулевых) граничных условий.

Замечание 2. Если мы желаем решить неоднородное уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$ с однородными граничными и начальными условиями, то сначала нужно найти собственные функции соответствующей однородной задачи ($u_{tt} = a^2 u_{xx}$ плюс однородные граничные условия; например, в данном случае это будут собственные функции $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$, $n = 1, 2, \dots$), а затем искать решение предложенной задачи в виде $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right)$, где функции $u_n(t)$ подлежат определению. Такой способ решения называется *методом разложения по собственным функциям*.

Замечание 3. Пусть требуется решить следующую гиперболическую задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, & 0 \leq t < +\infty, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

На основании принципа суперпозиции решение этой задачи представляется в виде суммы решений двух гиперболических задач:

$$\text{I)} \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t), \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0; \end{cases}$$

$$\text{II)} \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x). \end{cases}$$

§ 2.7. Некоторые примеры смешанных задач для уравнения колебаний струны

Пример 1. Смешанная задача

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(x, 0) = \sin(3x), \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t < +\infty, \end{cases}$$

имеет решение $u(x, t) = \sin(3x) \cos(3at)$, что устанавливается непосредственной проверкой.

Пример 2. Рассмотрим задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + t \sin x, & 0 < x < \pi, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, & 0 \leq t < +\infty. \end{cases}$$

Ее решение ищем в виде $u(x, t) = \sin x \cdot v(t)$, где $v(t)$ — функция, подлежащая определению. Подставим функцию $u(x, t) = \sin x \cdot v(t)$ в наше неоднородное уравнение. Получим уравнение

$$v'' \sin x = -a^2 \sin x \cdot v + t \sin x,$$

откуда следует, что

$$v'' + a^2 v = t.$$

Из начальных условий вытекает, что $v(0) = v'(0) = 0$. Таким образом, функция $v(t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} v'' + a^2 v = t, & 0 \leq t < +\infty, \\ v(0) = v'(0) = 0. \end{cases}$$

Общим решением обыкновенного дифференциального уравнения

$$v'' + a^2 v = t$$

будет функция $v(t) = C_1 \cos(at) + C_2 \sin(at) + t/a^2$. Из начальных условий $v(0) = v'(0) = 0$ легко находим, что $C_1 = 0$, $C_2 = -\frac{1}{a^3}$. Следовательно,

$$v(t) = \frac{1}{a^2} \left[t - \frac{1}{a} \sin(at) \right].$$

Искомое решение смешанной задачи есть

$$u(x, t) = \frac{\sin x}{a^2} \left[t - \frac{1}{a} \sin(at) \right].$$

Пример 3 [6, гл. VI, № 20.14(5)]. Решить следующую смешанную задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u, & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 2t, \quad u|_{x=2} = 0, & t \geq 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Решение. Функцию $u(x, t)$ будем искать в виде суммы $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, где $w(x, t) = t(2-x)$ — функция, удовлетворяющая заданным граничным условиям. Тогда функция $v(x, t) = u(x, t) - w(x, t)$ будет удовлетворять нулевым граничным условиям $v(0, t) = v(2, t) = 0$, уравнению $v_{tt} = v_{xx} + v + t(2-x)$ и начальным условиям

$$v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = x - 2.$$

Итак, наша цель состоит в нахождении функции $v(x, t)$, являющейся решением задачи

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} + v + t(2-x), & 0 < x < 2, \quad t > 0, \\ v(0, t) = v(2, t) = 0, & t \geq 0, \\ v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = x - 2, & 0 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Для этого предварительно решим вспомогательную задачу: найти решение уравнения $v_{tt} = v_{xx} + v$, не равное тождественно нулю, удовлетворяющее однородным граничным условиям $v(0, t) = v(2, t) = 0$ и представимое

в виде произведения $v(x, t) = X(x)T(t)$. Имеем уравнение

$$T''X = X''T + XT,$$

или, после деления обеих его частей на XT ,

$$\frac{T''}{T} - 1 = \frac{X''}{X}.$$

Левая часть этого равенства зависит только от t , а правая — только от x . Поскольку x и t изменяются независимо друг от друга, то

$$\frac{T''}{T} - 1 = \frac{X''}{X} = -\lambda,$$

где λ — постоянная разделения. Отсюда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (2.14)$$

$$T'' + (\lambda - 1)T = 0. \quad (2.15)$$

Из граничных условий $v(0, t) = v(2, t) = 0$ и равенства $v(x, t) = X(x)T(t)$ следует $X(0)T(t) = 0$, $X(2)T(t) = 0$, откуда $X(0) = X(2) = 0$.

Мы пришли к задаче Штурма—Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < 2, \\ X(0) = X(2) = 0. \end{cases}$$

Отсюда собственные значения и собственные функции задачи есть $\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2$ и $X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$, $n = 1, 2, \dots$. Из уравнения (2.15) следует, что

$$T_n(t) = A_n \cos(\mu_n t) + B_n \sin(\mu_n t),$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные, $\mu_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 - 1}$, $n = 1, 2, \dots$

Ясно, что функции

$$v_n(x, t) = [A_n \cos(\mu_n t) + B_n \sin(\mu_n t)] \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

являются частными решениями уравнения $v_{tt} = v_{xx} + v$, удовлетворяющими нулевым граничным условиям.

Теперь решим две следующие задачи:

$$I) \quad \begin{cases} v_{tt} = v_{xx} + v, & 0 < x < 2, \quad 0 < t < +\infty, \\ v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = x - 2, & 0 \leq x \leq 2, \\ v(0, t) = 0, \quad v(2, t) = 0, & 0 \leq t < +\infty; \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\text{II) } \begin{cases} v_{tt} = v_{xx} + v + t(2-x), & 0 < x < 2, \quad 0 < t < +\infty, \\ v(x, 0) = 0, \quad v_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq 2, \\ v(0, t) = 0, \quad v(2, t) = 0, & 0 \leq t < +\infty. \end{cases} \quad (2.17)$$

Решение задачи (2.16) дается рядом

$$P(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(\mu_n t) + B_n \sin(\mu_n t)] \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right),$$

где коэффициенты A_n и B_n определяются по формулам

$$A_n = \int_0^2 v(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = 0,$$

$$B_n = \frac{1}{\mu_n} \int_0^2 v_t(x, 0) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = \frac{1}{\mu_n} \int_0^2 (x-2) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) dx = -\frac{4}{n\pi\mu_n}.$$

Значит,

$$P(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{n\pi\mu_n}\right) \sin(\mu_n t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right).$$

Решение задачи (2.17) ищем в виде

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$$

(метод разложения по собственным функциям). Подставляя функцию $Q(x, t)$ в уравнение $v_{tt} = v_{xx} + v + t(2-x)$ и учитывая, что $t(2-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4t}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right)$, найдем

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} q_n''(t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 q_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4t}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right), \end{aligned}$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right) \left[q_n'' + \left(\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2 - 1\right) q_n - \frac{4t}{n\pi} \right] = 0.$$

Отсюда получаем задачу Коши для определения функции $q_n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} q_n'' + \mu_n^2 q_n = \frac{4t}{n\pi}, & 0 \leq t < +\infty, \\ q_n(0) = q_n'(0) = 0. \end{cases}$$

С подобной задачей мы уже сталкивались. Поэтому сразу выписываем ее решение:

$$q_n(t) = -\frac{4}{n\pi\mu_n^3} \sin(\mu_n t) + \frac{4t}{n\pi\mu_n^2}.$$

Следовательно, решение задачи (2.17) дается рядом

$$Q(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{4}{n\pi\mu_n^3} \sin(\mu_n t) + \frac{4t}{n\pi\mu_n^2} \right] \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right).$$

На основе принципа суперпозиции можно записать $v(x, t) = P(x, t) + Q(x, t)$, или

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4t}{n\pi\mu_n^2} - \frac{n\pi}{\mu_n^3} \sin(\mu_n t) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right).$$

Искомое решение есть $u(x, t) = v(x, t) + t(2-x)$, т. е.

$$u(x, t) = t(2-x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{4t}{n\pi\mu_n^2} - \frac{n\pi}{\mu_n^3} \sin(\mu_n t) \right] \sin\left(\frac{n\pi}{2}x\right).$$

Покажем, что любая смешанная задача для волнового уравнения имеет единственное решение. Для этого проверим одно утверждение.

Утверждение. Пусть функция $u(x, t)$ дважды непрерывно дифференцируема в замкнутой области $\Omega: 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T$, и является решением смешанной задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < l, \quad 0 < t < T, \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & T \geq t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq l, \end{cases}$$

T — произвольно фиксированное положительное число. Тогда $u(x, t) \equiv 0$ в области Ω .

Доказательство. Умножим уравнение $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ на u_t и проинтегрируем по области Ω . Получим

$$\int_0^t \int_0^l u_{tt} u_t dx dt = a^2 \int_0^t \int_0^l u_{xx} u_t dx dt.$$

Заметим, что $u_{tt}u_t = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2)$ и поэтому

$$\begin{aligned}\int_0^t \int_0^l u_{tt}u_t dx dt &= \int_0^t dx \int_0^l \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u_t^2) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l [u_t^2(x, t) - u_t^2(x, 0)] dx = \frac{1}{2} \int_0^l u_t^2 dx.\end{aligned}$$

Далее, используя интегрирование по частям, имеем

$$\begin{aligned}\int_0^l u_{xx}u_t dx &= (u_x(x, t)u_t(x, t))\Big|_0^l - \int_0^l u_x u_{tx} dx = \\ &= u_x(l, t)u_t(l, t) - u_x(0, t)u_t(0, t) - \frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t}(u_x^2) dx = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{\partial}{\partial t}(u_x^2) dx,\end{aligned}$$

поскольку $u_t(0, t) = u_t(l, t) = 0$ (это получается дифференцированием по t равенств $u(0, t) = u(l, t) = 0$). Теперь получим

$$\frac{1}{2} \int_0^l u_t^2 dx = -\frac{a^2}{2} \int_0^l dx \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}(u_x^2) dt,$$

или

$$\frac{1}{2} \int_0^l u_t^2 dx + \frac{a^2}{2} \int_0^l u_x^2 dx = 0,$$

ибо $u_x(x, 0) = 0$ (это получается дифференцированием по x равенства $u(x, 0) = 0$).

Интеграл

$$E(t) = \int_0^l \left[\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{a^2}{2}u_x^2 \right] dx$$

называется *интегралом энергии*. Мы видим, что $E(t) = 0$. Далее, из равенства нулю интеграла энергии следует, что $u_t(x, t) = u_x(x, t) \equiv 0$ в области Ω . Таким образом, $du(x, t) \equiv 0$ в области Ω . Теперь из формулы Тейлора получаем, что $u(x, t) \equiv \text{const}$ в области Ω . Но $u(x, t)$ непрерывна в Ω и $u(x, 0) = 0$. Значит, $u(x, t) \equiv 0$ в указанной области. $\square$

§ 2.8. Метод Фурье. Колебания прямоугольной мембраны

Мембраной мы называем пленку, т. е. очень тонкое твердое тело, натянутое равномерно по всем направлениям и не сопротивляющееся изгибу. Оказывается, для описания колебаний мембраны не требуется привлечения специальных функций, а можно обойтись только синусами и косинусами.

Пример 1 [4, гл. VI, № 20.18]. Решить следующую смешанную задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, & 0 < x, y < \pi, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.18)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 3 \sin x \sin(2y), \\ u_t|_{t=0} = 5 \sin(3x) \sin(4y), \end{cases} \quad 0 \leq x, y \leq \pi. \quad (2.19)$$

Решение. Рассмотрим вначале вспомогательную задачу: найти функцию $u(x, y, t)$, удовлетворяющую уравнению (2.18) и граничным условиям (2.19). Эту функцию ищем в виде $u(x, y, t) = v(x, y)T(t)$. Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение (2.18), получим

$$vT'' = Tv_{xx} + Tv_{yy},$$

откуда делением на (vT) обеих частей уравнения будем иметь

$$\frac{T''}{T} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{v}. \quad (2.20)$$

Мы видим, что левая часть уравнения (2.21) зависит только от t , а правая часть — от x и y . Поскольку эти переменные изменяются независимо друг от друга, то равенство (2.21) возможно только в случае, когда

$$\frac{T''}{T} = \frac{v_{xx} + v_{yy}}{v} = -\lambda. \quad (2.22)$$

Из соотношений (2.22) получаем два уравнения:

— уравнение с частными производными

$$v_{xx} + v_{yy} + \lambda v = 0; \quad (2.23)$$

— обыкновенное дифференциальное уравнение

$$T'' + \lambda T = 0. \quad (2.24)$$

Теперь заметим, что из граничных условий (2.19) следует

$$v(0, y) = 0, \quad v(\pi, y) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad v(x, \pi) = 0.$$

Тогда для функции $v(x, y)$ имеем следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} + \lambda v = 0, & 0 < x, y < \pi, \\ v(0, y) = v(\pi, y) = v(x, 0) = v(x, \pi) = 0, & 0 \leq x, y \leq \pi. \end{cases} \quad (2.25)$$

$$(2.26)$$

Эта задача читается так: найти те значения параметра λ , при которых задача (2.25), (2.26) имеет ненулевые (нетривиальные) решения, и найти эти решения.

Задачу (2.25), (2.26) решаем методом разделения переменных, полагая

$$v(x, y) = X(x)Y(y). \quad (2.27)$$

Подставляя (2.27) в уравнение (2.25), найдем

$$YX'' + XY'' + \lambda XY = 0,$$

откуда делением на произведение XY получим

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0,$$

или

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda. \quad (2.28)$$

Левая часть уравнения (2.28) зависит только от x , правая часть — только от y . Значит, это равенство возможно только в случае, когда

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} - \lambda = -\mu, \quad (2.29)$$

где μ — новая постоянная разделения. Из соотношений (2.29) имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$X'' + \mu X = 0, \quad (2.30)$$

$$Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0. \quad (2.31)$$

Из граничных условий (2.26) вытекает, что

$$X(0) = X(\pi) = 0, \quad Y(0) = Y(\pi) = 0. \quad (2.32)$$

Следовательно, для нахождения функций $X(x)$ и $Y(y)$ получаем две задачи Штурма—Лиувилля:

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0, & 0 < x < \pi, \\ X(0) = X(\pi) = 0; \end{cases} \quad (2.33)$$

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y = 0, & 0 < y < \pi, \quad \nu = \lambda - \mu, \\ Y(0) = Y(\pi) = 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

С подобной задачей мы уже встречались и знаем, что ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} X_n(x) &= \sin(nx), & \mu_n &= n^2, & n &= 1, 2, \dots, \\ Y_m(y) &= \sin(my), & \nu_m &= m^2, & m &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Тогда собственным значениям

$$\lambda_{nm} = \mu_n + \nu_m = n^2 + m^2$$

будут соответствовать собственные функции

$$v_{nm}(x, y) = \sin(nx) \sin(my), \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Вернемся к уравнению (2.24), подставляя туда вместо λ величину $\lambda_{nm} = n^2 + m^2$. Будем иметь уравнение

$$T''_{nm} + \lambda_{nm} T_{nm} = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть

$$T_{nm}(t) = a_{nm} \cos(\sqrt{n^2 + m^2}t) + b_{nm} \sin(\sqrt{n^2 + m^2}t),$$

где a_{nm} и b_{nm} — произвольные постоянные.

Итак, «атомами» решения задачи (2.18), (2.19) являются произведения $v_{nm}(x, y)T_{nm}(t)$. Решение задачи (2.18)–(2.20) дается рядом

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \left[a_{nm} \cos(\sqrt{n^2 + m^2}t) + \right. \\ \left. + b_{nm} \sin(\sqrt{n^2 + m^2}t) \right] \sin(nx) \sin(my), \quad (2.35) \end{aligned}$$

где коэффициенты a_{nm} и b_{nm} подлежат определению.

Ясно, что система функций $\{\sin(nx) \sin(my)\}_{n,m=1}^{\infty}$ ортогональна и полна в прямоугольнике $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$ (ортогональность очевидна, ибо

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n_1 x) \sin(m_1 y) \sin(n_2 x) \sin(m_2 y) dx dy = \\ = \int_0^{\pi} \sin(n_1 x) \sin(n_2 x) dx \int_0^{\pi} \sin(m_1 y) \sin(m_2 y) dy = 0 \end{aligned}$$

$n_1 \neq n_2$ (или $m_1 \neq m_2$; доказательство полноты более сложно и мы его опускаем).

Полагая теперь в общем решении $t = 0$, получим

$$u(x, y, 0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} \sin(nx) \sin(my),$$

откуда, используя формулы для коэффициентов двойного ряда Фурье, пишем

$$a_{nm} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi u(x, y, 0) \sin(nx) \sin(my) dx dy.$$

У нас $u(x, y, 0) = 3 \sin x \sin(2y)$. Значит

$$a_{12} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi 3 \sin^2 x \sin^2(2y) dx dy = 3,$$

$$a_{nm} = 0 \quad (n \neq 1, m \neq 2).$$

Далее, дифференцируя по t решение (2.35), получим

$$u_t(x, y, t) = [-3\sqrt{5}] \sin(\sqrt{5}t) \sin x \sin(2y) +$$

$$+ \sum_{n,m=1}^{\infty} b_{nm} \sqrt{n^2 + m^2} \cos(\sqrt{n^2 + m^2} t) \sin(nx) \sin(my).$$

Отсюда, полагая $t = 0$, можно записать

$$u_t(x, y, 0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sqrt{n^2 + m^2} b_{nm} \sin(nx) \sin(my),$$

или

$$5 \sin(3x) \sin(4y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sqrt{n^2 + m^2} b_{nm} \sin(nx) \sin(my).$$

Таким образом,

$$b_{34} = \frac{1}{5\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi 5 \sin^2(3x) \sin^2(4y) dx dy = 1,$$

$$b_{nm} = 0 \quad (n \neq 3, m \neq 4).$$

Следовательно, решение задачи (2.18)–(2.20) есть функция

$$u(x, y, t) = 3 \cos(\sqrt{5}t) \sin x \sin(2y) + \sin(5t) \sin(3x) \sin(4y).$$

Замечание. Решение смешанной задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), & 0 < x, y, < b, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) = u_t(x, y, 0) = 0, & 0 \leq x, y \leq b, \\ u(0, y, t) = u(b, y, t) = 0, & u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, \quad t \geq 0, \end{cases}$$

проводится методом разложения по собственным функциям соответствующей однородной задачи. Именно, искомое решение ищется в виде

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{nm}(t) \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right),$$

причем функции $u_{nm}(t)$ находятся так же, как и функции $u_n(t)$ в случае решения аналогичной задачи для неоднородного уравнения колебаний струны.

Пример 2. Решить смешанную задачу (с граничным условием Неймана)

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + \cos t \cos x \cos y, & 0 < x, y < \pi, \quad t > 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.37)$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0, & 0 \leq x, y \leq \pi, \end{cases} \quad (2.38)$$

(Γ — граница прямоугольника $\{(x, y): 0 \leq x, y \leq \pi\}$).

Решение. В силу только что сказанного решение этой задачи ищем в виде $u(x, y, t) = v(t) \cos x \cos y$ (поскольку собственными функциями соответствующей однородной задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, & 0 < x, y < \pi, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

(Γ — граница прямоугольника) являются произведения $\cos(nx) \cos(my)$, $n, m = 0, 1, \dots$).

