ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ВЫЧИСЛЕНІЕ

СОЛНЕЧНЫХЪ ЗАТМѢНІЙ

И

ПОДОВНЫХЪ ЯВЛЕНІЙ ПО СПОСОБУ ГАУССА.

А. САВИЧА.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Императорской Академіи Наукъ.
(Вас. Остр., 9 л., № 12.)
1875.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ВЫЧИСЛЕНІЕ

СОЛНЕЧНЫХЪ ЗАТМѢНІЙ

и

ПОДОБНЫХЪ ЯВЛЕНІЙ ПО СПОСОБУ ГАУССА.

А. САВИЧА.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Императорской Академіи Наукъ.
(Вас. Остр., 9 л., № 12.)
1875.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.
С.-Петербургъ, Декабрь 1875 года.

Непремѣнный Секретарь Академикъ *К. Веселовскій*.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНОЕ ВЫЧИСЛЕНІЕ СОЛНЕЧНЫХЪ ЗАТМѢНІЙ И ПОДОБНЫХЪ ЯВЛЕНІЙ ПО СПОСОБУ ГАУССА.

А. САВИЧА.

Читано въ засѣданіи Физ.-Мат. Отд. 9 сентября 1875 г.

Давно уже астрономы занимались вычисленіемъ затмѣній; прежніе геометрическіе способы упоминаются въ Астрономіяхъ Лаланда, Деламбра, и въ сочиненіи Галлашки: Elementa eclipsium; auct. Hallaschka, 1816. Наилучше они изложены г-мъ Woodhouse, въ прибавленіи къ Naut. Alm. на 1836 годъ. Лагранжъ далъ изящный аналитическій способъ рѣшать относящіяся сюда задачи (Berl. Astr. Jahrb. für 1782; Connaissance des temps pour l'an 1817). Еще болѣе подробная аналитическая теорія затмѣній принадлежитъ Бесселю (Astr. Untersuchungen, von F. Bessel, 2te B.) Столь же удовлетворительна теорія затмѣній другаго знаменитаго нѣмецкаго астронома г-на Ганзена (Theorie der Sonnefinsternisse und verwandten Erscheinungen); эта теорія очень удобна для точныхъ вычисленій, и нынѣ ею пользуются въ Германіи; на русскомъ языкѣ она напечатана въ Сфер. Астрономіи г-на профессора Хандрикова, Кіевъ, 1875. При составленіи Nautical Almanac руководствуются формулами г-на Woodhouse.

Бессель и Ганзенъ строго рѣшаютъ всѣ вопросы, касающіеся затмѣній; но часто достаточны бываютъ приблизитель-

ные выводы, которые легко получаются по способу, упоминаемому въ разсужденіи д-ра Урсина: *De eclipsi solari die 7 Sept. 1820 apparitura, secundum methodum geometriae analyticae tractata, D-ri Ursini; Hafniae, 1820.* По словамъ автора пріемы вычисленія были ему сообщены Гауссомъ; весьма жаль, что великій геометръ не издалъ самъ своихъ соображеній, которыя доставили бы отчетливость всему ходу вычисленій. Въ сущности способъ представляетъ тоже, что прежній геометрическій способъ проэкцій, но ведетъ къ болѣе простымъ вычисленіямъ; онъ помѣщенъ съ нѣкоторыми измѣненіями въ нѣмецкомъ изданіи нашей Практической Астрономіи, гдѣ находятся прибавленія, сдѣланныя г-мъ Гетце (Goetze). Объ этомъ способѣ упоминается въ прекрасномъ сочиненіи г-на профессора Ковальскаго о затмѣніяхъ.

Мы еще пользовались запиской Тюбинскаго профессора, г-на д-ра Цеха: *Astr. Untersuchungen ueber die wichtigeren Finsternisse, welche von den Schrifstellern des classischen Alterthums erwähnt werden. Preisschrift von Professor Dr. J. Zech. Leipzig, 1853.* Въ этой замѣчательной запискѣ исправлены погрѣшности, встрѣчаемыя въ прежнихъ изложеніяхъ способа и вполнѣ удовлетворительно вычислены старинныя солнечныя затмѣнія. Она увѣнчана преміею ученаго общества князя Яблоновскаго въ Лейпцигѣ.

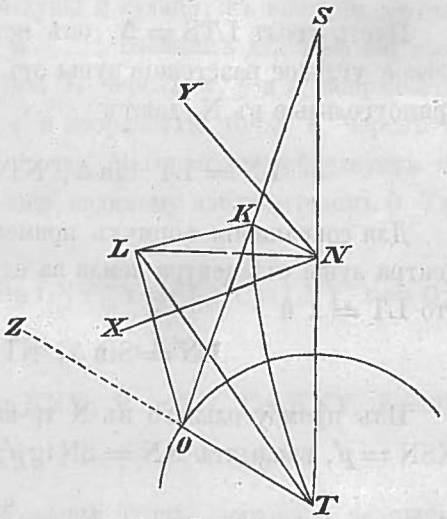
Сперва мы разсмотримъ средства вычислять затмѣніе солнца для даннаго на землѣ мѣста и опредѣлять границы тѣхъ странъ, съ которыхъ видно затмѣніе; потомъ покажемъ между какими кривыми линіями на земной поверхности заключаются мѣста, съ которыхъ усматриваются отдѣльныя фазы затмѣнія, т. е. болѣе или менѣе значительныя части диска солнца, закрытыя луною.

Общія основанія способа.

Разныя обстоятельства солнечнаго затмѣнія зависятъ отъ положеній, которыя луна и солнце занимаютъ въ разное время

относительно центра земли и наблюдателя на земной поверхности. Поэтому надобно сперва объяснить удобнѣйшій способъ выражать мѣста свѣтилъ при вычисленіи затмѣній.

Пусть изображаетъ T (фиг. 1) центръ земли, S центръ солнца, L центръ луны въ нѣкоторое время близкое къ соединенію луны и солнца по долготѣ или по прямому восхожденію; O мѣсто наблюдателя на земной поверхности. Для нашей цѣли выгодно относить положенія свѣтилъ къ плоскости, которая проходитъ черезъ L и перпендикулярна къ прямой ST; эту плоскость мы будемъ называть *плоскостію проэкцій*.



Фиг. 1.

Положимъ, что плоскость проэкцій пересѣкаетъ прямую TS въ точкѣ N, а прямую OS въ точкѣ K; точка N означаетъ истинное или геоцентрическое мѣсто солнца, а точка K видимое наблюдателемъ мѣсто солнца на плоскости проэкцій; обѣ линіи LN и KN перпендикулярны къ прямой TS. На продолженіи земнаго радіуса OT находится геоцентрическій зенитъ Z наблюдателя O; уголъ ZOS есть видимое, а ZTS истинное геоцентрическое разстояніе солнца отъ геоцентрическаго зенита Z; пусть уголъ $ZTS = \zeta'$ и уголъ $OST = p'$; тогда p' есть такъ называемый параллаксъ высоты солнца. Точно также уголъ ZOL есть видимое, а уголъ $ZTL = \zeta$ истинное разстояніе луны отъ геоцентрическаго зенита, уголъ $OLT = p$ есть параллаксъ высоты луны. Если означимъ черезъ π и π' экваторіяльные горизонтальные параллаксы луны и солнца, а черезъ ρ отношеніе земнаго радіуса OT къ радіусу земнаго эква-

тора, то $\rho\pi$ и $\rho\pi'$ суть мѣстные горизонтальные параллаксы луны и солнца:

$$\rho \,.\, \mathrm{Sin}\,\pi = \frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{LT}},\ \rho\,\mathrm{Sin}\,\pi' = \frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{ST}},\ \text{т. е. } ST : LT = \mathrm{Sin}\,\pi : \mathrm{Sin}\,\pi';\ldots\ldots (1)$$

$$\mathrm{tg}\,p = \frac{\rho\,\mathrm{Sin}\,\pi\,.\,\mathrm{Sin}\,\zeta}{1-\rho\,\mathrm{Sin}\,\pi\,.\,\mathrm{Cos}\,\zeta},\ \mathrm{tg}\,p' = \frac{\rho\,\mathrm{Sin}\,\pi'\,\mathrm{Sin}\,\zeta'}{1-\rho\,\mathrm{Sin}\,\pi'\,\mathrm{Cos}\,\zeta'}\ldots\ldots (2)$$

Пусть уголъ $\mathrm{LTS} = \Delta$, онъ есть истинное или геоцентрическое угловое разстояніе луны отъ солнца; тр-ки LTN и SKN, прямоугольные въ N, даютъ

$$\mathrm{LN} = \mathrm{LT}\,.\,\mathrm{Sin}\,\Delta,\ \ \mathrm{NT} = \mathrm{LT}\,.\,\mathrm{Cos}\,\Delta.$$

Для сокращенія формулъ примемъ линейное разстояніе LT центра луны отъ центра земли за единицу линейныхъ мѣръ, такъ что $\mathrm{LT} = 1$ и

$$\mathrm{LN} = \mathrm{Sin}\,\Delta,\ \ \mathrm{NT} = \mathrm{Cos}\,\Delta.$$

Изъ прямоугольнаго въ N тр-ка SKN, въ которомъ уголъ $\mathrm{KSN} = p'$, выходитъ $\mathrm{KN} = \mathrm{SN}\,\mathrm{tg}\,p'$;

$$\mathrm{SN} = \mathrm{ST} - \mathrm{NT} = \frac{\mathrm{Sin}\,\pi}{\mathrm{Sin}\,\pi'} - \mathrm{Cos}\,\Delta,$$

$$\mathrm{KN} = \frac{(\mathrm{Sin}\,\pi - \mathrm{Sin}\,\pi'.\,\mathrm{Cos}\,\Delta)}{\mathrm{Sin}\,\pi'} \cdot \frac{\rho\,\mathrm{Sin}\,\pi'.\,\mathrm{Sin}\,\zeta'}{1-\rho\,\mathrm{Sin}\,\pi'\,\mathrm{Cos}\,\zeta'}.$$

Положивъ

$$\Pi = \frac{\mathrm{Sin}\,\pi - \mathrm{Sin}\,\pi'\,.\,\mathrm{Cos}\,\Delta}{1-\rho\,\mathrm{Sin}\,\pi'\,.\,\mathrm{Cos}\,\zeta'}\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

будетъ

$$\mathrm{KN} = \rho\,.\,\Pi\,.\,\mathrm{Sin}\,\zeta'\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Мѣста свѣтилъ опредѣляются весьма просто въ отношеніи къ тремъ взаимно перпендикулярнымъ осямъ координатъ NS, NY и NX (фиг. 1), имѣющихъ начало въ точкѣ N. Пусть положительная сторона оси $z^{\text{въ}}$ идетъ по линіи NS отъ N къ S, а оси $y^{\text{въ}}$ и $x^{\text{въ}}$ лежатъ въ плоскости проэкцій; положительную сторону ординатъ $y^{\text{въ}}$ мы возьмемъ въ пересѣченіи плоскости проэкцій KNL кругомъ склоненія солнца, или плоскостію, которая идетъ

чрезъ линію SNT и сѣверный полюсъ міра, къ сѣверу отъ прямой SNT. Ось ординатъ x въ перпендикулярна къ кругу склоненія солнца и параллельна экватору; положительная ея сторона пусть направляется къ прямому восхожденію, которое на 90° болѣе прямаго восхожденія солнца.

Назовемъ черезъ τ истинное время подъ меридіаномъ таблицъ, близкое къ соединенію луны и солнца; къ времени τ относятся величины π, π', ζ, ζ', Δ. . . .; означимъ для того же времени координаты центра луны L черезъ x, y и z, координаты центра солнца черезъ x', y', z' и координаты точки K черезъ $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$, гдѣ K (фиг. 1) есть точка, которая соотвѣтствуетъ на плоскости проэкцій мѣсту солнца, видимому наблюдателемъ O. Такимъ образомъ

$$x = \mathrm{LN} \,.\, \mathrm{Cos\,LNX} = \mathrm{LN\,Sin\,LNY};\ \mathrm{Y} = \mathrm{LN\,Cos\,LNY},\ z = 0;$$

$$x' = 0,\ y' = 0,\ z' = \mathrm{SN};$$

$$\bar{\mathrm{x}} = \mathrm{KN} \,.\, \mathrm{Cos\,KNX} = \mathrm{KN\,Sin\,KNY};\ \bar{\mathrm{y}} = \mathrm{KN} \,.\, \mathrm{Cos\,KNY},\ \bar{\mathrm{z}} = 0,$$

или $\quad \bar{\mathrm{x}} = \rho \,.\, \Pi\, \mathrm{Sin}\,\zeta'\, \mathrm{Sin\,KNY};\ \bar{\mathrm{y}} = \rho\, \mathrm{Sin}\,\zeta'\, \mathrm{Cos\,KNY}$ . . . .

