



В.В. Сазонов
Т.Ф. Барбашова

НАУКА
SCIENCE



ФАКУЛЬТЕТ КОСМИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ГРАВИТАЦИОННАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

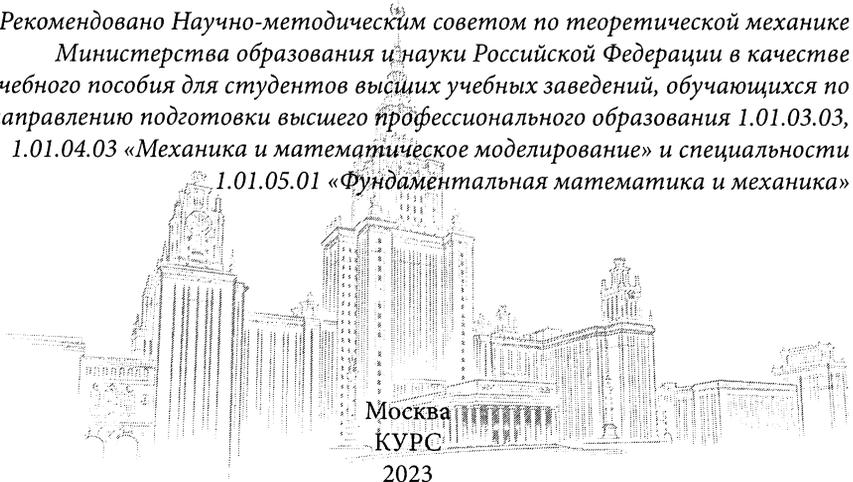
СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС

В.В. Сазонов
Т.Ф. Барбашова

ГРАВИТАЦИОННАЯ ОРИЕНТАЦИЯ ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ

СПЕЦИАЛЬНЫЙ КУРС

*Рекомендовано Научно-методическим советом по теоретической механике
Министерства образования и науки Российской Федерации в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по
направлению подготовки высшего профессионального образования 1.01.03.03,
1.01.04.03 «Механика и математическое моделирование» и специальности
1.01.05.01 «Фундаментальная математика и механика»*



Москва
КУРС

2023

УДК 531.39
ББК 22.2
С 14

ФЗ Издание не подлежит маркировке
№ 436-ФЗ в соответствии с п. 1 ч. 4 ст. 11

С 14 **Сазонов В.В., Барбашова Т.Ф.**
Гравитационная ориентация искусственных спутников Земли: Специальный курс. — Москва: КУРС, 2023. — 144 с.

ISBN 978-5-907535-44-2

В предлагаемом курсе рассматривается динамика пассивной гравитационной ориентации искусственных спутников Земли. Основное внимание уделено режиму одноосной гравитационной ориентации. В рамках метода Н.Н. Боголюбова – Ю.А. Митропольского построены интегральные поверхности уравнений вращательного движения спутника, описывающие его номинальные невозмущенные движения в этом режиме. В случае, когда уравнения движения допускают обобщенный интеграл энергии или обладают свойствами симметрии, указанные интегральные поверхности состоят из периодических решений. Эти решения детально изучены с помощью аналитических и численных методов. Приведены примеры исследования интегральных поверхностей ориентированного движения в общем неперiodическом случае. Исследовано дестабилизирующее влияние сопротивления атмосферы на режим гравитационной ориентации.

Спецкурс рассчитан на два семестра. Он читался в МГУ студентам 3–5 курсов механико-математического факультета, а также студентам факультета космических исследований.

УДК 531.39
ББК 22.2

ISBN 978-5-907535-44-2

© Сазонов В.В., Барбашова Т.Ф., 2022
© КУРС, 2022

Оглавление

Предисловие	5
Глава 1 Трехосная гравитационная ориентация спутника на круговой орбите	8
1.1. Силовая функция твердого тела в гравитационном поле материальной точки	8
1.2. Уравнения движения трехосного спутника	11
1.3. Положения равновесия трехосного спутника в орбитальной системе координат	12
1.4. Устойчивость положений равновесия	13
1.5. Преобразование уравнений движения спутника	15
1.6. Линеаризация уравнений движения. Необходимые условия устойчивости	18
Глава 2 Медленные движения спутника в режиме одноосной гравитационной ориентации	24
2.1. Использование осей Резаля	24
2.2. Уравнения движения осесимметричного спутника	25
2.3. Режим одноосной гравитационной ориентации при $\mu \ll 1$	27
2.4. Интегральная поверхность медленных движений	28
2.5. Периодические решения	33
2.6. Численное исследование медленных периодических движений	38
2.7. Аппроксимация возмущенного движения спутника медленными периодическими движениями	46
Глава 3 Гравитационная ориентация вращающегося спутника	50
3.1. Гравитационная ориентация динамически симметричного спутника	50
3.2. Гравитационная ориентация спутника, близкого к динамически симметричному. Интегральная поверхность ориентированного движения	52
3.3. Периодические вращения	55
3.4. Численное исследование режима гравитационной ориентации спутника, близкого к динамически симметричному	58
3.5. Устойчивость периодических вращений	62
Глава 4 Влияние диссипации энергии на режим трехосной гравитационной ориентации спутника	66
4.1. Уравнения движения спутника-гиростата	66
4.2. Спутник-гиростат под действием гравитационного момента	69
4.3. Устойчивость положений равновесия гиростата	70

Глава 5	Аэродинамический момент и его влияние на режим трехосной гравитационной ориентации спутника	75
5.1.	Вычисление аэродинамического момента	75
5.2.	Влияние аэродинамического момента на положения равновесия трехосного спутника в орбитальной системе координат	81
5.3.	Возникновение неустойчивости	82
Глава 6	Об одном механизме потери устойчивости режима гравитационной ориентации спутника	85
6.1.	Самопроизвольно установившийся режим гравитационной ориентации	85
6.2.	Движение спутника-гиростата под действием гравитационного и аэродинамического моментов	86
6.3.	Режим гравитационной ориентации спутника	88
6.4.	Исследование предельных циклов	90
6.5.	Механическая интерпретация полученных результатов	95
6.6.	Исследование режима гравитационной ориентации в рамках периодической модели	96
Глава 7	Влияние непотенциального аэродинамического момента на гравитационную ориентацию вращающегося спутника	100
7.1.	Уравнения вращательного движения спутника	100
7.2.	Интегральная поверхность ориентированного движения	102
7.3.	Двухцикловой метод вычисления квазистационарных вращений	106
7.4.	Результаты расчетов	108
7.5.	Устойчивость интегральной поверхности ориентированного движения	112
Глава 8	Влияние сопротивления атмосферы на одноосную гравитационную ориентацию спутника	120
8.1.	Уравнения движения спутника под действием гравитационного и восстанавливающего аэродинамического моментов	120
8.2.	Интегральная поверхность медленных движений	123
8.3.	Другой способ построения интегральной поверхности медленных движений	129
8.4.	Возмущенное движение	135
Литература		137
Предметный указатель		140

Предисловие

В предлагаемом курсе рассматривается динамика пассивной гравитационной ориентации искусственных спутников Земли. Спецкурс читается для студентов 3–5 курсов механико-математического факультета МГУ.

Возможность гравитационной ориентации обусловлена свойством центрального ньютоновского гравитационного поля определенным образом ориентировать находящееся в нем тело. Например, на круговой орбите спутник с неравными главными центральными моментами инерции имеет четыре устойчивых положения равновесия в орбитальной системе координат. Любое из них можно использовать в качестве номинального невозмущенного движения спутника в режиме гравитационной ориентации. В одном из таких положений находится Луна, всегда обращенная к Земле одной своей стороной.

Эффективное применение гравитационной ориентации возможно лишь в том случае, когда спутник имеет большие моменты инерции. На некоторых спутниках большая величина этих моментов обеспечивалась выдвижением специальных штанг, длина которых составляла десятки метров. Кроме того, спутник с гравитационной системой ориентации имел специальные демпфирующие устройства, предназначенные для гашения возмущенного движения. С выводом на орбиту тяжелых объектов идея гравитационной ориентации получила новую реализацию. Тяжелый, массой более 10 т, спутник имеет достаточно большие моменты инерции, и если высота его орбиты более 300 км, то влияние гравитационного момента на вращательное движение такого спутника может быть сделано определяющим. При этом отпадает необходимость в использовании выдвижных штанг. Тяжелые спутники имеют обычно активную систему управления, позволяющую привести спутник в нужное положение с высокой точностью. Это дает возможность обойтись без специальных демпфирующих устройств. Первыми спутниками описанного типа, на которых использовался режим гравитационной ориентации, были орбитальные станции «Скайлэб», «Салют-6» и «Салют-7».

Гравитационная ориентация тяжелых спутников имеет свои особенности. Как правило, эти спутники представляют собой вытянутые, почти осесимметричные конструкции. Спутники указанной формы в режиме гравитационной ориентации располагаются так, что их продольная ось (ось минимального момента инерции) направлена по прямой, соединяющей центры масс Земли и спутника, то есть вдоль местной вертикали. В таком положении компонента восстанавливающего гравитационного момента, перпендикулярная продольной оси, будет достаточно большой, а параллельная этой оси компонента

момента сил инерции малой (для осесимметричного спутника последний компонента равна нулю). Следовательно, даже при малых ошибках приведения спутника в режим гравитационной ориентации его движение вокруг продольной оси может быть вращательным.

Указанное обстоятельство, с одной стороны, снижает упорядоченность ориентированного движения, а с другой — позволяет расширить набор номинальных движений. Если спутник близок осесимметричному, то в качестве его ориентированного движения можно принять движение, близкое к конической прецессии соответствующего симметричного спутника. В конической прецессии осесимметричный спутник равномерно вращается вокруг оси симметрии, которая перпендикулярна касательной к орбите и образует постоянный угол с местной вертикалью. Этот угол будет тем меньше, чем больше спутник вытянут вдоль оси симметрии и чем меньше его угловая скорость вращения вокруг этой оси. Движение, близкое к конической прецессии, удобно в случае, когда необходимо одновременно обеспечить равномерное освещение поверхности спутника Солнцем и направить его продольную ось в сторону Земли. Спутник приводится в нужное движение штатной системой управления, которая затем выключается. По истечении некоторого времени негравитационные внешние моменты могут увеличить или уменьшить угловую скорость вращения спутника вокруг продольной оси до недопустимых значений. В этом случае с помощью системы управления нужно восстановить ориентированное движение. При определенных условиях такой режим полета может оказаться экономичным.

В рассмотренных ситуациях погрешность ориентации продольной оси спутника, как правило, составляет 5–10°. Эти ситуации похожи. В общих словах их можно описать следующим образом. Спутник представляет собой твердое тело, движение которого вокруг центра масс не влияет на движение центра масс. Вращательное движение спутника описывается системой дифференциальных уравнений шестого порядка, его номинальное невозмущенное движение в режиме одноосной гравитационной ориентации — решениями этой системы, лежащими на ее двумерной интегральной поверхности. Исследование таких поверхностей проведено в данном спецкурсе.

При естественных упрощающих предположениях (движение вокруг центра масс не влияет на движение центра масс, орбита круговая и неизменна в абсолютном пространстве) вращательное движение спутника твердого тела под действием гравитационного момента описывается автономными дифференциальными уравнениями, обладающими свойствами симметрии и интегралом энергии. Интегральные поверхности этих уравнений, отвечающие движениям спутника в режиме одноосной гравитационной ориентации, состоят из периодических решений и исследованы детально. В случае учета в уравнениях движения неавтономных или непотенциальных возмущений ис-

следование интегральных поверхностей ориентированного движения усложняется. В данной работе такое исследование проведено на примере учета возмущающего действия аэродинамического момента методом асимптотического разделения движений.

Исследовано также влияние диссипации энергии на борту спутника и непотенциальности действующего на спутник аэродинамического момента на устойчивость режима трехосной гравитационной ориентации.

Глава 1

Трехосная гравитационная ориентация спутника на круговой орбите

1.1. Силовая функция твердого тела в гравитационном поле материальной точки

Рассмотрим два тела, одно из которых — материальная точка E массы M (или шар со сферически симметричным распределением плотности с центром в этой точке), второе — произвольное твердое тело. Второе тело будем называть спутником. Центр масс спутника находится в точке O . Спутник представим в виде совокупности материальных точек A_ν , имеющих массы m_ν и радиус-векторы $\mathbf{r}_\nu = \overrightarrow{EA_\nu}$ (см. рис. 1.1). Введем обозначения

$$\mathbf{R} = \frac{1}{m} \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{r}_{\nu} = \overrightarrow{EO}, \quad \boldsymbol{\rho}_{\nu} = \overrightarrow{OA_{\nu}} = \mathbf{r}_{\nu} - \mathbf{R},$$

где $m = \sum_{\nu} m_{\nu}$ — масса спутника, $\sum_{\nu} m_{\nu} \boldsymbol{\rho}_{\nu} = 0$.

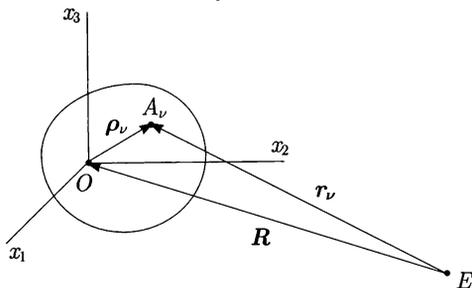


Рис. 1.1. Спутник и притягивающий центр.

Силовая функция спутника имеет вид

$$U = \sum_{\nu} \frac{fMm_{\nu}}{|\mathbf{r}_{\nu}|} = \sum_{\nu} \frac{fMm_{\nu}}{|\mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_{\nu}|}.$$

Здесь f — универсальная гравитационная постоянная; постоянное слагаемое, отвечающее гравитационному взаимодействию точек спутника между собой, опущено. Будем считать, что $|\boldsymbol{\rho}_{\nu}| \ll |\mathbf{R}|$ ($\nu = 1, 2, \dots$). Получим приближенную формулу для $|\mathbf{r}_{\nu}|^{-1}$ в этом случае. Равенство $\mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{R} + \boldsymbol{\rho}_{\nu}$ дает

$$|\mathbf{r}_{\nu}|^2 = \mathbf{r}_{\nu} \cdot \mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{R} + 2\mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\rho}_{\nu} + \boldsymbol{\rho}_{\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}_{\nu} = R^2 \left(1 + 2 \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\rho}_{\nu}}{R} + \frac{\boldsymbol{\rho}_{\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}_{\nu}}{R^2} \right),$$

$$R = |\mathbf{R}|, \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{\mathbf{R}}{R}.$$

Выражение для $|\mathbf{r}_\nu|^{-1}$ запишем, используя формулу бинома Ньютона. С точностью до членов второго порядка малости по $|\boldsymbol{\rho}_\nu|/R$ включительно имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{r}_\nu|} &= \frac{1}{R} \left[1 + 2 \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu}{R} + \frac{\boldsymbol{\rho}_\nu \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu}{R^2} \right]^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{R} \left[1 - \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu}{R} - \frac{\boldsymbol{\rho}_\nu \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu}{2R^2} + \frac{3 \cdot 4}{8} \frac{(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu)^2}{R^2} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Силовая функция с точностью до членов второго порядка малости по $|\boldsymbol{\rho}_\nu|/R$ выражается формулой

$$\begin{aligned} U &= \frac{fM}{R} \sum_\nu m_\nu \left[1 - \frac{\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu}{R} + \frac{3}{2} \frac{(\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu)^2}{2R^2} - \frac{\boldsymbol{\rho}_\nu \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu}{2R^2} \right] = \\ &= \frac{fM}{R} \underbrace{\sum_\nu m_\nu}_m - \frac{fM}{R^2} \underbrace{\boldsymbol{\gamma} \cdot \sum_\nu m_\nu \boldsymbol{\rho}_\nu}_0 + \frac{3}{2} \frac{fM}{R^3} \sum_\nu m_\nu (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu)^2 - \frac{fM}{2R^3} \sum_\nu m_\nu (\boldsymbol{\rho}_\nu \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu). \end{aligned}$$

Преобразуем последние слагаемые. В центр масс O спутника поместим начало *связанной со спутником системы координат* $Ox_1x_2x_3$. Компоненты векторов здесь и ниже указываются в этой системе. В частности,

$$\boldsymbol{\rho}_\nu = (x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, x_{\nu 3}), \quad \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3), \quad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1.$$

Обозначим через I_{ij} компоненты тензора инерции $\hat{\mathbf{I}}$ спутника в системе координат $Ox_1x_2x_3$:

$$\hat{\mathbf{I}} = \|I_{ij}\|_{i,j=1}^3, \quad I_{ij} = \sum_\nu m_\nu \left(\delta_{ij} \sum_{l=1}^3 x_{\nu l}^2 - x_{\nu i} x_{\nu j} \right), \quad (1.1)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Имеем

$$\begin{aligned} \text{tr} \hat{\mathbf{I}} &= \sum_{i=1}^3 I_{ii} = \sum_\nu m_\nu \left(\sum_{i=1}^3 3x_{\nu i}^2 - x_{\nu i}^2 \right) = 2 \sum_\nu m_\nu \sum_{i=1}^3 x_{\nu i}^2, \\ \sum_\nu m_\nu x_{\nu i} x_{\nu j} &= -I_{ij} + \underbrace{\delta_{ij} \sum_\nu m_\nu \sum_{l=1}^3 x_{\nu l}^2}_{\frac{1}{2} \text{tr} \hat{\mathbf{I}}} = \frac{\delta_{ij}}{2} \text{tr} \hat{\mathbf{I}} - I_{ij} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_\nu m_\nu (\boldsymbol{\rho}_\nu \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu) &= \frac{1}{2} \text{tr} \hat{\mathbf{I}}, \\ \sum_\nu m_\nu (\boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\rho}_\nu)^2 &= \sum_{i,j=1}^3 \gamma_i \gamma_j \sum_\nu m_\nu x_{\nu i} x_{\nu j} = \sum_{i,j=1}^3 \gamma_i \gamma_j \left(\frac{\delta_{ij}}{2} \text{tr} \hat{\mathbf{I}} - I_{ij} \right) = \\ &= \frac{\text{tr} \hat{\mathbf{I}}}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^3 \gamma_i^2}_1 - \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \gamma_i \gamma_j = \frac{\text{tr} \hat{\mathbf{I}}}{2} - \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \gamma_i \gamma_j. \end{aligned}$$

Таким образом, силовая функция спутника массы m с центральным тензором инерции $\hat{\mathbf{I}}$ в гравитационном поле притягивающей точки массы M представляется в виде

$$\begin{aligned} U &= \frac{fMm}{R} + \frac{3}{2} \frac{fM}{R^3} \left(\frac{1}{2} \operatorname{tr} \hat{\mathbf{I}} - \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \gamma_i \gamma_j \right) - \frac{fM}{4R^3} \operatorname{tr} \hat{\mathbf{I}} = \\ &= \frac{fMm}{R} - \frac{3}{2} \frac{fM}{R^3} \sum_{i,j=1}^3 I_{ij} \gamma_i \gamma_j + \frac{fM}{2R^3} \operatorname{tr} \hat{\mathbf{I}}. \end{aligned}$$

Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, образованную главными центральными осями инерции спутника. В этой системе тензор инерции $\hat{\mathbf{I}}$ спутника диагонален:

$$\hat{\mathbf{I}} = \operatorname{diag}(I_1, I_2, I_3),$$

где I_i — момент инерции спутника относительно оси Ox_i ($i = 1, 2, 3$). Силовая функция принимает вид

$$U = \frac{fMm}{R} - \frac{3}{2} \frac{fM}{R^3} (I_1 \gamma_1^2 + I_2 \gamma_2^2 + I_3 \gamma_3^2) + \frac{fM}{2R^3} (I_1 + I_2 + I_3). \quad (1.2)$$

Обозначим через \mathbf{M} гравитационный момент — главный момент гравитационных сил, действующих на спутник. Пусть в системе координат $Ox_1x_2x_3$ $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$. Далее компоненты всех векторов выписываются в этой системе координат.

Вычислим момент \mathbf{M} относительно точки O , считая ее неподвижной. Выразим этот момент через виртуальную работу в гравитационном поле. Рассмотрим виртуальный поворот спутника относительно точки O . Виртуальное перемещение точки A_ν в этом повороте можно представить в виде

$$\delta \boldsymbol{\rho}_\nu = \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\rho}_\nu,$$

где $\delta \boldsymbol{\varphi} = (\delta \varphi_1, \delta \varphi_2, \delta \varphi_3)$ — вектор бесконечно малого поворота. Работа сил \mathbf{F}_ν , действующих на точки A_ν спутника, на виртуальных перемещениях равна

$$\delta A = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \delta \boldsymbol{\rho}_\nu = \sum_\nu \mathbf{F}_\nu \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\rho}_\nu) = \left(\sum_\nu \boldsymbol{\rho}_\nu \times \mathbf{F}_\nu \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}.$$

Силы \mathbf{F}_ν потенциальны с силовой функцией U , поэтому

$$\delta A = \delta U = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_i} \delta \gamma_i = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}.$$

На виртуальном повороте спутника вокруг точки O вектор $\boldsymbol{\gamma}$ остается неизменным в абсолютном пространстве, то есть

$$\delta \boldsymbol{\gamma} + \delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\gamma} = 0. \quad (1.3)$$

Здесь $\delta \boldsymbol{\gamma} = (\delta \gamma_1, \delta \gamma_2, \delta \gamma_3)$ — виртуальное изменение вектора $\boldsymbol{\gamma}$. Учитывая (1.3), имеем

$$\begin{aligned} \delta A &= M_1 \delta \varphi_1 + M_2 \delta \varphi_2 + M_3 \delta \varphi_3 = \mathbf{M} \cdot \delta \boldsymbol{\varphi} = \delta U = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma} = \\ &= - \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \cdot (\delta \boldsymbol{\varphi} \times \boldsymbol{\gamma}) = \left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} \right) \cdot \delta \boldsymbol{\varphi}, \end{aligned}$$

откуда следует

$$\mathbf{M} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma}.$$

Используя формулу (1.2), находим

$$\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} = -\frac{3fM}{R^3} \hat{\boldsymbol{\Gamma}} \boldsymbol{\gamma},$$

$$\mathbf{M} = \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \times \boldsymbol{\gamma} = \frac{3fM}{R^3} (\boldsymbol{\gamma} \times \hat{\boldsymbol{\Gamma}} \boldsymbol{\gamma}). \quad (1.4)$$

Компоненты вектора гравитационного момента \mathbf{M} имеют вид

$$M_1 = \frac{3fM}{R^3} (I_3 - I_2) \gamma_2 \gamma_3, \quad M_2 = \frac{3fM}{R^3} (I_1 - I_3) \gamma_1 \gamma_3, \quad M_3 = \frac{3fM}{R^3} (I_2 - I_1) \gamma_1 \gamma_2.$$

Задача. Доказать, что главный вектор гравитационных сил, действующих на спутник, выражается формулой

$$\mathbf{F} = \frac{\partial U}{\partial R} \boldsymbol{\gamma} + \frac{1}{R} \left[\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} - \left(\boldsymbol{\gamma} \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} \right) \boldsymbol{\gamma} \right].$$

Оценить влияние слагаемых в формуле (1.2), зависящих от I_1, I_2, I_3 , на орбитальное движение спутника.

Ниже полагаем, что такие слагаемые не влияют на орбитальное движение. Более того, орбиту центра масс спутника будем считать круговой и неизменной в абсолютном пространстве. В этом случае *среднее движение* спутника $\omega_0 = \sqrt{fM/R^3}$, где R — радиус орбиты. Среднее движение называется также *орбитальной частотой*. Тогда на круговой орбите гравитационный момент представляется в виде (см. (1.4))

$$\mathbf{M} = 3\omega_0^2 (\boldsymbol{\gamma} \times \hat{\boldsymbol{\Gamma}} \boldsymbol{\gamma}).$$

1.2. Уравнения движения трехосного спутника

Спутник называется *трехосным*, если $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_1$. Получим уравнения движения такого спутника относительно центра масс под действием гравитационного момента на круговой орбите.

Введем *орбитальную систему координат* $Ox_1x_2x_3$ с базисом $\{\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}\}$. В этой системе координат $\boldsymbol{\gamma}$, как и выше, — орт радиус-вектора центра масс спутника, $\boldsymbol{\beta}$ — орт вектора кинетического момента центра масс O в движении по орбите, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\gamma}$ — орт касательной к орбите в точке O (см. рис. 1.2). При этом

$$|\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\beta}| = |\boldsymbol{\gamma}| = 1, \quad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma} = 0.$$

Абсолютная угловая скорость орбитальной системы координат равна

$$\boldsymbol{\omega}_0 = \omega_0 \boldsymbol{\beta} = \text{const}.$$

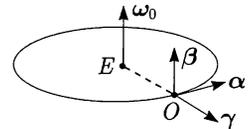


Рис. 1.2. Орт $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$.

Введем обозначения для компонент базисных ортов в системе координат $Ox_1x_2x_3$:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3), \quad \boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3).$$

Выпишем производные ортов по времени согласно формуле Пуассона:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_0 \beta \times \alpha = -\omega_0 \gamma, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \omega_0 \beta \times \gamma = \omega_0 \alpha, \quad \frac{d\beta}{dt} = 0.$$

С другой стороны,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\tilde{d}\alpha}{dt} + \omega \times \alpha,$$

где \tilde{d}/dt — относительная (локальная) производная по времени в системе координат $Ox_1x_2x_3$, ω — абсолютная угловая скорость этой системы. Далее дифференцирование в системе $Ox_1x_2x_3$ обозначается точкой над буквой:

$$\frac{\tilde{d}\alpha}{dt} = \dot{\alpha} = (\dot{\alpha}_1, \dot{\alpha}_2, \dot{\alpha}_3).$$

Аналогично

$$\frac{d\beta}{dt} = \dot{\beta} + \omega \times \beta, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} + \omega \times \gamma.$$

В результате кинематические уравнения Пуассона принимают вид

$$\dot{\alpha} + \omega \times \alpha = -\omega_0 \gamma, \quad \dot{\beta} + \omega \times \beta = 0, \quad \dot{\gamma} + \omega \times \gamma = \omega_0 \alpha. \quad (1.5)$$

Кинетический момент спутника относительно его центра масс равен $K = \hat{I}\omega$. Вращательное движение спутника на круговой орбите описывается динамическими уравнениями Эйлера (теорема об изменении кинетического момента тела относительно центра масс)

$$\dot{K} = M \implies \hat{I}\dot{\omega} + \omega \times \hat{I}\omega = 3\omega_0^2(\gamma \times \hat{I}\gamma). \quad (1.6)$$

Уравнения (1.5), (1.6) образуют замкнутую систему.

Задача. Выписать в уравнениях орбитального движения точки O члены, обусловленные вращательным движением спутника.

1.3. Положения равновесия трехосного спутника в орбитальной системе координат

Найдем положения равновесия трехосного спутника в орбитальной системе координат $OX_1X_2X_3$. В этих положениях орты α , β , γ постоянны, $\omega = \omega_0 = \omega_0\beta$. Тогда уравнения (1.6) записываются в виде

$$\omega_0^2(\beta \times \hat{I}\beta) = 3\omega_0^2(\gamma \times \hat{I}\gamma).$$

Последовательно умножим это соотношение скалярно на α , β и γ . Так как $\gamma \cdot \gamma = 1$, $\beta \cdot \beta = 1$, $\gamma \cdot \beta = 0$, с учетом свойств этих ортов получаем

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (\beta \times \hat{I}\beta) = 3\alpha \cdot (\gamma \times \hat{I}\gamma) &\implies (\alpha \times \beta) \cdot \hat{I}\beta = -3(\gamma \times \alpha) \cdot \hat{I}\gamma \implies \\ \gamma \cdot \hat{I}\beta = -3\beta \cdot \hat{I}\gamma &\implies 4(\gamma \cdot \hat{I}\beta) = 0 \implies \\ \gamma \cdot \hat{I}\beta = \beta \cdot \hat{I}\gamma = 0, & \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \beta \cdot (\beta \times \hat{I}\beta) = 3\beta \cdot (\gamma \times \hat{I}\gamma) &\implies (\beta \times \gamma) \cdot \hat{I}\gamma = 0 \implies \\ \alpha \cdot \hat{I}\gamma = \gamma \cdot \hat{I}\alpha = 0, & \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \gamma \cdot (\beta \times \hat{I}\beta) = 3\gamma \cdot (\gamma \times \hat{I}\gamma) &\implies (\beta \times \gamma) \cdot \hat{I}\beta = 0 \implies \\ \alpha \cdot \hat{I}\beta = \beta \cdot \hat{I}\alpha = 0. & \end{aligned} \quad (1.9)$$

Из соотношений (1.7)–(1.9) имеем

$$\begin{aligned} \beta \cdot \hat{I}\alpha = 0, \quad \gamma \cdot \hat{I}\alpha = 0 &\implies \hat{I}\alpha = a\alpha, \\ \alpha \cdot \hat{I}\beta = 0, \quad \gamma \cdot \hat{I}\beta = 0 &\implies \hat{I}\beta = b\beta, \\ \alpha \cdot \hat{I}\gamma = 0, \quad \beta \cdot \hat{I}\gamma = 0 &\implies \hat{I}\gamma = c\gamma. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Следовательно, α , β , γ орты главных центральных осей инерции спутника, то есть в положениях равновесия спутника его главные центральные оси инерции совпадают с осями орбитальной системы координат [3]. Всего существует 24 положения равновесия: $24 = 6 \cdot 4$.

1.4. Устойчивость положений равновесия

Уравнения (1.5), (1.6) движения спутника допускают обобщенный интеграл энергии, который во введенных переменных имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(\omega \cdot \hat{I}\omega) - \omega_0(\beta \cdot \hat{I}\omega) + \frac{3}{2}\omega_0^2(\gamma \cdot \hat{I}\gamma).$$

Действительно, покажем, что производная функции H по времени в силу уравнений (1.5), (1.6) равна нулю:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \omega \cdot \hat{I}\dot{\omega} - \omega_0(\beta \cdot \hat{I}\dot{\omega}) - \omega_0(\beta \cdot \hat{I}\dot{\omega}) + 3\omega_0^2(\dot{\gamma} \cdot \hat{I}\gamma) = \\ &= \omega \cdot [-\omega \times \hat{I}\omega + 3\omega_0^2(\gamma \times \hat{I}\gamma)] + \omega_0(\omega \times \beta) \cdot \hat{I}\omega - \\ &- \omega_0\beta \cdot [-\omega \times \hat{I}\omega + 3\omega_0^2(\gamma \times \hat{I}\gamma)] + 3\omega_0^2(-\omega \times \gamma + \omega_0\alpha) \cdot \hat{I}\gamma = \\ &= 3\omega_0^2\omega \cdot (\gamma \times \hat{I}\gamma) + \omega_0(\omega \times \beta) \cdot \hat{I}\omega + \omega_0\beta \cdot (\omega \times \hat{I}\omega) - \\ &- 3\omega_0^3\beta \cdot (\gamma \times \hat{I}\gamma) - 3\omega_0^2(\omega \times \gamma) \cdot \hat{I}\gamma + 3\omega_0^3\alpha \cdot \hat{I}\gamma = \\ &= \cancel{3\omega_0^2\omega \cdot (\gamma \times \hat{I}\gamma)} + \omega_0(\omega \times \beta) \cdot \hat{I}\omega - \omega_0(\omega \times \beta) \cdot \hat{I}\omega - \\ &- \cancel{3\omega_0^3(\beta \times \gamma) \cdot \hat{I}\gamma} - \cancel{3\omega_0^2\omega \cdot (\gamma \times \hat{I}\gamma)} + \cancel{3\omega_0^3\alpha \cdot \hat{I}\gamma} = 0. \end{aligned}$$

При исследовании устойчивости положений равновесия спутника функцию H можно использовать в качестве функции Ляпунова. В уравнениях (1.5), (1.6) сделаем замену переменных:

$$\omega \mapsto \xi: \quad \omega = \omega_0\beta + \xi. \quad (1.11)$$

В этом случае функция H принимает вид

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\omega_0^2(\beta \cdot \hat{I}\beta) + \omega_0(\beta \cdot \hat{I}\xi) + \frac{1}{2}(\xi \cdot \hat{I}\xi) - \\ &- \omega_0^2(\beta \cdot \hat{I}\beta) - \omega_0(\beta \cdot \hat{I}\xi) + \frac{3}{2}\omega_0^2(\gamma \cdot \hat{I}\gamma) = \\ &= \frac{1}{2}(\xi \cdot \hat{I}\xi) + \frac{3}{2}\omega_0^2(\gamma \cdot \hat{I}\gamma) - \frac{1}{2}\omega_0^2(\beta \cdot \hat{I}\beta). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Рассмотрим положения равновесия спутника, в которых

$$\gamma_0 = (0, 0, \pm 1), \quad \beta_0 = (0, \pm 1, 0), \quad \alpha_0 = \beta_0 \times \gamma_0.$$

Выбор знаков здесь произволен. С учетом равенств

$$\gamma_3^2 = 1 - \gamma_1^2 - \gamma_2^2, \quad \beta_2^2 = 1 - \beta_1^2 - \beta_3^2$$

функцию H можно представить так

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}\boldsymbol{\xi}) + \frac{3}{2}\omega_0^2(I_1\gamma_1^2 + I_2\gamma_2^2 + I_3\gamma_3^2) - \frac{1}{2}\omega_0^2(I_1\beta_1^2 + I_2\beta_2^2 + I_3\beta_3^2) = \\ &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}\boldsymbol{\xi}) + \frac{3}{2}\omega_0^2[(I_1 - I_3)\gamma_1^2 + (I_2 - I_3)\gamma_2^2 + I_3] + \\ &\quad + \frac{1}{2}\omega_0^2[(I_2 - I_1)\beta_1^2 + (I_2 - I_3)\beta_3^2 - I_2]. \end{aligned}$$

Исключив из функции H константы, получим функцию, которую примем в качестве функции Ляпунова:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}\boldsymbol{\xi}) + \frac{3}{2}\omega_0^2[(I_1 - I_3)\gamma_1^2 + (I_2 - I_3)\gamma_2^2] + \\ &\quad + \frac{1}{2}\omega_0^2[(I_2 - I_1)\beta_1^2 + (I_2 - I_3)\beta_3^2]. \end{aligned}$$

В уравнениях (1.5), (1.6) сделаем замену переменных (1.11), γ_3 и β_2 выразим через γ_1 , γ_2 и β_1 , β_3 соответственно. В результате получим систему уравнений относительно переменных $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \beta_1, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2)^\top$. Она имеет стационарное решение $\mathbf{x} = 0$ (положение равновесия спутника в орбитальной системе) и первый интеграл $V = V(\mathbf{x})$. Функция V положительно определена, если $I_3 < I_1 < I_2$. Значит, при выполнении этих неравенств рассматриваемые положения равновесия устойчивы в силу теоремы Ляпунова об устойчивости. Физический смысл этих неравенств состоит в том, что ось максимального момента инерции должна совпадать с нормалью к плоскости орбиты, а ось минимального момента инерции должна быть направлена по радиус-вектору центра масс спутника. В таком устойчивом положении равновесия находится Луна. Она всегда обращена одной и той же стороной к Земле.

Рассмотрим другой случай, а именно положения равновесия, в которых

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = (\pm 1, 0, 0), \quad \boldsymbol{\beta}_0 = (0, \pm 1, 0).$$

Выбор знаков здесь произволен. Тогда

$$\gamma_1^2 = 1 - \gamma_2^2 - \gamma_3^2, \quad \beta_2^2 = 1 - \beta_1^2 - \beta_3^2$$

и функция Ляпунова имеет вид

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\boldsymbol{\Gamma}}\boldsymbol{\xi}) + \frac{3}{2}\omega_0^2[(I_2 - I_1)\gamma_2^2 + (I_3 - I_1)\gamma_3^2] + \\ &\quad + \frac{1}{2}\omega_0^2[(I_2 - I_1)\beta_1^2 + (I_2 - I_3)\beta_3^2]. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Данные положения равновесия спутника устойчивы, если функция V положительно определена, то есть если $I_1 < I_3 < I_2$.

В космической технике рассматриваемые устойчивые положения равновесия используются для реализации режима так называемой *трехосной гравитационной ориентации* спутника (слово «трехосная» часто опускается). Говорят, что спутник находится в режиме *гравитационной ориентации*, если

он совершает малые колебания в окрестности устойчивого положения равновесия в орбитальной системе координат. Движение спутника в этом режиме будем называть *ориентированным*.

1.5. Преобразование уравнений движения спутника

Для изучения малых колебаний спутника в режиме гравитационной ориентации в полученной выше системе уравнений удобно использовать другие переменные. Введем углы, задающие положение системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно системы координат $OX_1X_2X_3$. Преобразование системы $OX_1X_2X_3$ в систему $Ox_1x_2x_3$ осуществляется тремя последовательными поворотами системы $OX_1X_2X_3$:

- 1) поворот на угол α вокруг оси OX_2 (см. рис. 1.3а);
- 2) поворот на угол β вокруг новой оси OX_3 , обозначенной через OX'_3 (см. рис. 1.3б);
- 3) поворот на угол γ вокруг оси $OX''_1 = OX_1$, полученной в результате первых двух поворотов оси OX_1 (см. рис. 1.3в).

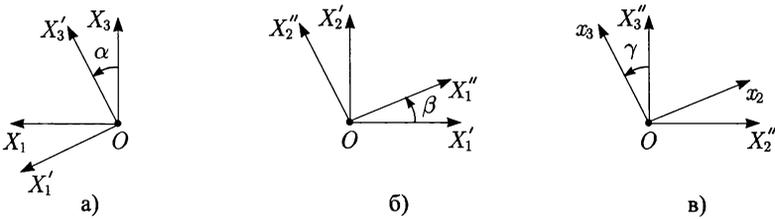


Рис. 1.3. Переход от системы координат $OX_1X_2X_3$ к системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Формулы перехода от системы координат $Ox_1x_2x_3$ к системе $OX_1X_2X_3$ имеют вид

$$X_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.14)$$

где a_{ij} — элементы *матрицы перехода* $\mathbf{A} = \|a_{ij}\|_{i,j=1}^3$. Эта матрица получается умножением матриц трех указанных поворотов:

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \alpha \cos \beta & -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma \\ \sin \beta & \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma \\ -\sin \alpha \cos \beta & \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma \end{vmatrix}.$$

Матрица \mathbf{A} ортогональна. Следовательно, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$ и согласно (1.14)

$$x_j = \sum_{i=1}^3 X_i a_{ij}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (1.15)$$

Сделаем подстановку $\alpha = \pi/2 + \delta$, удобную для изучения рассматриваемых ниже режимов движения спутника в случае $I_1 < I_2, I_3$. Тогда элементы матрицы перехода записываются в виде

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\sin \delta \cos \beta, & a_{12} &= \sin \delta \sin \beta \cos \gamma + \cos \delta \sin \gamma, \\ a_{21} &= \sin \beta, & a_{22} &= \cos \beta \cos \gamma, \\ a_{31} &= -\cos \delta \cos \beta, & a_{32} &= \cos \delta \sin \beta \cos \gamma - \sin \delta \sin \gamma, \\ a_{13} &= -\sin \delta \sin \beta \sin \gamma + \cos \delta \cos \gamma, \\ a_{23} &= -\cos \beta \sin \gamma, \\ a_{33} &= -\cos \delta \sin \beta \sin \gamma - \sin \delta \cos \gamma. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Углы δ и β задают положение оси Ox_1 в орбитальной системе координат, угол γ задает поворот спутника вокруг этой оси. При $\delta = \beta = 0$ ось Ox_1 направлена к центру Земли, при $\delta = \pi$ и $\beta = 0$ она совпадает с осью Ox_3 .

Получим выражения для компонент абсолютной угловой скорости спутника в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Используем соотношение (1.11). В этом соотношении $\boldsymbol{\xi}$ — угловая скорость спутника относительно системы координат $OX_1X_2X_3$, $\boldsymbol{\beta} = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ — орт оси Ox_2 , $\omega_0 \boldsymbol{\beta}$ — абсолютная угловая скорость системы $Ox_1x_2x_3$.

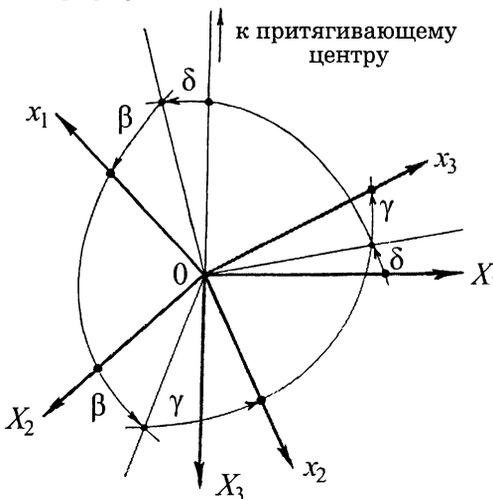


Рис. 1.4. Системы координат $Ox_1x_2x_3$ и $OX_1X_2X_3$.

Движение системы координат $Ox_1x_2x_3$, связанной со спутником, относительно системы $OX_1X_2X_3$ можно представить как одновременную реализацию трех поворотов на углы α , β , γ вокруг осей с ортами (a_{21}, a_{22}, a_{23}) ,

$(0, \sin \gamma, \cos \gamma)$, $(1, 0, 0)$ соответственно (см. рис. 1.3 и 1.4). Поэтому угловая скорость системы координат $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $OX_1X_2X_3$ равна сумме трех угловых скоростей:

$$\boldsymbol{\xi} = \dot{\alpha} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} + \dot{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{pmatrix} + \dot{\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В результате абсолютная угловая скорость спутника записывается так

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \dot{\alpha} \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix} + \dot{\beta} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{pmatrix} + \dot{\gamma} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega_0 \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\dot{\alpha} = \dot{\delta}$, отсюда для компонент вектора $\boldsymbol{\omega}$ имеем

$$\begin{cases} \omega_1 = (\dot{\delta} + \omega_0)a_{21} + \dot{\gamma}, \\ \omega_2 = (\dot{\delta} + \omega_0)a_{22} + \dot{\beta} \sin \gamma, \\ \omega_3 = (\dot{\delta} + \omega_0)a_{23} + \dot{\beta} \cos \gamma, \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{\gamma} = \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \\ \dot{\delta} = \frac{1}{\cos \beta} (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma) - \omega_0, \\ \dot{\beta} = \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma. \end{cases} \quad (1.17)$$

Это *кинематические уравнения Эйлера* для углов δ , β , γ .

Запишем динамические уравнения Эйлера (1.6) в системе $Ox_1x_2x_3$. Вектор $\boldsymbol{\gamma}$, определенный в п. 1.2, орт оси OX_3 , поэтому $\boldsymbol{\gamma} = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$ согласно (1.15). Следовательно, в системе $Ox_1x_2x_3$ уравнения (1.6) имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 &= 3\omega_0^2 (I_3 - I_2) a_{32} a_{33}, \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 &= 3\omega_0^2 (I_1 - I_3) a_{31} a_{33}, \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 &= 3\omega_0^2 (I_2 - I_1) a_{31} a_{32}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Введем безразмерные переменные и параметры

$$\tau = \omega_0 t, \quad \Omega_i = \frac{\omega_i}{\omega_0} \quad (i = 1, 2, 3), \quad \lambda = \frac{I_1}{I_3}, \quad \mu = \frac{I_2 - I_3}{I_1}. \quad (1.19)$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_2 - I_3 &= \mu I_1, \quad I_2 = (1 + \lambda \mu) I_3, \quad I_1 = \lambda I_3, \\ \frac{I_3 - I_1}{I_2} &= \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda \mu}, \quad \frac{I_1 - I_2}{I_3} = -(1 - \lambda + \lambda \mu). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Уравнения (1.17), (1.18) движения спутника в новых переменных записываются в виде

$$\begin{cases} \dot{\Omega}_1 = \mu (\Omega_2 \Omega_3 - 3a_{32} a_{33}), \\ \dot{\Omega}_2 = \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda \mu} (\Omega_1 \Omega_3 - 3a_{31} a_{33}), \\ \dot{\Omega}_3 = -(1 - \lambda + \lambda \mu) (\Omega_1 \Omega_2 - 3a_{31} a_{32}), \\ \dot{\gamma} = \Omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma), \\ \dot{\delta} = \frac{\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma}{\cos \beta} - 1, \\ \dot{\beta} = \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma. \end{cases} \quad (1.21)$$

Здесь и ниже точкой над буквой обозначается дифференцирование по τ . В новых переменных обобщенный интеграл энергии (1.12) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda (\Omega_1^2 - 2\Omega_1 a_{21} + 3a_{31}^2) + \frac{1}{2} (1 + \lambda \mu) (\Omega_2^2 - 2\Omega_2 a_{22} + 3a_{32}^2) + \\ + \frac{1}{2} (\Omega_3^2 - 2\Omega_3 a_{23} + 3a_{33}^2) = \text{const}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Уравнения (1.21) допускают стационарное решение

$$\beta = \gamma = \delta = 0, \quad \Omega_1 = \Omega_3 = 0, \quad \Omega_2 = 1, \quad (1.23)$$

описывающее положение равновесия спутника относительно орбитальной системы координат. В этом положении ось Ox_2 совпадает с осью OX_2 , ось Ox_3 совпадает с осью OX_1 , ось Ox_1 расположена вдоль оси OX_3 и направлена в сторону ей противоположную, то есть в сторону притягивающего центра. Это положение равновесия соответствует рассмотренному в п. 1.4 положению равновесия $\boldsymbol{\gamma}_0 = (-1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\beta}_0 = (0, 1, 0)$. Оно устойчиво, если $0 < I_1 < I_3 < I_2$. Через λ и μ это условие записывается так

$$0 < \lambda < 1, \quad 0 < \mu. \quad (1.24)$$

1.6. Линеаризация уравнений движения. Необходимые условия устойчивости

Малые колебания спутника в окрестности положения равновесия (1.23) описываются линеаризованными уравнениями. Линеаризуя (1.16), имеем

$$a_{31} = -1, \quad a_{32} = \beta, \quad a_{33} = -\delta.$$

Введем обозначение $\Omega_2 = 1 + \Delta\Omega_2$. Искомые линеаризованные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_1 = \mu\Omega_3, \quad \Delta\dot{\Omega}_2 = -\frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda\mu} \delta, \quad \dot{\Omega}_3 = -(1-\lambda+\lambda\mu)(\Omega_1+3\beta), \\ \dot{\gamma} = \Omega_1 - \beta, \quad \dot{\delta} = \Delta\Omega_2, \quad \dot{\beta} = \Omega_3 + \gamma. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Исключим из этих уравнений угловые скорости Ω_1 , $\Delta\Omega_2$ и Ω_3 . Из последних трех уравнений (1.25) следует

$$\Omega_1 = \dot{\gamma} + \beta, \quad \Delta\Omega_2 = \dot{\delta}, \quad \Omega_3 = \dot{\beta} - \gamma.$$

Подставляя последние соотношения в (1.25), получаем

$$\ddot{\delta} + \frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda\mu} \delta = 0, \quad (1.26)$$

$$\begin{cases} \ddot{\gamma} + (1-\mu)\dot{\beta} + \mu\gamma = 0, \\ \ddot{\beta} - \lambda(1-\mu)\dot{\gamma} + 4(1-\lambda+\lambda\mu)\beta = 0. \end{cases} \quad (1.27)$$

Полученная система распадается на уравнение (1.26), описывающее колебания спутника в плоскости орбиты, и систему (1.27), описывающую колебания спутника относительно этой плоскости.

Найдем условия устойчивости системы (1.26), (1.27). Условие устойчивости уравнения (1.26) имеет вид

$$(1 - \lambda)(1 + \lambda\mu) > 0. \quad (1.28)$$

Для исследования устойчивости системы (1.27) выпишем ее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} p^2 + \mu & (1 - \mu)p \\ -\lambda(1 - \mu)p & p^2 + 4(1 - \lambda + \lambda\mu) \end{vmatrix} \equiv p^4 + d_1 p^2 + d_2 = 0, \quad (1.29)$$

где

$$\begin{aligned} d_1 &= 4(1 - \lambda + \lambda\mu) + \lambda(1 - \mu)^2 + \mu, \\ d_2 &= 4\mu(1 - \lambda + \lambda\mu). \end{aligned} \quad (1.30)$$

Чтобы система (1.27) была устойчивой, корни биквадратного уравнения (1.29) должны быть чисто мнимыми. Подстановка $p = \nu\sqrt{-1}$ приводит это уравнение к виду

$$\nu^4 - d_1 \nu^2 + d_2 = 0. \quad (1.31)$$

Корни уравнения (1.29) будут чисто мнимыми в том и только том случае, когда корни уравнения (1.31) действительны и положительны, то есть при выполнении неравенств

$$d_1 > 0, \quad d_2 > 0, \quad d_1^2 - 4d_2 > 0. \quad (1.32)$$

Частоты малых колебаний по углам β и γ имеют вид

$$\nu_1 = \sqrt{\frac{1}{2}(d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4d_2})}, \quad \nu_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(d_1 - \sqrt{d_1^2 - 4d_2})}.$$

Последнее неравенство (1.32) может быть нестрогим. Однако в таком случае при $\nu_1 = \nu_2$ решение уравнений для β и γ может содержать вековые члены.

Моменты инерции I_i ($i = 1, 2, 3$) спутника удовлетворяют неравенствам треугольника

$$(1) \quad I_1 + I_2 > I_3, \quad (2) \quad I_2 + I_3 > I_1, \quad (3) \quad I_1 + I_3 > I_2,$$

откуда

$$\begin{aligned} -I_1 <^{(1)} I_2 - I_3 <^{(3)} I_1 &\implies -1 < \mu < 1, \\ (2) \implies 1 + \lambda\mu + 1 > \lambda &\implies \lambda < \frac{2}{1 - \mu}. \end{aligned}$$

Таким образом, параметры λ и μ должны лежать в области

$$0 < \lambda < \frac{2}{1 - \mu}, \quad -1 < \mu < 1,$$

называемой областью физически допустимых значений λ и μ (см. рис. 1.5). В этой области согласно (1.20) имеем $1 + \lambda\mu > 0$. Тогда из неравенства $(1 - \lambda)(1 + \lambda\mu) > 0$ (см. (1.28)) следует неравенство $\lambda < 1$.

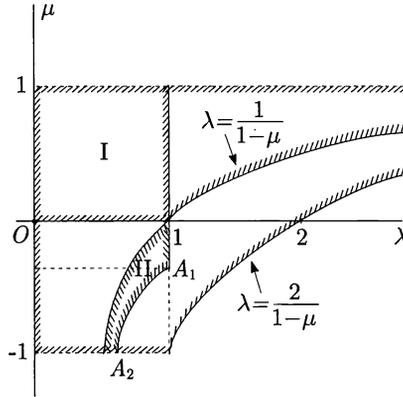


Рис. 1.5. Область допустимых значений λ и μ , области необходимых и достаточных условий устойчивости стационарного решения (1.23).

На рис. 1.5 область $I = \{(\lambda, \mu) : 0 < \lambda < 1, 0 < \mu < 1\}$ область достаточных условий устойчивости. Необходимые условия устойчивости (1.32) выполнены в области I и области II [3]. Последняя задается неравенствами (1.32) и $\lambda < 1$. Найдем границы области II. Из неравенства $d_2 > 0$ получаем $\mu(1 - \lambda + \lambda\mu) > 0$. Возможны два случая:

$$\begin{aligned} 1. \quad \mu > 0, \quad 1 - \lambda + \lambda\mu > 0 &\implies \lambda < \frac{1}{1 - \mu}, \\ 2. \quad \mu < 0, \quad 1 - \lambda + \lambda\mu < 0 &\implies \lambda > \frac{1}{1 - \mu} \end{aligned}$$

(см. рис. 1.5).

Обозначим через A_1 и A_2 точки пересечения кривой $d_1^2 - 4d_2 = 0$ с прямыми $\lambda = 1$ и $\mu = -1$ соответственно. Для точки A_1 получаем

$$\lambda = 1 \implies d_1 = 1 + 3\mu + \mu^2, \quad d_2 = 4\mu^2,$$

тогда

$$\begin{aligned} d_1^2 - 4d_2 &= (1 + 3\mu + \mu^2)^2 - 16\mu^2 = (1 + 3\mu + \mu^2 + 4\mu)(1 + 3\mu + \mu^2 - 4\mu) = \\ &= (1 + 7\mu + \mu^2)(1 - \mu + \mu^2) > 0, \end{aligned}$$

$$1 + 7\mu + \mu^2 = 0 \implies \mu_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{45}}{2} \implies$$

$$\mu_1 \approx -0.146 \implies A_1 = (1, \mu_1).$$

Найдем координаты точки A_2 . Имеем

$$\mu = -1 \implies d_1 = 3 - 4\lambda, \quad d_2 = 4(2\lambda - 1),$$

поэтому

$$d_1^2 - 4d_2 = (3 - 4\lambda)^2 - 16(2\lambda - 1) = 25 - 56\lambda + 16\lambda^2 > 0,$$

$$16\lambda^2 - 56\lambda + 25 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{24}}{4} \implies \\ \lambda_2 \approx 0.525 \implies A_2 = (\lambda_2, -1).$$

Дуга $\widehat{A_2A_1}$ границы области II найдена численно. В области II неравенство $d_1 > 0$ выполняется, поскольку в этой области $0 < \lambda < 1$ и $-1 < \mu < 0$.