Подставляя выражение для функции $u(x, y, t)$ в уравнение (2.36), получим задачу Коши

$$\begin{cases} v''(t) + 2v(t) = \cos t, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\begin{cases} v(0) = v'(0) = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Общее решение задачи (2.39), (2.40) имеет вид

$$v(t) = C_1 \cos(t\sqrt{2}) + C_2 \sin(t\sqrt{2}) + \cos t,$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Используя начальные условия (2.40), получим $C_1 = -1$, $C_2 = 0$. Следовательно,

$$v(t) = \cos t - \cos(t\sqrt{2}).$$

Таким образом, решение исходной задачи (2.36)–(2.38) есть

$$u(x, y, t) = \cos x \cos y [\cos t - \cos(t\sqrt{2})].$$

Пример 3 [18, § 3, № 106]. Однородная прямоугольная мембрана, закрепленная по краям в начальный момент времени $t = 0$, получает удар в окрестности центральной точки, так что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega_\varepsilon} v_0(x, y) dx dy = A,$$

где $v_0(x, y)$ — начальная скорость, $A = \text{const}$, Ω_ε — окрестность центральной точки. Определить свободные колебания мембраны.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & 0 < x < b_1, \quad 0 < y < b_2, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=b_1} = u|_{y=0} = u|_{y=b_2} = 0, & t \geq 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \begin{cases} v_0(x, y), & \text{если } (x, y) \in \Omega_\varepsilon(b_1/2, b_2/2), \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin \Omega_\varepsilon(b_1/2, b_2/2), \end{cases} \end{cases}$$

где $\Omega_\varepsilon(b_1/2, b_2/2)$ — открытый круг радиуса ε с центром в точке $(b_1/2, b_2/2)$.

Применяя метод разделения переменных, получим

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} [A_{nm} \cos(\lambda_{nm}at) + B_{nm} \sin(\lambda_{nm}at)] \sin\left(\frac{n\pi}{b_1}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b_2}y\right).$$

Здесь $\lambda_{nm} = \pi \sqrt{(n/b_1)^2 + (m/b_2)^2}$.

Нам нужно найти коэффициенты A_{nm} и B_{nm} . Полагая $t = 0$ в написанном равенстве, имеем

$$u(x, y, 0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{b_1}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b_2}y\right).$$

Так как по условию $u(x, y, 0) = 0$, то $A_{nm} = 0$ ($n, m = 1, 2, \dots$). Значит,

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{nm} \sin(\lambda_{nm}at) \sin\left(\frac{n\pi}{b_1}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b_2}y\right).$$

Отсюда, дифференцируя по t , будем иметь

$$u_t(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{nm} \lambda_{nm} a \cos(\lambda_{nm}at) \sin\left(\frac{n\pi}{b_1}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b_2}y\right),$$

откуда

$$u_t(x, y, 0) = \sum_{n,m=1}^{\infty} B_{nm} a \lambda_{nm} \sin\left(\frac{n\pi}{b_1}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b_2}y\right).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} B_{nm} &= \frac{4}{b_1 b_2 a \lambda_{nm}} \int_0^{b_1} \int_0^{b_2} v_0(x, y) \sin\left(\frac{n\pi}{b_1} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b_2} y\right) dx dy = \\ &= \frac{4}{b_1 b_2 a \lambda_{nm}} \iint_{\Omega_\varepsilon} v_0(x, y) \sin\left(\frac{n\pi}{b_1} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b_2} y\right) dx dy = \\ &= \frac{4}{b_1 b_2 a \lambda_{nm}} \sin\left(\frac{n\pi}{b_1} \bar{x}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b_2} \bar{y}\right) \iint_{\Omega_\varepsilon} v_0(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

где $(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega_\varepsilon$ (по теореме о среднем).

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$, получим

$$B_{nm} = \frac{4A}{b_1 b_2 a \lambda_{nm}} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right), \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Итак, решение нашей задачи есть функция

$$u(x, y, t) = \frac{4A}{b_1 b_2 a} \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right)}{\lambda_{nm}} \sin(\lambda_{nm} a t) \sin\left(\frac{n\pi}{b_1} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b_2} y\right).$$

Замечание. Эту задачу можно решить, применяя понятие δ -функции.

§ 2.9. Метод Фурье. Колебания круглой мембраны

Для описания колебаний круглой мембраны требуется привлечение специальных функций, а именно функций Бесселя.

Пример [18, § 3, № 104]. Круглая однородная мембрана радиуса R , закрепленная по контуру, находится в состоянии равновесия при натяжении T . В момент времени $t = 0$ к поверхности мембраны приложена равномерно распределенная нагрузка $f = P_0 \sin(\omega t)$. Найти радиальные колебания мембраны.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} u_{tt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{P_0}{T} \sin(\omega t), & 0 < \rho < R, \quad t > 0, \\ |u(0, t)| < +\infty, \quad u(R, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(\rho, 0) = 0, \quad u_t(\rho, 0) = 0, & 0 \leq \rho \leq R. \end{cases} \quad (2.41)$$

В силу принципа суперпозиции решение данной задачи можно представить в виде суммы $u(\rho, t) = w(\rho, t) + v(\rho, t)$, где $w(\rho, t)$ — решение

краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} w_{tt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) + \frac{P_0}{T} \sin(\omega t), & 0 < \rho < R, \quad t > 0, \\ |w(0, t)| < +\infty, \quad w(R, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.42)$$

а $v(\rho, t)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \frac{1}{a^2} v_{tt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right), & 0 < \rho < R, \quad t > 0, \\ |v(0, t)| < +\infty, \quad v(R, t) = 0, & t \geq 0, \\ v(\rho, 0) = -w(\rho, 0), \quad v_t(\rho, 0) = -w_t(\rho, 0), & 0 \leq \rho \leq R. \end{cases} \quad (2.43)$$

Ясно, что сначала нужно найти $w(\rho, t)$. Будем искать $w(\rho, t)$ в виде $w(\rho, t) = A(\rho) \sin(\omega t)$, где функция $A(\rho)$ подлежит определению. Подставляя $w(\rho, t) = A(\rho) \sin(\omega t)$ в уравнение задачи (2.42), получим

$$-\frac{1}{a^2} \omega^2 A \sin(\omega t) = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dA}{d\rho} \right) \sin(\omega t) + \frac{P_0}{T} \sin(\omega t),$$

откуда, сокращая на $\sin(\omega t)$, будем иметь краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \rho^2 A'' + \rho A' + \frac{\rho^2 \omega^2}{a^2} A = -\frac{P_0}{T} \rho^2, & 0 < \rho < R, \\ |A(0)| < +\infty, \quad A(R) = 0. \end{cases} \quad (2.44)$$

Решение этой задачи есть $A(\rho) = A_1(\rho) + A_2(\rho)$, где функция $A_1(\rho)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \rho^2 A_1'' + \rho A_1' + \frac{\rho^2 \omega^2}{a^2} A_1 = 0, & 0 < \rho < R, \\ |A_1(0)| < +\infty, \quad A_1(R) = 0, \end{cases} \quad (2.45)$$

а $A_2(\rho)$ — частное решение уравнения

$$\rho^2 A_2'' + \rho A_2' + \frac{\rho^2 \omega^2}{a^2} A_2 = -\frac{P_0}{T} \rho^2, \quad 0 < \rho < R. \quad (2.46)$$

Легко видеть, что уравнение задачи (2.45) с помощью замены $x = \omega \rho / a$ приводится к уравнению Бесселя нулевого порядка и в силу граничного условия $|A_1(0)| < +\infty$ решение задачи (2.45) есть функция $A_1(\rho) = C J_0(\omega \rho / a)$, где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка первого рода. Далее, решение задачи (2.46) есть функция

$$A_2(\rho) = -\frac{P_0 a^2}{T \omega^2}.$$

Таким образом,

$$A(\rho) = C J_0\left(\frac{\omega \rho}{a}\right) - \frac{P_0 a^2}{T \omega^2}.$$

Из граничного условия $A(R) = 0$ имеем

$$0 = CJ_0\left(\frac{\omega R}{a}\right) - \frac{P_0 a^2}{T \omega^2},$$

откуда

$$C = \frac{P_0 a^2}{T \omega^2} \frac{1}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)}.$$

Значит,

$$A(\rho) = \frac{P_0 a^2}{T \omega^2} \left[\frac{J_0\left(\frac{\omega \rho}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right].$$

Отсюда

$$w(\rho, t) = \frac{P_0 a^2}{T \omega^2} \left[\frac{J_0\left(\frac{\omega \rho}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right] \sin(\omega t).$$

Теперь найдем функцию $v(\rho, t)$, решая задачу (2.43). Заметим, что

$$v(\rho, 0) = 0, \quad v_t(\rho, 0) = -\frac{P_0 a^2}{T \omega} \left[\frac{J_0\left(\frac{\omega \rho}{a}\right)}{J_0\left(\frac{\omega R}{a}\right)} - 1 \right].$$

Полагая $v(\rho, t) = B(\rho)T(t)$ и подставляя это выражение в уравнение задачи (2.43), получим после разделения переменных

$$\frac{T''}{a^2 T} = -\frac{1}{B \rho d \rho} (\rho B') = -\lambda.$$

Отсюда имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\rho^2 B'' + \rho B' + \lambda \rho^2 B = 0, \quad (2.47)$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0. \quad (2.48)$$

Уравнение (2.47) заменой $x = \sqrt{\lambda} \rho$ приводится к уравнению Бесселя нулевого порядка. Таким образом, решение уравнения (2.47) с учетом граничных условий $|B(0)| < +\infty$, $B(R) = 0$ есть

$$B(\rho) = CJ_0\left(\frac{\mu_n \rho}{R}\right), \quad C = \text{const},$$

причем $\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$

Далее, из уравнения (2.48) получаем

$$T_n(t) = C_1 \cos\left(a \frac{\mu_n}{R} t\right) + C_2 \sin\left(a \frac{\mu_n}{R} t\right),$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Решение задачи (2.43) дается рядом

$$v(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[b_n \cos\left(a \frac{\mu_n}{R} t\right) + c_n \sin\left(a \frac{\mu_n}{R} t\right) \right] J_0\left(a \frac{\mu_n}{R} \rho\right).$$

Постоянные b_n и c_n подберем так, чтобы выполнялись начальные условия

$$v(\rho, 0) = 0, \quad v_t(\rho, 0) = -\frac{P_0 a^2}{\omega T} \left[\frac{J_0\left(\frac{\omega}{a} \rho\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a} R\right)} - 1 \right].$$

Очевидно, что $b_n = 0$, ибо

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n J_0\left(\frac{\omega}{R} \rho\right) = 0.$$

Далее, дифференцируя функцию $v(\rho, t)$ по переменной t , имеем

$$v_t(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n a \frac{\mu_n}{R} \cos\left(a \frac{\mu_n}{R} t\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \rho\right).$$

Отсюда, полагая $t = 0$, получаем

$$-\frac{P_0 a^2}{\omega T} \left[\frac{J_0\left(\frac{\omega}{a} \rho\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a} R\right)} - 1 \right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\mu_n}{R} J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \rho\right).$$

Для определения коэффициентов c_n умножим обе части написанного разложения на $\rho J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \rho\right)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, R]$, считая при этом возможным почленное интегрирование. Принимая во внимание формулы

$$\int_0^l x J_0\left(\frac{\mu_i}{l} x\right) J_0\left(\frac{\mu_j}{l} x\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ \frac{l^2}{2} [J_0'(\mu_i)]^2, & \text{если } i = j, \end{cases}$$

$$\int_0^x t J_0(t) dt = x J_1(x),$$

$$\int_0^l x J_0\left(\frac{\mu_n}{l} x\right) J_0(kx) dx = \frac{\mu_n J_0'(\mu_n) J_0(kl)}{k^2 - \left(\frac{\mu_n}{l}\right)^2}, \quad k \neq \frac{\mu_n}{l},$$

найдем, что

$$-\frac{P_0 a^2}{\omega t} \left[\frac{a^2 R^2 \mu_n J_0'(\mu_n)}{\omega^2 R^2 - a^2 \mu_n} + \frac{R^2}{\mu_n} J_0'(\mu_n) \right] = a c_n \frac{\mu_n R^2}{2} [J_0'(\mu_n)]^2,$$

откуда

$$c_n = \frac{2P_0 a \omega R^3}{T \mu_n^2} \frac{1}{J'_0(\mu_n)(\omega^2 R^2 - a^2 \mu_n^2)}.$$

Таким образом, получаем

$$v(\rho, t) = -\frac{2aP_0 \omega R^3}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(a \frac{\mu_n}{R} t\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \rho\right)}{\mu_n^2 J'_0(\mu_n)(\omega^2 R^2 - a^2 \mu_n^2)}.$$

Тогда решение исходной задачи дается формулой

$$u(\rho, t) = \frac{P_0 a^2}{\omega^2 T} \left[\frac{J_0\left(\frac{\omega}{a} \rho\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a} R\right)} - 1 \right] \sin(\omega t) - \frac{2aP_0 \omega R^3}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(a \frac{\mu_n}{R} t\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \rho\right)}{\mu_n^2 J'_0(\mu_n)(\omega^2 R^2 - a^2 \mu_n^2)}.$$

Замечание 1. Решение задачи получено в предположении, что частота ω вынуждающей силы не совпадает ни с одной собственной частотой $\omega_n = a\mu_n/R$ мембраны (здесь μ_n — положительный корень уравнения $J_0(x) = 0$).

Замечание 2. Отметим, что решение смешанной задачи для волнового уравнения в круге с математической постановкой

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & 0 < \rho < R, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(\rho, 0) = A \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right), & u_t(\rho, 0) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq R, \\ |u(0, t)| < +\infty, & u(R, t) = 0, \quad 0 \leq t < +\infty \end{cases} \quad (2.49)$$

(здесь $A = \text{const}$), осуществляется так же, как и решение только что приведенной задачи. При этом решение задачи (2.49) представляется рядом

$$u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(a \frac{\mu_n}{R} t\right) + B_n \sin\left(a \frac{\mu_n}{R} t\right) \right] J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \rho\right).$$

Из начальных условий следует

$$B_n = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$A_n = \frac{2A}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R \rho (R^2 - \rho^2) J_0\left(\frac{\mu_n}{R} \rho\right) d\rho.$$

Но известно, что

$$\int_0^x t J_0(t) dt = x J_1(x), \quad \int_0^x t^3 J_0(t) dt = 2x^2 J_0(x) + x(x^2 - 4) J_1(x)$$

(оба тождества проверяются непосредственным дифференцированием с применением рекуррентных соотношений для функций Бесселя первого рода).

Используя указанные тождества, окончательно получим

$$u(\rho, t) = 8A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} \cos\left(a \frac{\mu_n}{R} t\right)$$

(μ_n — положительный корень уравнения $J_0(x) = 0$).

§ 2.10. Метод Фурье. Колебания балки

Мы уже встречались с уравнениями гиперболического типа четвертого порядка по пространственным переменным при использовании преобразований Фурье и Ханкеля. В качестве примера уравнения четвертого порядка в одномерном случае рассмотрим поперечные колебания тонкой балки. Главное отличие колебаний балки от поперечных колебаний струны состоит в том, что балка оказывает сопротивление изгибу. Можно показать, применяя законы механики, что колебания балки, зажатой на одном конце, описываются уравнением (рис. 2.12)

$$u_{tt} + a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0 \quad (2.50)$$

(здесь $u = u(x, t)$ — смещение балки)

Очевидно, граничными условиями для заданного конца ($x = 0$) является неподвижность балки и горизонтальность касательной ($\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$), а на свободном конце ($x = l$) должны равняться нулю изгибающий момент $M = -E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (E — модуль упругости материала балки, J — момент

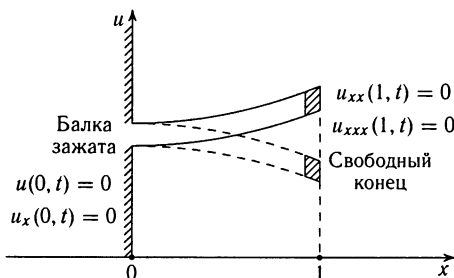


Рис. 2.12. Колебания балки

инерции сечения балки относительно своей горизонтальной оси) и тангенциальная сила $F = -EJ\partial^3 u/\partial x^3$ (см. рис. 2.12). Отметим, что в уравнении (2.50) $a^2 = EJ/\rho s$ (ρ — плотность материала балки, s — площадь поперечного сечения балки).

Для того чтобы полностью определить движение балки, зажатой на одном конце, нужно задать начальные условия: начальное отклонение и начальную скорость в каждом сечении балки, т. е. определить

$$u|_{t=0} = f(x), \quad u_t|_{t=0} = g(x), \quad 0 \leq x \leq l.$$

Итак, рассмотрим следующую смешанную задачу:

$$\begin{cases} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, & 0 < x < l, \quad t > 0, \end{cases} \quad (2.51)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, \end{cases} \quad (2.52)$$

$$\begin{cases} u_{xx}(l, t) = 0, \quad u_{xxx}(l, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{cases} \quad (2.53)$$

Будем решать эту задачу методом разделения переменных в предположении, что ищутся периодические по времени t колебания балки. Полагая $u(x, t) = X(x)T(t)$ и подставляя предполагаемую форму решения в уравнение (2.51), получим

$$XT'' + a^2 X^{(IV)}T = 0,$$

откуда следует

$$\frac{T''}{a^2 T} = -\frac{X^{(IV)}}{X} = -\lambda.$$

Ясно, что $\lambda > 0$ (для существования периодических по t решений).

