

РАВНОВЕСНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ВЫРОЖДЕННЫХ ГАЗОВЫХ МАСС

Г.С.САЛКЯН

Г. С. СААКЯН

РАВНОВЕСНЫЕ КОНФИГУРАЦИИ ВЫРОЖДЕННЫХ ГАЗОВЫХ МАСС

Под редакцией академика
В. А. АМБАРЦУМЯНА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1972

Равиовесные конфигурации вырожденных газовых масс, Са а к я н Г. С., под ред. акад. В. А. Амбарцумяна, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972, 344 стр.

Монография является первой в мировой литературе попыткой систематического изложения космогонии сверхплотных небесных тел. Книга начинается весьма сжатым изложением основ релятивистской теории гравитации. Последующие три главы посвящены изучению изменения свойств вещества при повышении плотности от обычных ее значений до чрезвычайно высоких плотностей, превышающих ядерную. Далее излагается теория конфигураций белых карликов и приводятся предварительные сведения о барионных конфигурациях.

В заключительных главах книги изложена релятивистская теория конфигураций, состоящих из вырожденного барионного газа, а также обобщенная теория гравитации; рассматривается вопрос об источниках звездной энергии, которые в принципе изложены в космогонической концепции акад. В. А. Амбарцумяна.

Рисунков 39, таблиц 18.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора	6
Предисловие автора	7
Глава I. Основы релятивистской теории гравитации	9
§ 1. Четырехмерные тензоры	9
§ 2. Неинерциальные системы отсчета	12
§ 3. Метрика реального мира	17
§ 4. Истинное время и расстояния	20
§ 5. Ковариантное дифференцирование	22
§ 6. Некоторые необходимые формулы	25
§ 7. Тензор кривизны	27
§ 8. Уравнения Эйнштейна	30
§ 9. Сферически-симметричное гравитационное поле	33
§ 10. Экспериментальные основы релятивистской теории гравитации	36
Глава II. Свойства вещества при низких температурах и больших плотностях	40
§ 11. Система тождественных частиц	40
§ 12. Вырожденный электронный газ	42
§ 13. Малые отклонения от полного вырождения	45
§ 14. Образование свободного электронного газа	48
§ 15. О фазовом состоянии вещества	50
§ 16. Нейтронизация водородного газа	53
§ 17. Нейтронизация вещества	59
§ 18. Зависимость заряда ядер от плотности	62
§ 19. Ядерные реакции в холодной плазме	67
§ 20. Самое устойчивое состояние вещества в подъядерной области	73
Глава III. Идеальный вырожденный газ барионов	87
§ 21. Перечень элементарных частиц	87
§ 22. Барионный газ	96
§ 23. Полная система уравнений	99
§ 24. Пороги стабильности частиц	106
§ 25. Замкнутая равновесная система	114

Глава IV. Реальный барионный газ	119
§ 26. Надъядерная область плотностей	119
§ 27. Концентрации частиц в гиперонной области звезды	124
§ 28. Ядерная область плотностей	127
Глава V. Уравнение состояния	133
§ 29. Уравнение состояния для Ae - и Aep -фаз вещества	133
§ 30. Об асимптотическом виде уравнения состояния	138
§ 31. Распространение упругих волн в сверхплотной среде	141
§ 32. Удобная форма записи уравнений равновесия	144
§ 33. Уравнение состояния вещества при плотностях порядка ядерной и выше	145
§ 34. Выбор системы единиц	149
Глава VI. Нерелятивистская теория сверхплотных звездных конфигураций	153
§ 35. Условие гидродинамического равновесия	153
§ 36. Оценки массы и радиуса	155
§ 37. Белые карлики	156
§ 38. Нейтронные конфигурации по теории тяготения Ньютона	163
§ 39. Нерелятивистская теория вращающихся сверхплотных звездных конфигураций	167
Глава VII. Релятивистская теория барионных конфигураций	176
§ 40. Статическое сферически-симметричное распределение масс	176
§ 41. Нейтронные конфигурации по релятивистской теории	179
§ 42. Конфигурации вырожденного идеального газа барионов	182
§ 43. Конфигурации из реального газа барионов	188
§ 44. Модели конфигураций из несжимаемой жидкости	196
§ 45. Оболочки барионных звезд	200
§ 46. Вращающиеся сверхплотные звезды	205
§ 47. Горячие сверхплотные небесные тела	212
Глава VIII. Внутреннее строение и дефект массы барионных конфигураций	221
§ 48. Распределение масс и геометрия внутри конфигураций	221
§ 49. Число барионов в звезде	226
§ 50. Гравитационный дефект массы	230
§ 51. Абсолютный дефект массы по теории тяготения Ньютона	233
§ 52. Абсолютный дефект массы по теории Эйнштейна	236
§ 53. Природа аномального дефекта массы	239
§ 54. Модели сверхплотных массивных тел	243
§ 55. Устойчивость равновесных барионных конфигураций	249
§ 56. Пульсары	255
Глава IX. Обобщенная теория гравитации Эйнштейна	273
§ 57. Общие соображения	273
§ 58. Уравнения поля	278

§ 59. Законы сохранения	280
§ 60. Центральнo-симметричное гравитационное поле в пустоте	283
§ 61. Уравнения для сферически-симметричного статического распределения масс	288
§ 62. Условия в центре конфигураций	291
§ 63. Ньютоновский вариант обобщенной теории гравитации	295
Г л а в а X. Конфигурации вырожденных газовых масс по обобщенной теории гравитации	
§ 64. Гравитационный скаляр в нерелятивистском случае	302
§ 65. Статические конфигурации вырожденных газовых масс	305
§ 66. Сверхкомпактные конфигурации	312
§ 67. Барионные конфигурации по обобщенной теории гравитации	314
§ 68. Разные вопросы	321
§ 69. Об источниках энергии	327
Литература	334

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Последние открытия, относящиеся к физике звезд, привлекли всеобщий интерес к новым, ранее неизвестным явлениям, происходящим в звездном мире. В частности, открытие пульсаров прямо продемонстрировало, что в Галактике существуют сверхплотные тела, средняя плотность которых близка к ядерной. Свойствам сверхплотного вещества и возможным конфигурациям равновесия звездных масс, состоящих почти исключительно из барионов, посвящается огромное количество статей, выходящих в специальных журналах. Эти статьи трудно собрать воедино. Более того, исследования, на которых основаны эти статьи, выполняются на разных уровнях, часто в более грубой или менее правильной форме повторяя то, что было достигнуто в более ранних работах. При таком положении дел появление авторитетной монографии, содержащей обзор положения дел в теории довольно широкого круга явлений из рассматриваемой области, является чрезвычайно полезным.

Предлагаемая книга члена-корреспондента АН Армянской ССР, профессора Г. С. Саакяна является именно такой монографией, в которой рассмотрена теория уравнивания состояния крайне вырожденного вещества ядерной плотности и основанная на ней теория равновесных конфигураций вырожденных звездных масс.

Автор книги Г. С. Саакян является крупным авторитетом в рассматриваемой области. Ему принадлежат многие из изложенных в книге результатов. Как в своих работах, так и в настоящей книге он придерживается строгого и последовательного рассмотрения вопроса. Благодаря этому можно рассчитывать, что его моногра-

фия будет способствовать введению некоторого порядка в создавшийся по этой проблеме информационный хаос, в котором имеется и много вредных для дела шумов.

Последние две главы книги связаны с экстраполяциями и изучают возможные следствия, вытекающие из измененных уравнений или констант. Эти главы представляют интерес и полезны, но читатель должен быть предупрежден о необходимости критического подхода к их содержанию.

В. А. Амбарцумян

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Монография посвящена систематическому изложению теории звездных конфигураций, состоящих из вырожденных газовых масс (белые карлики и барионные звезды). Основы теории сверхплотных небесных тел были заложены в тридцатые годы. Новый этап в разработке этой проблемы связан с открытием гиперонов и множества других частиц. В настоящее время существование белых карликов не вызывает сомнения, так как уже наблюдалось много звезд такого типа. Что касается барионных (нейтронных) звезд, то еще совсем недавно они казались сугубо теоретическими построениями. Хотя в теории этих небесных тел нет каких-либо гипотетических моментов, тем не менее необходимо было получить прямые или косвенные наблюдательные данные, свидетельствующие о реальном существовании их. Совершенно неожиданно такие данные были получены радиоастрономами в 1968 г., когда были открыты пульсирующие источники радиоизлучения, названные пульсарами. Благодаря ряду особенностей почти сразу же после открытия пульсаров стало очевидным, что пульсирующее излучение генерируется вращающимися барионными звездами. Это замечательное открытие вызвало новый большой интерес к сверхплотным небесным телам.

В настоящее время теория сверхплотных небесных тел является одной из интересных и быстро развивающихся направлений современной астрофизики. В этой области накопилось много материала и возникла необхо-

димось собрать, подвергнуть критическому анализу и дать систематическое изложение всего сделанного. В существующей немногочисленной литературе не охвачены все аспекты теории сверхплотных конфигураций. Мы надеемся, что предлагаемая книга в некоторой степени заполнит существующий пробел.

Материал двух последних глав посвящен обобщенной теории гравитации, в основе которой заложена гипотеза переменности гравитационной постоянной и сделаны определенные допущения о выборе действия для гравитационного поля. Эти предпосылки пока не имеют экспериментальной основы, поэтому результаты, приведенные в упомянутых главах, в известном смысле спорны.

В библиографию мы старались по возможности включить все работы, имеющие отношение к проблеме сверхплотных небесных тел. Однако она не претендует на полноту.

Я признателен всем сотрудникам кафедры теоретической физики Ереванского Государственного университета за большую помощь, оказанную при оформлении настоящей монографии.

Г. С. Саакян

ГЛАВА I

ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

§ 1. Четырехмерные тензоры

Событие характеризуется в пространстве и времени четверкой чисел $ct \equiv x^0, x^1, x^2, x^3$, первое из которых представляет время, а последние три — пространственные координаты, т. е. место его совершения*). При этом подразумевается конкретная система отсчета и наличие в ней совокупности определенным образом синхронизованных часов. На языке геометрии континуум этих чисел образует четырехмерное пространство. В случае инерциальных систем отсчета его называют пространством Минковского.

Из специальной теории относительности известно, что при переходе из одной системы отсчета в другую временная и пространственные координаты переплетаются. Более того, в сильных гравитационных полях, т. е. при наличии больших скоплений масс, ход часов и метрические свойства пространства в разных точках оказываются разными. Таким образом, свойство пространственно-временного континуума определяется материей, и поэтому ньютоновское представление абсолютного пространства и не зависящего от него абсолютного времени является приближенным. В общем случае пространство и время неразрывно связаны между собой, составляя одно целое. Вот почему понятие четырехмерного пространства является более точным, чем представление не

*) В общей теории относительности для координат приняты обозначения с верхними индексами.

связанных между собой абсолютного пространства и времени. В таком четырехмерном пространстве событию соответствует точка, а явлению — линия.

Пусть x^i и x'^i ($i=0, 1, 2, 3$) — координаты одного и того же события в двух произвольных системах отсчета. Они связаны между собой определенными соотношениями, а именно, формулами преобразования координат

$$x^i = f^i(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3). \quad (1.1)$$

Рассмотрим поведение физических величин относительно этого преобразования.

Скаляром называется такая функция ϕ , которая при любом преобразовании координат остается неизменной:

$$\phi(x^0, x^1, x^2, x^3) = \phi(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3). \quad (1.2)$$

При преобразованиях (1.1) дифференциалы координат преобразуются по формулам

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} dx'^k. \quad (1.3)$$

Здесь и в дальнейшем повторяющиеся индексы всегда означают суммирование. Совокупность четырех величин A^i , которые преобразуются по закону (1.3), т. е. как дифференциалы координат, называется контравариантным вектором

$$A^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} A'^k. \quad (1.4)$$

Другой тип величины получается при рассмотрении градиента от скаляра

$$\frac{\partial \phi}{\partial x^i} = \frac{\partial \phi}{\partial x'^k} \cdot \frac{\partial x'^k}{\partial x^i}. \quad (1.5)$$

Ковариантным вектором называется совокупность четырех величин, которые преобразуются как градиент от скаляра:

$$A_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} A'_k. \quad (1.6)$$

Совокупность 16 величин A^{ik} , которые преобразуются как произведение компонент двух контравариантных векторов $A^i B^k$, т. е. согласно закону

$$A^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x'^m} A'^{lm}, \quad (1.7)$$

называется контравариантным тензором второго ранга. Подобным образом определяются также ковариантный тензор второго ранга

$$A_{ik} = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'_{lm}, \quad (1.8)$$

смешанный тензор второго ранга A^i_k ,

$$A^i_k = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \cdot \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} A'^l_m \quad (1.9)$$

и тензоры более высоких рангов. Логично было бы называть скаляр тензором нулевого ранга, а вектор — тензором первого ранга.

Из приведенных определений следует, что перемножением компонент ковариантных и контравариантных векторов и тензоров можно получить тензоры любых более высоких рангов. Можно также из тензоров высшего ранга получить тензоры низшего ранга. Так, например, легко убедиться, что произведение $A^{ikl} B_{kl}$ преобразуется как контравариантный вектор. Действительно,

$$\begin{aligned} A^{ikl} B_{kl} &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x'^p} \cdot \frac{\partial x'^q}{\partial x^k} \frac{\partial x'^r}{\partial x^l} A'^{mnp} B'_{qr} = \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \cdot \frac{\partial x'^q}{\partial x'^n} \cdot \frac{\partial x'^r}{\partial x'^p} A'^{mnp} B'_{qr} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \delta_n^q \delta_p^r A'^{mnp} B'_{qr} = \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} A'^{mnp} B'_{np}. \end{aligned}$$

Здесь δ_i^k — символ Кронекера, который является единичным смешанным тензором второго ранга, что непосредственно следует из очевидного тождества $A^i \delta_i^k = A^k$.

Легко убедиться, что выражения $A_i B^i$, $A^i B^i$ не являются скаляром, тогда как $A_i B^i$ — инвариантная величина и представляет собой обобщение скалярного

произведения двух векторов на случай криволинейной системы координат. В самом деле,

$$A_i B^i = \frac{\partial x'^l}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial x^l}{\partial x'^m} A'_l B'^m = \frac{\partial x'^l}{\partial x'^m} A'_l B'^m = A'_m B'^m.$$

Инвариантные выражения можно составить также из тензоров более высшего ранга; так,

$$A'^l_{ik} B^{ik}_l = \text{invariant}.$$

Аналогичным образом можно проверить, что A^{ikl}_{kl} является ковариантным вектором, а A^i_i, A^{ik}_{ik} скалярами.

Два тензора A_{ik} и B^{ik} , удовлетворяющие условию

$$A_{ik} B^{kl} = \delta^l_i,$$

называются обратными. Непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$B^{ik} = \frac{a^{ik}}{|A_{ik}|}, \quad (1.10)$$

где $|A_{ik}|$ — детерминант, составленный из компонент тензора A_{ik} , а a^{ik} — алгебраическое дополнение элемента A_{ik} .

§ 2. Неинерциальные системы отсчета

Рассмотрим пространство Минковского. «Расстояние» между двумя соседними точками (т. е. интервал между двумя событиями) определяется в нем выражением

$$ds^2 = dx_0^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (2.1)$$

где $x_0 = ct$. Здесь трехмерное пространство является чисто евклидовым, однако этого нельзя сказать относительно четырехмерного. Оно было бы таковым, если бы взамен (2.1) мы имели сумму квадратов дифференциалов. Путем введения мнимой координаты $x_4 = ict$ интервал можно привести к евклидову виду. Таким образом, пространственно-временные координаты x, y, z, t образуют не истинное евклидово пространство, а некоторое сходное с ним, называемое псевдоевклидовым.

Специальная теория относительности имеет дело только с инерциальными системами отсчета, т. е. с та-

кими, в которых тела, свободные от воздействия сил, движутся прямолинейно и равномерно. Координаты одного и того же события в двух инерциальных системах отсчета, движущихся одна относительно другой параллельно оси x , связаны преобразованиями Лоренца

$$t = \frac{t' + \frac{v}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z'. \quad (2.2)$$

Квадратичная форма (2.1) инвариантна относительно этих преобразований.

Вводя обозначения $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, соотношения (2.2) можно записать в виде

$$x_i = \alpha_{ik} x'_k, \quad x'_k = \alpha_{ik} x_i, \quad (2.3)$$

где α_{ik} образуют матрицу

$$(\alpha_{ik}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{v/c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Преобразования Лоренца являются линейными однородными, и коэффициенты α_{ik} удовлетворяют условию

$$\alpha_{il} \alpha_{im} = \delta_{lm}. \quad (2.5)$$

Квадратичную форму (2.1) перепишем в следующем виде:

$$ds^2 = g_{ik}^0 dX^i dX^k, \quad (2.6)$$

где для координат в инерциальной системе отсчета использованы обозначения $x_0 = X^0$, $x = X^1$, $y = X^2$, $z = X^3$,

а совокупность g_{ik}^0 составляет матрицу

$$(g_{ik}^0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим неинерциальную систему отсчета, совершающую произвольное движение относительно некоторой инерциальной. Пусть они связаны между собой преобразованиями координат

$$X^i = F^i(x^0, x^1, x^2, x^3), \quad (2.8)$$

где маленькими буквами обозначены координаты событий в неинерциальной системе отсчета. Поскольку ds есть скаляр, то при преобразованиях (2.8) его величина не изменится. Подставляя (2.8) в (2.6), находим выражение ds^2 в новых координатах:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (2.9)$$

где

$$g_{ik} = \frac{\partial X^l}{\partial x^i} \frac{\partial X^m}{\partial x^k} g_{lm}^0. \quad (2.10)$$

Вообще говоря, g_{ik} являются сложными функциями от координат x^i . Сумма произведений функций g_{ik} с дифференциалами координат, образующих контравариантный вектор, дает скаляр dS^2 . Следовательно, g_{ik} должны быть компонентами ковариантного тензора второго ранга. Разумеется, то же самое можно сказать относительно g_{ik}^0 . Тогда сравнение (2.10) с (1.8) показывает, что g_{ik}, g_{ik}^0 — компоненты одного и того же тензора в неинерциальной и инерциальной системах отсчета, а (2.10) — не что иное, как формула их преобразования. Этот тензор, называемый метрическим, имеет фундаментальное значение, им определяются геометрические свойства пространства.

Очевидно, g_{ik} симметричен относительно своих индексов $g_{ik} = g_{ki}$. Следовательно, в общем случае имеется всего 10 различных величин g_{ik} . Согласно (2.7) в инерци-

альной системе отсчета при использовании декартовых координат

$$g_{00} = 1, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1, \quad g_{ik} = 0, \quad \text{если } i \neq k.$$

Этому специальному виду g_{ik} соответствует плоский мир Минковского с геометрией Евклида. В неинерциальной системе отсчета четырехмерная система координат неизбежно становится криволинейной. Это следует из того факта, что квадратичная форма ds^2 (т. е. квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками четырехмерного мира) не выражается простой формулой (2.1), свойственной ортогональной системе координат с прямолинейными осями. В ней появляются коэффициенты $g_{ik}(x')$, а также члены, содержащие произведение дифференциалов разных координат. Выражаясь образно, пространство — время как бы искривляется и, очевидно, в этой системе геометрия не является евклидовой.

В качестве примера неинерциальной системы рассмотрим диск (система K'), равномерно вращающийся относительно неподвижной плоскости (инерциальная система K). Выделенная на диске точка вычерчивает окружность, оставляя такой же фотографический след на неподвижной плоскости. Наблюдатель в K , измеряя длину этой окружности l и ее радиус r , приходит к результату $l/r = 2\pi$. Проанализируем теперь измерения, произведенные в K' , покоящимися в ней масштабами. Наблюдая за этой процедурой из системы K , мы устанавливаем, что масштаб, приложенный вдоль окружности, испытывает лоренцево сокращение, вследствие чего на длине той же окружности он уложится большее число раз, чем при измерении в инерциальной системе K . При измерениях же радиуса длина масштаба не меняется. Следовательно, $r' = r$, $l' = l \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, где ω — угловая скорость вращения. В результате

$$\frac{l'}{r'} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}} > 2\pi. \quad (2.11)$$

Мы видим, что геометрия на вращающемся диске не только неевклидова, но и, кроме того, при удалении от центра меняется. При переменной же скорости вращения

геометрия будет изменяться также со временем. Итак, при переходе к неинерциальной системе мы неизбежно будем иметь дело с неевклидовой геометрией, в которой важную роль играют компоненты метрического тензора g_{ik} .

Тензор g^{ik} , являющийся обратным g_{ik} , называется контравариантным метрическим тензором:

$$g^{ik}g_{kl} = \delta_l^i, \quad g^{ik} = \frac{\delta^{ik}}{g}, \quad (2.12)$$

где $g = |g_{ik}|$ — детерминант, образованный из элементов g_{ik} , а δ^{ik} — алгебраическое дополнение элемента g_{ik} . Заметим, что для реального четырехмерного пространства всегда $g < 0$.

При помощи метрических тензоров g_{ik} и g^{ik} можно из контравариантных величин получить ковариантные, и наоборот, например,

$$\begin{aligned} g_{ik}A^k &= A_i, & g_{il}A^{lk} &= A_i^k, & g_{il}g_{km}A^{lm} &= A_{ik}, \\ g^{ik}A_k &= A^i, & g^{il}A_{kl} &= A_k^i, & g^{il}g^{km}A_{lm} &= A^{ik}. \end{aligned}$$

Очевидно, A^i, A_i — контра- и ковариантные компоненты одной и той же физической величины. Разумеется, это относится и к тензорам второго A^{ik}, A_{ik}, A_i^k и более высоких рангов. Все тензорные величины имеют контравариантные, ковариантные и смешанные компоненты. Смешанные компоненты метрического тензора совпадают с символом Кронекера $g_i^k = \delta_i^k$.

Метрический тензор позволяет не только поднимать и опускать индексы величины, но и образовывать тензоры более низкого ранга, а также скаляры:

$$g^{lm}A_{iklm} = A_{ik}, \quad g^{lm}\delta_k^n A_{inlm} = A_{ik},$$

$$A^2 = A_i A^i = g_{ik} A^i A^k = g^{ik} A_i A_k,$$

$$A_i B^i = A^i B_i = g_{ik} A^i B^k = g^{ik} A_i B_k,$$

$$A^{ik} B_{ik} = A_{ik} B^{ik} = A_i^k B_k^i = g_{ik} g_{lm} A^{ik} B^{lm} = g^{ik} g^{lm} A_{ik} B_{lm}.$$

Скаляр $g_{ik} A^{ik} = g^{ik} A_{ik} = A_i^i$ называется следом тензора.

Квадратичную форму (2.9) можно также записать в виде

$$ds^2 = g^{ik} dx_i dx_k, \quad (2.13)$$

где $dx_i = g_{ik} dx^k$.

В специальной теории относительности, где допускаются только линейные преобразования (2.3), между ковариантными и контравариантными компонентами величин нет существенной разницы:

$$A_0 = g_{0i} A^i = A^0, \quad A_\alpha = g_{\alpha i} A^i = -A^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, 3). \quad (2.14)$$

Здесь мы учитываем (2.7). В трехмерном евклидовом пространстве при пользовании прямоугольными декартовыми координатами расстояние между двумя бесконечно близкими точками равно

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta}^0 dx^\alpha dx^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (2.15)$$

Здесь γ^0 — аналог метрического тензора для трехмерного пространства. $\gamma_{\alpha\beta}^0 = 0$ при $\alpha \neq \beta$, $\gamma_{11}^0 = \gamma_{22}^0 = \gamma_{33}^0 = 1$ и $A_\alpha = \gamma_{\alpha\beta}^0 A^\beta = A^\alpha$. Следовательно, ко- и контравариантные компоненты тензоров неразличимы.

§ 3. Метрика реального мира

До сих пор имелось в виду пустое пространство. Реальное пространство, конечно, не таково. На самом деле оно заполнено небесными телами, космической пылью, газом, нейтрино, излучением и гравитационным полем, созданным ими. Посмотрим, каковы реальные свойства пространства — времени. Чтобы разобраться в этом вопросе, вспомним одну важную особенность движения частицы в гравитационном поле. В нерелятивистском случае

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{m_g}{m} \text{grad } \varphi(x, y, z, t), \quad (3.1)$$

где φ — гравитационный потенциал, m , m_g — инертная и гравитационная массы*). Первая из них является

*) В принципе можно было ввести также понятие пассивной гравитационной массы m'_g , подразумевая под ней меру свойства тел воспринимать действие внешнего гравитационного поля.

мерой инертности тел, она равна отношению силы, к ускорению, вторая является источником гравитационного поля.

Опыт с высокой точностью показывает, что все тела независимо от их массы в гравитационном поле приобретают одинаковое ускорение. Этот важный факт впервые был установлен Галилеем для движения частиц в поле Земли. Из этого закона Галилея следует, что отношение гравитационной и инертной масс является универсальной постоянной, значение которой может зависеть только от выбора единиц измерения. Обычно эту постоянную принимают равной единице, т. е. считают гравитационную и инертные массы идентичными:

$$m_g = m, \quad \ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } \varphi. \quad (3.2)$$

Это фундаментальное свойство движения тел в гравитационном поле позволяет установить далеко идущую аналогию между неинерциальными системами отсчета и полями тяготения. Так, в системе отсчета, движущейся относительно инерциальной системы прямолинейно равноускоренно, свободное движение тел является равноускоренным. Наблюдатель, находящийся в этой системе и ничего не знающий о своем движении, может прийти к логическому заключению, что в его системе имеется однородное гравитационное поле. Напротив, наблюдатель, находящийся в закрытом ящике (лифт Эйнштейна), свободно падающем в гравитационном поле, замечает, что тела, на которые не действует сила, находятся в покое или движутся прямолинейно и равномерно, т. е. здесь нет поля тяжести. Системы, движущиеся прямолинейно с переменным ускорением, эквивалентны однородным, но изменяющимся со временем гравитационным полям.

Истинные гравитационные поля в природе не являются однородными, с удалением от масс они убывают и на бесконечности исчезают. Кроме того, из-за движения масс эти поля со временем изменяются. Разумеется, для такого поля не существует одной эквивалентной неинерциальной системы отсчета, его нельзя исключить одним преобразованием координат. Однако поле для бесконечно малых областей в любой точке пространства можно считать однородным и исключить его посредством введения свободно падающей системы отсчета (локальная

инерциальная система отсчета, которая называется также галилеевой) или же указать неинерциальную систему, эквивалентную ему (локальный принцип эквивалентности). Тогда в каждой точке пространства полю будет соответствовать своя особая система, а всему полю — совокупность бесконечного числа разных неинерциальных систем. Поскольку в каждой точке эти неинерциальные системы будут двигаться по-разному, очевидно, геометрия в них, а также ход часов не одинаковы. Мы уже убедились, что в неинерциальных системах метрика пространства — времени неевклидова и интервал между двумя событиями определяется квадратичной формой общего вида (2.9). Из вышеизложенной физической эквивалентности поля и совокупности неинерциальных систем следует, что в гравитационном поле метрика также должна быть неевклидовой и, следовательно,

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k, \quad (3.3)$$

где $g_{ik}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ — функции пространственно-временных координат.

Таким образом, мы приходим к заключению, что гравитационное поле определяется величинами g_{ik} и является мерой искривления четырехмерного мира. Реальный мир, в котором живем мы, есть риманово многообразие с переменной кривизной, в отличие от плоского мира Минковского. Все это говорит о том, что метрика мира определяется материей, а не является неизменным свойством пространства — времени. Нет мира вне материи. В принципе тем самым геометрия превращается в один из разделов физики. Именно в этом состоит главное физическое содержание теории гравитации Эйнштейна.

Из вышеизложенного ясно, что, в отличие от плоского мира Минковского, в мире Эйнштейна при наличии переменных гравитационных полей не существует единой системы отсчета, реализуемой жестким образом связанными между собой телами, с неизменным ходом стандартных часов. Расстояния между телами, длины масштабов и ход часов (т. е. течение времени) здесь меняются от точки к точке и со временем. Значит, при наличии произвольного гравитационного поля система отсчета не является жесткой, она реализуется заданием совокупности бесконечного числа тел и связанных с нею

произвольно идущих часов, т. е. система отсчета становится произвольной.

В связи с произвольностью системы отсчета возникает вопрос: каковы должны быть математические уравнения, выражающие законы природы? Эйнштейн был глубоко убежден, что во всех системах отсчета они должны иметь одинаковый вид (общий принцип относительности). Очевидно, этому требованию общей ковариантности автоматически удовлетворяют тензорные уравнения, которые при произвольных преобразованиях координат сохраняют свой вид. Теория пространства — времени и гравитации, удовлетворяющая этому принципу, была создана Эйнштейном и называется общей теорией относительности.

§ 4. Истинное время и расстояния

Пусть в некоторой точке пространства происходят два события с промежутком координатного времени между ними, равным dx^0 . Поскольку $dx^\alpha = 0$, для четырехмерного интервала имеем $ds^2 = g_{00}dx^{0^2}$. Истинным или собственным временем между этими событиями называется отношение $\frac{ds}{c}$, т. е.

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{g_{00}} dx^0, \quad \tau = \frac{1}{c} \int_{x_1^0}^{x_2^0} \sqrt{g_{00}} dx^0, \quad (4.1)$$

где x_1^0 и x_2^0 — времена двух событий, происходящих в одной и той же точке.

Теперь определим понятия одновременности и истинного (собственного) расстояния. Это можно сделать с помощью светового сигнала. Рассмотрим две соседние точки трехмерного пространства $A(x^\alpha)$ и $B(x^\alpha + dx^\alpha)$ с показаниями часов x_A^0 и $x_B^0 + dx_B^0$. Пусть световой сигнал, отправленный из B в момент $x_B^0 + \Delta x_B^0$, достигает A в момент x_A^0 , затем, отражаясь, возвращается опять в точку B в момент $x_B^0 + \Delta x_B^0$. Очевидно, одновременным событию, происходящему в точке A в момент времени

x_A^0 , следует считать то событие в B , которое имело место в момент

$$x_B^0 = x_A^0 + \frac{1}{2} (\Delta x_B'^0 + \Delta x_B''^0). \quad (4.2)$$

Истинное расстояние между точками A и B равно половине промежутка собственного времени, соответствующего промежутку послышки и приема сигнала в точку B , умноженному на скорость света, т. е.

$$dl = \frac{1}{2} cd\tau = \frac{1}{2} \sqrt{g_{00}} (\Delta x_B'^0 - \Delta x_B''^0). \quad (4.3)$$

Для светового сигнала $ds=0$, поэтому $\Delta x_B'^0$ и $\Delta x_B''^0$ определяются уравнением

$$ds^2 = g_{00} dx^0{}^2 + 2g_{0\alpha} dx^0 dx^\alpha + g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0.$$

Решая его относительно dx^0 , находим

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_B'^0 &= \frac{-g_{0\alpha} dx^\alpha - \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{00} g_{\alpha\beta}) dx^\alpha dx^\beta}}{g_{00}}, \\ \Delta x_B''^0 &= \frac{-g_{0\alpha} dx^\alpha + \sqrt{(g_{0\alpha} g_{0\beta} - g_{00} g_{\alpha\beta}) dx^\alpha dx^\beta}}{g_{00}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.2), получаем

$$x_B^0 = x_A^0 - \frac{g_{0\alpha} dx^\alpha}{g_{00}}. \quad (4.5)$$

Так, продвигаясь от точки к точке, можно синхронизовать часы вдоль любой линии для произвольных расстояний между A и B :

$$x_B^0 = x_A^0 - \int_L \frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} dx^\alpha. \quad (4.6)$$

Отсюда видно, что синхронизация часов — процедура неоднозначная, она зависит от пути, по которому посылался световой сигнал. Однозначной синхронизации часов можно достичь лишь в случае $g_{0\alpha}=0$, что имеет место в статических полях. В таких случаях принято x^0 называть мировым временем.

Из (4.3) и (4.4) для истинного расстояния находим

$$dl^2 = \gamma_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \quad (4.7)$$

где

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g_{00}}. \quad (4.8)$$

Легко проверить, что при преобразованиях типа $x^\alpha = f^\alpha(x'^1, x'^2, x'^3)$ величина g_{00} ведет себя, как скаляр, а $g_{0\alpha}$ — как трехмерный вектор. Тогда произведение $g_{0\alpha}g_{0\beta}$ есть тензор второго ранга и, следовательно, $\gamma_{\alpha\beta}$ играет роль метрического тензора для трехмерного пространства. Таким образом, (4.7) является скаляром относительно преобразований пространственных координат. Однако, когда в преобразованиях координат время также входит, dl^2 уже не будет скаляром. Легко показать, что

$$\gamma^{\alpha\beta} = -g^{\alpha\beta}. \quad (4.9)$$

§ 5. Ковариантное дифференцирование

Наиболее общие закономерности природы формулируются в виде дифференциальных уравнений. В релятивистской теории гравитации к этому добавляется требование общей ковариантности. Ниже мы увидим, что обычное действие дифференцирования нарушает тензорный характер величин. Поэтому, чтобы совместить эти два требования друг с другом, возникает необходимость пересмотреть и соответствующим образом обобщить понятия дифференциала и производной. С этой целью рассмотрим дифференциал вектора. Согласно (1.6)

$$dA_i = \frac{\partial x'^k}{\partial x^i} dA'_k + \frac{\partial^2 x'^k}{\partial x^i \partial x^l} A'_k dx^l,$$

где $dA_i = A_i(x^m + dx^m) - A_i(x^m)$. Из-за появления второго слагаемого dA_i не подчиняется закону преобразования (1.6) и поэтому не является ковариантным вектором. Это обусловлено тем, что коэффициенты преобразования векторов являются функциями от координат, т. е. в разных точках они преобразуются по-разному, а dA_i есть разность векторов в точках $x^m + dx^m$ и x^m . В случае линейных преобразований (например, преобразований Лорен-

ца в мире Минковского) второе слагаемое исчезает, dA_i является вектором. Возникает необходимость видоизменить понятие дифференциала так, чтобы сохранить тензорный характер величин. Этого можно достичь, если мы $A_i(x^m)$ перенесем в точку $x^m + dx^m$ и лишь после этого вычислим разность векторов. Эту разность обозначим DA_i ; она является вектором, поскольку вычитаются величины, отнесенные к одной точке. Но как перенести вектор из одной точки в другую? В плоском мире вектор переносится параллельно самому себе, т. е. при перемещении вдоль некоторой прямой угол, образованный с ней (или, выражаясь иначе, скалярное произведение вектора с единичным вектором по направлению линии), остается постоянным. Проведем через эту линию какую-либо плоскость, а затем согнем ее, превратив в поверхность произвольной формы. При этом прямая превращается в геодезическую линию поверхности, а скалярное произведение $A_i dl^i$, где dl^i — компоненты элемента дуги геодезической линии, должно остаться инвариантным. Иначе говоря, при параллельном переносе вектора его угол, образованный вектором с элементом геодезической линии, остается постоянным вдоль геодезической. Это и есть обобщение понятия параллельного переноса на случай неевклидова пространства.

В галилеевой системе координат при параллельном переносе проекции вектора на оси остаются постоянными. В криволинейной системе координат из-за изменения направления осей они изменяются. С точностью до членов порядка dx^i изменение $A_i(x^m)$ при параллельном переносе пропорционально самому A_i и смещению dx^l :

$$\delta A_i = \Gamma_{il}^h A_h dx^l, \quad (5.1)$$

где Γ_{il}^h — некоторые функции координат, которые называются символами Кристоффеля. Следовательно, для ковариантного дифференциала имеем

$$\begin{aligned} DA_i &= A_i(x^m + dx^m) - [A_i(x^m) + \Gamma_{il}^h A_h dx^l] = \\ &= dA_i - \Gamma_{il}^h A_h dx^l = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^h A_h \right) dx^l. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь DA_i — вектор, а dA_i — не вектор, поэтому, очевидно,

Γ_{il}^k не является тензором. Итак, выражение

$$\frac{DA_i}{Dx^l} \equiv A_{i;l} = \frac{\partial A_i}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^k A_k \quad (5.3)$$

является тензором и представляет собой естественное обобщение понятия производной на случай криволинейной системы координат.

Теперь найдем ковариантную производную контравариантного вектора A_i . С этой целью воспользуемся тем обстоятельством, что при параллельном переносе скаляр не изменяется: $\delta(A^k B_k) = 0$, где B_k — произвольный ковариантный вектор:

$$\begin{aligned} \delta(A^k B_k) &= B_k \delta A^k + A^k \delta B_k = B_i \delta A^i + A^k \Gamma_{kl}^i B_i dx^l = \\ &= (\delta A^i + \Gamma_{kl}^i A^k dx^l) B_i = 0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\delta A^i = -\Gamma_{kl}^i A^k dx^l \quad (5.4)$$

и, следовательно,

$$DA^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k \right) dx^l, \quad A_{;l}^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^l} + \Gamma_{kl}^i A^k. \quad (5.5)$$

Нетрудно убедиться, что правило ковариантного дифференцирования произведения компонент векторов $A_i B^k C_l \dots$ совпадает с правилом обычного дифференциального исчисления. Воспользовавшись этим, легко вычислить ковариантные производные тензоров любых рангов и вариантности:

$$\left. \begin{aligned} A_{ik;l} &= \frac{\partial A_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^m A_{mk} - \Gamma_{kl}^m A_{im}, \\ A_i^{ik} &= \frac{\partial A_i^{ik}}{\partial x^l} + \Gamma_{ml}^i A^{mk} + \Gamma_{ml}^k A^{im}, \\ A_{i;l}^k &= \frac{\partial A_i^k}{\partial x^l} + \Gamma_{ml}^k A_i^m - \Gamma_{il}^m A_m^k. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Поднимая индекс ковариантного дифференцирования, мы получаем контравариантные производные тензоров

$$g^{kl} A_{i;l} = A_i^{;k}, \quad g^{kl} A_{;l}^i = A^{i;l}. \quad (5.7)$$

Иногда взамен Γ_{kl}^i пользуются следующими символами Кристоффеля:

$$g_{im}\Gamma_{kl}^m = \Gamma_{i;kl}.$$

Явное выражение символа Γ_{kl}^i приводится в следующем параграфе.

В галилеевой системе отсчета $\Gamma_{kl}^i = 0$, поэтому операция ковариантного дифференцирования сводится к обычному.

§ 6. Некоторые необходимые формулы

Выше было отмечено, что уравнения, формулирующие законы природы, являются тензорными, поэтому они имеют одинаковый вид во всех системах отсчета*). Это обстоятельство позволяет сразу написать в криволинейных координатах в общековариантном виде все те законы, которые уже сформулированы для плоского мира в тензорном виде.

Воспользуемся этим прежде всего для получения явного выражения символов Кристоффеля. Рассмотрим градиент произвольного скаляра $A_i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}$.

$$\text{Поскольку } \frac{\partial A_i}{\partial x^k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i},$$

$$A_{i;k} - A_{k;i} = (\Gamma_{ki}^l - \Gamma_{ik}^l) A_l \equiv B_{ik}.$$

В локально галилеевой системе все символы Кристоффеля исчезают и $B_{ik}^0 = 0$, следовательно, в произвольной системе координат также $B_{ik} = 0$, что возможно лишь при условии

$$\Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ki}^l, \quad (6.1)$$

т. е. символы Кристоффеля симметричны относительно своих нижних индексов.

*) Это утверждение очень жесткое: вообще говоря, существуют и другие возможности, в которых инвариантная формулировка некоторых законов достигается без привлечения тензоров.

Согласно (2.7) в локально галилеевой системе координат $g_{ik;l}^0 = \frac{\partial g_{ik}^0}{\partial x^l} = 0$. Значит, в произвольной криволинейной системе координат также

$$g_{ik;l} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \Gamma_{il}^m g_{mk} - \Gamma_{kl}^m g_{im} = 0. \quad (6.2)$$

Отсюда следует тождество

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{lk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} = 2g_{mk}\Gamma_{il}^m.$$

Умножая на g^{kn} , находим искомую формулу для символов Кристоффеля:

$$\Gamma_{il}^n = \frac{1}{2} g^{nk} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} \right). \quad (6.3)$$

Теперь рассмотрим «свободное» движение частицы в гравитационном поле. В галилеевой системе координат нет никаких сил, частица движется прямолинейно и равномерно, поэтому $du^i = 0$, где $u^i = \frac{dx^i}{ds}$ — четырехмерная скорость. В соответствии с выше сказанным в криволинейных координатах мы должны писать $Du^i = du^i + \Gamma_{kl}^i u^k dx^l$, т. е.

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l = 0$$

или

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0. \quad (6.4)$$

Из римановой геометрии известно, что последнее одновременно является уравнением геодезической линии. Таким образом, в пространстве, искривленном гравитацией, «свободное» движение частицы совершается по геодезической линии. В терминах ньютоновской теории гравитации выражение — $m\Gamma_{kl}^i u^k u^l$ следует считать компонентой четырехмерной силы, действующей на частицу. В самом деле, при переходе к ньютоновской теории оно переходит в $-m \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$.

При наличии электромагнитного поля мы имеем следующий закон движения заряженной частицы:

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l = \frac{e}{mc^2} F_{kl} u^k, \quad (6.5)$$

где $F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}$, A_i — четырехмерный потенциал электромагнитного поля и e — заряд частицы.

Наконец, рассмотрим уравнения гидродинамики. В специальной теории относительности эти уравнения записываются в виде $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k} = 0$, где T_{ik} — тензор энергии — импульса для сплошной среды:

$$T_{ik} = (P + \rho) u_i u_k - P g_{ik}. \quad (6.6)$$

Здесь P — давление, ρ — плотность полной энергии (включая энергию покоя частиц) в собственной (сопутствующей) системе отсчета, т. е. в системе, связанной с движением масс. В искривленном пространстве уравнения гидродинамики принимают следующий вид:

$$T_{i,k}^k = \frac{\partial T_i^k}{\partial x^k} + \Gamma_{lk}^k T_i^l - \Gamma_{ik}^l T_l^k = 0.$$

Проделав некоторые преобразования и используя свойство симметрии $T_{ik} = T_{ki}$ это уравнение можно свести к следующему:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g} T_i^k)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} T^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = 0. \quad (6.7)$$

§ 7. Тензор кривизны

В искривленном гравитацией пространстве — времени высшие ковариантные производные векторов и тензоров зависят от последовательности дифференцирования. Используя правила ковариантного дифференцирования, приведенные в § 5, легко показать, что

$$\left. \begin{aligned} A_{i;k;l} - A_{i;l;k} &= R_{ikl}^m A_m, \\ A_{i;k;l}^i - A_{i;l;k}^i &= -R_{mk}^i A^m, \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

где R_{ikl}^m называется тензором кривизны или тензором Римана:

$$R_{klm}^i = \frac{\partial \Gamma_{km}^i}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{kl}^i}{\partial x^m} + \Gamma_{nl}^i \Gamma_{km}^n - \Gamma_{nm}^i \Gamma_{kl}^n. \quad (7.2)$$

В галилеевой системе координат пространства Минковского для произвольного вектора A_i ; k ; $l = A_i$; l ; $k = \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^k \partial x^l}$, т. е. $R_{ikl}^m = 0$. Но если все компоненты тензора равны нулю в одной системе координат, то они останутся таковыми и в любой системе отсчета плоского мира. Отсюда следует, что исчезновение всех компонент тензора кривизны является необходимым условием псевдоевклидова (т. е. плоского) характера пространства — времени.

Тензор R_{klm}^i возникает и при параллельном переносе векторов по бесконечно малым замкнутым контурам. Так, совершая параллельный перенос векторов A_k и A^k по замкнутому контуру, огибающему малую двумерную поверхность Δf^{lm} , получаем [66]

$$\left. \begin{aligned} \Delta A_k &= \frac{1}{2} R_{klm}^i A_i \Delta f^{lm}, \\ \Delta A^k &= -\frac{1}{2} R_{ilm}^k A^i \Delta f^{lm}. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Пусть все компоненты тензора R_{klm}^i во всем четырехмерном пространстве равны нулю. Тогда при параллельном переносе компоненты векторов останутся неизменными. В частности, можно в некоторой точке пространства — времени построить инерциальную систему координат, а затем путем параллельного переноса все пространство заполнить тождественными инерциальными системами. Таким образом, $R_{klm}^i = 0$ является не только необходимым, но и достаточным условием того, что пространство — время плоское, т. е. в этом случае подходящим преобразованием координат компоненты метрического тензора g_{ik} можно привести к виду (2.7).

Отметим следующие свойства симметрии тензора кривизны, которые следуют из (7.2):

$$\left. \begin{aligned} R_{klm}^i &= -R_{kml}^i, \\ R_{klm}^i + R_{mkl}^i + R_{ilm}^i &= 0, \\ R_{iklm} &= -R_{kil}m = -R_{ikml} = R_{lmik}, \\ R_{iklm} + R_{imkl} + R_{ilmk} &= 0, \\ R_{ikl;m}^n + R_{imk;l}^n + R_{ilm;k}^n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

где

$$R_{iklm} = g_{in} R_{klm}^n. \quad (7.5)$$

Четвертое тождество имеет место для любого фиксированного индекса. Пятое соотношение известно под названием тождества Бианки. Из него путем свертки индексов получается следующее сравнительно простое тождество:

$$R_{i;k}^k = \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial x^i}. \quad (7.6)$$

Благодаря перечисленным свойствам симметрии число независимых компонент тензора R_{klm}^i равняется не 256, как следовало бы ожидать в общем случае, а 20.

Помимо тензора кривизны для теории важное значение имеет также тензор

$$R_{ik} = \delta_m^l R_{i.k}^m = R_{i.k}^l, \quad (7.7)$$

который называется тензором Риччи. Из (6.2) следует

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{il}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m - \Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l. \quad (7.8)$$

Сразу же видно, что этот тензор симметричен, $R_{ik} = R_{ki}$. Свертыванием индексов тензора Риччи получается инвариант

$$R = g^{ik} R_{ik} = R_i^i, \quad (7.9)$$

называемый скалярной кривизной пространства, по аналогии с гауссовской кривизной поверхности в обычном трехмерном пространстве.

В отличие от тензора Римана, равенство нулю тензора $R_{ik} = 0$ и скаляра $R = 0$ не означает, что пространство

— время плоское, эти условия являются необходимыми, но недостаточными. Действительно, в следующем параграфе мы увидим, что $R=0$, $R_{ik}=0$ имеют место и в тех местах искривленного пространства, где оно не занято веществом.

§ 8. Уравнения Эйнштейна

В математической теории полей логически стройную систему можно построить, исходя из подходящим образом выбранного выражения для действия, из принципа экстремума которого затем получаются уравнения поля и движения частиц. В релятивистской теории гравитации в основу кладется следующее выражение действия:

$$S = \frac{1}{c} \int \left(\Lambda + \frac{c^2}{2\chi_0} R \right) \sqrt{-g} d\Omega, \quad (8.1)$$

где Λ — плотность функции Лагранжа для вещества, R — скалярная кривизна пространства — времени, $\chi_0 = \frac{8\pi k_0}{c^2}$, k_0 — ньютоновская гравитационная постоянная.

Для получения уравнений гравитационного поля фиксируются траектории частиц и варьируются величины, характеризующие поле, а именно, g_{ik} , а при получении уравнений движения частиц, оставляя неизменными функции g_{ik} , виртуальным изменениям подвергают координаты x^i . Далее из $\delta S=0$ и произвольности вариаций δg_{ik} и δx^i получаются следующие уравнения:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{\chi_0}{c^2} T_{ik}, \quad (8.2)$$

$$T_{i;k} = 0, \quad (8.3)$$

где T_{ik} — тензор энергии — импульса вещества; он связан со скаляром Λ согласно формуле

$$T_{ik} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \left(\frac{\partial (\sqrt{-g} \Lambda)}{\partial g^{ik}} - \frac{\partial \partial (\sqrt{-g} \Lambda)}{\partial x^i \partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i} \right)} \right). \quad (8.4)$$

В случае сплошной среды отсюда получается выражение (6.6). При наличии электромагнитного поля нужно Λ

заменить на $\Lambda + \Lambda^{(n)}$, T_{ik} — на $T_{ik} + T_{ik}^{(n)}$, где

$$\left. \begin{aligned} \Lambda^{(n)} &= -\frac{1}{16\pi} g^{il} g^{km} F_{ik} F_{lm}, \\ T_{ik}^{(n)} &= \frac{1}{4\pi} \left(-F_{il} F_{ik}^l + \frac{1}{4} g_{ik} F_{lm} F^{lm} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

Уравнение (8.3) уже было приведено в конце § 6; это есть уравнение гидродинамики.

Уравнения (8.2) представляют собой уравнения Эйнштейна. Их можно также записать в следующих эквивалентных формах:

$$\left. \begin{aligned} R_i^k - \frac{1}{2} R \delta_i^k &= \frac{\chi_0}{c^2} T_i^k, \\ T_{ik} - \frac{1}{2} T g_{ik} &= \frac{c^2}{\chi_0} R_{ik}, \\ R &= -\frac{\chi_0}{c^2} T, \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

где $T = T_k^k$ — след (сумма диагональных элементов) тензора энергии — импульса. Вне распределения масс (и при отсутствии электромагнитного поля)

$$R_{ik} = 0. \quad (8.7)$$

Уравнения Эйнштейна имеют одну важную особенность, состоящую в том, что уравнения движения вещества содержатся в них. В самом деле, дифференцируя первое уравнение (8.6) ковариантно по k и учитывая тождества (7.6), мы сразу же получаем соотношение $T_{ik}^k = 0$.

Нетрудно убедиться в том, что в уравнениях Эйнштейна содержатся и уравнения Максвелла (а также уравнения других полей). В этом отношении релятивистская теория гравитации занимает особое положение среди других физических полей. Уравнения полей электромагнитного, мезонных и слабых сил не включают в себя уравнения движения вещества.

В уравнения гравитационного поля (8.2) в качестве неизвестных функций входят компоненты метрического тензора и скорости, давление, плотность энергии и температура. Однако не все функции являются независимыми. Из десяти g_{ik} четыре определяются надлежащим

выбором координат x^i , между компонентами скорости имеется соотношение $u^k u_k = 1$; давление P , плотность энергии ρ и температура T связаны между собой уравнением состояния. Таким образом, остаются 11 неизвестных функций. При расчетах некоторых теоретических моделей небесных тел часто удается обойтись без учета температуры (модели политроп, конфигурации вырожденных газовых масс). Вообще говоря, уравнения Эйнштейна — второго порядка относительно пространственно-временных координат. Вопрос о выборе начальных и граничных условий будет обсуждаться в дальнейшем при рассмотрении конкретных задач.

Рассмотрим слабое поле тяготения, создаваемое массами, движущимися с достаточно малыми скоростями. Очевидно, в этом случае можно выбрать такую систему отсчета, которая очень мало отличается от инерциальной, т. е.

$$g_{ik} = g_{ik}^0 + h_{ik}, \quad (8.8)$$

где h_{ik} — малые добавки, а g_{ik}^0 определяются матрицей (2.7):

$$g_{00}^0 = 1, \quad g_{11}^0 = g_{22}^0 = g_{33}^0 = -1, \quad g_{0\alpha}^0 = g_{\alpha 3}^0 = 0, \quad \alpha \neq \beta.$$

Во всех курсах общей теории относительности показано, что если (8.8) подставить в (8.2), то после наложения некоторых дополнительных ограничений на выбор координат (см. [66, 53]) в первом приближении по h_{ik} получаются следующие уравнения:

$$\Delta h_{ik} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial t^2} = -g_{ik}^0 \chi_0 \rho, \quad (8.9)$$

где Δ — оператор Лапласа. Решение (8.9) есть

$$h_{ik} = -g_{ik}^0 \frac{\chi_0}{4\pi} \int \left(\frac{\rho dv}{r} \right)_{t-r/c} = -g_{ik}^0 \frac{2\varphi}{c^2},$$

где φ — ньютоновский потенциал гравитационного поля. Таким образом,

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}, \quad g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 + \frac{2\varphi}{c^2}. \quad (8.10)$$

Учитывая последний результат, перепишем (8.9) для $i = k = 0$:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 4\pi k_0 \rho. \quad (8.11)$$

Это известное волновое уравнение нерелятивистской теории гравитации. Итак, в предельном случае слабого гравитационного поля из уравнений Эйнштейна получается закон тяготения Ньютона.

§ 9. Сферически-симметричное гравитационное поле

Важным типом гравитационного поля является центрально-симметричное. Оно создается сферически-симметричным распределением масс, находящимся в покое или совершающим произвольное радиальное движение. Является определенной идеализацией предположение о наличии подобной специальной физической ситуации, возникающей при отсутствии вращения небесного тела, достаточно удаленного от других. Однако часто эти два условия оказываются выполненными с достаточно высокой точностью. При наличии центральной симметрии уравнения Эйнштейна сильно упрощаются и в ряде интересных случаев допускают аналитическое и численное решение. В результате удастся выяснить наиболее существенные черты релятивистской теории гравитации, получить ряд новых эффектов, допускающих ее экспериментальную проверку.

Здесь удобно пользоваться сферическими координатами r, θ, φ . Введем обозначения $r = x^1, \theta = x^2, \varphi = x^3$. Используя свойство центральной симметрии, а также тот произвол, который имеется в выборе координат x^0 и r , можно показать, что метрика приводится к следующему виду:

$$dS^2 = e^\nu dx^{0^2} - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (9.1)$$

где ν и λ — неизвестные функции от r и x^0 . Выпишем компоненты метрического тензора:

$$\left. \begin{aligned} g_{00} &= e^\nu, & g_{11} &= -e^\lambda, & g_{22} &= -r^2, & g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta, \\ g^{00} &= e^{-\nu}, & g^{11} &= -e^{-\lambda}, & g^{22} &= -r^{-2}, & g^{33} &= -r^{-2} \sin^{-2} \theta. \end{aligned} \right\} \quad (9.2)$$

Контравариантные компоненты вычислены по формуле (2.12). Компоненты тензора R_{ik} вычисляются по формуле (7.8), а тензора энергии — импульса — по (6.6). В результате из (8.2) получается такая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -e^{-\lambda} \left(\frac{v'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} &= \frac{\chi_0}{c^2} T_1^1, \\ -\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left(v'' + \frac{v'^2}{2} + \frac{v' - \lambda'}{r} - \frac{v' \lambda'}{2} \right) + \\ + \frac{1}{2} e^{-\nu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{\dot{\lambda}^2}{2} - \frac{\dot{\lambda} \dot{\nu}}{2} \right) &= \frac{\chi_0}{c^2} T_2^2 = \frac{\chi_0}{c^2} T_3^3, \\ -e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{\lambda'}{r} \right) + \frac{1}{r^2} &= \frac{\chi_0}{c^2} T_0^0, \\ -e^{-\lambda} \frac{\dot{\lambda}}{r} &= \frac{\chi_0}{c^2} T_0^1, \end{aligned} \right\} (9.3)$$

где штрих означает дифференцирование по r , а точка — по x^0 .

В общем случае для представляющих физический интерес уравнений состояния внутреннее решение может быть найдено лишь численным интегрированием. Аналитическое решение найдено для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) и для внешней области, где $P = \rho = 0$. Последнее известно под названием решения Шварцшильда:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) dx^{0^2} - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (9.4)$$

где $r_g = 2k_0 M/c^2$ — так называемый гравитационный радиус тела. По теории тяготения Ньютона при радиусе $R \approx r_g$ гравитационная энергия небесного тела становится порядка его полной энергии: $Mc^2 \approx K_0 M^2/R$. Гравитационный радиус известных нам небесных тел на много порядков меньше их истинного радиуса, так, для Солнца $r_g = 2,956$ км, а для Земли $r_g = 0,443$ см.

Выражение (9.4) представляет собой метрику части пространства вне сферического небесного тела. При $R < r_g$ имеется особая область $0 \leq r \leq r_g$ и сингулярная поверхность $r = r_g$ (сингулярная поверхность Шварцшильда). При $r < r_g$ характер метрики изменяется: x^0 становится пространственноподобной, а r — времяподобной, $g_{00}(r_g) =$

$=0$, $g_{11}(r_g) = \infty$. В реальных небесных телах подобной ситуации не возникает, так как для них $R \gg r_g$. При конечном координатном времени dt собственное время $d\tau = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{1/2} dt \rightarrow 0$, когда $r \rightarrow r_g$; напротив, конечному $d\tau$ на сингулярной поверхности Шварцшильда соответствует бесконечное время удаленного наблюдателя

$$dt = d\tau \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1/2} \rightarrow \infty, \text{ когда } r \rightarrow r_g.$$

Однако оказывается, что специальным выбором системы отсчета эту особенность в метрике можно устранить. Это впервые было сделано Леметром следующим преобразованием координат:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \pm c\tau - 2\sqrt{r_g r} + r_g \ln \left| \frac{\sqrt{r} + \sqrt{r_g}}{\sqrt{r} - \sqrt{r_g}} \right|, \\ r &= r_g \left[\frac{3}{2r_g} (R \mp c\tau) \right]^{2/3}. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

В новой системе

$$\begin{aligned} ds^2 &= c^2 d\tau^2 - \left[\frac{3}{2r_g} (R \mp c\tau) \right]^{-2/3} dR^2 - \\ &- \left[\frac{3}{2r_g} (R \mp c\tau) \right]^{4/3} - r_g^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (9.6)$$

Как мы видим, новое выражение ds^2 не имеет особенности при $r=r_g$, она остается лишь при $r=0$, но теперь метрика нестационарна. В леметровской системе отсчета возможна однозначная синхронизация часов, так как здесь также $g_{0\alpha}=0$. Более того, везде временная координата совпадает с собственным временем ($g_{00}=1$). Такая система отсчета называется синхронной. Линии времени (т. е. мировые линии с $x^\alpha = \text{const}$, $\alpha=1, 2, 3$, и, следовательно, $u^\alpha=0$, $u^0=1$, где $u^k = \frac{dx^k}{ds}$ — четырехмерная скорость) в этой системе являются геодезическими. Действительно, они удовлетворяют уравнению

$$\frac{du^i}{ds} + \Gamma_{kl}^i u^k u^l = 0.$$

Разумеется, геодезическая линия останется таковой во всех системах отсчета. Отсюда следует, что покоящиеся относительно системы Леметра тела (и, конечно, сама эта система) относительно шварцшильдовской движутся свободно, т. е. свободно (по геодезическим линиям) падают на центр или же по тем же линиям уходят в бесконечность. Простой анализ показывает, что в случае верхнего знака в (9.5) и (9.6) мы имеем дело с первой альтернативой, а в случае нижнего знака — со второй. Итак, в каждой точке система Леметра осуществляется свободно падающими телами (верхний знак) или же радиально разбегающимися телами (нижний знак). В первом случае все тела и сама поверхность звезды свободно падают на центр (конечно, относительно системы Шварцшильда), т. е. мы имеем дело с безудержным коллапсом небесного тела. Во втором случае все тела, в том числе поверхность звезды, замедленным движением (т. е. по геодезическим линиям) уходят в бесконечность; такой картине соответствует мощный взрыв, превращающий сверхплотное небесное тело в диффузное вещество.

В последней главе мы приведем видоизмененный вариант теории гравитации, которая лишена особенностей, присущей решению Шварцшильда.

На достаточно больших расстояниях с точностью до членов порядка $1/r$, метрика (9.4) сводится к

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{r_g}{r} (dx^{0^2} + dr^2), \quad (9.7)$$

где ds_0^2 — квадрата интервала для мира Минковского. При $r \rightarrow \infty$ $ds \rightarrow ds_0$. Этой формулой выражается также метрика небесного тела любой формы, поскольку на очень больших расстояниях отклонения от сферической симметрии убывают быстрее, чем r^{-n} , где $n \geq 3$.

§ 10. Экспериментальные основы релятивистской теории гравитации

Говоря об экспериментальном подтверждении теории гравитации Эйнштейна, прежде всего необходимо потребовать ее согласованности с теорией гравитации Ньютона. В предыдущем параграфе было показано, что в достаточно слабых полях имеется полное согласие. В случае сильных полей появляются существенные отклонения

и обусловленный ими ряд новых эффектов. Рано или поздно эти эффекты будут сопоставлены с астрономическими данными и проверены на эксперименте, но пока что реальные возможности имеются только по трем эффектам, играющим фундаментальную роль для общей теории относительности. Этими эффектами являются прецессия орбит планет, красное смещение и искривление луча света в гравитационном поле. Не вдаваясь в детали математических выкладок, приведем краткое изложение их.

Рассмотрим финитное движение пробного тела вокруг некоторого массивного небесного тела сферической формы. По нерелятивистской теории траектория пробного тела является эллипсом, следовательно, значение радиуса r должно повторяться при изменении φ на 2π . Здесь r — расстояние пробного тела от правого фокуса, а φ — угол, отсчитываемый от $r_{\min}$, т. е. от перигелия. Рассмотрение этой задачи в рамках общей теории относительности показывает, что траектория финитного движения материальной точки на самом деле не является простым эллипсом. Но она может быть представлена эллипсом, который прецессирует в плоскости орбиты так, что ее перигелий смещается по направлению движения. При одном полном обороте, когда φ увеличивается на 2π , перигелий смещается на некоторую величину $\Delta\varphi$, т. е. значение $r_{\min}$ повторяется, когда угол φ увеличится не на 2π , а на величину $2\pi + \Delta\varphi$, где

$$\Delta\varphi = \frac{6\pi k_0 M}{ac^2(1-e^2)} \cdot \quad (10.1)$$

Здесь M — масса небесного тела, a — длина большой полуоси эллипса, e — его эксцентриситет. Для всех планет Солнечной системы численное значение $\Delta\varphi$ весьма мало. Так, за сто лет для Земли оно составляет $3''{,}8$, а для Меркурия $43''$. Эта прецессия оказывается во много раз меньше той, которая появляется согласно ньютоновской теории благодаря возмущению других планет и отклонению их формы от сферической. Однако точность астрономических наблюдений настолько велика, что оказалось возможным в случае Меркурия с точностью до 3% подтвердить предсказанное значение величины $\Delta\varphi$.

Теперь о втором эффекте. Несложное рассмотрение распространения света в гравитационном поле показывает, что лучи его не являются прямыми линиями. Пусть, например, световой луч, исходящий из бесконечности, проходя мимо диска небесного тела, уходит в бесконечность. При этом оказывается, что он испытывает отклонения от прямолинейного направления в сторону центра на угол

$$\Delta\varphi = \frac{2r_g}{r}, \quad (10.2)$$

где r — прицельное расстояние. Перейдя к нерелятивистскому пределу, мы должны подставить $r_g = 0$ и, следовательно, $\Delta\varphi = 0$. Таким образом, здесь мы имеем дело с релятивистским эффектом. Наибольшее отклонение получается при $r = R$, где R — радиус тела. Для Земли оно равно $0'',0057$, а для Солнца $1'',75$. Наблюдения этого эффекта во время затмения Солнца в 1952 г. дали результат $\Delta\varphi = 1'',70$, что хорошо согласуется с теоретическим значением.

Наконец, обсудим явление красного смещения. В мире Минковского плоская монохроматическая волна характеризуется четырехмерным волновым вектором $k^i \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right)$, квадрат которого, по определению, равен нулю:

$$g_{ik}^{(0)} k^i k^k = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = 0. \quad (10.3)$$

Скалярное произведение k_i на x^i дает фазу волны, которая в общем случае называется эйконалом:

$$\psi(x^i) = \mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t = -g_{ik}^{(0)} k^i x^i.$$

Отсюда получаем

$$k_i = - \frac{\partial \psi}{\partial x^i}, \quad \omega = - c \frac{\partial \psi}{\partial x^0}. \quad (10.4)$$

В случае, когда волна не является плоской, эйконал не выражается простой формулой вида $-k_i x^i$, однако соотношение (10.4) остается в силе. Учитывая (10.4), соотношение (10.3) можно записать в виде

$$g^{(0)ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0,$$

которое называется уравнением эйконала. При наличии гравитационного поля последнее соотношение запишется в виде

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^k} = 0. \quad (10.5)$$

В постоянном гравитационном поле уравнение эйконала не содержит время в явном виде, поэтому частота $\omega_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial t}$, измеренная по мировому времени $t = \frac{x^0}{c}$, является интегралом уравнения (10.5), т. е. не изменяется вдоль луча. С другой стороны, наблюдатель, воспринимающий свет, под частотой обычно подразумевает ту, которая измерена в собственном времени $\tau = \sqrt{g_{00}} t$, т. е.

$$\omega = -\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = -\frac{\partial \psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\omega_0}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (10.6)$$

Пусть свет, испущенный в точке 1, наблюдается в точке 2, тогда из (10.6) следует

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g_{00}(1)}{g_{00}(2)}} \omega_1, \quad (10.7)$$

где $g_{00}(1)$ и $g_{00}(2)$ — значения $g_{00}(x^i)$ в точках 1 и 2. В случае слабых полей $g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}$ и

$$\omega_2 \approx \omega_1 \left(1 + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2} \right), \quad \Delta\omega \approx \omega_1 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{c^2}. \quad (10.8)$$

Поскольку всегда $\varphi < 0$, при $|\varphi_1| > |\varphi_2|$ частота уменьшается, а при $|\varphi_1| < |\varphi_2|$ она увеличивается. Так, свет, поступающий от поверхности Солнца на Землю, испытывает красное смещение; наоборот, свет со стороны Земли к Солнцу испытывает синее смещение. Это явление также подтверждено наблюдениями. Используя эффект Мессбауэра, Паунду и Репке удалось остроумным способом измерить изменение частоты света на двух разных высотах от поверхности Земли.

ГЛАВА II

СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВА ПРИ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ И БОЛЬШИХ ПЛОТНОСТЯХ

§ 11. Система тождественных частиц

Рассмотрим изолированную или находящуюся в термостате систему из достаточно большого числа N одинаковых частиц. Под одинаковыми подразумеваются частицы с совершенно идентичными массой, зарядом, спином и законом взаимодействия. Последнее требование является следствием первых трех. Благодаря взаимодействиям между частицами в системе по истечении определенного времени устанавливается тепловое равновесие, характеризующееся стационарным распределением их по всевозможным квантовым состояниям. Предположим, что взаимодействия достаточно слабы, так что каждая из частиц движется независимо от других. В этих условиях можно с определенным приближением говорить об одночастичных состояниях, определяемых из уравнения Шредингера $H\psi_k = \epsilon_k \psi_k$. Состояние всего ансамбля определяется совокупностью чисел частиц в каждом одночастичном квантовом состоянии. Они называются *числами заполнения*. Числа заполнения испытывают флуктуации, однако среднее значение их $\bar{n}_k$ в тепловом равновесии является постоянным.

В природе существуют два существенно разных типа функций распределения, соответствующих двум типам ансамблей, состоящих из частиц с полуцелым и целым спинами. В случае полуцелого спина волновая функция

системы является антисимметричной: при перестановке координат и спинов любой пары частиц она меняет знак. Это приводит к тому, что в каждом из квантовых состояний не может находиться более одной частицы: $n_k = 0; 1$ (принцип Паули). Это случай так называемых *ферми-частиц* (статистика Ферми — Дирака). В случае целого спина волновая функция системы симметрична, вследствие чего в каждом квантовом состоянии может находиться любое число частиц: $n_k = 0, 1, 2, 3, \dots$ такие частицы называются *бозонами* (статистика Бозе — Эйнштейна).

В курсах статической физики доказывается, что при статическом равновесии

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT}} \pm 1}. \quad (11.1)$$

Здесь $\bar{n}_k$ — среднее число заполнения k -го состояния с энергией ε_k , T — температура, k — постоянная Больцмана, μ — параметр, зависящий от температуры и плотности частиц N/V , называемый химическим потенциалом. Верхний знак относится к статистике Ферми — Дирака, нижний — Бозе — Эйнштейна. Химический потенциал определяется из условия

$$\sum_k n_k = N, \quad (11.2)$$

где суммирование производится по всем одночастичным квантовым состояниям. Энергия системы равна

$$\sum_k \varepsilon_k n_k = E. \quad (11.3)$$

При $\bar{n}_k \ll 1$, что имеет место, когда $\varepsilon_k - \mu \gg k$, формула (11.1) переходит к классическому пределу

$$\bar{n}_k = e^{-\frac{\varepsilon_k - \mu}{kT}}, \quad (11.4)$$

называемому *распределением Больцмана — Максвелла* (статистика Больцмана). В следующем параграфе будет

показано, что условие выполнения больцмановского распределения $\epsilon_k - \mu \gg kT$ эквивалентно следующему:

$$\frac{N}{V} \ll (2\pi m kT / h^2)^{3/2}, \quad (11.5)$$

где V — объем газа, h — постоянная Планка, деленная на 2π .

Дальше речь пойдет только о поступательном движении частиц в газе. В этом случае энергия имеет непрерывные значения

$$\epsilon = c(m^2 c^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)^{1/2}. \quad (11.6)$$

При нерелятивистских скоростях $v \ll c$

$$\epsilon = mc^2 + \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2). \quad (11.7)$$

Теперь можно говорить о числе частиц в интервале импульсов $(P_k, P_k + dP_k)$, $k = x, y, z$. Оно равно $n_p \Delta Z_p$, где ΔZ_p — число квантовых состояний в рассмотренном интервале импульсов. Из курса квантовой механики известно, что

$$\Delta Z_p = (2s + 1) \frac{dP_x dP_y dP_z}{(2\pi\hbar)^3} dV, \quad (11.8)$$

где dV — элемент пространственного объема, s — спин частицы. Если перейти к сферическим координатам в пространстве импульсов и проинтегрировать по углам, то получим распределение по абсолютному значению импульса:

$$dN_p = \frac{(2s + 1) V p^2 dp}{2\pi^2 \hbar^3 \left(e^{\frac{\epsilon - \mu}{kT}} \pm 1 \right)}. \quad (11.9)$$

§ 12. Вырожденный электронный газ

В дальнейшем мы увидим, что в сверхплотных звездах типа белых карликов имеется газ свободных электронов, который находится в особых условиях, сходных с условиями, существующими в металлах. В обоих случаях ситуация такова, что для объяснения ряда важных физических явлений можно без заметных ошибок при-

нять $T=0$. Правда, температура в белых карликах может оказаться очень высокой, тем не менее мы увидим, что основные статические свойства электронного газа не существенно отличаются от тех, которые получаются при абсолютном нуле.

Для распределения электронов по абсолютному значению импульса из (11.9) имеем (для электронов $s=1/2$)

$$dN_p = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \frac{p^2 dp}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{kT}} + 1}. \quad (12.1)$$

Отсюда видно, что когда $T=0$, то при $\epsilon > \mu$ число $dN_p = 0$, а при $\epsilon < \mu$

$$dN_p = V \cdot \frac{p^2 dp}{\pi^2 \hbar^3}. \quad (12.2)$$

Здесь левая часть представляет число частиц с импульсами $(p, p+dp)$, правая — число квантовых состояний (см. формулу (11.8)) в том же интервале. Таким образом, при $T=0$ все квантовые состояния (состояние свободного электрона определяется заданием проекций импульса p_x, p_y, p_z и спина s_z , который принимает значения $\pm \hbar/2$) с энергией $\epsilon = \mu$ заполнены частицами, а другие, с энергией $\epsilon > \mu$, пусты. При $\epsilon = \mu$ функция распределения терпит разрыв: число заполнения от единицы скачком обращается в нуль.

Сплошная ломаная линия на рис. 1 представляет это распределение, которое называется вырожденным (нормальным считается распределение импульсов Максвелла — Больцмана).

Полученный результат очевиден. При абсолютном нуле энергия системы должна быть по возможности наименьшей. Казалось бы при этом все электроны

должны находиться в состоянии покоя, т. е. конденсироваться на наинизшем уровне с энергией покоя

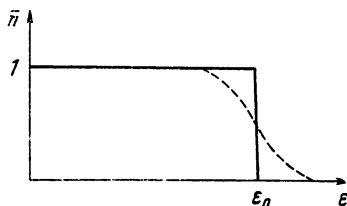


Рис. 1. Средние числа заполнения в вырожденном ферми-газе. Сплошная линия — распределение частиц при абсолютном нуле, прерывистая — при $T \leq T_0$.

$m_e c^2$. Но существует принцип Паули (он использован при выводе функции распределения (11.1)), по которому в каждом квантовом состоянии может находиться не более одной частицы. Поэтому электроны заполняют поштучно все состояния с энергией от наименьшей $m_e c^2$ до некоторой максимальной ε_e , называемой *граничной энергией Ферми*. Из вышеизложенного следует, что граничная энергия Ферми равна химическому потенциалу газа

$$\varepsilon_0 = \mu. \quad (12.3)$$

В бозе-газе на числа заполнения никаких ограничений не накладывается, поэтому при $T=0$ все частицы конденсируются на уровне $\varepsilon = m c^2$.

Полное число частиц получается из (12.2) интегрированием в пределах от нуля до так называемого *граничного импульса Ферми* p_0 , соответствующего энергии ε_0 :

$$N = V \frac{p_0^3}{3\pi^2 \hbar^3}, \quad \varepsilon_0 = c (m_e^2 c^2 + p_0^2)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$p_0 = (3\pi^2)^{1/3} \cdot \hbar \cdot n^{1/3}, \quad (12.4)$$

где $n = N/V$ — плотность частиц. Таким образом, для граничной энергии имеем

$$\varepsilon'_0 = \varepsilon_0 - m_e c^2 = \frac{1}{2m_e} (3\pi^2)^{2/3} \cdot \hbar^2 \cdot n^{2/3} \text{ при } p_0 \ll m_e c, \quad (12.5)$$

$$\varepsilon_0 = (3\pi^2)^{1/3} \cdot \hbar \cdot c \cdot n^{1/3} \quad \text{при } p_0 \gg m_e c. \quad (12.6)$$

Полная энергия электронного газа равна

$$\begin{aligned} E &= c \int_0^{p_0} (m_e^2 c^2 + p^2)^{1/2} dN_p = \frac{V \cdot c}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^{p_0} (m_e^2 c^2 + p^2)^{1/2} p^2 dp = \\ &= V \frac{m_e^4 c^5}{8\pi^2 \hbar^3} [x_e (1 + 2x_e^2) (1 + x_e^2)^{1/2} - \ln (x_e + \sqrt{1 + x_e^2})], \end{aligned} \quad (12.7)$$

где $x_e = \frac{p_0}{m_e c}$ — граничный импульс, измеренный в единицах $m_e \cdot c$.

Приведенные формулы применимы также при не слишком высоких температурах. Так, если $kT \ll \varepsilon_0 - m_e c^2$, то тепловой энергии недостаточно для разрушения основной части вырожденного распределения. Возбуждаются лишь уровни, находящиеся в узком слое около границы $\varepsilon = \varepsilon_0$, а те, которые лежат в глубине распределения, остаются нетронутыми. При этом из-за появления электронов с энергией $\varepsilon > \varepsilon_0$ край прямоугольного распределения слегка сглаживается (прерывистая линия на рис. 1). С повышением температуры все большее и большее число электронов переходит в область $\varepsilon > \varepsilon_0$ и, наконец, при $kT \gg \varepsilon_0 - m_e c^2$ в газе устанавливается максвелловское распределение. Отношение граничной кинетической энергии Ферми к постоянной Больцмана называется температурой вырождения $(\varepsilon_0 - m_e c^2)/k = T_0$. При нерелятивистских энергиях, когда $P_0 = (3\pi^2)^{1/3} \hbar n^{1/3} \ll m_e c$, температура вырождения равна

$$T_0 = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_e k} n^{2/3}, \quad (12.8)$$

а в релятивистском случае

$$T_0 = \frac{c \cdot P_0}{k} = \frac{1}{k} (3\pi^2)^{1/3} \hbar c n^{1/3}. \quad (12.9)$$

Таким образом, ферми-газ при температурах $T \ll T_0$ вырожден, а при $T \gg T_0$ имеет место распределение Максвелла — Больцмана.

В случае полного вырождения энтропия ферми-газа равна нулю. Действительно, энтропия является показателем максимального хаоса, а при вырождении мы имеем дело с предельно упорядоченным движением и распределением частиц по состояниям.

§ 13. Малые отклонения от полного вырождения

Исследуем поведение газа, состоящего из частиц Ферми при температурах, малых по сравнению с температурой вырождения. Согласно (12.1) для числа частиц

и энергии системы имеем

$$N = \frac{V}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{kT}} + 1}, \quad (13.1)$$

$$E = \frac{c \cdot V}{\pi^2 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{\sqrt{m_e^2 c^2 + p^2}}{e^{\frac{\epsilon - \mu}{kT}} + 1} p^2 dp. \quad (13.2)$$

Первая формула определяет химический потенциал как функцию от температуры и плотности частиц $\mu(T, n)$. Подставив найденное значение химического потенциала в (13.2) и выполняя интегрирование, мы найдем полную энергию. В общем случае точное вычисление интегралов (13.1) и (13.2) в элементарных функциях невозможно. Однако такое интегрирование возможно произвести при достаточно малых ($T \ll T_0$) и больших ($T > T_0$) температурах.

Здесь мы рассмотрим случай $T \ll T_0$. Это ограничение эквивалентно $kT \ll \mu'$, где $\mu' = \mu - m_e c^2$ (см. (12.5)). В целях получения аналитических выражений рассмотрим отдельно нерелятивистский и релятивистский случаи. Для химического потенциала и энергии из (13.1) и (13.2) получаются формулы в виде ряда по степеням малого параметра разложения $\pi kT/\epsilon_0 = \pi T/T_0$. Опуская процедуру вычисления интегралов, которую можно найти в любом учебнике статистической физики, приведем конечный результат.

В нерелятивистском случае $p \ll m_e c$ получается

$$\mu' = \mu_0' \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{\pi T}{T_0} \right)^2 - \frac{1}{80} \left(\frac{\pi T}{T_0} \right)^4 + \dots \right], \quad (13.3)$$

$$E = N m_e c^2 + \frac{3}{5} N \epsilon_0' \left[1 + \frac{5}{12} \left(\frac{\pi T}{T_0} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{\pi T}{T_0} \right)^4 + \dots \right]. \quad (13.4)$$

Здесь $\mu_0' = \epsilon_0' = kT_0$ — химический потенциал при абсолютном нуле.

В релятивистском случае получаются более простые интегралы, вычисление которых дает

$$\mu = \mu_0 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{\pi T}{T_0} \right)^2 + \dots \right], \quad (13.5)$$

$$E = \frac{3}{4} N \varepsilon_0 \left[1 + 2 \left(\frac{\pi T}{T_0} \right)^2 + \frac{27}{15} \left(\frac{\pi T}{T_0} \right)^4 + \dots \right]. \quad (13.6)$$

В разложении (13. 5) член $(\pi T/T_0)^4$ отсутствует.

Приведенные формулы дают возможность утверждать, что полученные в предыдущем параграфе результаты для $T=0$ можно с определенной точностью распространить и на случай температур, в несколько раз меньших температуры вырождения.

Чисто электронный газ из-за кулоновских сил отталкивания является неустойчивой системой. Однако в металлах и белых карликах электроны движутся в кристаллической решетке, образованной из положительных ионов; в целом система нейтральна и поэтому устойчива.

До сих пор мы считали электронный газ идеальным, пренебрегая энергией взаимодействия частиц по сравнению с их кинетической энергией. Посмотрим, когда это приближение оправдано. Средняя энергия кулоновского взаимодействия электрона с электронами и ядрами одинакового порядка и приблизительно равна Ze^2/l , где

$Z \cdot e^2$ — заряд ядра, а $l = \left(\frac{Z}{n} \right)^{1/3}$ — среднее расстояние

между электроном и ядром (благодаря эффекту экранировки средняя энергия взаимодействия электрона с зарядами, находящимися вне сферы радиуса l , равна нулю). Средняя же кинетическая энергия частицы,

как легко убедиться, порядка граничной $\varepsilon'_0 = \varepsilon_0 - m_e c^2$. Следовательно, отношение средней энергии взаимодействия к средней кинетической порядка

$$\frac{Z \cdot e^2}{l \varepsilon'_0} \approx \frac{2m_e Z^{2/3} e^2}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2} n^{-1/3} \approx 5 \cdot 10^7 Z^{2/3} \cdot n^{-1/3}. \quad (13.7)$$

В случае белых карликов плотности достаточно большие, и это отношение оказывается очень малым по сравнению с единицей, поэтому здесь приближение идеального

газа оправдано. Примечательно, что с повышением плотности отклонение от идеальности для электронного газа становится все более и более незначительным. В белых карликах электронный газ может быть и релятивистским. Тогда

$$\frac{Ze^2}{1e_0'} \approx \frac{1}{3} \frac{e^2}{\hbar \cdot c} Z^{2/3} \ll 1. \quad (13.8)$$

§ 14. Образование свободного электронного газа

По сравнению со звездами типа Солнца радиусом белых карликов на один, два и даже три порядка меньше, тогда как массы приблизительно равны. Следовательно, в них плотности и давления должны быть очень высокими. При плотностях выше тех, которые имеются в твердых телах, в свойствах вещества происходят существенные качественные изменения. При повышении плотности появляется ряд новых фазовых состояний, которых нет в наземных условиях. Одно из них — ионизация атомов и образование свободного электронного газа.

Физика явления образования свободного электронного газа изложена в монографии Шацмана [258], где можно найти также ссылки на соответствующие оригинальные работы. Здесь мы приведем качественное рассмотрение этого вопроса. При повышении плотности, т. е. когда уменьшается среднее расстояние между частицами, сначала происходит расширение атомных уровней энергии, что обусловлено туннельным эффектом. Объем каждого атома представляет потенциальную яму для находящегося в нем электрона. При сближении центров атомов уменьшается толщина барьера между соседними ямами, вследствие чего появляется возможность просачивания электронов из одного атома в другой. Вероятность туннельного эффекта экспоненциально растет при уменьшении толщины, а также разности высоты барьера и энергии частицы. Вследствие последнего электроны, находящиеся на высоких уровнях энергии, просачиваются через барьер легче, чем те, которые находятся на основном уровне. Туннельный эффект, очевидно, приводит к добавочному расширению уровней энергии. При определенном значении плотности уро-

вень энергии расширяется настолько, что сливается с непрерывным спектром, и тогда электрон этого состояния становится свободным. Разумеется, первыми отрываются от атома оптические электроны, а позже всех те, которые находятся на K -оболочке. Полная ионизация атомов наступает тогда, когда наинизший уровень сливается с непрерывным спектром.

Оценим величину плотности, необходимую для полной ионизации вещества. Явление просачивания электронов в соседние атомы начинает эффективно действовать тогда, когда средние расстояния l между последними становятся сравнимыми с радиусом K -оболочки a_0/Z , где Z — заряд ядра, а $a_0 = \hbar^2/m_e \cdot e^2 = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см — радиус Бора:

$$l \approx \alpha \cdot \frac{a_0}{Z},$$

α — число порядка единицы. Для плотности атомов имеем $n \approx 1/l^3$. Следовательно, плотности, необходимые для полной ионизации, должны иметь значения

$$\rho = n A m_p \gtrsim \frac{m_p}{\alpha^3 a_0^3} Z^4 \approx \frac{10}{\alpha^3} Z^4. \quad (14.1)$$

Здесь A — массовое число атомного ядра, m_p — масса протона. Согласно квантовомеханическому расчету, проведенному для атомов водорода $\alpha \approx 6$, т. е. для ионизации водородного газа, необходимое значение плотности приблизительно равно $0,05 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Для вещества, состоящего из тяжелых элементов, полная ионизация наступает при значительно более высоких плотностях.

Средняя плотность в белых карликах превышает значение (14.1), необходимое для полной ионизации. Таким образом, в белых карликах имеется свободный электронный газ. В их типичных представителях основная часть массы находится в состоянии полной ионизации, в оболочке (толщина которой у этих звезд сравнительно небольшая) ионизация частичная, а у самой поверхности должны существовать и нейтральные атомы (если не учитывать температурные эффекты).

Теперь выясним, в каком состоянии находится электронный газ в белых карликах: релятивистский он или нерелятивистский, вырожден или нет? Электронный газ

будет релятивистским, если $p_0 > m_e c$. Учитывая (12.4), отсюда получаем условие релятивизма

$$n_e \gtrsim \frac{1}{10} \lambda_e^{-3} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}, \quad (14.2)$$

где n_e — электронная концентрация, а $\lambda_e = h/m_e \cdot c = 3,862 \cdot 10^{-11} \text{ см}$ — комптоновская длина волны электрона. (При получении критерия (14.2) мы использовали (12.4) для вырожденного газа, что является более жестким условием. В самом деле, для одной и той же плотности n_e учет температуры лишь усиливает релятивизм газа, поскольку средняя энергия частицы в последнем случае больше, чем у вырожденного газа). В типичных белых карликах плотности выше этого значения, следовательно, преобладающая часть электронов в них являются релятивистскими. При таких плотностях температура вырождения имеет значения

$$T_0 = \frac{cp_0}{k} \approx 0,7 \cdot n_e^{1/3} \gtrsim 10^{10}. \quad (14.3)$$

В центре обычных звезд температура порядка $10^6 \div 10^8$ градусов. Значение температуры в белых карликах не может быть выше этого. Итак, мы приходим к заключению, что в типичных белых карликах имеются релятивистски-вырожденный электронный газ и полностью или же частично (в зависимости от химического состава) ионизованные атомы. Это нейтральная плазма, которую удобно называть *электронно-ядерной фазой* вещества и впредь обозначать символом Ae .

§ 15. О фазовом состоянии вещества

В предыдущем параграфе мы пришли к заключению, что в белых карликах имеется свободный вырожденный электронный газ. Посмотрим, как ведут себя атомные ядра в этом вырожденном электронном газе: двигаются ли они в нем свободно или же совершают колебания около определенных, фиксированных точек равновесия. В первом случае мы имели бы дело со смесью газов электронов и ядер, а во втором — с кристаллической решеткой, в которой имеется свободный электронный газ. В последнем случае ситуация сходна с металлами. При-

веденное ниже рассмотрение показывает, что в определенных условиях, которые, по-видимому, в некоторых случаях осуществляются в белых карликах, реализуется вариант твердого тела [65, 192].

Предположим, что имеет место вариант кристаллической решетки, и найдем область температур и плотностей, где эта фаза является устойчивой (при изложении этого параграфа мы следуем работе Киржница [65]). Ради простоты рассмотрим ядра одного сорта. Разделим среду на нейтральные сферические ячейки с одним ядром и Z электронами в каждом из них. Радиус ячейки равен

$$R = \left(\frac{3}{4\pi n_A} \right)^{1/3} = \left(\frac{3\eta Z m_p}{4\pi \rho} \right)^{1/3}, \quad (15.1)$$

где n_A — плотность ядер, A — массовое число, Z — порядковый номер, $\eta = A/Z$, $\rho \approx n_A m_A \approx n_A m_p A$ — плотность массы, m_A и m_p — соответственно массы ядра и протона.

Предполагая, что заряд электронного облака в ячейке распределен равномерно, для потенциальной энергии ядра находим

$$U(r) = -\frac{3Z^2 e^2}{2R} + \frac{Z^2 e^2}{2R^3} \cdot r^2. \quad (15.2)$$

Здесь r — смещение ядра от центра ячейки, $r \leq R$. Ядро находится, таким образом, в потенциальной яме глубиной $U_0 = 3Z^2 e^2 / 2R$. Потенциал $U(r)$ осцилляторного типа, сравнение его с соответствующим выражением $m_A \omega^2 r^2 / 2$ для изотропного гармонического осциллятора дает частоту колебания

$$\omega = \left(\frac{Ze^2}{\eta m_p R^3} \right)^{1/2}. \quad (15.3)$$

Энергия осциллятора равна $\epsilon_n = \hbar \omega \left(n + \frac{3}{2} \right)$, где $n = 0, 1, 2, \dots$ — квантовое число. При нулевой температуре $n = 0$, поэтому колебательная энергия ядра равна

$$\epsilon_0 = \frac{3}{2} \hbar \omega = \frac{3}{2} \hbar \left(\frac{Ze^2}{\eta m_p R^3} \right)^{1/2} = \frac{3\epsilon \hbar}{2\eta m_p} \left(\frac{4\pi}{3} \rho \right)^{1/2}. \quad (15.4)$$

Величина ε_0 значительно меньше глубины потенциальной ямы:

$$\frac{\varepsilon_0}{U_0} = \frac{2h}{e \sqrt{\eta m_p R_A}} \cdot \frac{1}{Z} \left(\frac{R_A}{ZR} \right)^{1/2} \approx \frac{1}{Z} \left(\frac{R_A}{ZR} \right)^{1/2} \ll 1. \quad (15.5)$$

Здесь R_A — радиус ядра; очевидно, он меньше R . Это свидетельствует о сильной связи ядра со своей ячейкой и устойчивости соответствующего состояния.

В силу (15.5) с уменьшением R величина ε_0 растет быстрее, чем $U(r)$, и когда R станет порядка R_A , ядро уже не будет удерживаться потенциальной ямой. Но указанная картина прежде всего перестает быть верной по другой причине. А именно, до наступления этого происходит смена фаз: в веществе появляются свободные нейтроны.