Выпишем решение уравнения (1.26)

$$\delta = c_5 \cos \nu_3 \tau + c_6 \sin \nu_3 \tau, \quad \nu_3 = \sqrt{\frac{3(1-\lambda)}{1+\lambda\mu}}.$$

Общее решение системы (1.26)–(1.27) представим в виде

$$\begin{aligned} \gamma &= c_1 \cos \nu_1 \tau + c_2 \sin \nu_1 \tau + a(c_3 \sin \nu_2 \tau - c_4 \cos \nu_2 \tau), \\ \beta &= b(c_1 \sin \nu_1 \tau - c_2 \cos \nu_1 \tau) + c_3 \cos \nu_2 \tau + c_4 \sin \nu_2 \tau, \\ \delta &= c_5 \cos \nu_3 \tau + c_6 \sin \nu_3 \tau. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Здесь c_1, \dots, c_6 — произвольные постоянные. Такой вид решения обусловлен, во-первых, тем, что система (1.27) имеет частные решения вида

$$\gamma = \cos \nu_1 \tau, \quad \beta = b \sin \nu_1 \tau; \quad \gamma = a \sin \nu_2 \tau, \quad \beta = \cos \nu_2 \tau,$$

и, во-вторых, тем, что производные по τ выписанных частных решений также частные решения. Из первого и второго уравнений системы (1.27) получаем выражения для a и b соответственно:

$$a = -\frac{\nu_2(1-\mu)}{\nu_2^2 - \mu}, \quad b = -\frac{\nu_1\lambda(1-\lambda)}{4(1-\lambda+\lambda\mu) - \nu_1^2}.$$

При выполнении неравенств (1.24) величины ν_1, ν_2, ν_3 действительны. Для решения системы (1.26)–(1.27) с начальными условиями

$\gamma(0) = \gamma_0, \quad \delta(0) = \delta_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \Omega_1(0) = \varepsilon_1, \quad \Delta\Omega_2(0) = \varepsilon_2, \quad \Omega_3(0) = \varepsilon_3$
постоянные c_1, \dots, c_6 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{a\varepsilon_1 + (\nu_2 + a)\gamma_0}{\nu_2 + a\nu_1}, \quad c_2 = \frac{\varepsilon_1 - (1 + a\nu_2)\beta_0}{\nu_1 + a\nu_2}, \quad c_3 = \frac{b\varepsilon_1 + (\nu_1 - b)\gamma_0}{\nu_1 + a\nu_2}, \\ c_4 &= \frac{\varepsilon_3 + (1 - b\nu_1)\gamma_0}{\nu_2 + a\nu_1}, \quad c_5 = \delta_0, \quad c_6 = \frac{\varepsilon_2}{\nu_3}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Рассмотрим случай, когда $0 < \mu \ll 1$, то есть когда спутник близок к осесимметричному. Тогда

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu_{11}\sqrt{\mu} + O(\mu^{3/2}), & \nu_{11} &= \sqrt{\frac{4(1-\lambda)}{4-3\lambda}}, \\ \nu_2 &= \nu_{20} + O(\mu), & \nu_{20} &= \sqrt{4-3\lambda}, \\ \nu_3 &= \nu_{30} + O(\mu), & \nu_{30} &= \sqrt{3(1-\lambda)}, \\ a &= -\frac{1}{\nu_{20}} + O(\mu), & b &= -\frac{\lambda\nu_{11}}{4(1-\lambda)}\sqrt{\mu} + O(\mu^{3/2}). \end{aligned}$$

Пренебрегая слагаемыми порядка $O(\mu^{3/2})$, решение (1.33), (1.34) при $0 \leq \tau \lesssim 1/\sqrt{\mu}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{3(1-\lambda)\gamma_0 - \varepsilon_3}{4-3\lambda} \cos(\nu_{11}\sqrt{\mu}\tau) + \frac{4(1-\lambda)\varepsilon_1}{(4-3\lambda)\nu_{11}\sqrt{\mu}} \sin(\nu_{11}\sqrt{\mu}\tau) - \\ &- \frac{1}{\nu_{20}} \left(\beta_0 - \frac{\lambda\varepsilon_1}{4-3\lambda} \right) \sin \nu_{20}\tau + \frac{\varepsilon_3 + \gamma_0}{4-3\lambda} \cos \nu_{20}\tau, \\ \delta &= \delta_0 \cos \nu_{30}\tau + \frac{\varepsilon_2}{\nu_{30}} \sin \nu_{30}\tau, \\ \beta &= \frac{\lambda\varepsilon_1}{4-3\lambda} \cos(\nu_{11}\sqrt{\mu}\tau) + \left(\beta_0 - \frac{\lambda\varepsilon_1}{4-3\lambda} \right) \cos \nu_{20}\tau + \frac{\varepsilon_3 + \gamma_0}{\nu_{20}} \sin \nu_{20}\tau. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Составляющие решения с частотой ν_1 будем называть низкочастотными (медленными), составляющие с частотами ν_2 и ν_3 — высокочастотными (быстрыми). Выпишем явно только члены с низкой частотой ν_1

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{4(1-\lambda)\varepsilon_1}{(4-3\lambda)\nu_{11}\sqrt{\mu}} \sin(\nu_{11}\sqrt{\mu}\tau) + \text{высокочастотные члены}, \\ \beta &= \frac{\lambda\varepsilon_1}{4-3\lambda} \cos(\nu_{11}\sqrt{\mu}\tau) + \text{высокочастотные члены} = O(1), \\ \delta &= \text{высокочастотные члены} = O(1), \\ \Omega_1 &= \dot{\gamma} + \beta = \varepsilon_1 \cos(\nu_{11}\sqrt{\mu}\tau) + \dots \end{aligned}$$

Отсюда находим формулу, связывающую низкочастотные составляющие переменных β и Ω_1 :

$$\beta = \frac{\lambda\Omega_1}{4-3\lambda}. \quad (1.36)$$

Из полученных соотношений следует, что если $\mu \rightarrow 0$ и $\varepsilon_1 \neq 0$, то амплитуда колебаний по углу γ стремится к бесконечности, а амплитуды колебаний по углам δ и β ограничены. Углы δ и β задают направление оси Ox_1 в системе координат $OX_1X_2X_3$, причем при $\delta = \beta = 0$ ось Ox_1 совпадает с осью $-OX_3$. Угол γ задает поворот спутника вокруг оси Ox_1 . Полученные предельные свойства означают, что отклонения оси Ox_1 от оси $-OX_3$ малы. Ось Ox_1 сохраняет требуемое направление, но отклонения оси Ox_2 от оси Ox_2 (оси Ox_3 от оси Ox_3) могут быть большими. Режимом *одноосной гравитационной ориентации* спутника будем называть такое движение, в котором угол θ между осями Ox_1 и $-OX_3$ (рис. 1.4) не превышает нескольких градусов. Напомним, что режим гравитационной ориентации, описанный в п. 1.4, был назван режимом трехосной гравитационной ориентации. Таким образом, спутник с малым μ допускает, вообще говоря, только одноосную гравитационную ориентацию.

Приведем некоторые полезные оценки [4]. Вернемся к обозначениям п. 1.4. Обобщенный интеграл энергии имеет вид (см. (1.13))

$$V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\xi}) + \frac{3}{2}\omega_0^2[(I_2 - I_1)\gamma_2^2 + (I_3 - I_1)\gamma_3^2] + \\ + \frac{1}{2}\omega_0^2[(I_2 - I_1)\beta_1^2 + (I_2 - I_3)\beta_3^2].$$

Пусть θ — угол между осями Ox_1 и $-OX_3$, а φ — угол между осями Ox_2 и OX_2 . Тогда

$$\cos \theta = -\gamma_1, \quad \sin \theta = \sqrt{\gamma_2^2 + \gamma_3^2}; \quad \cos \varphi = -\beta_2, \quad \sin \varphi = \sqrt{\beta_2^2 + \beta_3^2}.$$

При $I_2 > I_3 > I_1$ имеем

$$V \geq \frac{3}{2}\omega_0^2[(I_2 - I_1)\gamma_2^2 + (I_3 - I_1)\gamma_3^2] \geq \frac{3}{2}\omega_0^2(I_3 - I_1)(\gamma_2^2 + \gamma_3^2), \\ V \geq \frac{1}{2}\omega_0^2[(I_2 - I_1)\beta_1^2 + (I_2 - I_3)\beta_3^2] \geq \frac{1}{2}\omega_0^2(I_2 - I_3)(\beta_1^2 + \beta_3^2).$$

Отсюда получаем

$$\sin^2 \theta \leq \frac{2v}{3(1-\lambda)}, \quad \sin^2 \varphi \leq \frac{2v}{\lambda\mu}, \quad \text{где } v = \frac{V}{I_3\omega_0^2}.$$

Значение v характеризует уровень возмущений начальных условий. Если v мало, то величина $|\sin \theta|$ мала при любом значении μ . Иными словами, ось Ox_1 будет мало отклоняться от оси $-OX_3$, а спутник вокруг оси Ox_1 может совершать колебания большой амплитуды и даже вращаться. Оценка для $|\sin \varphi|$ при $\lambda\mu \rightarrow 0$ несодержательна. Таким образом, при определенном уровне возмущений может иметь место только одноосная ориентация.

Глава 2

Медленные движения спутника в режиме одноосной гравитационной ориентации

2.1. Использование осей Резаля

При $\mu \ll 1$ в уравнениях (1.21) движения спутника удобно перейти к новым переменным. Вместо Ω_2 и Ω_3 введем переменные

$$w_2 = \Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma, \quad w_3 = \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma. \quad (2.1)$$

Величины Ω_1, w_2, w_3 — проекции абсолютной угловой скорости спутника на оси системы координат, получающейся из системы $Ox_1x_2x_3$ при $\gamma = 0$. Эта система называется *системой (осями) Резаля*. Согласно (1.21) имеем

$$\dot{\gamma} = \Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta, \quad \dot{\delta} = \frac{w_2}{\cos \beta} - 1, \quad \dot{\beta} = w_3. \quad (2.2)$$

Чтобы получить уравнения для \dot{w}_2 и \dot{w}_3 , запишем уравнения для $\dot{\Omega}_2$ и $\dot{\Omega}_3$ так

$$\dot{\Omega}_2 = (1 - \lambda)(\Omega_1\Omega_3 - 3a_{31}a_{33}) + \lambda\mu Q_2,$$

$$\dot{\Omega}_3 = -(1 - \lambda)(\Omega_1\Omega_2 - 3a_{31}a_{32}) + \lambda\mu Q_3,$$

$$Q_2 = -\frac{1 - \lambda}{1 + \lambda\mu} (\Omega_1\Omega_3 - 3a_{31}a_{33}),$$

$$Q_3 = -\Omega_1\Omega_2 + 3a_{31}a_{32}$$

(см. (1.21)). Вычислим производные

$$\dot{w}_2 = \dot{\Omega}_2 \cos \gamma - \dot{\Omega}_3 \sin \gamma - \dot{\gamma}w_3, \quad \dot{w}_3 = \dot{\Omega}_2 \sin \gamma + \dot{\Omega}_3 \cos \gamma + \dot{\gamma}w_2.$$

Отсюда с учетом (2.2) получаем

$$\dot{w}_2 = (1 - \lambda) [\Omega_1 w_3 - 3a_{31}(a_{32} \sin \gamma + a_{33} \cos \gamma)] -$$

$$-(\Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta)w_3 + \lambda\mu(Q_2 \cos \gamma - Q_3 \sin \gamma),$$

$$\dot{w}_3 = -(1 - \lambda) [\Omega_1 w_2 - 3a_{31}(a_{32} \cos \gamma - a_{33} \sin \gamma)] -$$

$$-(\Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta)w_2 + \lambda\mu(Q_2 \sin \gamma + Q_3 \cos \gamma).$$

Согласно (1.16)

$$a_{32} \cos \gamma - a_{33} \sin \gamma = \cos \delta \sin \beta, \quad a_{31} = -\cos \delta \cos \beta,$$

$$a_{32} \sin \gamma + a_{33} \cos \gamma = -\sin \delta.$$

Введем обозначения

$$Q_\delta = Q_2 \cos \gamma - Q_3 \sin \gamma, \quad Q_\beta = Q_2 \sin \gamma + Q_3 \cos \gamma, \quad (2.3)$$

тогда

$$\dot{w}_2 = -(\lambda\Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta)w_3 - 3(1 - \lambda) \cos \beta \cos \delta \sin \delta + \lambda\mu Q_\delta,$$

$$\dot{w}_3 = (\lambda\Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta)w_2 - 3(1 - \lambda) \cos^2 \delta \cos \beta \sin \beta + \lambda\mu Q_\beta.$$

В результате уравнения (1.21) приобретают вид

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta, \\ \dot{\Omega}_1 = \mu(\Omega_2 \Omega_3 - 3a_{32}a_{33}), \\ \dot{\delta} = \frac{w_2}{\cos \beta} - 1, \\ \dot{\beta} = w_3, \\ \dot{w}_2 = -(\lambda \Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta)w_3 - 3(1 - \lambda) \cos \beta \cos \delta \sin \delta + \lambda \mu Q_\delta, \\ \dot{w}_3 = (\lambda \Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta)w_2 - 3(1 - \lambda) \cos^2 \delta \cos \beta \sin \beta + \lambda \mu Q_\beta. \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь Ω_2 и Ω_3 должны быть выражены через w_2 и w_3 :

$$\Omega_2 = w_2 \cos \gamma + w_3 \sin \gamma, \quad \Omega_3 = -w_2 \sin \gamma + w_3 \cos \gamma. \quad (2.5)$$

Можно убедиться, что правые части системы (2.4) π -периодически зависят от углов γ и δ .

2.2. Уравнения движения осесимметричного спутника

В случае осесимметричного спутника $\mu = 0$ и система (2.4) упрощается:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta, \\ \dot{\Omega}_1 = 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \frac{w_2}{\cos \beta} - 1, \\ \dot{\beta} = w_3, \\ \dot{w}_2 = -(\lambda \Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta)w_3 - 3(1 - \lambda) \cos \beta \cos \delta \sin \delta, \\ \dot{w}_3 = (\lambda \Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta)w_2 - 3(1 - \lambda) \cos^2 \delta \cos \beta \sin \beta. \end{cases} \quad (2.7)$$

В силу второго уравнения (2.6) $\Omega_1 = \text{const}$. Подсистема (2.7) не зависит от угла γ и содержит Ω_1 как параметр. Ее можно рассматривать независимо от уравнений (2.6). Она описывает движение оси динамической симметрии спутника (оси Ox_1) относительно орбитальной системы координат. Уравнения (2.6) описывают движение спутника вокруг этой оси.

Исследуем стационарные решения подсистемы (2.7). В этих решениях $w_2 = \cos \beta$, $w_3 = 0$, для δ и β из последних двух уравнений (2.7) находим

$$\cos \beta \cos \delta \sin \delta = 0, \quad [\lambda \Omega_1 - \sin \beta - 3(1 - \lambda) \cos^2 \delta \sin \beta] \cos \beta = 0.$$

Будем считать $\lambda < 1$. Решение выписанных уравнений приводит к анализу трех случаев:

1. $\cos \beta = 0$.
2. $\cos \delta = 0 \implies \lambda \Omega_1 = \sin \beta$ ($|\lambda \Omega_1| < 1$).
3. $\sin \delta = 0 \implies \lambda \Omega_1 - \sin \beta - 3(1 - \lambda) \sin \beta = 0 \implies \sin \beta = \frac{\lambda \Omega_1}{4 - 3\lambda} \left(\left| \frac{\lambda \Omega_1}{4 - 3\lambda} \right| < 1 \right)$.

В случае 1 углы вырождаются, но, введя углы другим способом, можно убедиться, что такие стационарные решения существуют. Семейство этих решений называется *цилиндрической прецессией*. Семейства решений в случаях 2 и 3 называются соответственно *гиперболоидальной* и *конической прецессиями*. Указанные названия обусловлены названиями поверхностей второго порядка, которые в абсолютном пространстве описывает ось симметрии спутника в процессе его движения по орбите. В случае 1 эта ось описывает цилиндрическую поверхность, в случае 2 — однополостный гиперboloид, в случае 3 — коническую поверхность. Ниже рассматривается только коническая прецессия. В этом случае

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta = \Omega_1 - \sin \beta = \frac{4(1-\lambda)}{4-3\lambda} \Omega_1 \implies \\ \gamma &= \frac{4(1-\lambda)}{4-3\lambda} \Omega_1 t + \gamma_0, \quad \gamma_0 = \operatorname{const}, \quad \Omega_1 = \operatorname{const}.\end{aligned}$$

Для угла δ возможны два значения: $\delta = 0$ и $\delta = \pi$. Далее будем изучать решения, для которых $\delta = 0$.

Если рассматривать коническую прецессию как решение системы (2.6), (2.7), то она представляет собой двухпараметрическое семейство решений:

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{4(1-\lambda)}{4-3\lambda} c_1 t + c_2, \quad \Omega_1 = c_1, \quad \delta = 0, \\ \beta &= \arcsin \frac{\lambda c_1}{4-3\lambda}, \quad w_2 = \cos \beta, \quad w_3 = 0,\end{aligned}\tag{2.8}$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные (параметры), $|\lambda c_1| < |4-3\lambda|$. При $c_1 = 0$ получаем однопараметрическое семейство стационарных решений.

Система (2.7) 4-го порядка допускает первый интеграл

$$H' = \frac{1}{2} (w_2^2 + w_3^2) - \frac{3}{2} (1-\lambda) \cos^2 \delta \cos^2 \beta - \lambda \Omega_1 \sin \beta - w_2 \cos \beta.$$

Для получения этого интеграла нужно в интеграле энергии (1.22) для трехосного спутника положить $\mu = 0$ и выразить Ω_2, Ω_3 через w_2, w_3 .

Задача. Используя выписанный интеграл в качестве функции Ляпунова, доказать, что неравенство $\lambda < 1$ является достаточным условием устойчивости конической прецессии.

Коническую прецессию можно использовать для реализации режима одноосной гравитационной ориентации осесимметричного спутника при $\lambda \ll 1$. Стационарное вращение (2.8) особенно удобно использовать в качестве номинального невозмущенного движения спутника, распределение масс которого близко к распределению масс стержня, то есть при $\lambda \ll 1$. В этом случае даже для достаточно больших значений $|\Omega|$ угол β^* мал и ось Ox_1 направлена в сторону притягивающего центра. Например, для $\lambda = 0.05$ и $\Omega_1 = 10$ в соответствии с (3.3) получаем

$$\beta = \arcsin \frac{\lambda \Omega_1}{4-3\lambda} = \arcsin \frac{0.5}{3.75} \approx 7.6^\circ.$$

Такая ошибка направления оси Ox_1 в центр Земли для многих задач приемлема. Описанный режим будем называть режимом *гравитационной ориента-*

ции вращающегося спутника. Детально этот режим будет исследован ниже. Изучение одноосной гравитационной ориентации начнем с анализа медленных движений спутника, для которых $\Omega_1 \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow +0$.

2.3. Режим одноосной гравитационной ориентации при $\mu \ll 1$

Рассмотрим режим трехосной гравитационной ориентации спутника при $\mu \rightarrow +0$. В этом режиме углы δ , β и угловые скорости Ω_1 , $\Delta w_2 = w_2 - 1$, w_3 малы, а угол γ может принимать любые значения. Движение спутника в этом режиме описывается формулами (1.35). Чтобы приближенно описать это движение, отбросим в уравнениях (2.4) члены выше первой степени относительно μ и указанных выше малых величин. Получим

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \Omega_1 - \beta, & \dot{\Omega}_1 &= -\mu \sin \gamma \cos \gamma, & \dot{\delta} &= \Delta w_2, \\ \dot{\beta} &= w_3, & \Delta \dot{w}_2 &= -3(1 - \lambda)\delta, & \dot{w}_3 &= \lambda\Omega_1 - (4 - 3\lambda)\beta. \end{aligned}$$

Здесь учтено, что в уравнении для $\dot{\Omega}_1$

$$\Omega_2 \Omega_3 = (w_2 \cos \gamma + w_3 \sin \gamma)(-w_2 \sin \gamma + w_3 \cos \gamma) \approx -\sin \gamma \cos \gamma.$$

Исключив из выписанных уравнений Δw_2 и w_3 , будем иметь

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \Omega_1 - \beta, & \dot{\Omega}_1 &= -\mu \sin \gamma \cos \gamma, \\ \ddot{\delta} + 3(1 - \lambda)\delta &= 0, & \ddot{\beta} + (4 - 3\lambda)\beta &= \lambda\Omega_1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Наибольший интерес представляют угол γ и угловая скорость Ω_1 , описывающие движение спутника вокруг оси Ox_1 . Выше было показано (см. стр. 22), что это движение имеет две составляющие — медленную и быструю. При $\mu \rightarrow 0$ амплитуда медленной составляющей угла γ неограниченно возрастает, а $\dot{\gamma}$ и Ω_1 имеют порядок $\sqrt{\mu}$. Амплитуда быстрой составляющей угла γ остается ограниченной. Будем рассматривать медленную составляющую движения. Для этой составляющей $\dot{\beta}$ мало, и для угла β примем формулу (ср. (1.36))

$$\beta = \frac{\lambda\Omega_1}{4 - 3\lambda}.$$

Подставив эту формулу в первое уравнение (2.9), получим

$$\dot{\gamma} = \frac{4(1 - \lambda)}{4 - 3\lambda} \Omega_1, \quad \dot{\Omega}_1 = -\mu \sin \gamma \cos \gamma. \quad (2.10)$$

Эта система определяет медленное изменение угла γ и угловой скорости Ω_1 . Полученная система эквивалентна уравнению движения математического маятника:

$$2\ddot{\gamma} + \frac{4\mu(1 - \lambda)}{4 - 3\lambda} \sin 2\gamma = 0. \quad (2.11)$$

Поскольку

$$w_3 = \dot{\beta} = \frac{\lambda\dot{\Omega}_1}{4 - 3\lambda} = -\frac{\lambda\mu \sin \gamma \cos \gamma}{4 - 3\lambda},$$

для остальных переменных в медленном движении имеем

$$\delta = 0, \quad \beta = \frac{\lambda\Omega_1}{4-3\lambda}, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = -\frac{\lambda\mu \sin \gamma \cos \gamma}{4-3\lambda}. \quad (2.12)$$

Согласно приведенному выводу угол γ может принимать любые значения. Движение спутника по углу γ может быть неограниченным, что означает одноосную гравитационную ориентацию.

Описываемые формулами (2.10), (2.12) медленные движения образуют двухпараметрическое семейство. При $\mu \rightarrow 0$ это семейство переходит в однопараметрическое семейство стационарных решений

$$\gamma = \text{const}, \quad \delta = \beta = w_2 - 1 = w_3 = \Omega_1 = 0. \quad (2.13)$$

Формально это ниоткуда не следует, но по смыслу вывода основных соотношений $\Omega_1 \sim \sqrt{\mu}$ при $\mu \rightarrow 0$.

В идеализированной ситуации (круговая орбита, учет действия на спутник только гравитационного момента) гравитационная ориентация трехосного спутника описывается стационарными решениями уравнений (2.4). В случае $0 < \mu \ll 1$ имеет смысл расширить набор рассматриваемых движений, чтобы иметь возможность описать режим одноосной гравитационной ориентации. Как видно из рассмотренных выше примеров такого режима, для его описания имеет смысл ограничиться одночастотными решениями. Уравнения (2.4) автономны и допускают обобщенный интеграл энергии (см. (1.22)), то есть описываемая этими уравнениями механическая система является обобщенно-консервативной. В такой ситуации одночастотные решения должны быть периодическими и образовывать семейства, зависящие от параметров. В общем случае параметров два, один из которых — сдвиг решения по времени, а в качестве второго можно взять период. Ниже рассматриваются несколько вариантов построения указанных семейств периодических решений (см. п. 2.4). Имея в виду последующий учет в рассматриваемой механической модели спутника разного рода возмущений, семейства периодических решений будем строить как двумерные интегральные поверхности уравнений (2.4). В силу обобщенной консервативности принятой модели интегральные поверхности окажутся состоящими из периодических движений. При учете неконсервативных возмущений движение на интегральных поверхностях будет более сложным, но эти поверхности по-прежнему будут состоять из движений, реализующих одноосную гравитационную ориентацию спутника.

2.4. Интегральная поверхность медленных движений

Интегральную поверхность движений спутника, приближенно описываемых формулами (2.10) и (2.12), будем строить, основываясь на уравнениях (2.4). Введем вектор $\mathbf{z} = (\gamma, \Omega_1, \delta, \beta, w_2, w_3)^\top$ и определим функцию $\mathbf{F}(\mathbf{z}, \mu) \in \mathbb{R}^6$ так, чтобы система уравнений (2.4) приняла вид

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{F}(\mathbf{z}, \mu). \quad (2.14)$$

Требуется найти интегральную поверхность, на которой $\Omega_1 \sim \sqrt{\mu}$. Положим $\Omega_1 = \Omega\sqrt{\mu}$ и будем искать эту поверхность в виде

$$\mathbf{z} = \varphi(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) \equiv \quad (2.15)$$

$$\equiv \left(\gamma, \Omega\sqrt{\mu}, \delta^*(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}), \beta^*(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}), 1 + w_2^*(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}), w_3^*(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) \right)^T,$$

где δ^* , β^* , w_2^* , w_3^* — искомые функции γ , Ω и $\sqrt{\mu}$, определяемые рядами

$$\begin{aligned} \delta^*(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) &= \sqrt{\mu} \delta_1(\gamma, \Omega) + (\sqrt{\mu})^2 \delta_2(\gamma, \Omega) + \dots, \\ \beta^*(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) &= \sqrt{\mu} \beta_1(\gamma, \Omega) + (\sqrt{\mu})^2 \beta_2(\gamma, \Omega) + \dots, \\ w_2^*(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) &= \sqrt{\mu} w_{21}(\gamma, \Omega) + (\sqrt{\mu})^2 w_{22}(\gamma, \Omega) + \dots, \\ w_3^*(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) &= \sqrt{\mu} w_{31}(\gamma, \Omega) + (\sqrt{\mu})^2 w_{32}(\gamma, \Omega) + \dots, \end{aligned} \quad (2.16)$$

а переменные γ и Ω определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \Phi_1(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) \equiv \sqrt{\mu} \Phi_{11}(\gamma, \Omega) + (\sqrt{\mu})^2 \Phi_{12}(\gamma, \Omega) + \dots, \\ \dot{\Omega} &= \Phi_2(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) \equiv \sqrt{\mu} \Phi_{21}(\gamma, \Omega) + (\sqrt{\mu})^2 \Phi_{22}(\gamma, \Omega) + \dots. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Выписанные ряды будем рассматривать как формальные, то есть не будем заботиться об их сходимости. При $\mu = 0$ решения системы (2.4) вида (2.15)–(2.17) переходят в семейство стационарных решений (2.13).

Функции φ , Φ_1 , Φ_2 должны удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma} \Phi_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial \Omega} \Phi_2 = \mathbf{F}(\varphi, \mu). \quad (2.18)$$

Подставив сюда ряды (2.16), (2.17) и приравняв выражения при одинаковых степенях μ в левой и правой частях равенства, получим цепочку явных рекуррентных выражений, определяющих коэффициенты этих рядов. Такая цепочка имеет единственное решение, и для него

$$\begin{aligned} \delta_1 = w_{21} = w_{31} = 0, \quad \beta_1 &= \frac{\lambda \Omega}{4 - 3\lambda}, \quad \Phi_{11} = \frac{4\Omega(1 - \lambda)}{4 - 3\lambda}, \quad \Phi_{21} = -\sin \gamma \cos \gamma, \\ \delta_2 = \beta_2 = \Phi_{12} = \Phi_{22} = 0, \quad w_{22} &= -\frac{\lambda^2 \Omega^2}{2(4 - 3\lambda)^2}, \quad w_{32} = -\frac{\lambda \sin \gamma \cos \gamma}{4 - 3\lambda}. \end{aligned}$$

Пренебрегая членами порядка $O(\mu^{3/2})$, систему (2.17) запишем в виде

$$\dot{\gamma} = \frac{4(1 - \lambda)\sqrt{\mu}}{4 - 3\lambda} \Omega, \quad \dot{\Omega} = -\sqrt{\mu} \sin \gamma \cos \gamma. \quad (2.19)$$

Эта система эквивалентна уравнению (2.11) движения математического маятника и интегрируется в эллиптических функциях.

Приведем некоторые свойства системы (2.14) и построенной интегральной поверхности (2.15). Система (2.14) обладает свойством (E)¹⁾ по отношению к матрицам

$$\mathbf{S} = \text{diag}(-1, 1, -1, 1, 1, -1), \quad \mathbf{S}' = \text{diag}(1, -1, -1, -1, 1, 1),$$

¹⁾Говорят [35], что система $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$, где $\mathbf{x}, \mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$, обладает свойством (E) по отношению к \mathbf{S} , если существует постоянная матрица \mathbf{S} , удовлетворяющая соотношениям $\mathbf{S} = \mathbf{S}' = \mathbf{S}^{-1}$ и $\mathbf{S}\mathbf{g}(\mathbf{S}\mathbf{x}, -t) = -\mathbf{g}(\mathbf{x}, t)$ при любых \mathbf{x} и t .

то есть функция $\mathbf{F}(\mathbf{z}, \mu)$ удовлетворяет соотношениям

$$\mathbf{S}\mathbf{F}(\mathbf{S}\mathbf{z}, \mu) = -\mathbf{F}(\mathbf{z}, \mu), \quad \mathbf{S}'\mathbf{F}(\mathbf{S}'\mathbf{z}, \mu) = -\mathbf{F}(\mathbf{z}, \mu). \quad (2.20)$$

Кроме того,

$$\mathbf{F}(\mathbf{z} + \pi\mathbf{e}_1, \mu) = \mathbf{F}(\mathbf{z}, \mu), \quad (2.21)$$

где $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0, 0)^\top$. Система (2.14) допускает стационарное решение (ср. (1.23)) $\mathbf{z} = \mathbf{e}_5 = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^\top$, а при $\mu = 0$ семейство стационарных решений $\mathbf{z} = \mathbf{e}_5 + \gamma_0\mathbf{e}_1$, $\gamma_0 = \text{const}$.

Из (2.20) следует

$$\mathbf{S}\varphi(-\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) = \varphi(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}), \quad -\Phi_i(-\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) = (-1)^i \Phi_i(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}), \quad (2.22)$$

$$\mathbf{S}'\varphi(\gamma, -\Omega, \sqrt{\mu}) = \varphi(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}), \quad \Phi_i(\gamma, -\Omega, \sqrt{\mu}) = (-1)^i \Phi_i(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}), \quad (2.23)$$

где $i = 1, 2$. Докажем, например, равенства (2.22), равенства (2.23) доказываются аналогично. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \varphi'(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) &= \mathbf{S}\varphi(-\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}), \\ \Phi_i'(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) &= -(-1)^i \Phi_i(-\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что эти функции удовлетворяют соотношению (2.18) и представляются формальными рядами вида (2.16), (2.17). В силу единственности таких рядов отсюда следуют равенства

$$\begin{aligned} \varphi'(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) &= \varphi(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}), \\ \Phi_i'(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) &= \Phi_i(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) \quad (i = 1, 2), \end{aligned}$$

эквивалентные равенствам (2.22).

Величина Ω в (2.15) определяется соотношением $\Omega_1 = \Omega\sqrt{\mu}$, не меняющимся при замене $\Omega \rightarrow -\Omega$, $\sqrt{\mu} \rightarrow -\sqrt{\mu}$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma, -\Omega, -\sqrt{\mu}) &= \varphi(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}), \\ -\Phi_i(\gamma, -\Omega, -\sqrt{\mu}) &= (-1)^i \Phi_i(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Сравнивая (2.23) и (2.24), получаем равенства

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma, \Omega, -\sqrt{\mu}) &= \mathbf{S}'\varphi(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}), \\ \Phi_i(\gamma, \Omega, -\sqrt{\mu}) &= -\Phi_i(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

В силу этих равенств $\Phi_i(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu})$, $\delta^*(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu})$, $\beta^*(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu})$ — нечетные функции $\sqrt{\mu}$, а $w_2^*(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu})$, $w_3^*(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu})$ — четные функции $\sqrt{\mu}$. Поэтому

$$\delta_{2k} = \beta_{2k} = w_{2,2k-1} = w_{3,2k-1} = \Phi_{1,2k} = \Phi_{2,2k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

С помощью соотношения (2.21) можно доказать равенства

$$\begin{aligned} \varphi(\gamma + \pi, \Omega, \sqrt{\mu}) &= \varphi(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) + \pi\mathbf{e}_1, \\ \Phi_i(\gamma + \pi, \Omega, \sqrt{\mu}) &= \Phi_i(\gamma, \Omega, \sqrt{\mu}) \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{\pi k}{2}, 0, \sqrt{\mu}\right) &= \left(\frac{\pi k}{2}, 0, 0, 0, 1, 0\right)^T, \\ \Phi_1\left(\frac{\pi k}{2}, 0, \sqrt{\mu}\right) &= \Phi_2\left(\frac{\pi k}{2}, 0, \sqrt{\mu}\right) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Для доказательства соотношений (2.26) заметим, что ряды $\varphi(\pi k/2, 0, \sqrt{\mu})$ и $\Phi_i(\pi k/2, 0, \sqrt{\mu})$ ($i = 1, 2$) удовлетворяют соотношениям $\varphi(\pi k/2, 0, 0) = \mathbf{z}_k$, $\Phi_i(\pi k/2, 0, 0) = 0$. С другой стороны, поскольку \mathbf{z}_k — стационарное решение системы (2.14), то соотношения $\mathbf{F}(\mathbf{z}_k, \mu) = 0$ выполнены при любом μ . Так как ряды (2.16), (2.17) единственны, отсюда следуют соотношения (2.26). Следовательно, стационарные решения системы (2.4)

$$\mathbf{z}_k = \left(\frac{\pi k}{2}, 0, 0, 0, 1, 0\right)^T \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

лежат на интегральной поверхности (2.15). Решение \mathbf{z}_0 соответствует положению равновесия (1.23), решение \mathbf{z}_k получается из \mathbf{z}_0 поворотом спутника в положительном направлении вокруг оси Ox_1 на угол $\pi k/2$. Движения (2.15), (2.17), в которых γ и Ω совершают малые колебания около точки $\gamma = \Omega = 0$, имеют период, близкий к $2\pi/\nu_1$. В рамках линейной теории эти решения описываются долгопериодическими членами в (1.33).

Покажем, что интегральная поверхность медленных движений состоит в основном из периодических решений, близких периодическим решениям системы (2.19). Решения, близкие сепаратрисным решениям этой системы, не рассматриваются. Представляющую интерес часть интегральной поверхности медленных движений можно задать семействами колебательных и вращательных решений системы (2.19). Поскольку $\mu > 0$, без ограничения общности можно положить $\gamma(0) = 0$.

Рассмотрим сначала колебательные периодические решения. Используя свойства эллиптических функций, можно показать, что периодическое решение системы (2.19) с наименьшим положительным периодом T и начальным условием $\gamma(0) = 0$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma(-\tau) &= -\gamma(\tau), \quad \gamma\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = -\gamma(\tau), \\ \Omega(-\tau) &= \Omega(\tau), \quad \Omega\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = -\Omega(\tau). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Отсюда имеем $\Omega(T/4) = 0$. Рассмотрим для системы (2.17) краевую задачу

$$\gamma(0) = \Omega\left(\frac{T}{4}\right) = 0 \quad (T > 0). \quad (2.28)$$

В силу свойств функций Φ_1 и Φ_2 , выражаемых соотношениями (2.22), (2.23), всякое решение $\gamma(\tau)$, $\Omega(\tau)$ этой задачи удовлетворяет условиям (2.27) и, значит, является T -периодическим. Для соответствующего решения систе-

мы (2.14) $\mathbf{z}(\tau) = \boldsymbol{\varphi}(\gamma(\tau), \Omega(\tau), \sqrt{\mu})$ справедливы равенства (ср. (2.22), (2.23))

$$\mathbf{S}\mathbf{z}(-\tau) = \mathbf{z}(\tau), \quad \mathbf{S}'\mathbf{z}\left(-\tau + \frac{T}{4}\right) = \mathbf{z}\left(\tau + \frac{T}{4}\right), \quad (2.29)$$

в силу которых $\mathbf{z}(\tau + T/2) = \mathbf{S}\mathbf{S}'\mathbf{z}(\tau)$. Отсюда следует, что третья и пятая компоненты вектора $\mathbf{z}(\tau)$, соответствующие переменным δ и w_2 , $T/2$ -периодические функции τ , а остальные компоненты $T/2$ -антипериодические функции. Положив в (2.29) $\tau = 0$, находим краевые условия

$$\mathbf{S}\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(0), \quad \mathbf{S}'\mathbf{z}\left(\frac{T}{4}\right) = \mathbf{z}\left(\frac{T}{4}\right), \quad (2.30)$$

которым удовлетворяет решение $\mathbf{z}(\tau)$. Выпишем их скалярную форму:

$$\gamma(0) = \delta(0) = w_3(0) = \Omega_1\left(\frac{T}{4}\right) = \delta\left(\frac{T}{4}\right) = \beta\left(\frac{T}{4}\right) = 0. \quad (2.31)$$

Можно показать (см. п. 2.5), что для всякого решения $\mathbf{z}(\tau)$ краевой задачи (2.14), (2.30) справедливы соотношения (2.29) и, следовательно, это решение является T -периодическим.

Перейдем к вращательным периодическим решениям. Решение $\mathbf{z}(\tau)$ системы (2.14) будем называть *вращательным периодическим решением* или, короче, *периодическим вращением*, если существует такое число $T \neq 0$, что $\mathbf{z}(\tau + T) = \mathbf{z}(\tau) + 2\pi\mathbf{e}_1$. Значения T разных знаков отвечают вращениям спутника вокруг оси Ox_1 в разные стороны. Всякое вращательное T -периодическое решение системы (2.19) с начальным условием $\gamma(0) = 0$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} \gamma(-\tau) &= -\gamma(\tau), & \gamma\left(\tau + \frac{T}{2}\right) &= \gamma(\tau) + \pi, \\ \Omega(-\tau) &= \Omega(\tau), & \Omega\left(\tau + \frac{T}{2}\right) &= \Omega(\tau). \end{aligned} \quad (2.32)$$

Отсюда имеем $\gamma(T/4) = \pi/2$. Рассмотрим для системы (2.17) краевую задачу

$$\gamma(0) = \gamma\left(\frac{T}{4}\right) - \frac{\pi}{2} = 0 \quad (T \neq 0). \quad (2.33)$$

Можно доказать, что всякое решение $\gamma(\tau)$, $\Omega(\tau)$ этой задачи удовлетворяет условиям (2.32) и, следовательно, является T -периодическим. Для соответствующего решения системы (2.14) $\mathbf{z}(\tau) = \boldsymbol{\varphi}(\gamma(\tau), \Omega(\tau), \sqrt{\mu})$ в силу соотношений (2.22) и (2.25) справедливы равенства

$$\mathbf{S}\mathbf{z}(-\tau) = \mathbf{z}(\tau), \quad \mathbf{z}\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = \mathbf{z}(\tau) + \pi\mathbf{e}_1, \quad (2.34)$$

откуда следует

$$\mathbf{S}\mathbf{z}\left(-\tau + \frac{T}{4}\right) = \mathbf{z}\left(\tau + \frac{T}{4}\right) - \pi\mathbf{e}_1.$$

Положив здесь $\tau = 0$, находим краевые условия

$$\mathbf{S}\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(0), \quad \mathbf{S}\mathbf{z}\left(\frac{T}{4}\right) = \mathbf{z}\left(\frac{T}{4}\right) - \pi\mathbf{e}_1, \quad (2.35)$$

которым удовлетворяет решение $\mathbf{z}(\tau)$. Скалярная форма этих условий

$$\gamma(0) = \delta(0) = w_3(0) = \gamma\left(\frac{T}{4}\right) - \frac{\pi}{2} = \delta\left(\frac{T}{4}\right) = w_3\left(\frac{T}{4}\right) = 0. \quad (2.36)$$

Можно показать, что всякое решение $\mathbf{z}(\tau)$ краевой задачи (2.14), (2.35) удовлетворяет соотношениям (2.34) и, значит, является T -периодическим вращением. Краевая задача (2.14), (2.35) эквивалентна краевой задаче

$$\gamma(0) = \delta(0) = \Omega_3(0) = \gamma\left(\frac{T}{4}\right) - \frac{\pi}{2} = \delta\left(\frac{T}{4}\right) = \Omega_2\left(\frac{T}{4}\right) = 0 \quad (2.37)$$

для системы (1.21).

Решая численно краевые задачи (2.31) и (2.35) для системы (2.14), можно в явном виде построить периодические решения, лежащие на интегральной поверхности (2.15). Если существует семейство таких решений для значений T , принадлежащих некоторому интервалу $T_1 < T < T_2$, то этому семейству отвечает двухпараметрическое подмножество исследуемой интегральной поверхности (также двухпараметрической), состоящее из периодических решений. Параметрами решений подмножества могут служить период и фаза (сдвиг по времени). В решениях краевых задач (2.32) и (2.35) фаза фиксирована, но в силу автономности системы (2.14) этот параметр может принимать любые значения.

Кроме подмножеств, состоящих из периодических решений, интегральная поверхность (2.15) содержит однопараметрические подмножества асимптотических решений, соответствующие асимптотическим решениям системы (2.19). В данной работе такие подмножества не рассматриваются.

2.5. Периодические решения

Рассмотрим некоторые свойства периодических решений системы (2.14) и способы их построения. Напомним определения.

Решение $\mathbf{z}(\tau)$ системы (2.14), определенное на всей действительной оси, будем называть *колебательным* T -периодическим решением, если существует такое положительное число T (период), что $\mathbf{z}(\tau + T) = \mathbf{z}(\tau)$ для любого τ .

Решение $\mathbf{z}(\tau)$ системы (2.14), определенное на всей действительной оси, будем называть *вращательным* T -периодическим решением, если существует такое число $T \leq 0$ (период), что $\mathbf{z}(\tau + T/2) = \mathbf{z}(\tau) + \pi \mathbf{e}_1$ для любого τ . При этом $\mathbf{z}(\tau + T) = \mathbf{z}(\tau) + 2\pi \mathbf{e}_1$. Значениям T разных знаков соответствуют вращения спутника по углу γ (вокруг оси Ox_1) в разные стороны. По углам δ и β спутник совершает T -периодические колебания.

В случае вращений период определяется однозначно. Под периодом в случае колебаний, если не оговорено противное, ниже понимается минимальное значение T .

Чтобы найти T -периодические колебательные решения системы (2.14), достаточно найти решения краевой задачи

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(T). \quad (2.38)$$

Всякое периодическое колебательное решение с периодом $T > 0$ удовлетворяет (2.38). Пусть дано решение задачи (2.14), (2.38). Оно определено на отрезке $0 \leq t \leq T$. Продолжим его T -периодически на всю действительную ось. Полученная функция гладкая:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(-0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \dot{\mathbf{z}}(-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{F}(\mathbf{z}(-\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{F}(\mathbf{z}(T - \varepsilon)) = \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{z}(T)) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(0)) = \dot{\mathbf{z}}(+0). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается непрерывность $\dot{\mathbf{z}}(\tau)$ в остальных точках $\tau = nT$ (n — целое число). Здесь учтено, что решение задачи (2.14), (2.38) — непрерывная функция на отрезке $[0, T]$, имеющая производную на интервале $(0, T)$ и односторонние производные в точках 0 и T , причем $\dot{\mathbf{z}}(0+) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(0))$, $\dot{\mathbf{z}}(T-0) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(T))$. В силу автономности системы (2.14) полученная функция — решение этой системы при всех $\tau \in \mathbb{R}^1$.

Решения задачи (2.14), (2.38) образуют, по крайней мере, однопараметрические семейства. Если $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0(\tau)$ — ее решение, то $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0(\tau + s)$, где $s \in \mathbb{R}^1$ — любое число, также решение. Имея это в виду и с целью избавиться от множественности решений можно наложить некоторые условия на $\mathbf{z}(0)$, например потребовать, чтобы $\gamma(0) = 0$ и т. п. Этим удобно воспользоваться, учитывая, что система (2.38) состоит из шести уравнений с семью неизвестными $\mathbf{z}(0)$, T . Если потребовать $\gamma(0) = 0$, получим шесть уравнений для шести неизвестных.

Сузим поиск периодических решений, а именно будем искать симметричные периодические решения. Рассмотрим для системы (2.14) краевую задачу

$$\mathbf{S}\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(0), \quad \mathbf{S}\mathbf{z}\left(\frac{T}{2}\right) = \mathbf{z}\left(\frac{T}{2}\right). \quad (2.39)$$

В скалярной форме краевые условия (2.39) имеют вид

$$\gamma(0) = \delta(0) = w_3(0) = \gamma\left(\frac{T}{2}\right) = \delta\left(\frac{T}{2}\right) = w_3\left(\frac{T}{2}\right) = 0.$$

Условия в точке $\tau = T/2$ можно рассматривать как уравнения для определения неизвестных $\Omega_1(0)$, $\Omega_2(0)$, $\beta(0)$. Период T удобно считать параметром.

Пусть $\mathbf{z}(\tau)$ — решение задачи (2.14), (2.39), заданное на отрезке $0 \leq t \leq T/2$. Продолжим его на всю действительную ось с помощью соотношений

$$(1) \quad \mathbf{S}\mathbf{z}(-\tau) = \mathbf{z}(\tau), \quad (2) \quad \mathbf{S}\mathbf{z}\left(-\tau + \frac{T}{2}\right) = \mathbf{z}\left(\tau + \frac{T}{2}\right).$$

Полученная функция гладкая:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(-0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \dot{\mathbf{z}}(-\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{F}(\mathbf{z}(-\varepsilon)) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{S}\mathbf{F}(\mathbf{S}\mathbf{z}(-\varepsilon)) = \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \mathbf{S}\mathbf{F}(\mathbf{z}(\varepsilon)) = - \mathbf{S}\mathbf{F}(\mathbf{z}(0)) = - \mathbf{S}\mathbf{F}(\mathbf{S}\mathbf{z}(0)) = \mathbf{F}(\mathbf{z}(0)) = \dot{\mathbf{z}}(+0). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается непрерывность $\dot{\mathbf{z}}(\tau)$ в остальных точках $\tau = nT/2$, $n \in \mathbb{Z}$. Полученная функция T -периодическая:

$$\mathbf{z}(\tau + T) = \mathbf{z}\left(\tau + \frac{T}{2} + \frac{T}{2}\right) \stackrel{(2)}{=} \mathbf{S}\mathbf{z}\left(-\tau - \frac{T}{2} + \frac{T}{2}\right) \stackrel{(1)}{=} \mathbf{S}\mathbf{z}(-\tau) = \mathbf{z}(\tau).$$

Для системы (2.14) можно также решать краевую задачу

$$\mathbf{S}\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(0), \quad \mathbf{S}'\mathbf{z}\left(\frac{T}{4}\right) = \mathbf{z}\left(\frac{T}{4}\right). \quad (2.40)$$

В скалярной форме (2.40) записывается так

$$\gamma(0) = \delta(0) = w_3(0) = \Omega_1\left(\frac{T}{4}\right) = \delta\left(\frac{T}{4}\right) = \beta\left(\frac{T}{4}\right) = 0.$$

Решение $\mathbf{z}(\tau)$ задачи (2.14), (2.40) продолжим на всю действительную ось с помощью соотношений

$$(3) \quad \mathbf{S}\mathbf{z}(-\tau) = \mathbf{z}(\tau), \quad (4) \quad \mathbf{S}'\mathbf{z}\left(-\tau + \frac{T}{4}\right) = \mathbf{z}\left(\tau + \frac{T}{4}\right).$$

Полученная функция гладкая и T -периодическая:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}\left(\tau + \frac{T}{2}\right) &= \mathbf{z}\left(\tau + \frac{T}{4} + \frac{T}{4}\right) \stackrel{(4)}{=} \mathbf{S}'\mathbf{z}\left(-\tau - \frac{T}{4} + \frac{T}{4}\right) \stackrel{(3)}{=} \mathbf{S}'\mathbf{z}(-\tau) = \mathbf{S}\mathbf{S}'\mathbf{z}(\tau), \\ \mathbf{z}(\tau + T) &= (\mathbf{S}\mathbf{S}')^2\mathbf{z}(\tau) = \mathbf{z}(\tau). \end{aligned}$$

Более того, согласно определению матриц \mathbf{S} , \mathbf{S}' переменные γ , Ω_1 , β , w_3 оказываются $T/2$ -антипериодическими:

$$\gamma\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = -\gamma(\tau), \quad \Omega_1\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = -\Omega_1(\tau),$$

$$\beta\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = -\beta(\tau), \quad w_3\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = -w_3(\tau),$$

а переменные δ , w_2 — $T/2$ -периодическими:

$$\delta\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = \delta(\tau), \quad w_2\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = w_2(\tau).$$

Отыскание вращательных T -периодических решений системы (2.14) сведем к отысканию решений краевой задачи

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}\left(\frac{T}{2}\right) - \pi\mathbf{e}_1. \quad (2.41)$$

Продолжив любое решение $\mathbf{z}(\tau)$ на всю действительную ось с помощью соотношений

$$\mathbf{z}\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = \mathbf{z}(\tau) + \pi\mathbf{e}_1, \quad \mathbf{z}\left(\tau - \frac{T}{2}\right) = \mathbf{z}(\tau) - \pi\mathbf{e}_1,$$

получим T -периодическое вращательное решение системы (2.14).

Симметричные вращательные T -периодические решения системы (2.14) определяются краевыми условиями

$$\mathbf{S}\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(0), \quad \mathbf{S}\mathbf{z}\left(\frac{T}{4}\right) = \mathbf{z}\left(\frac{T}{4}\right) - \pi\mathbf{e}_1, \quad (2.42)$$

или в скалярной форме

$$\gamma(0) = \delta(0) = w_3(0) = \gamma\left(\frac{T}{4}\right) - \frac{\pi}{2} = \delta\left(\frac{T}{4}\right) = w_3\left(\frac{T}{4}\right) = 0.$$

Решение задачи (2.14), (2.42) продолжается на всю действительную ось с помощью соотношений

$$\mathbf{S}\mathbf{z}(-\tau) = \mathbf{z}(\tau), \quad \mathbf{S}\mathbf{z}\left(-\tau + \frac{T}{4}\right) = \mathbf{z}\left(\tau + \frac{T}{4}\right) - \pi\mathbf{e}_1.$$

Продолжение решения удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} \mathbf{z}\left(\tau + \frac{T}{2}\right) &= \mathbf{z}\left(\tau + \frac{T}{4} + \frac{T}{4}\right) = \mathbf{S}\mathbf{z}\left(-\tau - \frac{T}{4} + \frac{T}{4}\right) + \pi\mathbf{e}_1 = \\ &= \mathbf{S}\mathbf{z}(-\tau) + \pi\mathbf{e}_1 = \mathbf{z}(\tau) + \pi\mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

и, следовательно, является T -периодическим вращением.

Как будет показано ниже, периодические решения системы (2.14), определяемые краевыми условиями (2.30) или (2.35), образуют однопараметрические семейства, параметром в которых может служить период. Эти решения неустойчивы по Ляпунову, но в технических приложениях от них требуется только орбитальная устойчивость в первом приближении. Опишем способ исследования такой устойчивости.

Начнем с исследования орбитальной устойчивости в первом приближении в случае вращательных периодических движений, определяемых краевыми условиями (2.35). Рассмотрим решение этой задачи в вариациях

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{y}, \quad (2.43)$$

где $\mathbf{A}(\tau) = \mathbf{F}_z(\mathbf{z}(\tau), \mu)$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^6$. В силу соотношений (2.20), (2.21) и (2.34) для матрицы $\mathbf{A}(\tau)$, справедливы равенства

$$-\mathbf{S}\mathbf{A}(-\tau) = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{S}, \quad \mathbf{A}\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = \mathbf{A}(\tau). \quad (2.44)$$

Таким образом, система (2.43) является системой с $T/2$ -периодическими коэффициентами. Характеристическое уравнение этой системы запишем в виде

$$\left| \mathbf{X}\left(\frac{T}{2}\right) - \rho\mathbf{E} \right| = 0, \quad (2.45)$$

где \mathbf{E} — единичная матрица шестого порядка, $\mathbf{X}(\tau)$ — решение начальной задачи

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{E}.$$

Корни уравнения (2.45) называются *мультипликаторами* системы (2.43) [8].

В силу первого соотношения (2.44) имеем

$$\mathbf{S}\mathbf{X}(-\tau) = \mathbf{X}(\tau)\mathbf{S}. \quad (2.46)$$

Матрицу $\mathbf{X}(T/2)$ можно представить в виде $\mathbf{X}(T/2) = \mathbf{X}^{-1}(-T/4)\mathbf{X}(T/4)$.