Для функции $X(x)$ получаем задачу о собственных колебаниях

$$X^{(IV)} - \lambda X = 0 \quad (2.54)$$

при граничных условиях

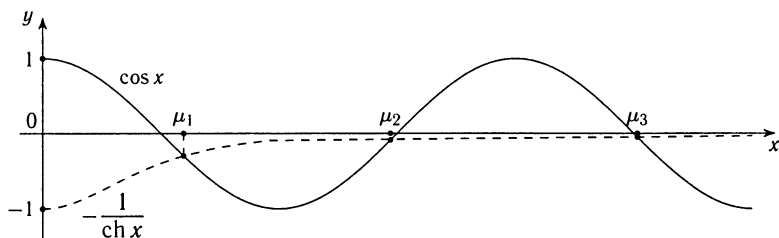
$$X(0) = 0, \quad X'(0) = 0, \quad X''(l) = 0, \quad X'''(l) = 0. \quad (2.55)$$

Общее решение уравнения (2.54) представляется в виде

$$X(x) = A \operatorname{ch}(\sqrt[4]{\lambda}x) + B \operatorname{sh}(\sqrt[4]{\lambda}x) + C \cos(\sqrt[4]{\lambda}x) + D \sin(\sqrt[4]{\lambda}x).$$

Из условий $X(0) = 0$, $X'(0) = 0$ находим, что $A + C = 0$, $B + D = 0$. Отсюда следует

$$X(x) = A [\operatorname{ch}(\sqrt[4]{\lambda}x) - \cos(\sqrt[4]{\lambda}x)] + B [\operatorname{sh}(\sqrt[4]{\lambda}x) - \sin(\sqrt[4]{\lambda}x)].$$

Рис. 2.13. Определение корней уравнения $\cos x \operatorname{ch} x = -1$

Граничные условия (2.55) на правом конце балки дают

$$\begin{cases} A [\operatorname{ch}(\sqrt[4]{\lambda}l) + \cos(\sqrt[4]{\lambda}l)] + B [\operatorname{sh}(\sqrt[4]{\lambda}l) + \sin(\sqrt[4]{\lambda}l)] = 0, \\ A [\operatorname{sh}(\sqrt[4]{\lambda}l) - \sin(\sqrt[4]{\lambda}l)] + B [\operatorname{ch}(\sqrt[4]{\lambda}l) + \cos(\sqrt[4]{\lambda}l)] = 0. \end{cases} \quad (2.56)$$

Однородная система (относительно неизвестных A и B) (2.56) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{ch}(\sqrt[4]{\lambda}l) + \cos(\sqrt[4]{\lambda}l) & \operatorname{sh}(\sqrt[4]{\lambda}l) + \sin(\sqrt[4]{\lambda}l) \\ \operatorname{sh}(\sqrt[4]{\lambda}l) - \sin(\sqrt[4]{\lambda}l) & \operatorname{ch}(\sqrt[4]{\lambda}l) + \cos(\sqrt[4]{\lambda}l) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.57)$$

Из уравнения (2.57) получаем алгебраическое уравнение для вычисления собственных значений задачи

$$\operatorname{sh}^2(\sqrt[4]{\lambda}l) - \sin^2(\sqrt[4]{\lambda}l) = \operatorname{ch}^2(\sqrt[4]{\lambda}l) + 2 \operatorname{ch}(\sqrt[4]{\lambda}l) \cos(\sqrt[4]{\lambda}l) + \cos^2(\sqrt[4]{\lambda}l). \quad (2.58)$$

Обозначив $\mu = \sqrt[4]{\lambda}l$ и воспользовавшись равенством $\operatorname{sh}^2 x + 1 = \operatorname{ch}^2 x$, из уравнения (2.58) найдем

$$\operatorname{ch} \mu \cdot \cos \mu = -1. \quad (2.59)$$

Это уравнение можно решить графически (рис. 2.13).

Корни уравнения (2.59) суть

$$\mu_1 = 1,875, \quad \mu_2 = 4,694, \quad \mu_3 = 7,854, \quad \mu_n \approx \frac{\pi}{2}(2n-1) \quad \text{при } n > 3.$$

Далее, для функции $T(t)$ имеем уравнение

$$T'' + \lambda_n a^2 T = 0.$$

Его общее решение записывается в виде

$$T_n(t) = A_n \cos(a\sqrt{\lambda_n}t) + B_n \sin(a\sqrt{\lambda_n}t) = A_n \cos\left(a\frac{\mu_n^2}{l^2}t\right) + B_n \sin\left(a\frac{\mu_n^2}{l^2}t\right),$$

где A_n и B_n — произвольные постоянные.

Следовательно, «атомы» решения задачи (2.51), (2.52) образуются функциями

$$u_n(x, t) = \left[A_n \cos\left(a \frac{\mu_n^2}{l^2} t\right) + B_n \sin\left(a \frac{\mu_n^2}{l^2} t\right) \right] X_n(x),$$

где

$$X_n(x) = \frac{(\operatorname{sh} \mu_n + \sin \mu_n) \left[\operatorname{ch}\left(\frac{\mu_n}{l} x\right) - \cos\left(\frac{\mu_n}{l} x\right) \right]}{\operatorname{sh} \mu_n + \sin \mu_n} - \frac{(\operatorname{ch} \mu_n + \cos \mu_n) \left[\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_n}{l} x\right) - \sin\left(\frac{\mu_n}{l} x\right) \right]}{\operatorname{sh} \mu_n + \sin \mu_n}.$$

Согласно общей теории задачи Штурма–Лиувилля собственные функции $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ образуют полную ортогональную систему функций на отрезке $[0, l]$. Тогда решение задачи (2.51)–(2.53) дается рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(a \frac{\mu_n^2}{l^2} t\right) + B_n \sin\left(a \frac{\mu_n^2}{l^2} t\right) \right] X_n(x),$$

где коэффициенты A_n и B_n определяются из начальных условий по формулам

$$A_n = \frac{\int_0^l f(x) X_n(x) dx}{\|X_n(x)\|^2}, \quad B_n = \frac{\int_0^l g(x) X_n(x) dx}{a \frac{\mu_n^2}{l^2} \|X_n(x)\|^2}, \quad \text{где } \|X_n(x)\|^2 = \int_0^l X_n^2(x) dx.$$

§ 2.11. Метод возмущений

Здесь мы коротко рассмотрим метод возмущений, который лежит в основе решения многих задач математической физики [11, 13, 23]. Этот метод позволяет свести решение некоторых сложных задач к серии простых задач в соответствии с блок-схемой на рис.2.14.

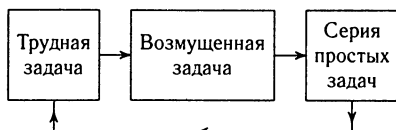


Рис. 2.14. Блок-схема метода возмущений

Предположим, что нам нужно решить задачу Коши для уравнения с переменным коэффициентом

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + c(x, t)u, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (2.60)$$

Задачу (2.60), (2.61) можно решить, отправляясь от решения задачи Коши для простого уравнения.

Для этого рассмотрим возмущенную линейную задачу

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \varepsilon c(x, t)u, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \quad (2.62)$$

и будем искать ее решение в виде ряда

$$u(x, t) = u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t) + \varepsilon^2 u_2(x, t) + \dots,$$

где $0 \leq \varepsilon \leq 1$, а функции $\{u_k(x, t)\}_{k=0}^\infty$ подлежат определению.

Подставим предполагаемую форму решения в уравнение (2.62). В результате получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t) + \varepsilon^2 u_2(x, t) + \dots] = \\ = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t) + \varepsilon^2 u_2(x, t) + \dots] + \\ + \varepsilon c(x, t) [u_0(x, t) + \varepsilon u_1(x, t) + \varepsilon^2 u_2(x, t) + \dots]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Проделав несложные алгебраические преобразования и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим последовательность уравнений

$$\varepsilon^0 : \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \quad (2.65)$$

$$\varepsilon^1 : \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c(t, x)u_0(x, t), \quad (2.66)$$

$$\varepsilon^2 : \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + c(t, x)u_1(x, t), \quad (2.67)$$

.....

Аналогично, для начальных данных задачи (2.62), (2.63) получаем степенные ряды по ε

$$f(x) = u_0(x, 0) + \varepsilon u_1(x, 0) + \varepsilon^2 u_2(x, 0) + \dots, \quad (2.68)$$

$$g(x) = \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, 0) + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) + \varepsilon^2 \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) + \dots \quad (2.69)$$

Из равенств (2.68) и (2.69) находим начальные данные для задач (2.65), (2.66) и т. д. Именно,

$$\begin{cases} u_0(x, 0) = f(x), & u_n(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, 0) = g(x), & \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, 0) = 0, \end{cases} \quad n \geq 1.$$

Следовательно, имеем последовательность задач Коши

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_0(x, 0) = f(x), & \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < +\infty, \end{cases} \quad (2.70)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c(t, x)u_0(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_1(x, 0) = 0, & \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \end{cases} \quad (2.71)$$

.....

Функция $u_0(x, t)$, дающая решение задачи (2.70), находится по формуле Даламбера, так что она нам известна. Решение же задачи (2.71) дается формулой

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} c(\tau, \zeta) u_0(\zeta, \tau) d\zeta.$$

Таким образом, решения задач (2.70), (2.71) найдены.

Функцию $u_1(x, t)$ часто называют *возмущением первого порядка к функции* $u_0(x, t)$. Складывая $u_0(x, t)$ и $u_1(x, t)$, получим приближенное решение задачи (2.60), (2.61).

Чтобы найти возмущение следующего порядка $u_2(x, t)$, мы должны решить задачу Коши для уравнения (2.67).

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + c(x, t)u_1(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_2(x, 0) = 0, & \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Подобным же образом находятся остальные функции u_n ($n = 3, 4, \dots$). Точное решение задачи (2.60), (2.61) дается рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t).$$

Приведем теперь пример *нелинейной гиперболической задачи*. Пусть нам нужно решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + uu_x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \end{cases} \quad (2.72)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) + g(x), \\ u_t(x, 0) = a[g'(x) - f'(x)], \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.73)$$

Ищем решение этой задачи, отправляясь от возмущенной задачи [13, с. 66, № 2.20] (и считая $\varepsilon = 1$)

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \varepsilon uu_x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \end{cases} \quad (2.74)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) + g(x), \\ u_t(x, 0) = a[g'(x) - f'(x)], \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.75)$$

Полагая $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n(x, t)$, подставим эту функцию в возмущенное уравнение (2.74). Получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} = a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} + \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n u_n \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\partial u}{\partial x},$$

или, в развернутом виде,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) + \dots = \\ = \varepsilon(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial x} + \dots \right). \end{aligned}$$

Отсюда, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим последовательность задач Коши

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_0(x, 0) = f(x) + g(x), \\ \frac{\partial u_0}{\partial t}(x, 0) = a[g'(x) - f'(x)], \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.76)$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_0(x, t) \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u_1(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = 0, \end{cases} \quad -\infty < x < +\infty, \quad (2.77)$$

.....

Решение задачи (2.76) находится по формуле Даламбера. Пропедев простые преобразования, получим

$$u_0(x, t) = g(x + at) + f(x - at).$$

Найдем теперь $u_1(x, t)$, решая линейную задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + [g(x + at) + f(x - at)][g'(x + at) + f'(x - at)], \\ u_1(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty. \end{cases} \quad (2.78)$$

Решение задачи (2.78) записывается в виде

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} [g(\zeta + a\tau) + f(\zeta - a\tau)] \times \\ &\quad \times [g'(\zeta + a\tau) + f'(\zeta - a\tau)] d\zeta = \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \zeta} [g(\zeta + a\tau)]^2 d\zeta + \\ &\quad + \frac{1}{2a} \int_0^t d\tau \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \zeta} [f(\zeta - a\tau)]^2 d\zeta + \frac{1}{2a} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \zeta} [g(\zeta + a\tau) f(\zeta - a\tau)] d\zeta = \\ &= \frac{1}{4a} \int_0^t [g^2(x + at) - g^2(x - at + 2a\tau)] d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{4a} \int_0^t [f^2(x + at - 2a\tau) - f^2(x - at)] d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{4a} \int_0^t [2g(x + at) f(x + at - 2a\tau) - 2g(x - at + 2a\tau) f(x - at)] d\tau. \end{aligned}$$

Таким образом, функция $u_1(x, t)$ найдена.

Приближенное решение нелинейной задачи (2.72), (2.73) имеет вид $u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t)$, а точное решение этой задачи дается рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t).$$

§ 2.12. Задачи для самостоятельного решения

1. Найти поперечные колебания бесконечной струны, если начальное отклонение и начальная скорость соответственно равны нулю и xe^{-x^2} . Построить график решения в различные моменты времени.

2. Решить смешанную задачу для полубесконечной струны

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = -xe^{-x^2}, \quad u_t(x, 0) = 0, & 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

3. Решить задачу Коши для бесконечной струны

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + e^{-t}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, \quad u_t(x, 0) = \cos x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

4. Решить задачу Коши для бесконечной мембраны

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + t \sin y, & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) = x^2, \quad u_t(x, y, 0) = \sin y, & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$

5. Решить задачу Коши в трехмерном пространстве

$$\begin{cases} u_{tt} = 8 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + t^2 x^2, \\ \quad \quad \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = y^2, \\ u_t(x, y, z, 0) = z^2, \quad -\infty < x, y, z < +\infty. \end{cases}$$

6. Решить задачу Коши для полубесконечной струны

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & 0 < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & 0 \leq x < +\infty. \end{cases}$$

7. Решить задачу Коши для бесконечной мембраны

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0, & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$

8. Решить задачу Коши в трехмерном пространстве

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \\ -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, y, z, 0) = 0, \quad u_t(x, y, z, 0) = 0, \quad -\infty < x, y, z < +\infty. \end{cases}$$

9. Найти радиально симметричные поперечные колебания неограниченной пластинки, решив задачу Коши

$$\begin{cases} u_{tt} + b^2 \Delta^2 u = 0, & 0 < \rho < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = A e^{-\rho^2/a^2}, \quad u_t|_{t=0} = 0, & 0 \leq \rho < +\infty. \end{cases}$$

10. В точке $x = 0$ вдоль оси неограниченного $x > 0$ стержня, начиная с момента $t = 0$, действует сила $f(t) = \cos t$. В начальный момент времени стержень покоился. Найти продольные колебания стержня.

11. Концы струны $x = 0$ и $x = l$ закреплены жестко. Начальные скорости заданы равенством $u_t(x, 0) = A \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$ при $0 \leq x \leq l$. Найти отклонения при $t > 0$, если начальное отклонение есть $u(x, 0) = 0$.

12. Изолированный однородный электрический провод $0 \leq x \leq l$ заряжен до некоторого потенциала $v_0 = \text{const}$. В начальный момент времени конец $x = 0$ заземляется, а конец $x = l$ продолжает оставаться изолированным. Найти распределение напряжения в проводе, если самоиндукция и емкость единицы длины провода известны. Сопротивлением пренебречь.

13. Найти продольные колебания стержня $0 \leq x \leq l$, левый конец которого жестко закреплен, а к правому с момента $t = 0$ приложена сила $F(t) = At$, $A = \text{const}$.

14. Найти колебания струны $0 \leq x \leq l$ с жестко закрепленными концами под действием силы, приложенной с момента $t = 0$ и имеющей плотность $F(x, t) = xt$.

15. Найти силу тока в проводе длины l , по которому течет переменный ток, если утечка тока отсутствует и омическим сопротивлением можно пренебречь. Начальный ток в проводе равен нулю, а начальное напряжение задается формулой $E = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$, левый конец провода ($x = 0$) изолирован, а правый конец ($x = l$) заземлен.

16. Решить смешанную задачу о свободных колебаниях прямоугольной мембраны ($0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \pi$) с начальным отклонением $u(x, y, 0) = Axy(x - \pi)(y - \pi)$ и начальной скоростью $u_t(x, y, 0) = 0$.

17. Решить смешанную задачу о вынужденных колебаниях мембраны

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + \sin t \sin x \sin y, & 0 < x, y < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=\pi} = u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0, & t \geq 0, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0, & 0 \leq x, y \leq \pi. \end{cases}$$

18. Решить смешанную задачу о колебаниях мембраны

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad t > 0, \\ u(0, y, t) = \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad u(a, y, t) = 0, & 0 \leq y \leq b, \quad t \geq 0, \\ u(x, 0, t) = 0, \quad u(x, b, t) = 0, & 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0, \\ u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = 0, & 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b. \end{cases}$$

19. Круглая однородная мембрана радиуса b , закрепленная по краю, находится в состоянии равновесия при натяжении T_0 . В момент времени $t = 0$ к мембране приложено нормальное давление P на единицу площади. Найти радиальные колебания мембраны.

20. Решить смешанную задачу для волнового уравнения в неограниченном $(-\infty < z < +\infty)$ цилиндре

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u + J_0\left(\frac{\mu_1}{a}\rho\right), & 0 < \rho < a, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, & 0 \leq \rho \leq a, \\ u|_{\rho=a} = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

(μ_1 — первый положительный корень функции Бесселя $J_0(x)$).

21. Решить смешанную задачу для волнового уравнения в ограниченном цилиндре

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, & 0 < z < b, \quad 0 < \rho < a, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = J_0\left(\frac{\mu_2}{a}\rho\right) \cos\left(\frac{3\pi z}{b}\right), \quad u_t|_{t=0} = 0, & 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq z \leq b, \\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=b} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\rho=a} = 0, & t \geq 0 \end{cases}$$

(μ_2 — второй положительный корень функции Бесселя $J_1(x)$).

22. Решить смешанную задачу о вынужденных колебаниях мембраны

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + t \cos(3x) \cos(4y), & 0 < x, y < \pi, \quad t > 0, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=\pi} = u_y|_{y=0} = u_y|_{y=\pi} = 0, & t \geq 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, & 0 \leq x, y \leq \pi. \end{cases}$$

23. Решить смешанную задачу о колебаниях балки, зажатой с двух концов,

$$\begin{cases} u_{tt} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0, & 0 < x < l, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad u_{xx}(0, t) = 0, \quad u_{xx}(l, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin\left(\frac{2\pi}{l}x\right). \end{cases}$$

24. Определить с точностью до ε^2 решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + u = \varepsilon u^3, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \cos x, \quad u_t(x, 0) = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

25. Доказать единственность решения смешанной задачи о колебаниях мембраны

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + f(x, y, t), & 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \quad 0 < t < T, \\ u|_{x=0} = f_1(y, t), \quad u|_{x=a} = f_2(y, t), & 0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq t \leq T \\ u|_{y=0} = g_1(x, t), \quad u|_{y=b} = g_2(x, t) & 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u|_{t=0} = F(x, y), \quad u_t|_{t=0} = G(x, y), & 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \end{cases}$$

в предположении, что функция $u(x, y, t)$ дважды непрерывно дифференцируема в замкнутой области: $0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, 0 \leq t \leq T$.

26. Решить смешанную задачу о колебаниях круглой мембраны

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & 0 < \rho < a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0, \\ u(a, \varphi, t) = 0, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = J_3\left(\frac{\mu_5}{a}\rho\right) \cos(3\varphi), & 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases}$$

где μ_5 — пятый положительный корень функции Бесселя $J_3(x)$, а

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

27. Решить смешанную задачу о колебаниях мембраны (с ненулевым граничным условием)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & 0 < \rho < a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0, \\ u(a, \varphi, t) = A \cos \varphi, & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t \geq 0, \\ u(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad u_t(\rho, \varphi, 0) = 0, & 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

28. Найти при нулевых начальных условиях колебания круглой мембраны ($0 \leq \rho \leq a$), вызванные движением ее края по закону

$$u(a, \varphi, t) = A \cos(\omega t), \quad A = \text{const}.$$

29. Решить смешанную задачу о колебаниях мембраны (с ненулевым граничным условием)

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u, & 0 < \rho < a, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad t > 0, \\ u(a, \varphi, t) = A \sin(2\varphi), & 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t \geq 0, \\ u(\rho, \varphi, 0) = 0, \quad u_t(\rho, \varphi, 0) = 0, & 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

30. Найти при нулевых начальных условиях колебания круглой мембраны ($0 \leq \rho \leq a$), вызванные движением ее края по закону

$$u(a, \varphi, t) = A \sin(\omega t), \quad A = \text{const}.$$

31. Решить смешанную задачу для волнового уравнения в ограниченном цилиндре

$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u + t J_0\left(\frac{\mu_1}{a} \rho\right) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right), & 0 < \rho < a, \quad 0 < z < h, \quad t > 0, \\ u|_{z=0} = 0, \quad u|_{z=h} = 0, \quad u|_{\rho=a} = 0, & t \geq 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

(μ_1 — первый положительный корень уравнения $J_0(x) = 0$).

32. Найти колебания газа в сферическом сосуде, вызванные малыми колебаниями его стенки, начавшимися с момента $t = 0$, если скорости частиц стенки направлены по радиусам сосуда, а величина скоростей равна $\frac{1}{2} t^2 P_n(\cos \theta)$, где $P_n(x)$ — полином Лежандра степени n .