Вообразимъ на небесной сферѣ тр-къ, котораго вершины суть: P сѣверный полюсъ міра, l геоцентрическое мѣсто центра луны, s геоцентрическое мѣсто центра солнца, и назовемъ черезъ α и δ истинныя прямое восхожденіе и склоненіе луны, черезъ α' и δ' истинныя прямое восхожденіе и склоненіе солнца, а черезъ S уголъ Psl. Стороны этого тр-ка суть: P$ls = 90° - \delta$, P$s = 90° - \delta'$; $ls = \Delta$; углы: lP$s = \alpha - \alpha'$, Psl = S; уголъ Psl содержится между кругомъ склоненія солнца и дугою $ls = \Delta$; онъ выражаетъ тоже, что уголъ LNY въ фиг. 1, гдѣ прямая NY лежитъ въ кругѣ склоненія солнца, а прямая LN въ плоскости угла LTN равнаго Δ и обѣ перпендикулярны къ NS, такъ что уголъ LNY измѣряетъ уголъ между плоскостію круга склоненія солнца и плоскостію LTN или LTS. Изъ рѣшенія тр-ка Psl слѣдуютъ уравненія, въ которыхъ вмѣсто LN подставлена его величина:

$$x = \operatorname{Sin}\Delta \,.\, \operatorname{Sin} S = \operatorname{Cos}\delta \,.\, \operatorname{Sin}(\alpha - \alpha') \ldots\ldots\ldots \text{(x)}$$

$$y = \operatorname{Sin}\Delta \,.\, \operatorname{Cos} S = \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos}\delta' - \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Sin}\delta' . \operatorname{Cos}(\alpha - \alpha'),$$

$$\operatorname{Cos}\Delta = \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Sin}\delta' + \operatorname{Cos}\delta \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos}(\alpha - \alpha').$$

Во время затмѣній δ' близко къ δ; $\alpha - \alpha'$ рѣдко превышаетъ $1^\circ 30'$; $\operatorname{Cos}(\alpha - \alpha') = 1 - 2\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')$; по малости $\alpha - \alpha'$ можно вмѣсто $2\operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}(\alpha - \alpha')$ приближенно взять $\frac{1}{2}\operatorname{Sin}^2(\alpha - \alpha')$ и потому

$$y = \operatorname{Sin}(\delta - \delta') + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{Sin}\delta'}{\operatorname{Cos}\delta} . x^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(y)}$$

Для выраженія координатъ $\bar{x}$ и $\bar{y}$ составимъ на небесной сферѣ тр-къ между сѣвернымъ полюсомъ міра P, геоцентрическимъ зенитомъ Z и геоцентрическимъ мѣстомъ солнца s; стороны тр-ка суть: $ZP = 90^\circ - \varphi'$, гдѣ φ' есть геоцентрическая широта мѣста наблюдателя, $Zs = \zeta'$ есть истинное разстояніе солнца отъ геоцентрическаго зенита; $Ps = 90^\circ - \delta'$; $ZPs = t$ есть истинный часовой уголъ солнца, а уголъ ZsP, который назовемъ черезъ v, есть такъ называемый параллактическій уголъ солнца, который равенъ углу KNY (фиг. 1), потому что уголъ ZsP, равно какъ и уголъ KNY, измѣряетъ наклонность круга склоненія солнца къ плоскости ZTS (или къ кругу высоты солнца). Рѣшая тр-къ ZPs опредѣлимъ ζ' и v по даннымъ φ', δ' и t, а именно

$$\operatorname{Sin}\zeta' \operatorname{Sin} v = \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin} t',$$

$$\operatorname{Sin}\zeta' \operatorname{Cos} v = \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Sin}\varphi' - \operatorname{Sin}\delta' \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Cos} t,$$

$$\operatorname{Cos}\zeta' = \operatorname{Sin}\delta' \operatorname{Sin}\varphi' + \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Cos} t.$$

Такъ какъ (фиг. 1) уголъ $KNY = v$, то

$$\bar{x} = \rho\Pi \operatorname{Sin}\zeta' \operatorname{Sin} v, \quad \bar{y} = \rho\Pi \operatorname{Sin}\zeta' \operatorname{Cos} v, \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(z)}$$

Близь соединенія луны и солнца, Δ рѣдко бываетъ болѣе $1^\circ 30'$, π' менѣе $9''$ и $\operatorname{Sin}\pi' - \operatorname{Sin}\pi' . \operatorname{Cos}\Delta$ не болѣе $0''{,}003 \operatorname{Sin} 1''$; а $\pi . \rho \operatorname{Sin}\pi' \operatorname{Cos}\zeta'$ менѣе $0''{,}1$ поэтому вмѣсто точной величины $\rho\Pi$ можно взять $\rho(\operatorname{Sin}\pi - \operatorname{Sin}\pi')$.

Для приблизительныхъ выводовъ достаточны логариѳмы съ 5-ю десятичными знаками, тогда въ секундахъ:

$$x = (\alpha - \alpha') \operatorname{Cos} \delta \sqrt[3]{\operatorname{Cos}(\alpha - \alpha')}$$

$$y = (\delta - \delta') \sqrt[3]{\operatorname{Cos}(\delta - \delta')} + \tfrac{1}{2} \operatorname{Sin} 1'' \frac{\operatorname{Sin} \delta'}{\operatorname{Cos} \delta} x^2;$$

$$\bar{x} = \rho(\pi - \pi') \sqrt[3]{\operatorname{Cos}(\pi - \pi')} \,.\, \operatorname{Sin} \zeta' \operatorname{Sin} v;$$

$$\bar{y} = \rho(\pi - \pi') \sqrt[3]{\operatorname{Cos}(\pi - \pi')} \,.\, \operatorname{Sin} \zeta' . \operatorname{Cos} v.$$

Если φ есть географическая широта мѣста наблюденій, то

$$\varphi' = \varphi - 701'',5 \operatorname{Sin} 2\varphi; \ \operatorname{Log} \rho = 9{,}99926 - 10 + 0{,}000738 \operatorname{Cos}.2\varphi.$$

здѣсь принято сжатіе земли $\frac{1}{294{,}5}$.

Фазы затмѣнія въ каждомъ данномъ на землѣ мѣстѣ опредѣляются видимыми угловыми разстояніями луны отъ солнца. Истинное или геоцентрическое разстояніе есть уголъ $LTS = \Delta$, разстояніе видимое наблюдателемъ O есть уголъ $LOS = LOK = \Delta'$ (фиг. 1); пусть уголъ $LTK = \Delta''$, это есть уголъ, подъ которымъ съ центра земли усматривается прямая LK, между центромъ луны L и точкою K, гдѣ K выражаетъ видимое мѣсто солнца на плоскости ироэкцій. Чтобы найти отношенія между Δ', Δ'' и Δ, назовемъ черезъ D длину линіи KL, а чрезъ σ уголъ между прямою KL отъ K къ L и направленіемъ положительной стороны оси $y^{\text{въ}}$ или прямою линіею, проведенною черезъ K параллельно этой сторонѣ оси $y^{\text{въ}}$; $D \operatorname{Sin} \sigma$ и $D \operatorname{Cos} \sigma$ суть проложенія линіи KL на ось $x^{\text{въ}}$ и ось $y^{\text{въ}}$; т. е.

$$D \operatorname{Sin} \sigma = x - \bar{x}, \ D \operatorname{Cos} \sigma = y - \bar{y};$$

изъ тр-ка KOL слѣдуетъ

$$D = KL = \frac{LO \,.\, \operatorname{Sin} LOK}{\operatorname{Sin} LKO} = \frac{LO \,.\, \operatorname{Sin} \Delta'}{\operatorname{Sin} LKO}.$$

Прямая линія, проведенная черезъ K (фиг. 1) параллельно линіи TNS, будетъ, также какъ и TNS, перпендикулярна къ линіи KL; но прямая OKS наклонена къ прямой TNS на уголъ OST равный p' или параллаксу высоты солнца, который всегда менѣе 9″; поэтому уголъ LKO различается только на нѣсколько секундъ отъ 90° и можно принять Sin LKO = 1 *); такимъ образомъ

$$D = LO \,.\, \mathrm{Sin}\,\Delta'.$$

Въ тр-кѣ LOT (фит. 1) сторона LT=1, уголъ OTL=ZTL=ζ; уголъ OLT = p = параллаксу высоты луны; радіусъ земли OT = $\rho\,\mathrm{Sin}\,\pi$; но LT равняется суммѣ проэкцій линій OT и OL на линію LT, посему

$$1 = LT = OT \,.\, \mathrm{Cos}\,\zeta + LO \,.\, \mathrm{Cos}\,p;$$

$$LO = \frac{1 - \rho\,\mathrm{Sin}\,\pi \,.\, \mathrm{Cos}\,\zeta}{\mathrm{Cos}\,p},$$

$$\mathrm{Sin}\,\Delta' = \frac{D \,.\, \mathrm{Cos}\,p}{1 - \rho\,\mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,\zeta}.$$

Уголъ LTK = Δ'' (фиг. 1) вычисляется изъ тр-ка LTK, въ которомъ сторона LT = 1 и уголъ LKT различается отъ 90° менѣе чѣмъ на $p - p'$ или менѣе чѣмъ на 1° **), такъ что Cos p и Sin LKT очень близки къ единицѣ и безъ большой ошибки можно принять $\frac{\mathrm{Sin}\,LTK}{\mathrm{Cos}\,p}$ равнымъ единицѣ. Но

$$\mathrm{Sin}\,\Delta'' = \frac{LK}{LT}\,\mathrm{Sin}\,LTK = D\,\mathrm{Sin}\,LTK =$$

$$= \mathrm{Sin}\,\Delta' \frac{(1 - \rho\,\mathrm{Sin}\,\pi\,\mathrm{Cos}\,\zeta)}{\mathrm{Cos}\,p}\,\mathrm{Sin}\,LTK,$$

---

*) Помощію сферической тригонометріи легко вывести, что уголъ LKO точно выводится изъ уравненія: Cos LKO = Sin p'. Cos $(\sigma - v)$.

**) $$\mathrm{Cos}\,LKT = \frac{(x-\bar{x})}{KL} \cdot \frac{\bar{x}}{KT} + \frac{(y-\bar{y})}{KL} \cdot \frac{\bar{y}}{KT} =$$

$$= \frac{D\,\mathrm{Sin}\,\sigma}{D} \cdot \frac{\Pi\rho\,\mathrm{Sin}\,\zeta'\,\mathrm{Sin}\,v}{\mathrm{Cos}\,\Delta\,\mathrm{Sec}\,\theta} + \frac{D\,\mathrm{Cos}\,\sigma \,.\, \Pi\rho\,\mathrm{Sin}\,\zeta'\,\mathrm{Cos}\,v}{D\,\mathrm{Cos}\,\Delta\,\mathrm{Sec}\,\theta} =$$

$$= \frac{\Pi\rho\,\mathrm{Sin}\,\zeta'\,\mathrm{Cos}\,(\sigma - v)}{\mathrm{Cos}\,\Delta\,\mathrm{Sec}\,\theta}, \text{ гдѣ } \mathrm{tg}\,\theta = \frac{\Pi\rho\,\mathrm{Sin}\,\zeta'}{\mathrm{Cos}\,\Delta}.$$

во время затмѣній углы Δ' и Δ'' всегда малы и близки къ равенству; при нашей степени приближенія полагая $\frac{\operatorname{Sin} LTK}{\operatorname{Cos} p} = 1$ и выражая Δ'' и Δ' въ секундахъ, выйдетъ

$$\Delta'' = \Delta'(1 - \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \zeta);$$

т. е. Δ'' менѣе чѣмъ Δ' въ такомъ почти содержаніи, въ какомъ истинный угловой радіусъ луны менѣе видимаго радіуса. Въ самомъ дѣлѣ назвавъ черезъ r и r' истинные, а черезъ u и u' видымые радіусы дисковъ луны и солнца, получимъ (фиг. 1):

$$\frac{\operatorname{Sin} u}{\operatorname{Sin} r} = \frac{LT}{LO} = \frac{\operatorname{Sin}(\zeta + p)}{\operatorname{Cos} \zeta} = \operatorname{Cos} p + \frac{\operatorname{Cos} p . \operatorname{tg} p \operatorname{Cos} \zeta}{\operatorname{Sin} \zeta} =$$

$$= \operatorname{Cos} p \left(1 + \frac{\rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \zeta}{1 - \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \zeta}\right).$$

По малости u и u', выходитъ приближенно въ секундахъ

$$u = r . \frac{\operatorname{Cos} p'}{1 - \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \zeta};$$

точно также

$$u' = r' . \frac{\operatorname{Cos} p'}{1 - \rho \operatorname{Sin} \pi' \operatorname{Cos} \zeta'};$$

разность $u - r'$ менѣе $0''{,}04$ и ее пренебрегаютъ. Во время затмѣнія солнца луною ζ мало различается отъ ζ'; p большею частію бываетъ менѣе одного градуса и допуская $\operatorname{Cos} p = 1$, сдѣлаемъ въ вычисленіи τ ошибку не болѣе $0''{,}15$. Поэтому можно принять во время затмѣній

$$u = \frac{r}{1 - \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \zeta'}, \quad \Delta'' = \Delta'(1 - \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \zeta'); \quad u' = r'.$$

Въ началѣ и концѣ частнаго затмѣнія, для внѣшнихъ прикосновеній краевъ луны и солнца:

$$\Delta' = u + u', \quad \Delta'' = (u + u')(1 - \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \zeta') = r + r'(1 - \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \zeta').$$

Для внутреннихъ прикосновеній луны и солнца

1) въ началѣ и концѣ полнаго затмѣнія:

$$\Delta' = u - u'; \quad \Delta'' = r - r'(1 - \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \zeta')$$

2) въ началѣ и концѣ кольцеобразнаго затмѣнія:

$$\Delta' = u' - u,\ \Delta'' = r'(1 - \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \zeta') - r.$$

И такъ въ выраженіи Δ'' входитъ истинный радіусъ луны, радіусъ же солнца уменьшается почти на столько, на сколько видимый радіусъ диска луны болѣе истиннаго радіуса луны.