Кроме того, вследствие (2.46) $\mathbf{X}(-T/4) = \mathbf{S}\mathbf{X}(T/4)\mathbf{S}$, поэтому

$$\mathbf{X}\left(\frac{T}{2}\right) = \mathbf{S}\mathbf{X}^{-1}\left(\frac{T}{4}\right)\mathbf{S}\mathbf{X}\left(\frac{T}{4}\right). \quad (2.47)$$

Как следует из (2.47), $\mathbf{X}^{-1}(T/2) = \mathbf{S}\mathbf{X}(T/2)\mathbf{S}$. В силу этого соотношения уравнение (2.45) — возвратное [35], и система (2.43) может быть либо устойчивой (не асимптотически), либо неустойчивой. Заметим, что система (2.43) имеет $T/2$ -периодическое решение $\mathbf{y} = \dot{\mathbf{z}}(\tau)$. Следовательно, уравнение (2.45) имеет корень $\rho = 1$ кратности не ниже 2. Учитывая это, уравнение (2.45) можно представить в виде

$$(\rho - 1)^2(\rho^2 - 2A_1\rho + 1)(\rho^2 - 2A_2\rho + 1) = 0, \quad (2.48)$$

где A_1, A_2 — некоторые коэффициенты. Если A_1, A_2 действительны и $|A_1| \leq 1, |A_2| \leq 1$, то все корни уравнения (2.45) лежат на окружности $|\rho| = 1$ и выполнены необходимые условия орбитальной устойчивости решения $\mathbf{z}(\tau)$. В противном случае это решение орбитально неустойчиво.

Ниже будет показано (см. п. 3.5), что корню $\rho = 1$ уравнения (2.48) в общем случае отвечает жорданова клетка второго порядка матрицы $\mathbf{X}(T/2)$ и система (2.43) имеет неограниченные решения.

Обратимся теперь к исследованию устойчивости в случае колебательных периодических движений, определяемых краевой задачей (2.14), (2.30). Рассмотрим соответствующую систему уравнений в вариациях. Характеристическое уравнение этой системы можно записать в виде

$$|\mathbf{X}(T) - \rho\mathbf{E}| = 0, \quad (2.49)$$

где \mathbf{E} — единичная 6×6 -матрица, $\mathbf{X}(\tau)$ — решение начальной задачи

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\tau)\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{E}, \quad \mathbf{A}(\tau) = \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{z}(\tau), \mu)}{\partial \mathbf{z}}.$$

В случае колебательных периодических движений функция $\mathbf{z}(\tau)$ удовлетворяет соотношениям (2.29). Поэтому с учетом (2.20) имеем

$$\mathbf{S}\mathbf{A}(-\tau) = -\mathbf{A}(\tau)\mathbf{S}, \quad \mathbf{S}'\mathbf{A}\left(-\tau + \frac{T}{4}\right) = -\mathbf{A}\left(\tau + \frac{T}{4}\right)\mathbf{S}'.$$

Полученные соотношения позволяют доказать, что

$$\mathbf{S}\mathbf{X}(-\tau) = \mathbf{X}(\tau)\mathbf{S}, \quad \mathbf{S}'\mathbf{X}\left(-\tau + \frac{T}{4}\right) = \mathbf{X}\left(\tau + \frac{T}{4}\right)\mathbf{X}^{-1}\left(\frac{T}{4}\right)\mathbf{S}'\mathbf{X}\left(\frac{T}{4}\right).$$

Положим здесь $\tau = -T/4, \tau = T/4$. С учетом $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}^{-1}(T/2)\mathbf{X}(T/2)$ имеем

$$\mathbf{X}(T) = \mathbf{C}^2, \quad \mathbf{C} = \mathbf{S}\mathbf{X}^{-1}\left(\frac{T}{4}\right)\mathbf{S}'\mathbf{X}\left(\frac{T}{4}\right). \quad (2.50)$$

Отсюда следует

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{S}\mathbf{C}\mathbf{S}, \quad \mathbf{X}^{-1}(T) = \mathbf{S}\mathbf{X}(T)\mathbf{S}.$$

Таким образом, уравнение (2.49) возвратное и решение $\mathbf{z}(\tau)$ может быть либо устойчивым неасимптотически, либо неустойчивым. Если все корни уравнения (2.49) лежат на окружности $|\rho| = 1$, то выполнено необходимое условие устойчивости решения $\mathbf{z}(\tau)$ и говорят, что это решение устойчиво в первом приближении. В противном случае решение $\mathbf{z}(\tau)$ неустойчиво.

Корни уравнения (2.49) лежат на окружности $|\rho| = 1$ одновременно с корнями уравнения $|\mathbf{C} - \rho\mathbf{E}| = 0$. Последнее уравнение также возвратное. Его левую часть можно представить в виде (2.48). Необходимые условия орби-

тальной устойчивости формулируются так же, как в случае решения задачи (2.14), (2.35). Для проверки устойчивости вычисляемых решений на каждом шаге алгоритма решения краевой задачи по формуле (2.50) находилась матрица \mathbf{C} и затем определялись коэффициенты A_j .

2.6. Численное исследование медленных периодических движений

Для построения колебательных периодических решений, лежащих на интегральной поверхности (2.15), решается краевая задача

$$\gamma(0) = \delta(0) = \Omega_3(0) = \Omega_1\left(\frac{T}{4}\right) = \delta\left(\frac{T}{4}\right) = \beta\left(\frac{T}{4}\right) = 0 \quad (2.51)$$

для системы (1.21). Эта задача эквивалентна задаче (2.4), (2.31) и более удобна при программировании. Алгоритм решения задачи (1.21), (2.51) состоит в следующем. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$, $\Omega_j^*(\tau, \mathbf{a})$ ($j = 1, 2, 3$), $\gamma^*(\tau, \mathbf{a})$, $\delta^*(\tau, \mathbf{a})$, $\beta^*(\tau, \mathbf{a})$ решение системы (1.21) с начальными условиями $\Omega_1(0) = a_1$, $\Omega_2(0) = a_2$, $\Omega_3(0) = \gamma(0) = \delta(0) = 0$, $\beta(0) = a_3$. Тогда краевую задачу (1.21), (2.51) можно свести к уравнению

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}, T) \equiv \begin{vmatrix} \Omega_1^*\left(\frac{T}{4}, \mathbf{a}\right) \\ \delta^*\left(\frac{T}{4}, \mathbf{a}\right) \\ \beta^*\left(\frac{T}{4}, \mathbf{a}\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.52)$$

При фиксированных значениях T , μ и λ решение этого уравнения относительно \mathbf{a} ищется методом Ньютона. Для вычисления функций $\mathbf{g}(\mathbf{a}, T)$ и $\partial \mathbf{g}(\mathbf{a}, T) / \partial \mathbf{a}$, используемых в этом методе, на отрезке $0 \leq \tau \leq T/4$ интегрируется система (1.21) и соответствующая система уравнений в вариациях. Первое приближение неизвестного $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ выбирается в виде

$$a_1 = k \sqrt{\frac{\mu(4-3\lambda)}{4(1-\lambda)}}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{\lambda a_1}{4-3\lambda},$$

где k — корень уравнения

$$K(k) = \frac{T}{4} \sqrt{\frac{4\mu(1-\lambda)}{4-3\lambda}}, \quad (2.53)$$

K — полный эллиптический интеграл первого рода. Такие значения a_1 , a_2 , a_3 получаются при пересчете начальных условий решения краевой задачи (2.19), (2.28) в переменные Ω_1 , Ω_2 , β по формулам (2.15), (2.1) с точностью до слагаемых порядка $O(\mu)$. Заметим, что уравнение (2.53) имеет действительные корни только при

$$T \geq 2\pi \sqrt{\frac{4\mu(1-\lambda)}{4-3\lambda}}.$$

Для $\lambda = \mu = 0.1$ зависимость решений уравнения (2.52) от T представлена на рис. 2.1. Так как система (1.21) не меняется при замене $\tau \rightarrow \tau$, $\Omega_1 \rightarrow -\Omega_1$, $\Omega_2 \rightarrow \Omega_2$, $\Omega_3 \rightarrow -\Omega_3$, $\gamma \rightarrow -\gamma$, $\delta \rightarrow \delta$, $\beta \rightarrow -\beta$, то в (2.52)

$$Dg(Da, T) = g(a, T), \quad D = \text{diag}(-1, 1, -1).$$

Следовательно, кривые, получающиеся из кривых на рис. 2.1 преобразованием $a_1 \rightarrow -a_1$, $a_2 \rightarrow a_2$, $a_3 \rightarrow -a_3$, $T \rightarrow T$, также задают решения урав-

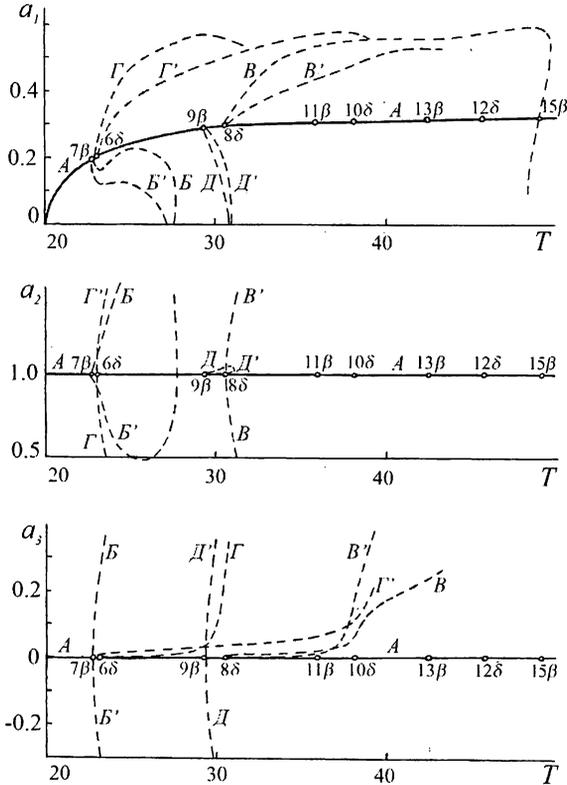


Рис. 2.1.

нения (2.53). Кривые, изображенные на рис. 2.1 сплошными линиями (кривые А), были вычислены описанным выше способом. Эти кривые состоят из отдельных кусков. При выбранном масштабе рисунка разрывы между кусками незаметны и для наглядности обозначены кружками. Для решений уравнения (2.53), принадлежащих одному и тому же куску, якобиан $J = |\partial g(a, T) / \partial a|$ имеет одинаковый знак; при переходе на соседний кусок знак J меняется.

Для вычисления решений уравнения (2.53) на стыках кусков применялся метод, описанный в [28]. Найденные с его помощью решения изображены на

рис. 2.1 пунктиром (кривые $B, B', \Gamma, \Gamma', \Delta, \Delta'$). Поведение решений уравнения (2.53) в окрестности разрывов при $T \approx 22.8$ и $T \approx 23.0$ показано на рис. 2.2.

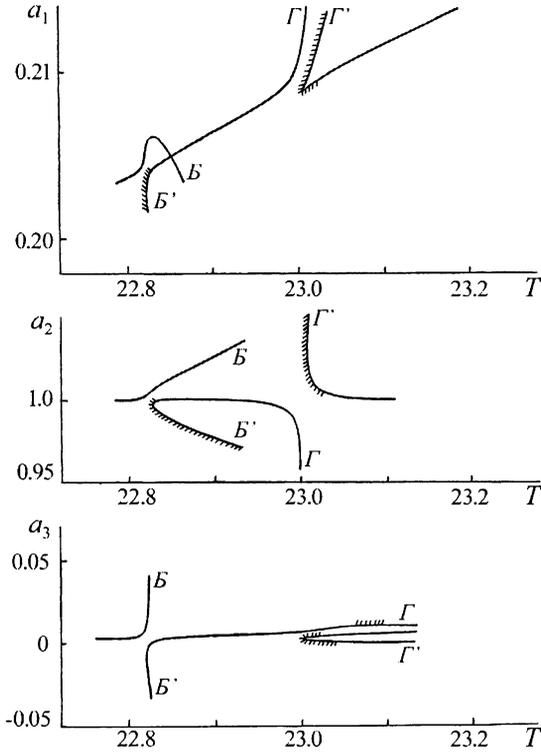


Рис. 2.2.

Графики функций $\gamma(\tau)$, $\delta(\tau)$, $\beta(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq T$) для T -периодических решений системы (1.21), начальные условия которых лежат на кривых A, B, V , приведены на рис. 2.3а, 2.3б, 2.3в соответственно. Анализ этих рисунков позволяет заключить, что разрывы кривых A вызваны резонансами между медленными и быстрыми колебаниями спутника. Рисунок 2.3б, например, иллюстрирует резонанс с быстрыми колебаниями по углу β (β -резонанс), а рисунок 2.3в — резонанс с быстрыми колебаниями по углу γ (γ -резонанс). Ясно, что периодические решения, приведенные на рис. 2.3б и 2.3в, нельзя считать медленными. Обнаруженные резонансы свидетельствуют о расхождении рядов (2.15)–(2.17).

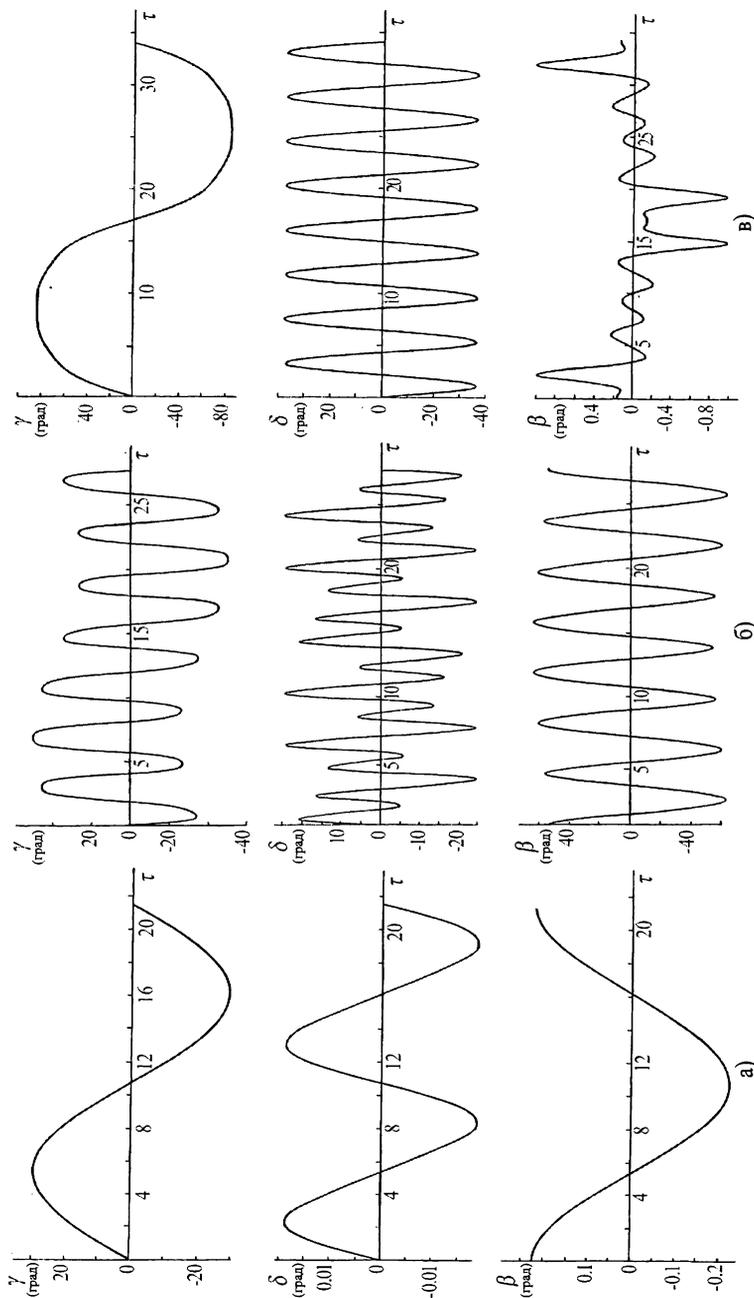


Рис. 2.3. Колебательные периодические решения

- а) $a_1 = 0.158346$, $a_2 = 1.000216$, $a_3 = 0.003912$, $T = 21.539188$;
 б) $a_1 = 0.140702$, $a_2 = 1.430850$, $a_3 = 0.948428$, $T = 27.645864$;
 в) $a_1 = 0.499589$, $a_2 = -0.007675$, $a_3 = 0.002411$, $T = 34.102012$.

Резонансные значения периода медленных движений (то есть такие значения T , при которых кривые A терпят разрывы) и тип резонанса можно

Таблица 2.1. δ -резонансы (колебания и вращения)

n_δ	2	4	6	8	10	12
T_δ	7.648	15.295	22.943	30.591	38.238	45.886
$\frac{T_\delta'}{T_\delta''}$ (колебания)	—	—	$\frac{23.00}{23.04}$	$\frac{30.56}{30.60}$	$\frac{38.16}{38.20}$	$\frac{45.76}{45.80}$
$\frac{T_\delta'}{T_\delta''}$ (вращения)	$\frac{7.60}{7.80}$	$\frac{15.28}{15.36}$	$\frac{22.88}{22.96}$	$\frac{30.52}{30.60}$	$\frac{38.12}{38.20}$	$\frac{45.80}{45.84}$

определить следующим образом. Малые быстрые колебания спутника в окрестности медленного движения (2.15), (2.17) приближенно описываются линейными уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \Delta w_2, & \Delta \dot{w}_2 &= -3(1-\lambda)\delta, \\ \dot{\beta} &= w_3, & \dot{w}_2 &= -(4-3\lambda)\beta, \end{aligned} \quad (2.54)$$

где $\Delta w_2 = w_2 - 1$. Из условия существования нетривиальных решений системы (2.54), удовлетворяющих краевым условиям (2.31), находим, что δ -резонанс возможен при $T = T_\delta$, где T_δ — корень уравнения

$$\sin\left(\sqrt{3(1-\lambda)} \frac{T_\delta}{4}\right) = 0;$$

β -резонанс возможен при $T = T_\beta$, где T_β — корень уравнения

$$\cos\left(\sqrt{4-3\lambda} \frac{T_\beta}{4}\right) = 0.$$

Решения выписанных уравнений имеют вид

$$T_\delta = \frac{2\pi n_\delta}{\sqrt{3(1-\lambda)}}, \quad T_\beta = \frac{2\pi n_\beta}{\sqrt{4-3\lambda}}, \quad (2.55)$$

где $n_\beta \equiv 0 \pmod{2}$, $n_\delta \equiv 0 \pmod{2}$. Числовые значения величин (2.55) для $\lambda = 0.1$ и некоторых значений n_δ и n_β приведены в таблицах 2.1, 2.2. Там же

указаны границы интервалов (T_δ', T_δ'') и (T_β', T_β'') , которым принадлежат разрывы между кусками кривых A . Как видно из таблиц, величины T_δ и T_β хорошо (с точностью < 0.1) согласуются с ближайшими значениями T_δ', T_δ'' и T_β', T_β'' . На рис. 2.1 каждый разрыв отмечен символом n_δ или n_β , указывающим номер соответствующего резонанса и его тип.

Таблица 2.2. β -резонансы (колебания)

n_β	7	9	11	13	15
T_β	22.295	29.397	35.930	42.463	48.996
T_β' / T_β''	22.80 / 22.84	29.36 / 29.40	35.92 / 35.96	42.48 / 45.52	49.04 / 49.08

Для построения вращательных периодических решений, лежащих на интегральной поверхности (2.15), решалась краевая задача (1.21), (2.37). Численное решение этой задачи сводится к решению системы

$$\mathbf{g}'(\mathbf{a}, T) \equiv \begin{vmatrix} \gamma^* \left(\frac{T}{4}, \mathbf{a} \right) - \frac{\pi}{2} \\ \delta^* \left(\frac{T}{4}, \mathbf{a} \right) \\ \Omega_2^* \left(\frac{T}{4}, \mathbf{a} \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.56)$$

относительно \mathbf{a} при фиксированном значении T . Решение этой системы находилось методом Ньютона. Первое приближение неизвестного $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T$ выбиралось в виде

$$a_1 = \frac{\text{sign } T}{k} \sqrt{\frac{\mu(4-3\lambda)}{4(1-\lambda)}}, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = \frac{\lambda a_1}{4-3\lambda}, \quad (2.57)$$

где k — корень уравнения

$$K(k) = \frac{|T|}{4k} \sqrt{\frac{4\mu(1-\lambda)}{4-3\lambda}},$$

K — полный эллиптический интеграл первого рода. Такие значения a_1, a_2, a_3 получаются при пересчете начальных условий решения краевой задачи (2.19), (2.33) в переменные Ω_1, Ω_2 и β по формулам (2.15), (2.5) с точностью до слагаемых порядка $O(\mu)$.

Результаты численного решения уравнения (2.56) указанным способом в случае $\lambda = \mu = 0.1$, $T > 0$ представлены на рис. 2.4. Кривые, изобра-

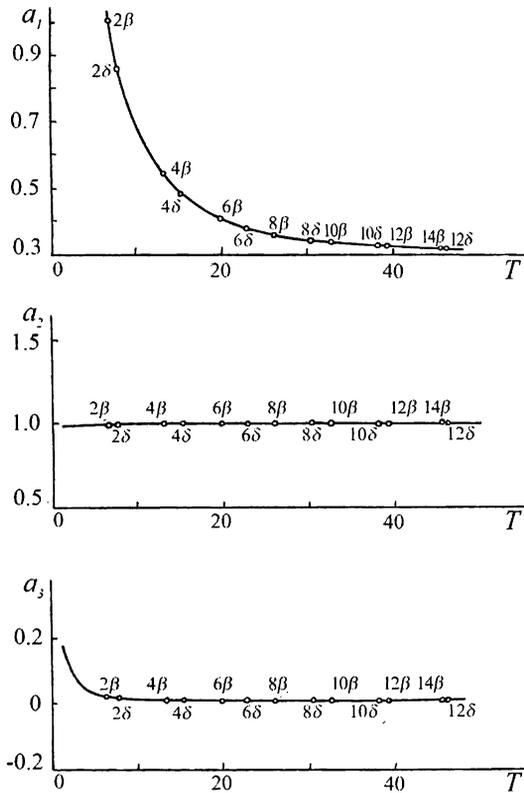


Рис. 2.4.

женные на этом рисунке, состоят из отдельных кусков, разрывы между которыми обозначены кружками. Причина возникновения разрывов та же, что и в случае колебаний — резонансы между медленным и быстрым движениями спутника. Из условия существования нетривиальных решений системы (2.54), удовлетворяющих краевым условиям (2.35), можно найти, что резонансные значения периода имеют вид (2.55), где по-прежнему $n_\beta \equiv 0 \pmod{2}$, $n_\delta \equiv 0 \pmod{2}$. В окрестности точек T_δ возникает δ -резонанс, а в окрестности точек T_β — β -резонанс. Для $\lambda = 0.1$ и некоторых значений n_δ и n_β величины указаны в таблицах 2.1, 2.3. Там же указаны границы интервалов (T_δ', T_δ'') и (T_β', T_β'') , которым принадлежат разрывы кривых, изображенных на рис. 2.4. Как видно из таблиц, величины T_δ и T_β хорошо (с точностью < 0.1) согласуются с ближайшими значениями

T_δ' , T_δ'' и T_β' , T_β'' . На рис. 2.4 каждый разрыв отмечен символом n_δ или n_β , указывающим номер соответствующего резонанса и его тип. Пример вращения

Таблица 2.3. β -резонансы (вращения)

n_β	2	4	6	8	10	12	14
T_β	6.533	13.066	19.598	26.131	32.664	39.167	45.729
T_β' / T_β''	6.52 6.64	13.04 13.12	19.56 19.64	26.12 26.16	32.68 32.72	39.20 39.24	45.72 45.80

тельного периодического решения системы (1.21) приведен на рис. 2.5. Здесь для T -периодического решения этой системы, начальные условия которого

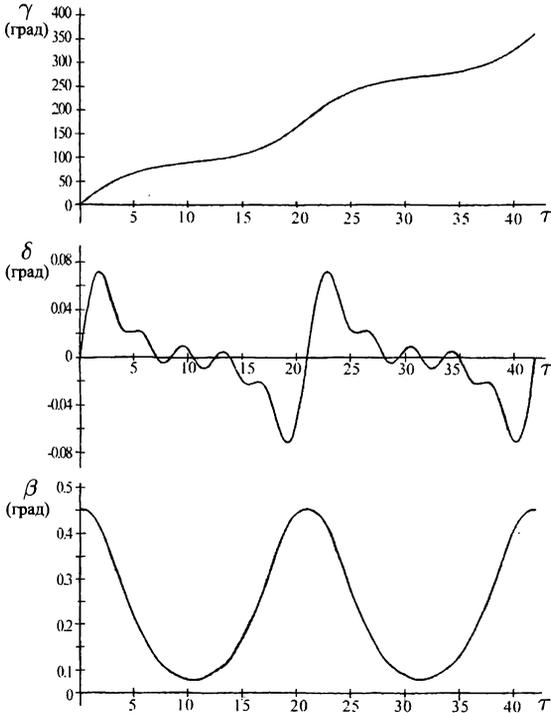


Рис. 2.5. Колебательное периодическое решение
 $a_1 = 0.840237$, $a_2 = 1.053935$, $a_3 = 0.019483$, $T = 8$.

принадлежат кривым, изображенным на рис. 2.4, приведены графики функций $\gamma(\tau)$, $\delta(\tau)$, $\beta(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq T$).

Проведенные расчеты показали, что интегральная поверхность (2.15) разбивается на отдельные куски, состоящие из периодических решений. Куски разделены резонансными зонами, внутри которых движение спутника не является периодическим. Перейти от одного куска к другому, оставаясь на интегральной поверхности и пересекая только периодические решения, нельзя.

Для исследования устойчивости найденных периодических решений системы (1.21) рассмотрим характеристическое уравнение соответствующей системы в вариациях. Используя свойства симметрии системы (1.21) и исследуемых периодических решений, можно доказать, что это характеристическое уравнение возвратное. Далее, в силу автономности системы (1.21) это уравнение имеет корень, равный 1, кратности не ниже 2. Учитывая эти замечания, рассматриваемое характеристическое уравнение можно представить в виде

$$(\rho - 1)^2(\rho^2 - 2A_1\rho + 1)(\rho^2 - 2A_2\rho + 1) = 0, \quad (2.58)$$

где A_1, A_2 — некоторые числа. Если A_1, A_2 действительны и $|A_i| < 1$ ($i = 1, 2$), то все корни уравнения (2.58) лежат на окружности $|\rho| = 1$ и выполнены необходимые условия орбитальной устойчивости исследуемого периодического решения. В противном случае оно неустойчиво.

Как показали расчеты, для колебательных и вращательных периодических решений системы (1.21), начальные условия которых представлены на рис. 2.1 и 2.4 сплошными линиями, необходимые условия орбитальной устойчивости выполнены при всех значениях T , за исключением, быть может, узких (шириной $\Delta T < 10^{-3}$) зон параметрического резонанса. Значения периода, в окрестности которых возможен параметрический резонанс, в случае колебаний приближенно определяются уравнениями

$$T\sqrt{3(1-\lambda)} = 2\pi(2k-1), \quad T\sqrt{4-3\lambda} = 4\pi k,$$

$$T\left(\sqrt{4-3\lambda} + \sqrt{3(1-\lambda)}\right) = 2\pi(2k-1) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

и в случае вращений уравнениями

$$T\sqrt{3(1-\lambda)} = 2\pi(2k-1), \quad T\sqrt{4-3\lambda} = 2\pi(2k-1),$$

$$T\left(\sqrt{4-3\lambda} + \sqrt{3(1-\lambda)}\right) = 4\pi k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Результаты исследования устойчивости периодических решений в окрестности точек ветвления $T \approx 22.8$ и $T \approx 23.0$ приведены на рис. 2.2. На этом рисунке участки неустойчивости отмечены штриховкой. В точках ветвления $A_1 \neq 1, A_2 \neq 1$.

2.7. Аппроксимация возмущенного движения спутника медленными периодическими движениями

Рассмотрим возмущенное движение спутника с начальными условиями

$$\Omega_1(0) = \varepsilon, \quad \Omega_2(0) = 1 + \varepsilon, \quad \Omega_3(0) = \varepsilon, \quad \gamma(0) = \delta(0) = \beta(0) = 0.$$

Такое движение отвечает случаю, когда в начальный момент времени спутник по углам выставлен точно, а в угловых скоростях имеются ошибки.

Пусть $\gamma_0(\tau, \varepsilon)$ — функция, описывающая изменение угла γ в этом движении, $\gamma_1(\tau, c)$ — функция, описывающая изменение угла γ в решении системы (2.19) с начальными условиями $\gamma(0) = 0, \Omega(0) = c$. При $|c| < c_* = \sqrt{(4 - 3\lambda)/(4 - 4\lambda)}$ рассматриваемое решение системы (2.19) является колебательным периодическим решением с периодом

$$T(c) = 4K \left(\frac{|c|}{c_*} \right) \sqrt{\frac{4 - 3\lambda}{4\mu(1 - \lambda)}}; \tag{2.59}$$

при $|c| > c_*$ это решение — вращательное периодическое решение с периодом

$$T(c) = \frac{4 - 3\lambda}{c\sqrt{\mu}(1 - \lambda)} K \left(\frac{c_*}{|c|} \right). \tag{2.60}$$

Будем искать c из условия

$$\min_c \max_{0 \leq \tau \leq |T(c)|} |\gamma_0(\tau, \varepsilon) - \gamma_1(\tau, c)|, \tag{2.61}$$

где $T(c)$ в зависимости от выполнения неравенства $|c| < c_*$ или $|c| > c_*$ определяется соотношением (2.59) или (2.60). Случай $|c| = c_*$ (сепаратриса системы (2.19)) как маловероятный не рассматривается. При таком выборе c функция $\gamma_1(\tau, c)$ наилучшим образом аппроксимирует функцию $\gamma_0(\tau, \varepsilon)$ на отрезке $0 \leq \tau \leq |T(c)|$ среди всех решений системы (2.19) с начальным

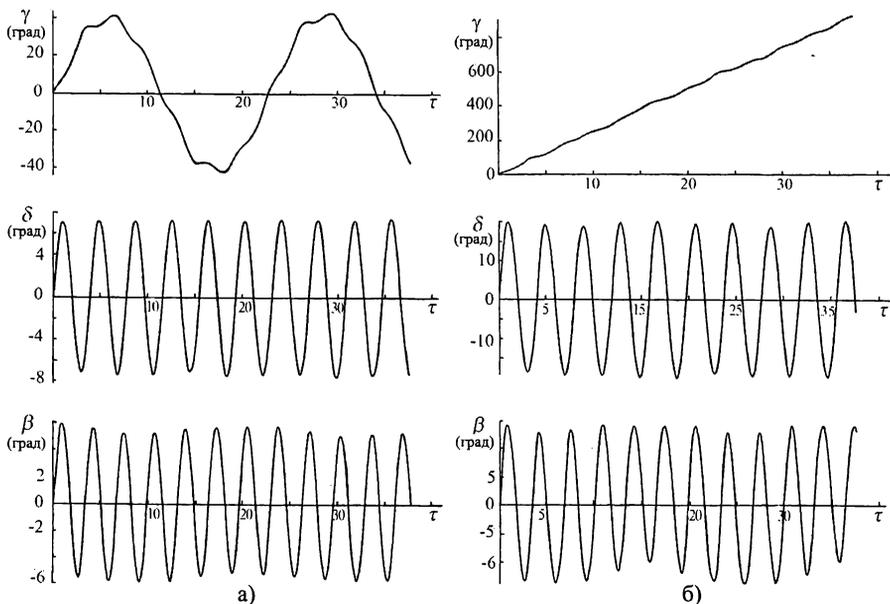


Рис. 2.6. Примеры возмущенного движения
 а) $\varepsilon = 0.2$; б) $\varepsilon = 0.5$.

условием $\gamma(0) = 0$. Вообще говоря, следовало бы аппроксимировать $\gamma_0(\tau, \varepsilon)$ функцией $\tilde{\gamma}(\tau)$, описывающей изменение угла γ в медленном периодиче-

ском колебательном или вращательном решении системы (1.21). Однако при $\lambda = \mu = 0.1$ и $|\varepsilon| \gtrsim 0.05$ практически без потери точности для аппроксимации $\gamma_0(\tau, \varepsilon)$ можно вместо $\tilde{\gamma}(\tau)$, использовать $\gamma_1(\tau, c)$.

На рис. 2.6 изображены графики функций $\gamma(\tau)$, $\delta(\tau)$, $\beta(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq 12\pi$) для возмущенного движения спутника с параметрами $\lambda = \mu = 0.1$ при $\varepsilon = 0.2$ и $\varepsilon = 0.5$. При $\varepsilon = 0.2$ (рис. 2.6а) спутник совершает колебательное движение по углу γ , при $\varepsilon = 0.5$ (рис. 2.6б) — вращательное. Результаты аппроксимации функции $\gamma_0(\tau, \varepsilon)$ для этих движений функцией $\gamma_1(\tau, c)$ представлены на рис. 2.7. Здесь графики функции $\gamma_0(\tau, \varepsilon)$ изображены сплошными линиями, графики функции $\gamma_1(\tau, c)$ — пунктиром. Для $\varepsilon = 0.2$ минимум (2.61) достигается при $c = 0.632$ ($T(c) = 22.172$) и равен 5.13° ; для $\varepsilon = 0.5$ минимум (2.61) достигается при $c = 1.587$ ($T(c) = 14.600$) и равен 13.34° .

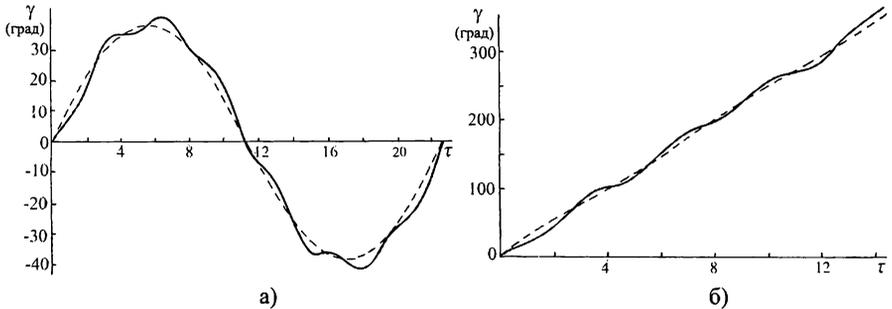


Рис. 2.7. Аппроксимация возмущенного движения
а) $\varepsilon = 0.2$; б) $\varepsilon = 0.5$.

В рассмотренных случаях аппроксимация удачна. Однако можно привести примеры, когда это не так. В частности, медленными периодическими решениями нельзя аппроксимировать периодическое решение, представленное на рис. 2.3б. Если отвлечься от таких маловероятных случаев, то для рассматриваемого в данном разделе возмущенного движения хорошую аппроксимацию можно получить при любых значениях $\varepsilon \sim \sqrt{\mu}$, за исключением случая $|\varepsilon| \approx \sqrt{\mu(4 - 3\lambda)/(4 - 4\lambda)}$. При таком значении $|\varepsilon|$ для аппроксимации возмущенного движения нужно использовать решения системы (2.19), близкие ее сепаратрисе.

Выше предлагалось использовать медленные движения спутника (2.15), (2.17) для аппроксимации его возмущенного движения в окрестности положения равновесия (1.23), рассматривавшегося как номинальное невозмущенное движение в режиме трехосной гравитационной ориентации. Можно поставить задачу иначе: считать медленные движения (2.15), (2.17) номинальными невозмущенными движениями в режиме одноосной гравитационной ориента-

ции. Как показывают расчеты (см., например, рис. 2.3а и 2.5), при $\mu \ll 1$, $\lambda \ll 1$ максимальное отклонение оси Ox_1 от направления в притягивающий центр для таких движений не превышает нескольких градусов и точность ориентации оказывается удовлетворительной. Для приведения спутника в режим одноосной гравитационной ориентации достаточно обеспечить выполнение условий $\Omega_1 = w_2 - 1 = w_3 = \delta = \beta = 0$, то есть направить ось Ox_1 в притягивающий центр и сообщить спутнику орбитальную угловую скорость вдоль нормали к плоскости орбиты.

Глава 3

Гравитационная ориентация вращающегося спутника

3.1. Гравитационная ориентация динамически симметричного спутника

Уравнения движения динамически симметричного спутника ($\mu = 0$) были получены в п. 2.2. Они записываются в виде (2.6), (2.7). При $|\lambda\Omega_1| < |4 - 3\lambda|$ система (2.7) имеет стационарное решение

$$\delta = 0, \quad \beta = \arcsin \frac{\lambda\Omega_1}{4 - 3\lambda}, \quad w_2 = \cos \beta, \quad w_3 = 0, \quad (3.1)$$

устойчивое при

$$0 < \lambda < 1. \quad (3.2)$$

Этому решению отвечает вращательное решение полной системы уравнений движения (2.6), (2.7):

$$\begin{aligned} \gamma^* &= \gamma_0 + \frac{4(1 - \lambda)}{4 - 3\lambda} \Omega \tau, \quad \Omega_1^* = \Omega, \quad \delta^* = 0, \\ \beta^* &= \arcsin \frac{\lambda\Omega}{4 - 3\lambda}, \quad w_2^* = \cos \beta^*, \quad w_3^* = 0, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где γ_0 и Ω — произвольные постоянные, $|\lambda\Omega| < |4 - 3\lambda|$. При выполнении неравенств (3.2) решение (3.3) устойчиво по переменным $\Omega_1, \delta, \beta, w_2, w_3$.

Предположим, что неравенства (3.2) выполнены, и будем считать стационарное вращение (3.3) номинальным невозмущенным движением спутника в режиме гравитационной ориентации. Вследствие погрешностей системы управления привести спутник точно в стационарное вращение (3.3) не удастся и он совершает в его окрестности некоторое возмущенное движение. Для исследования этого возмущенного движения рассмотрим соответствующие линеаризованные уравнения

$$\begin{aligned} \Delta\dot{\gamma} &= \Delta\Omega_1 - \frac{1}{\cos \beta^*} (\Delta\beta + \sin \beta^* \cdot \Delta w_2), \quad \Delta\dot{\Omega}_1 = 0, \\ \Delta\dot{\delta} &= \frac{1}{\cos \beta^*} (\sin \beta^* \cdot \Delta\beta + \Delta w_2), \quad \Delta\dot{\beta} = \Delta w_3, \\ \Delta\dot{w}_2 &= -3(1 - \lambda) (\cos \beta^* \cdot \Delta\delta + \sin \beta^* \cdot \Delta w_3), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\Delta\dot{w}_3 = \lambda \cos \beta^* \cdot \Delta\Omega_1 - (4 - 3\lambda) \cos^2 \beta^* \cdot \Delta\beta + (2 - 3\lambda) \sin \beta^* (\sin \beta^* \cdot \Delta\beta + \Delta w_2).$$

Здесь $\Delta\gamma, \Delta\Omega_1, \dots, \Delta w_3$ вариации переменных $\gamma, \Omega_1, \dots, w_3$ вдоль решения (3.3). Характеристическое уравнение системы (3.4) распадается на уравнение $p^2 = 0$ и уравнение

$$p^4 + d_1 p^2 + d_2 = 0, \quad (3.5)$$

где

$$d_1 = 7 - 6\lambda - 9\lambda(1 - \lambda) \sin^2 \beta^*, \quad d_2 = 3(1 - \lambda)(4 - 3\lambda) \cos^2 \beta^*.$$

Уравнение (3.5) — это характеристическое уравнение системы (2.7), линеаризованной в окрестности стационарного решения (3.1) (напомним, в этой системе Ω_1 считается параметром). Эта линеаризованная система совпадает с последними четырьмя уравнениями (3.4), если положить в них $\Delta\Omega_1 = 0$.

Общее решение системы (3.4) относительно переменных $\Delta\Omega_1, \Delta\delta$ и $\Delta\beta$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta\Omega_1 &= c_0, \quad \Delta\delta = a(c_1 \sin \nu_1 \tau - c_2 \cos \nu_1 \tau) + c_3 \cos \nu_2 \tau + c_4 \sin \nu_2 \tau, \\ \Delta\beta &= c_1 \cos \nu_1 \tau + c_2 \sin \nu_1 \tau + b(c_3 \sin \nu_2 \tau - c_4 \cos \nu_2 \tau) + \frac{\lambda c_0}{(4 - 3\lambda) \cos \beta^*}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь c_0, c_1, \dots, c_4 произвольные постоянные,

$$\begin{aligned} a &= \frac{(2 - 3\lambda) \nu_1 \operatorname{tg} \beta^*}{3(1 - \lambda) - \nu_1^2}, \quad b = -\frac{(2 - 3\lambda) \nu_2 \sin \beta^* \cos \beta^*}{(4 - 3\lambda) \cos^2 \beta^* - \nu_2^2}, \\ \nu_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}(d_1 + \sqrt{d_1^2 - 4d_2})}, \quad \nu_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(d_1 - \sqrt{d_1^2 - 4d_2})} \end{aligned} \quad (3.7)$$

(полагая, что $\nu_1 \neq \nu_2$). При выполнении неравенств (3.2) величины ν_1 и ν_2 действительны. Это положительные корни уравнения $\nu^4 - d_1 \nu^2 + d_2 = 0$, которое получается из уравнения (3.5) подстановкой $p = \nu\sqrt{-1}$.

Стационарное вращение (3.3) особенно удобно использовать в качестве номинального невозмущенного движения спутника, распределение масс которого близко к распределению масс стержня, то есть при $\lambda \ll 1$. В этом случае даже для достаточно больших значений $|\Omega|$ угол β^* мал и ось Ox_1 направлена в сторону притягивающего центра. Например, для $\lambda = 0.05$ и $\delta = 10$ в соответствии с (3.3) получаем $\beta^* = 7.5^\circ$. При $|\sin \beta^*| \ll 1$ имеем

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \sqrt{4 - 3\lambda} + O(\sin^2 \beta^*), \quad \nu_2 = \sqrt{3(1 - \lambda)} + O(\sin^2 \beta^*), \\ a &= O(\sin \beta^*), \quad b = O(\sin \beta^*), \end{aligned}$$

и с точностью $O(\sin \beta^*)$ на интервале $0 \leq \tau \lesssim |\sin \beta^*|^{-1}$ соотношения (3.6) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \Delta\Omega_1 &= c_0, \quad \Delta\delta = c_3 \cos [\sqrt{3(1 - \lambda)} \tau] + c_4 \sin [\sqrt{3(1 - \lambda)} \tau], \\ \Delta\beta &= c_1 \cos [\sqrt{3(1 - \lambda)} \tau] + c_2 \sin [\sqrt{3(1 - \lambda)} \tau] + \frac{\lambda c_0}{4 - 3\lambda}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при малых значениях угла β^* колебания оси Ox_1 в плоскости орбиты ($\Delta\delta$) и относительно этой плоскости ($\Delta\beta$) в рассматриваемом приближении происходят независимо.

3.2. Гравитационная ориентация спутника, близкого к динамически симметричному. Интегральная поверхность ориентированного движения

При $\mu \neq 0$ система (2.4) не имеет стационарных вращений, но если $\mu \ll 1$, то в виде формальных рядов по степеням μ можно построить ее интегральную поверхность вращательных движений, близких к стационарным вращениям (3.3). Движение, принадлежащее такой интегральной поверхности, будем считать номинальным невозмущенным движением спутника, близкого к динамически симметричному, в режиме гравитационной ориентации.

Следуя методу Боголюбова–Митропольского [5], интегральную поверхность вращательных движений системы (2.14) будем искать в виде

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\varphi}(\psi, \Omega, \mu) \equiv \boldsymbol{\varphi}_0(\psi, \Omega) + \mu \boldsymbol{\varphi}_1(\psi, \Omega) + \mu^2 \boldsymbol{\varphi}_2(\psi, \Omega) + \dots, \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= A(\Omega, \mu) \equiv A_0(\Omega) + \mu A_1(\Omega) + \mu^2 A_2(\Omega) + \dots, \\ \dot{\Omega} &= B(\Omega, \mu) \equiv \mu B_1(\Omega) + \mu^2 B_2(\Omega) + \dots; \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}_0(\psi, \Omega) &= (\psi, \Omega, 0, \beta^*, \cos \beta^*, 0)^T, \\ A_0(\Omega) &= \frac{4(1-\lambda)\Omega}{4-3\lambda}, \quad \beta^* = \arcsin \frac{\lambda\Omega}{4-3\lambda}; \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_k(\psi + \pi, \Omega) = \boldsymbol{\varphi}_k(\psi, \Omega) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (3.11)$$

Здесь введены новые переменные ψ и Ω , через которые выражены переменные системы (2.14). Соотношение (3.8) задает ее интегральную поверхность. Движения на этой поверхности описываются системой второго порядка (3.9).

Выписанные ряды будем рассматривать как формальные, то есть не будем заботиться об их сходимости. При $\mu = 0$ решения системы (2.14), лежащие на интегральной поверхности (3.8), переходят в семейство стационарных вращений (3.3). Функции $\boldsymbol{\varphi}(\psi, \Omega, \mu)$, $A(\Omega, \mu)$ и $B(\Omega, \mu)$ должны удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \psi} A + \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial \Omega} B = \mathbf{F}(\boldsymbol{\varphi}, \mu). \quad (3.12)$$

Подставим в это соотношение ряды (3.8), (3.9) и разложим левые и правые части образовавшегося равенства в ряды по степеням μ . Приравняем выражения при одинаковых степенях в левой и правой частях равенства. Получим цепочку уравнений для определения коэффициентов этих ря-

дов. Скалярная форма уравнения относительно $A_k(\Omega)$, $B_k(\Omega)$ и $\varphi_k(\psi, \Omega) = (\gamma^{(k)}, \Omega_1^{(k)}, \delta^{(k)}, \beta^{(k)}, w_2^{(k)}, w_3^{(k)})^\top$ имеет вид (ср. (3.3))

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \gamma^{(k)}}{\partial \psi} A_0 &= \Omega_1^{(k)} - \frac{1}{\cos \beta^*} (\beta^{(k)} + w_2^{(k)} \sin \beta^*) + g_1^{(k)} - A_k, \\
 \frac{\partial \Omega_1^{(k)}}{\partial \psi} A_0 &= g_2^{(k)} - B_k, \\
 \frac{\partial \delta^{(k)}}{\partial \psi} A_0 &= \frac{1}{\cos \beta^*} (\beta^{(k)} \sin \beta^* + w_2^{(k)}) + g_3^{(k)}, \\
 \frac{\partial \beta^{(k)}}{\partial \psi} A_0 &= w_3^{(k)} - \frac{\partial \beta^*}{\partial \Omega} B_k + g_4^{(k)}, \\
 \frac{\partial w_2^{(k)}}{\partial \psi} A_0 &= -3(1 - \lambda)(\delta^{(k)} \cos \beta^* + w_3^{(k)} \sin \beta^*) - \frac{\partial \cos \beta^*}{\partial \Omega} B_k + g_5^{(k)}, \\
 \frac{\partial w_3^{(k)}}{\partial \psi} A_0 &= \lambda \Omega_1^{(k)} \cos \beta^* - (4 - 3\lambda)\beta^{(k)} \cos^2 \beta^* + \\
 &+ (2 - 3\lambda) \sin \beta^* (\beta^{(k)} \sin \beta^* + w_2^{(k)}) + g_6^{(k)} \quad (k = 1, 2, \dots).
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Здесь $g_j^{(k)}$ ($j = 1, 2, \dots$) — некоторые функции ψ , Ω , φ_l , $\partial \varphi_l / \partial \psi$, $\partial \varphi_l / \partial \Omega$, A_l , B_l ($l = 1, \dots, k - 1$), π -периодические по ψ (ср. (2.21)). Уравнения (3.13) и соотношения (3.11) не достаточны для определения коэффициентов рядов (3.8), (3.9) единственным образом. Для того чтобы достичь единственности, потребуем еще выполнения условий

$$\int_0^\pi \gamma^{(k)}(\psi, \Omega) d\psi = 0, \quad \int_0^\pi \Omega_1^{(k)}(\psi, \Omega) d\psi = 0 \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{3.14}$$

Цепочка уравнений (3.13) решается следующим образом. Предположим, что найдены функции φ_k , A_k , B_k , удовлетворяющие уравнениям (3.13) и соотношениям (3.11), (3.14) при $k = 1, \dots, n - 1$. Рассмотрим уравнения (3.13) при $k = n$. После подстановки в них найденных φ_k , A_k , B_k функции $g_j^{(n)}$ ($j = 1, \dots, 6$) будут известными функциями ψ и Ω , π -периодическими по ψ . Решение полученной системы уравнений начинается с уравнения относительно $\Omega_1^{(n)}$, B_n . Это уравнение и соотношения (3.11), (3.14) при $k = n$ определяют функции $\Omega_1^{(n)}(\psi, \Omega)$, $B_n(\Omega)$ единственным образом:

$$B_n = \langle g_2^{(n)} \rangle, \quad \Omega_1^{(n)} = \frac{1}{A_0} \{g_2^{(n)}\}.$$

Здесь операторы $\langle \cdot \rangle$ и $\{ \cdot \}$ определены на периодических функциях вида

$$f(\psi) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (f_k \cos k\varphi + f_k' \sin k\varphi) \quad (f_k, f_k' = \text{const})$$

с помощью формул

$$\langle f \rangle = f_0, \quad \{f\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k \sin k\varphi - f_k' \cos k\varphi}{k}.$$

Подставив найденные выражения для $\Omega_1^{(n)}$, B_n в уравнения относительно $\delta^{(n)}$, $\beta^{(n)}$, $w_2^{(n)}$ и $w_3^{(n)}$, получим систему линейных неоднородных уравнений с π -периодическими свободными членами. Соответствующие однородные уравнения совпадают с четырьмя последними уравнениями системы (3.4), если в них положить $\Delta\Omega_1 = 0$ и перейти к новой независимой переменной $\psi = A_0\tau$. Предположим, что уравнение (3.5) не имеет корней вида $p = 2kA_0\sqrt{-1}$ при любом целом k , то есть

$$(2A_0k)^4 - d_1(2A_0k)^2 + d_2 \neq 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.15)$$

Тогда рассматриваемая неоднородная система имеет единственное π -периодическое по ψ решение $\delta^{(n)}(\psi, \Omega)$, $\beta^{(n)}(\psi, \Omega)$, $w_2^{(n)}(\psi, \Omega)$, $w_3^{(n)}(\psi, \Omega)$. Наконец, из первого уравнения системы (3.13) при $k = n$ и условий (3.11), (3.14) однозначно определяем A_n , $\gamma^{(n)}$:

$$A_n = \left\langle \Omega_1^{(n)} - \frac{\beta^{(n)} + w_2^{(n)} \sin \beta^*}{\cos \beta^* + g_1^{(n)}} \right\rangle, \quad \gamma^{(n)} = \frac{1}{A_0} \left\{ \Omega_1^{(n)} - \frac{\beta^{(n)} + w_2^{(n)} \sin \beta^*}{\cos \beta^* + g_1^{(n)}} \right\}$$

и т. п. Таким образом, при выполнении условия (3.15) цепочка уравнений (3.13) имеет единственное решение, удовлетворяющее соотношениям (3.11), (3.14). Далее полагаем, что именно это решение используется в качестве коэффициентов рядов (3.8), (3.9).

Укажем некоторые свойства интегральной поверхности (3.8) и системы (3.9). В силу соотношений (2.20) имеем

$$S\varphi(-\psi, \Omega, \mu) = \varphi(\psi, \Omega, \mu), \quad B(\Omega, \mu) = 0; \quad (3.16)$$

$$S'\varphi(\psi, -\Omega, \mu) = \varphi(\psi, \Omega, \mu), \quad A(-\Omega, \mu) = -A(\Omega, \mu). \quad (3.17)$$

Докажем, например, равенства (3.16); равенства (3.17) устанавливаются аналогично. Рассмотрим функции

$$\varphi'(\psi, \Omega, \mu) = S\varphi(-\psi, \Omega, \mu), \quad A'(\Omega, \mu) = A(\Omega, \mu), \quad B'(\Omega, \mu) = -B(\Omega, \mu).$$

Можно показать, что эти функции представляются формальными рядами вида (3.8), (3.9) и удовлетворяют соотношениям (3.11), (3.12), (3.14). Кроме того, $S\varphi_0(-\psi, \Omega) = \varphi_0(\psi, \Omega)$. Отсюда в силу единственности решения цепочки

уравнений (3.13), удовлетворяющего соотношениям (3.11), (3.14), получаем равенства

$$\varphi'(\psi, \Omega, \mu) = \varphi(\psi, \Omega, \mu), \quad B'(\Omega, \mu) = B(\Omega, \mu),$$

эквивалентные равенствам (3.16).

Из первого соотношения (3.10) и (3.11) следует, что

$$\varphi(\psi + \pi, \Omega, \mu) = \varphi(\psi, \Omega, \mu) + \pi \mathbf{e}_1. \quad (3.18)$$

3.3. Периодические вращения

Рассмотрим уравнения (3.9). В силу (3.16) $\Omega = \text{const}$ и решение системы (2.14), принадлежащее интегральной поверхности (3.8), представляет собой периодическое вращение с периодом $T = 2\pi/A(\Omega, \mu)$. Это решение содержит два параметра: Ω и $\psi(0)$. Значение Ω должно лежать в интервале $|\Omega| < (4 - 3\lambda)/\lambda$ ($|\sin \beta^*| < 1$, см. (3.3)) и удовлетворять условию (3.15), значение $\psi(0)$ произвольно. Без ограничения общности можно считать $\psi(0) = 0$.