33. Доказать, что если функции $f(x)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ гармоничны во всем евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, а $g(t)$ — непрерывно дифференцируемая функция при $t \geq 0$, то решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x) g(t), & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

дается формулой

$$u(x, t) = u_0(x) + t u_1(x) + f(x) \int_0^t (t - \tau) g(\tau) d\tau.$$

34. Найти колебания неограниченного кругового цилиндра радиуса a , вызванные движением его боковой поверхности по закону

$A \sin(\omega t) \cos(n\varphi)$, где $A = \text{const}$, n — произвольно фиксированное натуральное число.

35. Доказать, что если $u_f(x, t)$ есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = f(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

то решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = f(x), \quad u_t|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

выражается формулой $u(x, t) = \partial u_f(x, t) / \partial t$.

36. Решить нелинейную задачу Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + (\nabla u)^2 - u_t^2, & x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

37. Доказать, что функция $u(x, t)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = f(x), \quad u_t|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

тогда и только тогда, когда функция

$$v(x, t) = u(x, t) + i \int_0^t \Delta u(x, \tau) d\tau$$

является решением задачи Коши для однородного уравнения Шредингера

$$\begin{cases} v_t = i \Delta v, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ v|_{t=0} = f(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

38. Пусть функция $u(x, t)$ является решением задачи Коши для однородного уравнения Шредингера

$$\begin{cases} u_t = i \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = f(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

где $f(x)$ — вещественная функция. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} v_{tt} + \Delta^2 v = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ v|_{t=0} = f(x), \quad v_t|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

39. Пусть функция $f(x, t)$ является бигармонической функцией по x при каждом $t \geq 0$ (т. е. $\Delta^2 f = 0$). Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u = f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

40. Найти решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x), \end{cases}$$

если $u_0(x)$ и $u_1(x)$ — бигармонические функции (т. е. $\Delta^2 u_0 = 0$, $\Delta^2 u_1 = 0$).

§ 2.13. Ответы

$$1. u = \frac{1}{2a} e^{-(x^2 + a^2 t^2)} \operatorname{sh}(2xat).$$

$$2. u = e^{-(x^2 + t^2)} [x \operatorname{ch}(2xt) - t \operatorname{sh}(2xt)].$$

$$3. u = t - 1 + e^{-t} + \sin(x + t).$$

$$4. u = x^2 + t^2 + t \sin y.$$

$$5. u = y^2 + tz^2 + 8t^2 + \frac{8}{3}t^3 + \frac{1}{12}t^4 x^2 + \frac{2}{45}t^6.$$

$$6. u = \frac{f(x+at) + f(x-at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{|x-at|}^{x+at} g(\xi) d\xi.$$

$$7. u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t d\tau \iint_{r \leq a(t-\tau)} \frac{f(\alpha, \beta, \tau)}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - r^2}} d\alpha d\beta,$$

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}.$$

$$8. u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{r \leq at} \frac{f(\alpha, \beta, \gamma, t-r/a)}{r} d\alpha d\beta d\gamma,$$

$$r = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2}.$$

$$9. u(r, t) = \frac{Ae^{-\frac{R^2}{1+r^2}}}{1+r^2} \left(\cos \frac{R^2 \tau}{1+\tau^2} + \tau \sin \frac{R^2 \tau}{1+\tau^2} \right), \text{ где } \tau = 4bt/a^2, R = r/a.$$

$$10. u = \begin{cases} 0, & \text{при } t < x/a, \\ ka \sin(t - x/a) & \text{при } t > x/a, \end{cases}$$

где k — модуль Юнга материала стержня.

$$11. u = \frac{lA}{2\pi a} \sin\left(\frac{2\pi a}{l}t\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right).$$

$$12. u = \frac{4v_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right] \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l\sqrt{CL}}t\right].$$

$$13. u = \frac{A}{ES}xt + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\right] \sin\left[\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\right],$$

где $a_n = -\frac{4}{\pi a(2n+1)} \int_0^l \frac{Az}{ES} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi z}{2l}\right] dz$, E и S — модуль упругости

и площадь поперечного сечения стержня.

$$14. u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right), \text{ где } u_n(t) = \frac{2l^2(-1)^{n+1}}{\rho a n^2 \pi^2} \int_0^t \tau \sin\left[\frac{n\pi a}{l}(t-\tau)\right] d\tau.$$

15. $u = -E_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right) \sin\left(\frac{\pi t}{2l\sqrt{LC}}\right)$, где L и C — индуктивность и емкость единицы длины провода.

$$16. u = \frac{16A}{\pi^2} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)x] \sin[(2m+1)y]}{(2n+1)^3(2m+1)^3} \cos(\pi a \lambda_{n,m} t), \text{ где } \lambda_{n,m} = \frac{1}{\pi} \sqrt{(2n+1)^2 + (2m+1)^2}.$$

$$17. u = [\sin t - \sin(t\sqrt{2})] \sin x \sin y.$$

$$18. u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left[c\pi \sqrt{\left(\frac{n}{a}\right)^2 + \frac{1}{b^2}t}\right] \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{b}(a-x)\right]}{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi a}{b}\right)},$$

$$\text{где } A_n = \frac{2}{a \operatorname{sh}\left(\frac{\pi a}{b}\right)} \int_0^a \operatorname{sh}\left[\frac{\pi}{b}(x-a)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx.$$

$$19. u = \frac{P}{T} \left[\frac{1}{4}(b^2 - \rho^2) - 2b^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\mu_k}{b}\rho\right)}{\mu_k^3 J_1(\mu_k)} \cos\left(\frac{\mu_k a}{b}t\right) \right], \text{ где } \mu_k \text{ — } k\text{-й по-}$$

ложительный корень функции Бесселя $J_0(x)$.

$$20. u = J_0 \left(\frac{\mu_1}{a} \rho \right) \frac{a^2}{\mu_1^2} \left[1 - \cos \left(\frac{\mu_1}{a} t \right) \right].$$

$$21. u = \cos \left(\sqrt{\left(\frac{\mu_2}{a} \right)^2 + \left(\frac{3\pi}{b} \right)^2} t \right) J_0 \left(\frac{\mu_2}{a} \rho \right) \cos \left(\frac{3\pi}{b} z \right).$$

$$22. u = \left[\frac{1}{25} t - \frac{1}{125} \sin(5t) \right] \cos(3x) \cos(4y).$$

$$23. u = \frac{l^2}{4\pi^2} \sin \left[\left(\frac{2\pi}{l} \right)^2 t \right] \sin \left(\frac{2\pi}{l} x \right).$$

$$24. u = \cos x \cos(2t) + \frac{\varepsilon}{64} t \sin(2t) \cos x.$$

25. Воспользоваться формулой интегрирования по частям

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) v(x, y) dx dy = \int_{\partial\Omega} uv \cos(n, x) ds - \int_{\Omega} u(x, y) \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) dx dy$$

(где Ω — ограниченная область на плоскости, $\vec{n}$ — внешняя единичная нормаль к границе $\partial\Omega$ области Ω) после умножения уравнения свободных колебаний мембраны на $\partial u / \partial t$.

$$26. u = \frac{a}{c\mu_5} J_3 \left(\frac{\mu_5}{a} \rho \right) \cos(3\varphi) \sin \left(\frac{c\mu_5}{a} t \right).$$

27. $u = \cos \varphi \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_1 \left(\frac{\mu_m}{a} \rho \right) \cos \left(\frac{c\mu_m}{a} t \right) + A_0^p \cos \varphi$, где μ_m — m -й положительный корень функции Бесселя $J_1(x)$ и коэффициенты ряда суть

$$A_m = - \frac{A \int_0^a \rho^2 J_1 \left(\frac{\mu_m}{a} \rho \right) d\rho}{\frac{a^3}{2} [J_1'(\mu_m)]^2}.$$

$$28. u = A \frac{J_0 \left(\frac{\omega}{c} \rho \right)}{J_0 \left(\frac{\omega}{c} a \right)} \cos(\omega t) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\frac{\mu_n}{a} \rho \right) \cos \left(\frac{c\mu_n}{a} t \right), \text{ где}$$

$$2A \int_0^a \rho J_0 \left(\frac{\omega}{c} \rho \right) J_0 \left(\frac{\mu_n}{a} \rho \right) d\rho$$

$A_n = \frac{0}{a^2 J_0 \left(\frac{\omega}{c} a \right) [J_1(\mu_n)]^2}$, $c = \text{const}$ из уравнения $u_{tt} = c^2 \Delta u$ и $\mu_n > 0$ — корни уравнения $J_0(x) = 0$.

$$29. u = \sin(2\varphi) \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_2\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right) \cos\left(\frac{c\mu_m}{a}t\right) + A\left(\frac{\rho}{a}\right)^2 \sin(2\varphi), \text{ где}$$

$$A_m = -\frac{2A \int_0^a \rho^3 J_2\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right) d\rho}{a^4 [J_2'(\mu_m)]^2} \text{ и } \mu_m > 0 \text{ — корни уравнения } J_2(x) = 0.$$

$$30. u = A \frac{J_0\left(\frac{\omega\rho}{c}\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{c}a\right)} \sin(\omega t) - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n}{a}\rho\right) \sin\left(\frac{c\mu_n}{a}t\right), \text{ где}$$

$$A_n = \frac{2A\omega}{c\mu_n a J_0\left(\frac{\omega}{c}a\right) [J_1(\mu_n)]^2} \int_0^a \rho J_0\left(\frac{\omega}{c}\rho\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{a}\rho\right) d\rho, \quad c = \text{const из уравне-}$$

ния $u_{tt} = c^2 \Delta u$ и $\mu_n > 0$ — корни уравнения $J_0(x) = 0$.

$$31. u = \frac{1}{c^2 \left[\left(\frac{\mu_1}{a}\right)^2 + \frac{4\pi^2}{h^2} \right]} \times$$

$$\times \left[t - \frac{\sin\left(c\sqrt{\left(\frac{\mu_1}{a}\right)^2 + \frac{4\pi^2}{h^2}}t\right)}{c\sqrt{\left(\frac{\mu_1}{a}\right)^2 + \frac{4\pi^2}{h^2}}} \right] J_0\left(\frac{\mu_1}{a}\rho\right) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right).$$

$$32. u = \frac{\rho^2 P_n(\cos \theta)}{2n\rho_0^{n-1}} t^2 - \frac{2P_n(\cos \theta)}{a^2 n \rho_0^{n-3}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu_k^{(n)})^2} \left(\frac{\sin^2 a \mu_k^{(n)} t}{2\rho_0} \right) \times$$

$$\times \frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{\rho_0}\rho\right)}{\sqrt{\rho}}, \text{ где коэффициенты суть}$$

$$A_k = \frac{\int_0^{\rho_0} \rho^{n+3/2} J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_k^{(n)}}{\rho_0}\rho\right) d\rho}{\frac{\rho_0^2}{2} \left[1 - \frac{n(n+1)}{(\mu_k^{(n)})^2} \right] J_{n+1/2}^2(\mu_k^{(n)})};$$

ρ_0 — радиус сосуда, $\mu_k^{(n)}$ — положительные корни уравнения

$$x J'_{n+1/2}(x) - \frac{1}{2} J_{n+1/2}(x) = 0;$$

a — постоянная в уравнении $u_{tt} = a^2 \Delta u$.

33. У к а з а н и е. Рассмотреть две задачи

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad u_t|_{t=0} = u_1(x); \end{cases} \quad \begin{cases} u_{tt} = a^2 \Delta u + f(x)g(t), \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

$$34. u = A \frac{J_n\left(\frac{\omega}{c}\rho\right)}{J_n\left(\frac{\omega}{c}a\right)} \sin(\omega t) \cos(n\varphi) - \cos(n\varphi) \sum_{m=1}^{\infty} B_m J_n\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right) \sin\left(c \frac{\mu_m}{a} t\right),$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода индекса n , μ_m — m -й положительный корень уравнения $J_n(x) = 0$; коэффициенты суть

$$B_m = \frac{2\omega A}{ca J_0\left(\frac{\omega}{c}a\right) [J'_n(\mu_m)]^2 \mu_m} \int_0^a \rho J_n\left(\frac{\omega}{c}\rho\right) J_n\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right) d\rho;$$

c — постоянная в уравнении $u_{tt} = c^2 \Delta u$.

35. У к а з а н и е. Утверждение устанавливается дифференцированием по переменной t уравнения

$$\frac{\partial^2 u_f}{\partial t^2} = a^2 \Delta u_f.$$

$$36. u = \ln \left(1 + t \int_{|y|=1} f(x + aty) d\omega_y \right), \text{ где } x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3).$$

37. У к а з а н и е. Пусть $u(x, t)$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u = 0, \\ u|_{t=0} = f(x), \quad u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Тогда функция $v(x, t) = u(x, t) + i \int_0^t \Delta u(x, \tau) d\tau$ есть решение задачи Коши

$$\begin{cases} v_t = i \Delta v, \\ v|_{t=0} = f(x). \end{cases}$$

Действительно, имеем

$$v_t = u_t + i \Delta u(x, t), \quad v_{tt} = u_{tt} + i \Delta u_t(x, t),$$

$$\begin{aligned}
 i\Delta v &= i\Delta u - \int_0^t \Delta^2 u(x, \tau) d\tau = i\Delta u + \int_0^t u_{tt}(x, \tau) d\tau = \\
 &= i\Delta u + u_t(x, t) - u_t(x, 0) = i\Delta u + u_t.
 \end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{cases} v_t = u_t + i\Delta u, \\ i\Delta v = u_t + i\Delta u, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} v_t = i\Delta v, \\ v|_{t=0} = f(x). \end{cases}$$

Аналогично доказывается обратное утверждение.

38. $v = \operatorname{Re} u$.

У к а з а н и е. Если $u = u_1 + iu_2$, то $(u_1 + iu_2)_t = i\Delta(u_1 + iu_2)$, откуда $u_{1t} = -\Delta u_2$, $u_{2t} = -\Delta u_1$. Отсюда дифференцированием получаем $u_{1tt} = -\Delta u_{2t}$ и $\Delta u_{2t} = \Delta^2 u_1$. Значит, $u_1 = \operatorname{Re} u$ удовлетворяет уравнению

$$u_{1tt} + \Delta^2 u_1 = 0,$$

причем $u_1|_{t=0} = f(x)$, $u_{1t}|_{t=0} = 0$ (из $u_2|_{t=0} = 0$, следует $\Delta u_2|_{t=0} = 0$, т. е. $u_{1t}|_{t=0} = 0$).

$$39. u = \int_0^t (t - \tau) f(x, \tau) d\tau.$$

У к а з а н и е. Заметим, что если бы функция f не зависела от t , то решением задачи Коши

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = f(x), \end{cases}$$

являлась бы функция $u(x, t) = tf(x)$. Отсюда следует, что для решения нашей задачи нужно воспользоваться методом Дюамеля.

$$40. u = u_0 + tu_1.$$

Глава 3

Параболические задачи

Существует много нестационарных явлений, которые описываются не гиперболическими, а параболическими уравнениями. Уравнения с частными производными второго порядка параболического типа наиболее часто встречаются при изучении процессов теплопроводности и диффузии. Простейшее уравнение параболического типа

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

($a^2 = \text{const}$) обычно называют *уравнением теплопроводности* (здесь $u = u(x, t)$ — температура в точке с абсциссой x в момент времени t).

Это уравнение говорит о том, что температура $u(x, t)$ в точке x в момент времени t увеличивается ($u_t > 0$) или уменьшается ($u_t < 0$) в зависимости от того, положительна или отрицательна частная производная u_{xx} (рис. 3.1 и 3.2; стрелки на рисунках указывают направление изменения температуры — тепло перетекает из более нагретых мест к более холодным местам стержня длины l ; момент времени фиксирован).

Отметим, что к уравнениям параболического типа сводятся некоторые задачи электродинамики.

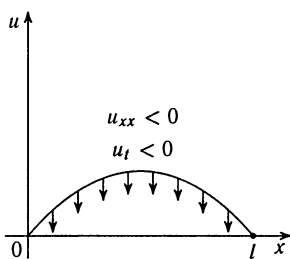


Рис. 3.1

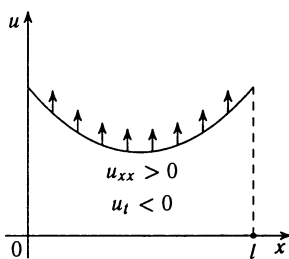


Рис. 3.2

§ 3.1. Метод интегрального преобразования Фурье

Мы уже видели, как применяется преобразование Фурье при решении гиперболических задач. В этом параграфе рассмотрим применение преобразования Фурье при решении параболических задач.

Задачи на прямой и полупрямой.

Пример 1 [4, гл. III, № 55]. Применяя интегральное преобразование Фурье, решить следующую краевую задачу:

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Обозначим через $\hat{u}(\xi, t)$ преобразование Фурье (по переменной x) функции $u(x, t)$, т. е.

$$\hat{u}(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-i\xi x} dx,$$

или, коротко, $\hat{u}(\xi, t) = F[u(x, t)]$, где F — оператор Фурье. Хорошо известно, что

$$F[u_{xx}(x, t)] = (i\xi)^2 F[u(x, t)],$$

т. е.

$$F[u_{xx}(x, t)] = -\xi^2 \hat{u}(\xi, t).$$

Далее,

$$F[u_t(x, t)] = \hat{u}_t(\xi, t), \quad F[u(x, 0)] = \hat{u}(\xi, 0) = 0.$$

Пусть еще $F[f(x, t)] = \hat{f}(\xi, t)$. Тогда уравнение теплопроводности в образах Фурье запишется так:

$$\hat{u}_t(\xi, t) + \xi^2 a^2 \hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi, t).$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно переменной t (в уравнении переменная ξ играет роль параметра).

Мы имеем такую задачу Коши:

$$\begin{cases} \hat{u}_t(\xi, t) + \xi^2 a^2 \hat{u}(\xi, t) = \hat{f}(\xi, t), & t > 0, \\ \hat{u}(\xi, 0) = 0. \end{cases}$$

Решим эту задачу Коши методом Дюамеля. Для этого решим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} v_t(\xi, t) + \xi^2 a^2 v(\xi, t) = 0, & t > \tau, \\ v(\xi, t)|_{t=\tau} = \hat{f}(\xi, \tau). \end{cases}$$

Имеем

$$v(\xi, t; \tau) = \hat{f}(\xi, \tau) e^{-\xi^2(t-\tau)a^2}.$$

Тогда, как известно,

$$\hat{u}(\xi, t) = \int_0^t v(\xi, t; \tau) d\tau = \int_0^t \hat{f}(\xi, \tau) e^{-\xi^2(t-\tau)a^2} d\tau.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\xi, t) e^{i\xi x} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2(t-\tau)a^2} \hat{f}(\xi, \tau) e^{i\xi x} d\xi = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 a^2(t-\tau)} e^{i\xi x} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda\xi} f(\lambda, \tau) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, \tau) d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 a^2(t-\tau)} e^{-i\xi(\lambda-x)} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, \tau) d\lambda e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \sqrt{\frac{\pi}{a^2(t-\tau)}} = \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, \tau) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{d\lambda}{\sqrt{t-\tau}} d\tau. \end{aligned}$$

При этом мы воспользовались хорошо известным преобразованием Фурье функции e^{-bx^2} ($b > 0$). Именно,

$$F[e^{-bx^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-bx^2} e^{-i\lambda x} dx = \frac{1}{\sqrt{2b}} e^{-\frac{\lambda^2}{4b}}.$$

Итак,

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda, \tau) e^{-\frac{(\lambda-x)^2}{4a^2(t-\tau)}} \frac{d\lambda}{\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

Пример 2 [4, гл. III, № 57]. Применяя интегральное преобразование Фурье, решить краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x, t < +\infty, \\ u_x(0, t) = 0, & 0 < t < +\infty, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Применим косинус-преобразование Фурье

$$\hat{u}^c(\lambda, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(\xi, t) \cos(\lambda \xi) d\xi.$$

При этом обратное косинус-преобразование Фурье есть

$$u(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \hat{u}^c(\lambda, t) \cos(\lambda x) d\lambda.$$

Из последнего равенства легко следует, что

$$u_x(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-\lambda) \int_0^{+\infty} \hat{u}^c(\lambda, t) \sin(\lambda x) d\lambda,$$

откуда $u_x(0, t) = 0$, т. е. граничное условие для искомого решения выполнено. Заметим, далее, что

$$\hat{u}_{xx}^c(\lambda, t) = (-\lambda^2) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} u(\xi, t) \cos(\lambda \xi) d\xi, \quad \hat{f}^c(\lambda) = \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos(\lambda \xi) d\xi.$$

Таким образом, получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{cases} \hat{u}_t^c(\lambda, t) + a^2 \lambda^2 \hat{u}^c(\lambda, t) = 0, & t > 0, \\ \hat{u}^c(\lambda, 0) = \hat{f}^c(\lambda) \end{cases}$$

(здесь λ — параметр).