Рассмотрим теперь влияние температуры, которое сводится к увеличению средней энергии ядра. При отличных от нуля температурах поведение осциллятора определяется статистикой Бозе — Эйнштейна. В соответствии с этим для средней энергии ядра получается следующее выражение:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} h\omega + \frac{3h\omega}{e^{\frac{3h\omega}{kT}} - 1} = \varepsilon_0 \operatorname{cth} \frac{\varepsilon_0}{kT}.$$

Первое слагаемое здесь представляет энергию нулевых колебаний, второе — среднюю тепловую энергию. Определим по-прежнему отношение энергии ядра к глубине потенциальной ямы

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{U_0} = \frac{\varepsilon_0}{U_0} \operatorname{cth} \frac{\varepsilon_0}{kT} = c_1 Z^{-5/3} \rho^{1/6} \operatorname{cth} \frac{c_2 \rho^{1/2}}{T}, \quad (15.6)$$

где

$$c_1 = \frac{h(4\pi/3)^{1/6}}{e(\eta m_p)^{2/3}} = 1,25 \cdot 10^{-2}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{3\pi} e h}{\eta m_p k} = 3,38 \cdot 10^3.$$

Здесь принимается $\eta=2$. При выводе (15.6) использовались выражения (15.1) и (15.4). Условием реализации фазы твердого тела является $\bar{\varepsilon} \ll U_0$, в альтернативном случае имеет место плазменная фаза. Найдем условия осуществления твердой фазы. Учитывая, что при $x \geq 1$,

$\text{cth } x \approx 1$ и $x \ll 1$ $\text{cth } x = \frac{1}{x}$, из соотношения (15.6) получаем следующие критерии для установления твердой фазы:

$$\left. \begin{aligned} T \cdot 10^4 T_6^2 &\lesssim \rho \lesssim 3 \cdot 10^{11} Z^{10}, \\ 50 Z^{-5} T_6^3 &\ll \rho \ll 7 \cdot 10^4 T_6^2, \end{aligned} \right\} \quad (15.7)$$

где $T_6 = 10^{-6} T$ — температура, измеренная в единицах 10^6 градусов. Первое неравенство относится к достаточно низким температурам, для которых аргумент гиперболического котангенса является большим ($x = 3380 \frac{\sqrt{\rho}}{T} \gtrsim 1$), второе — к высоким температурам, при которых $x \ll 1$. Температуры в белых карликах, по-видимому, такие, что приведенные неравенства выполняются и имеются достаточные основания, для того чтобы с уверенностью говорить о твердом состоянии вещества в них.

§ 16. Нейтронизация водородного газа

Мы приступаем к изучению тех фазовых превращений, которые испытывает состояние вещества при постепенном повышении плотности. Начнем с самого простого случая — водородного газа, или, точнее, протонно-электронной плазмы. Другие химические составы будут изучены в следующем параграфе. В белых карликах наличие водорода в заметном количестве невозможно (см. § 19), поэтому рассмотрение этого случая в некотором смысле носит академический характер. Начнем с того момента, когда водород уже ионизован, и, кроме того, будем считать, что электронный газ вырожден ($T < T_0$).

До тех пор, пока $\epsilon_e < (m_n - m_p) c^2$, где ϵ_e — граничная энергия электронов, m_n — масса нейтрона, никаких качественных изменений с протонно-электронным газом не происходит. Повышение плотности массы сопровождается лишь увеличением граничной энергии ϵ_e и средней энергии протонов. Но при $\epsilon_e \gtrsim (m_n - m_p) c^2$ протонно-электронный газ становится нестабильным в отношении рождения нейтронов. Невозможность этого процесса становится очевидной, если мы рассмотрим два альтерна-

тивных состояния вещества: протонно-электронное « $p+e$ » и нейтронное « n ». Свободный нейтрон в обычных условиях нестабилен, он со средним временем жизни $\tau=10^3$ сек распадается на протон, электрон и антинейтрино. Однако при наличии вырожденного электронного газа нейтрон может превратиться в стабильную частицу, и это произойдет тогда, когда граничная энергия ϵ_e превышает значение максимальной энергии образующегося при распаде электрона. Более того, при этом становятся возможными переходы в обратном направлении. Нейтроны, очевидно, могут существовать в среде в сравнимом с числом протонов количестве и при отсутствии вырождения, если температуры достаточно высоки: $kT \gtrsim (m_n - m_p) c^2$. Итак, благодаря двусторонним процессам β -распада

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e, \quad p + e \rightarrow n + \nu_e, \quad (16.1)$$

где $\nu_e, \bar{\nu}_e$ — символы нейтрино и антинейтрино, в конечном счете в веществе установится термодинамическое равновесие между нейтронной и протонно-электронной фазами. Существуют два вида нейтрино, а именно, электронное ν_e , которое рождается как продукт распада вместе с электроном, и мюонное ν_μ , которое встречается при распадах частиц в паре с μ -мезоном (см. § 21). Из курса статистической физики известно, что равновесие между фазами имеет место при следующем соотношении между химическими потенциалами:

$$\mu_p + \mu_e = \mu_n, \quad (16.2)$$

где μ_p, μ_e, μ_n — химические потенциалы протона, электрона и нейтрона соответственно. С правой стороны (16.2) мы опустили химический потенциал нейтрино, поскольку он равен нулю. Равенство нулю химических потенциалов нейтрино и антинейтрино является следствием факта отсутствия этих частиц в среде. Действительно, после их образования эти частицы покидают звезду, почти не испытывая каких-либо взаимодействий (поперечное сечение взаимодействия нейтрино с электронами порядка 10^{-44} см²). Выражаясь точнее, отсутствие нейтрино обусловлено скорее всего не их слабым взаимодействием, а тем обстоятельством, что оно не обладает мас-

сой покоя. При отличном от нуля значении массы покоя в достаточно холодной звезде мог бы накапливаться вырожденный нейтринный газ, в таком случае мы должны были бы приписать определенный химический потенциал также и этим частицам.

Нам уже известно, что химический потенциал является функцией температуры и плотности частиц, поэтому (16.2) дает одно уравнение для величин T , n_p , n_e и n_n , где n_k — плотность k -частицы. Условие электрической нейтральности

$$n_e = n_p \quad (16.3)$$

дает второе уравнение. Других ограничений не существует. Следовательно, для определения состояния системы две из этих величин мы должны выбирать как независимые переменные; в качестве таковых можно было взять температуру и плотность массы. Однако взамен последней удобно взять плотность протонов, так как в этом случае можно получить простое соотношение между величинами. Итак, соотношения (16.2) и (16.3) позволяют определить плотность нейтронов $n_n = f(T, n_p)$. Для определения явного вида этой функции нам нужно будет сделать дальнейшее предположение о величине температуры.

Впредь для температуры вырождения k -го рода частиц будем использовать обозначение T_k . При интересующих нас плотностях разумно допустить, что электронный газ всегда вырожден, т. е. $T \ll T_e$; что касается нуклонного газа, то представляет интерес рассмотрение случаев, когда он вырожден и когда вырождения нет.

Пусть протонный и нейтронный газы вырождены: $T \ll T_p$, $T \ll T_n$. Тогда согласно (12.3) химический потенциал равен граничной энергии Ферми:

$$\left. \begin{aligned} \mu_e = \varepsilon_e = c \left[m_e^2 c^2 + (3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n_e^{2/3} \right]^{1/2}, \quad n_p = n_e, \\ \mu_k = \varepsilon_k = m_k c^2 + \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2}{2m_k} n_k^{2/3}, \quad k = n; p. \end{aligned} \right\} \quad (16.4)$$

Подставив (16.4) в (16.2), получим

$$n_n = \left\{ \frac{m_n}{m_p} n_p^{2/3} + \frac{2m_n}{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2} [\varepsilon_e - (m_n - m_p) \cdot c^2] \right\}^{3/2}.$$

Введя обозначения

$$\alpha = \frac{m_n - m_p}{m_e} \approx 2,54, \quad n_0 = \frac{m_e^3 c^3}{3\pi^2 \hbar^3} = 5,87 \cdot 10^{29} \text{ см}^{-3},$$

перепишем эту формулу в виде

$$n_n = n_p \left\{ 1 + 2 \frac{m_p}{m_e} \left(\frac{n_0}{n_p} \right)^{2/3} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{n_p}{n_0} \right)^{2/3}} - \alpha \right) \right\}^{3/2}. \quad (16.5)$$

Приравнивая нулю выражение в фигурных скобках, получим порог рождения нейтронов:

$$n_p^{(0)} = \frac{\alpha^2 - 1}{3\pi^2} \left(\frac{m_e \cdot c}{\hbar} \right)^3 \approx 7,5 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}. \quad (16.6)$$

Таким образом, при плотностях $n_p \gtrsim 7,5 \cdot 10^{30} \text{ см}^{-3}$ нейтроны превращаются в стабильные частицы. Значение граничного импульса электронов, соответствующее пороговой плотности (16.6), равно $p_e \approx 2,2 m_e c$, т. е. уже у порога рождения нейтронов электроны являются релятивистскими частицами.

Непосредственно за пороговым значением плотности число нейтронов растет несравненно быстрее числа протонов и очень скоро становится преобладающим. В условиях вырожденного вещества это оказывается энергетически более выгодным. Так, при плотностях протонов, удовлетворяющих неравенству

$$1 \ll \left(\frac{n_p}{n_0} \right)^{1/3} \ll \frac{m_p}{m_e},$$

из (16.5) имеем

$$n_n \approx \left(2 \frac{m_p}{m_e} \right)^{3/2} \left(\frac{n_0}{n_p} \right)^{1/3} \cdot n_p. \quad (16.7)$$

Учитывая, что $(2m_p/m_e)^{3/2} \approx 2 \cdot 10^5$ и согласно требуемому условию $10^{-3} \ll (n_0/n_p)^{1/3} \ll 1$, мы замечаем, что n_n на три порядка больше n_p .

До сих пор наше обсуждение относилось к области плотностей ниже ядерной, где нуклоны являются нерелятивистскими частицами. В надъядерной области плотностей диспропорция между концентрациями двух типов частиц начинает уменьшаться, и в ультрарелятивистской

области энергий они становятся величинами одинакового порядка. В самом деле, подставляя в условие равновесия (16.2) релятивистское выражение химических потенциалов

$$\mu_e = \mu_p = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \cdot c \cdot n_p^{1/3}, \quad \mu_n = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \cdot c \cdot n_n^{1/3},$$

получаем

$$n_n = 8n_p. \quad (16.8)$$

Исследуем теперь случай, когда нуклонный газ не вырожден, но температура не настолько высока, чтобы снять вырождение также и у электронного газа. Нуклоны будем считать нерелятивистскими, а электроны релятивистскими. В случае статистики Больцмана (предполагается $T > T_h$, $k = n, p$) химический потенциал равен

$$\mu_k = m_k c^2 + kT \ln \left[\frac{n_k}{2} \left(\frac{2\pi\hbar^2}{m_k kT} \right)^{3/2} \right], \quad k = n; p. \quad (16.9)$$

Из уравнения (16.2) находим

$$n_n = n_p \cdot \exp \left[\frac{(3\pi^2)^{1/3} \hbar c n_p^{1/3} - m_e c^2}{kT} \right]. \quad (16.10)$$

Наконец, рассмотрим область значений температур

$$\frac{m_e c^2}{k} \ll T \ll \frac{m_p c^2}{k}, \quad (16.11)$$

где $m_e c^2/k \approx 6 \cdot 10^9$, $m_p c^2/k \approx 10^{13}$. Будем считать, что вырождения вообще нет. При таких температурах тепловое излучение богато жесткими квантами $\epsilon_\gamma > m_e \cdot c^2$. Следовательно, должно существовать также большое количество позитронов, которые рождаются фотонами в паре с электронами. Но с другой стороны этих температур недостаточно для рождения мезонов, барионов тяжелее нуклонов, а также пар этих частиц.

Рассмотрим статистическое равновесие относительно реакций

$$\left. \begin{aligned} p + e^- &\rightarrow n + \nu_e, & n &\rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \\ e^+ + e^- &\rightleftharpoons \gamma, & n + e^+ &\rightarrow p + \bar{\nu}_e. \end{aligned} \right\} \quad (16.12)$$

Аннигиляция электронно-позитронной пары на один γ -квант и обратный процесс рождения пары одним квантом возможны в поле посторонней частицы. Интересно отметить, что однофотонные процессы $e^+ + e^- \rightleftharpoons \gamma$ могут произойти и в плазме с $n(\omega) < 1$ при достаточно высоких температурах, когда вырождение неполное ($n(\omega)$ — показатель преломления). При этом мы имеем дело с энергией квантов

$$2m_e \cdot c^2 \leq \hbar\omega \leq \hbar \cdot c \cdot n^{1/3}.$$

Здесь ограничение на энергию квантов сверху обусловлено требованием $\lambda > l$, т. е. условием того, что среда является сплошной (λ — длина волны, $l \sim n^{-1/3}$ — среднее расстояние между частицами среды). Пороговое значение плотности для разыгрывания таких процессов порядка $1,5 \cdot 10^{32} \text{ см}^{-3}$. Эти процессы впервые исследовались в работе [87], они играют определенную роль в явлении потерь энергии. Химический потенциал фотона равен нулю, что является результатом несохранения числа этих частиц. Это непосредственно следует также из условия равновесия относительно процессов рассеяния электронов на электронах с испусканием или поглощением фотонов (для этого процесса необходимо присутствие посторонней частицы, чтобы не нарушался закон сохранения импульсов) $e + \gamma \rightleftharpoons e$. В состоянии равновесия $\mu_e + \mu_\gamma = \mu_e$, т. е. $\mu_\gamma = 0$. Из (16.12) вытекают следующие условия равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \mu_p + \mu_{e^-} &= \mu_n, & n_p + n_{e^+} &= n_{e^-}, \\ \mu_{e^-} + \mu_{e^+} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16.13)$$

Здесь из-за больших температур число электронно-позитронных пар значительно превосходит число протонов $n_p \ll n_{e^+}$. Вследствие этого $n_{e^+} \approx n_{e^-}$ и $\mu_{e^+} \approx \mu_{e^-} \approx 0$, $\mu_p \approx \mu_n$. Таким образом, в области температур (16.11) $n_{e^+} \approx n_{e^-}$ и $n_p \approx n_n$.

К изложенному в этом параграфе материалу необходимо сделать следующие замечания. При рассматриваемых плотностях водородный газ является неустойчивым в отношении образования сложных ядер (см. § 19). По оценкам Я. Б. Зельдовича [43] водород H^1 превращается в He^4 при плотности $\rho \approx 5 \cdot 10^4 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Даже при абсо-

лутном нуле нуклоны благодаря туннельному эффекту могут соединяться вместе, образуя α -частицы и другие ядра. Явление нейтронизации водородного газа и соответствующие применения в астрофизике рассматривались в работах [228, 189, 128, 278, 243] и в ряде других.

В следующем параграфе мы увидим, что процесс нейтронизации идет и в случае вещества, состоящего из атомных ядер, но закономерности и соотношения здесь совсем другие. Далее, обрисованная здесь картина упрощена и по другой причине. Дело в том, что при плотностях порядка ядерной помимо нуклонов в среде появляются в сравнительно большом количестве гипероны и некоторые другие элементарные частицы. Имеются и другие тонкости, которые не были учтены при изложении материала этого параграфа.

§ 17. Нейтронизация вещества

При плотностях выше определенного значения явление нейтронизации имеет место и в веществе, состоящем из сложных атомных ядер (« Ae -фаза»). Чтобы разобраться в этом вопросе, мы должны иметь определенное представление о состоянии нуклонов в ядрах. Физику рассмотренного вопроса можно наглядно проиллюстрировать, приняв за основу модель вырожденного нуклонного газа. По этой модели ядро представляет собой потенциальную яму с шириной, равной его диаметру, глубиной приблизительно 30 Мэв , равномерно заполненную нейтронами и протонами. Температуру нуклонного газа, очевидно, следует принять равной нулю, поскольку энергия возбуждения ядер по сравнению с тепловой энергией очень велика. Итак, нуклоны в ядре образуют полностью вырожденный ферми-газ.

В таких физических условиях мы опять-таки можем говорить о двух альтернативных состояниях вещества, а именно, о «нейтронном» — « n » и «протонно-электронном» — « $p+e$ » состояниях или фазах (рис. 2). Между этими фазами возможны переходы благодаря процессам прямого и обратного β -распадов:

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}, \quad p + e \rightarrow n + \nu. \quad (17.1)$$

В условиях звезды эволюционные времена достаточно велики для установления термодинамического равновесия. Состояние равновесия определяется известным соотношением между химическими потенциалами при наличии силовых полей:

$$\mu_n - V_0 = \mu_p - V_0 + V_c + \mu_e, \quad (17.2)$$

где V_0 — глубина ядерной потенциальной ямы, V_c — средняя энергия кулоновского взаимодействия, приходящаяся на один протон. Мы опять опустили химический

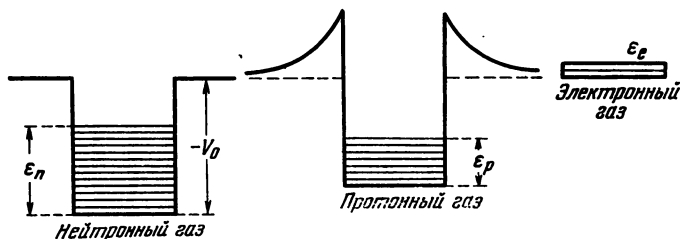


Рис. 2. Модель атомного ядра с вырожденным нуклонным газом. Справа — вырожденный свободный электронный газ.

потенциал нейтрино, поскольку, как было сказано в предыдущем параграфе, из-за несохранения числа этих частиц он равняется нулю. Глубина потенциальной ямы V_0 для протонов и нейтронов предполагается одинаковой, что является следствием независимости ядерных сил от зарядового состояния нуклона (протон и нейтрон представляются как разные зарядовые состояния одной частицы, называемой нуклоном).

Мы уже знаем, что в полностью вырожденном ферми-газе химический потенциал совпадает с граничной энергией частиц, следовательно, равновесие между альтернативными состояниями « n » и « $p+e$ » определяется соотношением

$$\epsilon_p + \epsilon_e + V_c = \epsilon_n. \quad (17.3)$$

Этому уравнению можно дать наглядное истолкование. Представим два сообщающихся сосуда, и пусть один из

них (левая «яма» на рис. 2) заполнен нейтронной «жидкостью», а другой (правая яма) заполнен протонной, а сверху электронной «жидкостью», при этом соблюден принцип Паули. Благодаря кулоновским взаимодействиям между протонами дно протонной ямы приподнято на величину V_c . Тогда благодаря переходам (17.1) «жидкость» будет перетекать из одной ямы в другую до тех пор, пока уровни не выровняются. Это, очевидно, соответствует минимуму энергии системы.

Плотности протонов и нейтронов в ядре равны

$$n_p = \frac{3}{4\pi r_0^3} \frac{Z}{A}, \quad n_n = \frac{3}{4\pi r_0^3} \left(1 - \frac{Z}{A}\right),$$

где Z и $A - Z$ — числа протонов и нейтронов в ядре, $r_0 \approx 1,3 \cdot 10^{-13}$ см — постоянная, входящая в формулу $R = r_0 A^{1/3}$ для радиуса ядра. Здесь предполагается, что вещество состоит из одного сорта ядер и, кроме того, нуклоны в ядре распределены равномерно. Согласно (16.4) для граничных энергий имеем

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= m_n c^2 + \frac{(3\pi^2)^{2/3} \cdot h^2}{2m_n} n_n^{2/3} \approx m_n c^2 + \frac{(3\pi^2)^{2/3} \cdot h^2}{2m_p} n_n^{2/3}, \\ \epsilon_p &= m_p c^2 + \frac{(3\pi^2)^{2/3} \cdot h^2}{2m_p} n_p^{2/3}. \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения ϵ_n и ϵ_p в (17.3), находим

$$\left(1 - \frac{Z}{A}\right)^{2/3} - \left(\frac{Z}{A}\right)^{2/3} = b (\epsilon_e + V_c - \alpha m_e \cdot c^2), \quad (17.4)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha m_e c^2 &= (m_n - m_p) c^2 \approx 1,3 \text{ Мэв}, \\ b &= \frac{2m_p r_0^2}{h^2} \left(\frac{4}{9\pi}\right)^{2/3} \approx 1,38 \cdot 10^4 \text{ эрг}^{-1}. \end{aligned}$$

Для средних ядер V_c порядка 1 Мэв, а при $n_e \leq 10^{31}$ см⁻³ ($\rho \leq 10^7$ г·см⁻³) граничная энергия электронов $\epsilon_e \leq 1$ Мэв. Следовательно, при $\rho \leq 10^7$ г·см⁻³ значе-

ние величины $\varepsilon_e + V_c - \alpha m_e \cdot c^2$ близко к нулю. В этой области плотностей числа протонов и нейтронов приблизительно равны $Z/A \approx 0,5$. По (17.4) в ядрах процесс нейтронизации протонов начинается, когда граничная энергия электронов достигает значения

$$\varepsilon_e = \alpha m_e \cdot c^2 - V_c.$$

При больших значениях ε_e отношение Z/A является функцией от плотности, с возрастанием ε_e оно уменьшается. В конце концов при достаточно высоких плотностях процесс нейтронизации приводит к нарушению устойчивости ядра, вследствие чего оно распадается. В результате образуется нуклонный газ, в котором численно преобладают нейтроны. Более корректное исследование вопроса зависимости Z/A от плотности мы приведем в следующем параграфе.

§ 18. Зависимость заряда ядер от плотности

В последних двух параграфах было показано, что начиная с $\rho = 10^7 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ при увеличении плотности в атомных ядрах идет процесс превращения протонов в нейтроны. Таким образом, в условиях вырожденного газа электронов при $\rho \gtrsim 10^7 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ заряд ядер (порядковый номер Z) уже не является неизменным свойством их, а зависит от плотности вещества (или, можно сказать, от граничной энергии электронов ε_e). Этот вопрос впервые рассматривался в работах [124, 125] в связи с исследованием проблемы происхождения элементов, позже более детальное изучение было проведено в [192, 101, 96], а также во многих других работах.

Рассмотрим ядро с порядковым номером Z и массовым числом A . Посмотрим, как изменяется отношение A/Z с повышением плотности за порогом рождения нейтронов. Приведенное выше качественное рассмотрение удобно для выяснения физического содержания явления. Однако для более или менее точного решения этого вопроса лучше прибегнуть к нижеследующему методу.

При малых плотностях (малых ε_e) числа протонов и нейтронов в ядрах или равны или отличаются незна-

чительно. С повышением ϵ_e при некотором ее значении ядро становится нестабильным относительно процесса обратного β -распада:

$$(A, Z) + e \rightarrow (A, Z - 1) + \nu_e. \quad (18.1)$$

Граничная энергия электронов, соответствующая этой реакции, равна

$$\epsilon_e = [M(A, Z - 1) - M(A, Z)] \cdot c^2, \quad (18.2)$$

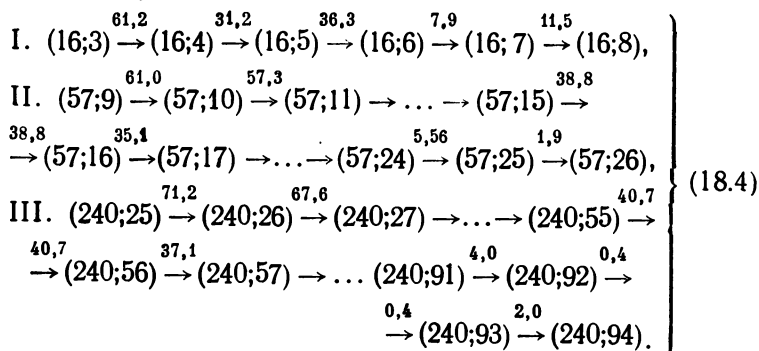
где $M(A, Z)$ — масса ядра с параметрами A и Z . Для вычисления пороговых значений ϵ_e , при которых Z уменьшается на 1, лучше использовать таблицы β -распадов [39, 40], если имеются соответствующие данные, или при отсутствии их можно исходить из полуэмпирической формулы для массы ядер. По этой формуле масса ядра равна [72]

$$\left. \begin{aligned} M(A, Z) &= (A - Z)m_n + Zm_p + \frac{B}{c^2}, \\ B &= -15,75 + 17,8A^{-1,3} + 0,71Z^2A^{-4/3} + \\ &\quad + 23,7\left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2 + 34A^{-7/4} \cdot \delta, \end{aligned} \right\} \quad (18.3)$$

где B — энергия связи ядра в Мэв, δ — множитель, равный 0, 1, —1 для нечетного A , четного A и нечетного Z и четных A и Z соответственно. Последний член в случае больших A несуществен и его можно опустить. Приведенная формула, строго говоря, справедлива только при $(A - 2Z)/A \ll 1$. Необходимо отличать случай нечетных A от четных A . В первом случае при переходах (18. 1) получается устойчивое ядро $(A, Z - 1)$ до некоторого порогового значения ϵ_e , при котором совершается следующий переход к ядру $(A, Z - 2)$. Во втором случае, после перехода от четного Z к нечетному $Z - 1$, получается неустойчивое ядро, поэтому сразу же происходит следующий переход к устойчивому ядру с номером $Z - 2$. Это обусловлено членом спаривания в формуле для массы ядер (последнее слагаемое в (18.3)).

Правая часть (18.2) представляет собой энергию β -распада ϵ_β . В ряде случаев ϵ_β хорошо известна из непосредственных измерений. В качестве примера

рассмотрим три последовательности $\bar{\beta}$ -превращений, конечным продуктом которых в одном случае является кислород, во втором — изотоп железа и в третьем — изотоп плутония. Имеем [39, 40]



Здесь по-прежнему первое число в скобках означает массовое число, а второе — число протонов в ядре; цифры над стрелками указывают энергии ϵ_β , выделяемые при β -распаде.

При плотностях выше соответствующих пороговых значений эти реакции, очевидно, пойдут в обратном направлении. Например, в случае второй цепочки, когда граничная энергия электронов достигает 1,9 Мэв, изотоп железа (57; 26), поглощая электрон (или испуская позитрон) и испуская нейтрино, превращается в изотоп ядра марганца (57; 25); далее, когда ϵ_e доходит до 5,56 Мэв, совершается переход к Cr (57; 24), и, таким образом, после ряда β^+ -распадов при $\epsilon_e = 57,3$ Мэв доходим до изотопа неона Ne(57; 10), который является устойчивым до значений $\epsilon_e = 61$ Мэв, затем заменяется весьма тяжелым изотопом фтора F(57; 9). В согласии с приведенным выше замечанием при переходах от четного порядкового номера к нечетному иногда может образоваться неустойчивое ядро, которое сразу же переходит в ядро с четным Z . Так, например, при $\epsilon_e = 2$ Мэв Pu (240; 94) переходит в Np (240; 93), порог устойчивости которого ниже этого значения, а именно равен $\epsilon_e = 0,4$ Мэв, следовательно, он сразу же после рождения превращается в U (240; 92), а это ядро является устойчивым до $\epsilon_e = 4$ Мэв.

Таким образом, с повышением граничной энергии электронов (т. е. с повышением плотности) число протонов в ядрах, а следовательно, величина Z/A уменьшается, и изотопы, которые в обычных условиях являются нестабильными, при плотностях выше определенных пороговых значений становятся стабильными. Спрашивается, до каких пор будет продолжаться процесс обогащения ядер нейтронами. Оценку наименьшего значения отношения Z/A можно получить, если приравнять нулю энергию связи (18.3), при этом нужно учитывать соотношения (18.2) и условие нейтральности $n_e = Zn_A$, где n_A — плотность ядер (здесь мы имеем в виду однородный химический состав). К этому вопросу мы вернемся в § 20.

При расчетах моделей звезд необходимо будет иметь зависимости отношений A_k/Z_k для разных ядер от ϵ_e . Их можно получить, изучая имеющиеся экспериментальные данные по β -распадам или же, в случае отсутствия их, используя формулу (18.3) для энергии связи. Зависимости A_k/Z_k от ϵ_e представляют собой ступенчатые линии. Линии A_k/Z_k для разных ядер (особенно для средних) располагаются близко друг от друга и образуют узкую полосу с растущей ординатой. Нужно иметь в виду, что в белых карликах и в оболочках барионных звезд мы, вообще говоря, имеем дело с неоднородным химическим составом вещества. Предполагая наличие всевозможных ядер, мы можем вместо детального рассмотрения всех ядер отдельно рассмотреть поведение их совокупности. Тогда при расчетах моделей белых карликов можно вместо ряда линий A_k/Z_k использовать некоторую усредненную линию (рис. 3). Ошибка при этом будет небольшой да и, пожалуй, такой подход более разумен, если учесть приведенное выше замечание о химическом составе вещества. Эта усредненная кривая является хорошим приближением для средних ядер, но содержит заметные ошибки в случае самых тяжелых и легких ядер.

С возрастанием давления граничная энергия электронов ϵ_e изменяется непрерывно, но плотность испытывает скачок в тех местах, где Z переходит в $Z-1$. Вообще говоря, в этих точках испытывает скачок также плотность массы. Этот скачок может иметь заметное значение при наличии большого количества водорода,

что исключено в белых карликах (см. § 19). В случае тяжелых элементов, а также неоднородного химического состава этот скачок в значении ρ весьма мал и не играет роли.

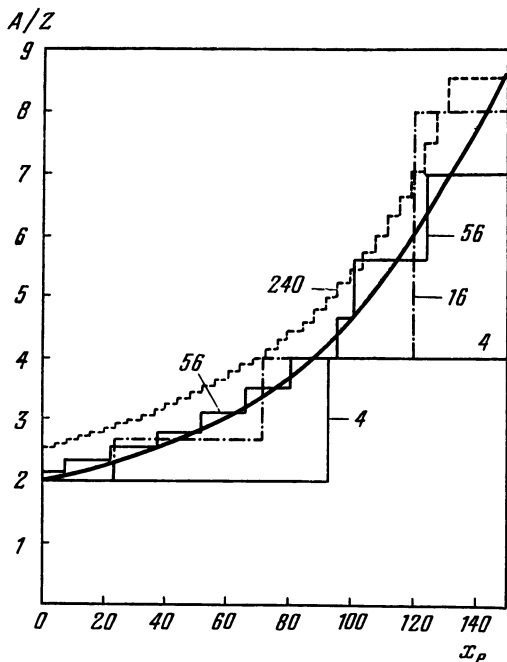


Рис. 3. Зависимость среднего значения A/Z от параметра $x_e = \frac{p_e}{m_e c}$. Ступенчатые линии представляют истинные значения A/Z для ядер с $A=4, 16, 56$ и 240. Сплошная линия дает усредненное по ядрам значение $\overline{A/Z}$.

В расчетах звездных конфигураций неудобно оперировать кривой, целесообразно иметь аналитическую формулу. Плавная кривая рис. 3 с достаточной точностью аппроксимируется формулой

$$\frac{A}{Z} = 2 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3, \quad (18.5)$$

где $a_1 = 1,255 \cdot 10^{-2}$; $a_2 = 1,755 \cdot 10^{-5}$; $a_3 = 1,376 \cdot 10^{-6}$,

$x = p_e / m_e c$, а p_e — граничный импульс электронов. Эта формула неверна для оболочки, где может содержаться заметное количество водорода, и, кроме того, в (18.5) предполагается, что у поверхности при $x \lesssim 1$ преобладают такие элементы, у которых $A/Z = 2$.

§ 19. Ядерные реакции в холодной плазме

При достаточно больших плотностях (достаточно малых расстояниях между частицами) из-за туннельного эффекта ядерные реакции синтеза могут идти даже при абсолютном нуле. Предварительные оценки вероятностей таких реакций были проведены в работах Я. Б. Зельдовича, Камерона и Солпитера [43, 146, 253]. Здесь не будут рассмотрены энергетические аспекты этих реакций, нас интересуют только вопросы устойчивости ядер и зависимость массовых чисел A_k от граничной энергии электронов [101].

Суть этих реакций состоит в том, что при сравнительно малых расстояниях между ядрами легкие ядра благодаря туннельному эффекту соединяются друг с другом или с тяжелыми ядрами. Поскольку среда у нас предполагается холодной, из всех возможных реакций следует рассмотреть только экзотермические. Так как коэффициент прохождения частиц через потенциальный барьер весьма чувствителен к величине массы, то в астрономических масштабах времени для каждого вида ядра должно существовать определенное пороговое значение плотности, выше которого оно не может находиться в составе вещества.

Для вычисления вероятности необходимо выбрать определенную модель потенциального барьера. Предположим, что среда разделена на сферические ячейки, которые упакованы максимально плотно. Каждая ячейка состоит из электронного облака и атомного ядра (или же из неполностью ионизованного атома при плотностях меньших, чем необходимые для полной ионизации), совершающего нулевые колебания вокруг фиксированных точек роя электронов. Радиус ячейки определяется из условия ее нейтральности $4\pi R^3 n_e / 3 = Z$, т. е.

$$R = \left(\frac{3Z}{4\pi} \right)^{1/3} \frac{a}{p_e}, \quad (19.1)$$

где $a = (3\pi^2)^{1/3} \hbar$. Таким образом, радиус ячейки пропорционален $Z^{1/3}$. Энергия взаимодействия ядра с электронами своей ячейки согласно (15. 2) равна

$$V(r) = -\frac{3}{2} \frac{Z^2 e^2}{R} + \frac{Z^2 e^2}{2R^3} r^2, \quad (19.2)$$

где r — расстояние ядра от центра ячейки. Взаимодействием с другими ячейками можно пренебречь. Из (19.2) следует, что ядро с массой m_A будет колебаться с частотой

$$\omega = \frac{Z \cdot e}{m_A^{1/2} \cdot R^{3/2}}. \quad (19.3)$$

Утверждение о том, что ядро локализовано внутри сферы радиуса R , не лишено смысла, если энергия $\hbar^2/m_A R^2$, обусловленная соотношением неопределенностей для импульсов, мала по сравнению с энергией осциллятора. Отношение этих энергий есть

$$\frac{6,6 \cdot 10^{-3}}{Z \cdot A^{2/3}} \rho^{1/6} \ll 1$$

при всех плотностях существования Ae -фазы вещества.

В формуле (19. 2) предполагается, что заряд электронного облака распределен по ячейке равномерно. Строго говоря, это неверно, но можно показать, что отклонения от равномерного распределения несущественны. Распределение электронов в ячейке определяется соотношением

$$\varepsilon_e(r) - e\varphi(r) = \varepsilon_e(R), \quad (19.4)$$

где $\varepsilon_e(r)$ — граничная энергия электронов в точке, находящейся на расстоянии r от центра ячейки, $\varphi(r)$ — электрический потенциал самосогласованного поля. Соотношение (19.4) следует из условия постоянства полной энергии Ферми вдоль радиуса ячейки. Если учесть, что из-за колебаний ядра его заряд размазан, то нетрудно видеть, что $e\varphi(r) \ll \varepsilon_e(r)$. Тогда из (19.4) следует, что граничная кинетическая энергия электронов в ячейке имеет приблизительно постоянное значение.

Приступая к вычислению вероятности туннельного эффекта, рассмотрим две соседние ячейки с зарядами

Z_1 и Z_2 (рис. 4). Пусть первое ядро легче второго, $Z_1 < Z_2$. Определим вероятность того, что первое ядро, пройдя через барьер, сольется со вторым. Для потенциальной энергии имеем

$$V(r) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{3Z_1^2 \cdot e^2}{2R_1} + \frac{Z_1^2 \cdot e^2}{2R_1^3} \cdot r^2 + \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{s-r} - \\ \quad - \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{|r-1|} \text{ при } r \leq \frac{R_1}{\cos \theta}, \\ -\frac{3Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{2R_2} + \frac{Z_1 \cdot Z_2}{2R_2^3} |r-1|^2 - \frac{Z_1^2 \cdot e^2}{r} + \\ \quad + \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{s-r} \text{ при } r \geq \frac{R_1}{\cos \theta}. \end{array} \right. \quad (19.5)$$

Смысл обозначений разъяснен на подписи к рис. 4. Первые два члена в (19.5) представляют взаимодействие первого ядра с электронным облаком своей ячейки, третий — взаимодействие двух ядер, а последний — взаимодействие первого ядра с электронным облаком второй ячейки. Нижнее выражение (19.5) является энергией взаимодействия в том случае, когда первое ядро находится во второй ячейке, причем первые два члена его представляют энергию взаимодействия с электронным облаком второй ячейки, третий — взаимодействие с электронами первой ячейки, а четвертый — взаимодействие со вторым ядром. Взаимодействие с остальными ячейками можно считать пренебрежимым.

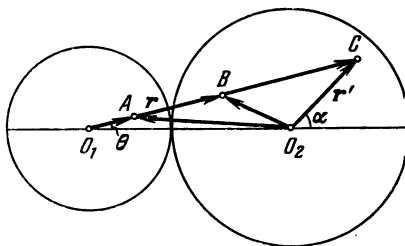


Рис. 4. К расчету туннельного эффекта. $O_1O_2 = R_1 + R_2 = l$, $O_1C = S$, $O_2C = r'$. А и В — некоторые точки на пути следования первого ядра по направлению O_1C , С — точка встречи двух ядер.

Сделаем некоторые упрощения, чтобы довести решение задачи до конца. Прежде всего можно пренебречь взаимодействием ядра со второй ячейкой, пока оно находится в своей ячейке, т. е. последними двумя членами

в (19.5) вверху. Далее разумно в (19.5) внизу величины $|\mathbf{r}-\mathbf{l}|=O_2B$ и r заменить их средними значениями, поскольку нам позже придется производить интегрирование по объему второй ячейки. Заметим, что усреднение производится лишь по тем переменным, от которых зависимость коэффициента прохождения несущественна. Тогда для энергии взаимодействия найдем

$$V(r) = \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{3Z_1^2 e^2}{2R_1} + \frac{Z_1^2 e^2}{2R_1^3} r^2 & \text{при } r \leq \frac{R_1}{\cos \theta}, \\ V_0 + \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{s-r} & \text{при } r \geq \frac{R_1}{\cos \theta}, \end{array} \right\} \quad (19.6)$$

где

$$V_0 = -\frac{3Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{2R_2} + \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{2R_2^3} |\mathbf{r}-\mathbf{l}|^2 - \frac{Z_1^2 \cdot e^2}{\bar{r}}.$$

В численных расчетах было принято $\bar{r}=R_1+0,5R_2$ и $|\mathbf{r}-\mathbf{l}|=0,5R_2$.

Вероятность прохождения первого ядра из своей ячейки во вторую внутри телесного угла $\sin \theta d\theta$ равна

$$\frac{1}{2} \sin \theta d\theta \frac{\omega_1}{2\pi} \cdot \exp \left[-\frac{2}{h} \sqrt{2m_1} I(s, \theta) \right].$$

Здесь m_1 и ω_1 — масса и частота колебаний первого ядра, а I определяется выражением

$$I(s, \theta) = \int_{r_1}^{s-r_0} \sqrt{V(r) - E_1} dr, \quad (19.7)$$

где $E_1=3h\omega_1/2-3Z_1e^2/2R_1$ — энергия основного состояния первого осциллятора, которая отсчитывается не со дна потенциальной ямы, а от нуля, r_1 — расстояние от центра первой ячейки до точки, где уровень энергии пересекает барьер:

$$r_1 = \left(\frac{3h}{Z_1 e} \right)^{1/2} \left(\frac{R_1^3}{m_1} \right)^{1/4},$$

r_0 — величина порядка суммы радиусов двух ядер:

$$r_0 = 1,2 \cdot 10^{-13} (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}).$$

Вероятность нахождения второго ядра в точке C элемента объема dV равна $\Psi_2^2(r') dV$, где $\Psi_2(r') = a_2^{-3/2} \pi^{-3/4} \exp(-r'^2/2a_2^2)$ — волновая функция осциллятора, находящегося в основном состоянии. Следовательно, эта вероятность равна

$$a_2^{-3} \pi^{-3/2} e^{-a_2^{-2} r'^2} r'^2 dr' \sin \alpha d\alpha,$$

где $a_2 = \sqrt{3\hbar/m_2\omega_2}$ — амплитуда колебаний второго осциллятора, m_2 и ω_2 — его масса и частота. Наконец, для вероятности встречи двух ядер в произвольной точке C второй ячейки и их слияния в одно ядро можно написать

$$W = \frac{n\omega_1 W_1}{4\pi^{5/2} a_2^3} \int \exp \left[-\frac{r'^2}{a_2^2} - \frac{2\sqrt{2m_1}}{\hbar} I(s, \theta) \right] \times \\ \times \delta \left(\theta - \arcsin \frac{r' \cdot \sin \alpha}{\sqrt{l^2 + r'^2 + 2lr' \cos \theta}} \right) \cdot r'^2 dr' \sin \alpha \sin \theta d\alpha d\theta, \quad (19.8)$$

где W_1 есть вероятность того, что после столкновения двух ядер образуется одно сложное ядро (по-видимому, W_1 — величина порядка единицы), n — число соседних ячеек, касающихся первой. Элементарный подсчет показывает, что $n \approx 27$ (точное равенство имеет место в случае однородного химического состава), δ -функция введена для того, чтобы можно было переменные α и θ считать независимыми. В (19.8), интегрируя по θ , получаем

$$W = \frac{n\omega_1 W_1}{4\pi^{5/2} a_2^3} \int \frac{r'^3 dr' \sin^2 \alpha d\alpha}{\sqrt{l^2 + r'^2 + 2lr' \cos \alpha}} \times \\ \times \exp \left[-\frac{r'^2}{a_1^2} - \frac{2}{\hbar} \sqrt{2m_1} I(s, \theta_0) \right]. \quad (19.9)$$

Здесь интегрирование по α производится от 0 до π , а по r' — от нуля до R_2 (верхний предел можно заменить на ∞).

Из (19.7) с учетом (19.6) для $I(s, \theta_0)$ находим

$$I(s, \theta_0) = \frac{Z_1 e}{(2R_1)^{3/2}} \left[\frac{R_1}{\cos^2 \theta_0} \sqrt{R_1^2 - r_1^2 \cos^2 \theta_0} - \right. \\ \left. - r_1^2 \ln \frac{R_1 + \sqrt{R_1^2 - r_1^2 \cos^2 \theta_0}}{r_1 \cdot \cos \theta_0} \right] + \\ + \sqrt{\frac{Z_1 Z_2 e^2}{b_1}} \left\{ \arcsin \left[b_1 \left(s - \frac{R_1}{\cos \theta_0} \right) \right]^{1/2} + \right. \\ \left. + \left[b_1 \left(s - \frac{R_1}{\cos \theta_0} \right) - b_1^2 \left(s - \frac{R_1}{\cos \theta_0} \right)^2 \right]^{1/2} - 2 \sqrt{b_1 r_0} \right\}, \quad (19.10)$$

где

$$b_1 = \frac{1}{Z_1 Z_2 e^2} \left(\frac{3hZ_1 e}{2R_1^{3/2} m_1^{1/2}} - V_0 \right), \quad \theta_0 = \arcsin \frac{r' \cdot \sin \alpha}{\sqrt{b^2 + r'^2 + 2l \cdot r' \cos \alpha}}.$$

Непосредственные численные расчеты показывают, что функция $I(s, \theta)$ очень слабо зависит от переменных α и r' . Подставляя $\alpha=0$, $r'=0$, получаем $\theta_0=0$, $s=l$ и $I=I(l, 0)$. Далее, воспользовавшись малостью r' по сравнению с l , разложим $(l^2 + r'^2 + 2lr' \cos \alpha)^{-1/2}$ в ряд по степеням r'/l и, ограничиваясь первыми двумя членами, получим

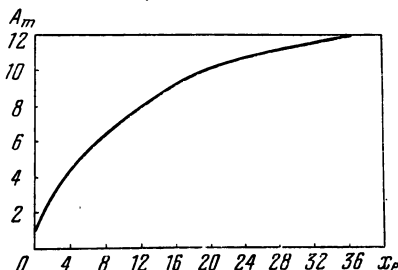


Рис. 5. Зависимость наименьшего значения массового числа ядра A_m от $x_e = p_e / m_e c$. Точки области, находящейся выше кривой $A_m(x_e)$ представляют устойчивые (относительно туннельного эффекта) ядра, а под кривой — неустойчивые.

$$W = \frac{n \cdot \omega_1 W_1 a_1}{16\pi^{3/2} l} \times \\ \times \exp \left[- \frac{2 \sqrt{2m_1}}{h} I_0 \right], \quad (19.11)$$

где I_0 определяется формулой (19.10) при $\theta_0=0$ и $s=l$.

Результаты численных расчетов для $n=27$ и $W_1=1$ приведены на рис. 5. По оси абсцисс отложена величина $x_e = p_e / m_e c$, по оси ординат — минимальное значение массового числа A для ядра, которое может существовать в среде при заданном x_e (т. е. при соответствующей плотности массы). При этом для времени жизни

ядер была взята величина порядка 10^7 — 10^9 лет. По известной причине пороговое значение массового числа A не особенно чувствительно к изменениям времени жизни. Так, при изменении W (следовательно, и времени жизни, которое обратно пропорционально W) на один-два порядка этот порог меняется незначительно.

§ 20. Самое устойчивое состояние вещества в подъядерной области

1. *Аз-ф а з а*. До сих пор было рассмотрено термодинамически равновесное состояние вещества в предположении, что массовое число ядер является постоянным. При этом оказалось, что число протонов в ядре не остается постоянным: в условиях вырожденного электронного газа с повышением плотности оно уменьшается. Состояние равновесия достигается благодаря процессам β -распада, поэтому времена реакций здесь весьма малы, всякие отклонения от равновесия быстро ликвидируются. Однако в предыдущем параграфе было показано, что массовые числа нельзя считать постоянными, не зависящими от плотности. Благодаря пикноядерным реакциям происходит слияние легких ядер. Этот процесс приводит к наличию многих ядер с разными A , причем равновесный состав (и тем самым среднее значение A) зависит от плотности. Поэтому основанное на β -процессах рассмотрение дает только относительный минимум энергии, а соответствующее состояние вырожденного вещества не соответствует абсолютному минимуму энергии. Абсолютно устойчивым является то состояние, в котором запрещены не только β -процессы, но и пикноядерные реакции. При отличной от нуля температуре среды взамен запрета следует говорить о статистическом равновесии между прямыми и обратными процессами. Энергия такого состояния должна быть наименьшей по сравнению с другими мысленно возможными.

Займемся исследованием состояния абсолютного равновесия, учитывая при этом не только роль β -процессов, но и ядерных превращений. При этом мы воспользуемся полуэмпирической формулой (18.3) для энергии связи атомных ядер. Хотя она, может быть, не всегда обладает высокой точностью (например, для ядер с

сильным преобладанием числа нейтронов над протонами), но очень удобна для проведения аналитических исследований интересующих нас вопросов.

Рассмотрим плотность энергии для заданного A :

$$\rho = \frac{n}{A} [(A - Z) m_n + Z m_p - B(A, Z)] + \frac{3}{4} a \left(\frac{Z}{A} n \right)^{1/3}. \quad (20.1)$$

Здесь первое слагаемое дает энергию атомных ядер, второе — энергию вырожденного релятивистского электронного газа, n — число барионов, приходящееся на единицу объема, n/A — плотность числа атомных ядер с параметрами A и Z , $B(A, Z)$ — энергия связи ядра:

$$\left. \begin{aligned} B(A, Z) &= c_0 A - c_1 A^{2/3} - c_2 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - c_3 A \left(1 - \frac{2Z}{A} \right)^2, \\ c_0 &= 15,7, \quad c_1 = 17,8, \quad c_2 = 0,71, \\ c_3 &= 23,7, \quad a = (3\pi^2)^{1/3} \hbar \cdot c = 6,1145 \cdot 10^{-11} \text{ Мэв} \cdot \text{см}. \end{aligned} \right\} \quad (20.2)$$

Здесь опущено последнее слагаемое формулы (18.3), вклад которого для средних и тяжелых ядер мал. В (20.1) последний член представляет энергию электронного газа, который предполагается релятивистским; скорость света принята равной единице, энергия измеряется в Мэв. Подставляя (20.2) в (20.1), находим

$$\begin{aligned} (n, A, Z) &= n \left[(m_n + c_3 - c_0) - (m_n - m_p + 4c_3) Z A^{-1} + \right. \\ &\quad \left. + c_1 A^{-1/3} + c_2 Z^2 A^{-4/3} + 4c_3 \frac{Z^2}{A^2} \right] + \frac{3}{4} a \left(n \frac{Z}{A} \right)^{4/3}. \end{aligned} \quad (20.3)$$

Найдем минимум этого выражения при заданном числе барионов:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial Z} \right)_{n,A} = 0, \quad \left(\frac{\partial \rho}{\partial A} \right)_{n,Z} = 0.$$

Производная по Z дает

$$\varepsilon_e = a (ny)^{1/3} = (m_n - m_p + 4c_3) - 2y(4c_3 + c_2 A^{2/3}), \quad (20.4)$$

где $y = Z/A$. Легко убедиться, что (20.4) идентично с

(18.2), если учесть следующее соотношение:

$$\frac{\partial \rho}{\partial Z} = [M(A, Z) - M(A, Z - 1)] \frac{n}{A}.$$

Соотношение (20.4) определяет зависимость Z/A от плотности барионов n при заданном A :

$$\frac{1}{a^3 y} [(m_n - m_p + 4c_3) - 2y(4c_3 + c_2 A^{2/3})]^3 = n. \quad (20.5)$$

Используя последнюю формулу или (20.4), выражение плотности энергии (20.3) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \rho = n \left[(m_n + c_3 - c_0) - \frac{1}{4} (m_n - m_p + 4c_3) y + \right. \\ \left. + c_1 A^{-1/3} - \frac{1}{2} (4c_3 + c_2 A^{2/3}) y^2 \right]. \quad (20.6) \end{aligned}$$

Это есть минимальное значение плотности энергии $\rho(n, A)$ в предположении, что среда состоит из одного типа ядер с фиксированным массовым числом A . В полученном выражении плотности энергии основным является член nm_n , вклад остальных слагаемых достаточно мал — порядка или меньше одного процента от nm_n . Однако они приобретают чрезвычайно важное значение при рассмотрении таких важных вопросов космогонии, как задачи, связанные с проблемой источников внутренней энергии и эволюции небесных тел. Очевидно, $\varepsilon = \rho + n(m_n - m_p)y - nm_n$ представляет собой плотность внутренней энергии звезды.

Теперь определим минимум энергии, одновременно варьируя как Z , так и A . Приравнявая нулю производную (20.3) по A , получим

$$\begin{aligned} (m_n - m_p + 4c_3)y - \frac{1}{3} c_1 A^{-1/3} - \frac{4}{3} c_2 A^{2/3} y^2 - \\ - 8c_3 y^2 - an^{1/3} \cdot y^{4/3} = 0. \quad (20.7) \end{aligned}$$

Используя (20.4), исключим из этого выражения последний член. В результате находим

$$\frac{Z}{A} = \left(\frac{c_1}{2c_2} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{A}} = \frac{3,54}{\sqrt{A}}. \quad (20.8)$$

Подстановка этого значения $y = Z/A$ в (20.5) и (20.6) дает

$$\frac{1}{a^3} \left[(m_n - m_p + 4c_3) \left(\frac{2c_2}{c_1} A \right)^{1/6} - 2 \left(\frac{c_1}{2c_2} \right)^{1/3} \left(c_2 A^{1/3} + \frac{4c_3}{A^{1/3}} \right) \right]^3 = n, \quad (20.9)$$

$$\rho_{\min} = n \left[(m_n + c_3 - c_0) - \frac{m_n - m_p + 4c_3}{4} \left(\frac{c_1}{2c_2} \right)^{1/2} \frac{1}{A^{1/2}} + \right. \\ \left. + \frac{3c_1}{4A^{1/3}} - \frac{c_1 c_3}{c_2} \cdot \frac{1}{A} \right]. \quad (20.10)$$

Итак, (20.10) есть наименьшее значение плотности энергии вырожденной электронно-ядерной нейтральной плазмы при заданном n . Соотношения же (20.8) и (20.9) определяют зависимость A и Z от плотности барионов.

Мы нашли наиболее устойчивое состояние вырожденного электронно-ядерного газа. Оно характеризуется одним независимым параметром, а именно, числом барионов, рассчитанным на единицу объема. Как мы видим, в наиболее устойчивом состоянии Ae -фазы для каждого значения n имеется одно определенное ядро с параметрами $A(n)$ и $Z(n)$. С возрастанием плотности массовое число растет, а отношение Z/A уменьшается. Это означает, что в соответствующей звездной конфигурации (совершенно холодный белый карлик, в котором исчерпаны все запасы внутренней энергии, в принципе имеющие возможность выделяться в виде тепловой или лучистой энергии) A и Z являются функциями расстояния r до ее центра. С удалением от центра $A(r)$, уменьшаясь, стремится к пределу $A=56$ у поверхности, при этом отношение Z/A стремится к пределу $26/56$.

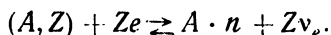
Изложенные выше результаты были получены в предположении, что электроны являются релятивистскими. Это допущение не является существенным ограничением, так как зависимость A и Z/A от плотности становится заметной лишь при $\epsilon_e > m_e c^2$.

2. Aen -фаза. При граничной энергии электронов

$$Z\epsilon_e \geq [Am_n - M(A, Z)]c^2 \quad (20.11)$$

в вырожденной электронно-ядерной плазме должны существовать свободные нейтроны. Здесь M — масса ядра

с параметрами A и Z . Знак равенства соответствует порогу появления нейтронов в составе вещества в качестве стабильной его компоненты. Термодинамическое равновесие между различными компонентами вещества может осуществляться с помощью реакций



Соответствующее соотношение между химическими потенциалами будет

$$M(A, Z) + Z\varepsilon_e = A(m_n + T_n), \quad (20.12)$$

где T_n — граничная кинетическая энергия нейтронов (нейтронный газ также предполагается полностью вырожденным). Появление свободных нейтронов вызвано требованием минимума энергии. Условимся называть *Aep-фазой* состояние вещества, в котором наряду с атомными ядрами и электронами имеются свободные нейтроны. Примечательно, что в этой фазе протон является нестабильной частицей, так как здесь

$$m_p + \varepsilon_e > m_n + T_n.$$

Поэтому случайно появившийся свободный протон сразу же захватывает электрон и превращается в нейтрон $p + e \rightarrow n + \nu_e$.

Существование свободных нейтронов в вырожденной электронно-ядерной плазме можно обосновать, исходя из принципа минимума внутренней энергии. Выпишем выражение плотности энергии для *Aep*-фазы:

$$\rho = \frac{n - n_n}{A} [(A - Z)m_n + Zm_p - B(A, Z)] + n_m m_n + \\ + \frac{3a^2}{10m_n} n_n^{5/3} + \frac{3}{4} a \left[\frac{Z}{A} (n - n_n) \right]^{4/3}, \quad (20.13)$$

где n_n — плотность числа нейтронов. Предпоследний член представляет плотность энергии вырожденного нерелятивистского нейтронного газа, а последний — плотность энергии релятивистского электронного газа. Учтено условие нейтральности плазмы

$$Z(n - n_n) = A \cdot n_e.$$

Воспользовавшись выражением (20.2), плотность энергии перепишем в виде

$$\begin{aligned} \rho = n m_n + (n - n_n) \left[(c_3 - c_0) - (m_n - m_p + 4c_3) \frac{Z}{A} + \right. \\ \left. + \frac{c_1}{A^{1/3}} + c_2 A^{2/3} \frac{Z^2}{A^2} + 4c_3 \frac{Z^2}{A^2} \right] + \frac{3a^2}{10m_n} n_n^{5/3} + \\ + \frac{3}{4} a \left[\frac{Z}{A} (n - n_n) \right]^{4/3}. \quad (20.14) \end{aligned}$$

Здесь мы имеем дело с функцией, зависящей от четырех аргументов $\rho(n, n_n, A, Z)$. Мы должны найти минимум энергии для фиксированного n .

Аналогично предыдущему случаю сначала рассмотрим плазму, состоящую из одного сорта атомных ядер с определенным массовым числом A . В состоянии термодинамического равновесия энергия системы должна быть минимальной:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \rho}{\partial n_n} \right)_{n, A, Z} = \frac{a^2}{2m_n} n_n^{2/3} - ya [y(n - n_n)]^{1/3} - [(c_3 - c_0) - \\ - y(m_n - m_p + 4c_3) + c_1 A^{-1/3} + (c_2 A^{2/3} + 4c_3) y^2] = 0, \\ \left(\frac{\partial \rho}{\partial Z} \right)_{n, n_n, A} = \frac{n - n_n}{A} \{ a [y(n - n_n)]^{1/3} - (m_n - m_p + 4c_3) + \\ + 2(c_2 A^{2/3} + 4c_3) y \} = 0. \end{aligned}$$

Здесь по-прежнему $y = Z/A$, $a [y(n - n_n)]^{1/3}$ — граничная энергия электронов. Из первого уравнения получается соотношение (20.12). Второе уравнение дает

$$\varepsilon_e = a [y(n - n_n)]^{1/3} = (m_n - m_p + 4c_3) - 2y(4c_3 + c_2 A^{2/3}). \quad (20.15)$$

Учитывая (20.15), из выражения для производной ρ по n_n находим

$$T_n = \frac{a^2}{2m_n} n_n^{2/3} = (c_3 - c_0) + c_1 A^{-1/3} - y^2 (4c_3 + c_2 A^{2/3}). \quad (20.16)$$

Уравнения (20.15) и (20.16) позволяют определить зависимости $n_n(n)$ и $y(n)$.

Итак, в случае заданного A мы имеем

$$\left\{ \frac{2m_n}{a^2} [(c_3 - c_0) + c_1 A^{-1/3} - y^2 (4c_3 + c_2 A^{2/3})] \right\}^{3/2} = n_n, \left\{ \frac{1}{a^3} \left[\frac{m_n - m_p + 4c_3}{y^{1/3}} - 2y^{2/3} (4c_3 + c_2 A^{2/3}) \right]^3 + n_n = n. \right\} \quad (20.17)$$

С учетом (20.15) и (20.16) для плотности энергии (20.14) можно написать

$$\rho = nm_n + n \left[(c_3 - c_0) + c_1 A^{-1/3} - \frac{m_n - m_p + 4c_3}{4} - y - \frac{1}{2} y^2 (4c_3 + c_2 A^{2/3}) + n_n \left[-\frac{2}{5} (c_3 - c_0) - \frac{2}{5} c_1 A^{-1/3} + \frac{m_n - m_p + 4c_3}{4} y - \frac{1}{10} y^2 (4c_3 + c_2 A^{2/3}) \right] \right]. \quad (20.18)$$

Перейдем к определению самого устойчивого состояния вещества в Aep -фазе. С этой целью в (20.15) и (20.16) мы должны добавить уравнение

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial A} \right)_{n, n_n, z} = \frac{n - m}{A} \left[-y \varepsilon_e + (m_n - m_p + 4c_3) y - \frac{1}{3} c_1 A^{-1/3} - \frac{4}{3} c_2 A^{2/3} y^2 - 8c_3 y^2 \right] = 0. \quad (20.7)$$

Подставляя в это уравнение выражение ε_e из (20.15), мы приходим к результату, полученному для предыдущего случая:

$$y^2 = \frac{c_1}{2c_2} \frac{1}{A}.$$

Имея в виду (20.7), из (20.15) и (20.16) находим соотношения

$$\left\{ \frac{2m_n}{a^2} \right\}^{3/2} \left[(c_3 - c_0) + \frac{1}{2} c_1 A^{-1/3} - \frac{2c_1 c_3}{c_2} \frac{1}{A} \right]^{3/2} = n_n, \left\{ \frac{1}{a^3} \left(\frac{2c_2}{c_1} \right)^{1/2} \left[(m_n - m_p + 4c_3) A^{1/6} - \sqrt{2c_1 c_2} A^{1/3} - 8c_3 \sqrt{\frac{c_1}{2c_2}} A^{-1/3} \right]^3 + n_n = n. \right\} \quad (20.19)$$

Полученные уравнения позволяют вычислить A и n_n для заданного значения n .

Нам остается выписать окончательную формулу плотности энергии. Она получается после простых преобразований (20.18), если учесть (20.15), (20.16) и (20.17):

$$\begin{aligned} \rho_{\min} = n \cdot m_n + n \left[(c_3 - c_0) + \frac{3}{4} c_1 A^{-1/3} - \frac{c_1 c_3}{c_2} \frac{1}{A} - \right. \\ \left. - \frac{m_n - m_p + 4c_3}{4} \sqrt{\frac{c_1}{2c_2}} A^{-1/2} \right] + n_n \left[\frac{m_n - m_p + 4c_3}{4} \times \right. \\ \left. \times \sqrt{\frac{c_1}{2c_2}} A^{-1/2} - \frac{2}{5} (c_3 - c_0) - \frac{c_1 c_3}{5c_2} \frac{1}{A} - \frac{9}{10} c_1 A^{-1/3} \right]. \quad (20.20) \end{aligned}$$

Полученное выражение и есть наименьшее значение плотности энергии, которое в принципе вещество может иметь при заданном числе барионов n в Aen -фазе.

Согласно (20.11) у порога рождения Aen -фазы граничная энергия электронов равна

$$\epsilon_e^{(n)} = \frac{Am_n - M}{Z} = \frac{A}{Z} b(A, Z), \quad (20.21)$$

где $b(A, Z)$ — энергия связи одного нуклона в ядре с параметрами A и Z . Численные значения $\epsilon_e^{(n)}$ можно определить путем рассмотрения схем, приведенных в (18.4), или же исходя из формулы энергии связи (18.3), если при этом одновременно учесть зависимость отношения A/Z от ϵ_e (см. рис. 3). Для ядер с массовым числом $A=4, 16, 40, 57, 80, 197, 240$ значения ϵ_e , удовлетворяющие уравнению (20.21), соответственно равны $\epsilon_e^{(n)} = 14,6; 19,6; 22,6; 23,3; 23,7; 23,75$ и $23,36$ Мэв. Казалось бы, отсюда для $\epsilon_e^{(n)}$ нужно было брать ее значения для атома гелия. Не следует, однако, забывать, что при соответствующих плотностях в плазме не могут существовать легкие ядра — они, как мы убедились в § 19, благодаря туннельному эффекту сливаются в более тяжелые ядра. Поэтому разумно принимать, что у порога появления свободных нейтронов граничная энергия электронов равна $\epsilon_e^{(n)} \approx 23$ Мэв. На рис. 3 для соответствующего среднего значения A/Z находим $\bar{A}/\bar{Z}=2,8$. Теперь опреде-

лим соответствующее пороговое значение плотности массы

$$\rho \approx \sum_i m_p A_i n_i \approx n_p n_e \left(\frac{\bar{A}}{Z} \right) \approx \frac{m_p}{3\pi^2} \left(\frac{m_p c}{\hbar} \right)^3 \left(\frac{\bar{A}}{Z} \right) x_e^3 \approx \\ \approx 10^8 \left(\frac{\bar{A}}{Z} \right) x_e^3,$$

где суммирование подразумевается по всем видам ядер, n_i — плотность i -го типа ядер, $x_e = \varepsilon_e / m_e c$. Подставляя здесь $x_e = 46$, $\bar{A}/Z = 2,8$, получаем $\rho^{(n)} \approx 2,7 \cdot 10^{11} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. Итак, у порога появления свободных нейтронов имеем

$$\varepsilon_e^{(n)} \approx 23 \text{ Мэв}, \quad \frac{A}{Z} \approx 2,8, \quad \rho^{(n)} \approx 2,7 \cdot 10^{11} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}. \quad (20.22)$$

Для абсолютно устойчивого состояния вещества у порога перехода фаз $Ae \rightarrow Aen$

$$A = 122, \quad y = 0,32, \quad n = 1,83 \cdot 10^{35} \text{ см}^{-3}. \quad (20.23)$$

По очевидным причинам нет такой фазы, в которой одновременно с ядрами и нейтронами существовали бы свободные протоны. В самом деле, энергетически выгодно протонам соединиться с соответствующим числом нейтронов и образовать атомное ядро, чем находиться вне ядра. Это просто означает, что в Aen -фазе граничная энергия нейтронов T_n никогда не достигает значения граничной энергии электронов, точнее, всегда $T_n < \varepsilon_e - (m_n - m_p)$. Не представляет трудности привести точное математическое доказательство этого утверждения.

Aen -фаза вещества кончается полным развалом атомных ядер и образованием электронно-нуклонной (enp) фазы. Развал ядер обусловлен чрезмерным повышением значения граничной энергии электронов. Точное определение порога фазового перехода $Aen \rightarrow enp$ не представляется возможным из-за недостаточно точного знания ядерного потенциала в соответствующей области плотностей. Однако его можно оценить из требования равенства нулю энергии связи нуклона:

$$b(A, Z) = -(c_3 - c_0) - c_1 A^{-1/3} + 4c_3 y - (4c_3 + c_2 A^{2/3}) y^2 = 0.$$

Отсюда

$$y = \frac{2c_3 \pm \sqrt{4c_3^2 = (4c_3 + c_2 A^{2/3})(c_3 - c_0 + c_1 A^{-1/3})}}{4c_3 + c_2 A^{2/3}}. \quad (20.24)$$

Верхний знак не соответствует действительности, поэтому нужно брать только нижний. В случае наивероятного

ядра $y = \sqrt{\frac{c_1}{2c_2}} A^{-1/2}$ и, следовательно,

$$\frac{2c_3 - \sqrt{4c_3^2 - (4c_3 + c_1 A^{2/3})(c_3 - c_0 + c_1 A^{-1/3})}}{4c_3 + c_2 A^{2/3}} = \sqrt{\frac{c_1}{2c_2}} \cdot A^{-1/2}. \quad (20.25)$$

Корнем этого уравнения является $A \approx 702$, т. е. перед полным развалом атомных ядер значение A , соответству-

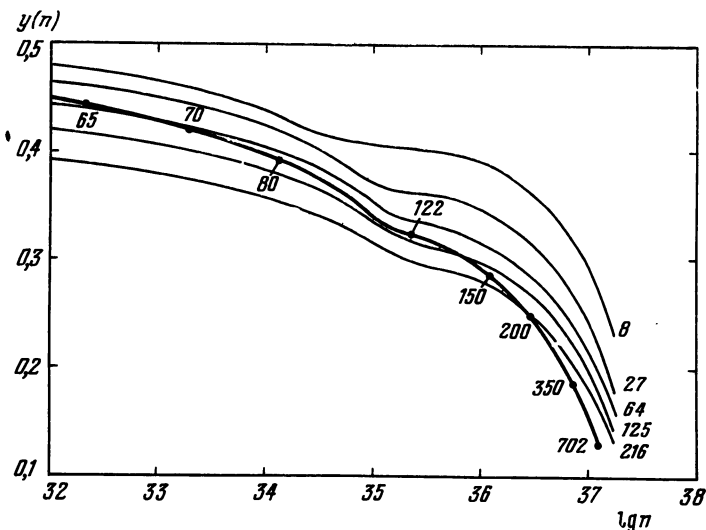


Рис. 6. График зависимости $y(n)$ (n — число барионов в единице объема, $y = Z/A$) для ядер с массовым числом $A = 8, 27, 64, 125, 216$. Уменьшение заряда ядра в вырожденном веществе обусловлено эффектом нейтронизации. Жирная линия принадлежит наиболее устойчивому состоянию Ae - и Aep -фаз вещества. Вдоль этой линии изменяется не только y , но и A . У некоторых точек указаны значения A . Слабое изменение хода кривых в окрестности $\lg n \approx 3,5$ обусловлено фазовым переходом $Ae \rightarrow Aep$.

ющее абсолютному минимуму внутренней энергии (наивероятное значение A), приблизительно равно 700. Подставляя найденное значение A в (20.19), получаем, что

у порога образования *enp*-фазы

$$\left. \begin{aligned} n &\approx 1,25 \cdot 10^{37} \text{ см}^{-3}, \\ n_n &\approx 7 \cdot 10^{36} \text{ см}^{-3}. \end{aligned} \right\} \quad (20.26)$$

На рис. 6 приведен график зависимости отношения $y=Z/A$ от логарифма плотности барионов для ряда значений массового числа и для наиболее устойчивого состояния *Ae*- и *Aen*-фаз. Рис. 7 дает зависимость массового числа наиболее устойчивого ядра от десятичного

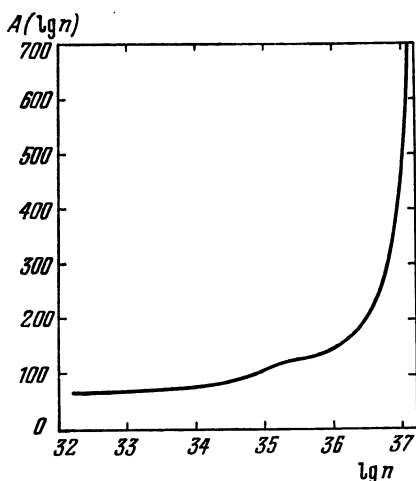


Рис. 7. Зависимость массового числа наиболее устойчивого ядра в *Ae*- и *Aen*-фазах от плотности барионов. Небольшая выпуклость при $\lg n \approx 35$ вызвана фазовым переходом $Ae \rightarrow Aen$. Перед образованием сплошного ядерного вещества, т. е. *enp*-фазы, наиболее устойчивыми являются ядра с $A \approx 700$.

логарифма плотности числа барионов. Наконец, рис. 8 представляет разность внутренних энергий

$$\Delta \varepsilon = \rho_A - \rho_{\min},$$

рассчитанных на один барион, в зависимости от $\lg n$.

Приведенный в этом параграфе анализ и результаты, представленные на рис. 8, дают основание думать, что

сверхплотные звезды нельзя считать полностью угасшими небесными телами, лишенными запасов внутренней энергии. Следует ожидать, что в белых карликах и в оболочках барионных звезд будут продолжаться пикно-ядерные реакции, приводящие к слиянию легких ядер в тяжелые и обратные процессы деления тяжелых ядер.

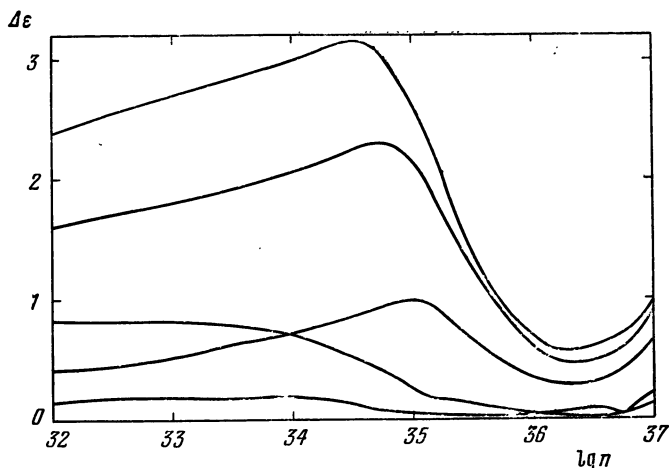


Рис. 8. По оси ординат отложена $\Delta\epsilon = (\rho_A - \rho_{\min})/n$, где n — плотность числа барионов, $\rho_{\min}$ — плотность энергии в наиболее устойчивом состоянии вещества в $A\epsilon$ и $A\epsilon n$ -фазах. ρ_A — плотность энергии для заданного массового числа $A=8, 12, 27, 125, 216$. Первые изломы (экстремумы) на линиях $\Delta\epsilon(n)$ имеют место в точках фазового перехода $A\epsilon \rightarrow A\epsilon n$. Очевидно, $\Delta\epsilon$ — разность внутренних энергий, рассчитанных на один барион. Энергия измеряется в Мэв.

В отличие от β -процессов, которые происходят очень быстро, эти ядерные реакции после первого этапа, когда уже исчезли самые легкие ядра, протекают достаточно медленно. В результате в белых карликах и в оболочках барионных звезд будет происходить медленный переход внутренней энергии в тепловую. По ходу израсходования имеющихся запасов энергии состояние вещества постепенно стремится к наиболее устойчивому, в котором внутренняя энергия имеет абсолютный минимум.

Резюме

В этой главе рассмотрены свойства нейтральной плазмы, состоящей из свободных электронов и «голых» атомных ядер, при температурах ниже температуры вырождения электронного газа. Удобно назвать ее *Ае*-фазой вещества. Она образуется при плотностях $\rho \gtrsim 10\alpha^{-3}Z^4$, где Z — порядковый номер ядра, α — число порядка единицы. Температура вырождения электронов в *Ае*-плазме достаточно высокая. Вещество в таком состоянии находится в белых карликах и оболочках барионных звезд (см. главу VIII).

Параметры атомных ядер A и Z (A — массовое число) в *Ае*-фазе являются функциями граничной энергии электронов (или плотности полной энергии ρ). При $\epsilon_e \gtrsim 1$ Мэв ($\rho \gtrsim 10^7$ г·см⁻³) происходит нейтронизация вещества: благодаря реакциям обратного β -распада $(A, Z) + e \rightarrow (A, Z - 1) + \nu_e$ или позитронным распадам $(A, Z) \rightarrow (A, Z - 1) + e^+ + \nu_e$ протоны в ядрах превращаются в нейтроны. От ρ зависит не только Z , но и массовое число A . Зависимость A от ρ обусловлена тем, что при высоких плотностях, когда средние расстояния между частицами становятся достаточно малыми, легкие ядра благодаря квантовомеханическому туннельному эффекту сливаются в тяжелые и поэтому исчезают.

Когда граничная энергия электронов достигает значения

$$Z\epsilon_e = (Am_n - M)c^2,$$

где M — масса ядра с параметрами A и Z , в плазме появляются свободные нейтроны. Образуется *Аен*-фаза, в которой наряду с атомными ядрами и электронами имеются свободные нейтроны. У порога появления свободных нейтронов

$$\epsilon_e \approx 23, \quad A/Z \approx 2,8, \quad \rho \approx 2,7 \cdot 10^{11} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}.$$

Здесь свободный протон является нестабильной частицей. При дальнейшем повышении плотности отношение Z/A продолжает уменьшаться, а A — растет. Эта фаза кончается при $n \approx 10^{37}$ см⁻³, $n_n \approx 7 \cdot 10^{36}$ см⁻³ (n_n — плотность числа свободных нейтронов), после чего образуется

сплошная ядерная материя: *enp*-фаза вещества. Зависимости отношения Z/A от граничной энергии электронов ε_e и плотности числа барионов n приведены на графиках рис. 3 и 6.

Массовое число наиболее устойчивого ядра, для которого внутренняя энергия является наименьшей (а энергия связи ядра наибольшей), в *Ae*- и *Aen*-фазах зависит от плотности барионов n . С возрастанием n оно изменяется от $A=56$ до $A \approx 122$ у порога образования *Aen*-фазы и до $A \approx 700$ перед полным развалом атомных ядер и последующим образованием сплошного ядерного вещества. График зависимости $A(n)$ приведен на рис. 7.

ГЛАВА III

ИДЕАЛЬНЫЙ ВЫРОЖДЕННЫЙ ГАЗ БАРИОНОВ

§ 21. Перечень элементарных частиц

В этом параграфе даются некоторые необходимые сведения об элементарных частицах, которые нам понадобятся при изложении материала последующих глав. Примерно три десятка лет тому назад термин «элементарный» понимался в буквальном смысле этого слова, т. е. предполагалось, что частицы, которым приписывался этот термин, не имеют структуры. Напомним, что в те времена были известны всего 6 элементарных частиц, не считая антипротона, антинейтрона и нейтрино. В наше время это слово употребляется в условном смысле: никто не сомневается в том, что если не все они, то по крайней мере значительное большинство их должно иметь сложную, пока нам неизвестную внутреннюю структуру. Имеются веские доводы в пользу этого высказывания.

В таблицах 1—3 перечислены наиболее важные характеристики известных в настоящее время элементарных частиц [133, 249]. Мы опускаем лишь мезонные резонансы, с которыми нам не придется иметь дела. Элементарные частицы делятся на три класса, а именно: барионы, мезоны и лептоны. Нуклоны и более тяжелые частицы, среди продуктов распада которых имеются протон или нейтрон, называются *барионами*. Барионы тяжелее нуклона называются *гиперонами*. Имеются также так называемые *резонансные* частицы, принадлежащие к классу барионов; о них речь будет идти ниже. Пионы (π -мезоны) и все частицы с массами, промежуточными между ними и нуклонными, называются *мезонами*. Те из них, которые тяжелее пионов, называются *K*-мезонами. К группе лептонов принадлежат электрон, μ -мезон

Таблица I

Элементарные частицы со временем жизни, превышающим 10^{-16} сек

Класс	Частица	Масса, M_{π}	Спин	Изотопический спин τ, τ_3	Среднее время жизни, сек	Главные схемы распада
Фотон	γ	0	1	—	∞	
	$\nu_e, \bar{\nu}_e$	0	$1/2$	—	∞	
	$\nu_{\mu}, \bar{\nu}_{\mu}$	0	$1/2$	—	∞	
	$e^{\pm}$	$0,511006 \pm 2 \cdot 10^{-6}$	$1/2$	—	∞	
	$\mu^{\pm}$	$105,659 \pm 0,002$	$1/2$	—	$(2,1983 \pm 0,0008) \cdot 10^{-6}$	$\mu \rightarrow e + \nu_{\mu} + \bar{\nu}_e$
Мезоны	$\pi^{\pm}$	$139,578 \pm 0,013$	0	± 1	$(2,604 \pm 0,007) \cdot 10^{-8}$	$\pi \rightarrow \mu + \bar{\nu}_{\mu}$
	π^0	$134,974 \pm 0,013$		0	$(0,89 \pm 0,18) \cdot 10^{-16}$	$\pi^0 \rightarrow 2\gamma$
	$K^{\pm}$	$493,82 \pm 0,11$	0	$1/2, \pm 1/2$	$(1,23 \pm 0,01) \cdot 10^{-8}$	$K \rightarrow \begin{cases} 2\pi \\ 3\pi \\ \pi + \mu + \bar{\nu}_{\mu} \\ \pi + e + \bar{\nu}_e \\ \mu + \bar{\nu}_{\mu} \end{cases}$
	K_S^0	$497,76 \pm 0,16$		$1/2, \pm 1/2$	$(0,862 \pm 0,006) \cdot 10^{-10}$	
	K_L^0			$1/2,$	$(5,29 \pm 0,15) \cdot 10^{-8}$	
	η		0	0	$\Gamma = (2,3 \pm 0,5) K_{\pi\pi}$	$\gamma\gamma; 3\pi^0; \pi^+ \pi^- \pi^0$

Класс	Частица	Масса, Мэв	Спин	Изотопический спин τ, τ_3	Среднее время жизни, сек	Главные схемы распада
Бароны	p	$938,256 \pm 0,005$	1/2	+1/2	∞	$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$
	n	$939,550 \pm 0,005$	1/2	-1/2	$(0,96 \pm 0,04) \cdot 10^{-3}$	
	Λ	$1115,57 \pm 0,07$	1/2	0	$(2,52 \pm 0,03) \cdot 10^{-10}$	$\Lambda \rightarrow \begin{cases} p + \pi^- \\ n + \pi^0 \end{cases}$
	Σ^+	$1189,43 \pm 0,17$		+1	$(0,810 \pm 0,013) \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+; p + \pi^0$
	Σ^0	$1192,55 \pm 0,11$	1/2	1 0	$< 1,0 \cdot 10^{-14}$	$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda + \gamma$
	Σ^-	$1197,42 \pm 0,09$		-1	$(1,64 \pm 0,06) \cdot 10^{-10}$	$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-$
	Ξ^-	$1321,25 \pm 0,18$	1/2?	-1/2 1/2	$(1,66 \pm 0,04) \cdot 10^{-10}$	$\Xi \rightarrow \Lambda + \pi$
	Ξ^0	$1314,7 \pm 0,7$		1/2	$(3,03 \pm 0,18) \cdot 10^{-10}$	
	Ω^-	$1672,4 \pm 0,6$	3/2?	0	$(1,3 \pm 0,35) \cdot 10^{-10}$	$\Omega^- \rightarrow \Xi + \pi; \Lambda + K^-$

Таблица 2

Бариионы

	Частица или резонанс	Масса, Мэв	Изото- пичес- кий спин	Спин		Частица или резонанс	Масса, Мэв	Изотопич. спин	Спин				
N	p	938,3	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Λ	$\Lambda(1815)$	1815	0	5/2				
	p	939,6				$\Lambda(1830)$	1830	0	5/2				
	N'(1470)	1470	1/2	1/2		$\Lambda(2100)$	2100	0	7/2				
	N(1518)	1525	1/2	3/2		$\Lambda(2350)$	2350	0	?				
	N(1550)	1550	1/2	1/2	Σ	Σ	$\left\{ \begin{array}{l} (+)1189,4 \\ (0)1192,6 \\ (-)1197,4 \end{array} \right\}$	1	1/2				
	N(1680)	1680	1/2	5/2						$\Sigma(1385)$	1382,2	1	3/2
	N(1688)	1690	1/2	5/2						$\Sigma(1660)$	1660	1	3/2
	N'(1710)	1710	1/2	1/2						$\Sigma(1700)$	1700	1	?
	N(2190)	2200	1/2	7/2						$\Sigma(1770)$	1765	1	5/2
N(2650)	2650	1/2	?	$\Sigma(1910)$						1910	1	5/2	
N(3030)	3030	1/2	?	$\Sigma(2030)$	2030	1	7/2						
Δ	$\Delta(1236)$	1236	3/2	3/2	$\Sigma(2250)$	2250	1	9/2					
	$\Delta(1640)$	1640	3/2	1/2	$\Sigma(2455)$	2455	1	11/2					
	$\Delta(1950)$	1950	3/2	7/2	$\Sigma(2595)$	2595	1	?					
	$\Delta(2420)$	2420	3/2	11/2	Ξ	Ξ	$\left\{ \begin{array}{l} (0)1314,7 \\ (-)1321,3 \end{array} \right\}$	1/2	1/2				
	$\Delta(2850)$	2850	3/2	15/2						$\Xi(1530)$	$\left\{ \begin{array}{l} (0)1528,9 \\ (-)1533,8 \end{array} \right\}$	1/2	3/2
	$\Delta(3230)$	3230	3/2	?						$\Xi(1815)$	1815	1/2	?
Z	$Z_0(1865)$	1865	0	?						$\Xi(1930)$	1915	1/2	?
Λ	Λ	1115,6	0	1/2	Ω^-	Ω^-	0	3/2					
	$\Delta(1405)$	1405	0	1/2									
	$\Lambda(1520)$	1518,8	0	3/2									
	$\Lambda'(1670)$	1670	0	1/2									
	$\Lambda'(1690)$	1695	0	3/2									

(отрицательный мюон), электронное и мюонное нейтрино. Позитрон и μ^+ -мезон является античастицами. Отдельный класс составляют фотоны.

В 1952 г. Ферми установил резкий максимум в поперечном сечении рассеяния пиона (при полной энергии 338 Мэв) на протоне, напоминающий явление резонанса. С тех пор были обнаружены большое количество подобных резонансов в рассеянии π - и K -мезонов на нуклонах. Эти явления в настоящее время истолковываются как

Таблица 3

Каналы распадов основных барионов

Частица	Схемы распада и их относительная вероятность в %
n	$pe^{-\nu}$
Λ	$p\pi^{-}$ (65,3); $n\pi^0$ (34,7); pe^{ν} ($8,8 \cdot 10^{-4}$); $p\mu^{\nu}$ ($1,35 \cdot 10^{-4}$)
Σ^{+}	$p\pi^0$ (52,8); $n\pi^{+}$ (47,2); $p\gamma$ ($1,9 \cdot 10^{-3}$); $n\pi^{+}\gamma$ ($\approx 10^{-3}$); $\Lambda e^{+\nu}$ ($2,2 \cdot 10^{-5}$); $n\mu^{+\nu}$ ($< 7 \cdot 10^{-5}$); $ne^{+\nu}$ ($< 2 \cdot 10^{-5}$)
Σ^0	$\Lambda\gamma$ (100); $\Lambda e^{+}e^{-}$ ($5,45 \cdot 10^{-3}$)
Σ^{-}	$n\pi^{-}$ (100); $ne^{-\nu}$ ($1,14 \cdot 10^{-3}$); $n\mu^{-\nu}$ ($6,2 \cdot 10^{-4}$); $\Lambda e^{-\nu}$ ($6,6 \cdot 10^{-5}$); $n\pi^{-}\gamma$ ($\approx 10^{-3}$)
Ξ^0	$\Lambda\pi^0$ (100); $p\pi^{-}$ ($< 0,9 \cdot 10^{-3}$); $pe^{-\nu}$ ($< 1,3 \cdot 10^{-3}$); $\Sigma^{+}e^{-\nu}$ ($< 1,5 \cdot 10^{-3}$); $\Sigma^{-}e^{+\nu}$ ($< 1,5 \cdot 10^{-3}$); $\Sigma^{+}\mu^{-\nu}$ ($< 1,5 \cdot 10^{-3}$); $\Sigma^{-}\mu^{+\nu}$ ($< 1,5 \cdot 10^{-3}$); $p\mu^{-\nu}$ ($< 1,3 \cdot 10^{-3}$)
Ξ^{-}	$\Lambda\pi^{-}$ (100); $\Lambda e^{-\nu}$ ($9 \cdot 10^{-4}$); $n\pi^{-}$ ($< 1,1 \cdot 10^{-3}$); $\Lambda\mu^{-\nu}$ ($< 1,3 \cdot 10^{-3}$); $\Sigma^0e^{-\nu}$ ($< 0,5 \cdot 10^{-3}$); $\Sigma^0\mu^{-\nu}$ ($< 0,5$); $ne^{-\nu}$ (< 1)
Ω^{-}	$\Xi^0\pi^{-}$ (?); $\Xi^{-}\pi^0$ (?); ΛK^{-} (?)

свидетельство существования большого количества барионных и мезонных возбуждений состояний, которые называются *резонансными* частицами. Мезонные резонансы наблюдаются в процессах, в которых рождаются несколько частиц. Так, например, когда при аннигиляции протона и антипротона рождаются пять пионов, то оказывается, что в большинстве случаев энергия двух π^{+} , π^0 -мезонов в системе их центра инерции равна 763 Мэв. Отсюда было заключено, что сперва рождается мезонный резонанс ρ^{+} с массой $m_{\rho} = 763$ Мэв, который далее распадается на два мезона: $\rho^{+} \rightarrow \pi^{+} + \pi^0$. По ширине энергетической полосы (полуширина кривой распределения случаев по энергиям) для времени жизни было найдено 10^{-22} сек. Резонансные частицы распадаются через ядерные взаимодействия, которые обеспечивают им среднее время жизни лишь порядка 10^{-23} сек. Таким образом, из-за весьма непродолжительного

существования эти возбужденные состояния барионов практически не могут быть найдены в готовом виде.

Резонансы обозначаются буквами с указанием в скобках значения массы. В таблицу 2 включены все резонансы, обнаруженные до середины 1968 г. [133]. Число их продолжает расти.

Важной характеристикой частиц является их спин, т. е. собственный механический момент, которым они обладают в отсутствие орбитального момента.

Другим квантовым числом, имеющим формальное сходство со спином, является *изотопический* спин. Это понятие появилось в ядерной физике низких энергий после установления факта независимости ядерных сил от электрического заряда протона и нейтрона. В связи с этим протон и нейтрон стали рассматривать как два разные зарядовые состояния одной и той же частицы, называемой нуклоном. Таким образом, нуклону приписывается новая внутренняя степень свободы (подобно спину), которая принимает два значения, соответственно для протона и нейтрона. Эта степень свободы формально сходна со спином и называется изотопическим спином. Квантовое число, характеризующее абсолютное значение (точнее, квадрат) изотопического спина, обозначается буквой τ , а проекция его на третью ось — τ_3 . В случае нуклона $\tau = 1/2$, значение второго квантового числа $\tau = +1/2$ соответствует протону, а $\tau_3 = -1/2$ — нейтрону, т. е. они составляют изотопический дублет. Формально получается такая картина, как в случае электрона, который может находиться в двух разных состояниях, соответствующих двум возможным направлениям спина. Три вида пионов составляют изотопический триплет с квантовым числом $\tau = 1$, при этом $\tau_3 = -1, 0, +1$, соответственно представляют π^- , π^0 и π^+ -мезоны.

Поскольку ядерные силы не зависят от зарядового состояния частиц (т. е. от квантового числа τ_3), массы компонент изотопических мультиплетов должны быть одинаковыми. Имеющееся небольшое отличие в значениях масс своим происхождением обязано только электромагнитным взаимодействиям. Аналогично расщеплению состояний, соответствующих разным значениям проекции орбитального момента (снятие l -вырождения)

в присутствии магнитного поля, здесь происходит расщепление на изотопические мультиплеты благодаря электромагнитным взаимодействиям.

Установлено, что во всех известных до сих пор процессах общее число барионов, а также число лептонов строго сохраняется, при этом каждому бариону (лептону) приписывается число $+1$, а антибариону (антилептону) число -1 . Взамен этого иногда говорят о барионном и лептонном зарядах.

В феноменологической систематизации частиц весьма плодотворным оказалось новое квантовое число, называемое *странностью*. Оно определяется так:

$$S = 2Q - 2\tau_3 - B, \quad (21.1)$$

где Q — заряд частицы (в единицах элементарного заряда e), τ_3 — третья компонента изотопического спина и B — барионный заряд. В сильных взаимодействиях странность сохраняется. Сумма $S+B$ называется гиперзарядом.

Мы не будем говорить о таких важных характеристиках частиц, какими являются пространственная, временная и зарядовая четности частиц. Эти квантовые числа возникают при пространственной инверсии (замены $\mathbf{r}$ на $-\mathbf{r}$), обращении времени (замена t на $-t$) и операции зарядового сопряжения (замена частицы на античастицу). Здесь эти понятия нам не понадобятся.