Пусть ε означаетъ часть діаметра диска солнца закрытую луною; въ секундахъ $\varepsilon = u' + u - \Delta'$. Эту часть обыкновенно выражаютъ числомъ двѣнадцатыхъ долей діаметра солнца и эти доли называютъ дюймами; шестыя доли радіуса суть такіе же дюймы. Въ дюймахъ $\varepsilon = \frac{6(u' + u - \Delta')}{u'}$; пусть $\frac{\Delta' - r'}{r'} = \mu$, тогда $\varepsilon = 6(1 - \mu)$; это выраженіе относится къ разнымъ фазамъ затмѣнія, за исключеніемъ кольцеобразныхъ затмѣній.

Измѣняемость координатъ свѣтилъ.

Одна изъ главныхъ задачъ въ теоріи затмѣній состоитъ въ изысканіи времени, когда D или Δ'' достигаютъ до данной величины; вообще D подлежитъ безпрестаннымъ перемѣнамъ отъ измѣняемости координатъ x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$; Г. Ганзенъ далъ удобнѣйшія правила выражать эти координаты въ зависимости отъ времени (Astr. Nachr. № 339, Bd. XV).

Пусть будутъ x°, y° величины координатъ луны во время T, а x, y величины ея координатъ въ другое время τ, гдѣ T и τ суть истинныя времена подъ меридіаномъ таблицъ, близкія къ соединенію луны и солнца. Простѣйшую связь между координатами и временемъ выражаютъ уравненія:

$$x = x^\circ + p(\tau - T),\ y = y^\circ + q(\tau - T).$$

Принявъ

$$x^\circ = p \,.\, T',\ y^\circ = \eta + q \,.\, T',\ p = n \operatorname{Sin} N,\ q = n \operatorname{Cos} N;$$

будетъ

$$x = p(\tau - T + T'),\ y = \eta + q(\tau - T + T'),$$

или

$$x = n \operatorname{Sin} N (\tau - T + T'), \; y = \eta + n \operatorname{Cos} N (\tau - T + T').$$

Еслибы геоцентрическое движеніе луны относительно солнца было равномѣрное и прямолинейное, а разности временъ $\tau - T$ и $T - T'$ выражались бы въ часахъ, принимая одинъ часъ за единицу времени, то p и q представили бы постоянныя часовыя возрастанія координатъ x и y; тогда $T - T'$ означало бы время истиннаго соединенія свѣтилъ по прямому восхожденію; η была бы величина ординаты y во время соединенія, n часовое геоцентрическое движеніе луны относительно солнца на плоскости проэкцій, а N уголъ между направленіемъ этаго движенія и положительною стороною оси y-въ. Но такъ какъ геоцентрическое движеніе луны относительно солнца есть перемѣнное и криволинейное, то p, q, n, N, η и T' суть различныя функціи времени.

Для изысканія величинъ p и q, принадлежащихъ разнымъ эпохамъ времени, вычисляютъ координаты x и y для послѣдовательныхъ моментовъ времени: $\tau = T - 2^ч$, $T - 1^ч$, T, $T + 1^ч$, $T + 2^ч$, ... и изъ уравненій:

$$p = \frac{x - x^\circ}{\tau - T}, \; q = \frac{y - y^\circ}{\tau - T},$$

находятъ величины p и q для временъ $T - 1\frac{1}{2}^ч$, $T - \frac{1}{2}^ч$, $T + \frac{1}{2}^ч$, $T + 1\frac{1}{2}^ч$.

Для этихъ же временъ изыскиваютъ n и N помощію выраженій

$$\operatorname{tg} N = \frac{p}{q}, \; n = \frac{p}{\operatorname{Sin} N} = \frac{q}{\operatorname{Cos} N},$$

гдѣ N избирается такъ, чтобъ величина n была положительная.

Соотвѣтственныя величины T' и η будутъ

$$T' = \frac{x^\circ}{p}, \; \eta = y^\circ - qT'.$$

Предыдущее показываетъ, что координаты x и y зависятъ только отъ времени, считаемаго подъ меридіаномъ таблицъ.

Но въ выраженіи координатъ $\bar{x}$ и $\bar{y}$ видимаго мѣста солнца входятъ $\operatorname{Sin} t$ и $\operatorname{Cos} t$. Пусть t и t° означаютъ часовые углы солнца на мѣстѣ наблюденія O (фиг. 1) въ истинныя времена τ и τ° подъ меридіаномъ таблицъ; вообще

$$\operatorname{Sin} t = \operatorname{Sin} t^\circ + (\operatorname{Sin} t - \operatorname{Sin} t^\circ) = \operatorname{Sin} t^\circ + \frac{\operatorname{Cos}\left(\frac{t+t^\circ}{2}\right) \operatorname{Sin}\left(\frac{t-t^\circ}{2}\right) . (\tau - \tau^\circ)}{\frac{1}{2}(\tau - \tau^\circ)},$$

$$\operatorname{Cos} t = \operatorname{Cos} t^\circ + (\operatorname{Cos} t - \operatorname{Cos} t^\circ) = \operatorname{Cos} t^\circ - \frac{\operatorname{Sin}\left(\frac{t+t_\circ}{2}\right) . \operatorname{Sin}\left(\frac{t-t^\circ}{2}\right) . (\tau - \tau^\circ)}{\frac{1}{2}(\tau - \tau^\circ}.$$

Если примемъ одинъ часъ за единицу времени и выразимъ t и t° въ градусахъ и доляхъ градуса; то $\tau - \tau^\circ = \frac{t-t^\circ}{15}$ и положивъ

$$k = \frac{15 \operatorname{Sin} \frac{1}{2}(t-t^\circ)}{\frac{1}{2}(\tau - \tau^\circ)},$$

выйдетъ

$$\operatorname{Sin} t = \operatorname{Sin} t^\circ + k \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(t + t^\circ) . (\tau - \tau^\circ),$$

$$\operatorname{Cos} t = \operatorname{Cos} t^\circ - k \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(t + t^\circ)(\tau - \tau^\circ);$$

$$\bar{x} = \rho\Pi \operatorname{Sin} \zeta' \operatorname{Sin} v = \rho\Pi \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} t^\circ + k . \rho . \Pi \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(t + t_\circ)(\tau - \tau^\circ),$$

$$\bar{y} = \rho\Pi \operatorname{Sin} \zeta' \operatorname{Cos} v = \rho\Pi \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Cos} \delta' - \rho\Pi \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} \delta' \operatorname{Cos} t^\circ$$
$$+ k . \rho\Pi \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} \delta' \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(t + t^\circ)(\tau - \tau^\circ).$$

Отсюда видно, что $\bar{x}$ и $\bar{y}$ измѣняются не только вмѣстѣ съ временемъ подъ меридіаномъ таблицъ, но также съ широтою мѣста и часовымъ угломъ солнца на мѣстѣ наблюденій, а слѣдовательно съ географическою долготою мѣста, безъ которой нельзя вычислить часоваго угла солнца въ данное время подъ меридіаномъ таблицъ. Когда $\tau - \tau^\circ$ есть очень малый промежутокъ времени, то $t - t^\circ$ есть малый уголъ и вмѣсто $\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(t - t^\circ)$ можно взять дугу круга, содержащую $\frac{1}{2}(t - t^\circ)$ долей градуса, при радіусѣ равномъ единицѣ; тогда

$$\operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(t - t^\circ) = \tfrac{1}{2}(t - t^\circ) . \frac{3{,}14159..}{180^\circ} = \tfrac{1}{2}(t - t^\circ) . \frac{1}{57{,}296},$$

и k превращается въ $k' = \frac{15}{57{,}296} = 0{,}2618$.

Вычисленіе затмѣнія на данномъ на землѣ мѣстѣ.

Вопросъ состоитъ въ изысканіи враменъ, въ которыя произойдутъ разныя фазы затмѣнія, соотвѣтствующія разнымъ видимымъ разстояніямъ Δ' центра луны отъ центра солнца. Положимъ, что x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ выражаются въ секундахъ и что D также дается въ секундахъ, тогда $D = \Delta''$. Напр. для начала и конца частнаго затмѣнія, т. е. для внѣшнихъ прикосновеній луны и солнца, $\Delta' = u + u'$ и

$$D = \Delta'' = r + r'(1 - \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \zeta').$$

Такъ какъ

$$D \operatorname{Sin} \sigma = x - \bar{x},\ D \operatorname{Cos} \sigma = y - \bar{y},$$

то подставляя вмѣсто x, y, $\bar{x}$, $\bar{y}$ ихъ величины и сдѣлавъ

$$p(\tau_0 - T + T') - \rho\Pi \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} t^0 = m \operatorname{Sin} M,$$

$$\eta + q(\tau_0 - T + T') - \rho\Pi \operatorname{Sin} \varphi' \operatorname{Cos} \delta' + \rho\Pi \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} \delta' \operatorname{Cos} t^0 = m \operatorname{Cos} M,$$

$$p - k\rho\Pi \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Cos}\left(\frac{t + t_0}{2}\right) = n' \operatorname{Sin} N',$$

$$q - k\rho\Pi \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} \delta' \operatorname{Sin}\left(\frac{t + t^0}{2}\right) = n' \operatorname{Cos} N',$$

выйдетъ

$$D \operatorname{Sin} \sigma = m \operatorname{Sin} M + n' \operatorname{Sin} N'(\tau - \tau^0),$$

$$D \operatorname{Cos} \sigma = m \operatorname{Cos} M + n' \operatorname{Cos} N'(\tau - \tau^0);$$

$$\begin{aligned} D \operatorname{Sin}(\sigma - N) &= D \,.\, \operatorname{Sin} \sigma \operatorname{Cos} N - D \operatorname{Cos} \sigma \operatorname{Sin} N' \\ &= m \operatorname{Sin}(M - N'), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D \operatorname{Cos}(\sigma - N') &= D \,.\, \operatorname{Cos} \sigma \operatorname{Cos} N' + D \operatorname{Sin} \sigma \operatorname{Sin} N' \\ &= m \operatorname{Cos}(M - N') + n'(\tau - \tau_0) \end{aligned}$$

Положивъ $\sigma - N' = \psi'$, находимъ:

$$\operatorname{Sin} \psi' = m \operatorname{Sin}(M - N'),$$

$$\tau = \tau^0 - \frac{m \,.\, \operatorname{Cos}(M - N')}{n'} + \frac{D \operatorname{Cos} \psi'}{n'}.$$

Уголъ ψ' опредѣляется по синусу и уравненію удовлетворяютъ двѣ величины угла ψ', изъ которыхъ одна служитъ дополненіемъ другой до 180°; для одной изъ нихъ $\operatorname{Cos}\psi'$ есть положительный, для другой отрицательный. Уравненія относятся къ началу и концу затмѣнія, или къ первому и послѣднему появленію одной и той же фазы затмѣнія. Такъ какъ начало случается ранѣе нежели конецъ, то началу затмѣнія принадлежитъ $\operatorname{Cos}\psi'$ отрицательный, а концу положительный; т. е. для начала затмѣнія должно брать ψ' во 2-ой или 3-ей четверти круга, для конца въ 1-ой или 4-ой четверти. Время (τ) средины затмѣнія есть

$$(\tau) = \tau^\circ - \frac{m \operatorname{Cos}(M - N')}{n'}.$$

Изъ предыдущаго выводится способъ вычислять затмѣніе солнца для даннаго мѣста, т. е. такого, котораго географическая широта φ и долгота λ извѣстны. Задача рѣшается не прямо, но чрезъ послѣдовательныя приближенія; зная φ, находятъ φ' и ρ (стр. 7). Если опредѣляютъ начало и конецъ частнаго затмѣнія, то сперва принимаютъ $D = \Delta'' = r + r'$ и $\tau = T - T'$, т. е. вмѣсто неизвѣстнаго времени начала или конца затмѣнія берутъ время близкое къ истинному времени соединенія луны и солнца по прямому восхожденію подъ меридіаномъ таблицъ; въ это время часовой уголъ солнца на данномъ мѣстѣ есть $t^\circ = 15\tau^\circ \pm \lambda$, гдѣ λ выражаютъ въ градусахъ; знакъ $+$ принадлежитъ къ восточной, а знакъ — къ западной долготѣ мѣста отъ меридіана таблицъ. За тѣмъ, вмѣсто $\frac{t + t^\circ}{2}$ принимаютъ t° и полагаютъ $k = k'$, $\tau^\circ = T - T'$. Съ этими данными изыскиваютъ α, α', δ, δ', π, π', r, r', x, y, p, q, τ, T', m, M, n', N', ψ' и вычисляютъ двѣ величины для τ: одну для начала, другую для конца затмѣнія. Ошибка этаго перваго вывода времени τ можетъ доходить до нѣсколькихъ минутъ. Потомъ взявъ τ° равнымъ найденному времени τ, повторяютъ вычисленія отдѣльно для начала и для конца затмѣнія, считая $t^\circ = 15\tau \pm \lambda$. Соотвѣтственно найденному времени τ опредѣляютъ всё то, что сперва находили для времени

$T - T'$ и сверхъ того вычисляютъ ζ' и D'; за тѣмъ остается только вывести τ; ошибка не превзойдетъ тогда нѣсколькихъ секундъ времени. Передѣлавъ вычисленія въ третій разъ, получимъ τ съ точностію; большею частію можно довольствоваться двумя послѣдовательными выводами, причемъ достаточны логариѳмы о 4-хъ десятичныхъ знакахъ.