Решение этой задачи имеет вид

$$\hat{u}^c(\lambda, t) = \hat{f}^c(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье, находим

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^c(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos(\lambda x) d\lambda = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f(\xi) \cos(\lambda \xi) d\xi \right) \cos(\lambda x) e^{-a^2 \lambda^2 t} d\lambda = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos(\lambda \xi) \cos(\lambda x) d\lambda = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} [\cos \lambda(x + \xi) + \cos \lambda(x - \xi)] d\lambda = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\xi) d\xi \left[\int_0^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(x + \xi) d\lambda + \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(x - \xi) d\lambda \right] = \\
&= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \left[e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi.
\end{aligned}$$

При этом мы учли, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 y^2} \cos(\beta y) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{\beta^2}{2\alpha^2}} \quad (\alpha, \beta > 0).$$

Пример 3 [4, гл. III, № 113]. Найти распределение температуры вдоль бесконечного стержня, составленного из двух однородных стержней, соприкасающихся в точке $x = 0$ и обладающих характеристиками a_1 , k_1 и a_2 , k_2 соответственно. Начальная температура есть

$$u(x, 0) = \begin{cases} T_1, & \text{если } x < 0, \\ T_2, & \text{если } x > 0 \end{cases}$$

(здесь a_1 и a_2 — постоянные из уравнения теплопроводности; k_1 и k_2 — коэффициенты теплопроводности).

Решение. Из формулы Пуассона

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(\xi, 0) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi,$$

дающей распределение температуры вдоль неограниченного стержня при начальном условии $u(x, 0)$, следует, что решением уравнения теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0,$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \begin{cases} T^* & \text{для } x > 0, \\ T & \text{для } x < 0 \end{cases}$$

является функция

$$u(x, t) = \frac{T + T^*}{2} + \frac{T^* - T}{2} \Phi \left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} \right),$$

где функция $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$ — так называемый *интеграл ошибок*.

Для решения исходной задачи будем рассуждать следующим образом. Продолжим левый стержень (с температурой T_1) вправо, чтобы получился неограниченный однородный стержень. Затем найдем температуру полученного неограниченного стержня при условии, что его начальная температура есть

$$u_1(x, 0) = \begin{cases} T_1, & \text{если } x < 0, \\ T_1^*, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

где T_1^* — некоторая постоянная.

Аналогично поступаем с правым полуограниченным стержнем, считая, что

$$u_2(x, 0) = \begin{cases} T_2, & \text{если } x > 0, \\ T_2^*, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Постоянные T_1^* и T_2^* находим из условий сопряжения:

1) непрерывность температуры в точке $x = 0$

$$u_1(0, t) = u_2(0, t);$$

2) непрерывность теплового потока в точке $x = 0$

$$k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) = k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t).$$

По сказанному имеем

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{T_1 + T_1^*}{2} + \frac{T_1^* - T_1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \\ u_2(x, t) &= \frac{T_2 + T_2^*}{2} + \frac{T_2 - T_2^*}{2} \Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right). \end{aligned}$$

Условия сопряжения дают систему уравнений для определения T_1^* и T_2^*

$$\begin{cases} T_1^* - T_2^* = T_2 - T_1, \\ \frac{k_1}{a_1}(T_1^* - T_1) = \frac{k_2}{a_2}(T_2 - T_2^*). \end{cases}$$

Решив ее, найдем

$$T_1^* = \frac{2\frac{k_2}{a_2}T_2 + T_1\left(\frac{k_1}{a_1} - \frac{k_2}{a_2}\right)}{\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2}}, \quad T_2^* = \frac{2\frac{k_1}{a_1}T_1 + T_2\left(\frac{k_2}{a_2} - \frac{k_1}{a_1}\right)}{\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2}}.$$

Тогда

$$u_1(x, t) = T_0 + (T_0 - T_1)\Phi\left(\frac{-x}{2a_1\sqrt{t}}\right), \quad -\infty < x < 0,$$

$$u_2(x, t) = T_0 + (T_0 - T_2)\Phi\left(\frac{x}{2a_2\sqrt{t}}\right), \quad 0 < x < +\infty,$$

где

$$T_0 = \frac{T_1 \frac{k_1}{a_1} + T_2 \frac{k_2}{a_2}}{\frac{k_1}{a_1} + \frac{k_2}{a_2}}.$$

Задачи в трехмерном пространстве и полупространстве.

Пример 4 [4, гл. V, № 60]. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + g(x, y, z, t), \\ \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x, y, z < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся преобразованием Фурье по пространственным переменным:

$$\hat{u}(\lambda, \mu, \nu, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, z, t) e^{-i(\lambda x + \mu y + \nu z)} dx dy dz,$$

$$\hat{g}(\lambda, \mu, \nu, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(x, y, z, t) e^{-i(\lambda x + \mu y + \nu z)} dx dy dz.$$

Получим задачу Коши в терминах образов Фурье

$$\begin{cases} \hat{u}_t + a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\hat{u} = \hat{g}(\lambda, \mu, \nu, t), \quad t > 0, \\ \hat{u}|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Отсюда, применяя метод Дюамеля, будем иметь

$$\hat{u}(\lambda, \mu, \nu, t) = \int_0^t \hat{g}(\lambda, \mu, \nu, \tau) e^{-a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(t-\tau)} d\tau.$$

В силу обратного преобразования Фурье будем иметь

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \hat{u}(\lambda, \mu, \nu, t) e^{i(\lambda x + \mu y + \nu z)} d\lambda d\mu d\nu =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^t \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta, \zeta, \tau) e^{-i(\lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta)} d\xi d\eta d\zeta \right) \times \right. \\
&\quad \left. \times e^{-a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(t-\tau)} d\tau \right) e^{i(\lambda x + \mu y + \nu z)} d\lambda d\mu d\nu = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^t d\tau \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta, \zeta, \tau) d\xi d\eta d\zeta \times \\
&\quad \times \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(t-\tau)} e^{i[(x-\xi)\lambda + (y-\eta)\mu + (z-\zeta)\nu]} d\lambda d\mu d\nu.
\end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned}
&\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(t-\tau) + i[(x-\xi)\lambda + (y-\eta)\mu + (z-\zeta)\nu]} d\lambda d\mu d\nu = \\
&= \frac{\pi^{3/2}}{a^3(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2t}}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^3} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \times \\
&\quad \times \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} g(\xi, \eta, \zeta, \tau) d\xi d\eta d\zeta.
\end{aligned}$$

Замечание 1. Пусть $g(x, y, z, t)$ не зависит от времени t , т. е. имеем задачу Коши вида

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + g(x, y, z), \\ \quad \quad \quad -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x, y, z < +\infty. \end{cases}$$

Тогда

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi, \eta, \zeta)}{r} \left[1 - \Phi \left(\frac{r}{2a\sqrt{t}} \right) \right] d\xi d\eta d\zeta,$$

где

$$\Phi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-p^2} dp, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}.$$

В самом деле, обозначим $\omega = \frac{r}{2a\sqrt{t-\tau}}$. Тогда

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^3} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \times \\ &\quad \times \iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} g(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta, \zeta) \left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \frac{4a}{r} \int_{\frac{r}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\omega^2} d\omega \right) d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi, \eta, \zeta)}{r} \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} - \int_0^{\frac{r}{2a\sqrt{t}}} e^{-\omega^2} d\omega \right) \right] d\xi d\eta d\zeta = \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\xi, \eta, \zeta)}{r} \left[1 - \Phi\left(\frac{r}{2a\sqrt{t}}\right) \right] d\xi d\eta d\zeta. \end{aligned}$$

Замечание 2. Пусть $g(x, y, z, t)$ не зависит от z . Тогда имеем задачу Коши вида

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}) + g(x, y, t), & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$

Очевидно, в этом случае решение есть

$$u(x, y, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t \frac{d\tau}{t-\tau} \iint_{-\infty}^{+\infty} g(\xi, \eta, \tau) e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi d\eta.$$

Пример 5 [4, гл. V, № 67]. Найти температуру в верхнем полупространстве, если начальная температура полупространства равна нулю, температура на плоскости $z = 0$ равна нулю, в самом полупространстве действуют тепловые источники с плотностью $f(x, y, z, t)$, т. е. имеем задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + f(x, y, z, t), \\ \quad \quad \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad z > 0, \quad t > 0, \\ u|_{z=0} = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad t \geq 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty, \quad z \geq 0. \end{cases}$$

Решение. В этом случае преобразование Фурье возьмем в виде

$$\hat{u}(\lambda, \mu, \nu, t) = \frac{1}{2^{1/2}\pi^{3/2}} \iint_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} u(x, y, z, t) e^{-i(\lambda x + \mu y)} \sin(\nu z) dx dy dz.$$

Тогда

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{2^{1/2}\pi^{3/2}} \iint_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \hat{u}(\lambda, \mu, \nu, t) e^{i(\lambda x + \mu y)} \sin(\nu z) d\lambda d\mu d\nu$$

(заметим, что отсюда следует выполнение условия $u|_{z=0} = 0$). Уравнение с частными производными в образах Фурье примет вид

$$\begin{cases} \hat{u}_t + a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)\hat{u} = \hat{f}(\lambda, \mu, \nu, t), & t > 0, \\ \hat{u}|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\hat{u}(\lambda, \mu, \nu, t) = \int_0^t \hat{f}(\lambda, \mu, \nu, \tau) e^{-a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(t-\tau)} d\tau.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= \frac{1}{2^{1/2}\pi^{3/2}} \iint_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \hat{u}(\lambda, \mu, \nu, t) e^{i(\lambda x + \mu y)} \sin(\nu z) d\lambda d\mu d\nu = \\ &= \frac{1}{2^{1/2}\pi^{3/2}} \iint_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\int_0^t \frac{1}{2^{1/2}\pi^{3/2}} \left(\iint_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi, \eta, \zeta, \tau) \times \right. \right. \\ &\quad \times e^{-i(\lambda\xi + \mu\eta)} \sin(\nu\zeta) d\xi d\eta d\zeta \Big) e^{-a^2(\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2)(t-\tau)} d\tau \Big) \times \\ &\quad \times e^{i(\lambda x + \mu y)} \sin(\nu z) d\lambda d\mu d\nu = \\ &= \frac{1}{2\pi^3} \int_0^t d\tau \iint_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \hat{f}(\xi, \eta, \zeta, \tau) d\xi d\eta d\zeta \times \\ &\quad \times \iint_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-a^2(\lambda^2 + \mu^2)(t-\tau)} e^{i[(x-\xi)\lambda + (y-\eta)\mu]} e^{-a^2\nu^2(t-\tau)} \times \\ &\quad \times \sin(\nu\zeta) \sin(\nu z) d\lambda d\mu d\nu. \end{aligned}$$

Вычислим тройной интеграл

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2(\lambda^2+\mu^2)(t-\tau)} e^{i[(x-\xi)\lambda+(y-\eta)\mu]} d\lambda d\mu \int_0^{+\infty} e^{-a^2\nu^2(t-\tau)} \sin(\nu\zeta) \sin(\nu z) d\nu = \\
 &= \frac{\pi}{a^2(t-\tau)} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} \times \\
 & \quad \times \frac{1}{2} \left[\int_0^{+\infty} e^{-a^2\nu^2(t-\tau)} \cos \nu(\zeta-z) d\nu - \int_0^{+\infty} e^{-a^2\nu^2(t-\tau)} \cos \nu(\zeta+z) d\nu \right] = \\
 &= \frac{\pi}{2a^2(t-\tau)} e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2(t-\tau)}} \times \\
 & \quad \times \left[\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(\zeta-z)^2}{4a^2(t-\tau)}} - \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-\tau}} e^{-\frac{(\zeta+z)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] = \\
 &= \frac{\pi^{3/2}}{4a^3(t-\tau)^{3/2}} \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(\zeta-z)^2}{4a^2(t-\tau)}} + e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(\zeta+z)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right].
 \end{aligned}$$

Итак, искомое решение есть

$$\begin{aligned}
 u(x, y, z, t) = & \frac{1}{(2a\sqrt{\pi})^3} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} \int_0^{+\infty} d\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta, \tau) \times \\
 & \times \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(\zeta-z)^2}{4a^2(t-\tau)}} - e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(\zeta+z)^2}{4a^2(t-\tau)}} \right] d\xi d\eta.
 \end{aligned}$$

§ 3.2. Метод интегрального преобразования Лапласа

С применением преобразования Лапласа к гиперболическим задачам мы уже знакомы. В этом параграфе мы решим несколько параболических задач с использованием преобразования Лапласа. Заметим, что блок-схема решения задач этим методом такая же, как и в гиперболическом случае.

Пример 1 [3, гл. 5, № 832]. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u - f(x), & 0 < x, t < +\infty, \\ u(0, t) = t, & u_x(0, t) = 0, & +\infty > t \geq 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Решение. Воспользуемся преобразованием Лапласа по переменной x . Учитывая свойство этого преобразования, имеем

$$\begin{aligned}u(x, t) &\doteq U(p, t), \\u_t(x, t) &\doteq U_t(p, t), \\u_x(x, t) &\doteq pU(p, t) - t, \\u_{xx}(x, t) &\doteq p^2U(p, t) - pt, \quad f(x) \doteq F(p).\end{aligned}$$

Из уравнения (3.1), применяя к левой и правой его частям преобразование Лапласа, находим

$$L[u_t] = L[u_{xx}] + L[u] - L[f(x)],$$

или

$$U_t(p, t) = p^2U(p, t) - pt + U(p, t) - F(p).$$

Мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка (в этом уравнении p играет роль параметра) по переменной t . Его можно переписать так:

$$U_t - (1 + p^2)U = -[F(p) + pt].$$

Общее решение этого уравнения есть функция

$$U(p, t) = Ce^{(1+p^2)t} + \frac{p}{(1+p^2)^2} + \frac{F(p)}{1+p^2} + \frac{p}{1+p^2}t.$$

Заметим теперь, что постоянную C здесь нужно считать равной нулю, ибо если $C \neq 0$, то $U(p, t) \rightarrow \infty$ при $p \rightarrow \infty$ (нарушается необходимое условие существования изображения). Таким образом,

$$U(p, t) = \frac{p}{(1+p^2)^2} + \frac{F(p)}{1+p^2} + \frac{p}{1+p^2}t.$$

Теперь осталось вернуться к оригиналу $u(x, t)$. Имеем

$$\frac{p}{1+p^2} \doteq \cos x,$$

и по теореме о свертке получим

$$\frac{p}{(1+p^2)^2} \doteq \frac{1}{2}x \sin x, \quad \frac{F(p)}{1+p^2} \doteq \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt.$$

Следовательно, решение нашей задачи есть

$$u(x, t) = t \cos x + \frac{1}{2}x \sin x + \int_0^x f(t) \sin(x-t) dt.$$

Пример 2 [3, гл. 5, № 837(в)]. Начальная температура тонкого одно-родного стержня равна нулю. Определить температуру $u(x, t)$ в стержне при $t > 0$, если стержень полубесконечен ($0 < x < +\infty$) и $u(0, t) = \mu(t)$, где $\mu(t)$ — заданная функция.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x, t < +\infty, \\ u(x, 0) = 0, & +\infty > x \geq 0, \\ u(0, t) = \mu(t), & +\infty > t \geq 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Для решения этой задачи воспользуемся преобразованием Лапласа по временной переменной t . Снова учитывая свойства этого преобразования, имеем

$$u(x, t) \doteq U(x, p), \quad u_t(x, t) \doteq pU(x, p), \quad u_{xx}(x, t) \doteq U_{xx}(x, p).$$

Из уравнения (3.2) следует, что

$$L[u_t] = a^2 L[u_{xx}],$$

или

$$pU(x, p) = a^2 U_{xx}(x, p),$$

или

$$U_{xx}(x, p) - \frac{p}{a^2} U(x, p) = 0.$$

Мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка по переменной x (в этом уравнении p играет роль параметра). К этому уравнению у нас есть два дополнительных условия. Действительно, нам известна функция $U(x, p)$ при $x = 0$, что следует из граничного условия задачи (3.2). Если обозначить через $M(p)$ изображение функции $\mu(t)$, то запишем

$$\mu(t) \doteq M(p).$$

Далее, из физического смысла задачи, очевидно, нужно считать, что $U(\infty, p) = 0$. Поэтому приходим к такой краевой задаче:

$$\begin{cases} U_{xx}(x, p) - \frac{p}{a^2} U(x, p) = 0, & 0 < x < +\infty, \\ U(0, p) = M(p), & U(\infty, p) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Общее решение уравнения (3.3) есть

$$U(x, p) = C_1 e^{\frac{\sqrt{p}}{a} x} + C_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a} x},$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Ясно, что $C_1 = 0$, ибо $U(x, p) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \infty$ при $C_1 \neq 0$. Поэтому

$$U(x, p) = C_2 e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Полагая здесь $x = 0$, будем иметь $U(0, p) = C_2$. Но по условию $U(0, p) = M(p)$. Значит, $C_2 = M(p)$. Таким образом,

$$u(x, p) = M(p) e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}.$$

Осталось вернуться к оригиналу $u(x, t)$. Учитывая, что

$$M(p) \doteq \mu(t), \quad e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x} \doteq \frac{x}{2a\sqrt{\pi t^{3/2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}},$$

по теореме о свертке получим

$$u(x, t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau.$$

Пример 3. Начальное напряжение в полуограниченном однородном проводе $0 < x < +\infty$ равно нулю. Самоиндукция и утечка единицы длины провода пренебрежимо малы. Начиная с момента $t = 0$ к концу провода ($x = 0$) прикладывается постоянная электродвижущая сила E_0 . Найти напряжение в проводе.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} v_t = \frac{1}{CR} v_{xx}, & 0 < x, t < +\infty, \\ v(x, 0) = 0, & 0 \leq x < +\infty, \\ v(0, t) = E_0, & 0 \leq t < +\infty \end{cases} \quad (3.4)$$

(здесь C и R — емкость и сопротивление единицы длины провода, $v = v(x, t)$ — напряжение в проводе с координатой x в момент времени t).