Рассмотрим вращательное периодическое решение системы (2.14):

$$\mathbf{z}(\tau) = \varphi\left(A(\Omega, \mu)\tau, \Omega, \mu\right). \quad (3.19)$$

В силу соотношений (3.16), (3.18) имеем

$$\mathbf{S}\mathbf{z}(-\tau) = \mathbf{z}(\tau), \quad \mathbf{z}\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = \mathbf{z}(\tau) + \pi \mathbf{e}_1, \quad (3.20)$$

где $T = 2\pi/A(\Omega, \mu)$. Из (3.20) следует, что

$$\mathbf{S}\mathbf{z}\left(-\tau + \frac{T}{4}\right) = \mathbf{z}\left(\tau + \frac{T}{4}\right) - \pi \mathbf{e}_1.$$

Положив здесь и в первом соотношении (3.20) $\tau = 0$, находим краевые условия

$$\mathbf{S}\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}(0), \quad \mathbf{S}\mathbf{z}\left(\frac{T}{4}\right) = \mathbf{z}\left(\frac{T}{4}\right) - \pi \mathbf{e}_1, \quad (3.21)$$

которым удовлетворяет решение (3.19). Запишем эти условия в скалярной форме

$$\gamma(0) = \delta(0) = w_3(0) = \gamma\left(\frac{T}{4}\right) - \frac{\pi}{2} = \delta\left(\frac{T}{4}\right) = w_3\left(\frac{T}{4}\right) = 0. \quad (3.22)$$

Можно доказать (ср. п. 2.5), что всякое решение $\mathbf{z}(\tau)$ красвой задачи (2.14), (3.21) удовлетворяет соотношениям (3.20) и, следовательно, является T -периодическим вращением.

Исследуем краевую задачу (2.14), (2.35) методом Пуанкаре [12]. Пусть

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (a_1, a_2, a_3)^\top, \quad \mathbf{z}(\tau, \mathbf{a}, \mu) = \\ &= \left(\bar{\gamma}(\tau, \mathbf{a}, \mu), \bar{\Omega}_1(\tau, \mathbf{a}, \mu), \bar{\delta}(\tau, \mathbf{a}, \mu), \bar{\beta}(\tau, \mathbf{a}, \mu), \bar{w}_2(\tau, \mathbf{a}, \mu), \bar{w}_3(\tau, \mathbf{a}, \mu)\right)^\top \end{aligned}$$

— решение системы (2.14) с начальным условием

$$\mathbf{z}(0, \mathbf{a}, \mu) = (0, a_1, 0, a_3, a_2, 0)^\top.$$

Тогда краевую задачу (2.14), (2.35) можно записать в виде

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}, T, \mu) \equiv \begin{vmatrix} \bar{\gamma}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{a}, \mu\right) - \frac{\pi}{2} \\ \bar{\delta}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{a}, \mu\right) \\ \bar{w}_3\left(\frac{T}{4}, \mathbf{a}, \mu\right) \end{vmatrix} = 0. \quad (3.23)$$

Будем рассматривать последнее соотношение как уравнение относительно \mathbf{a} . Если $\mu = 0$ и $|T| > \pi\lambda/(2 - 2\lambda)$, то это уравнение имеет решение $\mathbf{a}^*(T) = (a_1^*(T), a_2^*(T), a_3^*(T))^T$, где

$$a_1^*(T) = \frac{2\pi(4 - 3\lambda)}{4T(1 - \lambda)}, \quad a_2^*(T) = \cos \beta^*, \quad a_3^*(T) = \beta^* = \arcsin \frac{\pi\lambda}{2T(1 - \lambda)}. \quad (3.24)$$

Как нетрудно видеть, $\mathbf{z}(\tau, \mathbf{a}^*(T), 0)$ — векторная запись стационарного вращения (3.3) в случае $\gamma_0 = 0$, $\Omega = 2\pi(4 - 3\lambda)/[4T(1 - \lambda)]$.

Следствие аналитичности правой части системы (2.14) по μ , \mathbf{z} при достаточно малых $|\mu|$ и $|\mathbf{z} - \mathbf{z}(\tau, \mathbf{a}^*(T), 0)|$, $0 \leq \tau \leq T$ функция $\mathbf{f}(\mathbf{a}, T, \mu)$ аналитически зависит от μ , \mathbf{a} в окрестности точки $\mu = 0$, $\mathbf{a} = \mathbf{a}^*(T)$. Если

$$J_f = \left| \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{a}^*(T), T, 0)}{\partial \mathbf{a}} \right| \neq 0, \quad (3.25)$$

то по теореме о неявной функции при достаточно малых $|\mu|$ уравнение (3.23) имеет единственное решение $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}(T, \mu)$, аналитически зависящее от μ и удовлетворяющее условию $\bar{\mathbf{a}}(T, 0) = \mathbf{a}^*(T, \mu)$. В таком случае краевая задача (2.14), (2.35) имеет единственное решение

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\varphi}_*(\tau, T, \mu) \equiv \mathbf{z}(\tau, \bar{\mathbf{a}}(T, \mu), \mu), \quad (3.26)$$

аналитически зависящее от μ в окрестности точки $\mu = 0$ и совпадающее в этой точке со стационарным вращением (3.3) при $\gamma_0 = 0$, $\Omega = 2\pi(4 - 3\lambda)/[4T(1 - \lambda)]$.

Найдем, при каких значениях T нарушается условие (3.25). Можно доказать [12], что $J = 0$ тогда и только тогда, когда система (3.4) для β^* , определенного последним соотношением (3.24), имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее крайевым условиям

$$\Delta\gamma(0) = \Delta\delta(0) = \Delta w_3(0) = \Delta\gamma\left(\frac{T}{4}\right) = \Delta\delta\left(\frac{T}{4}\right) = \Delta w_3\left(\frac{T}{4}\right) = 0.$$

Отсюда, учитывая (3.6), находим, что $J = 0$ в том и только в том случае, когда уравнение (3.5) имеет корень вида $p = 2kA_0\sqrt{-1} = 4\pi k\sqrt{-1}/T$ при некотором целом k . Таким образом, условие (3.25) эквивалентно условию

$$\left(\frac{4\pi k}{T}\right)^4 - \left(\frac{4\pi k}{T}\right)^2 d_1 + d_2 \neq 0 \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (3.27)$$

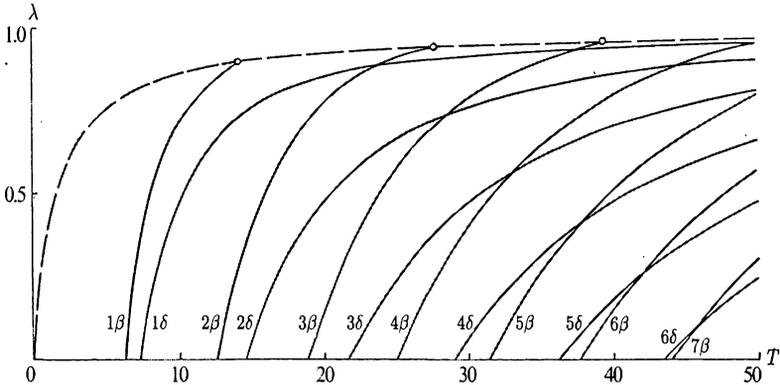


Рис. 3.1.

На рис. 3.1 в области $\{(T, \lambda) : T > 0, 0 < \lambda < 1\}$ сплошными линиями изображены кривые, на которых нарушено условие (3.27). Символом k_β (k_δ), где k — целое число, отмечены те кривые, на которых при $\lambda \ll 1$ и, следовательно, при $\beta^* \ll 1$ выполнено соотношение $4\pi k/T \approx \sqrt{4 - 3\lambda}$ ($4\pi k/T \approx \sqrt{3(1 - \lambda)}$). Таким образом, при $\lambda \ll 1$ на кривых k_β имеет место резонанс между вращением спутника вокруг оси Ox_1 и колебаниями этой оси в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты; на кривых k_δ имеет место резонанс между вращением спутника вокруг оси Ox_1 и колебаниями этой оси в плоскости орбиты (ср. п. 3.1). Ниже резонансы первого типа будем называть β -резонансами, резонансы второго типа — δ -резонансами. Штриховой линией на рис. 3.1 изображена кривая $T = \pi\lambda/(2 - 2\lambda)$, ограничивающая область существования решения (3.24). Резонансные кривые k_β с этой кривой пересекаются, резонансные кривые k_δ приближаются к ней асимптотически при $T \rightarrow +\infty$. На рис. 3.1 приведены ветви кривых $J_f = 0$, лежащие в полуплоскости $T > 0$. Ветви этих кривых, лежащие в полуплоскости $T < 0$, симметричны кривым в полуплоскости $T > 0$.

Предположим, что условие (3.27) выполнено, и рассмотрим решение (3.26). Вместо переменных τ и T введем переменные ψ и Ω :

$$\psi = \frac{2\pi\tau}{T}, \quad \Omega = \Omega_*(T, \mu) = \frac{1}{T} \int_0^\pi \bar{\Omega}_1(\tau, \bar{\mathbf{a}}(T, \mu), \mu) d\tau = \frac{\pi(4 - 3\lambda)}{2T(1 - \lambda)} + O(\mu).$$

Обозначим через $T = T_*(\Omega, \mu)$ функцию, обратную функции $\Omega = \Omega_*(T, \mu)$, и положим

$$\varphi(\psi, \Omega, \mu) \equiv \varphi_* \left(\frac{\psi T_*(\Omega, \mu)}{2\pi}, T_*(\Omega, \mu), \mu \right),$$

$$A(\Omega, \mu) = \frac{2\pi}{T_*(\Omega, \mu)}, \quad B(\Omega, \mu) = 0.$$

Можно доказать, что определенные таким образом функции φ , A и B удовлетворяют уравнению (3.12) и представляются сходящимися рядами вида (3.8)–(3.10), причем для коэффициентов этих рядов справедливы соотношения (3.11), (3.14). Вследствие единственности таких рядов построенная выше формальная интегральная поверхность вращательных решений системы (2.14) действительно существует и является аналитической.

В силу второго соотношения (2.20) определенное выше решение $\mathbf{z}(\tau, \mathbf{a}, \mu)$ системы (2.14) удовлетворяет равенству

$$\mathbf{S}'\mathbf{z}(-\tau, \mathbf{a}, \mu) = \mathbf{z}(\tau, \mathbf{D}\mathbf{a}, \mu),$$

где $\mathbf{D} = \text{diag}(-1, 1, -1)$. Отсюда можно вывести, что в (3.23)

$$\mathbf{f}(\mathbf{D}\mathbf{a}, -T, \mu) = -\mathbf{D}\mathbf{f}(\mathbf{a}, T, \mu). \quad (3.28)$$

Поскольку (ср. (3.24)) $\mathbf{D}\mathbf{a}^*(-T) = \mathbf{a}^*(T)$, найденное выше решение $\bar{\mathbf{a}}(T, \mu)$ уравнения (3.23) удовлетворяет соотношению $\mathbf{D}\bar{\mathbf{a}}(-T, \mu) = \bar{\mathbf{a}}(T, \mu)$, а решение (3.26) — соотношению

$$\mathbf{S}'\varphi_*(-\tau, T, \mu) = \varphi_*(\tau, -T, \mu).$$

Последнее равенство следует также из (3.17).

3.4. Численное исследование режима гравитационной ориентации спутника, близкого к динамически симметричному

Решая численно красную задачу (2.4), (2.36), можно построить решение (3.26) в явном виде и исследовать его зависимость от T , μ и λ . Так как система (1.21) более удобна для программирования, чем система (2.4), то вместо краевой задачи (2.4), (2.36) будем рассматривать эквивалентную ей краевую задачу

$$\gamma(0) = \delta(0) = \Omega_3(0) = \gamma\left(\frac{T}{4}\right) - \frac{\pi}{2} = \delta\left(\frac{T}{4}\right) = \Omega_2\left(\frac{T}{4}\right) = 0 \quad (3.29)$$

для системы (1.21). Пусть

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)^T, \quad \bar{\Omega}_i(\tau, \mathbf{a}) \quad (i = 1, 2, 3), \quad \bar{\gamma}(\tau, \mathbf{a}), \quad \bar{\delta}(\tau, \mathbf{a}), \quad \bar{\beta}(\tau, \mathbf{a})$$

— решение системы (1.21) с начальными условиями

$$\Omega_1(0) = a_1, \quad \Omega_2(0) = a_2, \quad \Omega_3(0) = \gamma(0) = \delta(0) = 0, \quad \beta(0) = a_3.$$

Тогда краевую задачу (1.21), (3.29) можно записать в виде

$$\mathbf{g}(\mathbf{a}, T) \equiv \left\| \begin{array}{c} \bar{\gamma}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{a}, \mu\right) - \frac{\pi}{2} \\ \bar{\delta}\left(\frac{T}{4}, \mathbf{a}, \mu\right) \\ \bar{\Omega}_2\left(\frac{T}{4}, \mathbf{a}, \mu\right) \end{array} \right\| = 0. \quad (3.30)$$

В силу (2.1) вектор \mathbf{a} здесь совпадает с вектором \mathbf{a} , входящим в (3.23). Уравнения (3.23) и (3.30) эквивалентны, причем при $\mathbf{f} = \mathbf{g} = 0$ выполнено соотношение $|\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{a}| = |\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{a}|$.

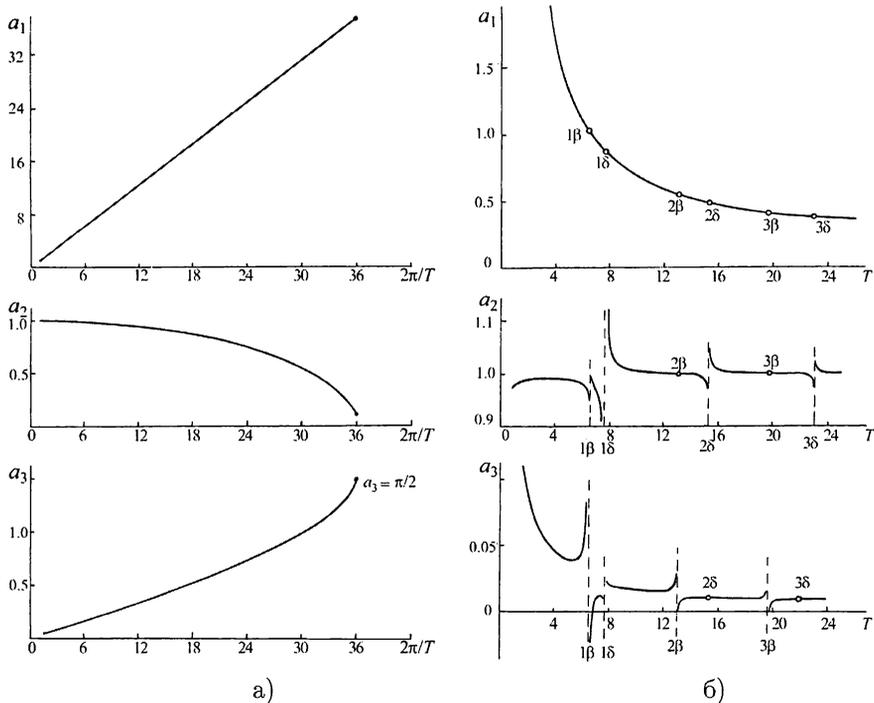


Рис. 3.2.

При фиксированных значениях T , μ и λ решение уравнения (3.30) относительно \mathbf{a} находилось методом Ньютона. Для вычисления функций $\mathbf{g}(\mathbf{a}, T)$ и $\partial \mathbf{g}(\mathbf{a}, T) / \partial \mathbf{a}$, используемых в этом методе, на отрезке $0 \leq \tau \leq T/4$ (здесь для определенности полагаем $T > 0$) совместно интегрировались система (1.21) и соответствующая система в вариациях. Первым приближением \mathbf{a} служило $\mathbf{a}^*(T)$ (ср. (3.24)).

Для $\lambda = \mu = 0.1$ зависимость решений уравнения (3.30) от T представлена на рис. 3.2а,б. На рис. 3.2а по осям абсцисс отложена величина $2\pi/T$, на

рис. 3.2б — величина T . В силу (2.1) и (3.28) в (3.30)

$$\mathbf{g}(D\mathbf{a}, -T) = -D\mathbf{g}(\mathbf{a}, T),$$

поэтому кривые, получающиеся из кривых на рис. 3.2а,б преобразованием $a_1 \rightarrow -a_1$, $a_3 \rightarrow -a_3$, $T \rightarrow -T$, также задают решения уравнения (3.30). Кривые на рис. 3.2б состоят из отдельных кусков. При выбранном масштабе рисунка разрывы между некоторыми кусками незаметны и для наглядности обозначены кружками. Для решений уравнения (3.30), принадлежащих одному и тому же куску, якобиан $J_g = |\partial \mathbf{g}(\mathbf{a}, T) / \partial \mathbf{a}|$ имеет одинаковый знак; при переходе на соседний кусок знак якобиана J_g меняется. Абсциссы «точек разрыва» между кусками с точностью $\lesssim 0.1$ равны таким значениям T , при которых для данного λ нарушается условие (3.27). Именно нарушение условия (3.27), то есть резонанс между колебаниями оси Ox_1 и вращением спутника вокруг этой оси, приводит к возникновению разрывов. На рис. 3.2б каждый резонанс отмечен символом k_δ или k_β , указывающим номер резонанса и его тип. У кривых в плоскости (T, a_2) на этом рисунке наиболее заметны разрывы, отвечающие δ -резонансам, у кривых в плоскости (T, a_3) хорошо видны разрывы, соответствующие β -резонансам.

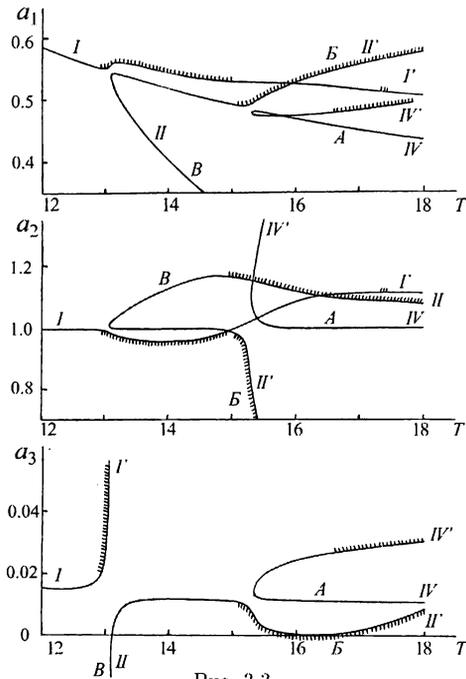


Рис. 3.3.

Решения уравнения (3.30) на стыках кусков вычислялись методом продолжения по параметру [28]. Согласно этому методу соотношение (3.30) рассматривается как уравнение кривой в пространстве $\mathbb{R}^4(\mathbf{a}, T)$. Для численно-

го построения кривой применялся метод Ньютона, причем на каждом шаге итерационного процесса уточнялось не только \mathbf{a} , но и T . На рис. 3.3 приведены найденные таким образом решения уравнения (3.30). Этот рисунок в укрупненном масштабе воспроизводит окрестность разрывов при $T \approx 13.1$ и $T \approx 15.6$. Римскими цифрами без штриха и со штрихом на этом рисунке отмечены начало и конец кривых, соответствующих одному и тому же семейству решений уравнения (3.30). Как видно из рис. 3.3, в окрестностях точек разрыва происходит ветвление этих решений.

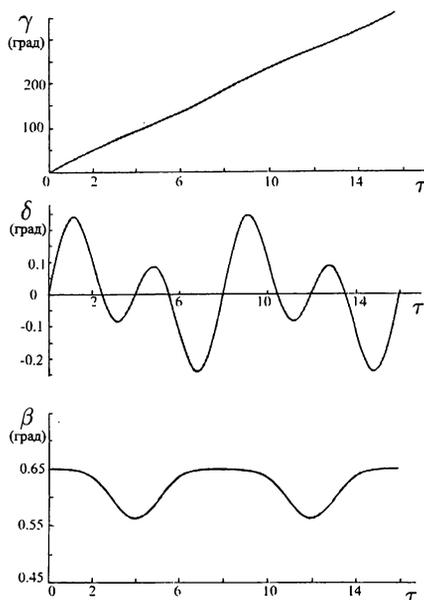


Рис. 3.4. Нерезонансное решение
 $a_1 = 0.0469176$, $a_2 = 1.005761$, $a_3 = 0.011360$, $T = 16$.

На рис. 3.4, 3.5а,б изображены графики функций $\gamma(\tau)$, $\delta(\tau)$, $\beta(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq T$) для решений краевой задачи (1.21), (3.29), начальные условия которых лежат на кривых A , B и B (рис. 3.3) соответственно. Приведенные графики иллюстрируют поведение периодических решений в нерезонансном (рис. 3.4) и резонансном (рис. 3.5а, б) случаях. На рис. 3.5а показан δ -резонанс, на рис. 3.5б β -резонанс. Анализ большого числа аналогичных расчетов показывает, что нерезонансное периодическое вращение спутника, близкого к динамически симметричному, позволяет обеспечить практически такую же точность ориентации оси Ox_1 в притягивающий центр, как и стационарное вращение (3.3) симметричного спутника.

3.5. Устойчивость периодических вращений

Как указывалось в п. 3.4, решение краевой задачи (2.14), (2.35) сводится к решению краевой задачи (1.21), (3.29). Для исследования устойчивости периодических решений обеих систем рассмотрим уравнения в вариациях для системы (1.21). Переменные системы в вариациях обозначим через $\Delta\Omega_1, \Delta\Omega_2, \Delta\Omega_3, \Delta\gamma, \Delta\delta, \Delta\beta$ так, что $\Delta\Omega_1$ есть вариация Ω_1 и т. д. В (2.43) положим $\mathbf{y} = (\Delta\gamma, \Delta\Omega_1, \Delta\delta, \Delta\beta, \Delta w_2, \Delta w_3)^T$. Пусть решения систем (1.21) и (2.4) переходят одно в другое при замене (2.1). Тогда в соответствующих уравнениях в вариациях переменные $\Delta\gamma, \Delta\delta, \Delta\beta, \Delta\Omega_1$ совпадают, а переменные $\Delta\Omega_2, \Delta\Omega_3$ и $\Delta w_2, \Delta w_3$ связаны соотношениями

$$\Delta w_2 = \Delta\Omega_2 \cos \gamma - \Delta\Omega_3 \sin \gamma - w_3 \Delta\gamma, \quad w_3 = \Delta\Omega_2 \sin \gamma + \Delta\Omega_3 \cos \gamma + w_2 \Delta\gamma.$$

Эти соотношения позволяют свести вычисление матрицы $\mathbf{X}(T/4)$ к интегрированию системы уравнений в вариациях для (1.21) на отрезке $0 \leq \tau \leq T/4$. При исследовании устойчивости решений краевой задачи (1.21), (3.29) сначала указанным способом вычислялась матрица $\mathbf{X}(T/4)$, затем по формуле (2.47) находилась матрица $\mathbf{X}(T/2)$ и, наконец, определялись коэффициенты A_1, A_2 в уравнении (2.48).

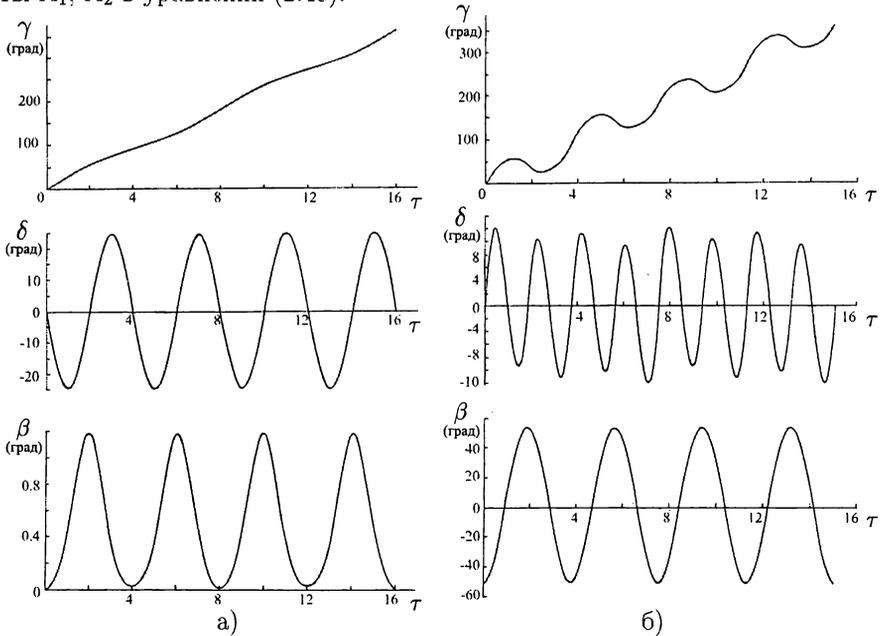


Рис. 3.5. Резонансные периодические решения

а) δ -резонанс, $a_1 = 0.530030, a_2 = 0.318175, a_3 = 0.000042, T = 16.010276$;

б) β -резонанс, $a_1 = 0.318512, a_2 = 1.666580, a_3 = -0.882799, T = 15.042603$.

Вычисление этих коэффициентов показало, что решения с начальными условиями, приведенными на рис. 3.2а,б, орбитально устойчивы в первом

приближении при всех значениях T , за исключением малых окрестностей точек разрыва на графиках начальных условий и, быть может, узких (шириной $\Delta T \lesssim 10^{-3}$) зон параметрического резонанса¹⁾. Значения периода, в окрестности которых возможен параметрический резонанс, приближенно находятся из следующих соображений. Решения с начальными условиями, указанными на рис. 3.2а,б, суть не что иное, как решение (3.26), рассматриваемое в функции параметра T . Для этого решения коэффициенты $A_j = A_j(T, \mu)$ ($j = 1, 2$) в уравнении (2.48) — аналитические функции μ в точке $\mu = 0$, причем $A_j(T, 0) = \cos(\nu_j T/2)$, где $\nu_1 \neq \nu_2$ определены соотношениями (3.7). Поскольку с помощью подходящей замены переменных систему (2.4) можно записать в гамильтоновой форме, отсюда следует (теорема Крейна-Гельфанда-Лидского [31]), что при $\mu \ll 1$ параметрический резонанс возможен в окрестности значений периода, определяемых уравнениями

$$\nu_1 T = 2\pi(2k - 1), \quad \nu_2 T = 2\pi(2k - 1), \quad (\nu_1 + \nu_2)T = 4\pi k \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Оказалось, что для решений, приведенных на рис. 3.2а,б, выражения $A_j = \cos(\nu_j T/2)$ ($j = 1, 2$) хорошо аппроксимируют зависимость коэффициентов A_j от T при всех значениях T , за исключением точек, удовлетворяющих соотношению $\cos(\nu_j T/2) = 1$ при $j = 1$ или $j = 2$. Вблизи этих точек находятся точки ветвления рассматриваемых решений, то есть такие точки, в которых $J_g = 0$ и производные da_k/dT ($k = 1, 2, 3$) корней системы (3.30) обращаются в бесконечность.

Результаты исследования устойчивости периодических вращений в окрестности точек ветвления $T \approx 13.1$ и $T \approx 15.6$ приведены на рис. 3.3. На этом рисунке участки неустойчивости отмечены штриховкой. Для рассматриваемых решений в точках ветвления $A_j \neq 1$ ($j = 1, 2$) и ветвление объясняется изменением вида нормальных решений системы (2.43), отвечающих ее двукратному мультипликатору $\rho = 1$.

Исследуем такое ветвление подробнее. Вернемся к обозначениям п. 3.2 и рассмотрим уравнение (3.23). Параметр μ будем считать фиксированным и отличным от нуля. Семейство решений этого уравнения относительно \mathbf{a} и T , представляемое отдельным набором (кусками) непрерывных кривых на рис. 3.3, обозначим $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{a}}(s)$, $T = \bar{T}(s)$, где s — параметр. Будем считать, что при всех допустимых значениях параметра

$$\left| \frac{d\bar{\mathbf{a}}(s)}{ds} \right| + \left| \frac{d\bar{T}(s)}{ds} \right| > 0.$$

В качестве такого параметра можно взять длину дуги кривой, задаваемой в пространстве $\mathbb{R}^4(\mathbf{a}, T)$ уравнением (3.23). Если s_* — точка ветвления решений уравнения (3.23), то $d\bar{T}(s_*)/ds = 0$ и, следовательно, $d\bar{\mathbf{a}}(s_*)/ds \neq 0$.

¹⁾На оси T были найдены интервалы, в которых $-10^{-6} < A_j + 1 < 0$, однако этот результат находится на предел точности проведенных расчетов.

Поскольку при любом s

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\mathbf{a}}(s), \bar{T}(s), \mu)}{\partial \mathbf{a}} \frac{d\bar{\mathbf{a}}(s)}{ds} + \frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\mathbf{a}}(s), \bar{T}(s), \mu)}{\partial T} \frac{d\bar{T}(s)}{ds} = 0,$$

то при $s = s_*$ будем иметь

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\bar{\mathbf{a}}(s_*), \bar{T}(s_*), \mu)}{\partial \mathbf{a}} \frac{d\bar{\mathbf{a}}(s_*)}{ds} = 0.$$

Последнее равенство означает, что система (2.43) для $\mathbf{z}(\tau) = \mathbf{z}(\tau, \bar{\mathbf{a}}(s_*), \mu)$ допускает нетривиальное решение

$$\mathbf{y}(\tau) = \frac{\partial \mathbf{z}(\tau, \bar{\mathbf{a}}(s_*), \mu)}{\partial \mathbf{a}} \frac{d\bar{\mathbf{a}}(s_*)}{ds},$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\mathbf{S}\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(0), \quad \mathbf{S}\mathbf{y}\left(\frac{\bar{T}(s)}{4}\right) = \mathbf{y}\left(\frac{\bar{T}(s)}{4}\right) \quad (3.31)$$

при $s = s_*$. Согласно теореме Пуанкаре [12] существование такого решения необходимое условие ветвления решений краевой задачи (2.14), (2.35). Исследуем вопрос о существовании нетривиальных решений задачи (2.43), (3.31) при $\mathbf{z}(\tau) = \mathbf{z}(\tau, \bar{\mathbf{a}}(s), \mu)$ и $s \neq s_*$. Поскольку всякое решение этой задачи является $\bar{T}(s)/2$ -периодическим, достаточно рассмотреть структуру нормальных решений системы (2.43), отвечающих ее мультипликатору $\rho = 1$.

Введем функции

$$\mathbf{u}(\tau) = \dot{\mathbf{z}}(\tau, \bar{\mathbf{a}}(s), \mu), \quad \mathbf{v}(\tau) = \frac{\partial \mathbf{z}(\tau, \bar{\mathbf{a}}(s), \mu)}{\partial \mathbf{a}} \frac{d\bar{\mathbf{a}}(s)}{ds}.$$

Дифференцируя тождество (ср. (2.34))

$$\mathbf{z}\left(\tau + \frac{\bar{T}(s)}{2}, \bar{\mathbf{a}}(s), \mu\right) = \mathbf{z}(\tau, \bar{\mathbf{a}}(s), \mu) + \pi \mathbf{e}_1$$

по s , получим

$$\mathbf{v}\left(\tau + \frac{\bar{T}(s)}{2}\right) + \frac{1}{2} \mathbf{u}\left(\tau + \frac{\bar{T}(s)}{2}\right) \frac{d\bar{T}(s)}{ds} = \mathbf{v}(\tau).$$

В силу первого соотношения (2.34) и последних соотношений имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{S}\mathbf{u}(-\tau) &= -\mathbf{u}(\tau), & \mathbf{u}\left(\tau + \frac{\bar{T}}{2}\right) &= \mathbf{u}(\tau), \\ \mathbf{S}\mathbf{v}(-\tau) &= \mathbf{v}(\tau), & \mathbf{v}\left(\tau + \frac{\bar{T}}{2}\right) &= \mathbf{v}(\tau) - \frac{1}{2} \frac{d\bar{T}(s)}{ds} \mathbf{u}(\tau). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что $\mathbf{v}(\tau)$ можно представить в виде

$$\mathbf{v}(\tau) = -\frac{\tau}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}(s)}{ds} \mathbf{u}(\tau) + \mathbf{w}(\tau),$$

где $\mathbf{w}(\tau + T/2) = \mathbf{w}(\tau)$, $\mathbf{S}\mathbf{w}(-\tau) = \mathbf{w}(\tau)$. Таким образом, в общем случае при $\mathbf{z}(\tau) = \mathbf{z}(\tau, \bar{\mathbf{a}}(s), \mu)$ нормальные решения системы (2.43), отвечающие мультипликатору $\rho = 1$, имеют вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{u}(\tau), \quad \mathbf{y} = \mathbf{w}(\tau) - \frac{\tau}{\bar{T}} \frac{d\bar{T}(s)}{ds} \mathbf{u}(\tau).$$

Поскольку $d\bar{T}(s_*)/ds = 0$, в точке ветвления краевая задача (2.43), (3.31) имеет нетривиальное решение $\mathbf{y} = \mathbf{w}(\tau) \equiv \mathbf{v}(\tau)$. В остальных точках нетривиальных решений этой задачи, вообще говоря, не существует.

Глава 4

Влияние диссипации энергии на режим трехосной гравитационной ориентации спутника

4.1. Уравнения движения спутника–гиростата

Гиростатом называется система, состоящая из несущего твердого тела и связанных с ним других тел, движение которых относительно несущего тела не меняет распределение масс системы. Простейшей системой такого рода является твердое тело с симметричным маховиком, вращающимся вокруг закрепленной в теле оси. Ось вращения маховика совпадает с его осью симметрии. Будем считать, что при вращении маховика относительно несущего тела на него действует момент сил вязкого трения. Такой маховик моделирует диссипацию энергии на борту спутника. Описанная механическая система позволяет в простых ситуациях исследовать влияние диссипации энергии на режим трехосной гравитационной ориентации спутника.

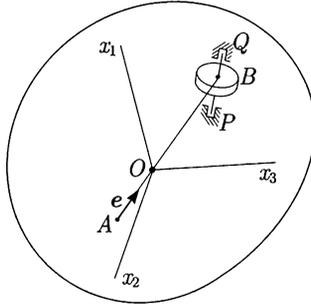


Рис. 4.1. Гиростат.

Введем обозначения: A — центр масс несущего тела; B — центр масс маховика; O — центр масс системы (см. рис. 4.1); \mathbf{r}_ν ($\nu = 1, 2, \dots$) — радиус-векторы точек системы относительно ее центра масс; $\boldsymbol{\rho}_\nu$ — радиус-векторы точек твердого тела и маховика относительно их центров масс; \mathbf{r}_A и \mathbf{r}_B — радиус-векторы центров масс несущего тела и маховика относительно точки O . Имеем

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\rho}_\nu, \quad \mathbf{r}_A = -d_A \mathbf{e} \quad (\text{несущее тело}),$$

$$\mathbf{r}_\nu = \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\rho}_\nu, \quad \mathbf{r}_B = d_B \mathbf{e} \quad (\text{маховик}),$$

где

$$d_A = AO, \quad d_B = BO, \quad d_A + d_B = d = AB, \quad \overrightarrow{AB} = d\mathbf{e}, \quad |\mathbf{e}| = 1.$$

Обозначим через m_A и m_B массы несущего тела и маховика соответственно. Тогда $m_A d_A = m_B d_B$ и

$$d_A = \frac{m_B d}{m_A + m_B}, \quad d_B = \frac{m_A d}{m_A + m_B}. \quad (4.1)$$

Вычислим *кинетический момент спутника-гиростата* относительно его центра масс O

$$\mathbf{K} = \sum_{\nu} m_{\nu} (\mathbf{r}_{\nu} \times \dot{\mathbf{r}}_{\nu}) = \sum' m_{\nu} (\mathbf{r}_{\nu} \times \dot{\mathbf{r}}_{\nu}) + \sum'' m_{\nu} (\mathbf{r}_{\nu} \times \dot{\mathbf{r}}_{\nu}).$$

Здесь знаки \sum' , \sum'' означают суммирование по точкам несущего тела и маховика соответственно. Скорости точек несущего тела равны $\dot{\mathbf{r}}_{\nu} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\nu}$, где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость несущего тела. Пусть \mathbf{n} — орг оси вращения маховика, φ — угол поворота маховика вокруг этой оси. Абсолютная угловая скорость маховика равна $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} + \dot{\varphi} \mathbf{n}$. Вычислим скорости точек маховика. По формуле Эйлера

$$\dot{\mathbf{r}}_{\nu} = \dot{\mathbf{r}}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_B + (\boldsymbol{\omega} + \dot{\varphi} \mathbf{n}) \times \boldsymbol{\rho}_{\nu} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\nu} + \dot{\varphi} \mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sum_{\nu} m_{\nu} \mathbf{r}_{\nu} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\nu}) + \dot{\varphi} \sum'' m_{\nu} (\mathbf{r}_B + \boldsymbol{\rho}_{\nu}) \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}) = \\ &= \hat{\mathbf{I}} \boldsymbol{\omega} + \dot{\varphi} \sum'' m_{\nu} (\mathbf{r}_B + \boldsymbol{\rho}_{\nu}) \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}). \end{aligned}$$

Здесь $\hat{\mathbf{I}}$ — тензор инерции гиростата относительно его центра масс.

Вектор $\boldsymbol{\rho}_{\nu}$ представим в виде $\boldsymbol{\rho}_{\nu} = h_{\nu} \mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_{\nu}$, где $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\nu} = 0$. Поскольку точка B — центр масс маховика, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\nu}'' m_{\nu} \boldsymbol{\rho}_{\nu} = \mathbf{n} \sum_{\nu}'' m_{\nu} h_{\nu} + \sum_{\nu}'' m_{\nu} \boldsymbol{\delta}_{\nu} \implies \\ 0 &= \sum_{\nu}'' m_{\nu} h_{\nu} + \sum_{\nu}'' m_{\nu} (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\delta}_{\nu}) = \sum_{\nu}'' m_{\nu} h_{\nu} \implies \sum_{\nu}'' m_{\nu} \boldsymbol{\delta}_{\nu} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} \sum_{\nu}'' m_{\nu} (\mathbf{r}_B + \boldsymbol{\rho}_{\nu}) \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}) &= \sum_{\nu}'' m_{\nu} \mathbf{r}_B \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}) + \sum_{\nu}'' m_{\nu} \boldsymbol{\rho}_{\nu} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}) = \\ &= \mathbf{r}_B \times (\mathbf{n} \times \sum_{\nu}'' m_{\nu} \boldsymbol{\rho}_{\nu}) + \sum_{\nu}'' m_{\nu} (h_{\nu} \mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_{\nu}) \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_{\nu}) = \\ &= \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \sum_{\nu}'' m_{\nu} h_{\nu} \underbrace{\boldsymbol{\rho}_{\nu}}_{h_{\nu} \mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_{\nu}}) + \sum_{\nu}'' m_{\nu} \boldsymbol{\delta}_{\nu} \times (\mathbf{n} \times \underbrace{\boldsymbol{\rho}_{\nu}}_{h_{\nu} \mathbf{n} + \boldsymbol{\delta}_{\nu}}) = \\ &= \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \sum_{\nu}'' m_{\nu} h_{\nu} \boldsymbol{\delta}_{\nu}) + \sum_{\nu}'' m_{\nu} \boldsymbol{\delta}_{\nu} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\delta}_{\nu}). \end{aligned}$$

Маховик симметричен относительно своей оси вращения, то есть множество $\{\boldsymbol{\delta}_{\nu}\}$ можно разбить на пары: при каждом h_{ν} для любого $\boldsymbol{\delta}_{\nu}$ существует

такое δ'_ν , что $\delta'_\nu = -\delta_\nu$. Следовательно, $\sum_\nu'' m_\nu h_\nu \delta_\nu = 0$, и поэтому

$$\begin{aligned} \sum_\nu'' m_\nu (\mathbf{r}_B + \boldsymbol{\rho}_\nu) \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\rho}_\nu) &= \sum_\nu'' m_\nu \delta_\nu \times (\mathbf{n} \times \delta_\nu) = \\ &= \mathbf{n} \cdot \sum_\nu'' m_\nu |\delta_\nu|^2 - \sum_\nu'' m_\nu \delta_\nu (\delta_\nu \cdot \mathbf{n}) \stackrel{0}{=} J \mathbf{n}, \end{aligned}$$

где $J = \sum_\nu'' m_\nu |\delta_\nu|^2$ — осевой момент инерции маховика. В результате получаем формулу для кинетического момента гиростата

$$\mathbf{K} = \widehat{I} \boldsymbol{\omega} + J \dot{\varphi} \mathbf{n}. \quad (4.2)$$

Обозначим через \mathbf{M} главный момент внешних сил, действующих на гири, относительно его центра масс. Ниже из таких моментов будем учитывать только гравитационный момент. Он не зависит от φ и $\dot{\varphi}$. Согласно теореме об изменении кинетического момента системы в движении относительно центра масс имеем $\dot{\mathbf{K}} = \mathbf{M}$ или

$$\frac{\widetilde{d}\mathbf{K}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{K} = \mathbf{M}, \quad (4.3)$$

где $\widetilde{d}\mathbf{K}/dt$ — производная по времени вектора \mathbf{K} относительно подвижной системы координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанной с несущим телом (см. рис. 4.1). Эту систему введем так, чтобы ее оси были главными центральными осями инерции гиростата. С учетом равенства (4.2) соотношение (4.3) записывается следующим образом

$$\widehat{I} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\widehat{I} \boldsymbol{\omega} + J \dot{\varphi} \mathbf{n}) + J \dot{\varphi} \mathbf{n} = \mathbf{M}. \quad (4.4)$$

Маховик — осесимметричное твердое тело, поэтому его тензор инерции в собственных главных центральных осях задается матрицей $\text{diag}(J, I, I)$. Здесь J — осевой, а I — экваториальные моменты инерции маховика, ось 1 — ось симметрии маховика. Пусть в этих осях $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$. Тогда кинетический момент \mathbf{K}_m маховика в его движении относительно собственного центра масс имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_m &= (J\Omega_1, I\Omega_2, I\Omega_3) = J\Omega_1(1, 0, 0) + I(0, \Omega_2, \Omega_3) = \\ &= J(\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + I[\boldsymbol{\Omega} - (\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] = J[\dot{\varphi}\mathbf{n} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] + \\ &+ I[\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n}] = J\dot{\varphi}\mathbf{n} + (J - I)(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} + I\boldsymbol{\omega}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Теорема об изменении кинетического момента маховика в этом движении выражается формулой

$$\dot{\mathbf{K}}_m = \mathbf{M}_m,$$

где \mathbf{M}_m — приложенный к маховику внешний момент. Здесь и ниже производные по времени вычисляются в абсолютном пространстве. Умножив это уравнение скалярно на \mathbf{n} , имеем

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}_m) - \dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{K}_m = \mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_m.$$

Так как

$$\dot{\mathbf{n}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n},$$

а \mathbf{K}_m согласно (4.5) — линейная комбинация векторов $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{n} , то $\dot{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{K}_m = 0$. Отсюда в соответствии с (4.5) получаем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}_m) = \mathbf{n} \cdot \dot{\mathbf{K}}_m = J(\ddot{\varphi} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \mathbf{n}).$$

Далее

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_m = -k\dot{\varphi},$$

где k — коэффициент демпфирования. Вклад гравитационного момента в скалярное произведение $\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_m$ равен нулю (доказать). В результате уравнение движения маховика преобразуется к виду

$$J(\ddot{\varphi} + \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) = -k\dot{\varphi}. \quad (4.6)$$

Итак, уравнения движения гиростата записываются в виде

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\widehat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + J\dot{\varphi}\mathbf{n}) + J\ddot{\varphi}\mathbf{n} = \mathbf{M}, \\ J(\ddot{\varphi} + \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) = -k\dot{\varphi}. \end{cases} \quad (4.7)$$

В системе координат $Ox_1x_2x_3$, образованной главными центральными осями инерции гиростата, его тензор инерции $\widehat{\mathbf{I}}$ задается диагональной матрицей $\widehat{\mathbf{I}} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$. Введем обозначения для компонент векторов \mathbf{M} , $\boldsymbol{\omega}$ и \mathbf{n} в этой системе координат: $\mathbf{M} = (M_1, M_2, M_3)$, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Тогда согласно (4.2) $\mathbf{K} = (I_1\omega_1 + Jn_1\dot{\varphi}, I_2\omega_2 + Jn_2\dot{\varphi}, I_3\omega_3 + Jn_3\dot{\varphi})$. Скалярная форма уравнений (4.7) имеет вид

$$\begin{cases} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 + J\dot{\varphi}(n_3\omega_2 - n_2\omega_3) + Jn_1\ddot{\varphi} = M_1, \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 + J\dot{\varphi}(n_1\omega_3 - n_3\omega_1) + Jn_2\ddot{\varphi} = M_2, \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 + J\dot{\varphi}(n_2\omega_1 - n_1\omega_2) + Jn_3\ddot{\varphi} = M_3, \\ J(\ddot{\varphi} + n_1\dot{\omega}_1 + n_2\dot{\omega}_2 + n_3\dot{\omega}_3) = -k\dot{\varphi}. \end{cases}$$

4.2. Спутник-гиростат под действием гравитационного момента

Уравнения движения гиростата (4.7) на круговой орбите под действием гравитационного момента принимают вид

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{I}}\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\widehat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + J\dot{\varphi}\mathbf{n}) + J\ddot{\varphi}\mathbf{n} = 3\omega_0^2(\boldsymbol{\gamma} \times \widehat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\gamma}), \\ J(\ddot{\varphi} + \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\omega}}) = -k\dot{\varphi}, \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\alpha} = -\omega_0\boldsymbol{\gamma}, \quad \dot{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\beta} = 0, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = \omega_0\boldsymbol{\alpha}. \end{cases} \quad (4.8)$$

Здесь правая часть первого уравнения — гравитационный момент $3\omega_0^2(\boldsymbol{\gamma} \times \widehat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\gamma})$ (см. (1.4)), производные векторов вычисляются в системе координат $Ox_1x_2x_3$.

Введем функцию, представляющую собой обобщенную энергию вращательного движения гиростата:

$$H = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \cdot \widehat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + J\dot{\varphi}(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}) - \omega_0\boldsymbol{\beta} \cdot (\widehat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega} + J\dot{\varphi}\mathbf{n}) + \frac{3}{2}\omega_0^2(\boldsymbol{\gamma} \cdot \widehat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\gamma}).$$

Докажем, что имеет место энергетическое соотношение (ср. п. 1.4)

$$\dot{H} = -k\dot{\varphi}^2. \quad (4.9)$$

Учитывая выражения для $\dot{\beta}$ и $\dot{\gamma}$ в (4.8), получаем

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \underline{\omega \cdot \hat{I}\dot{\omega}} + \underline{J\dot{\varphi}\dot{\varphi}} + \underline{J\ddot{\varphi}(\mathbf{n} \cdot \omega)} + \underline{J\dot{\varphi}(\mathbf{n} \cdot \dot{\omega})} - \\ &\quad - \omega_0 \dot{\beta} \cdot (\hat{I}\omega + J\dot{\varphi}\mathbf{n}) - \omega_0 \beta \cdot \frac{d}{dt} (\hat{I}\omega + J\dot{\varphi}\mathbf{n}) + 3\omega_0^2 (\dot{\gamma} \cdot \hat{I}\gamma) = \\ &= \omega \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} (\hat{I}\omega + J\dot{\varphi}\mathbf{n})}_{-\omega \times (\hat{I}\omega + J\dot{\varphi}\mathbf{n}) + 3\omega_0^2 (\gamma \times \hat{I}\gamma)} + \underbrace{\dot{\varphi} \frac{d}{dt} J(\dot{\varphi} + \mathbf{n} \cdot \omega)}_{-k\dot{\varphi}} + \omega_0 (\omega \times \beta) \cdot (\hat{I}\omega + J\dot{\varphi}\mathbf{n}) - \\ &\quad - \omega_0 \beta \cdot \frac{d}{dt} (\hat{I}\omega + J\dot{\varphi}\mathbf{n}) + 3\omega_0^3 (\alpha \cdot \hat{I}\gamma) - 3\omega_0^2 (\omega \times \gamma) \cdot \hat{I}\gamma = \\ &= \omega \left[-\omega \times (\hat{I}\omega + J\dot{\varphi}\mathbf{n}) + 3\omega_0^2 (\gamma \times \hat{I}\gamma) \right] - k\dot{\varphi}^2 - \omega_0 \beta \cdot [\omega \times (\hat{I}\omega + J\dot{\varphi}\mathbf{n})] - \\ &\quad - \omega_0 \beta \cdot \frac{d}{dt} (\hat{I}\omega + J\dot{\varphi}\mathbf{n}) + 3\omega_0^3 (\alpha \cdot \hat{I}\gamma) - 3\omega_0^2 \omega \cdot (\gamma \times \hat{I}\gamma) = \\ &= 3\omega_0^2 \omega \cdot (\gamma \times \hat{I}\gamma) - k\dot{\varphi}^2 - \omega_0 \beta \cdot \left[\frac{d}{dt} (\hat{I}\omega + J\dot{\varphi}\mathbf{n}) + \omega \times (\hat{I}\omega + J\dot{\varphi}\mathbf{n}) \right] + \\ &\quad + 3\omega_0^3 (\alpha \cdot \hat{I}\gamma) - 3\omega_0^2 \omega \cdot (\gamma \times \hat{I}\gamma) = -k\dot{\varphi}^2 - 3\omega_0^3 \beta \cdot (\gamma \times \hat{I}\gamma) + 3\omega_0^3 (\alpha \cdot \hat{I}\gamma) = \\ &= -k\dot{\varphi}^2 - 3\omega_0^3 \underbrace{(\beta \times \gamma)}_{\alpha} \cdot \hat{I}\gamma + 3\omega_0^3 (\alpha \cdot \hat{I}\gamma) = -k\dot{\varphi}^2. \end{aligned}$$

Система уравнений (4.8) имеет 24 положения равновесия (см. п. 1.3). В положениях равновесия $\dot{\varphi} = 0$, поэтому в орбитальной системе координат они определяются уравнениями (1.10).

4.3. Устойчивость положений равновесия гиростата

Исследуем устойчивость положения равновесия

$$\gamma_0 = (-1, 0, 0), \quad \beta_0 = (0, 1, 0), \quad \omega = \omega_0 \beta_0, \quad (4.10)$$

следуя схеме п. 1.4. В системе (4.8) сделаем подстановку $\omega = \omega_0 \beta + \xi$, тогда

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} (\xi \cdot \hat{I}\xi) + \underline{\omega_0 (\beta \cdot \hat{I}\xi)} + \frac{1}{2} \omega_0^2 (\beta \cdot \hat{I}\beta) + \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2 + \underline{J\dot{\varphi}(\mathbf{n} \cdot \beta)} \omega_0 + \\ &\quad + J\dot{\varphi}(\mathbf{n} \cdot \xi) - \omega_0^2 (\beta \cdot \hat{I}\beta) - \underline{\omega_0 (\beta \cdot \hat{I}\xi)} - \underline{\omega_0 J\dot{\varphi}(\mathbf{n} \cdot \beta)} + \frac{3}{2} \omega_0^2 (\gamma \cdot \hat{I}\gamma) = \\ &= \frac{1}{2} (\xi \cdot \hat{I}\xi) + \frac{1}{2} J\dot{\varphi}^2 + J(\mathbf{n} \cdot \xi)\dot{\varphi} - \frac{1}{2} \omega_0^2 (\beta \cdot \hat{I}\beta) + \frac{3}{2} \omega_0^2 (\gamma \cdot \hat{I}\gamma). \end{aligned}$$

Произведя в последнем выражении те же преобразования, что в п. 1.4, получим функцию, которая используется в качестве функции Ляпунова при

исследовании асимптотической устойчивости положения равновесия (4.10):

$$V = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\xi} \cdot \widehat{I}\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2 + J(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\xi})\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\omega_0^2[(I_2 - I_1)\beta_1^2 + (I_2 - I_3)\beta_3^2] + \frac{3}{2}\omega_0^2[(I_2 - I_1)\gamma_2^2 + (I_3 - I_1)\gamma_3^2], \quad (4.11)$$

$$\dot{V} = -k\dot{\varphi}^2.$$

Функция V является суммой трех квадратичных форм

$$V = V_1(\boldsymbol{\xi}, \dot{\varphi}) + V_2(\beta_1, \beta_2) + V_3(\gamma_2, \gamma_3),$$

которые имеют следующий механический смысл: $V_1(\boldsymbol{\xi}, \dot{\varphi})$ — кинетическая энергия гиростата в его движении относительно орбитальной системы координат; $V_2(\beta_1, \beta_2)$ — потенциальная энергия сил инерции во вращающейся орбитальной системе координат; $V_3(\gamma_2, \gamma_3)$ — потенциальная энергия, связанная с гравитационным моментом. Условия положительной определенности функций V_2 и V_3 те же, что и в п. 1.4:

$$I_1 < I_3 < I_2.$$

Получим условия положительной определенности функции V_1 , используя критерий Сильвестра для матрицы

$$\begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 & Jn_1 \\ 0 & I_2 & 0 & Jn_2 \\ 0 & 0 & I_3 & Jn_3 \\ Jn_1 & Jn_2 & Jn_3 & J \end{vmatrix}.$$

Чтобы первые три главных минора этой матрицы были положительными, должны выполняться неравенства $I_1 > 0$, $I_2 > 0$, $I_3 > 0$. Для вычисления четвертого главного минора Δ_4 приведем матрицу к треугольному виду. Последовательно вычитая из последней строки матрицы i -ю строку, умноженную на Jn_i/I_i ($i = 1, 2, 3$), находим

$$\begin{aligned} \Delta_4 &= \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 & Jn_1 \\ 0 & I_2 & 0 & Jn_2 \\ 0 & 0 & I_3 & Jn_3 \\ Jn_1 & Jn_2 & Jn_3 & J \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 & Jn_1 \\ 0 & I_2 & 0 & Jn_2 \\ 0 & 0 & I_3 & Jn_3 \\ 0 & Jn_2 & Jn_3 & J - \frac{J^2n_1^2}{I_1} \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 & Jn_1 \\ 0 & I_2 & 0 & Jn_2 \\ 0 & 0 & I_3 & Jn_3 \\ 0 & 0 & Jn_3 & J - \frac{J^2n_1^2}{I_1} - \frac{J^2n_2^2}{I_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 & Jn_1 \\ 0 & I_2 & 0 & Jn_2 \\ 0 & 0 & I_3 & Jn_3 \\ 0 & 0 & 0 & J - \frac{J^2n_1^2}{I_1} - \frac{J^2n_2^2}{I_2} - \frac{J^2n_3^2}{I_3} \end{vmatrix} = \\ &= I_1 I_2 I_3 \left(J - \frac{J^2n_1^2}{I_1} - \frac{J^2n_2^2}{I_2} - \frac{J^2n_3^2}{I_3} \right) > 0, \end{aligned}$$

откуда следует содержательное условие

$$1 - \frac{Jn_1^2}{I_1} - \frac{Jn_2^2}{I_2} - \frac{Jn_3^2}{I_3} > 0.$$

Для реального гиростата последнее неравенство всегда выполнено. Это можно доказать, рассмотрев движение спутника при $\mathbf{M} = 0$ и $\dot{\boldsymbol{\omega}} + J\dot{\boldsymbol{\varphi}}\mathbf{n} = 0$.