Подобнымъ же образомъ вычисляются полныя затмѣнія, полагая $D = \Delta'' = r - r'(1 - \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \zeta')$, и кольцеобразныя затмѣнія полагая $D = r'(1 - \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \zeta') - r$. Для центральныхъ затмѣній $D = 0$.

О наибольшей фазѣ затмѣнія на данномъ мѣстѣ.

Фаза затмѣнія будетъ наибольшею, когда Δ' сдѣлается наименьшимъ; такъ какъ r, r' и $\rho\Pi \operatorname{Cos} \zeta'$ съ теченіемъ времени весьма слабо измѣняются, то наименьшей величинѣ Δ' приблизительно соотвѣтствуетъ также наименьшая величина D или Δ''. Эта послѣдняя, равно какъ и наибольшая величина D, выводится помощію дифференціальнаго вычисленія изъ условія: $\frac{dD}{d\tau} = 0$. Перемѣнными будемъ считать только τ и t, потому что φ' есть постоянный уголъ, а r, r', $\rho\Pi$, δ', p и q измѣняются въ короткій промежутокъ времени столь мало, что ихъ перемѣны могутъ быть пренебрегаемы.

Считая время τ выраженнымъ въ часахъ и доляхъ часа, а часовой уголъ въ градусахъ и доляхъ градуса, будетъ (стр. 12): $\frac{d \operatorname{Sin} t}{d\tau} = \operatorname{Cos} t \,.\, \frac{dt}{d\tau} = k' \,.\, \operatorname{Cos} t$; $\frac{d \operatorname{Cos} t}{d\tau} = - \operatorname{Sin} t \frac{dt}{d\tau} = - k' \operatorname{Sin} t$, гдѣ $k' = \frac{15}{50{,}296}$. Посему диффенцируя уравненія

$$D \operatorname{Sin} \sigma = p \,.\, (\tau - T + T') - \Pi\rho \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} t,$$

$$D \operatorname{Cos} \sigma = \eta + q(\tau - T + T') - \Pi\rho \operatorname{Sin} \varphi' \operatorname{Cos} \delta' + \Pi\rho \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} \delta' \operatorname{Cos} t;$$

и вспомнивъ значенія $n' \operatorname{Sin} N'$ и $n' \operatorname{Cos} N'$ упомянутыя на стр. 13, находимъ:

$$\operatorname{Sin}\sigma \,.\, \frac{dD}{d\tau} + D \operatorname{Cos}\sigma \,.\, \frac{d\sigma}{d\tau} = n' \operatorname{Sin} N';$$

$$\operatorname{Cos}\sigma \frac{dD}{d\tau} - D \operatorname{Sin}\sigma \frac{d\sigma}{d\tau} = n' \operatorname{Cos} N';$$

отсюда

$$\frac{dD}{d\tau} = n' \operatorname{Cos}(\sigma - N'),$$

и $\frac{dD}{d\tau}$ обращается въ нуль, когда

$$\operatorname{Cos}(\sigma - N') = 0);$$

но $\sigma - N' = \psi'$; поэтому условіе наименьшей и также наибольшей величины D есть $\operatorname{Cos}\psi' = 0$ или $\psi' = \pm 90°$; $\operatorname{Sin}\psi' = \pm 1$.

Это условіе объясняется также геометрически; уголъ σ содержится между направленіемъ оси ординатъ $y^{\text{въ}}$ и прямою линіею LK (фиг. 1); N′ есть уголъ между тою же осью $y^{\text{въ}}$ и проложеніемъ на плоскость проэкцій видимаго пути луны относительно точки K, которая есть видимое мѣсто солнца на плоскости проэкцій; $\psi' = \sigma - N'$ есть уголъ между прямою линіею KL и направленіемъ видимаго движенія луны относительно солнца, въ проложеніи на плоскость проэкцій. Но KL есть разстояніе D центра луны отъ видимаго мѣста солнца; это разстояніе дѣлается наименьшимъ когда линія KL будетъ перпендикулярна къ видимому пути луны относительно солнца, т. е. когда $\psi' = \sigma - N' = \pm 90°$.

Отъ начала до средины затмѣнія постепенно D уменьшается, а отъ средины до конца затмѣнія увеличивается D; посему для начала затмѣнія $\operatorname{Cos}\psi'$ будетъ отрицательнымъ, т. е. $\psi' > 90°$ или $< 270°$; для конца $\operatorname{Cos}\psi'$ есть положительный, т. е. $\psi' < 90°$ или $\psi' < 270°$.

Мы назовемъ наименьшую величину D черезъ D°, для отличія отъ другихъ значеній D; ей соотвѣтствуетъ уголъ $\psi' = \sigma - N' = \pm 90$. Поэтому нельзя допускать, чтобъ вообще было $\sigma - N = \pm 90°$ при наибольшей фазѣ затмѣнія, какъ это принято въ нѣкоторыхъ сочиненіяхъ и между прочимъ въ нѣмецкомъ изданіи нашей Практической Астрономіи. Г. Ганзенъ

показалъ, что иногда разность $N'-N$ превосходитъ $20°$; Г. Цехъ обратилъ вниманіе на происходящую оттого ошибку.

Пусть (τ) есть истинное время подъ меридіаномъ таблицъ при наименьшемъ D, или при $D=D°$; въ этомъ случаѣ изъ уравненій на стр. 13 слѣдуетъ:

$$D° = \pm m \operatorname{Sin}(M-N'),$$

$$(\tau) = \tau° - \frac{m \operatorname{Cos}(M-N')}{n'}.$$

Изъ двухъ знаковъ $+$ и $-$ избираютъ такой, при которомъ $D°$ выходитъ положительнымъ. Принявъ

$$\mu = \frac{D° - r}{r'(1 - \Pi\rho \operatorname{Cos}\zeta')},$$

будетъ наибольшая фаза $= (6 - 6\mu)$ дюймамъ.

Выразимъ $D°$ и τ помощію n, угла $\psi = \sigma - N$ и разности $N - N'$. Изъ уравненій:

$$D \operatorname{Sin}\sigma = x - \bar{x},$$

$$D \operatorname{Cos}\sigma = y - \bar{y},$$

выходитъ:

$$D \operatorname{Sin}(\sigma - N) = x \operatorname{Cos} N - y \operatorname{Sin} N + \bar{y} \operatorname{Sin} N - \bar{x} \operatorname{Cos} N,$$

$$D \operatorname{Cos}(\sigma - N) = x \operatorname{Sin} N + y \operatorname{Cos} N - \bar{y} \operatorname{Cos} N - \bar{x} \operatorname{Sin} N.$$

Подставляя вмѣсто $x, y, \bar{x}, \bar{y}$ ихъ величины (стр. 11, 12) и сдѣлавъ

$$p = n \operatorname{Sin} N,\ q = n \operatorname{Cos} N \text{ и } \sigma - N = \psi,$$

получимъ

$$x \operatorname{Cos} N - y \operatorname{Sin} N = -\eta \operatorname{Sin} N;$$

$$x \operatorname{Sin} N + y \operatorname{Cos} N = +\eta \operatorname{Cos} N + n(\tau - T + T');$$

$$\bar{y} \operatorname{Sin} N - \bar{x} \operatorname{Cos} N = \Pi\rho \operatorname{Sin}\zeta' \operatorname{Sin}(N - v),$$

$$\bar{y} \operatorname{Cos} N + \bar{x} \operatorname{Sin} N = \Pi\rho \operatorname{Sin}\zeta' \operatorname{Cos}(N - v),$$

или

$$\bar{y} \operatorname{Sin} N - \bar{x} \operatorname{Cos} N = \Pi\rho(\operatorname{Sin}\varphi' \operatorname{Cos}\delta' - \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin}\delta' \operatorname{Cos} t) \operatorname{Sin} N$$
$$- \Pi\rho \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin} t \operatorname{Cos} N,$$

$$\bar{y}\,\mathrm{Cos}\,N + \bar{x}\,\mathrm{Sin}\,N = \Pi\rho\,(\mathrm{Sin}\,\varphi'\,\mathrm{Cos}\,\delta' - \mathrm{Cos}\,\varphi'\,\mathrm{Sin}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,t)\,\mathrm{Cos}\,N$$
$$+ \Pi\rho\,\mathrm{Cos}\,\varphi'\,\mathrm{Sin}\,t\,.\,\mathrm{Sin}\,N.$$

Отсюда происходятъ два выраженія для $D\,\mathrm{Sin}\,(\sigma - N)$ и для $D\,\mathrm{Cos}\,(\sigma - N)$:

1) $$D\,\mathrm{Sin}\,(\sigma - N) = -\eta\,\mathrm{Sin}\,N + \Pi\rho\,\mathrm{Sin}\,\zeta'\,\mathrm{Sin}\,(N - v)\,\ldots\ldots \quad (A)$$

$$D\,\mathrm{Cos}\,(\sigma - N) = \eta\,\mathrm{Cos}\,N + n\,(\tau - T + T') - \Pi\rho\,\mathrm{Sin}\,\zeta'\,\mathrm{Cos}\,(N - v).$$

2) Пусть $b\,\mathrm{Sin}\,B = \mathrm{Sin}\,\delta'\,\mathrm{Sin}\,N$, $\quad c\,\mathrm{Sin}\,C = \mathrm{Sin}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,N\,\ldots\ldots$ (B)

$b\,\mathrm{Cos}\,B = \mathrm{Cos}\,N$, $\quad c\,\mathrm{Cos}\,C = \mathrm{Sin}\,N$;

тогда полагая $\psi = \sigma - N$, будетъ:

$$D\,\mathrm{Sin}\,\psi = -\eta\,\mathrm{Sin}\,N + \Pi\rho\,\mathrm{Sin}\,\varphi'\,\mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Sin}\,N - \Pi\rho\,\mathrm{Cos}\,\varphi'.\,b\,\mathrm{Sin}\,(B + t)\ldots \quad (C)$$

$$D\,\mathrm{Cos}\,\psi = + \eta\,\mathrm{Cos}\,N + n\,(\tau - T + T') - \Pi\rho\,\mathrm{Sin}\,\varphi'\,\mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,N$$
$$+ \Pi\rho\,\mathrm{Cos}\,\varphi'.\,c\,\mathrm{Sin}\,(C - t).$$

Такъ какъ $\psi = \psi' + N' - N$, то

$$\mathrm{Cos}\,\psi = \mathrm{Cos}\,\psi'\,\mathrm{Cos}\,(N' - N) - \mathrm{Sin}\,\psi'\,\mathrm{Sin}\,(N' - N),$$
$$\mathrm{Sin}\,\psi = \mathrm{Sin}\,\psi'\,\mathrm{Cos}\,(N' - N) + \mathrm{Cos}\,\psi'\,\mathrm{Sin}\,(N' - N),$$