Применим преобразование Лапласа по временной переменной t к обоим частям уравнения (3.4):

$$L[v_t] = \frac{1}{CR} L[v_{xx}].$$

Тогда, если обозначить $V(x, s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} v(x, t) dt$ (s — действительная переменная из промежутка $(0, +\infty)$), с учетом

$$v(x, t) \doteq V(x, s), \quad v_t(x, t) \doteq sV(x, s),$$

$$E_0 \doteq \frac{E_0}{s}, \quad v_{xx}(x, t) \doteq V_{xx}(x, s)$$

приходим к граничной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения относительно переменной x

$$\begin{cases} V_{xx}(x, s) - sCRV(x, s) = 0, & 0 < x < +\infty, \\ V(0, s) = \frac{E_0}{s} \end{cases}$$

(в этом уравнении s играет роль параметра).

У нас получилось обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, но только с одним граничным условием. Однако второе граничное условие у нас тоже есть. Из физических соображений следует, что $V(x, s) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$. Итак, на самом деле мы имеем два граничных условия.

Общее решение нашего уравнения есть

$$V(x, s) = C_1 e^{\sqrt{sCR}x} + C_2 e^{-\sqrt{sCR}x},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Сразу отметим, что $C_1 = 0$ (иначе $V(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow +\infty$). Поэтому

$$V(x, s) = C_2 e^{-\sqrt{sCR}x}.$$

Положим здесь $x = 0$. Получим $V(0, s) = C_2$. Но $V(0, s) = \frac{E_0}{s}$. Значит, $V(x, s) = \frac{E_0}{s} e^{-\sqrt{sCR}x}$. Осталось обратить преобразование Лапласа. По табл. 2.2 находим, что напряжение есть

$$v(x, t) = E_0 \left[1 - \Phi \left(\frac{x\sqrt{CR}}{2\sqrt{t}} \right) \right],$$

где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx$ — интеграл ошибок.

§ 3.3. Метод Фурье (метод разделения переменных)

С этим методом мы уже имели дело, изучая гиперболические задачи. Блок-схема применения метода разделения переменных для решения параболических задач аналогична блок-схеме метода Фурье для решения гиперболических задач.

Случай отрезка.

Пример 1. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \cos(2x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Применяя метод разделения переменных, т. е. находя решение вспомогательной задачи

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases}$$

в виде $u(x, t) = X(x)T(t)$, получим задачу Штурма—Лиувилля для определения функции $X(x)$

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, & 0 < x < \pi, \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$$

с решением $\lambda_n = n^2$, $X_n(x) = \cos(nx)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) и уравнение

$$T' + \lambda T = 0$$

для определения $T(t)$. Поскольку $\lambda_n = n^2$ $n = 0, 1, \dots$, то

$$T_n(t) = C_n e^{-n^2 t}.$$

«Атомы» решения нашей задачи суть функции

$$u_n(x, t) = T_n(t)X_n(x)$$

или

$$u_n(x, t) = e^{-n^2 t} \cos(nx).$$

Поэтому решение исходной задачи дается рядом

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-n^2 t} \cos(nx).$$

В нашем случае, учитывая начальное условие, получим ($C_2 = 1$, $C_n = 0$, $n \neq 2$)

$$u(x, t) = e^{-4t} \cos(2x).$$

Пример 2. Решить смешанную задачу

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + \sin t \sin 2x, & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Функцию $u(x, t)$ ищем в виде $u(x, t) = f(t) \sin(2x)$. Подставим это выражение в уравнение. Получим

$$f' \sin(2x) = -4f \sin(2x) + \sin t \sin(2x),$$

откуда

$$\begin{cases} f' + 4f = \sin t, & t \geq 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Решив эту задачу Коши, найдем $f(t) = \frac{1}{17}e^{-4t} - \frac{1}{17}\cos t + \frac{4}{17}\sin t$. Следовательно,

$$u(x, t) = \frac{\sin(2x)}{17}(e^{-4t} - \cos t + 4 \sin t).$$

Случай круга.

Пример 3. Решить задачу о распространении тепла в круге радиуса b (рис. 3.3).

Математическая постановка задачи:

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & 0 < \rho < b, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = J_0\left(\frac{\mu_{0,3}}{b}\rho\right), & 0 \leq \rho \leq b, \\ u|_{\rho=b} = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

где $\mu_{0,n}$ — n -й положительный корень уравнения $J_0(x) = 0$.

Решение. Записав оператор Лапласа $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ в полярной системе координат, будем иметь уравнение

$$u_t = a^2 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right].$$

Поскольку начальное и граничное условия не зависят от φ , то и решение $u(\rho, \varphi, t)$ также не зависит от φ . Поэтому $u = u(\rho, t)$, т. е. получаем уравнение

$$u_t = a^2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right).$$

Ищем решение уравнения в виде $u(\rho, t) = R(\rho)T(t)$ с учетом $u(b, t) = 0$. Подставляя это выражение в уравнение, будем иметь

$$RT' = a^2 \frac{1}{\rho} T \frac{d}{d\rho} (\rho R'),$$

или, разделяя переменные,

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho R')}{R} = -\lambda.$$

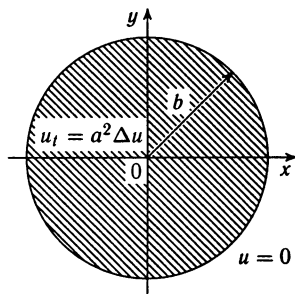


Рис. 3.3. Распространение тепла в круге

Отсюда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$1) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho R') + R\lambda = 0;$$

$$2) T' + \lambda a^2 T = 0.$$

Обратимся к рассмотрению уравнения 1). Его можно переписать так:

$$R'' + \frac{1}{\rho} R' + R\lambda = 0, \quad \text{или} \quad \rho^2 R'' + \rho R' + \rho^2 \lambda R = 0.$$

Сделаем замену переменной

$$x = \sqrt{\lambda} \rho.$$

Тогда, обозначив $y(x)|_{x=\sqrt{\lambda}\rho} = R(\rho)$, получим

$$R' = y' \sqrt{\lambda}, \quad R'' = y'' \lambda.$$

Значит, имеем уравнение

$$x^2 y'' + x y' + x^2 y = 0.$$

Это уравнение Бесселя индекса нуль. Его решение есть

$$y(x) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x),$$

где $J_0(x)$ и $Y_0(x)$ — функции Бесселя индекса нуль первого и второго рода соответственно, C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Очевидно, что $C_2 = 0$, ибо решение нашей задачи конечно в центре круга. Поэтому $y(x) = C J_0(x)$, или (считая $C = 1$)

$$R(\rho) = J_0(\sqrt{\lambda} \rho).$$

По условию $R(b) = 0$. Значит,

$$J_0(\sqrt{\lambda} b) = 0.$$

Обозначив через $\mu_{0,n}$ положительные корни функции Бесселя J_0 , найдем собственные значения нашей задачи $\lambda_n = \left(\frac{\mu_{0,n}}{b}\right)^2$, где $n = 1, 2, \dots$

Собственные функции суть

$$R_n(\rho) = J_0\left(\frac{\mu_{0,n}}{b} \rho\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Из уравнения 2) находим теперь $T_n(t)$. Имеем

$$T_n(t) = C_n e^{-\left(\frac{\mu_{0,n} a}{b}\right)^2 t}.$$

Таким образом, решение нашей задачи представляется рядом

$$u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\left(\frac{\mu_{0,n} a}{b}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_{0,n}}{b} \rho\right).$$

Используя начальное условие, легко находим, что $C_3 = 1$, $C_n = 0$, если $n \neq 3$. Итак, искомое решение есть

$$u(\rho, t) = e^{-\left(\frac{\mu_{0,3}}{b}a\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_{0,3}}{b}\rho\right).$$

Случай прямоугольника.

Пример 4. Решить задачу о распространении тепла в прямоугольнике (рис. 3.4).

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & 0 < x < b_1, \quad 0 < y < b_2, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \sin \frac{2\pi x}{b_1} \sin \frac{\pi y}{b_2}, & 0 \leq x \leq b_1, \quad 0 \leq y \leq b_2, \\ u|_{\Gamma} = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$u|_{t=0} = \sin \frac{2\pi x}{b_1} \sin \frac{\pi y}{b_2}, \quad 0 \leq x \leq b_1, \quad 0 \leq y \leq b_2, \quad (3.7)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad t \geq 0, \quad (3.8)$$

где Γ — граница прямоугольника.

Решение задачи (3.6), (3.8) ищем в виде

$$u(x, y, t) = T(t)V(x, y).$$

Подставляя это выражение в уравнение теплопроводности, получим

$$T'V = a^2 T(V_{xx} + V_{yy}),$$

или

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{V_{xx} + V_{yy}}{V} = -\lambda.$$

Отсюда получаем два уравнения

$$V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \quad (3.9)$$

$$T' + \lambda a^2 T = 0 \quad (3.10)$$

(где (3.9) — уравнение с частными производными, (3.10) — обыкновенное дифференциальное уравнение).

Обратимся к уравнению (3.9). Из граничного условия $u|_{\Gamma} = 0$ следует, что $V|_{\Gamma} = 0$ (здесь Γ — граница прямоугольника). Рассмотрим задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} V_{xx} + V_{yy} + \lambda V = 0, \\ V|_{\Gamma} = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

Ищем решение этой задачи в виде

$$V(x, y) = X(x)Y(y).$$

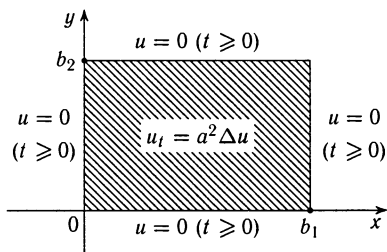


Рис. 3.4. Распространение тепла в прямоугольнике

Подставим это выражение в уравнение (3.11). Получим

$$X''Y + XY'' + \lambda XY = 0,$$

или

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \lambda = 0,$$

или

$$\frac{Y''}{Y} + \lambda = -\frac{X''}{X} = \mu.$$

Отсюда имеем два уравнения

$$X'' + \mu X = 0, \quad (3.12)$$

$$Y'' + (\lambda - \mu)Y = 0. \quad (3.13)$$

Для уравнения (3.12) из граничного условия $V|_{\Gamma} = 0$ вытекает $X(0) = X(b_1) = 0$ (соответственно для уравнения (3.13) $Y(0) = Y(b_2) = 0$).

Задача Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} X'' + \mu X = 0, & 0 < x < b_1, \\ X(0) = X(b_1) = 0 \end{cases}$$

ранее неоднократно рассматривалась, и мы сразу выписываем

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{b_1}x\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Аналогично для уравнения (3.13) будем иметь граничные условия

$$Y(0) = Y(b_2) = 0, \quad \lambda_{nm} - \mu_n = \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2, \quad Y_m(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{b_2}y\right),$$

где $n = 1, 2, \dots; m = 1, 2, \dots$

Таким образом,

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b_2}\right)^2, \quad V_{nm} = \sin\left(\frac{n\pi}{b_1}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b_2}y\right).$$

Из уравнения (3.10) следует

$$T_{nm}(t) = c_{nm} e^{-\left[\left(\frac{n\pi a}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b_2}\right)^2\right]t}.$$

Решение исходной задачи записывается в виде ряда

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} e^{-\left[\left(\frac{n\pi a}{b_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi a}{b_2}\right)^2\right]t} \sin\left(\frac{n\pi}{b_1}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b_2}y\right).$$

Учитывая начальное условие, получим $c_{21} = 1$. Все остальные коэффициенты c_{nm} равны нулю. Поэтому решение

$$u(x, y, t) = e^{-\left[\frac{4\pi^2 a^2}{b_1^2} + \frac{\pi^2 a^2}{b_2^2}\right]t} \times \\ \times \sin\left(\frac{2\pi x}{b_1}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b_2}\right).$$

Случай цилиндра.

Пример 5. Найти температуру ограниченного круглого цилиндра (рис. 3.5), поверхность которого поддерживается при температуре, равной нулю, а начальная температура есть

$$u|_{t=0} = J_0\left(\frac{\mu_{0,5}}{b}\rho\right) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right).$$

Решение. Математическая постановка задачи:

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & 0 < \rho < b, \quad 0 < z < h, \quad t > 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = J_0\left(\frac{\mu_{0,5}}{b}\rho\right) \sin\left(\frac{2\pi}{h}z\right), & 0 \leq \rho \leq b, \quad 0 \leq z \leq h, \end{cases} \quad (3.15)$$

$$\begin{cases} u|_{z=0} = u|_{z=h} = 0, \quad u|_{\rho=b} = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

Здесь

$$\Delta u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Поскольку начальное и граничное условия не зависят от φ , то решение задачи также не зависит от φ , так что $u = u(\rho, z, t)$. Ищем решение задачи (3.14), (3.16) в виде

$$u(\rho, z, t) = R(\rho)Z(z)T(t).$$

Подставляя эту функцию в уравнение (3.14)

$$u_t = a^2 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right],$$

получим

$$RZT' = a^2 \left[ZT \cdot \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} (\rho R') + RTZ'' \right],$$

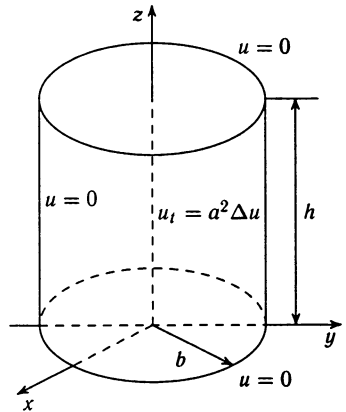


Рис. 3.5. Распространение тепла в цилиндре

откуда делением на произведение RZT найдем

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho R')}{R} + \frac{Z''}{Z} = -\lambda.$$

Отсюда получаем два уравнения

$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho R')}{R} + \frac{Z''}{Z} = -\lambda, \quad (3.17)$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0. \quad (3.18)$$

Из уравнения (3.17) следует, что

$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho R')}{R} + \lambda = -\frac{Z''}{Z} = \mu. \quad (3.19)$$

Таким образом, имеем задачу Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} Z'' + \mu Z = 0, & 0 < z < h, \\ Z(0) = Z(h) = 0. \end{cases}$$

Ее решение есть

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \quad Z_n(z) = \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

Из системы равенств (3.19) следует, что

$$\frac{\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho R')}{R} = \mu - \lambda,$$

или

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \rho^2 \nu R = 0, \quad (3.20)$$

если обозначить $\mu - \lambda = -\nu$.

С уравнением (3.20) мы уже встречались и оно имеет решение $R(\rho) = J_0(\sqrt{\nu}\rho)$, где $J_0(x)$ — функция Бесселя индекса нуль первого порядка. Из граничного условия $u|_{\rho=b} = 0$ вытекает, что $R(b) = 0$ т. е. $J_0(\sqrt{\nu}b) = 0$, откуда

$$\nu_m = \left(\frac{\mu_{0m}}{b}\right)^2, \quad m = 1, 2, \dots$$

Следовательно,

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 + \left(\frac{\mu_{0m}}{b}\right)^2$$

— собственные значения и

$$V_{nm} = J_0\left(\frac{\mu_{0m}}{b}\rho\right) \sin\left(\frac{n\pi}{h}z\right)$$

— собственные функции нашей задачи. Из уравнения (3.18) теперь следует, что

$$T_{nm} = c_{nm} e^{-a^2 \lambda_{nm} t}.$$

Таким образом, решение имеет вид

$$u(\rho, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} e^{-a^2 \lambda_{nm} t} J_0 \left(\frac{\mu_{0m}}{b} \rho \right) \sin \left(\frac{n\pi}{h} z \right).$$

Из начального условия $u|_{t=0} = J_0 \left(\frac{\mu_{05}}{b} \rho \right) \sin \left(\frac{2\pi}{h} z \right)$ определяем коэффициенты c_{nm} . Именно, имеем $c_{25} = 1$, $c_{nm} = 0$, если $n \neq 2$, $m \neq 5$.

Итак,

$$u(\rho, z, t) = e^{-a^2 \pi^2 \left[\left(\frac{4}{h} \right)^2 + \left(\frac{\mu_{05}}{b} \right)^2 \right] t} J_0 \left(\frac{\mu_{05}}{b} \rho \right) \sin \left(\frac{2\pi}{h} z \right).$$

Пример 6 [4, гл. V, № 28]. Найти температуру бесконечного круглого цилиндра при условии, что начальная температура есть

$$u|_{t=0} = u_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right), \quad u_0 = \text{const},$$

а на его поверхности поддерживается температура, равная нулю. Найти в условиях регулярного режима приближенное выражение для температуры, средней по поперечному сечению цилиндра.

Решение. Математическая постановка задачи имеет вид

$$\begin{cases} u_t = a^2 \left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right), & 0 < \rho < \rho_0, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(\rho, 0) = u_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right), & 0 \leq \rho \leq \rho_0, \\ u(\rho_0, t) = 0, & 0 \leq t < +\infty. \end{cases} \quad (3.21)$$

Предварительно рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 \left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} \right), & 0 < \rho < \rho_0, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(\rho_0, t) = 0, & 0 \leq t < +\infty. \end{cases} \quad (3.22)$$

Решение задачи (3.22) будем искать в виде

$$u(\rho, t) = R(\rho)T(t). \quad (3.23)$$

Подставляя функцию (3.23) в уравнение (3.22), получим

$$RT' = a^2 T \left(R'' + \frac{1}{\rho} R' \right),$$

откуда после деления на RT обеих частей этого равенства найдем

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{R'' + \frac{1}{\rho} R'}{R} = -\lambda,$$

где λ — постоянная разделения.

Отсюда имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$\rho^2 R'' + \rho R' + \lambda \rho^2 R = 0, \quad (3.24)$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0. \quad (3.25)$$

Общее решение уравнения (3.24) будет иметь вид

$$R(\rho) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} \rho) + C_2 Y_0(\sqrt{\lambda} \rho).$$

Поскольку $|R(0)| < +\infty$, то $C_2 = 0$ (иначе $|R(\rho)| \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow 0$, так как $|Y_0(\sqrt{\lambda} \rho)| \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow 0$). Таким образом,

$$R(\rho) = C_1 J_0(\sqrt{\lambda} \rho).$$

Из граничного условия $u(\rho_0, t) = 0$ следует $R(\rho_0) = 0$. Поэтому $J_0(\sqrt{\lambda} \rho_0) = 0$, откуда $\lambda_n = \left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\right)^2$, где μ_n — положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Значит, $R_n(\rho) = J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0} \rho\right)$.

Теперь из уравнения (3.25) при $\lambda = \lambda_n$ находим

$$T_n(t) = C e^{-\left(\frac{\mu_n}{\rho_0} a\right)^2 t},$$

где C — произвольная постоянная.