Частицы взаимодействуют друг с другом посредством четырех типов полей. Перечислим эти взаимодействия в порядке возрастания их силы: *гравитационные, слабые, электромагнитные* и, наконец, *сильные*. Гравитационные взаимодействия присущи всем частицам без исключения, но они, по-видимому, не играют никакой роли в мире элементарных частиц. По крайней мере до сих пор не обнаружено какое-либо явление, которое своим происхождением обязано гравитации. Слабыми взаимодействиями обладают все лептоны, мезоны и барионы. Электромагнитные взаимодействия существуют между всеми частицами, имеющими электрический заряд или магнитный момент. Сильные взаимодействия действуют между барионами и мезонами. Эти силы связывают нуклоны в ядрах. Они ответственны также за такие процессы, как рассеяние барионов барионами, ме

зонов барионами, рождение мезонов в столкновениях барионов и другие. Из перечисленных взаимодействий хорошо разработанная теория существует только для электромагнитных и до некоторой степени для гравитационных. Для слабых и особенно сильных взаимодействий логически последовательной теории не существует, здесь господствует феноменологический подход описания явлений. Если условимся сильные взаимодействия рассматривать как взаимодействие с силой порядка единицы, тогда электромагнитные будут порядка 10^{-2} , слабые — 10^{-5} , гравитационные 10^{-38} .

В мире элементарных частиц имеются следующие законы сохранения. Прежде всего соблюдаются законы сохранения энергии, импульса и момента количества движения. Они соответственно следуют из требования инвариантности физических явлений относительно трансляции во времени, трансляции (параллельно переноса) в пространстве и вращений в пространстве. Абсолютными являются также законы сохранения электрического, барионного и лептонного зарядов. По-видимому, в основе этих законов сохранения также лежат определенные свойства симметрии частиц.

Сильные и электромагнитные взаимодействия инвариантны относительно $\hat{C}$ -, $\hat{P}$ - и $\hat{T}$ -операций (первый символ означает зарядовое сопряжение, второй — пространственную инверсию, а третий — инверсию времени) в отдельности, в то время как слабые взаимодействия инвариантны только относительно $\hat{T}$ -операции, т. е. относительно инверсии времени. Нарушение $\hat{C}$ -инвариантности приводит к несохранению четности в слабых взаимодействиях. Странность $\hat{S}$ сохраняется в сильных и электромагнитных взаимодействиях и не сохраняется в слабых взаимодействиях. Все распады, приведенные в последних столбцах таблиц 1 и 3, обусловлены слабыми взаимодействиями.

Теперь дадим определение античастицы. Две частицы, для которых значения массы и спина совершенно одинаковы, но электрический заряд, барионный (лептонный для лептонов) заряд, четность, странность (у лептонов $S=0$) имеют противоположный знак, называются античастицами. В таблице перечислены не только

лептоны, но и антилептоны. Все барионы имеют свои античастицы, но они не перечислены в таблицах 1—3.

По-видимому, нуклоны имеют неизвестную нам структуру. В пользу этого говорит то, что при ядерных столкновениях частиц достаточно высоких энергий из протона и нейтрона рождаются гипероны и барионные резонансы, которые затем путем различного рода распадов в конечном счете опять превращаются в нуклоны. Следовательно, гипероны и резонансы, по-видимому, являются возбужденными состояниями нуклона.

За последние несколько лет много говорят о гипотетических сильно взаимодействующих частицах с дробным и электрическим и барионным зарядами, называемыми *кварками*. В таблице 4 приведены характеристики, которые приписываются им [57].

Барионы и мезоны представляются как сложные частицы, состоящие из кварков. Так, например, протон, нейтрон и Λ -гиперон изображаются в виде комбинаций: $Q_p Q_p Q_n$, $Q_p Q_n Q_n$, $Q_p Q_n Q_\lambda$, а мезоны как комбинация кварка и антикварка, например, π^- -мезоны — как комбинация $Q_p \bar{Q}_p$. Массы кварков должны быть большими по крайней мере больше массы самого тяжелого бариона. Был предпринят ряд экспериментов с целью обнаружения этих частиц, однако они дали отрицательный результат.

Таблица 4

Квантовые числа кварков и антикварков

Символ	Квантовые числа					
	заряд Q	изотопический спин		странность S	барионный заряд B	спин, S
		τ	τ_3			
Q_p	2/3	1/2	+1/2	0	1/3	1/2
Q_n	-1/3	1/2	-1/2	0	1/3	1/2
Q_λ	-1/3	0	0	-1	1/3	1/2
$\bar{Q}_p$	-2/3	1/2	-1/2	0	-1/3	1/2
$\bar{Q}_n$	+1/3	1/2	+1/2	0	-1/3	1/2
$\bar{Q}_\lambda$	+1/3	0	0	+1	-1/3	1/2

По-видимому, кварки являются только теоретическими построениями, выражающими свойства симметрии барионов и мезонов объединяться в определенные груп-

пы. Они оказались плодотворными в феноменологической классификации частиц по группам. В связи с тем, что барионы и мезоны представляются как сложные частицы, состоящие из кварков, они получили общее название *адронов*.

§ 22. Барионный газ

Наше рассмотрение в конце второй главы мы довели до плотностей порядка ядерной. При плотности $\rho \approx 10^{13} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$ атомные ядра исчезают вообще и образуется сплошная ядерная материя, состоящая преимущественно из нейтронов и сравнительно небольшого числа протонов и электронов (ядерная плазма или, точнее, *перфаза* вещества). Состояние термодинамического равновесия устанавливается через реакции

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e, \quad p + e \rightarrow n + \nu_e, \quad p \rightarrow n + e^+ + \nu_e.$$

В приближении идеального газа концентрации частиц определяются соотношениями

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e, \quad n_e = n_p. \quad (22.1)$$

Первое соотношение непосредственно следует из рассмотрения приведенных реакций при термодинамическом равновесии, а второе выражает условие нейтральности плазмы.

Температуры вырождения частиц в ядерной плазме очень высоки: $T_n \approx 5 \cdot 10^{11}$; $T_p \approx 10^{10}$; $T_e \approx 10^{12}$ градусов. С другой стороны, из-за катастрофических нейтронных потерь энергии реальные значения температур в недрах соответствующих сверхплотных звезд должны быть значительно меньше этих. Следовательно, вещество в *перфазе* всегда можно считать сильно вырожденным. Поэтому можно записать

$$\left. \begin{aligned} \mu_k = \varepsilon_k = m_k c^2 + \frac{a^2}{2m_k c^2} n_k^{2,3}, \quad k = n; p, \\ \mu_e = \varepsilon_e = a n_e^{1/3}, \end{aligned} \right\} \quad (22.2)$$

где $a = (3\pi^2)^{1/3} \hbar c$. Нуклонный газ здесь считается нерелятивистским, а электронный — релятивистским, что действительно имеет место в ядерной области плотностей.

Из (22.1) и (22.2) следует

$$n_e = n_p = \left[\sqrt{\frac{m_p}{m_n} n_n^{2/3} + \frac{m_p c^4 (2m_n - m_p)}{a^2}} - \frac{m_p c^2}{a} \right]^3 \approx \left[\sqrt{n_n^{2/3} + \frac{m_p^2 c^4}{a^2}} - \frac{m_p c^2}{a} \right]^3. \quad (22.3)$$

Отсюда при $n_n = 10^{38} \text{ см}^{-3}$ получаем $n_e = n_p = 1,23 \times 10^{-36} \text{ см}^{-3}$, т. е. в ядерной области плотностей концентрация нейтронов приблизительно в сто раз больше концентрации протонов (электронов). Это обстоятельство и послужило поводом называть соответствующие конфигурации нейтронными звездами. В § 28 мы увидим, что учет энергии взаимодействия между нуклонами приводит к заметному уменьшению этой диспропорции между концентрациями протонов и нейтронов (см. формулу (28.8)).

Теперь рассмотрим плотности выше ядерной [14, 10, 92, 17]. При продвижении по шкале плотностей вверх n_e растет пропорционально $n_e^{1/3}$, а граничные кинетические энергии нейтронов и протонов пропорционально $n_n^{2/3}$ и $n_p^{2/3}$. При достаточно больших значениях $n = n_n + n_p$, когда граничные энергии частиц превышают энергии покоя нестабильных барионов, какими являются гипероны и резонансы, нуклонно-электронная фаза теряет свою устойчивость. Энергетически выгодным оказывается рождение гиперонов и барионных резонансов. Это объясняется тем, что для некоторой части нуклонов предпочтительно находиться в гиперонном или резонансном состояниях меньших энергий, нежели на верхних уровнях энергии Ферми, дабы обеспечить минимум энергии системы. По сути дела физическое содержание явления здесь сходно с тем, которое мы имели при превращении протонов в нейтроны. Но руководствоваться одним только принципом минимума энергии газа нельзя, если мы не укажем возможности его реализации. Процесс нейтронизации осуществляется путем $\beta^\pm$ -распада. Здесь переход нуклонов в гиперонное или резонансное состояние может совершаться двумя путями, а именно, путем испускания π -мезонов или же посредством маловероятных лептонных процессов. Переходы по обоим путям осуществляются только через

слабые взаимодействия. Мы имеем в виду процессы распадов, обратные тем, которые приведены в таблице 3. Так, на примере Λ -гиперона мы имели бы

$$\begin{aligned} n &\rightarrow \Lambda + \pi^0, & p &\rightarrow \Lambda + \pi^+, \\ p &\rightarrow \Lambda + e^+ + \nu_e, & p &\rightarrow \Lambda + \mu^+ + \nu_\mu. \end{aligned}$$

Однако в условиях, существующих в вырожденной нуклонно-электронной плазме, процесс образования Λ -гиперона пойдет не по этим каналам, а скорее всего по каналу захвата электронов протонами $p + e^- \rightarrow \Lambda + \nu_e$, так как в последнем случае пороговое значение плотности меньше. Действительно, для вышеприведенных распадов необходимо иметь граничные энергии нейтронов $\varepsilon_n \geq 1251 \text{ Мэв}$, тогда как во втором случае необходимо $\varepsilon_n = \varepsilon_p + \varepsilon_e \geq 1116 \text{ Мэв}$.

Итак, перечислим те реакции, благодаря которым в рассматриваемых условиях появляются гипероны и устанавливается состояние термодинамического равновесия. Так, учитывая замечание, сделанное по поводу рождения Λ -гиперона, из указанных в табл. 3 схем распадов, очевидно, мы должны рассматривать следующие:

$$\left. \begin{aligned} n &\rightarrow p + e + \bar{\nu}_e, & p + e &\rightarrow n + \nu_e, \\ \Lambda &\rightarrow p + e + \bar{\nu}_e, & p + e &\rightarrow \Lambda + \nu_e, \\ \Sigma^0 &\rightarrow p + e + \bar{\nu}_e, & p + e &\rightarrow \Sigma^0 + \nu_e, \\ \Sigma^- &\rightarrow n + e + \bar{\nu}_e, & n + e &\rightarrow \Sigma^- + \nu_e, \\ \Sigma^+ + e &\rightarrow n + \nu_e, & n &\rightarrow \Sigma^+ + e + \bar{\nu}_e, \\ \Xi^- &\rightarrow n + e + \bar{\nu}_e, & n + e &\rightarrow \Xi^- + \nu_e, \\ \Xi^0 &\rightarrow p + e + \bar{\nu}_e, & p + e &\rightarrow \Xi^0 + \nu_e, \\ \Omega^- &\rightarrow n + e + \bar{\nu}_e, & n + e &\rightarrow \Omega^- + \nu_e. \end{aligned} \right\} \quad (22.4)$$

Мы привели часть возможных переходов, связанных с нуклонами и электронами; имеются также другие лептонные каналы, в которых участвуют только гипероны.

В соответствии с реакциями (22.4) термодинамическое равновесие между различными компонентами вещества определяется уравнениями

$$\mu_k^0 = \mu_n, \quad \mu_k^+ = \mu_n - \mu_e, \quad \mu_k^- = \mu_n + \mu_e. \quad (22.5)$$

Здесь μ_n , μ_e — химические потенциалы нейтронов и электронов, μ_k^0 , μ_k^+ и μ_k^- — химические потенциалы для нейтральных, положительно заряженных и отрицательно заряженных барионов. Выше мы не говорили о барионных резонансах, однако уравнения (22.5) относятся также и к этим частицам.

Впредь все время мы будем предполагать, что температура среды равна нулю или же значительно меньше температуры вырождения любой частицы T_k . Как будет показано дальше, в надъядерной области плотностей, где имеется барионный газ с богатым «химическим» составом, концентрации всех частиц достаточно большие, а поэтому и температуры вырождения T_k будут очень высокими. Таким образом, химические потенциалы частиц совпадают с их граничными энергиями Ферми $\mu_k = \epsilon_k$, а последние зависят лишь от плотностей соответствующих частиц n_k . Следовательно, уравнения (22.5) устанавливают связи между концентрациями частиц при термодинамическом равновесии.

§ 23. Полная система уравнений

Исходя из некоторых общих принципов физики, исследуем «химический» состав вещества в надъядерной области плотностей, не прибегая при этом к рассмотрению конкретных физических процессов для обоснования появления той или иной частицы. Допустим, плотность массы настолько высока, что все элементарные частицы, которые вообще могут стать стабильными в сверхплотной среде, уже имеются в составе вещества. Теперь посмотрим, существование каких частиц в качестве стабильных компонент вещества допустимо, каких — нет.

При интересующих нас физических условиях возможными компонентами вещества могут быть все барионы, из лептонов — электрон и $\mu^\pm$ -мезон, а из группы мезонов только π^- -мезон. Стабильность гиперонов и барионных резонансов обеспечивается наличием в среде вырожденного газа нуклонов, а стабильность μ^- -мезонов — наличием вырожденного газа электронов. Дело в том, что из-за принципа Паули продукты распада рассматриваемых частиц не могут найти себе свободного

места в фазовом пространстве, поскольку оно сплошь заполнено (в каждом квантовом состоянии по одной частице) до определенного граничного значения импульсов такими же частицами (протонами, нейтронами и электронами). Все гипероны и барионные резонансы имеют полуцелый спин, поэтому образованные ими газы также будут сильно вырожденными (предполагается $T \ll T_k$), вследствие чего переходы между этими в лабораторных условиях нестабильными частицами также будут запрещены. Отрицательные мюоны также образуют вырожденный газ, этим обеспечивается стабильность π^- -мезона, который распадается на μ^- -мезон и нейтрино. Что касается других известных в настоящее время элементарных частиц, а именно: фотонов, позитронов, нейтрино, μ^+ , π^0 , π^+ разного рода K -мезонов и их резонансов, то при абсолютном нуле все перечисленные частицы должны отсутствовать в среде, так как нет причин, препятствующих их распаду, аннигиляции или уходу (нейтрино и фотон) из недр звезды.

Для каждого вида нестабильной частицы имеется свое пороговое значение плотности, выше которого она превращается в стабильную. При рассматриваемых физических условиях особое положение занимают π^- -мезоны. Поскольку эти частицы подчиняются статистике Бозе, все они конденсируются на уровень наименьшей энергии $\epsilon_\pi = m_\pi c^2$. Таким образом, они образуют крайне вырожденный бозе-газ.

Как мы видим, все барионы, отрицательный мюон и из бозонов отрицательный пион, которые в земных условиях являются нестабильными, при плотностях выше ядерной превращаются во вполне стабильные частицы. Соответствующие физические условия могут реализоваться в некоторых особых небесных телах (см. главы VI и VII). Наоборот, при особых условиях, существующих в вырожденном протонно-электронном газе, типичная стабильная частица протон становится нестабильной. Таким образом, свойство стабильности частиц — понятие относительное, оно определяется физическими условиями, существующими в среде, где они находятся.

Чтобы решить вопрос о том, какие частицы могут находиться в среде и какова их концентрация при заданной плотности полного числа барионов, очевидно,

мы должны руководствоваться принципом минимума полной энергии системы. Природа построена экономно, из всех мысленно возможных вариантов состояний она выбирает то, для которого энергия системы является наименьшей (вырожденное вещество, идеально упорядоченная система, энтропия ее равна нулю, поэтому она не может послужить критерием выбора наивероятного состояния).

Энергия единицы объема вещества равна

$$\rho = \frac{c}{2\pi^2\hbar^3} \sum_k a_k \int_0^{p_k} \sqrt{m_k^2 c^2 + p^2} p^2 dp + m_\pi c^2 n_\pi, \quad (23.1)$$

где суммирование предполагается по всем видам барионов, по электрону и μ -мезону, p_k — граничный импульс Ферми для k -го вида частицы, n_π — плотность числа π^- -мезонов, a_k — постоянный множитель, учитывающий число возможных спиновых состояний частиц, $a_k = 2s_k + 1$, где s_k — спиновое квантовое число k -й частицы. Для лептонов и всех основных барионов (за исключением, может быть, Ω^- -гиперона, спин которого еще точно не определен, но предполагается $s_k = 3/2$) $s_k = 1/2$, $a_k = 2$, но у резонансных частиц встречаются также другие значения спинового квантового числа, а именно, $s_k = 3/2, 5/2, 7/2$, а у резонанса $\Delta(2420)$ даже $s_k = 11/2$. Как уже было сказано, при $T=0$ пионы не имеют кинетической энергии, поэтому в (23.1) входит только их энергия покоя $m_\pi c^2$. Далее, в (23.1) предполагается, что плотность вещества настолько высока, что все рассмотренные выше частицы имеются в среде и, кроме того, они составляют идеальный газ. Граничный импульс и плотность частиц связаны друг с другом:

$$p_k = \left(\frac{6\pi^2}{a_k} \right)^{1/3} \hbar n_k^{1/3}, \quad n_k = \frac{a_k}{6\pi^2\hbar^3} p_k^3. \quad (23.2)$$

Теперь мы должны из условия минимума энергии (23.1) найти уравнения, определяющие концентрации частиц. Но прежде чем сделать это, необходимо выяснить, какие ограничения нужно наложить на концентрации частиц. Имеются два дополнительных условия: по сути дела, первое является выражением закона сохране-

ния барионного заряда, а второе — электрического заряда. Вопрос ставится так: задано общее число барионов n , требуется найти, как оно распределяется между различными компонентами, т. е. нужно определить концентрации n_k . В соответствии с этим требованием первое ограничение сводится к следующему уравнению:

$$n = \frac{1}{6\pi^2\hbar^3} \sum_k a_k p_k^3 = \text{const}, \quad (23.3)$$

где суммирование подразумевается только по барионам. В реальных небесных телах n , конечно, зависит от координат, однако при термодинамическом равновесии в каждой фиксированной точке звезды число n , конечно, является постоянным. Фактически (23.3) означает, что при любых процессах, приводящих к перераспределению числа частиц, общее число барионов (барионный заряд) в звезде остается неизменным.

При элементарных процессах, конечно, сохраняется также число лептонов (лептонный заряд). Однако в условиях, когда образующиеся нейтрино и антинейтрино могут сравнительно свободно покидать объем звезды, число лептонов в ней нельзя считать заданным, т. е. по ходу установления термодинамического равновесия в небесном теле в целом общее число лептонов не сохраняется. Число лептонов (электронов μ^- -мезонов) становится определенным лишь после установления состояния термодинамического равновесия, причем опять параметром, определяющим полное число лептонов, будет задаваемое число барионов.

Гравитационные силы весьма слабы по сравнению с электромагнитными, поэтому даже чрезвычайно малое нарушение (порядка 10^{-18} избыточной заряженной частицы на одну частицу с компенсированным зарядом) нейтральности приводит к неустойчивости. Поэтому небесное тело не только в целом, но и каждый элемент его объема должен быть электрически нейтральным, т. е.

$$\frac{1}{6\pi^2\hbar^3} \left(\sum_{(++)} 2a_k p_k^3 + \sum_{(+)} a_k p_k^3 - \sum_{(-)} a_k p_k^3 - \sum_{e,\mu} a_k p_k^3 \right) - n_\pi = 0, \quad (23.4)$$

где во втором члене суммирование подразумевается по всем положительно заряженным барионам, в третьем — по отрицательно заряженным барионам, в четвертом —

по лептонам, а в первом — по положительным частицам с двойным электрическим зарядом. Последние имеются среди Δ -резонансов, изотопический спин которых равен $I=3/2$. В таблице 2 перечислены 6 таких частиц. В связи с этим заметим, что все резонансные состояния барионов, приведенные в таблице 2, образуют изотопический мультиплет. Исключение составляют только Λ -резонансы, у которых изотопический спин равен нулю. Так, резонансы Δ образуют изотопический куплет (состоит из четырех частиц с зарядами $-e, 0, +e, +2e$), резонанс Σ — триплет (три частицы с зарядами $-e, 0, +e$), резонанс N — дублет (две частицы с зарядами $0, +e$) и, наконец, резонанс Λ представляет синглет (одну частицу с зарядом 0).

Итак, нам нужно определить минимум выражения (23.1) при условиях (23.3) и (23.4). Как известно, в этом случае задача сводится к нахождению минимума функции (где α и β — пока неопределенные параметры)

$$\Phi = \frac{1}{2\pi^2 h^3} \left[\sum_k c a_k \int_0^{p_k} \sqrt{m_k^2 c^2 + p^2} p^2 dp + 2\pi^2 h^3 m_\pi c^2 n_\pi + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{3} \sum_k a_k p_k^3 + \frac{\beta}{3} \left(\sum_{(++)} 2a_k p_k^3 + \sum_{(+)} a_k p_k^3 - \sum_{(-)} a_k p_k^3 - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{e, \mu} a_k p_k^3 - 6\pi^2 h^3 n_\pi \right) \right], \quad (23.5)$$

Приравнявая нулю первые производные функции Φ по концентрациям частиц n_k (или для удобства в случае фермионов можно дифференцировать по граничным импульсам p_k), мы находим необходимые условия минимума энергии системы. Здесь, однако, следует обратить внимание на одну математическую тонкость, приводящую к важному физическому следствию. Дело в том, что равенство производных Φ нулю является необходимым условием минимума функции лишь в том случае, когда этот минимум достигается при значениях каждой из переменных, находящихся внутри допустимого интервала их возможных значений. Если же минимальное значение достигается при предельном значении той или иной переменной, то производная Φ по этой переменной не должна быть обязательно равна нулю.

Так, например, барионный резонанс $\Delta(3230)$ имеет наибольшую массу из всех барионов, перечисленных в таблице 2, поэтому эта частица должна появиться при очень высоких плотностях, позже всех. При плотности барионов ниже порога рождения $\Delta(3230)$ функция Φ должна иметь наименьшее значение при $N_{\Delta}(3230) = 0$; между тем, это условие не вытекает из равенства нулю производных функции Φ . Поэтому мы должны быть осторожны и применять каждое из нижеследующих уравнений только тогда, когда убедимся, что при данной плотности барионов та переменная концентрация, дифференцированием по которой получено рассматриваемое уравнение, отлична от нуля. Этому будет соответствовать введенное дальше разделение всего интервала возможных значений плотности барионов (или плотности массы) на отдельные подынтервалы, которые отличаются друг от друга составом элементарных частиц и которые можно было называть различными фазами вещества. Мы можем, конечно, для каждой фазы составить свою функцию Φ и далее найти ее минимум. Однако нам кажется целесообразным сначала рассмотреть самую высокую фазу, когда в среде присутствуют все перечисленные частицы, т. е. написать формулу (23.5). Далее, если мы в уравнениях, выражающих условие равновесия между компонентами, опустим все параметры тех частиц, которых нет в интересующей нас фазе, то мы тем самым автоматически получим все необходимые формулы, определяющие концентрации частиц этой фазы.

Во всех случаях дифференцирование по n_k мы можем заменить дифференцированием по соответствующему граничному импульсу p_k , за исключением переменной n_{π} . Приравнявая производные Φ нулю, получаем

$$\left. \begin{aligned} a_k \epsilon_k p_k^2 + a_k (\alpha + 2\beta) p_k^2 &= 0 & \text{для } B^{++}, \\ a_k \epsilon_k p_k^2 + a_k (\alpha + \beta) p_k^2 &= 0 & \text{для } B^+, \\ a_k \epsilon_k p_k^2 + a_k (\alpha - \beta) p_k^2 &= 0 & \text{для } B^-, \\ a_k \epsilon_k p_k^2 + a_k \alpha p_k^2 &= 0 & \text{для } B^0, \\ a_k \epsilon_k p_k^2 - a_k \beta p_k^2 &= 0 & \text{для } k = e \text{ и } \mu^-, \\ m_{\pi} c^2 - \beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23.6)$$

Здесь $\varepsilon_k = c(m_k^2 c^2 + p_k^2)^{1/2}$ — граничная энергия Ферми, B означает барион, а знаки сверху указывают электрический заряд этих частиц.

Уравнения (23.6) вместе с (23.3) и (23.4) полностью определяют значения граничных импульсов p_k и параметров α и β . Исключая из (23.6) α и β , получим следующую систему уравнений:

$$\varepsilon_k^{(0)} = \varepsilon_n, \quad (23.7)$$

$$\varepsilon_k^{(+)} + \varepsilon_e = \varepsilon_n, \quad (23.8)$$

$$\varepsilon_k^{(-)} - \varepsilon_e = \varepsilon_n, \quad (23.9)$$

$$\varepsilon_k^{(++)} + 2\varepsilon_e = \varepsilon_k^0, \quad (23.10)$$

$$\varepsilon_\mu = \varepsilon_e, \quad (23.11)$$

$$\varepsilon_e = m_\pi c^2, \quad (23.12)$$

где $\varepsilon_k^{(0)}$, $\varepsilon_k^{(+)}$, $\varepsilon_k^{(-)}$ — соответственно граничные энергии нейтральных, положительно и отрицательно заряженных барионов.

Эта система уравнений написана для наиболее общего случая, когда в среде имеются все частицы, которые могут превратиться в стабильные.

В согласии с вышеизложенным замечанием последнее уравнение справедливо лишь при плотностях выше порога рождения пионов. Эта оговорка, конечно, относится также ко всем барионам тяжелее нейтрона и к мюону. Полученная система уравнений совпадает с приведенными в (22.5).

В этом нет ничего неожиданного, так как в основе вывода известных соотношений химических потенциалов для равновесных систем также лежат принцип минимума энергии и законы сохранения электрического и барионного зарядов.

Формулы (23.7) — (23.12) вместе с (23.3) и (23.4) определяют концентрации частиц n_k в самом общем случае, когда в газе элементарных частиц плотность вещества настолько высока, что в ней представлены все барионы, отрицательные лептоны и π^- -мезон. Как мы видим, в состоянии термодинамического равновесия

граничные энергии Ферми для барионов, имеющих одинаковый электрический заряд, равны. Эта теорема справедлива и для лептонов.

Для рассматриваемого в этом параграфе подхода к решению поставленного перед нами вопроса не обязательно, чтобы было $T = 0$. Очевидно, что полученные выше результаты останутся в силе и при отличных от нуля температурах, таких, чтобы барионный газ можно было считать сильно вырожденным. С другой стороны, поскольку плотность материи очень большая, дозvoленные при этом температуры могут достигать высоких значений.

§ 24. Пороги стабильности частиц

В газе, состоящем из элементарных частиц, независимой переменной разумно считать общую плотность числа барионов n .

Если n задано, то уравнения (23.3), (23.4) и (23.7) — (23.11) позволяют определить концентрации всех видов частиц. Задание n , очевидно, эквивалентно заданию плотности полной энергии или массы. Таким образом, химический состав вещества является однозначной функцией плотности барионов n , и наша задача — выяснить, какие частицы имеются в среде и как изменяются их концентрации n_k при возрастании n .

В предыдущей главе мы довели наше рассмотрение до ядерной плотности. Здесь вещество состоит из нуклонно-электронного газа. Теперь мысленно будем повышать плотность. При этом мы будем иметь дело со сменой множества фаз. Отдельное обсуждение всех этих фаз не представляется возможным, да и не имеет смысла. Здесь мы особо рассмотрим только рождение первых двух фаз после нуклонно-электронной.

Ниже будет показано, что в надъядерной области при продвижении вверх сначала стабильность приобретает мюон, чуть позже Σ^- -гиперон, а затем в определенной последовательности другие частицы. Пусть плотность настолько высока, что граничная энергия электронов превосходит энергию покоя μ^- -мезона, а сумма граничных энергий нейтрона и электрона меньше энергий

Σ^- -частицы (нуклонно-лептонная фаза). В этом случае система уравнений (23.3), (23.4), (23.7) — (23.12) сводится к следующей:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{m_p^2 c^2 + p_p^2} &= \sqrt{m_n^2 c^2 + p_n^2} - p_e, \\ \sqrt{m_\mu^2 c^2 + p_\mu^2} &= p_e, \\ p_e^3 + p_\mu^3 &= p_p^3. \end{aligned} \right\} \quad (24.1)$$

Мы опустили формулу (23.3) для суммы концентраций барионов $n_n + n_p = n$, так как в этой области $n_p \ll n_n$ и $n \approx n_n$. Как в предыдущей, так и в этой фазе электроны являются крайне релятивистскими: $\varepsilon_e \approx c p_e$. Число мюонов здесь очень мало по сравнению с числом электронов, поэтому при вычислении концентраций протонов и электронов мы по-прежнему можем пользоваться формулой (20.11). Из (24.1) для плотности μ^- -мезонов имеем

$$n_\mu = n_e \left[1 - \left(\frac{A_\mu}{n_e} \right)^{2/3} \right]^{3/2}, \quad (24.2)$$

где $A_\mu = (1/3\pi^2) (m_\mu c/h)^3 = 5,24 \cdot 10^{36} \text{ см}^{-3}$ — порог рождения мюонов. Этой плотности электронов соответствует плотность нейтронов, приблизительно равная $5 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$, что примерно в два с половиной раза больше плотности частиц в обычной ядерной материи.

Следующая фаза начинается с той плотности материи, при которой сумма граничных энергий нейтрона и электрона становится равной энергии покоя Σ^- -гиперона. При этой плотности появляются первые Σ^- -гипероны. Из общих уравнений (23.3), (23.4), (23.7) — (23.12), опуская члены, принадлежащие тем частицам, которые пока не имеются в среде, получаем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_p + \varepsilon_e &= \varepsilon_n, & \varepsilon_n + \varepsilon_e &= \varepsilon_\Sigma, & \varepsilon_\mu &= \varepsilon_e, \\ p_p^3 + p_n^3 + p_\Sigma^3 &= 3\pi^2 h^3 n, \\ p_p^3 - p_e^3 - p_\mu^3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24.3)$$

Эти уравнения решаются численно. Подставляя в них $p_\Sigma = 0$, $\varepsilon_\Sigma = m_\Sigma c^2$, получаем следующее уравнение

для порога рождения Σ^- -гиперонов:

$$\{[(m_{\Sigma}c^2 - \epsilon_n')^2 - m_{\mu}^2c^4]^{3/2} + (m_{\Sigma}c^2 - \epsilon_n')^3\}^{2/3} - (m_{\Sigma}c^2 - 2\epsilon_n')^2 + m_p^2c^4 = 0.$$

Здесь ϵ_n' — значение граничной энергии нейтронов у порога рождения Σ^- -гиперонов. Графическое решение этого уравнения приводит к результату

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_p &= 517 \text{ Мэв}, \\ n_n &= 6,1 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}, \quad n = 6,4 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}, \\ \rho &= 1,12 \cdot 10^{15} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}, \quad t_n = 4 \operatorname{arsh} \frac{p_n}{m_n c} = 2,1, \end{aligned} \right\} \quad (24.4)$$

т. е. Σ^- -гипероны появляются в вырожденном барионно-лептонном газе при плотности приблизительно в три раза больше ядерной. В следующей главе мы увидим, что учет энергии ядерных взаимодействий заметно снижает порог стабильности этой частицы, доводя его до ядерной плотности.

Теперь рассмотрим наиболее общий случай, когда в среде имеются все барионы, лептоны e, μ^- и π^- -мезоны. Между концентрациями частиц с одинаковым барионным и электрическим зарядами существует простая аналитическая связь. Так, из уравнений (23.7) — (23.9) следует

$$\left. \begin{aligned} n_k^{(0)} &= \frac{1}{2} a_k n_n \left[1 - \left(\frac{A_k}{n_k} \right)^{2/3} \right]^{3/2}, \\ A_k &= \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{m_k c}{\hbar} \right)^3 \left(1 - \frac{m_n^2}{m_k^2} \right)^{3/2}, \end{aligned} \right\} \quad (24.5)$$

$$\left. \begin{aligned} n_k^{(+)} &= \frac{1}{2} a_k n_p \left[1 - \left(\frac{B_k}{n_p} \right)^{2/3} \right]^{3/2}, \\ B_k &= \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{m_k c}{\hbar} \right)^3 \left(1 - \frac{m_p^2}{m_k^2} \right)^{3/2}, \end{aligned} \right\} \quad (24.6)$$

$$\left. \begin{aligned} n_k^{(-)} &= \frac{1}{2} a_k n_{\Sigma^-} \left[1 - \left(\frac{c_k}{m_{\Sigma^-}} \right)^{2/3} \right]^{3/2}, \\ C_k &= \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{m_k^c}{h} \right)^3 \left(1 - \frac{m_{\Sigma^-}^2}{m_k^2} \right)^{3/2}, \end{aligned} \right\} \quad (24.7)$$

$$\left. \begin{aligned} n_k^{(++)} &= \frac{1}{4} a_k n_{\Delta} \left[1 - \left(\frac{D_k}{n_{\Delta}} \right)^{2/3} \right]^{3/2}, \\ D_k &= \frac{2}{3\pi^2} \left(\frac{m_k^c}{h} \right)^3 \left(1 - \frac{m_{\Delta}^2}{m_k^2} \right)^{3/2}, \end{aligned} \right\} \quad (24.8)$$

где $n_k^{(0)}$, $n_k^{(+)}$, $n_k^{(-)}$, $n_k^{(++)}$ — плотности нейтрального, положительно, отрицательно заряженного барионов и резонансов с двойным электрическим зарядом, n_{Δ} — плотность резонанса Δ (1236) с зарядом $Q = +2e$, $a_k = 2s_k + 1$ — ранее введенный статический вес k -й частицы. Как мы видим, постоянные A_k , B_k , C_k и D_k играют роль пороговых плотностей для соответствующих частиц. Нейтральная k -я частица становится стабильной в вырожденном газе элементарных частиц лишь при плотностях нейтронов $n_k > A_k$. Аналогично k -й положительный и отрицательный барионы приобретают стабильность только при плотностях частиц $n_p > B_k$, $n_{\Sigma^-} > C_k$ и $n_{\Delta} > D_k$.

Из формул (24.5) — (24.8) следует, что после приобретения стабильности, чуть выше порога, концентрация частицы мало отличается от концентраций уже существующих в среде барионов.

Интересной особенностью обладает фаза вещества, в которой существуют π^- -мезоны. Пионы появляются в среде, когда граничная энергия электронов и мюонов становится равной энергии покоя этих частиц. С появлением π^- -мезонов концентрации e^- и μ^- -лептонов больше не растут — остаются постоянными, а концентрация π^- -мезонов с ростом плотности барионов очень быстро растет и скоро по порядку величины становится равной концентрации каждого из вида барионов. Причина этого явления кроется в принципе минимума энергии: энергетически выгодно иметь пионы в состоянии покоя, нежели лептоны с граничной энергией $\varepsilon_e = \varepsilon_{\mu} > m_{\pi} c^2$.

Порог рождения π^- -мезонов сразу же получается из уравнений (23.11) и (23.12), т. е. из соотношения $\varepsilon_e = \varepsilon_\mu = m_\pi c^2$. Имеем

$$\left. \begin{aligned} n_e &= \frac{1}{3\pi^2} \left(\frac{m_\pi c}{h} \right)^3 = 1,20 \cdot 10^{27} \text{ см}^{-3}, \\ n_\mu &= n_e \left(1 - \frac{m_\mu^2}{m_\pi^2} \right)^{3/2} = 3,35 \cdot 10^{36} \text{ см}^{-3} \\ \text{при } n_n &> 8,5 \cdot 10^{39} \text{ см}^{-3}. \end{aligned} \right\} \quad (24.9)$$

Формулы (24.5) — (24.8) позволяют выразить плотности нейтральных, положительных, отрицательных и барионов с двойным положительным зарядом через плотности нейтронов, протонов, Σ^- -гиперонов и Δ^{++} (1236) резонансов соответственно. Таким образом, для полного решения задачи определения концентраций всех частиц при заданной плотности вещества нам остается лишь выразить плотность электронов, Σ^- -гиперонов и Δ^{++} (1236) резонансов через плотность нейтронов. Впредь взамен общей плотности вещества ρ или барионов n мы задаем плотность нейтронов n_n , а это фактически эквивалентно заданию постоянной в уравнении (23.3).

В нашем распоряжении осталось четыре неиспользованных уравнения, а именно, условие нейтральности (23.4) и два уравнения из системы (23.8) — (23.10), связывающие граничные энергии протона, Σ^- -гиперона и резонанса Δ (1236) с граничной энергией нейтронов:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{(++)} 2a_k p_k^3 + \sum_{(+)} a_k p_k^3 - \sum_{(-)} a_k p_k^3 - 2p_e^3 - \\ - 2p_\mu^3 - 6\pi^2 h^3 n_\pi = 0, \\ \varepsilon_p + \varepsilon_e = \varepsilon_n, \quad \varepsilon_\Sigma - \varepsilon_e = \varepsilon_n, \quad \varepsilon_{\Delta^{++}} + 2\varepsilon_e = \varepsilon_n. \end{aligned} \right\} \quad (24.10)$$

Используя (23.2), перепишем формулы (24.6) — (24.8) в терминах граничных импульсов частиц. Имеем

$$\left. \begin{aligned} p_k &= p_n \left(1 - \frac{b_{kx}^2}{p_x^2} \right)^{1/2}, \\ b_{kx}^2 &= (m_k^2 - m_x^2) c^2, \end{aligned} \right\} \quad (24.11)$$

где $\alpha = p, \Sigma^-, \Delta$ (1236) соответственно для положительных, отрицательных барионов и резонансов Δ^{++} , а индекс k охватывает все частицы, принадлежащие зарядовым группам перечисленных барионов.

Подставляя (24.11) в первое уравнение системы (24.10), получаем

$$p_{\Delta}^3 \left[4 + \sum_{(++)} a_k \left(1 - \frac{b_{k\Delta}^2}{p_{\Delta}^2} \right)^{3/2} \right] + p_p^3 \left[1 + \sum_{(+)} \frac{1}{2} a_k \times \right. \\ \left. \times \left(1 - \frac{b_{kp}^2}{p_p^2} \right)^{3/2} \right] - p_{\Sigma}^3 \left[1 + \sum_{(-)} \frac{1}{2} a_k \left(1 - \frac{b_{k\Sigma}^2}{p_{\Sigma}^2} \right)^{3/2} \right] - \\ - p_e^3 \left[1 + \left(1 - \frac{m_{\mu}^2 c^2}{p_e^2} \right)^{3/2} \right] - 3\pi^2 \hbar^3 n_{\pi} = 0, \quad (24.12)$$

где согласно последним трем уравнениям системы (24.10)

$$\left. \begin{aligned} cp_p &= [(\varepsilon_i - \varepsilon_e)^2 - m_p^2 c^4]^{1/2}, \\ cp_{\Sigma} &= [(\varepsilon_n + \varepsilon_e)^2 - m_{\Sigma}^2 c^4]^{1/2}, \\ cp_{\Delta} &= [(\varepsilon_n - 2\varepsilon_e)^2 - m_{\Delta}^2 c^4]^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (24.13)$$

После подстановки этих значений p_p , p_{Σ} и p_{Δ} в соотношение (24.12) получается одно уравнение для трех величин n_n , n_e , n_{π} . Может показаться, что какие-то уравнения пропущены. Но дело обстоит не так. В самом деле, нужно различать две разные фазы, а именно: фазу, в которой нет пионов, и такую, в которой они имеются. В первом случае должны в уравнение (24.12) подставить $n_{\pi} = 0$, тогда в нем останутся две величины n_n и n_e . Рассматривая n_n в качестве независимой переменной и задавая величину ее, мы можем из уравнения (24.12) определить плотность электронов n_e . После этого вычисляются граничные энергии ε_n и ε_e , а затем по формулам (23.7) — (23.11) граничные энергии всех барионных состояний $\varepsilon_k^{(+)}$, $\varepsilon_k^{(++)}$ и $\varepsilon_k^{(-)}$. Имея под рукой величины граничных энергий, легко вычислить граничные импульсы, а по второй формуле (23.2) плотности соответствующих частиц n_k . После всего этого

вычисление полной плотности барионов $n = \sum n_k$ не представляет особого труда. Во втором случае, когда в среде имеются пионы, плотность электронов постоянна $n_e = 1,2 \cdot 10^{27} \text{ см}^{-3}$, $\epsilon_e = m_\pi c^2$ (см. (24.9)). С помощью (24.13), исключая из (24.12) граничные импульсы протонов, Σ^- -гиперонов и $\Delta^{++}(1236)$ -резонансов, получаем одно уравнение для n_n и n_π . Снова задавая n_n , мы находим n_π , а затем вышеописанным способом определяем концентрации всех частиц и суммарную плотность барионов n . В обоих случаях уравнение (24.12) решается не аналитически, а численно.

Ниже порога рождения k -й частицы импульс основной частицы $p_\alpha < b_{k\alpha}$ (α — индекс основной частицы, причем в нашем изложении таковыми удобно считать протон, Σ^- -гиперон, $\Delta^{++}(1236)$ -резонанс и электрон). При таких плотностях соответствующий член в формуле (24.12) становится мнимым и выпадает из расчета. Пороги стабильности частиц в терминах плотности барионов даются в таблице 5.

Т а б л и ц а 5

Пороги стабилизации частиц

Частица	Плотность барионов	Частица	Плотность барионов	Частица	Плотность барионов
$\Sigma^-(1197)$	$6,4 \cdot 10^{38}$	$\Sigma^-(1382)$	$1,5 \cdot 10^{40}$	$N'^+(1470)$	$7,2 \cdot 10^{40}$
$\Delta^-(1236)$	$\sim 10^{39}$	$\Delta^{++}(1235)$	$1,64 \cdot 10^{40}$	$N^0(1550)$	$7,76 \cdot 10^{40}$
$\Lambda(1115,6)$	$1,2 \cdot 10^{39}$	$\Sigma^0(1382,2)$	$2,5 \cdot 10^{40}$	$N^+(1518)$	$9,5 \cdot 10^{40}$
$\Sigma^0(1192,6)$	$4 \cdot 10^{39}$	$\Lambda(1405)$	$3,28 \cdot 10^{40}$	$\Delta^-(1640)$	$9,6 \cdot 10^{40}$
$\Delta^0(1236)$	$6 \cdot 10^{39}$	$\Sigma^+(1382)$	$3,6 \cdot 10^{40}$	$N^+(1550)$	$1,18 \cdot 10^{41}$
$\Sigma^+(1189)$	$8 \cdot 10^{39}$	$\Xi^-(1534)$	$5 \cdot 10^{40}$	$\Delta^0(1640)$	$1,18 \cdot 10^{41}$
$\Xi^-(1321)$	$9 \cdot 10^{39}$	$N'^0(1470)$	$5,2 \cdot 10^{40}$	$\Sigma^-(1660)$	$1,2 \cdot 10^{41}$
$\Delta^+(1236)$	$1,1 \cdot 10^{40}$	$N^0(1518)$	$6,4 \cdot 10^{40}$	$\Omega^-(1672)$	$1,25 \cdot 10^{41}$
$\Xi^0(1314,7)$	$1,48 \cdot 10^{40}$	$\Lambda(1518,8)$	$6,46 \cdot 10^{40}$	$\Sigma'^-(1700)$	—
		$\Xi^0(1528,9)$	$6,84 \cdot 10^{40}$		

П р и м е ч а н и е. В скобках указаны значения масс.

На рис. 9 приведен график функции $\epsilon_e(\epsilon_n)$ а на рис. 10 — зависимости концентраций электронов, нейтронов, протонов, Σ^- -гиперонов и $\Delta^{++}(1236)$ -резонансов от плотности общего числа барионов. Кривая $n_e(n)$ для электронов имеет максимум при $n \approx 1,5 \cdot 10^{39} \text{ см}^{-3}$ и ми-

нимум при $n \approx 2,5 \cdot 10^{40} \text{ см}^{-3}$, за минимумом плотность числа электронов является монотонно растущей функцией числа барионов n до плотности, при которой граничная энергия ε_e достигает значения $\varepsilon_e = m_\pi c^2$. После достижения этой плотности n_e и n_μ перестают расти. Поведение кривой $n_\mu(n)$ для μ^- -мезонов сходно с кривой $n_e(n)$.

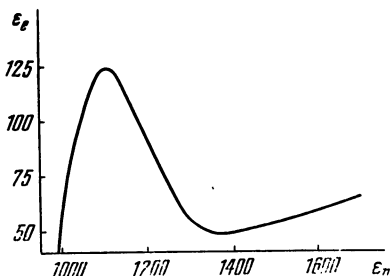


Рис. 9. Зависимость граничной энергии электронов от граничной энергии нейтронов.

При достаточно высоких плотностях, когда $p_k > m_k c$, концентрации разного вида барионов мало отличаются друг от друга: $n_k \approx n_n$. В этом релятивистском газе наличие π^- -мезонов возможно лишь в том случае, когда число видов положительных барионов боль-

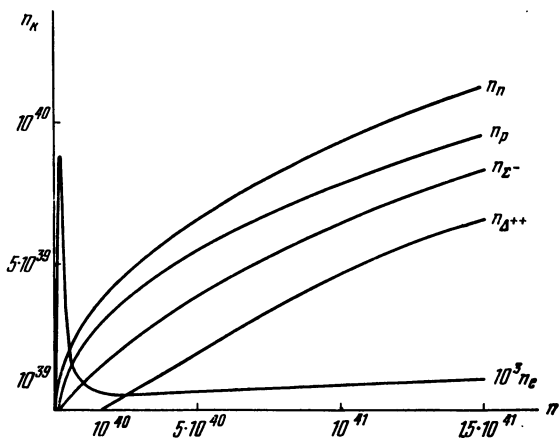


Рис. 10. Зависимость плотности основных частиц (нейтрон, протон, Σ -гиперон, Δ^{++} (1236)-резонанс, электрон) от плотности барионов.

ше числа отрицательных. При наличии π^- -мезонного газа создается более устойчивая картина, соответствующая минимуму внутренней энергии системы. В отсутствие

π^- -мезонов заряд положительных барионов должен компенсироваться отрицательными барионами и лептонами. В этом случае, очевидно, внутренняя энергия получается больше из-за сравнительно высоких значений граничных энергий отрицательных частиц. Выше мы видели, что после появления π^- -мезонов граничные энергии лептонов перестают расти. Такая картина исследовалась в работе [14]. При одинаковом числе видов положительных и отрицательных барионов в веществе никогда не реализуются условия, необходимые для существования π^- -мезонов.

§ 25. Замкнутая равновесная система

Имеет смысл исследовать также полностью замкнутую систему [91]. Идеальным примером ее может служить только Вселенная, взятая в целом. В такой системе помимо энергии, электрического и барионного зарядов сохраняется также лептонный заряд. Из предыдущего изложения мы уже знаем, что благодаря утечке нейтрино лептонный заряд для отдельных небесных тел — величина несохраняющаяся.

В настоящее время можно считать установленным, что радиус кривизны пространства со временем изменяется (увеличивается), т. е. Вселенная находится в нестационарном состоянии. Однако далее мы предполагаем, что изменения достаточно медленны и вещество находится в квазиравновесном состоянии. Будем считать также, что пространство однородно и изотропно. Предположение о термодинамическом равновесии, разумеется, не всегда оправдано. По-видимому, оно имеет место при достаточно высоких плотностях. Нас интересуют плотности порядка ядерной и выше, когда вещество состоит только из элементарных частиц. При таких условиях всевозможные возмущения распространяются со скоростью, близкой к скорости света, поэтому следует ожидать, что нарушения равновесия, обусловленные изменением кривизны пространства и флуктуациями, должны быстро ликвидироваться. Никаких ограничений на значение температуры мы накладывать не будем.

Введем понятие энтропии для всей Вселенной. В соответствии с допущением, что состояние системы все вре-

мя близко к равновесному, энтропия, являясь функцией времени, вместе с тем должна иметь максимальное значение, соответствующее, конечно, данной ситуации. При нахождении максимума энтропии следует учитывать законы сохранения энергии, электрического, барионного и лептонного зарядов. В самом деле, в любой момент времени процесс установления равновесия происходит без нарушения этих четырех законов. Напоминаем, что каждой частице (барион или лептон) приписывается число $+1$, античастице — число -1 , поэтому под барионным (лептонным) зарядом подразумевается разность чисел всех барионов (лептонов) и антибарионов (антилептонов).

Требование условного минимума энтропии приводит к следующей системе уравнений [91]:

для нейтральных барионов

$$\mu_k = \mu_n, \quad (25.1)$$

для положительных заряженных барионов

$$\mu_k + \mu_s = \mu_n + \mu_v, \quad (25.2)$$

для отрицательно заряженных барионов

$$\mu_k + \mu_v = \mu_n + \mu_e, \quad (25.3)$$

для лептонов

$$\mu_\mu = \mu_e, \quad (25.4)$$

для частицы и ее античастицы

$$\tilde{\mu}_k + \mu_k = 0, \quad (25.5)$$

для нейтральных бозонов

$$\mu_k = \mu_\gamma = 0, \quad (25.6)$$

и, наконец, для отрицательно заряженных бозонов

$$\mu_k = \mu^{\pi-} = \mu_e - \mu_v. \quad (25.7)$$

Положительно заряженные бозоны являются античастицами соответствующих отрицательно заряженных бозонов. В приведенных соотношениях n , e , μ , γ , π^- и ν соответственно означают нейтрон, электрон, мюон, γ -квант, пион и нейтрино. Химический потенциал частиц μ_k является функцией концентраций барионов, лептонов и

температуры. При наличии нескольких видов лептонов взамен (25.4) следовало бы написать $\mu_k = \mu_\nu$, $\mu_k = \mu_e$ соответственно для нейтральных и отрицательно заряженных лептонов.

Формулы (25.1) — (25.7) можно вывести и из требования термодинамического равновесия между прямыми и обратными реакциями взаимного превращения частиц друг в друга. Их нетрудно написать, если иметь в виду, что суммарный лептонный, барионный и электрический заряды частиц в правой и левой частях равенства должны быть одинаковыми. Подставляя в (25.1) — (25.7) $T=0$ и $\mu_\nu=0$, мы получим формулы (23.7) — (23.12).

Нужно иметь в виду, что при заданной температуре для каждой частицы имеется свое пороговое значение плотности вещества. Лишь при плотностях выше пороговой данная частица будет присутствовать в среде. В соответствии с этим уравнения (25.1) — (25.7) при плотностях вещества ниже пороговой для данной частицы дадут нелепый результат.

При заданных электрическом (электрический заряд замкнутой Вселенной равняется нулю), барионном, лептонном зарядах и энергии системы соотношения (25.1) — (25.7) между химическими потенциалами полностью определяют концентрации всех частиц и античастиц. В этом нетрудно убедиться, если вспомнить, что химический потенциал частицы является функцией температуры и ее плотности. Так, из (25.5) следует, что при заданном T концентрация античастицы однозначно определяется концентрацией соответствующей частицы. Далее, из (25.1) — (25.3) видно, что концентрации барионов, обладающих одинаковым электрическим зарядом, определяются концентрацией одного из них. Согласно (25.4) и (25.7) то же самое можно утверждать в отношении лептонов и бозонов. Согласно (25.6) плотность нейтральных бозонов определяется температурой, плотность же отрицательных бозонов — температурой и концентрацией лептонов. Наконец, следует учесть соотношения (25.2) и (25.3), из которых видно, что между концентрациями положительных, отрицательных и нейтральных барионов существуют две связи. Мы видим, что в конечном счете концентрации всех частиц

можно выразить через концентрации нейтронов, электронов, нейтрино и температуру (n_n, n_e, n_ν, T), которые в свою очередь определяются из упомянутых выше четырех условий (три вида заряда и энергия Вселенной).

Итак, электрический, барионный, лептонный заряды и энергия являются теми основными параметрами, которыми характеризуется Вселенная со всеми своими свойствами. Здесь под энергией подразумевается только та ее часть, которая обусловлена веществом. Полная масса (энергия) включает в себя и гравитационную; она, разумеется, является определенной величиной, масса же вещества не остается постоянной и со временем изменяется. Гравитационная и обусловленная веществом части энергии являются функцией радиуса кривизны (изотропная модель), поэтому в конце концов все сводится к значению радиуса кривизны, который зависит только от времени. Следовательно, физическое состояние Вселенной определяется именно ее возрастом.

При достаточно быстром расширении Вселенной равновесное излучение (электромагнитное и нейтринное), образованное при высоких плотностях, могло бы сохраниться в наше время как самостоятельное и почти невзаимодействующее (это с высокой точностью верно для нейтринного излучения) с веществом. По ходу расширения равновесная температура черного излучения благодаря гравитационному красному смещению уменьшается. Именно такое космологическое излучение с температурой $T=3^\circ$, названное *реликтовым*, было обнаружено в 1966 г. астрономами. По известным причинам реликтовое нейтринное излучение пока что не обнаружено. Наблюдение такого космологического излучения может дать некоторые сведения о физическом состоянии Вселенной в более ранние времена ее истории.

Из статистической физики известно, что химический потенциал бозонов $\mu_k - m_k c^2$ обязательно должен быть отрицательным [67]. Сопоставление этого факта с (25.5) приводит к следующему выводу:

$$-m_k c^2 < \mu_k < m_k c^2, \quad (25.8)$$

где μ_k — химический потенциал заряженных бозонов. Таким образом, химический потенциал бозонов может иметь значения, находящиеся лишь в интервале $(-m_k c^2, m_k c^2)$.

Резюме

Исследованы свойства вырожденного барионного газа при абсолютном нуле в приближении идеального газа.

При плотностях порядка $10^{13} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ происходит развал всех атомных ядер, в результате чего образуется фаза вещества, состоящая из свободных нуклонов (нейтрон, протон) и электронов (нуклонно-электронная фаза или, короче, *пре-фаза*). Здесь в приближении идеального газа концентрация нейтронов на два-три порядка больше концентрации протонов (электронов).

При плотностях, в три раза превышающих ядерную, в среде появляются гипероны и барионные резонансы. Первыми, вообще говоря, должны приобрести стабильность легкие барионы. Однако условие нейтральности вносит некоторые изменения. Так, например, несмотря на то, что частицы Λ , Σ^+ и Σ^0 обладают массами покоя, меньшими, чем Σ^- , первыми появляются Σ^- -гипероны. Пороговые значения плотностей, при которых та или иная частица превращается в стабильную, приведены в таблице 5. Частицы Σ^- рождаются при плотности $\rho = 6,4 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$. Стабильность гиперонов и барионных резонансов обеспечивается наличием в среде вырожденного газа электронов и нуклонов. Появление этих частиц в ядерной плазме продиктовано требованием минимума энергии системы при заданном полном числе барионов. Кроме электронов, из лептонов при $\rho \geq 8,4 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ в ядерной плазме имеются μ^- -мезоны. Очень скоро после появления гиперонов концентрации всех видов барионов становятся величинами одинакового порядка, а концентрации электронов и, следовательно, отрицательных мюонов на три и более порядков меньше их.

ГЛАВА IV

РЕАЛЬНЫЙ БАРИОННЫЙ ГАЗ

§ 26. Надъядерная область плотностей

В предыдущей главе мы дали изложение теории вырожденного вещества в предположении, что при всех плотностях частицы образуют идеальный газ. В области плотностей ниже ядерной такое приближение можно считать оправданным. В надъядерной области плотностей приближение идеального газа, по-видимому, является некорректным. Построение точной теории реального газа барионов — задача нелегкая. Правда, известно, что все барионы — сильно взаимодействующие частицы, но неизвестно точное значение энергии взаимодействия между парами любых видов барионов, ее зависимости от скорости частиц и коллективное взаимодействие их. Исходя из имеющихся в нашем распоряжении данных, здесь мы приведем изложение теории реального газа барионов [96, 250]. Наша главная цель — выяснить, какие качественные изменения возникают при учете взаимодействия между частицами.

Здесь мы рассмотрим гипотетическое (реально несуществующее) равновесное небесное тело с бесконечно большим центральным давлением. Это позволит охватить все возможные фазы и дать логическое изложение их чередования. В центральной области такой звездной конфигурации, где плотность вещества выше ядерной, мы имеем дело с газом элементарных частиц. По мере продвижения от центра к ее поверхности произойдет смена ряда фаз, т. е. изменение «химического состава» вещества. В области *барионной сферы* (так мы называем

область звезды, где вещество состоит только из элементарных частиц) изменение химического состава с расстоянием от центра звезды определяется соотношением

$$[\mu_k(n) + V_k(n)] \sqrt{g_{00}(r)} = \text{const}, \quad (26.1)$$

справедливым для каждого вида нейтральных барионов. Здесь $n(r)$ — полная плотность барионов, μ_k и V_k — соответственно химический потенциал и средняя потенциальная энергия k -го типа нейтральных барионов в плазме. Целесообразно уравнение (26.1) записать для нейтронов. Концентрацией нейтронов $n_n(r)$ однозначно определяются концентрации всех барионов, лептонов и бозонов, которые при заданной плотности могут существовать в среде. Аналогичное соотношение для химических потенциалов можно записать и для той части звезды, где в состав вещества входят также и атомные ядра.

На поверхностях $r=r_k$, где происходит смена фаз, помимо непрерывности химических потенциалов нейтральных компонент вещества необходимо потребовать также непрерывность общего давления $P(r)$ и градиента давления. В случае положительно и отрицательно заряженных барионов непрерывными должны оставаться $\mu_k^+(r) + \mu_e(r)$ и $\mu_k^-(r) - \mu_l(r)$ соответственно. Это очевидно из локальных условий равновесия между барионами разного заряда. Смысл этих требований становится очевидным, если учесть, что речь идет о конфигурациях, находящихся в состоянии термодинамического и гидродинамического равновесия.

Ниже весь физический диапазон плотностей разделяется на три условные части, а именно: область плотностей выше ядерной, область плотностей порядка ядерной и, наконец, область плотностей ниже ядерной.

Под областью выше ядерной мы подразумеваем значения плотностей барионов $n > 10^{39} \text{ см}^{-3}$. Наиболее важной характеристикой этой области является наличие сравнительно большого количества гиперонов и барионных резонансов в качестве стабильных компонент вещества.

Итак, рассмотрим звездную конфигурацию, в центре которой плотность энергии равна бесконечности. Начи-

ная с центра такой конфигурации мысленно продвинем-ся к ее поверхности и проследим за теми изменениями, которые испытывает химический состав вещества. Но для выполнения этой программы необходимо знать, какие частицы могут существовать в среде, каковы наиболее важные их характеристики — такие, как спин, масса, электрический, барионный и лептонный заряды и, наконец, законы их взаимодействия.

В третьей главе, посвященной идеальному газу, были учтены все частицы, известные к концу 1968 г. Здесь мы рассмотрим упрощенную модель реального газа, в которой из барионов учитываются протон p , нейтрон n и Λ -, Σ^0 -, Σ^- -, Σ^{+-} , Ξ^0 -, Ξ^- -гипероны; из лептонов электрон и μ^- -мезон и из бозонов π^- -мезоны. Стабильность барионов обеспечивается наличием в среде вырожденного газа протонов, стабильность отрицательных мюонов и пионов — наличием вырожденного газа электронов. Для всех фаз по-прежнему в качестве основных частиц удобно принимать электроны и нуклоны. Учет барионных резонансов не внесет заметных изменений в значения таких важных параметров конфигурации, какими являются масса, радиус и распределение масс. Так что уже на примере этой сравнительно простой модели газа элементарных частиц можно составить правильное представление о сверхплотных звездных конфигурациях, состоящих из вырожденного газа барионов. Впредь такие конфигурации мы будем называть *барионными*.

Сначала предположим, что все виды барионов взаимодействуют между собой одинаковым образом. Тогда в общем случае при достаточно высоких плотностях, когда в среде присутствуют все типы барионов, концентрации частиц определяются соотношениями (23.3), (23.4) и (23.7) — (23.12) предыдущей главы:

$$\varepsilon_b^{(+)} + \varepsilon_e = \varepsilon_b^{(-)} - \varepsilon_\pi = \varepsilon_b^{(0)}, \quad (26.2)$$

$$\varepsilon_l^- = \varepsilon_e, \quad (26.3)$$

$$\sum_b n_b = n, \quad (26.4)$$

$$\sum_b n_b^{(+)} - \sum_b n_b^{(-)} - \sum_l n_l = 0, \quad (26.5)$$

где $\varepsilon_b^{(+)}$, $\varepsilon_b^{(-)}$, $\varepsilon_b^{(0)}$, $\varepsilon_l^{(-)}$, ε_e соответственно означают граничные энергии для положительных, отрицательных, нейтральных барионов, отрицательных лептонов и электронов. В (26.4) суммирование производится по всем барионам, в первом члене (26.5) — по положительным барионам, во втором члене — по отрицательным и в последнем члене — по отрицательным лептонам. Первые два уравнения представляют собой условия термодинамического равновесия между различными компонентами вещества, последние два — законы сохранения барионного и электрического зарядов. В приведенных уравнениях не учтены π^- -мезоны. Ниже показывается, что при выбранном составе барионов в среде ни при каких значениях плотности не возникают необходимые условия для стабильности этих частиц. Граничные энергии частиц ε_k связаны с их числом в единице объема n_k соотношением

$$\varepsilon_k = (m_k^2 c^4 + a^2 n_k^{2/3})^{1/2}, \quad (26.6)$$

где $a = (3\pi^2)^{1/3} \hbar c$ для частиц со спином половина.

Посмотрим, каков химический состав вещества в центре гипотетической конфигурации с $\rho(0) = \infty$. При $n \rightarrow \infty$ из уравнения (26.2) с учетом (26.6) получаем

$$n_b^{(+1/3)} + n_e^{1/3} = n_b^{(-1/3)} - n_e^{1/3} = n_b^{(0)1/3}.$$

Сравнение последних уравнений с (26.5) приводит к результату:

$$\left. \begin{aligned} n_b^{(+)}(0) &= n_b^{(-)}(0) = n_b^{(0)}(0), \\ n_e(0) &= n_\nu(0) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (26.7)$$

т. е. в центре концентрации всех барионов одинаковы, а лептонов нет. Не следует забывать, что полученный в (26.7) результат правилен только для выбранного здесь специального состава заряженных барионов, а именно, мы постулировали наличие двух положительных и двух отрицательных барионов. Чтобы лептоны сохранились при $\rho(0) = \infty$, необходимо, чтобы число видов положительных барионов было бы больше, чем отрицательных. Однако ни при каком составе частиц невозможно добиться того, чтобы при $n \rightarrow \infty$ концентрация лептонов

также бесконечно росла. Такая ситуация обусловлена существованием в природе π^- -мезонов. Действительно, как это было показано в § 24, граничные энергии электронов и μ^- -мезонов могут расти до предела

$$\varepsilon_e = \varepsilon_\mu = m_\pi c^2, \quad (26.8)$$

после чего их рост прекращается, так как в дальнейшем энергетически выгодно веществу находиться в π^- -мезонной фазе, нежели в лептонной.

В случае конфигураций с конечным центральным давлением лептоны останутся и при $r=0$.

Уравнения (26.2), строго говоря, верны лишь в случае, когда закон взаимодействия для всех видов барионов одинаков. В случае макроскопической среды, состоящей из элементарных частиц, очевидно, имеет смысл говорить только об усредненной потенциальной энергии частиц, представляющей взаимодействие одной частицы со всеми остальными, т. е. со средой. Эта одночастичная потенциальная энергия зависит от плотности барионов, химического состава и вида частиц. Если разные виды барионов со средой взаимодействуют по-разному, то взамен (26.2) мы имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_b^{(+)}(n) + V_b^{(+)}(n) + \varepsilon_e(n) &= \varepsilon_b^{(-)}(n) + V_b^{(-)}(n) - \varepsilon_e(n) = \\ &= \varepsilon_b^{(0)}(n) + V_b^{(0)}(n), \end{aligned} \quad (26.9)$$

где $V(n)$ с индексами — потенциальные энергии соответствующих барионов в среде. Современное состояние теории элементарных частиц таково, что данную задачу пока невозможно решить строго. Ниже для области плотностей выше ядерной мы предполагаем, что все виды барионов со средой взаимодействуют одинаковым образом. В ядерной области плотностей имеются определенные возможности для более или менее корректного рассмотрения задачи о концентрации частиц.

Следует отметить, что масса и радиус конфигурации нечувствительны к неточностям в значениях относительной концентрации частиц. Интегральные параметры звездных конфигураций существенным образом зависят только от среднего значения массы покоя частиц, присутствующих в барионной сфере. К этому вопросу мы вернемся позже, после расчетов звездных конфигураций.

§ 27. Концентрации частиц в гиперонной области звезды

Проследим за теми изменениями, которые испытывают состояние вещества при продвижении от центра предельной конфигурации (т. е. $\rho(0) = \infty$) к ее наружным частям. Предельная фаза, где нет электронов, с математической точки зрения реализуется только в центре звезды, представляющем собой геометрическую точку. С удалением от центра барионная плотность монотонно убывает, а электронная растет. Закон изменения плотностей частиц в зависимости от расстояния до центра звезды можно найти только после интегрирования дифференциальных уравнений поля тяготения. Однако закономерности изменения состава вещества при убывании плотности барионов можно определить, исходя из приведенных выше уравнений.

На некотором расстоянии $r = r_{\Xi^0}$, где плотность барионов достигает значения $9,93 \cdot 10^{39} \text{ см}^{-3}$, исчезают Ξ^0 -гипероны. Это значит, что на расстоянии r_{Ξ^0} граничная энергия этих частиц становится равной их энергии покоя. При дальнейшем удалении от центра звезды на расстояния $r = r_{\Sigma^+}$, r_{Ξ^-} , r_{Σ^0} , r_{Λ} и r_{Σ^-} , где плотность барионов уменьшается до значений $n(r) = 8,12 \cdot 10^{39}$, $3,83 \cdot 10^{39}$, $3,32 \cdot 10^{39}$, $1,24 \cdot 10^{39}$, $6,1 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$, соответственно исчезают Σ^+ -, Ξ^- -, Σ^0 -, Λ - и Σ^- -частицы. В некотором смысле можно сказать, что при $n(r_{\Sigma^-}) = 6,07 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$ исчезают и протоны, поскольку ниже этого значения плотности концентрация протонов резко падает, становясь на два порядка меньше концентрации нейтронов.

У порога исчезновения последнего гиперона граничная энергия электронов равна 124 Мэв , чему соответствует концентрация $n_e = 8,36 \cdot 10^{36} \text{ см}^{-3}$. Своего максимального значения, равного приблизительно 125 Мэв , граничная энергия электронов достигает чуть раньше. Затем при дальнейшем возрастании r (т. е. уменьшении ρ) ϵ_e монотонно убывает. Отсюда следует, что при выбранном составе барионов в среде никогда не создаются необходимые условия для появления отрицательных пионов. Действительно, для стабильности этих частиц необходи-

мо, чтобы граничная энергия электронов достигла значения $m_\pi c^2 \approx 140 \text{ Мэв}$.

Приведенные здесь пороговые значения плотностей, выше которой соответствующие частицы превращаются в стабильные, вычислены с помощью формул (26.2) — (26.5), т. е. в предположении, что потенциальные энергии на энергетических уровнях Ферми для всех видов барионов одинаковы. Здесь, конечно, совершаются определенные ошибки. Согласно (26.9) эти ошибки определяются не величинами самих потенциалов $V_b^{(k)}(\epsilon_k)$, где ϵ_k — граничная энергия соответствующей частицы, а разностью этих потенциальных энергий для нейтральных и заряженных барионов. Вследствие этого можно ожидать, что ошибки, возникающие при определении концентрации частиц, когда мы опускаем потенциальные энергии (или же ставится различие между ними), невелики и, очевидно, с возрастанием плотности n стремятся к нулю.

Чтобы завершить описываемую картину чередования фаз вдоль радиуса предельной конфигурации, следует упомянуть и о μ -мезонах. На расстоянии $r = r_\mu$, где плотность барионов уменьшается до значения $6,0 \cdot 10^{39} \text{ см}^{-3}$, граничная энергия электронов становится равной энергии покоя мюонов $\epsilon_e = m_\mu c^2 = 106 \text{ Мэв}$. С этого места в звезде появляются отрицательные мюоны, концентрация которых определяется через концентрации электронов по формуле (24.2).

Между концентрациями барионов с одинаковым электрическим зарядом существует простая аналитическая связь. Так, согласно (24.5) — (24.7) плотности нейтральных, положительных и отрицательных барионов можно выразить соответственно через плотности нейтронов, протонов и Σ^- -гиперонов. Нахождение плотностей всех частиц требует численного решения алгебраических уравнений (26.2) — (26.5). Процедура их решения описана в § 24. В этих численных расчетах электрон, нейтрон, протон и Σ^- -гипероны играют роль основных частиц в том смысле, что концентрации остальных частиц можно вычислить по их концентрациям с помощью формул (24.5) — (24.7). Плотности же основных частиц n_e , n_n , n_p и n_{Σ^-} как функции от полной плотности

барионов n можно вычислить только численно. Результаты расчетов приведены на рис. 11.

Из рис. 11 видно, что при движении от поверхности предельной конфигурации к ее центру плотность электронов n_e сначала монотонно растет, на некотором расстоянии в окрестности поверхности гиперонной сферы

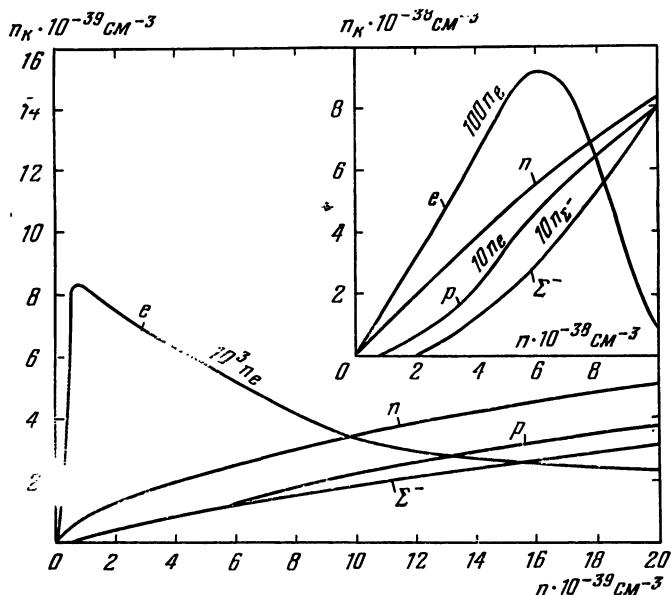


Рис. 11. Зависимость плотностей нейтронов n , протонов p , Σ -гиперонов и электронов e от плотности барионов. Кривые рассчитаны в предположении, что потенциальные энергии всех разновидностей одинаковы. В верхнем правом углу — те же зависимости с учетом реального ядерного потенциала.

достигает своего максимума, далее, монотонно уменьшаясь, стремится к нулю при $r=0$. На первый взгляд может показаться, что такая конфигурация неустойчива из-за того, что в гравитационной потенциальной яме уровень Ферми неровный, и поэтому электроны как будто должны перемещаться к центру, чтобы выровнять этот уровень. Однако это не так, условие равновесия (26.1) вдоль радиуса имеет место только для нейтраль-

ных частиц, т. е. энергетическая поверхность является плоской только для них. В случае заряженных частиц плоскую энергетическую поверхность даст комбинация уровней, а именно,

$$\left. \begin{aligned} (\varepsilon_p + \varepsilon_e) \sqrt{g_{00}(r)} &= \text{const}, \\ (\varepsilon_{\Sigma^-} - \varepsilon_e) \sqrt{g_{00}(r)} &= \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (27.1)$$

Всякое, даже незначительное, перемещение заряженных частиц от равновесного положения приводит к нарушению условия нейтральности и поэтому сопровождается появлением мощных электростатических сил, удерживающих частицы на своих местах.

§ 28. Ядерная область плотностей

Под ядерной областью подразумевается интервал значений плотности барионов $10^{37} \leq n \leq 10^{39} \text{ см}^{-3}$. В соответствующем слое звезды вещество состоит из нейтронов, протонов, электронов, Σ^- -гиперонов и отрицательных мюонов, а на внешней границе области имеются также атомные ядра. Среди всех частиц численно преобладают нейтроны. Гипероны имеются лишь вблизи внутренней границы области. При удалении от центра позже всех других гиперонов исчезает Σ^- . В §§ 24 и 27 для порога стабильности этих частиц мы нашли $n_{\Sigma^-} = 6,4 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$. Однако тогда пороги стабильности частиц были вычислены в предположении, что одночастичные потенциальные энергии $V_k(\varepsilon_k)$, на уровнях Ферми для всех видов барионов равны. В области плотностей $n > 10^{39} \text{ см}^{-3}$ вид функций $V_k(\varepsilon_k)$, неизвестен и у нас не было другого выхода. Иное положение в нерелятивистской области плотности. Здесь имеется ряд работ [31—33], в которых была разработана теория гипотетической ядерной материи для случая, когда числа протонов и нейтронов равны. Хотя в нашем случае в ядерной области плотностей $n_n \ll n_p$ тем не менее мы надемся, используя эти работы, получить некоторые оценки.

Так, прежде всего постараемся уточнить значение пороговой плотности для Σ^- -частиц. Из теории ядерной

материи известно, что потенциальная энергия нуклона зависит от его импульса:

$$V_k(p) = V_k(0) + T_k(p), \quad (28.1)$$

где $V_k(0)$ — постоянная часть потенциала, зависящая только от n , а T_k — кинетическая энергия k -й частицы. Порог появления Σ^- -гиперонов получается из уравнений (26.9), если в них подставить $n_{\Sigma^-} = 0$ и затем учесть выражение (28.1). Тогда для концентрации других частиц получается следующая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} m_n c^2 + 2T_n + V_n(0) &= m_p c^2 + 2T_p + V_p(0) + \varepsilon_e, \\ m_n c^2 + 2T_n + V_n(0) &= m_{\Sigma^-} c^2 + V_{\Sigma^-}(0) - \varepsilon_e, \\ p_n [1 + (1 - m_\mu^2 c^2 / p_e^2)^{3/2}]^{1/3} &= p_p, \\ p_n^3 + p_p^3 &= \frac{a^3 n}{c^3}, \quad a = (3\pi^2)^{1/3} \hbar c. \end{aligned} \right\} \quad (28.2)$$

Для ядерной материи (при $n_p = n_n$) для нуклонов было найдено $V(0) \approx -100$ Мэв [274, 72]. В случае Σ^- -частиц следует ожидать, что $V_{\Sigma^-}(0)$ не сильно отличается от $V(0)$. Из первого уравнения (28.2) видно, что величину $|V_n(0) - V_p(0)|$ следует сравнить с $2T_n$ или с $2T_p + \varepsilon_e$, во втором $|V_n(0) - V_{\Sigma^-}(0)|$ следует сравнить с $2T_n + \varepsilon_e$ или же с $(m_{\Sigma^-} - m_n) c^2 = 258$ Мэв. При $n \gtrsim 2 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$ имеем $2T_n \approx 2T_p + \varepsilon_e \gtrsim 150$ Мэв, с другой стороны, разумно допустить, что $|V_n(0) - V_k(0)| \ll 100$ Мэв для $k=p$ и Σ^- . Тогда в качестве хорошего приближения можно пренебречь разностью потенциалов по сравнению с другими членами уравнений. В таком случае из первых трех уравнений (28.2) следует

$$\begin{aligned} p_n [1 + (1 - m_\mu^2 c^2 / p_e^2)^{3/2}]^{1/3} &= \\ &= \{m_p [(m_{\Sigma^-} - m_p) c^2 - 2cp_e]\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (28.3)$$

Решая это уравнение, находим $cp_e = 120,9$ Мэв, $T_p = 8,1$ Мэв и $T_n = 67,9$ Мэв. В соответствии с этими числами концентрации частиц у порога стабильности Σ^- -гиперона равны

$$\left. \begin{aligned} n_n &= 1,994 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}, \quad n_p = 8,206 \cdot 10^{36} \text{ см}^{-3}, \\ n_r &= 7,727 \cdot 10^{36} \text{ см}^{-3}. \end{aligned} \right\} \quad (28.4)$$

Таким образом, порог рождения Σ^- -гиперона на самом деле приблизительно в три раза меньше, чем это следует из приближения идеального газа. У этого порога в среде имеются также μ^- -мезоны, поэтому число протонов больше числа электронов. Чуть ниже пороговых плотностей (28.4) из среды исчезают также μ^- -мезоны. Итак, отрицательные мюоны и Σ^- -гипероны появляются в среде, начиная с обычной ядерной плотности. Спрашивается тогда, почему в составе атомных ядер нет μ^- -мезонов и Σ^- -гиперонов. Дело в том, что в этом вопросе важную роль играет не только плотность, но и наличие вырожденного газа электронов. Тот факт, что в атомных ядрах нет мюонов и гиперонов, обусловлен именно отсутствием в них вырожденного электронного газа соответствующей плотности.

Следует обратить внимание еще на то обстоятельство, что в ядерной области плотностей, как это видно из (28.4), число нейтронов всего в 25 раз больше числа протонов. В научной литературе до сих пор господствует ошибочное представление о *нейтронных* звездах, т. е. о сверхплотных конфигурациях, в которых концентрация нейтронов на три порядка больше концентрации протонов и электронов. Такие конфигурации получаются при рассмотрении вырожденного нуклонно-электронного идеального газа, который как мы видели в этой и предыдущей главах, не является устойчивым и поэтому не может реализоваться в природе.

Вслед за исчезновением последних гиперонов следует сравнительно узкий слой звезды, где вещество состоит из нейтронов, протонов и электронов. Определим концентрации частиц в этой области плотностей. Здесь удобно пользоваться представлением эффективной массы нуклонов в ядерной материи. Выпишем соотношение между химическими потенциалами частиц:

$$m_p c^2 + \frac{p_p^2}{2m_p^*} + V_p(0) + \varepsilon_e = m_n c^2 + \frac{p_n^2}{2m_n^*} + V_n(0), \quad (28.5)$$

где m_p^* и m_n^* — эффективные массы протона и нейтрона. Электроны крайне релятивистские: $\varepsilon_e = c p_e$. Из условия нейтральности следует, что

$$p_p = p_e \equiv p. \quad (28.6)$$

Из последних двух уравнений находим

$$\rho = m_p^* c \left\{ \left[1 + \frac{2}{m_p^* c^2} \left(\frac{p_n^2}{2m_n^*} + V_n - V_p + m_n c^2 - m_p c^2 \right) \right]^{1/2} - 1 \right\}. \quad (28.7)$$

Нетрудно убедиться, что

$$|V_n - V_p + m_n c^2 - m_p c^2| \ll \frac{p_n^2}{2m_n^*}.$$

Учитывая последнее, из (28.7) получаем $\rho \approx p_n^2 / 2m_n^* c$, т. е.

$$n_e = n_p \approx (a/2m_n^* c^2)^3 n_n^2. \quad (28.8)$$

В согласии с работами [138, 274, 72] в ядерной области плотностей $m_n^*(p_n) \approx 0,6 m_n$ (значение эффективной массы зависит от импульса для нижних уровней $m_n^*(0) \approx 0,5 m_n$), следовательно, $(a/2m_n^* c^2)^3 \approx 1,595 \cdot 10^{-40} \text{ см}^3$. В целях иллюстрации приведем несколько чисел. Так, при $n_n = 2 \cdot 10^{38}; 10^{38}; 8 \cdot 10^{37}; 6 \cdot 10^{37} \text{ см}^{-3}$ отношение концентраций протонов и нейтронов соответственно равно $n_p/n_n \approx 0,032; 0,016; 0,013; 0,010$. Графики плотностей $n_k(n)$ для нейтронов, протонов, электронов и Σ^- -гиперонов, приведенные в верхнем правом углу рис. 8, вычислены с учетом ядерного потенциала, т. е. по формуле (28.8).

При дальнейшем продвижении к поверхности предельной конфигурации, т. е. в области плотностей ниже ядерной, последовательно друг за другом возникают и исчезают Aen - и Ae -фазы вещества. Исследование этих фаз было проведено в §§ 18 и 20. Приближение идеального газа в этих случаях, по-видимому, является неплохим.

Резюме

При исследовании состояния вещества в области $\rho \geq 10^{13} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ приближение идеального газа, рассмотренного в предыдущей главе, не является корректным. При плотностях порядка ядерной важную роль играют ядерные силы притяжения. Например, их учет приводит к тому, что Σ^- -гипероны появляются в среде не при плот-

ности $\rho \approx 6,1 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, а в три раза меньше этой, т. е. уже при плотности, существующей в обычном ядерном веществе.

Кроме электронов из лептонов в барионной плазме могут существовать только отрицательные мюоны, которые появляются при ядерной плотности непосредственно перед появлением гиперонов.

При достаточно высоких плотностях, когда в среде представлены почти все гипероны и много резонансов, из группы бозонов могут приобрести стабильность только отрицательные пионы, если в природе алгебраическая сумма зарядов всех разновидностей барионов является положительным числом. Если это условие не соблюдено, то ни при каких обстоятельствах в составе вырожденного барионного газа не могут существовать свободные π^- -мезоны. Переход к фазе вещества, содержащей отрицательные пионы, совершается, когда граничная энергия электронов достигает значения $\varepsilon_e = m_\pi c^2$. В этой фазе отрицательные пионы конденсируются на наинизший уровень энергии, т. е. все они находятся в состоянии покоя. Чуть выше порога этой фазы среда обильно заполняется π^- -мезонами, концентрация их очень скоро сравнивается с концентрацией барионов. С появлением π^- -мезонов плотности лептонов замораживаются. Как уже упоминалось выше, это происходит по той причине, что для системы энергетически выгоднее иметь π^- -мезон в состоянии покоя, чем электрон с энергией $\varepsilon_e > m_\pi c^2$.

Когда среднее расстояние между частицами становится порядка $l \lesssim 2 \cdot 10^{-14} \text{ см}$ (чему соответствуют плотности $\rho \gtrsim 10^{40} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$), между барионами возникают весьма мощные силы отталкивания. Таким образом, в этой области плотностей представление не только идеального газа, но и газа вообще становится неверным. Здесь уместно говорить о жидкости, состоящей из барионов.

В области чрезвычайно больших плотностей, когда среднее расстояние между частицами в барионной плазме становится порядка предполагаемых «размеров» самих частиц, весьма иллюзорными являются рассуждения о газе, состоящем из такого множества видов барионов. Не подлежит сомнению, что если не все известные

в настоящее время барионы, то по крайней мере подавляющее большинство их вовсе не элементарны, а являются сложными образованиями. Не исключена возможность, что гипероны и резонансы являются возбужденными состояниями некоторых основных барионов, скажем, нуклонов. В таком случае при плотностях $n \leq 1/l^3$ (где l — длина, приблизительно равная диаметру сложной частицы) с частицами, имеющими структуру, произойдет то, что при определенных значениях плотности происходит с атомами и с атомными ядрами. Очевидно, они распадутся на их составные части. Итак, может оказаться, что после образования плазмы с описанным в последних двух главах богатым «химическим» составом при плотностях выше определенного значения снова произойдет упрощение: все барионы исчезнут из среды, и в результате образуется фаза вещества, состоящая из нескольких более компактных, «элементарных» (которые, может быть, удобнее называть первичными) частиц. Подобного рода разговоры были в отношении кварков [61]. Когда-то в теории элементарных частиц некоторое время в ходу была модель Сакаты, в которой основными частицами в группе барионов и бозонов считались протон, нейтрон и Λ -гиперон.

ГЛАВА V

УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ

§ 29. Уравнение состояния для Ae - и Aep -фаз вещества

В последующих главах мы будем иметь дело с моделями звездных конфигураций, состоящих из вырожденных газовых масс. Это конфигурации белых карликов и барионных звезд. Под последними подразумеваются модели небесных тел, состоящих из вырожденного барионного газа. В расчетах параметров этих звездных конфигураций нужно иметь уравнение состояния вещества. Нас интересуют только вырожденные состояния вещества.

Начнем с рассмотрения Ae -фазы. Она состоит из голых атомных ядер и свободного вырожденного электронного газа. При достаточно низких температурах движение ядер сводится лишь к тому, что они совершают нулевые колебания около фиксированных точек равновесия. Поэтому они не дают никакого вклада в давление вещества. Давление целиком обусловлено электронами, плотность же энергии определяется атомными ядрами.

Плотность энергии равна

$$\rho = (m_n c^2 + b) \sum_k A_k n_k + \rho_e, \quad (29.1)$$

где b — средняя энергия связи нуклона в ядрах (здесь нет смысла различать массы протона и нейтрона), n_k — число ядер данного типа (с параметрами A_k и Z_k) в единице объема, ρ_e — плотность энергии электронного газа. В условиях наличия вырожденного электронного

газа b является функцией ϵ_e (см. § 18). Согласно (12.7)

$$\rho_e = 4K_e \left[x_e (1 + 2x_e^2) \sqrt{1 + x_e^2} - \ln(x_e + \sqrt{1 + x_e^2}) \right], \quad (29.2)$$

где $x_e = p_e/m_e c = (3\pi^2)^{1/3} \hbar n_e^{1/3}/m_e c$ — граничный импульс электронов в единицах $m_e c$ (при $p_e \gg m_e c$, $x_e = \epsilon_e/m_e c^2$) и

$$K_e = \frac{m_e^4 c^5}{32\pi^2 \hbar^3}. \quad (29.3)$$

Иногда удобно взамен x_e использовать параметр t_e :

$$t_e = 4 \operatorname{arsh} x_e. \quad (29.4)$$

С помощью этого параметра плотность энергии электронов запишется в следующем компактном виде:

$$\rho_e = K_e (\operatorname{sh} t_e - t_e). \quad (29.5)$$

В выражении энергии (29.1) можно произвести некоторые упрощения. Так,

$$\sum_k A_k n_k = \frac{A}{Z} \sum_k Z_k n_k = \frac{A}{Z} n_e,$$

где A/Z есть средняя величина отношения A_k/Z_k (усредненная по всем типам ядер, имеющих в среде). Учитывая последнее и пренебрегая малыми величинами b и ρ_e , получаем

$$\rho = \frac{32}{3} \cdot \frac{m_n}{m_e} \cdot \frac{A}{Z} \cdot K_e x_e^3. \quad (29.6)$$

Напомним, что из-за явления нейтронизации отношение A/Z является функцией x_e , эта зависимость аппроксимирована полиномом (18.7).

Теперь вычислим давление. Оно равно производной энергии по объему с обратным знаком, при постоянном числе частиц и энтропии (в данном случае энтропия равна нулю). Так как парциальное давление ядер не учитывается, то

$$P = - \left(\frac{\partial (V\rho)}{\partial V} \right)_{N_e} = - \left(\frac{\partial V\rho_e}{\partial V} \right)_{N_e},$$

где $N_e = Vn_e$ — число электронов в некотором объеме V . При дифференцировании ρ_e нужно учесть, что x_e зави-

сит от объема V . Имея в виду (29.2), находим для давления

$$P = \frac{4}{3} K_e \left[x_e (2x_e^2 - 3) \sqrt{1 + x_e^2} + 3 \ln (x_e + \sqrt{1 + x_e^2}) \right]. \quad (29.7)$$

Учитывая также формулу (18.6), уравнение состояния вещества в Ae -фазе можно записать в следующем параметрическом виде:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{32}{3} \left(\frac{m_e}{m_n} \right)^3 K_n x_e^3 (2 + a_1 x_e + a_2 x_e^2 + a_3 x_e^3), \\ P &= \frac{4}{3} \left(\frac{m_e}{m_n} \right)^4 K_n \left[x_e (2x_e^2 - 3) \sqrt{1 + x_e^2} + \right. \\ &\quad \left. + 3 \ln (x_e + \sqrt{1 + x_e^2}) \right], \end{aligned} \right\} \quad (29.8)$$

где a_1, a_2, a_3 — постоянные, входящие в формулу (18.6): $a_1 = 1,255 \cdot 10^{-2}$, $a_2 = 1,755 \cdot 10^{-5}$, $a_3 = 1,376 \cdot 10^{-6}$; кроме того, мы ввели также новое обозначение

$$K_n = \frac{m_n^4 c^5}{32\pi^2 \hbar^3} = 5,11 \cdot 10^{35} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}, \quad (29.9)$$

которое будет встречаться в дальнейшем.

Рассмотрим два важных предельных случая уравнения состояния (29.8). В нерелятивистском случае параметр x_e мал по сравнению с единицей. Разложим P в ряд по степеням x_e и отбросим малые величины в выражениях ρ и P ; исключая параметр x , получим

$$P = A \rho^{5/3}, \quad (29.10)$$

где

$$A = \frac{3^{2/3}}{160} \left(\frac{2}{\eta} \right)^{5/3} \cdot \frac{m_n}{m_e} \cdot \frac{1}{K_n^{2/3}} = 3,74 \cdot 10^{-23} \left(\frac{2}{\eta} \right)^{5/3}.$$

Величина $\eta = \frac{\Lambda}{Z} \approx 2$ для всех ядер, за исключением водорода.

В релятивистском случае $x \gg 1$. Если не учитывать эффект зависимости η от граничной энергии электронов, то $P \sim x_e^4$, $\rho \sim x_e^3$ и, следовательно,

$$P = B\rho^{4/3}, \quad (29.11)$$

где

$$B = \frac{3^{1/3}}{32} \left(\frac{2}{\eta} \right)^{4/3} K_n^{-1/3} = 5,64 \cdot 10^{-14} \left(\frac{2}{\eta} \right)^{4/3}.$$

В выражении для плотности энергии мы опустили b и ρ_e .