Перейдем к исследованию асимптотической устойчивости положения равновесия (4.10). Выразим функцию V через углы β , γ и δ . Имеем

$$\begin{aligned} \beta_1 = a_{21} = \beta, \quad \beta_3 = a_{23} = -\gamma, \quad \gamma_2 = a_{32} = \beta, \quad \gamma_3 = a_{33} = -\delta, \\ \xi_1 = \dot{\gamma}, \quad \xi_2 = \dot{\delta}, \quad \xi_3 = \dot{\beta}. \end{aligned}$$

В этих переменных положение равновесия (4.10) записывается так

$$\beta = \gamma = \delta = 0, \quad \omega_1 = \omega_3 = 0, \quad \omega_2 = \omega_0.$$

С точностью до членов второго порядка включительно получаем

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} (I_1 \dot{\gamma}^2 + I_2 \dot{\delta}^2 + I_3 \dot{\beta}^2) + \frac{1}{2} \omega_0^2 [(I_2 - I_1) \beta^2 + (I_2 - I_3) \gamma^2] + \\ &+ \frac{3}{2} \omega_0^2 [(I_2 - I_1) \beta^2 + (I_3 - I_1) \delta^2] + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + J \dot{\varphi} (n_1 \dot{\gamma} + n_2 \dot{\delta} + n_3 \dot{\beta}) = \\ &= \frac{1}{2} (I_1 \dot{\gamma}^2 + I_2 \dot{\delta}^2 + I_3 \dot{\beta}^2 + J \dot{\varphi}^2) + J \dot{\varphi} (n_1 \dot{\gamma} + n_2 \dot{\delta} + n_3 \dot{\beta}) + \\ &+ \frac{1}{2} \omega_0^2 [4(I_2 - I_1) \beta^2 + 3(I_3 - I_1) \delta^2 + (I_2 - I_3) \gamma^2]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Условия положительной определенности функции V_2 представляются в виде

$$I_2 > I_3 > I_1 > 0, \quad 1 - \frac{Jn_1^2}{I_1} - \frac{Jn_2^2}{I_2} - \frac{Jn_3^2}{I_3} > 0.$$

При выполнении этих неравенств, а также неравенства $k \geq 0$ имеет место устойчивость по Ляпунову исследуемого положения равновесия. Однако в данном случае при $k > 0$ с помощью теоремы Барбашина–Красовского можно установить его асимптотическую устойчивость.

Теорема Барбашина–Красовского. Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{f}(0) = 0. \quad (4.13)$$

Пусть существует функция Ляпунова $V(\mathbf{x})$ такая, что $V(0) = 0$, $V(\mathbf{x})$ положительно определена в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$, $\dot{V} = (\partial V / \partial \mathbf{x}) \cdot \mathbf{f} \leq 0$ и пересечение множества $\{\mathbf{x} : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$ с достаточно малой окрестностью точки $\mathbf{x} = 0$ не содержит целых траекторий системы (4.13). Тогда стационарное решение $\mathbf{x} = 0$ этой системы асимптотически устойчиво.

Применим эту теорему к линеаризованной в окрестности положения равновесия (4.10) системе (4.8). Функцию V зададим соотношением (4.12). Условие положительной определенности функции V несложно получить и для нелинейной системы (4.8), но отсутствие целых траекторий на множестве $\{\mathbf{x} : \dot{V}(\mathbf{x}) = 0\}$ легко проверяется только для линеаризованной системы. А из асимптотической устойчивости линеаризованной системы следует устойчивость исходной нелинейной системы.

Линеаризованные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\gamma} + (I_1 + I_3 - I_2) \omega_0 \dot{\beta} + (I_2 - I_3) \omega_0^2 \gamma + J n_1 \ddot{\varphi} + J n_3 \omega_0 \dot{\varphi} &= 0, \\ I_2 \ddot{\delta} + 3 \omega_0^2 (I_3 - I_1) \delta + J n_2 \ddot{\varphi} &= 0, \\ I_3 \ddot{\beta} - (I_1 + I_3 - I_2) \omega_0 \dot{\gamma} + 4(I_2 - I_1) \omega_0^2 \beta + J n_3 \ddot{\varphi} - J n_1 \omega_0 \dot{\varphi} &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{k}{J} \dot{\varphi} + n_1 \ddot{\gamma} + n_2 \ddot{\delta} + n_3 \ddot{\beta} + \omega_0 (n_1 \dot{\beta} - n_3 \dot{\gamma}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.14)$$

В положении равновесия $\dot{\varphi} = 0 \implies \ddot{\varphi} = 0$, поэтому из последнего уравнения системы (4.14) следует

$$n_1 \ddot{\gamma} + n_3 \ddot{\beta} + \omega_0 (n_1 \dot{\beta} - n_3 \dot{\gamma}) + n_2 \ddot{\delta} = 0. \quad (4.15)$$

Введем безразмерные время и параметры (см. п. 1.5):

$$\tau = \omega_0 t, \quad \lambda = \frac{I_1}{I_2}, \quad \mu = \frac{I_2 - I_3}{I_1}.$$

В п. 1.6 было показано, что положение равновесия $\boldsymbol{\gamma}_0 = (-1, 0, 0)$, $\boldsymbol{\beta}_0 = (0, 1, 0)$ устойчиво, если $0 < I_1 < I_3 < I_2$, или в переменных λ и μ

$$0 < \lambda < 1, \quad 0 < \mu < 1. \quad (4.16)$$

Далее эти соотношения полагаем выполненными. В этих переменных соотношение (4.15) записывается так

$$n_1 \gamma'' + n_3 \beta'' + n_1 \beta' - n_3 \gamma' + n_2 \delta'' \equiv 0. \quad (4.17)$$

Здесь и далее штрихом обозначается дифференцирование по τ . Первые три уравнения системы (4.14) представляются в виде

$$\begin{cases} \gamma'' + (1 - \mu) \beta' + \mu \gamma = 0, \\ \beta'' - \lambda(1 - \mu) \gamma' + 4(1 - \lambda + \lambda \mu) \beta = 0, \\ \delta'' + \frac{3(1 - \lambda)}{1 + \lambda \mu} \delta = 0. \end{cases} \quad (4.18)$$

На множестве $\dot{\varphi} = 0$ целые траектории существуют при

- 1) $n_2 = 0$,
 - 2) $n_1^2 + n_3^2 = 0$,
 - 3) $n_2 (n_1^2 + n_3^2) > 0$, если частота ν_3 связана с частотами ν_1 и ν_2 (см. стр. 21) одним из условий: $\nu_3 = \nu_1$ или $\nu_3 = \nu_2$.
- Случаи 1) и 2) тривиальны. Условия случая 3) означают, что ν_3 является корнем уравнения (1.29), то есть должно выполняться соотношение

$$\left[\mu - \frac{3(1 - \lambda)}{1 + \lambda \mu} \right] \left[4(1 - \lambda + \lambda \mu) - \frac{3(1 - \lambda)}{1 + \lambda \mu} \right] - \frac{3\lambda(1 - \lambda)(1 - \mu)}{1 + \lambda \mu} = 0.$$

Кривая, задаваемая в плоскости (λ, μ) этим уравнением, представлена на рис. 4.2. Найдем точки пересечения этой кривой с границами области (4.16).

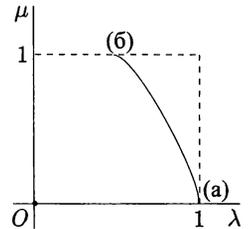


Рис. 4.2. Кривая $\mu(\lambda)$.

С границей $\lambda = 1$ пересечение (касание) имеет место при $\mu = 0$ — точка (а) на рис. 4.2. В окрестности точки пересечения $\lambda = 1$, $\mu = 0$ кривая задается соотношением

$$\lambda = 1 - \frac{4}{3} \mu^2.$$

Границу $\mu = 1$ кривая пересекает при $\lambda = 1/2$ — точка (б) на рис. 4.2. В случае 3), когда точка принадлежит этой кривой, система (4.18) имеет нетривиальные целые траектории, удовлетворяющие условию (4.17). Следовательно, система (4.14) асимптотически неустойчива.

Глава 5

Аэродинамический момент и его влияние на режим трехосной гравитационной ориентации спутника

5.1. Вычисление аэродинамического момента

Рассмотрим спутник, движущийся в аэродинамическом потоке. Будем считать, что действие потока на спутник сводится к абсолютно неупругому удару молекул газа по оболочке спутника. Полагаем, что аэродинамический поток имеет постоянную плотность ρ и постоянную относительно спутника скорость $-\mathbf{v}$. Тогда \mathbf{v} — скорость спутника относительно потока. Угловую скорость спутника принимаем равной нулю. Тепловым движением молекул в потоке пренебрегаем [3].

1. Вычислим элементарный импульс, получаемый площадкой dS , движущейся поступательно относительно молекул со скоростью \mathbf{v} , за время dt (см. рис. 5.1). Во время такого движения площадка «заметает» объем $d\tau = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS dt$, где \mathbf{n} — нормаль к площадке, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$. Внутри объема $d\tau$ содержится масса $dm = \rho d\tau$, ρ — плотность газа. Элементарный импульс, получаемый площадкой, и действующая на нее сила имеют вид

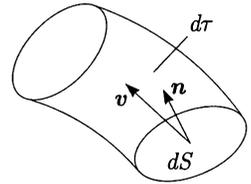


Рис. 5.1.

$$d\mathbf{Q} = -\mathbf{v} dm = -\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS dt, \quad d\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{Q}}{dt} = -\rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS.$$

2. Рассмотрим вышуклое тело, ограниченное гладкой замкнутой поверхностью и движущееся поступательно со скоростью \mathbf{v} относительно потока. Главный вектор сил взаимодействия тела с молекулами задается формулой

$$\mathbf{F} = -\rho \mathbf{v} \int_{S_*} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS. \quad (5.1)$$

Здесь S_* — часть поверхности тела, «омываемая» потоком молекул: на ее границе $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$, а во внутренних точках поверхности S_* внешняя нормаль \mathbf{n} удовлетворяет неравенству $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0$. Границу этой поверхности обозначим через ∂S_* (см. рис. 5.2).

Выберем некоторую точку O (например, фиксируем ее в теле) как полюс при вычислении главного момента сил взаимодействия молекул с телом:

$$\mathbf{M}_O = -\rho \int_{S_*} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \rho \mathbf{v} \times \int_{S_*} \mathbf{r} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS,$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор точки поверхности тела относительно точки O .

Для вычисления выписанных интегралов введем новое тело T , которое построим следующим образом. Перпендикулярно вектору \mathbf{v} расположим плоскость Π . Удобно поместить эту плоскость на некотором расстоянии от точки O позади (по отношению к вектору \mathbf{v}) тела. Проекция тела на плоскость Π вдоль вектора \mathbf{v} (ортогональная проекция) является некоторой

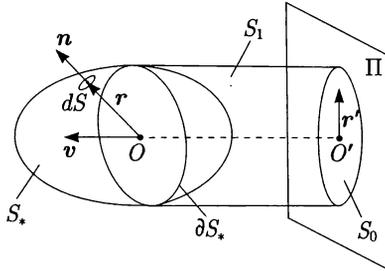


Рис. 5.2. Построение тела T .

плоской фигурой S_0 . Введем еще цилиндрическую поверхность S_1 с образующей \mathbf{v} и направляющей границей ∂S_* . Поверхность S_1 с одной стороны ограничена этой направляющей, а с другой — линией пересечения с плоскостью Π . Поверхность $\Sigma = S_* \cup S_1 \cup S_0$ ограничивает тело T , объем которого обозначим через τ (см. рис. 5.2). Согласно теореме Остроградского-Гаусса справедливы соотношения

$$\int_{\Sigma} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_T \underbrace{\operatorname{div} \mathbf{v}}_0 d\tau = 0.$$

Поскольку

$$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{S_1} = 0, \quad (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})|_{S_0} = -|\mathbf{v}|, \quad (5.2)$$

отсюда имеем

$$\int_{S_*} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_{S_0} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = |\mathbf{v}| S,$$

где S — площадь фигуры S_0 . Таким образом,

$$\mathbf{F} = -\rho S |\mathbf{v}| \mathbf{v}.$$

Введем систему координат $Oxyz$. Пусть в этой системе $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$. По теореме Гаусса

$$\int_{\Sigma} x (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_T \underbrace{\operatorname{div} (x\mathbf{v})}_{v_x} d\tau = v_x \tau,$$

аналогично

$$\int_{\Sigma} y (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = v_y \tau, \quad \int_{\Sigma} z (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = v_z \tau$$

и, следовательно,

$$\int_{\Sigma} \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \tau \mathbf{v}.$$

С другой стороны, с учетом (5.2)

$$\int_{\Sigma} \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_{S_0} \mathbf{r}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS - |\mathbf{v}| \int_{S_0} \mathbf{r} dS.$$

На S_0 положим

$$\mathbf{r} = l \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} + \mathbf{r}',$$

где $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}') = 0$, вектор \mathbf{r}' лежит в плоскости Π (см. рис. 5.2). Тогда

$$|\mathbf{v}| \int_{S_0} \mathbf{r} dS = S_0 l \mathbf{v} + |\mathbf{v}| \int_{S_0} \mathbf{r}' dS = S_0 l \mathbf{v} + |\mathbf{v}| \mathbf{P}_{O'}.$$

Интеграл

$$\mathbf{P}_{O'} = \int_{S_0} \mathbf{r}' dS$$

представляет собой первый момент фигуры S_0 относительно точки O' — проекции точки O на плоскость Π . Окончательно имеем

$$\mathbf{M}_O = \rho |\mathbf{v}| (\mathbf{v} \times \mathbf{P}_{O'}). \quad (5.3)$$

В общем случае $\mathbf{P}_{O'} = \mathbf{P}_{O'}(\mathbf{v})$, $S = S(\mathbf{v})$.

Полученный момент \mathbf{M}_O называется *восстанавливающим аэродинамическим моментом*. Напомним, что при выводе формулы (5.3) угловая скорость спутника принималась равной нулю. Поэтому этой формулой следует пользоваться лишь при изучении медленных вращательных движений спутника.

Пример. Вычислим аэродинамический момент, действующий на спутник с внешней оболочкой в форме эллипсоида. Пусть в системе координат $Oxyz$, жестко связанной со спутником, уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (5.4)$$

Найдем ∂S_* (см. рис. 5.2, 5.3). Касательная плоскость к эллипсоиду в точке (x, y, z) задается следующим уравнением относительно X, Y, Z

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

Пусть точка (x, y, z) принадлежит границе ∂S_* . Тогда прямая $X = x + v_x t$, $Y = y + v_y t$, $Z = z + v_z t$ лежит в касательной плоскости к поверхности спутника, то есть для любого t выполняется равенство

$$\frac{x}{a^2} (x + v_x t) + \frac{y}{b^2} (y + v_y t) + \frac{z}{c^2} (z + v_z t) = 1.$$

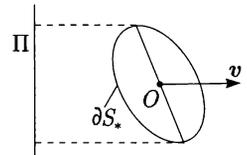


Рис. 5.3. Граница ∂S_* .

Отсюда с учетом (5.4) получаем

$$\frac{xv_x}{a^2} + \frac{yv_y}{b^2} + \frac{zv_z}{c^2} = 0. \quad (5.5)$$

Это уравнение вместе с уравнением эллипсоида задает границу ∂S_* . «Омываемая» потоком часть S_* поверхности спутника лежит в полупространстве

$$\frac{xv_x}{a^2} + \frac{yv_y}{b^2} + \frac{zv_z}{c^2} \geq 0.$$

Сечение поверхности (5.4) плоскостью (5.5) представляет собой эллипс. Найдем его площадь. Она равна произведению полуосей эллипса, умноженному на π . Квадраты полуосей суть экстремумы функции $f = x^2 + y^2 + z^2$ при условиях (5.4) и (5.5). Воспользуемся методом неопределенных множителей Лагранжа и рассмотрим функцию

$$\mathcal{L} = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) + \mu \left(\frac{xv_x}{a^2} + \frac{yv_y}{b^2} + \frac{zv_z}{c^2} \right).$$

В точках ее экстремума выполняются равенства

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0.$$

Запишем их в явном виде

$$\begin{cases} 2x + \frac{2\lambda x}{a^2} + \frac{\mu v_x}{a^2} = 0 & \implies x = -\frac{\mu v_x}{2(a^2 + \lambda)}, \\ 2y + \frac{2\lambda y}{b^2} + \frac{\mu v_y}{b^2} = 0 & \implies y = -\frac{\mu v_y}{2(b^2 + \lambda)}, \\ 2z + \frac{2\lambda z}{c^2} + \frac{\mu v_z}{c^2} = 0 & \implies z = -\frac{\mu v_z}{2(c^2 + \lambda)}. \end{cases} \quad (5.6)$$

Подставим найденные x , y , z в (5.5)

$$\begin{aligned} \frac{v_x^2}{a^2(a^2 + \lambda)} + \frac{v_y^2}{b^2(b^2 + \lambda)} + \frac{v_z^2}{c^2(c^2 + \lambda)} = 0 & \implies \\ \frac{v_x^2}{a^2} (\lambda + b^2)(\lambda + c^2) + \frac{v_y^2}{b^2} (\lambda + a^2)(\lambda + c^2) + \frac{v_z^2}{c^2} (\lambda + a^2)(\lambda + b^2) = 0 & \implies \\ a_0 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0, & \end{aligned} \quad (5.7)$$

где

$$a_0 = \frac{v_x^2}{a^2} + \frac{v_y^2}{b^2} + \frac{v_z^2}{c^2}, \quad a_2 = a^2 b^2 c^2 \left(\frac{v_x^2}{a^4} + \frac{v_y^2}{b^4} + \frac{v_z^2}{c^4} \right).$$

Решать полученное уравнение не нужно. Чтобы выяснить смысл λ , умножим уравнения системы (5.6) на x , y , z соответственно и сложим

$$0 = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2\lambda \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) + \mu \left(\frac{xv_x}{a^2} + \frac{yv_y}{b^2} + \frac{zv_z}{c^2} \right) = 2(x^2 + y^2 + z^2 + \lambda).$$

Отсюда получаем, что в точках экстремума $\lambda = -(x^2 + y^2 + z^2)$.

Площадь эллипса (5.4), (5.5) равна $S_1 = \pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$, где λ_1, λ_2 — корни уравнения (5.7). По теореме Виета

$$\lambda_1\lambda_2 = a^2b^2c^2 \frac{v_x^2/a^4 + v_y^2/b^4 + v_z^2/c^4}{v_x^2/a^2 + v_y^2/b^2 + v_z^2/c^2}$$

и, следовательно,

$$S_1 = \pi abc \sqrt{\frac{v_x^2/a^4 + v_y^2/b^4 + v_z^2/c^4}{v_x^2/a^2 + v_y^2/b^2 + v_z^2/c^2}}.$$

Фигура S_0 является проекцией эллипса (5.4), (5.5) на плоскость Π , поэтому площадь этой фигуры равна

$$S = S_1 \frac{(\mathbf{N} \cdot \mathbf{v})}{|\mathbf{N}| |\mathbf{v}|}, \quad \mathbf{N} = \left(\frac{v_x}{a^2}, \frac{v_y}{b^2}, \frac{v_z}{c^2} \right).$$

Здесь \mathbf{N} — нормаль к плоскости (5.5), то есть плоскости, в которой лежит граница ∂S_* . Имеем

$$\begin{aligned} S &= \pi abc \sqrt{\frac{v_x^2/a^4 + v_y^2/b^4 + v_z^2/c^4}{v_x^2/a^2 + v_y^2/b^2 + v_z^2/c^2}} \cdot \frac{v_x^2/a^2 + v_y^2/b^2 + v_z^2/c^2}{\sqrt{v_x^2/a^4 + v_y^2/b^4 + v_z^2/c^4} \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} = \\ &= \pi abc \sqrt{\frac{v_x^2/a^2 + v_y^2/b^2 + v_z^2/c^2}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \implies S|\mathbf{v}| = \pi abc \sqrt{\frac{v_x^2}{a^2} + \frac{v_y^2}{b^2} + \frac{v_z^2}{c^2}}. \end{aligned}$$

Согласно (5.1) компоненты главного вектора сил взаимодействия тела с молекулами потока в системе координат $Oxyz$ имеют вид

$$\begin{aligned} F_x &= -\pi abc \rho v_x \sqrt{\frac{v_x^2}{a^2} + \frac{v_y^2}{b^2} + \frac{v_z^2}{c^2}}, \\ F_y &= -\pi abc \rho v_y \sqrt{\frac{v_x^2}{a^2} + \frac{v_y^2}{b^2} + \frac{v_z^2}{c^2}}, \\ F_z &= -\pi abc \rho v_z \sqrt{\frac{v_x^2}{a^2} + \frac{v_y^2}{b^2} + \frac{v_z^2}{c^2}}. \end{aligned}$$

Центр эллипса S_0 находится в точке O' , поэтому $\mathbf{P}_{O'} = 0$ и $\mathbf{M}_O = 0$ (см. (5.3)).

Вычислим аэродинамический момент относительно произвольной точки O_1 , жестко связанной с корпусом спутника. Введем систему координат O_1xyz , оси которой параллельны осям системы $Oxyz$. Координаты точки O в системе O_1xyz обозначим $O = (h_x, h_y, h_z)$. Согласно известной формуле теоретической механики

$$\mathbf{M}_{O_1} = \mathbf{M}_O - \overrightarrow{OO_1} \times \mathbf{F} = \overrightarrow{O_1O} \times \mathbf{F} = -\overrightarrow{O_1O} \times (\rho|\mathbf{v}|S\mathbf{v}) = \rho|\mathbf{v}|S(\mathbf{v} \times \overrightarrow{O_1O}).$$

Пусть $\mathbf{M}_{O_1} = (M_x, M_y, M_z)$ в системе координат O_1xyz , тогда

$$\begin{aligned} M_x &= \pi abc\rho \sqrt{\frac{v_x^2}{a^2} + \frac{v_y^2}{b^2} + \frac{v_z^2}{c^2}} (v_y h_z - v_z h_y), \\ M_y &= \pi abc\rho \sqrt{\frac{v_x^2}{a^2} + \frac{v_y^2}{b^2} + \frac{v_z^2}{c^2}} (v_z h_x - v_x h_z), \\ M_z &= \pi abc\rho \sqrt{\frac{v_x^2}{a^2} + \frac{v_y^2}{b^2} + \frac{v_z^2}{c^2}} (v_x h_y - v_y h_x). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Рассмотрим вопрос о потенциальности аэродинамического момента \mathbf{M} . Если он имеет силовую функцию U , то $dU = \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\varphi}$, где $d\boldsymbol{\varphi}$ — вектор бесконечно малого поворота спутника. Согласно (5.3) $dU = \rho|\mathbf{v}|(\mathbf{v} \times \mathbf{P}(\mathbf{v})) \cdot d\boldsymbol{\varphi}$. В связанной со спутником системе координат $d\mathbf{v} + d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v} = 0$, поэтому

$$dU = \rho|\mathbf{v}|(\mathbf{v} \times \mathbf{P}(\mathbf{v})) \cdot d\boldsymbol{\varphi} = \rho|\mathbf{v}|(d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{v}) = -\rho|\mathbf{v}|\mathbf{P}(\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{v}.$$

Если выражение $\mathbf{P}(\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{v}$ является полным дифференциалом, то момент \mathbf{M} потенциален, в противном случае момент не потенциален.

Примеры. 1). Пусть $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ и $\mathbf{P}(\mathbf{v}) = (P(v_x), 0, 0)$ в системе координат $Oxyz$. Тогда выражение $\mathbf{P}(\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{v} = P(v_x)dv_x$ является полным дифференциалом, момент \mathbf{M} потенциален.

2). Пусть спутник — пластина площади S , лежащая в плоскости Oxz и симметричная относительно оси Ox . Геометрический центр масс пластины в системе $Oxyz$ имеет координаты $(a, 0, 0)$. Тогда $\mathbf{P}(\mathbf{v}) = Sa|v_y|(1, 0, 0)$ и, следовательно, выражение $\mathbf{P}(\mathbf{v}) \cdot d\mathbf{v} = Sa|v_y|dv_x$ не является полным дифференциалом, момент \mathbf{M} не потенциален.

3) Пусть спутник — эллипсоид (5.4), причем $\overrightarrow{O_1\mathcal{O}} = \mathbf{h} = (h, 0, 0)$. Поскольку

$$\mathbf{M} = \pi abc\rho\chi(\mathbf{v})(\mathbf{v} \times \mathbf{h}), \quad \text{где } \chi(\mathbf{v}) = \sqrt{\frac{v_x^2}{a^2} + \frac{v_y^2}{b^2} + \frac{v_z^2}{c^2}},$$

и $(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) \cdot d\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{h} \cdot (d\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}) = -\mathbf{h} \cdot d\mathbf{v}$, то

$$dU = \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\varphi} = -\pi abc\rho\chi(\mathbf{v})h dv_x.$$

Если $b = c$ (эллипсоид вращения), то

$$\chi(\mathbf{v}) = \sqrt{\frac{|\mathbf{v}|^2}{c^2} + \left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)v_x^2} \equiv \chi(v_x).$$

Следовательно, в этом случае выражение dU — полный дифференциал и момент \mathbf{M} потенциален. При $b \neq c$ потенциальности нет.

5.2. Влияние аэродинамического момента на положения равновесия трехосного спутника в орбитальной системе координат

Рассмотрим спутник — твердое тело на круговой орбите. Атмосферу считаем неподвижной в абсолютном пространстве. Тогда в прежних обозначениях в системе координат $Ox_1x_2x_3$, образованной главными центральными осями инерции спутника, $\mathbf{v} = |\mathbf{v}|(a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $|\mathbf{v}| = R\omega_0 = \text{const}$. Пусть внешняя оболочка спутника задается в системе $Ox_1x_2x_3$ уравнением

$$\frac{(x_1 - d_1)^2}{a_1^2} + \frac{(x_2 - d_2)^2}{a_2^2} + \frac{(x_3 - d_3)^2}{a_3^2} = 1.$$

Тогда приложенный к спутнику момент сил аэродинамического сопротивления можно записать в виде (компоненты указаны в системе $Ox_1x_2x_3$)

$$M_1 = \sigma q(a_{12}d_3 - a_{13}d_2), \quad M_2 = \sigma q(a_{13}d_1 - a_{11}d_3), \quad M_3 = \sigma q(a_{11}d_2 - a_{12}d_1),$$

$$\sigma = \pi a_1 a_2 a_3 \sqrt{\frac{a_{11}^2}{a_1^2} + \frac{a_{12}^2}{a_2^2} + \frac{a_{13}^2}{a_3^2}}, \quad q = \rho |\mathbf{v}|^2 \quad (5.9)$$

(ср. (5.8)). Пусть плотность атмосферы вдоль орбиты постоянна, тогда $q = \text{const}$. Динамические уравнения Эйлера, записанные с учетом действия на спутник гравитационного и восстанавливающего аэродинамического моментов, в данном случае имеют вид

$$I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 = 3\omega_0^2 (I_3 - I_2) a_{32} a_{33} + \sigma q (a_{12} d_3 - a_{13} d_2),$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 = 3\omega_0^2 (I_1 - I_3) a_{31} a_{33} + \sigma q (a_{13} d_1 - a_{11} d_3),$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 = 3\omega_0^2 (I_2 - I_1) a_{31} a_{32} + \sigma q (a_{11} d_2 - a_{12} d_1)$$

(ср. (1.18)). Кинематические уравнения Эйлера прежние, см. (1.17).

Стационарные решения $\gamma = \gamma_0 = \text{const}$, $\delta = \delta_0 = \text{const}$, $\beta = \beta_0 = \text{const}$, $\omega_i = \omega_0 a_{22}$ ($i = 1, 2, 3$) определяются уравнениями

$$\begin{cases} \omega_0^2 (I_3 - I_2) (a_{12} a_{23} - 3a_{32} a_{33}) = \sigma q (a_{12} d_3 - a_{13} d_2), \\ \omega_0^2 (I_1 - I_3) (a_{21} a_{23} - 3a_{31} a_{33}) = \sigma q (a_{13} d_1 - a_{11} d_3), \\ \omega_0^2 (I_2 - I_1) (a_{21} a_{22} - 3a_{31} a_{32}) = \sigma q (a_{11} d_2 - a_{12} d_1). \end{cases} \quad (5.10)$$

Найдем решения этой системы при малом q . При $q = 0$ она имеет 24 решения (см. стр. 13). Рассмотрим одно из них:

$$\gamma = \delta = \beta = 0$$

$$(a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{23} = a_{32} = a_{33} = 0, \quad a_{13} = a_{22} = 1, \quad a_{31} = -1).$$

При малом q решения системы (5.10), близкие указанному, можно найти, линеаризовав эту систему в окрестности точки $\gamma = \delta = \beta = 0$. Линеаризованная система записывается так

$$\begin{cases} -\omega_0^2(I_3 - I_2)\gamma = -\sigma_0 q d_2, \\ 3\omega_0^2(I_1 - I_3)\delta = \sigma_0 q d_1, \\ \omega_0^2(I_2 - I_1)(\beta + 3\beta) = 0, \end{cases}$$

$$\sigma_0 = \pi a_1 a_2, \quad \left| \frac{\sigma_0 q d_k}{\omega_0^2(I_i - I_j)} \right| \ll 1.$$

Ее решение

$$\gamma = -\frac{\sigma_0 q d_2}{I_2 - I_3}, \quad \delta = -\frac{\sigma_0 q d_1}{I_3 - I_1}, \quad \beta = 0$$

представляет собой росток одного из семейств стационарных решений в случае слабого воздействия аэродинамики. Можно указать 24 таких ростка, затем продолжить их по q (или параметру $\sim q$). Условие малости q имеет вид

$$\sigma_0 q |d_1| \ll \min(|I_2 - I_3|, |I_3 - I_1|).$$

Строгое доказательство существования таких решений опирается на теорему о неявной функции. Найденные решения, как правило, оказываются неустойчивыми. Конкретный пример приведен в п. 6.3. Ниже укажем общую причину возникновения неустойчивости.

5.3. Возникновение неустойчивости

Рассмотрим механическую систему с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(\mathbf{A}\dot{\mathbf{q}}, \dot{\mathbf{q}}) + (\mathbf{D}\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - \frac{1}{2}(\mathbf{C}\mathbf{q}, \mathbf{q}),$$

где $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$, \mathbf{A} , \mathbf{C} , \mathbf{D} — постоянные матрицы порядка n , \mathbf{A} и \mathbf{C} — симметричные и положительно определенные. Уравнения Лагранжа такой системы имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\mathbf{q} &= 0, \\ \mathbf{B} = \mathbf{D} - \mathbf{D}^\top, \quad \mathbf{A}^\top &= \mathbf{A}, \quad \mathbf{D}^\top = -\mathbf{D}, \quad \mathbf{C}^\top = \mathbf{C}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Выпишем характеристическое уравнение системы (5.11)

$$f(\lambda) \equiv |\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}| = 0.$$

Поскольку

$f(-\lambda) = |\mathbf{A}\lambda^2 - \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}| = |(\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C})^\top| = |\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \mathbf{C}| = f(\lambda)$,
функцию $f(\lambda)$ можно представить в виде

$$f(\lambda) = a_0 \lambda^{2n} + a_1 \lambda^{2(n-1)} + \dots + a_{n-1} \lambda^2 + a_n.$$

Необходимое условие устойчивости положения равновесия состоит в том, что характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни:

$$\lambda_j = \pm \omega_j \sqrt{-1}, \quad \omega_j > 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Добавим к системе позиционные, стационарные, но не потенциальные обобщенные силы $\mathbf{Q} = \mathbf{F}\mathbf{q}$, где \mathbf{F} — постоянная матрица порядка n , $\mathbf{F}^\top \neq \mathbf{F}$. Тогда уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \implies \mathbf{A}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}} + \tilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (5.12)$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{F}, \quad \tilde{\mathbf{C}}^\top \neq \tilde{\mathbf{C}},$$

$$f(-\lambda) = |\mathbf{A}\lambda^2 + \mathbf{B}\lambda + \tilde{\mathbf{C}}^\top| \neq f(\lambda).$$

Покажем, что в общем случае положение равновесия $\mathbf{q} = 0$ такой системы неустойчиво. Рассмотрим сначала случай $n = 2$. Матрицы \mathbf{A} , \mathbf{B} , $\tilde{\mathbf{C}}$ имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{vmatrix} 0 & d \\ -d & 0 \end{vmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix},$$

$$a_{12} = a_{21}, \quad c_{12} \neq c_{21}.$$

Тогда характеристическое уравнение записывается следующим образом

$$\begin{vmatrix} a_{11}\lambda^2 + c_{11} & a_{12}\lambda^2 + d\lambda + c_{12} \\ a_{21}\lambda^2 - d\lambda + c_{21} & a_{22}\lambda^2 + c_{22} \end{vmatrix} = 0 \implies$$

$$(a_{11}\lambda^2 + c_{11})(a_{22}\lambda^2 + c_{22}) - (a_{12}\lambda^2 + d\lambda + c_{12})(a_{21}\lambda^2 - d\lambda + c_{21}) = 0 \implies$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\lambda^4 + d(a_{12} - a_{21})\lambda^3 + (a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - a_{12}c_{21} - a_{21}c_{12} + d^2)\lambda^2 +$$

$$+ d(c_{12} - c_{21})\lambda + c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0.$$

Учитывая, что $a_{12} = a_{21}$, отсюда получаем

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\lambda^4 + [a_{11}c_{22} + a_{22}c_{11} - a_{12}(c_{21} + c_{12}) + d^2]\lambda^2 +$$

$$+ d(c_{12} - c_{21})\lambda + c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0.$$

Пусть коэффициенты c_{ij} зависят от параметра ε : $c_{ij} = c_{ij}(\varepsilon)$, причем $c_{12}(0) = c_{21}(0)$ и при $\varepsilon = 0$ характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm \omega_1^0 \sqrt{-1}$, $\lambda_{3,4} = \pm \omega_2^0 \sqrt{-1}$. При малых $\varepsilon \neq 0$ характеристическое уравнение будет иметь корни

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1(\varepsilon) \pm \omega_1(\varepsilon) \sqrt{-1}, \quad \lambda_{3,4} = \alpha_2(\varepsilon) \pm \omega_2(\varepsilon) \sqrt{-1},$$

$$\alpha_1(0) = \alpha_2(0) = 0, \quad \omega_1(0) = \omega_1^0, \quad \omega_2(0) = \omega_2^0.$$

По теореме Виета имеем

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0, \quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3\lambda_4 + \lambda_1\lambda_2\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3\lambda_4 = b(c_{21} - c_{12}).$$

С учетом вида корней находим

$$2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \quad 2\alpha_1(\alpha_2^2 + \omega_2^2) + 2\alpha_2(\alpha_1^2 + \omega_1^2) = d(c_{21} - c_{12}).$$

Если $c_{21}(\varepsilon) \neq c_{12}(\varepsilon)$, $d(\varepsilon) \neq 0$ при $\varepsilon \neq 0$, то $\alpha_1(\varepsilon) \neq 0$, $\alpha_2(\varepsilon) \neq 0$, $\alpha_1(\varepsilon)\alpha_2(\varepsilon) < 0$. Следовательно, имеет место неустойчивость.

При $n > 2$ неустойчивость может проявиться аналогичным образом. В характеристическом уравнении системы (5.12) член с λ^{2n-1} отсутствует. Поэтому если хотя бы один корень этого характеристического уравнения имеет ненулевую вещественную часть, то существует по крайней мере один корень с положительной вещественной частью, а для устойчивости необходимо, чтобы все корни были чисто мнимые.

Глава 6

Об одном механизме потери устойчивости режима гравитационной ориентации спутника

6.1. Самопроизвольно установившийся режим гравитационной ориентации

В работах [18] и [38] на основании статистической обработки телеметрической информации изучено движение орбитальной станции «Салют-7» относительно центра масс на длительных интервалах времени. Как оказалось, через несколько суток после начала неуправляемого движения с малой начальной угловой скоростью станция захватывается в специфический режим гравитационной ориентации. В этом режиме станция развернута агрегатным отсеком к Земле, а ее продольная ось совершает медленные колебания относительно местной вертикали. Частота колебаний в плоскости орбиты $\approx 1.54\omega_0$, где $\omega_0 = 0.00114 \text{ с}^{-1}$ — угловая скорость орбитального движения; частота колебаний в плоскости, образованной нормалью к плоскости орбиты и местной вертикалью, $\approx 1.84\omega_0$. Амплитуды обеих мод колебаний через неделю после начала неуправляемого движения равны $\approx 35\text{--}40^\circ$. Движение станции вокруг продольной оси представляет собой медленные колебания или медленное вращение. Модуль проекции вектора угловой скорости станции на эту ось не превышает $3\omega_0$.

Такой самопроизвольно установившийся режим гравитационной ориентации обусловлен, по-видимому, двумя факторами — дестабилизирующим влиянием сопротивления атмосферы и демпфирующими свойствами оборудования станции. Ниже этот режим анализируется в рамках простой механической модели. Орбита спутника считается круговой, форма его внешней оболочки — сплюснутым эллипсоидом, а источником диссипации служит симметричный маховик, имеющий относительно корпуса спутника одну степень свободы. Рассматриваются две системы уравнений движения — автономная, полученная в предположении, что плотность атмосферы вдоль орбиты спутника постоянна (автономная модель), и периодическая, в которой учитывается изменение плотности атмосферы вдоль орбиты (периодическая модель). В рамках автономной модели самопроизвольно установившийся режим гравитационной ориентации описывается предельным циклом, возникающим в результате мягкой потери устойчивости положения равновесия спутника в орбитальной системе координат. В рамках периодической модели этому ре-

жиму отвечает двумерное интегральное многообразие уравнений движения, возникающее при потере устойчивости периодического решения, описывающего малые вынужденные колебания спутника. Полученные результаты позволяют объяснить основные черты самопроизвольно установившегося режима гравитационной ориентации орбитальной станции «Салют-7».

6.2. Движение спутника–гиростата под действием гравитационного и аэродинамического моментов

Ниже используются обозначения гл. 4 и 5. Внешняя оболочка спутника задается уравнением

$$\frac{(x_1 - c_1)^2}{b_1^2} + \frac{(x_2 - c_2)^2}{b_2^2} + \frac{(x_3 - c_3)^2}{b_3^2} = 1.$$

Здесь и далее компоненты векторов и координаты точек указываются в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Считаем, что атмосфера неподвижна в абсолютном пространстве, ее плотность вдоль орбиты постоянна, молекулы воздуха при столкновении со спутником испытывают абсолютно неупругий удар. При сделанных предположениях компоненты восстанавливающего аэродинамического момента имеют вид (ср. (5.8))

$$M_1 = P(a_{12}c_2 - a_{13}c_2), \quad M_2 = P(a_{13}c_1 - a_{11}c_3), \quad M_3 = P(a_{11}c_2 - a_{12}c_1),$$

$$P = \pi b_1 b_2 b_3 f \sqrt{\frac{a_{11}^2}{b_1^2} + \frac{a_{12}^2}{b_2^2} + \frac{a_{13}^2}{b_3^2}}, \quad (6.1)$$

где f — модуль силы аэродинамического сопротивления, действующей на единичный элемент площади поверхности спутника, перпендикулярный скорости набегающего воздушного потока.

Уравнения движения спутника вокруг центра масс под действием гравитационного и аэродинамического моментов запишем в виде (см. (1.17), (4.8))

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \\ \dot{\delta} &= \frac{1}{\cos \beta} (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma) - \omega_0, \\ \dot{\beta} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma, \\ I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2) \omega_2 \omega_3 + J [n_1 \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} (n_3 \omega_2 - n_2 \omega_3)] &= \\ &= 3\omega_0^2 (I_3 - I_2) a_{32} a_{33} + M_1, \\ I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3) \omega_1 \omega_3 + J [n_2 \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} (n_1 \omega_3 - n_3 \omega_2)] &= \\ &= 3\omega_0^2 (I_1 - I_3) a_{31} a_{33} + M_2, \\ I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1) \omega_1 \omega_2 + J [n_3 \ddot{\varphi} + \dot{\varphi} (n_2 \omega_1 - n_1 \omega_2)] &= \\ &= 3\omega_0^2 (I_2 - I_1) a_{31} a_{32} + M_3, \\ J (\ddot{\varphi} + n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2 + n_3 \omega_3 + K \dot{\varphi}) &= 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Первые три из этих уравнений — кинематические уравнения Эйлера для углов γ , δ и β ; вторые три уравнения — динамические уравнения Эйлера, то есть закон изменения полного кинетического момента спутника; последнее уравнение — закон изменения проекции кинетического момента маховика на его ось вращения. Обозначим $\dot{\varphi} = v$ и введем безразмерные величины

$$\tau = \omega_0 t, \quad w = \frac{v}{\omega_0}, \quad \Omega_j = \frac{\omega_j}{\omega_0}, \quad \alpha_j = \frac{c_j}{c} \quad (j = 1, 2, 3), \quad c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

$$\lambda = \frac{I_1}{I_3}, \quad \mu = \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \quad \varepsilon = \frac{J}{I_1},$$

$$p = \frac{\pi b_1 b_2 b_3 c f}{I_1 \omega_0^2}, \quad \xi_1 = \frac{b_2^2}{b_1^2}, \quad \xi_3 = \frac{b_2^2}{b_3^2}, \quad k = \frac{K}{J \omega_0}.$$

В результате простых преобразований система (6.1), (6.2) принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} &= \Omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma), \\ \dot{\delta} &= \frac{1}{\cos \beta} (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma) - 1, \\ \dot{\beta} &= \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma, \\ \dot{Q}_1 &= Q_1 - \varepsilon n_1 W, \quad \dot{Q}_2 = Q_2 - \frac{\varepsilon \lambda n_2}{1 + \lambda \mu} W, \\ \dot{Q}_3 &= Q_3 - \varepsilon n_3 W, \quad \dot{w} = W, \\ Q_1 &= \mu (\Omega_2 \Omega_3 - 3a_{32} a_{33}) + \varepsilon w (n_2 \Omega_3 - n_3 \Omega_2) + p \sigma (a_{12} \alpha_3 - a_{13} \alpha_2), \\ Q_2 &= \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda \mu} (\Omega_1 \Omega_3 - 3a_{31} a_{33}) + \frac{\lambda}{1 + \lambda \mu} [\varepsilon w (n_3 \Omega_1 - n_1 \Omega_3) + \\ &\quad + p \sigma (a_{13} \alpha_1 - a_{11} \alpha_3)], \\ Q_3 &= - (1 - \lambda - \lambda \mu) (\Omega_1 \Omega_2 - 3a_{31} a_{32}) + \lambda [\varepsilon w (n_1 \Omega_2 - n_2 \Omega_1) + \\ &\quad + p \sigma (a_{11} \alpha_2 - a_{12} \alpha_1)], \\ W &= - \frac{k w + n_1 Q_1 + n_2 Q_2 + n_3 Q_3}{1 - \varepsilon n_1^2 - \frac{\varepsilon \lambda}{1 + \lambda \mu} n_2^2 - \varepsilon \lambda n_3^2}, \quad \sigma = \sqrt{\xi_1 a_{11}^2 + a_{12}^2 + \xi_3 a_{13}^2}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по τ . Для численного исследования системы (6.3) были взяты следующие значения параметров

$$\begin{aligned} \lambda = \mu = 0.1, \quad \alpha_1 = 0.2, \quad \alpha_2 = 0.05, \quad \alpha_3 = 0.01, \quad \varepsilon = 0.01, \\ k = 0.2, \quad n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577, \\ \xi_1 = \xi_2 = 0.1, \quad -2 \leq p \leq 2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Для p рассматривался отрезок, поскольку именно в зависимости от значений этого параметра (характеризующего высоту орбиты) исследовались свойства устойчивости режима гравитационной ориентации спутника.

6.3. Режим гравитационной ориентации спутника

Режимом *гравитационной ориентации* спутника будем называть такое его движение, в котором углы δ (или $\delta - \pi$) и β не превосходят по абсолютной величине нескольких градусов. Поскольку уравнения (6.3) инвариантны относительно преобразования

$$\delta \rightarrow \delta + \pi, \quad p \rightarrow -p, \quad (6.5)$$

ограничимся исследованием случая малого $|\delta|$. Анализ режима гравитационной ориентации начнем с изучения положений равновесия спутника в орбитальной системе координат. Такие положения равновесия описываются стационарными решениями уравнений (6.3). В этих решениях $\Omega_j = a_{2j}$ ($j = 1, 2, 3$), $w = 0$, а углы γ , β и δ определяются системой

$$\begin{aligned} \mu(a_{22}a_{23} - 3a_{32}a_{33}) + p\sigma(a_{12}\alpha_3 - a_{13}\alpha_2) &= 0, \\ (1 - \lambda)(a_{21}a_{23} - 3a_{31}a_{33}) + \lambda p\sigma(a_{13}\alpha_1 - a_{11}\alpha_3) &= 0, \\ -(1 - \lambda + \lambda\mu)(a_{21}a_{22} - 3a_{31}a_{32}) + \lambda p\sigma(a_{11}\alpha_2 - a_{12}\alpha_1) &= 0. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Исследуем зависимость системы (6.6) от параметра p . Эту зависимость будем представлять кривыми в пространстве $\mathbb{R}^4(\gamma, \delta, \beta, p)$. При $p = 0$ в области $|\delta| < \pi/2$, $|\beta| < \pi/2$ система (6.6) имеет четыре решения [17], которым в пространстве $\mathbb{R}^4(\gamma, \delta, \beta, p)$ отвечают точки

$$\gamma = 0, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \pi, \quad \frac{3\pi}{2}; \quad \delta = \beta = p = 0. \quad (6.7)$$

В этих точках якобиан правых частей системы (6.6) по переменным γ , β и δ отличен от нуля. Следовательно, по теореме о неявной функции система (6.6) при достаточно малом $|p|$ задает четыре аналитические кривые, проходящие через эти точки.

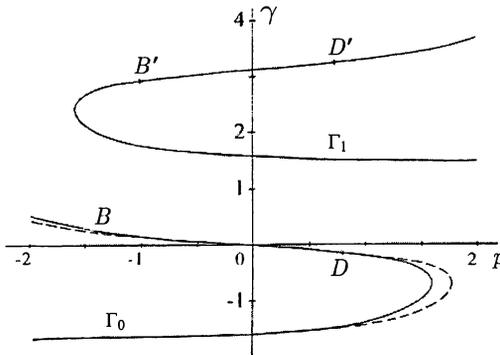


Рис. 6.1.

При произвольных значениях p кривые (6.6) были построены численно с помощью описанного в [29] метода продолжения решений нелинейных уравне-

ний по параметру. Как оказалось при глобальном рассмотрении, через точки (6.7) проходят только две гладкие кривые, которые обозначим Γ_0 и Γ_1 . Проекция этих кривых на плоскость (p, γ) изображены на рис. 6.1 сплошными линиями и также обозначены Γ_0 и Γ_1 . На участках кривых, лежащих в области $|p| \leq 2$, выполнены неравенства $|\delta| < 1^\circ$, $|\beta| < 0.01^\circ$. Уравнения (6.6) инвариантны относительно преобразований

$$\begin{aligned} \gamma &\rightarrow \gamma + \pi, & \delta &\rightarrow -\delta, & \beta &\rightarrow -\beta, & p &\rightarrow -p, \\ \gamma &\rightarrow \gamma - \pi, & \delta &\rightarrow -\delta, & \beta &\rightarrow -\beta, & p &\rightarrow -p. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Первое из них переводит кривую Γ_0 в Γ_1 , второе (обратное к первому) кривую Γ_1 в Γ_0 .

Одновременно с построением кривых проводилось исследование устойчивости задаваемых ими стационарных решений системы (6.3). На каждом шаге алгоритма, выполнявшего продолжение стационарного решения по параметру, вычислялись корни характеристического многочлена соответствующей системы уравнений в вариациях. На рис. 6.1 участки кривых Γ_0 и Γ_1 , на которых стационарные решения асимптотически устойчивы, лежат между точками B, D и B', D' . Параметр p в этих точках принимает значения $p_B = -1.412$, $p_D = 0.809$, $p_{B'} = -0.994$, $p_{D'} = 0.750$. Хотя кривые Γ_0 и Γ_1 переходят друг в друга при преобразованиях (6.8), между участками устойчивости на них такой связи нет. Это обусловлено тем, что преобразования (6.8) справедливы только для уравнений (6.6). Полные уравнения (6.3) инвариантны относительно преобразований

$$\begin{aligned} \gamma &\rightarrow \gamma \pm \pi, & \delta &\rightarrow -\delta, & \beta &\rightarrow -\beta, & \Omega_j &\rightarrow -\Omega_j \quad (j = 1, 2, 3), \\ w &\rightarrow -w, & \tau &\rightarrow -\tau, & k &\rightarrow -k, & p &\rightarrow -p, \end{aligned}$$

меняющих свойства устойчивости стационарных решений. Найденные асимптотически устойчивые положения равновесия спутника в орбитальной системе координат можно использовать для реализации режима его гравитационной ориентации.

При малых μ , ε и $|p|$ главные части выражений для корней $\kappa_1, \dots, \kappa_7$ упомянутого выше характеристического многочлена имеют вид

$$\begin{aligned} \kappa_{1,2} &= \pm i\sqrt{4-3\lambda} = \pm 1.92i, & \kappa_{3,4} &= \pm i\sqrt{3(1-\lambda)} = \pm 1.64i, \\ \kappa_{5,6} &= \pm i\sqrt{\frac{4\mu(1-\lambda)}{4-3\lambda}} = \pm 0.31i, & \kappa_7 &= -k = -0.2, \end{aligned} \quad (6.9)$$

где i — мнимая единица. Хотя погрешность выписанных формул $O(\mu + \varepsilon + |p|)$, они достаточно точно выполнены на участках устойчивости кривых Γ_0 и Γ_1 . Поведение корней $\kappa_1, \dots, \kappa_7$ в функции p на этих участках одинаково, поэтому ниже ограничимся анализом участка BD кривой Γ_0 . Графики зависимости от p действительных частей корней $\kappa_1, \dots, \kappa_4$ вдоль этого участка

приведены на рис. 6.2. Корни κ_5 и κ_6 на участке BD удовлетворяют неравенству $\text{Re}\kappa_{5,6} < -2 \cdot 10^{-3}$.

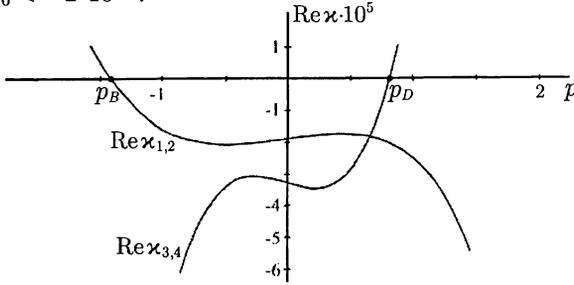


Рис. 6.2.