Для наибольшей фазы $\mathrm{Cos}\,\psi' = 0$, $\mathrm{Sin}\,\psi' = \pm 1$, $D = D^\circ$; тогда

$$\mathrm{Cos}\,\psi = \mp\,\mathrm{Sin}\,(N' - N),\ \ \mathrm{Sin}\,\psi = \pm\,\mathrm{Cos}\,(N' - N),$$

$$\pm D^\circ\,\mathrm{Cos}\,(N' - N) = -\eta\,\mathrm{Sin}\,N + \Pi\rho\,\mathrm{Sin}\,\zeta'\,\mathrm{Sin}\,(N - v),\ldots \quad (a)$$

$$\pm D^\circ\,\mathrm{Sin}\,(N' - N) = + \eta\,\mathrm{Cos}\,N + n\,(\tau - T + T') - \Pi\rho\,\mathrm{Sin}\,\zeta'\,\mathrm{Cos}\,(N - v),$$

$$\pm D^\circ\,\mathrm{Cos}\,(N' - N) = -\eta\,\mathrm{Sin}\,N + \Pi\rho\,\mathrm{Sin}\,\varphi'.\,\mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Sin}\,N\ldots \quad (b)$$
$$- \Pi\rho\,\mathrm{Cos}\,\varphi'.\,b\,\mathrm{Sin}\,(B + t),$$

$$\mp D^\circ\,\mathrm{Sin}\,(N' - N) = + \eta\,\mathrm{Cos}\,N - \Pi\rho\,\mathrm{Sin}\,\varphi'\,\mathrm{Cos}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,N$$
$$+ n\,(\tau - T + T') + \Pi\rho\,\mathrm{Cos}\,\varphi'.\,c\,.\,\mathrm{Sin}\,(C - t).$$

Легко вычислить $N' - N$. Изъ уравненій:

$$n' \operatorname{Sin} N' = p - k' \Pi\rho \operatorname{Cos} \varphi' . \operatorname{Cos} t \quad ; \; p = n \operatorname{Sin} N,$$

$$n' \operatorname{Cos} N' = q - k' \Pi\rho \operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} \delta' \operatorname{Sin} t; \; q = n \operatorname{Cos} N,$$

выходитъ:

$$n' \operatorname{Sin}(N' - N) = k' \Pi\rho \operatorname{Cos} \varphi' (\operatorname{Sin} \delta' \operatorname{Sin} N \operatorname{Sin} t - \operatorname{Cos} N \operatorname{Cos} t)$$

$$= - k' \Pi\rho \operatorname{Cos} \varphi' . b \operatorname{Cos}(B + t),$$

$$n' \operatorname{Cos}(N' - N) = n - k' \Pi\rho \operatorname{Cos} \varphi' (\operatorname{Sin} N \operatorname{Sin} t + \operatorname{Sin} \delta' \operatorname{Cos} N \operatorname{Cos} t)$$

$$= n - k' \Pi\rho \operatorname{Cos} \varphi' . c . \operatorname{Cos}(C - t);$$

$$\operatorname{tg}(N' - N) = - \frac{k' . \Pi\rho \operatorname{Cos} \varphi' . b \operatorname{Cos}(B + t)}{n - k' \Pi\rho \operatorname{Cos} \varphi' . c . \operatorname{Cos}(C - t)}.$$

И такъ численная велиина разности $N' - N$ возрастаетъ съ уменьшеніемъ широты мѣста; при данной широтѣ она будетъ наибольшею при $\operatorname{Cos}(B + t) = \pm 1$, т. е. при $B + t = 0°$ или $180°$. Напр. подъ экваторомъ, гдѣ $\varphi' = 0°$ и во время равноденствій, когда $\delta' = 0$, будетъ $B = 0°$, $b = \operatorname{Cos} N$, $C = 0°$, $c = \operatorname{Sin} N$; поэтому считая около узловъ луны $N = 63°$, $\Pi\rho = 1°$, $n = 0°,5$ найдемъ, что при $t = 0°$ или $180°$, разность $N' - N$ составляетъ около $24°$.

Уголъ N' выходитъ равнымъ N, когда $\operatorname{Cos}(B + t) = 0$; какъ это видно изъ предыдущаго выраженія для $\operatorname{tg}(N' - N)$. Тогда $\psi = \psi'$ и $\operatorname{Sin}(B + t) = \pm 1$, т. е., $t = 90° - B$ или $t = 270° - B$; этотъ часовой уголъ солнца независитъ отъ широты мѣста. Если положимъ $\operatorname{Cos} \psi' = 0$, то въ этомъ частномъ случаѣ, будетъ также $\operatorname{Cos} \psi = 0$, $\operatorname{Sin}(B + t) = \pm 1$, фаза затмѣнія дѣлается наибольшею и D превращается въ $D°$. По малости измѣненій въ N и въ δ', эта наибольшая фаза произойдетъ на разныхъ параллеляхъ почти въ одно и тоже мѣстное истинное время.

Крайнія параллели широтъ, или границы, съ которыхъ данная фаза видна какъ наибольшая тамъ фаза.

Пусть данная фаза есть D°; такъ какъ она должна быть въ искомыхъ точкахъ наибольшею тамъ фазою затмѣнія, то для нихъ $\operatorname{Cos}\psi' = 0$, т. е. $\psi' = 90°$ или $270°$. На сѣверной границѣ видимости фазы усматривается центръ солнца къ сѣверу отъ центра луны, а на южной границѣ къ югу отъ центра луны. Такъ какъ уголъ $\psi' = \sigma - N'$ считается отъ видимаго пути луны въ сторону ея движенія до направленія прямой линіи KL (фиг. 1, стр. 3) отъ сѣвера къ югу, то сѣверному предѣлу видимости данной фазы принадлежитъ уголъ $\psi' = 90°$, а южному $\psi' = 270°$.

Полагая

$$\operatorname{Cos}\varphi \operatorname{Sin} t = \operatorname{Sin} V,$$

$$\operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Cos} t = \operatorname{Cos} V \operatorname{Cos} W, \quad \operatorname{Sin}\varphi' = \operatorname{Cos} V . \operatorname{Sin} W,$$

будетъ

$$\operatorname{Cos}\zeta' = \operatorname{Cos} V . \operatorname{Cos}(W - \delta');$$

$\operatorname{Cos}\zeta'$ не долженъ быть отрицательнымъ, иначе ζ' было бы болѣе 90°, солнце находилось бы подъ горизонтомъ и нельзя было бы видѣть затмѣнія. Всегда можно избрать уголъ V такъ, чтобъ $\operatorname{Cos} V$ выходилъ положительнымъ, потому что остается за тѣмъ еще уголъ W для дальнѣйшаго удовлетворенія условіямъ задачи. Отсюда слѣдуетъ, что углы V и W содержатся въ тѣхъ четвертяхъ круга, въ которыхъ $\operatorname{Cos} V$ и $\operatorname{Cos}(W - \delta')$ будутъ положительными. Но вообще

$$D \operatorname{Sin}\sigma = x - \bar{x}, \quad D \operatorname{Cos}\sigma = y - \bar{y};$$

$$\bar{x} = \Pi\varrho \operatorname{Sin} V; \quad \bar{y} = \Pi\varrho \operatorname{Cos} V . \operatorname{Sin}(W - \delta');$$

такимъ образомъ при вычисленіи границъ получаемъ:

для *сѣверной* границы:	для *южной* границы:
$\psi' = 90°,\ \sigma = 90° + N'$	$\psi' = 270°,\ \sigma = 270° + N'$
$\operatorname{Sin} V = \frac{x - D°.\operatorname{Cos} N'}{\Pi\rho}$	$\operatorname{Sin} V = \frac{x + D° \operatorname{Cos} N}{\Pi\rho},$
$\operatorname{Sin}(W - \delta') = \frac{y + D° \operatorname{Sin} N'}{\Pi\rho\,.\operatorname{Cos} V}$	$\operatorname{Sin}(W - \delta') = \frac{y - D° \operatorname{Sin} N}{\Pi\rho \operatorname{Cos} V},$

Величины x и y находятъ для произвольнаго времени τ подъ меридіаномъ таблицъ; нужно только чтобъ оно заключалось между самымъ раннимъ началомъ и самымъ позднимъ концемъ фазы затмѣнія на землѣ вообще. Вычисливъ V и W, получимъ потомъ φ' и t. Сперва полагаютъ $N' = N$, $\rho = 1 - \frac{1}{589}$ и изыскиваютъ приближенно φ' и t, N', $\operatorname{Cos}\zeta'$ и ρ; повторивъ снова всѣ вычисленія, опредѣляютъ точнѣе φ' и t. Вычисленія ведутъ для разныхъ временъ, слѣдующихъ черезъ разные промежутки и изыскиваютъ рядъ точекъ, чрезъ которыя проходятъ искомыя кривыя линіи. Допуская сначала $N' = N$ и $\operatorname{Cos}\psi' = 0$, получится также $\operatorname{Cos}\psi = 0$; $\operatorname{Sin}(B + t) = \pm 1$; въ этомъ случаѣ уравн. (6, стр. 18). даетъ:

$$\pm D° = -\eta \operatorname{Sin} N + \Pi\rho \operatorname{Sin}\varphi' \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos} N \mp \Pi\rho \operatorname{Cos}\varphi'.\,b,$$

$$\text{гдѣ}\quad b = \frac{\operatorname{Sin}\delta' \operatorname{Sin} N}{\operatorname{Sin} B};\ldots\ \text{посему}$$

$$\frac{\eta \operatorname{Sin} N \pm D°}{\Pi\rho} = \operatorname{Sin} N \operatorname{Cos}\delta'\left(\operatorname{Sin}\varphi' \pm \frac{\operatorname{tg}\delta'}{\operatorname{Sin} B}\cdot\operatorname{Cos}\varphi'\right).$$

Пусть $\operatorname{tg} H = \frac{\operatorname{tg}\delta'}{\operatorname{Sin} B}$; тогда

$$\frac{\eta \operatorname{Sin} N \pm D°}{\Pi\,.\,\rho} = \frac{\operatorname{Sin} N\,.\operatorname{Cos}\delta'}{\operatorname{Cos} H}\operatorname{Sin}(\varphi' \pm H).$$

Но $\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 H} = 1 + \operatorname{tg}^2 H = 1 + \frac{\operatorname{tg}^2\delta'}{\operatorname{Sin}^2 B}$;

$$\operatorname{Sin}^2 B = \frac{\operatorname{tg}^2 N\,.\operatorname{Sin}^2\delta'}{1 + \operatorname{tg}^2 N\,.\operatorname{Sin}^2\delta'},$$

$$\frac{1}{\operatorname{Cos}^2 H} = 1 + \operatorname{tg}^2\delta'\frac{(1 + \operatorname{tg}^2 N \operatorname{Sin}^2\delta')}{\operatorname{tg}^2 N\,.\operatorname{Sin}^2\delta'} = \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 N \operatorname{Cos}^2\delta'},$$

и такъ

$$\mathrm{Sin}\,(\varphi' \pm H) = \frac{\eta\,\mathrm{Sin}\,N \pm D^\circ}{\Pi\rho}.$$

Собственно четыре величины могутъ удовлертвоять уравненію, опредѣляющему φ'; но двѣ изъ нихъ относятся къ точкамъ, для которыхъ солнце находится подъ горизонтомъ. Одна изъ двухъ остающихся величинъ принадлежитъ сѣверной, а другая южной границѣ широтъ. Между этими широтами лежатъ страны, съ которыхъ можно видѣть туже данную фазу затмѣнія, но она тамъ не будетъ наибольшею; только на самыхъ границахъ эта фаза выйдетъ наибольшею.

Если $\frac{\eta\,\mathrm{Sin}\,N + D}{\Pi\rho}$ или $\frac{\eta\,\mathrm{Sin}\,N - D}{\Pi\rho}$ окажется болѣе единицы, то $\mathrm{Sin}\,(\varphi' \pm H)$ сдѣлается мнимымъ и задачею требуется нѣчто невозможное; т. е. тогда для данной величины D° нѣтъ предѣльной широты въ одномъ или въ другомъ смыслѣ. Если $\frac{\eta\,\mathrm{Sin}\,N \pm D^\circ}{\Pi\rho}$ будетъ менѣе единицы при $+D^\circ$ и при $-D^\circ$, то получаются два придѣла щиротъ: сѣверный и южный; они опредѣляются помощію послѣдовательныхъ приближеній.

На стр. 9 и 10 приведены выраженія для Δ'' или для D, которыя служатъ для изысканія предѣльныхъ широтъ въ случаѣ частнаго, полнаго и кольцеобразнаго затмѣній солнца.

О кривыхъ линіяхъ на землѣ, съ которыхъ данная фаза видна какъ наибольшая.