Таким образом, «атомами» решения задачи (3.22) будут функции

$$u_n(\rho, t) = J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0} \rho\right) e^{-\left(\frac{\mu_n}{\rho_0} a\right)^2 t}.$$

Решение исходной задачи (3.21) дается рядом

$$u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\mu_n}{\rho_0} a\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_n}{\rho_0} \rho\right), \quad (3.26)$$

где постоянные A_n подлежат определению. Постоянные A_n находим из начального условия

$$u(\rho, 0) = u_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right).$$

Полагая в (3.26) $t = 0$, будем иметь

$$u(\rho, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0 \left(\frac{\mu_n}{\rho_0} \rho \right).$$

Следовательно,

$$A_n = \frac{2}{\rho_0^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^{\rho_0} \rho u_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2} \right) J_0 \left(\frac{\mu_n}{\rho_0} \rho \right) d\rho.$$

С таким интегралом мы уже встречались. Поэтому выписываем сразу ответ:

$$A_n = \frac{8u_0}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}.$$

Значит, решение исходной задачи есть

$$u(\rho, t) = 8u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)} e^{-\left(\frac{\mu_n}{\rho_0}\right)^2 t} J_0 \left(\frac{\mu_n}{\rho_0} \rho \right).$$

Заметим, что поскольку корни μ_n функции Бесселя $J_0(x)$ возрастают с ростом n , подчиняясь формуле

$$\mu_n = \pi \left[n - \frac{1}{4} + \frac{0,56}{4n-1} + \frac{0,05}{(4n-1)^2} + \dots \right],$$

то при $t \rightarrow +\infty$ главным в указанной сумме является первый член, так что при достаточно больших значениях t имеем

$$u(\rho, t) \approx 8u_0 \frac{J_0 \left(\frac{\mu_1}{\rho_0} \rho \right)}{\mu_1^3 J_1(\mu_1)} e^{-\left(\frac{\mu_1}{\rho_0}\right)^2 t}.$$

Средняя по поперечному сечению температура есть

$$\bar{u}(t) = \frac{\int_0^{\rho_0} u(\rho, t) 2\pi \rho d\rho}{\pi \rho_0^2} \approx \frac{16u_0 e^{-\left(\frac{\mu_1}{\rho_0}\right)^2 t}}{\mu_1^3 \rho_0^2 J_1(\mu_1)} \int_0^{\rho_0} \rho J_0 \left(\frac{\mu_1}{\rho_0} \rho \right) d\rho = \frac{16u_0}{\mu_1^4} e^{-\left(\frac{\mu_1}{\rho_0}\right)^2 t},$$

поскольку

$$\int_0^{\rho_0} \rho J_0 \left(\frac{\mu_1}{\rho_0} \rho \right) d\rho = \frac{\rho_0^2}{\mu_1} J_1(\mu_1).$$

Случай шара.

Пример 7. Решить задачу о распространении тепла в шаре радиуса b с центром в начале координат

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & 0 < \rho < b, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \varphi < 2\pi, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \frac{3}{2} \sin(2\theta) \cos \varphi \frac{J_{5/2}\left(\frac{\mu_{2,1}}{b} \rho\right)}{\sqrt{\rho}}, \\ \quad \quad \quad 0 \leq \rho \leq b, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t \geq 0, \\ u|_{\Gamma} = 0, \quad \rho = b, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad t \geq 0 \end{cases}$$

(здесь $\mu_{2,1}$ — первый положительный корень уравнения $J_{5/2}(x) = 0$).

Решение. Запишем оператор Лапласа в сферической системе:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Ищем решение нашей задачи в виде

$$u(\rho, \theta, \varphi, t) = T(t)R(\rho)Y(\theta, \varphi).$$

Подставляя это выражение в уравнение распространения тепла, находим

$$RYT' = a^2 \frac{1}{\rho^2} \left[TY \frac{d}{d\rho} (\rho^2 R') + RT \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + RT \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right].$$

Отсюда вытекает равенство

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\frac{d}{d\rho} (\rho^2 R')}{R} + \frac{\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right)}{Y} + \frac{\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}}{Y} \right] = -\lambda.$$

Оно дает следующие два уравнения:

$$\frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\frac{d}{d\rho} (\rho^2 R')}{R} + \frac{\Delta_{\theta\varphi} Y}{Y} \right] = -\lambda, \quad (3.27)$$

$$T' + a^2 \lambda T = 0. \quad (3.28)$$

Здесь оператор имеет вид

$$\Delta_{\theta\varphi} Y = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2}.$$

Из уравнения (3.27) следует

$$\frac{\frac{d}{d\rho} (\rho^2 R')}{R} + \lambda \rho^2 = -\frac{\Delta_{\theta\varphi} Y}{Y} = \mu. \quad (3.29)$$

Здесь λ и μ — постоянные разделения. Из (3.27) имеем

$$\Delta_{\theta\varphi} Y + \mu Y = 0. \quad (3.30)$$

К уравнению (3.30) надо добавить «граничные» условия

$$\begin{cases} Y(\theta, \varphi) = Y(\theta, \varphi + 2\pi), \\ |Y(0, \varphi)| < +\infty, \quad |Y(\pi, \varphi)| < +\infty. \end{cases} \quad (3.31)$$

Таким образом, мы получили задачу (3.30), (3.31) — задачу Штурма—Лиувилля: найти те значения параметра μ , при которых задача (3.30), (3.31) имеет нетривиальные решения, и найти эти решения. Ищем решение этой задачи в виде

$$Y(\theta, \varphi) = A(\theta)\Phi(\varphi).$$

Прежде всего заметим, что из равенства

$$Y(\theta, \varphi) = Y(\theta, \varphi + 2\pi)$$

следует

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \quad (3.32)$$

Тогда уравнение (3.30) дает

$$\Phi \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A'(\theta)) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \Phi'' A + \mu A \Phi = 0,$$

откуда

$$\frac{\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cdot A')}{A} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\Phi''}{\Phi} = -\mu,$$

или

$$\frac{\sin \theta \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \cdot A')}{A} + \mu \sin^2 \theta + \frac{\Phi''}{\Phi} = 0,$$

или

$$\frac{\sin \theta \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \cdot A')}{A} + \mu \sin^2 \theta = -\frac{\Phi''}{\Phi} = \nu,$$

где ν — новая постоянная разделения. Отсюда имеем задачу

$$\begin{cases} \Phi'' + \nu \Phi = 0, & -\infty < \varphi < +\infty, \end{cases} \quad (3.33)$$

$$\begin{cases} \Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi). \end{cases} \quad (3.34)$$

Легко можно показать, что

$$\begin{cases} \nu = m^2, & m = 0, 1, 2, \dots, \\ \Phi_n(\varphi) = \begin{cases} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi. \end{cases} \end{cases}$$

Теперь получаем задачу для определения $A(\theta)$

$$\begin{cases} \sin \theta \frac{d}{d\theta}(\sin \theta \cdot A') + A(\mu \sin^2 \theta - m^2) = 0, & 0 < \theta < \pi, \\ |A(0)| < +\infty, & |A(\pi)| < +\infty. \end{cases}$$

Обозначим $x = \cos \theta$. Тогда полученное уравнение приводится к виду

$$\left\{ \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left(\mu - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0, \right. \quad (3.35)$$

$$\left. |y(1)| < +\infty, \quad |y(-1)| < +\infty \right\} \quad (3.36)$$

(здесь $y(x)|_{x=\cos \theta} = A(\theta)$, $-1 < x < +1$).

Мы получили краевую задачу для присоединенного уравнения Лежандра. Собственные значения задачи (3.35), (3.36) $\mu_n = n(n+1)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$. Собственные функции имеют вид

$$P_n^{(m)}(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m},$$

где $P_n(x)$ — полином Лежандра степени n (здесь $m \leq n$), $P_n^{(m)}(x)$ — так называемая присоединенная функция Лежандра порядка m .

Таким образом, решения уравнения (3.30) при условиях (3.31) суть *сферические функции*

$$\begin{aligned} P_n^{(0)}(\cos \theta), \quad P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos(m\varphi), \quad P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin(m\varphi), \\ m = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Обратимся теперь к соотношению (3.29). Учитывая $\mu = n(n+1)$ и граничное условие $R(b) = 0$, получим для функции $R(\rho)$ следующую граничную задачу:

$$\begin{cases} \rho^2 R'' + 2\rho R' + [\lambda \rho^2 - n(n+1)]R = 0, \\ |R(0)| < +\infty, \quad R(b) = 0. \end{cases} \quad (3.37)$$

С помощью подстановки $R(\rho) = \frac{y(\rho)}{\sqrt{\rho}}$ уравнение (3.37) приводится к уравнению Бесселя полуцелого индекса

$$\rho^2 y'' + \rho y' + \left[\lambda \rho^2 - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \right] y = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$y(\rho) = C_1 J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} \rho) + C_2 N_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} \rho)$$

(здесь $J_{n+1/2}(x)$ и $N_{n+1/2}(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно индекса $(n+1/2)$), C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Очевидно, надо положить $C_2 = 0$, т. е.

$$y(\rho) = C_1 J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} \rho).$$

Тогда из условия $R(b) = 0$ найдем

$$J_{n+1/2}(\sqrt{\lambda} b) = 0.$$

Следовательно,

$$\lambda_{nk} = \left(\frac{\mu_{nk}}{b} \right)^2,$$

где μ_{nk} — положительные корни уравнения

$$J_{n+1/2}(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ясно, что каждому собственному значению λ_{nk} отвечает $2n + 1$ собственных функций

$$v_{nkj} = \frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nk}}{b}\rho\right)}{\sqrt{\rho}} Y_n^{(j)}(\theta, \varphi), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm n,$$

где

$$Y_n^{(m)}(\theta, \varphi) = P_n^{(m)}(\cos \theta) \cos(m\varphi), \quad Y_n^{(-m)}(\theta, \varphi) = P_n^{(m)}(\cos \theta) \sin(m\varphi), \\ m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Далее, из уравнения 2) следует, что

$$T_{nk}(t) = C_{nk} e^{-\left(\frac{a\mu_{nk}}{b}\right)^2 t},$$

где C_{nk} — некоторая константа. Отсюда получаем элементарное решение задачи

$$u_{nk}(\rho, \theta, \varphi, t) = \frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nk}}{b}\rho\right)}{\sqrt{\rho}} Y_n(\theta, \varphi) e^{-\left(\frac{a\mu_{nk}}{b}\right)^2 t}.$$

Здесь сферическая гармоника есть

$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n [A_{mn} \cos(m\varphi) + B_{mn} \sin(m\varphi)] P_n^{(m)}(\cos \theta)$$

(A_{mn} и B_{mn} — постоянные). Следовательно, решение имеет вид

$$u(\rho, \theta, \varphi, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{a\mu_{nk}}{b}\right)^2 t} Y_n(\theta, \varphi) \frac{J_{n+1/2}\left(\frac{\mu_{nk}}{b}\rho\right)}{\sqrt{\rho}}.$$

Используя начальное условие будем иметь

$$u(\rho, \theta, \varphi, t) = e^{-\left(\frac{a\mu_{21}}{b}\right)^2 t} P_2^{(1)}(\cos \theta) \cos \varphi \frac{J_{5/2}\left(\frac{\mu_{21}}{b}\rho\right)}{\sqrt{\rho}}.$$

§ 3.4. Модификация метода разделения переменных для решения задачи Коши

Решение задачи Коши

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(x, y, z, t), & -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = g(x, y, z), & -\infty < x, y, z < +\infty, \end{cases}$$

доставляет нам интеграл Пуассона (вообще говоря). Но зачастую вычисления, связанные с этим интегралом, столь громоздки, что приходится отказываться от его применения. Тем не менее, оказывается, что для широкого класса функций f можно предложить метод частных решений. Для этого заметим, что оператор теплопроводности $Lu = u_t - \Delta u$ переводит (отображает), например, функции вида $\varphi(t) \sin x \cos y$ (в двумерном случае) в функции того же вида $\psi(t) \sin x \cos y$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1 [6, гл. IV, 13.5(3)]. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + e^{-t} \cos x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \cos x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

Решение, как было сказано, можно находить по формуле Пуассона, но иногда (как в нашем случае) удобнее применить *метод разделения переменных*. Разобьем нашу задачу на две:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} v_t = v_{xx} + e^{-t} \cos x, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ v|_{t=0} = 0, & -\infty < x < +\infty; \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} w_t = w_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ w|_{t=0} = \cos x, & -\infty < x < +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Функцию $v(x, t)$ ищем в виде

$$v(x, t) = \varphi(t) \cos x,$$

где функция $\varphi(t)$ подлежит определению. Подставляя это выражение в уравнение

$$v_t = v_{xx} + e^{-t} \cos x,$$

будем иметь

$$\varphi'(t) \cos x = -\varphi(t) \cos x + e^{-t} \cos x,$$

откуда получаем задачу Коши (учитывая, что $\varphi(0) = 0$)

$$\begin{cases} \varphi' + \varphi = e^{-t}, & t \geq 0, \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

Легко проверить, что ее решением является функция

$$\varphi(t) = te^{-t}.$$

Следовательно, $v(x, t) = te^{-t} \cos x$. Далее, решением второй задачи является функция

$$w(x, t) = e^{-t} \cos x.$$

Значит,

$$u(x, t) = v(x, t) + w(x, t) = e^{-t} \cos x(1 + t).$$

Пример 2 [6, гл. IV, 13.6(2)]. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \sin t \sin x \sin y, & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 1, & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Снова разбиваем задачу на две:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} v_t = \Delta v + \sin t \sin x \sin y, & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ v|_{t=0} = 0, & -\infty < x, y < +\infty; \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} w_t = \Delta w, & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ w|_{t=0} = 1, & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Сразу видно, что $w(x, y, t) = 1$. Функцию $v(x, y, t)$ ищем в виде

$$v(x, y, t) = \varphi(t) \sin x \sin y.$$

Подставляя это выражение в уравнение

$$v_t = \Delta v + \sin t \sin x \sin y,$$

получим

$$\varphi'(t) \sin x \sin y = -2\varphi(t) \sin x \sin y + \sin t \sin x \sin y,$$

откуда приходим к задаче Коши для функции $\varphi(t)$

$$\begin{cases} \varphi' + 2\varphi = \sin t, & t \geq 0, \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

Решение этой задачи есть функция

$$\varphi(t) = \frac{1}{5}(2 \sin t - \cos t + e^{-2t}).$$

Таким образом,

$$v(x, y, t) = \frac{1}{5} \sin x \sin y (2 \sin t - \cos t + e^{-2t}).$$

Следовательно,

$$u(x, y, t) = v(x, y, t) + w(x, y, t) = 1 + \frac{1}{5} \sin x \sin y (2 \sin t - \cos t + e^{-2t}).$$

Оказывается также, что если начальные данные задачи обладают определенной симметрией, то естественно решение задачи Коши искать в том же классе функций (т. е. среди функций, обладающих той же симметрией). Приведем соответствующие примеры.

Пример 3 [6, гл. IV, 13.8(5)]. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = e^{-\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2}, & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

($\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство).

Решение. Будем считать, что

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = v(x_1 + \dots + x_n; t).$$

Тогда, учитывая, что $u_t = v_t$, и обозначая $s = x_1 + \dots + x_n$, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}.$$

Отсюда

$$\Delta = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = n \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$$

и уравнение $u_t = \Delta u$ переписывается в виде

$$v_t = n \frac{\partial^2 v}{\partial s^2},$$

а задача Коши примет вид

$$\begin{cases} v_t = n \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, & -\infty < s < +\infty, \quad t > 0, \\ v|_{t=0} = e^{-s^2}, & -\infty < s < +\infty. \end{cases}$$

Следовательно, интеграл Пуассона дает

$$\begin{aligned} v(s, t) &= \frac{1}{2\sqrt{n\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} e^{-\frac{(s-\zeta)^2}{4nt}} d\zeta = \frac{1}{2\sqrt{n\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4nt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2 + \frac{s\zeta}{2nt} - \frac{\zeta^2}{4nt}} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{n\pi t}} e^{-\frac{s^2}{4nt+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1+4nt}{4nt} \left(\zeta - \frac{s}{1+4nt}\right)^2} d\zeta. \end{aligned}$$

Для вычисления этого интеграла сделаем замену переменных

$$\alpha = \sqrt{\frac{1+4nt}{4nt}} \left(\zeta - \frac{s}{1+4nt} \right).$$

Тогда будем иметь

$$v(s, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi nt}} \sqrt{\frac{4nt}{1+4nt}} e^{-\frac{s^2}{1+4nt}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{e^{-\frac{s^2}{1+4nt}}}{\sqrt{1+4nt}}.$$

Следовательно, решение исходной задачи Коши представляется формулой

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{\sqrt{1+4nt}} e^{-\frac{1}{1+4nt} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2}.$$

Пример 4 [6, гл. IV, 13.6(4)]. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} 8u_t = \Delta u + 1, & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = e^{-(x-y)^2}, & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Ищем решение в виде суммы решений двух задач:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} 8u_t^{(1)} = \Delta u^{(1)} + 1, & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u^{(1)}|_{t=0} = 0, & -\infty < x, y < +\infty; \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} 8u_t^{(2)} = \Delta u^{(2)}, & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u^{(2)}|_{t=0} = e^{-(x-y)^2}, & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases} \end{aligned}$$

Решение задачи 1) имеет вид $u^{(1)}(x, y, t) = \frac{1}{8}t$. Найдем решение задачи 2). Будем считать, что

$$u^{(2)}(x, y, t) = v(x - y; t).$$

Тогда, учитывая, что (обозначим $z = x - y$)

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$

получим задачу Коши для определения функции $v(z, t)$

$$\begin{cases} v_t = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, & -\infty < z < +\infty, \quad t > 0, \\ v|_{t=0} = e^{-z^2}, & -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

Решение этой задачи дается формулой Пуассона ($a = 1/2$):

$$v(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} e^{-\frac{(z-\zeta)^2}{t}} d\zeta = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{z^2}{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2 + \frac{2z\zeta}{t} - \frac{\zeta^2}{t}} d\zeta =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{z^2}{t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(\zeta^2 - \frac{2z\zeta}{t+1} + \left(\frac{z}{t+1}\right)^2\right)\right]} e^{\frac{z^2}{t(t+1)}} d\zeta = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{z^2}{t+1}} \sqrt{\frac{t}{t+1}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1+t}{t}\right)\left(\zeta - \frac{z}{t+1}\right)^2} \sqrt{\frac{t+1}{t}} d\zeta = \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{t+1}} \frac{1}{\sqrt{1+t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = e^{-\frac{z^2}{t+1}} \frac{1}{\sqrt{1+t}},
\end{aligned}$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{1+t}{t}} \left(\zeta - \frac{z}{t+1}\right)$.