Как видно из графиков на рис. 6.2, потеря стационарным решением устойчивости в точках B и D происходит вследствие перехода корней $\kappa_{1,2}$ (в точке p_B) и $\kappa_{3,4}$ (в точке p_D) через мнимую ось. При этом

$$\left. \frac{d\text{Re}\kappa_{1,2}}{dp} \right|_B < 0, \quad \left. \frac{d\text{Re}\kappa_{3,4}}{dp} \right|_D > 0.$$

Согласно теореме Хопфа [10] в точках p_B и p_D рождаются предельные циклы уравнений (6.3). В зависимости от расположения областей существования этих циклов на оси p относительно отрезка $[p_B, p_D]$ каждая из точек p_B или p_D может быть либо опасной, либо безопасной границей области устойчивости стационарного решения [2]. Потеря устойчивости на опасной границе называется жесткой, а на безопасной — мягкой. В ситуации общего положения справедливо следующее правило [2, 10]. Если в окрестности точки p_B или p_D область существования предельного цикла совпадает с областью устойчивости стационарного решения, то предельный цикл неустойчив и потеря устойчивости стационарным решением в этой точке происходит жестко; если указанные области дополняют друг друга, то предельный цикл устойчив и потеря устойчивости будет мягкой. Таким образом, для изучения характера потери устойчивости режима гравитационной ориентации спутника необходимо изучить предельные циклы его уравнений движения.

6.4. Исследование предельных циклов

Построение предельных циклов системы (6.3) сводится к решению для этой системы периодической краевой задачи

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \gamma(T), & \delta(0) &= \delta(T), & \beta(0) &= \beta(T), \\ \Omega_j(0) &= \Omega_j(T) \quad (j = 1, 2, 3), & w(0) &= w(T), \end{aligned} \quad (6.10)$$

где $T > 0$ — период. Поскольку система (6.3) автономна, одно из начальных условий $\gamma(0)$, $\delta(0)$, \dots , $w(0)$ можно задать произвольно. Чтобы устранить произвол, рассмотрим структуру решений системы (6.3), линеаризованной в окрестности стационарного решения, лежащего на участке BD кривой Γ_0 .

При малых μ , ε и $|p|$ корни характеристического многочлена этой системы (ср. (6.9)) дают наглядную механическую интерпретацию. Корни $\varkappa_{3,4}$ отвечают колебаниям оси Ox_1 спутника в плоскости орбиты (по углу δ), корни $\varkappa_{1,2}$ отвечают колебаниям оси Ox_1 в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты (по углу β), корни $\varkappa_{5,6}$ характеризуют колебания спутника вокруг оси Ox_1 (по углу β), корень \varkappa_7 характеризует собственное движение маховика (по угловой скорости w). Строго говоря, перечисленными свойствами обладают только главные члены нормальных решений линеаризованной системы. Погрешность выполнения этих свойств у точных нормальных решений составляет $O(\mu + \varepsilon + |p|)$. Из вышеизложенного, а также из условия теоремы Хопфа следует, что в точке p_B (точке p_D) рождается предельный цикл с периодом $T = 2\pi/\sqrt{4-3\lambda}$ ($T = 2\pi/\sqrt{3(1-\lambda)}$), описывающий колебания оси Ox_1 по углу β (углу δ). Выбирая краевые условия, определяющие эти циклы, потребуем, чтобы в первом случае выполнялось соотношение $\dot{\beta} = 0$, а во втором — соотношение $\dot{\delta} = 0$. Иными словами, начальные условия будем задавать в точках экстремума переменных β и δ соответственно.

Для окончательного задания начальных условий введем вместо Ω_2 и Ω_3 переменные

$$w_2 = \Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma, \quad w_3 = \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma.$$

В новых переменных второе и третье уравнения системы (6.3) примут вид

$$\dot{\delta} = \frac{w_2}{\cos \beta} - 1, \quad \dot{\beta} = w_3,$$

а условия $\dot{\delta} = 0$ и $\dot{\beta} = 0$ перейдут в условия $w_2(0) = \cos \beta(0)$ и $w_3(0) = 0$. Учитывая последние равенства и выражая $\Omega_2(0)$ и $\Omega_3(0)$ через $w_2(0)$ и $w_3(0)$, для цикла, рождающегося в точке p_B , получим

$$\Omega_2(0) = w_2(0) \cos \gamma(0), \quad \Omega_3(0) = -w_2(0) \sin \gamma(0).$$

Для цикла, рождающегося в точке p_D , будем иметь

$$\Omega_2(0) = \cos \beta(0) \cos \gamma(0) + w_3(0) \sin \gamma(0),$$

$$\Omega_3(0) = -\cos \beta(0) \sin \gamma(0) + w_3(0) \cos \gamma(0).$$

Найденные соотношения позволяют на единицу уменьшить число независимых начальных условий в краевой задаче (6.10).

Рассмотрим сначала предельный цикл, рождающийся в точке p_B . Введем вектор $\alpha = (\gamma_0, \delta_0, \beta_0, \Omega_{10}, u_0, w_0, p, T)^T \in \mathbb{R}^8$ и исследуем решение системы (6.3) с начальными условиями $\gamma(0) = \gamma_0$, $\delta(0) = \delta_0$, $\beta(0) = \beta_0$, $\Omega_1(0) = \Omega_{10}$, $\Omega_2(0) = u_0 \cos \gamma_0$, $\Omega_3(0) = -\sin \gamma_0$, $w(0) = w_0$. Для этого решения определим функцию (ср. (6.10))

$$g_B = \left(\gamma(T) - \gamma_0, \delta(T) - \delta_0, \beta(T) - \beta_0, \Omega_{10}(T) - \Omega_{10}, \right. \\ \left. \Omega_2(T) - u_0 \cos \gamma_0, \Omega_3(T) + u_0 \sin \gamma_0, w(T) - w_0 \right)^T \in \mathbb{R}^7.$$

Исследование зависимости предельного цикла от параметра p сводится к построению кривой в пространстве $\mathbb{R}^8(\alpha)$, задаваемой уравнением

$$g_B(\alpha) = 0. \quad (6.11)$$

Численное построение кривой осуществлялось методом, описанным в [29] и использованным выше при изучении системы (6.6). Она строилась из точки

$$\alpha_B = \left(\gamma_B, \delta_B, \beta_B, \sin \beta_B, \cos \beta_B, 0, p_B, \frac{2\pi}{\text{Im } \kappa_{1,2}(B)} \right)^T,$$

где $(\gamma_B, \delta_B, \beta_B, p_B)^T = B \in \Gamma_0$; $\kappa_j(B)$ — корни характеристического многочлена в точке B . Справедливо равенство

$$\text{rang } \frac{\partial g_B(\alpha_B)}{\partial \alpha} \leq 6,$$

поэтому начальный участок кривой (6.11) вычислялся специальным алгоритмом. На каждом шаге этого алгоритма переменная β_0 была фиксированной и система (6.11) решалась относительно $\gamma_0, \delta_0, \Omega_{10}, u_0, w_0, p$ и T методом Ньютона. Начальным приближением служили значения этих переменных, найденные на предыдущем шаге. От шага к шагу величина β_0 менялась в арифметической прогрессии.

Результаты расчетов предельного цикла, рождающегося в точке p_B , представлены на рис. 6.3а и 6.4а. На рис. 6.3а изображена проекция кривой (6.11)

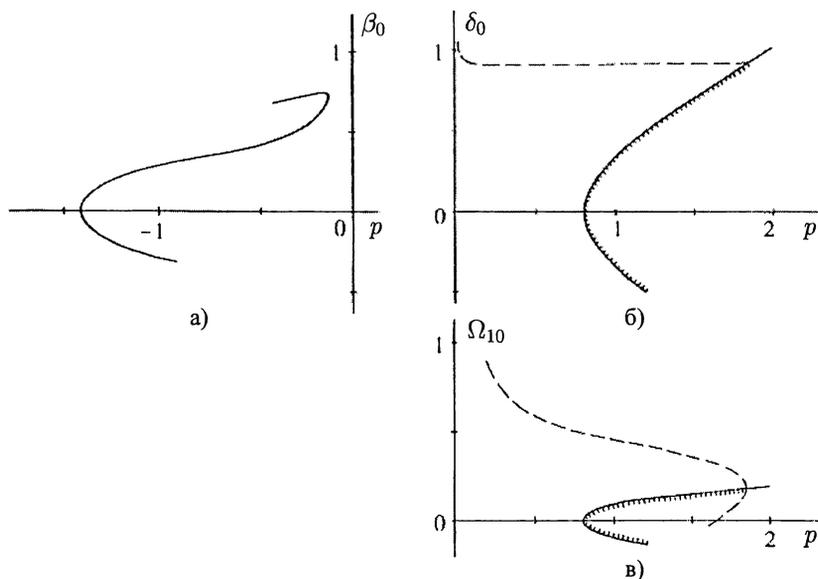


Рис. 6.3.

на плоскость (p, β_0) , на рис. 6.4а приведены графики функций $\gamma(\tau), \delta(\tau)$ и $\beta(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq T$) для одного из найденных периодических решений системы (6.3). Ветви кривой на рис. 6.3а, расположенные выше и ниже оси абсцисс, описывают одни и те же предельные циклы системы (6.3). При одинаковом p соответствующие разным ветвям периодические решения получаются одно из другого сдвигом по τ примерно на половину периода.

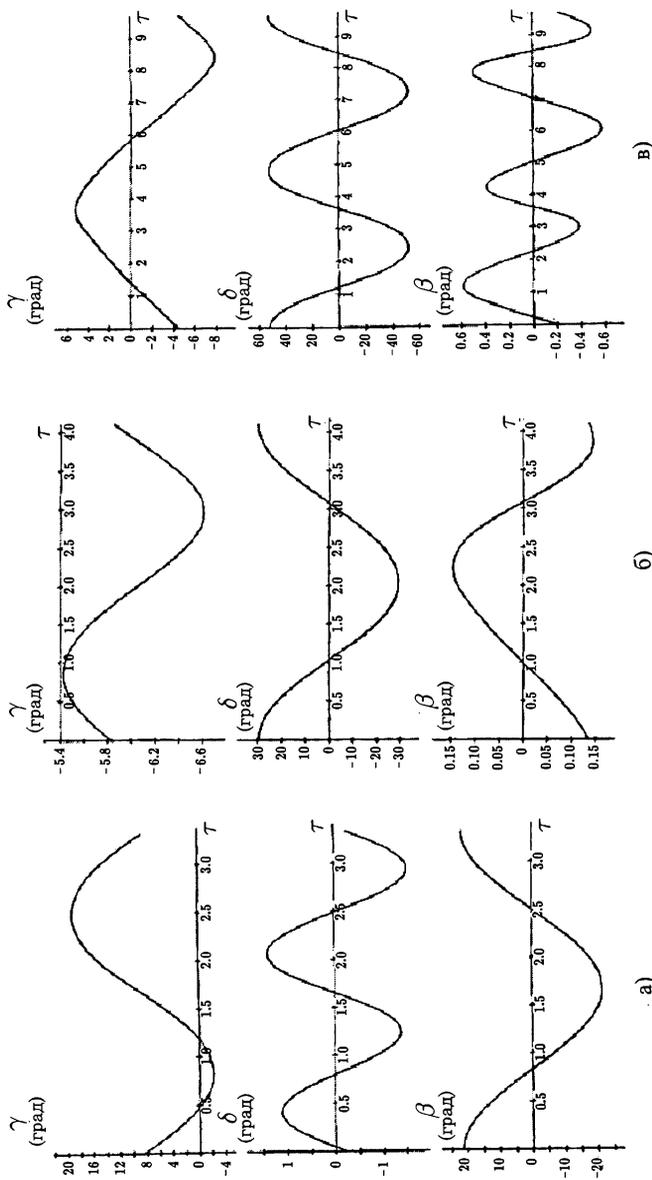


Рис. 6.4.

- а) $\gamma_0 = 0.14859$, $\delta_0 = 0.00435$, $\beta_0 = 0.37594$, $\Omega_{10} = 0.02915$, $\omega_0 = 1.01361$, $\omega_0 = 0.02397$, $p = -0.63259$, $T = 3.33486$;
 б) $\gamma_0 = -0.10216$, $\delta_0 = 0.51879$, $\beta_0 = -0.00239$, $\Omega_{10} = 0.01263$, $\omega_0 = 0.00125$, $\omega_0 = 0.06042$, $p = 1.21797$, $T = 4.11363$;
 в) $\gamma_0 = -0.08018$, $\delta_0 = 0.91653$, $\beta_0 = -0.00364$, $\Omega_{10} = 0.05601$, $\omega_0 = 0.01423$, $\omega_0 = 0.5249$, $p = 0.58924$, $T = 9.68743$.

Одновременно с построением кривой (6.11) проводилось исследование устойчивости задаваемых ею периодических решений системы (6.3). На каждом шаге алгоритма, выполнявшего продолжение периодического решения по параметру, вычислялись мультипликаторы этого решения. Найденные решения оказались экспоненциально неустойчивыми. Этот факт соответствует упоминавшемуся выше правилу, которое связывает свойства устойчивости предельного цикла с расположением области его существования.

Перейдем к исследованию предельного цикла, рождающегося в точке p_D . Рассмотрим решение системы (6.3) с начальными условиями

$$\begin{aligned} \gamma(0) = \gamma_0, \quad \delta(0) = \delta_0, \quad \beta(0) = \beta_0, \quad \Omega_1(0) = \Omega_{10}, \quad \Omega_2(0) = \cos \beta_0 \cos \delta_0 + u_0 \sin \gamma_0, \\ \Omega_3(0) = -\cos \beta_0 \sin \gamma_0 + u_0 \cos \gamma_0, \quad w(0) = w_0 \end{aligned}$$

и для него определим функцию

$$\mathbf{g}_B = \left(\gamma(T) - \gamma_0, \delta(T) - \delta_0, \beta(T) - \beta_0, \Omega_{10}(T) - \Omega_{10}, \right. \\ \left. \Omega_2(T) - u_0 \cos \gamma_0, \Omega_3(T) + u_0 \sin \gamma_0, w(T) - w_0 \right)^T \in \mathbb{R}^7.$$

Исследование зависимости предельного цикла от параметра p сводится к построению кривой

$$\mathbf{g}_D(\boldsymbol{\alpha}) = 0 \in \mathbb{R}^8(\boldsymbol{\alpha}). \quad (6.12)$$

Численное построение этой кривой проводилось аналогично построению кривой (6.11). Кривая строилась из точки

$$\boldsymbol{\alpha}_D = \left(\gamma_D, \delta_D, \beta_D, \sin \beta_D, 0, 0, p_D, \frac{2\pi}{\text{Im} \chi_{3,4}(D)} \right)^T,$$

где $(\gamma_D, \delta_D, \beta_D, p_D)^T = D \in \Gamma_0$; $\chi_j(D)$ — корни характеристического многочлена в точке D . На начальном участке независимо изменяемым параметром служило δ_0 .

Результаты расчетов предельного цикла, рождающегося в точке p_D , представлены на рис. 6.3б,в и 6.4б. На рис. 6.3б,в сплошными линиями изображены проекции на плоскости (p, δ_0) и (p, Ω_{10}) той ветви кривой (6.12), которая проходит через точку $\boldsymbol{\alpha}_D$. На рис. 6.4б приведены графики функций $\gamma(\tau)$, $\delta(\tau)$ и $\beta(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq T$) для одного из найденных периодических решений системы (6.3). Вычисление мультипликаторов этих решений показало, что при $p \leq p_D^* = 1.859$ они асимптотически орбитально устойчивы (на рис. 6.3б участки устойчивости отмечены штриховкой). Этот факт согласуется с правилом, связывающим свойства устойчивости предельного цикла с расположением области его существования.

В точке $p = p_D^*$ один из мультипликаторов равен -1 . В этой точке от исследуемого предельного цикла ответвляется новый предельный цикл с удвоенным периодом. В пространстве $\mathbb{R}^8(\boldsymbol{\alpha})$ новый предельный цикл, так же, как и исходный, задается уравнением (6.12). Результаты расчетов этого цикла представлены на рис. 6.3б,в и 6.4в. На рис. 6.3б,в штриховыми линиями изображены проекции соответствующей кривой (6.12) на плоскости (p, δ_0) и

(p, Ω_{10}) , на рис. 6.4в приведен пример периодического решения системы (6.3). Новый предельный цикл экспоненциально неустойчив.

Описанные результаты исследования стационарных решений и предельных циклов системы (6.3) устойчивы относительно варьирования параметров задачи — изменение в 1.5–2 раза значений параметров (6.4) не приводит к какому-либо качественному изменению результатов. Заметим еще, что поведение в зависимости от p предельных циклов, возникающих в окрестности стационарных решений, описываемых кривой Γ_1 , в точности аналогично исследованному выше. Например, в точке $p_{B'}$ происходит жесткая, а в точке p_D — мягкая потеря устойчивости стационарных решений.

6.5. Механическая интерпретация полученных результатов

Параметр p прямо пропорционален плотности набегающего на спутник аэродинамического потока, поэтому его можно связать с высотой орбиты. Чем больше эта высота, тем меньше $|p|$. Поскольку уравнения (6.3) инвариантны относительно преобразования (6.5), будем считать, что параметр p в (6.3) неотрицателен, и интерпретировать значения $p < 0$ в описанных выше расчетах как способ задания ориентации спутника, при которой ось Ox_1 направлена от Земли.

Если орбита достаточно высокая ($|p|$ мало), то положение равновесия спутника в орбитальной системе координат, в котором $|\gamma|$, $|\beta|$ и $|\delta|$ (или $|\delta - \pi|$) малы, асимптотически устойчиво. Такое положение равновесия будем считать номинальным невозмущенным движением спутника в режиме гравитационной ориентации. С уменьшением высоты орбиты (увеличением $|p|$) при переходе p через критическое значение p_B или p_D это положение равновесия теряет устойчивость. Если спутник повернут осью Ox_1 от Земли, то потеря устойчивости будет жесткой (отрицательное p , уменьшаясь, проходит через точку p_B). Если же спутник повернут осью Ox_1 к Земле, то потеря устойчивости будет мягкой (положительное p , увеличиваясь, проходит через точку p_D). В последнем случае от положения равновесия ответвляется асимптотически орбитально устойчивый предельный цикл, который при дальнейшем уменьшении высоты орбиты увеличивается по амплитуде и тоже теряет устойчивость. Потеря устойчивости происходит жестко и связана с ответвлением в точке p_D^* нового предельного цикла, имеющего удвоенный период. На участке устойчивости (при $p_D < p < p_D^*$) максимальная амплитуда предельного цикла по углу γ — около 50° , по углу β — менее 1° .

Движение спутника, описываемое устойчивым предельным циклом, рождающимся в точке p_D , весьма похоже на самопроизвольно установившийся режим гравитационной ориентации орбитальной станции «Салют-7». Отличия состоят в следующем. Во-первых, станция совершает колебания по уг-

ду β с амплитудой около 40° , тогда как в предельном цикле амплитуда этих колебаний $\leq 1^\circ$. Во-вторых, движение станции вокруг продольной оси представляет собой колебания или вращения с угловой скоростью ~ 1 (в единицах ω_0), а в предельном цикле движение спутника вокруг оси Ox_1 представляет собой малые колебания с амплитудой менее 1° и $|\Omega_1| < 0.12$. Заметим еще, что размер области притяжения предельного цикла в направлении переменных γ, δ, β и w_3 мал, а характерное время намотки на цикл решений из его окрестности велико. Поэтому вероятность достижения произвольным решением системы (6.3) с нулевыми начальными угловыми скоростями рассматриваемого предельного цикла за время $\Delta\tau \leq 1000$ (полторы недели полета орбитальной станции) весьма мала. Перечисленные факты говорят против предложенной интерпретации, но их можно объяснить различиями между реальной станцией и принятой моделью (наличие переменной плотности атмосферы, более сложная форма внешней оболочки, иные источники диссипации энергии и т. п.).

6.6. Исследование режима гравитационной ориентации в рамках периодической модели

До сих пор орбита центра масс спутника считалась круговой. Для эксцентриситетов ≤ 0.001 (случай орбитальной станции «Салют-7») такое предположение вполне оправдано, однако при вычислении плотности набегающего на спутник воздушного потока даже малую эллиптичность орбиты желательно учесть. Будем считать, что зависимость этой плотности — обозначим ее ρ — от высоты h орбиты спутника над поверхностью Земли имеет вид

$$\rho = \rho_\pi \exp \frac{h_\pi - h}{H},$$

где ρ_π — плотность атмосферы в перигее орбиты, h_π — высота перигея, H — высота однородной атмосферы. Для орбиты с малым эксцентриситетом и сферической Земли последнюю формулу можно представить так

$$\rho = \rho_\pi \exp[\eta(1 - \cos \tau)], \quad \eta = \frac{1}{2} \ln \frac{\rho_\alpha}{\rho_\pi}. \quad (6.13)$$

Здесь ρ_α — плотность атмосферы в апогее орбиты, $\tau = \omega_0(t - t_\pi)$, t_π — время прохождения спутника через перигей. Если считать, что плотность набегающего на спутник воздушного потока меняется со временем согласно (6.13), то в уравнениях (6.3) следует положить

$$p = p_\pi \exp[\eta(1 - \cos \tau)], \quad (6.14)$$

где p_π — значение параметра p в перигее. В расчетах, результаты которых описываются ниже, принималось $\eta = -0.1$, $-2 \leq p_\pi \leq 2$.

Выясним, что следует считать номинальными невозмущенными движениями спутника в режиме гравитационной ориентации в случае, когда уравне-

ния его движения имеют вид (6.3), (6.14). Как следует из результатов п. 6.3, при $p_\pi = 0$ система (6.3), (6.14) допускает два асимптотически устойчивых стационарных решения, в которых $\delta = \beta = 0$, $\gamma = 0$, π . Отсюда согласно теореме Пуанкаре [9] та же система при достаточно малом $|p_\pi|$ имеет единственные 2π -периодические решения, аналитически зависящие от p_π , асимптотически устойчивые и совпадающие в точке $p_\pi = 0$ с указанными стационарными решениями. Рассмотрим продолжения этих периодических решений в область произвольных значений параметра p_π . В тех случаях, когда полученные таким продолжением решения асимптотически устойчивы и имеют максимальные значения углов $|\delta|$ и $|\beta|$, не превышающие нескольких градусов, будем считать, что режим гравитационной ориентации спутника возможен и при отсутствии возмущений описывается этими решениями. Ниже ограничимся исследованием решения, в котором $\gamma(\tau)|_{p_\pi=0} \equiv 0$.

Численное построение 2π -периодических решений системы (6.3), (6.14) сводится к решению для этой системы периодической краевой задачи

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= \gamma(2\pi), & \delta(0) &= \delta(2\pi), & \beta(0) &= \beta(2\pi), \\ \Omega_j(0) &= \gamma(2\pi) \quad (j = 1, 2, 3), & w(0) &= w(2\pi). \end{aligned}$$

Зависимость решений такой задачи от параметра p_π удобно представлять кривой в пространстве $\mathbb{R}^8(\gamma(0), \delta(0), \beta(0), \Omega_1(0), \Omega_2(0), \Omega_3(0), w(0), p_\pi)$. В частности, исследуемому решению отвечает кривая, проходящая через точку $(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$. Проекция этой кривой на плоскость $(p_\pi, \gamma(0))$ изображена штриховой линией на рис. 6.1. На тех участках кривой, где $|p_\pi| \leq 2$, найденное решение удовлетворяет неравенствам

$$|\delta(\tau)| < 1^\circ, \quad |\beta(\tau)| < 0.01^\circ \quad (0 \leq \tau \leq 2\pi).$$

Вычисление мультипликаторов этого решения показало, что при

$$p_{\pi_B} < p < p_{\pi_D} \quad (p_{\pi_B} = -1.556, \quad p_{\pi_D} = 0.889)$$

на интервале кривой, содержащем точку $(0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)^T$, оно асимптотически устойчиво.

Потеря устойчивости на концах интервала обусловлена прохождением пары комплексно сопряженных мультипликаторов через единичную окружность. В точках p_{π_B} и p_{π_D} рождаются двумерные интегральные многообразия системы (6.3), (6.14), связанные с таким прохождением [1, 10]. В общем случае, если в окрестности точки p_{π_B} или p_{π_D} на оси p_π область существования интегрального многообразия совпадает с областью устойчивости периодического решения, то интегральное многообразие неустойчиво, если же указанные области дополняют друг друга, то это многообразие асимптотически устойчиво. Как показало численное интегрирование системы (6.3), (6.14) на длительных интервалах времени, первая из указанных возможностей реализуется в окрестности точки p_{π_B} , вторая — в окрестности точки p_{π_D} .

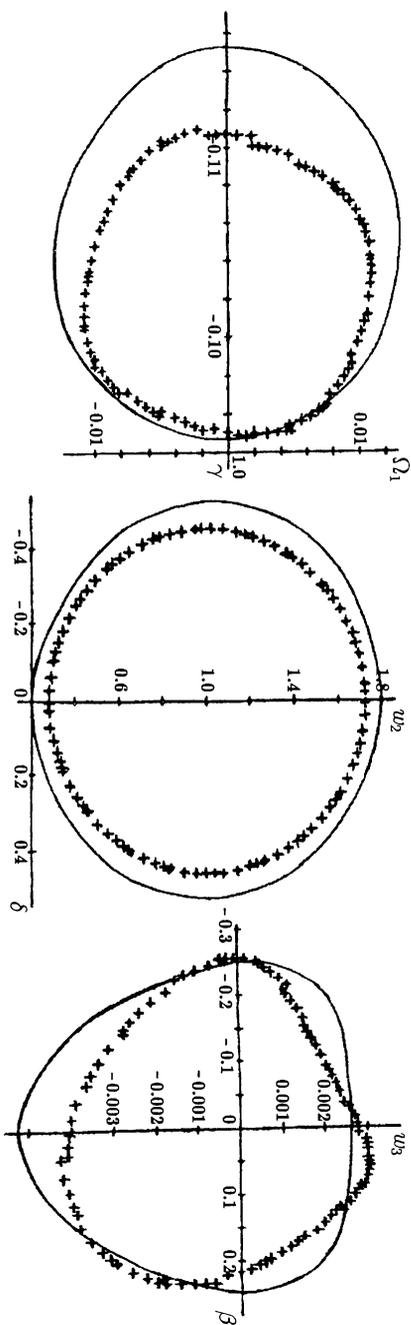


Рис. 6.5.

Стробоскопические картины решения системы (6.3), (6.4):

$$\gamma(0) = -0.09650, \delta(0) = 0.39720, \beta(0) = -0.00155, \Omega_2(0) = 0.63934, \Omega_3(0) = 0.06341, \omega(0) = 0.00125, p_{\pi} = 1.2.$$

Пределный цикл системы (6.3), (6.4):

$$\gamma_0 = -0.10216, \delta_0 = 0.51879, \beta_0 = -0.00239, \Omega_{10} = 0.01263, \omega_0 = 0.00125, \omega_0 = 0.06042, p = 1.21797, T = 4.11363.$$

Результаты численного интегрирования системы (6.3), (6.14) в случае $p_\pi = 1.2$ представлены на рис. 6.5. Здесь в плоскостях (γ, Ω_1) , (δ, w_2) и (β, w_3) крестиками указаны точки $(\gamma(2\pi n), \Omega_1(2\pi n))$, $(\delta(2\pi n), w_2(2\pi n))$, $(\beta(2\pi n), w_3(2\pi n))$ ($n = 0, 1, \dots, 100$) для решения этой системы, начальные условия которого были получены интегрированием последней на длительном промежутке времени (чтобы решение, лежащее вдали от интегрального многообразия, успело достичь его малой окрестности). Такой метод графического представления решений системы (6.3), (6.14) называется *стробоскопическим*, а представленные на рис. 6.5 результаты его применения — *стробоскопическими картинками*. Они наглядно иллюстрируют устойчивое интегральное многообразие данной системы.

Для сравнения на рис. 6.5 сплошными кривыми изображены проекции на те же плоскости предельного цикла автономной системы (6.3), графики функций $\gamma(\tau)$, $\delta(\tau)$ и $\beta(\tau)$ которого приведены на рис. 6.4б.

Механическая интерпретация результатов данного пункта аналогична интерпретации, предложенной в п. 6.5. В частности, в рамках рассмотренной модельной задачи самопроизвольно установившемуся режиму гравитационной ориентации станции «Салют-7» отвечает устойчивое интегральное многообразие системы (6.3), (6.14), рождающееся в точке $p_{\pi D}$.

Глава 7

Влияние непотенциального аэродинамического момента на гравитационную ориентацию вращающегося спутника

7.1. Уравнения вращательного движения спутника

Будем считать, что внешняя оболочка спутника имеет форму эллипсоида, задаваемого в связанной со спутником системе координат $Ox_1x_2x_3$ (см. стр. 10) уравнением

$$\frac{(x_1 - d)^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1.$$

Относительно взаимодействия спутника с атмосферой полагаем: 1) атмосфера неподвижна в абсолютном пространстве, 2) ее плотность вдоль орбиты постоянна, 3) действие атмосферы на спутник сводится к силе сопротивления, приложенной в центре давления и направленной против скорости центра масс спутника. При сделанных предположениях компоненты восстанавливающего аэродинамического момента в системе $Ox_1x_2x_3$ имеют вид (см. (5.9))

$$\begin{aligned} M_1 &= 0, & M_2 &= q\sigma da_{13}, & M_3 &= -q\sigma da_{12}, \\ q &= \rho|\mathbf{v}|^2, & \sigma &= \pi abc \sqrt{\frac{a_{11}^2}{a^2} + \frac{a_{12}^2}{b^2} + \frac{a_{13}^2}{c^2}} \end{aligned} \quad (7.1)$$

(ρ — плотность атмосферы, \mathbf{v} — абсолютная скорость центра масс спутника). Дополнительно к безразмерным переменным и параметрам (см. (1.19), (2.1))

$$\begin{aligned} \tau &= \omega_0 t, & \Omega_i &= \frac{\omega_i}{\omega_0} \quad (i = 1, 2, 3), & \lambda &= \frac{I_1}{I_3}, & \mu &= \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \\ w_2 &= \Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma, & w_3 &= \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma \end{aligned}$$

введем параметры

$$\varepsilon = \frac{\pi q a c d}{I_2 \omega_0^2}, \quad \xi = \frac{b}{a}, \quad \eta = \frac{b}{c}.$$

В уравнениях (2.4) учтем действие на спутник аэродинамического момента:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta, \\ \dot{\Omega}_1 = \mu(\Omega_2 \Omega_3 - 3a_{32}a_{33}), \\ \dot{\delta} = \frac{w_2}{\cos \beta} - 1, \\ \dot{\beta} = w_3, \\ \dot{w}_2 = -(\lambda \Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta)w_3 - 3(1 - \lambda) \cos \beta \cos \delta \sin \delta + \lambda \mu Q_\delta + \varepsilon Q'_\delta, \\ \dot{w}_3 = (\lambda \Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta)w_2 - 3(1 - \lambda) \cos^2 \delta \cos \beta \sin \beta + \lambda \mu Q_\beta + \varepsilon Q'_\beta. \end{cases} \quad (7.2)$$

Здесь Q_δ и Q_β задаются соотношениями (2.3),

$$Q'_\delta = \tilde{\sigma}(\cos \delta + \lambda \mu a_{12} \sin \gamma), \quad Q'_\beta = -\tilde{\sigma}(\sin \delta \sin \beta + \lambda \mu a_{12} \cos \gamma),$$

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{a_{12}^2 + \xi^2 a_{11}^2 + \eta^2 a_{13}^2},$$

причем Ω_2, Ω_3 должны быть выражены через w_2, w_3 .

Правые части уравнений (7.2) не содержат τ и π -периодически зависят от γ . Кроме того, эти уравнения инвариантны относительно преобразования

$$\varepsilon \rightarrow -\varepsilon, \quad \tau \rightarrow -\tau, \quad \gamma \rightarrow -\gamma, \quad \delta \rightarrow -\delta, \quad w_3 \rightarrow -w_3. \quad (7.3)$$

Если в системе (7.2) положить $\varepsilon = 0$, то получим систему (2.4), изучавшуюся в гл. 2, 3. В главе 3 при малом $|\mu|$ построена интегральная поверхность этой системы, состоящая из периодических решений и переходящая при $\mu \rightarrow 0$ в семейство стационарных решений (2.8). Режим, описываемый этой интегральной поверхностью, был назван режимом гравитационной ориентации вращающегося спутника. При малых $|\mu|$ и $|\varepsilon|, \varepsilon \neq 0$ система (7.2) имеет аналогичную интегральную поверхность, переходящую при $|\mu| + |\varepsilon| \rightarrow 0$ в семейство стационарных решений (2.8). Однако принадлежащие этой поверхности решения в общем случае не будут периодическими. Эту поверхность сначала построим в виде формальных рядов по степеням μ и ε методом Боголюбова-Митропольского, а затем приведем результаты ее численного исследования. Решения, лежащие на построенной интегральной поверхности, также можно использовать для реализации режима гравитационной ориентации вращающегося спутника [15], но время существования такого режима будет, вообще говоря, ограниченным. Причина — *непотенциальность аэродинамического момента* (7.1). Система (2.4) допускает обобщенный интеграл энергии

$$E \equiv \frac{1}{2} (\Omega_1^2 - 2\Omega_1 a_{21} + 3a_{31}^2) + \frac{1 + \lambda \mu}{2} (\Omega_2^2 - 2\Omega_2 a_{22} + 3a_{32}^2) + \frac{1}{2} (\Omega_3^2 - 2\Omega_3 a_{23} + 3a_{33}^2) = \text{const}. \quad (7.4)$$

Производная E по времени в силу системы (7.2) имеет вид

$$\dot{E} = -\varepsilon(1 + \lambda \mu) \tilde{\sigma} (w_3 \sin \delta \sin \beta - w_2 \cos \delta \cos \beta) = -\varepsilon(1 + \lambda \mu) \tilde{\sigma} \tilde{a}_{11}.$$

При $\eta \neq 1$ правая часть выражения для \dot{E} не является полной производной, что приводит к изменению энергии вращательного движения спутника и усложнению поведения решений системы (7.2) на интегральной поверхности ориентированного движения.

Если $\mu = 0$, то в силу второго уравнения системы (7.2) $\Omega_1 = \text{const}$ ее первый интеграл. Если к тому же $\varepsilon = 0$, то система (7.2) допускает частное решение

$$\gamma = \frac{4(1 - \lambda)}{4 - 3\lambda} \Omega \tau + \gamma_0, \quad \Omega_1 = \Omega, \quad \delta = 0,$$

$$\beta = \arcsin \frac{\lambda \Omega}{4 - 3\lambda}, \quad w_2 = \cos \beta, \quad w_3 = 0, \quad (7.5)$$

в котором γ_0 и Ω — произвольные постоянные, $|\lambda\Omega| \leq |4 - 3\lambda|$. Это решение *коническая прецессия* (ср. (3.3)) описывает стационарные вращения спутника вокруг оси Ox_1 , неподвижной в орбитальной системе координат. При $0 < \lambda < 1$ оно устойчиво по переменным $\Omega_1, \delta, \beta, w_2, w_3$ (см. главу 3).

7.2. Интегральная поверхность ориентированного движения

Интегральную поверхность системы (7.2), описывающую номинальный невозмущенный режим гравитационной ориентации вращающегося спутника под действием аэродинамического момента, будем строить методом Боголюбова–Митропольского [5] в виде формальных рядов по степеням μ и ε .

Введем вектор $\mathbf{z} = (\delta, \beta, w_2 w_3)^T$. Ряды, представляющие искомую интегральную поверхность и уравнения движения на ней, запишем в виде

$$\begin{cases} \gamma = \bar{\gamma}(\psi, \Omega, \mu, \varepsilon) \equiv \psi + \sum \mu^k \varepsilon^l \gamma_{kl}(\psi, \Omega), \\ \Omega_1 = \bar{\Omega}_1(\psi, \Omega, \mu, \varepsilon) \equiv \Omega + \sum \mu^k \varepsilon^l \Omega_{kl}(\psi, \Omega), \\ \mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}}(\psi, \Omega, \mu, \varepsilon) \equiv \mathbf{z}_0(\Omega) + \sum \mu^k \varepsilon^l \mathbf{z}_{kl}(\psi, \Omega), \end{cases} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= A(\Omega, \mu, \varepsilon) \equiv A_0(\Omega) + \sum \mu^k \varepsilon^l A_{kl}(\psi, \Omega), \\ \dot{\Omega} &= B(\Omega, \mu, \varepsilon) \equiv \sum \mu^k \varepsilon^l B_{kl}(\psi, \Omega). \end{aligned} \quad (7.7)$$

Здесь суммирование производится по целым неотрицательным k и l , удовлетворяющим неравенству $k + l \geq 1$; функции γ_{kl} , Ω_{kl} и \mathbf{z}_{kl} периодически зависят от ψ с периодом π ;

$$\mathbf{z}_0(\Omega) = (0, \beta_0, \cos \beta_0, 0)^T, \quad \beta_0 = \arcsin \frac{\lambda\Omega}{4 - 3\lambda}, \quad A_0(\Omega) = \frac{4(1 - \lambda)}{4 - 3\lambda} \Omega;$$

значения Ω лежат в интервале $|\lambda\Omega| < |4 - 3\lambda|$.

Подставив ряды (7.6), (7.7) в систему (7.2) и приравняв выражения при одинаковых степенях μ и ε в обеих частях получившихся равенств, получим цепочку линейных дифференциальных уравнений относительно коэффициентов этих рядов. Так же, как в п. 3.2, можно доказать что при выполнении условия

$$\begin{aligned} (2kA_0)^4 - d_1(2kA_0)^2 + d_2 &\neq 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \\ d_1 &= 7 - 6\lambda - 9\lambda(1 - \lambda) \sin^2 \beta_0, \quad d_2 = 3(1 - \lambda)(4 - 3\lambda) \cos^2 \beta_0 \end{aligned} \quad (7.8)$$

такая цепочка имеет единственное π -периодическое по ψ решение, удовлетворяющее соотношениям

$$\int_0^\pi \gamma_{kl}(\psi, \Omega) d\psi = 0, \quad \int_0^\pi \Omega_{kl}(\psi, \Omega) d\psi = 0 \quad (k, l = 0, 1, 2, \dots; k + l \geq 1).$$

Далее полагаем, что именно это решение использовано в качестве коэффициентов рядов (7.6) и (7.7).

Условие (7.8) аналогично условию (3.15). Оно означает, что средняя угловая скорость Ω вращения спутника вокруг оси Ox_1 не должна находиться в резонансе с собственными частотами колебаний этой оси по углам δ и β . Такие частоты определяются формулами (3.7). Как показано в п. 3.1, при $|\beta_0| \ll 1$ колебания оси Ox_1 в плоскости орбиты и относительно этой плоскости с точностью до членов порядка $O(\beta_0)$ независимы и соответствующие им частоты приближенно равны $\nu_1 \approx \sqrt{3(1-\lambda)}$ и $\nu_2 \approx \sqrt{4-3\lambda}$. Неравенства (7.8) в таком случае принимают вид

$$2kA_0 \neq \sqrt{3(1-\lambda)}, \quad 2kA_0 \neq \sqrt{4-3\lambda} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

При нарушении одного из неравенств первой группы имеет место резонанс между вращением спутника вокруг оси Ox_1 и колебаниями этой оси в плоскости орбиты (по углу δ). При нарушении одного из неравенств второй группы резонанс между вращением спутника вокруг оси Ox_1 и колебаниями этой оси в направлении, перпендикулярном плоскости орбиты (по углу β). Следуя п. 2.6 и 3.3, резонансы первого типа будем называть δ -резонансами, резонансы второго типа — β -резонансами.

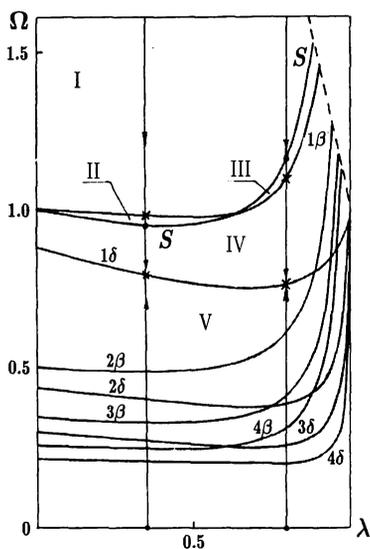


Рис. 7.1.

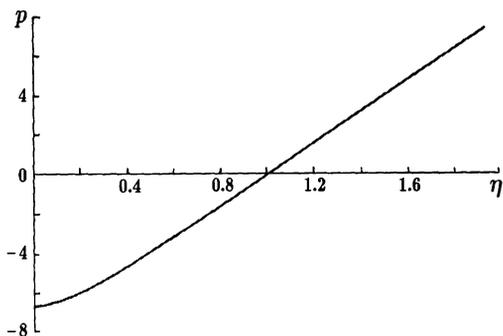


Рис. 7.2.

Кривые в плоскости (λ, Ω) , на которых нарушено условие (7.8), изображены на рис. 7.1 и отмечены символами k_δ и k_β , где k — целое число. Этот рисунок содержит те же кривые, что и рис. 3.1, но там они изображены в плоскости (T, λ) , а на рис. 7.1 — в плоскости (λ, Ω) , где $\Omega = \pi(4-3\lambda)/[2T(1-\lambda)]$. Смысл обозначений на рис. 7.1: при $\lambda \ll 1$ на кривой k_δ (k_β) выполнено соотношение $2kA_0 \approx \sqrt{3(1-\lambda)}$ ($2kA_0 \approx \sqrt{4-3\lambda}$) и имеет место δ (β)-резонанс. Все кривые k_δ заканчиваются в точке $\lambda = \Omega = 1$ и имеют в ней вертикальную

касательную. Все кривые k_β заканчиваются на кривой $\lambda\Omega = 4 - 3\lambda$ (рис. 7.1, штриховая линия), ограничивающей область существования решения (7.5).

На рис. 7.1 изображены только ветви рассматриваемых кривых, лежащие в области $\{(\lambda, \Omega) : 0 < \lambda < 1, \Omega > 0\}$. Ветви этих кривых, лежащих в области $\{(\lambda, \Omega) : 0 < \lambda < 1, \Omega < 0\}$, получаются из указанных зеркальным отражением относительно оси λ .

Следствие инвариантности системы (7.2) относительно преобразования (7.3) справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}(-\psi, \Omega, \mu, -\varepsilon) &= -\bar{\gamma}(\psi, \Omega, \mu, \varepsilon), & \bar{\Omega}_1(-\psi, \Omega, \mu, -\varepsilon) &= -\bar{\Omega}_1(\psi, \Omega, \mu, \varepsilon), \\ \mathbf{D}\bar{\mathbf{z}}(-\psi, \Omega, \mu, -\varepsilon) &= \bar{\mathbf{z}}(\psi, \Omega, \mu, \varepsilon), & \mathbf{D} &= \text{diag}(-1, 1, 1, -1), \\ A(\Omega, \mu, -\varepsilon) &= A(\Omega, \mu, \varepsilon), & B(\Omega, \mu, -\varepsilon) &= -B(\Omega, \mu, \varepsilon).\end{aligned}$$

Отсюда $B(\Omega, \mu, 0) \equiv 0$. Так как при $\mu = 0$ система (7.2) допускает первый интеграл $\Omega_1 = \text{const}$, то $\bar{\Omega}(\psi, \Omega, 0, \varepsilon) \equiv \Omega$, $B(\Omega, 0, \varepsilon) \equiv 0$ ¹⁾. В силу указанных равенств

$$B(\Omega, \mu, \varepsilon) = \mu\varepsilon [B_{11}(\Omega) + O(|\mu| + |\varepsilon|)].$$

Непосредственное вычисление дает

$$B_{11}(\Omega) = \frac{PR}{Q}(1 - \lambda)(4 - 3\lambda)(3\lambda^2 + 4\lambda - 16)\Omega \cos \beta_0, \quad (7.9)$$

$$P = \frac{32}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 x + \eta^2 \cos^2 x} \cos 2x \, dx,$$

$$R = \Omega^2 + \frac{(4 - 3\lambda)^2(9\lambda^2 - 38\lambda + 32)}{32(1 - \lambda)^2(3\lambda^2 + 4\lambda - 16)},$$

$$Q = 64(1 - \lambda)^2(9\lambda^2 - 64\lambda + 64)\Omega^4 + \\ + (4 - 3\lambda)^2(9\lambda^3 - 396\lambda^2 + 832\lambda - 448)\Omega^2 + 3(4 - 3\lambda)^5.$$

График функции $P = P(\eta)$ изображен на рис. 7.2. Эта функция обращается в нуль только в точке $\eta = 1$. При $\lambda \ll 1$ формула (7.9) принимает вид

$$B_{11}(\Omega) = \frac{P\left(1 - \frac{29}{4}\lambda\right)\left(\Omega^2 - 1 + \frac{7}{16}\lambda\right)\Omega}{256\left(\Omega^2 - 1 + \frac{1}{4}\lambda\right)\left(\Omega^2 - \frac{3}{4} + \frac{3}{8}\lambda\right)} + O(\lambda^2).$$

Эволюция квазистационарных вращений спутника описывается вторым уравнением (7.7). Рассмотрим соответствующее укороченное уравнение

$$\dot{\Omega} = \mu\varepsilon B_{11}(\Omega). \quad (7.10)$$

В силу нечетности его правой части ограничимся исследованием случая $\Omega \geq 0$. На рис. 7.1 римскими цифрами I–V указаны области плоскости $\{\lambda, \Omega\}$,

¹⁾Как установлено в п. 3.3 и 7.5, при $\mu\varepsilon = 0$ ряды (7.6), (7.7) сходятся и задают решения, описывающие периодические вращения спутника вокруг оси Ox_1 . В случае $\eta = 1$ эти ряды сходятся и при $\mu\varepsilon \neq 0$. Доказательство последнего утверждения основано на том, что при $\eta = 1$ аэродинамический момент (7.1) потенциален. В случае $\eta = 1$ также имеем $B(\Omega, \mu, \varepsilon) \equiv 0$.

в которых при $\eta \neq 1$ функция $B_{11}(\Omega)$ сохраняет знак. Границами этих областей служат резонансные кривые 1_δ , 1_β , кривая S , кривая $\lambda\Omega = 4 - 3\lambda$ и прямые $\lambda\Omega = 0$. На кривых 1_δ и 1_β знаменатель Q в (7.9) обращается в нуль и функция $B_{11}(\Omega)$ не определена; на прямой $\Omega = 0$ и кривой S выполнено равенство $B_{11}(\Omega) = 0$.

Примеры фазовых портретов уравнения (7.10) для $\eta \neq 1$ и различных значений λ приведены на рис. 7.1 (вертикальные прямые). Решения этого уравнения являются либо постоянными, либо строго монотонными функциями времени. Положения равновесия уравнения (7.10) лежат на кривой S и прямой $\Omega = 0$; предельные точки строго монотонных решений, отличные от положений равновесия, принадлежат кривым 1_δ , 1_β и $\lambda\Omega = 4 - 3\lambda$. На рис. 7.1 направление движения по фазовым кривым уравнения (7.10) соответствует случаю $\mu\epsilon(\eta - 1) > 0$. При $\mu\epsilon(\eta - 1) < 0$ направление противоположно.

Кривые S и 1_β пересекаются в точках с абсциссами $\lambda = 0$ и $\lambda = \lambda_* \approx 0.65$ (см. рис. 7.1). Ограничимся анализом практически интересного случая $0 < \lambda < \lambda_*$. Тогда при $\mu\epsilon(\eta - 1) > 0$ точки кривых 1_δ и 1_β являются единственными ω -предельными точками траекторий уравнения (7.10), отличных от положений равновесия. Следовательно, при указанных значениях параметров спутника происходит захват его квазистационарных вращений в резонанс с колебаниями оси Ox_1 относительно оси Ox_3 . Ниже показано, что такой захват вызывает разрушение режима гравитационной ориентации.

При $0 < \lambda < \lambda_*$ и $\mu\epsilon(\eta - 1) < 0$ ω -предельными точками траекторий уравнения (7.10) являются положения равновесия $\Omega = 0$ (для траекторий, изображенных отрезками вертикальных прямых в области V на рис. 7.1), положения равновесия, лежащие на кривой S (для траекторий из областей II и IV), и точки кривой $\lambda\Omega = 4 - 3\lambda$ (для траекторий из области I^1). Соответственно, квазистационарные вращения спутника со временем либо тормозятся, либо переходят в периодическое вращение со средней угловой скоростью $\Omega = 1$, либо ускоряются, причем ось собственного вращения спутника Ox_1 через некоторое время занимает положение, близкое оси Ox_2 .

Проведенный анализ квазистационарных вращений спутника основан на укороченном уравнении (7.10) и, следовательно, является неполным. Например, учет в укороченном уравнении членов более высокого порядка по μ и ϵ может привести к обнаружению новых резонансных эффектов. Тем не менее ясно, что время существования режима гравитационной ориентации вращающегося спутника при наличии возмущающего действия непотенциального восстанавливающего аэродинамического момента в общем случае конечно. Это время определяется начальным значением угловой скорости квазистационарного вращения и при удачном выборе начального значения может быть достаточно большим. Проверка результатов качественного анализа укорочен-

¹Кривая $\lambda\Omega = 4 - 3\lambda$ достигается этими траекториями за конечное время, поэтому использование термина « ω -предельная точка» здесь некорректно и вызвано соображениями удобства.

ного уравнения (7.10) производилась с помощью численного интегрирования системы (7.2) различными методами.

7.3. Двухциклового метод вычисления квазистационарных вращений

В [6] приведен пример численного исследования режима гравитационной ориентации вращающегося спутника будущей Международной космической станции на начальном этапе ее полета. Реализация этого режима описана в [7]. Для численного построения квазистационарных вращений спутника на больших интервалах времени использовался двухциклового метод интегрирования системы (7.2), аналогичный методу, предложенному в [11]. Ниже выводятся основные уравнения этого метода.

В системе (7.2) за независимую переменную примем угол γ . Введя вектор $\mathbf{x} = (\Omega_1, \delta, \beta, w_2, w_3)^\top$ и определив нужным образом функцию $\mathbf{F}(\gamma, \mathbf{x}, \mu, \varepsilon) \in \mathbb{R}^5$, запишем эту систему в виде

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\gamma} = \mathbf{F}(\gamma, \mathbf{x}, \mu, \varepsilon), \quad (7.11)$$

$$\frac{d\tau}{d\gamma} = \frac{1}{\Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta}. \quad (7.12)$$

Независимая переменная γ входит в выписанные уравнения π -периодически, причем первое уравнение не содержит τ и может быть проинтегрировано отдельно от второго уравнения.

Интегральной поверхности (7.6), (7.7) системы (7.2) соответствует интегральная поверхность системы (7.11)

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{h}(\gamma, \Omega, \mu, \varepsilon) \equiv \mathbf{h}_0(\Omega) + \sum \mu^k \varepsilon^l \mathbf{h}_{kl}(\gamma, \Omega), \\ \frac{d\Omega}{d\gamma} &= H(\Omega, \mu, \varepsilon) \equiv \sum \mu^k \varepsilon^l H_{kl}(\Omega), \\ \mathbf{h}_0(\Omega) &= (\Omega, 0, \beta_0, \cos \beta_0, 0)^\top, \quad \beta_0 = \arcsin \frac{\lambda \Omega}{4 - 3\lambda}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Здесь суммирование производится по целым неотрицательным k и l , $k+l \geq 1$; функции \mathbf{h} и H удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\gamma + \pi, \Omega, \mu, \varepsilon) &= \mathbf{h}(\gamma, \Omega, \mu, \varepsilon), \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathbf{e}_1^\top \mathbf{h}(\gamma, \Omega, \mu, \varepsilon) d\gamma &= \Omega, \quad \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0, 0)^\top, \\ \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \gamma} + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \Omega} H &= \mathbf{F}(\gamma, \mathbf{h}, \mu, \varepsilon). \end{aligned}$$

Первые несколько членов рядов (7.13) можно найти следующим образом. Последнее уравнение запишем в виде

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \gamma} + \left(\frac{\partial \mathbf{h}_0}{\partial \Omega} + O(|\mu| + |\varepsilon|) \right) H = \mathbf{F}(\gamma, \mathbf{h}, \mu, \varepsilon).$$

Отбросив в его левой части слагаемое $H \cdot O(|\mu| + |\varepsilon|)$ и заменив обозначения $(\mathbf{h}, H) \mapsto (\mathbf{x}, p)$, получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}}{d\gamma} = \mathbf{F}(\gamma, \mathbf{x}, \mu, \varepsilon) - \frac{\partial \mathbf{h}_0(\Omega)}{\partial \Omega} p, \quad (7.14)$$

в которое Ω и p входят как параметры. Для этого уравнения рассмотрим краевую задачу

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}(\pi), \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathbf{e}_1^\top \mathbf{x} d\gamma = \Omega. \quad (7.15)$$

В (7.14), (7.15) \mathbf{x} — неизвестная функция, p — неизвестная постоянная, Ω — произвольная постоянная, $|\lambda\Omega| < |4 - 3\lambda|$. Задачу (7.14), (7.15) будем решать методом Пуанкаре [12].