Энергия связи нуклона в ядре имеет значение в интервале $0 < b \leq 8$ Мэв. У порога исчезновения Ae -фазы $P \approx 5 \cdot 10^{29}$ эрг·см⁻³, а отношение парциальных плотностей энергии электронов и ядер порядка

$$\frac{\rho_e}{\rho_A} \approx \frac{3}{4} \cdot \frac{Z}{A} \cdot \frac{\varepsilon_e}{m_n c^2} = 0,0066.$$

Таким образом, b и ρ_e действительно достаточно малы и в расчетах звездных конфигураций не могут играть сколько-нибудь заметную роль.

В приведенном уравнении состояния не учтено взаимодействие частиц. Здесь мы имеем дело только с кулоновскими силами. В конце § 13 было показано, что потенциальная энергия электрона, обусловленная электрическими силами, мала по сравнению с его кинетической энергией, причем с возрастанием плотности отношение их уменьшается. Таким образом, приближение идеального газа здесь вполне оправдано. Ряд поправок к выражению давления (29.8), обусловленных кулоновскими взаимодействиями, обсуждался в работе [253]. Нет необходимости останавливаться на них, поскольку, как мы уже говорили, они не существенны. Поправки к P некоторую роль могут играть лишь при больших Z и $x < 1$. Изменения, обусловленные температурой, тоже несущественны. Здесь важным является эффект зависимости A/Z от граничной энергии электронов.

Уравнение состояния (29.8) применимо до $x=46$, чему соответствует плотность $\rho \approx 2,4 \cdot 10^{32}$ эрг·см⁻³. При больших плотностях мы имеем дело с Aen -фазой, где уравнение состояния другое. Формулы (12.7), (29.2) и (29.7)

позволяют сразу написать выражения парциальной плотности энергии и давления нейтронного газа:

$$\left. \begin{aligned} \rho_n &= 4K_n \left[x_n (1 + 2x_n^2) \sqrt{1 + x_n^2} - \ln (x_n + \sqrt{1 + x_n^2}) \right], \\ P_n &= \frac{4}{3} K_n \left[x_n (2x_n^2 - 3) \sqrt{1 + x_n^2} + 3 \ln (x_n + \sqrt{1 + x_n^2}) \right], \end{aligned} \right\} \quad (29.12)$$

где $x_n = p_n / m_n c = (3\pi^2)^{1/3} \hbar n_n^{1/3} m_n c$ — граничный импульс нейтронов, измеренный в единицах $m_n c$. Введем параметр.

$$t_n = 4 \operatorname{arsh} x_n,$$

тогда ρ_n и P_n запишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \rho_n &= K_n (\operatorname{sh} t_n - t_n), \\ P_n &= \frac{1}{3} K_n \left(\operatorname{sh} t_n - 8 \operatorname{sh} \frac{t_n}{2} + 3t_n \right). \end{aligned} \right\} \quad (29.13)$$

Учитывая также энергию атомных ядер, парциальное давление и плотность энергии электронов, для уравнения состояния Aen -фазы вещества получаем

$$\left. \begin{aligned} \rho &= K_n (\operatorname{sh} t_n - t_n) + m_n c^2 \frac{A}{Z} n_e + \rho_e, \\ P &= \frac{1}{3} K_n \left(\operatorname{sh} t_n - 8 \operatorname{sh} \frac{t_n}{2} + 3t_n \right) + P_e. \end{aligned} \right\} \quad (29.14)$$

Здесь ρ_e и P_e — плотность энергии и давление электронного газа. Заметим, что чуть выше порога появления Aen -фазы парциальная плотность энергии и давление электронов (можно даже сказать — плотность энергии атомных ядер) достаточно малы по сравнению с соответствующими величинами для нейтронного газа. Здесь почти на всем протяжении фазы энергия и давление системы в основном определяются нейтронным газом.

Вообще говоря, в Aen -фазе следовало бы учитывать ядерные взаимодействия между нейтронами. Их вклад несуществен для энергии, но, по-видимому, является важным для давления: при заданном числе нейтронов учет ядерных сил приведет к уменьшению давления. Насколько нам известно, в рассматриваемой области плотностей

теория ядерной материи как следует не разработана, поэтому мы довольствуемся приближением идеального газа. Уравнение состояния (29.14) справедливо в области плотностей $2,4 \cdot 10^{32} \leq \rho \leq 5,45 \cdot 10^{34} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}$.

§ 30. Об асимптотическом виде уравнения состояния

Пока мы опускаем обсуждение вопроса об уравнении состояния при плотностях порядка ядерной и выше и вернемся к нему в § 32. Целесообразно сначала исследовать асимптотическое поведение вида уравнения состояния при чрезвычайно больших плотностях. Здесь можно достичь определенного результата, исходя из совершенно общих соображений. В опытах по рассеянию быстрых протонов на нуклонах было установлено наличие весьма интенсивных сил отталкивания, действующих на расстояниях $r \leq 2 \cdot 10^{-14} \text{ см}$. Этот экспериментальный факт дает некоторое основание утверждать, что в надъядерной области с возрастанием плотности массы состояния барионной плазмы (мы говорим о барионной плазме, поскольку концентрация лептонов в ней очень мала) все больше отходит от газа и постепенно приближается к состоянию идеальной жидкости.

Можно доказать, что при любом типе взаимодействия, если только энергия взаимодействия частиц больше их кинетической, известный закон $P \leq \rho/3$ обязательно нарушается, т. е. давление при достаточно больших плотностях может иметь значения выше $\rho/3$. Соотношение $3P \leq \rho$ имеет место для идеального газа и в тех случаях, когда поля настолько слабы, что при любых плотностях кинетическая энергия частиц всегда больше их энергии взаимодействия. Такими полями являются электромагнитное, гравитационное и некоторые типы мезонных полей.

Попытаемся установить вид уравнения состояния в предельном случае бесконечно больших плотностей при следующих двух разумных предположениях: первое — что энергия взаимодействия частиц намного превышает кинетическую энергию их и второе — что скорость света является предельным значением для скорости звука ($v \leq c$).

Пусть n — плотность числа частиц, тогда среднее расстояние между ними приблизительно равно $r \sim n^{-1/3}$. Мы заранее исключаем возможность, когда частицы обладают конечными размерами, ибо в этом случае при некоторой плотности наступит несжимаемость и поэтому $\frac{\partial P}{\partial \rho} = \infty$, что нелепо (так как скорость звука становится бесконечной). Исходя из соотношений неопределенностей, оценим кинетическую энергию частиц. Средний импульс частицы равен

$$\bar{p} \approx h/r \approx hn^{1/3}.$$

Из-за больших плотностей частицы являются крайне релятивистскими, $hn^{1/3} \gg m_h c^2$. В соответствии с этим для средней кинетической энергии имеем

$$\varepsilon \approx ch n^{1/3}. \quad (30.1)$$

Энергия взаимодействия барионов, вообще говоря, должна иметь сложный вид. Кроме расстояния между частицами она должна зависеть от скорости, спина и орбитального момента их и, по-видимому, имеет обменный характер и т. д. Однако, имея в виду одно важное свойство сил взаимодействия, а именно, малый радиус их действия, мы можем реальную энергию взаимодействия заменить некоторой усредненной, зависящей только от плотности n . Пусть $U(n)$ — средняя потенциальная энергия, приходящаяся на одну частицу плазмы, а $Vn U(n)$ — энергия взаимодействия всего объема V . Различать энергии $U(n)$ частиц в ультрарелятивистской плазме, разумеется, не имеет смысла. Таким образом, плотность полной энергии приблизительно равна

$$\rho(n) \approx ch n^{4/3} + nU(n). \quad (30.2)$$

Теперь вычислим давление:

$$P = - \left(\frac{\partial (V\rho)}{\partial V} \right)_N \approx \frac{1}{3} ch n^{4/3} + n^2 U'(n). \quad (30.3)$$

Отношение давления и плотности энергии равно

$$\frac{P}{\rho} \approx \frac{3nU'(n) + ch n^{1/3}}{3U(n) + 3ch n^{1/3}}. \quad (30.4)$$

Предполагая здесь потенциальную энергию малой по сравнению с кинетической, мы сразу получаем известный результат

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P = \rho/3$$

для ультрарелятивистского идеального газа.

Обсудим теперь случай, когда энергия взаимодействия превосходит кинетическую:

$$\rho(n) \approx nU(n), \quad P(n) \approx n^2 U'(n). \quad (30.5)$$

Отсюда для скорости звука находим

$$v = c \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)^{1/2} = c \left(\frac{2nU' + n^2 U''}{U + nU'} \right)^{1/2}. \quad (30.6)$$

С увеличением плотности барионов упругость среды должна расти, следовательно, должна расти также скорость звуковых волн. По-видимому, при бесконечном возрастании плотности $v(n)$ должна стремиться к скорости света. Итак, при достаточно больших n , предполагая $v \approx c$, из (30.6) получаем

$$n^2 U'' + nU' - U = 0. \quad (30.7)$$

Общее решение этого уравнения есть

$$U(n) = an + \frac{b}{n}, \quad (30.8)$$

где a и b — постоянные интегрирования. Отсюда для плотности энергии и давления получается

$$\rho(n) \approx b + an^2, \quad P \approx an^2 - b.$$

При $n \rightarrow \infty$ имеем

$$P \approx \rho \approx \text{const} \cdot n^2. \quad (30.9)$$

Этот результат был получен в работах [45, 88]. Таким образом, имеются веские основания ожидать, что в надъядерной области плотностей вещество по своим упругим свойствам похоже на жидкость, а не на реальный газ. При возрастании плотности упругость вещества растет и в пределе $\rho \rightarrow \infty$ становится настолько большой, что величина скорости звука достигает скорости света.

§ 31. Распространение упругих волн в сверхплотной среде

При установлении асимптотического вида уравнения состояния (30.9) для скорости звука мы использовали формулу

$$v = c \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right). \quad (31.1)$$

Но она выведена в предположении, что метрика пространственно-временного континуума является евклидовой [68]. В главе VII мы увидим, что в сверхплотных средах метрика пространства — времени отличается от «плоской». Поэтому, строго говоря, в предыдущем параграфе при выводе предельно жесткого уравнения состояния мы не имели права исходить из формулы (31.1) без предварительного обоснования ее. Докажем, что эта формула справедлива и в случае сред с неевклидовой метрикой [92]. С этой целью мы будем исходить из релятивистского уравнения гидродинамики (6.7)

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} T_i^k) - \frac{1}{2} T^{hl} \frac{\partial g_{hl}}{\partial x^i} = 0, \quad (31.2)$$

где T^{ik} — тензор энергии — импульса. Согласно (6.6) для сплошной среды

$$\left. \begin{aligned} T^{ik} &= (P + \rho) u^i u^k - P g^{ik}, \\ T_i^k &= (P + \rho) u^k u_i - P \delta_i^k, \end{aligned} \right\} \quad (31.3)$$

где u^i — четырехмерная макроскопическая скорость элемента жидкости. Допустим теперь, что в среде распространяются слабые продольные волны (звуковое возмущение):

$$\left. \begin{aligned} \rho^* &= \rho + \varepsilon, & P^* &= P + p, \\ g_{ik}^* &= g_{ik} + \alpha_{ik}, & T_{ik}^* &= T_{ik} + t_{ik}, \end{aligned} \right\} \quad (31.4)$$

где ρ^* , P^* ; ρ , P — соответственно плотность энергии и давление в присутствии звукового возмущения и в отсутствие его, а ε и p — малые возмущения к этим величинам, t^{ik} и α_{ik} — возмущения компонент тензора энергии — импульса и метрического тензора.

Компоненты тензора t^{ik} , очевидно, являются величинами того же порядка, что и ε . Что касается компонент $\rho\alpha_{ik}$ (напомним, что ρ есть собственная плотность энергии и поэтому является скаляром), то они являются величинами более высокого порядка малости. Это более или менее очевидно, так как бесконечно малое возмущение плотности энергии ε не может вызвать в метрике относительное изменение порядка ε/ρ . В справедливости этого утверждения мы можем убедиться непосредственно на примере метрики сферически-симметричного гравитационного поля

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = e^\nu dx^{0^2} - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (31.5)$$

где ν и λ — неизвестные функции координат x^0 и r . Если теперь (31.4) подставить в (31.3) и в приближении ε вычислить t^{ik} и t_i^k , то оказывается, что они удовлетворяют соотношению $t^{ik} = g^{il} t_i^k$ лишь в том случае, когда $\rho\alpha_{ik} \ll \varepsilon$.

Итак, в первом приближении из уравнений гидродинамики получается

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} t_i^k) - \frac{1}{2} t^{kl} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = 0. \quad (31.6)$$

Ниже для вывода формулы скорости нам достаточно ограничиться рассмотрением случая сферически-симметричного гравитационного поля, описываемого квадратичной формой (31.5).

Допустим, что до появления возмущения поле — статическое, т.е. ν и λ зависят только от r . Далее, пусть возмущение распространяется от центра сверхплотного сферического небесного тела в виде сферической волны, так что начальная симметрия поля не нарушается. Но теперь уже ν и λ зависят не только от r , но от временной координаты x^0 . До начала возмущения из компонент четырехмерной скорости отлична от нуля лишь u^0 , в присутствии его имеются две отличные от нуля компоненты u^0 и u^1 (используются обозначения $ct, r, \theta, \varphi \rightarrow x^0$,

x^1, x^2, x^3). Учитывая это, для компонент тензоров t_i^k и t^{ik} находим

$$\left. \begin{aligned} t_0^0 &= -\varepsilon, & t_1^1 &= t_2^2 = t_3^3 = p, \\ t_0^1 &= -\beta(P + \rho), & t_1^0 &= \beta(P + \rho)e^{\lambda-\nu}, \\ t^{00} &= \varepsilon e^{-\nu}, & t^{11} &= p e^{-\lambda}, \\ t^{22} &= p r^{-2}, & t^{33} &= p r^{-2} \sin^2 \theta. \\ t^{01} &= \rho(P + \rho)e^{-\nu}, \end{aligned} \right\} \quad (31.7)$$

Остальные компоненты равны нулю. Здесь $\beta = dr/dx^0$ — скорость макроскопического движения вещества, связанная с распространением возмущения.

Подставив (31.7) в (31.6), получаем следующие два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x^0} + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial r} [\sqrt{-g} \beta (P + \rho)] &= 0, \\ (P + \rho) e^{\lambda-\nu} \frac{\partial \beta}{\partial x^0} + \frac{dp}{dr} + \frac{\varepsilon + p}{2} \frac{\partial \nu}{\partial r} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (31.8)$$

Используя уравнение состояния $\rho = \rho(P)$, можно ε выразить через p :

$$\varepsilon = \frac{\partial \rho}{\partial P} p \quad (31.9)$$

Исключая из (31.8) величины ε и β , получаем

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{-g} g^{11} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{-g} g^{00} \frac{\partial w}{\partial t} \right) + A(r, t) = 0, \quad (31.10)$$

где введены следующие обозначения:

$$w = p g^{00}, \quad v = c \sqrt{\frac{\partial P}{\partial \rho}},$$

$$A(r, t) = \frac{1}{2 \sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{-g} g^{11} p \frac{dg^{00}}{dr} \left(\frac{v}{c} - 1 \right) \right].$$

Уравнение (31.10) описывает процесс распространения сферической звуковой волны с переменной амплитудой и скоростью v . Поскольку плотность энергии и давление зависят от r , скорость звука также является

функцией r . При чрезвычайно больших плотностях, когда вступает в силу уравнение состояния (30.9), скорость звука имеет значение, близкое к скорости света. В этом случае дополнительный член $A(r, t)$ в волновом уравнении исчезает.

В том случае, когда временная компонента g_{00} метрического тензора изменяется достаточно медленно с расстоянием от центра небесного тела, настолько медленно, что членом в $A(r, t)$, содержащим производную $\frac{\partial g_{00}}{\partial r}$, можно пренебречь по сравнению с другими в (31.10), получается обычное волновое уравнение, записанное в ковариантном виде:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial w}{\partial x^i} \right) = 0. \quad (31.11)$$

При выводе (31.11) предполагалось, что амплитуда звуковой волны зависит только от координат x^0, x^1 и, кроме того, метрический тензор g_{ik} имеет диагональный вид. Таким образом, мы убедились, что формула (31.1) для скорости звука остается в силе и в общем случае риманова пространства.

§ 32. Удобная форма записи уравнений равновесия

При вычислении концентраций частиц и в расчетах звездных конфигураций удобно от граничных импульсов p_k перейти к параметрам

$$t_k = 4 \operatorname{arsh} (p_k / m_k c). \quad (32.1)$$

Отсюда для плотности частиц получаем

$$n_k = \frac{1}{2} a_k c_k \operatorname{sh}^3 \frac{t_k}{4}, \quad (32.2)$$

где $a_k = 2s_k + 1$ и $c_k = m_k^3 c^3 / (3\pi^2 h^3)$. Полная плотность барионов равна

$$n = \frac{1}{2} \sum_k a_k c_k \cdot \operatorname{sh}^3 \frac{t_k}{4}. \quad (32.3)$$

Для граничной энергии частиц имеем

$$\varepsilon_k = (m_k^2 c^4 + c^2 p_k^2)^{1/2} = m_k c^2 \cdot \operatorname{ch} \frac{t_k}{4}. \quad (32.4)$$

В удобной форме запишутся также условия термодинамического равновесия. Так, из (23.7) — (23.12) для нейтральных, положительно заряженных, отрицательных барионов и лептонов получаем соответственно:

$$\left. \begin{aligned} m_k \cdot \operatorname{ch} \frac{t_k}{4} &= m_n \cdot \operatorname{ch} \frac{t_n}{4}, \\ m_k \cdot \operatorname{ch} \frac{t_k}{4} &= m_n \cdot \operatorname{ch} \frac{t_n}{4} - m_e \cdot \operatorname{ch} \frac{t_e}{4}, \\ m_k \cdot \operatorname{ch} \frac{t_k}{4} &= m_n \cdot \operatorname{ch} \frac{t_n}{4} + m_n \cdot \operatorname{ch} \frac{t_e}{4}, \\ m_\mu \cdot \operatorname{ch} \frac{t_\mu}{4} &= m_{e\bar{\nu}} \cdot \operatorname{ch} \frac{t_e}{4} \end{aligned} \right\} \quad (32.5)$$

и т. д. Для получения замкнутой системы уравнений к (32.3) и (32.5) нужно добавить условие нейтральности (24.12), которое нетрудно выразить в терминах параметров t_k .

В качестве независимой переменной удобно выбирать t_n , тогда при заданном числе барионов n уравнения (32.3) и (32.5) позволяют параметры t_k остальных частиц выразить через t_n . В свою очередь t_n при сферически-симметричном распределении масс зависит от расстояния до центра конфигурации r .

В случае идеального газа барионов гипероны находятся в центральной части звезды, где $t_n(r) \geq 2,1$.

Наконец, приведем условие равновесия вещества вдоль радиуса конфигурации:

$$\left(m_n c^2 \cdot \operatorname{ch} \frac{t_n}{4} + V_n(n) \right) \sqrt{g_{00}(r)} = \text{const}. \quad (32.6)$$

§ 33. Уравнение состояния вещества при плотностях порядка ядерной и выше

Уравнения состояния, приведенные в § 29, относятся к области плотностей ниже ядерной. Теперь нам предстоит рассмотреть ядерную область и выше ее.

В приближении идеального газа мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \rho &= K_n \sum_k \delta_k (\text{sh } t_k - t_k), \\ P &= \frac{1}{3} K_n \sum_k \delta_k \left(\text{sh } t_k - 8 \text{sh } \frac{t_k}{2} + 3t_k \right), \end{aligned} \right\} \quad (33.1)$$

где $\delta_k = \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4$. Суммирование предполагается по всем частицам, которые имеются в среде при заданной плотности вещества. Доля лептонов в (33.1) совершенно незначительна и может быть не учтена.

Как было отмечено выше, в рассматриваемой области плотностей приближение идеального газа является не совсем корректным. Необходимо в (33.1) ввести соответствующие исправления, учитывающие энергию взаимодействия барионов. Это было сделано в ряде работ [96, 250, 35]. Здесь мы приведем изложение результатов, полученных в [96]. Будем опираться на работы [137, 138, 139], посвященные изучению свойств ядерного вещества. В [139] была рассчитана энергия нейтронного газа для области $7 \cdot 10^{35} < n < 7 \cdot 10^{37} \text{ см}^{-3}$. Мы воспользуемся этими результатами. Для ядерной области вычислена энергия связи нуклонов в предположении $n_p = n_n$. В нашем случае при использовании результатов упомянутых работ необходимо будет произвести интерполяцию в область плотностей выше ядерной и, кроме того, необходимо учесть поправки, обусловленные членом симметрии в энергии связи, так как в нашем случае вещество в основном состоит из нейтронов (речь идет о плотностях $n \approx 10^{38} \text{ см}^{-3}$). В согласии с [138] энергия симметрии, приходящаяся на одну частицу, вычислялась по формуле

$$\varepsilon = 0,897 T_n (1 - 2n_p/n)^2,$$

где $T_n = p_n^2/2m_n$. Для атомных ядер она дает завышенный результат. Лучшее согласие с экспериментом получается, если в формуле коэффициент 0,897 заменить на 0,592. Однако мы не сочли нужным произвести уточнение в коэффициенте, поскольку эта формула получена в предположении $(1 - 2n_p/n) \ll 1$, тогда как в нашем случае

эта скобка мало отличается от единицы и нам не хотелось занижать результат. После внесения соответствующих поправок на энергию связи была начерчена кривая зависимости энергии, приходящейся на один нейтрон от величины $k = (1,5\pi^2 n)^{1/3}$. Далее, по этой кривой была вычислена средняя потенциальная энергия, приходящаяся на одну частицу $U(n)$, и после всего этого $U(n)$ аппроксимировалась двумя полиномами типа $a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3$.

В области $n \lesssim 1,5 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$ часть плотности энергии, обусловленной ядерными взаимодействиями, можно аппроксимировать формулой

$$\rho_v(n) = nV(n) = 1,02 \cdot 10^{-18} n^{4/3} - 8,75 \cdot 10^{-31} n^{5/3} - 3,91 \cdot 10^{-41} n^2. \quad (33.2)$$

Для области $n \gtrsim 10^{38} \text{ см}^{-3}$ было получено

$$\rho_v(n) = nV(n) = 2,05 \cdot 10^{-17} n^{4/3} - 8,99 \cdot 10^{-30} n^{5/3} + 8,03 \cdot 10^{-43} n^2. \quad (33.3)$$

Нам остается вычислить давление $P_v = -\rho_v + n \frac{\partial \rho_v}{\partial n}$, обусловленное энергией взаимодействия. Давление барионного газа, соответствующее (33.2) и (33.3), равно

$$P_v = 3,40 \cdot 10^{-19} n^{4/3} - 5,83 \cdot 10^{-31} n^{5/3} - 3,91 \cdot 10^{-44} n^2 \quad \text{при } n \lesssim 1,5 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}, \quad (33.4)$$

$$P_v = 6,82 \cdot 10^{-18} n^{4/3} - 5,99 \cdot 10^{-30} n^{5/3} + 8,03 \cdot 10^{-43} n^2 \quad \text{при } n \gtrsim 10^{38} \text{ см}^{-3}. \quad (33.5)$$

Чтобы получить уравнение состояния для реального газа при $\rho \gtrsim 10^{13} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, нужно к выражениям (33.1) для плотности энергии ρ и давления P идеального газа прибавить ρ_v и P_v :

$$\left. \begin{aligned} \rho &= K_n \sum_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 (\text{sh } t_k - t_k) + \rho_v, \\ P &= \frac{1}{3} K_n \sum_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 \left(\text{sh } t_k - 8 \text{sh } \frac{t_k}{2} + 3t_k \right) + P_v. \end{aligned} \right\} \quad (33.6)$$

В области $10^{37} \lesssim n \lesssim 5 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$ плотность энергии ρ мала и учет ее несуществен, давление же P_V с начала появления ядерных сил большое и его необходимо учитывать.

Потенциальная энергия (33.3) специально выбрана так, что она удовлетворяет требованию (30.9) и при достаточно больших плотностях (33.6) переходит в жесткое уравнение состояния $P \approx \rho$.

Приведенное в этом параграфе уравнение состояния для вырожденного реального газа барионов, разумеется, не является каким-то окончательным решением вопроса. Его следует рассматривать как одну из приближенных моделей реального газа, встречающихся в расчетах конфигураций вырожденных масс [93, 147]. Однако помимо приближенного учета сложной картины, существующей в вырожденном барионном газе, оно имеет то преимущество, что удовлетворяет требованию закона причинности. А именно, здесь при $\rho \rightarrow \infty$ скорость звука не превышает скорость света, а асимптотически стремится к ней в качестве своего верхнего предела.

Конечно, было бы хорошо иметь точное уравнение состояния при всех плотностях. Однако нужно иметь в виду, что неточности в уравнениях состояния не сильно сказываются на значениях массы и радиуса сверхплотных конфигураций (см. главу VII) и в этом смысле не являются большим дефектом. Правильный порядок величин интегральных параметров соответствующих небесных тел можно получить даже на примере вещества, состоящего из одного типа невзаимодействующих барионов, а именно, в предположении, что при любых значениях плотности мы имеем дело с идеальным нейтронным газом. В этом простом случае

$$\left. \begin{aligned} \rho &= K_n (\text{sh } t_n - t_n), \\ P &= \frac{1}{3} K_n (\text{sh } t_n - 8 \text{sh } t_n + 3t_n). \end{aligned} \right\} \quad (33.7)$$

Наиболее характерные особенности барионных конфигураций можно получить, положив в основу расчетов именно это уравнение состояния. Заметим также, что из-за большого объема расчетов (речь идет о вычислении концентраций частиц n_k и соответствующих им парамет-

ров t_k при заданной плотности барионов n), содержащегося в более корректном уравнении состояния (33.6), оно в некоторых случаях не обеспечивает возможности вычислить интересующую нас физическую величину с необходимой точностью (например, гравитационный дефект массы), тогда как упрощенное уравнение состояния лишено этого недостатка.

В нерелятивистском случае $t_n \ll 1$. Разлагая гиперболический синус в ряд по степеням t_n и затем исключая его из (33.7), получаем следующее политропное уравнение состояния нерелятивистского нейтронного газа:

$$P = \frac{1}{80} \left(\frac{6}{K_n} \right)^{2/3} \cdot \rho^{5/3} = 6,46 \cdot 10^{-26} \rho^{-26}. \quad (33.8)$$

В крайне релятивистском случае $t_n \gg 1$ и

$$P \approx \frac{1}{3} \rho. \quad (33.9)$$

§ 34. Выбор системы единиц

В численных расчетах удобно пользоваться системой единиц, в которой [243]

$$k = 1, \quad c = 1, \quad K_n = \frac{m_n^4 c^5}{32\pi^2 \hbar^3} = \frac{1}{4\pi}, \quad (34.1)$$

где k — гравитационная постоянная. Легко заметить, что в новой системе единиц все физические величины не имеют размерности. Установим связь между новыми и старыми единицами.

Пусть измеряя некоторое расстояние, массу и промежуток времени в системе единиц (34.1), получим числа l' , m' , t' , а в системе CGS — числа l , m , t . Отношения l/l' , m/m' , t/t' , очевидно, не зависят от измеряемых величин, т. е. являются постоянными числами:

$$l = \alpha l', \quad m = \beta m', \quad t = \gamma t'. \quad (34.2)$$

Подставляя здесь $l' = 1$, $m' = 1$ и $t' = 1$, мы приходим к выводу, что α , β и γ как раз являются величинами новых единиц длины, массы и времени, выраженными соответственно в сантиметрах, граммах и секундах. Численные

Т а б л и ц а 6

Численные значения единиц некоторых физических величин

Название величины	Численные значения единиц (34.1) в системе CGS	Название величины	Численные значения единиц (34.1) в системе CGS
Расстояние	$1,368 \cdot 10^8 \text{ см}$	Плотность массы	$7,189 \cdot 10^{15} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$
Масса . .	$1,843 \cdot 10^{34} \text{ г}$	Плотность числа частиц . .	$3,889 \cdot 10^{-19} \text{ см}^{-3}$
Время . .	$4,57 \cdot 10^{-5} \text{ сек}$	Напряженность электрического поля . . .	$2,544 \cdot 10^{18} \text{ CGSE}$
Энергия . .	$1,657 \cdot 10^{55} \text{ эрг}$		
Заряд . .	$4,776 \cdot 10^{30} \text{ CGSE}$		

значения α , β и γ можно получить из следующих очевидных связей между K_n , k , c и K'_n , k' , c' :

$$\left. \begin{aligned} K'_n &= \frac{m_n'^4 c'^5}{32 \pi^2 h'^2} = \frac{\alpha \gamma^2}{\beta} \cdot \frac{m_n^4 c^5}{32 \pi^2 h^3} = \frac{1}{4\pi}, \\ k' &= \frac{\beta \gamma^2}{\alpha^3} k = 1, \quad c' = \frac{\gamma}{\alpha} c = 1. \end{aligned} \right\} \quad (34.3)$$

Отсюда получаем три уравнения для α , β и γ :

$$\frac{\beta}{\alpha \gamma^2} = \frac{m_n^4 c^5}{8 \pi h^3}, \quad \frac{\alpha^3}{\beta \gamma^2} = k, \quad \frac{\alpha}{\gamma} = c, \quad (34.4)$$

решая которые, находим для единицы длины в новой системе

$$\alpha = 2c \left(\frac{2\pi}{k m_n} \right)^{1.2} \cdot \left(\frac{h}{m_n c} \right)^{3/2} = 1,368 \cdot 10^8 \text{ см}, \quad (34.5)$$

для единицы массы,

$$\beta = \frac{c^2}{k} \alpha = 1,843 \cdot 10^{34} \text{ г} = 9,285 M_\odot \quad (34.6)$$

и для единицы времени

$$\gamma = \frac{\alpha}{c} = 4,57 \cdot 10^{-5} \text{ сек}. \quad (34.7)$$

Элементарный заряд, масса нейтрона и постоянная Планка в единицах (34.1) соответственно равны

$$\begin{aligned}e &= 1,005 \cdot 10^{-40}, \\m_n &= 9,054 \cdot 10^{-59}, \\h &= 1,392 \cdot 10^{-78}.\end{aligned}$$

Резюме

В области плотностей $\rho \lesssim 3 \cdot 10^{11} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$ состояние плазмы из атомных ядер и вырожденного газа электронов (Ае-фаза) описывается уравнением (29.8). Здесь приближение идеального газа является хорошим.

Имеются решающие аргументы в пользу того, что состояние плазмы из ультрарелятивистских барионов описывается уравнением типа $P = \rho \sim n^2$, а не $P = \rho/3$, где n — плотность барионов. Это предельно жесткое уравнение в природе. Оно следует из предположения, что при релятивистских плотностях энергия взаимодействия частиц превышает их кинетическую энергию, и из естественного требования, что скорость звука не должна превышать скорости света. Всякое уравнение типа $P \sim \rho \sim n^k$, где $k > 2$, обязательно приводит к нарушению закона причинности, а поэтому является неприемлемым.

Хуже обстоит дело при плотностях порядка ядерной: $10^{13} \lesssim \rho \lesssim 10^{15} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$. Здесь приближение идеального газа нельзя считать удовлетворительным. В этой области важную роль играют ядерные силы притяжения. Они дают существенный вклад в давление. При $\rho \gtrsim 10^{15}$ в игру вступают мощные ядерные силы отталкивания, учет которых является обязательным не только для давления, но и для плотности энергии. В области $\rho \gtrsim 10^{15} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$, пожалуй, мы имеем дело не с барионным газом, а барионной жидкостью. Для промежуточной области в окрестностях ядерной ($\rho \gtrsim 10^{13} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$) в этой главе выведены приближенные уравнения состояния, в которых учтен вклад ядерных взаимодействий.

Необходимо произвести дальнейшие исследования с целью нахождения более точного уравнения состояния

для области $10^{13} \lesssim \rho \lesssim 10^{16} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$. Решение этой задачи прежде всего затруднено из-за незнания точных закономерностей взаимодействия ядерно-активных частиц, зависимости сил от энергии частиц, от их спинов и вида барионов. Но даже если бы мы знали все эти тонкости, все-таки переход от пары частиц ко многим, т. е. создание теории ядерной плазмы — задача не легкая. Пока такая теория разработана только для обычной ядерной материи ($n \approx 2 \cdot 10^{38} \text{ см}^{-3}$ при $n_p = n_e$).

ГЛАВА VI

НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ СВЕРХПЛОТНЫХ ЗВЕЗДНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

§ 35. Условие гидродинамического равновесия

До сих пор мы занимались изучением изменений свойств вещества с возрастанием плотности. Наше рассмотрение было доведено до бесконечно больших плотностей. При этом мы не задумывались над вопросом: существуют ли в природе случаи реализации таких фантастически больших плотностей? Если нет, то изложенная в предыдущих параграфах теория фазовых превращений вещества в лучшем случае может представлять лишь академический интерес. Примеры реализации очень высокой плотности нам известны из микромира, а именно, атомные ядра. Но здесь нас интересуют сверхплотные сплошные среды в макроскопических масштабах. В этой и последующих главах дается ответ на этот вопрос. Будет доказано, что в самом деле не исключена возможность существования небесных тел, находящихся в гидростатическом и термодинамическом равновесии, в центральной области которых плотность массы может иметь сколь угодно большие значения.

Наше изложение начнем с ньютоновской теории сверхплотных небесных тел. Рассмотрим сферическое распределение вырожденных масс, находящихся в состоянии термодинамического и гидродинамического равновесия. Пусть $\phi(r)$ есть потенциал гравитационного поля на расстоянии r от центра звезды. Функция ϕ удовлетворяет

уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi k}{c^2} \rho(r). \quad (35.1)$$

Тело будет находиться в механическом равновесии, если в каждой точке его гравитационное притяжение к центру компенсируется градиентом давления

$$\nabla P = -\frac{1}{c^2} \rho \nabla \varphi. \quad (35.2)$$

В предположении сферической симметрии распределения масс из этих двух уравнений находим

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} \right) = -\frac{4\pi}{c^4} k \rho(r). \quad (35.3)$$

Если заданы уравнение состояния $\rho(P)$, давление и его производная в центре, то, интегрируя это уравнение от центра до поверхности, где $P(R)=0$, мы найдем распределение масс и радиус R конфигурации, а затем или одновременно можно вычислить также массу M .

Процедура интегрирования облегчается, если мы от дифференциального уравнения второго порядка (35.3) перейдем к системе обыкновенных уравнений первого порядка. С этой целью введем следующее обозначение:

$$\frac{r^2}{\rho} \frac{dP}{dr} = -\frac{k}{c^2} u(r).$$

Тогда взамен (35.3) получается

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} &= \frac{4\pi}{c^2} r^2 \rho(r), \\ \frac{dP}{dr} &= -\frac{k}{c^2} \frac{1}{r^2} \rho(r) u(r). \end{aligned} \right\} \quad (35.4)$$

Как мы видим, функция $u(r)$ имеет смысл массы, заключенной в центральной сфере с радиусом r . Во втором уравнении слева стоит градиент давления, а справа гравитационное притяжение, равенство их как раз и есть условие гидродинамического равновесия. К системе (35.4) добавим уравнение состояния, условия в центре и на поверхности звезды:

$$\rho = \rho(P), \quad u(0) = 0, \quad P(0) \equiv P_0, \quad P(R) = 0. \quad (35.5)$$

Условие $u(0) = 0$ означает отсутствие точечной массы в центре. С имеющими физический смысл уравнениями состояния интегрирование (35.4) с условиями (35.5) удастся произвести лишь численно. Прежде чем перейти к изложению точных результатов интегрирования, приведем некоторые оценки, чтобы заранее составить ясное представление о небесных телах, с которыми нам предстоит иметь дело.

§ 36. Оценки массы и радиуса

Оценим значения массы и радиуса сверхплотных конфигураций для уравнений состояния типа

$$P = A\rho^{1+1/n} \quad (36.1)$$

Здесь A и n — постоянные. Число n называется индексом политропы. Подставим (36.1) во второе уравнение (35.4):

$$\rho' = -\frac{n}{A(n+1)} \frac{ku}{c^2 r^2} \cdot \rho^{1-1/n}. \quad (36.2)$$

В этом уравнении все величины заменим их средними значениями

$$\bar{\rho}' \approx \frac{\bar{\rho}}{R}, \quad \bar{\rho} \approx \frac{Mc^2}{4R^3}, \quad \bar{u} \approx \frac{M}{2}, \quad \bar{r} \approx \frac{R}{2}.$$

Получается следующее приближенное соотношение:

$$R^{3-n} \approx \left[\frac{A(n+1)}{2 \cdot 4^{1/n} \cdot n \cdot k} \right]^n \cdot c^{2(n+1)} \cdot M^{1-n}. \quad (36.3)$$

Применим оценку (36.3) к двум случаям. Первый — вещество звезды состоит из атомных ядер и вырожденных электронов, т. е. находится в Ae -фазе. Второй — вещество состоит из вырожденного нейтронного газа с небольшой примесью протонов и электронов, обеспечивающих его устойчивость.

1. Ae -фаза; электронный газ нерелятивистский. Согласно (29.10) в этом случае $n=1,5$, $A=3,72 \cdot 10^{-23}$. Подставляя эти значения n и A в (36.3), находим

$$R \approx 1,2 \cdot 10^8 \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^{1/3}, \quad (36.4)$$

где $M_{\odot} = 1,985 \cdot 10^{33}$ г — масса Солнца. Для конфигураций с $M \approx M_{\odot}$ радиус порядка 10^3 км. Полученные числа по порядку совпадают с величинами массы и радиуса типичных белых карликов.

В случае релятивистского электронного газа уравнение состояния определяется формулой (29.11), для него $n=3$, $A=5,63 \cdot 10^{-14}$. Из (36.3) следует, что соответствующее значение массы порядка

$$M \approx 0,1 M_{\odot}, \quad (36.5)$$

а радиус при $n=3$ не содержится в уравнении (36.3). Однако его можно определить по значению массы, если задано ρ . Это значение массы на порядок меньше того, который дает точный расчет для ультрарелятивистского случая.

2. пре-фаза; нерелятивистские нейтроны. Из уравнения состояния (33.8) для этого случая имеем $n=1,5$, $A=6,44 \cdot 10^{-26}$ и

$$R \approx 2 \cdot 10^5 \left(\frac{M_{\odot}}{M} \right)^{1/3}. \quad (36.6)$$

Если нейтронный газ релятивистский, то $P=\rho/3$, следовательно, $n=\infty$, $A=1/3$. Для массы и радиуса получается оценка

$$R \approx 1,4 \cdot 10^6 \frac{M}{M_{\odot}} \quad (36.7)$$

Таким образом, при массе $M \approx M_{\odot}$ радиус нейтронных конфигураций должен быть порядка десяти километров.

Приведенные оценки массы и радиуса качественно правильно отражают истинное положение вещей.

§ 37. Белые карлики

Белые карлики — это звезды с радиусом от нескольких сотен до нескольких десятков тысяч километров и массой порядка солнечной, так что они относятся к категории сверхплотных небесных тел. Температура в их недрах не может быть выше температуры в обычных звездах. Этих температур недостаточно для снятия вырождения электронов в их типичных представителях (см. § 14).

Теория белых карликов разрабатывалась в течение ряда лет во многих работах. В первых работах расчеты конфигураций белых карликов проводились без учета эффекта нейтронизации (т. е. не учитывалась зависимость отношения A/Z от граничной энергии электронов) для определенных химических составов (однородного, слоистого с различными, чередующимися друг за другом элементами в нем, для различных смесей элементов и т. д.). При этом ставилась цель выяснения зависимости наблюдаемых параметров (радиус, масса, светимость) от химического состава. Иногда при выборе химического состава имелась в виду предыстория звезды. Причем, как правило, исходили из определенного космогонического представления, согласно которому белые карлики являются позднейшим этапом в цепи эволюционного развития звезд, началом которой является газообразное состояние.

Во второй главе было показано, что параметры атомных ядер Z и A и, тем самым, химический состав вещества зависят от плотности. Число протонов Z в ядрах уменьшается благодаря эффекту нейтронизации. Напротив, массовые числа A растут из-за особых пикноядерных реакций, обусловленных туннельным эффектом. Легкие ядра долго не могут существовать в Ae -фазе, они сливаются друг с другом или с тяжелыми, образуя более тяжелые ядра. Наименьшее массовое число ядра, существование которого возможно в плазме, зависит, таким образом, от плотности (см. рис. 5). Поэтому, если предположить, что звезда достаточно долго ($\tau \gtrsim 10^7$ лет) существовала в состоянии белого карлика, то в ней установится некоторый равновесный химический состав ядер, в котором среднее отношение A/Z является функцией плотности (см. рис. 3). Как мы видим, более разумно в расчетах конфигураций наиболее плотных белых карликов исходить из представления равновесного химического состава с определенным законом зависимости среднего отношения A/Z от граничной энергии, установленного в § 18, а не из выдуманного выбора того или иного химического состава.

Перед нами стоит задача интегрирования дифференциальных уравнений (35.4) с уравниванием состояния (29.8) и граничными условиями (35.5). Учитывая (29.8),

уравнения (35.4) можем переписать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} &= \frac{32}{3} \frac{m_e^3}{m_n^3} r^2 x_e^3 (2 + a_1 x_e + a_2 x_e^2 + a_3 x_e^3), \\ \frac{dx_e}{dr} &= -\frac{m_n}{m_e} \frac{u}{r^2} \frac{1}{x_e} (1 + x_e)^{1/2} \cdot (2 + a_1 x_e + a_2 x_e^2 + a_3 x_e^3). \end{aligned} \right\} \quad (37.1)$$

Здесь величины измерены в системе единиц $c=k=1$, $K_n=1/4\pi$. Значения постоянных a_1 , a_2 , a_3 приведены

Таблица 7

Параметры белых карликов с равновесным химическим составом вещества [101]

$x_e(0)$	$\rho(0), \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$	Радиус $R, \text{км}$	Масса, $M/M_\odot$	Водородная оболочка	
				толщина, км	масса, $\Delta M/M_\odot$
45	$2,48 \cdot 10^{11}$	$5,944 \cdot 10^2$	0,9928	1,38	$3,60 \cdot 10^{-9}$
40	$1,63 \cdot 10^{11}$	$6,506 \cdot 10^2$	1,034	1,59	$4,99 \cdot 10^{-9}$
35	$1,05 \cdot 10^{11}$	$7,240 \cdot 10^2$	1,077	1,89	$7,33 \cdot 10^{-9}$
30	$6,35 \cdot 10^{10}$	$8,222 \cdot 10^2$	1,121	2,35	$1,17 \cdot 10^{-9}$
28	$5,10 \cdot 10^{10}$	$8,710 \cdot 10^2$	1,138	2,59	$1,45 \cdot 10^{-8}$
25	$3,55 \cdot 10^{10}$	$9,581 \cdot 10^2$	1,165	3,06	$2,08 \cdot 10^{-8}$
20	$1,76 \cdot 10^{10}$	$1,157 \cdot 10^3$	1,203	4,33	$4,31 \cdot 10^{-8}$
15	$7,27 \cdot 10^9$	$1,471 \cdot 10^3$	1,247	6,74	$1,08 \cdot 10^{-7}$
10	$2,06 \cdot 10^9$	$2,046 \cdot 10^3$	1,269	12,9	$3,99 \cdot 10^{-7}$
7	$6,96 \cdot 10^8$	$2,701 \cdot 10^3$	1,255	22,6	$1,22 \cdot 10^{-6}$
4	$1,29 \cdot 10^8$	$4,058 \cdot 10^3$	1,153	55,6	$6,76 \cdot 10^{-6}$
3	$5,42 \cdot 10^7$	$4,935 \cdot 10^3$	1,056	89,9	$1,62 \cdot 10^{-5}$
1	$1,98 \cdot 10^6$	$9,615 \cdot 10^3$	0,5005	692	$4,56 \cdot 10^{-4}$
0,8	$1,00 \cdot 10^6$	$1,087 \cdot 10^4$	0,3935	1110	$9,22 \cdot 10^{-4}$
0,6	$4,23 \cdot 10^5$	$1,268 \cdot 10^4$	0,2784	2070	$2,27 \cdot 10^{-3}$
0,4	$1,25 \cdot 10^5$	$1,565 \cdot 10^4$	0,1626	4900	$7,53 \cdot 10^{-3}$
0,2	$1,57 \cdot 10^4$	$2,225 \cdot 10^4$	0,06026	21300	0,120
0,1	$1,96 \cdot 10^3$	$3,152 \cdot 10^4$	0,02158	63000	$8,63 \cdot 10^{-2}$
0,09	$1,43 \cdot 10^3$	$3,323 \cdot 10^4$	0,01845	66500	$7,38 \cdot 10^{-2}$
0,07	$6,72 \cdot 10^2$	$3,769 \cdot 10^4$	0,01267	75400	$5,07 \cdot 10^{-2}$

Примечание. Числа, приведенные в последних трех строках двух последних столбцов, представляют радиусы R и массы M звезд, состоящих целиком из водорода.

после формулы (29.8). Граничные условия (35.5) теперь запишутся в виде

$$u(0) = 0, \quad x_e(0) \equiv x_0, \quad x_e(R) = 0. \quad (37.2)$$

Интегрирование уравнений (37.1) было произведено численно для ряда центральных значений $x_e(0)$. Результаты приведены в табл. 7 и на рис. 12 и 13. Напомним, что основным моментом здесь является постулирование соотношения (18.5), согласно которому среднее

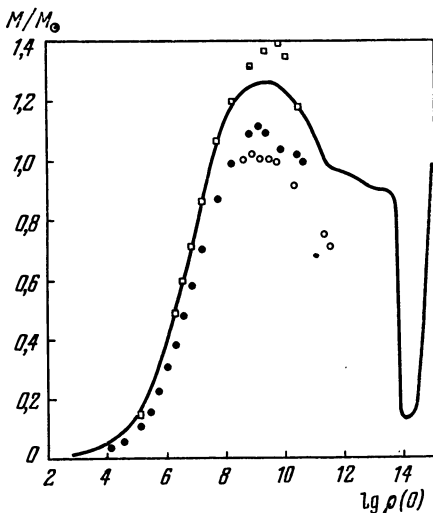


Рис. 12. Зависимость массы белых карликов от десятичного логарифма центральной плотности для нескольких химических составов. Сплошная линия [101], квадратики, белые и черные кружочки [255b] соответственно представляют конфигурации, имеющие равновесный и наивероятный составы (состоящие из углерода и железа).

значение отношения A/Z в центре конфигурации имеет наибольшее (возможное при заданной плотности) значение, а по мере передвижения наружу оно монотонно убывает и у поверхности стремится к 2. Однако не обязательно, чтобы при равновесном составе вещества отношение A/Z у поверхности равнялось 2. Даже в доста-

точно долго существующей сверхплотной звезде в поверхностном слое, где $x_e(r) < 0,145$ ($\rho \lesssim 3000 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$), может существовать также водород. Поэтому представляет интерес выяснить параметры этой наружной оболочки, где может существовать также водород. В последних двух столбцах приведены значения массы и

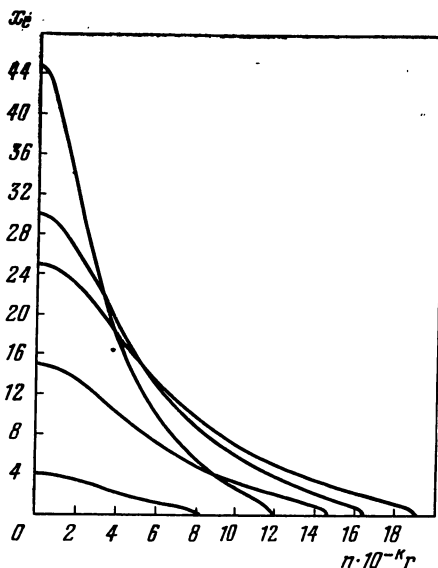


Рис. 13. Изменение параметра x_e с расстоянием от центра для ряда конфигураций. По оси абсцисс отложен $n10^{-k} r$, где $n=2; 1; 2; 2; 2$ и $k=3; 2; 2; 2; 2$ для конфигураций с $x_e(0)=4; 15; 25; 30; 45$ соответственно.

толщины этой наружной оболочки в предположении, что она целиком состоит из водорода. Вследствие того, что отношение A/Z в случае водорода в два раза меньше, чем у других легких элементов (которые могли быть в оболочке), толщина и масса водородной оболочки должны соответственно в два и четыре раза быть больше по сравнению со случаем, где $A/Z=2$ (см. ниже). Из чисел, приведенных в табл. 7, видно, что у конфигураций, где $\rho(0) \gg 3 \cdot 10^3 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ (это число является зна-

чением критической плотности, выше которой водород не может долгое время существовать в среде), толщина водородной оболочки l_H оказывается очень малой по сравнению с радиусом. Особенно малыми оказываются массы ΔM_H оболочек. С уменьшением плотности в центре l_H и ΔM_H растут.

Путем приближенного интегрирования уравнений (35.4) можно получить аналитическое выражение для толщины и массы водородной оболочки, если учесть, что при $x(0) > 0,5$ отношения l_H/R и $\Delta M_H/M$ достаточно малы. Имеем

$$\left. \begin{aligned} \Delta M_H &= \frac{4}{15} \frac{m_e^4 c^5}{\pi k h^3} \cdot \frac{R^4}{M} x_H^5 = 5,7 \cdot 10^{-7} \frac{M_\odot}{M} R^4, \\ l_H &= \frac{m_e c^2 x_H^2}{2m_p k} \cdot \frac{R^2}{M} = 7,72 \cdot 10^{22} \frac{M_\odot}{M} \cdot R^2. \end{aligned} \right\} \quad (37.3)$$

Здесь масса измерена в граммах, толщина — в сантиметрах и $x_H = 0,145$ (чему соответствует плотность $3 \cdot 10^3 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$) — критическое значение параметра x_e , выше которого водород исчезает из состава вещества из-за туннельного эффекта.

Зависимость массы конфигураций от центральной плотности приведена на рис. 12. Сплошная линия представляет результаты численного интегрирования уравнений (37.1) (равновесный химический состав, в котором учтена зависимость A/Z от граничной энергии электронов [101]). Квадратики, черные и белые кружочки представляют конфигурации, состоящие из углерода, железа и имеющие равновесный химический состав соответственно [255]. В работе [255b] под равновесным химическим составом подразумевается следующее: для каждого значения плотности было вычислено наивероятное значение A и Z (см. [125] и [255]) и при расчетах конфигураций в отдельных слоях бралось одно ядро (которое при заданном x_e является наивероятным в смысле минимума плотности энергии ρ), но его параметры рассматривались как функции ρ . Для легких элементов (He, C, Mg) результаты работы [255b] совпадают с результатами [101] (последние представлены на рисунке сплошной линией). Отличие наблюдается только при $8 < \lg \rho < 10,5$, где точки расположены выше

сплошной линии. Что касается точек, соответствующих более тяжелым элементам (железо и «равновесный» состав), то все они расположены ниже сплошной кривой.

Для того чтобы понять причину разброса точек, обусловленного различием химического состава, исследуем поведение уравнений (37.1) относительно изменений величины A/Z . С этой целью достаточно ограничиться рассмотрением простого случая, когда A/Z имеет одинаковое значение от центра до поверхности звезды. Так, если в этих уравнениях сделать замену переменных

$$u(r) = \left(\frac{Z}{A}\right)^2 v(r), \quad r = \frac{Z}{A} R, \quad (37.4)$$

то полученные уравнения для v и R уже не будут зависеть от A/Z . Подстановку (37.4) можно интерпретировать как изменение масштаба измерения массы и радиуса. В новом масштабе при заданном $x_e(0)$ эти величины не зависят от химического состава. Очевидно, для получения значений массы и радиуса в старых единицах необходимо числа v и R умножить соответственно на $(Z/A)^2$ и Z/A . Отсюда следует, что масса белого карлика пропорциональна $(Z/A)^2$, а его радиус Z/A . Из рис. 3 видно, что истинная линия отношения A/Z для тяжелых ядер находится выше (т. е. Z/A меньше), а для легких — ниже непрерывной кривой (являющейся хорошим приближением только для ядер среднего атомного веса). Поэтому массы и радиусы конфигураций, состоящих из тяжелых ядер, должны быть меньше, а в случае легких ядер — больше значений, соответствующих равновесному химическому составу (среднее значение A/Z для которого выражается формулой (18.5)). Приведенные рассуждения позволяют утверждать, что, например, для звезды, состоящей из элемента с $A=240$, масса должна быть заметно меньше той, которая получается для равновесного состава, так как ступенчатая линия A/Z для него расположена выше непрерывной кривой A/Z (см. рис. 3).

Теперь легко понять и причину появления максимума на кривой $M=M(\rho_0)$. При малых $\rho(0) \equiv \rho_0$, когда отношение A/Z имеет постоянное значение, с увеличением

центральной плотности масса монотонно растет. Однако при достаточно больших плотностях, когда начинает сказываться явление нейтронизации, Z/A в некоторой части вещества звезды уменьшается, что сопровождается соответствующим уменьшением ординат кривой $M(\rho_0)$ и появлением максимума при конечной плотности в центре. Когда не учитывается эффект нейтронизации, т. е. A/Z считается постоянным, наличие такого максимума не наблюдается [118]. В этом упрощенном варианте $M(\rho_0)$ все время является монотонно растущей функцией центральной плотности, причем при $\rho_0 \rightarrow \infty$ масса стремится к значению $1,4 M_\odot$, называемому чандрасекаровским пределом.

Рис. 13 изображает зависимость параметра $x_e = p_e/m_e c$ от расстояния до центра r для некоторых конфигураций (т. е. для ряда значений $x_e(0)$). Эти кривые позволяют с помощью формулы

$$\rho = \frac{32}{3} \left(\frac{m_e}{m_n} \right)^3 K_n x_e^3 (2 + a_1 x_e + a_2 x_e^2 + a_3 x_e^3) \quad (37.5)$$

(см. первое уравнение системы (29.8)) вычислить распределение масс в соответствующих конфигурациях.

§ 38. Нейтронные конфигурации по теории тяготения Ньютона

Радиусы конфигураций, состоящих из вырожденного газа барионов (барионные конфигурации), порядка их гравитационного радиуса $r_g = 2kM/c^2$, поэтому точные результаты могут быть получены только на основе общей теории относительности. Однако в целях сравнения, а также выяснения возможностей исследования параметров барионных конфигураций полезно произвести и в рамках нерелятивистской теории тяготения. Поскольку тут заранее речь идет о приближенной теории, не имеет смысла вдаваться в тонкости химического состава барионного газа, а достаточно ограничиться рассмотрением наиболее простой модели его, какой является вырожденный нуклонно-электронный газ (*пре-фаза*).

В соответствии с этим будем исходить из уравнения состояния (33.7) для гипотетической *пре-фазы*:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4\pi}(\text{sh } t_n - t_n), \\ P &= \frac{1}{12\pi} \left(\text{sh } t_n - 8 \text{sh } \frac{t_n}{2} + 3t_n \right). \end{aligned} \right\} \quad (38.1)$$

Напомним, что из-за того, что $n_p = n_e \ll n_n$, парциальное давление и парциальная плотность протонов и электронов достаточно малы, поэтому не учитываются здесь. Мы пользуемся единицами (34.1). Подставим эти выражения ρ и P в уравнения (35.4), имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} &= r^2 (\text{sh } t_n - t_n), \\ \frac{dt_n}{dr} &= - \frac{3u (\text{sh } t_n - t_n)}{r^2 \left(\text{ch } t_n - 4 \text{ch } \frac{t_n}{2} + 3 \right)}. \end{aligned} \right\} \quad (38.2)$$

Граничные условия в центре и на поверхности:

$$u(0) = 0, \quad t_n(R) = 0, \quad t_n(0).$$

Таким образом, нейтронные конфигурации будут характеризоваться значениями параметра t_n в центре.

Уравнения (38.2) были численно интегрированы в [90] для ряда значений параметра $t_n(0)$, являющегося однозначной функцией $\rho(0)$. Интегрирование продолжалось до наступления насыщения значения функции $u(r)$ с точностью до четырех отличных от нуля цифровых знаков. При этом давление на много порядков уменьшалось, но не исчезало. Для различных конфигураций насыщение $u(r)$ наступало при разных значениях давления. В конце интегрирования приблизительно имело место $t_n(R) \approx 0,05$ (давление порядка $10^{28} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$, плотность $5 \cdot 10^{10} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$). Дальнейшее интегрирование незначительно (2%) изменяет лишь значение радиуса; что касается массы, то при этом ее изменение совершенно не ощущается.

Результаты интегрирования приведены во второй половине таблицы 8 (см. стр. 181) и на рис. 14 и 15. В таблице содержатся также данные о предельной конфигура-

ции, в центре которой плотность энергии равняется бесконечности. Для этого случая можно найти асимптотическое решение. Когда плотность энергии в центре

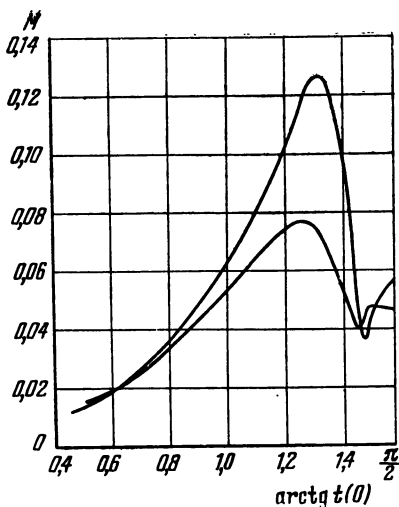


Рис. 14. Масса нейтронных конфигураций по ньютоновской (верхняя кривая) и эйнштейновской теориям тяготения. По оси абсцисс отложен $\arctg t(0)$.

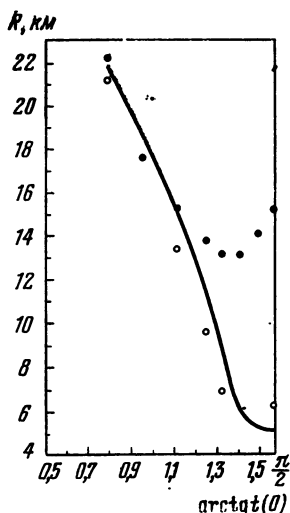


Рис. 15. Радиус нейтронных конфигураций в зависимости от $\arctg t(0)$. Сплошная линия представляет ньютоновскую теорию, белые кружки — теорию Эйнштейна, черные кружки — нерелятивистские оценки Ландау.

бесконечно велика, решение первого уравнения (38.2) можно искать в виде степенной функции

$$\rho_1(r) = a \cdot r^{-n}, \quad (38.3)$$

где a и n — постоянные числа, а $\rho_1 = 4\pi r = \text{sh } t_n - t_n$. Подставляя (38.3) в первое уравнение (38.2) и интегрируя в пределах от $r=0$ до некоторого r и учитывая, что $u(0)=0$, получаем

$$u(r) = \frac{a}{3-n} \cdot r^{3-n}. \quad (38.4)$$

При достаточно больших плотностях, когда нейтронный газ становится релятивистским, уравнение состояния

(38.1) приобретает вид $\rho \approx 3P$. Следовательно, для релятивистского вырожденного нейтронного газа

$$P_1 \approx \frac{1}{3} \rho_1 = \frac{a}{3} r^{-n}, \quad (38.5)$$

где $P_1 = 4\pi P$. Подставляя (38.4) и (38.5) во второе уравнение (38.2), получаем $n=2$, $a=2/3$. Таким образом, мы находим следующее асимптотическое решение:

$$P_1(r) \approx \frac{2}{3} r^{-2}, \quad u(r) \approx \frac{2}{3} r. \quad (38.6)$$

Это решение имеет место, начиная от $r=0$ до расстояний, где еще можно пользоваться асимптотическим уравнением состояния $3P \approx \rho$, т. е. в некоторой центральной области, в которой нейтронный газ является крайне релятивистским. При численных расчетах асимптотическое решение считалось верным для расстояния $r_0=0,0584$, на котором $t_n(r_0)=6$, $\rho_1(r_0)=196$, $P_1=46,5$ и $u(r_0)=0,0388$ (все величины здесь заданы в единицах (34.1)). Начиная с расстояния $r_0=0,0584$, дальнейший расчет этой конфигурации проводился численно.

На рис. 14 изображена зависимость массы конфигураций от значения плотности энергии в центре (верхняя кривая). Для получения удобного графика по оси абсцисс отложена величина $\text{arctg } t_n(0)$. С целью сравнения на том же рисунке приведена также кривая релятивистской теории тяготения (нижняя кривая) [243], о которой подробно речь будет идти позже.

Сопоставление кривых зависимостей $M(\rho_0)$ показывает, что при сравнительно малых плотностях, когда $t_n(0) \approx 1$, ньютоновская и эйнштейновская теории тяготения дают приблизительно одинаковые результаты для значения массы. Однако с ростом плотности разница в результатах возрастает, и при $2 \lesssim t(0) < \infty$ масса, рассчитанная по нерелятивистской теории, получается приблизительно в два раза больше массы, рассчитанной по релятивистской теории. Интересно отметить, что общий характер зависимостей $M(\rho_0)$ в обоих случаях сходен. Разница имеется лишь в деталях. Так, по теории Ньютона максимум кривой $M(t_0)$ соответствует $t_0 = t_n(0) \approx 5,2$, тогда как по теории Эйнштейна он соответствует $t_n(0) \approx 3$. Во второй теории при $t_0 \rightarrow \infty$ имеются осцилляции (при вы-

бранном масштабе они не видны на рисунке), по первой они отсутствуют.

На рис. 15 изображена зависимость радиуса конфигурации от параметра $t_n(0)$. Белые кружки относятся к релятивистской теории [243]. Как мы видим, значения радиусов по обоим расчетам не сильно отличаются друг от друга. Самая большая разница имеется в области $3,5 \leq t(0) < \infty$.

Первая работа по теории сверхплотных небесных тел, по-видимому, принадлежит Ландау (см. главу XI книги [67]). Для зависимости радиуса от массы им была получена следующая оценка (см. формулу (36.6)):

$$R \approx \frac{4,5 h^2}{k m^{8/3} M^{1/3}} = 15,3 \cdot 10^5 \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^{1/3}$$

Черные кружки на рис. 15 представляют радиусы, вычисленные по этой формуле. При этом в качестве значений массы приняты те, которые приведены в табл. 8. В области $t_n(0) > 2,3$ приведенная оценка слишком приближенная.

Изложенный в этом параграфе материал дает основание утверждать, что правильное представление о массе, радиусе и о внутреннем строении сверхплотных небесных тел можно получить даже в рамках теории тяготения Ньютона. Однако, как мы увидим в следующей главе, точные знания о барионных конфигурациях могут быть получены только в расчетах, базирующихся на уравнении Эйнштейна.

§ 39. Нерелятивистская теория вращающихся сверхплотных звездных конфигураций

Предположение о сферической симметрии является идеализацией, по-видимому, в природе нет невращающихся небесных тел. Если допустить, что моменты количества движения звезд с примерно одинаковой массой приблизительно равны, то у сверхплотных небесных тел следует ожидать большие угловые скорости вращения. Поэтому необходимо выяснить, насколько оправдано приближение центральной симметрии распределения масс, как изменяются параметры конфигурации при учете вращения.

В нерелятивистской теории вращающихся конфигураций мы имеем дело со следующими уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} \Delta\varphi &= 4\pi k\rho, \\ \Delta P &= -\rho\nabla\varphi + \rho\Omega^2\mathbf{r}, \end{aligned} \right\} \quad (39.1)$$

где $\mathbf{r}$ — расстояние от оси вращения, Ω — угловая скорость. Будем предполагать, что Ω не зависит от координат, поскольку в случае сверхплотных небесных тел имеет смысл говорить только о твердотельном вращении.

При наличии вращения интегральные характеристики и структура конфигураций определяются двумя параметрами: центральным давлением P_0 и угловой скоростью Ω . Значение угловой скорости сверху ограничено: $0 < \Omega < \Omega_{\max}$. Величина $\Omega_{\max}$ определяется из условия отсутствия истечения вещества на экваторе, т. е.

$$\Omega_{\max}^2 R_e = kM/R_e^2, \quad (39.2)$$

где R_e — большая полуось псевдосфероида, M — масса звезды.

Ограничимся рассмотрением аксиально-симметричных конфигураций, ибо для астрофизики наибольший интерес представляет именно этот случай. Такие конфигурации называются псевдосфероидальными. В этом случае функции не зависят от азимутального угла Φ и первое уравнение системы (39.1) можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right] = 4\pi k\rho, \quad (39.3)$$

где R — расстояние от центра конфигурации и $\mu = \cos \theta$, угол θ отсчитывается от оси вращения.

Уравнение гидродинамического равновесия запишем по компонентам, затем первое уравнение, соответствующее радиальной компоненте, умножим на $\frac{\partial R}{\rho}$, а второе, соответствующее меридиональной компоненте, — на $R \frac{\partial \theta}{\rho}$ и сложим. В результате получается полный дифференциал, интеграл которого есть

$$F = -\varphi + 4\pi k\rho_0 \beta R^2 (1 + \mu^2) + C, \quad (39.4)$$

где C — постоянная интегрирования, $\beta = \Omega^2 / (8\pi k\rho_0)$,

$$F = \int \frac{dP}{P}. \quad (39.5)$$

В проблеме вращения безразмерная постоянная β является важным параметром. Потенциал определяется с точностью до постоянного слагаемого, поэтому можно было положить $C=0$, однако при этом оказывается, что $\varphi(\infty) \neq 0$. Мы предпочитаем оставить нормировку потенциала $\varphi(\infty) = 0$.

В случае сферических тел достаточно было задать условие в центре. Здесь же мы имеем дело с краевой задачей: для интегрирования дифференциальных уравнений необходимо знание граничных условий не только в центре, но и на поверхности. К условиям в центре следует отнести значения величин P_0 и Ω , а также отсутствие точечной массы. Вне распределения масс поле определяется уравнением

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \right] = 0. \quad (39.6)$$

В качестве условий на поверхности, очевидно, мы должны потребовать непрерывность потенциала и его первой производной.

Уравнение (39.6) имеет следующее решение:

$$\varphi_e(R, \mu) = \frac{D}{R} + \beta \sum_{l=0}^{\infty} \frac{K_l}{R^{l+1}} P_l(\mu), \quad (39.7)$$

где D и K_l — постоянные интегрирования. Мы специально из постоянных K_l выделили множитель β . Эти постоянные должны определяться из условий сшивки с внутренним решением. На достаточно больших расстояниях $\varphi \approx -kM/R$, следовательно,

$$M = - \frac{D + \beta K_0}{k}. \quad (39.8)$$

Имеется ряд методов приближенного решения уравнений (39.3) и (39.4). Во всех случаях было установлено, что

$$\beta_{\max} = \frac{\Omega_{\max}^2}{8\pi k\rho_0} \ll 1.$$

Ниже мы приведем изложение сравнительно простого метода решения задачи, который обеспечивает достаточно хорошую точность результатов [77, 78]. Вращение будем считать возмущением, характеризующимся малым параметром β , и в первом приближении по β решение уравнений (39.3) и (39.4) будем искать в следующем виде:

$$F(R, \mu) = f(R) + \beta \left[f_0(R) + \sum_{l=2}^{\infty} A_l f_l(R) P_l(\mu) \right], \quad (39.9)$$

$$G(R, \mu) = g(R) + \beta \left[g_0(R) + \sum_{l=2}^{\infty} B_l g_l(R) P_l(\mu) \right]. \quad (39.10)$$

Здесь $G = 4\pi k\rho$, а функции $f(R)$ и $g(R)$ относятся к не-вращающимся конфигурациям. Как здесь, так и во внешнем решении (39.7) в разложениях по полиномам Лежандра члены с нечетными l отсутствуют, что обусловлено симметрией распределения масс относительно экваториальной плоскости.

Из определения функций F и G следует, что между ними существует связь. Следовательно, между постоянными A_l и B_l также должна существовать связь. Для нахождения этой связи разложим функцию $G(F)$ в ряд Тейлора в окрестности значения $F=f$. С точностью до членов порядка β имеем

$$\left. \begin{aligned} G(f) &= g, & \gamma f_0 &= g_0, \\ \gamma A_l f_l &= B_l g_l, & \gamma &= \frac{dg}{df}. \end{aligned} \right\} \quad (39.11)$$

Теперь подставим ряды (39.9) и (39.10) в уравнение (39.3), учтем (39.4) и (39.11) и, приравнявая коэффициенты при полиномах Лежандра одинакового порядка, получим систему

$$\left. \begin{aligned} \Delta_0 f &= -g, \\ \Delta_0 f_0 + \gamma f_0 &= 4G_0, \\ \Delta_l f_l + \gamma f_l &= 0, \quad l > 0, \end{aligned} \right\} \quad (39.12)$$

где $G_0 = 4\pi k\rho(0)$ и

$$\Delta_l = \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(R^2 \frac{d}{dR} \right) - \frac{l(l+1)}{R^2}.$$

Уравнения (39.12) определяют радиальные функции $f(R)$, $f_0(R)$ и $f_l(R)$. Они находятся численно, расчеты не представляют особой трудности. Ниже мы увидим, что в линейном по β приближении члены с $l > 2$ в рядах (39.9) и (39.10) исчезают. Однако задачу можно считать полностью решенной, если мы определим также коэффициенты разложения A_l , B_l и форму поверхности.

В рассматриваемом приближении форма поверхности определяется уравнением

$$R_\mu = R_0 + \beta \sum_l q_l P_l(\mu), \quad (39.13)$$

где R_0 — радиус соответствующей конфигурации, R_μ — радиус тела вращения, проведенный под углом θ , и q_l — постоянные числа. Для дальнейшего необходимо в (39.4) отделить вклад вращения в постоянную C , определяющую нормировку потенциала: $C = C_0 + \beta C_1$. На поверхности плотность, давление и, следовательно, функция F исчезают. Используя соотношения (39.4), (39.7), (39.9), (39.10) и (39.13), мы из условий $F(R_\mu) = 0$, $\varphi_i(R_\mu) = \varphi_e(R_\mu)$, $\varphi_i(R_\mu) = \varphi_e(R_\mu)$ (индексы i , e отмечают внутреннее и внешнее решения) получаем следующие уравнения, определяющие постоянные A_l , B_l , q_l :

$$\left. \begin{aligned} D &= R_0^2 f'(R_0), & K_0 &= R_0^2 f'_0(R_0) - \frac{4}{3} G_0 R_0^3, \\ C_0 &= R_0 f'(R_0), & C_1 &= R_0 f'_0(R) + f_0(R_0) + 2G_0 R_0^2, \\ A_2 &= -\frac{10}{3} \frac{G_0 R_0^2}{R_0 f'_2(R_0) + 3f_2(R_0)}, \\ K_2 &= -\frac{2}{3} \frac{G_0 R_0^5 [R_0 f'_2(R_0) - 2f_2(R_0)]}{R_0 f'_2(R_0) + 3f_2(R_0)}, \\ q_0 &= -f_0(R)/f'(R_0), & q_2 &= -A_2 f_2(R_0)/f'(R_0), \\ f(R_0) &= 0, & A_l &= q_l = K_l = 0 \text{ при } l > 2. \end{aligned} \right\} \quad (39.14)$$

Коэффициенты же разложения B_l и функции $q_l(R)$ определяются через A_l и $f_l(R)$ с помощью соотношений (39.11). Функции $f(R)$, $f_0(R)$ и $f_2(R)$ получаются из (39.12) путем простого численного интегрирования.

Таким образом, в линейном приближении по малому параметру β проблема вращения свелась к решению сферической задачи.

Подставив в (39.13) $\mu=0$ и $\mu=1$, для большой и малой полуосей сфероида находим

$$\left. \begin{aligned} R_e &= R_0 + \beta (q_0 - 0,5 q_2), \\ R_p &= R_0 + \beta (q_0 + q_2). \end{aligned} \right\} \quad (39.15)$$

Приведем также формулу, определяющую максимальное значение β . Она получается из (39.2), если учесть (39.7) и (39.15):

$$\beta_{\max} = \frac{D \cdot R_0^2}{1,5 K_2 + 2DR_0(q_0 - 0,5q_2) - K_0R_0^2 - 2G_0R_0^5}. \quad (39.16)$$

Вышеизложенным методом были вычислены параметры сверхплотных конфигураций (белые карлики и нейтронные звезды). При $P_n > P_e$ (P_n и P_e — парциальные

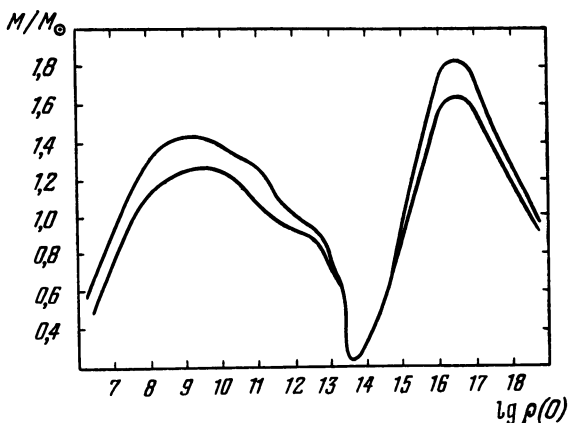


Рис. 16. График зависимости массы от десятичного логарифма центральной плотности. Верхняя линия принадлежит конфигурациям, вращающимся с $\Omega = \Omega_{\max}$, нижняя — невращающимся конфигурациям. Части кривых при $\rho \geq 10^{12} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$ представляют нейтронные конфигурации, а при $\rho \leq 10^{12} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$ — белые карлики [78].

давления нейтронного и электронного газов) использовалось уравнение состояния (38.1), а при $P_e > P_n$ —

уравнение (29.8) для Ae -фазы. Нейтронным конфигурациям приписывалась электронно-ядерная оболочка. За границу раздела нейтронного ядра и Ae -оболочки принималось расстояние, где $P_n \approx P_e \equiv P_1$. В случае

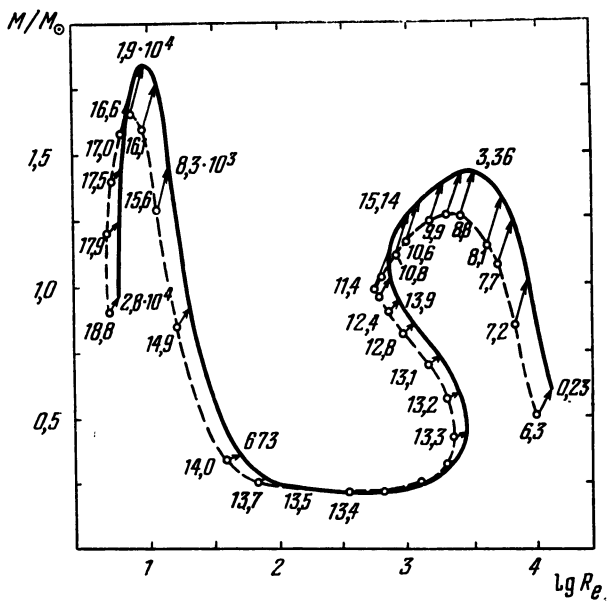


Рис. 17. Зависимости массы (в единицах массы Солнца) вращающихся сверхплотных конфигураций от большой полуоси R_e (в километрах). Прерывистая линия относится к невращающимся конфигурациям. Цифры у точек на ней дают логарифмы центральной плотности. Сплошная линия изображает конфигурации, вращающиеся с наибольшей угловой скоростью. Цифры у некоторых точек на ней указаны максимально возможные без истечения вещества значения угловой скорости. В направлении стрелок угловая скорость вращения увеличивается, а центральная плотность остается постоянной [82a].

$P(0) < P_1$ мы, очевидно, имеем дело с вращающимися белыми карликами, а при $P(0) > P_1$ — с нейтронными конфигурациями с электронно-ядерной оболочкой.

На рис. 16 представлена зависимость массы от десятичного логарифма центральной плотности для конфигу-

раций, вращающихся с угловой скоростью $\Omega_{\max}$ (верхняя кривая). Для сравнения приведена кривая, относящаяся к невращающимся звездам (нижняя). В области обоих максимумов благодаря вращению с максимальной возможной угловой скоростью масса возрастает примерно в 1,2 раза. Максимумы испытывают незначительное смещение в сторону меньших центральных плотностей.

На рис. 17 изображена зависимость массы конфигурации в единицах массы Солнца от большой полуоси в километрах. Прерывистая линия относится к невращающимся конфигурациям (в этом случае $R_e = R_0$), сплошная — к вращающимся с угловой скоростью $\Omega = \Omega_{\max}$ (напомним, что $\Omega_{\max}$ есть наибольшее значение угловой скорости, при котором начинается истечение вещества с экватора, обусловленное превалированием центробежной силы над силой гравитационного притяжения). В направлении стрелок величина угловой скорости вращения растет при фиксированном значении центральной плотности. Таким образом, стрелка начинается в точке, определяющей массу и радиус невращающегося тела, и прочерчивает все значения этих величин для конфигураций с той же центральной плотностью и с угловой скоростью от нуля до $\Omega_{\max}$. По длине стрелки от начала до промежуточной точки ее можно найти угловую скорость Ω , она просто пропорциональна длине отрезка. Полная длина стрелки равна $\Omega_{\max}$.

Как мы видим, вращение не дает большого эффекта; наибольшее увеличение массы и размеров составляет приблизительно 10%.

Резюме

Теорию конфигураций, состоящих из электронно-ядерной плазмы (Ae -фазы вещества), можно построить на основе ньютоновского варианта теории гравитации. Такие звездные конфигурации отождествляются с белыми карликами. Масса их порядка массы Солнца, а радиус может иметь значения от нескольких сотен (у наиболее плотных звезд) до нескольких десятков тысяч (у менее плотных) километров. В теории белых карликов важное значение имеет учет эффекта нейтронизации, благодаря которому отношение A/Z (A и Z — числа всех нуклонов

и протонов в ядрах) зависит от плотности (или граничной энергии электронов ϵ_e). В случае достаточно больших плотностей ($\epsilon_e \gtrsim 10 m_e c^2$) этот эффект приводит к заметному уменьшению значения массы при одинаковой центральной плотности.

При центральных плотностях $\rho_0 \gtrsim 10^{13} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ мы имеем дело с конфигурациями, преимущественно состоящими из вырожденного газа барионов. Радиус барионных конфигураций не сильно отличается от их гравитационного радиуса $r_g = 2M$, а у наиболее плотных он даже такого же порядка: Поэтому в основу корректных расчетов барионных конфигураций должна быть положена теория гравитации Эйнштейна. Однако для порядков величин параметров этих конфигураций нерелятивистская теория гравитации также дает правильный ответ.

В последнем параграфе этой главы изложены основы нерелятивистской теории вращающихся сверхплотных звездных конфигураций. Учет вращения не вносит существенных изменений в значения параметров конфигураций (белые карлики, барионные конфигурации). Форма вращающихся конфигураций даже при наибольших возможных угловых скоростях не сильно отличается от сферической. Наибольшее увеличение массы из-за вращения составляет примерно 10%. Приблизительно на такую же величину отличаются малая и большая полуоси от радиуса соответствующей сферической конфигурации.

ГЛАВА VII

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ТЕОРИЯ БАРИОННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

§ 40. Статическое сферически-симметричное распределение масс

Метрические свойства пространства при сферически-симметричном распределении масс согласно (9.1) определяются четырехмерным интервалом

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = e^\nu dx^{02} - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (40.1)$$

В статическом поле функции ν и λ зависят только от r . Для компонент четырехмерной скорости имеем $u^1 = u^2 = u^3 = 0$, $u^0 = e^{-\nu}$; в соответствии с чем из (6.6) для отличных от нуля смешанных компонент тензора энергии — импульса получаем

$$T_0^0 = \rho, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -P. \quad (40.2)$$

Обозначения таковы: $(ct, r, \theta, \varphi) \rightarrow (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Напомним, что ρ и P — соответственно собственная плотность энергии и давление. Соответствующие уравнения Эйнштейна можно прямо выписать из (9.3), опуская в них производные по времени:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\nu'}{r} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi k}{c^4} P, \quad (40.3)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda'}{r} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi k}{c^4} \rho, \quad (40.4)$$

$$P' = - \frac{P + \rho}{2} \nu'. \quad (40.5)$$

Последнее уравнение получено из (6.7), оно выражает гидродинамическое равновесие масс в искривленном пространстве. Эти три уравнения вместе с уравнением состояния вещества определяют зависимость функций g_{ik} от r и тем самым распределение вещества в конфигурации.

В пустом пространстве $P = \rho = 0$, и мы имеем известное решение Шварцшильда

$$e^v = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2kM}{c^2 r}, \quad (40.6)$$

где M — масса звезды.

Внутри распределения масс

$$e^v(r) = e^v(R) \cdot \exp \left[- \int_0^{P(r)} \frac{2dP}{P + \rho} \right], \quad (40.7)$$

где R — радиус звезды. Формула (40.7) получается интегрированием (40.5) с учетом уравнения состояния $\rho = \rho(P)$. Таким образом, функция $v(r)$ известна, если уже известна зависимость P от r .

Введем новую переменную посредством соотношения

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2ku(r)}{c^2 r}, \quad (40.8)$$

тогда уравнение (40.4) преобразуется в

$$\frac{du}{dr} = \frac{4\pi}{c^2} r^2 \rho(r). \quad (40.9)$$

Теперь, учитывая (40.5) и (40.8), уравнение (40.3) можно записать в виде

$$\frac{dP}{dr} = - \frac{k}{c^2} \cdot \frac{P + \rho}{r \left(r - \frac{2ku}{c^2} \right)} \cdot \left(u + \frac{4\pi}{c^2} r^3 P \right). \quad (40.10)$$

Уравнения (40.9) и (40.10) вместе с уравнением состояния $\rho(P)$ и граничными условиями $u(0)$, $P(0)$ при $r=0$ образуют замкнутую систему. Интегрирование нужно произвести от центра до расстояния $r=R$, где $P(R)=0$. Значение функции $u(r)$ при $r=R$ определяет $\lambda(R)$ на поверхности небесного тела, и оно должно совпадать с

внешним решением (40.6):

$$u(R) = \frac{c^2 R}{2k} \left[1 - e^{-\lambda(R)} \right] = M.$$

Таким образом, масса сферического небесного тела, измеренная наблюдателем, находящимся на бесконечно далеком расстоянии от него, совпадает со значением функции $u(R)$ на поверхности. Что касается смысла $u(r)$ для значений $r < R$, то (40.9) указывает на то, что она в известной степени характеризует массу, заключенную внутри сферы радиуса r . Однако в рассматриваемых условиях, когда поле тяготения очень сильное и гравитационный дефект массы может быть большим, понятие массы, заключенной в сфере с радиусом r , нуждается в точном определении. Здесь мы этим заниматься не будем, так как для нас достаточно определение (40.8).

Величина R здесь является координатным радиусом небесного тела, она может заметно отличаться от истинного радиуса. Истинный радиус звезды R_0 связан с ее координатным радиусом соотношением

$$R_0 = \int_0^R \sqrt{g_{rr}} dr = \int_0^R e^{\lambda/2} dr. \quad (40.11)$$

Перейдя к безразмерным единицам $c=k=1$, $K_n = \frac{1}{4\pi}$, перепишем основные уравнения, собирая их вместе:

$$\left. \begin{aligned} u' &= 4\pi r^2 \rho(r), \\ P' &= -\frac{P + \rho}{r(r - 2u)} (u + 4\pi r^3 P), \\ \rho &= \rho(P). \end{aligned} \right\} \quad (40.12)$$

Здесь мы присоединили и уравнение состояния. Граничные условия очевидны:

$$u(0) = 0, \quad P(0), \quad P(R) = 0. \quad (40.13)$$

Условие $u(0) = 0$ опять означает отсутствие точечной массы в центре конфигурации.

Решая систему уравнений (40.12) с граничными условиями (40.13), мы найдем внутреннюю метрику пространства, распределение масс в звезде, массу и радиус ее.

Как мы видим, основным параметром, характеризующим конфигурацию вырожденных газовых масс, является центральное давление $P(0)$.

В достаточно слабом гравитационном поле, где

$$2u \ll r, \quad 4\pi r^2 \ll u, \quad P \ll \rho, \quad (40.14)$$

уравнения (40.9) и (40.10) переходят в уравнения нерелятивистской теории тяготения (35.4). При выполнении первых двух условий автоматически выполняется и последнее. Обратное утверждение верно только при значениях масс, не намного превышающих массу Солнца. В принципе мыслимо существование разреженных небесных тел, в которых хотя и $P \ll \rho$, но их радиус R порядка гравитационного радиуса $r_g = 2M$. Однако это возможно для таких небесных тел, масса которых на много порядков выше солнечной. В соответствии со сказанным в релятивистской астрофизике критерием разреженности конфигурации является не столько значение самой плотности, сколько отношение ее радиусов r_g и R . Впредь под сверхплотными мы подразумеваем такие тела, для которых r_g мало отличается от R . Для предельного наиболее сверхплотного небесного тела с $R \approx r_g = 2M$ в качестве

грубой оценки имеем $\bar{\rho} \approx \left(\frac{M}{4R^3} \right) \approx \frac{1}{32M^2}$. Отсюда для средней плотности небесного тела, радиус которого мало отличается от гравитационного r_g получаем

$$\bar{\rho} \approx 2 \cdot 10^{16} \cdot \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^2. \quad (40.15)$$

Так, например, для тела с $M = 10^{11} M_\odot$ (масса Галактики порядка этой) $\bar{\rho} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, а для звезд с $M = M_\odot$ плотность оказывается чрезвычайно высокой.

§ 41. Нейтронные конфигурации по релятивистской теории

Основанные на уравнениях Эйнштейна расчеты звездных конфигураций, состоящих из вырожденного идеального газа нейтронов, были проведены в 1939 г. Оппенгеймером и Волковым [243]. Рассчитывались только пять

конфигураций (для значений параметра $t_n(0) = 1, 2, 3, 4, \infty$) численно, вручную. Эти расчеты повторялись в [18, 90] с более высокой точностью для многих значений $t_n(0)$. Высокая точность требуется при вычислении аномального дефекта массы (см. главу VIII).

Уравнение состояния идеального вырожденного газа нейтронов определяется формулой (33.7). Исключая из (40.12) P и ρ , получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} &= r^2 (\operatorname{sh} t_n - t_n), \\ \frac{dt_n}{dr} &= - \frac{4 \left(\operatorname{sh} t_n - 2 \operatorname{sh} \frac{t_n}{2} \right)}{r (r - 2u) \left(\operatorname{ch} t_n - 4 \operatorname{ch} \frac{t_n}{2} + 3 \right)} \times \\ &\times \left[u + \frac{r^3}{3} (\operatorname{sh} t_n - 8 \operatorname{sh} \frac{t_n}{2} + 3 t_n) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (41.1)$$

Граничные условия к ним:

$$u(0) = 0, \quad t_n(0), \quad t_n(R) = 0.$$

Первое и последнее условия являются общими для всех конфигураций, поэтому они характеризуются только одним параметром:

$$t_n(0) = 4 \operatorname{arsh} [(3\pi^2)^{1/3} h n_n^{1/3}(0) / m_{nc}],$$

где $n_n(0)$ — плотность числа нейтронов в центре.

Результаты численных расчетов приведены в таблице 8. Как мы видим из табличных данных, массы нейтронных конфигураций имеют значения в интервале $0,3 \lesssim M \lesssim 0,72 M_\odot$, а радиусы — в интервале $6,2 < R < 22$ км. Таким образом, массы нейтронных конфигураций порядка солнечной, а радиусы порядка 10 км; для сравнения укажем, что гравитационный радиус Солнца равен 2,95 км. Ни при каких значениях параметра $t_n(0)$ (центрального давления $P(0)$) большие массы не получаются.

На рис. 14 (стр. 165) представлена зависимость массы от параметра $\operatorname{arctg} t_n(0)$ по теориям тяготения.

Таблица 8
Наиболее важные параметры конфигураций, состоящих из вырожденного идеального газа нейтронов

По теории тяготения Эйнштейна					По теории тяготения Ньютона				
$t_n(0)$	R	M	$n \cdot 10^{-56}$	$\frac{\Delta M}{M_0}$	R	$u(R)$	M	$n \cdot 10^{-56}$	$\frac{\Delta M}{M_0}$
1	1,5133	0,0324595	3,60178	0,008249	1,55668	0,0354367	0,0347413	3,86171	0,009977
2	0,9583	0,0658900	7,44366	0,025880	1,05537	0,0901267	0,0833362	9,53554	0,038240
3	0,6696	0,0766367	8,74018	0,035075	0,805802	0,1391840	0,1171330	14,0320	0,081375
4	0,5074	0,0710653	8,02574	0,025570	0,640732	0,1694480	0,1259460	16,0083	0,134190
5	0,4060	0,0598019	6,56506	-0,003436	0,521618	0,1778630	0,1142420	15,5392	0,190940
6	0,3640	0,0492384	5,18517	-0,045005	0,434748	0,1689490	0,0928140	13,5404	0,245670
7	0,3670	0,0419996	4,26480	-0,083740	0,374142	0,1503140	0,0709330	11,0402	0,292940
8	0,4130	0,0396985	3,97905	-0,097925	0,336988	0,1290290	0,0535240	8,75917	0,327540
10	0,4810	0,0458412	4,72655	-0,067306	0,333320	0,0970354	0,0362572	6,09621	0,345490
11	—	—	—	—	0,365932	0,0918297	0,0371440	5,92353	0,309930
12	0,4530	0,0473537	4,91175	-0,06095	0,404375	0,0948718	0,0424497	6,46310	0,277200
∞	0,4506	0,0458743	4,72432	-0,06858	0,3623250	0,0920300	0,0435033	7,43305	0,355920

Примечание. $t_n(0) = 4 \operatorname{arsh} \left[(3\pi^2)^{1/3} h n_n^{-1/3}(0) / m_n c \right]$, где $n(0)$ — плотность нейтронов в центре, R — радиус звезды, M — наблюдаемая масса, $u(R)$ — масса без учета ньютоновского притяжения, n — число нейтронов в звезде и $\Delta M/M_0$ — гравитационный коэффициент упаковки ($\Delta M = M_0 - M$, $M_0 = m n$). Размерные величины даны в единицах $c = k = 1$, $K_n = 1/4\pi$. Чтобы выразить массу в единицах массы Солнца, а радиус в километрах, табличные данные следует умножить на 9,29 и 13,7 соответственно.