1) *Для данной параллели опредѣлить долготу мѣста, съ котораго въ данное время усматривается тамъ наибольшая фаза затмѣнія и вычислить величину этой фазы.*

Допустимъ сперва $N' - N$ и пусть

$$f = -\eta + \Pi\rho\,\mathrm{Sin}\,\varphi'\,\mathrm{Cos}\,\delta';$$

по доказанному (на стр. 18) будетъ

$$\pm D^\circ = f \,.\, \mathrm{Sin}\, N - \Pi\rho\, \mathrm{Cos}\, \varphi' \,.\, b \,.\, \mathrm{Sin}\,(B + t) \ldots\ldots \quad (d)$$

$$\tau = T - T' + \frac{f \,.\, \mathrm{Cos}\, N}{n} - \frac{\Pi\rho\, \mathrm{Cos}\, \varphi' \,.\, c}{n} \,.\, \mathrm{Sin}\,(C - t) \ldots\ldots \quad (e)$$

Широта φ' и соотвѣтствующая ей величина ρ извѣстны; если дано истинное время τ подъ меридіаномъ таблицъ, то послѣднее уравненіе (e) даетъ t; именно.

$$\mathrm{Sin}\,(C - t) = \frac{f\, \mathrm{Cos}\, N - n\,(\tau - T + T')}{\Pi\rho\, \mathrm{Cos}\, \varphi'};$$

отсюда получится двѣ величины для t; соотвѣтствующія имъ наибольшія фазы, найдемъ изъ уравн. (d).

Если напротивъ данъ часовой уголъ t на искомомъ мѣстѣ, то время τ опредѣляется изъ уравненія (e), а величина D° изъ уравн. (d).

Въ обоихъ случаяхъ восточная долгота мѣста:

$$\lambda = t - 15\,\tau.$$

Положительное значеніе величины D° указываетъ, что въ затмѣніи должна быть сѣверная сторона солнца, а отрицательное, что южная часть солнца будетъ въ затмѣніи.

2) *Опредѣлить въ какое время и въ какомъ мѣстѣ на данной параллели усматривается данная фаза какъ наибольшая.*

Соотвѣтственно даннымъ величинамъ D° и φ', находятъ часовой уголъ t и время τ подъ меридіаномъ таблицъ помощію уравненій:

$$\mathrm{Sin}\,(B + t) = g\left(1 \mp \frac{D^\circ}{f \,.\, \mathrm{Sin}\, N}\right), \quad g = \frac{f\, \mathrm{Sin}\, N}{\Pi\rho\, \mathrm{Cos}\, \varphi' \,.\, b},$$

$$\tau = T - T' + \frac{f \,.\, \mathrm{Cos}\, N}{n} - \Pi\rho\, \mathrm{Cos}\, \varphi' \,.\, c \,.\, \mathrm{Sin}\,(C - t),$$

вост. долгота $\lambda = t - 15\,\tau$.

Рѣшая упомянутую здѣсь задачу нужно избирать такія величины часоваго угла t, чтобъ онѣ были менѣе чѣмъ $t_{,}$, гдѣ $t_{,}$

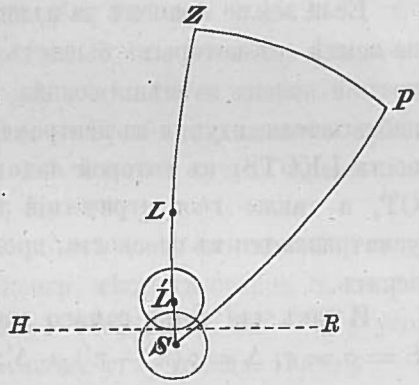
часовой уголъ при восходѣ или закатѣ солнца и вычисляется по уравн. $\operatorname{Cos} t, = - \operatorname{tg} \delta' . \operatorname{tg} \varphi'$; въ противномъ случаѣ солнце будетъ подъ горизонтомъ и затмѣнія нельзя видѣть.

Для изслѣдованія кривыхъ линій на землѣ, съ которыхъ данная фаза усматривается какъ наибольшая для нихъ фаза, сперва находятъ сѣверный и южный предѣлы φ', и $\varphi'_{,,}$ широтъ, потомъ вычисляютъ послѣдовательно черезъ два градуса, или болѣе, для разныхъ широтъ, заключающихся между φ', и $\varphi'_{,,}$, долготы мѣстъ, для которыхъ данная фаза есть наибольшая. Нанося эти мѣста на географическую карту по ихъ широтамъ и долготамъ, соединяютъ эти точки линіями и получаютъ чрезъ то искомыя кривыя линіи.

3) *Опредѣлить такія мѣста на землѣ, съ которыхъ данная фаза затмѣнія усматривается либо ранѣе, либо позже чѣмъ во всѣхъ другихъ мѣстахъ.*

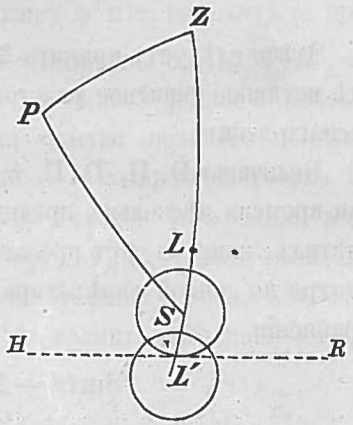
Пусть Δ' есть видимое, Δ истинное или геоцентрическое угловое разстояніе центровъ луны и солнца; τ, истинное время подъ меридіаномъ таблицъ, въ которое достигаетъ Δ до наименьшей его величины, что бываетъ близко къ истинному соединенію луны и солнца по долготѣ. Прежде и послѣ этаго времени должно быть Δ болѣе; въ предшествующее время усматривается затмѣніе въ данной фазѣ Δ' въ такой точкѣ на землѣ ранѣе, нежели на всѣхъ другихъ точкахъ, для которой угловое разстояніе луны и солнца наиболѣе уменьшается вліяніемъ параллаксовъ свѣтилъ, именно уменьшается на $\rho(\pi - \pi')$, т. е. на полное дѣйствіе мѣстныхъ горизонтальныхъ параллаксовъ луны и солнца $\rho\pi$ и $\rho\pi'$. Если видимое съ этой точки разстояніе свѣтилъ есть Δ', то геоцентрическое разстояніе будетъ $\Delta = \Delta' + \rho\pi - \rho\pi'$. Для этаго нужно, чтобъ луна и солнце были около горизонта наблюдателя и находились въ одномъ вертикалѣ, принимая землю за шаръ. Луна касается тогда нижнимъ краемъ горизонта, солнце еще не вполнѣ взошло и надъ горизонтомъ возвышается только такая часть его диска, чтобы центры свѣтилъ усматривались въ данномъ видимомъ

разстояніи Δ'. Пусть изображаетъ (фиг. 2) HR горизонтъ, Z зенитъ, P полюсъ міра, S центръ диска солнца, L′ видимое и L истинное мѣста луны; $SL' = \Delta'$, $LS = \Delta$, $LL' = \rho\pi - \rho\pi'$). Въ этомъ случаѣ точки S, L′ и L находятся въ одномъ кругѣ ZSL; а точки N, K и L (фиг. 1) располагаются по одной прямой линіи; тогда v или параллактическій уголъ солнца (ZSP фиг.) равняется углу σ и углу s, гдѣ σ есть уголъ между геоцентрическимъ кругомъ склоненія солнца и линіею KL (фиг. 1), а s есть уголъ между тѣмъ же кругомъ склоненія солнца и дугою, соединяющею на сферѣ небесной геоцентрическія мѣста центровъ луны и солнца.



Фиг. 2.

Подобное же обстоятельство произойдетъ послѣ времени $\tau_{,}$, когда геоцентрическое угловое разстояніе свѣтилъ возрастаетъ и дѣлается равнымъ $\Delta' + \rho\pi - \rho\pi'$. Въ данномъ видимомъ разстояніи Δ' увидятъ луну и солнце съ такой точки на землѣ позже (т. е. при большемъ времени подъ меридіаномъ таблицъ) чѣмъ съ другихъ точекъ, въ которой луна и солнце усматриваются тогда близь горизонта наблюдателя и въ одномъ вертикалѣ, около заката свѣтилъ. Луна зашла и верхнимъ краемъ касается горизонта; часть диска солнца находится подъ горизонтомъ и она такова, чтобъ видимое разстояніе центровъ свѣтилъ было равно Δ'.



Фиг. 3.

Въ обоихъ случаяхъ точка солнечнаго диска, въ которой прекращается потемнѣніе диска, лежитъ въ горизонтѣ.

Если землю примемъ за эллипсоидъ вращенія, то для мѣстъ на землѣ, въ которыхъ бываетъ самое раннее начало или самый поздній конецъ затмѣнія солнца, линіи зрѣнія (фиг. 1) OL и OS наблюдателя, идущія къ центрамъ луны и солнца, лежатъ въ плоскости LKOTS, въ которой находится линія TL и радіусъ земли OT, а также геоцентрическій зенитъ. Посему луна и солнце усматриваются въ плоскости, проходящей чрезъ геоцентрической зенитъ.

И такъ для точки самаго ранняго начала затмѣнія: $\sigma = S$, $S = \sigma = v$, $\Delta = \rho(\pi - \pi') + \Delta'$;

$$x = \Delta \operatorname{Sin} S = \Delta \operatorname{Sin} v;\ y = \Delta \operatorname{Cos} S = \Delta \operatorname{Cos} v$$

Изъ уравненій A, стр. 18, выходитъ въ этомъ случаѣ

$$\eta \operatorname{Sin} N = (D + \Pi\rho \operatorname{Sin} \zeta') \operatorname{Sin}(N - v),$$

$$D = \Delta'(1 - \rho \operatorname{Sin} \pi \operatorname{Cos} \zeta'),$$

$$\tau = T - T' - \frac{(D + \Pi\rho \operatorname{Sin} \zeta')}{n}(\operatorname{Cos} N - v) \ldots\ldots\ldots (\tau),$$

Здѣсь слѣдуетъ принять $\zeta' = 90°$, т. е. $\operatorname{Sin} \zeta' = 1$, $\operatorname{Cos} \zeta' = 0$, гдѣ истинное зенитное разстояніе ζ' считается отъ геоцентрическаго зенита.

Величины D, П, T, T', η, n и N извѣстны; ихъ вычисляютъ для времени нѣсколько предшествующаго истинному соединенію свѣтилъ; напр. за часъ прежде соединенія, либо болѣе или менѣе, смотря по данной фазѣ; параллактическій уголъ v находятъ изъ уравненія

$$\operatorname{Sin}(v - N) = \frac{-\eta \operatorname{Sin} N}{D + \Pi\rho}.$$

Такъ какъ уголъ $N - v$ опредѣляется по его синусу, то получается два рѣшенія: $N - v$ и $180 - (N - v)$; одно относится къ самому раннему, другое къ самому позднему появленію фазы Δ'. Для

надлежащаго выбора угла v замѣтимъ, что при началѣ фазы затмѣнія ψ', т. е. $\sigma - N'$, болѣе $90°$ или менѣе $270°$; посему $\operatorname{Cos}\psi'$ есть отрицательный; при концѣ $\psi' < 90°$ или $\psi' > 270°$, т. е. $\operatorname{Cos}\psi'$ есть положительный; но здѣсь $\sigma = v$ и потому для начала фазы надобно брать уголъ $v - N$ болѣе $90°$ и менѣе $270°$; для конца фазы долженъ быть $\operatorname{Cos}(v - N)$ положительнымъ и уголъ $v - N$ содержится въ 1-й или 4-й четверти круга. Время τ выводится потомъ изъ уравн. (τ), стр. 26.

Въ сфер. тр-кѣ между сѣвернымъ полюсомъ міра P, геоцентрическимъ зенитомъ Z и геоцентр. мѣстомъ солнца S, сторона $PS = 90° - \delta'$, $ZS = \zeta'$ почти $= 90°$, $ZP = 90° - \varphi'$; уголъ $ZSP = v$ и уголъ $ZPS = t$ часовому углу солнца. Посему

$$\operatorname{Sin}\varphi' = \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos} v;\ \operatorname{Sin} t = \frac{\operatorname{Sin} v}{\operatorname{Cos}\varphi'}$$

и также

$$\operatorname{Cos} t = -\operatorname{tg}\delta' . \operatorname{tg}\varphi';$$

вост. долгота мѣста $= \lambda = t - 15\tau$.

Отсюда опредѣлятся φ' и λ.

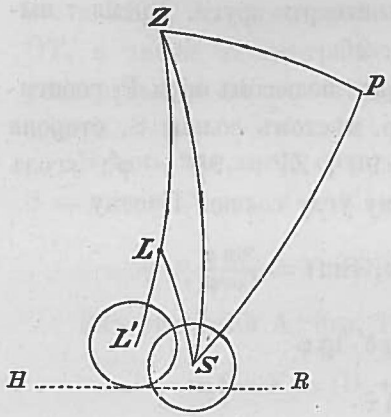
Въ первомъ приблизительномъ вычисленіи, принимаютъ землю за шаръ, полагая $\rho = \frac{1}{589}$. Вычисливъ φ' и τ, находятъ ρ, пріискиваютъ болѣе точно для времени τ величины δ', $\Pi\rho$, T, T', n, N и вновь находятъ φ' и λ, считая для самаго ранняго появленія фазы: $\zeta' = 90° + \Delta' - r$, а для самаго поздняго появленія: $\zeta' = 90° - (\Delta' - r)$. Разность $\Delta' - r$ содержитъ только нѣсколько минутъ; употребляя четыре значные логариѳмы, можно взять $\operatorname{Sin}\zeta' = 1$, $\operatorname{Cos}\zeta' = \mp(\Delta' - r)\operatorname{Sin} 1'$, гдѣ знакъ — относится къ начальнолу, знакъ + къ окончательному появленію фазы. Если $\varphi°$ есть широта и $t_,$ час. уголъ солнца, найденные въ предположеніи $\zeta' = 90°$, то

$$\varphi' = \varphi° \mp (\Delta' - r)\frac{\operatorname{Sin}\delta'}{\operatorname{Cos}\varphi°},\quad t = t_, \pm \frac{(\Delta' - r)}{\operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Sin} t_,},$$

гдѣ верхніе знаки относятся къ самому раннему, а нисшіе къ самому позднему появленію фазы.