Итак,

$$u^{(2)}(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{1+t}}.$$

Значит, искомое решение есть

$$u(x, y, t) = \frac{1}{8}t + \frac{1}{\sqrt{1+t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{1+t}}.$$

Пример 5 [6, гл. IV, 13.7(4)]. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \cos(x - y + z), & -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = e^{-(x+y-z)^2}, & -\infty < x, y, z < +\infty. \end{cases}$$

Решение. Снова находим решения двух вспомогательных задач

$$\begin{aligned}
1) & \begin{cases} u_t^{(1)} = \Delta u^{(1)} + \cos(x - y + z), & -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u^{(1)}|_{t=0} = 0, & -\infty < x, y, z < +\infty; \end{cases} \\
2) & \begin{cases} u_t^{(2)} = \Delta u^{(2)}, & -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u^{(2)}|_{t=0} = e^{-(x+y-z)^2}, & -\infty < x, y, z < +\infty. \end{cases}
\end{aligned}$$

Решение задачи 1) ищем в виде $u^{(1)}(x, y, z, t) = \varphi(t) \cos(x - y + z)$, где функция $\varphi(t)$ подлежит определению. Подставляя выражение для $u^{(1)}(x, y, z, t)$ в уравнение, получим

$$\varphi'(t) \cos(x - y + z) = 3\varphi(t)[- \cos(x - y + z)] + \cos(x - y + z),$$

ибо $\Delta \cos(x - y + z) = (-3) \cos(x - y + z)$. Отсюда следует, что $\varphi(t)$ — решение задачи Коши

$$\begin{cases} \varphi'(t) + 3\varphi(t) = 1, & t \geq 0, \\ \varphi(0) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi(t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t})$ и, значит,

$$u^{(1)}(x, y, z, t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) \cos(x - y + z).$$

Далее, решение задачи 2) находим, исходя из представления

$$u^{(2)}(x, y, z, t) = v(x + y - z; t).$$

Тогда, замечая, что $\Delta u^{(2)} = \Delta v = 3 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}$ (где $s = x + y - z$), задачу Коши для $u^{(2)}(x, y, z, t)$ перепишем так:

$$\begin{cases} v_t = 3 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2}, & -\infty < s < +\infty, \quad t > 0, \\ v|_{t=0} = e^{-s^2}, & -\infty < s < +\infty. \end{cases}$$

По формуле Пуассона получаем ($a = \sqrt{3}$)

$$\begin{aligned} v(s, t) &= \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} e^{-\frac{(s-\zeta)^2}{12t}} d\zeta = \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{s^2}{12t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2 + \frac{s\zeta}{6t} - \frac{\zeta^2}{12t}} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{s^2}{12t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\left(1 + \frac{1}{12t}\right)\left(\zeta^2 - \frac{2s\zeta}{1+12t} + \frac{s^2}{(1+12t)^2}\right)\right]} e^{\frac{s^2}{12t(1+12t)}} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}\pi t} e^{-\frac{s^2}{1+12t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1+12t}{12t}\right)\left(\zeta - \frac{s}{1+12t}\right)^2} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}\pi t} e^{-\frac{s^2}{1+12t}} \sqrt{\frac{12t}{1+12t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{1+12t}{12t}\right)\left(\zeta - \frac{s}{1+12t}\right)^2} \sqrt{\frac{1+12t}{12t}} d\zeta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\sqrt{1+12t}} e^{-\frac{s^2}{1+12t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+12t}} e^{-\frac{s^2}{1+12t}}, \end{aligned}$$

где $\alpha = \sqrt{\frac{1+12t}{12t}} \left(\zeta - \frac{s}{1+12t} \right)$.

Итак,

$$u^{(2)}(x, y, z, t) = \frac{1}{\sqrt{1+12t}} e^{-\frac{(x+y-z)^2}{1+12t}}.$$

Значит, искомое решение есть

$$u(x, y, z, t) = \frac{1}{3}(1 - e^{-3t}) \cos(x - y + z) + \frac{1}{\sqrt{1+12t}} e^{-\frac{(x+y-z)^2}{1+12t}}.$$

§ 3.5. Задачи для самостоятельного решения

1. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

2. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & 0 < x, \quad t < +\infty, \\ u(0, t) = 0, & +\infty > t \geq 0, \\ u(x, 0) = f(x), & +\infty > x \geq 0. \end{cases}$$

3. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{z=0} = 0, & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = f(x, y, z), & -\infty < x, y < +\infty, \quad 0 < z < +\infty. \end{cases}$$

4. Используя результат задачи 1, показать (применяя метод Дюамеля), что решением задачи Коши

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, & -\infty < x < +\infty, \end{cases}$$

является функция

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta, \tau) e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\zeta.$$

5. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + a^2 u + f(x), & 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(0, t) = 0, \quad u_x(0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

6. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u + a \cos x, & 0 < x < +\infty, \quad 0 < t < +\infty, \\ u(0, t) = b e^{-3t}, \quad u_x(0, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

7. Начальная температура тонкого однородного стержня равна нулю. Определить температуру $u(x, t)$ в стержне при $t > 0$, когда стержень полубесконечен ($0 < x < +\infty$) и $u(0, t) = \delta(t)$.

У к а з а н и е. Преобразование Лапласа δ -функции есть 1.

8. Начальная температура тонкого однородного стержня длины $l = \pi$ равна $u(x, 0) = 2 \sin(3x) + 5 \sin(8x)$. Определить температуру $u(x, t)$ в стержне при $t > 0$, если концы стержня находятся при температуре тающего льда.

9. Начальная температура тонкого однородного стержня длины $l = \pi$ равна $u(x, 0) = 2 \cos x + 3 \cos(2x)$. Определить температуру $u(x, t)$ в стержне при $t > 0$, если на концах стержня тепловой поток равен нулю.

10. Решить краевую задачу

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + t \sin(2x), & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = 0, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0. \end{cases}$$

11. Доказать единственность решения смешанной задачи

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x, t), & 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) = \alpha(t), \quad u(l, t) = \beta(t), & t \geq 0, \\ u(x, 0) = g(x), & 0 \leq x \leq l. \end{cases}$$

12. Найти распределение температуры в тонкой прямоугольной пластинке размера $[0, \pi] \times [0, \pi]$, если ее начальная температура равна $u(x, y, 0) = 3 \sin x \sin(5y)$, а ее граница поддерживается при нулевой температуре.

13. Найти распределение температуры в тонкой прямоугольной пластинке размера $[0, \pi] \times [0, \pi]$, если ее начальная температура равна $u(x, y, 0) = 5 \cos x \cos(3y)$, а на границе тепловой поток равен нулю.

14. Найти распределение температуры в тонкой прямоугольной пластинке размера $[0, \pi] \times [0, \pi]$ при нулевых начальных и граничных условиях, если внутри нее действуют тепловые источники с плотностью $f(x, y, t) = A \sin x \sin y$, где $A = \text{const}$.

15. Решить смешанную задачу в прямоугольнике $[0, \pi] \times [0, \pi]$

$$\begin{cases} u_t = a^2(u_{xx} + u_{yy}), & 0 < x, y < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, y, t) = 0, \quad u(\pi, y, t) = \sin y, \\ \quad \quad \quad u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0, & t \geq 0, \\ u(x, y, 0) = 0, & 0 \leq x, y \leq \pi. \end{cases}$$

16. Пусть функция $u_k(x_k, t)$ — решение задачи Коши ($k = 1, 2, \dots, n$)

$$\begin{cases} \frac{\partial u_k}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2}, & -\infty < x_k < +\infty, \quad t > 0, \\ u_k|_{t=0} = f_k(x_k), & -\infty < x_k < +\infty. \end{cases}$$

Доказать, что функция $u(x, t) = \prod_{k=1}^n u_k(x_k, t)$ (знак $\prod_{k=1}^n$ означает произведение) является решением задачи Коши

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \prod_{k=1}^n f_k(x_k) \end{cases}$$

(здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u(x) = u(x_1, \dots, x_n)$).

17. Пусть функция $f(x, t)$ является гармоничной по x при каждом фиксированном $t \geq 0$. Доказать, что функция

$$u(x, t) = \int_0^t f(x, \tau) d\tau$$

является решением задачи Коши

$$\begin{cases} u_t = a^2 \Delta u + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 0, & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

18. Найти распределение температуры в стержне $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на его правом конце $x = l$ поддерживается температура, равная нулю, а на левом конце $x = 0$ температура равна $u(0, t) = At$, где $A = \text{const}$. Начальная температура стержня равна нулю.

19. Найти распределение температуры внутри неограниченного ($-\infty < z < +\infty$) кругового цилиндра радиуса R , если на его поверхности поддерживается нулевая температура, а температура в начальный момент $t = 0$ равна $u|_{t=0} = AJ_0\left(\frac{\mu_k}{R}\rho\right)$, где μ_k — k -й положительный корень уравнения $J_0(\mu) = 0$, $A = \text{const}$.

20. Найти распределение температуры внутри неограниченного ($-\infty < z < +\infty$) кругового цилиндра радиуса R , если его поверхность поддерживается при постоянной температуре u_0 , а начальная температура равна $u|_{t=0} = 0$.

21. Найти распределение температуры в неограниченном ($-\infty < z < +\infty$) круговом цилиндре радиуса a , если его граница поддерживается

при нулевой температуре, а начальная температура точек цилиндра равна $u|_{t=0} = AJ_2\left(\frac{\mu_3}{a}\rho\right) \cos(2\varphi)$, где μ_3 — третий положительный корень функции Бесселя $J_2(x)$, $A = \text{const}$.

22. Найти распределение температуры в неограниченном $(-\infty < z < +\infty)$ круговом цилиндре радиуса a , если его граница поддерживается при нулевой температуре, начальная температура равна нулю, а внутри цилиндра действуют тепловые источники с плотностью $f(\rho, t) = AJ_0\left(\frac{\mu_1}{a}\rho\right)$, где μ_1 — первый положительный корень функции Бесселя $J_0(x)$, $A = \text{const}$.

23. Решить смешанную задачу для уравнения теплопроводности в ограниченном цилиндре

$$\begin{cases} u_t = c^2 \Delta u + e^t J_0\left(\frac{\mu_1}{a}\rho\right) \cos\left(3\frac{\pi}{h}z\right), & 0 < \rho < a, \quad 0 < z < h, \quad t > 0, \\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma} = 0, & t \geq 0, \\ u|_{t=0} = 0, & 0 \leq \rho \leq a, \quad 0 \leq z \leq h \end{cases}$$

(Γ — граница цилиндра, μ_1 — первый положительный корень $J'_0(x) = 0$).

24. Определить температуру внутри неограниченного $(-\infty < z < +\infty)$ кругового цилиндра радиуса a , если температура боковой поверхности равна $A \cos(2\varphi)$ ($A = \text{const}$), а начальная температура нулевая.

25. Определить температуру внутри неограниченного $(-\infty < z < +\infty)$ кругового цилиндра радиуса a , если температура боковой поверхности равна $Ae^{-\omega^2 t}$ ($A = \text{const}$), а начальная температура нулевая.

26. Определить температуру внутри неограниченного $(-\infty < z < +\infty)$ кругового цилиндра радиуса a , если температура боковой поверхности равна $Ae^{\omega^2 t}$ ($A = \text{const}$), а начальная температура нулевая.

27. Определить температуру внутри неограниченного $(-\infty < z < +\infty)$ кругового цилиндра радиуса a , если температура боковой поверхности равна $Ae^{\omega^2 t} \sin(n\varphi)$ ($A = \text{const}$), а начальная температура нулевая (n — произвольное фиксированное натуральное число).

28. Определить температуру внутри шара радиуса a , если граница шара поддерживается при нулевой температуре, а начальная температура равна $u|_{t=0} = \sin\left(\frac{\pi\rho}{a}\right)$ (ρ — расстояние от центра шара до его внутренней точки).

29. Определить температуру внутри шара радиуса a , если граница шара поддерживается при температуре $u|_{\rho=a} = P_2 \cos(\theta)$, а начальная температура равна нулю ($P_2(x)$ — полином Лежандра второй степени).

30. Шар радиуса a , первоначально нагретый до температуры $u|_{t=0} = \rho^2 P_{43}(\cos \theta) \cos(3\varphi)$, остывает, причем граница шара поддерживается

при температуре, равной нулю. Определить температуру внутри шара (здесь $P_{43}(x)$ — присоединенная функция Лежандра; $P_{43}(x) = (1 - x^2)^{3/2} \times \frac{d^3 P_4(x)}{dx^3}$).

31. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = \Delta u, & -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \cos(x + y + z), & -\infty < x, y, z < +\infty. \end{cases}$$

32. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = 4u_{xx} + t + e^t, & -\infty < x < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = 2, & -\infty < x < +\infty. \end{cases}$$

33. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}\Delta u, & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \cos(xy), & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$

34. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = 2\Delta u + t \cos x, & -\infty < x, y, z < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \cos y \cos z, & -\infty < x, y, z < +\infty. \end{cases}$$

35. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{2}\Delta u + t \sin x \cos y, & -\infty < x, y < +\infty, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = xy, & -\infty < x, y < +\infty. \end{cases}$$

36. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = \Delta^2 u + f(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

если $g(x)$ — бигармоническая функция и $f(x, t)$ бигармонична по x при каждом $t \geq 0$.

37. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_t = \Delta^2 u, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \prod_{i=1}^n \sin(k_i x_i). \end{cases}$$

38. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta^2 u, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \\ u|_{t=0} = \sin x_1, & u_t|_{t=0} = \cos x_n. \end{cases}$$

39. Найти решение, имеющее вид бегущей волны, распространяющейся с постоянной скоростью a для нелинейного уравнения

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} \left(x^\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad \alpha \geq 1.$$

40. Доказать, что уравнение $u_t = u_{xx}$ эквивалентно интегральному тождеству $\oint_L u dx + u_x dt = 0$ (функция $u(x, t)$ достаточно гладкая; L — замкнутый кусочно-гладкий контур).

§ 3.6. Ответы

$$1. u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\zeta) e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2 t}} d\zeta.$$

$$2. u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} f(\zeta) \left[e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x+\zeta)^2}{4a^2 t}} \right] d\zeta.$$

$$3. u = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_0^{+\infty} f(\xi, \eta, \zeta) \times \\ \times \left[e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z+\zeta)^2}{4a^2 t}} \right] d\zeta.$$

$$5. u = -\frac{1}{a} \int_0^x f(x-\zeta) \sin(a\zeta) d\zeta.$$

$$6. u = be^{-3t} \cos(2x) - \frac{a}{2} x \sin x.$$

$$7. u = \frac{x}{2a\sqrt{\pi} t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}.$$

$$8. u = 2e^{-9a^2 t} \sin(3x) + 5e^{-64a^2 t} \sin(8x).$$

$$9. u = 2e^{-a^2 t} \cos x + 3e^{-4a^2 t} \cos(2x).$$

$$10. u = \frac{1}{4a^2} \left[t + \frac{1}{4a^2} (e^{-4a^2 t} - 1) \right].$$

$$12. u = 3e^{-26a^2t} \sin x \sin(5y).$$

$$13. u = 5e^{-10a^2t} \cos x \cos(3y).$$

$$14. u = \frac{A}{1+4a^2}(e^{-2a^2t} + 2a^2 \sin t - \cos t) \sin x \sin y.$$

$$15. u = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} \pi} \sin y + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2+1} e^{-a^2(n^2+1)t} \sin(nx) \sin y.$$

$$18. u = At \frac{l-x}{l} - \frac{2Al^2}{\pi^3 a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} (1 - e^{-a^2(\frac{n\pi}{l})^2 t}) \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right).$$

$$19. u = Ae^{-a^2\left(\frac{\mu_k}{R}\right)^2 t} J_0\left(\frac{\mu_k}{R}\rho\right).$$

$$20. u = u_0 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2\left(\frac{\mu_n}{R}\right)^2 t} \frac{J_0\left(\frac{\mu_n}{R}\rho\right)}{\mu_n J'_0(\mu_n)} \right].$$

$$21. u = Ae^{-c^2\left(\frac{\mu_3}{a}\right)^2 t} J_2\left(\frac{\mu_3}{a}\rho\right) \cos(2\varphi); \quad c = \text{const} \quad \text{из уравнения} \quad u_t = c^2 \Delta u.$$

$$22. u = A \frac{1}{c^2} \left(\frac{a}{\mu_1}\right)^2 \left[1 - e^{-c^2\left(\frac{\mu_1}{a}\right)^2 t} \right] J_0\left(\frac{\mu_1}{a}\rho\right).$$

$$23. u = \frac{1}{1 + c^2 \sqrt{\left(\frac{\mu_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{3\pi}{h}\right)^2}} \left[e^t - e^{-c^2 \sqrt{\left(\frac{\mu_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{3\pi}{h}\right)^2} t} \right] \times \\ \times J_0\left(\frac{\mu_1}{a}\rho\right) \cos\left(\frac{3\pi}{h}z\right).$$

$$24. \quad u = -A \cos(2\varphi) \sum_{m=1}^{\infty} A_m J_2\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right) e^{-c^2\left(\frac{\mu_m}{a}\right)^2 t} + A \frac{\rho^2}{a^2} \cos(2\varphi), \quad \text{где} \\ \mu_m \text{ — } m\text{-й положительный корень функции Бесселя } J_2(x) \text{ и коэффициенты ряда суть}$$

$$A_m = \frac{2A \int_0^a \rho^3 J_2\left(\frac{\mu_m}{a}\rho\right) d\rho}{a^4 [J'_2(\mu_m)]^2}.$$

$$25. u = A \frac{J_0\left(\frac{\omega}{c}\rho\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{c}a\right)} e^{-\omega^2 t} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\mu_n}{a}\rho\right) e^{-c^2\left(\frac{\mu_n}{a}\right)^2 t}, \text{ где}$$

$$A_n = \frac{2A \int_0^a \rho J_0\left(\frac{\omega}{c}\rho\right) J_0\left(\frac{\mu_n}{a}\rho\right) d\rho}{a^2 J_0\left(\frac{\omega}{c}a\right) [J_1(\mu_n)]^2},$$

c ($= \text{const}$) взято из уравнения $u_t = c^2 \Delta u$ и μ_n — n -й положительный корень уравнения $J_0(x) = 0$.

$$26. u = A \frac{I_0\left(\frac{\omega}{c}\rho\right)}{I_0\left(\frac{\omega}{c}a\right)} e^{\omega^2 t} - \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0\left(\frac{\mu_n}{a}\rho\right) e^{-c^2\left(\frac{\mu_n}{a}\right)^2 t}, \text{ где}$$

$$A_n = \frac{2A \int_0^a \rho I_0\left(\frac{\omega}{c}\rho\right) I_0\left(\frac{\mu_n}{a}\rho\right) d\rho}{a^2 I_0\left(\frac{\omega}{c}a\right) [J_1(\mu_n)]^2}$$

и $I_0(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента индекса нуль.

Литература

1. *Арсенин В. Я.* Методы математической физики и специальные функции. — М.: Наука, 1974.
2. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1968.
3. *Бицадзе А. В., Калинин Д. Ф.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1985.
4. *Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. — М.: Наука, 1978.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1981.
6. *Владимиров В. С., Михайлов В. П. и др.* Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1974.
7. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.
8. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. II. — М.: Гостехиздат, 1961.
9. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973.
10. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
11. *Маслов В. П.* Теория возмущения и асимптотические методы. — М.: Изд-во МГУ, 1965.
12. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высшая школа, 1977.
13. *Найфэ А. Х.* Методы возмущений. — М.: Мир, 1976.
14. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики. — М.: Наука, 1978.
15. *Пикулин В. П.* Методические разработки по уравнениям эллиптического и параболического типа. — М.: МЭИ, 1990.
16. *Пикулин В. П., Похожаев С. И.* Практический курс по уравнениям математической физики. — М.: МЭИ, 1989.
17. *Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1989.
18. *Смирнов М. М.* Задачи по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1975.
19. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
20. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
21. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972.
22. *Фарлоу С.* Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. — М.: Мир, 1985.
23. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.
24. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1973.

В книге на многочисленных примерах рассмотрены основные методы решения задач математической физики.

В конце каждой главы приводятся задачи для самостоятельного решения и ответы к ним.

Книга предназначена для студентов технических вузов.

Ее отличают доступность и практическая направленность.

ISBN 5-94057-148-4



9 785940 571483 >