Эйнштейна (нижняя кривая) и Ньютона. Хотя в результатах, полученных по обеим теориям, замечается существенное количественное отличие, тем не менее в некоторых, наиболее важных моментах имеется хорошее качественное согласие. Так, ньютоновская теория для массы, радиуса и числа барионов в звезде дает правильный порядок величин.

Более того, кривые для этих параметров имеют большое сходство. По обеим теориям все параметры конфигураций являются однозначными функциями центрального давления (или заменяющего его параметра $t_n(0)$). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Одному и тому же значению некоторых параметров соответствуют два и даже более значения центральной плотности. По теории тяготения Эйнштейна кривые зависимостей параметров звезды от $\text{arctg } t_n(0) = y$ обладают рядом максимумов и минимумов. На нижней кривой рис. 14 хорошо заметны два максимума и один минимум соответственно при $t_n(0) = 3,34$; $12,35$ и $8,24$ ($n_n(0) = 3 \cdot 10^{39}$, $4,84 \cdot 10^{42}$ и $2,1 \cdot 10^{41} \text{ см}^{-3}$). Однако за последним максимумом при $x = 1,49$ существует множество экстремумов, которые при выбранном масштабе не видны на рисунке. При $x > 1,5$ кривая $M(P_0)$, осциллируя (с сильно затухающей амплитудой), стремится к определенному пределу, когда плотность в центре стремится к бесконечности. Эти осцилляции кривых массы и числа частиц при релятивистских плотностях исследовались в работе [41].

Аналогично нерелятивистскому случаю (см. § 38) для случая $t_n(0) = \infty$ (т. е. $\rho(0) = \infty$) было найдено асимптотическое аналитическое решение, пригодное для центральной области предельной конфигурации, где нейтронный газ является крайне релятивистским [243]. Затем это аналитическое решение путем численного интегрирования продолжалось до поверхности звезды. Об этом решении мы еще будем говорить в следующем параграфе.

§ 42. Конфигурации вырожденного идеального газа барионов

Если в (33.6) опустить члены, обусловленные ядерными взаимодействиями, то можно получить уравнения состояния вырожденного идеального газа барионов.

Приведем эти уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4\pi} \sum_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 (\operatorname{sh} t_k - t_k), \\ P &= \frac{1}{12\pi} \sum_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 \left(\operatorname{sh} t_k - 8 \operatorname{sh} \frac{t_k}{2} + 3t_k \right). \end{aligned} \right\} \quad (42.1)$$

Определение параметров t_k дано в (32.1). Если в плазме имеются также π^- -мезоны (из § 27 мы уже знаем, что наличие или отсутствие этих частиц обусловлено выбранным составом барионов), то в выражение плотности энергии нужно добавить член $n_\pi m_\pi c^2 / 4\pi K_n$ (здесь все равно, в каких единицах измеряются величины, стоящие в числителе и в знаменателе). Однако даже в том варианте, где имеется возможность для появления π^- -мезонов, их вклад в энергию не существен. Из условия нейтральности следует, что в лучшем случае концентрация этих частиц должна быть порядка концентрации каждого из вида барионов. Но π^- -мезоны находятся в состоянии покоя, тогда как барионы релятивистские. Учитывая также большое число разновидностей барионов, мы приходим к выводу, что парциальная энергия пионов действительно мала по сравнению с барионной. Что касается лептонов, то их доля в энергии системы еще меньше. Мы уже знаем, что все параметры t_k являются функцией плотности барионов n или энергии ρ . Однако в численных расчетах более удобно в качестве независимой переменной выбрать параметр t_n и остальные считать функцией от него: $t_k(t_n)$. Итак, аналогично нейтронным конфигурациям в качестве граничных условий мы должны принять

$$u(0) = 0, \quad t_n(0), \quad t_n(R) = 0.$$

Таким образом, и в этом случае конфигурации будут характеризоваться одним параметром, а именно, $t_n(0)$, который эквивалентен заданию давления в центре.

Представляет определенный интерес величина массы внутренней сферы, в которой имеются гипероны (*гиперонное ядро*). В случае идеального газа гипероны находятся в центральной области, где $t_n(r) > 2,1$. Некоторой мерой массы этой области является $u(r_y)$ (r_y — радиус гиперонного ядра: $t_n(r_y) = 2,1$), которая ниже условно называется массой гиперонного ядра.

Основные результаты численных расчетов собраны в таблице 9. В ней приведены плотности барионов и массы в центре, масса и радиус звезды и ее гиперонного ядра. Первые пять моделей не имеют гиперонного ядра. Они являются нейтронными конфигурациями.

Несколько подробнее рассмотрим процедуру интегрирования предельной конфигурации с бесконечно большой плотностью в центре. При достаточно больших плотностях, когда частицы барионного газа становятся релятивистскими, вступает в силу уравнение состояния $\rho \approx 3P$. Однако мы будем писать

$$P = Z\rho \quad (42.2)$$

с целью применения полученного ниже результата к другим случаям, где $Z \neq 1/3$.

Внутри центральной области, где справедливо релятивистское уравнение состояния (42.2), решение уравнений (40.12) ищем в виде

$$4\pi r(r) = ar^{-n}. \quad (42.3)$$

Подставив (42.2) и (42.3) в уравнение (40.12), сразу же получаем

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{2Z}{4Z + (Z+1)^2}, \quad n = 2, \\ 4\pi r(r) &= a \cdot r^{-2}, \quad u(r) = a \cdot r. \end{aligned} \right\} \quad (42.4)$$

В частности, для идеального газа, где $Z = 1/3$, имеем $a = 3/14$,

$$4\pi r(r) = \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{r^2}, \quad u(r) = \frac{3}{14} r. \quad (42.5)$$

Решение (42.5) считалось справедливым до расстояния $r = 6,9 \cdot 10^{-4}$, на котором $\rho = 3,58 \cdot 10^4$, $P = 1,14 \cdot 10^4$, $u = 1,48 \cdot 10^{-4}$ (все величины даются в единицах (34.1)). Эти величины принимались в качестве начальных условий, затем система (40.12) была интегрирована численно до поверхности, т. е. до расстояния, где $P(R) = 0$. По ходу численного решения выяснилось, что асимптотическое решение (42.5) продолжает оставаться хорошим даже при значениях r , значительно превышающих исходное. Так, например, на расстоянии $r = 5,5 \cdot 10^{-3}$ величина $u(r)$,

Таблица 9

Некоторые наиболее важные параметры сверхплотных звездных конфигураций, состоящих из идеального газа барионов

$t_n(0)$	Плотность в центре		Масса				Координатный радиус			
	барионов $\rho(0),$ с.м. ⁻³	массы $\rho(0),$ г.с.м. ⁻³	звезды		гиперонного ядра		звезды		гиперонного ядра	
			в едн. (3/4,1)	в едн. $M_\odot$	в едн. (3/4,1)	в едн. $M_\odot$	в едн. (3/4,1)	в к.м.	в едн. (3/4,1)	в к.м.
0,556	$1,00 \cdot 10^{37}$	$1,62 \cdot 10^{13}$	0,0147	0,139	—	—	2,090	28,70	—	—
1,0	$6,50 \cdot 10^{37}$	$1,00 \cdot 10^{14}$	0,0329	0,306	—	—	1,537	21,10	—	—
1,3	$1,36 \cdot 10^{38}$	$2,24 \cdot 10^{14}$	0,0443	0,411	—	—	1,345	18,40	—	—
1,5	$2,20 \cdot 10^{38}$	$3,62 \cdot 10^{14}$	0,0495	0,460	—	—	1,170	16,00	—	—
1,8	$3,85 \cdot 10^{38}$	$6,60 \cdot 10^{14}$	0,0600	0,557	—	—	1,065	14,60	—	—
2,4	$1,25 \cdot 10^{39}$	$2,34 \cdot 10^{15}$	0,0683	0,634	0,0132	0,123	0,805	11,00	0,245	3,36
2,75	$3,10 \cdot 10^{39}$	$5,92 \cdot 10^{15}$	0,0622	0,578	0,0234	0,217	0,753	10,30	0,270	3,20
3,0	$5,45 \cdot 10^{39}$	$1,09 \cdot 10^{16}$	0,0559	0,519	0,0255	0,237	0,703	9,63	0,254	3,48
3,3	$1,08 \cdot 10^{40}$	$3,62 \cdot 10^{16}$	0,0484	0,450	0,0258	0,240	0,670	9,18	0,232	3,18
4,0	$3,50 \cdot 10^{40}$	$8,29 \cdot 10^{16}$	0,0354	0,329	0,0225	0,209	0,594	8,14	0,185	2,54
5,0	$1,26 \cdot 10^{41}$	$3,45 \cdot 10^{17}$	0,0245	0,228	0,0173	0,161	0,506	6,93	0,137	1,88
6,0	$3,53 \cdot 10^{41}$	$1,15 \cdot 10^{18}$	0,0191	0,177	0,0135	0,125	0,557	7,63	0,115	1,57
7,0	$9,36 \cdot 10^{41}$	$1,39 \cdot 10^{18}$	0,0237	0,220	0,0115	0,107	0,767	10,50	0,112	1,53
∞	∞	∞	0,0349	0,324	0,0130	0,121	0,808	11,10	0,145	1,99

вычисленная по формуле (42.5), лишь на 1% отличается от точного значения. В результате для массы и радиуса предельной конфигурации было получено $M=0,324M_\odot$, $R=11,1$ км. Для сравнения напомним, что предельная конфигурация, состоящая из идеального газа нейтронов, имеет массу $M=0,43M_\odot$ и радиус $R=6,2$ км.

На рис. 18 изображены зависимости массы конфигураций и их гиперонного ядра от параметра $\operatorname{arctg} t_n(0)$. Кривая 2 принадлежит нейтронным конфигурациям. Мы

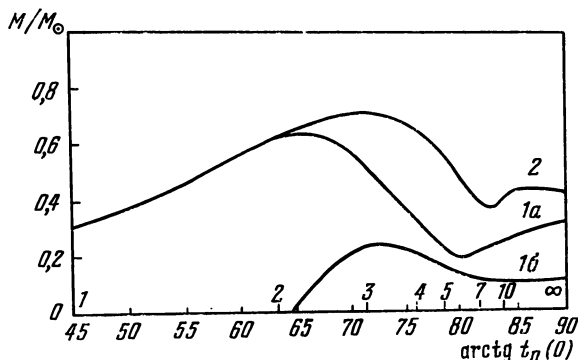


Рис. 18. Зависимость массы барионных звезд (кривая 1а) и их гиперонного ядра (кривая 1б) от параметра $\operatorname{arctg} t_n(0)$ в случае идеального газа барионов. Кривая 2 представляет массу нейтронных конфигураций (идеальный газ).

замечаем, что для конфигураций с $3 < t_n(0) < 7$ значительная часть массы сосредоточена в гиперонном ядре. При $t_n(0) \approx 6$ ($n \approx 3,5 \cdot 10^{41} \text{ см}^{-3}$) масса имеет заметный минимум. В области $t_n(0) > 6$ масса имеет множество слабо выраженных и постепенно ослабевающих максимумов и минимумов (при выбранном масштабе на рис. 18 они не видны), т. е. с возрастанием центральной плотности ордината кривой $M(\rho_0)$, осциллируя с затухающей амплитудой, стремится к определенному конечному пределу, равному $0,324 M_\odot$. Как мы видим, функция $M(\rho_0)$ однозначна, каждому значению ρ_0 соответствует одно значение массы, обратная функция $\rho_0 = \rho_0(M)$ при $t_n(0) \geq 3$ многозначна (к этому вопросу мы вернемся в § 43).

Зависимость радиуса от $\operatorname{arctg} t_n(0)$ представлена на рис. 19.

Из рис. 18 видно, что в той области плотностей, где имеются гипероны, масса барионных конфигураций заметно меньше массы чисто нейтронных конфигураций. Это обусловлено тем, что массы конфигураций, по сути дела, приблизительно обратно пропорциональны квадрату массы элементарных

частиц, из которых они состоят. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим некоторую гипотетическую конфигурацию, состоящую из идеального газа ферми-частиц с массой покоя m_k , и сравним ее с нейтронной конфигурацией. Выбирая в одном случае систему единиц $c=k=1$,

$$m_k^4 c^5 / (32\pi^2 h^3) = \frac{1}{4\pi}, \text{ в дру-}$$

$$\text{гом } c=k=1, K_n = \frac{m_n^4 c^5}{32\pi^2 h^3} =$$

$= \frac{1}{4\pi}$, мы получаем одно и то же уравнение состояния

$$\rho = \frac{1}{4\pi} (\operatorname{sh} t - t),$$

$$P = \frac{1}{12\pi} (\operatorname{sh} t - 8 \operatorname{sh} \frac{t}{2} + 3t).$$

При одном и том же значении параметра $t(0)$ для массы в обоих случаях, очевидно, получится одинаковый результат. Но согласно (34.6) единица массы обратно пропорциональна m_k^2 . Поэтому если теперь мы снова перейдем к единой системе единиц

$$c=k=1, K_n = \frac{1}{4\pi}$$

то нетрудно понять, что величина массы гипотетической конфигурации умножится на $(m_n m_k)^2$. В том случае, когда вырожденное вещество состоит из различных частиц, параметры конфигурации, разумеется, определяют-

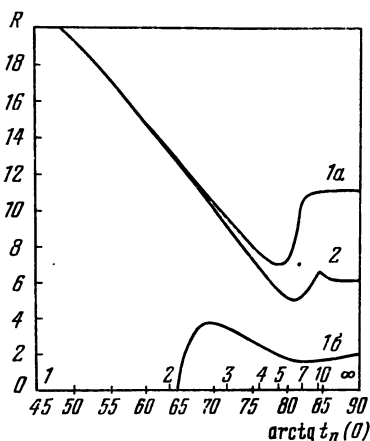


Рис. 19. Зависимость радиуса барионных звезд (кривая 1а) и их гиперонного ядра (1б) от параметра $\operatorname{arctg} t_n(0)$ в случае идеального газа. Кривая 2 представляет радиус нейтронных конфигураций (идеальный газ). Радиус дан в километрах.

ся средним значением масс покоя $\overline{m_k}$, которое в барионных конфигурациях больше массы нейтрона m_n . Вот именно поэтому и при одинаковых значениях параметра $t_n(0)$ масса барионной звезды оказывается меньше нейтронной.

Отсюда, в частности, следует, что если бы масса покоя нейтрино была отлична от нуля, то в принципе могли бы существовать конфигурации, состоящие из вырожденного нейтринного газа с массой, в $(m_n/m_\nu)^2$ раз большей массы соответствующих нейтронных конфигураций [236a].

§ 43. Конфигурации из реального газа барионов

В работах [96, 14, 92] рассматривались несколько вариантов реального газа барионов и рассчитывалось большое число моделей «холодных» звезд. В них преследовалась цель путем приближенного учета ядерных сил притяжения в ядерной области и сил отталкивания в надъядерной области плотностей исследовать изменения параметров барионных конфигураций. Было показано, что при разумном учете вклада ядерных взаимодействий частиц в уравнения состояния параметры конфигураций испытывают заметные изменения. Так, оказалось, что в области плотностей, где существенную роль играют ядерные взаимодействия, масса приблизительно в два-три раза больше массы соответствующих нейтронных конфигураций (соответствующими здесь называются конфигурации с одинаковым давлением в центре). Однако было установлено, что ни при каком разумном изменении уравнения состояния барионной плазмы невозможно получить для массы конфигураций значения, заметно превышающие массу Солнца. Порядок массы не изменяется, она остается такой же, как для идеального газа, т. е. порядка солнечной.

Здесь мы приведем лишь изложение результатов расчетов, в основу которых положено уравнение состояния (33.4)—(33.6). По нашему мнению, в нем лучше всех других уравнений, известных в литературе, учтена роль ядерных сил, кроме того, оно имеет то преимущество, что согласовано с законом причинности (при $\rho \rightarrow \infty$ скорость звука не превышает скорости света).

В таблице 10 представлены результаты численного интегрирования системы (40.12) с уравнением состояния (33.4) — (33.6) с граничными условиями $u(0)=0$, $P(0)$, $P(R)=0$, $u(R)=M$.

В первых трех столбцах приведены плотность массы, давление и плотность числа барионов в центре конфигураций. Эти величины связаны между собой уравнением состояния. Массы выражены в солнечных единицах, а радиусы в километрах.

В таблице, кроме полной массы и радиуса всей звезды, приводятся также массы и радиусы для гиперонного ядра, нуклонно-ядерной фазы и оболочки. Под радиусом гиперонного ядра подразумевается то расстояние r_Σ от центра звезды, на котором исчезает последний гиперон, а именно, Σ^- , а под массой гиперонного ядра — значение $u(r_\Sigma)$. Соответственно радиусом нуклонно-ядерной фазы называется расстояние r_n , на котором исчезают нейтроны, затем начинается Ae -фаза вещества, а массой этой фазы —

$$\Delta u = u(r_n) - u(r_\Sigma).$$

Здесь под нуклонно-ядерной фазой подразумевается Aen -фаза. Наконец, под массой оболочки понимается масса слоя звезды, где вещество состоит из атомных ядер и свободных электронов (Ae -фаза). О вычислении массы оболочки мы будем говорить в § 45.

Из таблицы видно, что в конфигурациях, центральная плотность которых выше порога рождения гиперонов, основная часть массы сконцентрирована в их гиперонном ядре и лишь незначительная часть ее находится в нуклонно-ядерной фазе и еще меньше — в оболочке.

Конфигурация с $\rho(0)=\infty$ рассчитывалась по методу соответствующей конфигурации для идеального газа. Уравнение состояния здесь имеет асимптотический вид $P=\rho$. Согласно (42.4) в этом случае мы имеем следующее решение:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi\rho(r) &= \frac{1}{4} \frac{1}{r^2}, \\ u(r) &= \frac{1}{4} r. \end{aligned} \right\} \quad (43.1)$$

Таблица 10

Основные параметры барийных конфигураций [18]

Параметры в центре конфигураций				Масса $M/M_{\odot}$			Радиус в километрах				Полное число бариенов в звезде $N \cdot 10^{-47}$	
η	плотность массы $\rho(0)$, г·см $^{-3}$	давление $P(0)$, эрг·см $^{-3}$	плотность бариенов $n(0)$, см $^{-3}$	гиперон- ного ядра	нуклонно- ядерной фазы	оболочки	всей звез- ды	гиперон- ного ядра	нуклонно- ядерной фазы	координат- ный радиус звезды		истинный радиус звезды
-1,30	$9,06 \cdot 10^{10}$	$1,48 \cdot 10^{29}$	$5,45 \cdot 10^{34}$	—	—	1,07	1,07	—	—	765	766	1,27
-1,15	$2,11 \cdot 10^{12}$	$1,66 \cdot 10^{30}$	$1,24 \cdot 10^{36}$	—	0,0232	0,928	0,951	—	26,4	660	661	1,13
-1,00	$1,01 \cdot 10^{13}$	$1,59 \cdot 10^{31}$	$6,00 \cdot 10^{36}$	—	0,0531	0,859	0,912	—	26,0	886	888	1,08
-0,93	$1,65 \cdot 10^{13}$	$3,48 \cdot 10^{31}$	$9,90 \cdot 10^{36}$	—	0,0647	0,837	0,902	—	25,2	1090	1094	1,07
-0,85	$2,63 \cdot 10^{13}$	$7,16 \cdot 10^{31}$	$1,58 \cdot 10^{37}$	—	0,0759	0,823	0,899	—	24,1	1410	1415	1,07
-0,75	$4,23 \cdot 10^{13}$	$1,49 \cdot 10^{32}$	$2,52 \cdot 10^{37}$	—	0,0899	0,803	0,893	—	22,9	2250	2260	1,06
-0,70	$5,21 \cdot 10^{13}$	$2,04 \cdot 10^{32}$	$3,75 \cdot 10^{37}$	—	0,0974	0,746	0,843	—	22,7	2800	2810	1,00
-0,67	$5,97 \cdot 10^{13}$	$2,56 \cdot 10^{32}$	$3,56 \cdot 10^{37}$	—	0,101	0,632	0,733	—	21,5	3840	3850	0,870
-0,62	$7,10 \cdot 10^{13}$	$3,96 \cdot 10^{32}$	$4,30 \cdot 10^{37}$	—	0,108	0,128	0,236	—	20,6	4500	4510	0,260
-0,60	$7,50 \cdot 10^{13}$	$4,28 \cdot 10^{32}$	$4,55 \cdot 10^{37}$	—	0,110	0,0257	0,136	—	20,6	1350	1360	0,181
-0,59	$7,90 \cdot 10^{13}$	$4,65 \cdot 10^{32}$	$4,78 \cdot 10^{37}$	—	0,112	0,0146	0,127	—	20,6	576	578	0,151
-0,57	$8,27 \cdot 10^{13}$	$4,98 \cdot 10^{32}$	$5,00 \cdot 10^{37}$	—	0,114	0,0110	0,125	—	20,6	364	365	0,148
-0,56	$8,69 \cdot 10^{13}$	10^{32}	$5,25 \cdot 10^{37}$	—	0,116	$8,99 \cdot 10^{-3}$	0,125	—	20,6	263	264	0,149
-0,40	$1,37 \cdot 10^{14}$	$8,85 \cdot 10^{32}$	$8,17 \cdot 10^{37}$	—	0,132	$3,30 \cdot 10^{-3}$	0,136	—	17,0	66	66,3	0,161
-0,30	$1,78 \cdot 10^{14}$	$1,40 \cdot 10^{33}$	$1,04 \cdot 10^{38}$	—	0,145	$1,32 \cdot 10^{-3}$	0,147	—	14,1	42,9	43,1	0,174
-0,11	$2,84 \cdot 10^{14}$	$5,11 \cdot 10^{33}$	$1,74 \cdot 10^{38}$	—	0,258	$2,69 \cdot 10^{-4}$	0,259	—	12,1	17,7	18,1	0,317
0,18	$5,51 \cdot 10^{14}$	$2,56 \cdot 10^{34}$	$3,23 \cdot 10^{38}$	0,314	0,325	$8,92 \cdot 10^{-5}$	0,639	7,12	11,6	13,0	13,8	0,813
0,37	$8,78 \cdot 10^{14}$	$7,16 \cdot 10^{34}$	$4,90 \cdot 10^{38}$	0,737	0,247	$3,44 \cdot 10^{-5}$	0,984	8,68	11,4	12,1	13,2	1,28
0,46	$1,14 \cdot 10^{15}$	$1,28 \cdot 10^{35}$	$6,27 \cdot 10^{38}$	0,998	0,186	$2,51 \cdot 10^{-5}$	1,18	9,11	11,1	11,8	13,2	1,55
0,58	$1,65 \cdot 10^{15}$	$2,56 \cdot 10^{35}$	$8,64 \cdot 10^{38}$	1,26	0,131	$1,40 \cdot 10^{-5}$	1,39	9,18	10,6	10,9	11,9	1,85
0,69	$2,44 \cdot 10^{15}$	$5,11 \cdot 10^{35}$	$1,17 \cdot 10^{39}$	1,42	0,0892	$8,81 \cdot 10^{-6}$	1,51	8,88	9,92	10,2	12,1	2,03
0,78	$3,58 \cdot 10^{15}$	$1,06 \cdot 10^{36}$	$1,64 \cdot 10^{39}$	1,49	0,0576	$5,46 \cdot 10^{-6}$	1,55	8,31	9,11	9,28	11,5	2,08

0,79	$3,71 \cdot 10^{15}$	$1,13 \cdot 10^{36}$	$1,68 \cdot 10^{38}$	1,49	0,0557	$5,20 \cdot 10^{-6}$	1,55	8,25	9,03	9,19	11,5	2,08
0,82	$4,26 \cdot 10^{15}$	$1,39 \cdot 10^{36}$	$1,83 \cdot 10^{38}$	1,50	0,0483	$4,46 \cdot 10^{-6}$	1,55	8,07	8,76	8,92	11,7	2,09
0,87	$5,48 \cdot 10^{15}$	$2,05 \cdot 10^{36}$	$2,20 \cdot 10^{38}$	1,50	0,0381	$3,56 \cdot 10^{-6}$	1,54	7,72	8,36	8,49	10,9	2,07
0,98	$1,16 \cdot 10^{16}$	$6,14 \cdot 10^{36}$	$3,60 \cdot 10^{38}$	1,37	0,0242	$2,13 \cdot 10^{-6}$	1,39	6,78	7,27	7,37	10,5	1,81
1,03	$1,69 \cdot 10^{16}$	$1,02 \cdot 10^{37}$	$4,50 \cdot 10^{38}$	1,29	0,0204	$1,83 \cdot 10^{-6}$	1,31	6,40	6,87	6,97	9,70	1,66
1,11	$3,53 \cdot 10^{16}$	$2,56 \cdot 10^{37}$	$6,95 \cdot 10^{38}$	1,15	0,0177	$1,63 \cdot 10^{-6}$	1,17	5,92	6,40	6,51	9,33	1,41
1,13	$4,70 \cdot 10^{16}$	$3,58 \cdot 10^{37}$	$8,10 \cdot 10^{38}$	1,11	0,0177	$1,63 \cdot 10^{-6}$	1,13	5,81	6,30	6,41	9,45	1,33
1,16	$6,80 \cdot 10^{16}$	$5,42 \cdot 10^{37}$	$9,90 \cdot 10^{38}$	1,06	0,0186	$1,73 \cdot 10^{-6}$	1,08	5,74	6,27	6,38	9,28	1,26
1,17	$8,55 \cdot 10^{16}$	$7,01 \cdot 10^{37}$	$1,12 \cdot 10^{40}$	1,04	0,0186	$1,81 \cdot 10^{-6}$	1,06	5,72	6,27	6,39	9,31	1,23
1,19	$1,21 \cdot 10^{17}$	$1,02 \cdot 10^{38}$	$1,36 \cdot 10^{40}$	1,02	0,0195	$1,93 \cdot 10^{-6}$	1,04	5,74	6,30	6,43	9,39	1,19
1,21	$1,65 \cdot 10^{17}$	$1,43 \cdot 10^{38}$	$1,58 \cdot 10^{40}$	1,01	0,0204	$2,13 \cdot 10^{-6}$	1,03	5,78	6,40	6,54	9,55	1,17
1,23	$2,27 \cdot 10^{17}$	$2,05 \cdot 10^{38}$	$1,85 \cdot 10^{40}$	1,00	0,0223	$2,27 \cdot 10^{-6}$	1,03	5,84	6,48	6,63	9,67	1,17
1,24	$2,80 \cdot 10^{17}$	$2,56 \cdot 10^{38}$	$2,06 \cdot 10^{40}$	1,01	0,0232	$2,36 \cdot 10^{-6}$	1,03	5,89	6,53	6,69	9,75	1,17
1,27	$5,47 \cdot 10^{17}$	$5,11 \cdot 10^{38}$	$2,86 \cdot 10^{40}$	1,02	0,0260	$2,60 \cdot 10^{-6}$	1,05	6,04	6,71	6,87	10,0	1,20
1,29	$1,09 \cdot 10^{18}$	$1,02 \cdot 10^{38}$	$3,98 \cdot 10^{40}$	1,04	0,0269	$2,65 \cdot 10^{-6}$	1,07	6,15	6,82	6,99	10,2	1,24
1,30	$1,61 \cdot 10^{18}$	$1,53 \cdot 10^{38}$	$4,85 \cdot 10^{40}$	1,06	0,0269	$2,69 \cdot 10^{-6}$	1,08	6,18	6,85	7,00	10,2	1,26
1,34	$5,35 \cdot 10^{18}$	$5,11 \cdot 10^{38}$	$8,70 \cdot 10^{40}$	1,09	0,0269	$2,59 \cdot 10^{-6}$	1,10	6,18	6,84	6,98	10,3	1,29
1,37	$2,70 \cdot 10^{19}$	$2,56 \cdot 10^{39}$	$1,91 \cdot 10^{41}$	1,07	0,0251	$2,49 \cdot 10^{-6}$	1,10	6,13	6,77	6,92	10,2	1,28
1,38	$5,41 \cdot 10^{19}$	$5,11 \cdot 10^{40}$	$2,67 \cdot 10^{41}$	1,07	0,0232	$2,58 \cdot 10^{-6}$	1,09	6,12	6,81	6,96	10,3	1,28
1,39	$1,09 \cdot 10^{20}$	$1,02 \cdot 10^{41}$	$3,76 \cdot 10^{41}$	1,06	0,0251	$2,52 \cdot 10^{-6}$	1,09	6,12	6,77	6,92	10,2	1,27
1,40	$2,70 \cdot 10^{20}$	$2,56 \cdot 10^{41}$	$5,90 \cdot 10^{41}$	1,07	0,0251	$2,52 \cdot 10^{-6}$	1,09	6,13	6,78	6,93	10,2	1,27
1,41	$5,48 \cdot 10^{20}$	$5,11 \cdot 10^{41}$	$8,30 \cdot 10^{41}$	1,06	0,0251	$2,54 \cdot 10^{-6}$	1,09	6,12	6,79	6,93	10,2	1,27
1,43	$5,68 \cdot 10^{21}$	$5,11 \cdot 10^{42}$	$2,52 \cdot 10^{42}$	1,06	0,0260	$2,54 \cdot 10^{-6}$	1,09	6,13	6,79	6,94	10,2	1,27
1,44	$2,84 \cdot 10^{22}$	$2,56 \cdot 10^{43}$	$5,64 \cdot 10^{42}$	1,07	0,0251	$2,53 \cdot 10^{-6}$	1,09	6,13	6,79	6,93	10,4	1,27
1,45	$5,68 \cdot 10^{22}$	$5,11 \cdot 10^{43}$	$7,98 \cdot 10^{42}$	1,06	0,0260	$2,53 \cdot 10^{-6}$	1,09	6,12	6,79	6,93	10,2	1,27
1,57	∞	∞	∞	1,06	0,0242	$2,46 \cdot 10^{-6}$	1,09	6,11	6,74	6,89	9,48	1,26

Это решение считалось хорошим до расстояния $r = 0,47$ км, где $\rho = 1,08 \cdot 10^{38} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}$, $P = 1,02 \cdot 10^{38} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-3}$ и $u = 0,08 M_{\odot}$. Эти значения были приняты за начальные условия и уравнения (40.12) были проинтегрированы численно до границы звезды таким же способом, как и для других конфигураций.

На рис. 20 и 21 представлены кривые зависимости массы и радиуса от плотности массы в центре. Чтобы иметь удобные для обозревания кривые и охватить всю

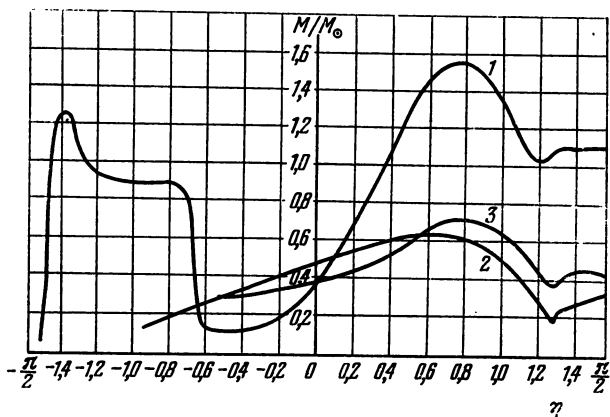


Рис. 20. Зависимость массы барионных звезд от параметра $\eta = \arctg \lg \frac{\rho(0)}{\rho_1}$, где $\rho_1 = 3,62 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$. 1 — конфигурации, состоящие из реального газа барионов (данные таблицы 10), 2 — идеальный газ барионов, 3 — идеальный газ нейтронов. Часть кривой 1 при $\eta < -0,6$ представляет белые карлики.

область плотностей, по оси абсцисс отложены значения параметра

$$\eta = \arctg \left[\log \frac{\rho(0)}{\rho_1} \right],$$

где $\rho_1 = 3,62 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ — ядерная плотность. В целях сравнения на рисунках приведены также кривые зависимостей $M(\eta)$ и $R(\eta)$ для вариантов идеального газа барионов (линия 2) и идеального газа нейтронов (линия 3). Часть зависимости $R(\eta)$ при $\eta < -0,2$ начерчена в

мелком масштабе, чтобы уместить ее на рисунке. Ординаты линии $M(\eta)$ при $\eta \leq -0,6$ представляют конфигурации белых карликов.

Кривые зависимостей массы и радиуса конфигураций от $\rho(0)$ имеют довольно причудливое поведение. Оно обусловлено специфическими особенностями уравнения

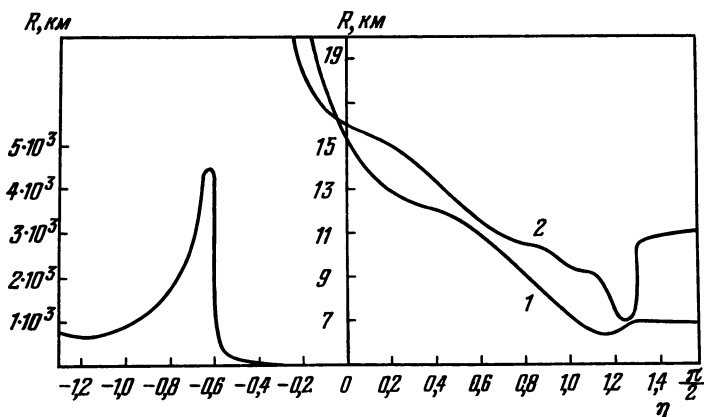


Рис. 21. Зависимость координатного радиуса барионных звезд от параметра η . Кривая 1 относится к реальному газу, 2 — к идеальному газу барионов.

состояния в разных областях плотностей. С возрастанием плотности от обычных ее значений до бесконечно больших уравнение состояния испытывает ряд существенных изменений. Параметры же конфигураций чувствительны ко всяким изменениям уравнения состояния. В справедливости этого утверждения легко убедиться уже при сопоставлении кривых масс и радиусов конфигураций, рассчитанных для вариантов идеального и реального газов. Однако, для лучшего понимания сути дела, мы считаем полезным привести следующее упрощенное обсуждение.

Рассмотрим уравнение состояния, записанное в виде

$$P = bf(\rho),$$

где b — некоторая постоянная. Подставим это уравнение

в (40.12) и перейдем к ньютоновскому пределу

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\rho} &= -4\pi b \frac{r^4 f'(\rho)}{u}, \\ \frac{dr}{d\rho} &= -b \frac{r^2 f'(\rho)}{\rho u}, \end{aligned} \right\} \quad (43.2)$$

где в качестве независимой переменной вместо r принята плотность массы ρ . Если теперь в (43.2) сделать замену

$$\left. \begin{aligned} r(\rho) &= \sqrt{b} \chi(\rho), \\ u(\rho) &= \sqrt{b^3} v(\rho), \end{aligned} \right\} \quad (43.3)$$

то полученные после этого уравнения не будут больше содержать постоянную b . Учитывая (43.3), отсюда можно заключить, что при изменении давления в b раз радиус и масса конфигураций изменяются соответственно в $b^{1/2}$ и $b^{3/2}$ раз. Такое схематическое рассмотрение показывает, что параметры конфигураций чувствительны ко всяким изменениям вида уравнения состояния.

Постараемся теперь понять ход кривой массы $M(\eta)$. Наше рассмотрение начнем с левого максимума в области конфигураций белых карликов (абсцисса его $\eta = -1,38$). Вещество здесь состоит из атомных ядер и вырожденного электронного газа (Ae -фаза). Если бы за максимумом, т. е. при $\eta > -1,38$, отношение A/Z (A — массовое число, Z — атомный номер) оставалось постоянным, то кривая $M(\eta)$ продолжала бы медленно подниматься до чандрасекаровского предела $M = 1,4 M_{\odot}$. Однако мы знаем, что с возрастанием плотности отношение A/Z растет, что приводит к уменьшению давления по сравнению со случаем, когда A/Z считается постоянным (приблизительно равным двум). Уменьшение же давления согласно (43.3) приводит к уменьшению массы. Спад кривой $M(\eta)$ продолжается до появления Aen -фазы. С образованием нейтронов парциальная плотность энергии ядер и парциальное давление электронов становятся несущественными по сравнению с соответствующими величинами нейтронного газа. Вследствие этого влияние A/Z на уменьшение массы отчасти компенсируется и спад

кривой $M(\eta)$ замедляется до включения в игру ядерных сил. В этой области (т. е. $\eta < -0,7$) кривые 1 и 2 должны были совпадать, так как ядерные силы пока не вносят ощутимого вклада и, следовательно, варианты реального и идеального газов не должны отличаться друг от друга. Однако мы видим из рис. 20, что в случае идеального газа (кривая 2) масса оказывается меньше, чем в случае реального. Причина этого заключается в том, что расчеты конфигураций, состоящих из идеального газа барионов, проводились без учета наличия фаз A_{ep} и A_e . В случае же моделей с реальным газом численное интегрирование проводилось корректно до самой поверхности звезды с учетом всевозможных фаз вещества.

Появление ядерных сил притяжения приводит к некоторому уменьшению давления по сравнению с давлением идеального газа. Замедление же роста давления приводит к весьма быстрому, почти скачкообразному изменению массы в некоторой узкой области значений центральной плотности ($\eta = -0,63$). В окрестности этой точки радиус конфигурации также испытывает большое изменение. Кривая $R(\eta)$ имеет узкий максимум. Такое быстрое изменение массы и радиуса, как видно из таблицы, происходит за счет массы и размеров оболочки, т. е. A_e -фазы.

При дальнейшем увеличении плотности до бесконечно больших значений кривая массы $M(\eta)$ испытывает осцилляцию с затухающей амплитудой и при $\rho(0) \rightarrow \infty$ ордината ее стремится к пределу, равному $1,09 M_\odot$. Как было показано в [41], эта осцилляция массы (а также радиуса и полного числа барионов) обусловлена специальным видом уравнения состояния $P \approx \text{const} \cdot \rho$ в центральной области конфигураций при релятивистских плотностях.

Когда плотности выше ядерной, силы имеют характер отталкивания. Поэтому при одной и той же плотности энергии давление реального газа оказывается больше давления идеального (в пределе, когда $\rho \rightarrow \infty$, отношение давлений реального и идеального газов равно трем). Вот почему в этой области масса конфигураций для реального газа получается больше массы моделей идеального газа.

§ 44. Модели конфигураций из несжимаемой жидкости

Выше мы подчеркивали важную роль уравнения состояния, заключающуюся в том, что параметры конфигурации чувствительны к его изменениям. Одновременно было отмечено, что никаким разумным изменением его нельзя добиться изменения порядков величин массы и радиуса небесных тел, состоящих из вырожденных масс. Позже мы увидим (см. главу X), что причина невозможности существования сверхплотных конфигураций с массами, намного превышающими солнечную, кроется не в уравнении состояния, а в уравнениях Эйнштейна или, точнее, в самой теории гравитации Ньютона — Эйнштейна. Уравнения Эйнштейна не допускают масс, намного превышающих массу Солнца и одновременно имеющих радиус $R \leq 2M$. Все-таки, чтобы полностью выяснить, какие возможности, в этом смысле, таит в себе уравнение состояния, рассмотрим крайний случай состояния вещества, каким является несжимаемая жидкость. Заранее ясно, что большие значения масс конфигураций должны получаться именно в этом случае, поэтому несжимаемая жидкость даст верхнюю границу возможностей, скрытых в уравнении состояния вещества.

Итак, рассмотрим крайний вариант реального газа, в котором частицам приписываются конечные размеры. Когда частицы соприкасаются друг с другом, энергия взаимодействия равна нулю. С другой стороны, частицы являются абсолютно твердыми и взаимно непроницаемыми. Допустим также, что барионы всех типов имеют одинаковый собственный радиус (мы должны также учесть лоренцево сокращение, если оно окажется существенным). В таком газе должна существовать некоторая максимальная плотность ρ_m , при которой пространство предельно плотно упаковано частицами-шариками (шарики соприкасаются). Может случиться, что в данной конфигурации эта максимальная плотность достигается уже на некотором расстоянии R_0 от центра. Тогда мы будем иметь следующие выражения для плотности:

$$\left. \begin{aligned} \rho(r) &= \frac{1}{4\pi} \sum_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 (\text{sh } t_k - t_k) & \text{при } r > R_0, \\ \rho(r) &= \rho_m = \text{const} & \text{при } r < R_0. \end{aligned} \right\} (44.1)$$

Что касается давления, то при $r > R_0$ оно определяется формулой

$$P(r) = \frac{1}{12\pi} \sum_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 \left(\operatorname{sh} t_k - 8 \operatorname{sh} \frac{t_k}{2} + 3t_k \right), \quad (44.2)$$

а при $r < R_0$ оно будет расти до некоторого максимального значения в центре.

Выясним, при каких значениях параметра t_n наступает несжимаемость. Очевидно, для этого t_n мы должны иметь

$$\tau(t_n) = 1,$$

где τ есть суммарный объем частиц, заключенных в единице объема звезды, вычисленной с учетом лоренцева сокращения. При этом, конечно, мы должны в τ включить также промежутки, остающиеся при плотной упаковке частиц. Объем пространства, остающийся между шариками при их плотной упаковке, составляет 26% от всего объема. Для объема τ имеем

$$\tau(t_n) = b \sum_k \frac{1}{2} a_k \cdot \int_0^{p_k} \frac{m_k c^2}{\epsilon_k(p)} \cdot \frac{p^2 dp}{\pi^2 \hbar^3} = 1,$$

где b — собственный объем, приходящийся на один барион (с учетом промежутка на одну частицу), $a_k = 2s_k + 1$ — число спиновых состояний, p_k — граничный импульс k -й частицы, а множитель $m_k c^2 / \epsilon_k(p)$ учитывает лоренцево сплющивание частицы в направлении движения. Выполняя интегрирование, получаем

$$b \sum_k \alpha_k \left(2 \operatorname{sh} \frac{t_k}{2} - t_k \right) = 1, \quad (44.3)$$

где $\alpha_k = \frac{(2s_k + 1) m_k^3 c^3}{16\pi^2 \hbar^3}$. Таким образом, уравнение (44.3) определяет то значение t_n , при котором наступает несжимаемость (напомним, что параметры t_k являются функцией t_n).

Для решения уравнения (44.3) необходимо иметь значение параметра b . В качестве примера было принято $b = 4,5 \cdot 10^{-40}$ см³ (при этом радиус шариков получается $r = 4,75 \cdot 10^{-14}$ см, что примерно в два раза больше

расстояния между двумя барионами, при котором проявляются ядерные силы отталкивания). Подставляя это значение b в уравнение (44.3), находим для $t_n(R_0)$:

$$t_n(R_0) \approx 2,65. \quad (44.4)$$

Это решение было получено в [15, 92] для специального химического состава, в котором не учитывались барионные резонансы. При этом значении параметра t_n релятивистское сокращение объема частиц незначительно.

Теперь определим массу и радиус центрального ядра, состоящего из несжимаемого вещества. Согласно (40.12)

$$\frac{du}{dr} = 4\pi r^2 \rho_m, \quad (44.5)$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{P + \rho_m}{r(r - 2u)} (4\pi r^3 P + u), \quad (44.6)$$

где $\rho_m \approx 0,63$ есть та максимальная плотность, при которой наступает несжимаемость. Это значение найдено из формулы плотности энергии

$$\rho_m = \frac{1}{4\pi} \sum_k \left(\frac{m_k}{m_n} \right)^4 [\text{sh } t_k(R_0) - t_k(R_0)],$$

где $t_k(R_0)$ — параметр k -частицы, соответствующий $t_n(R_0) = 2,65$.

Учитывая, что $u(0) = 0$, и интегрируя (44.5) в пределах от нуля до r , получим

$$u(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_m. \quad (44.7)$$

Подставим выражение $u(r)$ в (44.6) и проинтегрируем от центра до поверхности несжимаемой сферы, затем из полученного результата определим радиус этой сферы:

$$R_0 = \left\{ \frac{3}{8\pi\rho_m} \left[1 - \left(\frac{3P_m + \rho_m}{P_m + \rho_m} \cdot \frac{P_0 + \rho_m}{3P_0 + \rho_m} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}, \quad (44.8)$$

где P_0 и P_m — соответственно давление в центре звезды и на поверхности несжимаемой сферы. Подставив в формулу (44.2) $t_n = 2,65$, находим $P_m = 0,0342$.

Из (44.7) и (44.8) для массы несжимаемой сферы имеем

$$u(R_0) = \frac{0,613}{\sqrt{4\pi\rho_m}} \left[1 - \left(\frac{3P_m + \rho_m}{P_m + \rho_m} \cdot \frac{P_0 + \rho_m}{3P_0 + \rho_m} \right)^2 \right]^{3/2}. \quad (44.9)$$

Вследствие того, что в случае несжимаемой жидкости между P и ρ не имеется никакой связи, масса, радиус и другие характеристики конфигураций теперь зависят от двух параметров, а именно, от P_0 и ρ_m . Однако при фиксированном значении плотности массы мы опять получаем однопараметрические решения. Учитывая, что $\rho_m = 0,63$, $P_m = 0,0342$, мы получаем следующий окончательный результат:

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= 0,436 \left[1 - 1,22 \left(\frac{0,63 + P_0}{0,63 + 3P_0} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ u(R_0) &= 0,22 \left[1 - 1,22 \left(\frac{0,63 + P_0}{0,63 + 3P_0} \right)^2 \right]^{3/2}. \end{aligned} \right\} \quad (44.10)$$

Максимальное значение массы получается при $P_0 \gg \rho_m$, в этом случае

$$R_0 = 0,406, \quad u(R_0) = 0,175. \quad (44.11)$$

Далее, считая, что при $r > R_0$ уравнение состояния определяется формулой (42.1), мы можем уравнения (40.12), с граничными условиями (44.11) проинтегрировать до поверхности звезды, т. е. до расстояния R , где $P(R) = 0$. Это интегрирование, разумеется, можно выполнить только численно, и оно приводит к результату

$$R = 6 \text{ км}, \quad M = 1,7 M_\odot. \quad (44.12)$$

Выбирая для объема барионных шариков большое значение, мы могли бы получить большую массу. Но мы и без того для объема b взяли недопустимо большое значение, так что результат натянут и в этом вопросе (т. е. в смысле получения больших масс): имеющиеся возможности можно считать исчерпанными. Однако не следует забывать, что на величину массы накладывает более жесткое ограничение не уравнение состояния, а существующая теория гравитации, согласно которой для массы предел $R/2$ является недостижимым.

§ 45. Оболочки барионных звезд

В расчетах барионных конфигураций мы говорили, что интегрирование нужно довести до значений $t_n(r)$, при которых величины координаты r и функции $u(r)$ достигают насыщения. Как раз эти значения r и $u(r)$ принимались за радиус и массу конфигураций. Фактически при этом интегрирование проводится до расстояний, где исчезает параметр $t_n(r)$ и вместе с ним давление барионов $P(r)$. Строго говоря, здесь мы можем совершить некоторую ошибку, если на этом остановим интегрирование. В самом деле, ведь звезда не кончается там, где исчезают свободные нейтроны. При описанной процедуре интегрирования охватывается гиперонное ядро и нейтронный слой, т. е. мы доводим расчеты до поверхности раздела фаз Aen и Ae . Если до наружной поверхности Aen -фазы гравитационное притяжение почти компенсировалось градиентом давления барионного газа, то с начала Ae -фазы эту роль берет на себя электронный газ. Таким образом, наружный слой, где гидродинамическое равновесие обеспечивается давлением электронного газа, до сих пор оставался вне нашего поля зрения. Теперь займемся исследованием этой области звезды, при этом мы убедимся, что она не дает заметного вклада в значения массы и радиуса. Конечно, мы можем соответствующим изменением уравнения состояния численное интегрирование довести до конца, где исчезает также давление электронного газа. Однако в этом нет нужды, поскольку путем приближенного интегрирования для оболочки можно найти аналитические выражения.

В наружной оболочке имеет место

$$P(r) \ll \rho(r), \quad 4\pi r^3 P(r) \ll u(r), \quad (45.1)$$

что позволяет заметно упростить второе уравнение системы (40.12). Имеем

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} &= 4\pi r^2 \rho, \\ \frac{dP}{dr} &= -\frac{\rho u}{r(r-2u)}. \end{aligned} \right\} \quad (45.2)$$

Здесь в знаменателе мы сохраняем величину $2u$, так как

она все-таки недостаточно мала и пренебрежение ею может в некоторых случаях привести к нескольким процентам ошибки в значении радиуса звезды.

Учитывая уравнение состояния (29.8) и формулу (18.5) для среднего значения отношения A/Z , можно систему (45.2) привести к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} &= \frac{32}{3} \left(\frac{m_e}{m_n} \right)^3 \frac{A}{Z} r^2 x^3, \\ \frac{dx}{dr} &= - \frac{m_n}{m_e} \cdot \frac{A}{Z} \cdot \frac{u \sqrt{1+x^2}}{x \cdot r (r-2u)}. \end{aligned} \right\} \quad (45.3)$$

Здесь A/Z — среднее значение отношения чисел A и Z . Эти уравнения отличаются от (37.1) для конфигураций белых карликов только членом $2u$ в знаменателе. Теперь начальные условия таковы:

$$r=R_0, \quad x_0 \equiv x(R_0), \quad u(R_0)=u_0, \quad (45.4)$$

где R_0 — координатный радиус поверхности раздела Aen -и Ae -фаз, $x_0=45$ — значение граничной энергии электронов (в единицах $m_e c^2$) на этой поверхности, а u_0 — «масса» барионного ядра. Напомним, что среднее отношение A/Z определяется формулой (18.5). При наличии члена x^3 в ней аналитическое интегрирование невозможно. Однако можно эту формулу заменить следующей:

$$\frac{A}{Z} = 2 + 5,44 \cdot 10^{-3} x + 2,47 \cdot 10^{-4} x^2, \quad (45.5)$$

которая также с достаточно хорошей точностью аппроксимирует непрерывную кривую для $\bar{A/Z} \equiv A/Z$, приведенную на рис. 3.

Уравнения (45.4) допускают дальнейшие упрощения. Так, учитывая то обстоятельство, что масса оболочки очень мала по сравнению с полной массой звезды, можно при вычислении толщины оболочки пренебречь незначительным изменением ее. Справедливость этого утверждения была проверена путем численного интегрирования, но она станет очевидной и после получения окончательного результата. Учитывая эти замечания, а также соотношение (45.5) и интегрируя второе уравнение (45.3) в пределах от $x(R_0)$ до $x(R)=0$, для радиуса

звезды R находим

$$R = R_0 \left[1 - \alpha \frac{R_0}{r_g} \left(1 - \frac{r_g}{R_0} \right) \right], \quad (45.6)$$

где $r_g = 2M$ — гравитационный радиус звезды, $\alpha = 38,72 \frac{m_e}{m_n} = 0,02109$. Отсюда замечаем, что для конфигураций с R_0 , мало отличающимся от r_g (это имеет место в случае конфигураций с гиперонным ядром), толщина оболочки $R - R_0$ очень мала по сравнению с радиусом R . Для менее плотных конфигураций, в которых $\rho(0) < 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$, имеет место $\frac{R_0}{r_g} > 25$ и толщина оболочки оказывается сравнимой с радиусом звезды.

Теперь оценим величину массы оболочки. Из уравнений (45.3) следует, что

$$\frac{du}{dx} = - \frac{32}{3} \left(\frac{m_e}{m_n} \right)^4 \frac{r^3 (r - 2u)}{u \sqrt{1 + x^2}} \cdot x^4. \quad (45.7)$$

Интегрируя (45.7) в пределах от x_0 до $x=0$, получаем

$$\int_{u_0}^M \frac{u \, du}{r^3 (r - 2u)} = \frac{4}{3} \left(\frac{m_e}{m_n} \right)^4 \left[x_0 (2x_0^2 - 3) \sqrt{x_0^2 + 1} + \right. \\ \left. + 3 \ln \left(x_0 + \sqrt{x_0^2 + 1} \right) \right],$$

где $M \equiv u(R)$, $u_0 = u(x_0)$, $x_0 = 45$ и $x(R) = 0$. Обозначим левую часть через I . Заменяя знаменатель подынтегрального выражения его наименьшим $R_0^3 (R_0 - 2u_0)$ и наибольшим $R^3 (R - 2M)$ значениями, находим

$$\frac{I_{\max}}{I_{\min}} = \frac{R_0^3 (R_0 - 2u_0)}{R^3 (R - 2M)} \approx \left(\frac{R_0}{R} \right)^4.$$

Для конфигураций, содержащих гиперонное ядро ($\rho(0) > 3 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$), радиус R мало отличается от R_0 , следовательно, $(I_{\max} - I_{\min})/I_{\max} \ll 1$. Учитывая это обстоятельство, для таких конфигураций получаем

$$M = u_0 + P(R_0) \frac{\bar{r}^3 (\bar{r} - 2u_0)}{u_0}. \quad (45.8)$$

Таблица 11

Параметры конфигураций, состоящих из идеального газа барионов

Плотность в центре, $\text{г}\cdot\text{см}^{-3}$	Барионное ядро		Оболочка				Звезда		Параметры водородной оболочки	
			Aел-фаза		Aе-фаза					
	масса в единицах $M_{\odot}$	радиус, км	масса в единицах $M_{\odot}$	толщина, км	масса в единицах $M_{\odot}$	толщина, км	масса в единицах $M_{\odot}$	радиус, км	масса в единицах $M_{\odot}$	толщина, км
$1,00\cdot 10^{14}$	0,1812	11,755	0,1050	5,863	$6,76\cdot 10^{-4}$	12,575	0,2869	30,193	$1,58\cdot 10^{-8}$	493
$2,24\cdot 10^{14}$	0,3428	12,522	0,0649	2,739	$2,39\cdot 10^{-4}$	5,240	0,4074	21,201	$6,38\cdot 10^{-9}$	265
$3,62\cdot 10^{14}$	0,4162	11,467	0,0356	2,326	$1,12\cdot 10^{-4}$	3,362	0,4519	17,155	$3,15\cdot 10^{-9}$	174
$2,34\cdot 10^{15}$	0,6299	9,974	0,0114	1,000	$3,24\cdot 10^{-5}$	1,227	0,6413	12,201	$4,61\cdot 10^{-9}$	54
$1,09\cdot 10^{16}$	0,5110	8,343	0,0069	0,898	$1,66\cdot 10^{-5}$	1,093	0,5179	10,334	$3,35\cdot 10^{-10}$	51
$8,29\cdot 10^{16}$	0,3220	6,672	0,0049	0,979	$9,01\cdot 10^{-6}$	1,301	0,3269	8,952	$2,83\cdot 10^{-10}$	61
$1,15\cdot 10^{16}$	0,1721	5,452	0,0047	1,390	$8,24\cdot 10^{-6}$	2,328	0,1768	9,169	$4,33\cdot 10^{-10}$	105
∞	0,3066	8,439	0,0161	2,110	$4,04\cdot 10^{-5}$	2,826	0,3227	13,375	$1,05\cdot 10^{-9}$	118

Т а б л и ц а 12

Параметры конфигураций, состоящих из реального газа барионов [24]

Плотность в центре, $\frac{g}{cm^3}$	Барное ядро		Оболочка				Звезда	
			Яд-фаза		Ае-фаза			
	масса в единицах $M_{\odot}$	радиус, км	масса в единицах $M_{\odot}$	толщина, км	масса в единицах $M_{\odot}$	толщина, км	масса в единицах $M_{\odot}$	радиус, км
$1,38 \cdot 10^{15}$	0,9388	8,399	$7,3 \cdot 10^{-4}$	0,1924	$8,76 \cdot 10^{-6}$	0,3951	0,9395	8,9865
$1,78 \cdot 10^{15}$	1,2328	8,579	$5,0 \cdot 10^{-4}$	0,1230	$7,68 \cdot 10^{-6}$	0,2611	1,2333	8,9631
$2,30 \cdot 10^{15}$	1,5702	8,550	$3,0 \cdot 10^{-4}$	0,0769	$5,77 \cdot 10^{-6}$	0,1584	1,5705	8,7853
$3,22 \cdot 10^{15}$	1,7304	8,266	$2,0 \cdot 10^{-4}$	0,0546	$4,12 \cdot 10^{-6}$	0,1110	1,7303	8,4315
$5,14 \cdot 10^{15}$	1,7367	7,697	$1,0 \cdot 10^{-4}$	0,0396	$2,68 \cdot 10^{-6}$	0,0833	1,7369	7,1898
$8,28 \cdot 10^{15}$	1,6953	7,284	$1,0 \cdot 10^{-4}$	0,0352	$2,01 \cdot 10^{-6}$	0,0715	1,6924	7,3907
$1,37 \cdot 10^{16}$	1,5567	6,727	$1,0 \cdot 10^{-4}$	0,0317	$1,48 \cdot 10^{-6}$	0,0671	1,5568	6,8259
$7,42 \cdot 10^{16}$	1,3124	6,088	$1,0 \cdot 10^{-4}$	0,0362	$1,15 \cdot 10^{-6}$	0,0754	1,3124	6,1995
$1,08 \cdot 10^{17}$	1,2911	6,076	$1,0 \cdot 10^{-4}$	0,0401	$1,22 \cdot 10^{-6}$	0,0784	1,2912	6,1945
∞	1,3147	6,277	$1,0 \cdot 10^{-4}$	0,0412	$1,37 \cdot 10^{-6}$	0,0841	1,3147	6,4023

Здесь $P(R_0) = 9,55 \cdot 10^{-7}$ — давление на границе раздела Ae - и Aen -фаз, где $x_0 = 45$ и $\bar{r} = \frac{R_0 + R}{2}$. У барионных конфигураций u_0 порядка $0,05 \div 0,2$, тогда как второй член в (45.8) порядка 10^{-6} , таким образом, масса оболочки оказывается более чем на три-четыре порядка меньше массы всей звезды. Для менее плотных конфигураций, где вышеизложенное приближение не проходит, масса получается численным интегрированием.

В таблицах 11 и 12 приведены параметры ряда моделей барионных конфигураций для идеального и реального вариантов газа элементарных частиц. Значения масс и размеров отдельных областей звезд приведены в средних столбцах таблицы 11. В двух последних столбцах табл. 11 приводятся также параметры оболочек в предположении, что они состоят только из водорода [89]. Параметры барионного ядра в случае реального газа отличаются от данных, приведенных в таблице 10, так как они вычислены для другого варианта реального газа [14, 92]. Данные о параметрах фаз Ae и Aen взяты из работы [101]. Параметры оболочек вычислены в предположении, что A/Z при продвижении к поверхности звезды изменяется непрерывно. На самом деле на определенных расстояниях, где то или иное ядро из-за β -распада увеличивает свой заряд Z , отношение A/Z и тем самым плотность энергии должны измениться скачком. Но расчеты показывают, что эти маленькие скачки в значении ρ не сказываются на значениях массы и радиуса звезды. Давление, разумеется, изменяется непрерывно.

§ 46. Вращающиеся сверхплотные звезды

Пусть наблюдатель находится в неподвижной системе отсчета, а звезда вращается относительно него по часовой стрелке. По определению, угловая скорость вращения равна

$$\Omega = c \frac{d\varphi}{dx^0}.$$

Будем пользоваться сферическими координатами: $x^0 = t$, $x^1 = R$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$.

В случае вращающихся сверхплотных звездных конфигураций распределение масс и, следовательно,

гравитационное поле являются аксиально-симметричными:

$$g_{ik} = g_{ik}(R, \theta, \Omega).$$

Таким образом, предполагается, что Ω не зависит от координат, поле и распределение масс являются стационарными.

Произведем преобразование координат: $x'^0 = -x^0$, $x'^1 = x^1$, $x'^2 = x^2$, $x'^3 = -x^3$. При этом знак угловой скорости не изменится. Следовательно, g_{ik} не будут испытывать каких-либо изменений. Тогда из инвариантности ds^2 непосредственно следует, что $g_{01} = g_{13} = g_{23} = g_{02} = 0$. Таким образом, при постоянном Ω четырехмерный интервал можно записать в виде

$$ds^2 = g_{00}(dx^0)^2 + g_{11}(dx^1)^2 + g_{22}(dx^2)^2 + g_{33}(dx^3)^2 + \\ + 2g_{12}dx^1dx^2 + 2g_{03}dx^0dx^3.$$

Подходящим преобразованием координат R и θ можно сократить число компонент метрического тензора еще на два. Так, потребуем, чтобы в новых координатах имело место $g'_{21} = 0$, $g'_{33} = g'_{22} \sin^2 \theta$. Тогда после введения следующих обозначений:

$$g'_{11} = e^\lambda, \quad g'_{22} = e^\mu, \quad g'_{03} = \omega e^\mu \sin^2 \theta, \quad g'_{00} = \omega^2 e^\mu \sin^2 \theta - e^\nu$$

интервал запишется в виде

$$ds^2 = (e^\nu - \omega^2 e^\mu \sin^2 \theta)(dx^0)^2 - e^\lambda dR^2 - \\ - e^\mu (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - 2\omega e^\mu \sin^2 \theta d\varphi dx^0, \quad (46.1)$$

где ν , μ , λ , ω — функции R , θ и Ω . Важно отметить, что в случае вращения никаким преобразованием координат невозможно исключить компоненту g_{03} (стационарное поле). Это можно сделать только в случае статического (т. е. невращающегося) аксиально-симметричного распределения масс, но такой ситуации в природе не существует.

Поскольку при отражении времени угловая скорость меняет знак, а ds^2 остается неизменным, отсюда следует, что все компоненты метрического тензора, за исключением g_{03} , являются четными функциями от Ω . Что касается ω , то она нечетная функция от Ω .

Внешнее решение в случае вращения было найдено в [221]. Оно является точным, но частным решением, зависит от массы и полного релятивистского момента инерции. Внутренняя задача здесь гораздо труднее, чем в случае невращающихся тел, поскольку мы имеем дело с дифференциальными уравнениями в частных производных. Однако имеется одно обстоятельство, которое позволяет найти приближенные численные решения. Оказывается, что и в релятивистской теории угловая скорость вращения не может быть сколь угодно большой. При угловых скоростях, превышающих некоторое максимальное значение $\Omega_{\max}$, начинается истечение вещества с экватора. Аналогично нерелятивистскому случаю здесь также интегральные характеристики и функции, определяющие внутреннее строение конфигураций (разумеется, и метрику пространства), зависят не от Ω , а от безразмерного параметра $\beta = \Omega^2 / 8\pi k \rho_0$. При заданной центральной плотности максимальное значение β оказывается

достаточно малым: $\beta_{\max} = \frac{\Omega_{\max}^2}{8\pi k \rho_0} \ll 1$. Это обстоятельство позволяет разработать приближенные методы решения проблемы, рассматривая вращение как малое возмущение. Искомые функции разлагаются в ряд по степеням малого параметра β . При этом ряды для диагональных элементов метрического тензора будут содержать целочисленные степени β (так как они четные функции от Ω), а ряд функции g_{03} — полуцелые степени β .

В нулевом приближении распределение масс является сферически-симметричным, в пустоте метрика определяется решением Шварцшильда. В следующем приближении мы прежде всего должны учесть поправки к невозмущенной сферической задаче, пропорциональные $\beta^{1/2}$. В этом приближении диагональные элементы метрического тензора, очевидно, остаются невозмущенными, так как они зависят от целых степеней β (четные функции Ω), и поэтому первая поправка у них должна быть порядка β . В приближении $\beta^{1/2}$ распределение масс продолжает оставаться сферически-симметричным, поскольку оно определяется диагональными элементами g_{ik} . Или, выражаясь яснее, конфигурация в этом приближении сохраняет центральную симметрию вследствие того, что давление также является четной функцией Ω . Это

приближение исследовалось в работах [246, 42а, 79—81]. Вне распределения масс для g_{03} было найдено

$$g_{03} = -\frac{2I}{r} \sin^2 \theta, \quad (46.2)$$

где I — полный релятивистский момент инерции. Таким образом, в приближении $\beta^{1/2}$ в выражении ds^2 добавляется только g_{03} и больше ничего.

Во втором приближении мы должны учесть поправки порядка β . Это приближение исследовалось в работах [193—196, 108, 109]. Теперь мы должны написать

$$\left. \begin{aligned} e^{-\lambda} &= e^{-\lambda_0} (1 + \beta f), & e^\nu &= e^{\nu_0} (1 + \beta \Phi), \\ e^\mu &= R^2 (1 + \beta U), & \omega &= \sqrt{\beta} q, \\ P &= P^0 + \beta P_1, \end{aligned} \right\} \quad (46.3)$$

где f , Φ , U и q — неизвестные функции от R и θ , а e^{λ_0} и e^{ν_0} — соответствующие функции нулевого приближения; они зависят только от R . Вне распределения масс $e^{\nu_0} = e^{-\lambda_0} = 1 - r_g/R$.

В качестве независимых уравнений [108] были выбраны следующие комбинации:

$$\left. \begin{aligned} G_1^1 - G_0^0 &= 8\pi (T_1^1 - T_0^0), & G_2^1 &= 0, \\ G_2^2 + G_3^3 &= 8\pi (T_2^2 + T_3^3), & G_0^3 &= 8\pi T_0^3 \end{aligned} \right\} \quad (46.4)$$

и два уравнения гидродинамики. Здесь $G_i^k = R_i^k - \frac{1}{2} R \delta_i^k$.

Уравнения гидродинамики $T_{i;k}^k = 0$ сводятся к следующим [196]:

$$\left. \begin{aligned} u^3 &= \Omega u^0 = [e^\nu - e^\mu (\omega + \Omega)^2 \sin^2 \theta]^{-1/2}, \\ \int \frac{dP}{P + p} &= -\frac{1}{2} v - \\ -\frac{1}{2} \ln [1 - e^{\lambda-\nu} (\omega + \Omega)^2 \sin^2 \theta] + C &= \Psi(R, \theta). \end{aligned} \right\} \quad (46.5)$$

Первое из уравнений (46.5) означает, что конфигурация должна вращаться с постоянной угловой скоростью Ω , второе есть интеграл релятивистских уравнений гидродинамического равновесия, C — постоянная интегрирова-

ния. Функцию Ψ также нужно разложить в ряд по степеням β . В рассматриваемом приближении

$$\Psi(R, \theta) = \Psi^0(R) + \beta \Psi_1(R, \theta).$$

Очевидно, что выражение (46.2) для g_{03} не изменится, так как в разложении этой функции по степеням β после члена, пропорционального $\beta^{1/2}$, идет член, пропорциональный $\beta^{3/2}$ (g_{03} — нечетная функция Ω). Отсюда следует также, что функция q в приближении β зависит только от R . В [108, 193] для этой функции вне распределения масс было найдено аналитическое выражение.

Функции f , Φ , U , P разлагались в ряд по полиномам Лежандра. Оказывается, что в приближении β в уравнениях Эйнштейна переменные R и θ разделяются. Дальнейшая процедура решения задачи идентична с нерелятивистским случаем (см. § 39). Во внешней области мы имеем следующее решение:

$$\left. \begin{aligned} e^{-\lambda} &= 1 - \frac{r_g}{R} + \beta \sum_l \left[A_l \Phi_l(R) - \frac{24C_1^2}{R^4} \delta_{0l} - \frac{3C_1^2}{R^4} \delta_{2l} \right] P_l(\gamma), \\ e^\nu &= 1 - \frac{r_g}{R} + \beta \sum_l A_l \Phi_l(R) P_l(\gamma), \\ e^{\mu} &= R^2 [1 + \beta \sum_l U_l(R) P_l(\gamma)], \\ \omega &= \sqrt{\beta} \cdot \frac{C_1}{R^3}, \end{aligned} \right\} \quad (46.6)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_l(R) &= \frac{1}{R^{l+1}} F\left(l+1, l-1, 2l+2, \frac{r_g}{R}\right) + \\ &+ \frac{C_1^2}{R^4 A_l} \left(\frac{1}{2} - \frac{r_g}{R} \right) \delta_{0l} - \frac{C_1^2}{2r_g R^3 A_l} \left(\frac{r_g^2}{R^2} + \frac{r_g}{R} - 2 \right) \delta_{2l}, \\ U_l(R) &= \int \left\{ -\frac{A_l}{1-r_g/R} \frac{d\Phi_l}{dR} - \right. \\ &\left. - \frac{6C_1^2}{l(l+1)-2} \cdot \frac{1}{R^5} \left(\frac{r_g/R}{1-r_g/R} + 2 \right) (\delta_{0l} - \delta_{2l}) \right\} dR, \end{aligned}$$

A_l и C_l — постоянные, $\gamma = \cos \theta$, а F — гипергеометрическая функция. Затем определялись условия в центре распределения масс и проводилось численное интегрирование уравнений (они представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения по R). На поверхности конфигурации внутреннее решение сшивалось с внешним (46.6). Из условия сшивки определяются все постоянные, входящие во внутреннее и внешнее решения. При этом оказывается, что в приближении β члены разложения с $l > 2$ выпадают.

На рис. 22 приведен график зависимости массы от логарифма центральной плотности для конфигураций,

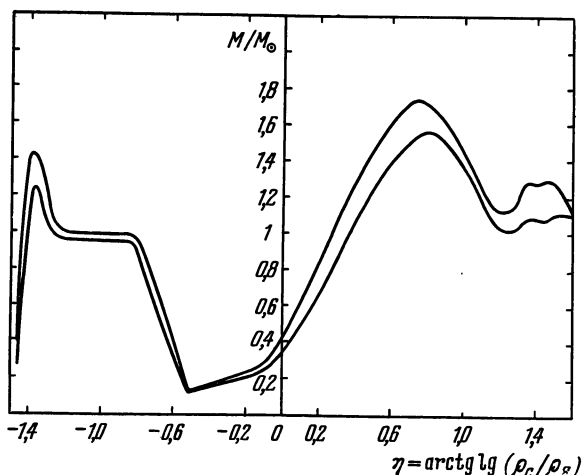


Рис. 22. Кривая зависимости массы от центральной плотности для барионных конфигураций, вращающихся с максимальной угловой скоростью $\Omega_{\max}$ (верхняя линия). Нижняя линия изображает невращающиеся конфигурации.

вращающихся с максимальной угловой скоростью. Значение $\Omega_{\max}$ определялось из условия равенства центробежных и центростремительных сил на поверхности у экватора. Использовалось уравнение состояния для реального газа, приведенное в (33.6). Как мы видим из этого рисунка, максимальное увеличение массы составляет при

мерно 30%. На рис. 23 изображена зависимость релятивистского момента инерции I от плотности в центре ρ_0 .

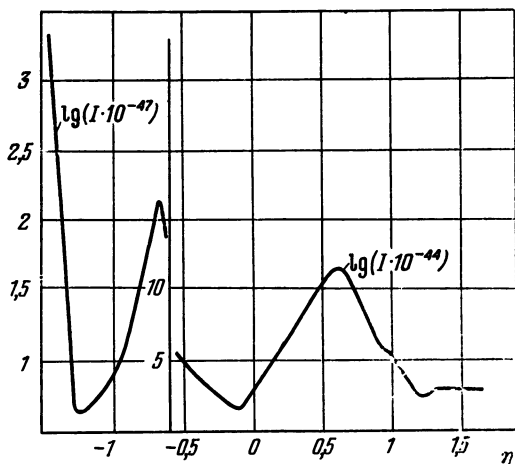


Рис. 23. Зависимость полного релятивистского момента инерции I от центральной плотности. I измерена в единицах CGS. На оси абсцисс отложены значения параметра $\eta = \arctg \lg \frac{\rho_0}{\rho_1}$, где $\rho_1 = 3,62 \cdot 10^{14} \text{ г/см}^3$ — ядерная плотность.

Как было показано в [81], величина I определяется формулой

$$I = \frac{1}{2} \frac{R_0^4 q'(R_0)}{3q(R_0) + R_0 q'(R_0)}. \quad (46.7)$$

Вплоть до второго приближения, т. е. до членов порядка β , величина I не зависит от угловой скорости, она такая же, как у жесткого шара, вращающегося вокруг оси z . Кривая $I(\rho_0)$ по своему внешнему виду сходна с кривой массы $M(\rho_0)$.

Как мы видим, учет вращения не вносит существенных изменений в значения параметров барионных конфигураций. В случае вращения все характеристики конфигураций зависят от двух параметров: плотности в центре ρ_0 и значения угловой скорости Ω .

§ 47. Горячие сверхплотные небесные тела

Наблюдение барионных звезд является одной из актуальных проблем астрофизики. Ввиду весьма малых радиусов таких звезд их светимость

$$L_{\gamma} = 4\pi R^2 \sigma T_R^4 \quad (47.1)$$

даже при поверхностных температурах T_R , характерных для белых карликов, оказывается весьма низкой. При более же высоких температурах максимум излучения перемещается в рентгеновскую область. Поэтому наблюдение таких объектов перспективно лишь методами внеатмосферной астрономии. В настоящее время при помощи спутников в нашей галактике обнаружен целый ряд рентгеновских источников, неотожествленных в оптической области. Не исключена возможность, что некоторые из них являются барионными звездами.

Температура в недрах плотных звезд не может быть настолько высокой, чтобы снять вырождение. Большие значения температуры исключаются благодаря катастрофическому характеру нейтринных потерь и высокой теплопроводности. Возможные значения T далеко недостаточны для сколько-нибудь заметного изменения внутреннего строения, массы и радиуса конфигураций. В соответствии со сказанным в задаче горячих конфигураций сначала путем интегрирования уравнений (40.12) определяются масса M , радиус R и функции $\nu(r)$, $\lambda(r)$, $u(r)$, $P(r)$ для полностью вырожденного вещества ($T=0$). После этого в качестве второго этапа решения задачи можно приступить к определению температурных параметров звезды.

В вырожденном веществе конвекция отсутствует [123]. Перенос энергии из недр к поверхности совершается путем теплопроводности. Градиент температуры определяется уравнением [230а, 267]

$$\frac{d}{dr} (T e^{\nu/2}) = - \frac{3\chi\rho}{16\pi T^3} \cdot \frac{L_{\gamma} e^{\nu/2}}{4\pi r^2} \left(1 - \frac{2u}{r}\right)^{-1/2}. \quad (47.2)$$

Здесь $L_{\gamma}(r)$ — фотонная светимость (поток энергии электромагнитного излучения) на расстоянии r от центра, а $\chi(r)$ — эффективный коэффициент непрозрачности, ко-

торый выражается через коэффициенты поглощения излучения $\chi_r(r)$ и теплопроводность электронов $\lambda_c(r)$ [267, 258]:

$$\frac{1}{\chi} = \frac{1}{\chi_r} + \frac{3\rho\lambda_c}{16\pi T^3}. \quad (47.3)$$

В поверхностном невырожденном слое преобладает первое слагаемое, а для вырожденных недр — второе. В общем случае как χ_r , так и λ_c являются функциями от плотности и температуры:

$$\chi_r = \chi_r(\rho, T), \quad \lambda_c = \lambda_c(\rho, T).$$

Подробные сведения об этих величинах можно найти в монографиях [257, 118].

В белых карликах и барионных звездах термоядерные источники энергии считаются исчерпанными, излучение обусловлено только запасами тепловой энергии. Обозначим через $\varepsilon_T(\rho, T)$ плотность тепловой энергии. Согласно (13.6) в приближении T^2 эта величина равна

$$\varepsilon_T = \frac{1}{2} T^2 \sum_i \frac{\pi^2 k^2}{2m_i c^2} \frac{\sqrt{x_i^2 + 1}}{x_i^2} n_i + \frac{3}{2} n_A kT, \quad (47.4)$$

где k — постоянная Больцмана, n_i — плотность i -го типа фермионов в вырожденном газе частиц, $x_i = p_i / m_i c$, p_i — граничный импульс, n_A — плотность атомных ядер. В случае барионных звезд ядра имеются только в сравнительно тонком слое у поверхности, в белых же карликах n_A отлично от нуля везде. Первое слагаемое в (47.4) получается из второго члена в разложении (13.6). Для полной же внутренней энергии имеем

$$u_T = 4\pi \int_0^R \varepsilon_T e^{v/2} \left(1 - \frac{2u}{r}\right)^{-1/2} r^2 dr. \quad (47.5)$$

Здесь u_T — это та энергия, которая доходит до наблюдателя, находящегося в бесконечности, посредством фотонного и нейтринного излучения, когда звезда от исходного состояния с температурой T остывает до состояния с $T=0$.

Из уравнения баланса энергии имеем

$$\frac{d}{dr} [(L_\gamma + L_\nu) e^\nu] = -4\pi r^2 e^\nu \left(1 - \frac{2u}{r}\right)^{-1/2} \left(\frac{de^\nu}{dr}\right)_{r=\text{const}}, \quad (47.6)$$

где L_ν — поток энергии, обусловленный нейтрино (нейтринная светимость). Эта величина выражается через энергию q_ν , уносимую нейтрино из единицы объема в единицу времени, соотношением

$$\frac{d}{dr} (L_\nu e^\nu) = 4\pi r^2 e^\nu \left(1 - \frac{2u}{r}\right)^{-1/2} \zeta_\nu. \quad (47.7)$$

Воспользовавшись универсальным лагранжианом слабого взаимодействия, q_ν можно выразить через поперечные сечения всевозможных процессов, в которых образуется нейтрино. Мы не имеем возможности здесь обсудить этот вопрос, интересующимся рекомендуем работы [132а, 270]. Эта величина, аналогично λ_c , χ_r , является функцией плотности и температуры: $q_\nu = q_\nu(\rho, T)$.

Итак, будем считать, что масса M и радиус R уже определены из интегрирования системы уравнений (40.12) для полностью вырожденного вещества. Тогда, задавая определенную светимость L_γ , из (47.1) можно вычислить эффективную поверхностную температуру T_R . Нам необходимо найти также значения давления P_R и плотности ρ_R на поверхности конфигурации. Для определения этих величин прежде всего воспользуемся определением оптической глубины поверхностного слоя. В теории звездных атмосфер под оптической толщиной атмосферы подразумевается величина

$$\tau_R = \int_R^\infty \chi \rho dr \approx \chi(\rho_R, T_R) \int_0^\infty \rho dr = \frac{2}{3}. \quad (47.8)$$

С другой стороны, из уравнения (40.10) имеем

$$P_R = \frac{GM}{R^2} \left(1 + \frac{P_R}{\rho_R c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi R^3 P_R}{Mc^2}\right) \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)^{-1} \int_R^\infty \rho dr.$$

Учитывая условие (47.8), отсюда находим

$$\chi(\rho_R, T_R) \cdot P_R = \\ = \frac{2GM}{3R^2} \left(1 + \frac{P_R}{\rho_R c^2}\right) \left(1 + \frac{4\pi R^3 P_R}{Mc^2}\right) \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R}\right)^{-1} \quad (47.9)$$

Мы имеем еще одно неиспользованное уравнение, а именно, уравнение состояния для наружного невырожденного слоя

$$P = \frac{k\rho}{\mu m_p} T + \frac{1}{3} a T^4, \quad (47.10)$$

где μ — средний молекулярный вес, измеренный в единицах массы протона. Если известен вид функций, то мы из соотношений (47.9) и (47.10) можем определить давление P_R и плотность ρ_R на поверхности при заданных M , R и T_R (M и R — параметры холодной барионной конфигурации, а L_γ и, следовательно, T_R являются независимыми параметрами).

Имея граничные значения основных величин на поверхности звезды, можно приступить к интегрированию уравнений (от поверхности к центру), определяющих температурное распределение. При этом вначале в качестве уравнения состояния используется (47.10). По ходу дела параллельно вычисляются давление и плотность вырожденной Ae -фазы вещества по формулам (29.8). На глубине, где давление, вычисленное по формуле (47.10), приравнивается давлению для вырожденного электронного газа, совершается переход к уравнению состояния (29.8), которое и используется в дальнейшем до наступления Aen -фазы. При дальнейшем продвижении к центру мы имеем дело с теми уравнениями состояния вырожденного вещества, которые были использованы в расчетах совершенно холодных конфигураций.

В процессе интегрирования уравнения (47.2), вследствие большой теплопроводности вырожденных электронов, начиная с некоторого расстояния r_0 , величина $T e^{\frac{v(r)}{2}}$ практически остается постоянной:

$$T(r) e^{\frac{v(r)}{2}} \approx \text{const}, \quad (47.11)$$

Отсюда для температуры в центре звезды получаем

$$T(0) = T(r_0) e^{\frac{v(r_0) - v(0)}{2}}. \quad (47.12)$$

В грубом приближении за поверхность $r=r_0$ можно принять ту, на которой давления, определяемые формулами (29.8) и (47.10), равны, т. е. где вырождение электронов становится заметным. В [270] было показано, что поверхность расположена чуть глубже, где-то в пределах слоя Ae -фазы. Однако, как бы то ни было, поверхностный слой звезды, где имеется заметный градиент температуры, весьма тонок, так что доминирующее количество вещества находится в центральной сфере, где справедливо соотношение (47.11). Поэтому при интегрировании уравнения (47.2) от поверхности звезды сначала можно не учитывать изменение $L_\gamma e^v$, которое в общем случае должно определяться из (47.6).

После того как найдено распределение температуры $T(r)$, можно интегрированием уравнений (47.5) и (47.7) от центра звезды с условиями $L_\gamma(0) = 0$, $U_T(0) = 0$ определить также нейтринную светимость $L_\nu(R)$ и полную тепловую энергию $U_T(R)$. Изменяя фотонную светимость звезды L_γ , путем интегрирования уравнений (47.2), (47.5) и (47.7) можно построить графики функций U_T , L_ν и $T(r)$ в зависимости от L_γ . При этом возможно определить также время остывания звезды от значения светимости $L_\gamma^{(1)}$ до $L_\gamma^{(2)}$. Время остывания можно получить из (47.6). Имеем

$$L_\gamma(R) + L_\nu(R) = - \frac{dU_T}{dt} e^{-v(R)}.$$

Отсюда

$$\Delta t = - \frac{\Delta U_T e^{-v(R)}}{L_\gamma(R) + L_\nu(R)}, \quad (47.13)$$

где Δt — время убывания светимости от L_1 до L_2 , а $\Delta U_T = U_T^{(2)} - U_T^{(1)}$.

В работе [270] были рассчитаны основные характеристики горячей нейтронной звезды с $M=1 M_\odot$, $R=5,184$ км в предположении, что ее атмосфера (невыврожденный поверхностный слой) состоит из железа. Расчеты велись

Таблица 13

Тепловые параметры нейтронной звезды с $M=1 M_{\odot}$, $R=5,184$ км, имеющей железную оболочку

$T (R)$	$\lg L_{\gamma}$	$\lg L_{\nu}$	$\lg T (0)$	$\lg U_T$	$\lg t$	$\lambda_{\max} = \frac{0,29}{T_R}$
$5 \cdot 10^7$	39,078	45,86	10,019	49,48	-4,26	0,584
$2 \cdot 10^7$	37,486	41,25	9,435	48,51	-1,10	1,459
10^7	36,282	38,91	9,035	47,51	0,615	2,918
$5 \cdot 10^6$	35,078	36,98	8,704	46,84	2,10	5,836
$2 \cdot 10^6$	33,486	34,03	8,215	45,84	4,08	14,59
10^6	32,282	31,03	7,738	44,80	5,16	29,18
$5 \cdot 10^5$	31,078	28,38	7,293	44,01	5,78	58,36
$2 \cdot 10^5$	29,486	—	6,621	42,71	6,25	145,9
10^5	28,282	—	6,178	41,78	6,54	291,8
$5 \cdot 10^4$	27,078	—	5,703	40,86	6,81	583,6
$2 \cdot 10^4$	25,486	—	5,070	39,61	7,19	583,6

Примечание. Энергия измерена в эрг, а светимость — в эрг/сек, t — время полного остывания звезды (в годах), $\lambda_{\max}$ — длина волны, соответствующая максимуму излучения в ангстремах.

без учета требований общей теории относительности, т. е. в уравнениях, определяющих температурные характеристики, принималось $e^{\nu} = e^{\lambda} = 1$. Результаты приведены в таблице 13. Толщина атмосферы не превышает одного метра.

Резюме

По релятивистской теории гравитации такие параметры, как масса, радиус и прочие, являются однозначными функциями центральной плотности ρ_0 (или давления P_0). Обратные функции $\rho_0(M)$, $\rho_0(R)$ и т. д., вообще говоря, неоднозначны. Рассмотрим, например, функцию $M(\rho_0)$, она имеет ряд максимумов и минимумов. В промежуточной области (между ветвью белых карликов при $\eta < -0,6$ и ветвью барионных звезд, где $\eta < -0,2$) масса имеет глубокий минимум, $M \approx 0,125 M_{\odot}$. Слева от этого минимума при $\eta = -1,36$ ($\rho_0 \approx 7 \cdot 10^9$ г·см⁻³) находится максимум белых карликов, $M = 1,25 M_{\odot}$, а справа — наивысший максимум барионных звезд, $M = 1,55 M_{\odot}$ при $\eta \approx 0,8$ ($\rho_0 \approx 4 \cdot 10^{15}$ г·см⁻³). За этим максимумом при возрастании ρ_0 функция $M(\rho_0)$ испытывает бесконечное число осцилляций с сильно

затухающей амплитудой и при $\rho_0 \rightarrow \infty$ масса стремится к пределу, равному $M = 1,09 M_\odot$.

Из рис. 20 мы видим, что масса сравнительно плотных ($\eta > 0$) барионных конфигураций, состоящих из реального газа, заметно больше массы конфигураций из идеального газа. Это обусловлено тем, что при плотностях, превышающих ядерную, мы имеем дело с мощными ядерными силами отталкивания, которые, при заданной плотности, разумеется, приводят к увеличению давления.

Сравнивая кривые 2 и 3 рис. 20 для идеального газа барионов (в котором учтены гипероны) и идеального газа нейтронов, мы замечаем, что при $\eta > 0,6$ (т. е. $\rho_0 \geq 2 \cdot 10^{15} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$) линия для массы нейтронных конфигураций расположена заметно выше линии $M(\rho_0)$ для барионных конфигураций. Причину этого можно понять, если учесть, что при переходе к системе единиц $c = k = 1$, $m_k^4 c^5 / (32\pi^2 h^3) = \frac{1}{4\pi}$ (см. (34.1)), где m_k — масса элементарной частицы, из которой в основном состоит вещество звезды, масса ее становится независимой от m_k , зависимость переносится на единицу измерения. Так, согласно (34.5) и (34.6) в этой системе единица массы $\beta_k \sim \frac{1}{m_k^2}$. Для нейтронных конфигураций $m_k = m_n$, а

для барионных, где ни один из барионов не имеет заметного численного преобладания, все будет определяться некоторым средним значением массы $\overline{m}_k$. Поскольку $\overline{m}_k > m_n$, масса барионных конфигураций должна иметь меньшее значение, так как величина единицы измерения в этом случае меньшая.

В области $0,5 > \eta > 0,45$ картина обратная (см. рис. 20): ординаты кривой $M(\eta)$ для нейтронных конфигураций больше ординат кривой барионных конфигураций. Строго говоря, это результат некорректного подхода, а именно, в расчетах нейтронных конфигураций предполагается, что до самой поверхности вещество состоит из вырожденного газа нейтронов, т. е. не учтено изменение химического состава, обусловленное наличием фаз Ae и Aen . Здесь наиболее важна роль Ae -фазы. В случае барионных конфигураций все это принималось во внимание.

Особый интерес представляют конфигурации с $-0,6 \leq \eta \leq -0,2$ ($8 \cdot 10^{13} \leq \rho_0 \leq 2,3 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$). Здесь массы почти на порядок меньше солнечной (см. таблицу 10), а радиусы велики. Например, при $\rho_0 = 7,1 \cdot 10^{13} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ $M = 0,236 M_\odot$ и $R = 4500 \text{ км}$.

Барионная конфигурация при центральной плотности выше ядерной состоит из массивного ядра, в котором имеются гипероны и барионные резонансы. Концентрации различных барионов — величины одинакового порядка. Значительная часть массы звезды сосредоточена здесь. За гиперонным ядром идет слой с плотностью порядка ядерной (фаза *Aen*). Затем наступает поверхностный слой, где вещество находится в таком состоянии, какое имеется в типичном белом карлике (*Ae*-фаза вещества: вырожденный электронный газ и голые атомные ядра). И, наконец, у горячих барионных звезд имеется плотная атмосфера небольшой толщины, где в зависимости от температуры могут быть ионы, свободные электроны, нейтральные возбужденные и невозбужденные атомы и электромагнитное излучение. У такой барионной звезды размеры наружных слоев, в том числе и толщина атмосферы, малы по сравнению с радиусом плотного ядра. Основная часть массы также сосредоточена в ядре. Нейтроны численно преобладают только в ядерном слое (т. е. в фазе *Aen*), вклад которого в величины массы и радиуса звезды совсем небольшой. В этом смысле название нейтронных звезд, распространенное в литературе, не оправдано и совершенно условно. Название «барионная звезда» правильно отражает суть дела.