При $\mu = \varepsilon = 0$ эта задача имеет решение $\mathbf{x} = \mathbf{h}_0(\Omega)$, $p = 0$. Линеаризация соотношений (7.14), (7.15) в окрестности данного решения приводит к системе

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta\mathbf{x}}{d\gamma} &= \mathbf{C}(\Omega)\Delta\mathbf{x} - \frac{\partial \mathbf{h}_0(\Omega)}{\partial \Omega} \Delta p, \quad \mathbf{C}(\Omega) = \frac{\partial \mathbf{F}(\gamma, \mathbf{h}_0(\Omega), 0, 0)}{\partial \mathbf{x}}, \\ \Delta\mathbf{x}(0) &= \Delta\mathbf{x}(\pi), \quad \int_0^\pi \mathbf{e}_1^\top \Delta\mathbf{x} d\gamma = 0, \end{aligned} \quad (7.16)$$

первое уравнение которой автономно. Характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{C}(\Omega)$ имеет вид

$$\varkappa [(\varkappa A_0)^4 + d_1(\varkappa A_0)^2 + d_2] = 0,$$

где A_0, d_1, d_2 — те же, что и в (7.8), и

$$\mathbf{C}(\Omega) \frac{\partial \mathbf{h}_0(\Omega)}{\partial \Omega} = 0.$$

Отсюда следует, что условие отсутствия у задачи (7.16) нетривиальных решений выражается неравенствами (7.8). Если эти неравенства выполнены, то при достаточно малых $|\mu|$ и $|\varepsilon|$ задача (7.14), (7.15) имеет единственное решение $\mathbf{x} = \mathbf{h}_*(\gamma, \Omega, \mu, \varepsilon)$, $p = H_*(\Omega, \mu, \varepsilon)$, аналитически зависящее от μ, ε и удовлетворяющее соотношениям $\mathbf{h}_*(\gamma, \Omega, 0, 0) = \mathbf{h}_0(\Omega)$, $H_*(\Omega, 0, 0) = 0$.

Сравним ряды (7.13) с аналогичными рядами, представляющими функции \mathbf{h}_* и H_* . Легко установить, что если ряд для H_* начинается с членов порядка m ($m \geq 1$), то разность $\mathbf{h} - \mathbf{h}_*$ имеет порядок $m + 1$, а разность $H - H_*$ — порядок $m + 2$. Простые, но громоздкие вычисления дают

$$H_*(\Omega, \mu, \varepsilon) = \mu\varepsilon \left(\frac{4 - 3\lambda}{4\Omega(1 - \lambda)} B_{11}(\Omega) + O(|\mu| + |\varepsilon|) \right),$$

где $B_{11}(\Omega)$ имеет вид (7.9). В данном случае $m = 2$.

Краевая задача (7.14), (7.15) позволяет не только вычислить первые несколько членов рядов (7.13), но и найти периодические решения системы (7.11). Рассмотрим уравнение относительно Ω

$$H_*(\Omega, \mu, \varepsilon) = 0. \quad (7.17)$$

В случае $\mu\varepsilon\Omega \neq 0$ его можно привести к виду $B_{11}(\Omega) + O(|\mu| + |\varepsilon|) = 0$. Пусть для $\Omega = \Omega_0$ выполнены соотношения

$$B_{11}(\Omega_0) = 0, \quad \frac{dB_{11}(\Omega_0)}{d\Omega} \neq 0.$$

Тогда по теореме о неявной функции при достаточно малых $|\mu|$ и $|\varepsilon|$ уравнение (7.17) имеет единственный корень $\bar{\Omega}(\mu, \varepsilon)$, аналитически зависящий от μ, ε и удовлетворяющий условию $\bar{\Omega}(0, 0) = \Omega_0$. Ясно, что решение системы (7.11) $\mathbf{x} = \mathbf{h}_*(\gamma, \bar{\Omega}(\mu, \varepsilon), \mu, \varepsilon)$ — π -периодическое. Этому решению отвечает однопараметрическое семейство решений системы (7.2), отличающихся друг от друга постоянным сдвигом по τ и описывающих периодические вращения спутника вокруг оси Ox_1 . Как следует из результатов п. 7.2, при $\eta \neq 1$ уравнение $B_{11}(\Omega) = 0$ имеет единственный корень, зависимость которого от λ задается участками кривой S (см. рис. 7.1) при $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq \lambda_*$. Для этого корня $dB_{11}(\Omega_0)/d\Omega \neq 0$. Описанный метод исследования периодических решений системы (7.11) по существу совпадает с методом Хёльдера [26, 36].

Близость функций \mathbf{h}, H и \mathbf{h}_*, H_* позволяет построить эффективный алгоритм вычисления решений, лежащих на интегральной поверхности (7.13). Пусть $\Omega(\gamma)$ решение уравнения (7.13) относительно Ω , $\tau(\gamma)$ решение уравнения (7.12) при $\mathbf{x} = \mathbf{h}(\gamma, \Omega(\gamma), \mu, \varepsilon)$. Функции $\Omega(\gamma)$ и $\tau(\gamma)$ приближенно удовлетворяют системе

$$\frac{d\Omega}{d\gamma} = H_*(\Omega, \mu, \varepsilon), \quad \frac{d\tau}{d\gamma} = G_*(\Omega, \mu, \varepsilon) \equiv \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\gamma}{\Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{h}_*(\gamma, \Omega, \mu, \varepsilon)}. \quad (7.18)$$

Погрешность первого из выписанных уравнений — $O(\mu\varepsilon(\mu^2 + \varepsilon^2))$, погрешность второго уравнения — $O(\mu^2 + \varepsilon^2)$. Вследствие оценок

$$H_*(\Omega, \mu, \varepsilon) = O(\mu\varepsilon), \quad G_*(\Omega, \mu, \varepsilon) - \frac{4 - 3\lambda}{4\Omega(1 - \lambda)} = O(|\mu| + |\varepsilon|)$$

численное интегрирование системы (7.18) можно проводить с большим ($\sim 500\pi$) шагом. Процесс интегрирования этой системы представляет собой внешний цикл двухциклового метода. Внутренний цикл состоит в решении краевой задачи (7.14), (7.15) и вычислении правых частей уравнений (7.18).

7.4. Результаты расчетов

Численное решение краевой задачи (7.14), (7.15) проводилось следующим образом. Пусть $\bar{\mathbf{x}}(\gamma, \mathbf{a}, p, \Omega, \mu, \varepsilon)$ — решение системы (7.14) с начальным условием $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$. Тогда задачу (7.14), (7.15) можно свести к уравнениям

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1(\mathbf{a}, p, \Omega, \mu, \varepsilon) &\equiv \bar{\mathbf{x}}(\pi, \mathbf{a}, p, \Omega, \mu, \varepsilon) - \mathbf{a} = 0, \\ \mathbf{g}_2(\mathbf{a}, p, \Omega, \mu, \varepsilon) &\equiv \int_0^\pi \mathbf{e}_1^\top \mathbf{x}(\gamma, \mathbf{a}, p, \Omega, \mu, \varepsilon) d\gamma - \Omega = 0. \end{aligned} \quad (7.19)$$

При заданных значениях Ω, μ и ε эти уравнения образуют замкнутую систему относительно неизвестных \mathbf{a} и p . Система решалась методом Нью-

тона, первое приближение неизвестных бралось в виде $\mathbf{a} = \mathbf{h}_0(\Omega)$, $p = 0$. Для вычисления функций $\mathbf{g}_i(\mathbf{a}, p, \Omega, \mu, \varepsilon)$ ($i = 1, 2$) на отрезке $0 \leq \gamma \leq \pi$ совместно интегрировались система (7.14) и уравнение $\dot{I} = \mathbf{e}_1^T \mathbf{x}$. Вместо производных $\partial \mathbf{g}_i(\mathbf{a}, p, \Omega, \mu, \varepsilon) / \partial q$ использовались производные $\partial \mathbf{g}_i(\mathbf{h}_0(\Omega), 0, \Omega, 0, 0) / \partial q$ ($i = 1, 2$; $q = \mathbf{a}, p$), которые рассчитывались по конечным формулам. Такая замена не повлияла на сходимость итерационного процесса и существенно уменьшила общее время решения краевой задачи.

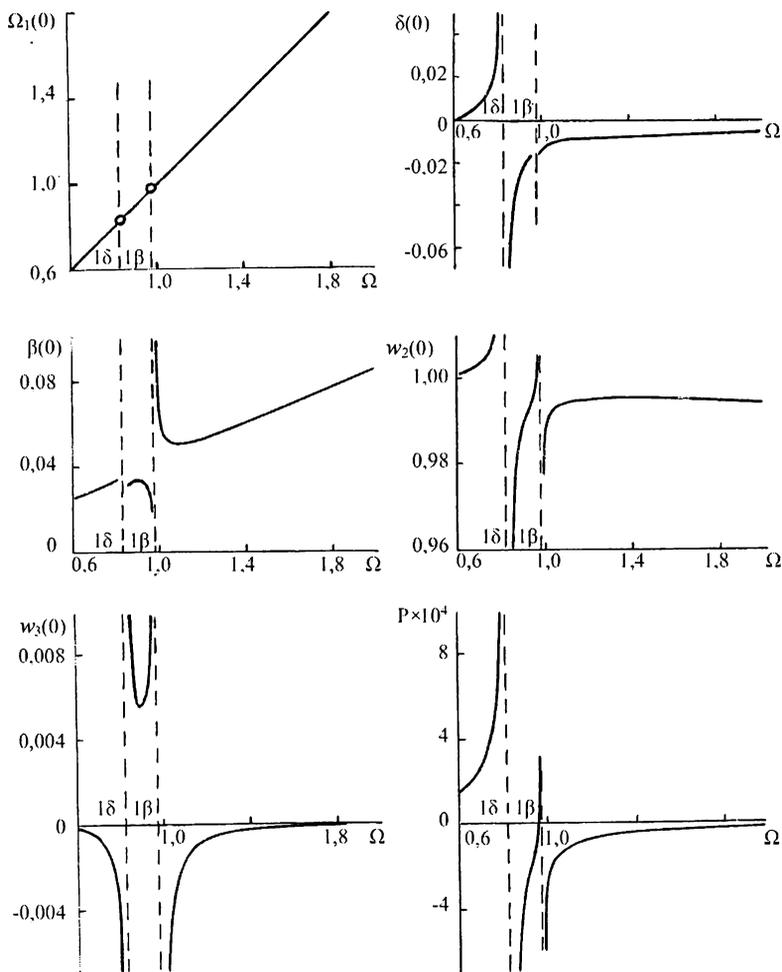


Рис. 7.3.

Для $\lambda = 0.15$, $\mu = -\varepsilon = 0.02$, $\xi = \eta = 0.1$ зависимость решений системы (7.19) от Ω представлена на рис. 7.3. Кривые на этом рисунке состоят из отдельных непрерывных кусков. Абсциссы точек разрыва между кусками

приближенно равны таким значениям Ω , при которых для данного λ нарушается условие (7.8). Именно нарушение этого условия, то есть резонансы между колебаниями оси Ox_1 и вращением спутника вокруг нее, обуславливают возникновение разрывов. На рис. 7.3 каждый разрыв отмечен символом k_δ и k_β , где k — целое число. Этот символ указывает номер соответствующего резонанса и его тип при $\lambda \ll 1$.

Найденные решения краевой задачи (7.14), (7.15) позволяют привести пример периодического вращения спутника вокруг оси Ox_1 . Как показывает анализ функции $p = p(\Omega)$ (см. рис. 7.3) уравнение (7.17) имеет корень $\Omega = 0.9706$. Отвечающее этому корню вращательное периодическое решение системы (7.2) приведено на рис. 7.4. Была исследована устойчивость

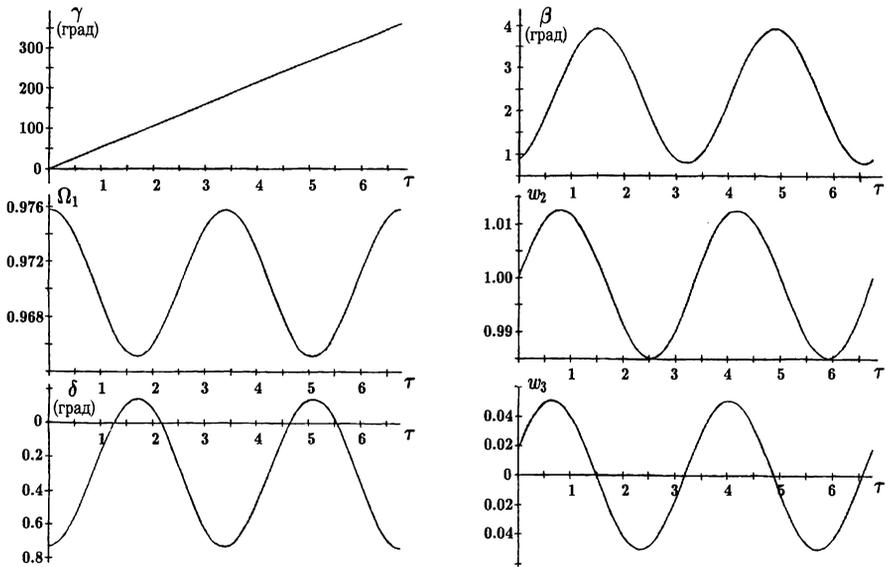


Рис. 7.4. Периодическое решение

$$\lambda = 0.15, \mu = 0.02, \varepsilon = -0.02, \xi = \eta = 0.1, T = 6.76,$$

$$\gamma(0) = 0, \Omega_1(0) = 0.9757, \delta(0) = -0.01285, \beta(0) = 0.01550, w_2(0) = 1.00006, w_3(0) = 1.01819.$$

в линейном приближении найденного решения. Один из мультипликаторов соответствующей линеаризованной системы оказался равным 1.024. Таким образом, это решение экспоненциально неустойчиво.

Опишем результаты интегрирования системы (7.18). В случае $\lambda = 0.15$, $\mu = -\varepsilon = 0.02$, $\xi = \eta = 0.1$ ($\mu\varepsilon(\eta - 1) > 0$) некоторые ее траектории в плоскости $(N = \tau/2\pi, \Omega)$ изображены сплошными линиями на рис. 7.5. Остальные траектории получаются из указанных параллельным переносом вдоль оси N

(система (7.18) инвариантна относительно преобразования $\tau \rightarrow \tau + \text{const}$). Эти траектории задают зависимость средней угловой скорости Ω спутника от числа его оборотов N вокруг Земли. Горизонтальные штриховые линии на рис. 7.5 соответствуют резонансам (ср. рис. 7.3), сплошная горизонтальная линия отвечает стационарному решению первого уравнения (7.18). Как следует из рис. 7.5, вдоль всех траекторий системы (7.18), кроме стационарной, средняя угловая скорость Ω с увеличением N приближается к одному из резонансных значений, то есть происходит захват квазистационарных вращений в резонанс с колебаниями оси Ox_1 . Описанное поведение траекторий системы (7.18) находится в полном соответствии с поведением решений укороченного уравнения (7.10). Соответствие имеет место лишь при $\Omega \geq 0.5$. При $0 < \Omega \leq 0.5$ оно нарушается вследствие резонансов второго и более высоких порядков, проявляющихся в системе (7.18). Поскольку эта система является приближенной, исследование с ее помощью резонансных эффектов, проявляющихся в высших приближениях, требует известной осторожности. Здесь такие эффекты не рассматриваются.

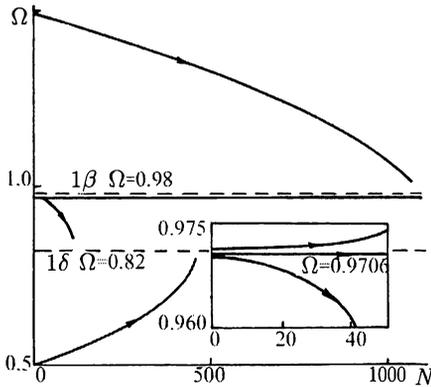


Рис. 7.5.

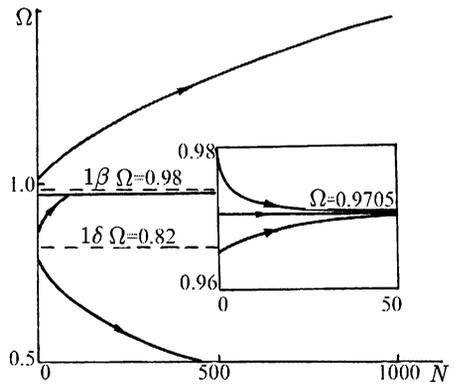
 $\lambda=0.15, \mu=0.02, \varepsilon=-0.02, \xi=\eta=0.1.$


Рис. 7.6.

 $\lambda=0.15, \mu=\varepsilon=0.02, \xi=\eta=0.1.$

Для $\lambda=0.15, \mu=\varepsilon=0.02, \xi=\eta=0.1$ (случай $\mu\varepsilon(\eta-1) > 0$) примеры траекторий системы (7.18) приведены на рис. 7.6. Этот рисунок аналогичен рис. 7.5. Если начальное значение средней угловой скорости спутника $\Omega \geq 0.98$, то спутник раскручивается. При $0.9705 \leq \Omega \leq 0.98$ и $0.82 \leq \Omega \leq 0.9705$ квазистационарное вращение спутника стремится к его периодическому вращению, которое, как показал линейный анализ, слабо экспоненциально неустойчиво. При $0.5 \leq \Omega \leq 0.82$ спутник тормозится и захватывается в резонанс 2β (ср. рис. 7.1).

Из эффектов, представленных на рис. 7.6, весьма интересными являются раскрутка спутника при $\Omega \gtrsim 0.98$ и вызываемое ею разрушение режима

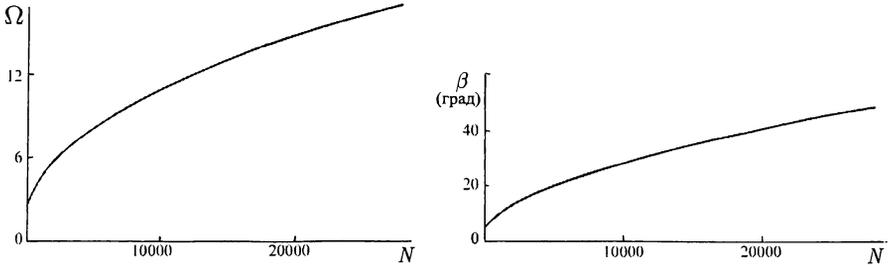


Рис. 7.7.

гравитационной ориентации. Для того, чтобы сделать этот эффект более наглядным, на рис. 7.7 приведена траектория системы (7.18) при $\lambda = 0.15$, $\mu = 0.02$, $\varepsilon = 0.4$ и $\xi = \eta = 0.1$. Здесь же для этой траектории указана зависимость угла $\beta = \arcsin(\lambda\Omega/(4 - 3\lambda))$ от N . Согласно данным [32], по-видимому, именно такой механизм лежал в основе разрушения режима гравитационной ориентации американской орбитальной станции «Скайлэб» в 1974–1977 гг.

7.5. Устойчивость интегральной поверхности ориентированного движения

Как показали расчеты, в рассматриваемой задаче режим гравитационной ориентации разрушается при достижении одного из резонансов (7.8). При движении вне резонансных зон ошибки выполнения соотношений (7.6) остаются малыми. На самом деле такие ошибки растут, но очень медленно. Достижение резонансов происходит гораздо быстрее. Чтобы оценить поведение решений системы (7.2) в окрестности интегральной поверхности (7.6), рассмотрим эту систему при $\mu = 0$. В этом случае в силу ее второго уравнения $\Omega_1 = \text{const}$ и в остальные уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\delta} &= \frac{w_2}{\cos \beta} - 1, \quad \dot{\beta} = w_3, \\ \dot{w}_2 &= -(\lambda\Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta)w_3 - 3(1 - \lambda) \cos \delta \sin \delta \cos \beta + \varepsilon \sigma \cos \delta, \\ \dot{w}_3 &= (\lambda\Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta)w_2 - 3(1 - \lambda) \cos^2 \delta \sin \delta \cos \beta - \varepsilon \sigma \sin \delta \sin \beta \end{aligned} \quad (7.20)$$

эта переменная входит как параметр. Система (7.20) наследует используемые ниже свойства системы (7.2) выдерживать преобразование переменных (7.3) и π -периодичность по углу γ . Решения вида (7.6), (7.7) при $\mu = 0$ задают семейство периодических решений системы (7.20), при этом ряды (7.6) и первый ряд (7.7) (теперь это ряды только по ε) сходятся. Чтобы доказать эти

утверждения, рассмотрим для системы (7.20) краевую задачу

$$\begin{aligned} \gamma(0) = 0, \quad \gamma\left(\frac{T}{2}\right) = \pi, \quad \delta(0) = \delta\left(\frac{T}{2}\right), \quad \beta(0) = \beta\left(\frac{T}{2}\right), \\ w_2(0) = w_2\left(\frac{T}{2}\right), \quad w_3(0) = w_3\left(\frac{T}{2}\right). \end{aligned} \quad (7.21)$$

В решениях этой краевой задачи переменные δ , β , w_2 и w_3 периодически зависят от τ с периодом $T/2$, а угол γ удовлетворяет соотношению

$$\gamma\left(\tau + \frac{T}{2}\right) = \gamma(\tau) + \pi.$$

Решения задачи (7.20), (7.21) исследуем методом Пуанкаре. Если $\varepsilon = 0$ и $2|T| > \pi\lambda/(1-\lambda)$, то эта задача имеет решение, задаваемое формулами (3.3) при $\gamma_0 = 0$, $\Omega = \pi(4-3\lambda)/[2T(1-\lambda)]$. Указанное решение примем за порождающее, период T фиксируем и будем искать Ω_1 в функции T и ε наряду с неизвестными начальными условиями в (7.21). Возникающие в методе Пуанкаре уравнения в вариациях для порождающего решения в данном случае имеют вид (3.4). Надо проверить наличие или отсутствие у этих уравнений нетривиального решения, удовлетворяющего условиям

$$\begin{aligned} \Delta\gamma(0) = \Delta\gamma\left(\frac{T}{2}\right) = 0, \quad \Delta\delta(0) = \Delta\delta\left(\frac{T}{2}\right), \quad \Delta\beta(0) = \Delta\beta\left(\frac{T}{2}\right), \\ \Delta w_2(0) = \Delta w_2\left(\frac{T}{2}\right), \quad \Delta w_3(0) = \Delta w_3\left(\frac{T}{2}\right). \end{aligned}$$

Можно показать (см. п. 3.3), что при $0 \leq \lambda < 2|T|/(\pi + 2|T|)$ и выполнении условий (3.27) таких нетривиальных решений не существует. Следовательно, по теореме Пуанкаре [12] исходная задача (7.20), (7.21) имеет при достаточно малом $|\varepsilon|$ единственное решение

$$\begin{aligned} \Omega_1 = \Omega_1^*(T, \varepsilon), \quad \gamma = \gamma^*(\tau, T, \varepsilon), \quad \delta = \delta^*(\tau, T, \varepsilon), \\ \beta = \beta^*(\tau, T, \varepsilon), \quad w_2 = w_2^*(\tau, T, \varepsilon), \quad w_3 = w_3^*(\tau, T, \varepsilon), \end{aligned} \quad (7.22)$$

аналитически зависящее от ε и совпадающее в точке $\varepsilon = 0$ с порождающим решением.

Следствие инвариантности системы (7.20) относительно преобразования (7.3) справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \Omega_1^*(T, -\varepsilon) = \Omega_1^*(T, \varepsilon), \quad \gamma^*(-\tau, T, \varepsilon) = -\gamma^*(\tau, T, \varepsilon), \\ \delta^*(-\tau, T, \varepsilon) = -\delta^*(\tau, T, \varepsilon), \quad \beta^*(-\tau, T, \varepsilon) = \beta^*(\tau, T, \varepsilon), \\ w_2^*(-\tau, T, \varepsilon) = w_2^*(\tau, T, \varepsilon), \quad w_3^*(-\tau, T, \varepsilon) = -w_3^*(\tau, T, \varepsilon). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Равенство $\Omega_1 = \Omega_1^*(T, \varepsilon)$ разрешим относительно T , поскольку производная $\partial\Omega_1^*(T, 0)/\partial T \neq 0$ (она вычисляется на порождающем решении). Опустив индекс у Ω_1 , запишем результат в виде $T = T^*(\Omega, \varepsilon)$. Подставим эту формулу и формулу $\psi = 2\pi/T$ в остальные соотношения (7.22). Полученные таким образом выражения представляются рядами по степеням ε вида (7.6), (7.7) при $\mu = 0$. В частности, $\Omega_{kl}(\psi, \Omega) \equiv 0$, $\gamma_{0,l}(\psi, \Omega)$ — нечетные функции ψ . Отсюда в силу единственности таких рядов следует их сходимость.

Численное исследование решений краевой задачи (7.20), (7.21) проведено в [14]. Вычисления выполнялись при $\lambda = \xi = \eta = 0.1$, $\varepsilon = 0.5$ по схеме, описанной в главах 2, 3. Результаты представлены на рис. 7.8–7.10. На рис. 7.8, 7.9 приведена зависимость от T параметра Ω_1 и начальных условий $\delta(0)$, $\beta(0)$, $w_2(0)$, $w_3(0)$. Графики этой зависимости на рис. 7.8 представляют собой совокупность непрерывных кусков, разделенных резонансными зонами. Локализация зон на оси T согласуется с точками нарушений неравенств (3.27) в случае $\lambda = 0.1$. Как и в главах 2, 3, здесь можно рассматривать δ - и β -резонансы. Рисунок 7.9 в увеличенном масштабе воспроизводит резонансные зоны рисунка 7.8 при $T \approx 6.7$ (β -резонанс) и $T \approx 8.8$ (δ -резонанс).

Графики функций $\gamma(\tau)$, $\delta(\tau)$ и $\beta(\tau)$, $0 \leq \tau \leq T$ трех решений краевой задачи (7.20), (7.21) приведены на рис. 7.10. Эти графики иллюстрируют решения в нерезонансном (рис. 7.10а) и резонансном (рис. 7.10б, в) случаях. На рис. 7.10б показан δ -резонанс, на рис. 7.10в β -резонанс.

В рамках задачи об ошибке выполнения соотношений (7.6) при численном исследовании ориентированных движений интересны результаты исследования устойчивости решения (7.22). Исследование устойчивости в линейном приближении этого решения приводит к анализу мультипликаторов соответствующей системы уравнений в вариациях. Эту систему с использованием векторно-матричных обозначений запишем в виде

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}(\tau, \varepsilon)\mathbf{z}, \quad \mathbf{z} = (\Delta\gamma, \Delta\delta, \Delta\beta, \Delta w_2, \Delta w_3)^T. \quad (7.24)$$

Матрица $\mathbf{A}(\tau, \varepsilon)$ периодически зависит от τ с периодом $T/2$, и ее характеристическое уравнение можно представить следующим образом

$$\left| \mathbf{Z}\left(\frac{T}{2}, \varepsilon\right) - \rho \mathbf{E} \right| = 0. \quad (7.25)$$

Здесь \mathbf{E} — единичная матрица порядка 5, $\mathbf{Z}(\tau, \varepsilon)$ — решение начальной задачи

$$\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{A}(\tau, \varepsilon)\mathbf{Z}, \quad \mathbf{Z}(0) = 0.$$

В силу соотношений (7.23) и свойства системы (7.20) выдерживать преобразование (7.3) справедливо равенство

$$\mathbf{S}\mathbf{A}(-\tau, -\varepsilon) = -\mathbf{A}(\tau, \varepsilon)\mathbf{S}, \quad \mathbf{S} = \text{diag}(-1, -1, 1, 1, -1).$$

Отсюда $\mathbf{S}\mathbf{Z}(-\tau, \varepsilon) = \mathbf{Z}(\tau, \varepsilon)\mathbf{S}$ и так как $\mathbf{Z}(-T/2, \varepsilon) = \mathbf{Z}^{-1}(T/2, \varepsilon)$, то

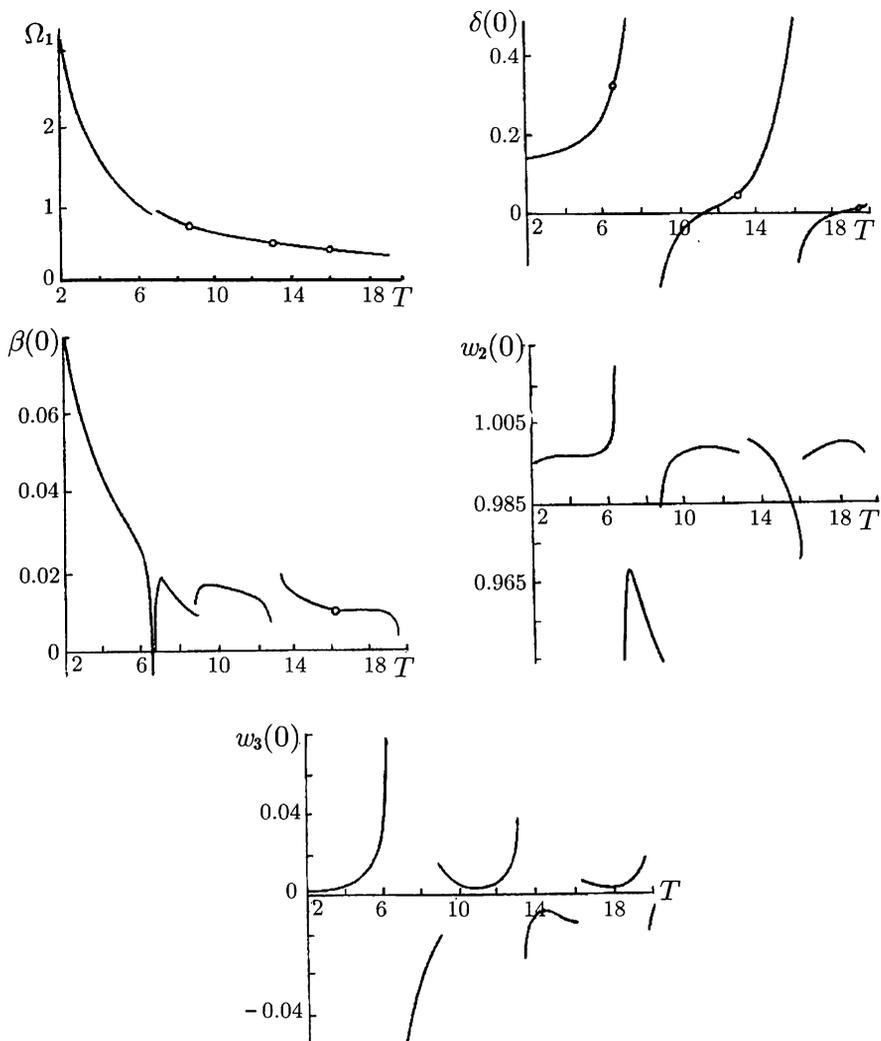
$$\mathbf{Z}\left(\frac{T}{2}, -\varepsilon\right) = \mathbf{S}\mathbf{Z}^{-1}\left(\frac{T}{2}, \varepsilon\right)\mathbf{S}. \quad (7.26)$$

След матрицы $\mathbf{A}(\tau, \varepsilon)$ можно представить в виде полной производной $T/2$ -периодической функции:

$$\text{tr}\mathbf{A}(\tau, \varepsilon) = -\frac{d}{d\tau} \ln \cos \beta^*(\tau, T, \varepsilon),$$

поэтому по теореме Лиувилля

$$\left| \mathbf{Z}\left(\frac{T}{2}, \varepsilon\right) \right| = \exp\left(\int_0^{T/2} \text{tr}\mathbf{A}(\tau, \varepsilon) d\tau\right) = \exp\left(\ln \frac{\cos \beta^*(0, T, \varepsilon)}{\cos \beta^*(T/2, T, \varepsilon)}\right) = 1.$$

Рис. 7.8. Зависимость начальных условий периодических решений от периода T .

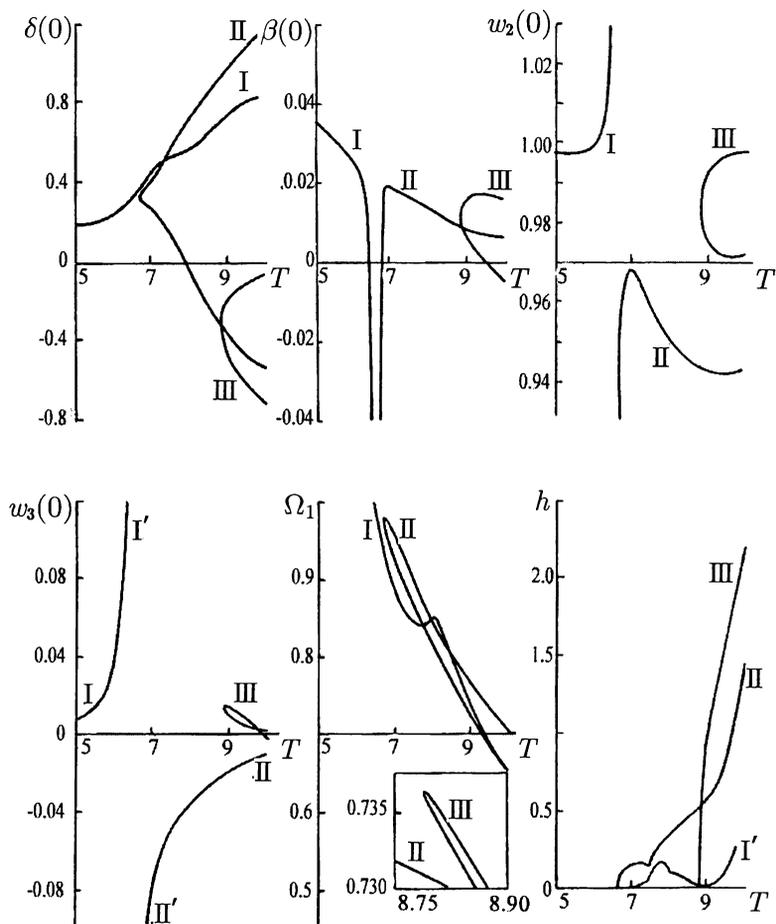


Рис. 7.9. Зависимость начальных условий периодических решений от периода T в окрестности резонансных значений $T \approx 6.7$ и $T \approx 8.6$.

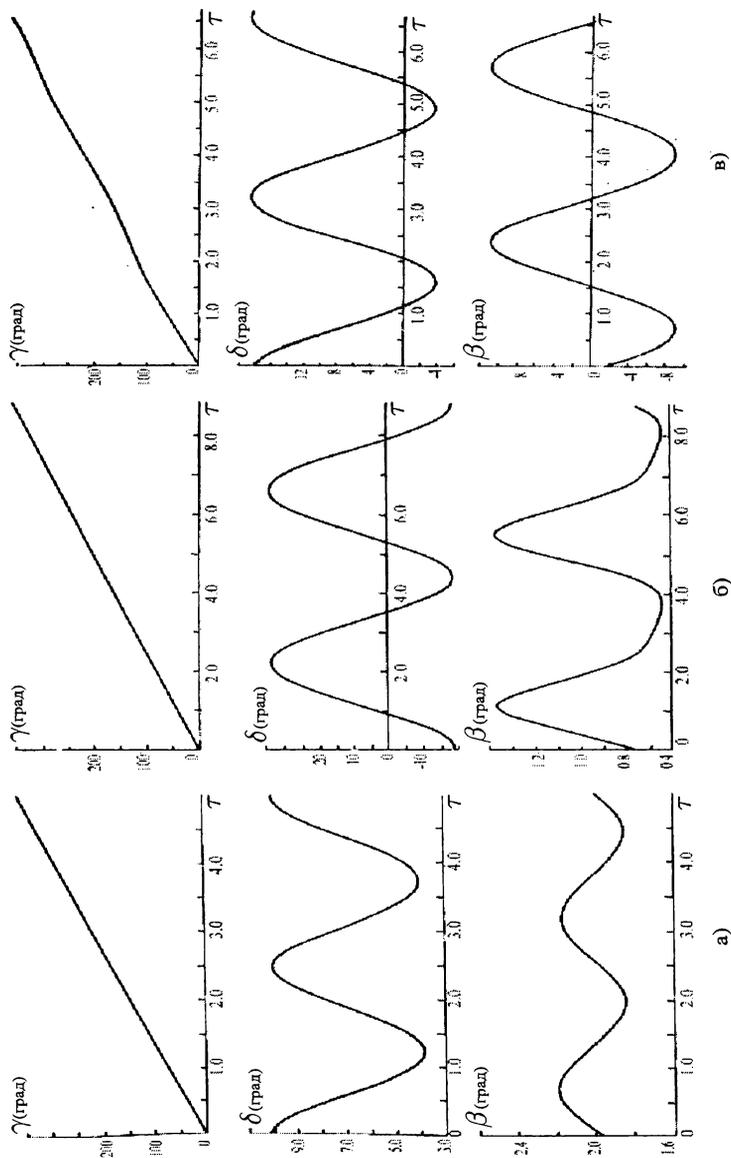


Рис. 7.10. Примеры периодических решений

- а) перезональное решение $T=5$, $\Omega_1 = 1.2914$, $\delta(0) = 0.1774$, $\beta(0) = -0.0345$, $w_2(0) = 0.9976$, $w_3(0) = 0.0081$;
 б) δ -резонансное решение $T=8.7924$, $\Omega_1 = 0.7362$, $\delta(0) = -0.3282$, $\beta(0) = -0.0121$, $w_2(0) = 0.9842$, $w_3(0) = 0.0155$;
 в) β -резонансное решение $T=6.6538$, $\Omega_1 = 0.9855$, $\delta(0) = 0.3174$, $\beta(0) = -0.0365$, $w_2(0) = 0.9382$, $w_3(0) = -0.3089$.

Так как система (7.20) автономна, уравнение (7.25) имеет корень $\rho = 1$. С учетом сделанных замечаний уравнение (7.25) можно представить в виде

$$(\rho - 1) [\rho^4 + a_1(\varepsilon)\rho^3 + a_2(\varepsilon)\rho^2 + a_3(\varepsilon)\rho + 1] = 0. \quad (7.27)$$

Корни многочлена четвертой степени, стоящего в квадратных скобках в левой части (7.27), обозначим $\rho_k(\varepsilon)$ ($k = 1, 2, 3, 4$). Если при $\varepsilon = 0$ среди этих корней нет равных, то они будут аналитическими функциями ε в окрестности точки $\varepsilon = 0$.

Далее будем считать, что необходимые условия устойчивости порождающего решения выполнены. В терминах частот ν_1 и ν_2 условие на корни уравнения (7.27) выражается неравенствами

$$\nu_1 T \neq 2\pi \pmod{4\pi}, \quad \nu_2 T \neq 2\pi \pmod{4\pi}, \quad (\nu_1 - \nu_2)T \neq 0 \pmod{4\pi}. \quad (7.28)$$

При нарушении одного из первых двух неравенств (7.28) уравнение (7.27) имеет кратный корень $\rho = -1$, при нарушении последнего неравенства оно имеет кратный корень общего вида. Условие (3.27) в аналогичной форме записывается в виде $\nu_1 T \neq 0 \pmod{4\pi}$, $\nu_2 T \neq 0 \pmod{4\pi}$. Это условие в данном случае опускается, поскольку при его нарушении решение (7.22) не рассматривается.

В силу (7.26) множества $\{\rho_k(-\varepsilon)\}$ и $\{\rho_k^{-1}(-\varepsilon)\}$ совпадают. Предположим, что условие (7.28) выполнено. Тогда $\rho_k(-\varepsilon)\bar{\rho}_k(\varepsilon) = 1$. Если m — натуральное число и $|\rho_k(\varepsilon)| = 1 + c_{km}\varepsilon^m + O(\varepsilon^{m+1})$, то $c_{km}[1 + (-1)^m] = 0$. Отсюда следует, что неравенство $c_{km} \neq 0$ может выполняться только при нечетном m . Расчет характеристических показателей системы (7.24) методом Пуанкаре показывает, что возможное значение $m \geq 3$.

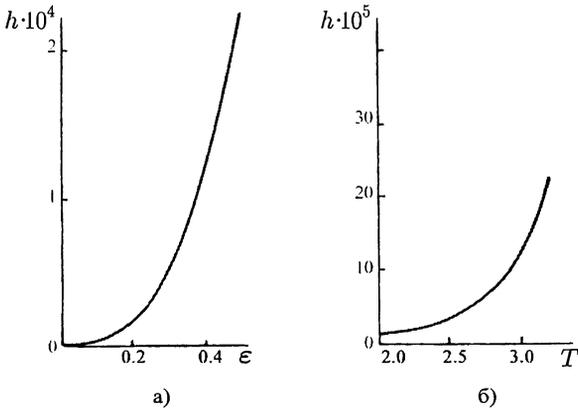


Рис. 7.11.

- а) зависимость функции $h(T, \varepsilon)$ от ε при $T = 5$;
 б) зависимость функции $h(T, \varepsilon)$ от T при $\varepsilon = 0.5$.

Из теоремы Виета и вида уравнения (7.27) следует, что

$$\rho_1(\varepsilon)\rho_2(\varepsilon)\rho_3(\varepsilon)\rho_4(\varepsilon) = 1.$$

Поэтому решение (7.22) может быть либо неустойчивым, либо орбитально устойчивым в первом приближении. При выполнении условия (7.28) $m \geq 3$

и неустойчивость, даже если она имеет место, достаточно слабая. В численных расчетах [14] свойства устойчивости решений краевой задачи (7.20), (7.21) характеризовались функцией $h(T, \varepsilon) = \max(|\rho| - 1)$, где максимум берется по всем корням множителя четвертой степени в левой части формулы (7.27). Из вышеизложенного ясно, что $h(T, \varepsilon) \geq 0$, $h(T, \varepsilon) = O(\varepsilon^3)$. Примеры расчетов этой функции в случае $\lambda = \xi = \eta = 0.1$ приведены на рис. 7.9, 7.11 и 7.12. На рис. 7.11а изображен график функции $h(5, \varepsilon)$. Вы-

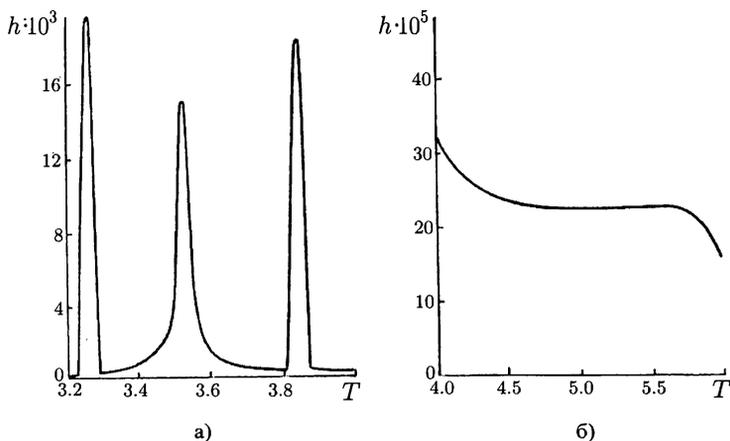


Рис. 7.12. Зависимость функции $h(T, \varepsilon)$ от T при $\varepsilon = 0.5$.

числение первых, вторых, третьих и четвертых разностей этой функции по ε с постоянным шагом 0.01 показало, что $\varepsilon^{-3}h(5, \varepsilon) \rightarrow 0.002$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ [14]. На рис. 7.11б приведен график зависимости от T функции $h(T, 0.5)$. Как видим, в этих примерах экспоненциальная неустойчивость решений краевой задачи (7.20), (7.21) весьма слабая. Это связано с выполнением условия (7.28). В окрестности значений периода, при которых это условие нарушается, а также вблизи резонансных значений T ситуация несколько ухудшается. Она иллюстрируется рисунками 7.12а, б. На этих рисунках максимумы функции $h(5, \varepsilon)$ достигаются при $T = 3.26 \approx 2\pi/\nu_1$ (δ -резонанс), $T = 3.53 \approx 2\pi/(\nu_1 + \nu_2)$ и $T = 3.84 \approx 2\pi/\nu_2$ (β -резонанс). Слабая неустойчивость решения (7.22) подтверждается непосредственным численным интегрированием решений уравнений (7.2) из его окрестности [14]. Поскольку в этих уравнениях $\Omega_1 = \text{const}$, затягивания в резонанс таких решений не происходит и интегрирование удается выполнить на продолжительном отрезке времени. При численном исследовании решений, лежащих в окрестности интегральной поверхности (7.6), затягивание в δ - или β -резонанс происходит быстрее, чем удаление от этой поверхности.

Глава 8

Влияние сопротивления атмосферы на одноосную гравитационную ориентацию спутника

8.1. Уравнения движения спутника под действием гравитационного и восстанавливающего аэродинамического моментов

Рассмотрим спутник, центр масс которого движется по кеплеровой эллиптической орбите. Движение спутника относительно центра масс в связанной с ним системе координат $Ox_1x_2x_3$, образованной главными центральными осями инерции спутника (см. стр. 9–10), описывается уравнениями

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= M_1, \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3 &= M_2, \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= M_3; \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma), \\ \frac{d\delta}{dt} &= \frac{1}{\cos \beta} (\omega_2 \cos \gamma - \omega_3 \sin \gamma) - \frac{d\nu}{dt}, \\ \frac{d\beta}{dt} &= \omega_2 \sin \gamma + \omega_3 \cos \gamma, \\ \frac{d\nu}{dt} &= \omega_0 \frac{(1 + e \cos \nu)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Здесь $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — абсолютная угловая скорость спутника (компоненты векторов указываются в системе координат $Ox_1x_2x_3$); I_1, I_2, I_3 — моменты инерции спутника относительно осей Ox_1, Ox_2, Ox_3 ; (M_1, M_2, M_3) — главный момент внешних сил, приложенных к спутнику; ν — истинная аномалия центра масс спутника [13]; e — эксцентриситет орбиты; ω_0 — среднее движение спутника (орбитальная частота).

Будем учитывать только гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты, действующие на спутник. Компоненты гравитационно-

го момента (ср. (1.4)) запишем с учетом эллиптичности орбиты

$$\begin{aligned} M_{g1} &= 3\omega_0^2(I_3 - I_2) \left(\frac{1 + e \cos \nu}{1 - e^2} \right)^3 a_{32} a_{33}, \\ M_{g2} &= 3\omega_0^2(I_1 - I_3) \left(\frac{1 + e \cos \nu}{1 - e^2} \right)^3 a_{31} a_{33}, \\ M_{g3} &= 3\omega_0^2(I_2 - I_1) \left(\frac{1 + e \cos \nu}{1 - e^2} \right)^3 a_{31} a_{32}. \end{aligned}$$

При вычислении восстанавливающего аэродинамического момента прием предположения главы 5. Дополнительно будем считать, что внешняя оболочка спутника представляет собой сферу и что действие атмосферы на спутник сводится к силе сопротивления, приложенной в центре сферы. Тогда для компонент восстанавливающего аэродинамического момента получим выражения

$$M_{a1} = qS(\widehat{v}_2 r_3 - \widehat{v}_3 r_2), \quad M_{a2} = qS(\widehat{v}_3 r_1 - \widehat{v}_1 r_3), \quad M_{a3} = qS(\widehat{v}_1 r_2 - \widehat{v}_2 r_1).$$

Здесь $S = \pi R^2$; R — радиус сферы, являющейся внешней оболочкой спутника; (r_1, r_2, r_3) — координаты геометрического центра сферы (центра давления); $q = \rho \mathbf{v}^2$; ρ — плотность атмосферы в точке O ; \mathbf{v} — скорость этой точки; $(\widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \widehat{v}_3)$ — орт вектора \mathbf{v} . Величины \widehat{v}_1 , \widehat{v}_2 , \widehat{v}_3 и $|\mathbf{v}|$ имеют вид

$$\widehat{v}_i = \frac{a_{1i}(1 + e \cos \nu) + a_{3i}e \sin \nu}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu}} \quad (i = 1, 2, 3), \quad |\mathbf{v}| = |\mathbf{v}_\pi| \frac{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos \nu}}{1 + e},$$

где \mathbf{v}_π — скорость центра масс спутника в перигее.

Будем считать, что зависимость плотности набегающего на спутник воздушного потока от высоты h над поверхностью Земли имеет вид

$$\rho = \rho_\pi \exp\left(-\frac{h - h_\pi}{H}\right).$$

Здесь ρ_π — плотность атмосферы в перигее орбиты спутника, h_π — высота перигея, H — высота однородной атмосферы. Выражая в этой формуле h как функцию ν , получим

$$\rho = \rho_\pi \exp\left[\frac{\eta(1 - \cos \nu)}{1 + e \cos \nu}\right],$$

где η — постоянная величина.

Рассмотрим уравнение (8.1) при

$$M_i = M_{g_i} + M_{a_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Приняв в качестве независимой переменной истинную аномалию ν и используя безразмерные величины

$$\begin{aligned} \Omega_i &= \omega_i \frac{dt}{d\nu}, \quad b_i = \frac{r_i}{r} \quad (i = 1, 2, 3), \quad r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}, \\ \lambda &= \frac{I_1}{I_3}, \quad \mu = \frac{I_2 - I_3}{I_1}, \quad \mu_a = \frac{\rho_\pi \mathbf{v}_\pi^2 S r}{I_1 \omega_0^2}, \end{aligned} \quad (8.3)$$

запишем уравнения (8.1), (8.2) в виде

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_1}{d\nu} &= \mu \left(\Omega_2 \Omega_3 - \frac{3a_{32}a_{33}}{1+e \cos \nu} \right) + \frac{2e \sin \nu}{1+e \cos \nu} \Omega_1 + \mu_a \varphi(\nu) (\widehat{v}_2 b_3 - \widehat{v}_3 b_2), \\ \frac{d\Omega_2}{d\nu} &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu} \left(\Omega_1 \Omega_3 - \frac{3a_{31}a_{33}}{1+e \cos \nu} \right) + \frac{2e \sin \nu}{1+e \cos \nu} \Omega_2 + \\ &+ \frac{\lambda\mu_a \varphi(\nu)}{1+\lambda\mu} (\widehat{v}_3 b_1 - \widehat{v}_1 b_3), \\ \frac{d\Omega_3}{d\nu} &= -(1-\lambda+\lambda\mu) \left(\Omega_1 \Omega_2 - \frac{3a_{31}a_{32}}{1+e \cos \nu} \right) + \frac{2e \sin \nu}{1+e \cos \nu} \Omega_3 + \\ &+ \lambda\mu_a \varphi(\nu) (\widehat{v}_1 b_2 - \widehat{v}_2 b_1),\end{aligned}\tag{8.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\gamma}{d\nu} &= \Omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma), \\ \frac{d\delta}{d\nu} &= \frac{1}{\cos \beta} (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma) - 1, \quad \frac{d\beta}{d\nu} = \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma, \\ \varphi(\nu) &= \frac{(1+e^2+2e \cos \nu)(1+e)(1-e)^3}{(1+e \cos \nu)^4} \exp \left[\frac{\eta (1-\cos \nu)}{1+e \cos \nu} \right].\end{aligned}$$

Будем считать, что орбита имеет параметры $h_\pi \approx 350$ км, $e \approx 0.001$. В этом случае, практически не ухудшая точности описания вращательного движения спутника уравнениями (8.4), можно положить в (8.4) $e=0$. Функцию $\varphi(\nu)$ следует взять в виде

$$\varphi(\nu) = \exp \left[\eta (1 - \cos \nu) \right],\tag{8.5}$$

где $\eta = 0.5 \ln(\rho_\alpha/\rho_\pi)$, ρ_α — плотность атмосферы в апогее. Учет изменения плотности атмосферы при исследовании движения спутника на таких орбитах необходим, поскольку на высоте ~ 350 км над поверхностью Земли плотность атмосферы изменяется примерно в два раза через каждые 50 км. Сделанные упрощения позволяют представить уравнения вращательного движения спутника следующим образом

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega_1}{d\nu} &= \mu (\Omega_2 \Omega_3 - 3a_{32}a_{33}) + \mu_a \varphi(\nu) (a_{12}b_3 - a_{13}b_2), \\ \frac{d\Omega_2}{d\nu} &= \frac{1-\lambda}{1+\lambda\mu} (\Omega_1 \Omega_3 - 3a_{31}a_{33}) + \frac{\lambda\mu_a \varphi(\nu)}{1+\lambda\mu} (a_{13}b_1 - a_{11}b_3), \\ \frac{d\Omega_3}{d\nu} &= -(1-\lambda+\lambda\mu) (\Omega_1 \Omega_2 - 3a_{31}a_{32}) + \lambda\mu_a \varphi(\nu) (a_{11}b_2 - a_{12}b_1), \\ \frac{d\gamma}{d\nu} &= \Omega_1 - \operatorname{tg} \beta (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma), \quad \frac{d\beta}{d\nu} = \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma, \\ \frac{d\delta}{d\nu} &= \frac{1}{\cos \beta} (\Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma) - 1, \quad \varphi(\nu) = \exp \left[\eta (1 - \cos \nu) \right].\end{aligned}\tag{8.6}$$

Значения параметров системы (8.6), используемые при ее численном анализе, были взяты следующие:

$$\lambda = \mu = 0.1, \quad \mu_\alpha = 0.2, \quad \eta = -0.1, \quad b_2 = b_3 = 0.7. \quad (8.7)$$

В рамках принятой модели такие параметры приблизительно соответствуют параметрам орбитальной станции «Салют 6—Союз» [23].