Кривыя линіи на землѣ, съ которыхъ видна данная фаза затмѣнія въ горизонтѣ при восходѣ или закатѣ солнца.

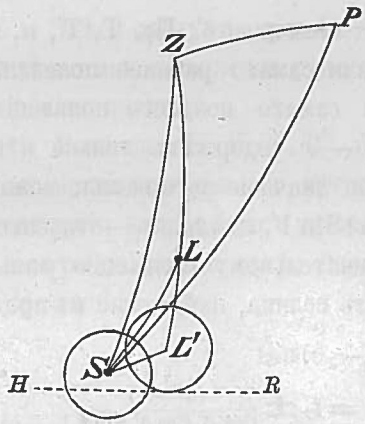
Кромѣ упомянутыхъ двухъ точекъ, для которыхъ фаза появляется ранѣе или позже, чѣмъ для двухъ мѣстъ, есть еще много точекъ на землѣ, съ которыхъ въ промежуточное время усматривается таже фаза около горизонта, но для нихъ луна не будетъ въ плоскости проходящей чрезъ солнце и геоцентрич. зенитъ, какъ показываютъ фиг. 4 (гдѣ Z есть зенитъ, P полюсъ міра, L′ видимое, L истинное мѣсто луны, S мѣсто солнца; $L'S = \Delta'$; $LL' = \rho\pi - \rho\pi'$ и $LS = \Delta$; $ZSP = v$). Поэтому дѣйствіе параллаксовъ свѣтилъ хотя уменьшаетъ угловое разстояніе луны и солнца, но менѣе чѣмъ на разность мѣстныхъ горизонтальныхъ параллаксовъ, т. е. тогда $\Delta - \Delta'$ менѣе чѣмъ $\rho\pi - \rho\pi'$.



Фиг. 4.

Для простоты мы принимаемъ сперва землю за шаръ и $\rho = \frac{1}{589}$. Положеніе искомыхъ точекъ можно опредѣлить различными пріемами вычисленій:

1) Общія уравн. (A), стр. 18, даютъ:



Фиг. 5.

$$\operatorname{Sin}\psi = \frac{-\eta \operatorname{Sin} N + \Pi\rho \operatorname{Sin}\zeta' \operatorname{Sin}(N - v)}{D};$$

$$D = \Delta'(1 - \rho \operatorname{Sin}\pi \operatorname{Cos}\zeta'),$$

$$\tau = T - T' - \frac{\eta \operatorname{Cos} N}{n} + \frac{\Pi\rho \operatorname{Sin}\zeta' \operatorname{Cos}(N - v)}{n} + \frac{D \operatorname{Cos}\psi}{n}.$$

Приблизительно $\zeta' = 90^\circ$, $\operatorname{Sin}\zeta' = 1$, $\operatorname{Cos}\zeta' = 0$.

Беремъ сперва для разности $N - v$ произвольную величину, начиная съ 0°, съ тѣмъ условіемъ, чтобъ $\operatorname{Sin}\psi$ не дѣлался мнимымъ или чтобъ было $\operatorname{Sin}(N - v) < \pm 1$; т. е. полагаемъ $\operatorname{Sin}(N - v)$ послѣдовательно равнымъ 0, $\pm 0{,}1$, $\pm 0{,}2, \ldots$ ± 1; находимъ соотвѣтственныя величины для $\operatorname{Sin}\psi$ и вычисляемъ v и τ; тогда получаемъ рядъ широтъ φ и долготъ λ изъ уравненій:

$$\operatorname{Sin}\varphi' = \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos} v, \quad \operatorname{Sin} t = \frac{\operatorname{Sin} v}{\operatorname{Cos}\varphi'}$$

$$\operatorname{Cos} t = -\operatorname{tg}\delta' \operatorname{tg}\varphi'; \quad \lambda = t - 15\tau.$$

Можно начинать съ такой величины угла v, которая не много болѣе или менѣе угла v на точкѣ, для которой фаза появляется ранѣе, чѣмъ во всѣхъ другимъ мѣстахъ на землѣ, и постепенно измѣнять v до тѣхъ поръ, пока достигнемъ къ углу v на точкѣ, для которой фаза появляется позже, чѣмъ въ другихъ точкахъ.

Углы ψ и φ' опредѣляются по ихъ синусамъ и потому каждой принятой величинѣ $\operatorname{Sin}(N - v)$ соотвѣтствуютъ четыре точки: двѣ на восточной и двѣ на западной сторонѣ искомыхъ кривыхъ линій.

2) Пусть: $\ldots f = \Pi\rho \operatorname{Sin}\varphi' \operatorname{Cos}\delta' - \eta$

$$\frac{f \operatorname{Sin} N}{D} = i, \qquad \frac{f \operatorname{Sin} N}{\Pi\rho \operatorname{Cos}\varphi' . b} = g;$$

изъ уравн. (B) и (C), стр. 18, выходитъ:

$$\operatorname{Sin}\psi = i\left(1 - \frac{\operatorname{Sin}(B + t)}{g}\right),$$

$$\tau = T - T' + \frac{f . \operatorname{Cos} N}{n} - \frac{\Pi\rho \operatorname{Cos}\varphi' . c}{n} . \operatorname{Sin}(C - t) + \frac{D . \operatorname{Cos}\psi}{n},$$

вост. долг. мѣста $\lambda = t - 15\tau$.

Означимъ черезъ $\varphi'_{,}$ и $\varphi'_{,,}$ геоцентр. широты границъ или крайнихъ сѣверной и южной параллелей, между которыми видна данная фаза. Принимая послѣдовательно $\varphi'_{,} - 2^\circ$, $\varphi'_{,} - 4^\circ$ и

т. д. до φ''', находимъ для каждой изъ этихъ широтъ часовой уголъ t солнца въ горизонтѣ по формулѣ

$$\operatorname{Cos} t = -\operatorname{tg} \delta' . \operatorname{tg} \varphi',$$

и вычисляемъ $\operatorname{Sin} \psi$, $\operatorname{Cos} \psi$, τ и λ; такимъ образомъ получатся широта и долгота искомыхъ точекъ. Можно повторить вычисленія для выбора точныхъ величинъ δ', $\Pi\rho$, T, T', n и N во времени τ и взять $\rho = 1 - \frac{\operatorname{Sin}^2 \varphi'}{294}$.

Здѣсь встрѣчаются четыре разныя рѣшенія; каждый $\operatorname{Cos} t$ соотвѣтствуетъ двумъ разнымъ угламъ t и каждому $\operatorname{Sin} \psi$ принадлежатъ два разные угла ψ. Черезъ то опредѣляются четыре разныя точки: 1) точка, въ которой первое появленіе фазы (начало) и 2) точка, въ которой послѣднее появленіе фазы (конецъ) усматриваются при восходѣ солнца; 3) точка, въ которой начало и 4) точка, въ которой конецъ фазы усматриваются при закатѣ солнца.

Нанося найденныя точки по геогр. широтамъ и долготамъ на карту и соединивъ ихъ между собою прямыми линіями, составимъ требуемыя кривыя линіи. Иногда получаются двѣ особыя пересѣкающіяся вѣтви, въ видѣ ∞, а иногда одна вѣтвь (См. Naut. Alm. for 1836).

Точное вычисленіе затмѣній въ горизонтѣ: вліяніе преломленій лучей свѣта въ атмосферѣ.

Чтобъ опредѣлить точку, въ которой усматривается затмѣніе въ горизонтѣ, нужно чтобъ видимое зенитное разстояніе солнца было 90° и относилось не къ геоцентрическому, но къ видимому зениту; въ тоже время истинное разстояніе солнца отъ видимаго зенита есть $90° + 34' 48'' - 9''$, гдѣ $34' 48''$ есть среднее горизонтальное астр. преломленіе, $9''$ горизонт. параллаксъ солнца. Означимъ его черезъ z' и пусть ζ' есть истинное разстояніе солнца отъ геоцентр. зенита.

Если A есть азимутъ солнца, считаемый отъ круга высоты до той стороны меридіана, въ которой находится видимый полюсъ міра, то извѣстно что

$$\zeta' - z' = (\varphi - \varphi') \operatorname{Cos} A; \quad \varphi - \varphi' = \frac{e^2 \operatorname{Sin} \varphi' \operatorname{Cos} \varphi'}{\operatorname{Sin} 1''},$$

гдѣ φ есть географическая, φ' геоцентрическая широта мѣста, e есть эксцентрцетъ земныхъ меридіановъ, приближенно $e^2 = \frac{1}{147}$.

Близь горизонта $z' = 90°$ и $\operatorname{Cos} A = \frac{\operatorname{Sin} \delta'}{\operatorname{Cos} \varphi'}$; $\operatorname{Cos} \varphi$ почти равенъ $\operatorname{Cos} \varphi'$ и потому

$$\zeta' = z' + \frac{e^2 \operatorname{Sin} \varphi \operatorname{Sin} \delta'}{\operatorname{Sin} 1''};$$

въ нашемъ случаѣ $\zeta' = 90° \, 34' \, 37'' + \frac{e^2 \operatorname{Sin} \varphi' \operatorname{Sin} \delta'}{\operatorname{Sin} 1''}$.

Для внѣшнихъ прикосновеній солнца и луны, въ точкѣ самаго ранняго начала частнаго затмѣнія на землѣ вообще, солнце касается горизонтья верхнимъ краемъ, а въ точкѣ самаго поздняго конца затмѣнія, солнце касается горизонта нижнимъ краемъ; въ обоихъ случаяхъ $\Delta' = r + r'$, и

$$\zeta' = 90° 34' \, 37'' + \frac{e^2 \operatorname{Sin} \varphi' \operatorname{Sin} \delta'}{\operatorname{Sin} 1''} \pm r';$$

$$\operatorname{Cos} \zeta' = - \operatorname{Sin} (34' \, 37'' \pm r') - e^2 . \operatorname{Sin} \varphi' \operatorname{Sin} \delta', \quad e^2 = \frac{1}{147},$$

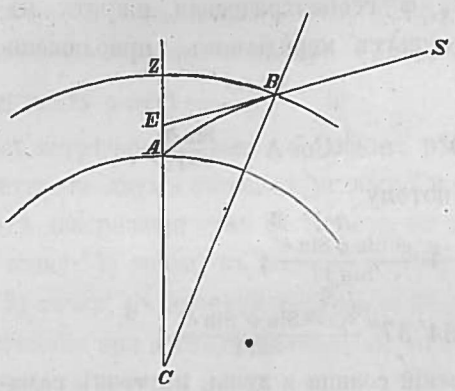
гдѣ знакъ $+$ относится къ точкѣ самаго ранняго начала, а $-$ къ точкѣ самаго поздняго конца затмѣнія.

Для полныхъ и кольцеобразныхъ затмѣній можно принять

$$\operatorname{Cos} \zeta' = - \operatorname{Sin} (34' \, 37'') - e^2 \operatorname{Sin} \varphi' \operatorname{Sin} \delta'.$$

Вслѣдствіе преломленія лучей свѣта въ атмосферѣ, солнце кажется въ горизонтѣ, когда оно находится ниже горизонта на уголъ равный горизонтальному преломленію безъ параллакса. Лучь, идущій отъ средины диска свѣтила, преломляется въ слояхъ воздуха различной плотности и описавъ въ земной атмосферѣ

кривую линію вступаетъ въ глазъ наблюдателя, тогда какъ начальное направленія луча свѣта, передъ вступленіемъ въ атмосферу, будучи продолжено до вертикальной линіи наблюдателя, встрѣчаетъ эту линію выше поверхности земли. Пусть X есть разстояніе этой точки встрѣчи до центра земли; a радіусъ земли.



Фиг. 6.