При центральных плотностях ниже ядерной мы также имеем центральную плотную часть, состоящую из ядерного вещества (*Aen*-фаза), оболочку (*Ae*-фаза) и атмосферу. В этой области с уменьшением ρ_0 роль оболочки и атмосферы становится существенной. Так, для упомянутой выше конфигурации с $\rho_0 = 7,1 \cdot 10^{13} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ масса центрального ядра (нуклонно-ядерная фаза) равна $0,108 M_\odot$, а *Ae*-оболочки — $0,128 M_\odot$, радиус ядра равен $20,6 \text{ км}$, а толщина оболочки $\sim 4500 \text{ км}$.

Параметры конфигурации зависят от уравнения состояния, однако никаким разумным изменением его невозможно добиться изменения порядка массы, она всегда получается порядка солнечной.

Учет вращения не вносит существенного изменения в вышеописанную картину. Здесь возможности ограничены из-за того, что сколь угодно большие угловые скорости Ω недопустимы. Существует верхний предел $\Omega_{\max}$ для Ω . При $\Omega > \Omega_{\max}$ конфигурация теряет устойчивость; прежде всего начинается истечение вещества с экватора, $\Omega_{\max} \approx \left(\frac{GM}{R^3}\right)^{1/2}$. Максимальное значение угловой скорости оказывается недостаточным для заметного изменения структуры и параметров конфигураций. Так, даже при вращении с угловой скоростью $\Omega = \Omega_{\max}$ наибольшее увеличение массы не превышает 30% (см. рис. 22) и большие и малые полуоси сфероида отличаются от радиуса соответствующей сферической конфигурации примерно на 10%.

Наблюдение барионных звезд затруднено из-за того, что их светимость в видимых лучах очень мала (благодаря малости радиуса). Их наблюдение более перспективно в рентгеновской области спектра, если допустить наличие высоких температур. Однако особенно большие температуры невозможны благодаря интенсивным потерям энергии, прежде всего нейтринным.

ГЛАВА VIII

ВНУТРЕННЕЕ СТРОЕНИЕ И ДЕФЕКТ МАССЫ БАРИОННЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

§ 48. Распределение масс и геометрия внутри конфигураций

При вычислении внешних параметров барионных конфигураций по ходу интегрирования можно получить значения функций $t_n(r)$ и $u(r)$ в зависимости от расстояния r до центра. Знание этих двух функций достаточно для решения всех вопросов, касающихся геометрии и внутреннего строения. В случае конфигураций, находящихся в термодинамическом и гидродинамическом равновесии, внутренняя геометрия и структура понятия эквивалентны в том смысле, что знания одной из них достаточно для определения другой.

Согласно (26.1) условие термодинамического равновесия вдоль радиуса определяется соотношением

$$[\varepsilon_n(r) + V(r)] \sqrt{g_{00}(r)} = \text{const.} \quad (48.1)$$

В случае, когда температура звезды отлична от нуля, необходимо добавить также второе условие:

$$T(r) \sqrt{g_{00}(r)} = \text{const.} \quad (48.2)$$

Значения постоянных можно определить из условий на поверхности. Ниже рассматриваются только тела при абсолютном нуле температуры.

На поверхности звезды $\varepsilon_n = m_n$, $g_{00} = 1 - \frac{2M}{R}$ (M — масса, R — радиус, мы пользуемся системой единиц (34.1)) и нет энергии взаимодействия $V_n(R) = 0$.

Учитывая также соотношение (32.4), условие равновесия вдоль радиуса можно представить в следующем виде:

$$g_{00}(r) = \frac{1 - 2M/R}{V_n(r)/m_n + \text{ch}^2 \frac{t_n(r)}{4}}, \quad (48.3)$$

а в случае конфигураций, состоящих из идеального газа барионов,

$$g_{00}(r) = \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \text{ch}^{-2} \frac{t_n(r)}{4}. \quad (48.4)$$

Для радиальной же компоненты метрического тензора мы имеем следующую формулу:

$$g_{rr}(r) = \left[1 - \frac{2u(r)}{r}\right]^{-1} \quad (r < R), \quad (48.5)$$

где $u(r)$ — накопленная масса (см. определение (40.8)). Итак, задача определения метрики свелась к нахождению функций $t_n(r)$ и $u(r)$, которые, как было сказано выше, получаются по ходу численного интегрирования.

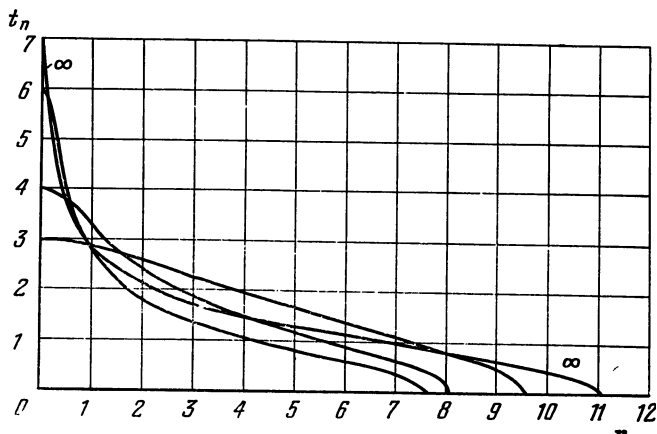


Рис. 24. Графики функции $t_n(r)$ для четырех моделей барионных конфигураций (вариант идеального газа). По оси абсцисс отложено расстояние от центра в километрах.

Графики функций $t_n(r)$ и $u(r)$ для ряда моделей конфигураций из идеального газа барионов представлены на рис. 24 и 25. Поскольку $t_k = t_k(t_n)$, по этим кривым

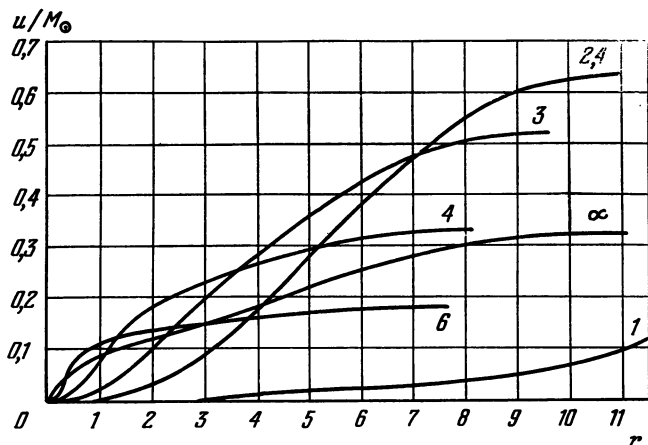


Рис. 25. Графики функции $u(r)$ для ряда моделей барионных конфигураций (вариант идеального газа). Числами на кривых указаны значения параметра $t_n(0)$. Линия для модели с $t_n(0)=1$ продолжается до $r=21,1$ км. Расстояние измеряется в километрах.

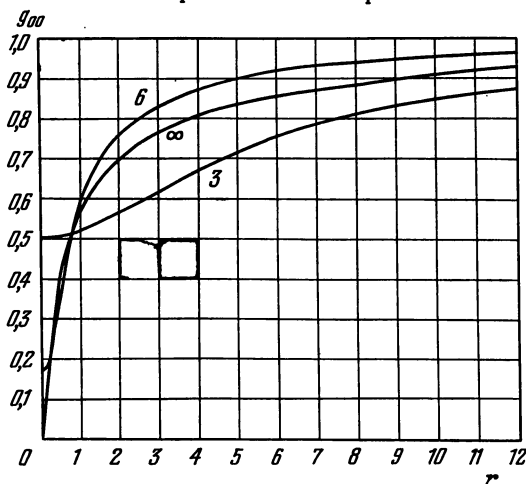


Рис. 26. Зависимость временной компоненты $g_{00}(r)$ метрического тензора от расстояния до центра для ряда конфигураций из идеального газа барионов. Расстояние измерено в километрах. Числами на кривых указаны значения параметра $t_n(0)$ для рассматриваемых конфигураций.

можно вычислить также плотность массы $\rho(r)$. А на рис. 26 и 27 изображены графики компонент метрического тензора $g_{00}(r)$ и $g_{rr}(r)$. Евклидову случаю соответствуют значения $g_{00}(r) = -g_{rr}(r) = 1$. В центре ординаты

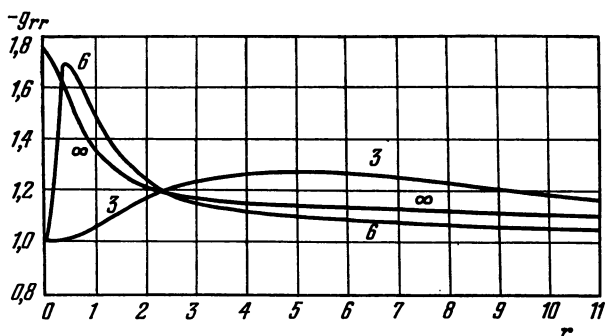


Рис. 27. Графики функции $-g_{rr}(r)$ для ряда конфигураций из идеального газа барионов. Числа на линиях указывают значения параметра $t_n(0)$. По оси абсцисс отложено расстояние от центра в километрах.

функции $g_{00}(r)$ для всех моделей меньше единицы, далее по мере удаления они монотонно растут и на бесконечно большом расстоянии стремятся к 1. Интересна кривая $g_{00}(r)$ для конфигурации с $t_n(0) = \infty$ и, следовательно, с бесконечно большим центральным давлением. В этом случае $g_{00}(0) = 0$, т. е. четырехмерный интервал превращается в чисто пространственный. С точки зрения внешнего наблюдателя явления в центре такой конфигурации должны происходить чрезвычайно медленно.

Графики $g_{rr}(r)$ в центре начинаются с евклидова значения, до определенного (для каждой конфигурации) расстояния поднимаются, затем, медленно спускаясь, вне конфигураций стремятся к пределу $g_{rr} = 1$. С возрастанием $\rho(0)$ максимум функций $g_{rr}(r)$ смещается влево и в пределе $\rho(0) \rightarrow \infty$ достигает оси ординат. Для этой предельной конфигурации график $g_{00}(r)$, начиная с центра, монотонно спускаясь, асимптотически стремится к пределу 1. Согласно (42.5) в этом случае до расстояний, где справедливо решение $u = 3r/14$, функция g ,

имеет постоянное значение, равное 1,75 (строго говоря, это значение достигается лишь в центре).

Поведение функций $g_{00}(r)$ и $g_{rr}(r)$ наглядно показывает, что внутри барионных конфигураций метрические свойства пространства существенно отличаются от «плоского» случая, пространство в области распределения масс сильно искривлено.

На рис. 28 приведен график функции $g_{rr}(r)$ для шести моделей конфигураций, состоящих из реального

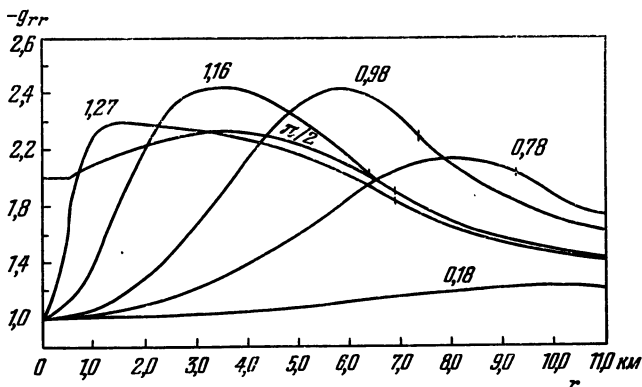


Рис. 28. Зависимость $-g_{rr}(r)$ от r для ряда конфигураций из реального газа барионов. Над кривыми указаны значения параметра $\eta = \arctg \lg \frac{\rho(0)}{\rho_1}$ для соответствующих конфигураций ($\rho_1 = 3,62 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ — ядерная плотность).

газа барионов (вариант с уравнением состояния, определяемым формулами (33.4) — (33.6)). Вид линии $g_{rr}(r)$ и ее изменение при переходе от одной конфигурации к другой несколько отличается от вида соответствующих линий для вариантов идеального газа (соответствующими мы называем конфигурации с одинаковой центральной плотностью энергии). При $\rho(0) < 5 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ характеры кривых на рис. 27 и 28 одинаковы, так как в обоих случаях фактически мы имеем дело с конфигурациями, состоящими из идеального газа. Кривые $g_{rr}(r)$ внутри звезды здесь также имеют пологий максимум.

При повышении плотности в центре максимум смещается в сторону центра и одновременно его высота понижается. Линии $g_{rr}(r)$ при повышении $\rho(0)$ стремятся к кривой для предельной конфигурации с $\rho(0) \rightarrow \infty$. Здесь максимум функции $g_{rr}(r)$ для предельной конфигурации находится не при $r=0$, а расположен где-то около $r=3,5$ км. Для этой конфигурации в области $r < 0,47$ км, в которой справедливо асимптотическое уравнение состояния $P \approx \rho$, согласно (43.1) $g_{rr}(r) = \frac{1}{1-2u/r} = 2$ при $r \rightarrow 0$. Графики рис. 28 продолжены за поверхностью конфигурации до расстояния $r=11$ км. Черточки на линиях показывают границу звезды. Конфигурации из реального газа более компактные, поэтому неевклидов характер пространства в этом случае выражен сильнее, чем в случае конфигураций из реального газа.

Заметим, что метрические свойства трехмерного пространства согласно (4.8) определяются тензором

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{\alpha\beta} + \frac{g_{0\alpha}g_{0\beta}}{g}.$$

В нашем случае (статическое поле) этот трехмерный тензор имеет лишь диагональные элементы. Собственное или истинное расстояние по направлению радиуса в соответствии с (4.7) равно

$$R_0 = \int_0^R \sqrt{g_{rr}} dr. \quad (48.6)$$

Значения истинного радиуса барионных звезд, приведенные в таблице 10, вычислены по этой формуле. В этом случае R является координатным радиусом звезды. Если $\rho(0)$ порядка или ниже ядерной, то радиус мало отличается от R , для более плотных конфигураций он заметно превосходит R .

§ 49. Число барионов в звезде

Весьма важной характеристикой барионных конфигураций является полное число барионов в звезде. Оно определяется интегралом

$$N = 4\pi \int_0^R n(r) \sqrt{g_{rr}(r)} r^2 dr, \quad (49.1)$$

где $n = \sum n_k$ — плотность барионов; суммирование производится по всем видам этих частиц. Значения n для моделей звезд из реального газа барионов приведены в последнем столбце таблицы 10.

На рис. 29 изображен график числа барионов в зависимости от плотности в центре. Из рисунка отчетливо

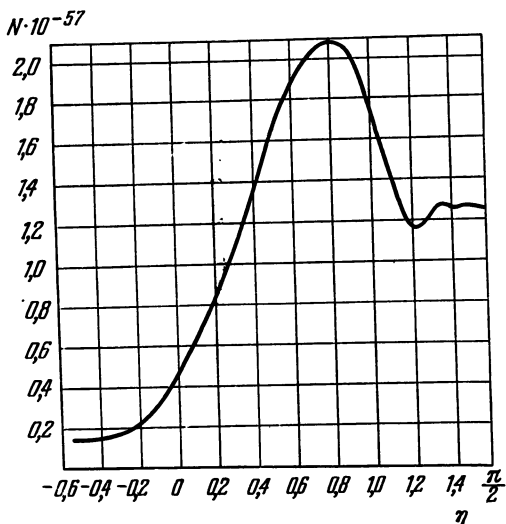


Рис. 29. Зависимость числа барионов N от параметра $\eta = \arctg \lg \frac{\rho(0)}{\rho_1}$, где $\rho_1 = 3,62 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$.

видно, что вид кривой $n(\eta)$ сходен с видом кривой массы $M(\eta)$. Это сходство характерно не только для моделей с реальным газом, но оно имеет место также и в случае моделей идеального газа барионов и нейтронов. Точки экстремумов обеих кривых совпадают. Это видно не только из рисунков, но и можно доказать непосредственно. С этой целью рассмотрим изменение массы конфигураций из вырожденного газа барионов, когда к ним добавляется некоторое небольшое число частиц без нарушения термодинамического равновесия в каждой точке и вдоль радиуса. Изменение массы барионной звезды при

таким адиабатическим изменением числа барионов равно

$$dM = \left(\sum_k \varepsilon_k^0 dN_k^0 + \sum_k \varepsilon_k^+ dN_k^+ + \sum_k dN_k^- \varepsilon_k^- + \sum \varepsilon_e dN_e \right) V \sqrt{g_{00}(r)} \quad (49.2)$$

Здесь $\varepsilon_k^0, \varepsilon_k^+, \varepsilon_k^-$ — граничные энергии Ферми k -го сорта нейтральных положительных и отрицательных барионов, dN_k^0, dN_k^+, dN_k^- — изменения чисел соответствующих барионов при изменении числа всех барионов на dN , ε_e и dN_e — энергия Ферми и изменение чисел лептонов в звезде. Разумеется, добавление или удаление частиц нужно произвести на поверхности Ферми, чтобы не нарушить равновесия. Далее нужно иметь в виду, что в гравитационном поле сохраняется не энергия частицы ε , а $\varepsilon \sqrt{g_{00}}$. Выражаясь образно, множитель $\sqrt{g_{00}}$ учитывает гравитационную потенциальную энергию частиц. Это видно хотя бы из того, что в нерелятивистском случае $\varepsilon \sqrt{g_{00}}$ переходит в $\varepsilon (1 + \Phi/c^2)$. Воспользовавшись условиями локального равновесия и нейтральности

$$\varepsilon_k^0 = \varepsilon_k, \quad \varepsilon_k^+ = \varepsilon_n - \varepsilon_e, \quad \varepsilon_k^- = \varepsilon_n + \varepsilon_e, \quad \varepsilon_e = \varepsilon_e,$$

$$\sum_k dN_k^+ = \sum_k dN_k^- + \sum_l dN_l,$$

соотношение (49.2) можно свести к следующему:

$$dM = \varepsilon_n(r) V \sqrt{g_{00}(r)} dN, \quad (49.3)$$

где dN — изменение числа всех барионов $dN = \sum_k dN_k$.

С другой стороны, из условия равновесия вдоль радиуса звезды имеем

$$\varepsilon_n(r) V \sqrt{g_{00}(r)} = \varepsilon_n(R) V \sqrt{g_{00}(R)} = m_n c^2 e^{\nu(R)/2}.$$

Учитывая последнее соотношение, из (49.3) получаем

$$\frac{dM}{dN} = m_n c^2 e^{\nu(R)/2} = \text{const}. \quad (49.4)$$

Таким образом, изменение массы пропорционально изменению числа барионов. Поскольку $M'(\eta) = \text{const } N'(\eta)$, сходство линий $M(\eta)$ и $N(\eta)$ становится очевидным.

Особенно интересной является зависимость массы конфигураций от полного числа барионов в них (рис. 30). Зависимость $M(N)$ во всех вариантах (реальный и идеальный газы барионов, нейтронный газ) при плотностях

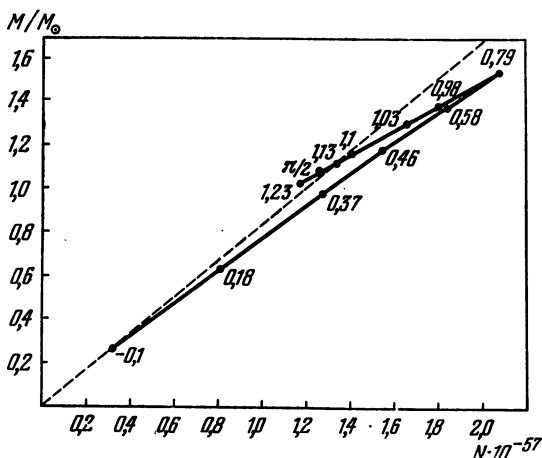


Рис. 30. Зависимость массы конфигураций от полного числа барионов N (вариант реального газа). Рядом с кружочками указаны значения параметра η для соответствующих конфигураций.

выше определенной многозначна: одному и тому же значению N соответствуют два, а в некоторой области и более значений масс. В точках перехода от одной ветви к другой производная $\frac{dM}{dN}$ испытывает скачок (это было доказано в работе [47]). Действительно, при гладком переходе от нижней ветви кривой к верхней в точке поворота мы имели бы $M'(N) = \infty$, тогда как из (49.4) видно, что производная массы — конечная величина, поскольку $v(R) < 0$. Таким образом, производная $M'(N)$ в точках возврата для нижней и верхней ветвей должна иметь разные значения.

После значения $\eta = 1,33$ линия $M(N)$ имеет множество точек возврата, расположенных так близко друг от друга, что на рисунке невозможно их показать. На

графике указана лишь точка с $\eta = \pi/2$, что соответствует конфигурации с $\rho(0) \rightarrow \infty$.

Штриховая линия представляет зависимость $M = m_n N$. Как мы видим из рис. 30, небольшая часть линии на ее конце расположена выше линии $M = m_n N$. Масса конфигураций, соответствующих точкам этой части линии $M(N)$, больше $m_p N$. Гравитационный дефект массы для них имеет аномальное значение (см. § 52). Очевидно, что из двух (или более) равновесных конфигураций, соответствующих данному N , устойчивой является конфигурация с наименьшей массой. Рассмотрение графика показывает, что конфигурация с большей массой обладает большей плотностью в центре. Казалось бы, что большая плотность в центре должна была бы означать больший гравитационный дефект массы, вследствие чего полная масса конфигурации должна быть в этом случае меньше. Однако на самом деле получается иначе. Это особый эффект общей теории относительности, подробным анализом которого мы займемся в § 53.

Очевидно, что под влиянием определенных возмущений звезда, находящаяся на верхней ветви кривой, должна перейти в состояние, принадлежащее нижней ветви. Такой переход должен сопровождаться выделением из звезды колоссального запаса энергии; порядка 10% собственной энергии ее.

Отметим также, что значительная часть кривой $M(N)$, представляющая конфигурации с гиперонным ядром, принадлежит к неустойчивым ветвям. По-видимому, вследствие своей неустойчивости такие конфигурации не могут образоваться из диффузного состояния вещества. Они могут возникать только из более плотных небесных тел.

§ 50. Гравитационный дефект массы

Согласно первому уравнению (40.12) масса сферического небесного тела равна

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr. \quad (50.1)$$

С первого взгляда может показаться, что это выражение идентично с формулой массы нерелятивистской теории

тяготения. Однако это не так, совпадение только формальное. В (50.1) учтены все виды энергии, в том числе и гравитационная, а в ньютоновской теории в соответствующей формуле массы энергия гравитационного поля не принимается во внимание. Напомним, что в теории Эйнштейна гравитационное поле заменяется соответствующим образом искривленным пространством. Это замечание делает ясным, в чем состоит учет энергии поля. Он заключается именно в том, что в (50.1) взамен истинных расстояний фигурируют координатные расстояния.

Для получения собственной массы звезды нужно собственную плотность энергии $\rho(r)$ умножить на элемент собственного объема dV_0 и проинтегрировать по координатам ϑ , r , φ . Элемент собственного объема равен $dV_0 = dl_r dl_\vartheta dl_\varphi$, где согласно (4.6) и (4.7)

$$dl_r = \sqrt{g_{rr}} dr, \quad dl_\vartheta = r d\vartheta, \quad dl_\varphi = r \sin \vartheta d\varphi$$

есть истинные расстояния по осям координат r , ϑ , φ . Таким образом, собственная масса звезды (все виды энергии без гравитационного поля) равна

$$M_0 = 4\pi \int_0^R \rho(r) \sqrt{g_{rr}} r^2 dr. \quad (50.2)$$

В слабом гравитационном поле (при стремлении искривленного пространства к плоскому) исчезает разница между координатным и истинным расстояниями и тогда (50.1) переходит в (50.2).

Разность $M_0 - M = \Delta M_1$ называется гравитационным дефектом массы:

$$\Delta M_1 = 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) (1 - e^{\lambda/2}) dr. \quad (50.3)$$

Напомним обозначение $g_{rr} = e^{\lambda/2}$. Введем также понятие гравитационного коэффициента упаковки

$$\alpha_1 = \frac{\Delta M_1}{M}, \quad (50.4)$$

представляющего собой дефект на единицу массы конфигурации. На рис. 31 начерчены графики коэффициентов упаковки конфигураций, состоящих из идеального и

реального (по данным таблицы 10) газов барионов. Как мы видим, в обоих случаях дефект массы очень велик. В варианте идеального газа коэффициент упаковки изменяется от нескольких процентов до 20% для наиболее плотной конфигурации, а в случае реального газа он доходит до 55%.

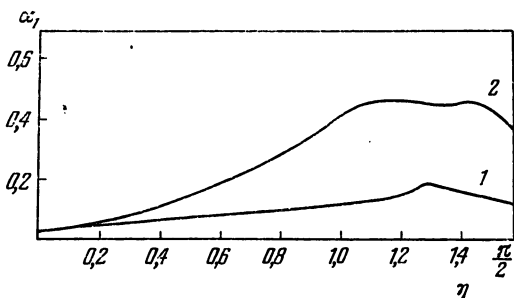


Рис. 31. Зависимость гравитационного коэффициента упаковки $\alpha_1 = \frac{\Delta M}{M}$ от параметра η .

Линия 1 принадлежит конфигурациям из идеального газа барионов, линия 2 — реальному газу барионов.

Кроме дефекта массы (50.3), важной характеристикой конфигураций является также величина

$$\Delta M = Nm - M, \quad (50.5)$$

которую мы назовем абсолютным гравитационным дефектом массы. Здесь N — число барионов в звезде, m — сумма масс покоев протона и электрона (или, может быть, было бы более точным определить m как массу атома водорода). Эта величина представляет собой разность масс диффузного водородного облака и барионной звезды при одинаковом числе барионов.

Для обычных небесных тел, очевидно, всегда $\Delta M > 0$. Расчеты барионных конфигураций показали [15, 92, 16], что когда центральная плотность выше определенного значения $\rho_c(0)$ абсолютный дефект массы имеет обратный знак — он отрицателен. Значение $\rho_c(0)$ зависит от вида уравнения состояния, используемого в расчетах. В моделях с реальным газом барионов $\rho_c(0)$ имеет меньшее значение, чем в моделях с идеальным газом. При-

чина этого состоит в том, что в случае реального газа, при плотностях выше ядерной, существенную роль играют ядерные силы отталкивания между барионами. Разумеется, силы отталкивания способствуют появлению рассматриваемого эффекта (это видно из того, что для сближения частиц до расстояний, где силы притяжения заменяются отталкиванием, необходимо совершить некоторую работу). Из последнего замечания следует, что гравитационный дефект массы (50.5) для моделей с реальным газом определен не вполне корректно, поскольку он в этом случае обусловлен не только гравитацией, но и эффектом ядерных сил (притяжения и отталкивания). Поэтому, чтобы исключить влияние ядерных сил на абсолютный дефект массы и исследовать природу явления в более чистом виде, ниже речь будет идти только о моделях сверхплотных звезд, состоящих из идеального газа барионов. Тогда (50.5) действительно представляет собой абсолютный гравитационный дефект массы.

Существование барионных конфигураций с аномальным (т. е. отрицательным) дефектом массы было впервые обнаружено в работе [15]. В ней подчеркивалась важность таких звездных конфигураций для астрофизики, но суть дела не была детально исследована. Затем этот вопрос исследовался в работе [47] и было показано, что $M < fNm_n$, где M — наблюдаемая масса звезды, N — число нейтронов в ней, $f \approx 1,5 \sqrt{g_{rr}(R)}$, R — радиус звезды и g_{rr} — компонента метрического тензора. Такая оценка верхнего предела массы M не исключает возможности существования равновесных барионных конфигураций с массой $M > Nm_p$. обстоятельное исследование природы этого явления было проведено позже в работе [18].

§ 51. Абсолютный дефект массы по теории тяготения Ньютона

Исследование абсолютного дефекта массы мы начнем с нерелятивистской теории тяготения. Возвращение к ней может показаться странным, поскольку мы уже знаем, что последовательное и корректное исследование свойств барионных конфигураций возможно лишь

в рамках общей теории относительности. Однако мы сознательно допускаем некоторую непоследовательность, рассматривая конфигурации релятивистского нейтронного газа с помощью теории тяготения Ньютона. Здесь мы преследуем определенную цель, а именно, путем сравнения точных и приближенных расчетов выяснить ту роль, которую играют релятивизм барионного газа и искривление пространства в вопросе абсолютного гравитационного дефекта массы.

Итак, чтобы исключить побочные эффекты, обусловленные гиперонами и ядерными силами, исследование абсолютного гравитационного дефекта массы мы считаем целесообразным проводить для конфигураций, состоящих из идеального газа нейтронов. При использовании ньютоновского закона тяготения параметры нейтронных конфигураций определяются из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} &= r^2 (\text{sh } t_n - t_n), \\ \frac{dt_n}{dr} &= - \frac{3u (\text{sh } t_n - t_n)}{r^2 \left(\text{ch } t_n - 4 \text{ch } \frac{t_n^2}{2} + 3 \right)}, \\ N &= A \int_0^R \text{sh}^3 \frac{t_n}{4} r^2 dr, \\ M &= u(R) \left[1 - \frac{u(R)}{2R} \right] - \frac{1}{2} \int_0^R \frac{u^2(r) dr}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (51.1)$$

Здесь первое уравнение определяет массу звезды (напомним, что плотность массы нейтронного газа равна $\rho = (\text{sh } t_n - t_n)/4\pi$ без учета гравитационного взаимодействия между частицами). Для обычных звезд $u(R)$ с большой точностью совпадает с наблюдаемой массой. Для нейтронных конфигураций, где дефект массы сравним с массой, величина $u(R)$ заметно отличается от последней. Поэтому даже в рамках теории тяготения Ньютона мы вынуждены учитывать энергию гравитационного взаимодействия частиц. Второе уравнение получено из условия гидродинамического равновесия. Эти два уравнения нам уже известны из (38.2). Третье соотношение

дает полное число нейтронов в конфигурации, $A = m_n^3 c / (3\pi^2 \hbar^3)$ (см. формулу (32.3) для плотности частиц). В последнем соотношении M есть истинная масса звезды (т. е. масса с учетом гравитационного взаимодействия). Она определена следующим образом:

$$M = 4\pi \int_0^R \left[1 + \frac{1}{2} \varphi(r) \right] \rho(r) r^2 dr, \quad (51.2)$$

где φ — гравитационный потенциал на расстоянии r

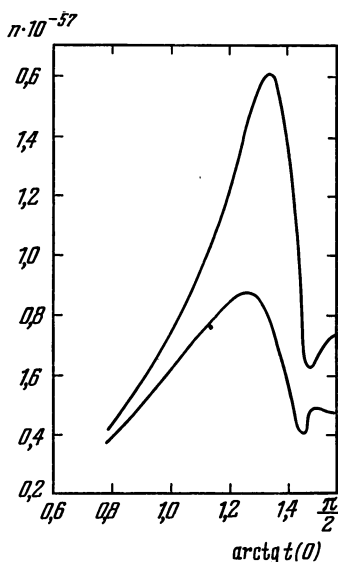


Рис. 32. Зависимость числа частиц в нейтронных звездах от параметра $\arctg t_n(0)$ по теориям тяготения Эйнштейна (нижняя кривая) и Ньютона.

(напомним, что $c=k=1$). Легко показать, что

$$\varphi(r) = -\frac{u(r)}{r} - 4\pi \int_0^R \rho(r) r dr. \quad (51.3)$$

После подстановки (51.3) в (51.2) и ряда простых преобразований мы приходим к последнему соотношению

(51.1). Условия в центре и на поверхности таковы:

$$u(0) = 0, \quad N(0) = 0, \quad t_n(0), \quad t_n(R) = 0.$$

Результаты численных расчетов [18] приведены в таблице 8. Значения абсолютного гравитационного коэффициента упаковки $\Delta M/M$ приведены в последнем столбце таблицы. График зависимости массы от $\operatorname{arctg} t_n(0)$ изображен на рис. 14 (верхняя линия), а числа нейтронов — на рис. 32 (верхняя линия). К обсуждению результатов мы вернемся в следующем параграфе.

§ 52. Абсолютный дефект массы по теории Эйнштейна

Когда мы исходим из теории тяготения Эйнштейна, конфигурации, состоящие из идеального газа нейтронов, определяются следующей системой уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dr} &= r^2 (\operatorname{sh} t_n - t_n), \\ \frac{dt_n}{dr} &= - \frac{4 \left(\operatorname{sh} t_n - 2 \operatorname{sh} \frac{t_n}{2} \right)}{r(r-2u) \left(\operatorname{ch} t_n - 4 \operatorname{ch} \frac{t_n}{2} + 3 \right)} \times \\ &\quad \times \left[u + \frac{1}{3} r^3 \left(\operatorname{sh} t_n - 8 \operatorname{sh} \frac{t_n}{2} + 3 t_n \right) \right], \\ N &= A \int_0^R \left(1 - \frac{2u}{r} \right)^{-1/2} \operatorname{sh}^3 \frac{t_n}{4} r^2 dr. \end{aligned} \right\} \quad (52.1)$$

С первыми двумя уравнениями мы уже встречались в (41.1). Последнее соотношение дает число нейтронов. Подынтегральное выражение представляет собой произведение плотности частиц и элемента собственного объема $4\pi \sqrt{g_{rr}} r^2 dr$. Граничные условия: $u(0) = 0$, $N(0) = 0$, $u(R) = M$, $t_n(0), t_n(R) = 0$.

Численное интегрирование проводилось с помощью электронно-вычислительной машины, результаты представлены в первой половине таблицы 8. На рис. 14 и 32 изображены зависимости массы конфигураций и числа барионов в них от значений параметра $\operatorname{arctg} t_n(0)$, являющегося характеристикой плотности в центре (см.

(32.3)). Бросается в глаза поразительное сходство кривых массы и числа нейтронов. На рис. 33 и 34 приведены графики коэффициента упаковки

$$\frac{\Delta M}{M_0} = \frac{M_0 - M}{M_0}, \quad M_0 = Nm_n. \quad (52.2)$$

Подписи под рисунками дают достаточное представление о сущности графиков, поэтому мы избегаем подробного обсуждения их. Отметим только некоторые общие и наиболее важные моменты зависимостей, представленных на рисунках.

Мы не будем останавливаться на обсуждении кривых массы и радиуса, о них речь шла в §§ 38 и 41. Линии $N(y)$, где $y = \operatorname{arctg} t_n(0)$, для числа частиц по теориям тяготения Ньютона и Эйнштейна (аналогично зависимостям $M(y)$ и $R(y)$) сходны, хотя в величинах и некоторых других деталях имеются заметные отличия. В обоих случаях N является однозначной функцией от y . Обратное утверждение, как мы видим из рис. 32, вообще говоря, не верно, в некоторых частях $y(N)$ — многозначная функция. Характерные максимумы, минимумы и затухающая осцилляция на конце кривых массы и радиуса сохраняются и на графиках числа частиц и коэффициента упаковки (рис. 33). Мы не приводим здесь график функции $M(N)$, она подобна рис. 30 для варианта реального газа барионов. Взамен этого приведен график зависимости коэффициента упаковки от числа частиц. Характерные изломы линии $M(N)$, очевидно, здесь сохраняются, причина их была объяснена в § 49.

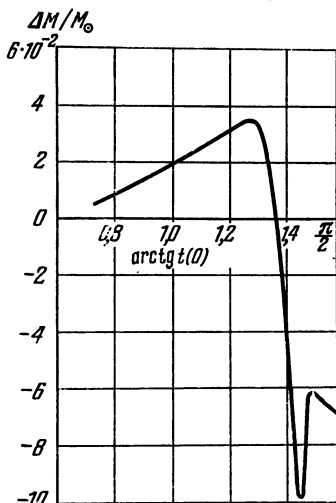


Рис. 33. Зависимость коэффициента упаковки нейтронных конфигураций от параметра $\operatorname{arctg} t_n(0)$ по теории гравитации Эйнштейна. $\Delta M = Nm_n - M$ — абсолютный гравитационный дефект массы.

Для всех ньютоновских моделей нейтронных конфигураций абсолютный гравитационный дефект массы имеет положительную величину. Как мы видим из последнего

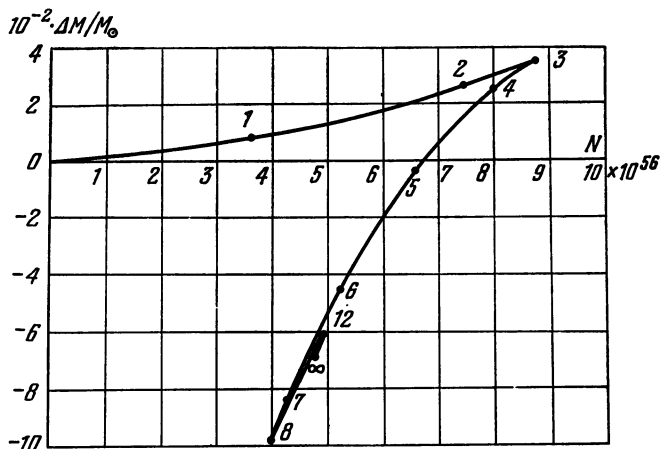


Рис. 34. График зависимости коэффициента упаковки нейтронных конфигураций ($\Delta M = Nm_n - M$) от полного числа нейтронов в них. Цифрами при жирных точках указаны значения параметра $t_n(0)$ для соответствующих конфигураций.

столбца таблицы 8, коэффициент упаковки является растущей функцией центральной плотности, за исключением области чрезвычайно больших центральных плотностей (см. предпоследнюю строку таблицы 8, при $t_n(0) \approx \approx 12$), где наблюдается заметный минимум.

В случае же релятивистских моделей гравитационный коэффициент упаковки имеет аномальное поведение (см. рис. 33). Сначала с ростом центральной плотности он растет, при $y=1,27$ ($t_n(0)=3,34$; $n(0)=3 \cdot 10^{39} \text{ см}^{-3}$) достигает максимума, затем начинает спадать. При $y > 1,36$ ($t_n(0) > 4,67$; $n(0) > 1,12 \cdot 10^{40} \text{ см}^{-3}$) коэффициент упаковки становится отрицательным, в точке $y=1,45$ ($t_n(0)=8,2$; $n(0)=2 \cdot 10^{41} \text{ см}^{-3}$) имеется глубокий минимум, приблизительно равный $-0,1$, затем он, осциллируя с малой и сильно затухающей амплитудой

и продолжая оставаться отрицательным при $\rho(0) \rightarrow \infty$, стремится к пределу, равному — 0,069. В следующем параграфе мы постараемся выяснить причину аномалии в абсолютном дефекте массы.

§ 53. Природа аномального дефекта массы

Обсудим подробнее аномальное поведение дефекта массы. Мы видим, что в вопросе дефекта массы теории тяготения Ньютона и Эйнштейна дают разные результаты не только в количественном, но и в качественном отношении. Это сопоставление явно указывает на то, что здесь существенную роль играет искривление пространства, т. е. мы имеем дело со специфическим эффектом общей теории относительности. Обсудим этот вопрос несколько подробнее.

Из условия равновесия вдоль радиуса звезды следует, что

$$\epsilon_n(r) \sqrt{g_{00}(r)} = m_n \sqrt{1 - 2M/R} < m_n, \quad (53.1)$$

где $\epsilon_n(r)$ — граничная энергия нейтронов на расстоянии r в единицах (34.1), g_{00} — временная компонента метрического тензора, M и R — масса и радиус конфигурации. Заметим, что, в отличие от нагретых звезд, в холодных сверхплотных телах существует резкая граница. Так, для нейтронных конфигураций радиус определяется из уравнения $\epsilon_n(r) = m_n$, т. е. поверхность небесного тела находится там, где граничный уровень ферми пересекается со стенкой «гравитационной потенциальной ямы». Из (53.1) видно, что наивысший уровень Ферми находится в потенциальной яме. Это означает, что отдельные частицы в звезде находятся в связанном состоянии и поэтому они не могут покинуть ее. Для удаления отдельных частиц от звезды нужно будет совершить определенную работу. С другой стороны, расчеты показывают, что для некоторых наиболее плотных конфигураций

$$M > \sum_k m_k N_k. \quad (53.2)$$

(Для нейтронных конфигураций это видно из данных пятой колонки таблицы 8.) Как совместить эти два факта? Однако дело в том, что неравенства (53.1) и (53.2)

не противоречат друг другу, если учесть, что полная внутренняя энергия звезды не равна сумме энергий (кинетической и потенциальной) входящих в нее частиц.

Если бы внутренняя энергия обладала свойством аддитивности, то для массы мы имели бы

$$M_1 = 4\pi \int_0^R \psi(r) \rho(r) r^2 dr < Nm_n, \quad (53.3)$$

где

$$\psi(r) = \sqrt{-g_{00}(r) g_{rr}(r)}.$$

С другой стороны, согласно первому уравнению системы (52.1) наблюдаемая масса звезды равна

$$M = 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr. \quad (53.4)$$

Сравнение (53.3) с (53.4) показывает, что энергия не

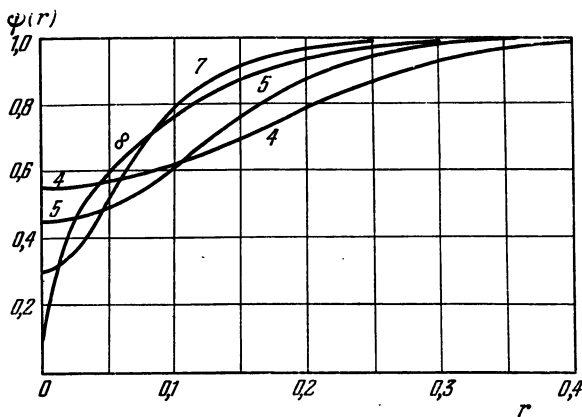


Рис. 35. Зависимость функции $\psi(r) = \sqrt{-g_{00}(r) g_{rr}(r)}$ от радиального расстояния; g_{00} и g_{rr} — временная и радиальная компоненты метрического тензора. Расстояния измерены в единицах $c=k=1$, $K_n = \frac{1}{4\pi}$. Значения $\psi(r)$ дают представление о степени нарушения аддитивности внутренней энергии звезды.

обладает свойством аддитивности, причем мерой нарушения ее может служить величина функции ψ . На рис. 35

представлены кривые этой функции для конфигураций с $t_n(0) = 4, 5, 6, 7, \infty$. Они сходны с кривыми $g_{00}(r)$ (см. рис. 26). В центре ψ имеет минимум, при возрастании r она монотонно растет и у поверхности мало отличается от единицы. При строгом соблюдении аддитивности энергии мы имели бы $\psi=1$, а максимальное нарушение ее будет при $\psi=0$. С ростом величины параметра $t_n(0)$ величина $\psi(r)$ в центральной области уменьшается. Следовательно, наибольшее нарушение аддитивности энергии происходит за счет центральной части.

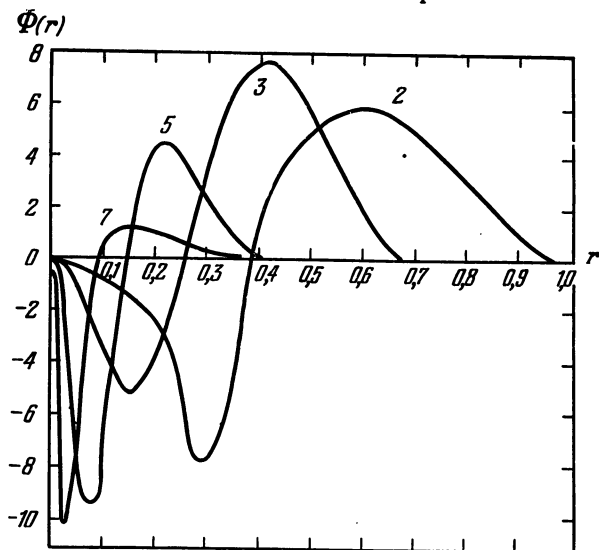


Рис. 36. По оси абсцисс отложено расстояние от центра звезды в единицах $c=k=1$, $K_n = \frac{1}{4\pi}$. По оси ординат отложены значения функции $\Phi(r)$. Цифры на кривых указывают значения параметра $t_n(0)$ для соответствующих конфигураций. По оси ординат для разных кривых масштаб различный, а именно для $t_n(0)=2, 3, 5, 7$ за единицу приняты $a, 2a, 5a$ и $10a$, соответственно, где a — известное постоянное число.

Наиболее наглядное представление об области звезд, за счет которой получается отрицательное значение дефекта массы, нам дает рис. 36, на котором изображены

графики функции

$$\Phi(r) = \left[1 - \left(1 - \frac{2u(r)}{r} \right)^{1/2} \frac{\rho(r)}{m_n n(r)} \right] \left(1 - \frac{2u(r)}{r} \right)^{-1/2} n(r) r^2, \quad (53.5)$$

где $n(r)$ — плотность числа нейтронов. Интеграл от этой функции определяет абсолютный дефект массы

$$\Delta M = 4\pi m_n \int_0^R \Phi(r) dr. \quad (53.6)$$

Функция $\Phi(r)$ при малых r отрицательна, имеет один минимум и один максимум, в центре и на поверхности она обращается в нуль. Как мы видим, с ростом $t_n(0)$ возрастает часть площади, расположенной ниже оси абсцисс, и уже при $t_n(0) > 4,7$ алгебраическая сумма площадей, образованных линией $\Phi(r)$ с осью абсцисс, становится отрицательной.

Итак, мы приходим к выводу, что эффект аномалии в дефекте массы обусловлен катастрофическим нарушением аддитивности внутренней энергии, вызванным искривлением пространственной метрики в наиболее компактных барионных конфигурациях. В этих конфигурациях и в ньютоновском приближении также имеется сильное нарушение аддитивности энергии (здесь кинетическая энергия аддитивна, а потенциальная — нет), тем не менее оно оказывается недостаточным для изменения знака дефекта массы. В самом деле, из теоремы вириала следует [66], что

$$\Delta M = \sum_k m_k c^2 \left(1 - \frac{m_k c^2}{\epsilon_k} \right) > 0. \quad (53.7)$$

Укажем, что для доказательства этого соотношения предположение о периодичности или квазипериодичности движения частиц не является обязательным.

Обратимся снова к рис. 34. Очевидно, что конфигурации, соответствующие нижней ветви линии $\Delta M/M$ при $t_n(0) < 4,67$, являются неустойчивыми по отношению к переходам на верхнюю ветвь, где дефект массы имеет нормальное поведение. Конфигурации же $t_n(0) > 4,67$, обладающие отрицательным абсолютным дефектом массы, неустойчивы не только в отношении перехода на верхнюю ветвь, но и в отношении распада на диффуз-

ное состояние (уход вещества в бесконечность). Поскольку дефект массы составляет несколько процентов от самой массы звезды, то при этих переходах будет выделяться невероятно большая энергия. Эта энергия, отнесенная на один грамм звездного вещества, на порядок выше соответствующей энергии, выделяемой в термоядерных реакциях при выгорании водорода. Важно отметить, что энергия связи каждой частицы в звезде отрицательна, поэтому частицы не могут по одной уходить в бесконечность. Вывод некоторого количества барионов из звезды требует прибавления извне дополнительной энергии к оставшейся конфигурации. Поэтому он не может происходить спонтанно. Это означает, что переход системы в более устойчивое состояние может совершаться лишь под влиянием очень больших возмущений. При этом будет происходить расширение, сопровождаемое нагреванием небесного тела. Соответствующий переход будет носить характер космического взрыва.

§ 54. Модели сверхплотных массивных тел

Аномальный дефект массы конфигураций может иметь важное значение для космогонических представлений, развиваемых В. А. Амбарцумяном [3—13], если в природе существуют небесные тела с таким свойством, но с массами, на много порядков превышающими массу Солнца. Они могли бы послужить в качестве моделей дозвездных тел. Во избежание недоразумений отметим, что в концепции Амбарцумяна не обязательно, чтобы дозвездные тела были сверхплотными в том смысле, какой мы придаем этому понятию в настоящей монографии. В ней по существу принимается только, что в нашу эпоху развитие вещества идет от плотного к разреженному, в отличие от альтернативной концепции (диффузных дозвездных тел), в которой утверждается противоположное. Однако гипотеза со сколь угодно плотными дозвездными телами не только не противоречит этим представлениям, а, напротив, гармонирует с ними. Из изложения материала последних трех глав мы видели, что массы статических барионных конфигураций всего лишь порядка массы Солнца. Дозвездные тела, очевидно, являются нестационарными объектами, обладающими достаточно

большими временами жизни. Поэтому нужно посмотреть, нельзя ли построить модели сверхмассивных и одновременно сверхплотных нестационарных небесных тел с необходимыми временами жизни. Вообще говоря, задача эта очень трудная, так как связана с решением системы из многих дифференциальных уравнений с частными производными по r и t . С целью выяснения принципиальных возможностей здесь мы рассмотрим весьма упрощенную модель начального состояния таких конфигураций [100].

При построении моделей сверхплотных небесных тел с массами, превышающими массу Солнца, возникает трудность, обусловленная наличием особенности в метрике, что накладывает ограничение на значение плотности. Чтобы тело не находилось внутри сферы Шварцшильда, среднее значение плотности не должно превышать значения $\bar{\rho} \approx 2 \cdot 10^{16} (M_{\odot}/M)^2 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ (см. (40.15)). Однако эта трудность обусловлена непригодностью метрики Шварцшильда на расстояниях, меньших гравитационного радиуса. Известно [183], что если радиус тела меньше гравитационного, то оно не может находиться в статическом состоянии, поэтому метрика в этом случае зависит от времени (см. [66], § 100). В [186] было показано, что, в отличие от статических метрик, где сингулярность невозможно устранить никакими преобразованиями координат, в случае нестационарных метрик это вполне осуществимо. Примеры нестатических метрик, лишенных сингулярности, были приведены в [85]. Здесь для области вне распределения масс мы будем пользоваться метрикой Леметра (9.6):

$$ds^2 = dt^2 - \left(\frac{3}{2} \frac{R+t}{2M} \right)^{-2/3} dR^2 - \\ - 4M^2 \left(\frac{3}{2} \frac{R+t}{2M} \right)^{4/3} (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (54.1)$$

где M — масса звезды ($c=k=1$). Система отсчета, определяемая метрикой (54.1), осуществляется пробными телами, свободно движущимися по геодезическим линиям в направлении, противоположном свободному падению (см. конец § 9). На бесконечности она асимптотически приближается к системе отсчета Галилея.

Рассмотрим нестационарные объекты, которые с точки зрения шварцшильдовской системы отсчета находятся внутри сингулярной сферы. Покажем, что в этом случае не исключена возможность существования тел со сколь угодно большими плотностями и массами, которые подвергаются антиколлапсу. Для написания метрики пространства, занимаемого распределением масс, будем пользоваться сопутствующей системой отсчета

$$ds^2 = e^\sigma d\tau^2 - e^\omega dR^2 - r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (54.2)$$

где σ , ω , r — функции координат R и τ .

При решении эволюционной задачи космогонии необходимо было учитывать источники энергии, а также процессы переноса и потери ее. Однако для качественного рассмотрения общего поведения конфигураций в отношении коллапса или антиколлапса нет необходимости вдаваться в такие сложные вопросы. В соответствии с поставленной перед нами упрощенной задачей для тензора энергии-импульса имеем

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -P(R, \tau), \quad T_0^0 = \rho(R, \tau). \quad (54.3)$$

Уравнения Эйнштейна, соответствующие (54.2) и (54.3), можно привести к следующему удобному виду [84]:

$$\dot{u} = -4\pi P r^2 \dot{r}, \quad (54.4)$$

$$u' = 4\pi \rho r^2 r', \quad (54.5)$$

$$\sigma' = -\frac{2P'}{P + \rho}, \quad (54.6)$$

$$\dot{\omega} = -\frac{2\dot{\rho}}{P + \rho} - \frac{4\dot{r}}{r}, \quad (54.7)$$

$$\rho = P(\rho).$$

Здесь точка и штрих соответственно означают частные производные по τ и R . Функция $u(R, \tau)$ по-прежнему с некоторыми оговорками определяет массу, заключенную в сфере радиуса R :

$$u(R, \tau) = \frac{1}{2} r (1 + \dot{r}^2 e^{-\sigma} - r'^2 e^{-\omega}). \quad (54.8)$$

В случае стационарной метрики Шварцшильда $r=R$, $\omega=\lambda$, $\dot{r}=0$, $r'=1$ и (54.8) переходит к определению (40.8).

Решение системы уравнений (54.4) — (54.7) для внутренней области должно быть на поверхности сшито с метрикой Леметра. Из условия непрерывности компонент метрического тензора и их первых производных на поверхности получаем

$$u(a, t) = M, \quad (54.9)$$

где a — радиус звезды.

Начальные условия удобно представить в следующем виде:

$$r(R, 0) = 2M \left(\frac{3R}{4M} \right)^{2/3} f(R), e^{\omega(R, 0)} = \left(\frac{4M}{3R} \right)^{2/3} \psi(R), R \leq a. \quad (54.10)$$

В выборе функций $f(R)$ и $\psi(R)$ имеется большой произвол. Единственное ограничение, которому они должны удовлетворять, обусловлено требованием непрерывности компонент метрического тензора и их производных на поверхности конфигурации. Ниже предполагается $f(R) = \psi(R) = 1$. При таком выборе автоматически обеспечивается непрерывный переход внутренней метрики в наружную.

Функция $\sigma(R, 0)$ определяется внешним решением (54.1) и уравнением (54.6). Так, интегрируя (54.6) при $\tau=0$ от поверхности звезды до расстояния R , находим

$$\sigma(R, 0) = - \int_0^{P(R, 0)} \frac{dP}{P + p}. \quad (54.11)$$

Из (54.10) имеем

$$r'^2(R, 0) e^{-\omega(R, 0)} = 1. \quad (54.12)$$

Тогда из (54.8) для $\dot{r}(R, 0)$ следует

$$\dot{r}(R, 0) = \left[\frac{u(R, 0)}{M} \right]^{1/2} \left(\frac{4M}{3R} \right)^{1/3} e^{\frac{1}{2}\sigma(R, 0)}, \quad (54.13)$$

которое у поверхности принимает значение, равное $(4M/3R)^{1/3}$, что и следовало ожидать из (54.1). Здесь возможно также решение с $\dot{r} < 0$, однако оно не удовлетворяет условию сшивки с внешним решением (54.1), оно

соответствует метрике коллапсирующего небесного тела (см. формулу (9.6), верхний знак).

Нам остается задать начальное распределение масс $\rho(R, 0)$. Однако нетрудно убедиться в том, что независимо от конкретного вида функции $\rho(R, 0)$, при сделанном нами выборе начального состояния небесного тела, оно в дальнейшем неизбежно должно расширяться. Это фактически предрешиено тем, что внутреннюю метрику на поверхности мы сшили со внешней (54.1). Покажем, что расширяющееся небесное тело должно обладать аномальным дефектом массы $\Delta M = Nm_p - M$:

$$M = 4\pi \int_0^a \rho(R, 0) r^2(R, 0) r'(R, 0) dR,$$

$$M_0 = 4\pi m_p \int_0^a n(R, 0) e^{\frac{1}{2}\omega(R, 0)} r^2(R, 0) dR.$$

Имея в виду (54.12), отсюда для абсолютного дефекта массы получаем

$$\Delta M = 12\pi M \int_0^a \left(\frac{m_p}{\bar{\epsilon}} - 1 \right) \rho(R, 0) R dR, \quad (54.14)$$

где $\bar{\epsilon} = \rho(R, 0)/n(R, 0)$ — средняя энергия барионов, а $n(R, 0)$ — начальная плотность их. Поскольку $\bar{\epsilon} > m_p$, очевидно, $\Delta M \leq 0$. Таким образом, рассмотренная модель обладает аномальным дефектом массы и, следовательно, она неустойчива относительно перехода в диффузное состояние. Мы видим, что действительно нет ограничений в выборе функции $\rho(R, 0)$. При плотностях, заметно превышающих ядерную, отношение $m_p/\bar{\epsilon} \ll 1$, тогда из (54.14) следует, что ΔM порядка самой M . Такие конфигурации будут содержать в себе колоссальные запасы внутренней энергии. К вопросу о внутренних источниках энергии в космогонии сверхплотных небесных тел мы вернемся в § 69.

Рассмотренная модель может служить иллюстрацией расширяющихся массивных небесных тел с аномальным дефектом массы. Разумеется, можно построить множество таких моделей нестатических конфигураций путем подходящего изменения начальных условий во внутренней

области так, чтобы не нарушалось условие сшивки с внешней метрикой.

Весьма важным является также вопрос о времени пребывания массивного тела в сверхплотном состоянии с точки зрения наблюдателя, находящегося на достаточно большом расстоянии. Для выяснения этого вопроса рассмотрим в системе Шварцшильда движение пробного тела, находящегося на поверхности и движущегося вместе с ней по четырехмерной геодезической линии в сторону возрастания r . Зависимость радиальной координаты r от t в шварцшильдовском поле описывается соотношением

$$t = \frac{\varepsilon}{m} \int \frac{dr}{\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{m^2} + \frac{r_g}{r} - 1}} \quad (54.15)$$

(см. [66], формулу (100.5)). Здесь ε , m — энергия и масса покоя пробного тела, $r_g = 2M$ — гравитационный радиус небесного тела. Эту формулу можно применить только для $r \geq r_g$, где метрика Шварцшильда не лишена физического смысла. Как мы видим, при $r \rightarrow r_g$, т. е. когда пробное тело и, следовательно, расширяющаяся поверхность конфигурации находятся бесконечно близко от сингулярной поверхности Шварцшильда, время расходится, $t \rightarrow \infty$. Это означает, что с точки зрения внешнего наблюдателя отрыв расширяющейся поверхности небесного тела от шварцшильдовской сингулярной поверхности длится бесконечно долго. Нетрудно видеть, что соответствующее собственное время будет конечным. Если речь идет о массах порядка массы Галактики, то при этом задолго до достижения шварцшильдовской сингулярной поверхности при $r = r_g$ тело будет находиться в весьма разреженном состоянии в обычном смысле этого слова. Время пребывания небесного тела в сверхплотном состоянии с точки зрения леметровского наблюдателя будет меньше r_g/c . Трудно судить о том, какова величина этого времени с точки зрения внешнего наблюдателя, так как при $r < r_g$ шварцшильдовская метрика непригодна (формальное применение формул преобразований (9.5) приводит к выводу, что промежуток времени, в течение которого поверхность звезды от $r=0$ доходит до $r = r_g$, равен $0,281 r_g/c$).

Имеется еще одно слабое место в системе наших рассуждений, которое мы обошли молчанием. Оно состоит в том, что величина скорости изменения сферической компоненты метрического тензора на поверхности рассматриваемой конфигурации превышает скорость света. В самом деле, согласно (54.13) имеем $\dot{r}(a, 0) = (4M/3R)^{1/3} > 1$ (напомним, что $c=1$), поскольку при $M \gg M_\odot$ для сверхплотного тела $R < M$.

По нашему мнению, приведенный в этом параграфе пример свидетельствует о том, что, переходя к системе Леметра (или к другой ей эквивалентной), не то что мы устраним или обходим особенность, имеющуюся в решении Шварцшильда, а только маскируем ее. Эта особенность фактически переносится с одной компоненты метрического тензора на другую. Нам кажется, что эти трудности присущи самой теории гравитации Эйнштейна.

§ 55. Устойчивость равновесных барионных конфигураций

Не все равновесные барионные конфигурации, соответствующие кривой $M(\eta)$ рис. 20, являются устойчивыми. Для определенных областей значений центральной плотности ρ_0 конфигурации являются нестабильными и при некоторых возмущениях могут перейти в другие более устойчивые состояния.

Это утверждение для конфигураций с $\eta > 0,79$ (напомним, что $\eta = \text{arctg} \lg \frac{\rho_0}{\rho_1}$, где $\rho_1 = 3,64 \cdot 10^{14} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$) является очевидным, если мы обратимся к рис. 30. При $\eta > 0,79$ функция $M(N)$ становится двужаночной, а при еще больших η даже многозначной. При этом очевидно, что для заданного числа барионов N устойчивой является та, у которой масса меньше. Однако, исходя только из рассмотрения кривых $M(N)$, трудно решить вопрос устойчивости остальных конфигураций, для которых $\eta < 0,79$ (конфигурации, принадлежащие нижней ветви линии $M(N)$). Мы уже говорили о том, что при таком анализе остается совершенно открытым вопрос о времени жизни нестабильных конфигураций.

Устойчивость барионных конфигураций исследовалась во многих работах [269а, 237а, 270а, 267]. Имеются

два существенно разных подхода к этому вопросу. Первый — это динамический подход, при котором анализируется поведение равновесной звездной конфигурации относительно радиальных колебаний. Второй — статический подход, в котором вопрос устойчивости решается путем сравнения соседних конфигураций в линейной серии $M(\rho_0)$, $R(\rho_0)$ или $M(R)$. Примером статического подхода является, в частности, анализ, проведенный с помощью кривой $M(N)$. Однако наиболее интересным является динамический подход, обладающий тем преимуществом, что одновременно с решением вопроса устойчивости он позволяет определить также нормальные колебания звезд и время жизни нестабильных конфигураций. За подробностями советуем обратиться к обзору [267]. Здесь мы дадим лишь весьма краткое изложение результатов, полученных с помощью динамического подхода [237a].

Для решения вопроса о том, является конфигурация стабильной или нестабильной, исследуется поведение ее относительно малого радиального возмущения $r \rightarrow r + \xi$, где $\xi = \xi(r, t)$. Далее составляется соответствующее выражение для действия и из принципа наименьшего действия получаются уравнения Эйлера для радиального возмущения ξ . Всякая равновесная конфигурация, вообще говоря, характеризуется дискретной совокупностью радиальных нормальных колебаний

$$\xi(r, t) = \xi_n(r) e^{i\omega_n t}, \quad (55.1)$$

которые отличаются друг от друга значением индекса $n=0, 1, 2, 3, \dots$, причем $\omega_0^2 < \omega_1^2 < \omega_2^2 \dots$. Подставляя (55.1) в уравнение движения, мы находим уравнения для амплитуды ξ_n и квадрата частоты ω_n^2 n -го нормального колебания. Уравнение для ξ_n — второго порядка относительно r . Нормальной модой радиальных колебаний будет такое решение этого уравнения, которое удовлетворяет граничным условиям

$$\xi_n(0) = 0, \quad \delta P(R) = 0 \quad (55.2)$$

(центр звезды при движении остается фиксированным, а давление на поверхности равняется нулю). Таким образом, мы приходим к проблеме нахождения собст-

венных значений и собственных функций. Задача решается методом проб и ошибок. Рассматриваемая нормальная мода является устойчивой (колебания периодические), если ее частота реальная, т. е. $\omega_n^2 > 0$, и неустойчивая, если $\omega_n^2 < 0$, т. е. частота ω_n — мнимая. Неустойчивость некоторой моды означает также неустойчивость равновесной конфигурации вообще, так как при возникновении этого колебания амплитуда ее со временем экспоненциально будет расти.

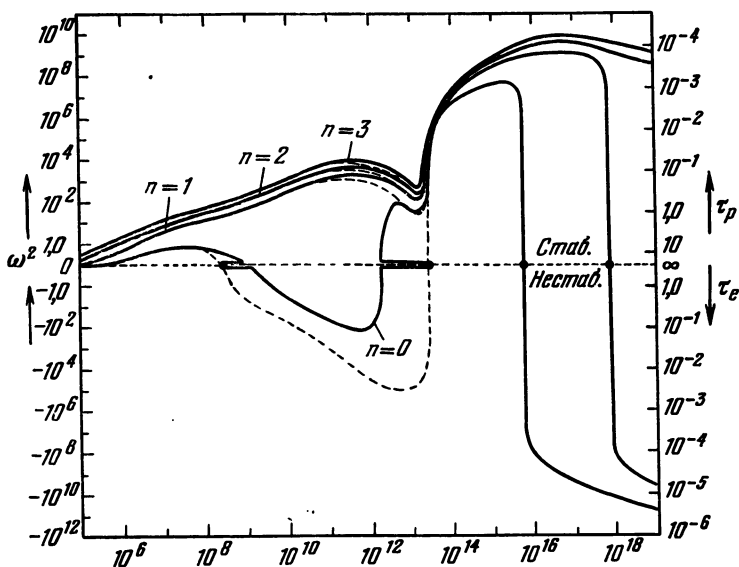


Рис. 37. Квадраты циклических частот ω_n^2 нормальных радиальных колебаний с $n=0, 1, 2, 3$ в зависимости от центральной плотности ρ_0 . Справа по оси ординат даются соответствующие периоды пульсации τ_p и времена τ_e возрастания амплитуд неустойчивых мод в е раз. Частоты измеряются в единицах сек^{-1} , время — в секундах и плотность — в $\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$.

В работе [237а] при помощи динамического подхода были вычислены квадраты частот первых четырех нормальных мод радиальных пульсаций барионных конфигураций. О результатах можно составить наглядное представление по графикам $\omega_n^2 = \omega_n^2(\rho_0)$ на рис. 37.

Когда $\omega_n^2 > 0$, мода является стабильной. При возникновении соответствующей моды конфигурация будет совершать гармонические колебания. Очевидно, такие колебания не приводят к нарушению устойчивости конфигурации, напротив, они со временем должны затухать, если учесть возможные потери энергии пульсации. Если же $\omega_n^2 < 0$, то амплитуда пульсации со временем возрастает экспоненциально:

$$\xi(x, t) = \xi_n(x) e^{\sqrt{|\omega_n|^2} t},$$

и поэтому конфигурация в конце концов распадается. Справа на рис. 37 даны периоды колебаний $\tau_p = 2\pi/\omega_n$ и время $\tau_e = 1/|\omega_n|$ возрастания амплитуды пульсации неустойчивой моды в e раз. В местах, отмеченных жирными точками, происходит смена устойчивости конфигураций. Эти точки соответствуют экстремумам кривой $M(\eta)$ рис. 20. Некоторая разница в значениях абсцисс ρ_0 на рис. 20 и 37 обусловлена различием в уравнениях состояния, используемых в расчетах параметров барионных конфигураций.

Итак, возвращаясь к рис. 20, на основании вышеизложенного можно утверждать, что ветвь белых карликов слева от первого максимума при $\eta < -1,36$ и ветвь барионных конфигураций при $-0,5 \lesssim \eta \lesssim 0,8$ представляют собой вполне устойчивые конфигурации, а конфигурации с $-1,36 \lesssim \eta \lesssim -0,6$ и $\eta \gtrsim 0,8$ неустойчивы. Представление о времени жизни нестабильных звезд дают числа τ_e на оси ординат справа (см. рис. 37).

Согласно рис. 37 типичный период основной моды для белых карликов порядка 10 сек, в то время как для нейтронной конфигурации (в варианте идеального газа) $\sim 10^{-3}$ сек. Когда в уравнении состояния учтен вклад ядерных сил (вариант реального газа), основной период нейтронной звезды уменьшается до $\sim 0,3 \cdot 10^{-3}$ сек. При $\rho_0 \gtrsim 10^{19} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ все большее и большее число мод колебаний становится нестабильным.

В [237а] были вычислены собственные функции, соответствующие частотам рис. 37. Оказалось, что для стабильных белых карликов и нейтронных звезд основная мода колебаний весьма сходна с однородным $\xi_0(r) \sim r$, а гармоники сходны с синусоидальными. Для большин-

ства неустойчивых конфигураций собственные функции нормальных колебаний отличаются от однородного или синусоидального. В этой же работе была вычислена энергия пульсации стабильных нейтронных звезд (вариант идеального газа), колеблющихся на основной частоте. Для энергии пульсации было получено

$$E_p \approx 10^{52} \left(\frac{\xi}{r} \right)^2, \quad (55.3)$$

где ξ/r — относительная амплитуда колебаний: энергия измерена в эргах. В случае конфигураций с реальным газом нейтронов (т. е. когда в уравнении состояния учтена энергия ядерных взаимодействий нуклонов) частота основного колебания возрастает примерно в 3 раза, энергия же в $\sim 3^2$ раза и, следовательно,

$$E_p \approx 10^{53} \left(\frac{\xi}{r} \right)^2. \quad (55.4)$$

Для сравнения укажем, что полная внутренняя энергия Солнца $M_\odot c^2 = 1,8 \cdot 10^{54}$ эрг. Как мы видим, энергия пульсации барионных звезд — величина очень большая. О том, что энергия пульсации нейтронных звезд (которые, как предполагалось, образуются во вспышках сверхновых) может быть очень большой, впервые было установлено в работах [202а, 184а, 149а] на основе ньютоновского рассмотрения.

Важность пульсации барионных звезд для астрофизики, конечно, зависит от того, в течение какого времени и как быстро они затухают. Имеется ряд каналов потерь энергии, приводящих к подавлению радиальных колебаний. Перечислим наиболее важные из них: 1) модифицированные URCA процессы

$$n + n \rightarrow n + p + e + \bar{\nu}, \quad n + p + e \rightarrow n + n + \nu, \quad (55.5)$$

которые происходят при повышении и понижении уровня Ферми [184а, 184b, 237а, 192а], реакции, аналогичные (55.5), протекающие с участием μ^- - и Σ^- -частиц [270], 2) ударные волны, генерируемые в атмосфере пульсирующей звезды [184а, 149b], 3) гидромагнитные волны, генерируемые пульсациями в магнитном поле звезды [149а, 149b], 4) электромагнитные волны, излучаемые колеблющимся магнитным полем и окружающей

плазмой [149b], 5) связь нормальных радиальных и нерадиальных мод колебаний, обусловленная быстрым вращением и последующим торможением путем излучения гравитационных волн за счет нерадиальных пульсаций [277а, 275а]. Относительная важность перечисленных процессов пока точно не выяснена. Однако приближительные расчеты показывают, что если в течение первых же нескольких часов после своего образования барионная звезда не успеет избавиться от значительной части своего момента количества движения, то благодаря гравитационному излучению (вследствие наличия нерадиальных пульсаций) радиальные колебания будут подавлены до пренебрежимой амплитуды за время порядка одного дня. Время торможения выражается через эксцентриситет вращающейся конфигурации e по формуле

$$\tau \sim \frac{1}{e^2} \text{ сек.} \quad (55.6)$$

Мы хотим еще раз подчеркнуть, что при чисто радиальных колебаниях сферического распределения масс гравитационные волны излучаться не могут (аналогично пульсациям сферического распределения электрических зарядов). Они могут излучаться лишь при нерадиальных колебаниях (квадрупольное излучение). Согласно [275а, 277а] гравитационное излучение очень быстро, а именно, в течение времени ~ 1 минуты гасит нерадиальные пульсации барионной звезды, оставляя лишь радиальные колебания.

Для следующего параграфа нам нужно также иметь представление и о периодах вращения τ_r барионных звезд. У сверхплотных звезд следует ожидать большие угловые скорости вращения, если допустить, что при одинаковых массах небесные тела должны обладать приблизительно одинаковым моментом количества движения. Однако угловая скорость Ω не может быть сколь угодно большой. Максимальное ее значение определяется из условия равенства центробежной силы $\rho R \Omega^2$ ньютоновскому притяжению $K \rho M / R^2$ на экваторе, т. е.

$$\Omega_{\max} = \left(\frac{KM}{R^3} \right)^{1/2}. \quad (55.7)$$

При $\Omega > \Omega_{\max}$ центробежная сила превалирует над центростремительной и начинается истечение вещества с экватора. В §§ 39 и 46 мы видели, что вращение даже с угловой скоростью $\Omega = \Omega_{\max}$ не вносит существенного изменения в значения параметров барионных конфигураций. В таблице 14 приведены минимальные значения

Таблица 14

Некоторые характеристики сверхплотных холодных конфигураций, вращающихся с максимальной угловой скоростью

$\rho(0),$ г·см ⁻³	$M/M_{\odot}$	$10^{-50} E_r,$ эрг	$\tau_{\min},$ сек	$\rho(0),$ г·см ⁻³	$M/M_{\odot}$	$10^{-50} E_r,$ эрг	$\tau_{\min},$ сек
$1,98 \cdot 10^6$	0,500	0,0624	23,0	$8,78 \cdot 10^{14}$	0,984	298	$7,34 \cdot 10^{-4}$
$5,41 \cdot 10^7$	1,06	0,457	583	$1,14 \cdot 10^{15}$	1,18	467	$6,45 \cdot 10^{-4}$
$7,04 \cdot 10^8$	1,26	0,930	2,17	$1,65 \cdot 10^{15}$	1,39	7940	$5,28 \cdot 10^{-4}$
$2,09 \cdot 10^9$	1,27	1,12	1,42	$2,44 \cdot 10^{15}$	1,51	1050	$4,58 \cdot 10^{-4}$
$7,29 \cdot 10^9$	1,25	1,33	0,873	$1,16 \cdot 10^{16}$	1,39	1310	$2,94 \cdot 10^{-4}$
$3,60 \cdot 10^{10}$	1,17	1,47	0,619	$3,53 \cdot 10^{16}$	1,17	924	$2,65 \cdot 10^{-4}$
$1,06 \cdot 10^{11}$	1,08	1,49	0,324	$6,80 \cdot 10^{16}$	1,08	739	$2,68 \cdot 10^{-4}$
$2,45 \cdot 10^{11}$	0,993	1,37	0,251	$1,21 \cdot 10^{17}$	1,04	643	$2,76 \cdot 10^{-4}$
$2,11 \cdot 10^{12}$	0,951	1,09	0,300	$2,27 \cdot 10^{17}$	1,03	576	$2,91 \cdot 10^{-4}$
$2,63 \cdot 10^{13}$	0,899	0,491	0,965	$5,47 \cdot 10^{17}$	1,05	580	$3,04 \cdot 10^{-4}$
$5,97 \cdot 10^{13}$	0,733	0,164	4,80	$1,61 \cdot 10^{18}$	1,08	623	$3,08 \cdot 10^{-4}$
$7,10 \cdot 10^{13}$	0,236	0,0138	10,7	$2,70 \cdot 10^{19}$	1,10	660	$3,00 \cdot 10^{-4}$
$8,69 \cdot 10^{13}$	0,125	0,0025	0,209	$2,70 \cdot 10^{20}$	1,09	643	$3,02 \cdot 10^{-4}$
$2,84 \cdot 10^{14}$	0,259	5,19	$2,53 \cdot 10^{-3}$	$5,68 \cdot 10^{20}$	1,09	642	$3,02 \cdot 10^{-4}$
$5,51 \cdot 10^{14}$	0,639	9,45	$1,01 \cdot 10^{-3}$	∞	1,09	660	$3,00 \cdot 10^{-4}$

периода $\tau = 2\pi/\Omega_{\max}$ и энергии вращения E_r , рассчитанные для $\Omega = \Omega_{\max}$ [81]. Энергия E_r измерена в единицах 10^{50} эрг. Как мы видим, у белых карликов $\tau_{\min} > 1$ сек, а у барионных конфигураций $\tau_{\min} < 1$ сек. Разумеется, возможны и более большие периоды вращения.

§ 56. Пульсары

Изложенная выше теория сверхплотных небесных тел основана на хорошо установленных положениях физики. Поэтому с точки зрения теории реальное существование таких звезд не вызывает сомнений. Однако выводы

любой, даже самой совершенной теории безусловно должны подвергаться проверке наблюдениями. В существовании белых карликов сомневаться не приходится, так как за последние несколько десятков лет непосредственными наблюдениями обнаружено очень много звезд такого типа.

До начала 1968 г. оставался нерешенным вопрос о барионных звездах. Первые намеки о существовании таких звезд мы встречаем в сообщениях об открытии точечных источников космического рентгеновского излучения. Это открытие было сделано во внеатмосферных наблюдениях, произведенных с помощью ракет [165]. Однако не вызывающее сомнений косвенное доказательство о существовании барионных звезд мы получили только после открытия пульсирующих источников радиоизлучения. Эти загадочные объекты были названы *пульсарами*. Сообщение об открытии первого пульсара CP 1919 было получено в феврале 1968 г. [201a]. После этого было обнаружено много новых пульсирующих источников радиоизлучения, и к концу 1970 г. имелись данные приблизительно о 55 объектах такого типа (см. таблицу 15) [282]. Значительную часть литературы по рассмотренному вопросу можно найти в [36a, 281].

Пульсары представляют собой мощные источники радиосигналов, повторяющихся через определенный промежуток времени с поразительной точностью. Период повторения импульсов у разных объектов неодинаковый. Для обнаруженных пульсаров периоды P находятся в интервале $0,033 \leq P \leq 4$ сек. Ширина (длительность) импульсов W порядка $(5 \div 50)$ мсек, т. е. примерно на порядок меньше значения периода. В таблице 15 дан список пульсаров и указаны некоторые важные характеристики их. Эти небесные объекты обозначаются латинскими буквами и четырьмя цифрами (см. второй столбец). Обычно первая буква указывает место открытия источника, а вторая представляет собой первую букву слова Pulsar. Иногда используют обозначение PSR, составленное из трех букв этого слова. Числа дают значения прямого восхождения α (первые два указывают часы, последние два — минуты). У некоторых пульсаров указывается также вторая координата: склонение в градусах.

Например, AP 1237+25 означает открытый в Аресибо пульсар с $\alpha=12$ час 37 мин, $\delta=+25^\circ$, а PSR 0628—28—пульсар с $\alpha=0,6$ час 28 мин, $\delta=-28^\circ$. В новом унитарном обозначении опущены буквы, указывающие место открытия источника (см. первый столбец).

Профиль радиоимпульсов у всех источников приблизительно одинаков, но детальная форма и амплитуда их разнообразны. Амплитуда импульсов непостоянна: она испытывает сильные флуктуации в широком интервале времени (за промежутки порядка дней, часов и даже минут). Изменения заметны даже от импульса к импульсу. Так, вследствие наступающего по временам сильного ослабления импульсы от CP 1919 удавалось уловить не при всех регистрациях (например, на волне 3,7 м импульсы были замечены в течение около минуты, а затем в течение двух-трех минут наступало молчание). Физическая природа флуктуаций амплитуд сигналов не совсем ясна. Изменения в потоке пульсирующего излучения, возможно, обусловлены флуктуациями рассеивающего вещества межзвездной среды или же обусловлены механизмом излучения в самом источнике, а может быть, и тем и другим. Величина импульсов изменяется также в зависимости от частоты. Не всегда излучение заключено внутри одного импульса. Так, например, у CP 0950, кроме основного импульса шириной $W \approx 15$ мсек, найден сравнительно слабый промежуточный импульс на 100 мсек раньше основного. Ширина этого предвестника основного сигнала приблизительно равна 10 мсек, а соответствующий ему поток энергии — примерно 1,5% от всего потока.

Излучение пульсаров сильно поляризовано (у CP 0950 оно доходит до 95%), что по-видимому, является свидетельством наличия весьма интенсивных магнитных полей в областях, где возникает излучение. Поляризация обычно эллиптическая, но бывает также линейной и круговой. Внутри каждого импульса поляризация с частотой изменяется. Поляризация обладает также зависимостью от времени: изменяется с периодом порядка одного дня (имеются случаи изменения от импульса к импульсу).

У всех пульсаров, перечисленных в таблице 15, за исключением NP 0531, излучение сосредоточено в радиобласти спектра, в основном в метровой области. Для построения теории важным является знание закона

Таблица 15

Таблица пульсаров

Обозначение	Пульсар	Период P , сек	Ширина импульса, мсек	Мера диспер- сии, пс-см^{-3}	Расстоя- ние, пс	n_e , см^{-3}	Изменение периода, мсек/день	$P \cdot \left(\frac{dP}{dt}\right)$, лет
P 0031	MP 0031	0,943	25:	12	210	0,06	0,177	1,1E7
P 0254	MP 0254	0,448	10	10	240	0,04		
P 0329	CP 0329	0,714518603	7	26,75	2000	0,01		
P 0450	MP 0450	0,5497	20:	10	330	0,03		
P 0527	NP 0527	3,74591	148	49,3	2000	0,02		
P 0531	NP 0531	0,03309932	3	56,5	2000	0,03	36,518	2,5E3
P 0628—28	PSR 0628—28	1,2444	50:	34,4	330	0,03	8,640	
P 0736	MP 0736	0,3749	40	100	1000	0,10	1,728	
P 0808	CP 0808	1,292241305	90	5,77	190	0,03	0,002	6,0E8
P 0818	MP 0818	1,238	25:	25:	830	0,03		
P 0823+26	AP 0823+26	0,53062	13	19,4	630	0,03	0,146	9,9E6
P 0833—45	PSR 0833—45	0,0892	2	50	500	0,10	10,08	2,4E4
P 0834	CP 0834	1,2737633	38	12,9	430	0,03	0,587	5,9E6
P 0835	MP 0835	0,765	20	120,0	1200	0,10		
P 0904+77	PSR 0904+77	1,57905	80					
P 0940	MP 0940	0,662	30	145,0	2300	0,06		
P 0943	PP 0943	1,0977	24:	17,5	300	0,06		
P 0950	CP 0950	0,253065038	21	2,98	290	0,01	0,020	3,3E7
P 0959	MP 0959	1,4365	50	90,0	2300	0,04		
P 1133	CP 1133	1,188011019	43	4,87	210	0,02	0,326	9,9E6
P 1154	MP 1154	0,400		270,0	2700	0,10		
P 1237+25	AP 1237+25	1,38245	60	8,5	200	0,05		
P 1240	MP 1240	0,388	60:	220	2200	0,10		
P 1359	MP 1359	0,690	20:	20:	670	0,03		

P 1426	MP 1426	0,788	10	60	1500	0,04	0,259	4,6E6
P 1449	MP 1449	0,180	5:	90	1700	0,05	0,442	
P 1451—68	PSR 1451—68	0,2633	25	12	400	0,03		
P 1508	HP 1508	0,739677616	20	19,6	250	0,08		
P 1530	MP 1530	1,368	25:	20	670	0,03		
P 1541+09	AP 1541+09	0,74839	100:	35,0	1200	0,03		
P 1604	MP 1604	0,421	10:	10	330	0,03		
P 1642—03	PSR 1642—03	0,38765	20	40,0	1300	0,03		
P 1706	MP 1706	0,653	20	10,0	330	0,03		
P 1727	MP 1727	0,829	30	140	1500	0,09		
P 1747	MP 1747	0,742	20	40	1500	0,03		
P 1749—28	PSR 1749—28	0,5625533	4,7	50,88	1600	0,03	6,20	2,5E5
P 1818	MP 1818	0,5980	20:	70	2400	0,02		
P 1845	IP 1845	0,597731	20:	141,9	1200	0,03		
P 1857	MP 1857	0,6118	35:	35				
P 1858+03	IP 1858	0,655444	120	402				
P 1911	MP 1911	0,825	20	75,0	750	0,10	0,12	3,2E7
P 1919	CP 1919	1,337301133	40	12,55	420	0,03		
P 1929+10	PSR 1929+10	0,2265	10	8	270	0,03	0,526	1,8E6
P 1933+16	IP 1933+16	0,358764	35:	143,0	1430	0,10		
P 1944	MP 1944	0,440	35:	35	1200	0,03		
P 1946	IP 1946	0,71735	20	100				
P 1953+29	IP 1953	0,426676	25	225	470	0,03	0,011	1,4E8
P 2003+31	IP 2003	2,111206	28	14,2	330	0,03		
P 2015+28	AP 2015+28	0,557954	100	10:	380	0,03	1,018	5,2E6
P 2022	IP 2022	0,52921	30	11,40	1000	0,10		
P 2045—16	PSR 2045—16	1,9615639	140	100:	2500	0,02		
P 2113	IP 2113	1,0147777		43,8	460	0,10		
P 2218+47	PSR 2218+47	0,538461		46				
P 2303+30	AP 2303+30	1,575869		96				
P 2319+60	IP 2319	2,256483						

Примечание. В последнем столбце Е/Н означает $\cdot 10^N$.

распределения энергии по частотам внутри импульса. Этот вопрос пока не решен: имеются только предварительные данные, указывающие на то, что дифференциальный спектр энергии является экспоненциально падающим с показателем степени $n \approx 1$. Одно несомненно, что спектр энергии сильно падающий, поэтому на высоких частотах (сантиметровая область спектра и ниже) не удастся наблюдать сигналы. В некоторых случаях спектр энергии на высоких частотах как будто обрывается.

Ширина импульсов проявляет зависимость от частоты: с возрастанием частоты она уменьшается по закону $W \sim \nu^{-n}$, где $n \approx 0,25$ и $0,21$ соответственно для CP 1153 и NP 0527. Резкий рост и спад импульсов (примерно за время 1,5 мсек у NP 0531) свидетельствуют о строго направленном, пучковом механизме излучения при условии, что объект вращается (см. ниже).

Периоды пульсаров удастся измерить с высокой точностью. Оказывается, что у всех источников период со временем медленно возрастает. Наблюдается определенная корреляция между периодом P и скоростью его удлинения $\frac{dP}{dt}$: при переходе от объектов с коротким P к объектам с длинным P производная уменьшается (см. столбец «Изменение периода»). Так, например, у NP 0531 период $P \approx 0,0331$ сек, $\frac{dP}{dt} \approx 36,5$ нсек/день (нсек = наносекунда = 10^{-9} сек), а у CP 1919 $P \approx 1,29$ и $\frac{dP}{dt} \approx 0,002$ нсек/день.

Величина ширины импульса радиоизлучения позволяет составить довольно точное представление о размерах излучающих областей. Их нижняя граница, очевидно, определяется интервалом времени между лучами, испущенными от центра и краев диска небесного образования, т. е. $W \approx R/c$, где R — радиус диска излучающей области. Поскольку $W \approx 0,03$ сек, отсюда следует, что линейные размеры излучающей области порядка 900 км (в случае NP 0531 $W \approx 0,003$ сек и $R \approx 90$ км). Уже из этой простой оценки очевидно, что явление пульсирующего радиоизлучения, по-видимому, обусловлено сверхкомпактными небесными телами.

Очень важным является знание расстояний до пульсаров. В среднем пульсары находятся на расстояниях от

нескольких сотен до нескольких тысяч парсек от Солнца. Напомним, что диаметр Галактики $d \approx 30$ *кпс*, толщина ее в центральной части приблизительно равна 5 *кпс*, а на периферии ~ 1 *кпс*. Солнце находится от центра на расстоянии $r \approx 8$ *кпс* в северном полушарии, в 14 *пс* от галактической плоскости. Таким образом, наблюдаемые пульсары являются членами семьи нашей Галактики. Отсюда, конечно, не следует, что их нет в других галактиках. Несомненно, пульсары имеются и в других галактиках, однако наблюдение их на общем фоне радиоизлучения всей системы связано с большими трудностями. Знание расстояния и количества энергии, содержащегося в импульсах, позволяет вычислить абсолютные потоки радиоизлучения, т. е. средние радиосветимости источников. Радиосветимости пульсаров порядка $10^{28} \div 10^{31}$ *эрг·сек⁻¹*. Если учесть также коротковолновую часть излучения (которую пока не удается наблюдать, за исключением NP 0531), то, по-видимому, величина полной светимости может быть 10^{32} *эрг·сек⁻¹*. Для сравнения напомним, что светимость Солнца $L_{\odot} = 3,86 \cdot 10^{33}$ *эрг·сек⁻¹*. Как мы видим, пульсары являются весьма мощными источниками радиоизлучения.

Поскольку уже обнаружено немалое число пульсаров, можно обсудить вопрос о пространственном распределении их. Статистика 55 экземпляров указывает на явную тенденцию расположения их близ галактической плоскости.

Два пульсара, NP 0531 и NP 0527, обнаружены в Крабовидной туманности [179a]. Период первого является самым коротким, а второго — самым длинным среди всех источников, перечисленных в таблице 15. Следует несколько подробнее остановиться на NP 0531, так как благодаря ряду своих замечательных особенностей он находится в центре внимания специалистов. Он характеризуется периодом $P \approx 0,0331$ *сек*, шириной импульса $W \approx 3$ *мсек* и, как уже говорилось, является самым быстропульсирующим источником излучения. Представляет большой интерес идентификация пульсаров с известными или неизвестными небесными телами, доступными наблюдению в оптической области. Поиски оптической идентификации увенчались успехом только для пульсара NP 0531. Оказалось, что он совпадает с ранее обнару-

женной слабой звездой, находящейся в центре Крабовидной туманности. Это именно та самая звезда, которую принято считать остатком вспышки Сверхновой 1054 г. (упоминание о ней имеется в китайских летописях). Облако вещества, выброшенное при взрыве центрального массивного тела, видно до сих пор (радиус облака порядка 3 *пс*, масса $M \approx 0,3 M_{\odot}$). Оно удаляется от центра со скоростью $1000 \text{ км} \cdot \text{сек}^{-1}$.

Крабовидная туманность неоднократно оказывалась в центре внимания астрофизиков. Впервые у нее было обнаружено наличие синхротронного излучения в оптической области частот. Продолжающееся наблюдение синхротронного излучения свидетельствует о том, что и в настоящее время в туманности постоянно генерируются потоки релятивистских электронов, которые, двигаясь в магнитном поле, испускают магнитотормозное (т. е. синхротронное) излучение. Это заключение неизбежно, так как время жизни потоков релятивистских частиц, образованных при вспышке сверхновой, значительно меньше времени (которое равно 916 лет), прошедшего с тех пор. Вследствие магнитотормозного излучения частицы давно потеряли бы свою энергию и релятивистские потоки перестали существовать. В 1963 г. наблюдалось рентгеновское излучение из центральной области Крабовидной туманности. И вот теперь снова этот объект оказался в центре внимания астрофизиков. Оказалось, что звезда, находящаяся в центре туманности, наряду с быстро пульсирующим радиоизлучением, испускает мощное пульсирующее излучение также и в оптической и даже в рентгеновской области спектра. Энергия квантов, испускаемых этим источником, начиная от радиообласти, достигает значения выше 30 *кэв*. Измерения показали, что периоды оптических и рентгеновских пульсаций совпадают и они испускаются точно синхронно. Этот важный факт не оставляет каких-либо сомнений в том, что радио-, оптическое и более жесткое пульсирующее излучения испускаются одним и тем же источником, причем одновременно.