8.2. Интегральная поверхность медленных движений

Режимом *одноосной гравитационной ориентации* спутника будем называть такое его движение, для которого углы δ и β не превосходят по абсолютной величине некоторого значения Δ (при $\delta = \beta = 0$ ось Ox_1 направлена точно в центр Земли). Например, можно взять $\Delta = 10^\circ$ (подробнее см. стр. 22). В зависимости от значений параметров спутника возможны разные подходы к реализации режима одноосной гравитационной ориентации и его исследованию (см. главы 3, 4). Нижеследующий анализ основан на малости величин μ , μ_α .

Введем малый параметр $\varepsilon > 0$, положив $\mu = \varepsilon^2$, $\mu_\alpha = m\varepsilon^2$, где $m > 0$ — фиксированное число. Построим интегральную поверхность системы (8.6), на которой δ , β , $d\delta/d\nu$, $d\beta/d\nu$, $d\gamma/d\nu \sim \varepsilon$, а угол γ может принимать любые значения. При $\varepsilon \ll 1$ движения спутника, принадлежащие такой интегральной поверхности, могут служить номинальными невозмущенными движениями для режима одноосной гравитационной ориентации. Эти движения имеют скорость $\sim \varepsilon$, поэтому будем называть рассматриваемую интегральную поверхность интегральной поверхностью медленных движений. При $\mu_\alpha = 0$ интегральная поверхность медленных движений системы (8.6) исследована в главе 2.

Для исследования медленных движений вместо переменных Ω_2 , Ω_3 введем переменные (см. (2.1))

$$w_2 = \Omega_2 \cos \gamma - \Omega_3 \sin \gamma, \quad w_3 = \Omega_2 \sin \gamma + \Omega_3 \cos \gamma.$$

Тогда уравнения (8.6) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{d\nu} &= \Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta, \\ \frac{d\Omega_1}{d\nu} &= \varepsilon^2 Q_1^*, \\ \frac{d\delta}{d\nu} &= \frac{w_2}{\cos \beta} - 1, \\ \frac{d\beta}{d\nu} &= w_3, \\ \frac{dw_2}{d\nu} &= -(\lambda \Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta) w_3 - 3(1 - \lambda) \sin \delta \cos \delta \cos \beta + \varepsilon^2 Q_\delta^*, \\ \frac{dw_3}{d\nu} &= (\lambda \Omega_1 - w_2 \operatorname{tg} \beta) w_2 - 3(1 - \lambda) \cos^2 \delta \sin \beta \cos \beta + \varepsilon^2 Q_\beta^*. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} Q_{\delta}^* &= Q_2^* \cos \gamma - Q_3^* \sin \gamma, & Q_{\beta}^* &= Q_2^* \sin \gamma - Q_3^* \cos \gamma, \\ Q_1^* &= \Omega_2 \Omega_3 - 3a_{32} a_{33} + m\varphi(\nu)(a_{12} b_3 - a_{13} b_2), \\ Q_2^* &= -\frac{\lambda(1-\lambda)}{1+\lambda\varepsilon^2} (\Omega_1 \Omega_3 - 3a_{31} a_{33}) + \frac{\lambda m}{1+\lambda\varepsilon^2} \varphi(\nu)(a_{13} b_1 - a_{11} b_3), \\ Q_3^* &= -\lambda(\Omega_1 \Omega_2 - 3a_{31} a_{32}) + m\varphi(\nu)(a_{11} b_2 - a_{12} b_1), \end{aligned}$$

причем переменные Ω_2, Ω_3 должны быть выражены через w_2, w_3 . Правые части уравнений (8.8) являются 2π -периодическими функциями ν и γ . При $\varepsilon = 0$ эти уравнения имеют семейство стационарных решений

$$\gamma = \text{const}, \quad \Omega_1 = 0, \quad \delta = \beta = 0, \quad w_2 = 1, \quad w_3 = 0. \quad (8.9)$$

Интегральную поверхность медленных движений будем искать в виде [5]

$$\begin{aligned} \gamma &= \psi + \varepsilon u_1(\nu, \psi, \Omega) + \varepsilon^2 u_2(\nu, \psi, \Omega) + \dots, \\ \Omega_1 &= \varepsilon \Omega + \varepsilon^2 v_2(\nu, \psi, \Omega) + \varepsilon^3 v_3(\nu, \psi, \Omega) + \dots, \\ \delta &= \varepsilon \delta_1(\nu, \psi, \Omega) + \varepsilon^2 \delta_2(\nu, \psi, \Omega) + \dots, \\ \beta &= \varepsilon \beta_1(\nu, \psi, \Omega) + \varepsilon^2 \beta_2(\nu, \psi, \Omega) + \dots, \\ w_2 &= 1 + \varepsilon w_{21}(\nu, \psi, \Omega) + \varepsilon^2 w_{22}(\nu, \psi, \Omega) + \dots, \\ w_3 &= \varepsilon w_{31}(\nu, \psi, \Omega) + \varepsilon^2 w_{32}(\nu, \psi, \Omega) + \dots, \end{aligned} \quad (8.10)$$

где переменные ψ, Ω определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= \varepsilon P_1(\psi, \Omega) + \varepsilon^2 P_2(\psi, \Omega) + \dots, \\ \dot{\Omega} &= \varepsilon Q_1(\psi, \Omega) + \varepsilon^2 Q_2(\psi, \Omega) + \dots, \end{aligned} \quad (8.11)$$

а функции $u_k, v_{k+1}, \delta_k, \beta_k, w_{2k}, w_{3k}, P_k, Q_k$ ($k = 1, 2, \dots$) 2π -периодически зависят от ν и ψ . Выписанные ряды будем рассматривать как формальные, то есть не будем заботиться об их сходимости. При $\varepsilon = 0$ решения системы (8.8) вида (8.10), (8.11) переходят в семейство стационарных решений (8.9).

Подставив ряды (8.10), (8.11) в систему (8.8) и приравняв выражения при одинаковых степенях ε в обеих ее частях, получим цепочку уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_1}{\partial \nu} &= w_{21}, & \frac{\partial \beta_1}{\partial \nu} &= w_{31}, \\ \frac{\partial w_{21}}{\partial \nu} &= -3(1-\lambda)\delta_1, & \frac{\partial w_{31}}{\partial \nu} &= -(4-3\lambda)\beta_1 + \lambda\Omega, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} + P_1 &= \Omega - \beta_1, \\ \frac{\partial v_2}{\partial \nu} + Q_1 &= -\sin \psi \cos \psi + m\varphi(\nu)(b_3 \sin \psi - b_2 \cos \psi); \end{aligned} \quad (8.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta_k}{\partial \nu} &= w_{2k} + g_{1k}, & \frac{\partial \beta_k}{\partial \nu} &= w_{3k} + g_{2k}, \\ \frac{\partial w_{2k}}{\partial \nu} &= -3(1-\lambda)\delta_k + g_{3k}, & \frac{\partial w_{3k}}{\partial \nu} &= -(4-3\lambda)\beta_k + \lambda v_k + g_{4k}, \\ \frac{\partial u_k}{\partial \nu} + P_k &= v_k - \beta_k + g_{5k}, & \frac{\partial v_{k+1}}{\partial \nu} + Q_k &= g_{6k} \quad (k=2,3,\dots). \end{aligned} \quad (8.13)$$

Здесь g_{jk} ($j=1,2,\dots,6$) — некоторые функции от ν , ψ , Ω , u_n , $\partial u_n/\partial \psi$, $\partial u_n/\partial \Omega$, \dots , w_{3n} , $\partial w_{3n}/\partial \psi$, $\partial w_{3n}/\partial \Omega$, P_n , Q_n при $n=1,2,\dots,k-1$, 2π -периодические по ν и ψ . Уравнения (8.12), (8.13) и условия периодичности не определяют коэффициенты рядов (8.10), (8.11) единственным образом. Для того чтобы достичь единственности, потребуем еще выполнения равенств

$$\int_0^{2\pi} u_k(\nu, \psi, \Omega) d\nu = 0, \quad \int_0^{2\pi} v_{k+1}(\nu, \psi, \Omega) d\nu = 0 \quad (k=1,2,\dots). \quad (8.14)$$

Цепочку уравнений (8.12), (8.13) будем решать в случае, когда

$$3(1-\lambda) \neq n^2, \quad 4-3\lambda \neq n^2 \quad (n=0,1,2,\dots). \quad (8.15)$$

Рассмотрим сначала систему (8.12). Из первых четырех уравнений этой системы и условия 2π -периодичности функций δ_1 , β_1 , w_{21} , w_{31} по переменной ν получаем $\delta_1 = w_{21} = w_{31} = 0$, $\beta_1 = \lambda\Omega(4-3\lambda)$. Подставим найденное β_1 в пятое уравнение. Тогда в силу первого соотношения (8.14) при $k=1$ и условия $u_1(\nu+2\pi) = u_1(\nu)$ будем иметь $u_1 = 0$, $P_1 = 4\Omega(1-\lambda)/(4-3\lambda)$. Перейдем к последнему уравнению. Условия $v_2(\nu+2\pi) = v_2(\nu)$ и второе соотношение (8.14) при $k=1$ позволяют установить, что

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\sin \psi \cos \psi + m\langle \varphi \rangle (b_3 \sin \psi - b_2 \cos \psi), \\ v_2 &= m\{\varphi\} (b_3 \sin \psi - b_2 \cos \psi). \end{aligned}$$

Здесь операторы $\langle \cdot \rangle$ и $\{\cdot\}$ определены на периодических функциях вида

$$f(\nu) = f_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (f_n \cos n\psi + f'_n \sin n\psi)$$

с помощью формул

$$\langle f \rangle = f_0, \quad \{f\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n \sin n\psi - f'_n \cos n\psi}{n}.$$

Предположим, что найдены 2π -периодические по ν и ψ решения уравнений (8.13) при $k=2,\dots,N-1$. Рассмотрим уравнения (8.13) при $k=N$. После подстановки в них решений предыдущих уравнений функции g_{jN} ($j=1,\dots,6$) станут известными функциями ν , ψ и Ω , 2π -периодическими по ν и ψ . Решение полученной системы начнем с первых четырех уравнений. При выполнении условия (8.15) эти уравнения имеют единственное 2π -периодическое по ν решение δ_N , β_N , w_{2N} , w_{3N} , которое, очевидно, будет 2π -периодическим и по ψ . Подставив найденное β_N в пятое уравнение рассмат-

риваемой системы и учитывая первое соотношение (8.14) при $k = N$ и условие $u_N(\nu + 2\pi) = u_N(\nu)$, получим $P_N = \langle v_N - \beta_N + g_{5N} \rangle$, $u_N = \{v_N - \beta_N + g_{5N}\}$. Аналогично из последнего уравнения найдем $Q_N = \langle g_{6N} \rangle$, $v_{N+1} = \{g_{6N}\}$. Ясно, что функции u_N , v_{N+1} , P_N , Q_N определяются единственным образом и 2π -периодически зависят от ν и ψ . Описанный процесс позволяет последовательно найти все коэффициенты рядов (8.10), (8.11).

Рассмотрим уравнения (8.11). Отбросив в них члены порядка $O(\varepsilon^2)$ и сделав замену переменных $\psi \rightarrow \gamma$, $\varepsilon\Omega \rightarrow \Omega_1$, получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{d\nu} &= \frac{4(1-\lambda)}{4-3\lambda} \Omega_1, \\ \frac{d\Omega_1}{d\nu} &= -\mu \sin \gamma \cos \gamma + \mu_{12} \varphi_0(\eta) (b_3 \sin \gamma - b_2 \cos \gamma). \end{aligned} \quad (8.16)$$

Здесь

$$\varphi_0(\eta) = \langle \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[\eta(1 - \cos \gamma)] d\nu = \left(1 + \frac{\eta^2}{4} + \frac{\eta^4}{64} + \dots\right) \exp \eta.$$

Система (8.16) с точностью $O(\varepsilon)$ при $0 \leq \nu \lesssim 1/\varepsilon$ описывает движение спутника вокруг оси Ox_1 на интегральной поверхности медленных движений. Эта система допускает первый интеграл

$$\frac{4(1-\lambda)}{4-3\lambda} \Omega_1^2 + \mu \sin^2 \gamma + 2\mu_a \varphi_0(\eta) (b_3 \cos \psi + b_2 \sin \psi) = \text{const},$$

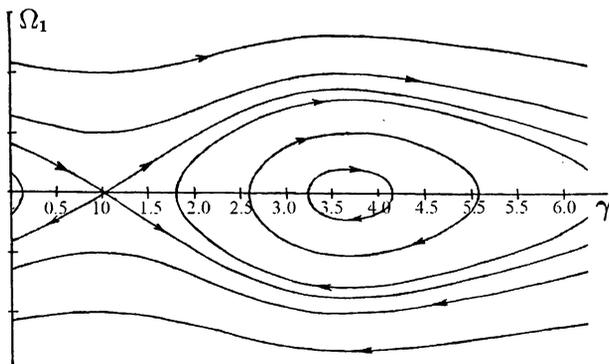


Рис. 8.1.

с помощью которого был построен ее фазовый портрет (рис. 8.1). Система (8.16) имеет стационарные решения

$$\gamma = 3.67949, \quad \Omega_1 = 0; \quad (8.17)$$

$$\gamma = 1.03298, \quad \Omega_1 = 0. \quad (8.18)$$

Первое из них устойчиво, второе неустойчиво. Этим стационарным решениям соответствуют 2π -периодические решения системы (8.8).

Для проверки существования интегральной поверхности медленных движений проводилось численное интегрирование уравнений (8.8). На отрезке $0 \leq \nu \leq 200\pi$ вычислялись решения этих уравнений с начальными условиями

$$\gamma(0) = \gamma_0, \quad \Omega_1 = \Omega_{10}, \quad \delta(0) = \beta(0) = w_3(0) = 0, \quad w_2(0) = 1. \quad (8.19)$$

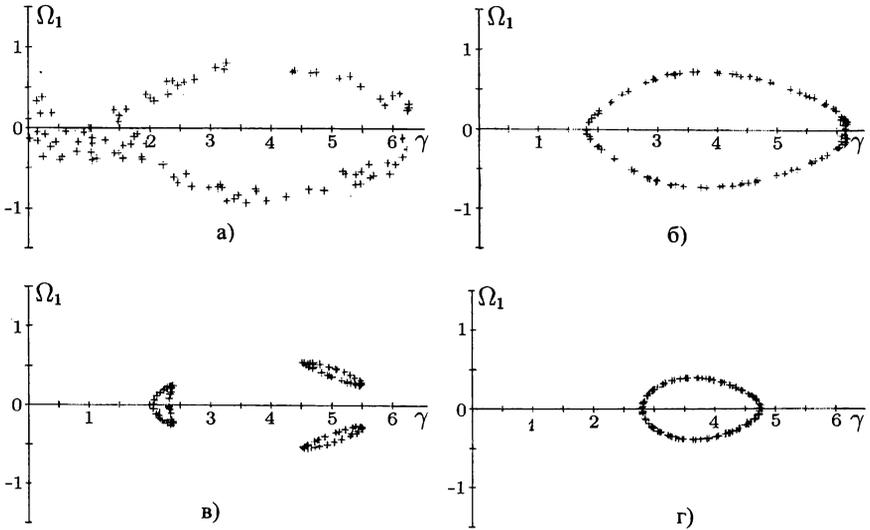


Рис. 8.2. Стробоскопические картины решений системы (8.8) с начальными условиями (8.19)

- а) $\gamma_0 = 1.029$, $\Omega_{10} = 0$, $\theta_m = 5.534^\circ$; б) $\gamma_0 = 1.8$, $\Omega_{10} = 0$, $\theta_m = 1.621^\circ$;
 в) $\gamma_0 = 2.05$, $\Omega_{10} = 0$, $\theta_m = 2.190^\circ$; д) $\gamma_0 = 2.8$, $\Omega_{10} = 0$, $\theta_m = 1.187^\circ$.

Для орбиты с высотой ≈ 400 км интервал безразмерного времени $\Delta\tau = 200\pi$ составляет примерно 6.2 сут. Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 8.2 в виде стробоскопических картин. Здесь для четырех решений, определяемых параметрами γ_0 и Ω_{10} , маркерами в виде крестиков изображены точки $(\gamma(2\pi n) \pmod{2\pi}, \Omega_1(2\pi n))$ ($n = 0, \dots, 100$) в плоскости (γ, Ω_1) . В подписи к рисунку указаны значения максимального угла θ_m между осью Ox_1 и местной вертикалью. Этот угол находился по формуле

$$\theta_m = \max_{0 \leq \tau \leq 200\pi} \arccos \left(\cos \delta(\tau) \cos \beta(\tau) \right).$$

Совокупность стробоскопических картин для различных значений параметров γ_0 , Ω_{10} дает достаточно полное представление о решениях этой системы с начальными условиями (8.19). Большое число стробоскопических картин системы (8.8) приведено в [22]. Здесь, следуя [21], результаты тех же расчетов представим в более концентрированном виде. Все

полученные стробоскопические картины разобьем на два класса. К первому классу отнесем картины, на которых изображающие точки с точностью $|\Delta\gamma| + |\Delta\Omega_1| \leq 0.05$ ложатся на плавные кривые (см. рис. 8.2б–г). Остальные

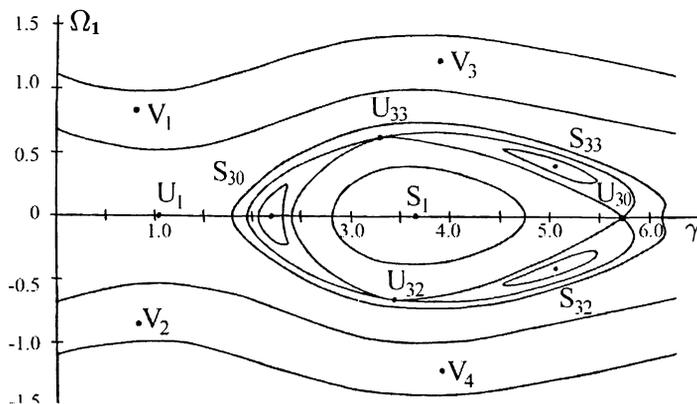


Рис. 8.3.

картины отнесем ко второму классу (см. рис. 8.2а). Кривые на рис. 8.3 построены по изображающим точкам картин первого класса. Здесь точка S_1 задает начальные условия $\gamma(0), \Omega_1(0)$ устойчивого¹⁾ 2π -периодического решения системы (8.8), соответствующего стационарному решению (8.17) системы (8.16). На стробоскопической картине точка S_1 неподвижна (при этом, конечно, начальные условия изображаемого решения следует взять не в виде (8.19) с $(\gamma_0, \Omega_{10}) = S_1$, а равными начальным условиям рассматриваемого периодического решения). Рисунок 8.3 свидетельствует также о существовании шести субгармонических 6π -периодических решений уравнений (8.8). Эти решения изображаются точками S_{3k}, U_{3k} ($k=0,1,2$). Решения S_{3k} устойчивы, реше-



Рис. 8.4.

ния U_{3k} неустойчивы. На стробоскопических кривых точки S_{3k} и U_{3k} переходят друг в друга по схемам, представленным на рис. 8.4. Соответствующие смежным точкам периодические решения циклически получаются одно из

¹⁾Здесь и далее имеется в виду устойчивость в линейном приближении. Нетрудно проверить, что в рассматриваемом случае действующие на спутник моменты допускают силовую функцию. Следовательно, подходящей заменой переменных систему (8.8) можно привести к гамильтоновой форме. Решения такой системы не могут быть асимптотически устойчивы.

другого в результате замены $\tau \rightarrow \tau + 2\pi$. Появление субгармонических периодических решений вызвано тем, что используемые в расчетах значения параметров $\mu = \varepsilon^2$ и $\mu_a = m\varepsilon^2$ (см. (8.3)) не очень малы, то есть нарушено условие малости ε .

Все полученные стробоскопические картины второго класса описывают решения, лежащие в окрестности неустойчивых 2π -периодических колебательных и вращательных¹⁾ решений системы (8.8). На рис. 8.3 неустойчивое колебательное решение изображено точкой U_1 . Оно соответствует неустойчивому стационарному решению (8.17) системы (8.16). Стробоскопическая картина решения с параметрами γ_0 , Ω_{10} из окрестности точки U_1 приведена на рис. 8.2 а. Вращательные периодические решения на рис. 8.3 изображены точками V_1 , V_2 , V_3 , V_4 . Появление этих решений вызвано резонансом 1:1 между вращением спутника вокруг оси Ox_1 и его орбитальным движением. Заметим, что на интегральной поверхности медленных движений должно выполняться соотношение $\Omega_1 \sim \varepsilon \ll 1$. Следовательно, в данном случае опять нарушено условие малости ε . Более детально параметрические решения S_{3k} , U_{3k} и V_k исследованы в [21, 22].

Во всех вариантах расчетов оказалось $\theta_m < 10^\circ$. Полученные результаты подтверждают существование формальной интегральной поверхности уравнений (8.8), на которой $\delta^2 + \beta^2 + w_3^2 + (w_2 - 1) \ll 1$, и показывают возможность использования решений, принадлежащих этой поверхности, в качестве номинальных невозмущенных движений спутника в режиме одноосной гравитационной ориентации. Однако точность описания таких решений системой (8.16) не высока (ср. рис. 8.1 и 8.3). Сравнительно невысокую точность системы (8.16), по-видимому, можно объяснить ее простотой (интегрируемостью). Ниже будет построена более сложная интегрируемая система второго порядка, которая точнее описывает медленные движения спутника.

8.3. Другой способ построения интегральной поверхности медленных движений

Интегральную поверхность медленных движений системы (8.8) будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \varepsilon \bar{\Omega}, \\ \delta &= \varepsilon \bar{\delta}_1(\tau, \gamma, \bar{\Omega}) + \varepsilon^2 \bar{\delta}_2(\tau, \gamma, \bar{\Omega}) + \dots, \\ \beta &= \varepsilon \bar{\beta}_1(\tau, \gamma, \bar{\Omega}) + \varepsilon^2 \bar{\beta}_2(\tau, \gamma, \bar{\Omega}) + \dots, \\ w_2 &= 1 + \varepsilon \bar{w}_{21}(\tau, \gamma, \bar{\Omega}) + \varepsilon^2 \bar{w}_{22}(\tau, \gamma, \bar{\Omega}) + \dots, \\ w_3 &= \varepsilon \bar{w}_{31}(\tau, \gamma, \bar{\Omega}) + \varepsilon^2 \bar{w}_{32}(\tau, \gamma, \bar{\Omega}) + \dots, \end{aligned} \quad (8.20)$$

¹⁾Решения системы (8.8) будем называть 2π -периодическим вращением, если в этом решении $\gamma(\tau+2\pi) = \gamma(\tau) + 2\pi$, а остальные переменные — 2π -периодические функции.

где переменные γ и $\bar{\Omega}$ определяются уравнениями

$$\begin{aligned}\dot{\gamma} &= \varepsilon \bar{P}_1(\tau, \gamma, \bar{\Omega}) + \varepsilon^2 \bar{P}_2(\tau, \gamma, \bar{\Omega}) + \dots, \\ \dot{\bar{\Omega}} &= \varepsilon \bar{Q}_1(\tau, \gamma, \bar{\Omega}) + \varepsilon^2 \bar{Q}_2(\tau, \gamma, \bar{\Omega}) + \dots,\end{aligned}\quad (8.21)$$

а функции $\bar{\delta}_k$, $\bar{\beta}_k$, \bar{w}_{2k} , \bar{w}_{3k} , \bar{P}_k , \bar{Q}_k ($k=1, 2, \dots$) 2π -периодически зависят от τ и γ . Выписанные ряды по-прежнему рассматриваем как формальные. Их отличие от рядов (8.10), (8.11) состоит в том, что если в решениях системы (8.11) уничтожены частоты 1 , $\sqrt{4-3\lambda}$ и $\sqrt{3(1-\lambda)}$, то в решениях системы (8.21) уничтожены только частоты $\sqrt{4-3\lambda}$ и $\sqrt{3(1-\lambda)}$. При $\varepsilon=0$ эти частоты имеют следующий механический смысл (см. п. 1.6, 2.6): $\sqrt{3(1-\lambda)}$ — частота колебаний спутника по углу δ (в плоскости орбиты), $\sqrt{4-3\lambda}$ — частота колебаний спутника по углу β (в плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты), 1 — орбитальная частота. Таким образом, система (8.21) в принципе должна оказаться пригодной для выявления резонансов между движением спутника вокруг оси Ox_1 и его орбитальным движением. В частности, эта система должна «предсказывать» существование всех периодических решений, указанных на рис. 8.3.

Для определения коэффициентов рядов (8.20), (8.21) имеем цепочку уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\delta}_1}{\partial \tau} &= \bar{w}_{21}, & \frac{\partial \bar{\beta}_1}{\partial \tau} &= \bar{w}_{31}, \\ \frac{\partial \bar{w}_{21}}{\partial \tau} &= -3(1-\lambda)\bar{\delta}_1, & \frac{\partial \bar{w}_{31}}{\partial \tau} &= -(4-3\lambda)\bar{\beta}_1 + \lambda\bar{\Omega}, \\ \bar{P}_1 &= \bar{\Omega} - \bar{\beta}_1, & \bar{Q}_1 &= -\sin \gamma \cos \gamma + m\varphi(\tau)(b_3 \sin \gamma - b_2 \cos \gamma); \\ \frac{\partial \bar{\delta}_k}{\partial \tau} &= \bar{w}_{2k} + \bar{g}_{1k}, & \frac{\partial \bar{\beta}_k}{\partial \tau} &= \bar{w}_{3k} + \bar{g}_{2k}, \\ \frac{\partial \bar{w}_{2k}}{\partial \tau} &= -3(1-\lambda)\bar{\delta}_k + \bar{g}_{3k}, & \frac{\partial \bar{w}_{3k}}{\partial \tau} &= -(4-3\lambda)\bar{\beta}_k + \bar{g}_{4k}, \\ \bar{P}_k &= -\bar{\beta}_k + \bar{g}_{5k}, & \bar{Q}_k &= \bar{g}_{6k} \quad (k=2, 3, \dots).\end{aligned}$$

Здесь \bar{g}_{jk} ($j=1, 2, \dots, 6$) — некоторые функции от τ , γ , $\bar{\Omega}$, $\bar{\delta}_n$, $\partial \bar{\delta}_n / \partial \gamma$, $\partial \bar{\delta}_n / \partial \Omega$, \dots , \bar{w}_{3n} , $\partial \bar{w}_{3n} / \partial \gamma$, $\partial \bar{w}_{3n} / \partial \Omega$, \bar{P}_n , \bar{Q}_n при $n=1, 2, \dots, k-1$, 2π -периодические по τ и γ . Можно показать, что при выполнении условий (8.15) рассматриваемая цепочка решений имеет единственное решение, 2π -пери-

одическое по τ и γ . В этом решении

$$\bar{\delta}_1 = \bar{w}_{21} = \bar{w}_{31} = 0, \quad \bar{\beta}_1 = \frac{\lambda \bar{\Omega}}{4 - 3\lambda}, \quad \bar{P}_1 = \frac{4(1 - \lambda)}{4 - 3\lambda} \bar{\Omega},$$

$$\bar{Q}_1 = -\sin \gamma \cos \gamma + m\varphi(\tau)(b_3 \sin \gamma - b_2 \cos \gamma).$$

Рассмотрим уравнения (8.21). Отбросив в них члены порядка $O(\varepsilon^2)$, получим систему

$$\dot{\gamma} = \frac{4(1 - \lambda)}{4 - 3\lambda} \Omega_1, \tag{8.22}$$

$$\dot{\Omega}_1 = -\mu \sin \gamma \cos \gamma + \mu_2 \varphi(\tau)(b_3 \sin \gamma - b_2 \cos \gamma).$$

Формально эта система описывает медленные движения спутника с той же точностью, что и система (8.16)¹⁾. Однако в действительности она позволяет

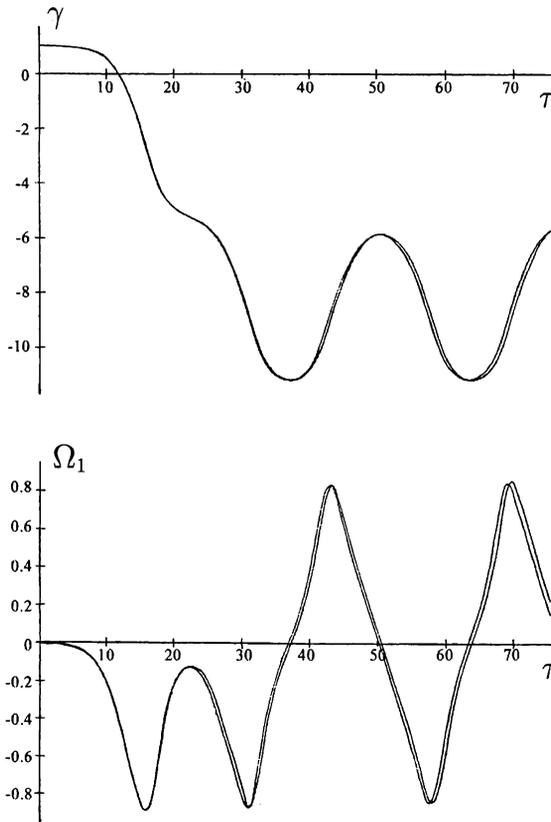


Рис. 8.5.

¹⁾Заметим, что систему (8.16) можно получить, применяя асимптотический метод Крылова–Боголюбова [5] к системе (8.22). Вследствие этого усреднение системы (8.22) по τ приводит к системе (8.16).

учесть некоторые особенности движения, связанные с неавтономностью исходных уравнений. На рис. 8.5 приведены графики функций $\gamma(\tau)$, $\Omega_1(\tau)$ для решения системы (8.8) с начальными условиями (8.19) при $\gamma_0 = 1.02$, $\Omega_{10} = 0$ и для решения системы (8.22) с начальными условиями (8.19) при $\gamma_0 = 1.02$, $\Omega_1(0) = 0$. При выбранном масштабе рисунка эти графики практически совпадают. В то же время сравнение диапазонов изменения переменной γ вдоль кривых на рис. 8.1 и 8.5 показывает, что рассматриваемое решение системы (8.8) в принципе нельзя аппроксимировать решениями системы (8.16).

Примеры стробоскопических картин решений системы (8.8) приведены на рис. 8.6. Здесь для четырех решений этой системы косыми крестиками указаны точки $(\gamma(2\pi n) \bmod 2\pi, \Omega_1(2\pi n))$ ($n = 0, 1, \dots, 100$) в плоскости (γ, Ω_1) .

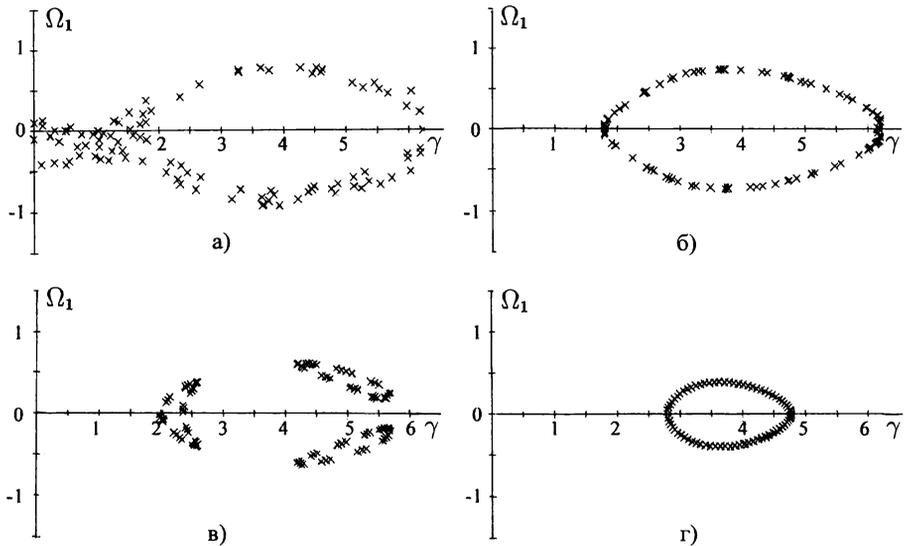


Рис. 8.6. Стробоскопические картины решений системы (8.22)

- а) $\gamma(0) = 1.029$, $\Omega_1(0) = 0$; б) $\gamma(0) = 1.8$, $\Omega_1(0) = 0$;
 в) $\gamma(0) = 2$, $\Omega_1(0) = 0$; г) $\gamma(0) = 2.8$, $\Omega_1(0) = 0$.

Как и в случае системы (8.8), стробоскопические картины системы (8.22) можно разбить на два класса (ср. рис. 8.6). Картины первого класса в концентрированном виде представлены на рис. 8.7, который был построен тем же способом, что и рис. 8.3. Так как система (8.22) не меняется при замене $\tau \rightarrow -\tau$, $\Omega_1 \rightarrow -\Omega_1$, то рис. 8.7 симметричен относительно оси абсцисс. Точки $\overline{S}_1, \overline{U}_1, \overline{S}_{3k}, \overline{U}_{3k}, \overline{V}_j$ ($k = 0, 1, 2$; $j = 1, 2, 3, 4$) на этом рисунке задают периодические решения системы (8.22) такого же типа, что и периодические решения системы (8.8), соответствующие точкам $S_1, U_1, S_{3k}, U_{3k}, V_j$ на рис. 8.3. Сравнение рисунков 8.3 и 8.6 показывает, что система (8.22) весьма точно опи-

сывает медленные движения спутника. Например, она позволяет установить существование периодических решений S_{3k}, U_{3k}, V_j ($k=0, 1, 2; j=1, 2, 3, 4$).

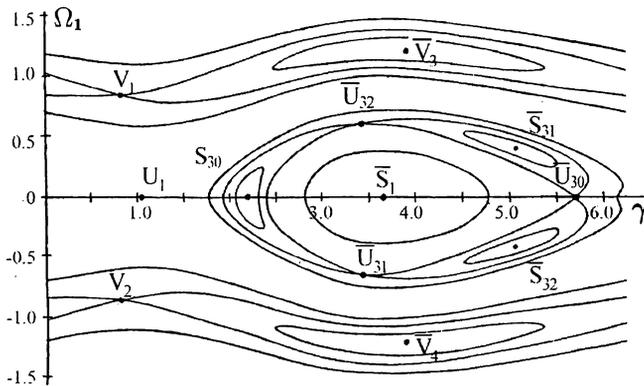


Рис. 8.7.

Свойства устойчивости этих решений также предсказываются достаточно точно. Несоответствие есть только в случае решений V_3, V_4 и \bar{V}_3, \bar{V}_4 : решения V_3, V_4 неустойчивы, тогда как решения \bar{V}_3, \bar{V}_4 устойчивы.

На точность описания медленных движений спутника уравнениями (8.16) или (8.22) положительное влияние оказывает малость параметров λ и η . В частности, при $\lambda = \eta = 0$ система (8.8) имеет двухпараметрическое семейство решений

$$\gamma = \gamma(\tau), \quad \Omega_1 = \Omega_1(\tau), \quad \delta = \beta = w_3 = 0, \quad w_2 = 1,$$

где функции $\gamma(\tau)$ и $\Omega_1(\tau)$ определяются уравнениями

$$\dot{\gamma} = \Omega_1, \quad \dot{\Omega}_1 = -\mu \sin \gamma \cos \gamma + \mu_a (b_3 \sin \gamma - b_2 \cos \gamma).$$

Методами малого параметра можно построить интегральную поверхность системы (8.8), близкую семейству таких решений. Это еще один подход к исследованию режима гравитационной ориентации. Применение этого подхода в случае уравнений (8.8) осложнено наличием резонанса 2:1 между колебаниями спутника по углу β и орбитальным движением (ср. условие (8.15) при $\lambda = 0$). Реализуя такой подход, приходится строить четырехпараметрическую интегральную поверхность системы (8.8). Резонансный член в уравнениях, описывающих движение на этой поверхности, имеет порядок $O(\lambda\mu_a\eta^2)$. Выполнение соотношения $\lambda\eta^2 \ll 1$ (для параметров (8.6) $\lambda\eta^2 = 0.001$) позволяет игнорировать резонанс 2:1 при построении рядов (8.10), (8.11) или (8.20), (8.21) в случае малых λ .

Принятое в данной главе и выражаемое соотношением (8.5) предположение о зависимости плотности набегающего на спутник воздушного потока от

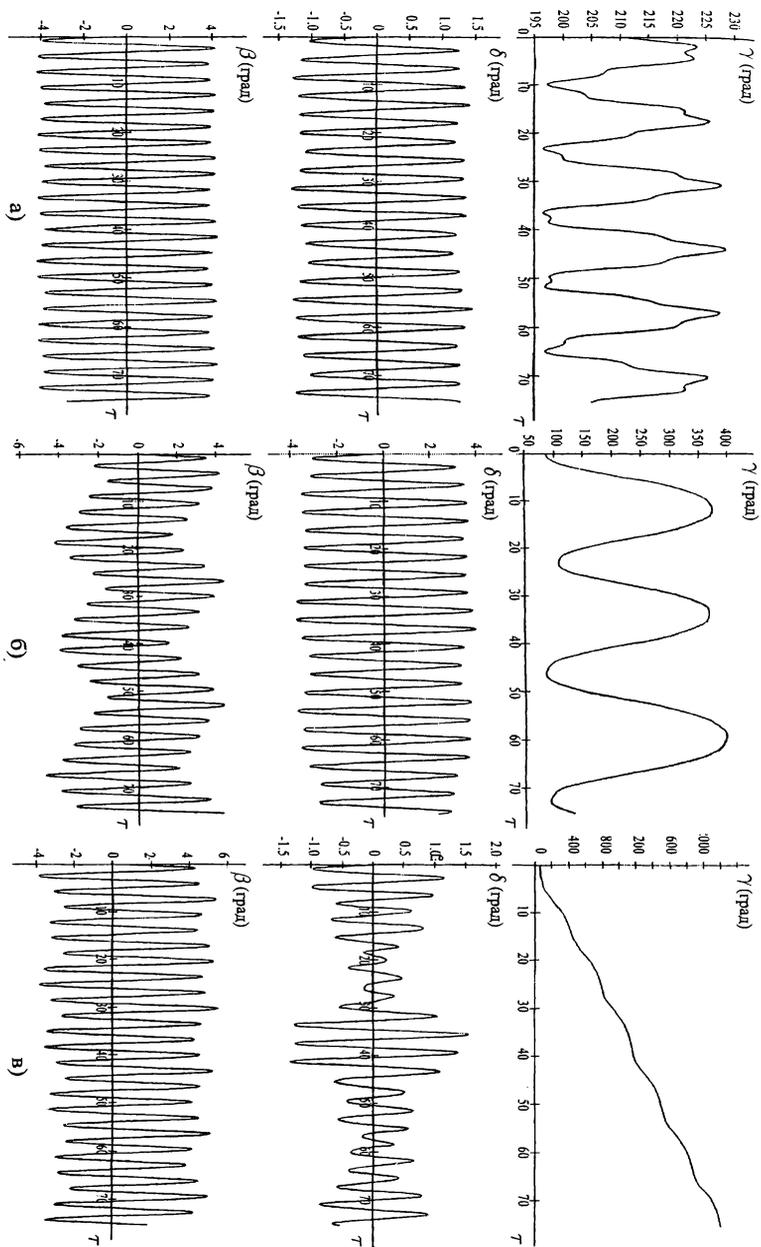


Рис. 8.8.

а) $\gamma_0 = 3.674$, $\theta_m = 4.434$; б) $\gamma_0 = 1.5$, $\theta_m = 5.744$; в) $\gamma_0 = 1.029$, $\theta_m = 5.539$.

времени более реалистично, чем предположение глав 5–7 о том, что эта плотность постоянна. Исследование режима одноосной гравитационной ориентации орбитального комплекса «Салют» в случае, когда плотность набегающего потока задается соотношением (8.5), проведено в работе [39]. В работе [40] исследован случай, когда $\lambda \ll 1$ и плотность набегающего потока постоянна.

8.4. Возмущенное движение

Чтобы привести спутник в режим одноосной гравитационной ориентации, ему необходимо в некоторый момент времени τ_0 сообщить следующие начальные условия

$$\Omega_1(\tau_0) = \delta(\tau_0) = \beta(\tau_0) = w_3(\tau_0) = 0, \quad w_2(\tau_0) = 1, \quad \gamma(\tau_0) \text{ произвольно.}$$

Соответствующие начальные условия для угловых скоростей Ω_2 и Ω_3 имеют вид

$$\Omega_2(\tau_0) = \cos \gamma(\tau_0), \quad \Omega_3 = -\sin \gamma(\tau_0).$$

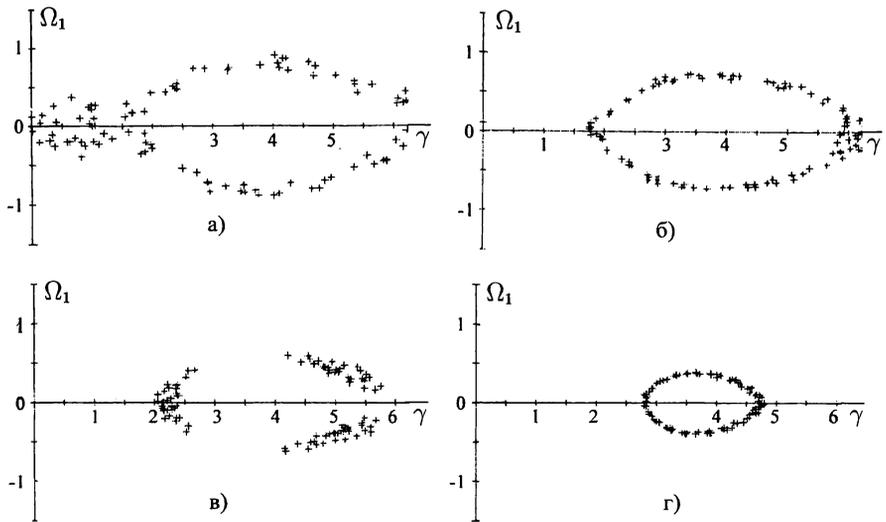


Рис. 8.9. Стробоскопические картины решений системы (8.8)

с начальными условиями (8.23) при $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0$

а) $\gamma_0 = 1.029$, $\theta_m = 5.880^\circ$; б) $\gamma_0 = 0$, $\theta_m = 5.562^\circ$;

в) $\gamma_0 = 2.05$, $\theta_m = 6.959^\circ$; д) $\gamma_0 = 2.8$, $\theta_m = 5.447^\circ$.

Поскольку спутник не имеет специальных демпфирующих устройств, ошибки приведения его в режим гравитационной ориентации вызывают незатухающее возмущенное движение. Из ошибок приведения наиболее существенны ошибки в задании угловых скоростей, поэтому будем учитывать только их,

считая, что по углам δ и β спутник выставлен точно. В рамках такого предположения начальные условия возмущенного движения спутника в режиме гравитационной ориентации имеют вид

$$\begin{aligned} \gamma(\tau_0) &= \gamma_0, & \delta(\tau_0) &= \beta(\tau_0) = 0, & \Omega_1(\tau_0) &= \varepsilon_1, \\ w_2(\tau_0) &= 1 + \varepsilon_2 \cos \gamma_0 - \varepsilon_3 \sin \gamma_0, & w_3(\tau_0) &= \varepsilon_2 \sin \gamma_0 + \varepsilon_3 \cos \gamma_0, \end{aligned} \quad (8.23)$$

где γ_0 — произвольный угол, ε_j ($j = 1, 2, 3$) — ошибки в задании угловых скоростей $\Omega_j(\tau_0)$. Примеры возмущенных движений спутника для $\tau_0 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0.1$ и некоторых значений γ_0 приведены на рис. 8.8. Здесь представлены графики функций $\gamma(\tau)$, $\delta(\tau)$, $\beta(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq 24\pi$) для этих движений и указаны соответствующие максимальные отклонения (θ_{max}) оси Ox_1 от местной вертикали. Рисунки 8.8а–в показывают возмущенное движение спутника в течение 12 оборотов по орбите. Для представления таких движений на более длинном интервале времени были построены стробоскопические картины. На них для решений с начальными условиями (8.23) отмечались точки $(\gamma(2\pi n) \bmod 2\pi, \Omega_1(2\pi n))$ ($n = 0, 1, \dots, 100$) в плоскости (γ, Ω_1) . Примеры стробоскопических картин для $\tau_0 = 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0.1$ и некоторых значений γ_0 приведены на рис. 8.9. Во всех примерах $\theta_{max} < 7^\circ$. Таким образом, режим гравитационной ориентации в рассматриваемой модельной задаче оказался реализуемым.

Литература

- [1] *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М., Наука, 1978.
- [2] *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М., Наука, 1984.
- [3] *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М.: Наука, 1965, 416 с.
- [4] *Белецкий В. В.* Границы либраций трехосного спутника в гравитационном поле. Прикладная математика и механика, 1967, т. 31, № 6, с. 1104-1107.
- [5] *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
- [6] *Ветлов В. И., Новичкова С. М., Сазонов В. В.* Исследование режима гравитационной ориентации вращающегося спутника. Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 1995, N 25, 38 с.
- [7] *Ветлов В. И., Новичкова С. М., Сазонов В. В., Матвеев Н. В., Бабкин Е. В.* Режим гравитационной ориентации Международной космической станции. Космические исследования, 2001, т. 39, N 4, с. 436-448.
- [8] *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., Наука, 1967.
- [9] *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
- [10] *Марсен Дж., Мак-Кракен М.* Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М., Мир, 1980.
- [11] *Охоцимский Д. Е., Энеев Т. М., Таратынова Г. П.* Определение времени существования искусственного спутника Земли и исследование вековых возмущений его орбиты. Успехи физических наук, 1957, т. 63, вып. 1а, с. 33-50.
- [12] *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избранные труды, тт. 1, 2. М., Наука, 1971-1972.
- [13] *Сазонов В. В., Барбашова Т. Ф.* Лекции по механике космического полета. М., Изд-во Московского университета, 2018.
- [14] *Сазонов В. В., Петров А. Л.* О дестабилизирующем влиянии восстанавливающего аэродинамического момента на режим гравитационной ориентации вращающегося спутника. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, № 1, 1985.
- [15] *Сазонов В. В., Петров А. Л.* Эволюция режима гравитационной ориентации вращающегося спутника под действием непотенциального аэродинамического момента. Космические исследования, 1987, т. 25, N 4, с. 508-522.

- [16] *Сазонов В. В., Сидорюк М. Е.* Периодические движения спутника относительно центра масс в режиме одноосной гравитационной ориентации. Известия АН СССР, МТТ, 1985, № 1, с. 3-13.
- [17] *Сарычев В. А.* Вопросы ориентации искусственных спутников. Итоги науки и техники, сер. Исследование космического пространства, тт. 11. М., ВИНТИ, 1978.
- [18] *Сарычев В. А., Беллев М. Ю., Кузьмин С. П., Сазонов В. В., Тан Т. Н.* Определение движения орбитальных станций «Салют-6» и «Салют-7» относительно центра масс в режиме медленной закрутки по данным измерений. Космические исследования, 1968, т. 26, № 3, с. 390-405.
- [19] *Сарычев В. А., Сазонов В. В.* Влияние аэродинамического момента на режим гравитационной ориентации орбитального комплекса «Салют-6-Союз». Космические исследования, 1985, т. 23, № 1, с. 63-83.
- [20] *Сарычев В. А., Сазонов В. В.* Влияние диссипативного магнитного момента на гравитационную ориентацию вращающегося спутника. Космические исследования, 1982, т. 20, № 2, с. 177-183.
- [21] *Сарычев В. А., Сазонов В. В.* Влияние сопротивления атмосферы на одноосную гравитационную ориентацию искусственного спутника. Космические исследования, 1982, т. 20, № 5, с. 659-673.
- [22] *Сарычев В. А., Сазонов В. В.* Влияние сопротивления атмосферы на одноосную гравитационную ориентацию искусственного спутника. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, № 152, 1980.
- [23] *Сарычев В. А., Сазонов В. В.* Гравитационная ориентация больших орбитальных станций. Доклад 80-Е-231 на XXXI конгрессе МАФ, Токио, 21-28 октября, 1980.
- [24] *Сарычев В. А., Сазонов В. В.* Гравитационная ориентация вращающегося спутника. Космические исследования, 1981, т. 19, № 4, с. 499-512.
- [25] *Сарычев В. А., Сазонов В. В.* О дестабилизирующем влиянии восстанавливающего аэродинамического момента на режим гравитационной ориентации вращающегося спутника. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, № 1, 1985.
- [26] *Сарычев В. А., Сазонов В. В.* Об одном методе исследования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, № 105, 1976.
- [27] *Сарычев В. А., Сазонов В. В.* Одноосная гравитационная ориентация искусственных спутников. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, № 49, 1980.
- [28] *Сарычев В. А., Сазонов В. В., Мельник Н. В.* Пространственные периодические колебания спутника относительно центра масс. Препринт Ин-та прикл. матем. АН СССР, № 118, 1978.
- [29] *Сарычев В. А., Сазонов В. В., Мельник Н. В.* Пространственные периодические колебания спутника относительно центра масс. Космические исследования, 1980, т. 18, № 5, с. 659-677.

- [30] Черноушко Ф. Л. Об устойчивости регулярной прецессии спутника. Прикладная математика и механика, 1964, т. 28, № 1, с. 155-157.
- [31] Якубович В. А., Старжинский В. М. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., Наука, 1972.
- [32] Buchanan H. J., Hopkins M. S., Galaboff Z. J. Uncontrolled dynamics of the Skylab vehicle: comparison of simulation, theory and flight data. AIAA Paper, 1980, № 59.
- [33] Frik M. A. Attitude Stability of Satellites Subjected to Gravity Gradient and Aerodynamic Torques. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 10, p. 1780-1785.
- [34] Garber T. B. Influence of Constant Disturbing Torques on the Motion of Gravity-Gradient Stabilized Satellites. AIAA Journal, 1970, vol. 1, No. 4, p. 968-969.
- [35] Hale J. K. Ordinary differential equations. Wiley-Interscience. New York, 1969.
- [36] Hölder E. Mathematische Untersuchungen zur Himmelsmechanik. Math. Zeitschr., 1929, B. 31, S. 197-257.
- [37] Nurre G. S. Effects of Aerodynamic Torque on an Asymmetric, Gravity-Stabilized Satellite. Journal of Spacecraft and Rockets, 1968, vol. 5, No. 9, p. 1046-1050.
- [38] Sarychev V. A., Belyaev M. Yu., Kuz'min S. P., Sazonov V. V., Tyan T. N. Investigation of attitude motion of the Salyut-7 orbital station for long time intervals. Acta astronautica, 1987, vol. 16, p. 165-192.
- [39] Sarychev V. A., Sazonov V. V. Gravity gradient stabilization of large space stations. Acta astronautica, 1981, vol. 8, № 5-6, p. 549-573.
- [40] Sarychev V. A., Sazonov V. V. Gravity gradient stabilization of the Salyut-Soyuz orbital complex. Acta astronautica, 1984, vol. 11, № 7-8, p. 435-437.

Предметный указатель

- Гиростат, 66
- Гравитационная ориентация, 14, 27, 88
- одноосная, 22, 123
 - трехосная, 14
- Интегральная поверхность, 28
- Матрица перехода, 15
- Момент
- аэродинамический
 - — восстанавливающий, 77
 - нелотенциальный, 101
 - гравитационный, 10
 - кинетический
 - — спутника, 12
 - спутника-гиростата, 67
- Мультипликатор, 36
- Орбитальная частота, 11
- Ориентированное движение, 15
- Оргы орбитальной системы координат, 11
- Периодическое вращение, 32, 103
- Предельный цикл, 90
- Прецессия
- гиперболоидальная, 26
 - коническая, 26, 102
 - цилиндрическая, 26
- Резонанс
- β -резонанс, 57, 103
 - δ -резонанс, 57, 103
- Решение
- вращательное периодическое, 32
 - колебательное, 33
- Силовая функция в гравитационном поле, 8
- Система координат
- орбитальная, 11
 - Резаля, 24
 - связанная с телом, 9
- Спутник трехосный, 11
- Среднее движение, 11
- Стробоскопические картины, 99
- Теорема Барбашина-Красовского, 72
- Универсальная гравитационная постоянная, 8
- Уравнения Эйлера
- динамические, 12
 - кинематические, 17

Учебное издание

*Татьяна Федоровна Барбашова
Виктор Васильевич Сазонов*

**ГРАВИТАЦИОННАЯ ОРИЕНТАЦИЯ
ИСКУССТВЕННЫХ СПУТНИКОВ ЗЕМЛИ**

Специальный курс

Книга публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 07.12.2022.
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Гарнитура Minion Pro.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 9,0.
Тираж 500 экз. Заказ № 6333

ТК 695950-991973-071222

ООО Издательство «КУРС»
127273, Москва, ул. Олонецкая, д. 17А, офис 104.
Тел.: (495) 203-57-83.

E-mail: kursizdat@gmail.com <http://www.kursizdat.ru>

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

ДЛЯ ЗАМЕТОК

HAYKA
SCIENCE



ISBN 978-5-907535-44-2



9 785907 535442