Положимъ, что C (фиг. 6) изображаетъ центръ земли, A мѣсто наблюдателя на землѣ, B точку вступленія луча свѣта BS въ атмосферу; E пересѣченіе вертикальной линіи ZEAC съ продолженіемъ начальнаго направленія луча BS; длина линіи EC равна X. Означимъ черезъ z видимое, а черезъ $z + \delta z$ истинное разстояніе свѣтила отъ видимаго зенита; пусть еще (ρ) плотность воздуха въ точкѣ A. Изъ теоріи преломленія извѣстно, что

$$CB = \frac{AC \,.\, \mathrm{Sin}\, z \sqrt{1 + 4k(\rho)}}{\mathrm{Sin}\, EBC}, \quad AC = a,$$

гдѣ постоянное $4k$ зависитъ отъ преломляющей силы воздуха. Уголъ $ZEB = z + \delta z$ и

$$CB : CE = \mathrm{Sin}\,(z + \delta z) : \mathrm{Sin}\, EBC.$$

посему

$$X = EC = \frac{a\, \mathrm{Sin}\, z \,.\, \sqrt{1 + 4k(\rho)}}{\mathrm{Sin}\,(z + \delta z)},$$

При высотѣ ртути въ барометрѣ 29,6 англ. дюймовъ и температурѣ воздуха + 7,4 градусовъ Реомюра, выходитъ $4k(\rho) = 0{,}00058$; полагая $z = 90°$, $\delta z = 34'{,}8$ будетъ $X = a(1{,}00023)$.

Чтобъ устранить вліяніе преломленія свѣта, надобно перенести мѣсто наблюденія съ точки A на поверхности земли въ точку E, т. е. вмѣсто радіуса земли a надобно взять X, какъ это въ первый разъ объяснилъ Бессель (Astr. Untersuch. von Bessel, B. II, p. 240).

Разность $X - a$ весьма мала и большею частію пренебрегается; но легко ее принять въ разсчетъ, увеличивъ не много радіусъ земли; для свѣтила въ горизонтѣ $X = a(1{,}00024)$ и вмѣсто ρ должно взять $\rho \times 1{,}00024$ по Бесселю.

Пусть будутъ: φ'_0 и t_0 геоцентр. широта мѣста и час. уголъ солнца, вычисленные допуская $\zeta' = 90°$; φ' точная широта при $\zeta' = 90° + \theta$ и t точный часовый уголъ; тогда

$$\varphi' = \varphi'_0 - \frac{\theta \operatorname{Sin} \delta'}{\operatorname{Cos} \varphi'_0}, \quad t = t_0 + \frac{\theta}{\operatorname{Cos} \varphi'_0 \operatorname{Cos} \delta' . \operatorname{Sin} t_0}$$

$$\theta = 34',6 \pm r' + \frac{e^2}{\operatorname{Sin} 1'} . \operatorname{Sin} \varphi' \operatorname{Sin} \delta', \quad \frac{e^2}{\operatorname{Sin} 1'} = 23',3;$$

знакъ + относится къ точкѣ самаго ранняго начала, знакъ — къ точкѣ самаго поздняго конца затмѣнія.

Въ случаѣ внутреннихъ прикосновеній: для полныхъ затмѣній $\Delta' = r - r'$; для кольцеобразныхъ $\Delta' = r' - r$; въ обоихъ случаяхъ

$$\theta = 34',6 + \frac{e^2}{\operatorname{Sin} 1'} . \operatorname{Sin} \varphi' \operatorname{Sin} \delta'.$$

Въ этихъ случаяхъ вычисляютъ φ' и t съ точностію по уравненіямъ

$$\operatorname{Sin} \varphi' = \operatorname{Cos} \zeta' \operatorname{Sin} \delta' + \operatorname{Sin} \zeta' \operatorname{Cos} \delta' \operatorname{Cos} v$$

$$\operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Cos} t = \operatorname{Cos} \zeta' \operatorname{Cos} \delta' - \operatorname{Sin} \zeta' \operatorname{Sin} \delta' \operatorname{Cos} v$$

$$\operatorname{Cos} \varphi' \operatorname{Sin} t = \operatorname{Sin} \zeta' \operatorname{Sin} v$$

вост. долг. мѣста $\lambda = t - 15\tau$.

ПРИЛОЖЕНІЯ ПРЕДЫДУЩАГО.

Кривыя линіи для внѣшнихъ и внутренныхъ прикосновеній краевъ диска луны и солнца.

Конусъ лунной полутѣни, въ томъ мѣстѣ гдѣ онъ встрѣчаетъ землю, никогда не бываетъ такъ широкъ, чтобъ разомъ вся земля могла въ немъ помѣститься. Въ каждомъ затмѣніи солнца или другаго свѣтила луною, либо часть конуса лунной полутѣни пересѣкается съ земною поверхностію, либо весь конусъ вступаетъ въ землю. Въ первомъ случаѣ пересѣченіе даетъ только одну кривую линію, которая отдѣляетъ на землѣ страны, гдѣ можетъ усматриваться затмѣніе, отъ странъ, съ которыхъ не видно затмѣнія; съ самой кривой линіи могутъ быть замѣчаемы только простыя прикосновенія (appulsae). Во второмъ случаѣ происходятъ на землѣ двѣ такого рода кривыя линія.

Если вычислимъ точки, съ которыхъ видимы прикосновенія краевъ свѣтилъ въ горизонтѣ и сверхъ того опредѣлимъ точки, съ которыхъ прикосновенія краевъ представляютъ наибольшую фазу затмѣнія, то можемъ составить кривыя линіи, ограничивающія на землѣ съ востока и запада, съ сѣвера и юга, или только съ сѣвера либо юга, всё пространство, внѣ котораго нельзя наблюдать затмѣнія. Эти кривыя вычисляются тамъ, какъ выше было объяснено.

О центральныхъ затмѣніяхъ.

Затмѣніе представится центральнымъ съ той точки на землѣ, съ которой центры луны и солнца усматриваются на одной прямой линіи. Въ этомъ случаѣ.

$$D = 0,\ x = \bar{x},\ y = \bar{y},$$

или

$$x = \Pi\rho \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin} t,$$

$$y = \Pi\rho \operatorname{Sin}\varphi' \operatorname{Cos}\delta' - \Pi\rho \operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin}\delta'.\operatorname{Cos} t.$$

Избираютъ какое либо время τ подъ меридіаномъ таблицъ и для него вычисляютъ П, x и y; нужно только выбирать время τ такъ, чтобъ оно мало отличалось отъ времени ист. соединенія луны и солнца и чтобъ удовлетворялись предъидущія уравненія, т. е. чтобъ x и y были не болѣе разности горизонт. параллаксовъ луны и солнца. Считая сперва землю за шаръ и $\rho = 1 - \frac{1}{594}$, вычисляютъ широту φ мѣста φ' и часовой уголъ t солнца для точки, съ которой въ принятое время τ, будетъ видно центральное затмѣніе. Для удобства вычисленія положимъ:

$$\operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin} t = \operatorname{Sin} V$$

$$\operatorname{Cos}\varphi' . \operatorname{Cos} t = \operatorname{Cos} V . \operatorname{Cos} W$$

$$\operatorname{Sin}\varphi' = \operatorname{Cos} V . \operatorname{Sin} W;$$

тогда

$$x = \Pi\rho \operatorname{Sin} V, \qquad y = \Pi\rho \operatorname{Cos} V \operatorname{Sin}(W - \delta').$$

Углы V и H должно избирать такъ, чтобъ были Cos V и Cos (W — δ') положительными (стр. 20). И такъ изъ уравненій:

$$\operatorname{Sin} V = \frac{x}{\Pi\rho},$$

$$\operatorname{Sin}(W - \delta) = \frac{y}{\Pi\rho \operatorname{Cos} V},$$

найдемъ V и W, а потомъ φ' и t. За тѣмъ опредѣляемъ ρ и повторяемъ вычисленіе.

Вост. долгота мѣста $= \lambda = t - 15\tau$.

Подобныя же вычисленія дѣлаемъ для другихъ временъ τ.

Предѣльныя широты центральнаго затмѣнія получаются, взявъ $D = 0$; пусть

$$\operatorname{tg} H = \frac{\operatorname{Sin}\delta'}{\operatorname{Sin} B},$$

тогда

$$\operatorname{Sin}(\varphi', \pm H) = \frac{\eta \operatorname{Sin} N}{\rho\Pi} = \frac{\eta \operatorname{Sin} N}{\rho(\pi - \pi')}.$$

Отсюда получаются два предѣла широтъ; если означимъ черезъ φ' широту параллели промежуточную между этими предѣ-

лами, то часовой уголъ t солнца и долготу мѣста, съ котораго на этой параллели затмѣніе покажется центральнымъ, выводятъ изъ уравн. на стр. 18; полагая $D = 0$:

$$\mathrm{Sin}(B + t) = \frac{f \,\mathrm{Sin}\, N}{\Pi\rho \,\mathrm{Cos}\, \varphi'.\, b};$$

$$\tau = T - T' + \frac{f \,\mathrm{Cos}\, N}{n} - \frac{\Pi\rho \,\mathrm{Cos}\, \varphi'.\, c}{n}.\, \mathrm{Sin}\,(C - t)$$

вост. долг. $$\lambda = t - 15\,\tau,$$

τ есть время подъ меридіаномъ таблицъ.

Легко изыскать широту и долготу мѣста, съ котораго видно центральное затмѣніе *въ истинный полдень*.

Въ этомъ случаѣ $t = 0$, $D = 0$, $b\,\mathrm{Sin}\,(B + t) = b\,\mathrm{Sin}\,B = \mathrm{Sin}\,\delta'\,\mathrm{Sin}\,N$, $c\,\mathrm{Sin}\,(C - t) = c\,\mathrm{Sin}\,C = \mathrm{Sin}\,\delta'\,\mathrm{Cos}\,N$; посему уравн. (C), стр. 18, даютъ

$$0 = -\eta\,\mathrm{Sin}\,N + \Pi\rho\,(\mathrm{Sin}\,\varphi'\,\mathrm{Cos}\,\delta' - \mathrm{Cos}\,\varphi'\,\mathrm{Sin}\,\delta')\,\mathrm{Sin}\,N,$$

$$0 = +\eta\,\mathrm{Cos}\,N + n\,(\tau - T + T') - \Pi\rho\,(\mathrm{Sin}\,\varphi'\,\mathrm{Cos}\,\delta' - \mathrm{Cos}\,\varphi'\,\mathrm{Sin}\,\delta')\,\mathrm{Cos}\,N,$$

или $$\mathrm{Sin}\,(\varphi' - \delta) = \frac{+\eta}{\Pi\rho}$$

$$\tau = T - T',$$

вост. долг. $$\lambda = -15\,\tau.$$

Опредѣлимъ два мѣста, изъ которыхъ въ одномъ центральное затмѣніе увидятъ ранѣе, а въ другомъ позже, чѣмъ во всѣхъ другихъ точкахъ на землѣ.

Для этихъ точекъ центръ солнца кажется въ самомъ горизонтѣ; $D = 0$ и поэтому (стр. 33).

$$\mathrm{Cos}\,\zeta' = -\,\mathrm{Sin}\,(34',6 + 23',3\,\mathrm{Sin}\,\varphi'\,\mathrm{Sin}\,\delta'),$$

$$\mathrm{Sin}\,(v - N) = \frac{-\eta\,\mathrm{Sin}\,N}{\Pi\rho\,\mathrm{Sin}\,\zeta'},$$

$$\tau = T - T' - \frac{\eta\,\mathrm{Cos}\,N}{n} + \frac{\Pi\rho\,\mathrm{Sin}\,\zeta'\,\mathrm{Cos}\,(v - N)}{n}$$

$$\operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Sin} t = \operatorname{Sin}\zeta' \operatorname{Sin} v,$$

$$\operatorname{Cos}\varphi' \operatorname{Cos} t = \operatorname{Cos}\zeta' \operatorname{Cos}\delta' - \operatorname{Sin}\zeta' \operatorname{Sin}\delta' \operatorname{Cos} v$$

$$\operatorname{Sin}\varphi' = \operatorname{Cos}\zeta' \operatorname{Sin}\delta' + \operatorname{Sin}\zeta' \operatorname{Cos}\delta' \operatorname{Cos} v.$$

Отсюда найдемъ φ' и t; вост. долгота $\lambda = t - 15\tau$.

Такъ какъ уголъ $v - N$ опредѣляется по синусу, то найдемъ двѣ величины для угла $v - N$; одна принадлежитъ точкѣ самаго ранняго появленія фазы; для нея $\operatorname{Cos}(v - N)$ есть отрицательный; другая точка относится къ самому позднему появленію центральнаго затмѣнія въ горизонтѣ; для нея $\operatorname{Cos}(v - N)$ есть положительный.

Для перваго приближенія полагаемъ $\operatorname{Cos}\zeta' = -\operatorname{Sin} 34',6$; $\rho = 1 - \frac{1}{589}$, а величины Π, n, N, η, T, T' беремъ для времени T; напедши φ' и τ, вычисляемъ ρ и величины Π, n, и проч. для этаго времени τ, а потомъ повторяемъ всё вычисленіе. Употребляя логариѳмы о 4-хъ-десятичныхъ знакахъ, можно считать $\operatorname{Sin}\zeta' = 1$.

Подобнымъ образомъ вычисляютъ прохожденія Меркурія и Венеры черезъ солнце, а также покрытія звѣздъ и планетъ луною.

ЛОРД
50 к.
-05