Пульсирующие потоки NP 0531 для радио-, оптической и рентгеновской областей спектра на Земле приблизительно равны $6 \cdot 10^{-14}$, $6 \cdot 10^{-14}$ и $10^{-7} \text{ эрг} \cdot \text{см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$. Поскольку расстояние до Крабовидной туманности при-

близительно равно $2,02 \text{ клс} = 6,25 \cdot 10^{21} \text{ см}$, из этих данных можно вычислить абсолютные потоки энергии (светимости) пульсара:

$$I \approx \begin{cases} 3 \cdot 10^{31} \text{ эрг} \cdot \text{сек}^{-1} & \text{радио,} \\ 3 \cdot 10^{31} & \text{» оптическое,} \\ 7,4 \cdot 10^{36} & \text{» рентгеновское.} \end{cases}$$

Пульсирующий оптический поток энергии составляет примерно 10% от полного оптического потока звезды, с которой отождествлен пульсар, а пульсирующее рентгеновское излучение равно примерно 15% полного рентгеновского потока, который испускается всей туманностью.

Другим пульсаром, вызывающим особый интерес, является PSR 0833—45. Он интересен тем, что является следующим после NP 0531 пульсирующим источником радиоизлучения с наиболее коротким периодом, у него $P=0,0892 \text{ сек}$. Он выделяется среди остальных и по другой причине, а именно, подобно NP 0531, по-видимому, также связан со вспышкой сверхновой. В самом деле, он находится на месте Vela-X (созвездие Паруса) — предполагаемой вспышки сверхновой (у которой еще виднеется довольно слабая газовая оболочка). Сравнительно слабые следы свидетельствуют о том, что здесь взрыв произошел значительно раньше Сверхновой 1054 г. Поиски обнаружения оптического и рентгеновского излучения у этого пульсара не дали положительного результата.

Примеры объектов Крабовидной туманности и Vela-X наводят на мысль, что пульсары, по-видимому, являются остатками вспышек сверхновых. (В этом явлении опять перекрещиваются две точки зрения: первая — это та, что произошел коллапс обычной звезды, вторая — взрыв сверхплотного небесного тела.) Отсутствие газовой оболочки или каких-либо других видимых следов у других пульсаров можно истолковать либо в том смысле, что соответствующие вспышки произошли достаточно давно, и поэтому выброшенное при взрыве вещество успело рассеяться в межзвездное пространство, либо же можно думать, что пульсар удалился из области туманности. Если это так, то можно пойти дальше и утверждать,

что должна существовать прямая корреляция между периодом и возрастом пульсаров (периоды пульсаций у молодых источников должны быть короткими, а у старых — длинными). В этой связи можно полагать, что должны существовать пульсары с более короткими периодами, чем имеется у NP 0531. Итак, если допустить, что наблюдаемые объекты являются представителями разных эволюционных моментов примерно однотипных исходных явлений, то тогда возникает представление о наличии каких-то процессов торможения и затухания, в результате чего периоды пульсаров со временем удлиняются. Этот вывод подтверждается непосредственными измерениями, показывающими, что в самом деле периоды пульсаров со временем медленно растут, причем скорость возрастания $\frac{dP}{dt}$ при переходе от короткопериодических к длиннопериодическим уменьшается (т. е. со временем скорость $\frac{dP}{dt}$ уменьшается). Имеется

также корреляция между периодами и мощностями: светимость пульсирующего излучения у NP 0531 значительно больше, чем у других пульсаров, т. е. молодые образования должны обладать более мощным потоком излучения, чем старые.

Теперь мы можем перейти к обсуждению вопроса о природе пульсаров. Сравнительно малая величина периода и ширины импульсов однозначно указывает на то, что явление пульсирующего излучения прямо связано со сверхплотными звездами с размерами $R \lesssim \omega c$. Наиболее серьезный и логический анализ фактов был произведен Голдом [189b]. Учитывая строгую периодичность пульсаров, он пришел к выводу, что наблюдаемое явление каким-то образом порождается вращением барионной звезды. В настоящее время это представление является общепризнанным, однако были и другие мнения. Так, в литературе обсуждались версии о вращающихся белых карликах, о пульсациях белых карликов, об одновременном вращении и пульсации белых карликов или барионных звезд. В настоящее время стало очевидным, что версии, связанные с белыми карликами, не годятся. Такие короткие периоды, какие имеются у NP 0531 и PSR 0833—45, у белых карликов исключаются. В самом

деле, у белых карликов периоды радиальных пульсаций $P > 0,25$ сек, а вращения $P_r > 0,3$ сек (см. таблицу 14). Периоды же основных мод радиальных пульсаций для типичных белых карликов порядка 10 сек, тогда как у барионных конфигураций они примерно равны $0,1 \div 0,001$ сек (см. рис. 37). Таким образом, наблюдаемые значения периодов пульсаров скорее всего соответствуют периодам вращения и радиальных пульсаций барионных звезд. Ширина импульсов, а также резкое появление и исчезновение их, с другой стороны, свидетельствуют об остром, направленном характере пучка излучения, который позволяет более естественное объяснение, если предполагается вращение, а не пульсация барионной звезды. На оболочке звезды как бы имеется излучающее пятно, пучок лучей которого вследствие вращения небесного тела то попадает на Землю, то исчезает. Роль пятен могут играть, например, магнитные полюсы. В самом деле, наличие интенсивного поля может явиться причиной сосредоточения излучения в определенных направлениях в атмосфере звезды. Имеются и другие доводы, говорящие в пользу вращения, а не пульсации.

В работе [179a] на основании анализа многочисленных последовательных импульсов от AP 2015+28 и CP 1919 было как будто установлено наличие существования второго, более короткого периода P_2 в изменении интенсивности излучения, причем утверждалось, что $P_2 \ll P_1$, где P_1 — основной период, $P_2 \approx 10$ мсек. В отличие от P_1 , для периода P_2 были установлены заметные изменения. На основании этого в работах [36a, 189a] предлагалась модель одновременно вращающейся и пульсирующей барионной звезды, при этом период P_1 приписывался вращению, а P_2 — радиальным пульсациям. В последующем, однако, существование второго периода было отвергнуто.

Был предложен ряд теорий для объяснения механизма пульсирующего радио- и оптического излучения, однако ни одна из них не смогла охватить все аспекты наблюдаемого явления, а некоторые даже оказались явно ошибочными. Можно констатировать, что к моменту написания этих строк (ноябрь 1970 г.) теория для явления пульсаров еще не была создана. Однако имеются разумные качественные объяснения Голда [189b], на которых

ниже мы остановимся. Из представления о вращающихся барионных звездах можно ожидать ряд следствий, а именно: 1) должна существовать прямая корреляция между периодом P и шириной W импульсов (с замедлением вращения W , очевидно, должно расти); 2) малым периодам P должны соответствовать молодые объекты; 3) наиболее вероятными местами наблюдения пульсаров являются места предшествующих вспышек сверхновых; 4) с течением времени из-за торможения вращательного движения (обусловленного потерями энергии) периоды должны удлиняться. Все эти выводы подтверждаются данными наблюдений.

Если в Крабовидной туманности действительно мы имеем дело с барионной звездой, то тогда при массе $M \approx M_{\odot}$, радиусе $R \approx 7$ км и угловой скорости $\omega \approx 200 \text{ сек}^{-1}$ ($P \approx 0,0331 \text{ сек}$) для энергии вращения получаем величину $\sim 10^{49} \text{ эрг}$. С другой стороны, наблюдаемое замедление вращения ($\frac{dP}{dt} = 36,518 \text{ нсек} \cdot \text{день}^{-1}$,

т. е. уменьшение числа оборотов на один за 2400 лет) позволяет оценить величину потерь энергии. Она приблизительно равна $2 \cdot 10^{38} \text{ эрг} \cdot \text{сек}^{-1}$, что согласуется с вышеприведенным числом для полного потока излучения пульсара в Крабовидной туманности. Совершенно немыслимо допустить, что это мощное излучение обусловлено излучением электронов, хаотически движущихся в магнитном поле, так как при этом потребовались бы частицы с энергией 10^{21} эв . Поэтому в атмосфере барионной звезды должны существовать какие-то когерентные механизмы излучения частиц, которые могут возникнуть при коррелированном движении сгустка частиц (при этом интенсивность будет пропорциональна квадрату общего заряда сгустка частиц и, следовательно, квадрату плотности числа частиц). Предполагается, что барионная звезда должна обладать весьма сильным магнитным полем, а именно, у самой поверхности до 10^{12} гауссов, а может быть, и больше. Голд предполагает, что мощная магнитосфера звезды вращается вместе с ней. Радиальные размеры плазмы в магнитосфере доходят до расстояний $r \approx c/\omega$, где ω — угловая скорость вращения. Сгустки частиц, совершая спиральное движение по силовым линиям, двигаются к поверх-

ности магнитосферы. На расстояниях, где их скорость достигает значения $v \approx c$, струя частиц выбрасывается из поверхности магнитосферы. При этом выбросе и возникает световое и рентгеновское излучение. А основная часть радиоизлучения испускается по направлению касательной к окружности вращения как раз перед извержением релятивистского газа.

Отсутствие аксиальной симметрии в магнитном поле (косой ротатор) или в питании частиц, вместе с острым направленным пучковым характером излучения от релятивистской движущейся струи при вращении пучка, как раз и вызывает явление пульсации подобно маяку. Голдрайх рассмотрел некоторые аспекты быстро вращающейся магнитосферы и механизмы генерации частиц высокой энергии в ней. Существует также мнение о лазерном механизме генерации излучения. Предполагается, что возникающее у поверхности излучение при прохождении через плазму усиливается за счет энергии соответствующих возбуждений плазмы благодаря индуцированным переходам. Имеются и другие варианты теоретических объяснений, на которых мы не имеем возможности остановиться. Наиболее правдоподобным представляется нам предположение Голда о наличии хорошо сформулированных потоков быстрых частиц, которые необходимы для генерации электромагнитных волн кооперативным способом, что является необходимым для объяснения наблюдаемых интенсивностей пульсаров. Во всех разновидностях теории несомненным кажется наличие сильного магнитного поля в плазме вокруг звезды. Наличие такого поля необходимо хотя бы для объяснения факта поляризации излучения.

Остановимся теперь на том, как определяются расстояния до пульсаров. Выше мы уже говорили, что оптическая идентификация осуществлена только для NP 0531, поэтому расстояние до него уже известно, а именно, $s \approx 2,02$ кпс. Для других же объектов, не имеющих оптической идентификации, расстояния определяются по величине частотной дисперсии времен распространения радиоволн в межзвездном пространстве. Показатель преломления волн в плазме определяется формулой

$$n = 1 - \frac{v_0^2}{2v^2}.$$

Здесь $\nu_0^2 = n_e e^2 / \pi m_e$ — плазменная частота, n_e — плотность электронов в межзвездном пространстве по направлению распространения луча. Волны распространяются с групповой скоростью $v_g = \frac{d\omega}{dk}$, где $k = \frac{\omega}{v} = \frac{n\omega}{c}$ — волновое число (число волн на расстоянии 2π), а $v = \frac{c}{n}$ — фазовая скорость волн. Учитывая приведенное выше выражение для показателя преломления, находим

$$\frac{1}{v_g} = \frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{c} \left(n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) = \frac{1}{c} \left(n + \frac{\nu_0^2}{\nu^2} \right) = \left(1 + \frac{\nu_0^2}{2\nu^2} \right).$$

Время прибытия монохроматического сигнала равно

$$t(\nu) = \int_0^s \frac{ds}{v_g} = \frac{1}{c} \int_0^s \left(1 + \frac{\nu_0^2}{2\nu^2} \right) ds,$$

где s — расстояние от источника до приемника. Как мы видим, время распространения сигнала между заданными точками зависит от частоты; с уменьшением частоты оно возрастает. Отсюда для разности времен прибытия сигналов с частотами ν_1 и ν_2 находим

$$t(\nu_1) - t(\nu_2) = \frac{e^2}{2\pi m_e c} \left(\frac{1}{\nu_1^2} - \frac{1}{\nu_2^2} \right) \int_0^s n_e ds.$$

Интеграл $\int_0^s n_e ds$ представляет собой число электронов в цилиндре с основанием 1 см^2 по направлению наблюдения пульсара, он называется мерой дисперсии (МД). Итак,

$$\text{МД} = \int_0^s n_e ds = \frac{2,4 \cdot 10^{-4} [t(\nu_1) - t(\nu_2)]}{\frac{1}{\nu_1^2} - \frac{1}{\nu_2^2}}. \quad (56.1)$$

Здесь время измеряется в секундах, расстояние в парсеках ($1 \text{ пс} = 3,086 \cdot 10^{18} \text{ см}$), а частота в мегагерцах.

Из (56.1) видно, что меру дисперсии для каждого пульсара можно получить, непосредственно измеряя запаздывание волн, поэтому если нам известна средняя плотность электронов по направлению наблюдения, то

можно вычислить расстояние до источника

$$s = \frac{\text{МД}}{n_e}. \quad (56.2)$$

Среднее значение плотности электронов для всех пульсаров неодинаково. Оно большое, если луч зрения проходит через области, обладающие повышенной ионизацией (облака ионизованного водорода, называемые областями H II), и области, содержащие звезды ранних спектральных классов. Голубые сверхгиганты способны ионизовать вокруг себя водород на очень больших расстояниях, например до значения около 1000 пс. Таким образом, для более или менее точного определения расстояний до пульсаров необходимо в каждом случае произвести тщательное исследование объектов, мимо которых или через который проходит луч зрения. Если такой анализ не проведен, то расстояния, определяемые по мерам дисперсии, в отдельных случаях могут содержать значительные ошибки. Плотность электронов, усредненная по всем источникам, приведенным в таблице 15, приблизительно равна $0,045 \text{ см}^{-3}$ [282]. Заметим, что часть меры дисперсии обусловлена самим источником. Рассмотрим, например, пульсар в Крабовидной туманности NP 0531, для которого мера дисперсии равна $57 \text{ пс} \cdot \text{см}^{-3}$. Туманность вокруг NP 0531 имеет массу $M \approx 0,3 M_\odot$, радиус $R \approx 0,5 \text{ пс}$ и среднее значение плотности электронов $n_e \approx 40 \text{ см}^{-3}$. Следовательно, вклад самой туманности в меру дисперсии равен $20 \text{ пс} \cdot \text{см}^{-3}$. В настоящее время технические возможности таковы, что можно наблюдать пульсары с мерой дисперсии $\text{МД} \lesssim 270 \text{ пс} \cdot \text{см}^{-3}$.

Измерение поляризации пульсаров может служить средством для определения среднего значения напряженности магнитных полей в межзвездном пространстве. С этой целью используется эффект фарадеевского вращения плоскости поляризации. Угол вращения плоскости поляризации определяется формулой

$$\theta = \frac{7,3 \cdot 10^{10}}{\sqrt{2}} \int_0^s n_e H_{\parallel} ds \approx \frac{7,3 \cdot 10^{10}}{\sqrt{2}} \bar{H}_{\parallel} \cdot \text{МД}, \quad (56.3)$$

где $\bar{H}_{\parallel}$ — среднее значение компоненты напряженности магнитного поля по линии наблюдения пульсара, H

измеряется в гауссах, ν — мегагерцах и расстояние — в парсеках. Например, мера дисперсии источника СР 1919 равна $13 \text{ пс} \cdot \text{см}^{-3}$, следовательно, угол вращения плоскости поляризации для радиоастрономической полосы частот $\nu = 151,5 \text{ Мгц}$ равен $\theta \approx 4,1 \cdot 10^7 \bar{H}_{\parallel}$ радиан.

Если верно представление, что пульсары рождаются после вспышек сверхновых звезд, то по наблюдаемой частоте появления последних (для объектов галактического диска — одна сверхновая за 12 лет и для гало — одна за год) можно оценить общее число пульсаров, образованных за весь период существования нашей Галактики. Оно оказывается порядка 10^9 . Числа последнего столбца таблицы 15 дают представление о возрасте пульсаров.

Резюме

В барионных конфигурациях метрика части пространства, занимаемого распределением масс, а также на расстояниях порядка радиуса от поверхности, сильно искривлена. Поэтому в основу теории таких небесных тел должна быть положена релятивистская теория гравитации. Мощное гравитационное поле барионных звезд может быть использовано для наблюдения их (красное смещение, сильное отклонение лучей света звезды, лежащей в направлении наблюдения).

Большой интерес представляет зависимость массы от числа барионов $M(N)$. Она при плотностях частиц, в несколько десятков раз превышающих ядерную, зигзагообразна, т. е. состоит из многих ветвей. Одному и тому же числу барионов N соответствуют два, а в некоторых областях и больше значений масс (см. рис. 30). Разумеется, устойчивыми являются конфигурации, принадлежащие нижней ветви линии $M(N)$, остальные должны быть метастабильными. Конфигурации, принадлежащие верхним ветвям, подвергаясь тем или иным возмущениям, должны рано или поздно перейти в состояние нижней ветви. Разность масс между ветвями линии $M(N)$ составляет до нескольких процентов массы звезд, поэтому переход из метастабильного состояния в стабильное будет сопровождаться выделением колоссальной энергии (достигающей нескольких процентов внутренней энергии), т. е. будет носить характер мощного кос-

мического взрыва. Многозначность зависимости $M(N)$ есть релятивистский эффект. В этом вопросе важное значение имеет значение параметра $q(0) = P(0)/\rho(0)$. Обсуждаемый эффект проявляется лишь при значениях q , близких к единице, т. е. только при плотностях, превышающих ядерную. Такого эффекта при меньших плотностях не может быть.

В наиболее плотных барионных конфигурациях ($n > 10^{40}$ частиц·см⁻³) гравитационный дефект массы $m_p N - M$ имеет аномальное значение, т. е. становится отрицательным (см. рис. 30 и 33). Это новый особый эффект общей теории относительности. В ньютоновском варианте теории гравитации такого эффекта не существует. Он обусловлен катастрофическим нарушением аддитивности внутренней энергии в соответствующих конфигурациях. Конфигурации, обладающие аномальным дефектом массы, лежат на верхних ветвях линии $M(N)$. Они неустойчивы не только относительно перехода на нижнюю ветвь зависимости $M(N)$, но и относительно разлета частиц в бесконечность, т. е. распада на диффузное состояние. При этом важно иметь в виду, что частицы по одиночке не могут покидать звезду, так как находятся в связанном состоянии: полная энергия их отрицательна (конечно, без учета энергии покоя). Поэтому переход в диффузное состояние может совершаться лишь путем взрыва. Выделенная при этом энергия порядка внутренней энергии звезды.

Представляет большой интерес построение моделей небесных тел с массами, намного превышающими солнечную и одновременно обладающими аномальным дефектом массы. Они могли бы служить моделями дозвездных тел в космогонической концепции В. А. Амбарцумяна. Однако построение моделей таких тел в рамках теории гравитации Эйнштейна наталкивается на серьезные трудности, обусловленные наличием особенности в решении Шварцшильда при $r = 2kM/c^2$. Нам кажется, что обойти эту трудность путем введения нестационарной метрики подобно леметровской невозможно, так как в метрике возникает особенность физического характера, а именно, в метрике возникают скорости, пре-

вышающие скорость света: $\frac{\partial \sqrt{g_{ik}}}{\partial t} > c$.

Мы уже видели, что не все барионные конфигурации являются устойчивыми. Неустойчивость конфигураций, принадлежащих верхней ветви кривой $M(N)$, очевидна и об этом мы уже говорили выше (см. рис. 30). Что касается конфигураций, принадлежащих нижней ветви линии $M(N)$, то не все они являются устойчивыми. Устойчивыми являются только конфигурации с $\eta < -1,36$ ($\rho_0 \leq 7 \cdot 10^9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$) и $-0,5 \leq \eta \leq 0,8$ (значению параметра $\eta = 0,8$ соответствует плотность $\rho_0 = 4 \cdot 10^{15} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$). Первые являются белыми карликами, вторые — барионными звездами (см. рис. 20). Конфигурации же со значениями параметра $-1,36 \leq \eta \leq -0,6$ и $\eta \geq 0,8$ неустойчивы. При возникновении возмущений они могут распасться или перейти в конфигурации, принадлежащие устойчивым ветвям. При этом опасность для равновесия представляют только радиальные колебания. Нерадиальные пульсации сравнительно быстро (по-видимому, в течение времени порядка одной минуты) затухают благодаря излучению гравитационных волн. Представление о порядках величин времен жизни нестабильных конфигураций можно составить по рис. 37. Энергия основного радиального колебания — величина значительная, для конфигураций из реального газа барионов она порядка [267]

$$E_p \approx 10^{53} \left(\frac{\xi}{r} \right)^2 \text{ эрг}.$$

ГЛАВА IX

ОБОБЩЕННАЯ ТЕОРИЯ ГРАВИТАЦИИ ЭЙНШТЕЙНА

§ 57. Общие соображения

В главах VI—VIII было показано, что для конфигураций, состоящих из вырожденного вещества, по теории тяготения Ньютона — Эйнштейна большие массы не получаются. Они оказываются порядка массы Солнца. Мы убедились также, что роль уравнения состояния в этом вопросе сильно ограничена. Разумным изменением уравнения состояния вещества можно добиться изменения величины массы и радиуса только в несколько раз, даже при любых уравнениях состояния увеличение порядков величин невозможно. Ничего существенно нового не дает также температура: прежде всего высокие температуры недопустимы из-за нейтринных потерь энергии, да и независимо от этого в конечном счете роль температуры сводится к изменению вида уравнения состояния. Мы видели также, что возможности сильно ограничены и в случае нестационарных моделей сверхплотных небесных тел. В релятивистской теории основное затруднение в вопросе увеличения массы конфигурации обусловлено наличием особенности в решении Шварцшильда. Но дело в том, что большие массы не получаются и по нерелятивистской теории гравитации, хотя здесь нет никаких особенностей, кроме несущественной особенности при $r=0$. По сути дела, в обсуждаемом вопросе нет существенной разницы релятивистского и нерелятивистского вариантов теории гравитации. Значит, затруднения (если, конечно, уместно употреблять это слово здесь) в вопросе получения больших

значений для масс сверхплотных звездных конфигураций присущи существующей теории гравитации. В этом мы убедились уже из оценок, приведенных в § 36.

Физическая причина невозможности получения больших масс заключается в том, что действующая на единицу массы гравитационная сила растет пропорционально плотности, а поэтому при увеличении последней для поддержания гидродинамического равновесия радиус звезды должен соответствующим образом сокращаться, чтобы увеличить градиент давления до величины, необходимой для компенсации этой силы. Но сокращение радиуса препятствует увеличению массы звезды, которая пропорциональна кубу радиуса. Вот именно поэтому не получаются большие массы для сверхплотных конфигураций. Заметных эффектов не дает также учет вращения.

Можно было думать, что ничего плохого нет в том, что массы звезд из вырожденного вещества получаются порядка массы Солнца. В самом деле, может быть, такова истинная природа вещей. Однако даже мотивы любопытства могли заставить нас задуматься над этим вопросом и искать пути преодоления этого, на наш взгляд странного, ограничения. Но, конечно, дело не только в чисто академическом любопытстве, имеются и более серьезные причины, вынуждающие нас на сомнения и поиски. За последние два десятилетия в астрофизике был открыт ряд важных явлений, пока не нашедших последовательного и лишённого противоречий объяснения. Прежде всего мы имеем в виду весьма бурные процессы, разыгрывающиеся в ядрах галактик, открытые недавно квазары — компактные небесные тела, по массе сравнимые с галактиками, не имеющие звездного населения. На основе критического анализа новых явлений как раз и возникла космогоническая концепция В. А. Амбарцумяна [3—13]. С духом этой концепции прямо гармонирует представление о сверхплотных дозвездных телах. В основном именно стремление разработать модели сверхплотных дозвездных тел заставляет нас искать пути обхода вышеупомянутого ограничения. Но мы должны дать себе ясный отчет в том, что эти ограничения можно обойти только путем изменения уравнений существующей теории гравитации. Всякое посягательство на

эту святыню, очевидно, должно быть сделано с известной осторожностью, дабы не вступить в противоречие с известными фактами астрономии. Ведь движение планет Солнечной системы в небесной механике предсказывается на многие столетия вперед с колоссальной точностью. Мы позже вернемся к этому вопросу, а пока посмотрим, какие намечаются возможности.

Обратимся к системе единиц измерения (34.1). Согласно (34.5) и (34.6) единица измерения массы в ней равна

$$\beta = 2\sqrt{2\pi} \frac{1}{m_n^2} \left(\frac{hc}{k} \right)^{3/2}. \quad (57.1)$$

В этих единицах уравнения поля для массы барионных конфигураций дают величину порядка 0,1. Как мы видим, единица измерения массы обратно пропорциональна квадрату массы частицы (т. е. нейтрона). Из этих частиц в основном состоит вещество звезды (положение дел, конечно, не изменяется, когда мы взамен барионов говорим только о нейтронах). Отсюда следует, что если массе частицы мысленно уменьшить в n раз, то, очевидно, масса конфигурации увеличится в n^2 раз (конечно, при этом величина массы звезды в системе единиц (34.1) не изменяется, только масштаб становится бóльшим). Так, например, если в конфигурациях из вырожденного газа частиц численно преобладающими являлись не барионы, а лептоны, скажем, электроны, то мы получили бы массу порядка $0,1 \left(\frac{m_n}{m_e} \right)^2 \sim 10^6 M_\odot$. Наш мир построен

так, что имеются барионы и лептоны, и в вырожденном веществе (благодаря принципу Паули и минимуму энергии) число первых намного больше вторых. Конечно, не исключена возможность, что при плотностях, намного превышающих ядерную, когда будет задеваться внутренняя структура частиц, появятся новые неизвестные нам более первичные элементарные частицы, масса которых меньше m_n . Однако независимо от того, каково в этом вопросе истинное положение дел, все равно этот путь не приводит к решению проблемы, поставленной перед нами. Дело в том, что увеличение массы конфигураций (из вырожденного вещества) при уменьшении массы

основной элементарной частицы сопровождается сильным уменьшением средней плотности, и в результате модель перестает быть сверхплотной. Мы повторяем, что причина невозможности получения сверхмассивных и одновременно сверхплотных моделей небесных тел не в частицах или уравнениях состояния, а в самой теории гравитации.

Из (57.1) видно, что имеются и другие возможности в направлении увеличения массы барионных конфигураций. Так, можно было допускать, что при тех фантастических плотностях, о которых шла речь до сих пор, привычные для нас законы физики должны испытывать какие-то изменения, уточнения. Например, самая простая мысль, которая приходит в голову, это — идея о некотором, может быть, незначительном изменении универсальных постоянных e , h , c и k . При увеличении h и c или при уменьшении гравитационной постоянной k мы могли также получить большие значения для массы барионных конфигураций (а также белых карликов). Дирак неоднократно обсуждал вопрос о возможном непостоянстве констант e , h , c , k . Он еще в 1937 г. [168, 169], обсуждая этот вопрос в связи с космологией, пришел к выводу, что со временем гравитационная постоянная медленно уменьшается. Позже с этой мыслью мы встречаемся также у других ученых [209, 140, 106]. Недавно, анализируя дальнейшие перспективы развития физики, Дирак утверждал, что постоянная тонкой структуры e^2/hc является истинной постоянной, но он не исключает мысли о незаметном изменении двух из величин e , h и c , причем он склонен считать, что непостоянство скорости света маловероятно. С точки зрения чистой логики ничего плохого не случится, если окажется, что наше представление о наличии определенного комплекса универсальных постоянных, на которых базируется физика наших дней, является приближенным. Ведь нужно иметь в виду, что значения универсальных постоянных определены для нашей эпохи развития Вселенной. Не является ли более логическим предположение о том, что если состояние Вселенной со временем изменяется, то должны закономерным образом изменяться также универсальные постоянные и тем самым некоторые законы природы.

В связи с этим периодическое измерение и уточнение значений универсальных констант физики по ходу развития экспериментальной техники является одной из основных задач науки вообще.

Исходя из представлений Дирака о переменности гравитационной постоянной, Иордан и его сотрудники создали новый вариант теории гравитации, называемый ими обобщенной теорией гравитации [80—90]. Эта теория подверглась острой критике и до сих пор не удостоилась должного внимания. Основной причиной нападок явилось нарушение ряда фундаментальных законов (в том числе закона сохранения энергии) в формулировке Иордана. Ниже мы увидим, что при более корректной формулировке теории никакого нарушения законов сохранения в самом деле не имеется.

В этой главе приводится изложение основ обобщенного варианта теории гравитации, а в последней на основе ее будет построена теория барионных конфигураций [102—107, 2]. Мы увидим, что здесь возможны сверхплотные конфигурации с массами порядка галактической и больше.

Новую теорию нужно формулировать с таким расчетом, чтобы не вступать в противоречия с многочисленными фактами астрономии. Нам кажется, исследования в этой области оправданы даже в том случае, если в конечном счете они окажутся бесплодными. Ведь развитие науки в основном идет не по заранее намеченному гладкому пути. Всегда возникают несколько направлений поисков. Теория Иордана — одно из возможных направлений развития теории гравитации. Нужно ее развивать и довести до такого уровня, чтобы можно было поставить вопрос о сравнении полученных выводов с наблюдательными данными.

Проделанная здесь работа не является бесполезной даже в худшем случае, если окажется, что она совсем неверна, ибо раз и навсегда будет покончено с одной из возможностей и усилия ученых можно будет сосредоточить на других направлениях. Нам хотелось бы еще раз подчеркнуть условность теории, изложенной в этой и следующей главах. О научной значимости ее можно говорить лишь после сравнения предсказанных эффектов с наблюдательными фактами.

§ 58. Уравнения поля

Основным моментом в обобщенной теории гравитации является то, что гравитационная постоянная заменяется функцией пространственно-временных координат, а в остальном она не отличается от обычной. В соответствии с этим здесь поле характеризуется 11 независимыми функциями: компонентами метрического тензора g_{ik} и гравитационным скаляром $\chi = 8\pi k/c^2$. В основу теории кладется вариационный принцип Иордана

$$S = \frac{c}{2} \int \chi^\eta \left(R - \frac{2\chi}{c^2} \Lambda - \xi g^{ik} \frac{\chi_i \chi_k}{\chi^2} \right) \sqrt{-g} d\Omega, \quad (58.1)$$

где R — риманова скалярная кривизна пространства, Λ — плотность функции Лагранжа для вещества, $\chi_i = \frac{\partial \chi}{\partial x^i}$, а η и ξ — безразмерные постоянные параметры новой теории. Постулируемое выражение для действия S , помимо хорошо известных стандартных свойств, удовлетворяет следующим требованиям: при $\chi = \text{const}$ оно совпадает с соответствующим выражением в теории гравитации Эйнштейна и, кроме того, не содержит новых размерных постоянных. Квадрат четырехмерного интервала будем писать в виде

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \quad (58.2)$$

Для вариации действия обычным путем находим

$$\begin{aligned} \delta S = \int \chi^\eta \left\{ \left[R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} - \frac{\chi}{c^2} T_{ik} - (\xi - \eta^2 + \eta) \frac{\chi_i \chi_k}{\chi^2} + \right. \right. \\ \left. + \eta \frac{\chi_{i;k}}{\chi} - \eta g_{ik} \frac{\chi^l{}_{;l}}{\chi} + \frac{\xi - 2\eta(\eta - 1)}{2} g_{ik} \frac{\chi_l \chi^l}{\chi^2} \right] \delta g^{ik} + \\ \left. + \frac{\eta}{\chi} \left[R - \frac{2(\eta + 1)}{\eta c^2} \chi \Lambda + \frac{\xi(\eta - 2)}{\eta} \frac{\chi_l \chi^l}{\chi^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2\xi}{\eta} \frac{\chi^l{}_{;l}}{\chi^2} \right] \delta \chi \right\} \sqrt{-g} d\Omega = 0, \quad (58.3) \end{aligned}$$

где ; означает ковариантное дифференцирование, $\chi^l = g^{lk} \chi_k$, а тензор энергии — импульса связан с плотностью функции Лагранжа Λ соотношением (8.4). В случае

сплошной среды при отсутствии диссипативных процессов

$$T_{ik} = (P + \rho) u_i u_k - P g_{ik}. \quad (58.4)$$

Из (58.3) получается следующая система уравнений поля:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} + [\eta(\eta - 1) - \xi] \frac{\chi_i \chi_k}{\chi^2} + \eta \frac{\chi_{i;k}}{\chi} - \\ - g_{ik} \left[\eta \frac{\chi_{;l}^l}{\chi} - \frac{\xi - 2\eta(\eta - 1)}{2} \frac{\chi_l \chi^l}{\chi^2} \right] = \frac{\chi}{c^2} T_{ik}, \quad (58.5)$$

$$R - \frac{2(\eta + 1)}{\eta c^2} \chi \Lambda + \frac{\xi(n - 2)}{\eta} \frac{\chi_l \chi^l}{\chi^2} + \frac{2\xi}{\eta} \frac{\chi_{;l}^l}{\chi} = 0. \quad (58.6)$$

Первое при $\chi = \text{const}$ переходит в уравнение Эйнштейна. Что касается второго уравнения, то для случая $\chi = \text{const}$ оно не имеет места по той простой причине, что в этом случае $\delta\chi = 0$, и поэтому в (58.3) вторая скобка при $\delta\chi$ вообще исчезает. Чтобы совершить здесь правильный переход к обычной теории Эйнштейна, необходимо наряду с $\chi = \text{const}$ положить $|\xi| = \infty$.

Заметим, что в вариационном принципе (58.3) скаляр R можно заменить величиной

$$G = g^{ik} \left[\Gamma_{il}^m \Gamma_{km}^l - \Gamma_{ik}^l \Gamma_{lm}^m + \frac{\eta}{\chi} (\Gamma_{ik}^l \chi_l - \Gamma_{im}^m \chi_k) \right], \quad (58.7)$$

которая более не содержит вторых производных от g_{ik} , но отличается от него членом дивергенции. При варьировании действия интеграл от этого члена в (58.3) исчезает. Поэтому хотя G не является скаляром, но $\int \chi^n G \sqrt{-g} d\Omega$ является скаляром и совпадает с $\int \chi^n R \sqrt{-g} d\Omega$.

Уравнения (58.5) и (58.6) можно привести к более удобному виду. С этой целью первое из них умножим на g^{ik} и просуммируем по повторяющимся индексам, затем, учитывая второе уравнение, находим

$$\frac{\chi_{;l}^l}{\chi} + (\eta - 1) \frac{\chi_l \chi^l}{\chi^2} = \frac{\eta \chi}{c^2 (3\eta^2 - 2\xi)} \left(T - 2 \frac{\eta + 1}{\eta} \Lambda \right). \quad (58.8)$$

Теперь уравнение (58.6) умножим на $g_{ik}/2$ и сложим с

(58.5), далее, учитывая (58.8), получаем

$$R_{ik} + \eta \frac{\chi_{i;k}}{\chi} - [\zeta - \eta(\eta - 1)] \frac{\chi_i \chi_k}{\chi^2} = \\ = - \frac{\chi}{c^2} \left(T_{ik} + \frac{\zeta - \eta^2}{3\eta^2 - 2\zeta} g_{ik} T \right) - \frac{\eta(\eta + 1)}{c^2 (3\eta^2 - 2\zeta)} \chi g_{ik} \Lambda.$$

§ 59. Законы сохранения

Уравнения движения можно получить из следующего вариационного принципа:

$$\delta S_m = \int \chi^{\eta+1} \Lambda \sqrt{-g} d\Omega = 0. \quad (59.1)$$

Здесь варьированию подлежат траектории частиц:

$$x'^k = x^k + \xi^k,$$

где ξ^k — бесконечно малые величины. При этом гравитационное поле, т. е. величины g_{ik} и χ , считается фиксированным. Однако варьирование траектории связано с переходом из одной точки пространства в соседнюю, бесконечно близкую, при этом, очевидно, должны изменяться также функции $g^{ik}(x^i)$ и $\chi(x^i)$. Для изменения этих величин имеем

$$\delta g^{ik} = \xi^{k;i} + \xi^{k;i}, \quad \delta \chi = -\chi_k \xi^k. \quad (59.2)$$

Учитывая последние соотношения, из (59.1) получаем

$$\delta S_m = \int \left[-(\eta + 1) \chi^\eta \sqrt{-g} \Lambda \chi_i \xi^i + \chi^{\eta+1} \delta \sqrt{-g} \Lambda \right] d\Omega = \\ = \int \left[(\chi^{\eta+1} T^k_{i;k} - (\eta + 1) \chi^\eta \Lambda \chi_i \right] \xi^i \sqrt{-g} d\Omega = 0.$$

Отсюда из условия произвольности вариации координат ξ^i следует

$$(\chi^{\eta+1} T^k_{i;k})_{;k} = (\eta + 1) \chi^\eta \Lambda \chi_i. \quad (59.3)$$

Это и есть искомые уравнения гидродинамики.

Согласно общей идее релятивистской теории гравитации уравнения (59.3) здесь также не являются новыми независимыми соотношениями, они должны непосредственно получаться также из уравнений поля. Чтобы убедиться в этом, в (58.5) сперва поднимем индекс k ,

умножим на χ^n и затем ковариантно продифференцируем по k . Далее (58.6) умножим на $0,5\eta\chi^{n-1}\chi_k\delta_i^k$ и полученное уравнение сложим с предыдущим, в результате получим соотношение (59.3).

При наличии электромагнитного поля в формуле (58.1) под интегралом необходимо добавить следующие два члена:

$$\frac{2\chi}{c^3} A_k j^k - \frac{\chi}{8\pi c^2} F_{ik} F^{ik},$$

где j^k — плотность тока, A_k — четырехмерный потенциал электромагнитного поля и $F_{ik} = A_{k;i} - A_{i;k}$. Для вывода уравнений электромагнитного поля мы должны зафиксировать все величины, характеризующие гравитационное поле и траекторию частиц, подвергая виртуальным изменениям потенциалы A_k . В результате получается вторая пара уравнений Максвелла

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} \chi^{n+1} F^{ik}) = - \frac{4\pi}{c} \chi^{n+1} j^i. \quad (59.4)$$

Отсюда непосредственно следует уравнение непрерывности

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} \chi^{n+1} j^i) = 0. \quad (59.5)$$

Таким образом, обобщенная теория гравитации содержит два безразмерных параметра η и ζ . Сейчас мы увидим, что в вопросе выбора численного значения η дело обстоит хорошо; имеется только одна возможность, из которой η определяется естественным образом. Что касается численного значения ζ , то положение его пока не ясно. Выше мы видели, что при $|\zeta| \rightarrow \infty$ обобщенная теория совпадает с обычной. Значит, сверху $|\zeta|$ не ограничено. Нижнюю границу можно получить из рассмотрения трех эффектов Эйнштейна, требуя совпадения с экспериментальными данными в пределах точности измерений (см. § 60). Точное значение ζ может быть определено только после сравнения выводов новой теории с фактами. Пока посмотрим, как можно определить численное значение η .

Из (59.3) и (59.4) видно, что при $\eta \neq -1$ не выполняются законы сохранения энергии, электрического заряда и числа барионов в таком виде, в каком они до сих пор нам были известны. В работах Иордана, по-видимому, с целью получения определенных результатов в космологии или, может быть, по другим неизвестным нам причинам, принималось $\eta = 1$, что приводило к нарушению упомянутых фундаментальных законов сохранения. Именно это и послужило основным поводом для критики новой теории. Однако, как мы видим, при $\eta = -1$ законы сохранения приобретают свою обычную формулировку

$$\left. \begin{aligned} T^h_{i;k} &= 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{-g} j^i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (59.6)$$

Приведенный аргумент ранее упускался из виду по той причине, что уравнение (59.3) не было сформулировано в таком общем виде, а было выведено для частного, заранее выбранного значения $\eta = 1$. Важно заметить также, что лишь при $\eta = -1$ интеграл (58.1) приобретает размерность действия. Это, конечно, немаловажный момент в вопросе правильного выбора η . В более поздней статье Иордана [213], а также в работах Дике и Бранса [140—142, 171—179] предполагалось $\eta = -1$, но вопрос законов сохранения не рассматривался. Он исследовался в работе [106].

Итак, на основании приведенных выше аргументов мы будем полагать $\eta = -1$. Тогда уравнения (58.8) и (58.9) для этого значения параметра η приобретают следующий вид:

$$\frac{\chi_{;k}^h}{\chi} - 2 \frac{\chi_k \chi^k}{\chi^2} = \frac{\chi T}{c^2 (2\zeta - 3)}, \quad (59.7)$$

$$R_i^h - \frac{\chi_{;i}^h}{\chi} - (\zeta - 2) \frac{\chi_i \chi^h}{\chi} = \frac{\chi}{c^2} \left(T_i^h + \frac{\zeta - 1}{3 - 2\zeta} T \delta_i^h \right). \quad (59.8)$$

Для скалярной же кривизны имеем

$$R = \frac{2\zeta}{c^2 (3 - 2\zeta)} \chi T + \zeta \frac{\chi_i \chi^i}{\chi^2}. \quad (59.9)$$

§ 60. Центральное-симметричное гравитационное поле в пустоте

Решение центрально-симметричного поля в пустоте давно найдено. Оно называется решением Гекмана. Вывод его приведен в [209] для случая $\eta=1$. В [209] указано также, как из этого решения простой подстановкой получаются решения для произвольных значений η . Мы приведем только готовый результат для случая $\eta=-1$ (он получается из решения для $\eta=1$ заменой χ на $1/\chi$). В правильности приведенного ниже решения можно убедиться непосредственной подстановкой в соответствующие уравнения поля. Итак, в пустом пространстве вокруг центрально-симметричного распределения масс мы имеем следующее решение Гекмана:

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{r_0}{\sqrt{\tau}(\tau^{-h} - \tau^h)}, \\ e^{-\lambda/2} &= \frac{1}{2h} [(0,5 + h)\tau^h - (0,5 - h)\tau^{-h}], \\ e^\nu &= \tau^{1/B}, \\ k &= k_0 \tau^{-\beta_0/B}. \end{aligned} \right\} \quad (60.1)$$

Здесь $k = \frac{c^2\chi}{8\pi}$, τ — переменный параметр, k_0 , r_0 и β_0 — постоянные, получаемые при интегрировании, и

$$h^2 = \frac{1}{4} - \frac{\beta_0}{2} \frac{1 + \beta_0 \zeta}{(1 + 2\beta_0)^2}, \quad B = 1 + 2\beta_0. \quad (60.2)$$

Четырехмерный интервал предполагается записанным в шварцшильдовском виде: $ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$. При $\beta_0=0$ имеем $h^2=1/4$, при этом (60.1) переходит в решение Шварцшильда. Когда β_0 отрицательно, $h^2 > 1/4$, а когда положительно, $h^2 < 1/4$. По определенным причинам (см. ниже) в дальнейшем нас будет интересовать случай $\beta_0 < 0$, $h > 0,5$ (следует заметить, что решение Гекмана инвариантно относительно замены h на $-h$). В случае $r_0 > 0$ имеем $0 < \tau < 1$, причем $r(\tau)$ является монотонно растущей: $r(0)=0$ и $r(1)=\infty$. Когда $\tau \rightarrow 1$, метрика асимптотически стремится к евклидовой: $r \rightarrow \infty$, $e^\lambda \rightarrow e^\nu \rightarrow 1$, $k(r) \rightarrow k_0$. Из требования, чтобы на достаточно больших расстояниях обобщенная теория

гравитации совпала с обычной, мы приходим к выводу, что k_0 есть постоянная всемирного тяготения Ньютона.

В [140] заново было найдено решение уравнений поля для пустого пространства ($\eta = -1$) в изотропных координатах. Оно получается из (60.1) преобразованием координат и поэтому не является каким-то новым решением. За другими подробностями, касающимися решения (60.1), советуем обратиться к монографии Иордана [209].

На достаточно больших расстояниях, где $\varepsilon = 1 - \tau \ll 1$, можно в (60.1) функции $1/r$, e^λ , e^ν и k разложить в ряд по степеням ε . С точностью до члена порядка ε для $1/r$ и e^ν имеем

$$\frac{1}{r} \approx \frac{2h}{r_0} \varepsilon, \quad e^\nu \approx 1 - \frac{\varepsilon}{B} = 1 - \frac{r_0}{2hB} \cdot \frac{1}{r}.$$

Сравнение этого разложения с $e^\nu = 1 - 2kM/c^2 r$ из решения Шварцшильда дает $\varepsilon = Br_g/r$ где, $r_g = 2k_0 M/c^2$, и

$$r_0 = \frac{4hk_0}{c^2} BM = 2hBr_g. \quad (60.3)$$

Если после этого мы продолжим сравнение функций e^λ (или $k(r)$ и k_0) и потребуем совпадения при конечных r , то получим $\beta_0 = 0$, что означает точное совпадение (60.1) с решением Шварцшильда. Таким образом, полное совпадение обоих решений имеет место только при $r = \infty$. Если теперь учесть, что нерелятивистская теория тяготения вступает в силу уже при конечных, но достаточно больших расстояниях от источника, то мы придем к выводу о том, что обобщенную теорию гравитации можно согласовать с ней только на бесконечности. Таким образом, при сколь угодно больших, но конечных расстояниях r обобщенная теория, строго говоря, не совпадает с теорией тяготения Ньютона. Из этого следует необходимость разработки также ньютоновского варианта теории с переменной гравитационной константой $k(r, t)$.

Теперь, следуя Иордану [209], попытаемся определить постоянную β_0 . Рассмотрим весьма разреженное ($\rho \rightarrow 0$) сферическое облако достаточно большого радиуса R . Пренебрегая искривлением пространства, из (59.7) находим

$$\chi'' + \frac{2}{r} \chi' - \frac{2\chi'^2}{\chi} = -\frac{\chi^2 \rho(r)}{c^2 (2\epsilon - 3)}.$$

Умножим это уравнение на r^2/χ^2 и проинтегрируем в пределах от нуля до расстояния r :

$$\frac{d}{dr} \frac{1}{\chi} = \frac{1}{4\pi(2\epsilon - 3)} \frac{M(r)}{r^2},$$

где $M(r)$ — масса, заключенная в сфере радиуса r . А теперь это уравнение интегрируем в пределах от R до ∞ :

$$\frac{1}{\chi(R)} = \frac{1}{\chi(\infty)} - \frac{1}{4\pi(2\epsilon - 3)} \frac{M}{R}.$$

Наконец, подставляя сюда $\chi = 8\pi k/c^2$, находим

$$k(R) = k_0 \left(1 + \frac{1}{2\epsilon - 3} \frac{r_g}{R} \right).$$

Сравним это выражение с решением Гекмана для $k(r)$. В (60.1), разлагая $k(r)$ в ряд, находим

$$k(R) = k_0 \left(1 + \beta_0 \frac{r_g}{R} \right).$$

Из сравнения последних двух выражений следует

$$\beta_0 = \frac{1}{2\epsilon - 3}. \quad (60.4)$$

Таким образом, все постоянные в решении Гекмана выражаются через параметр ζ , значение которого можно найти только путем сравнения выводов новой теории с экспериментом. Некоторые сведения о ζ можно получить с помощью трех хорошо известных эффектов общей теории относительности (отклонение луча света, красное смещение и прецессия перигелия орбит планет), хорошо подтвержденных наблюдениями. Эти эффекты исследованы в общей теории относительности [66]. При этом оказывается, что красное смещение не дает ничего нового, а два других эффекта накладывают определенное ограничение на абсолютное значение ζ . Они позволяют определить нижнюю границу $|\zeta|$. Так, если потребовать, чтобы величина углового смещения перигелия орбиты пробного тела, вращающегося вокруг другого массивного небесного тела, совпадала с точностью до 2% (это точность измерения прецессии перигелия Меркурия) с результатом общей теории относительности, где χ считается постоянным, то получим следующее условие:

$|4\beta_0/3| \leq 0,02$. Отсюда мы получаем для ζ условие $|\zeta| \geq 30$. Конкретные численные расчеты конфигураций небесных тел были проведены для

$$\zeta = -30, \quad (60.5)$$

что соответствует $4\beta_0/3 \approx -0,02$. Исследования, проведенные в рамках нерелятивистской обобщенной теории гравитации (см. § 64), показали, что при положительных значениях ζ гравитационный скаляр $k(r)$ внутри конфигураций имеет расходящиеся решения. Поэтому в дальнейшем как в нерелятивистском, так и в релятивистском вариантах теории в расчетах моделей звездных конфигураций предполагалось, что ζ является отрицательным. В релятивистском варианте вопрос о знаке ζ как следует не исследовался, его необходимо рассмотреть. Здесь не исключена возможность получения нерасходящихся решений и при положительном ζ .

Используя (60.4), мы можем все постоянные интегрирования в решении (58.1) выразить через параметр ζ :

$$\left. \begin{aligned} h &= (4\zeta^2 - 10\zeta + 7)^{1/2}/2(1 - 2\zeta), \\ B &= (2\zeta - 1)/(2\zeta - 3), \quad \beta_0/B = 1/(2\zeta - 1). \end{aligned} \right\} \quad (60.6)$$

Предполагая $\zeta = -30$, для численных значений этих величин находим

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= -30, \quad h = 0,51234, \quad B = 0,96825, \\ r_0 &= 0,9925 r_g, \quad \beta_0/B = -\frac{1}{61}. \end{aligned} \right\} \quad (60.7)$$

Необходимо отметить исключительно важное обстоятельство, заключающееся в том, что в обобщенном варианте теории гравитации центрально-симметричное поле, как это явствует из (60.1), не имеет особенности, присущей шварцшильдовскому решению. Эта замечательная особенность дает возможность построить модели статических сверхплотных конфигураций, обладающих чрезвычайно большими массами.

Как мы видим из (58.1), в вариационном принципе переход к эйнштейновской теории гравитации совершается подстановкой $|1/\zeta| \rightarrow 0$. В уравнениях же поля, наряду

с $|\zeta| \rightarrow \infty$, мы должны предположить $k = \text{const}$. Однако представляет также интерес обстоятельное изучение поведения решения Гекмана для точечной массы только при $|\zeta| \rightarrow \infty$. Случаи положительных и отрицательных значений ζ нуждаются в отдельном рассмотрении, но здесь мы рассмотрим только случай $\zeta = -30$. Обратимся к выражению (60.1) и учтем численные значения постоянных, приведенные в (60.7). Легко заметить, что величина $e^{\lambda(r)}$ равна нулю при $r=0$, далее, с ростом r , она монотонно растет, в окрестности $r \approx r_0 \approx r_g$ достигает максимума, после чего асимптотически падает до значения $e^{\lambda(\infty)} = 1$. С увеличением $|\zeta|$ максимум e^λ растет и при $\zeta \rightarrow -\infty$ уходит в бесконечность. Величина же r_0 при этом приближается к гравитационному радиусу $r_g = 2k_0 M/c^2$ и в пределе совпадает с ним. При $r \geq r_0$ асимптотическое поведение $e^{\lambda(r)}$ дается шварцшильдовским решением $1/(1 - r_g/r)$. Внутри же гравитационного радиуса в каждой точке $e^{\lambda(r)} \rightarrow 0$. Что касается величины $e^{\nu(r)}$, то она, для конечных значений ζ являясь монотонно растущей функцией r , при $\zeta \rightarrow -\infty$ обращается в $1 - r_g/r$ вне гравитационного радиуса и в нуль внутри него.

Установим непосредственную связь между k и r , исключив для этого параметр τ . Предполагая $|\zeta| \gg 1$, находим

$$\frac{r_0}{r} \approx k^{-3/4} - k^{-2\zeta}.$$

Устремив $-\zeta$ к бесконечности, получим в пределе

$$k(r) = \left(\frac{r}{r_g}\right)^{4/3} \quad \text{при } r \leq r_g,$$

$$k(r) = 1 \quad \text{при } r \geq r_g.$$

Для каждого конечного значения ζ величина $k(r)$ представляет собой монотонно возрастающую гладкую функцию. Позже мы увидим, что в нерелятивистском варианте обобщенной теории гравитации область расстояний, где $k(r)$ существенно отличается от k_0 , при $|\zeta| \rightarrow \infty$ стягивается в точку.

Таким образом, если при $|\zeta| \rightarrow \infty$ вне гравитационного радиуса решение (60.1) переходит в шварцшильдовское, то внутри гравитационной сферы характер этого

решения не соответствует существующим представлениям общей теории относительности. Нам кажется, этот результат мог бы служить основой для иной интерпретации особой области $r < r_g$ в обычной теории гравитации Эйнштейна.

Во внешнее решение входит масса небесного тела M . Это так называемая активная масса, измеренная наблюдателем по ее гравитационному воздействию на достаточно больших расстояниях, где имеет место закон Ньютона. Благодаря введению скалярного поля гравитации, описываемому функцией $k(r)$, понятие массы нуждается в уточнении. Определение массы можно получить, исходя из теоремы Гаусса, справедливой для статического поля [66]:

$$\int R_0^0 \sqrt{-g} dV = -4\pi M$$

(применяется система единиц $c=k_0=1$). Для поля с центральной симметрией из (59.8) имеем

$$R_0^0 = 8\pi k \left(T_0^0 - \frac{\zeta - 1}{3 - 2\zeta} T \right) - \frac{k'v'}{2k}.$$

Подставляя это выражение в формулу Гаусса, находим

$$M = \frac{2}{3 - 2\zeta} \int k [(3 - \zeta) \rho + 3(1 - \zeta) P] \sqrt{-g} dV + \frac{1}{8\pi} \int \frac{k'v'}{k} \sqrt{-g} dV. \quad (60.8)$$

При постоянном k и $|\zeta| \rightarrow \infty$ это выражение массы переходит в известную формулу Толмена

$$M = \int (\rho + 3P) \sqrt{-g} dV. \quad (60.9)$$

Второй член в (60.8) можно интерпретировать как энергию скалярного поля $k(r)$.

§ 61. Уравнения для сферически-симметричного статического распределения масс

Тот факт, что внешнее решение не содержит сингулярности, вселяет надежду получения нетривиальных результатов при исследовании внутренней задачи. Рассмотрим поле с центральной симметрией со статическим

распределением масс. Квадрат четырехмерного интервала запишем в виде

$$ds^2 = e^\nu c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

где ν и λ — неизвестные функции r ; вне распределения масс они определяются решением (60.1). Для рассматриваемого частного случая из уравнений (59.7) и (59.8) получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\chi''}{\chi} + \frac{\chi'(\nu' - \lambda')}{2\chi} + \frac{2\chi'}{r\chi} - \frac{2\chi'^2}{\chi^2} &= \frac{\chi e^\lambda T}{c^2(3-2\zeta)}, \\ \frac{\nu'\lambda'}{4} - \frac{\nu'}{r} - \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\chi'\nu'}{2\chi} &= \\ &= -\frac{1}{c^2} \chi e^\lambda \left(T_0^0 + \frac{\zeta-1}{3-2\zeta} T \right), \\ \frac{\nu'\lambda'}{4} + \frac{\lambda'}{r} - \frac{\nu''}{2} - \frac{\nu'^2}{4} + \frac{\chi''}{\chi} - \frac{\chi'\lambda'}{2\chi} + (\zeta-2) \frac{\chi'^2}{\chi^2} &= \\ &= -\frac{1}{c^2} \chi e^\lambda \left(T_1^1 + \frac{\zeta-1}{3-2\zeta} T \right), \\ \frac{\lambda' - \nu'}{2r} + \frac{e^\lambda - 1}{r^2} + \frac{\chi'}{r\chi} &= -\frac{1}{c^2} \chi e^\lambda \left(T_2^2 + \frac{\zeta-1}{3-2\zeta} T \right). \end{aligned} \right\} \quad (61.1)$$

Согласно (58.4)

$$T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -P, \quad T_0^0 = \rho, \quad T = \rho - 3P. \quad (61.2)$$

В (61.1) четвертое уравнение перепишем без изменений, а остальные заменим следующими комбинациями их: $(I+II+III)/2+IV$, $(III-II-I)/2-IV$; далее, учитывая (61.2), мы приходим к следующей системе:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\chi''}{\chi} + \frac{\zeta-4}{2} \frac{\chi'^2}{\chi^2} + \frac{2\chi - r\chi'}{2r\chi} \lambda' + \frac{2\chi'}{r\chi} + \frac{1}{r^2} (e^\lambda - 1) &= \\ &= \frac{1}{c^2} \chi e^\lambda \rho, \\ \frac{\lambda'}{2r} - \frac{\nu'}{2r} + \frac{\chi'}{r\chi} + \frac{e^\lambda - 1}{r^2} &= \frac{\chi e^\lambda}{c^2} \cdot \frac{\zeta P + (1-\zeta)\rho}{3-2\zeta}, \\ \frac{2\chi - r\chi'}{2r\chi} \nu' + \zeta \frac{\chi'^2}{2\chi^2} - \frac{2\chi'}{r\chi} + \frac{1}{r^2} (1 - e^\lambda) &= \\ &= \frac{1}{c^2} \chi e^\lambda P \end{aligned} \right\} \quad (61.3)$$

Четвертую независимую линейную комбинацию из системы (61.1) целесообразно заменить уравнением гидродинамики $T_{i;k}^k = 0$, которое фактически содержится в них. В рассматриваемом случае оно сводится к

$$P' + \frac{P + \rho}{2} v' = 0. \quad (61.4)$$

Система уравнений (61.3) и (61.4) имеет то преимущество по сравнению с предыдущей, что она не содержит второй производной. Из этой системы можно исключить также v' . Для этого третье уравнение (61.3) решаем относительно v' и подставляем найденное выражение v' в (61.4) и во второе уравнение (61.3). После этого из второго уравнения находим λ' и подставляем в первое. Далее, перейдя к переменной $k = c^2 \chi / 8\pi$, после простых преобразований приходим к следующей системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= -r \frac{P + \rho}{2 - rk'/k} \left[8\pi k P e^\lambda + \frac{2k'}{rk} - \frac{\zeta}{2} \left(\frac{k'}{k} \right)^2 + \frac{e^\lambda - 1}{r^2} \right], \\ \frac{d\lambda}{dr} &= 16\pi r k e^\lambda \left[\frac{\zeta P + (1 - \zeta)\rho}{3 - 2\zeta} + \frac{P}{2 - rk'/k} \right] - \\ &\quad - 2 \frac{e^\lambda - 1}{r} \cdot \frac{1 - rk'/k}{2 - rk'/k} + (2 - \zeta) \frac{r (k'/k)^2}{2 - rk'/k}, \\ \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{k} \frac{dk}{dr} \right) &= 8\pi k e^\lambda \left\{ (\rho - P) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2 - rk'/k}{3 - 2\zeta} [\zeta P + (1 - \zeta)\rho] \right\} - \frac{e^\lambda + 1}{r} \frac{k'}{k}. \end{aligned} \right\} \quad (61.5)$$

Здесь мы перешли к системе единиц (34.1). Уравнения представляют собой систему дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно P , λ и k . Чтобы завершить формулировку внутренней задачи, остается добавить уравнение состояния $\rho(P)$ и граничные условия.

В качестве граничных условий мы должны, очевидно, потребовать исчезновение давления P и непрерывность функций λ , k , k' на поверхности конфигурации. Итак, из

(60.1) для граничных условий на поверхности имеем

$$\left. \begin{aligned} P(R) &= 0, \quad R = \frac{4hBM}{V\tau_0(\tau_0^{-h} - \tau_0^h)}, \\ \lambda(R) &= 2\ln 2h - 2\ln [(h + 0,5)\tau_0^h + (h - 0,5)\tau_0^{-h}], \\ k(R) &= \tau_0^{-\beta_0/B}, \quad k'(R) = -2\beta_0 \frac{M}{R^2} e^{\lambda(R)/2} \tau_0^{-0,5-\beta_0/B}, \end{aligned} \right\} \quad (61.6)$$

где $\tau_0 \equiv \tau(R)$. Значения постоянных h , B , β_0 приведены в (60.6) и (60.7).

Внутренняя задача пока не полностью сформулирована. В самом деле, для интегрирования системы дифференциальных уравнений (61.5) необходимо знать также условия в центре распределения масс. Из физических соображений очевидно, что аналогично обычной теории гравитации здесь также основным параметром, определяющим конфигурации вырожденных газовых масс, является давление $P(0)$ в центре. Следовательно, одним из условий в центре является заданное значение $P(0)$. Однако заданием одного только $P(0)$ здесь задача не решается. Чтобы начать интегрирование, нужно знать также значения функций $\lambda(r)$, $k(r)$ и $k'(r)$ в центре. В отличие от $P(0)$, величины $\lambda(0)$, $k(0)$ и $k'(0)$ не могут быть заданы произвольно, так как для каждой конфигурации с заданными значениями массы M и радиуса R они, конечно, должны быть вполне определенными величинами, т. е. неизвестными функциями центрального давления. Таким образом, прежде чем говорить о процедуре интегрирования уравнений (61.5), мы должны выяснить, каковы условия в центре.

§ 62. Условия в центре конфигураций

С целью исследования условий в центре, удобно перейти к переменным

$$s = 8\pi k r^2, \quad f = rk'/k, \quad E = e^\lambda. \quad (62.1)$$

Эта подстановка позволяет (61.5) свести к системе

уравнений на единицу меньшего порядка:

$$\frac{dP}{ds} = \frac{P + \rho}{f + 2} \cdot \frac{\psi}{s}, \quad (62.2)$$

$$\frac{dE}{ds} = \frac{2E}{s(f + 2)} (sE\varphi + 1 - f - E - \psi), \quad (62.3)$$

$$\frac{df}{ds} = \frac{E}{s(f + 2)} (s[\rho - P + (f - 2)\varphi] - f). \quad (62.4)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \frac{1}{f-2} \left(sEP + 2f - \frac{1}{2} \zeta f^2 - 1 + E \right), \\ \varphi &= \frac{\rho - \zeta(\rho - P)}{3 - 2\zeta}. \end{aligned} \right\} \quad (62.5)$$

В (62.2) — (62.5) предельный переход к соответствующим уравнениям теории с постоянным χ совершается подстановкой $f=0$ и стремлением $|\zeta|$ к бесконечности. Действительно, при этом получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{ds} &= \frac{P + \rho}{4s} (1 - E - sEP), \\ \frac{dE}{ds} &= \frac{E}{2s} (1 - E + sE\rho), \end{aligned} \right\} \quad (62.6)$$

которые в переменных $s = 8\pi r^2$, $E = e^\lambda = 1/(1 - 2u/r)$ совпадают с уравнениями (40.12). Условия на поверхности для этих уравнений также переходят в соответствующие условия для системы (40.12), так как решение Гекмана при $|\zeta| \rightarrow \infty$ переходит в решение Шварцшильда.

Исследование условий в центре конфигураций будем проводить для случая $\zeta < 0$ в предположении, что давление $P(0)$ есть величина конечная. Как видно из (62.2), при $s \rightarrow 0$ центральное давление может иметь конечное значение только в том случае, если $|f| \rightarrow \infty$ или же $\psi(0) = 0$. Иначе, если $[(P + \rho)\psi/(f + 2)]_{s=0} \neq 0$, то величина $\left(s \frac{dP}{ds}\right)_{s=0} \neq 0$ и функция $P(s)$ в центре звезды будет расхо-
диться не слабее, чем по логарифмическому закону. Из этих двух альтернатив первая исключается по следующей причине. Если допустить, что $|f| \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow 0$, то $P(0)$ может иметь конечные значения только тогда,

когда $\psi(0)$ является конечным. Из первого выражения (62.5) видно, что при $\lim_{s \rightarrow 0} |f(s)| \rightarrow \infty$ функция $\psi(s)$ не стремится к бесконечности только в том случае, когда $\lim_{s \rightarrow 0} E(s) \rightarrow 0,5 \zeta f^2(0) < 0$. Но функция $E(s) = e^{\lambda(s)}$ не может иметь отрицательное значение, так что предположение $|f(s)|_{s \rightarrow 0} \rightarrow \infty$ неверно, величина $f(0)$ должна быть конечной. Тогда, если $f(0)$ конечна, значение $E(0)$ тоже должно быть конечным, как это следует из выражения для ψ и требования конечности центрального давления. Таким образом, реализуется только вторая альтернатива, а именно, $\psi(0) = 0$, что означает

$$2f(0) - \frac{\zeta}{2} f^2(0) - 1 + E(0) = 0. \quad (62.7)$$

Теперь рассмотрим уравнение (62.3) при малых s :

$$s \frac{dE}{ds} = \frac{2E(0)}{f(0) + 2} [1 - f(0) - E(0)].$$

Если правая часть этого уравнения не равняется нулю, то функция $E(s)$ расходится в точке $s=0$, что недопустимо (так как при этом становятся бесконечным $\psi(0)$ и, следовательно, $P(0)$). Поэтому должно быть

$$E(0) [1 - f(0) - E(0)] = 0. \quad (62.8)$$

Из (62.7) и (62.8) получаются следующие решения для $f(0)$ и $E(0)$, когда $\zeta = -30$:

$$\left. \begin{aligned} \text{I. } E(0) = 0: f(0) &= \frac{2}{\zeta} (1 - \sqrt{1 - \zeta/2}) = \frac{1}{5}, \\ \text{II. } E(0) = 0: f(0) &= \frac{2}{\zeta} (1 + \sqrt{1 - \zeta/2}) = -\frac{1}{3}, \\ \text{III. } E(0) = 1: f(0) &= 0, \\ \text{IV. } E(0) = 1 - \frac{2}{\zeta} = \frac{16}{15}: f(0) &= \frac{2}{\zeta} = -\frac{1}{15} \end{aligned} \right\} \quad (62.9)$$

Теперь задачу нахождения гравитирующего статического распределения вырожденных масс можно считать корректно сформулированной: даны дифференциальные уравнения (61.5), граничные условия на поверхности (61.6) и в центре (62.9). Мы видим, что, в отличие от

граничных условий на поверхности, в центре возможны четыре разных варианта. Однако наличие многих альтернатив в центре не является доказательством существования стольких же видов решений. При численных расчетах может оказаться, что некоторые из них несовместимы с граничными условиями на поверхности. Пока хорошо изучены только I и III варианты. Особенно интересные результаты получены при интегрировании уравнений (61.5) с первым вариантом условий в центре (см. главу X). Впредь речь будет идти только о нем. Отметим, что, кроме решений с конечным центральным давлением (т. е. с условиями (62.9)), существует целый класс решений с бесконечным давлением в центре, но конечным значением полной массы конфигурации.

Выясним поведение решений системы (62.2) — (62.5) в окрестности точки $s=0$ для вариантов I и II. Так как в точке $s=0$ величины ψ и E обращаются в нуль, то уравнения (62.3), (62.4) при малых s записываются в виде

$$\frac{dE}{ds} = \frac{2(1-f_0)}{f_0+2} \cdot \frac{E}{s}, \quad \frac{df}{ds} = -\frac{f_0}{f_0+2} \frac{E}{s}, \quad f_0 \equiv f(0).$$

Интегрирование этих уравнений определяет $E(s)$ и $f(s)$ в окрестности начала в первом приближении по s^l :

$$\left. \begin{aligned} f(s) &= f_0 - \frac{f_0}{2(1-f_0)} E, \\ E &= Ds^l, \quad l = \frac{2(1-f_0)}{2+f_0}, \end{aligned} \right\} \quad (62.10)$$

где D — постоянная интегрирования. Разложение получается по степеням величины s^l . Для давления $P(s)$ выполняется условие $P'(0)=0$. При численном интегрировании системы (62.2) — (62.4) мы исходим из поведения (62.10) функций E и f при малых s и выбором «свободного параметра» D (методом проб) добиваемся выполнения всех условий (61.6) на поверхности и из (62.9) условий I или II в центре. Выражения функций $P(s)$, $E(s)$ и $f(s)$ при малых s для двух последних вариантов центральных условий (62.9) в дальнейшем нам не понадобятся, поэтому здесь мы их приводить не будем.

Наконец, приведем внешнее решение в терминах переменных (62.1). Его легче получить не из (60.6) путем преобразования, а решая систему (62.2)—(62.5) для внешней области. Подставляя в них $\rho = P = 0$, находим

$$\frac{dE}{df} = 2E \frac{f-1}{f(f-2)} + \frac{2(1-f) + (2-\zeta)f^2}{f(f-2)}.$$

Удовлетворяющее граничным условиям на бесконечности, $s = \infty$, $f(\infty) = 0$, $E(\infty) = 1$, решение этого уравнения есть

$$E(f) = 1 + (2 - \zeta)f - \frac{3}{2}(1 - \zeta)f^2. \quad (62.11)$$

В соответствии с этим решением при интегрировании дифференциальных уравнений (62.2)—(62.4) с центра в качестве условий на поверхности удобно использовать выражение

$$E(F) = 1 + (2 - \zeta)F - \frac{3}{2}(1 - \zeta)F^2, \quad (62.12)$$

где $F = f(R)$ — значение функции $f = rk'/k$ на поверхности. Здесь мы не будем обсуждать процедуру интегрирования дифференциальных уравнений для внутренней области. Это будет сделано в последней главе.

§ 63. Ньютонковский вариант обобщенной теории гравитации

Ради полноты мы хотим коротко остановиться и на ньютоновском варианте обобщенной теории гравитации. Уравнения поля можно было получить из (59.7) и (59.8) путем соответствующего предельного перехода. Однако с целью получения самостоятельной и логически последовательной картины мы считаем целесообразным исходить из соответствующего вариационного принципа. Здесь гравитационное поле характеризуется двумя скалярными функциями: ньютоновским потенциалом φ и гравитационным скаляром $\chi = 8\pi k/c^2$. Вариационный принцип, очевидно, можно записать в следующем виде:

$$\delta S = \delta \int \left[\frac{\rho v^2}{2} - P - \rho \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{(\nabla \varphi)^2}{\chi} + c^2 \zeta \frac{(\nabla \chi)^2}{\chi^3} - \zeta \frac{\dot{\chi}^2}{\chi^3} \right] \times \\ \times dV dt = 0. \quad (63.1)$$

Все обозначения прежние и ξ — тот же безразмерный параметр, что и в релятивистской теории. Приведенное в (63.1) подинтегральное выражение для плотности функции Лагранжа получается из (58.1) соответствующим предельным переходом. Величины ρ , P , v , φ и χ являются функциями координат и времени. Точка над χ означает временную производную. Под интегралом мы опустили член, пропорциональный $\dot{\varphi}^2$, как величину более высшего порядка малости (напомним, что φ порядка $1/c^2$). Вообще говоря, в (63.1) для слабых полей главным является предпоследний член, первые четыре слагаемых следует считать малыми по сравнению с ним. Однако они являются первыми исчезающими членами в разложении релятивистского лагранжиана материи и поля по степеням v/c и φ/c^2 . Сохранение этих членов обязательно, поскольку именно из них путем виртуальных изменений траектории и потенциала получаются уравнения движения и поля. Кроме того, при их пренебрежении мы получили бы $\chi = \text{const}$.

Варьирование производится по $\mathbf{r}$, φ и χ независимо и приводит к следующим уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(\rho v) + \nabla P + \rho \nabla \varphi &= 0, \\ \operatorname{div} \left(\frac{\Delta \varphi}{\chi} \right) &= \frac{1}{2} c^2 \rho, \\ \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \chi}{\chi^{3/2}} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\chi}}{\chi^{3/2}} \right) &= \frac{1}{2 \zeta c^4} \frac{(\nabla \varphi)^2}{\chi^{1/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (63.2)$$

Первое есть уравнение гидродинамики. Второе при $\chi = \text{const}$ переходит в уравнение Пуассона. Что касается последнего уравнения, то для случая $\chi = \text{const}$ оно неверно по той простой причине, что тогда $\delta\chi = 0$. Как и прежде, чтобы здесь осуществить переход к обычной теории гравитации Ньютона, мы должны наряду с $\chi = \text{const}$ положить $|\xi| = \infty$.

В статическом случае систему (63.2) следует дополнить уравнением состояния $\rho(P)$ и граничными условиями. При решении же нестационарной задачи, помимо уравнения состояния, необходимо задать распределение

источников энергии, уравнения переноса энергии и, наконец, начальные условия.

Рассмотрим статическое центрально-симметричное распределение масс. Из (63.2) имеем

$$P' = -\rho\varphi', \quad (63.3)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \varphi'}{\chi} \right) = \frac{1}{2} \rho r^2, \quad (63.4)$$

$$\chi^{1/2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \chi'}{\chi^{3/2}} \right) = \frac{1}{2\xi} r^2 \varphi'^2. \quad (63.5)$$

Мы опять перешли к системе единиц (34.1).

Вне распределения масс

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \varphi'}{\chi} \right) = 0, \quad (63.6)$$

$$\chi^{1/2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2 \chi'}{\chi^{3/2}} \right) = \frac{1}{2\xi} r^2 \varphi'^2. \quad (63.7)$$

В качестве граничных условий к последним уравнениям примем

$$\chi(\infty) \equiv \chi_0 = 8\pi, \quad \varphi' \rightarrow \frac{M}{r^2} \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (63.8)$$

где M — активная гравитационная масса небесного тела.

Из уравнения (63.6) имеем

$$\varphi' = \frac{\chi(r)}{8\pi} \cdot \frac{M}{r^2}. \quad (63.9)$$

Подставляя это выражение φ' в (63.7) и интегрируя, получим

$$\chi(r) = \frac{\chi_0 r^2}{r^2 + 2C_1 r + C_2}. \quad (63.10)$$

Здесь C_2 — постоянная интегрирования, зависящая от параметра ξ , а

$$C_1 = \frac{1}{2} (4C_2 + M^2/\xi)^{1/2}. \quad (63.11)$$

Зависимость C_2 от ξ должна быть такой, чтобы при $|\xi| \rightarrow \infty$ $C_2 \rightarrow 0$, при этом $C_1 \rightarrow 0$ и из (63.10) следует, что $\chi = \text{const}$.

Подставляя (63.10) в (63.9) и интегрируя последнее, получаем следующие выражения для потенциала вне распределения масс:

$$\varphi(r) = -2\sqrt{-\xi} \operatorname{arctg} \frac{M}{2\sqrt{-\xi}(r+C_1)} \quad \text{при } \xi < 0, \quad (63.12)$$

$$\varphi(r) = -\sqrt{\xi} \ln \frac{r+C_1+M/\sqrt{4\xi}}{r+C_1-M/\sqrt{4\xi}} \quad \text{при } \xi > 0. \quad (63.13)$$

Потенциал нормирован так, что на бесконечности он исчезает. На больших расстояниях из обеих формул получаем следующее разложение:

$$\varphi(r) = -\frac{M}{r} + C_1 \frac{M}{r^2}. \quad (63.14)$$

Выражение (63.10) мы должны согласовать с решением Гекмана (60.1) для χ . Так, требуя, чтобы на больших расстояниях эти оба решения совпали, находим

$$C_1 = \frac{M}{3-2\xi}. \quad (63.15)$$

Введем новые обозначения

$$C_1 = \alpha M, \quad C_2 = \beta M^2, \quad (63.16)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{3-2\xi} = \begin{cases} -0,0175 & \text{при } \xi = +30, \\ 0,0159 & \text{при } \xi = -30, \end{cases}$$

$$\beta = \alpha^2 - \frac{1}{4\xi} = \begin{cases} -0,00802 & \text{при } \xi = +30, \\ -0,00858 & \text{при } \xi = -30. \end{cases}$$

Исключим из уравнений поля (63.3)–(63.5) потенциал φ и введем новую функцию

$$m(r) = -8\pi r^2 P' / (\chi \rho),$$

имеющую смысл массы, заключенной в сфере с радиусом r . В результате приходим к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} m' &= 4\pi \rho r^2, & P' &= -\frac{1}{8\pi} \frac{\chi \rho m}{r^2}, \\ \chi'' + \frac{2}{r} \chi' - \frac{3}{2} \frac{\chi'^2}{\chi} &= \frac{1}{128\pi^2 \xi} \cdot \frac{\chi^3 m^2}{r^4}, & \rho &= \rho(P). \end{aligned} \right\} \quad (63.17)$$

Последнее является уравнением состояния.

Решение внутренней задачи (63.17) должно быть согласовано с внешним решением. Для этого выясним поведение функций $\chi(r)$ и $\chi'(r)$ на поверхности конфигурации. Очевидно, при всех r производная φ' должна быть непрерывной. Тогда из (63.9) следует непрерывность $\chi(r)$ на поверхности. В ньютоновской теории величина φ'' на поверхности испытывает скачок, равный $\chi_0 r/2$. Из требования плавного перехода новой теории в старую следует, что и в случае переменной χ вторая производная потенциала должна испытывать скачок на величину $\chi r/2$. Это условие приводит к непрерывности χ' , как это следует из уравнения (63.4). Таким образом, из выражения (63.10) получаются следующие граничные условия на поверхности конфигурации:

$$\left. \begin{aligned} \chi(R) &= \frac{8\pi R^2}{R^2 + 2\alpha M + \beta M^2}, \\ \chi'(R) &= \frac{16\pi MR(\alpha R + \beta M)}{(R^2 + 2\alpha M + \beta M^2)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (63.18)$$

где R — радиус конфигурации, он определяется из уравнения $P(R) = 0$.

Сформулируем также условия в центре. Кроме тривиального условия $m(0) = 0$, очевидно, мы должны задать численные значения следующих величин:

$$P(0), \quad \chi(0), \quad \chi'(0). \quad (63.19)$$

Однако вследствие наличия граничных условий (63.18) между параметрами $P(0)$, $\chi(0)$, $\chi'(0)$ существуют две связи. Отсюда следует, что величины $\chi(0)$ и $\chi'(0)$ являются функциями центрального давления, а поэтому не могут быть заданы произвольным образом. При таких обстоятельствах интегрирование от центра распределения масс связано с некоторыми трудностями и при заданном центральном давлении $P(0)$ может быть осуществлено путем многократных повторных попыток. При этом для заданного $P(0)$ правильным являются те значения величин $\chi(0)$ и $\chi'(0)$, для которых выполняются условия (63.18) на поверхности. Итак, мы приходим к заключению, что масса, радиус, функция $\chi(r)$ и структура конфигураций определяется лишь одним параметром, а именно, давлением в центре.

Интегрирование можно производить и от поверхности (речь идет о численном интегрировании, поскольку система (63.17) не имеет аналитического решения). При этом мы должны интегрирование начать со следующих значений функций:

$$r=R, \quad P(R)=0, \quad m(R)=M, \quad \chi(R), \quad \chi'(R), \quad (63.20)$$

где согласно (63.18) величины $\chi(R)$ и $\chi'(R)$ определяются через M и R . Поскольку конфигурации характеризуются одним параметром, то, очевидно, M и R зависят друг от друга и не могут быть заданы произвольно. Возникает вопрос, как определить массу M при заданном радиусе R . Чтобы ответить на этот вопрос, посмотрим, что произойдет, если при наугад выбранных R и M интегрирование произведем от поверхности до центра $r=0$. Единственная неприятность, которую можно при этом ожидать, это, очевидно, исчезновение функции $m(r)$ в центре. Фиксируя R и производя интегрирование для ряда значений M , мы можем в конце концов найти истинное значение M , соответствующее заданному R , для которого $m(0)=0$. С помощью электронно-вычислительной машины, конечно, это можно сделать автоматически и получить сходящийся результат, если начальное значение M выбрано удачно.

Резюме

В теории гравитации с переменной константой взаимодействия k уравнения поля определяются формулами (59.7) и (59.8). Они содержат только один постоянный безразмерный неизвестный параметр ζ , численное значение которого может быть определено только после того, как нетривиальные предсказания новой теории будут сравнены с астрономическими данными. Предельный переход от нового варианта к старому осуществляется подстановкой $k=\text{const}$ и $|\zeta| \rightarrow \infty$.

Поскольку существующая теория гравитации весьма точно описывает движение планет Солнечной системы, очевидно, новый вариант теории должен быть согласован с ней. Из требования совпадения в пределах точности наблюдений движения пробных тел (Меркурия) с истинным движением удастся установить нижнюю гра-

ницу для абсолютного значения параметра $|\xi|$; оказывается, $|\xi| > 30$.

Законы сохранения энергии, электрического, барионного и лептонного зарядов в новом варианте теории не нарушаются. Они имеют точно такую же формулировку, что и раньше (см. (59.6)).

Для центрально-симметричного распределения масс Гекманом найдено внешнее решение (60.1), являющееся аналогом шварцшильдовского решения. Оно не имеет никаких особенностей при $r \neq 0$, что является наиболее существенным моментом нового варианта теории.

При стремлении $|\xi| \rightarrow \infty$ решение Гекмана для точечной массы вне гравитационного радиуса r_g совпадает с шварцшильдовским, а при $r < r_g$ оно отличается от него. Внутри сферы Шварцшильда $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} e^\nu = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} e^\lambda = 0$.

Для гравитационного скаляра при этом получается следующий результат: $k(r) = (r/r_g)^{4/3}$ для $r < r_g$ и $k(r) = 1$ для $r > r_g$.

Представляет определенный интерес также ньютоновский вариант обобщенной теории гравитации. Внешнее решение центрально-симметричного поля здесь определяется формулами (63.10), (63.12)—(63.14). Внутренняя задача в случае центрально-симметричного распределения масс определяется системой дифференциальных уравнений (63.17).

ГЛАВА X

КОНФИГУРАЦИИ ВЫРОЖДЕННЫХ ГАЗОВЫХ МАСС ПО ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

§ 64. Гравитационный скаляр в нерелятивистском случае

При интегрировании дифференциальных уравнений (63.17) для сферически-симметричного распределения масс оказывается удобным перейти к переменным

$$y = \frac{r}{M}, \quad \mu = \frac{m}{M}. \quad (64.1)$$

Тогда система (63.17) принимает следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \mu' &= \lambda r y^2, \quad P' = -\frac{k \rho \mu}{y^2}, \\ k'' + \frac{2}{y} k' - \frac{3}{2} \frac{k'^2}{k} &= \frac{1}{2\xi} \frac{k^3 \mu^2}{y^4}, \quad P = P(\rho), \end{aligned} \right\} \quad (64.2)$$

где $\lambda = 4\pi M^2$, а штрих означает производную по y . Обозначим $\frac{M}{R} = W$ и назовем ее компактностью конфигурации. В новых переменных радиус конфигурации равен $Y = \frac{R}{M} = \frac{1}{W}$. В соответствии с (63.18) и (63.20) для граничных условий на поверхности имеем

$$\left. \begin{aligned} P(Y) &= 0, \quad \mu(Y) = 1, \\ k(Y) &= \frac{1}{1 + 2\alpha W + \beta W^2}, \\ k'(Y) &= \frac{2W(\alpha + \beta W)}{(1 + 2\alpha W + \beta W^2)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (64.3)$$

а в центре распределения масс необходимо потребовать выполнения условия

$$\mu(0) = 0. \quad (64.4)$$

Каждому значению компактности W должна соответствовать определенная конфигурация. В согласии с этим при интегрировании от поверхности фиксируется W и по условию $\mu(0) = 0$ в центре методом многократных пробных интегрирований ищется истинное значение параметра $\lambda = 4\pi M^2$, соответствующее выбранному W .

Сперва займемся интегрированием последнего уравнения системы (64.2). Оно допускает достаточно точное приближенное интегрирование, что является важным для составления наглядного представления о поведении гравитационного скаляра внутри конфигурации.

Вблизи центра $\mu(y) \sim y^3$, поэтому правая часть уравнения

$$k'' + \frac{2}{y} k' - \frac{3}{2} \frac{k'^2}{k} = \frac{1}{2\epsilon} \frac{k^3 \mu^2}{y^4} \quad (64.5)$$

есть малая величина порядка y^2 . Отбрасывая ее, получаем уравнение

$$\left(\frac{k' y^2}{k^{3/2}} \right)' = 0,$$

которое легко интегрируется:

$$k(y) = \frac{ay^2}{(y+b)^2}. \quad (64.6)$$

Постоянные a и b будут определяться из граничных условий (64.3) для k и k' , если интегрирование (64.5) продолжить численно до поверхности конфигурации. Проверка, проведенная по ходу численного интегрирования, показала, что хотя при приближении к поверхности относительная величина правой части уравнения (64.5) растет, тем не менее до конца остается достаточно маленькой по сравнению с членами левой части. Поэтому решение (64.6) оказывается хорошим приближением до самой поверхности для всех значений компактности, т. е. вообще во всех случаях. Анализ показывает, что

относительное отклонение приближенного решения от точного численного не превышает величины

$$1/[160|\zeta|(\alpha + \sqrt{\beta})^2] \approx 20\% \quad \text{для} \quad |\zeta| = 30.$$

Итак, поскольку приближенное решение является хорошим во всей внутренней области, мы можем постоянные a и b определить из граничных условий (64.3). Имеем

$$a = \frac{1 + 2\alpha W + \beta W^2}{(1 + \alpha W)^2}, \quad b = M \frac{\alpha + \beta W}{1 + \alpha W}. \quad (64.7)$$

При $\zeta < 0$ постоянные α и β (см. (63.16)), а следовательно, a и b — положительные величины. Следовательно, гравитационный скаляр $k(r)$ является гладко возрастающей функцией от значения $k(0) = 0$ в центре до $k(\infty) = 1$ на бесконечности. Внешнее решение (63.10) также можно аппроксимировать формулой (64.6) и тем самым распространить ее на всю область расстояний $0 < r < \infty$.

Когда $\zeta > 0$, постоянная $b < 0$, поскольку α и β отрицательны. В этом случае, введя обозначение $b = -y_0$, решение (64.6) можно записать в виде

$$k(y) = \frac{ay^2}{(y - y_0)^2}, \quad (64.8)$$

где $y_0 > 0$. Таким образом, при положительном ζ где-то между центром и поверхностью конфигурации функция $k(r)$ расходится. Согласно второму уравнению (64.2) в этой точке расходятся также давление и его производная. По этой причине в дальнейшем мы исключаем из нашего рассмотрения случай $\zeta > 0$ и будем исследовать только случай отрицательного ζ . Расчеты статических конфигураций были проведены для $\zeta = -30$.

Согласно (64.6) для всех конфигураций в окрестности центра гравитационный скаляр ведет себя как

$$k(y) = ay^2. \quad (64.9)$$

Покажем, что в случае больших значений компактности (64.9) может служить хорошим решением вплоть до поверхности. Прежде всего это непосредственно видно из внешнего решения у поверхности. Действительно,

согласно (64.3) при $W > \sqrt{|\zeta|}$

$$Y = \frac{1}{W}, \quad k(Y) \approx \frac{1}{\beta W^2} = \frac{Y^2}{\beta}, \quad k'(Y) \approx \frac{2}{\beta W^2},$$

т. е. до самой поверхности мы имеем решение вида $k \approx \approx ay^2$. Тогда из условия сшивки следует $a = \frac{1}{\beta}$, $k = \frac{y^2}{\beta}$.

В правильности этого результата можно убедиться также из почленного анализа уравнения (64.5). Слева каждый член его порядка $1/\beta \sim |\zeta|$, тогда как правая часть при $W \gg \sqrt{|\zeta|}$ — очень маленькая величина. В самом деле, отношение ее и каждого из членов левой стороны уравнения порядка

$$\left| \frac{\beta}{2\zeta} \frac{k^3 \mu^2}{y^4} \right| \approx |\zeta| \frac{r^2 m^2}{M^4} \leq |\zeta| \frac{R^2}{M^2} = \frac{|\zeta|}{W^2} \ll 1.$$

Таким образом, для компактных конфигураций с $W \gg 1$ во всей внутренней области справедливо следующее приближенное решение для гравитационного скаляра:

$$k(r) \approx \frac{r^2}{\beta M^2}. \quad (64.10)$$

В случае моделей конфигураций из несжимаемой жидкости можно интегрировать и два других уравнения системы (63.17), если $W \gg 1$. Имеем

$$P(r) = P_0 \left(1 - \frac{r^4}{R^4} \right),$$

где $P_0 = 3W^2/(16\pi\beta M^2)$ — давление в центре, $M = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Для сравнения приведем результат теории с $k = \text{const}$:

$$P = P_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right),$$

где $P_0 = \frac{W}{2}$.

§ 65. Статические конфигурации вырожденных газовых масс

1. Конфигурации вырожденного электронно-ядерного газа. Посмотрим, какие статические небесные тела, состоящие из вырожденного газа частиц, возможны по ньютоновскому варианту обобщенной

теории гравитации. Сначала рассмотрим конфигурации, состоящие из вырожденной электронно-ядерной плазмы (*Ае*-фаза вещества). Задача состоит в интегрировании системы (64.2) с уравнением состояния

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{8}{3\pi} \left(\frac{m_e}{m_n} \right)^3 x_e^3 (2 + a_1 x_e + a_2 x_e^2 + a_3 x_e^3), \\ P &= \frac{1}{3\pi} \left(\frac{m_e}{m_n} \right)^4 [x_e (2x_e^2 - 3) \sqrt{1 + x_e^2} + 3 \ln (x_e + \sqrt{1 + x_e^2})], \end{aligned} \right\} \quad (65.1)$$

приведенным в (29.8). Напомним, что x_e — граничный импульс электронов, измеренный в единицах $m_e c$; область его изменения $0 < x_e \leq 45$. Значения постоянных приведены вслед за формулой (29.8). Граничные условия на поверхности определяются системой (64.3), условие в центре — соотношением (64.4). Давление исчезает при $x_e = 0$, следовательно, на поверхности конфигурации $x_e(R) = 0$.

Мы имеем дело с типичной краевой задачей: граничные условия заданы в центре и на поверхности. В работе [104] интегрирование проводилось от поверхности.

Т а б л и ц а 16

Параметры статических конфигураций, состоящих из вырожденного электронного газа и атомных ядер по ньютоновскому варианту обобщенной теории гравитации

$x(0)$	M	R	$w = \frac{M}{R}$
0,615	$9,81 \cdot 10^{13}$	$9,81 \cdot 10^7$	10^6
1,111	$1,06 \cdot 10^{13}$	$2,66 \cdot 10^7$	$4 \cdot 10^5$
1,631	$2,16 \cdot 10^{12}$	$1,08 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^5$
2,707	$3,75 \cdot 10^{11}$	$3,75 \cdot 10^6$	10^5
3,637	$1,45 \cdot 10^{11}$	$2,07 \cdot 10^6$	$7 \cdot 10^4$
4,885	$5,76 \cdot 10^{10}$	$1,15 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^4$
9,370	$8,01 \cdot 10^9$	$3,20 \cdot 10^5$	$2,5 \cdot 10^4$
11,68	$4,17 \cdot 10^9$	$2,08 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^4$
18,94	$1,01 \cdot 10^9$	$8,08 \cdot 10^4$	$1,25 \cdot 10^4$
24,08	$5,06 \cdot 10^8$	$5,06 \cdot 10^4$	10^4
30,88	$2,50 \cdot 10^8$	$3,12 \cdot 10^4$	$8 \cdot 10^3$
43,51	$9,67 \cdot 10^7$	$1,61 \cdot 10^4$	$6 \cdot 10^3$
55,41	$5,11 \cdot 10^7$	$1,02 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^3$

Задавалось значение параметра $W = \frac{M}{R}$ и далее методом многократных пробных интегрирований искомое значение $\lambda = 4\pi M^2$, при котором $\mu(0) = 0$.

Результаты приведены в таблице 16 и на рис. 38 (часть графика при $\rho \lesssim 10^{13} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$). В таблицу включены только данные, относящиеся к очень большим значениям компактности W . Наиболее важной особенностью

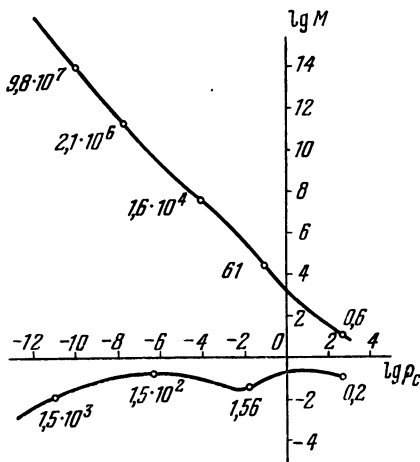


Рис. 38. Зависимость массы M от центральной плотности ρ_0 для статических конфигураций, состоящих из вырожденных газовых масс, по обобщенной теории гравитации Ньютона. Область $\rho_0 < 0,001$ соответствует конфигурациям из вырожденной электронно-ядерной плазмы. Части линий при $\rho_0 > 0,001$ изображают нейтронные конфигурации. Масса измерена в единицах $M_\odot$, плотность в $6,4 \cdot 10^{15} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$. Нижняя ветвь близка к соответствующей кривой по обычной теории Ньютона. Числа на кривых указывают значения радиусов соответствующих конфигураций в км.

решений является то, что одному и тому же $x_0 \equiv x_e(0)$ (т. е. давлению P_0 или плотности ρ_0 в центре) соответствуют две сильно отличающиеся по своим параметрам конфигурации. Благодаря этой двужначности решений графики массы $M(\rho_0)$ и радиуса $R(\rho_0)$ состоят из двух ветвей: одна из них называется нормальной, другая аномальной. Данные, относящиеся к нормальной ветви, в таблице 16 не представлены. Ей принадлежат конфи-

гурации, по своим характеристикам мало отличающиеся от тех, которые получаются по теории с постоянным гравитационным скаляром k , т. е. она изображает белые карлики. Аномальной ветви принадлежат конфигурации с ненормально большим значением компактности W . По своим параметрам эти конфигурации существенно отличаются от белых карликов, хотя состав вещества у них одинаковый. В той же области изменения центральной плотности массы этих образований на много порядков превышают солнечную и охватывают интервал 10^8 — $10^{14} M_\odot$ при $45 > x_0 > 0,6$. Если формально x_0 продолжать ниже значения 0,6, то при $x_0 \rightarrow 0$ $M \rightarrow \infty$. Зависимость M от x_0 при $x_0 \ll 1$ описывается следующим асимптотическим соотношением:

$$M \sim x_0^{-4,5}. \quad (65.2)$$

Радиусы аномальных конфигураций порядка $10^5 \lesssim R \lesssim 10^9$ км, они значительно меньше их гравитационного радиуса.

Внутреннее решение для гравитационного скаляра $k(r)$ дается приближенным аналитическим решением (64.6). Для нормальной ветви конфигураций почти всюду внутри распределения масс можно считать $k(r)$ постоянной, равной $k_0 = 1$, так как они характеризуются малым значением компактности $W \ll 1$. В случае же конфигураций, принадлежащих верхней ветви зависимости $M(\rho_0)$, компактность $W \gg 1$ и всюду внутри конфигурации справедливо приближенное решение (64.10).

Значения параметров конфигураций вырожденного электронного газа можно по порядку величины оценить следующим образом. В уравнениях (64.2) и (65.1) заменяем все величины их средними значениями, используя при этом выражения (64.3) для гравитационного скаляра k на поверхности. После несложных алгебраических выкладок получаем следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} R &\approx \frac{8,5 \cdot 10^2}{x_0}, \quad M \approx 0,06 \quad \text{при } W \lesssim 10, \\ R &\approx \frac{1,3 \cdot 10^8}{x_0^2}, \quad M \approx \frac{2 \cdot 10^{14}}{x_0^3} \quad \text{при } W \gtrsim 10, \end{aligned} \right\} \quad (65.3)$$

когда $x_0 \gtrsim 1$, и

$$\left. \begin{aligned} R &\approx \frac{9 \cdot 10^7}{x_0^{2,5}}, \quad M \approx \frac{7 \cdot 10^{13}}{x_0^{4,5}} \quad \text{при } W \gtrsim 10, \\ R &\approx \frac{1,2 \cdot 10^3}{x_0^{0,5}}, \quad M \approx 0,17 \cdot x_0^{1,5} \quad \text{при } W \lesssim 10, \end{aligned} \right\} \quad (65.4)$$

когда $x_0 \approx 1$. Оценка первой строки относится к конфигурациям нормальной ветви, последней — к аномальной ветви, а оценки второй и третьей строк не реализуются, на кривой $x_0(W)$ нет таких точек. Оценки (65.3) и (65.4) неплохо согласуются с результатами численного интегрирования. Как следует из этих оценок, для аномальных конфигураций

$$M \sim x_0^{-9/2}, \quad R \sim x_0^{-9/2}, \quad M \sim R^{9/5}. \quad (65.5)$$

II. Нейтронные конфигурации. Уравнение состояния вырожденного нейтронного газа имеет такой вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4\pi} (\text{sh } t_n - t_n), \\ P &= \frac{1}{12\pi} \left(\text{sh } t_n - 8 \text{sh } \frac{t_n}{2} + 3t_n \right). \end{aligned} \right\} \quad (65.6)$$

Определение t_n дано в (32.1). Интегрирование системы (64.2) также было произведено от поверхности по граничным условиям (64.3) для ряда фиксированных значений W методом, описанным выше. Радиус поверхности здесь определяется условием $t_n(R) = 0$. Результаты [103] приведены в таблице 17 и на рис. 38.

Все параметры нейтронных конфигураций также являются двузначными функциями центральной плотности ρ_0 (или, можно сказать, параметра $t_n(0)$). Напомним, что по обычной теории масса, радиус и прочие характеристики нейтронных звезд — однозначные функции ρ_0 . В соответствии с этим кривые $M(\rho_0)$ и $R(\rho_0)$ состоят из двух ветвей: нижней (обычной) и верхней (аномальной). Нижняя ветвь принадлежит конфигурациям с массами порядка солнечной и радиусами порядка 10 км. Эти конфигурации по своим свойствам мало отличаются от тех, которые получаются по обычной теории гравитации;

кривые $M(\rho_0)$ в этой части для обоих случаев расположены вплотную (см. таблицу 8). Верхняя же ветвь изображает конфигурации с ненормально большим значением компактности W . Она не имеет своего аналога в обычной теории. На аномальной ветви масса нейтронных конфигураций изменяется от самых маленьких значений до $\sim 10^8 M_\odot$, а радиус также от очень маленьких до значений порядка 10^6 км.

При $W \gg 1$ для параметров M , R и $t_n(0)$ можно найти асимптотические аналитические выражения подобно тем, которые были установлены для конфигураций из

Таблица 17

Наиболее важные параметры нейтронных конфигураций по ньютоновскому варианту обобщенной теории гравитации

Нормальная ветвь				Аномальная ветвь			
$t_n(0)$	M	R	W	$t_n(0)$	M	R	W
1,0	0,0354	1,560	0,0227	0,342	$3,2 \cdot 10^7$	3280	10^4
2,2	0,101	1,005	0,1	1,743	$3,08 \cdot 10^4$	61,6	500
3,27	0,152	0,761	0,2	2,83	$3,47 \cdot 10^3$	17,36	200
3,74	0,169	0,676	0,25	4,18	$5,94 \cdot 10^2$	5,936	100
4,26	0,181	0,603	0,3	5,18	$2,19 \cdot 10^2$	3,123	70
5,55	0,185	0,463	0,4	6,44	77,24	1,545	50
5,93	0,181	0,431	0,42	8,5	20,75	0,593	35
8,41	0,126	0,301	0,42	11,11	4,46	0,178	25
8,81	0,115	0,287	0,4	13,55	1,266	0,0633	20
10,35	0,0872	0,291	0,3	22,7	$1,26 \cdot 10^{-2}$	$1,26 \cdot 10^{-3}$	10
11,96	0,0730	0,365	0,2	31,2	$1,72 \cdot 10^{-4}$	$3,44 \cdot 10^{-5}$	5
12,81	0,0739	0,434	0,17	33,5	$5,75 \cdot 10^{-5}$	$1,43 \cdot 10^{-6}$	4
14,01	0,0802	0,535	0,15	35,8	$1,75 \cdot 10^{-5}$	$5,83 \cdot 10^{-6}$	3
				38,4	$4,83 \cdot 10^{-6}$	$2,41 \cdot 10^{-6}$	2
				41,3	$1,197 \cdot 10^{-6}$	$1,197 \cdot 10^{-6}$	1
				41,85	$9,1 \cdot 10^{-7}$	$1,137 \cdot 10^{-6}$	0,8

вырожденного газа электронов и атомных ядер. Возможность нахождения таких асимптотических выражений обусловлена тем, что при $W \gg 1$ с возрастанием W внутри конфигураций гравитационный скаляр $k(r)$ сильно уменьшается. Одновременно с этим уменьшается градиент давления, и поэтому зависимость $\rho(r/R)$ становится пологой. В данном случае уменьшается $t_n(0)$ и при

удалении от центра сильно замедляется ход убывания функции $t_n(r/R)$. При достаточно больших W , когда $t_n(0) < 1$ (это имеет место при $W \geq 10^4$), разлагая $\text{sh } t_n$ в ряд по степеням t_n , систему дифференциальных уравнений, определяющих внутреннюю задачу, можно представить в виде

$$\mu' = \frac{1}{6} M^2 y^2 t_n^2, \quad t'_n = -\frac{16}{\beta} \frac{\mu}{t_n}. \quad (65.7)$$

В последнем уравнении функция $k(y)$ заменена асимптотикой y^2/β . Напомним, что $y = \frac{r}{M}$. Уравнения (65.7) удовлетворяют следующему преобразованию подобия:

$$y \rightarrow \alpha y, \quad M \rightarrow \alpha^{-9/4} M, \quad t_n \rightarrow \alpha^{1/2} t_n, \quad \mu \rightarrow \mu,$$

откуда следует, что

$$M \sim W^{9/4}, \quad t_n(0) \sim W^{-1/2}, \quad R \sim W^{5/4}. \quad (65.8)$$

Для определения коэффициентов пропорциональности поступим следующим образом. В (65.7) перейдем к следующим средним величинам:

$$\bar{y} \approx \frac{1}{2W}, \quad \bar{y}^2 \approx \frac{1}{4W^2}, \quad \overline{\mu(y)} \approx \frac{1}{2}, \quad \overline{t_n(y)} \approx \frac{t_n(0)}{2},$$

$$\overline{\mu'(y)} \approx W, \quad \overline{t'_n(y)} \approx -t_n(0)W, \quad \overline{t_n^3(y)} \approx \frac{t_n^3(0)}{8}, \quad \beta \approx -\frac{1}{4},$$

Если теперь в (65.8) истинные величины заменить их средними значениями, приведенными выше, то получим

$$t_n(0) \approx \frac{C_1}{\sqrt{W}}, \quad M \approx C_2 W^{9/4}, \quad R \approx C_2 W^{5/4} \quad (65.9)$$

со значениями $C_1 \approx 60$, $C_2 \approx 0,03$, неплохо согласующимися с результатами численного интегрирования: $C_1 = 34,2$, $C_2 = 0,0325$. Таким образом, мы видим, что при $W \gg 1$ параметр $t_n(0)$ обратно пропорционален $\sqrt{W}$, а масса пропорциональна $W^{9/4}$. Из (65.9) можно получить зависимость массы и радиуса от $t_n(0)$, а также зависимость $M(R)$:

$$M \approx 3,3 \cdot 10^8 t_n^{-9/2}(0), \quad R \approx 860 t_n^{-5/2}(0), \quad M \approx 17,2 R^{9,5}.$$

$$(65.10)$$

Следует сделать следующую оговорку по поводу результатов, изложенных в этом параграфе. Радиусы конфигураций, принадлежащих аномальной ветви зависимости $M(\rho_0)$, меньше их гравитационного радиуса $r_g = 2M$. В этом случае релятивистские эффекты могут существенным образом изменить упомянутые результаты. Поэтому при расчетах конфигураций со значением компактности $W \gg 1$ необходимо исходить из соответствующих уравнений общей теории относительности.

§ 66. Сверхкомпактные конфигурации

Из второго соотношения системы граничных условий (61.6) имеем

$$W = \frac{1}{4hB} (\tau_0^{0,5-h} - \tau_0^{0,5+h}).$$

Нам из (60.7) известно, что при $\zeta = -30$, $h = 0,51234$, $4hB = 1,9843$. Отсюда видно, что при $W \ll 1$ параметр τ_0 очень мал по сравнению с единицей. Пренебрегая вторым малым членом, находим

$$\tau_0 = (4hBW)^{-j}, \quad W \gg 1, \quad (66.1)$$

где $j = \frac{1}{h-0,5} = 81,0373$. В том же приближении

$$E(R) \equiv e^{\lambda(R)} \approx (2hj\tau_0^h)^2 \ll 1.$$

Таким образом, на поверхности сверхкомпактных конфигураций абсолютное значение радиальной компоненты метрического тензора очень мало, причем при $W \rightarrow \infty$ $E(r) \rightarrow 0$. Сопоставление этого обстоятельства с условием в центре (62.9), согласно которому $E(0) = 0$ (мы имеем в виду первые два варианта условий в центре), дает основание утверждать, что при больших значениях компактности во всей внутренней области функция $E(R)$ очень мала, причем при возрастании W она монотонно уменьшается и в пределе $W \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Численное интегрирование уравнений (62.2)–(62.4) подтверждает это заключение. Это обстоятельство позволяет найти асимптотические аналитические выражения для параметров сверхплотных конфигураций.

Перепишем систему уравнений (62.2) — (62.5), пренебрегая в них функцией $E(r)$ как малой по сравнению с единицей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{ds} &= \frac{P + \rho}{f + 2} \cdot \frac{\psi}{s}, \\ \frac{dE}{ds} &= \frac{2E}{s(f + 2)} (sE\varphi + 1 - f - \psi), \\ \frac{df}{ds} &= \frac{E}{s(f + 2)} \{s[\rho - P + (f - 2)\varphi] - f\}, \end{aligned} \right\} \quad (66.2)$$

где

$$\psi = \frac{1}{f - 2} \left(sEP + 2f - \frac{\xi}{2} f^2 - 1 \right), \quad \varphi = \frac{\rho - \xi(\rho - P)}{3 - 2\xi}.$$

Уравнения (66.2) инвариантны относительно преобразования подобия

$$s \rightarrow \alpha s, \quad E \rightarrow \alpha^{-1} E, \quad f \rightarrow f, \quad P \rightarrow P, \quad \rho \rightarrow \rho. \quad (66.3)$$

Таким образом, конфигурации с $W \gg 1$ являются подобными. Они характеризуются одинаковыми значениями функций $f(s)$, $P(s)$ и произведением $sE(s)$. При переходе к переменной r это подобие нарушается, т. е. эти функции при заданном r будут иметь разные значения для разных W . Конфигурации с $W \gg 1$ будем называть *гравитарами*. Они характеризуются почти одинаковым значением давления в центре $P(0)$.

В (60.1), пренебрегая малыми членами и затем учитывая (66.1), получим следующие формулы для интегральных параметров гравитаров:

$$\left. \begin{aligned} e^{\lambda(R)} &\approx C_1 W^{-2hj} \approx C_1 W^{-83}, \\ e^{\nu(R)} &\approx C_2 W^{-j/B} \approx C_2 W^{-83,7}, \\ k(R) &\approx C_3 W^{j\beta_0/B} \approx C_3 W^{-1,328}, \\ f(R) &= Rk'(R)/k(R) \approx -\frac{\beta_0 j}{B} \approx 1,328, \end{aligned} \right\} \quad (66.4)$$

где $C_1 = \frac{4h^2 j^2}{(4hB)^{2hj}} = 1,35 \cdot 10^{-21}$, $C_2 = (4hB)^{-j/B} = 1,25 \cdot 10^{-25}$, $C_3 = (4hB)^{j\beta_0/B} = 0,4025$. Приведенные здесь цифры относятся к случаю $\xi = -30$. Подобные асимптотические зависимости можно найти также для массы и радиуса, если учесть, что на поверхности всех гравитаров

произведение $sE(s)$ имеет одинаковую величину:

$$s_0 E(s_0) = 8\pi R^2 k(R) E(R) = \text{const},$$

где $s_0 = s(R)$. Учитывая приведенные выше выражения для $k(R)$ и $E(R)$, находим

$$M = WR, \quad R \approx C_4 W^{j(2hB - \beta_0)/2B} \approx C_4 W^{42,16}. \quad (66.5)$$

Численное значение C_4 можно найти, если (66.5) сравнить с результатом интегрирования дифференциальных уравнений для некоторого, но большого значения W .

§ 67. Барионные конфигурации по обобщенной теории гравитации

Решение внутренней задачи удобно сначала произвести в том виде, в каком она сформулирована в (62.2) — (62.5). Интегрирование этой системы легче выполнить от центра. В соответствии с (62.10) при этом нужно исходить из следующих условий в центре конфигурации:

$$P(0), \quad f(0) = f_0, \quad E(s) = D \cdot s^{2(1-f_0)/(2+f_0)}, \quad (67.1)$$

где D — неизвестная постоянная, а f_0 согласно (62.9.1)

равна $f_0 = \frac{2}{\xi} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{\xi}{2}}\right) = 0,2$ при $\xi = -30$. Методом пробных интегрирований подбираем такое значение постоянной D , чтобы на поверхности, где $P(s_0) = 0$, функции $f(s)$ и $E(s)$ с определенной, наперед заданной точностью удовлетворяли внешнему решению (62.11), т. е. уравнению

$$E(F) = 1 + (2 - \xi)F - 1,5(1 - \xi)F^2, \quad (67.2)$$

где $F \equiv f(s_0)$. Тогда по полученному значению $E(s_0)$ мы из (60.1) находим величины $\tau_0 \equiv \tau(R)$, W и $k(R)$. С помощью этих величин можно определить радиус и массу:

$$R = \left(\frac{s_0}{8\pi k(R)}\right)^{1/2}, \quad M = WR$$

(см. формулы преобразования (62.1)). Этим можно считать задачу определения интегральных параметров конфигураций решенной.

Вообще говоря, можно считать решенной и всю внутреннюю задачу, так как при вышеописанной процедуре интегрирования, по ходу численного расчета, очевидно, можно получить и значения функций $P(s)$, $f(s)$, $E(s)$. Но для составления ясного представления о внутреннем строении конфигурации нам нужно перейти к переменной r . В принципе этот переход можно совершить с помощью преобразования, обратного (62.1). Однако поскольку условия в центре (после предварительного интегрирования) уже известны, оказывается более удобным произвести еще одно интегрирование системы дифференциальных уравнений, определяющих внутренние параметры в зависимости от r , чем совершить не менее сложный переход от независимой переменной s к r . Выпишем полную систему уравнений для наиболее важных функций, характеризующих внутреннее строение конфигураций:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dr} &= \frac{P + \rho}{r} \psi, \\ \frac{dE}{dr} &= \frac{2E}{r} (sE\varphi - E + 1 - f - \psi), \\ \frac{df}{dr} &= \frac{E}{r} \{s[\rho - P + (f - 2)\varphi] - f\}, \\ \frac{dk}{dr} &= f \frac{k}{r}, \\ \frac{dv}{dr} &= -2 \frac{\psi}{r}, \\ \frac{d\mu}{dr} &= 4\pi\rho \sqrt{E} r^2, \\ \frac{dm}{dr} &= 4\pi \left\{ \frac{s}{3 - 2\zeta} [(2 - \zeta)\rho + 3(1 - \zeta)P] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{k'v'r^2}{8\pi k} \right\} \sqrt{E} e^{v/2}, \\ \frac{dN}{dr} &= 4\pi \sqrt{E} r^2 n(r), \\ \rho &= \rho(P). \end{aligned} \right\} \quad (67.3)$$

Вспомним: $s = 8\pi k(r)r^2$, $f(r) = rk'(r)/k(r)$, $E = e^{\lambda(r)}$,
 $\varphi = \frac{\rho - \zeta(\rho - P)}{3 - 2\zeta}$, $\psi = \frac{1}{f - 2} \left(sEP + 2f - \frac{1}{2} \zeta f^2 - 1 + E \right)$.

Первые четыре уравнения легко получаются из (61.5), пятое есть уравнение (61.4), шестое представляет собой собственную массу (масса без учета энергии гравитационного поля) $\mu(r)$ в сфере радиуса r , восьмое определяет полное число барионов $N(r)$ до расстояния r ($n(r)$ — плотность числа барионов), а седьмое в известном смысле характеризует полную массу $m(r)$ в сфере с радиусом r . Строго говоря, ясный физический смысл имеет только $m(R)$, которая согласно (60.8) совпадает с активной массой M , входящей во внешнее решение.

Условия в центре:

$$\left. \begin{aligned} P(0) &\equiv P_0, \quad E(r) \approx D(8\pi\gamma)^l r^{2-2f_0}, \\ f(0) &\equiv f_0, \quad k(r) \approx \gamma r^{f_0}, \quad v(0), \\ \mu(0) &\equiv 0, \quad m(0) = 0, \quad N(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (67.4)$$

Здесь $l = 2(1 - f_0)/(2 + f_0) = 8/11$ при $\zeta = -30$, значение центрального давления P_0 задается нами, величина постоянной D , соответствующей выбранному P_0 , предполагается известной после интегрирования системы (62.2) — (62.4), γ и $v(0)$ — неизвестные постоянные, которые определяются в процессе второго этапа интегрирования. Приведенное поведение функций $E(r)$ и $k(r)$ при $r \approx 0$ непосредственно следует из (62.10) и (62.1).

Интегрирование системы (67.3) легче проводить от центра с условиями (67.4). При этом сначала для неизвестных постоянных γ и $v(0)$ берут произвольные значения γ_1 и $v_1(0)$ и проводится пробное интегрирование до обращения в нуль давления, т. е. до поверхности. В результате для функций $k(r)$ и $v(r)$ получаются какие-то значения $k_2(R)$ и $v_2(R)$, которые, разумеется, не совпадут с истинными значениями $k(R)$ и $v(R)$, найденными при первом этапе интегрирования одновременно с τ_0 и W . После этого производится повторное интегрирование системы (67.3) с теми же условиями в центре, но для γ и $v(0)$ теперь принимается

$$\gamma = \gamma_1 k(R)/k_2(R), \quad v(0) = v_1(0) + v(R) - v_2(R).$$

Анализируя уравнения (67.3), можно легко убедиться, что эти новые значения постоянных γ и $v(0)$ уже являются правильными, так как все условия на поверхности теперь будут выполнены. В результате этого второго ин-

тегрирования мы получаем функции $P(r)$, $\lambda(r)$, $f(r)$, $k(r)$, $v(r)$, $\mu(r)$, $m(r)$, $N(r)$, а также интегральные характеристики M , R , $N(R)$ конфигурации для заданного значения давления P_0 в центре. Как мы видим, и в обобщенной теории гравитации статические сферические конфигурации вырожденных масс определяются только одним параметром, а именно, центральным давлением.

Описанным способом были рассчитаны параметры конфигураций, состоящих из реального газа барионов

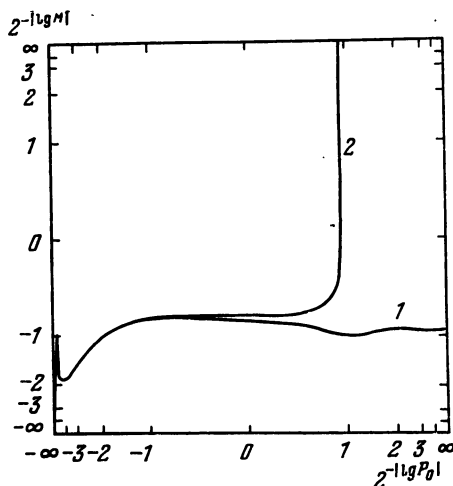


Рис. 39. Зависимость массы от центрального давления для статических конфигураций, состоящих из реального газа барионов (уравнение состояния (33.6)). По оси абсцисс отложена величина $2^{-\lg P_0}$, причем она откладывается от отметки $+\infty$, если $P \geq 1$, и от отметки $-\infty$, если $P_0 \leq 1$. Сторона рамки принимается равной 2. По оси ординат аналогичным образом откладывается $2^{-\lg M}$. По обычной теории Эйнштейна (кривая 1) масса конфигурации порядка $M_\odot$, а центральное давление может иметь любые значения. По релятивистской обобщенной теории (кривая 2) давление сверху ограничено, однако для массы допустимы любые значения, причем при $P_0 \rightarrow 7,52 M \rightarrow \infty$.

Цифрами при точках указаны значения параметра $q_0 = \frac{P_0}{\rho_0}$ для соответствующих конфигураций.

[107], с уравнением состояния (33.2) — (33.6) для $\zeta = -30$. Результаты расчетов приведены в таблице 18. На рис. 39

Таблица 18
Некоторые наиболее важные характеристики конфигураций, состоящих из реального газа барьонов,
по релятивистской обобщенной теории гравитации

P_0	q_0	R	M	W	M_0	$10^{-58} N$	$-v(0)$	$-v(R)$	$-\ln D$	$\lambda(R)$	γ	$k(R)$
0,00223	0,04	0,930	0,050	0,054	—	—	—	—	—8	—	—	0,998
0,0159	0,11	0,827	0,122	0,148	0,136	0,143	0,741	0,346	—5	0,331	2,39	0,995
0,239	0,37	0,651	0,185	0,284	0,254	0,236	2,19	0,834	—2	0,793	1,60	0,987
1,64	0,67	0,500	0,180	0,366	0,342	0,251	3,94	1,27	0	1,194	1,32	0,980
2,34	0,72	0,489	0,188	0,385	—	—	—	—	0,5	—	—	0,978
3,05	0,75	0,490	0,200	0,407	0,485	0,310	—	1,58	1	1,475	1,21	0,975
4,55	0,81	0,552	0,232	0,445	—	—	—	—	2	—	—	0,969
5,73	0,84	0,610	0,290	0,474	1,22	0,658	6,24	2,47	3	2,211	1,08	0,961
6,93	0,86	0,972	0,491	0,510	3,73	1,89	7,50	3,56	5	2,855	0,946	0,945
7,39	0,87	2,20	1,17	0,533	21,5	10,7	9,27	5,27	8	2,881	0,772	0,920
7,48	0,87	3,91	2,12	0,543	—	—	—	—	10	—	—	0,902
7,49	0,87	16,9	9,51	0,563	$1,36 \cdot 10^3$	$6,72 \cdot 10^2$	13,4	9,35	15	—0,444	0,479	0,862
7,51	0,88	74,9	43,7	0,583	$2,63 \cdot 10^4$	$1,30 \cdot 10^4$	16,2	12,3	20	—3,33	0,341	0,823
7,52	0,88	327	197	0,604	$5,11 \cdot 10^5$	$2,52 \cdot 10^5$	19,2	15,2	25	—6,22	—	0,785
7,52	0,88	1420	890	0,626	$9,95 \cdot 10^3$	$4,91 \cdot 10^3$	22,1	18,1	30	—9,12	0,172	0,747
7,52	0,88	6180	4010	0,648	$1,92 \cdot 10^8$	$9,46 \cdot 10^7$	25,0	21,0	35	—12,01	0,123	0,716
7,52	0,88	$2,68 \cdot 10^4$	$1,81 \cdot 10^4$	0,671	$3,71 \cdot 10^9$	$1,83 \cdot 10^9$	27,9	23,9	40	—14,91	0,081	0,684

Примечание. P_0 , ρ_0 — давление и плотность энергии в центре, $q_0 = \frac{P_0}{\rho_0}$ R — радиус, M — масса конфигурации, $W = M/R$, M_0 — собственная масса (масса без учета гравитации), RN — число барьонов в конфигурации, $v(0)$ и $v(R)$ — значения функции $v(r) = \ln g_{00}(r)$ в центре и на поверхности, $\lambda(R) = \ln |g_{rr}(R)|$ (g_{00} и g_{rr} — компоненты метрического тензора), $k(R)$ — величина гравитационного скаляра на поверхности, D и γ — постоянные, входящие в выражения (67.4) для $e^\lambda = g_{rr}$ и $k(r)$.

изображена зависимость массы M от давления P_0 в центре. При некоторых точках на кривых указаны значения так называемого релятивистского параметра $q_0 = \frac{P_0}{\rho_0}$.

Нижняя кривая, отмеченная цифрой 1, представляет зависимость $M(P_0)$ по обычной релятивистской теории гравитации. Как мы уже знаем из материала, изложенного в главе VII, здесь могут существовать статические барионные конфигурации с любым центральным давлением P_0 , но ограниченными значениями массы и радиуса ($M \sim M_\odot$, $R \sim 10$ км), а при $P_0 \rightarrow \infty$ масса $M(P_0)$, осциллируя с затухающей амплитудой, приближается к пределу, близкому по величине к массе Солнца. Верхняя кривая соответствует релятивистской обобщенной теории гравитации.

Из таблицы 18 и рис. 39 видно, что результаты нового варианта теории мало отличаются от обычного, существенные отклонения появляются лишь при $q_0 \gtrsim 0,5$. С возрастанием параметра q_0 (следовательно, и P_0) масса и радиус статических барионных конфигураций растут, но центральное давление не может иметь значения, превышающие $P_0 \approx 7,52$ ($4,86 \cdot 10^{37}$ дин·см⁻²). Если говорить об обратной зависимости $P_0(M)$, то P_0 с ростом M растет и при $M \rightarrow \infty$ асимптотически приближается к пределу $P_0 \approx 7,52$. При этом параметр q_0 стремится к пределу, приблизительно равному 0,88. В существовании вертикальной ветви линии $M(P_0)$ мы фактически убедились в предыдущем параграфе. Действительно, там было показано, что конфигурации с $W \gg 1$ имеют почти одинаковое центральное давление, хотя масса и радиус у них разные (гравитары). Для гравитаров имеют место асимптотические зависимости (66.4) и (66.5).

Интегральные параметры конфигураций с малым значением компактности $W \ll 1$ соответствуют обычной теории Эйнштейна (принцип соответствия). Как следует из таблицы, для таких конфигураций мала и величина $q_0 = \frac{P_0}{\rho_0}$. При этом незаметны также релятивистские эффекты. Таким образом, q_0 является важным параметром, одновременно характеризующим как эффекты релятивистской теории гравитации, так и эффекты обобщенной теории гравитации. С увеличением параметра q_0 растут

компактность, масса, радиус. Одновременно происходит ослабление гравитационного взаимодействия, т. е. уменьшение гравитационного скаляра $k(r)$, что способствует поддержанию гидростатического равновесия для масс больших и давлений P_0 меньших, чем это имеет место по обычной теории Эйнштейна. При массах, намного превышающих массу Солнца, уменьшение взаимного притяжения масс становится настолько эффективным, что давление в центре конфигурации достигает насыщения и почти перестает расти при дальнейшем увеличении массы конфигурации. График зависимости $R(P_0)$ при $W \gg 1$ сходен с $M(P_0)$; это очевидно как из (66.5), так и из табличных данных.

В случае моделей конфигураций, состоящих из вырожденного идеального газа барионов, картина, подобная рис. 39, не была обнаружена. Расчеты, проведенные для $\xi = -30$, показали, что кривые $M(P_0)$ по обоим вариантам теории гравитации, как и все другие кривые параметров конфигурации, мало отличаются друг от друга. Причина этого состоит в том, что расхождения между параметрами по обоим вариантам получаются при $q_0 \gtrsim 0,5$, тогда как в случае идеального газа $q_0 \leq 1/3$. Это обстоятельство еще раз свидетельствует о том, что здесь важным является не центральное давление, а величина релятивистского параметра q_0 . Значение этого параметра q_0 , начиная с которого появляются заметные расхождения между результатами обоих вариантов теории, зависит от величины параметра ξ . С увеличением $|\xi|$ величина q_0 растет.

В работе [251] модели конфигураций из идеального нейтронного газа рассчитывались для $\xi = -2$. При этом не было найдено заметного отклонения от результатов обычной теории гравитации. Однако в этой работе, как правильно было указано в [2], упускались из виду наиболее интересные варианты условий в центре (62.9, I, II). Нам кажется, что при корректной формулировке граничных условий в центре и на поверхности для таких малых значений параметра $|\xi|$ должны получиться существенные эффекты.

В случае гравитаров можно найти приближенные аналитические выражения для постоянных γ и D , входящих в (67.4). Так, из соображения размерности сле-

дует, что $\gamma \sim c^2 M^{-1} R^{0,8}$. Сравнивая эту зависимость с данными последних нескольких строк таблицы 18, находим $\gamma \approx 0,451 W^{-1} R^{-0,8}$. Аналогично для постоянной D получается

$$D \approx 10^{-81} W^{-273} R^{-16/11}.$$

§ 68. Разные вопросы

Сравнение результатов нерелятивистского (рис. 38) и релятивистского (рис. 39) вариантов обобщенной теории показывает, что при значениях компактности $W = \frac{M}{R} > 1$ имеется расхождение не только количественного, но и качественного характера. В этом нет ничего удивительного, так как при $W > 1$ мы имеем дело с телами, радиус которых меньше их гравитационного $r_g = 2M$. В таких случаях из-за сильного искривления пространства внутри распределения масс ньютоновский вариант теории может дать даже неверные результаты: релятивистские эффекты могут стать весьма существенными. Как обстоит дело в таких случаях по обычной теории гравитации, мы не можем сказать, поскольку здесь не существует подобной ситуации, нет тел с $R < r_g$. Качественное согласие можно ожидать только для конфигураций с $R \geq r_g$, и оно в самом деле имеется. Однако, несмотря на сильное расхождение между результатами, тем не менее имеются сходные черты. Как на рис. 38, так и на рис. 39 кривая массы $M(P_0)$ состоит из двух ветвей: нормальной, мало отличающейся от обычной теории, и аномальной, не имеющей своего аналога в обычной теории гравитации. В обоих случаях при продвижении по линии $M(P_0)$ слева направо компактность все время растет (здесь мы отвлекаемся от не играющей роли осцилляции кривых $M(P_0)$, $R(P_0)$ и $W(P_0)$ на нормальной ветви). При этом по нерелятивистской теории P_0 (следовательно, и $q_0 = \frac{P_0}{\rho_0}$)

сначала растет до некоторого максимального значения $P_m(0)$, а затем при дальнейшем продвижении слева направо непрерывно уменьшается, т. е., начиная с $P_0 = P_m$, кривая $M(P_0)$ и другие загибаются назад, в сторону оси ординат, но продолжают подниматься (см. рис. 38).

По релятивистской теории величина P_0 также имеет наибольшее значение, но здесь оно является предельным. Функция $M(P_0)$ при $P_0 < 1$ (в единицах (34.1)) изображается одной линией (см. рис. 39), однако при $P_0 \geq 1$ она расщепляется на две: одна идет приблизительно параллельно оси абсцисс (это нормальная ветвь), другая, постепенно загибаясь влево, при $P_0 \rightarrow P_m \approx 7,52$ вертикально идет вверх (соответствующее значение $q_0 \approx 0,88$). Если говорить об обратной зависимости $P_0(M)$ и опять двигаться слева направо, то в нерелятивистском случае P_0 сначала растет, при некотором значении абсциссы $M = M_m$ имеет максимум, затем с возрастанием M монотонно убывает так, что когда $M \rightarrow \infty$, $P_0 \rightarrow 0$. Кривая $P_0(M)$ имеет максимум при всех уравнениях состояния (политропы [70a], несжимаемая жидкость [102] и другие). Функция $M(P_0)$ на рис. 38 изображена в виде двух несвязанных линий. Как мы видим, эти линии приближаются друг к другу, видно, что они где-то должны соединиться и должны составить одну неразрывную кривую. Эта отсутствующая часть не была начерчена из-за неимения соответствующих точек. В этой части кривой $M(P_0)$ расчеты не были проведены из-за больших трудностей в численных расчетах. В релятивистском случае кривая $P_0(M)$ монотонно поднимается и при $M \rightarrow \infty$ асимптотически стремится к линии $P_0 = P_m(0) = 7,52$. Таким образом, благодаря релятивистским эффектам anomальная ветвь кривой $P_0(M)$ нерелятивистской теории поднимается вверх, выпрямляется и становится параллельной оси абсцисс.

Что касается поведения гравитационного скаляра $k(r)$, то здесь сходство значительно большее, хотя зависимость от r неодинаковая. Функция $k(r)$ в обоих случаях с нулевого значения в центре монотонно растет до предельного значения $k_0 = k(\infty)$ на бесконечности, а при увеличении массы конфигурации M величина $k(r)$ всюду уменьшается, но граничные значения $k(0) = 0$ и $k(\infty) = k_0$ остаются неизменными. Величина гравитационного скаляра $k(r)$ в обоих случаях существенно отличается от ньютоновского значения на расстояниях $r \lesssim r_g$. Как мы видим, между результатами обоих вариантов обобщенной теории некоторое качественное согласие все-таки имеется.

Для политроп с индексами $n=0, 1,5, 3$ максимальное значение q_0 по нерелятивистскому варианту равно 1,51; 1,18; 1,02, а по релятивистскому варианту 2,07; 1,135; 0,925 соответственно (см. работы [70a, 70b, 71]).

В вопросе о появлении аномальной ветви массы, радиуса и других характеристик конфигураций важная роль принадлежит параметру $q_0 = \frac{P_0}{\rho_0}$, величина центрального давления не так существенна. Это видно хотя бы из того, что по релятивистскому варианту не для всех уравнений состояния существует ветвь гравитаров (аномальная ветвь), хотя во всех случаях ограничения на значения давления нет. Причина этого состоит именно в том, что не при всех уравнениях состояния q_0 может достигать предельного значения q_m , необходимого для появления ветви гравитаров. Так, например, в случае идеального газа барионов $q_0 \leq 1/3$, предельное значение $q_0 = 1/3$ достигается в ультрарелятивистском случае, но это значение, однако, оказывается недостаточным для возникновения аномальной ветви. В случае же реального газа барионов с уравнением состояния (33.6) имеем $0 \leq q \leq 1$, таким образом, наибольшее значение $q_0 = 1$ здесь больше значения $q_m(0) = 0,88$, при котором возникает аномальная ветвь массы.

Изложенные в этой главе результаты относятся к $\zeta = -30$. Важно выяснить, что произойдет с этими результатами при изменении величины ζ . Качественную картину изменения результатов при изменении параметра ζ можно получить, не проводя новых расчетов, если внимательно изучить характер кривых $M(q_0)$ и $R(q_0)$. Из рис. 39 видно, что обе ветви линии $M(q_0)$ (впредь часто взамен P_0 мы будем говорить о q_0 , поскольку в случае вырождения между ними имеется однозначная связь) в своей начальной части совпадают, только при больших q_0 аномальная ветвь загибается влево вверх. Эта картина повторяется при всех уравнениях состояния, для которых имеется ветвь гравитаров. Далее, поскольку при $|\zeta| \rightarrow \infty$ результаты обобщенной и обычной теории должны совпадать, из упомянутого характера линий несомненно следует, что при уменьшении $|\zeta|$ максимальное значение q_0 по нерелятивистской теории и предельное значение его по релятивистской теории должны убывать,

а при увеличении $|\xi|$ — расти, при этом соответственно укоротятся и удлинятся совпадающие части линий. Таким образом, при увеличении $|\xi|$ аномальная ветвь линии $M(q_0)$ должна смещаться вправо, в сторону больших q_0 , и тем самым удлинится совпадающая часть обеих ветвей. В справедливости этой закономерности в нерелятивистском случае можно убедиться непосредственно. Действительно, как было показано в [71, 70b], в случае моделей из несжимаемой жидкости при прочих равных условиях давление в центре и, следовательно, его максимальное значение $P_m(0)$ обратно пропорционально $|\xi|^{1/2}$, что прямо подтверждает вышеупомянутый вывод. Из приведенных аргументов следует, что предельное значение q_m , при котором получаются большие эффекты, должно зависеть от $|\xi|$. При $|\xi| < 30$ аномальная ветвь кривой массы $M(q_0)$ должна получиться и для меньших значений q_0 , в частности, и в случае идеального газа барионов. Однако малые значения $|\xi|$ недопустимы, так как при $|\xi| < 30$ мы рискуем вступить в противоречие с теорией тяготения Эйнштейна.

Гравитары обладают чрезвычайно большим гравитационным дефектом массы $\Delta M_1 = M_0 - M$, где M — активная гравитационная масса, которая фигурирует во внешнем решении (60.1), а M_0 — собственная масса

$$M_0 = 4\pi \int_0^R \rho r^2 e^{\lambda/2} dr. \quad (68.1)$$

Причина этого состоит в том, что во всей внутренней области конфигураций с $W > 1$ функции $k(r)$, $e^{\lambda(r)}$ и $e^{\nu(r)}$ очень малы по сравнению с единицей. Сравнение (68.1) с (60.7) показывает, что $M/M_0 \approx \overline{ke^{\nu/2}} \ll 1$. Абсолютный гравитационный дефект массы также ненормально велик:

$$\Delta M = Nm_p - M.$$

Здесь N — число барионов в звезде. Из (60.7) имеем

$$\begin{aligned} M = 4\pi \int (\rho + 3P) k(r) r^2 e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} dr + \frac{1}{2} \int \frac{k' \nu'}{k} e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} r^2 dr + \\ + \frac{12\pi}{3-2\xi} \int (\rho - 3P) k(r) e^{\frac{\nu+\lambda}{2}} r^2 dr. \end{aligned} \quad (68.2)$$

Все слагаемые этого выражения имеют положительную величину, поэтому можно утверждать, что

$$M \geq V \rho \exp \left(\frac{v + \lambda}{2} \right),$$

где V — собственный объем конфигурации. Следовательно,

$$\frac{M}{Nm_p} \leq \overline{ke^{v/2}} \ll 1.$$

Для большей ясности приведем один пример. Так, рассмотрим конфигурации с параметрами $P_0 = 7,52$, $W = 0,671$, $M = 1,81 \cdot 10^4$, $M_0 = 3,71 \cdot 10^9$, $N = 1,83 \cdot 10^{67}$, для нее $M/M_0 \approx 5 \cdot 10^{-5}$, $M/Nm_p \approx 10^{-5}$. У конфигураций с $W \geq 0,5$ абсолютный дефект массы всегда положителен, аномалии не имеется.

В соответствии с духом обобщенной теории гравитации величина гравитационного скаляра вдаль от небесного тела должна зависеть от условий, существующих во Вселенной. В частности, в случае однородного изотропного пространства величина k_0 должна зависеть от средней плотности вещества ρ . В настоящее время можно считать общепризнанным, что состояние Вселенной нестационарное. Если не считать веские теоретические аргументы (мы имеем в виду решение Фридмана, которое несомненно должно иметь свой аналог в обобщенной теории) [69], то прямое подтверждение этого мы находим в факте радиального разлета метагалактических объектов со скоростями, пропорциональными их расстоянию до наблюдателя. Следовательно, ρ и тем самым k_0 являются функциями возраста Вселенной. Что можно сказать насчет изменения $k_0(t)$? На примере отдельных звездных конфигураций мы знаем, что с возрастанием плотности массы ρ гравитационный скаляр $k(r)$ убывает при фиксированном значении его в центре масс $k(0) = 0$ и на бесконечности $k(\infty) = k_0$. По-видимому, это дает некоторое основание утверждать, что в тот момент, когда Вселенная была сжата в точку, $k_0(0)$ была равна нулю. Ультрарелятивистская жидкость долго удержаться в небольшом объеме, конечно, не может, она мгновенно должна

расширяться, и по ходу уменьшения $\rho(t)$ функция $k_0(t)$ должна непрерывно расти. Исходя из таких простых рассуждений, трудно сказать, чем кончится процесс расширения. Будет оно продолжаться бесконечно или же при некотором t расширение сменится сжатием?

Посмотрим, к каким последствиям может привести предположение об изменении k_0 со временем для отдельных небесных тел. Система уравнений (67.3) инвариантна относительно преобразования подобия

$$\left. \begin{aligned} k(r) &\rightarrow \alpha k(r), \\ k_0(t) &\rightarrow \alpha k_0(t) \end{aligned} \right\} \quad (68.3)$$

(напомним, что в уравнения поля и в граничные условия, по сути дела, входит не $k(r)$, а отношение $k(r)/k_0(t)$, но k_0 не фигурирует в уравнениях из-за того, что в используемой системе единиц принято $k_0=1$). При преобразовании (68.3) для заданного P_0 численное значение массы, радиуса и прочих параметров остается неизменным. Изменение $k_0(t)$ вызывает пропорциональное изменение функции $k(r)$.

Если учесть предыдущее замечание, то отсюда как бы следует, что временное изменение k_0 не будет иметь последствия для отдельных тел. Но это не так. Не следует забывать, что в используемой системе единиц (34.1), где принято $k_0=1$, хотя численные значения величин не изменяются, но изменяются масштабы их измерения. Так, согласно (34.5) и (34.6) единица измерения расстояния $\alpha \sim k_0^{-1/2}$, а массы $\beta \sim k_0^{-3/2}$, следовательно, при возрастании k_0 величины масштабов расстояния и массы уменьшаются и, наоборот, при уменьшении k_0 они растут. При фиксированных численных значениях параметров конфигураций (M , R и т. д.) в первом случае это приводит к уменьшению M и R , а во втором — к их увеличению, что является вполне естественным (ибо усиление гравитационного притяжения должно сопровождаться уменьшением массы небесного тела). Некоторые физические величины, в определение единицы измерения которых не входит $k_0(t)$, остаются неизменными вообще, так, например, давление, плотность энергии и т. д. Что касается устойчивости конфигураций, то при вариациях k_0 оно нарушаться не будет.

На поверхности гравитаров $g_{00}(R) = e^{v(R)} \ll 1$, поэтому испущенное ими электромагнитное излучение должно испытывать невероятно большое красное смещение

$$\omega(\infty) = \omega(R) e^{\frac{v(R)}{2}} \ll \omega(R). \quad (68.4)$$

При наличии протяженной атмосферы ситуация, конечно, может сильно измениться, поскольку $g_{00}(r)$ с расстоянием быстро растет. Отклонение луча света, проходящего мимо диска гравитара, тоже величина очень большая. Нам кажется, что оба эти эффекта могут быть использованы для проверки теории с переменными k . Однако при этом важной является роль атмосферы. Необходимо разрабатывать модели горячих звезд с источниками, только после этого можно поставить вопрос о проверке новой теории гравитации.

§ 69. Об источниках энергии

В космогонической концепции, в которой исходным считается диффузное состояние вещества, различные аспекты об источниках звездной энергии хорошо разработаны. Здесь фигурируют два основных вида звездной энергии: гравитационная и ядерная. Диффузные космические облака газа и пыли при определенных условиях благодаря гравитационному притяжению, постепенно сжимаясь, образуют звезды. При этом обходится вопрос о том, как образовался газ. Сжатие облака сопровождается превращением гравитационной энергии в кинетическую энергию частиц газа. В результате небесное тело нагревается и в определенной стадии сжатия, когда температура доходит до десяти миллионов градусов, начинается эффективный термоядерный синтез легких атомных ядер. Ядерных источников энергии хватает для покрытия потерь энергии звезды и поддержания ее в стационарном тепловом состоянии на несколько миллиардов лет. После исчерпания ядерной энергии начинается кельвиновский период эволюции. Звезда остывает в течение времени порядка нескольких десятков миллионов лет. По ходу остывания звезда продолжает сокращать свои

размеры, при этом часть гравитационной энергии превращается в тепловую, которая частично покрывает потери энергии с поверхности. В конце кельвиновского периода эволюции начинается катастрофическое сжатие небесного тела, называемое коллапсом. Коллапс небесного тела может продолжаться до конца, т. е. до замыкания его внутри сингулярной сферы Шварцшильда. При подходящем значении массы (приблизительно равной массе Солнца) или, если же она неподходящая, но по ходу бурного сжатия звезда успевает сбросить излишек массы, процесс отмирания звезды может кончиться образованием небесного тела, принадлежащего к устойчивым отрезкам кривой $M(\eta)$ (см. рис. 20), т. е. образованием белого карлика или барионной звезды. В изложенной концепции образование неустойчивых барионных конфигураций с $-1,36 < \eta < -0,6$ и с $\eta > 0,8$ исключено. Большинство астрофизиков склонно считать, что в явлении вспышек сверхновых мы имеем дело именно с коллапсом звезды.

Рассмотрим теперь вопрос источников энергии по космогонической концепции, в которой исходным считается сверхплотное состояние вещества. Следует оговориться, что, вообще говоря, в этой концепции необязательно, чтобы дозвездное вещество находилось в сверхплотном состоянии. Здесь просто утверждается, что развитие вещества во Вселенной идет от плотных состояний к разреженным, ибо мы видим только взрывы, сопровождаемые выбросом масс, расширение системы тел, рассеяние вещества и т. д. В этой концепции гравитационная энергия, по-видимому, лишается той важной роли, которую она имеет в диффузной концепции. Ядерный же источник энергии здесь также имеет важное значение.

Перечислим типы процессов, связанных с источниками ядерной энергии, которые в принципе могли бы иметь существенное значение в сверхплотной космогонии.

1. Обычные термоядерные реакции, идущие при $T \gtrsim 10^7$ градусов.

2. Холодные ядерные реакции, идущие в холодной электронно-ядерной плазме (*Ае*-фаза вещества) при достаточно больших плотностях (см. § 19). Когда среднее расстояние между частицами становится меньше радиуса *K*-оболочки атома, легкие ядра благодаря туннельно-

му эффекту могут соединиться между собою или с тяжелыми ядрами, при этом выделится энергия за счет дефекта массы. Такие реакции возможны не только в Ae -фазе вещества, но и в Aen -фазе, а также в барионном газе, если в них из-за расширения нарушено равновесие. Ядерные реакции пойдут до тех пор, пока остановится расширение и не установится новый устойчивый равновесный состав, соответствующий новому значению плотности вещества. Эти реакции называются пикноядерными.

3. Реакции деления тяжелых атомных ядер. Из материала главы III мы знаем, что при достаточно больших плотностях происходит укрупнение атомных ядер благодаря туннельному эффекту и обогащение их нейтронами благодаря явлению нейтронизации. При плотностях $10^9 \div 10^{13} \text{ г}\cdot\text{см}^{-3}$ число нейтронов в ядрах в несколько раз больше числа протонов. Представим теперь, что по каким-то причинам небесное тело начинает расширяться. Из-за уменьшения плотности понизится уровень энергии Ферми электронного газа, вследствие этого нарушится равновесие между компонентами, пойдут реакции превращения нейтронов в протоны $n \rightarrow p + e + \nu$. В результате нарушится устойчивость ядер, они распадутся на легкие ядра путем деления. При делении будет выделяться тепловая энергия (кинетическая энергия осколков деления). Фактически в этом случае мы имеем дело с картиной, которая имеется в урановых атомных бомбах, где выделяется колоссальная тепловая энергия вследствие цепной реакции деления ядер плутония.

4. Нам кажется, что в космогонии сверхплотных небесных тел особенно важная роль принадлежит энергии $\Delta\epsilon = \rho(A, Z_{\min}) - \rho(A_{\min}, Z_{\min})$, график которой представлен на рис. 8. Вкратце напомним, что это за энергия. В § 20 было рассмотрено два состояния термодинамического равновесия вырожденной электронно-ядерной плазмы (Ae -фаза). Первое — это то состояние, которое образуется при заданном массовом числе атомного ядра A благодаря процессам β -распадов (минимум плотности энергии ρ только по переменной Z). По сравнению с космогоническими промежутками времени в этом случае термодинамическое равновесие устанавливается очень быстро, можно сказать мгновенно. Вторым является то

состояние, при котором вещество состоит из наиболее устойчивых атомных ядер (с максимальным значением энергии связи ядер при заданном ρ). В этом случае плотность внутренней энергии $\varepsilon = \rho - n_n m_n - n_p m_p$ и плотность полной энергии $\rho (n_n \text{ и } n_p - \text{числа нейтронов и протонов, приходящихся на единицу объема})$ имеет абсолютный минимум, т. е. минимум не только по Z , но и по A . При умеренных плотностях наиболее устойчивыми являются ядра группы железа с $A=56$. При достаточно высоких плотностях, когда существенным становится явление нейтронизации атомных ядер, массовое число A , для которого ρ имеет абсолютный минимум, зависит от плотности $A_{\min} = A(\rho)$.

В отличие от первого случая, состояние с абсолютным минимумом энергии $\rho(A_{\min}, Z_{\min})$ достигается весьма медленно. Нам кажется, здесь времена релаксации могут быть даже порядка миллиарда лет. В самом деле, есть основание для подобного утверждения. При данных условиях наиболее устойчивое ядро может образоваться благодаря пикноядерным реакциям, синтезу легких ядер или путем деления тяжелых. Очевидно, образование наиболее устойчивого ядра сразу же в одном акте синтеза или деления — весьма и весьма маловероятное событие. Поэтому установление наиболее устойчивого состояния термодинамического равновесия несомненно будет носить характер весьма медленного стохастического процесса.

По ходу медленного стремления состояний Ae - и Aep -плазмы к наиболее устойчивому произойдет постепенное превращение излишка внутренней энергии $\Delta\varepsilon$ в тепловую. Рассмотренный механизм постепенного выделения ядерной энергии действует только в вырожденной электронно-ядерной плазме (Ae -фаза вещества). Он может иметь существенное значение не только для белых карликов, но и для барионных звезд, так как в оболочке последних вещество также находится в Ae - и Aep -фазах.

В вопросе источников энергии некоторую роль, по-видимому, могут играть также протоны, нейтроны и электроны, испускаемые радиоактивными ядрами.

Из вышеизложенного следует, что представление о белых карликах и барионных звездах как об умерших небесных телах может оказаться неверным. По-видимо-

му, эти небесные тела продолжают жить бурной жизнью за счет медленного выгорания имеющих в Δe - и Δen -фазах запасов внутренней энергии. В частности, не исключена возможность, что явление пульсаров обусловлено именно выделением вышеупомянутой энергии Δe .

Резюме

Согласно обычной теории гравитации, по крайней мере для статических конфигураций, компактность

$$W = \frac{M}{R} < 0,5.$$

Благодаря особенности Шварцшильда при $r=r_g=2M$ звезды с $W>0,5$ не существуют. В обобщенном варианте теории гравитации допускаются конфигурации со сколь угодно большой компактностью $W>0,5$, что обусловлено отсутствием сингулярности в решении точечной массы.

При $W<0,5$ параметры звезд, рассчитанные по обычному и обобщенному вариантам теории гравитации, мало отличаются друг от друга. В области больших W кривая $M(q_0)$, представляющая зависимость массы от релятивистского параметра $q_0=P_0/\rho_0$, состоит из двух ветвей (см. рис. 39): нормальной, которая мало отличается от соответствующей линии обычной теории Эйнштейна, и аномальной, не имеющей своего аналога в этой теории. Аномальная ветвь содержит в себе конфигурации с массами $M_\odot \lesssim M < \infty$.

Здесь важная роль принадлежит параметру q_0 , значением которого одновременно характеризуется релятивизм конфигураций. Большие массы для небесных тел получаются лишь при значениях параметра q_0 , близких к определенному q_m . Если для рассматриваемого уравнения состояния q_0 не достигает значения q_m (просто из-за того, что в этом случае q_0 не может иметь таких значений), то аномальная ветвь массы не возникает. Так, в случае идеального газа барионов $0 < q_0 < 1/3$, тогда как $q_m \approx 0,88$, поэтому (конечно, при выбранном значении $\xi = -30$) в этом случае аномальная ветвь не имеется. В случае же реального газа она существует, поскольку соответствующее значение для q_0 имеется: $0 < q < 1$.

Во избежание недоразумений считаем необходимым еще раз предупредить, что изложенная в последних двух главах обобщенная теория гравитации — только одно из мысленно возможных направлений развития теории. Пока что рано говорить об ее подтверждении астрономическими фактами. Вполне вероятно, что она не имеет ничего общего с действительностью. Однако нельзя с порога отвергать эту версию, не дождавшись момента ее сопоставления с фактами. Поскольку имеется такая теоретическая версия, необходимо ее исследовать. Со временем эта теория может оказаться совсем неверной, однако нельзя отрицать ту привлекательную и разумную идею, которая заложена в основе обобщенной теории гравитации. Мы имеем в виду идею Дирака о переменности гравитационной константы k . С точки зрения чистой логики нет ничего плохого в том, что k переменна, более того, кто может утверждать, что k везде, в том числе и при $r > r_g$, имеет такое значение, какое она имеет вне распределения масс. Никем это не доказано, и, безусловно, это утверждение в определенном смысле является постулатом. Не следует забывать, что теорию с переменной k всегда можно построить так, чтобы не вступить в противоречие с существующей теорией гравитации.

Таким образом, в отличие от первых восьми глав, материал последних двух глав имеет дискуссионный характер. Они написаны с той лишь целью, чтобы возбудить сомнение в реальности сингулярности, имеющейся в решении Шварцшильда, и показать одну из теоретических возможностей устранения ее. Мы надеемся, что полученные конкретные результаты позволят в ближайшем будущем решить судьбу этой теории.

Примечание в корректуре. В этой книге мало уделено внимания вопросам теории горячих сверхплотных небесных тел, так как они в период написания и издания книги недостаточно были изучены. За последние два года в этой области проделана заметная работа:

1. Показано, что остаточная ядерная энергия, имеющаяся в белых карликах, может с необходимой скоростью выделиться только путем обмена ядер нейтронами. Разрабатывались модели горячих белых карликов с такими источниками. При временах жизни порядка космогонических для светимости получаются значения $L \sim (0,001 \div 0,1) L_{\odot}$ (Саакян Г. С., Авакян Р. М., Астрофизика, 1972; Астрон. ж., 1971).

2. Установлено, что из всех известных источников внутренней энергии в сверхплотных звездах наиболее мощным ($10^{48} \div 10^{61}$ эрг) является добавочная гравитационная энергия $kM^2\Delta R/R^2$, обусловленная разбуханием звезды при ее вращении, если оно достаточно быстрое (Саакян Г. С., Седракян Д. М., Чубарян Э. В., Авакян Р. М., Арутюнян Г. Г., *Астрофизика*, 1972).

3. Доказана возможность наличия протяженной атмосферы у некоторых барионных звезд и белых карликов: $T \sim 1/r$, $\rho \sim 1/r^3$ (Саакян Г. С., Седракян Д. М., Чубарян Э. В., *Астрофизика*, 1972).

ЛИТЕРАТУРА

1. Абрикосов А. А., Вопросы космогонии 3, 11, 1954.
2. Авакян Р. М., Мнацаканян М. А., Астрофизика 5, 169, 1969.
3. Амбарцумян В. А., ДАН Арм. ССР 13, 129, 1951.
4. Амбарцумян В. А., Сообщ. Бюраканск. обсерв. 15, 1954.
5. Амбарцумян В. А., Нестационарные звезды, Ереван, 1957.
6. Амбарцумян В. А., Изв. АН Арм. ССР (серия физ.-мат. наук) 11, 9, 1958.
7. Амбарцумян В. А., Rev. Mod. Phys 30, 944, 1958.
8. Амбарцумян В. А., Сборник докладов Солвейской конференции, стр. 241, Брюссель, 1958.
9. Амбарцумян В. А., Проблемы эволюции Вселенной, АН Арм. ССР, Ереван, 1958.
10. Амбарцумян В. А., Научные труды, том II, Ереван, 1960.
11. Амбарцумян В. А., АрJ 66, 536, 1961.
12. Амбарцумян В. А., Проблемы внегалактической астрономии, Transactions IAU, XI, 1961.
13. Амбарцумян В. А., Нестационарные явления в Галактике, АН Арм. ССР, Ереван, 1968.
14. Амбарцумян В. А., Саакян Г. С., Астрон. ж. 37, 193, 1960.
15. Амбарцумян В. А., Саакян Г. С., Астрон. ж. 38, 785, 1961.
16. Амбарцумян В. А., Саакян Г. С., Астрон. ж. 38, 1016, 1961.
17. Амбарцумян В. А., Саакян Г. С., Вопросы космогонии 9, 91, 1963.
18. Амбарцумян В. А., Саакян Г. С., Астрофизика 1, 7, 1965.
19. Амбарцумян В. А., Мирзоян Л. В., Саакян Г. С., Всехсвятский С. К., Казютинский В. В., Проблемы современной космогонии, «Наука», 1972.
20. Арутюнян Г. Г., Седракан Д. М., Уч. зап. Ереванск. гос. ун-та 3, 23, 1969.
21. Арутюнян Г. Г., Седракан Д. М., Астрофизика 7, 1971.
22. Бете Г., Моррисон Ф., Элементарная теория ядра, ИЛ, 1958.
23. Бисноватый-Коган Г. С., Астрон. ж. 43, 89, 1966.
24. Бисноватый-Коган Г. С., Каждан Я. М., Астрон. ж. 43, 761, 1966.
25. Вартанян Ю. Л., Саакян Г. С., Изв. АН Арм. ССР, 15, 83, 1962.

26. В ар т а н я н Ю. Л., Изв. АН Арм. ССР 16, 137, 1963.
27. В ар т а н я н Ю. Л., Астрофизика 1, 183, 1965.
28. В ар т а н я н Ю. Л., Астрофизика 2, 45, 1966.
29. В ар т а н я н Ю. Л., Астрофизика 3, 4, 1967.
30. В ар т а н я н Ю. Л., Астрофизика 4, 373, 1968.
31. В ар т а н я н Ю. Л., О в с е п я н А. В., Астрофизика 4, 643, 1968.
32. В ар т а н я н Ю. Л., Астрофизика 6, 167, 1970.
33. В ар т а н я н Ю. Л., О в с е п я н А. В., Астрофизика 6, 601, 1970.
34. В ар т а н я н Ю. Л., О в с е п я н А. В., Астрофизика 7, 107, 1971.
35. В ар т а н я н Ю. Л., Канд. дисс., Ереван, 1964.
36. Г и н з б у р г В. Л., К и р ж н и ц Д. А., ЖЭТФ 47, 2006, 1964.
- 36а. Г и н з б у р г В. Л., Ж е л е з н я к о в В. В., З а й ц е в В. В., УФН 98, 201, 1969.
37. Г у с е й н о в О. Х., Труды Шемахинск. обсерв. ШАО 7, 1966.
38. Г у с е й н о в О. Х., Канд. дисс., Баку, 1967.
39. Д ж е л е п о в Б. С., П е к е р Л. К., Схемы распада радиоактивных ядер, «Наука», 1966.
40. Д ж е л е п о в Б. С., П е к е р Л. К., С е р г е е в В. О., Схемы распада радиоактивных ядер, Изд-во АН СССР, 1963.
41. Д м и т р и е в Н. А., Х о л и н С. А., Вопросы космогонии 9, 1963.
42. Д ь я ч е н к о В. Ф., З е л ь д о в и ч Я. Б., И м ш е н н и к В. С., П а л е й ч и к В. В., Астрофизика 4, 159, 1968.
- 42а. Д о р о ш к е в и ч А. Г., З е л ь д о в и ч Я. Б., Н о в и к о в И. Д., ЖЭТФ 49, 170, 1965.
43. З е л ь д о в и ч Я. Б., ЖЭТФ 33, 991, 1957.
44. З е л ь д о в и ч Я. Б., ЖЭТФ 37, 569, 1959.
45. З е л ь д о в и ч Я. Б., ЖЭТФ 41, 1609, 1961.
46. З е л ь д о в и ч Я. Б., ЖЭТФ 42, 641, 1962.
47. З е л ь д о в и ч Я. Б., ЖЭТФ 42, 1667, 1962.
48. З е л ь д о в и ч Я. Б., ЖЭТФ 43, 1561, 1962.
49. З е л ь д о в и ч Я. Б., ЖЭТФ 43, 1982, 1962.
50. З е л ь д о в и ч Я. Б., Вопросы космогонии 9, 57, 1963.
51. З е л ь д о в и ч Я. Б., Н о в и к о в И. Д., УФН 84, 377, 1964.
52. З е л ь д о в и ч Я. Б., Н о в и к о в И. Д., УФН 86, 477, 1965.
53. З е л ь д о в и ч Я. Б., Н о в и к о в И. Д., Релятивистская астрофизика, «Наука», 1967.
54. З е л ь д о в и ч Я. Б., Г у с е й н о в О. Х., ДАН СССР 162, 791, 1965.
55. З е л ь д о в и ч Я. Б., Астрон. ж. 45, 913, 1968.
56. З е л ь д о в и ч Я. Б., Н о в и к о в И. Д., в сб. «Эйнштейновский сборник» 1, 1966.
57. З е л ь д о в и ч Я. Б., УФН 86, 303, 1965.
58. З е л ь д о в и ч Я. Б., Вопросы космогонии 9, 240, 1963.
59. З е л ь д о в и ч Я. Б., ДАН СССР 67, 155, 1964.
60. З е л ь д о в и ч Я. Б., Астрон. цирк. 250, 1963.
61. И в а н е н к о Д. Д., К у р д г е л а и д з е Д. Ф., Астрофизика 1, 479, 1965.
62. К а п л а н С. А., Уч. зап. ЛГУ, сер. физ-мат. 15, 109, 1949.
63. К а п л а н С. А., К л и м и ш и н И. А., Цирк. астрон. обсерв. ЛГУ № 27, 17, 1953.
64. К а п л а н С. А., Л у к а н о в Г. А., Астрон. ж. 42, 299, 1965.
65. К и р ж н и ц Д. А., ЖЭТФ 38, 503, 1960.

66. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Теория поля, «Наука», 1967.
67. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, «Наука», 1964.
68. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953.
69. Манджос А. В., Вестн. Киевск. ун-та 10, 104, 1968.
- 69a. Манджос А. В., Астрофизика 5, 645, 1969.
70. Мнацаканян М. А., ДАН Арм. ССР 49, 33, 1969.
- 70a. Мнацаканян М. А., Астрофизика 5, 645, 1969.
- 70b. Мнацаканян М. А., Канд. дисс., Ереванск. гос. ун-т, 1969.
71. Мнацаканян М. А., Авакян Р. М., Астрофизика 4, 646, 1968.
72. Мошковский С., Модели ядра; раздел в сб. «Строение атомного ядра», ИЛ, 1959.
73. Новиков И. Д., Озерной Л. М., ДАН СССР 150, 1019, 1963.
74. Новиков И. Д., Сообщ. ГАИШ 132, 1964.
75. Папоян В. В., ДАН Арм. ССР 47, 21, 1968.
76. Папоян В. В., Седракян Д. М., Чубарян Э. В., Астрофизика 3, 41, 1967.
77. Папоян В. В., Седракян Д. М., Чубарян Э. В., Сообщ. Бюраканск. обсерв. 39, 101, 1968.
78. Папоян В. В., Седракян Д. М., Чубарян Э. В., Сообщ. Бюраканск. обсерв. 40, 86, 1969.
79. Папоян В. В., Седракян Д. М., Чубарян Э. В., Астрофизика 5, 95, 1969.
80. Папоян В. В., Седракян Д. М., Чубарян Э. В., Сборник трудов 5-й Международной конференции по гравитации и теории относительности, Тбилиси, 1970.
81. Папоян В. В., Седракян Д. М., Чубарян Э. В., Астрофизика 5, 415, 1969.
82. Папоян В. В., Седракян Д. М., Чубарян Э. В., ДАН Арм. ССР 49, 237, 1969.
- 82a. Папоян В. В., Канд. дисс., Ереван, 1969.
- 82b. Петров А. З., Новые методы в общей теории относительности, «Наука», 1966.
83. Пинаева Г. В., Астрон. ж. 41, 25, 1964.
84. Подурец М. А., Астрон. ж. 41, 28, 1964.
85. Рылов Ю. Л., ЖЭТФ 40, 1755, 1961.
86. Саакян Г. С., ЖЭТФ 38, 843, 1960.
87. Саакян Г. С., ЖЭТФ 38, 1593, 1960.
88. Саакян Г. С., Изв. АН Арм. ССР 14, 117, 1961.
89. Саакян Г. С., Седракян Д. М., Изв. АН Арм. ССР 14, 109, 1961.
90. Саакян Г. С., Астрон. ж. 39, 1014, 1962.
91. Саакян Г. С., Изв. АН Арм. ССР (сер. физ.-матем. наук) 15, 123, 1962.
92. Саакян Г. С., Докт. дисс., ФИАН им. Лебедева, 1962.
93. Саакян Г. С., Астрон. ж. 40, 82, 1963.
94. Саакян Г. С., Астрон. ж. 41, 193, 1964.
95. Саакян Г. С., Вартанян Ю. Л., Nuovo Cim., Serie X, 30, 82, 1963.

96. Саакян Г. С., Вартанян Ю. Л., Сообщ. Бюраканск. обсерв. 33, 55, 1963.
97. Саакян Г. С., Вартанян Ю. Л., Nuovo Cim. 27, 1497, 1963.
98. Саакян Г. С., Вартанян Ю. Л., Астрон. ж. 41, 193, 1964.
99. Саакян Г. С., Вартанян Ю. Л., Чубарян Э. В., Проблемы гравитации, стр. 205, Тбилиси, 1965.
100. Саакян Г. С., Вартанян Ю. Л., Астрофизика 3, 503, 1957.
101. Саакян Г. С., Чубарян Э. В., Сообщ. Бюраканск. обсерв. 34, 99, 1963.
102. Саакян Г. С., Мнацаканян М. А., Астрофизика 3, 311, 1967.
103. Саакян Г. С., Мнацаканян М. А., Астрофизика 4, 181, 1968.
104. Саакян Г. С., Мнацаканян М. А., Сообщ. Бюраканск. обсерв. 40, 98, 1968.
105. Саакян Г. С., Мнацаканян М. А., Тезисы докладов Международной конференции по гравитации и теории относительности, стр. 196, Тбилиси, 1968.
106. Саакян Г. С., Мнацаканян М. А., Астрофизика 4, 567, 1968.
107. Саакян Г. С., Мнацаканян М. А., Астрофизика 5, 555, 1969.
108. Седракян Д. М., Чубарян Э. В., Астрофизика 4, 239, 1958.
109. Седракян Д. М., Чубарян Э. В., Астрофизика 4, 481, 1968.
110. Сеидов З. Ф., Астрофизика 3, 189, 1967.
111. Сеидов З. Ф., Сообщ. ШАО 3, 25, 1964.
112. Сеидов З. Ф., Изв. АН Азерб. ССР (сер. физ.-матем. и технич. наук) 5, 93, 1968.
113. Сеидов З. Ф., Сообщ. ШАО 5, 1965.
114. Сеидов З. Ф., Гусейнов О. Х., Сообщ. ШАО 2, 13, 1966.
115. Уиллер Дж. и др., Теория гравитации и гравитационный коллапс, «Мир», 1967.
116. Фаулер У. А., Хойл Ф., Нейтронные процессы и образование пар в массивных звездах и сверхновых, ИЛ, 1962.
117. Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, 1961.
118. Чандрасекар С., Введение в учение о строении звезд, ИЛ, 1950.
119. Чубарян Э. В., Изв. АН Арм. ССР 16, 95, 1963.
120. Чубарян Э. В., ДАН Арм. ССР 38, № 1, 17, 1964.
121. Чубарян Э. В., Канд. дисс., Ереван, 1964.
122. Шацман Э., Астрон. ж. 33, 800, 1956.
123. Шварцшильд М., Строение и эволюция звезд, ИЛ, 1962.
124. Albeda G. B. van, BAN 10, 161, 1946.
125. Albeda G. B. van, ApJ 105, 393, 1947.
126. Baade W., Zwicky F., Phys. Rev. 45, 138, 1934.
127. Baade W., Zwicky F., ApJ 88, 411, 1938.
128. Baade W., Zwicky F., Proc. Nat. Acad. Sci. 20, 259, 1934.
129. Baglin A., Compt. Rend. 260, 2424, 1965.
130. Baglin A., Compt. Rend. 258, 5801, 1964.
131. Baglin A., Ann. d' Aph. 29, 103, 1968.
132. Bahcall J. N., Wolf R. A., Phys. Rev. Lett. 14, 343, 1965.
- 132a. Bahcall J. N., Wolf R. A., Phys. Rev. 140B, 1452, 1965.

133. Barach Schmidt N., Barbaro-Galtieri A., Price L. R., Roos M., Rosenfeld A. H., Söding P., Wohl C. G., Particle Properties, August 1968, From Review of particle Properties, USRI-8030 Printed at L. R. L. Berkeley Available from LRL an CERN.
134. Bardeen J. M., Thorne K. S., Meltzer D. M., ApJ 145, 505, 1966.
135. Bethe H., Goldstone J., Proc. Roy. Soc. A238, 551, 1957.
136. Beandef G., Petrosian V., Salpeter E., ApJ 150, 979, 1967.
137. Brueckner K. A., Rev. Mod. Phys. 30, 561, 1958.
138. Brueckner K. A., Cammel I. I., Phys. Rev. 109, 1023, 1958.
139. Brueckner K. A., Cammell I. I., Kubis I. I., Phys. Rev. 118, 1095, 1960.
140. Brans C., Dicke R. H. Phys. Rev. 124, 925, 1960.
141. Brans C., Ph. D. thesis, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1961.
142. Brans C., Phys. Rev. 125, 388, 1962.
143. Brans C., Phys. Rev. 125, 2194, 1962.
144. Brill D. R., Cohen J., Phys. Rev. 143, 1011, 1966.
145. Burbidge G., ApJ 137, 995, 1963.
146. Cameron A. G. W., ApJ 130, 916, 1959.
147. Cameron A. G. W., ApJ 130, 884, 1959.
148. Cameron A. G. W., Mem. Soc. Roy. Sci. Liège (5) 3, 461, 1960.
149. Cameron A. G. W., Astron. J. 64, 325, 1959.
- 149a. Cameron A. G. W., Nature 205, 787, 1965.
- 149b. Cameron A. G. W., Nature, 206, 1342, 1965.
150. Carson T. R., Mayers D. F., Stibbs W. H., MNRAS 140, 483, 1968.
151. Cernuschi F., Phys. Rev. 56, 450, 1939.
152. Candrasekhar S., MNRAS, 95, 222, 1935.
153. Candrasekhar S., MNRAS 95, 207, 1935.
154. Candrasekhar S., ApJ 140, 417, 1964.
155. Candrasekhar S., MNRAS 93, 390, 1933.
156. Candrasekhar S., Lebovitz N. R., ApJ 136, 1082, 1962.
157. Candrasekhar S., Roberts P., ApJ 138, 809, 1963.
158. Candrasekhar S., Phys. Rev. Letts 12, 114, 437, 1964.
159. Candrasekhar S., Phys. Rev. Letts 14, 241, 1965.
160. Candrasekhar S., Tooper R., ApJ 139, 1396, 1964.
161. Chiu H. I., Ann. Phys. 26, 364, 1964.
162. Chiu H. I., ApJ 137, 343, 1963.
163. Chiu H. I., Ann. Phys. 15, 1, 1961.
164. Chiu H. I., Ann. Phys. 16, 321, 1961.
165. Chiu H. I., Salpeter E. E., Phys. Rev. Letts 12, 413, 1964.
- 165a. Cocke W. J., Disney M. J., Taylor D. J., Nature, 221, 525, 1969.
166. Critchfield C. L., ApJ 96, 1942.
167. Dehnen H., Z. Astrophys. 68, 190, 1968.
168. Dirac P. A. M., Nature 139, 323, 1937.
169. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc. (A) 165, 199, 1938.
170. Dirac P. A. M., Scientific America 1965.

171. Dicke R. H., Rev. Mod. Phys. 29, 355, 1957.
172. Dicke A. H., Rev. Mod. Phys. 29, 363, 1957.
173. Dicke R. H., J. Wash. Acad. Sci. 48, 213, 1958.
174. Dicke R. H., Science 129, 621, 1959.
175. Dicke R. H., Am. Scientist 47, 25, 1959.
176. Dicke R. H., Am. J. Phys. 28, 344, 1960.
177. Dicke R. H., Phys. Rev. 125, 2163, 1962.
178. Dicke R. H., Rev. Mod. Phys. 34, 110, 1962.
179. Dicke R. H., ApJ 152, 1, 1968.
- 179a. Drake F. D., Craft H. D., Jun., Nature 220, 231, 1968.
180. Eddington A. S., MNRAS 100, 582, 1940.
181. Euwema R. N., Phys. Rev. 133, B1046, 1964.
182. Fierz M., Helv. Phys. Acta 29, 128, 1956.
183. Finkelstein P., Phys. Rev. 110, 965, 1958.
184. Finzi A. F., Annals of Phys 26, 411, 1964.
- 184a. Finzi A. F., Phys. Rev. Letts 15, 599, 1965.
- 184b. Finzi A. F., MNRAS 127, 21, 1963.
- 184c. Finzi A. F., Chapter in «High — Energy Astrophysics», L. Grut-ton ed. (Academic Press, New York), in press.
185. Fowler W. A., Rev. Mod. Phys. 36, 545, 1964.
186. Fronsdal, Phys. Rev. 116, 778, 1959.
187. Gamow G., Teller E., Phys. Rev. 52, 929, 1937.
188. Gamow G., Schienberg M., Phys. Rev. 59, 539, 1941.
189. Gamow G., Atomic Nuclei and Nuclear transformations, Oxford 1936, second edition, p. 234.
- 189a. Ginzburg V. L., Zaitsev V. V., Nature 222, 230, 1969.
- 189b. Gold T., Nature 218, 731, 1968; 221, 25, 1969.
190. Gombas P. und Kisdi D. Z., Naturforschung 21, 2009, 1966.
191. Gomes L., Valecka J., Weiskopf V., Ann. Phys. 3, 241, 1958.
192. Hamada T., Salpeter E. E., ApJ 134, 683, 1961.
- 192a. Hausen C. J., Nature 211, 1069, 1966.
193. Hartle J. B., ApJ 150, 1005, 1967.
194. Hartle J. B., Thorne K. S., ApJ 153, 807, 1968.
195. Hartle J. B., Thorne K. S., Slowly Rotating Relativistic Stars III, preprint, 1968.
196. Hartle J. B., Sharp D. H., ApJ 147, 317, 1967.
197. Hayashi Ch., Cameron R. C., J. Phys. Soc. (Japan) 17, Suppl. A-III, 53, 1962.
198. Hayashi Ch., Cameron R. C., Astron. J. 67, 577A, 1962.
199. Heckmann O., Jordan P., Fricke W., Z. Astrophys. 28, 113, 1951.
200. Heckmann O., Naturwiss. 38, 1951.
201. Heckmann O., Z. Astrophys. 40, 278, 1956.
- 201a. Hewish A., Bell S. J., Pilkington D. H., Scott P. F., Collins R. A., Nature 217, 709, 1968.
202. Heckmann O., Schucking E., Handbuch der Physics, Band LIII, Astrophysik IV, Sternsysteme, 1959.
- 202a. Hoyle F., Narlikar J. V. and Wheeler J. A., Nature 203, 914, 1964.
203. Hoyle F., Fowler W. A., ApJ 132, 565, 1960.

204. Hoyle F., Fowler W. A., ApJ Suppl. **91**, 201, 1964.
205. Höhl H., Dehnen H., Z. Astrophys. **68**, 181, 1968.
206. Iton N., Preprint, Department of Physics, Kyoto University 1970.
207. James R. A., ApJ **140**, 552, 1964.
208. Johnson M. C., Observatory **64**, 74, 1938.
209. Jordan P., *Schwerkraft und Weltall*, Braunschweig, 1955.
210. Jordan P., Müller C.L., Z. Naturforsch. **2a**, 1, 1947.
211. Jordan P., AN **276**, 193, 1948.
212. Jordan P., Akad. Wiss., Lit. (Mainz), S. 319, 1950.
213. Jordan P., Rev. Mod. Phys. **34**, 596, 1962.
214. Jordan P., Naturwiss. **25**, 513, 1937.
215. Jordan P., Naturwiss. **26**, 417, 1938.
216. Jordan P., Z. Phys. **132**, 655, 1952.
217. Jordan P., Z. Phys. **133**, 558, 1952.
218. Jordan P., Z. Phys. **157**, 112, 1959.
219. Jordan P., Z. Phys. **201**, 394, 1967.
220. Jordan P., Z. Astrophys. **68**, 201, 1968.
221. Kerr R. P., Phys. Rev. Letts **11**, 273, 1963.
222. Kothari D. S., Proc. Roy. Soc. London (A) **162**, 521, 1937.
223. Kuchowicz B., Rep. of Inst. Nucl. Research, Warsaw No, 384/VII, 11, 1963.
224. Kuchowicz B., Bull. Acad. Poland Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys. (Poland) **11**, 317, 1963.
225. Kuchowicz B., Post. Astron. **11**, 203, 1963.
226. Kuchowicz B., Nuclear Astrophysics Bibliographical Survey, Parts I, II, III. Nuclear Energy Information Center, Warsaw, 1965.
- 226a. Kuchowicz B., Nature **225**, 440, 1970.
- 226b. Kuchowicz B., Acta Phys. Polonica **36**, 1105, 1969.
- 226c. Kuchowicz B., Fortschritte der Phys. **17**, 517, 1969.
- 226d. Kuchowicz B., Phys. Letts **30B**, 79, 1969.
227. Landau L., Phys. Z., USSR **1**, 285, 1932.
228. Landau L., Nature **141**, 333, 1938.
229. Lebovitz N. R., Ann. Rev. of Astr. and Aph. **5**, 1967.
230. Levinger J. N., Simmons L. M., Phys. Rev. **124**, 916, 1961.
- 230a. Lindquist R. W., Ann. Phys. **37**, 487, 1966.
231. Liebes S. Jr., Phys. Rev. **133**, B835, 1964.
232. Ludwig G., Arch. D. Math. **1**, 2, 1948.
233. Ludwig G., Müller C.L., Ann. Phys. **2**, 76, 1948.
234. Ludwig G., Z. Naturforsch. **2a**, 482, 1947.
235. Ludwig G., Z. Phys. **124**, 450, 1948, **125**, 545, 1949.
236. Ludwig G., Fortschritte der projektiven Relativitäts theorie, Braunschweig, 1951.
- 236a. Markov M. A., Phys. Letts **10**, 122, 1964.
237. Marshak R. E., ApJ **92**, 321, 1940.
- 237a. Meltzer D. W. and Thorne K. S., ApJ **145**, 514, 1966.
238. Misner G. W., Zapolsky H. S., Phys. Rev. Letts **12**, 635, 1964.
239. Morton D. C., Nature **201**, 1308, 1964.
240. Nakagawa K., Ohmura T., Takebe H., Obi S., Progr. Theoret. Phys. **16**, 389, 1956.

- 240a. O'Mengain E. P., Porter N. A., White J., Fegan D. J., Jennings D. M., Lawless B. G., *Nature* **219**, 1348, 1968.
241. Oppenheimer J. R., Serber R., *Phys. Rev.* **54**, 540, 1938.
242. Oppenheimer J. R., Snyder H., *Phys. Rev.* **56**, 455, 1939.
243. Oppenheimer J. R., Volkoff G. H., *Phys. Rev.* **55**, 374, 1939.
244. Pacini F., *Nuovo Cimento* **37**, 767.
245. Pacini F., *Nature* **209**, 389.
246. Papapetrou A., *Proc. Roy. Irish. Acad.* **52**, 11, 1948.
247. Reeves H., Salpeter E. E., *Phys. Rev.* **116**, 1505, 1959.
248. Roeder R. C., *Canad. J. Phys.* **44**, No. 8, 1966.
249. Rosenfeld A. H., Bazbaro Galtieri A., Podolsky W. J., Price L. R., Söding P., Wohl Ch. G., Roos M., Wollis W. J., *Rev. Mod. Phys.* **39**, 1, 1967.
250. Sahakian G. S., Vartanian Ju. L., *Nuovo Cimento* **109**, 1023, 1958.
251. Salmona A., *Phys. Rev.* **154**, 1218, 1967.
252. Salmona A., *Phys. Rev.* **160**, 1008, 1967.
253. Salpeter E. E., *ApJ* **134**, 669, 1961.
254. Salpeter E. E., «Proc. of Symposium on Low En Nucl. Physics», Bombay, 1961, pp. 1—18.
255. Salpeter E. E., *ApJ* **134**, 669, 1961.
256. Salpeter E. E., *Ann. Phys.* **11**, 393, 1960.
257. Sampson D. H., *ApJ* **129**, 734, 1959.
258. Schatzmann E., *White Dwarfs*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958.
259. Schatzmann E., «Stars and Stellar Systems», vol. VIII, Univ. Chicago, 1965, pp. 327—365.
260. Serber R., *Rev. Mod. Phys.* **36**, 649, 1964.
261. Schüking E., *Z. Phys.* **148**, 72, 1957.
- 261a. Schutz F., IR, Preprint, California Inst. Technology, Pasadena, California.
262. Tolman R. C., *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford, 1934.
263. Thorne Kip S., *ApJ* **152**, L71, 1968.
264. Thorne Kip S., *Phys. Rev. Letts* **21**, 320, 1968 (gravitational radiation damping).
265. Thorne Kip S. and Ipser J. R., *White-dwarf and neutron star interpretation of pulsating radio sources*, preprint, 1968.
266. Thorne K. S., Meltzer D., *ApJ* **145**, 514, 1966.
267. Thorne K. S., *Relativistic stellar structure and Dynamics*, preprint, 1967.
268. Thorne K. S., *Science* **150**, 1671, 1965.
269. Thorne K. S., *The rotation and pulsation of general relativistic stellar models*, preprint, 1967.
- 269a. Tsuruta S., *Nature* **207**, 364, 1965.
270. Tsuruta S., Cameron A. G. W., *Canad. J. Phys.* **44**, 1863, 1966.
- 270a. Tsuruta S., Wright J. P. and Cameron A. G. W., *Nature* **206**, 1137, 1965.
271. Tsuruta S., Cameron A. G. W., *Canad. J. Phys.* **43**, 2056, 1965; **44**, 1895, 1966.

- 272. Volkoff G. M., Phys. Rev. **55**, 421, 1939.
- 273. Volkoff G. M., Phys. Rev. **55**, 413, 1939.
- 274. Weiskopf V., Nucl. Phys. **3**, 423, 1957.
- 275. Wheeler J. A., «The superdense star and the critical nucleon number», in «Gravitation and Relativity», New York, 1964, pp. 195—299.
- 275a. Wheeler J. A., article in «Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics», vol. 4, L. Goldberg, ed. (Annual Reviews, Inc., Palo Alto, California).
- 276. Wildhack W. A., Phys. Rev. **57**, 81, 1940.
- 277. Wolf R. A., Preprint, november, 1964, Pasadena California (Cal. Inst. Tech.).
- 277a. Zee A. and Wheeler J. A., 1966, paper in preparation.
- 278. Zwicky F., ApJ **88**, 522, 1938.
- 279. Zwicky F., Phys. Rev. **55**, 726, 1939.
- 280. Zwicky F., pp. 243—251 of Max-Planck Festschrift, 1958.
- 281. Pulsating Stars 1, a Nature reprint (1968) with introduction by F. G. Smith and A. Hewish; Pulsating Stars 2, a Nature reprint (1969) with an introduction by T. Gold.
- 282. Terzian J., a lecture preprint, 1970.

Гурген Сербович Саакян

**Равновесные конфигурации
вырожденных газовых масс**

М., 1972 г., 344 стр. с илл.

Редактор *Г. С. Куликов*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод*

Корректоры *З. В. Автонева, И. Б. Мамулова*

Сдано в набор 14/I 1972 г. Подписано к печати 4/VIII. 1972 г.

Бумага $84 \times 108^{1/32}$. Физ. печ. л. 10,75.

Условн. печ. л. 18,06. Уч.-изд. л. 18,52.

Тираж 1550 экз. Т-03350. Цена книги 2 р. 09 к.
Заказ № 23.

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы.

117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

г. Новосибирск, 4-я тип. изд-ва «Наука».